ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕТАЛЕЙ

(Основы теории)

Степан П. РАДЗЕВИЧ

Киев
«Растан»
2001

ББК 34.63
Р 15

УДК 621.9.02

Радзевич С.П.
Формообразование поверхностей деталей. Основы теории. Монография – К.: Растан, 2001. – 592с. ISBN 5-11-003599-7.

В монографии изложены основные положения теории формобразования поверхностей при механической обработке деталей: резанием (лезвийным и абразивным инструментом), поверхностным пластическим деформированием и др. Рассмотрены вопросы геометрии поверхностей деталей и инструментов, кинематики их относительного движения в процессе обработки.

Развиваемый подход в теории формообразования поверхностей деталей изложен с позиции решения задачи синтеза наивыгоднейшего способа обработки поверхности детали на металлорежущем станке, в том числе сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ. Изложение ведется с позиций разработанного автором дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей при механической обработке деталей. Результаты исследований составляют основу математического обеспечения системы автоматизации программирования (САП или системы класса *CAM – Computer-Aided Machining*) обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

Для научных работников и специалистов промышленности, работающих в области резания материалов, конструирования режущих инструментов, занимающихся разработкой программного обеспечения для многокоординатных станков с ЧПУ и созданием систем класса *CAM*.

Табл. 6. Ил. 226. Библиогр.: 371 назв.

$$\text{Р}\frac{2704040000-219}{\text{М211(04)}}111-01$$

© С.П.Радзевич

ISBN 5-11-003599

ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление ... 3
Предисловие ... 9
Введение ... 11
Основные условные обозначения ... 18

Г л а в а 1. **Рабочие поверхности деталей и инструментов** ... 21

1.1. Принятые допущения и основные определения ... 21
1.2. Задание рабочих поверхностей деталей и инструментов. Расчет элементов их локальной геометрии ... 24
1.2.1. Методы задания рабочих поверхностей деталей и инструментов ... 24
1.2.2. Аналитическое описание и элементы локальной геометрии номинальный поверхностей деталей и инструментов ... 27
1.2.2.1. Матричная форма ... 27
1.2.2.2. Векторная форма ... 34
1.2.2.3. Параметрическая форма ... 51
1.2.2.4. Явная форма ... 54
1.2.2.5. Неявная форма ... 57
1.2.2.6. Преобразование видов аналитического описания поверхностей $Д(И)$ ... 59
1.2.2.7. Натуральная форма ... 60
1.2.3. Разложение уравнения поверхности $Д(И)$ в ряды ... 64
1.2.4. Требования к аналитическому представлению геометрической информации о поверхности $Д(И)$ ... 65
1.2.5. Дискретное задание и элементы локальной геометрии сложных поверхностей деталей и инструментов ... 69
1.2.5.1. Сложные поверхности деталей и инструментов, аппроксимированные сплайнами ... 70
1.2.5.2. Сложные поверхности деталей и инструментов, заданные числовыми отметками ... 75
1.2.6. Задание поверхностей деталей и инструментов с учетом допусков на точность их формы и размеров ... 85
1.3. О классификации рабочих поверхностей деталей и инструментов ... 87
1.3.1. Необходимость разработки классификации поверхностей деталей и инструментов ... 87
1.3.2. Круговые диаграммы локальных участков поверхностей деталей и инструментов ... 88
1.3.2.1. Использование круговых диаграмм локальных участков поверхности $Д(И)$ ... 93
1.3.2.2. Омбилические локальные участки поверхности $Д(И)$ ... 93
1.3.2.3. Кручение поверхности $Д(И)$ ... 93
1.3.2.4. Эллиптические локальные участки поверхности $Д(И)$ ... 93

1.3.2.5. Параболические локальные участки поверхности $Д(И)$ 93
1.3.2.6. Гиперболические локальные участки поверхности $Д(И)$....94
1.3.2.7. Минимальные локальные учасеки поверхности $Д(И)$....95
1.3.2.8. Полная (гауссова), средняя и абсолютная кривизна локального участка поверхности $Д(И)$....95
1.3.2.9. Построение круговой диаграммы локального участка поверхности $Д(И)$....97
1.3.3. Типы локальных участков поверхности $Д(И)$ 105
1.3.3.1. Гладкие регулярные локальные участки поверхности $Д(И)$....105
1.3.3.2. Нерегулярные локальные участки поверхности $Д(И)$....113
1.3.3.3. Обобщенная классификация локальных участков поверхности $Д(И)$....114

Г л а в а 2. **Кинематика формообразования поверхностей деталей**....115

2.1. Мгновенная принципиальная кинематическая схема многокоординатного формообразования поверхностей деталей 116
2.2. Формообразующие движения инструмента....120
2.3. Ориентирующие движения инструмента....125
2.4. Движения поверхностей детали и инструмента, приводящие их к перемещению *"самих по себе"*....131
2.5. Кинематические схемы формообразования....133
2.6. Классификация кинематических схем формообразования поверхностей деталей 139
2.7. Кинематические схемы резания....143
2.8. Воспроизведение *"жесткой"* кинематики обработки 148

Г л а в а 3. **Системы координат и линейные преобразования**....150

3.1. Используемые системы координата 150
3.2. Сведения о матрицах, необходимые для решения задач формообразования поверхностей деталей....153
3.2.1. Основные определения....153
3.2.2. Операции с матрицами....155
3.3. Системы координат станков с ЧПУ....162
3.4. Преобразования декартовых систем координат 164
3.4.1. Системы координат с параллельными осями....164
3.4.2. Линейные преобразования....165
3.4.3. Однородные координаты точек....168
3.4.4. Применение однородных координат....169
3.4.5. Правые и левые системы координат. Изменение направленности систем координат 174
3.5. Влияние преобразований координат на основные квадратичные формы поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 175
3.6. Косоугольные системы координат 179
3.6.1. Базисы косоугольных систем координат....179
3.6.2. Построение ортонормированного базиса 182
3.6.3. Преобразование косоугольных координат 183
3.6.3.1. Параллельный перенос систем координат 183
3.6.3.2. Поворот систем координат....184
3.7. Криволинейные системы координат....186
3.7.1. Взаимосвязь между ортогональными декартовыми и цилиндрическими координатами 186
3.7.2. Взаимосвязь между ортогональными декартовыми и сферическими координатами 188
3.7.3. Взаимосвязь между цилиндрическими и сферическими координатами 190
3.8. О линейных преобразованиях 190

Г л а в а 4. **Геометрия касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности** 191

4.1. Образование замкнутого цикла последовательных преобразований координат 192
4.2. Относительная локальная ориентация детали и инструмента 200
4.3. Первое приближение: общая касательная плоскость 206
4.4. Второе приближение: соприкасающиеся квадрики, поверхность приведенной кривизны 206
4.4.1. Соприкасающиеся квадрики 206
4.4.2. Поверхность приведенной кривизны 207
4.4.3. Индикатриса кривизны (индикатриса Дюпена) поверхности $Д(И)$ 210
4.4.4. Квадратичная индикатриса Дюпена 220
4.5. Мера степени конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 222
4.5.1. Функции конформности 223
4.5.2. Индикатриса конформности 224
4.5.3. Особенности формы индикатрисы конформности первого рода 228
4.5.4. О структуре уравнения индикатрисы конформности 246
4.6. Недифференциальные методы аналитического описания геометрии касания поверхностей деталей и инструментов 248
4.7. Преимущества индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 249
4.8. Асимптоты индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 254
4.9. Упрощенная индикатриса конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 257
4.10. Виды касания поверхностей деталей и инструментов 260

Г л а в а 5. **Профилирование фасонных режущих инструментов** 268

5.1. Обобщенный метод образования исходных инструментальных поверхностей 269
5.2. Элементы теории огибающих в профилировании фасонных режущих инструментов 286
5.2.1. Огибающая последовательных положений плоской кривой 286
5.2.1.1. Огибающая последовательных положений кривой, заданной уравнением в векторной форме 286
5.2.1.2. Огибающая последовательных положений кривой, заданной уравнением в неявной форме 287
5.2.2. Огибающая последовательных положений однопараметрического семейства поверхностей 287
5.2.2.1. Огибающая последовательных положений поверхности, заданной уравнением в векторной форме 287
5.2.2.2. Условия существования огибающей семейства поверхностей, представленных уравнением в неявной форме 289
5.2.3. Огибающая последовательных положений характеристик на поверхности 289
5.2.4. Кинематический метод определения огибающей последовательных положений поверхности 290
5.2.5. Огибающая двухпараметрического семейства поверхностей 293
5.2.5.1. Огибающая двухпараметрического семейства поверхностей, заданных уравнением в векторной формее 293
5.2.5.2. Огибающая двухпараметрического семейства поверхностей, заданных уравнениями в неявной форме 293
5.3. Способы образования исходных инструментальных поверхностей, допускающийх движение “*самих по себе*” 295
5.3.1. Образование исходной инструментальной поверхности при однопараметрической кинематической схеме формообразования 296
5.3.2. Образование исходной инструментальной поверхности при двухпараметрической кинематической схеме формообразования 297
5.3.3. Образование исходной инструментальной поверхности

при многопараметрической кинематической схеме формообразования 301
5.3.4. Определение характеристики поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 303
5.3.5. Производящие поверхности инструментов 305
5.3.6. Выбор исходной инструментальной поверхности из номенклатуры имеющегося инструмента....307
5.4. Основные задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали ...314

Глава 6. **Геометрические параметры режущих кромок инструмента** 323

6.1. О преобразовании исходного инструментального тела в работоспособный режущий инструмент 324
6.1.1. Первый подход 325
6.1.2. Второй подход 325
6.1.3. Третий подход 325
6.2. Статические геометрические параметры режущих кромок инструмента 331
6.2.1. Система отсчета статических геометрических параметров 332
6.2.2. Секущие плоскости и измеряемые в них статические геометрические параметры режущих крокок .334
6.2.2.1. Секущие плоскости режущего клина 334
6.2.2.2. Статические геометрические параметры 336
6.2.3. Соотношения между статическими геометрическими параметрами режущих кромок инструмента 340
6.2.3.1. Радиус кривизны режущей кромки инструмента 342
6.2.3.2. Радиус округления режущей кромки 344
6.2.3.3. Кручение режущей кромки инструмента 344
6.2.4. Графо-аналитический метод определения геометрических параметров режущих кромок 345
6.3. Кинематические геометрические параметры режущей кромки инструмента 347
6.3.1. Результирующая скорость относительного движения детали и инструмента в процессе обработки 347
6.3.2. Система отсчета кинематических геометрических параметров режущих кромок инструмента....349
6.3.3. Плоскости измерения кинематических геометрических параметров режущей кромки инструмента....351
6.3.3.1. Плоскость резания и изменяемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки....352
6.3.3.2. Нормальная секущая плоскость и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки 353
6.3.3.3. Главная секущая плоскость и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки 355
6.3.3.4. Соотношения между кинематическими геометрическими параметрами режущей кромки, измеренными в главной и нормальной секущих плоскостях....357
6.3.3.5. Основная плоскость и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки....358
6.3.3.6. Плоскость схода стружки и измеряемый в ней передний угол....360

Глава 7. **Условия формообразования поверхностей деталей** 365

7.1. Аналитическое представление условий формообразования поверхностей деталей....365
7.1.1. Первое условие формообразования 365
7.1.2. Второе условие формообразования....366
7.1.3. Третье условие формообразования 369
7.1.3.1. Использование поверхности приведенной кривизны 372
7.1.3.2. Использование индикатрисы конформности....373
7.1.3.3. Особые случаи касания поверхностей деталей и инструментов....374
7.1.3.4. Локально-экстремальные виды касания поверхностей деталей и инструментов 376
7.1.4. Четвертое условие формообразования....377
7.1.5. Пятое условие формообразования 379

7.1.6. Шестое условие формообразования 382
7.2. Дополнительные методы анализа локальной интерференции поверхностей деталей и инструментов 383
7.2.1. *K*-отображение локальных участков поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 384
7.2.2. Применение коноидов Плюккера 386
7.3. Глобальный анализ третьего условия формообразования поверхностей деталей 386
7.3.1. *K*-отображение поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 387
7.3.2. Фокальные поверхности деталей и инструментов 391
7.3.3. Использование $\mathbb{R}$-поверхностей первого и второго рода 398
7.4. Рациональное ориентирование детали на станке 401
7.4.1. Постановка задачи рационального ориентирования сложной поверхности детали на столе многокоординатного станка с ЧПУ 402
7.4.2. Сферическое отображение и сферическая индикатриса поверхности детали 404
7.4.3. Положение “центра” сферического отображения обрабатываемого участка поверхности детали 410
7.4.3.1. Первый способ 411
7.4.3.2. Второй способ 412
7.4.3.3. Третий способ 413
7.4.3.4. Четвертый способ 414
7.4.4. Приведение детали в наивыгоднейшее положение 414
7.4.5. Учет ограничений, накладываемых предельными величинами ходов стола станка с ЧПУ 418
7.4.6. Сферические отображения исходных инструментальных поверхностей 420
7.4.7. Расширенные сферические отображения и расширенные индикатрисы поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 421
7.4.8. Относительное расположение сферических отображений поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 427

Г л а в а 8. **Синтез наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей** 431

8.1. Критерии эффективности технологических процессов изготовления деталей в машиностроении 431
8.2. Производительность формообразования 434
8.2.1. Факторы процесса обработки, определяющие производительность формообразования 434
8.2.2. Производительность съема припуска и производительность формообразования 437
8.2.2.1. Производительность съема припуска 438
8.2.2.2. Производительность формообразования 441
8.2.2.3. Производительность съема стружки 444
8.2.3. Критические значения подач инструмента 446
8.2.4. Мгновенная производительность формообразования 448
8.3. Производительность формообразования как функция конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 449
8.4. Синтез локального формообразования поверхностей деталей 453
8.4.1. Относительное положение и локальная ориентация детали и инструмента в процессе обработки 456
8.4.2. Некоторые особенности задачи синтеза локального формообразования поверхностей деталей 474
8.4.2.1. Неопределенности 474
8.4.2.2. Альтернативные решения задачи синтеза локального формообразования 475
8.4.2.3. Две и более точек касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности 476
4.4.3. Обобщение задачи синтеза локального формообразования поверхностей деталей 477
8.4.4. Примеры технических решений, созданных на основе результатов решения задачи синтеза локального формообразования 478
8.5. Синтез регионального формообразования поверхностей деталей 485
8.5.1. Наивыгоднейшие траектории формообразования 485
8.6. Синтез глобального формообразования поверхностей деталей 495

8.6.1. Частичная интерференция соседних строк формообразования....495
8.6.2. Траектории врезаний-выводов инструмента....498
8.6.3. Положение исходной точки начала обработки....501
8.7. Репараметризция поверхности детали....504
8.7.1. Виды исходной параметризации поверхностей деталей....504
8.7.2. Преобразования параметров....504
8.7.3. Рациональная параметризация поверхности детали, имеющей сложный в плане контур....507
8.7.4. Приведение квадратичных форм к главным осям....511
8.8. Обобщенная структура системы автоматизации программирования обработки сложных поверхностей деталей на многокординатных станках с ЧПУ....512

Г л а в а 9. **Топология формообразованных поверхностей деталей**....516

9.1. Дополнительные допущения....516
9.2. Образование волнистости и огранки....518
9.3. Пути уменьшения погрешностей формообразования....525
9.3.1. Сопоставление интенсивностей влияния факторов....525
9.3.2. Градиентный подход....527
9.3.3. Рациональное согласование подач....530
9.4. Точность формообразования при локально-экстремальных видах касания....533
9.5. Локальная аппроксимация поверхностей $Д$ и $И$ торами....537
9.6. Связь между системами координат заменяющих торов....544
9.7. О допустимости применения принципа суперпозиции при расчете результирующей погрешности формообразования....551

Заключение....559
Литература....562
Предметный указатель....583

ПРЕДИСЛОВИЕ

Механическая обработка представляет собой процесс превращения заготовки в деталь. Она является одним из наиболее сложных и ответственных этапов изготовления продукции в различных отраслях машиностроения.

Формообразующей обработкой деталей и изделий человечество знанимается веками. Все это время совершенствование способов и средств обработки основывалось на постоянно накапливающемся практическом опыте, который обобщался и на этой основе вырабатывались рекомендации преимущественно рецептурного характера по совершенствованию технологии изготовления деталей и изделий в машиностроении.

Начало становления учения о формообразовании поверхностей резанием как науки следует отнести примерно к концу 40-х – к началу 50-х годов XX столетия и связать его, в первую очередь, с изданием книги: Грановский Г.И. *Кинематика резания*. – М.: Машгиз, 1948. –200с. Это была первая монография, в которой в общей постановке рассматривались концептуальные вопросы формообразования поверхностей резанием, чем закладывались основы теории этого процесса. Впоследствие были изданы работы других авторов, посвященные исследованию как отдельных вопросов теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей, так и работы фундаментального характера, обобщающие результаты исследований частных вопросов.

В настоящее время имеется обширная литература, отражающая различные аспекты теории формообразования поверхностей деталей. Это позволяет грамотно подходить к решению различных практических задач технологии машиностроения – разрабатывать эффективные способы обработки деталей, профилировать и расчитывать любые сложные фасонные режущие инструменты, конструировать металлорежущие станки и др.

В предлагаемой вниманию читателя книге описанно новое направление в теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей. Это направление характерно тем, что оно преследует цель решить задачу синтеза наивыгоднейшей технологии изготовления детали.

Задачей инженера в первую очередь является создание (*синтез*) нового и только после этого – детальное изучение найденного технического решения. Задачи синтеза новых решений относятся к одним из самых сложных в различных отраслях науки и технологии.

В данной книге предпринята попытка разработать такой подход в теории формообразования поверхностей деталей, который позволяет решать задачу *синтеза* наивыгоднейшего способа обработки заданной поверхности детали и задачу профилирования наивыгоднейшего инструмента для осуществления этого способа исходя из *минимума* потребной для этого исходной (входной) информации. Достаточно исходной информаци, которую содержит чертеж – только сведения геометрического характера об обрабатываемой поверхности детали и о требованиях к точности ее формообразования. Эти данные должны быть исчерпывающе полными.

Разработанный подход позволяет решать задачи *синтеза* наивыгоднейших способов обработки поверхностей деталей и профилирования инструментов для осуществления таких способов – это дает основание считать его более эффективным.

В пользу более высокой эффективности разработанной теории также свидетельствует то, что для ее использования требуется минимум исходной информации. Отказ от “лишней сущности” – это всегда проявление стремления к более высокой степени идеальности любой научной системы.

Техническое решение, синтезированное в соответствие с разработанной теорией, содержит *все* необходимые элементы и выполняет все функции, обеспечивающие максимальную эффективность обработки, *и ни одной лишней*. Это дополнительно подтверждает более высокую эффективность дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей деталей, поскольку бесполезное всегда вредно.

Дифференциально-геометрический метод формообразования поверхностей при механической обработке деталей следует рассматривать как составную часть теоретической технологии машиностроения – науки, которая находится в стадии становления.

Полученные в зультате использования изложенного в книге метода технические решения окажутся полезными при разработке технологии изготовления деталей, при проектировании металлорежущих инструментов и металлорежущих станков (в первую очередь при решении воросов, связанных с их кинематической структурой) и др.

ВВЕДЕНИЕ

Формообразующая обработка деталей является важнейшим аспектом машиностроительного производства. Основные характеристики детали – это ее форма и материал (в том числе его состояние и физико-механические свойства), из которого деталь изготовлена. Целью выполненных в данной монографии исследований является форма, а формообразующая обработка рассматривается как процесс активного воздействия инструмента на заготовку с целью изменения ее формы и таким путем превращения заготовки в деталь.

В XX веке при интенсивном росте объемов производства и осознании ограниченности ресурсов Земли во весь рост встала проблема рационального использования энергии, материалов, рабочего времени, большую актуальность приобрели вопросы наилучшего (в том или в ином смысле) управления различными процессами физики, техники, экономики и др. В области технологии машиностроения это нашло отражение в том, что потребовались не просто хорошие, а критические (интенсивные, экстремальные, предельные) технологии, при использовании которых все элементы технологической системы и окружающая технологическая среда эксплуатируются наиболее полно, с максимальной отдачей и наивысшей эффективностью.

Решаемые в технологии машиностроения задачи условно можно разделить на две группы:

- задачи, направленные на максимально полное использование потенциальных возможностей сложившеося, уже существующего конкретного производства;
- задачи, направленные на разработку полностью новой технологии изготовления деталей, решаемые без учета ограничений, накладываемых возможностями и традициями сложившегося производства. Это задачи синтеза новых интенсивных технологий изготовления деталей и изделий в машиностроении.

Данное исследование направлено на решение задач, относящихся преимущественно ко второй группе.

Технический прогресс в общем и во всех отраслях специального машиностроения в значительной мере определяется уровнем развития технологии изготовления машин. От уровня развития технологии зависит качество и надежность изделий, их себестоимость и конкурентноспособность продукции машиностроения. Особое значение имеет дальнейшее развитие и совершенствование технологии механической обработки: ее требуют до 80% всех изготавливаемых деталей, на нее приходится около 40% общей трудоемкости изготовления машин. Поэтому важным является совершенствование способов формообразующей обработки деталей, достижение качественно более высокого уровня в проектировании режущего инструмента с широким использованием для этих целей вычислительной техники. Указанные задачи актуальны и требуют ускоренного решения – это обусловлено следующим.

Стремление к возможно более полному использованию потенциальных возможностей металлообрабатывающего оборудования, режущего инструмента, всей технологической системы и окружающей технологической среды, а также к возможно более полному учету характерных особенностей протекания каждого вида обработки усложняет задачи теории. Роль полноценных теорий в этих условиях существенно возрастает.

Развитие фундаментальных исследований и развитие теории расширяет перспективы для практических разработок. Именно решение так называемых абстрактных проблем всегда являлось оплодотворяющим в прикладных науках. Поэтому развитие теорий технологических процессов является одной из основных задач в области прикладных наук.

Внедрение в машиностроительное производство числового программного управления привело к принципиальным изменениям в технологии машиностроения как науке. Технология машиностроения из науки, в большой мере носящей качественный и описательный характер, постепенно превращается в науку точную. Неотъемлемой ее составной частью является *теория формообразования поверхностей при механической обработке деталей* (или, в более узкой трактовке, *теория формообразования поверхностей деталей*).

Формообразование в *узком* смысле – это процесс собственно формообразования, охватывающий геометрию поверхностей деталей и инструментов и кинематику их относительного движения в процессе обработки. В *широком* понимании формообразование включает в себя *все* геометро-кинематические аспекты формообразующей обработки поверхностей резанием (т.е. все аспекты, которые можно описать геометрически и кинематически, в т.ч. погрешности относительного положения детали и инструмента в процессе обработки, упругие

и тепловые деформации технологической системы и пр.). Оно служит отправным пунктом для разработки высокоэффективных способов обработки деталей, проектирования режущих инструментов, металлорежущих станков и др. Это дает основание ввести

Определение. *Теория формообразования поверхностей при механической обработке деталей – это наука, которая изучает геометрические и кинематические аспекты методов и средств обработки поверхности детали, отклоняющейся от номинальной не более, чем на величину допуска на точность формообразования, с целью синтеза наиболее эффективной технологии изготовления деталей и изделий в машиностроении*.

Современный уровень развития техники характерен существенным увеличением диапазона и усложнением форм используемых рабочих поверхностей деталей и одновременным повышением требований к точности их обработки. Расширение диапазона использования деталей с рабочими поверхностями сложной формы позволяет в значительной мере повысить качество многих изделий. Во многих случаях только усложнение формы и повышение точности размеров рабочей поверхности детали позволяет получить новые свойства, расширить функциональные возможности, увеличить надежность, ресурс, к.п.д. и улучшить другие эксплуатационные характеристики машин вцелом.

Устойчивая тенденция к усложнению формы и геометрической структуры рабочих поверхностей деталей и к ужесточению требований к точности их формообразующей обработки наблюдается в течение длительного периода времени. По оценкам экспертов около 10% деталей машиностроения ограничиваются поверхностями сложной формы (скульптурными поверхностями деталей) и эта доля (а не только общее количество) постоянно увеличивается по мере совершенствования автоматизированных систем конструирования и изготовления – систем класса *CAD/CAM* (Computer-Aided Design/Computer-Aided Machining).

Формообразующая обработка сложных поверхностей деталей характерна высокой трудоемкостью и большой долей ручных доводочных операций. Например, трудоемкость обработки поверхностей пера лопатки современного газотурбинного двигателя достигает 60-85% общей трудоемкости изготовления лопатки при доле ручных доводочных операций до 70% трудоемкости изготовления лопаточного аппарата или 30-40% в общей трудоемкости изготовления всего двигателя.

Особенности формы и геометрической структуры сложных поверхностей является причиной имеющихся особенностей в технологии обработки ограниченных ними деталей. Поэтому многокоординатная обработка деталей с рабочими поверхностями такого типа характерна выраженной нестационарностью всех ее основных параметров: параметров удаляемого припуска и сечений срезаемых слоев, текущих значений кинематических геометрических параметров режущих кромок инструмента, допустимыми в текущий момент времени критическими значениями скорости резания, подач и др.

Известные подходы к решению задач технологии обработки поверхностей деталей на металлорежущих станках позволяют разрабатывать только *позитивные* варианты технологи, в соответствие с которыми обработка детали производится более или менее эффективно. Формирование автоматизированных банков данных прогрессивных технологий дает возможность выбрать среди *известных* методов обработки такой, который для заданных условий обработки обеспечивает требуемое качество изготовления детали при минимуме затрат энергии и максимуме производительности. Опыт разработки таких автоматизированных систем показал, что наиболее сложным и трудоемким этапом является формирование базы данных прогрессивых технологий. Учитывая разрозненность, противоречивость, а часто и отсутствие данных по многим методам обработки, на практике приходится проводить трудоемкие эксперименты или обращаться к специалистам и принимать решение на основе экспертных оценок. Попытки создания САПР технологических процессов, использующих типовые технологические решения, не дают возможности разработать принципиально новые технические решения и не обеспечивают достижения поставленной цели, а именно не позволяют синтезировать наиболее эффективные методы обработки и формализовать решение это важной технической задачи.

Особое внимание должно быть обращено на то, что следует разрабатывать не просто *позитивные*, а *синтезировать* наиболее эффективные варианты технологии, т.е. синтезировать именно тот из позитивных ее вариантов, в соответствие с которым достигается требуемый экстремум заданного критерия эффективности обработки, когда все звенья технологической системы эксплуатируются наиболее интенсивно и с максимальной отдачей. В этом заключается принципиальное отличие разрабатываемого подхода в теории формообразования поверхностей резанием от известных подходов к решению задач технологии обработки поверхностей деталей. Практическая реализация разработанного концептуально нового подхода позволит повысить эффективность эксплуатации многокоординатных станков с ЧПУ и тем самым наиболее полно использовать

их потециальные возможности. Он также эффективен при решении задач синтеза наивыгоднейшей технологии механической обработки деталей общемашиностроительного назначения.

Сложные поверхности деталей обрабатываются методом построчного огибания на металлорежущих станках, имеющих от 3-4 до 5-6 и более одновременно управляемых от системы ЧПУ координат. В этой области имеются большие неиспользованные резервы, что требует радикального совершенствования технологии с целью повышения эффективности обработки и более полного использования потенциальных возможностей многокоординатных станков с ЧПУ современных конструкций.

Расширение объемов производства деталей с рабочими поверхностями сложной формы настоятельно требует решения актуальной технологической проблемы: с минимальными затратами средств и времени наиболее экономично и производительно обрабатывать произвольно сложные поверхности деталей. При этом синтезировать наивыгоднейший процесс многокоординатного формообразования сложных поверхностей деталей на станках с ЧПУ следует, в первую очередь, исходя из достижения максимума производительности формообразования. Более производительный процесс формообразования обеспечивает экономию времени на обработку, а к экономии времени сводится в конечном счете вся экономия. Более общие результаты будут получены, если синтез наивыгоднейшей технологии обработки поверхности детали осуществить исходя из условия обеспечения максимальной производительности обработки не одной, а двух и более поверхностей детали одновременно, изготовления детали вцелом, изготовления узла, агрегата или машины, и т.д.

Аналитическое описание и синтез наивыгоднейшего процесса формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ представляет собой многоплановую проблему. Для решения этой проблемы требуется решение комплекса технических задач, совокупность которых составляет сущность дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей при механической обработке деталей.

Предлагаемая монография появилась не на пустом месте – она является естественным развитием работ в области теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей, выполненных А.А. Бажиным (1935), Г.И. Грановским (1948), Г.Б. Евгеньевым (1983), Г.Г. Иноземцевым (1984), С.И. Лашневым и М.И. Юликовым (1975, 1980) В.С. Люкшиным (1968), С.С. Можаевым (1948, 1953), Б.А. Перепелицей (1981), С.С. Петрухиным (1960), П.Р. Родиным (1960, 1961, 1977), Г.Н. Сахаровым (1974, 1983), И.И. Семенченко (1936, 1938, 1944a, 1944b), И.А. Фрайфельдом (1948), Н.А. Шевченко (1957), В.А. Шишковым (1951), М.И. Юликовым (1979), Ф.С. Юнусовым (1965, 1987) и др.

В зарубежной литературе мало работ, посвященных систематизированному изложению вопросов формообразования поверхностей при механической обработке деталей. Следует указать на монографии Amirouch, F.M.L. (1993), Choi, B.K. (1991, 1992), Marciniak, K. (1991), Melkanoff, M.M., and Chao-Hwa Chang (1989). Зарубежные исследователи больше внимания уделяют разработке и иследованию инженерных методов конструирования сложных поверхностей деталей. В этом направлении серъезные результаты достигнуты Bezier, P.E. (1970, 1972, 1973), Farin, G. (1990), Koenderink, J.J. (1990), Mortenson, M. (1985, 1990, 1995, 1999) и др.

Вместе с тем она представляет собой новое, перспективное направление в теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей, в рамках которого появилась возможность решения задач синтеза наивыгоднейших способов и средств формообразующей обработки как деталей общемашиностроительного назначения, так и сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

Исходной посылкой разработанного автором дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей при механической обработке деталей является то, что обрабатываемая поверхность детали рассматривается как первичная, а применяемые для ее обработки методы и средства (в том числе и применяемый инструмент) – как вторичные. Следовательно, их параметры должны устанавливаться в функции формы, параметров и требований к качеству обработки формообразуемой поверхности детали исходя из достижения при этом требуемого экстремума заданного критерия эффективности обработки.

В теории формообразования поверхностей резанием обычно решают прямую или обратную задачу. Сущность прямой задачи заключается в том, что считаются известными два фактора: обрабатываемая поверхность детали и кинематическая схема формообразования – требуется отыскать исходную инструментальную поверхность проектируемого инструмента, которым можно обработать заданную поверхность детали в полном соответствии с требованиями чертежа. Прямая задача решается при профилировании режущего инструмента. При решении обратной задачи известными также считаются два фактора: исходная инструментальная поверхность и кинематическая схема формообразования – требуется отыскать формообразованную поверхность детали и таким путем определить на сколько точно выполнена ее обработка.

Дифференциально-геометрический метод формообразования поверхностей при механической обработке деталей позволяет решать не прямую или обратную, а более общую задачу. Характерной особенностью этой

задачи является то, что в постановочной части она содержит минимум исходной информации – только сведения о геометрии и требования к точности обрабатываемой поверхности $Д$. Отталкиваясь от этого требуется определить исходную инструментальную поверхность фасонного режущего инструмента и кинематику формообразования, обеспечив достижение при этом требуемого экстремума заданного критерия эффективности обработки – т.е. решить задачу *синтеза* наивыгоднейшего формообразования поверхности детали.

Проблема *синтеза* наивыгоднейших способов обработки поверхностей деталей впервые была поставлена автором в первой половине 80-х годов. Еще до того, как идея *синтеза* была полностью осознана и четко сформулирована, она воспринималась интуитивно и оказывала косвенное воздействие на направление исследований. Полученное в ходе работы над этой проблемой первое авторское свидетельство[1] на изобретение имеет приоритет от 24.10.83. В соответствие с этим и последующими изобретениями первоначально была решена задача нового типа: известными являются обрабатываемая поверхность детали и исходная инструментальная поверхность – требуется установить наивыгоднейшие параметры кинематики формообразования. В результате решения этой задачи кинематика формообразования определена в функции геометрии поверхностей $Д$ и $И$. Задачу рассмотренного типа нельзя отнести ни к прямой, ни к обратной задачам теории формообразования поверхностей резанием – это особая задача. Ее решение базируется на анализе и точном аналитическом описании геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$.

Затем было разработано техническое решение,[2] позволяющее определить исходную инструментальную поверхность $И$ в функции обрабатываемой поверхности детали, а именно – как $\mathbb{R}$-отображение поверхности $Д$. Таким образом поверхность $И$ инструмента определена в функции поверхности $Д$ детали, после чего кинематика формообразования устанавливается в функции заданной поверхности $Д$ и найденной поверхности $И$. Следовательно, в соответствие с дифференциально-геометрическим методом формообразования поверхностей при механической обработке деталей достаточной исходной информацией для синтеза наивыгоднейшего способа обработки служит информация только о геометрии поверхности $Д$ – это минимум исходной информации, меньше которого быть не может.

Здесь уместно обратить внимание на то, что для любой научной системы уменьшение количества потребной исходной информации свидетельствует о том, что в своем развитии она приближается к идеальной. К одному из первых понятий, близкому к понятию идеальности в науке, относят сформулированный в X1V веке принцип "*бритвы Оккама*[3]": "сущностей не следует умножать без необходимости". Он означает требование удаления из науки лишних понятий, т.е. тех, которые не сводятся к интуитивным знаниям и не могут быть проверены на опыте. Согласно принципу "*бритвы Оккама*", понятия, несводимые к интуитивному и опытному знанию, должны удаляться из науки.

Первым обобщением результатов выполненных исследований стала монография: Радзевич С.П. *Формообразование сложных поверхностей на станках с ЧПУ*. – Киев: Вища школа, 1991. –192с.

Настоящая книга построена следующим образом.

Первая глава "*Рабочие поверхности деталей и инструментов*" посвящена рассмотрению вопросов задания, аналитического описания и рациональной параметризации обрабатываемых поверхностей деталей и инструментов. Изложение теории начато именно с этого вопроса, поскольку исходными данными для решения задачи синтеза наивыгоднейшего способа обработки является рабочий чертеж детали с техническими условиями на приемку готового изделия, в т.ч. с учетом программы выпуска.

В этой главе рассмотрены вопросы нахождения всех основных элементов локальной топологии поверхности $Д(И)$ – касательных прямых, нормали, касательной плоскости, главных направлений, нормальных и главных кривизн и пр. Показано как от различных способов аналитического описания и дискретного задания поверхности перейти к обобщенному ее представлению в натуральной форме, а именно – через коэффициенты первой и второй основных квадратичных форм поверхности $Д(И)$.

---

[1] А.с. №1185749 (СССР). *Способ обработки деталей, ограниченных поверхностями сложной формы*. /С.П.Радзевич. Не публикуется. Положительное решение от 18.10.84 по заявке №3666275/25-08 от 24.10.83, МКИ В 23 С 3/16.

[2] Радзевич С.П. *Способ профилирования инструмента*. – Заявка на изобретение №4242296/08, приоритет от 31.03.1987г.

[3] **Оккам** Уильям (Ockam William) (ок. 1285-7.4.1349) – английский философ-номиналист, логик, механик, религиозный и политический полемист. Родился в деревне Оккам (близ Лондона). Учился в Оксфордском университете (ок.1310-1318). В 1323-1328 жил в Авиньоне, с 1328 – в Мюнхене. Монах-францисканец. Поставил проблему движителя, отказавшись от динамической теории Аристотеля. Считал возможным вращательное движение Земли. Оказал влияние на развитие идей динамики брошенного тела. Изложил методологический принцип научного исследования («*бритва Оккама*»), отрицающий очевидность всего, что неизвестно само по себе, не доказано опытом или основано на авторитете. Согласно этому принципу познание вещей основано на нашем чувстве и интеллекте.

Классифицированы локальные участки поверхностей деталей и инструментов. Для теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей это концептуально важный вопрос. Локальные участки поверхностей являются простыми объектами, а их использование, как и других простых объектов, позволяет избежать "смазанности" результатов исследований.

Даны точные логические определение использованных в монографии основных понятий[1]. При этом исходили из того, что исходные понятия должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Удачная терминология позволяет выявить недостающие связи и действия, объединить неявные факторы, установить четкую связь последующего с предыдущим, расширяет возможности для выполнения анализа. Введение же неточных и ошибочных понятий затормаживает развитие теории и способствует возникновению ложных построений.

В процессе механической обработки деталь и инструмент всегда перемещаются одна относительно другой. Механическая обработка детали без движения инструмента относительно детали невозможна. Наличие движения инструмента относительно детали является принципиально важным. Поэтому вторая глава "*Кинематика формообразования поверхностей деталей*" посвящена рассмотрению вопросов кинематики формообразования, в первую очередь кинематики формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ. Кинематика формообразования поверхностей деталей общемашиностроительного назначения на универсальных станках, станках-автоматах, -полуавтоматах и на автоматических линиях представлена как частный (вырожденный) случай кинематики многокоординатного формообразования.

Задачи формообразования рабочих поверхностей могут быть решены лишь в случае, когда как деталь, так и инструмент представлены в некоторой общей системе координат. Это требует использования эффективных методов перехода от одной системы координат к другой – методов преобразования координат. Вопросы преобразования координат систематизированно изложены в третьей главе "*Системы координат и линейные преобразования*". Образование замкнутых циклов прямых и обратных последовательных преобразований координат создает предпосылки для широкого применения метода подвижного репера – дифференциально-геометрического метода локального исследования процесса формообразования поверхностей при механической обработке деталей.

Четвертая глава "*Геометрия касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности*" посвящена изложению вопросов аналитического описания геометрии касания обрабатываемой поверхности детали и исходной инструментальной поверхности применяемого режущего инструмента. Это концептуально важный вопрос, являющийся ключевым при решении задач синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей. Для аналитического описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ в рассмотрение введен новый класс функций – так называемых *функций конформности*, к которому, в частности, принадлежит индикатриса конформности поверхностей детали и инструмента.

При исследовании геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ предпочтение отдано термину *касание* поверхностей, а не *контакт*, поскольку термин *контакт* предполагает учет физики контактного взаимодействия твердых тел, тогда как в данной работе речь преимущественно идет о геометрии поверхностей и о кинематике их относительного движения в процессе обработки детали. Эта глава содержит принципиально новые результаты концептуального характера, в частности, потому, что строго и однозначно доказано: направления экстремальной степени конформности двух касающихся одна другой поверхностей $Д$ и $И$ в общем случае взаимно не ортогональны.

Изложенные в первых четырех главах результаты исследований позволяют перейти к решению задачи про филирования фасонных режущих инструментов, чему посвящена пятая глава "*Профилирование фасонных режущих инструментов*". В этой главе изложен принципиально новый обобщенный способ образования исходных инструментальных поверхностей фасонных режущих инструментов, основанный на $\mathbb{R}$-отображении обрабатываемой поверхности детали на исходную инструментальную поверхность профилируемого фасонного инструмента. Показано, что известные способы образования исходных инструментальных поверхностей фасонных инструментов являются частными случаями способа, основанного на $\mathbb{R}$-отображении поверхностей деталей.

Исходное инструментальное тело, т.е. тело, ограниченное исходной инструментальной поверхностью, необходимо преобразовать в работоспособный режущий инструмент. Этому вопросу посвящена шестая глава "*Геометрические параметры режущих кромок инструмента*". Здесь наряду с кратким изложением сущности

[1] Здесь полезно вспомнить древнюю китайскую пословицу: *Начало мудрости состоит в том, чтобы называть вещи своими именами.*

известных подходов, развит принципиально новый подход к решению задачи преобразования исходного инструментального тела в работоспособный инструмент. Особенность этого подхода заключается в том, что первоначально на исходной инструментальной поверхности строится линия, с которой в дальнейшем совмещается режущая кромка. Параметры этой пространственной кривой устанавливаются исходя из условия обеспечения требуемого по условиям резания угла наклона λ в каждой точке режущей кромки. После этого через построенную режущую кромку под требуемыми по условиям резания передним γ и задним углами α проводятся соответственно передняя и задняя поверхности. Параметры этих поверхностей расчитываются исходя из того, чтобы геометрические параметры как нового, так и переточенного режущего инструмента имели оптимальные по условиям резания значения.

Кратко рассмотрен обобщенный аналитический метод расчета статических и кинематических геометрических параметров режущих кромок инструмента в условиях обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

Правильно обработать деталь можно только в случае выполнения комплекса условий, называемых *условиями формообразования поверхностей деталей*. Рассмотрению этого вопроса посвящена седьмая глава "*Условия формообразования поверхностей деталей*". Процесс форомообразования поверхностей деталей дифференцирован на части, из него выделено: локальное, региональное и глобальное формообразование. Каждая часть аналитически описана в функции формы и параметров формообразуемой поверхности детали и формообразующей исходной инструментальной поверхности применяемого фасонного инструмента. Результаты исследований сведены к шести условиям формообразования поверхностей резанием и дополнены требованием правильного ориентирования инструмента относительно детали. Последнее можно рассматривать как седьмое условие формообразования.

Все условия формообразования поверхностей деталей представлены в обобщенной аналитической форме. Выполнение этих условий необходимо и достаточно для того, чтобы обеспечить обработку детали в полном соответствие с требованиями чертежа.

На основании результатов исследований, изложенных в предыдущих семи главах, в восьмой главе "*Синтез наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей*" решается задача синтеза наивыгоднейшего способа обработки заданной поверхности детали. Приведены примеры решения задач синтеза такого типа.

Развитие теории формообразования поверхностей деталей в направлении создания метода синтеза наивыгоднейших процессов формообразующей обработки деталей создает реальные предпосылки для разработки на основе дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей высокоэффективных средств и способов формообразующей обработки деталей и хорошо согласуется с тенденциями развития теорий технологических процессов. Следует акцентировать внимание на том, что в некотором смысле метод важнее конкретного результата: на основе эффективного метода можно получить много практически ценных результатов.

Синтезированное на основе дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей при механической обработке деталей точное техническое решение может быть использовано на практике как непосредственно, так и служить *точкой отсчета* для оценки эффективности *позитивных* технических решений этой же задачи.

Разработана укрупненная структура САП многокоординатной обработки сложных поверхностей деталей на станках с ЧПУ, которая основана на дифференциально-геометрическом методе формообразования поверхностей. Детализированы основные ее подсистемы. Упрощенные варианты САП применимы для случаев обработки деталей общемашиностроительного назначения на универсальном, автоматическом и полуавтоматическом оборудовании.

Построенный таким образом алгоритм решения задачи синтеза наивыгоднейшего способа формообразующей обработки поверхностей деталей призван играть важную роль в инженерной практике. Его теоретическое значение состоит в том, что в нем логически раскрывается принцип методологического единства – от детали к полному аналитическому описанию всего процесса формообразования ее рабочей поверхности.

В девятой главе "*Топология формообразованных поверхностей деталей*" исследован процесс образования остаточного детерминированного регулярного микрорельефа на обработанной поверхности детали. Расчитаны параметры остаточных гребешков (волнистости и огранки), проанализированы возможности управления параметрами остаточной шероховатостью поверхности детали.

При проведении исследований широко использовались хорошо разработанные методы из различных разделов математики, в первую очередь, методы аналитической и дифференциальной геометрии, элементы векторного и матричного исчисления и пр. Это естественно, поскольку многие задачи теории формообразования

поверхностей при механической обработке деталей могут быть строго изучены с помощью уравнений дифференциальной геометрии.

Всякая наука рано или поздно должна *проверить себя*, став *математической*. Вместе с тем достаточно широкое использование математики при изложении материала не дает основания считать эту книгу математической, точно так же, как использование алфавита и грамматики не является достаточным для того, чтобы считать ее книгой по литературе. Использованный математический аппарат – это только средство, инструмент, язык изложения: новых математических результатов здесь искать не следует. Это книга именно по *формообразованию поверхностей* при механической обработке деталей, но никак не по математике.

Результаты выполненных исследований могут найти применение как в общем, так и в отраслевом машиностроении. Эффективность их применения будет выше в условиях производства деталей с часто изменяемой вследствие доработок геометрией рабочих поверхностей. Это имеет место, например, в аэрокосмической промышленности. Вместе с тем они окажутся полезными в других отраслях машиностроения, в т.ч. и в автомобильной промышленность, где сроки изготовления штампов с новой геометрией рабочих поверхностей менее существенны.

В связи с большим объемом в книге для удобства принята следующая нумерация рисунков и формул. Номер каждого рисункам и каждой формулы состоит из дух частей:

- первая часть указывает на номер главы, в которой формула приведена;
- вторая часть указывает на номер формулы в главе.

Например, формула (7.4) означает, что это формула 4 в главе 7.

Ссылаясь на формулу в пределах главы, указывается только ее номер в этой главе (т.е. второе число номера – формула (4)). Если требуется сослаться на формулу из другой главы, то указывается полный ее номер – формула (7.4).

В монографии решены важные задачи теории формообразования поверхностей деталей, даны ответы на многие вопросы, в том числе и на ряд вопросов принципиального характера. Вместе с тем автор отдает себе отчет в том, что многие вопросы остались без ответа, многие задачи требуют решения – рассматриваемая проблема сложна и многопланова и еще многое предстоит исследовать. По тексту монографии указывается на еще нерешенные задачи. Некоторые из них очевидны и не требуют акцентирования внимания. Многие задачи еще предстоит четко сформулировать – пока они осознаются на интуитивном уровне. В ходе выполнения исследований возникли новые, ранее не известные задачи, которые также требуют решения и ждут своих исследователей.

Автор выражает благодарность канд. техн. наук, доценту Палагуте В.А. за техническую помощь, оказанную при подготовке рукописи мографии к изданию.

Предлагаемая вниманию читателя книга не лишена недостатков, вызванных как объективными, так и субъективными причинами. Автор с благодарностью примет все критические замечания и пожелания, направленные на углубление понимания сущности сложного вопроса формообразования поверхностей при механической обработке деталей и на развитие теории этого вопроса.

Отзывы с замечаниями и пожеланиями следует направлять в адрес издательства.

Основные условные обозначения

$Д$ обрабатываемая поверхность детали или ее отсек;

$Д_н$ – номинальная поверхность обрабатываемой детали;

$Д_р$ – реальная поверхность детали;

$И$ – исходная инструментальная поверхность (ИИП) применяемого инструмента;

ФПИ – формообразующая поверхность инструмента;

ИИТ – исходное инструментальное тело;

$Д(И)$ – формообразуемая поверхность $Д$ детали и формообразующая исходная инструментальная поверхность $И$;

"$д$" – индекс, указывающий на принадлежность параметра поверхности $Д$ детали;

"u" – индекс, указывающий на принадлежность параметра поверхности $И$ инструмента;

"$д(u)$" – индекс, указывающий на то, что соответствующий параметр или уравнение, взятые с индексом "$д$", относятся к поверхности $Д$ детали, а тот же параметр или выражение, взятые с индексом "u" – к исходной инструментальной поверхности $И$;

M – текущая точка на поверхности $Д$ детали или поверхности $И$ инструмента;

$X_д$, $Y_д$, $Z_д$ – декартовы координаты текущей точки на обрабатываемой поверхности $Д$ детали;

$\mathbf{r}_д$ – радиус-вектор текущей точки на обрабатываемой поверхности $Д$ детали;

$U_д$, $V_д$ – криволинейные (гауссовы) координаты текущей точки на обрабатываемой поверхности $Д$ детали;

X_u, Y_u, Z_u – декартовы координаты текущей точки на исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента;

$\mathbf{r}_u$ – радиус-вектор текущей точки на исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента;

U_u, V_u – криволинейные (гауссовы) координаты текущей точки на исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента;

$Ф_{1.д}$ – первая основная квадратичная форма (первая дифференциальная форма Гаусса) поверхности $Д$ детали;

$E_д$, $F_д$, $G_д$ – коэффициенты первой основной квадратичной формы поверхности $Д$ детали;

$Ф_{2.д}$ – вторая основная квадратичная форма (вторая дифференциальная форма Гаусса) поверхности $Д$ детали;

$L_д$, $M_д$, $N_д$ – коэффициенты второй основной квадратичной формы поверхности $Д$ детали;

$Ф_{1.u}$ – первая основная квадратичная форма (первая дифференциальная форма Гаусса) исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента;

E_u, F_u, G_u – коэффициенты первой основной квадратичной формы исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента;

$Ф_{2.u}$ – вторая основная квадратичная форма (вторая дифференциальная форма Гаусса) исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента;

L_u, M_u, N_u – коэффициенты второй основной квадратичной формы исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента;

$\mathbf{N}_д$, $\mathbf{n}_д$ – нормаль и орт нормали к поверхности $Д$ детали в текущей точке на ней;

$\mathbf{N}_u$, $\mathbf{n}_u$ – нормаль и орт нормали к исходной инструментальной поверхности $И$ в текущей точке на ней;

$\mathbf{T}_{1.\partial}$, $\mathbf{T}_{2.\partial}$ – главные направления на поверхности $Д$ детали в текущей точке на ней;

$\mathbf{t}_{1.\partial}$, $\mathbf{t}_{2.\partial}$ – орты главных направлений на поверхности $Д$ детали в текущей точке на ней;

$C_{1.\partial}$, $C_{2.\partial}$ – первое и второе главные сечения поверхности $Д$ детали в текущей точке на ней;

$R_{1.\partial}$, $R_{2.\partial}$ – первый и второй главные радиусы кривизны поверхности $Д$ детали в текущей точке на ней $(R_{1.\partial} < R_{2.\partial})$;

$k_{1.\partial}$, $k_{2.\partial}$ – первая и вторая главные кривизны поверхности $Д$ детали в текущей точке на ней $(k_{1.\partial} > k_{2.\partial})$;

$\mathbf{T}_{1.u}$, $\mathbf{T}_{2.u}$ – главные направления на исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента в текущей точке на ней;

$\mathbf{t}_{1.u}$, $\mathbf{t}_{2.u}$ – орты главных направлений на исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента в текущей точке на ней;

$C_{1.u}$, $C_{2.u}$ – первое и второе главные сечения исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента в текущей точке на ней;

$R_{1.u}$, $R_{2.u}$ – первый и второй главные радиусы кривизны исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента в текущей точке на ней $(R_{1.u} < R_{2.u})$;

$k_{1.u}$, $k_{2.u}$ – первая и вторая главные кривизны исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента в текущей точке на ней $(k_{1.u} > k_{2.u})$;

$\tilde{M}_{\partial}$, $\tilde{G}_{\partial}$ – средняя и полная (гассова) кривизна поверхности $Д$ детали в текущей точке на ней;

$\tilde{M}_{u}$, $\tilde{G}_{u}$ – средняя и полная (гассова) кривизна исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента в текущей точке на ней;

$Ind\,(Д)$ – индикатриса кривизны (индикатриса Дюпена) поверхности $Д$ детали в текущей точке M на ней;

$Ind\,(И)$ – индикатриса кривизны (индикатриса Дюпена) поверхности $И$ инструмента в текущей точке M на ней;

φ – угловой параметр индикатрисы кривизны поверхности (индикатрисы Дюпена), индикатрисы конформности поверхностей $Д$ и $И$;

K – точка касания поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$;

μ – угол относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$ в точке K их касания;

$Ind_{conf}\ Д(И)$ – индикатриса конформности поверхностей $Д$ и $И$ в текущей точке K их касания;

r_{conf} – радиус-вектор текущей точки индикатрисы конформности поверхностей $Д$ и $И$;

d_{conf} – текущий диаметр индикатрисы конформности поверхностей $Д$ и $И$ $(d_{conf.} = 2r_{conf})$;

$d_{conf}^{(\min)}$ – минимальный диаметр индикатрисы конформности поверхностей $Д$ и $И$;

$[h]$ – допуск на точность формообразования поверхности детали;

h_{Σ} – результирующая погрешность формообразования;

h_B, $h_{П}$ – составляющие результирующей погрешности формообразования, вызванные дискретностью воспроизведения исходной инструментальной поверхности и точечным характером касания поверхностей $Д$ и $И$;

S_B – подача инструмента вдоль строки формообразования;

$S_{П}$ – подача инструмента на очередную строку формообразования (поперек строки формообразования);

$R_{\partial.B}$, $R_{\partial.П}$ – радиусы кривизны поверхности $Д$, измеренные в плоских нормальных сечениях вдоль и поперек строк формообразования;

$R_{u.B}$, $R_{u.П}$ – радиусы кривизны поверхности $И$, измеренные в плоских нормальных сечениях вдоль и поперек строк формообразования;

$КП$ – касательная плоскость к поверхности $Д(И)$ или общая их касательная плоскость;

$\mathbf{Tr}\,(A, X)$ – оператор переноса вдоль оси X на расстояние A;

Tr (B, Y) – оператор переноса вдоль оси Y на расстояние B;

Tr (C, Z) – оператор переноса вдоль оси Z на расстояние C;

Rt (α, X) – оператор поворота вокруг оси X на угол α;

Rt (α, X) – оператор поворота вокруг оси Y на угол β;

Rt (α, X) – оператор поворота вокруг оси Z на угол γ;

Rs $(1 \to 2)$ – оператор результирующего преобразования координат – оператор перехода от системы координат $X_1Y_1Z_1$ к системе координат $X_2Y_2Z_2$.

Г л а в а 1. **Рабочие поверхности деталей и инструментов**

Тело каждой детали ограничено поверхностями – отдельно взятая деталь любого изделия представляет собой совокупность рабочих и нерабочих поверхностей. Рабочая поверхность является конструктивно необходимым элементом каждой детали.

Все рабочие и многие нерабочие поверхности деталей подвергаются формообразующей механической обработке на металлорежущих станках. Объектом процесса формообразующей обработки (т.е. объектом процесса собственно формообразования) являются поверхности, ограничивающие деталь.

Разработка новых и совершенствование известных способов формообразования тесно связаны с определением формы и геометрических параметров обрабатываемой (формообразуемой) поверхности $Д$ детали и формообразующей исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента (далее – поверхностей $Д(И)$). Под *исходной инструментальной поверхностью* (ИИП) здесь и далее понимается воображаемая поверхность, образуемая профилирующими режущими кромками инструмента в их движении относительно системы координат, связанной с инструментом. В процессе обработки поверхность *И* инструмента касается поверхности $Д$ детали.

Решение *задачи синтеза* наивыгоднейшего варианта технологии обработки поверхностей деталей на металлорежущих станках предусматривает разработку аналитического описания всего процесса формообразования и требует однозначного представления геометрической информации о поверхностях $Д(И)$, например, в виде математической модели каждой из них.

1.1. Принятые допущения и основные определения

Рабочая поверхность $Д$ генерируется в процессе формообразующей обработки детали путем послойного срезания с заготовки припуска. Главными факторами в этом процессе являются геометрический и кинематический. Они определяются геометрией поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$, характером и параметрами их относительного движения.

Формообразующая обработка деталей всегда сопровождается сложными сопутствующими явлениями. Вследствие этого реальная поверхность детали представляет собой результат интегрального воздействия на заготовку всех факторов, действующих одновременно: как основного (собственно процесса формообразования), так и сопутствующих, которые в рассматриваемом в данной монографии аспекте являются второстепенными. К сопутствующим факторам относятся погрешности установки и относительных перемещений инструмента относительно детали в процессе обработки, деформации технологической системы, размерное изнашивание инструмента, образование нароста на режущей кромке и пр. Изучить процесс формообразующей обработки деталей с учетом влияния всех одновременно действующих факторов не представляется возможным. Поэтому в дальнейшем абстрагируемся от сопутствующих явлений, ограничимся упрощенным, схематическим представлением о процессе формообразующей обработки деталей и его исследование выполним на модели.

При моделировании процесс обработки заменяется моделью – идеализированной системой факторов, в наиболее важных чертах отражающей особенности реального процесса (мы говорим, что A есть модель B, если A можно использовать для ответа на интересующие нас вопросы о B). Моделирование является эффективным методом исследования во всех областях знаний. Формообразование как модель процесса формообразующей обработки отражает геометрический и кинематический аспекты обработки поверхностей деталей на металлорежущем станке.

Если влияние второстепенных факторов малосущественно и ним можно пренебречь, то такая модель с

приемлемой точностью будет адекватна реальному процессу обработки. В противном случае (когда пренебрегать влиянием сопутствующих факторов недопустимо) изученную модель потребуется впоследствие дополнить учетом в первую очередь наиболее существенных сопутствующих факторов и явлений – в порядке степени их влияния на выходные показатели процесса обработки (его производительность, точность, качество и др.) и возможности управления ними.

Изучение и анализ опубликованных результатов исследований в области разработки методов и средств формообразующей обработки деталей позволили установить, что во всех исследованиях и разработках явно предполагаются или косвенно допускаются частые допущения, относящихся как ко всей технологической системе, так и отдельно к каждой из ее составных частей: к детали, инструменту, металлорежущему станку, приспособлениям, оснастке и пр. В результате изучения и систематизации частных допущений сформулировано (Радзевич С.П., 1987) обобщенное допущение, в соответствие с которым:

Допущение 1.1. *В процессе формообразующей обработки детали технологическая система оказывает на заготовку только то воздействие, которое предусмотрено собственно процессом формообразования; при этом окружающая технологическая среда пассивна и не оказывает на деталь влияния, не предусмотренного процессом формообразования.*

Это допущение являеется *основным допущением в теории формообразования поверхностей* при механической обработке деталей.

В аспекте основного допущения формообразование, как модель реального процесса обработки, отражает геометрическую и кинематическую стороны выполнения инструментом двух основных функций: послойного срезания с заготовки припуска и формообразования на ней поверхности $Д$, заданной чертежом детали.

Поверхности $Д$ и $И$ представляют собой поверхности технических форм.

Определение 1.1. *Поверхности технических форм – это поверхности, которые могут быть материализованы, а именно: могут быть выполнены каким-либо технологическим методом на материальном объекте, носителе формы этой поверхности.*

Руководствуясь только интуитивным представлением о сложности поверхностей, отметим, что поверхности технических форм могут быть как относительно простыми, так и более или менее сложными и даже такими сложными по форме, как, например, некоторые поверхности ювелирных изделий, для которых трудно указать область их инженерного применения.

Определение 1.1 охватывает не только рабочие и нерабочие поверхности деталей, но и исходные инструментальные поверхности. Несмотря на то, что поверхности $И$ инструмента материально существуют не всегда, они всегда могут быть материализованы (ограничивая при этом исходное инструментальное тело) и поэтому их следует рассматривать как поверхности технических форм.

Если некоторая поверхность может быть материализована, то, во-первых, необходимо уметь обрабатывать ее и, во-вторых, обрабатывать ее наилучшим образом, а именно: в полном соответствии с требованиями чертежа при минимальных затратах времени и средств на обработку. Процесс обработки должен быть максимально эффективным, а технологическая система и окружающая технологическая среда должны эксплуатироваться при этом с наибольшей отдачей.

Поверхности технических форм имеют самую разнообразную, в том числе и очень сложную форму (рис. 1.1), что характерно для рабочих поверхностей лопаток газотурбинных двигателей, корабельных гребных винтов, для рабочих поверхностей штампов, применяемых в технологии изготовления панелей кузовов легковых автомобилей, для рабочих колес гидронасосов, лопастей роторов гидротурбин и многих других деталей.

Служебным назначением рабочих поверхностей деталей перечисленных и т.п. типов является взаимодействие с окружающей их средой. Поэтому сложные поверхности рассматриваемого вида иногда называют *динамическими* поверхностями. Окружающей средой служит воздух, газы, вода и другие жидкости, твердые тела, сыпучие материалы и пр. Параметры геометрии динамических поверхностей деталей определяются в результате решения задач аэро-, газо- и гидродинамики, контактного взаимодействия твердых тел или сыпучих материалов и пр. Рабочие поверхности $Д$ деталей рассматриваемого типа называют также *пространственно-сложными* или *объемными* поверхностями, поверхностями *свободной формы (Free-Form*

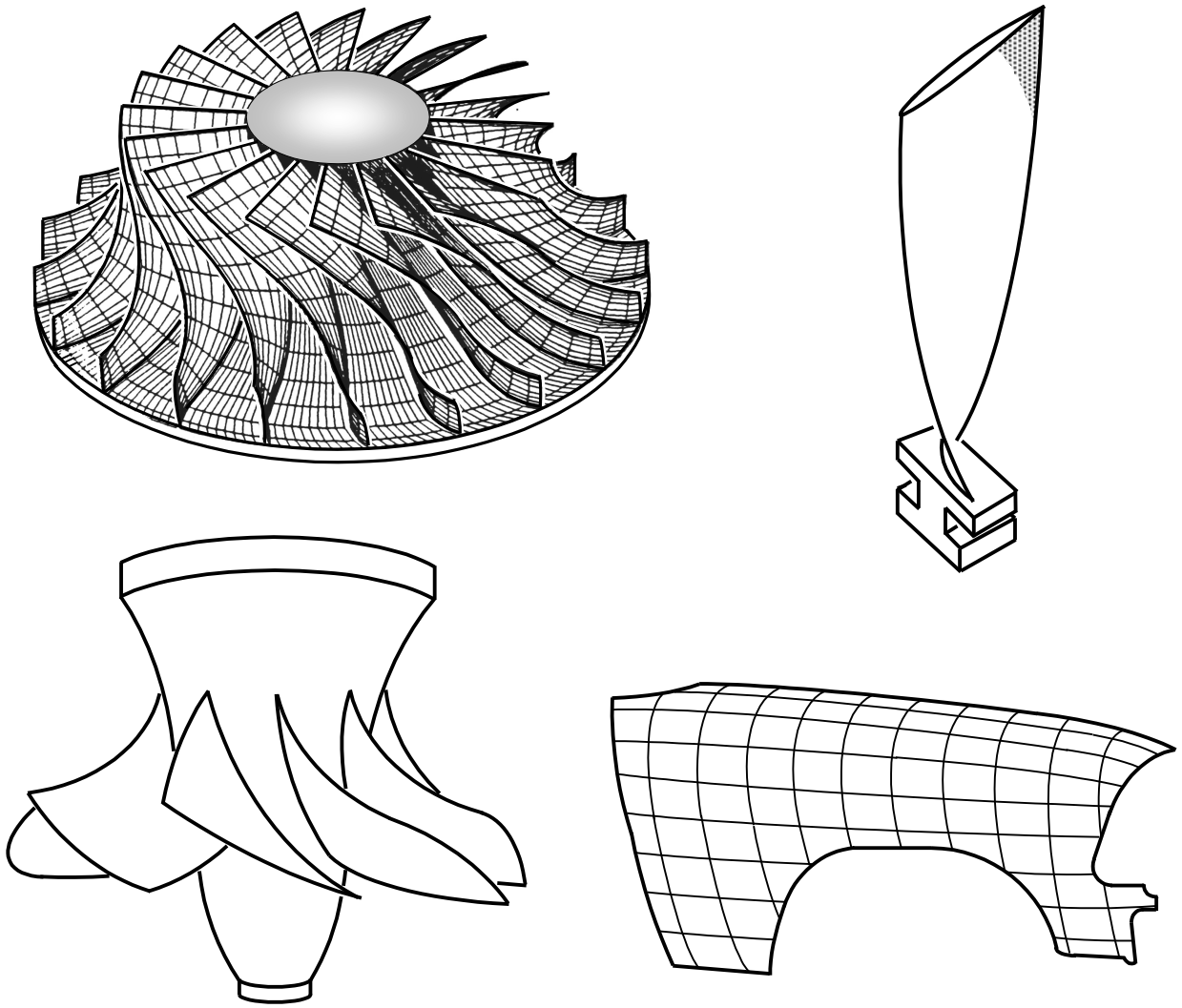


Рис. 1.1. Примеры деталей с рабочими поверхностями сложной формы.

Surface), фасонными или *скульптурными (Sculptured Part Surface)* поверхностями деталей, *3D-поверхностями* и др. В дальнейшем, когда речь будет идти о поверхностях типа (см. рис. 1.1), употребляется термин *сложные поверхности* деталей и инструментов.

Сложные поверхности деталей и инструментов относятся к поверхностям технических форм и являются их частным случаем.

Введем определение:

Определение 1.2. *Поверхность Д(И) сложной формы – это поверхность, параметры локальной топологии которой изменяются от одной точки к другой бесконечно близкой ее точке.*

Согласно этому определению в дифференциальной окрестности текущей точки на поверхности $Д(И)$ ее главные кривизны изменяются вдоль линий на поверхности (в том числе и вдоль линий ее кривизны) от одной точки к другой бесконечно близкой к ней точке либо по величине, либо по ориентации главных секущих плоскостей, либо по величине и ориентации главных секущих плоскостей одновременно.

Сложная поверхность $Д(И)$ не допускает движения "*самой по себе*", что является ее характерной особенностью. Вместе с тем эта особенность не имеет *меры* и потому не может быть использована для введения количественной оценки степени сложности поверхности $Д(И)$. Поэтому определение понятия *поверхность сложной формы* не может быть основано непосредственно на использовании этого важного свойства поверхностей рассматриваемого класса – не допускать движения "*самой по себе*".

Поверхность детали можно рассматривать как идеально точную и идеально гладкую – в этом случае будем называть ее *номинальной* поверхностью $Д$ (или $Д_н$, если требуется подчеркнуть, что речь идет именно о номинальной поверхности детали).

Если в рассмотрении учитывается остаточный детерминированный регулярный микрорельеф на поверхности детали (гребешки и волнистость), образованный при ее дискретном формообразовании, то такую поверхность будем называть *реальной* поверхностью $Д_р$ детали.

Кроме остаточного детерминированного регулярного микрорельефа реальные поверхности деталей имеют отклонения формы и размеров от номинальных. Эти отклонения должны находиться в регламентируемых чертежом пределах допуска на точность обработки детали.

Любая деталь ограничена поверхностями, всегда имеющими стохастический микрорельеф – шероховатость поверхности, которая в данной работе не рассматривается.

Отправным пунктом в решении задач формообразования является деталь: точнее – подвергающаяся формообразующей обработке ее номинальная поверхность $Д$. Исходя из параметров геометрии и требований к качеству поверхности $Д$, должна решаться задача синтеза наивыгоднейшей технологии обработки детали: определяться кинематика формообразования, решаться задачи инструментообеспечения, рационального ориентирования инструмета относительно детали, траекторные задачи и другие вопросы технологии, исходя из условия достижения при этом заданного качества и наивысшей эффективности процесса обработки.

Для аналитического решения задачи синтеза наивыгоднейшего варианта технологии обработки детали необходимо располагать уравнением поверхности $Д$, которое следует рассматривать как математическую модель поверхности детали. Уравнение обрабатываемой поверхности может быть изначально задано или может быть найдено по чертежу детали.

Требуемая информация геометрического характера о рабочей поверхности детали может быть задана дискретно – обработка дискретно заданной информации о поверхности $Д$ детали в этом случае производится либо после ее аппроксимации аналитическими функциями, либо в дискретном виде.

1.2. Задание рабочих поверхностей деталей и инструментов. Расчет элементов их локальной геометрии

Обрабатываемые поверхности деталей общемашиностроительного назначения обычно задаются образмеренным чертежом детали – как правило, этих данных достаточно для восстановления уравнения поверхности $Д$.

Информация о геометрии сложной поверхности $Д$ может быть задана либо получена на этапе автоматизированного проектирования детали в САПР класса *CAD* (*Computer-Aided Design*).

1.2.1. Методы задания рабочих поверхностей деталей и инструментов. Необходимая для осуществления размерной обработки деталей геометрическая информация о форме и параметрах поверхностей $Д$ и $И$ на практике задается по-разному. Применительно к инструменту эта задача решается (как правило) относительно проще – поверхности $И$ используемого инструмента в большинстве случаев представляют собой поверхности, допускающие движение "*самих по себе*".

Преимущественно используемые при многокоординатной обработке сложных поверхностей деталей инструменты (рис. 1.2) имеют исходные инструментальные поверхности $И$ в виде поверхностей вращения, реже – в виде цилиндрических поверхностей общего вида и крайне редко – в виде винтовых поверхностей постоянного шага. В специальном машиностроении, например, при изготовлении лопаток газотурбинных двигателей и тому подобных деталей, для ленточного шлифования сложных поверхностей $Д$ также используются инструменты с исходной инструментальной поверхностью $И$ сложной формы – фасонные кулаки, которыми абразивная лента прижимается к детали.

Геометрическая информация о поверхности $И$ инструмента может быть задана аналитически, например,

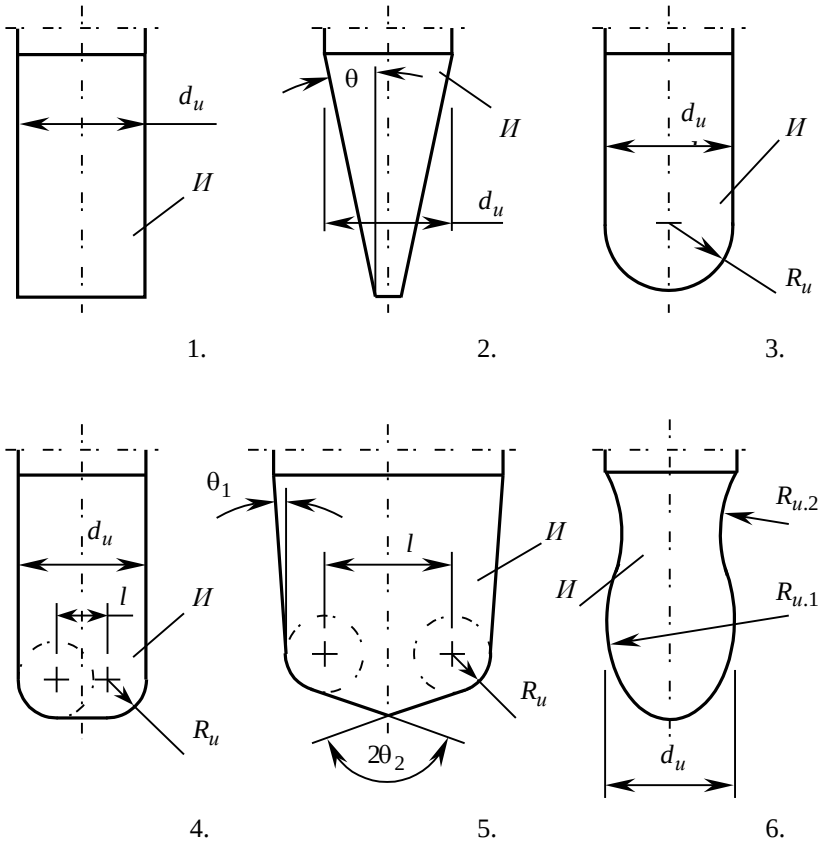


Рис. 1.2. Режущие инструменты для обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ: цилиндрический (1), конический (2), со сферической головкой (3), с тороидальной рабочей частью (4), *АРТ* (5), фасонный (6).

уравнением поверхности вращения с учетом допуска на точность формы и размеров инструмента. Обычно относительно простая задача получения геометрической информации об исходной инструментальной поверхности может рассматриваться как частный случай задачи получения геометрической информации о сложной поверхности $Д$ детали. Поэтому ниже более детально остановимся на рассмотрении вопроса задания, аналитического описания и рациональной параметризации обрабатываемых поверхностей деталей.

Используются различные способы задания рабочих поверхностей деталей и инструментов. Широко используются способы задания поверхностей, разработанные в геометрии: матричный, векторный, в параметрической, явной или неявной форме. В различных отраслях машиностроения применяются инженерные методы задания и аналитического описания поверхностей деталей и инструментов – эти методы отличны от методов, применяемых в геометрии, но тесно с ними связаны и основаны на них. Многообразие методов аналитического описания поверхностей деталей и инструментов, применяемых в отраслевом машиностроении, достаточно велико.

Наиболее эффективный способ аналитического описания рабочих поверхностей деталей и инструментов должен быть максимально информативным и универсальным: пригодным как для описания поверхности $Д(И)$ любого вида, так и для всех возможных способов формообразующей обработки деталей.

При решении задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования рабочих поверхностей деталей, в том числе и сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ, возникает дилема – что целесообразнее:

– разрабатывать различные методики решения задачи синтеза для каждого из используемых способов задания поверхностей деталей и инструментов или
– первоначально преобразовывать исходные способы задания поверхностей к некоторому общему и исходя из этого развить обобщенный метод решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования любой поверхности детали.

С нашей точки зрения второй вариант целесообразнее. Поэтому в данной монографии рассмотрено как произвести переход от различных исходных способов задания и аналитического описания поверхности $Д(И)$ к общему способу их аналитического описания в натуральной форме.

Важно обратить внимание на то, что в отличие от геометрии, главной задачей которой является *анализ* свойств *заданных* поверхностей, первостепенной задачей *инженерной геометрии* (к области которой относится формообразование поверхностей деталей) является *синтез* новых технических решений, и только

после этого – *анализ* полученных результатов. Поэтому для теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей предпочтительным является описание поверхности $Д(И)$ через унифицированные параметры – в *натуральной форме* в функции параметров, характеризующих собственно поверхность $Д(И)$ без обязательного учета ее привязки к системе координат, например, к системе координат станка с ЧПУ. Это позволяет решать любые вычислительные задачи, связанные как с автоматизированным проектированием изделий, так и с программированием их обработки на станках с ЧПУ.

В пользу целесообразности использования аналитического описания поверхности $Д(И)$ в натуральной форме свидетельствует следующее. Характерной особенностью сложных поверхностей деталей является то, что такого типа поверхности не допускают движения "*самих по себе*". Если поверхность $Д$ не может перемещаться "*сама по себе*", то подходить к решению задачи ее формообразования следует локально, рассмотрев первоначально участок поверхности $Д$ в дифференциальной окрестности текущей точки на ней, например, в точке ее касания с поверхностью $И$ инструмента. Локальный подход к решению задач формообразования сложных поверхностей деталей требует широкого привлечения хорошо разработанных методов дифференциальной геометрии, эффективных для анализа их локальной топологии, и предполагает аналитическое представление поверхностей $Д(И)$ в натуральной форме. Поэтому решать задачи синтеза наиболее эффективных способов формообразующей обработки деталей удобнее исходя из натурального представления геометрической информации о поверхностях $Д$ и $И$.

Приведение аналитического описания геометрической информации о поверхности $Д(И)$ к натуральной форме возможно при любой исходной форме представления их уравнениями и при любом виде параметризации. Способ задания поверхности $Д(И)$ в натуральной форме универсален и исчерпывающе информативен. Он пригоден для описания любых поверхностей деталей и инструментов и для решения самых разнообразных задач формообразования рабочих поверхностей деталей в машиностроении, в том числе и для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования заданной поверхности детали.

Геометрическая информация о поверхности $Д$ детали задается на основе ее уравнения с учетом требований к точности обработки: исходым уравнением описывается номинальная поверхность $Д_н$ детали, с одной или с обеих сторон которой расположены две поверхности – верхнего $Д^{\delta.в}$ и нижнего $Д_{\delta.н}$ допусков. Поверхности $Д^{\delta.в}$ и $Д_{\delta.н}$ отстоят от поверхности $Д_н$ на алгебраическое значение верхнего $\delta^{д.в}$ и нижнего $\delta_{д.н}$ предельных отклонений. Предельные отклонения $\delta^{д.в}$ и $\delta_{д.н}$ могут принимать положительные, отрицательные и нулевое значения. Реальная поверхность $Д_р$ после обработки детали не должна выходить за пределы поверхностей допуска $Д^{\delta.в}$ и $Д_{\delta.н}$, которые рассматриваются как ограничивающие.

Для многих деталей получить полное непрерывное аналитическое описание их рабочих поверхностей удается не всегда. В таких случаях геометрическая информация о поверхности $Д$ задается не функционально, а дискретно – совокупностью точек или линий, принадлежащих этой поверхности, координатами точек и направлениями нормалей к поверхности в них и пр.

Использование дискретных способов задания геометрической информации об обрабатываемой поверхности детали сопряжено с двумя дополнительными задачами, связанными с расчетом основных дифференциально-геометрических характеристик ее локальных участков.

Во-первых, эта задача может быть решена в дискретной форме, например, по координатам точек, определяющих поверхность $Д$. В этом случае даже при высокой плотности элементов, задающих поверхность $Д$, достичь требуемой точности расчета основных дифференциально-геометрических характеристик локальных участков обрабатываемой поверхности бывает трудно. Это отрицательно сказывается на точности обработанной поверхности детали.

Во-вторых, поверхность $Д$ может быть аппроксимирована (целиком или кусочно) *отсеками* поверхностей с решением вопроса их стыковки из условия непрерывности или по требуемому порядку гладкости. Таким путем дискретное задание поверхности $Д$ приводится к аналитическому ее описанию уравнением – целиком всей поверхности или отдельных ее отсеков. Расчет параметров локальной геометрии дискретно заданной поверхности детали в этом случае выполняется как для поверхности $Д$, заданной одним из

аналитических методов. При этом требуется достижение высокой степени точности аппроксимации обрабатываемой поверхности детали.

При дискретном задании геометрическую информацию о поверхности детали также целесообразно преобразовать в натуральную форму.

Уравнение поверхности часто определяет ее как неограниченную – например, круглый цилиндр имеет неограниченную длину. В машиностроении в качестве рабочих поверхностей деталей преимущественно используются поверхности не целиком, а только их фрагменты[1].

Определение 1.3. *Фрагмент поверхности – это часть поверхности детали или инструмента, ограниченная расположенным на ней замкнутым контуром.*

Форма границ фрагмента поверхности $Д(И)$ может быть непрерывной кривой или образованной совокупностью дуг на ней.

1.2.2. Аналитическое описание и элементы локальной геометрии номинальных поверхностей деталей и инструментов. Для перехода от исходных, в том числе и инженерных, способов задания поверхности $Д(И)$ к описанию ее в натуральной форме, необходимо рассмотреть порядок расчета элементов локальной геометрии для наиболее широко применяемых способов аналитического описания поверхностей $Д(И)$.

1.2.2.1. Матричная форма. Решение задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали тесно связано с необходимостью выполнения многократных преобразований координат. Преобразования координат и пространства аналитически удобно описывать в матричной форме. Это одна из причин, почему аналитическое представление исходной геометрической информации о поверхности $Д(И)$ в матричной форме обладает рядом преимуществ. Оно просто реализуется на ЭВМ и в системах ЧПУ станками.

Уравнение поверхностей деталей и инструментов. Параметризованную поверхность можно рассматривать как непрерывное отображение плоской области в трехмерное пространство (Залгаллер В.А., 1975).

Отображение плоской области в пространство – это удобное представление поверхности. Точки поверхности описываются отображением $\mathbf{P}(U)$, где $\mathbf{P}$ есть точка в пространстве и $\mathbf{U}^{(M)}$ – есть точка на плоскости. Если на плоскости выбрана система координат Ouv, то поверхность представлена функцией $\mathbf{P}(U,V)$ двух действительных переменных. Если система координат $X_{\partial(u)}Y_{\partial(u)}Z_{\partial(u)}$ выбрана в пространстве, тогда отображение единственным образом определяется тремя скалярными функциями $X_{\partial(u)}=X_{\partial(u)}(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)})$, $Y_{\partial(u)}=Y_{\partial(u)}(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)})$ и $Z_{\partial(u)}=Z_{\partial(u)}(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)})$. Здесь и далее индекс "$\partial(u)$" означает, что соответствующий параметр или выражение, взятые с индексом "∂", относятся к формообразуемому участку поверхности $Д$ детали, а то же выражение или параметр, взятые с индексом "u" – к исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента.

Отображение $\mathbf{P}(U)$ является параметризацией или системой локальных координат в окрестности точки, которую принято называть координатной окрестностью.

Рассмотрим матрицу линейного отображения $d\,\mathbf{P}(U)$ в каноническом базисе $\mathbf{e}_1=(1,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1)$ двухмерного пространства, координатами которого являются (U,V) и $\mathbf{f}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{f}_2=(0,1,0)$ и $\mathbf{f}_3=(0,0,1)$ трехмерного пространства с координатами (X,Y,Z).

Пусть $q=(U^{(M)},V^{(M)})$. Вектор $\mathbf{e}_1$ касателен к кривой $\mathbf{U}\to(U,V^{(M)})$, отображением которой есть кривая

$$\mathbf{U}\ \to\ (X(U,V^{(M)}),Y(U,V^{(M)}),Z(U,V^{(M)})).$$

Эта воображаемая кривая является координатной кривой $V=V^{(M)}$: она лежит на поверхности $Д(И)$ и в

[1]Одним из немногих, если не единственным, исключением является сферическая поверхность шарика шарикоподшипника, которая целиком является рабочей.

точке $\mathbf{P}(U)$ имеет касательный вектор (рис. 1.3)

$$\left(\frac{\partial X}{\partial U}, \frac{\partial Y}{\partial U}, \frac{\partial Z}{\partial U}\right) = \frac{\partial \mathbf{P}(U)}{\partial U},$$

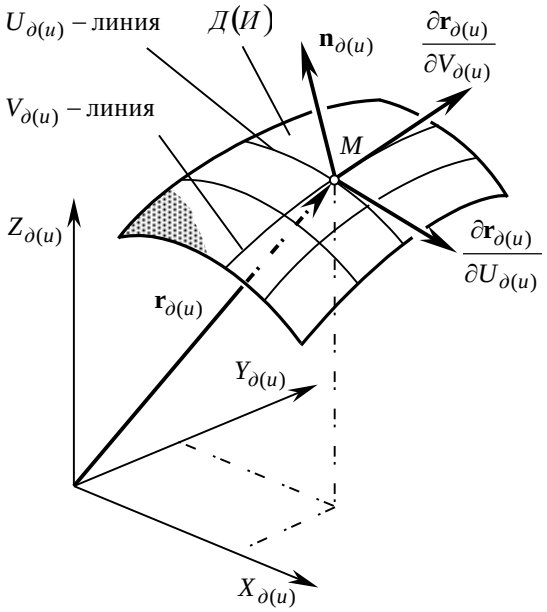


Рис. 1.3. К аналитическому описанию отсека поверхности $Д(И)$.

где производные вычисляются в точке $(U^{(M)}, V^{(M)})$, а вектор $\mathbf{P}(U)$ показан своими компонентами в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Очевидно, что

$$d\mathbf{P}(\mathbf{e}_1) = \left(\frac{\partial X}{\partial U}, \frac{\partial Y}{\partial U}, \frac{\partial Z}{\partial U}\right) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial U}.$$

Аналогично, используя координатную кривую $(U = U^{(M)})$ (образ $\mathbf{P}(U)$ кривой $\mathbf{V} \to (U^{(M)}, V)$), получим

$$d\mathbf{P}(\mathbf{e}_2) = \left(\frac{\partial X}{\partial V}, \frac{\partial Y}{\partial V}, \frac{\partial Z}{\partial V}\right) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial V}.$$

Поэтому отнесенная к базису матрица линейного отображения $d\,\mathbf{P}(U)$ имеет вид:

$$d\mathbf{P}(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \\ \frac{\partial Z}{\partial U} & \frac{\partial Z}{\partial V} \end{pmatrix}.$$

Матричная форма аналитического описания поверхности $Д(И)$ представима в виде:

$$(1.1) \qquad [\mathbf{r}_{\partial(u)}] = \begin{bmatrix} X_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ Y_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ Z_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ 1 \end{bmatrix} = [X_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \;\; Y_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \;\; Z_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \;\; 1]^T.$$

Первые производные уравнения поверхности Д(И) в матричной форме записываются так:

$$(1.2) \qquad \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad (1.3) \qquad \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ 1 \end{bmatrix}$$

соответственно.

Столбцовые матрицы (2) и (3) первых производных определяют векторы, касательные к $(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$– координатным линиям, и, следовательно, направления проходящих через заданную точку M

касательных прямых. Уравнение каждой из касательных прямых записывается как уравнение прямой линии, проходящей через точку M в направлении (2) и (3) соответственно. Направление касательных (положительное или отрицательное) определяется направлением увеличения соответствующего $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$ параметра: положительное направление касательных соответствует росту $(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})-$ параметров (рис. 1.4).

Необходимо обратить внимание на то, что направления касательных $\left[\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right]$ и $\left[\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right]$ не обязательно взаимно ортогональны и в общем случае не единичны.

Касательная плоскость к поверхности $Д(И)$ в текущей ее точке $\left[\mathbf{r}^{(M)}_{\partial(u)}\left(U^{(M)}_{\partial(u)}, V^{(M)}_{\partial(u)}\right)\right]$ определяется через контингенцию поверхности в этой же точке M. Под контингенцией понимается множество всех предельных положений, которые луч, проведенный из точки M через точку $\left[\mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)\right]$ может занять при $\left[\mathbf{r}_{\partial(u)}\right]\to M$. В предельном случае, когда все лучи лежат в одной плоскости, получаем плоскость, касательную к поверхности $Д(И)$ в текущей точке M на ней.

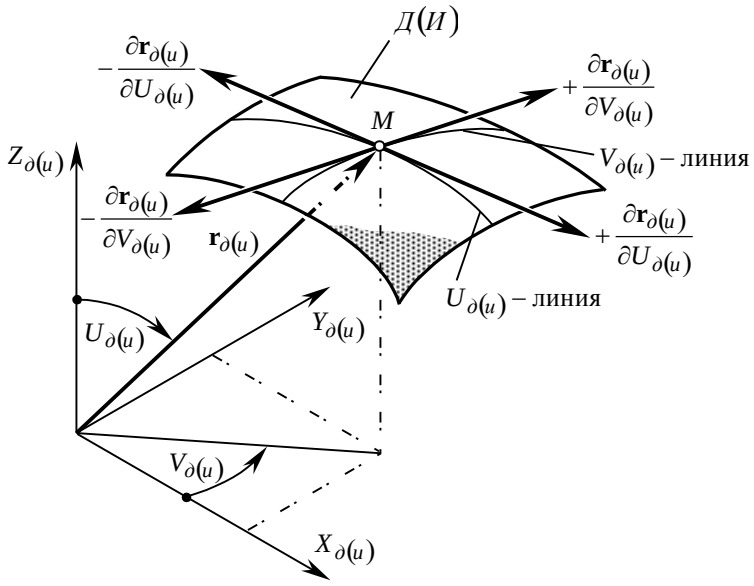


Рис. 1.4. К определению положительного направления касательных к координатным линиям.

В каждой точке гладкого регулярного участка поверхности $Д(И)$ существует касательная к ней плоскость, причем единственная. Положение такой плоскости в точке *M* поверхности определяется тем, что она проходит через две произвольные неколлинеарные касательные прямые, например, через две прямые, касательные к $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$ линиям. Касательную плоскость к поверхности $Д(И)$ можно задать и иной парой проходящих через точку M неколлинеарных касательных прямых. Однако обычно предпочтительнее задавать ее именно касательными к координатным линиям – это приводит к упрощению вычислений. Вместе с тем сформулированное требование не является обязательным и при необходимости может не соблюдаться, например, в случаях, когда уже имеются уравнения иных касательных прямых.

Уравнения касательных к координатным линиям позволяют записать уравнение касательной плоскости $КП$ к поверхности $Д(И)$ в ее неособой точке M (рис. 1.5):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{КП} - \mathbf{r}^{(M)}_{\partial(u)} \\ \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{КП} - \mathbf{r}^{(M)}_{\partial(u)} & \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} & \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} & 1 \end{bmatrix}^T = 0\,.$$

где $\mathbf{r}_{КП}$ – радиус-вектор текущей точки касательной плоскости.

Нормаль к поверхности Д(И). В теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей принято, что нормаль к поверхности $Д(И)$ в каждой точке поверхности направлена от тела детали или от *исходного инструментального тела* (ИИТ), т.е. от тела, ограниченного исходной инструментальной поверхностью. Это следует иметь в виду при выборе направлений осей локальной системы координат с тем, чтобы обеспечить правильное направление нормали.

Нормаль к поверхности $Д(И)$ в текущей точке M ее гладкого регулярного участка – это вектор $\lfloor \mathbf{N}_{\partial(u)} \rfloor$, проходящий через точку M перпендикулярно к касательной плоскости в этой же точке (см. рис. 1.5). Вектор нормали $\lfloor \mathbf{N}_{\partial(u)} \rfloor$ рассчитывается по уравнению:

$$\lfloor \mathbf{N}_{\partial(u)} \rfloor = \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \right]^T \otimes \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right] = \left[\frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \quad \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \quad \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \quad 1 \right] \otimes \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{X.\partial(u)} \\ N_{Y.\partial(u)} \\ N_{Z.\partial(u)} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

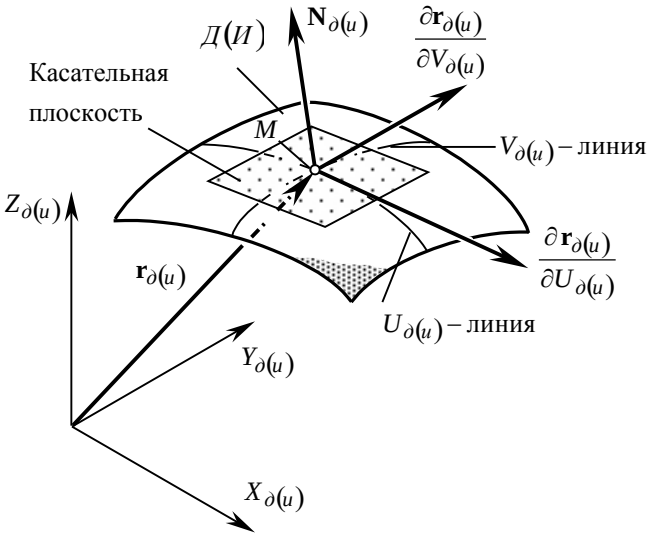


Рис. 1.5. Касательная плоскость к поверхности $Д(И)$ сложной формы.

Это выражение преобразуется к виду

$$\lfloor \mathbf{N}_{\partial(u)} \rfloor = \lfloor N_{X.\partial(u)} \quad N_{Y.\partial(u)} \quad N_{Z.\partial(u)} \quad 1 \rfloor^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} - \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} - \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} - \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Орт нормали к поверхности $Д(И)$ равен:

$$\lfloor \mathbf{n}_{\partial(u)} \rfloor = \frac{\lfloor \mathbf{N}_{\partial(u)} \rfloor}{\mathrm{mod} \lfloor \mathbf{N}_{\partial(u)} \rfloor}.$$

Первая основная квадратичная форма поверхности Д(И) по определению есть квадрат линейного элемента этой поверхности в направлении, определенном относительно нее соотношением $\frac{dV_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}$ дифференциалов.

Пусть $\lfloor \mathbf{l}(t) \rfloor = \lfloor \mathbf{r}(U_{\partial(u)}(t), V_{\partial(u)}(t)) \rfloor$ – регулярная кривая на поверхности $Д(И)$. Тогда квадрат дифференциала длины дуги этой кривой равен (Elber, G., Cohen, E., 1993):

$$\left(\frac{ds_{\partial(u)}}{dt} \right)^2 = \left[\frac{dU_{\partial(u)}}{dt} \cdot \frac{dV_{\partial(u)}}{dt} \right] \cdot \left[\hat{\mathbf{G}}_{\partial(u)} \right] \left[\frac{dU_{\partial(u)}}{dt} \cdot \frac{dV_{\partial(u)}}{dt} \right]^T = \Phi_{1.\partial(u)} \left[\frac{dU_{\partial(u)}}{dt} \cdot \frac{dV_{\partial(u)}}{dt} \right].$$

Функция $\Phi_{1.\partial(u)}$ известна как *первая основная квадратичная форма* поверхности $Д(И)$ с матрицей $\left\|\hat{\mathbf{G}}_{\partial(u)}\right\|$, равной:

$$\left\|\hat{\mathbf{G}}_{\partial(u)}\right\| = \left(\mathbf{g}_{ij}\right)_{\partial(u)} = \begin{bmatrix} \left\langle \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}, \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \right\rangle & \left\langle \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}, \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right\rangle \\ \left\langle \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}, \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \right\rangle & \left\langle \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}, \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right\rangle \end{bmatrix}.$$

Здесь скобки $\langle \ldots , \ldots \rangle$ обозначают внутреннее произведение.

Уравнение первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ может быть записано в виде:

$$\Phi_{1.\partial(u)} \quad \Rightarrow \quad ds^2_{\partial(u)} = E_{\partial(u)} dU^2_{\partial(u)} + 2F_{\partial(u)} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} dV^2_{\partial(u)} \tag{1.4}$$

и представимо в матричной форме:

$$\Phi_{1.\partial(u)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{mod}^2 \left[d\mathbf{r}_{\partial(u)}\right] = \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)} & dV_{\partial(u)} \end{bmatrix} \left[\Gamma_{\partial(u)}\right] \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)} \\ dV_{\partial(u)} \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

где симметричная матрица

$$\left[\Gamma_{\partial(u)}\right] = \begin{bmatrix} E_{\partial(u)} & F_{\partial(u)} \\ F_{\partial(u)} & G_{\partial(u)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

является *первой основной фундаментальной матрицей* или *метрическим тензором* поверхности $Д(И)$.

Коэффициенты первой основной квадратичной формы (*первой основной дифференциальной формы Гаусса*[1]) определяются по формулам:

$$E_{\partial(u)} = \mathrm{mod}^2 \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right]; \qquad F_{\partial(u)} = \mathrm{mod} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right] \cdot \mathrm{mod} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right]; \qquad G_{\partial(u)} = \mathrm{mod}^2 \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right].$$

---

[1] **Гаусс**, Карл Фридрих (***Gauss***, *Karl Friedrich*) (30.4.1777, Брауншвейг, – 23.2.1855, Гёттинген), немецкий математик, внесший фундаментальный вклад также в астрономию и в геодезию. Родился в семье водопроводчика. В 1794-95 открыл и в 1821-23 разработал основной математический метод обработки неравноценных наблюдательных данных (метод наименьших квадратов). Его геометрические исследования связаны с практикой геодезии. Изучение формы земной поверхности потребовало углубленного общего геометрического метода для исследования поверхностей. Выдвинутые Гауссом в этой области идеи получили выражение в сочинении *"Общие изыскания о кривых поверхностях"* (1828) [Gauss, K.-F., *Disquisitions Generales Circa Superficies Curvas*, Gottingen, 1828. (English translation: *General Investigation of Curved Surfaces*, by J.C.Morehead & A.M.Hiltebeitel, Princeton, 1902; reprinted with introduction by Courant, Raven Press, Hewlett, New York, 1965, 119p.).]. Руководящая мысль этого сочинения состоит в том, что при изучении поверхности как бесконечно тонкой гибкой пленки основное значение имеет не уравнение поверхности в декартовых координатах, а дифференциальная квадратичная форма, через которую выражается квадрат элемента длины и инвариантами которой являются все собственные свойства поверхности – прежде всего ее кривизна в каждой точке. Другими словами, Гаусс предложил рассматривать те свойства поверхности (т.н. внутренние), которые не зависят от изгибаний поверхности, не изменяющих длин линий на ней. Созданная таким образом внутренняя геометрия поверхностей в дальнейшем послужила образцом для создания *n*-мерной римановой геометрии.

Очевидно, что коэффициенты $E_{\partial(u)}$ и $G_{\partial(u)}$ всегда положительны ($E_{\partial(u)} > 0$, $G_{\partial(u)} > 0$), а коэффициент $F_{\partial(u)}$ может принимать и нулевое значение $\left(F_{\partial(u)} \geq 0\right]$. Поэтому первая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$ является положительно определенной – она принимает только неотрицательные значения ($\Phi_{1.\partial(u)} \geq 0$), а в нуль обращается только в случае, когда $\partial U_{\partial(u)} = \partial V_{\partial(u)} = 0$. Это очевидно также из того, что квадратный корень из первой основной квадратичной формы представляет собой дифференциал дуги кривой на поверхности $Д(И)$, длина которого может принимать только неотрицательные значения.

Приведенные соотношения для определения первой основной квадратичной формы поверхности $Д(И)$ и ее гауссовых коэффициентов $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$ и $G_{\partial(u)}$ чрезвычайно полезны при решении задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали на металлорежущем станке.

Если две поверхности $Д$ и $И$ имеют одинаковые первые основные квадратичные формы, т.е. $\Phi_{1.\partial} \equiv \Phi_{1.u}$, то одну из них можно наложить на другую. Для этого достаточно, чтобы выполнялись соотношения $E_{\partial} = E_u$, $F_{\partial} = F_u$ и $G_{\partial} = G_u$ (Норден, А.П., 1948, с. 174-175) – иными словами, наложимые одна на другую поверхности $Д$ и $И$ допускают такую параметризацию, при которой в точках этих поверхностей с одинаковыми криволинейными координатами соответствующие коэффициенты их первых основных квадратичных форм равны. Примерами поверхностей, разворачивающихся одна на другую, служат цилиндр и плоскость, катеноид и геликоид и др.

Свойство поверхностей $Д$ и $И$ быть наложенными одна на другую имеет важные технологические приложения. Вопрос о разворачиваемости одной поверхности на другую важен при решении задачи профилирования фасонных прижимных кулаков для ленточного шлифования сложных поверхностей деталей, например, для шлифования рабочих поверхностей турбинных лопаток и т.п. деталей. Поскольку шлифовальная лента изготавливается из тканного материала и может быть развернута на плоскость, то и фасонная рабочая поверхность прижимного кулака должна быть разворачивающейся на плоскость. Для этого достаточно, чтобы в каждой точке поверхности $И$ прижимного кулака выполнялось условие $\sqrt{E_u G_u - F_u^2} \equiv 0$. В противном случае абразивная лента неизбежно будет растягиваться неравномерно и, вследствие этого, рваться. При невыполнении условия $E_{\partial} = E_u$, $F_{\partial} = F_u$ и $G_{\partial} = G_u$ допустимы только упругие ее деформации.

Вторые производные уравнения поверхности $Д(И)$ просто получаются путем повторного дифференцирования соответствующих уравнений (2) и (3) для первых производных:

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right) \\ \dfrac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right) \\ \dfrac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right) \end{bmatrix}; \qquad \left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right) \\ \dfrac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right) \\ \dfrac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right) \end{bmatrix};$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right) \\ \dfrac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right) \\ \dfrac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right) \end{bmatrix}.$$

Вторая основная квадратичная форма поверхности Д(И) по определению есть проекция на направление нормали $\left[\mathbf{n}_{\partial(u)}\right]$ перемещения конца бесконечно малого вектора касательной $\left[d\mathbf{r}_{\partial(u)}\right]$.

Рассматривая все кривые $\mathbf{l}(t)$, проходящие через точку $M\left(U_{\partial(u)}^{(M)}, V_{\partial(u)}^{(M)}\right)$, и дифференцируя их уравнения дважды, для поверхности $Д(И)$ в точке $M\left(U_{\partial(u)}^{(M)}, V_{\partial(u)}^{(M)}\right)$ можно выделить свойства второго порядка. Вторые производные от $\mathbf{l}(t)$ в качестве факторов содержат выражения с $\left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right]$ и $\left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right]$. Однако внутреннее произведение этих выражений на $\left[\mathbf{n}_{\partial(u)}\right]$ всегда равно нулю, поскольку частные производные расположены в плоскости, касательной к поверхности $Д(И)$. Поэтому в $\left\langle \left[\mathbf{n}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)\right], \frac{d^2\mathbf{l}(t)}{dt^2}\right\rangle$ компонента $\frac{d^2\mathbf{l}(t)}{dt^2}$ направлена перпендикулярно к поверхности $Д(И)$ и состоит только из вторых производных:

$$\left\langle \left[\mathbf{n}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)\right], \frac{d^2\left[\mathbf{l}(t)\right]}{dt^2}\right\rangle = \left\langle \left[\mathbf{n}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)\right], \frac{d^2\left[\mathbf{r}_{\partial(u)}\right]}{dU_{\partial(u)}^2}\right\rangle \left(\frac{dU_{\partial(u)}}{dt}\right)^2 +$$

$$+ 2\left\langle \left[\mathbf{n}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)\right], \frac{d^2\left[\mathbf{r}_{\partial(u)}\right]}{dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)}}\right\rangle \frac{dU_{\partial(u)}}{dt}\cdot\frac{dV_{\partial(u)}}{dt} + \left\langle \left[\mathbf{n}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)\right], \frac{d^2\left[\mathbf{r}_{\partial(u)}\right]}{dV_{\partial(u)}^2}\right\rangle \left(\frac{dV_{\partial(u)}}{dt}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{dU_{\partial(u)}}{dt}\ \frac{dV_{\partial(u)}}{dt}\right]\cdot\left[\hat{L}_{\partial(u)}\right]\left[\frac{dU_{\partial(u)}}{dt}\ \frac{dV_{\partial(u)}}{dt}\right]^T = \Phi_{2.\partial(u)}\left[\frac{dU_{\partial(u)}}{dt}, \frac{dV_{\partial(u)}}{dt}\right].$$

Функция $\Phi_{2.\partial(u)}$ известна как *вторая основная квадратичная форма* поверхности $Д(И)$. Ее матрица $\left[\hat{L}_{\partial(u)}\right]$ записывается так:

$$\left[\hat{L}_{\partial(u)}\right] = \left(l_{ij}\right)_{\partial(u)} = \begin{bmatrix} \left\langle \mathbf{n}_{\partial(u)}, \frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2}\right\rangle & \left\langle \mathbf{n}_{\partial(u)}, \frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}\right\rangle \\ \left\langle \mathbf{n}_{\partial(u)}, \frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}\right\rangle & \left\langle \mathbf{n}_{\partial(u)}, \frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2}\right\rangle \end{bmatrix}.$$

Уравнение второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ преобразуется к виду:

$$\Phi_{2.\partial(u)} \quad \Rightarrow \quad -d\mathbf{r}_{\partial(u)}\cdot d\mathbf{n}_{\partial(u)} = L_{\partial(u)}\,dU_{\partial(u)}^2 + 2M_{\partial(u)}\,dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)} + N_{\partial(u)}\,dV_{\partial(u)}^2.$$

По аналогии с (5) для второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial(u)}$ можно записать ее матричное представление:

$$\Phi_{2.\partial(u)} = \left[dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)}\right]\begin{bmatrix} L_{\partial(u)} & M_{\partial(u)} \\ M_{\partial(u)} & N_{\partial(u)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} dU_{\partial(u)} \\ dV_{\partial(u)}\end{bmatrix}.$$

Симметричная матрица

$$\begin{bmatrix} L_{\partial(u)} & M_{\partial(u)} \\ M_{\partial(u)} & N_{\partial(u)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} & \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)} \partial U_{\partial(u)}} \\ \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} & \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} \end{bmatrix}$$

является *вторым фундаментальным тензором* поверхности $Д(И)$. Ее определитель (т.н. *определитель Грама*) равен полной (гауссовой) кривизне этой поверхности:

$$\begin{vmatrix} L_{\partial(u)} & M_{\partial(u)} \\ M_{\partial(u)} & N_{\partial(u)} \end{vmatrix} = k_{1.\partial(u)} \cdot k_{2.\partial(u)} = \tilde{G}_{\partial(u)}.$$

Элементы b_{ij} являются компонентами тензора кривизны в естественных координатах $\det(b_{ij}) = k_{1.\partial(u)} \cdot k_{2.\partial(u)} \det(g_{ij}) = k_{1.\partial(u)} \cdot k_{2.\partial(u)} \begin{vmatrix} E_{\partial(u)} & F_{\partial(u)} \\ F_{\partial(u)} & G_{\partial(u)} \end{vmatrix}$.

Вторую основную квадратичную форму $\Phi_{2.\partial(u)}$ называют также *оператором формы* или *отображением Вейнгартена*[1] (Koenderink, J.J., 1990, с. 211).

Коэффициенты $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ первой $\Phi_{1.\partial(u)}$ и $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$, $N_{\partial(u)}$ второй $\Phi_{2.\partial(u)}$ основных квадратичных форм (основных дифференциальных форм Гаусса) играют исключительно важную роль в дифференциальной геометрии поверхностей, в инженерной геометрии и в теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей. Они введены К.-Ф. Гауссом и носят название гауссовых коэффициентов соответственно *первого* (в них входят производные только первого порядка) и *второго* порядка (определяемые производными первого и второго порядка).

1.2.2.2. Векторная форма. В инженерной геометрии широкое применение находит векторная алгебра. Использование компактной векторной формы аналитического описания поверхности $Д(И)$ позволяет наглядно интерпретировать задачи формообразования поверхностей деталей геометрически. Решая задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования, часто приходится рассматривать векторное описание поверхностей $Д(И)$ совместно с матричным преобразованием координат.

Отличие вектора от столбцовой матрицы большей частью состоит в форме их записи, а использование той или иной формы записи определяется тем, в какое выражение – векторное или матричное они входят[2].

Чтобы к векторам можно было применять аппарат матричного исчисления, их записывают как матрицы-столбцы, составленные из координат векторов в выбранном базисе.

Уравнение поверхностей деталей и инструментов. На координаты $X_{\partial(u)}$, $Y_{\partial(u)}$, $Z_{\partial(u)}$ текущей точки на поверхности $Д(И)$ можно смотреть как на компоненты ее радиус-вектора $\mathbf{r}_{\partial(u)}$. Поэтому уравнение:

$$\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}), \qquad (U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \in G, \tag{1.7}$$

показывает, что радиус-вектор $\mathbf{r}_{\partial(u)}$ текущей точки M поверхности $Д(И)$ представляет собой функцию двух независимых переменных $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$.

В развернутом виде уравнение (7) записывается так:

---

[1] **Вейнгартен**, или ***Вайнгартен***, Юлиус (***Weingarten***, *J.*) (25.3.1836 – 16.6.1910) – немецкий математик. Родился в Берлине. Профессор политехникума в Фрейбурге. Основные труды относятся к дифференциальной геометрии. Известны так называемые деривационные формулы, поверхность, функция, теорема, носящие имя Вейнгартена.

[2] При этом не следует забывать и об отличиях. Например, для векторов определено как векторное, так и скалярное произведение, чего нет для матриц.

$$\mathbf{r}_{\partial(u)} = X_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})\mathbf{i}_{\partial(u)} + Y_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})\mathbf{j}_{\partial(u)} + Z_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})\mathbf{k}_{\partial(u)}. \tag{1.8}$$

Поверхность $Д(И)$ будет задана, если задана векторная функция (7). При этом, фиксируя один из параметров $U_{\partial(u)}$ или $V_{\partial(u)}$, имеем один переменный параметр и, следовательно, векторные уравнения

$$\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}^{(M)}; V_{\partial(u)}) \qquad \text{и} \qquad \mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}^{(M)})$$

описывают лежащие на поверхности $Д(И)$ параметрические кривые. Очевидно, что $U_{\partial(u)}^{(M)}$ и $V_{\partial(u)}^{(M)}$ являются константами из множества значений $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$. Если варьировать величинами констант, поверхность $Д(И)$ покроется непрерывной сетью параметрических кривых, формируя при этом семейство кривых $U_{\partial(u)} = Const$ и трансверсальное ему семейство кривых $V_{\partial(u)} = Const$. Через каждую обыкновенную точку на поверхности $Д(И)$ проходит по одной координатной кривой из каждого семейства.

Угол $\omega_{\partial(u)}$ между параметрическими $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$ кривыми рассчитывается по одной из следующих формул:

$$\cos\omega_{\partial(u)} = \frac{F_{\partial(u)}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}}}; \qquad \sin\omega_{\partial(u)} = \frac{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}}} = \frac{H_{\partial(u)}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}}}; \qquad \tan\omega_{\partial(u)} = \frac{H_{\partial(u)}}{F_{\partial(u)}}.$$

Первые производные уравнения поверхности $Д(И)$ при задании их векторным уравнением записываются в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\mathbf{i}_{\partial(u)} + \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\mathbf{j}_{\partial(u)} + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\mathbf{k}_{\partial(u)}; \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\mathbf{i}_{\partial(u)} + \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\mathbf{j}_{\partial(u)} + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\mathbf{k}_{\partial(u)}. \tag{1.10}$$

Первые производные уравнений (9) и (10) поверхности $Д(И)$ по каждому из $(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ – параметров определяют векторы $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$, касательные к координатным линиям. Векторы касательных $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$ не обязательно взаимно ортогональны и в общем случае не единичны.

Касательная плоскость. В случае описания поверхности $Д(И)$ уравнением в векторной форме касательная плоскость определяется так

$$(\mathbf{r}_{КП} - \mathbf{r}_{\partial(u)}^{(M)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = 0, \tag{1.11}$$

где $\mathbf{r}_{КП}$ – радиус-вектор текущей точки касательной плоскости.

Нормаль к поверхности $Д(И)$ в текущей точке M ее гладкого регулярного участка – это вектор $\mathbf{N}_{\partial(u)}$, проходящий через точку M перпендикулярно к касательной плоскости в этой же точке (см. рис. 1.5). Вектор

нормали $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ к поверхности $Д(И)$ рассчитывается по формуле

$$\mathbf{N}_{\partial(u)} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \left[\frac{\partial(Y_{\partial(u)}, Z_{\partial(u)})}{\partial(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})} \quad \frac{\partial(Z_{\partial(u)}, X_{\partial(u)})}{\partial(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})} \quad \frac{\partial(X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)})}{\partial(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})} \right] = \left[J_x \quad J_y \quad J_z \right]. \tag{1.12}$$

Здесь якобианы J_x, J_y, J_z соответственно равны:

$$J_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix} = \frac{\partial(Y_{\partial(u)}, Z_{\partial(u)})}{\partial(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})}; \tag{1.13}$$

$$J_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix} = \frac{\partial(Z_{\partial(u)}, X_{\partial(u)})}{\partial(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})}; \tag{1.14}$$

$$J_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix} = \frac{\partial(X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)})}{\partial(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})}. \tag{1.15}$$

Орт нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{n}_{\partial(u)} = \frac{\mathbf{N}_{\partial(u)}}{\left|\mathbf{N}_{\partial(u)}\right|} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right|},$$

или, с учетом (12):

$$\mathbf{n}_{\partial(u)} = \left[\frac{J_x}{\sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}} \quad \frac{J_y}{\sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}} \quad \frac{J_z}{\sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}} \right].$$

Зависимости (9) и (10) позволяют так записать уравнение прямой, направляющим вектором которой служит нормаль к поверхности $Д(И)$:

$$\mathbf{r}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{r}_{\partial(u)} + \lambda \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right),$$

где λ – число, определяющее положение текущей точки на прямой.

Нормаль к поверхности $Д(И)$ и ее первые производные компактно записываются так (Maekawa, T., and Patrikalakis, N., 1994):

$$\mathbf{N}_{\partial(u)} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}}.$$

В геометрическом аспекте поверхность имеет две стороны. Практически же она всегда принадлежит детали или инструменту, носителям формы этой поверхности. Это приводит к тому, что в машиностроении различают *открытую* и *закрытую* стороны поверхности детали (рис. 1.6) и инструмента. Сторона поверхности $Д(И)$, примыкающая к материалу детали или инструмента, является закрытой, а противоположная, свободная для контакта с другими предметами, – открытой.

В теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей принято, что в каждой точке нормаль к поверхности $Д(И)$ проведена с открытой ее стороны, т.е. направлена от тела детали и от исходного инструментального тела. Это следует иметь в виду при выборе направлений осей локальной системы координат или порядка сомножителей в формуле (12) с тем, чтобы векторное произведение касательных к поверхности $Д(И)$ обеспечивало правильное направление нормали к ней.

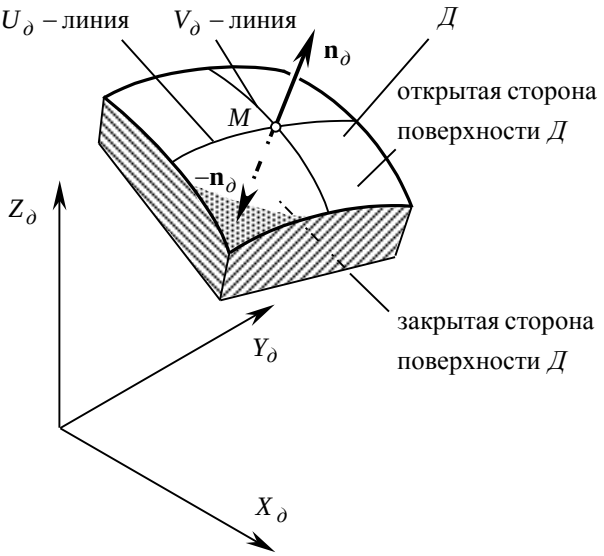


Рис. 1.6. Открытая и закрытая стороны поверхности детали $Д$.

Пример 1.1. Рассмотрим порядок определения вектора нормали $\mathbf{N}_u$ к исходной инструментальной поверхности конической фрезы (рис. 1.7) с углом при вершине 45° в текущей точке M на ее исходной инструментальной поверхности $И$.

Пусть поверхность $И$ параметризована так:

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i}_u U_u \sin\theta_u \sin V_u + \mathbf{j}_u U_u \sin\theta_u \cos V_u + \mathbf{k}_u U_u \cos\theta_u.$$

Тогда:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} = \mathbf{i}_u \sin\theta_u \sin V_u + \mathbf{j}_u \sin\theta_u \cos V_u + \mathbf{k}_u \cos\theta_u;$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} = \mathbf{i}_u U_u \sin\theta_u \cos V_u - \mathbf{j}_u U_u \sin\theta_u \sin V_u.$$

Следовательно

$$\mathbf{N}_u = \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_u & \mathbf{k}_u \\ U_u \sin\theta_u \cos V_u & -U_u \sin\theta_u \sin V_u & 0 \\ \sin\theta_u \sin V_u & \sin\theta_u \cos V_u & \cos\theta_u \end{vmatrix} =$$

$$= -\mathbf{i}_u U_u \sin\theta_u \cos\theta_u \sin V_u + \mathbf{j}_u U_u \cos\theta_u + \mathbf{k}_u U_u \sin^2\theta_u.$$

Исходя из этого просто находится орт нормали.

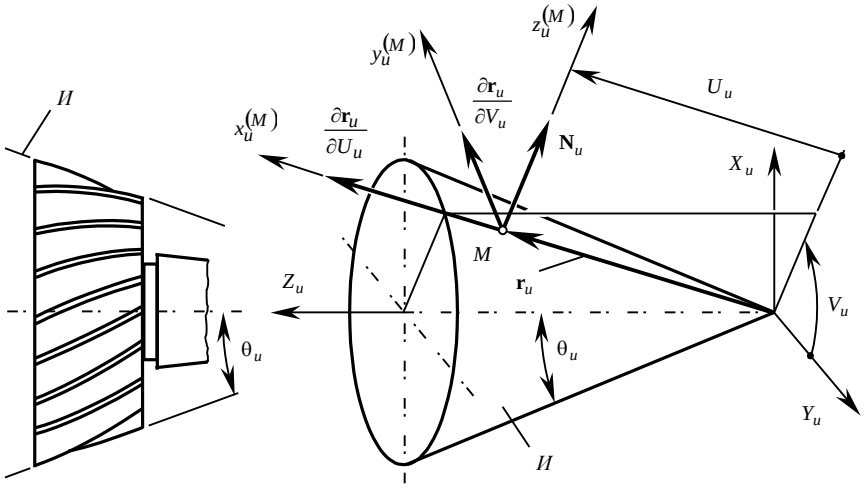


Рис. 1.7. Построение нормали к конической поверхности $И$ инструмента.

Вектор нормали $\mathbf{N}_u$ к поверхности $И$ и векторы касательных $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}, \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}$ к координатным кривым на ней используются в качестве направляющих векторов локальной системы координат (подвижного репера) $x_u^{(M)} y_u^{(M)} z_u^{(M)}$ с началом в текущей точке M на поверхности $И$.

Создающие базис орты этой системы будут:

$$\mathbf{i}_u^{(M)} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}\right|}; \qquad \mathbf{j}_u^{(M)} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\right|}; \qquad \mathbf{k}_u^{(M)} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\right|}. \tag{1.16}$$

Орт $\mathbf{k}_u^{(M)} \equiv \mathbf{n}_u$ локальной системы координат на поверхности $Д(И)$ равен

$$\mathbf{n}_u = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\right)^2}}. \tag{1.17}$$

Направляющие косинусы вектора нормали рассчитываются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_u}{\partial U_u} & \frac{\partial Z_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial Y_u}{\partial V_u} & \frac{\partial Z_u}{\partial V_u} \end{vmatrix}}{N_u}; \qquad \cos\beta = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_u}{\partial U_u} & \frac{\partial X_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial Z_u}{\partial V_u} & \frac{\partial X_u}{\partial V_u} \end{vmatrix}}{N_u}; \qquad \cos\gamma = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial X_u}{\partial U_u} & \frac{\partial Y_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial X_u}{\partial V_u} & \frac{\partial Y_u}{\partial V_u} \end{vmatrix}}{N_u},$$

где нормирующий множитель равен

$$N_u = |\mathbf{N}_u| = \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_u}{\partial U_u} & \frac{\partial Z_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial Y_u}{\partial V_u} & \frac{\partial Z_u}{\partial V_u} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_u}{\partial U_u} & \frac{\partial X_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial Z_u}{\partial V_u} & \frac{\partial X_u}{\partial V_u} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial X_u}{\partial U_u} & \frac{\partial Y_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial X_u}{\partial V_u} & \frac{\partial Y_u}{\partial V_u} \end{vmatrix}^2}.$$

С учетом изложенного приходим к уравнению

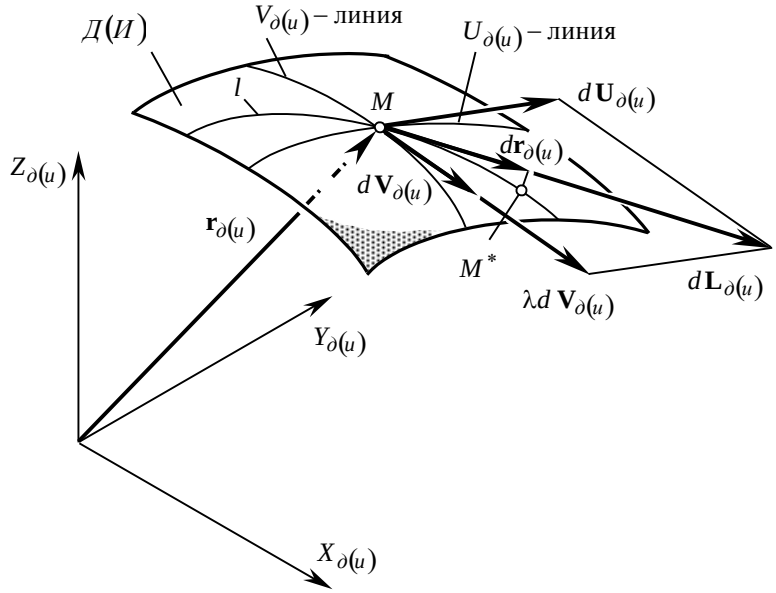


Рис. 1.8. К определению первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$.

$$\frac{x_u^{(\mathbf{n})} - X_u^{(M)}}{\cos\alpha} = \frac{y_u^{(\mathbf{n})} - Y_u^{(M)}}{\cos\alpha} = \frac{z_u^{(\mathbf{n})} - Z_u^{(M)}}{\cos\alpha}.$$

Это уравнение задает прямую, проходящую через точку M в направлении нормали к исходной инструментальной поверхности. Здесь обозначено: $x_u^{(\mathbf{n})}$, $y_u^{(\mathbf{n})}$ и $z_u^{(\mathbf{n})}$ – координаты текущей точки этой прямой.

Первая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$. Задание поверхности $Д(И)$ уравнением в векторной форме позволяет наглядно интерпретировать геометрический смысл ее первой основной квадратичной формы. Для этого рассмотрим лежащую на поверхности *Д(И)* линию l (рис. 1.8), которую определим так

$$\mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}(t), V_{\partial(u)}(t)\right) = \mathbf{r}_{\partial(u)}(t), \qquad (1.18)$$

где t – параметр кривой l.

Если точка смещается вдоль линии l из положения M в положение M^*, то вектор $d\mathbf{r}_{\partial(u)}$ определит инфинитезимальное перемещение этой точки. Ограничиваясь рассмотрением только членов первого порядка малости, получим

$$d\mathbf{r}_{\partial(u)} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} dU_{\partial(u)} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} dV_{\partial(u)} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial U_{\partial(u)}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial V_{\partial(u)}}{\partial t} dt.$$

Здесь $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = d\mathbf{U}_{\partial(u)}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = d\mathbf{V}_{\partial(u)}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial V_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \lambda d\mathbf{V}_{\partial(u)}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial V_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = d\mathbf{L}_{\partial(u)}$,

а величины всех производных рассчитываются в точке M.

Поскольку векторы $d\mathbf{U}_{\partial(u)}$ и $d\mathbf{V}_{\partial(u)}$ определяют касательную плоскость, то вектор $d\mathbf{r}_{\partial(u)}$ смещения точки также лежит в этой плоскости.

В предположении, что $d\mathbf{U}_{\partial(u)} \neq 0$, смещение $d\mathbf{r}_{\partial(u)}$ равно

$$d\mathbf{r}_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial V_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \right) dU_{\partial(u)}. \qquad (1.19)$$

Векторы $d\mathbf{r}_{\partial(u)}$ и $\lambda d\,\mathbf{V}_{\partial(u)}$ коллинеарные – это следует из уравнения (19), согласно которому направление смещения точки по поверхности $Д(И)$ зависит только от отношения

(1.20) $$\frac{dV_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} = \left(\frac{\partial\, V_{\partial(u)}}{\partial\, t}\right) : \left(\frac{\partial\, U_{\partial(u)}}{\partial\, t}\right).$$

Величина смещения точки M по длине дуги равна

(1.21) $$dS_{\partial(u)} = \left|d\mathbf{r}_{\partial(u)}\right|,$$

а *первая основная квадратичная форма* поверхности $Д(И)$ представляет собой квадрат дифференциала длины этой дуги

(1.22) $$\Phi_{1.\partial(u)} \;\Rightarrow\; dS^2_{\partial(u)} = d\mathbf{r}^2_{\partial(u)}.$$

Таким образом, по определению первая основная квадратичная форма $\Phi_{1.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ есть квадрат линейного элемента этой поверхности в направлении, определенном относительно поверхности соотношением $\dfrac{dV_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}$ дифференциалов:

$$\Phi_{1.\partial(u)} \;\Rightarrow\; d\mathbf{r}^2_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial\, U_{\partial(u)}}dU_{\partial(u)} + \frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial\, V_{\partial(u)}}dV_{\partial(u)}\right)^2 =$$

(1.23) $$= \left(\frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}}\right)^2 dU^2_{\partial(u)} + 2\left(\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}}\right)dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)} + \left(\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}}\right)^2 dV^2_{\partial(u)} =$$

$$= E_{\partial(u)}\,dU^2_{\partial(u)} + 2F_{\partial(u)}\,dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}\,dV^2_{\partial(u)}.$$

В обозначениях Гаусса имеем

(1.24) $$d\mathbf{r}_{\partial(u)} = \frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}}dU_{\partial(u)} + \frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}}dV_{\partial(u)};$$

$$E_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}}\right)^2; \qquad F_{\partial(u)} = \frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}}; \qquad G_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}}\right)^2.$$

Гауссовы коэффициенты $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ первой основной квадратичной формы поверхности $Д(И)$ представляют собой скалярные функции внутренних координат – функции $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$параметров:

$$E_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}}\right)^2 \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right),$$

$$F_{\partial(u)} = \frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)\cdot\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right),$$

$$G_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \right)^2 (U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}).$$

В координатах они соответственно равны:

$$E_{\partial(u)} = \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}}; \qquad F_{\partial(u)} = \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}}; \qquad G_{\partial(u)} = \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}}. \tag{1.25}$$

Здесь и далее все частные производные вычисляются в одной точке на поверхности $Д(И)$, например, в точке *К* их касания.

Первая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$ может быть записана в такой форме (Maekawa, T., Patrikalakis, N., 1994):

$$\Phi_{1.\partial(u)} = d\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot d\mathbf{r}_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} dU_{\partial(u)} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} dV_{\partial(u)} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} dU_{\partial(u)} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} dV_{\partial(u)} \right).$$

Этому соотношению соответствует следующая форма записи коэффициентов первой основной квадратичной формы поверхности $Д(И)$ и их первых производных (Maekawa, T., Patrikalakis, N., 1994):

$$E_{\partial(u)} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}; \qquad \frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = 2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}}; \qquad \frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = 2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}};$$

$$F_{\partial(u)} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}};$$

$$\frac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}; \qquad \frac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}};$$

$$G = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}; \qquad \frac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = 2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}; \qquad \frac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = 2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}}.$$

Квадрат дискриминанта линейного элемента обозначается так:

$$H^2_{\partial(u)} = E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \right)^2 - \left(\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \right)^2 = \left[\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \quad \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \right]^2 \tag{1.26}$$

или в координатах

$$H^2_{\partial(u)} = \left| \frac{\partial\, (Y_{\partial(u)}, Z_{\partial(u)})}{\partial\, (U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})} \right|^2 + \left| \frac{\partial\, (Z_{\partial(u)}, X_{\partial(u)})}{\partial\, (U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})} \right|^2 + \left| \frac{\partial\, (X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)})}{\partial\, (U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})} \right|^2 > 0;$$

$$H_{\partial(u)} = \sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}.$$

Всегда принимается, что $H_{\partial(u)} = +\sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}$.

Выражение для площади $S_{\partial(u)}$ фрагмента поверхности $Д(И)$ имеют вид (Ефимов Н.В., 1978):

$$S_{\partial(u)} = \iint\limits_{\Sigma} dX_{\partial(u)} dY_{\partial(u)} = \iint\limits_{\Sigma} \left| \frac{\partial\left(X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}\right)}{\partial\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)} \right| dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} =$$

(1.27)

$$= \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \\ \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix}^2} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)}.$$

В связи с тем, что для измерения длин дуг на поверхностях $Д$ и $И$, углов между двумя пересекающимися кривыми на них и площадей отсеков поверхностей достаточно знать только первую основную квадратичную форму, говорят, что квадратичная форма $Ф_{1.\partial(u)}$ определяет метрику поверхности $Д(И)$, в связи с чем называют ее *линейным элементом* этой поверхности.

Если рассмотрение вести в ортонормированной системе $x^{(M)} y^{(M)} z^{(M)}$, начало координат которой совмещено с точкой M, оси $x^{(M)}$ и $y^{(M)}$ расположены в плоскости, касательной к поверхности $Д(И)$ в точке M, а ось $z^{(M)}$ направлена по нормали к ней (как это имеет место для подвижного репера с базисом (16)), то вследствие равенства нулю косинусов углов, образованных координатными осями $x^{(M)}$ и $y^{(M)}$, а также этими координатными осями с нормалью к поверхности $Д(И)$, коэффициенты первой основной квадратичной формы $Ф_{1.\partial(u)}$ приобретают особенно простой вид:

$$E_{\partial(u)} = 1, \qquad F_{\partial(u)} = 0, \qquad G_{\partial(u)} = 1.$$

Следовательно, составленный из этих коэффициентов дискриминант $H_{\partial(u)} = \sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}$ в рассматриваемом случае будет тождественно равен $H_{\partial(u)} \equiv 1$.

В общем случае величина дискриминанта $H_{\partial(u)}$ рассчитывается как модуль векторного произведения:

(1.28)
$$H_{\partial(u)} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right|.$$

Раскрыв первую фундаментальную матрицу (6) или исходя из соотношений (26), получим:

(1.29)
$$E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \right) \cdot \left(\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \right) - \left(\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \right)^2 .$$

Лагранж[1] установил для векторов, что

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\cdot(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e})^2=(\mathbf{A}\times\mathbf{e})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{e}).$$

Если применить результат Лагранжа к соотношению (29), получим:

$$H_{\partial(u)}^2=\left[\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}\right]\cdot\left[\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right].$$

Использование дискриминанта в форме (28) позволяет привести еще одно соотношение, по которому можно определить орт нормали к сложной поверхности $Д(И)$:

$$\mathbf{n}_{\partial(u)}=\frac{\dfrac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\times\dfrac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}}{\left|\dfrac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\times\dfrac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}\right|}=\frac{\dfrac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\times\dfrac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}-F_{\partial(u)}^2}}.\qquad(1.30)$$

Вторые производные уравнения поверхности $Д(И)$ при задании ее векторным уравнением, имеют вид:

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}^2}=\frac{\partial^2X_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}^2}\mathbf{i}_{\partial(u)}+\frac{\partial^2Y_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}^2}\mathbf{j}_{\partial(u)}+\frac{\partial^2Z_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}^2}\mathbf{k}_{\partial(u)};$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}\partial\,V_{\partial(u)}}=\frac{\partial^2X_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}\partial\,V_{\partial(u)}}\mathbf{i}_{\partial(u)}+\frac{\partial^2Y_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}\partial\,V_{\partial(u)}}\mathbf{j}_{\partial(u)}+\frac{\partial^2Z_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}\partial\,V_{\partial(u)}}\mathbf{k}_{\partial(u)};$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}^2}=\frac{\partial^2X_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}^2}\mathbf{i}_{\partial(u)}+\frac{\partial^2Y_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}^2}\mathbf{j}_{\partial(u)}+\frac{\partial^2Z_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}^2}\mathbf{k}_{\partial(u)}.$$

Эти производные используются для определения кривизны поверхности $Д(И)$ и др. параметров ее локальной топологии – детально они рассматриваются ниже. Здесь кратко остановимся только на разъяснении геометрического смысла вектора перекрестной производной.

Перекрестную производную $\dfrac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}\partial\,V_{\partial(u)}}$ часто называют *вектором кручения* поверхности $Д(И)$, т.е.

---

[1]**Лагранж**, Жозеф Луи (25.1.1736 – 10.4.1813) – французский математик и механик, чл. Берлинской АН (1759), Парижской АН (1772), почетный чл. Петербургской АН (1776). Родился в Турине (Италия), высшее образование получил в артиллерийском училище в Турине, еще до окончания которого начал преподавать в нем математику. Мемуар "*О способах нахождения наибольших и наименьших величин интегралов"* принес ему признание. В 1766 – 1787 Лагранж был президентом Берлинской АН. После открытия Института и Бюро долгот Лагранж становится их членом и в 1792 вместе с П.Лапласом, Г.Монжем и др. разрабатывает метрическую систему мер. В математическом анализе дал формулу остаточного члена ряда Тейлора, формулу конечных приращений и интерполяционную формулу, ввел способ множителей для решения задачи отыскания условных экстремумов. В области дифференциальных уравнений создал теорию особых решений и разработал метод вариации произвольных постоянных. Установил разложение корней уравнений в т.н. ряд Лагранжа. Исходя из общих законов динамики указал две основные формы дифференциальных уравнений движения несвободной системы, которые названы уравнениями Лагранжа 1-го рода, и вывел уравнения в обобщенных координатах – уравнения Лагранжа 2-го рода. Парижская АН 5 раз отмечала деятельность Лагранжа своими премиями.

мерой изменения вектора $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}}$ с изменением $V_{\partial(u)}$ – параметра или мерой изменения вектора $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}}$ с изменением $U_{\partial(u)}$ – параметра. Несмотря на то, что термин *вектор кручения* употребляется ниже, необходимо указать, что он может ввести в заблуждение. Значение перекрестной производной в текущей точке параметрически заданной поверхности $Д(И)$ зависит не только от строения самой поверхности, но и от вида ее параметризации – даже на плоскости она может быть не равна нулю. Поэтому геометрическая интерпретация вектора перекрестной производной как вектора кручения поверхности требует осторожности, так как

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \neq 0$$

не обязательно свидетельствует о закрученности поверхности.

Вторая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$. Покажем, что вторая основная квадратичная форма $Ф_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ (ее *вторая дифференциальная форма* Гаусса) характеризует отклонение точки M^* на кривой l, принадлежащей поверхности $Д(И)$, от касательной плоскости к этой поверхности (рис. 1.9).

Вектор $\mathbf{t}$ является единичным вектором касательной к произвольной кривой l, лежащей на поверхности $Д(И)$ и проходящей через точку M на ней. Из некоторой близкой точки M^* кривой l проведем перпендикуляр к плоскости $КП$, касательной к $Д(И)$ в точке M – он пересечет касательную плоскость в точке B. Вектор

$$\mathbf{l}^* = l^* \mathbf{n}_{\partial(u)}$$

характеризует отклонение точки M^* от касательной плоскости. Здесь l^* является алгебраической величиной – она положительна, когда направление вектора $\mathbf{l}^*$ совпадает с направлением орта нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$.

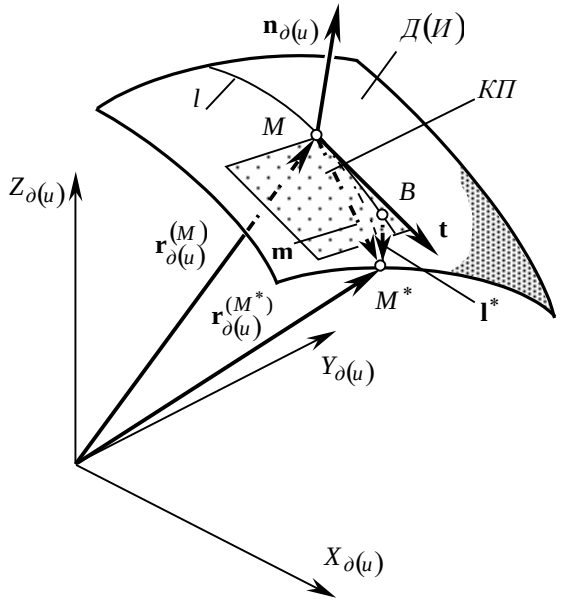


Рис. 1.9. К определению второй основной квадратичной формы $Ф_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$.

Направление единичной нормали (30) к поверхности $Д(И)$ может быть определено двояко:

$$\mathbf{n}_{\partial(u)} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right|} \quad \text{или} \quad \mathbf{n}^*_{\partial(u)} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \right|}.$$

Очевидно, что единичные нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ и $\mathbf{n}^*_{\partial(u)}$ имеют взаимно противоположные направления ($\mathbf{n}_{\partial(u)} = -\mathbf{n}^*_{\partial(u)}$). Помним при этом, что нормаль $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ (как и орт нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$) к поверхности $Д(И)$ всегда направлены от тела детали и от исходного инструментального тела.

Связь между алгебраической величиной l^* и второй основной квадратичной формой $\Phi_{2.\partial(u)}$ основана на следующем:

1. Обозначим радиус-векторы точек M и M^* соответственно $\mathbf{r}_{\partial(u)}^{(M)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}^{(M)}, V_{\partial(u)}^{(M)}\right)$ и $\mathbf{r}_{\partial(u)}^{(M^*)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}^{(M)} + dU_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}^{(M)} + dV_{\partial(u)}\right)$.

2. Принимая во внимание, что

$$\mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}^{(M)}, V_{\partial(u)}^{(M)}\right) + \mathbf{m} = \mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}^{(M)} + dU_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}^{(M)} + dV_{\partial(u)}\right),$$

получим

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}^{(M)} + dU_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}^{(M)} + dV_{\partial(u)}\right) - \mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}^{(M)}, V_{\partial(u)}^{(M)}\right). \tag{1.31}$$

3. Смещение l^* точки M^* от касательной плоскости равно

$$l^* = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)}. \tag{1.32}$$

Уравнения (31) и (32) позволяют записать

$$l^* = \left[\mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}^{(M)} + dU_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}^{(M)} + dV_{\partial(u)}\right) - \mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}^{(M)}, V_{\partial(u)}^{(M)}\right)\right] \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)}.$$

4. Разложив эту разность

$$\Delta\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}^{(M)} + dU_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}^{(M)} + dV_{\partial(u)}\right) - \mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}^{(M)}, V_{\partial(u)}^{(M)}\right)$$

в ряд Тейлора[1] и ограничивая рассмотрение только членами второго порядка малости, получим:

$$\Delta\mathbf{r}_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}dU_{\partial(u)} + \frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}dV_{\partial(u)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2}dU_{\partial(u)}^2 + 2\frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}dU_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)} + \frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2}dV_{\partial(u)}^2\right),$$

где все производные рассчитываются в точке M.

5. Векторы производных $\dfrac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\dfrac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ лежат в касательной плоскости, поэтому

$$\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = \frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = 0\,. \tag{1.33}$$

---

[1] **Тейлор**, Брук (***Taylor**, Brook*) (18.8.1685-29.12.1731) – английский математик, член Лондонского королевского общества (с 1712). Родился в Эдмонтоне (Мидлсекс). Окончил Кембриджский университет (1709). Непременный секретарь Лондонского королевского общества (1714-1718). Основные исследования относятся к математическому анализу, механике и баллистике. Исходя из формулы Ньютона, выражающей приращение функции в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням приращения независимой переменной, вывел общую теорему о разложении функции в степенной ряд (ряд Тейлора). Нашел правила дифференцирования функции, обратной данной. В учении об особых решениях дифференциальных уравнений предложил новый вид решений. Дал механико-геометрическую формулировку решения дифференциального уравнения малых колебаний струны. Определил центр качания маятника. Изучал полет снарядов, капиллярные явления, вопросы сцепления между жидкостями и твердыми телами. Показал, что среднее сечение свободной поверхности жидкости между двумя вертикальными пластинками, наклоненными одна к другой под малым углом, есть гипербола. В теории колебаний его результаты были развиты Ж.Л.Д'Аламбером и Ж.Л.Лагранжем. Занимался также вопросами оптики, астрономии и философии.

6. Из уравнений (32) и (33) следует, что:

$$(1.34)\quad l^{*}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^{2}_{\partial(u)}}\cdot\mathbf{n}_{\partial(u)}\right)\cdot dU^{2}_{\partial(u)}+2\left(\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}\cdot\mathbf{n}_{\partial(u)}\right)dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)}+\left(\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^{2}_{\partial(u)}}\cdot\mathbf{n}_{\partial(u)}\right)\cdot dV^{2}_{\partial(u)}\right]=\frac{\Phi_{2.\partial(u)}}{2}.$$

Поэтому вторая основная квадратичная форма $\Phi_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ равна *удвоенной* величине отклонения l^{*}.

Если в уравнение (34) ввести обозначения:

$$L_{\partial(u)}=\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^{2}_{\partial(u)}}\cdot\mathbf{n}_{\partial(u)}=\frac{\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^{2}_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}-F^{2}_{\partial(u)}}};$$

$$M_{\partial(u)}=\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}\cdot\mathbf{n}_{\partial(u)}=\frac{\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}-F^{2}_{\partial(u)}}};$$

$$N_{\partial(u)}=\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^{2}_{\partial(u)}}\cdot\mathbf{n}_{\partial(u)}=\frac{\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^{2}_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}-F^{2}_{\partial(u)}}},$$

будем иметь:

$$\Phi_{2.\partial(u)}\quad\Rightarrow\quad L_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)}+2F_{\partial(u)}dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)}+N_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}.$$

Коэффициенты $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$ и $N_{\partial(u)}$ второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial(u)}$ могут быть использованы для расчета смешанного произведения векторов касательных и кручения поверхности $Д(И)$:

$$\left[\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}},\ \frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}},\ \frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^{2}_{\partial(u)}{}_{\partial(u)}}\right]=\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^{2}_{\partial(u)}{}_{\partial(u)}}=H_{\partial(u)}\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^{2}_{\partial(u)}}=H_{\partial(u)}L_{\partial(u)};$$

$$\left[\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}},\ \frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}},\ \frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}\right]=\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}=H_{\partial(u)}\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}=H_{\partial(u)}M_{\partial(u)};$$

$$\left[\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}},\ \frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}},\ \frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^{2}_{\partial(u)}{}_{\partial(u)}}\right]=\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^{2}_{\partial(u)}{}_{\partial(u)}}=H_{\partial(u)}\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial^{2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^{2}_{\partial(u)}}=H_{\partial(u)}N_{\partial(u)}.$$

Здесь дискриминант равен $H_{\partial(u)} = \sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}$.

По определению вторая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$ есть проекция на направление нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ перемещения конца бесконечно малого вектора касательной $d\mathbf{r}_{\partial(u)}$:

$$Ф_{2.\partial(u)} \quad \Rightarrow \quad -d\,\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot d\mathbf{n}_{\partial(u)} = -\left(\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} dU_{\partial(u)} + \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} dV_{\partial(u)} \right) \cdot \left(\frac{\partial\, \mathbf{N}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} dU_{\partial(u)} + \frac{\partial\, \mathbf{N}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} dV_{\partial(u)} \right) =$$

$$= -\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{N}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} dU^2_{\partial(u)} - \left(\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{N}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} + \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{N}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \right) dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} - \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{N}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \cdot dV^2_{\partial(u)};$$

$$Ф_{2.\partial(u)} \quad \Rightarrow \quad -d\,\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot d\,\mathbf{n}_{\partial(u)} = d^2\,\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)}. \tag{1.35}$$

Равенство скалярных произведений

$$d^2\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = -d\;\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot d\,\mathbf{n}_{\partial(u)} \tag{1.36}$$

следует из соотношения

$$d\,\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = 0 \tag{1.37}$$

после его дифференцирования.

Уравнение (37) основано на том, что:

а) вектор $d\,\mathbf{r}_{\partial(u)}$ описывает бесконечно малое перемещение по поверхности $Д(И)$ из заданной точки M к бесконечно близкой ей точке M^*;

б) вектор $d\,\mathbf{r}_{\partial(u)}$ касателен к поверхности $Д(И)$ в некоторой ее точке M и поэтому перпендикулярен орту нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ в этой же точке M .

Из уравнения (37) получим

$$d\left(d\,\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)}\right) = \left(d^2\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)}\right)' + \left(d\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot d\mathbf{n}_{\partial(u)}\right) = 0\,,$$

откуда следует (36).

В развернутом виде уравнение $Ф_{2.\partial(u)} = d^2\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)}$ может быть получено так.

Дифференцирование (37) дает:

$$d^2\mathbf{r}_{\partial(u)} = d\left(\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} dU_{\partial(u)} + \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} dV_{\partial(u)} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U^2_{\partial(u)}} dU^2_{\partial(u)} + 2\frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)} \partial\, V_{\partial(u)}} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + \frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V^2_{\partial(u)}} dV^2_{\partial(u)} + \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} dU_{\partial(u)} + \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} dV_{\partial(u)};$$

$$Ф_{2.\partial(u)} = -d\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot d\mathbf{n}_{\partial(u)} = d^2\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = \tag{1.38}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} \right) dU^2_{\partial(u)} + 2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} \right) dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} \right) dV^2_{\partial(u)} =$$

$$= L_{\partial(u)} dU^2_{\partial(u)} + 2M_{\partial(u)} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + N_{\partial(u)} dV^2_{\partial(u)}.$$

Пользуясь этими соотношениями, следует помнить о порядке выполнения операций векторного и скалярного произведений: в смешанном произведении векторы сначала перемножаются векторно, после чего – скалярно.

Правая часть уравнения (38) представляет собой квадратичную форму дифференциалов $dU_{\partial(u)}$ и $dV_{\partial(u)}$. Уравнение (38) может быть получено из равенства

(1.39) $$\Phi_{2.\partial(u)} = -d\mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot d\mathbf{r}_{\partial(u)}.$$

После дифференцирования (39) получим

(1.40) $$d\mathbf{n}_{\partial(u)} = \frac{\partial\, \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} dU_{\partial(u)} + \frac{\partial\, \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} dV_{\partial(u)}.$$

Принимая во внимание уравнения (24), (39) и (40), имеем

(1.41) $$\Phi_{2.\partial(u)} = -\left\{ \left[\frac{\partial\, \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \right] dU^2_{\partial(u)} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial\, \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} + \frac{\partial\, \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \right] dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + \left[\frac{\partial\, \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \right] dV^2_{\partial(u)} \right\}.$$

С учетом того, что векторы $\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}}$ касательны к поверхности *Д(И)*, правую часть уравнения (41) можно упростить

(1.42) $$\mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} = 0, \qquad \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} = 0.$$

Продифференцировав равенства (42) один раз по $U_{\partial(u)}$, другой – по $V_{\partial(u)}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\, U_{\partial(u)}} \left(\mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \right) = \frac{\partial\, \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} + \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U^2_{\partial(u)}} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\, V_{\partial(u)}} \left(\mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} \right) = \frac{\partial\, \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\, V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)}} + \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\, U_{\partial(u)} \partial\, V_{\partial(u)}} = 0;$$

(1.43)

$$\frac{\partial}{\partial U_{\partial(u)}}\left(\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}\right)=\frac{\partial\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}+\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial^{\,2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}\partial\,V_{\partial(u)}}=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\,V_{\partial(u)}}\left(\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}\right)=\frac{\partial\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\,\ V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}+\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial^{\,2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}^{2}}=0,$$

откуда следует, что

$$-\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}=-\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}=\mathbf{n}_{\partial(u)}\frac{\partial^{\,2}\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}\partial\,V_{\partial(u)}}.$$

Для коэффициентов второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial(u)}$ имеем:

$$L_{\partial(u)}=-\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}=\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial^{\,2}\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}^{2}};$$

$$M_{\partial(u)}=-\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}=-\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}=\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial^{\,2}\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}\partial\,V_{\partial(u)}};$$

$$N_{\partial(u)}=-\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}=\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial^{\,2}\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}.$$

Уравнение (41) совместно с (43) приводит к результату (38).

Как и для первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$, гауссовы коэффициенты $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$, $N_{\partial(u)}$ второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial(u)}$ являются скалярными функциями внутренних координат – функциями параметров $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$:

$$L_{\partial(u)}=L_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)}\right);\qquad M_{\partial(u)}=M_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)}\right);\qquad N_{\partial(u)}=N_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)}\right).$$

Параметрически заданная поверхность $Д(И)$ общего вида может быть определена как векторное отображение двухпараметрического $UV-$пространства в трехмерное пространство (Maekawa, T., and Patrikalakis, N., 1994):

$$\Phi_{2.\partial(u)}=-d\,\mathbf{r}_{\partial(u)}\cdot d\mathbf{n}_{\partial(u)}=-\left(\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}dU_{\partial(u)}+\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}dV_{\partial(u)}\right)\cdot\left(\frac{\partial\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}dU_{\partial(u)}+\frac{\partial\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}dV_{\partial(u)}\right)=$$

$$=-L_{\partial(u)}\,dU^{\,2}+2M_{\partial(u)}\,dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)}+N_{\partial(u)}\,dV^{\,2}.$$

Этому соотношению соответствует краткая форма записи коэффициентов второй основной квадратичной формы поверхности $Д(И)$ (Maekawa, T., and Patrikalakis, N., 1994):

$$L_{\partial(u)} = \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}}; \qquad M_{\partial(u)} = \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}; \qquad N_{\partial(u)} = \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}}.$$

Аналогично дискриминанту линейного элемента $H_{\partial(u)}$, в рассмотрение вводится дискриминант $T_{\partial(u)}$ второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$. Он равен:

$$T_{\partial(u)} = \sqrt{L_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)}}.$$

Используемые при вычислениях вспомогательные коэффициенты и их производные соответственно равны (Maekawa, T., and Patrikalakis, N., 1994):

$$L_{\partial(u)} = \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}}; \quad \frac{\partial L_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} + \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^3_{\partial(u)}}; \quad \frac{\partial L_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} + \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}};$$

$$M_{\partial(u)} = \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}; \qquad \frac{\partial M_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} + \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)} \partial_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}};$$

$$\frac{\partial M_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} + \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V^2_{\partial(u)} \partial_{\partial(u)}};$$

$$N_{\partial(u)} = \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}}; \quad \frac{\partial N_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} + \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V^2_{\partial(u)}}; \quad \frac{\partial N_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} + \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^3_{\partial(u)}}.$$

Дискриминант второй основной квадратичной формы и его производные, умноженные на $\mathbf{n}^2_{\partial(u)}$ (Maekawa, T., and Patrikalakis, N., 1994):

$$A_{\partial(u)} = T_{\partial(u)} \mathbf{n}^2_{\partial(u)} = L_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)};$$

$$\frac{\partial A_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial T_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \mathbf{n}^2_{\partial(u)} = \frac{\partial L_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} N_{\partial(u)} + L_{\partial(u)} \frac{\partial N_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} - 2 M_{\partial(u)} \frac{\partial M_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}};$$

$$\frac{\partial A_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial T_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \mathbf{n}^2_{\partial(u)} = \frac{\partial L_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} N_{\partial(u)} + L_{\partial(u)} \frac{\partial N_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} - 2 M_{\partial(u)} \frac{\partial M_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}.$$

Имеют место следующие полезные соотношения:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} \right] = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} = H_{\partial(u)} \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} = H_{\partial(u)} L_{\partial(u)};$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}},\ \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}},\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}\right]=\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}=H_{\partial(u)}\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}}=H_{\partial(u)}M_{\partial(u)};$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}},\ \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}},\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}}\right]=\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}}=H_{\partial(u)}\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}}=H_{\partial(u)}N_{\partial(u)}.$$

1.2.2.3. *Параметрическая форма* уравнения поверхности $Д(И)$ может рассматриваться как развернутая форма записи ее векторного уравнения.

Уравнения поверхности $Д(И)$ *деталей и инструментов* в параметрической форме записываются так:

$$\begin{cases} X_{\partial(u)}=X_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)}\right);\\ Y_{\partial(u)}=Y_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)}\right);\\ Z_{\partial(u)}=Z_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)}\right). \end{cases} \qquad (1.44)$$

где $X_{\partial(u)},\ Y_{\partial(u)},\ Z_{\partial(u)}$ – декартовы координаты текущей точки на поверхности $Д(И)$.

Вид (44) представления поверхностей деталей и инструментов основан на том, что любую поверхность $Д(И)$ можно рассматривать как пространство двух измерений. Вследствие этого координаты любой ее точки однозначно определяются двумя независимыми параметрами $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$, являющимися криволинейными (*гауссовыми* или *внутренними*) координатами текущей точки M на поверхности $Д(И)$. Если на поверхности введены криволинейные координаты – это свидетельствует о том, что поверхность соответствующим образом параметризована.

Если один из параметров $U_{\partial(u)}$ или $V_{\partial(u)}$ принять постоянным, то при изменении другого получим соответствующую координатную линию на поверхности $Д(И)$. Так, при $U_{\partial(u)}=Const$ и изменении параметра $V_{\partial(u)}$ получим $V_{\partial(u)}-$линию, а при $V_{\partial(u)}=Const$ и изменении параметра $U_{\partial(u)}$ получим $U_{\partial(u)}-$линию на поверхности $Д(И)$ (см. рис. 1.3).

Вид параметрических кривых зависит не только от формы и параметров геометрии самой поверхности $Д(И)$, но и от выбора $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$параметров на ней, т.е. от вида $\left(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)}\right)-$параметризации поверхности $Д(И)$. Координатные линии ориентируют в направлении возрастания значений соответствующего параметра (см. рис. 1.4).

Параметрическая форма (44) аналитического описания поверхности $Д(И)$ обладает важными преимуществами. В такой форме можно определить уравнениями любую гладкую поверхность $Д(И)$. Использование параметрического способа аналитического описания поверхности $Д(И)$ упрощает вычисления перемещений режущего инструмента в задачах числового программного управления; при его использовании преобразование координат не требует модификации функций от используемых параметров; форма (44) пригодна для случаев кусочно-гладкого описания поверхностей и др.

Первые производные уравнения поверхности $Д(И)$, заданной параметрическими уравнениями вида (44), записываются так:

$$\frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}=\frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)}\right),\quad \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}=\frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)}\right),\quad \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}=\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)}\right) \qquad (1.45)$$

и

(1.46) $$\frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right), \quad \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right), \quad \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)$$

соответственно.

Уравнения (45) и (46) определяют направления касательных к координатным линиям на поверхности $Д(И)$.

Касательная плоскость. Для гладких регулярных участков поверхности $Д(И)$, описанной уравнениями в параметрической форме, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} X_{КП} - X_{\partial(u)}^{(M)} & Y_{КП} - Y_{\partial(u)}^{(M)} & Z_{КП} - Z_{\partial(u)}^{(M)} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix} = 0,$$

где $X_{КП}$, $Y_{КП}$ и $Z_{КП}$ – декартовы координаты текущей точки касательной плоскости. В этом уравнении все производные по параметрам $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$ рассчитаны в точке M на поверхности $Д(И)$.

Нормаль к поверхности Д(И). Приведенные выше зависимости для расчета касательных векторов позволяют записать уравнение прямой, нормальной к поверхности $Д(И)$, для случая описания поверхности параметрическими уравнениями:

$$\frac{X - X_{\partial(u)}^{(M)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix}} = \frac{Y - Y_{\partial(u)}^{(M)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix}} = \frac{Z - Z_{\partial(u)}^{(M)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix}}.$$

Первая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$. Коэффициенты первой основной квадратичной формы

$$\Phi_{1.\partial(u)} = E_{\partial(u)}\, dU_{\partial(u)}^2 + 2F_{\partial(u)}\, dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}\, dV_{\partial(u)}^2$$

поверхности $Д(И)$ в координатах соответственно равны:

$$E_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right)^2;$$

(1.47) $$F_{\partial(u)} = \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}};$$

$$G_{\partial(u)} = \left(\frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right)^2.$$

Первая основная квадратичная форма $\Phi_{1.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ имеет вид:

– ортогональный

$$\Phi_{1.\partial(u)} \quad \Rightarrow \quad dS^2_{\partial(u)} = E_{\partial(u)} dU^2_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} dV^2_{\partial(u)}$$

в ортогональных координатах;

– канонический

$$\Phi_{1.\partial(u)} \quad \Rightarrow \quad dS^2_{\partial(u)} = dU^2_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} dV^2_{\partial(u)}$$

в полугеодезических координатах;

*– изотермический (*или *изометрический)*

$$\Phi_{1.\partial(u)} \quad \Rightarrow \quad dS^2_{\partial(u)} = \lambda^2 \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right) \cdot \left(dU^2_{\partial(u)} + dV^2_{\partial(u)}\right)$$

в изотермических координатах.

Вторые производные уравнения поверхности $Д(И)$. Если поверхность $Д(И)$ задана параметрическими уравнениями, то из (45) и (46) получим

$$\frac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right), \qquad \frac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right), \qquad \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right),$$

$$\frac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right), \qquad \frac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right),$$

$$\frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right),$$

$$\frac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right), \qquad \frac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right), \qquad \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} \left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)$$

Вторая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$. Коэффициенты второй основной квадратичной формы

$$\Phi_{2.\partial(u)} = L_{\partial(u)} dU^2_{\partial(u)} + 2M_{\partial(u)} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + N_{\partial(u)} dV^2_{\partial(u)}$$

поверхности $Д(И)$ в координатах соответственно равны:

$$L_{\partial(u)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} & \frac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} & \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix}}{\sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}}; \tag{1.48}$$

$$M_{\partial(u)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix}}{\sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}}; \tag{1.49}$$

$$N_{\partial(u)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} & \frac{\partial^2 Y_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} & \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix}}{\sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}}. \tag{1.50}$$

1.2.2.4. *Явная форма* аналитического описания поверхности $Д(И)$ может рассматриваться как частный случай ее описания уравнениями в параметрической форме.

Уравнение поверхности $Д(И)$ *деталей и инструментов*:

$$Z_{\partial(u)} = Z_{\partial(u)}(X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}). \tag{1.51}$$

Уравнение (51) тесно связано с параметрической формой задания поверхностей деталей и инструментов.

Это становится очевидным, если явное уравнение поверхности $Д(И)$ в форме Г.Монжа[1] переписать в виде:

$$\begin{cases} X_{\partial(u)} = X_{\partial(u)}; \\ Y_{\partial(u)} = Y_{\partial(u)}; \\ Z_{\partial(u)} = Z_{\partial(u)}(X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{\partial(u)} = U_{\partial(u)}; \\ Y_{\partial(u)} = V_{\partial(u)}; \\ Z_{\partial(u)} = Z_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}). \end{cases} \qquad (X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}) \in U. \qquad (1.52)$$

При описании поверхности $Д(И)$ уравнениями в явной форме, на ней можно построить три семейства линий уровня.

Первые производные уравнения поверхности $Д(И)$ равны:

$$\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}} = \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \quad \text{и} \quad \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}} = \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}).$$

Эти уравнения определяют направления касательных к поверхности $Д(И)$.

Касательная плоскость. Для случая описания поверхности $Д(И)$ уравнением в явном виде уравнение касательной плоскости записывается так:

$$(Z_{КП} - Z^{(M)}_{\partial(u)}) = \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}}(X_{КП} - X^{(M)}_{\partial(u)}) + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}(Y_{КП} - Y^{(M)}_{\partial(u)}),$$

Нормаль к поверхности $Д(И)$. При задании поверхности $Д(И)$ уравнением в явном виде уравнение нормали определяется по формуле:

$$\frac{X - X^{(M)}_{\partial(u)}}{\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}}} = \frac{Y - Y^{(M)}_{\partial(u)}}{\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}} = \frac{Z - Z^{(M)}_{\partial(u)}}{-1}.$$

Первая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$. Если поверхность $Д(И)$ аналитически описана уравнением в явной форме, то для расчета гауссовых коэффициентов первой основной квадратичной формы $Ф_{1.\partial(u)}$ могут быть использованы упрощенные формулы

$$E_{\partial(u)} = 1 + \left(\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}}\right)^2; \qquad F_{\partial(u)} = \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}; \qquad G_{\partial(u)} = 1 + \left(\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}\right)^2.$$

Это позволяет записать формулу для расчета площади участка поверхности $Д(И)$:

---

[1] **Монж**, Гаспар (***Monge**, Gaspard*) (10.5.1746-28.7.1818) – французский математик и механик, член Французской АН (с 1783, чл.-кор. с 1772, адъюнкт с 1780) и Национального института (1795-1814). Родился в Боне. Основатель и профессор Политехнической школы. Монжу принадлежат основополагающие результаты в области начертательной, аналитической и дифференциальной геометрии, работы по проективной и высшей геометрии, математическому анализу, теории дифференциальных уравнений. Он дал геометрическую интерпретацию дифференциальных уравнений с частными производными. Автор основополагающих работ по теории поверхностей. В 1795 опубликовал курс начертательной геометрии и "*Приложение анализа к геометрии*". В 1802 совместно с Ж.Н.П.Ашеттом издал первый курс аналитической геометрии. Создал (1807) метод характеристик для решения дифференциальных уравнений с частными производными. Принимал участие в разработке основ десятичной системы мер и весов.

$$S_{\partial(u)} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}\right)^2}\, dX_{\partial(u)} dY_{\partial(u)},$$

где D есть область интегрирования.

Вторые производные уравнения поверхностей $Д(И)$ равны

$$\frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}^2} = \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}^2}\left(X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}\right); \quad \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)} \partial Y_{\partial(u)}} = \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)} \partial Y_{\partial(u)}}\left(X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}\right); \quad \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}^2} = \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}^2}\left(X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}\right).$$

Вторая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$. Для поверхности $Д(И)$, описанной уравнением в явной форме $Z_{\partial(u)} = Z_{\partial(u)}\left(X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}\right)$, гауссовы коэффициенты второй основной квадратичной формы $Ф_{2.\partial(u)}$ рассчитываются также по упрощенным формулам:

$$L_{\partial(u)} = \frac{\frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}^2}}{\sqrt{1 + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}} + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}}}; \quad M_{\partial(u)} = \frac{\frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)} \partial Y_{\partial(u)}}}{\sqrt{1 + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}} + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}}}; \quad N_{\partial(u)} = \frac{\frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}^2}}{\sqrt{1 + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}} + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}}}.$$

В обозначениях Г.Монжа: $p_{\partial(u)} = \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}}$, $q_{\partial(u)} = \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}$, $r_{\partial(u)} = \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}^2}$, $s_{\partial(u)} = \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)} \partial Y_{\partial(u)}}$, $t_{\partial(u)} = \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}^2}$ и $h_{\partial(u)} = \sqrt{1 + p_{\partial(u)}^2 + q_{\partial(u)}^2}$ главные радиусы кривизны $R_{1.\partial(u)}$ и $R_{2.\partial(u)}$ (помним, что $R_{1.\partial(u)} < R_{2.\partial(u)}$) поверхности $Д(И)$ находятся как корни квадратного уравнения:

$$\left(r_{\partial(u)} t_{\partial(u)} - s_{\partial(u)}^2\right) R_{\partial(u)}^2 + h_{\partial(u)} \left[2 p_{\partial(u)} q_{\partial(u)} s_{\partial(u)} - \left(1 + p_{\partial(u)}^2\right) t_{\partial(u)} - \left(1 + q_{\partial(u)}^2\right) r_{\partial(u)}\right] R_{\partial(u)} + h_{\partial(u)}^4 = 0,$$

а угол ω_{∂} – по значению производной $\frac{dY_{\partial(u)}}{dX_{\partial(u)}}$ из квадратного уравнения:

$$\left[t_{\partial(u)} p_{\partial(u)} q_{\partial(u)} - s_{\partial(u)}\left(1 + q_{\partial(u)}^2\right)\right]\left(\frac{dY_{\partial(u)}}{dX_{\partial(u)}}\right)^2 + \left[t_{\partial(u)}\left(1 + p_{\partial(u)}^2\right) - r_{\partial(u)}\left(1 + q_{\partial(u)}^2\right)\right]\frac{dY_{\partial(u)}}{dX_{\partial(u)}} +$$
$$+ \left[s_{\partial(u)}\left(1 + p_{\partial(u)}^2\right) - r_{\partial(u)} p_{\partial(u)} q_{\partial(u)}\right] = 0.$$

В трехграннике Дарбу, когда локальный участок поверхности $Д(И)$ может быть представлен в виде

$$z_{\partial(u)} = \frac{1}{2}\left(k_{1.\partial(u)} x_{\partial(u)}^2 + k_{2.\partial(u)} y_{\partial(u)}^2\right) + \ldots,$$

квадратичные формы $Ф_{1.\partial(u)}$ и $Ф_{2.\partial(u)}$ имеют особенно простой вид:

$$\Phi_{1.\partial(u)} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{r}^2_{\partial(u)} = dX^2_{\partial(u)} + dY^2_{\partial(u)};$$

$$\Phi_{2.\partial(u)} \quad \Rightarrow \quad -d\mathbf{n}_{\partial(u)} d\mathbf{r}_{\partial(u)} = k_{1.\partial(u)} X^2_{\partial(u)} + k_{2.\partial(u)} Y^2_{\partial(u)}.$$

1.2.2.5. <u>*Неявная форма*</u>*.* Аналитическое описание поверхности $Д(И)$ уравнением в неявной форме используется реже, чем в матричной, векторной, параметрической или в явной форме, поскольку использование такой формы задания поверхностей деталей и инструментов часто приводит к громоздким и технически неудобным преобразованиям. Вместе с тем неявная форма аналитического описания поверхности $Д(И)$ также находит применение в задачах формообразования поверхностей при механической обработке деталей.

Уравнение поверхности $Д(И)$ *деталей и инструментов*. При задании поверхности $Д(И)$ уравнением в неявной форме декартовы координаты $X_{\partial(u)}$, $Y_{\partial(u)}$, $Z_{\partial(u)}$ текущей точки на ней связаны уравнениями:

$$\begin{aligned} &Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial) = 0; \\ &\qquad\qquad \left[X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}, Z_{\partial(u)}\right] \in \mathbf{U} \\ &И(X_u, Y_u, Z_u) = 0; \end{aligned} \tag{1.53}$$

соответственно для поверхностей $Д$ и $И$ в своих системах координат. Здесь $\mathbf{U}$ – пространственная область, которой определена поверхность $Д(И)$.

Первые производные уравнения поверхности $Д(И)$ рассчитываются по формулам:

$$\frac{\partial Д}{\partial X_\partial} = \frac{\partial Д}{\partial X_\partial}(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial); \qquad \frac{\partial Д}{\partial Y_\partial} = \frac{\partial Д}{\partial Y_\partial}(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial); \qquad \frac{\partial Д}{\partial Z_\partial} = \frac{\partial Д}{\partial Z_\partial}(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial). \tag{1.54}$$

Аналогичные формулы справедливы для исходной инструментальной поверхности $И$:

$$\frac{\partial И}{\partial X_u} = \frac{\partial И}{\partial X_u}(X_u, Y_u, Z_u); \qquad \frac{\partial И}{\partial Y_u} = \frac{\partial И}{\partial Y_u}(X_u, Y_u, Z_u); \qquad \frac{\partial И}{\partial Z_u} = \frac{\partial И}{\partial Z_u}(X_u, Y_u, Z_u). \tag{1.55}$$

Уравнения первых производных (54) и (55) определяют направления, касательные к поверхности $Д(И)$ в текущей точке на ней.

Касательная плоскость. Если поверхность $Д$ определена уравнением в неявном виде, текущая точка M будет обыкновенной, если $\frac{\partial Д}{\partial X_\partial}$, $\frac{\partial Д}{\partial Y_\partial}$ и $\frac{\partial Д}{\partial Z_\partial}$ непрерывны в окрестности этой точки и не равны нулю одновременно:

$$grad\ Д \neq 0 \qquad \text{или} \qquad \left|\frac{\partial Д}{\partial X_\partial}\right| + \left|\frac{\partial Д}{\partial Y_\partial}\right| + \left|\frac{\partial Д}{\partial Z_\partial}\right| > 0.$$

Тогда после дифференцирования функции $Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)$ получаем уравнение плоскости, касательной к поверхности детали:

$$\frac{\partial Д}{\partial X_\partial}\left(X_{КП} - X_\partial^{(M)}\right) + \frac{\partial Д}{\partial Y_\partial}\left(Y_{КП} - Y_\partial^{(M)}\right) + \frac{\partial Д}{\partial Z_\partial}\left(Z_{КП} - Z_\partial^{(M)}\right) = 0$$

и подобное уравнение для поверхности $И$ инструмента:

$$\frac{\partial И}{\partial X_u}\left(X_{КП} - X_u^{(M)}\right) + \frac{\partial И}{\partial Y_u}\left(Y_{КП} - Y_u^{(M)}\right) + \frac{\partial И}{\partial Z_u}\left(Z_{КП} - Z_u^{(M)}\right) = 0 .$$

Нормальная прямая к поверхности $Д(И)$, заданной неявным уравнением, определяется уравнением:

$$\frac{X - X_{\partial(u)}^{(M)}}{\dfrac{\partial Д}{\partial X_{\partial(u)}}} = \frac{Y - Y_{\partial(u)}^{(M)}}{\dfrac{\partial Д}{\partial Y_{\partial(u)}}} = \frac{Z - Z_{\partial(u)}^{(M)}}{\dfrac{\partial Д}{\partial Z_{\partial(u)}}} .$$

Простую формулу для расчета орта нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ можно получить так. Дифференцируя функцию $Д = Д(X_м, Y_м, Z_м)$ трех переменных, при помощи цепного правила получаем:

$$\frac{d Д}{d S} = \frac{\partial Д}{\partial X_\partial}\cdot\frac{\partial X_\partial}{d S} + \frac{\partial Д}{\partial Y_\partial}\cdot\frac{\partial Y_\partial}{d S} + \frac{\partial Д}{\partial Z_\partial}\cdot\frac{\partial Z_\partial}{d S} = 0 ;$$

$$\left(\frac{\partial Д}{\partial X_\partial}\mathbf{i}_\partial + \frac{\partial Д}{\partial Y_\partial}\mathbf{j}_\partial + \frac{\partial Д}{\partial Z_\partial}\mathbf{k}_\partial\right)\cdot\frac{d\mathbf{r}(S)}{dS} = 0,$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(S)$ – уравнение произвольной кривой, лежащей на поверхности.

Таким образом вектор-градиент

(1.56) $$\nabla Д = \frac{\partial Д}{\partial X_\partial}\mathbf{i}_\partial + \frac{\partial Д}{\partial Y_\partial}\mathbf{j}_\partial + \frac{\partial Д}{\partial Z_\partial}\mathbf{k}_\partial$$

перпендикулярен вектору $\dfrac{d\mathbf{r}(s)}{dS}$ для любой принадлежащей поверхности $Д$ кривой, которая проходит через текущую точку на поверхности $Д$ и в которой вычисляется $\nabla Д$.

Отсюда следует, что орт нормали к сложной поверхности детали может быть рассчитан по формуле

(1.57) $$\mathbf{n}_\partial = \frac{\nabla Д}{|\nabla Д|}.$$

Очевидно, что аналогичное соотношение будет справедливо и для поверхности $И$ инструмента:

$$\mathbf{n}_u = \frac{\nabla И}{|\nabla И|}.$$

Первая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$. Соотношения (54) и (55) для первых производных могут быть использованы для расчета коэффициентов первой основной квадратичной формы поверхности $Д(И)$, а затем самой квадратичной формы $Ф_{1.\partial(u)}$.

Вторые производные уравнения поверхностей $Д(И)$ рассчитываются по формулам:

(1.58) $$\frac{\partial^2 Д}{\partial X_\partial^2} = \frac{\partial^2 Д}{\partial X_\partial^2}(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial); \qquad \frac{\partial^2 Д}{\partial Y_\partial^2} = \frac{\partial^2 Д}{\partial Y_\partial^2}(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial); \qquad \frac{\partial^2 Д}{\partial Z_\partial^2} = \frac{\partial^2 Д}{\partial Z_\partial^2}(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial).$$

Аналогичные формулы имеют место для исходной инструментальной поверхности $И$:

$$\frac{\partial^2 И}{\partial X_u^2} = \frac{\partial^2 И}{\partial X_u^2}(X_u, Y_u, Z_u); \qquad \frac{\partial^2 И}{\partial Y_u^2} = \frac{\partial^2 И}{\partial Y_u^2}(X_u, Y_u, Z_u); \qquad \frac{\partial^2 И}{\partial Z_u^2} = \frac{\partial^2 И}{\partial Z_u^2}(X_u, Y_u, Z_u). \tag{1.59}$$

Вторая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$. Соотношения (58) и (59) для вторых производных могут быть использованы для расчета коэффициентов второй основной квадратичной формы поверхности $Д(И)$, а затем самой квадратичной формы $Ф_{2.\partial(u)}$.

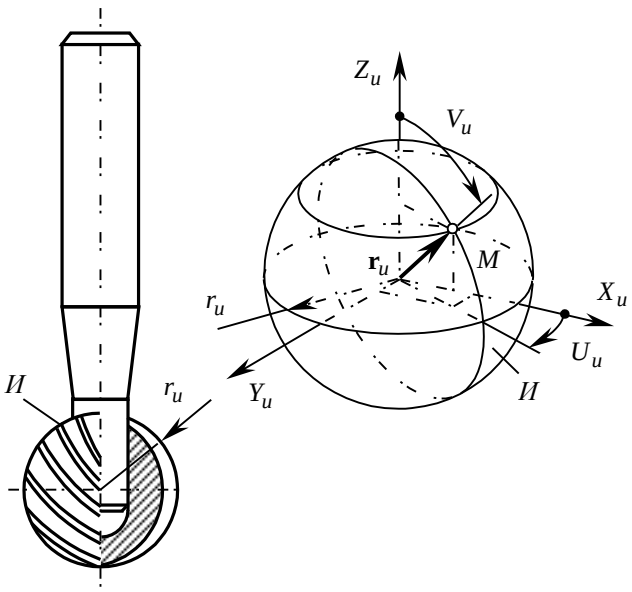


Рис. 1.10. К преобразованию формы аналитического описания сферической исходной инструментальной поверхности *И* фрезы.

Наряду с рассмотренными выше, находят применение другие способы аналитического задания геометрической информации о поверхностях деталей и инструментов, например, задание с лишними параметрами $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}\left[U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}, W_{\partial(u)}\right]$, аналогичное ему задание семейством касательных плоскостей и другие.

1.2.2.6. *Преобразование видов аналитического описания поверхности* $Д(И)$. Различные формы аналитического описания поверхностей деталей и инструментов могут преобразовываться из одной в другую. Например, уравнения сферической исходной инструментальной поверхности $И$ фрезы радиуса r_u (рис. 1.10) могут быть записаны в форме:

– матричной

$$[\mathbf{r}_u] = \begin{bmatrix} r_u \cos U_u \sin V_u \\ r_u \sin U_u \sin V_u \\ r_u \cos V_u \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [r_u \cos U_u \sin V_u \quad r_u \sin U_u \sin V_u \quad r_u \cos V_u \quad 1]^T;$$

– векторной

$$\mathbf{r}_u = r_u(\cos U_u \sin V_u \mathbf{i}_u + \sin U_u \sin V_u \mathbf{j}_u + \cos V_u \mathbf{k}_u);$$

– параметрической

$$\begin{cases} X_u = r_u \cos U_u \sin V_u; \\ Y_u = r_u \sin U_u \sin V_u; \\ Z_u = r_u \cos V_u; \end{cases}$$

– явной

$$Z_u = \sqrt{r_u^2 - X_u^2 - Y_u^2};$$

– неявной

$$X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2 - r_u^2 = 0.$$

В ряде случаев преобразование аналитического представления геометрической информации о поверхности $Д(И)$ из одного вида в другой может быть неоправданно трудоемким или технически невыполнимым. Это указывает на необходимость рассмотрения возможности перехода (создания своеобразного *"мостика"*) от каждого из рассмотренных и др. способов аналитического описания поверхности $Д(И)$ к обобщенному аталитическому описанию их в натуральной форме. Такой переход возможен также при использовании специальных способов аналитического и дискретного представления исходной геометрической информации о поверхностях деталей и инструментов, используемых в практике отраслевого машиностроения.

1.2.2.7. *Натуральная форма*. Непрерывным (аналитическим) способам описания поверхностей деталей и инструментов свойственна большая определенность и однозначность, возможность получения полной и достоверной информации о геометрической структуре и строении локального участка поверхности $Д(И)$ в дифференциальной окрестности текущей точки на ней, большая или меньшая простота вычисления частных производных по каждому из параметров и др. Вместе с тем рассмотренные выше аналитические методы аналитического описания поверхностей неудобны тем, что они всегда связаны с определенной системой отсчета.

Подобно тому, как пространственную кривую можно описать натуральным уравнением двумя *внутренними* параметрами: ее кривизной и кручением в функции длины дуги кривой (т.е. в функции положения точки на кривой), так и поверхность $Д(И)$ можно аналитически описать в функции положения точки на поверхности двумя *внутренними* параметрами – ее первой $Ф_{1.∂}(u)$ и второй $Ф_{2.∂}(u)$ основными квадратичными формами. Согласно теореме Бонне[1], являющейся основной теоремой в теории поверхностей, гауссовы коэффициенты $E_{∂}(u)$, $F_{∂}(u)$, $G_{∂}(u)$ первой $Ф_{1.∂}(u)$ и $L_{∂}(u)$, $M_{∂}(u)$, $N_{∂}(u)$ второй $Ф_{2.∂}(u)$ основных квадратичных форм, удовлетворяющие неравенствам $E_{∂}(u) > 0$, $G_{∂}(u) > 0$, $E_{∂}(u)G_{∂}(u) - F^2_{∂}(u) \geq 0$ и условиям совместимости, определяемым уравнениями Гаусса (его *theorema egregium*) и Петерсена[2]-Кодацци[3], однозначно определяют поверхность $Д(И)$ с точностью до ее расположения и ориентации в пространстве.

Две поверхности с одинаковыми квадратичными формами $Ф_{1.∂}(u)$ и $Ф_{2.∂}(u)$ взаимно конгруэнтны или симметричны одна другой (Фавар, Ж., 1960, с.251).

Определение двух основных квадратичных форм $Ф_{1.∂}(u)$ и $Ф_{2.∂}(u)$ поверхности $Д(И)$ равносильно заданию этой поверхности в натуральной форме.

Если одна гладкая поверхность может быть получена из другой путем изгибания первой, то в соответствие с теоремой Гаусса полные кривизны этих поверхностей в соответствующих точках совпадают. Другими словами, гауссова кривизна $\tilde{G}_{∂}(u)$ является инвариантом изгибания поверхности $Д(И)$. Поэтому она может

---

[1]**Бонне**, Пьер Оссиан (***Bonnet***, *Pierre Ossian*) (22.11.1819 – 22.6.1892). Французский математик, родился в Монпелье. Окончил Политехническую школу в Париже (1838). Работал на Парижском факультете наук (с 1878 – профессор), член Бюро долгот (с 1862). Основные исследования относятся к математическому анализу и дифференциальной геометрии. Усовершенствовал и распространил метод Коши решения дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при любом числе переменных. Вывел упрощенные формы логарифмических критериев. Определил кривые постоянной кривизны и ввел понятие геодезической кривизны. Изучил (1848) изотермическую сеть, линии в которой имеют постоянную геодезическую кривизну (сеть Бонне). Доказал (1865) теорему о существовании и единственности поверхности с заданными первой и второй квадратичными формами. Ряд работ посвящен механике упругого тела и аналитической механике.

[2]**Петерсен,** Карл Михайлович (25.05.1828 – 01.05.1881) – русский математик. Родился в Риге. Окончил Дерптский университет (1853). С 1865 преподавал в Петропавловском училище в Москве. Работы посвящены дифференциальной геометрии. Вывел основные свойства коэффициентов так называемой второй основной квадратичной формы поверхности и решил вопрос об аналитических условиях, определяющих саму геометрическую форму поверхности. Дополнил (1853) уравнения Гаусса о соотношениях между первой и второй основными квадратичными формами еще двумя уравнениями (уравнения Гаусса-Петерсена). Эти результаты не публиковались и были переоткрыты А.Майнарди (1857) и Д.Кодацци (1868). Поэтому в иностранной литературе эти уравнения носят название уравнений совместимости Майнарди-Кодацци. Изучал свойства кривых и поверхностей на главном основании, работал в области теории дифференциальных уравнений в частных производных. Основатель московской геометрической школы. Один из основателей Московского математического общества (1865).

[3]**Кодацци**, Дельфино (***Codazzi***, *Delfino*) (7.3.1824 – 21.7.1873) – итальянский математик, родился в Лоди. С 1865 – профессор Павийского университета. Основные работы посвящены теории кривых и теории поверхностей. Работа о развертывающихся поверхностях в 1861 была премирована Парижской АН. В дифференциальной геометрии известны уравнения Майнарди-Кодацци (Майнарди опубликовал их в 1857, а Кодацци (с полным выводом) в 1868-1869. Другие исследования относятся к теории геодезических треугольников, а также к устойчивости плавающих тел.

быть выражена только через коэффициенты первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ и их производные по параметрам $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$. Аналитически это записывается так:

$$\tilde{G}_{\partial(u)} = -\frac{1}{\left(E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}\right)^2}\begin{vmatrix} E_{\partial(u)} & \dfrac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \\ F_{\partial(u)} & \dfrac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \\ G_{\partial(u)} & \dfrac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}}\left\{\frac{\partial}{\partial U_{\partial(u)}}\cdot\frac{\dfrac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} - \dfrac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}} + \frac{\partial}{\partial V_{\partial(u)}}\cdot\frac{\dfrac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} - \dfrac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}}\right\}.$$

Условия совместимости Петерсена-Кодацци (Майнарди[1]-Кодацци) записываются так:

$$\frac{\partial L_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} - \frac{\partial M_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = L_{\partial(u)}\Gamma^1_{12} + M_{\partial(u)}\left(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\right) - N_{\partial(u)}\Gamma^2_{11};$$

$$\frac{\partial M_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} - \frac{\partial N_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = L_{\partial(u)}\Gamma^1_{22} + M_{\partial(u)}\left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\right) - N_{\partial(u)}\Gamma^2_{12}.$$

В этих уравнениях через Γ^k_{ij} обозначены символы Кристоффеля[2] второго рода. Они выражаются через коэффициенты $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$ и $G_{\partial(u)}$ первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$(см. ниже, раздел 1.2.5.2).

Проверка условий совместимости по уравнениям Гаусса и Майнарди-Кодацци обычно требуется в исключительных случаях – очевидность их выполнения следует из того, что заданные поверхности $Д(И)$ изначально являются гладкими регулярными.

---

[1] **Майнарди**, Анджело (1800 – 9.3.1879) – итальянский математик, профессор. Работал профессором в Павийском университете. В 1856 Майнарди решил задачу об определении поверхности по заданным основным квадратичным формам. Соответствующие уравнения вывел полностью в 1886-1869 Д.Кодацци. Поэтому теперь их называют уравнениями Майнарди-Кодацци, хотя еще раньше (1853) их вывел русский математик К.М.Петерсен в диссертации "*Об изгибании поверхностей*", которая тогда не была опубликована.

[2] **Кристоффель**, Эльвин Бруно (***Christoffel***, *Elwin Bruno*) (10.11.1829, Моншау, – 15.3.1900, Страсбург) – немецкий математик, родился в Моншау. Окончил Берлинский университет (1856). Работал там же (с 1859), в Цюрихском политехникуме (с 1869 – профессор), в Берлинской ремесленной академии (с 1869), в Страсбургском университете (с 1872 – профессор). Основные исследования относятся к римановой геометрии, теории инвариантов, теории поверхностей и конформному отображению. Известен работами в области теории функций, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории инвариантов алгебраических форм и теории дифференциальных квадратичных форм, где Кристоффелем введен (1869) символ, носящий его имя. В области теории поверхностей известна теорема Гаусса-Кристоффеля. В теории инвариантов дал необходимые и достаточные условия эквивалентности двух алгебраических форм n переменных порядка p. Ввел символы Кристоффеля первого и второго порядков, и символы Римана-Кристоффеля. Занимался теорией дифференциальных уравнений с частными производными, в частности применением в этой теории методов конформного отображения (теорема Шварца-Кристоффеля). Вместе с Э.Бельтрами и Р.Липшицем явился непосредственным продолжателем идей Г.Ф.Б.Римана. Работал в области ударных волн. Разрабатывал (1869) идеи, положенные в основу тензорного анализа.

Исследование любой поверхности $Д(И)$ будет приведено к каноническому виду, если определены ее первые две основные квадратичные формы $Ф_{1.\partial}(u)$ и $Ф_{2.\partial}(u)$.

Гауссовы коэффициенты первых двух основных квадратичных форм $Ф_{1.\partial}(u)$ и $Ф_{2.\partial}(u)$ могут быть определены при различных способах задания исходной геометрической информации о поверхности $Д(И)$ как в непрерывной, так и в дискретной форме. Задание поверхностей деталей и инструментов в естественной форме, а именно через первые две основные квадратичный формы $Ф_{1.\partial}(u)$ и $Ф_{2.\partial}(u)$, обеспечивает возможность аналитического решения задач формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ, позволяет получать необходимые зависимости и рассчитать параметры поверхности $Д(И)$ в простой и удобной форме без обязательной их привязки к системе координат, в которой они заданы изначально. Существенным преимуществом аналитического описания поверхности $Д(И)$ в натуральном виде является то, что такой способ позволяет в простой форме определять все необходимые элементы локальной геометрии гладких регулярных участков поверхности $Д(И)$ и принципиально просто реализуется как на ЭВМ, так и в системах ЧПУ многокоординатными металлорежущими станками. Однако при этом возникает дополнительная задача приведения исходных способов задания поверхности $Д(И)$ к естественному.

Пример 1.2. Рассмотрим порядок определения первых двух основных квадратичных форм $Ф_{1.\partial}(u)$ и $Ф_{2.\partial}(u)$ для конической поверхности $Д(И)$ (рис. 1.11), заданной уравнением

$$\mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) = \mathbf{i}U_{\partial(u)}\sin\psi\cos\theta + \mathbf{j}U_{\partial(u)}\sin\psi\sin\theta + \mathbf{k}U_{\partial(u)}\cos\psi.$$

Предполагая, что $U_{\partial(u)}\sin\psi \neq 0$, единичная нормаль к поверхности конуса будет

$$\mathbf{n}_{\partial(u)} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right|} = -\mathbf{i}\cos\psi\cos\theta + \mathbf{j}\cos\psi\sin\theta + \mathbf{k}\sin\psi .$$

Первая и вторая основные квадратичные формы поверхности будут соответственно равны:

$$Ф_{1.\partial}(u) = dU^2_{\partial(u)} + U^2_{\partial(u)}\sin^2\psi\, d\theta^2;$$
$$Ф_{2.\partial}(u) = -U_{\partial(u)}\sin\psi\cos\psi\, d\theta^2.$$

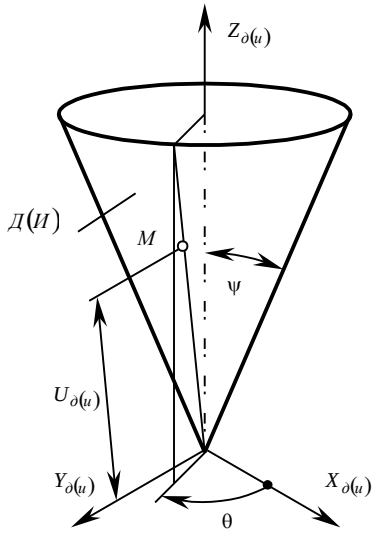


Рис. 1.11. К примеру расчета основных квадратичных форм $Ф_{1.\partial}(u)$ и $Ф_{2.\partial}(u)$ конического участка поверхности $Д(И)$.

Пример 1.3.[1] Требуется рассчитать коэффициенты E_∂, F_∂, G_∂ первой $Ф_{1.\partial}$ и L_∂, M_∂, N_∂ второй $Ф_{2.\partial}$ основных квадратичных форм эвольвентной винтовой поверхности $Д$ зуба косозубого колеса.

Уравнение поверхности $Д$ (рис. 1.12) записываем в виде матрицы:

$$\mathbf{r}_\partial = \begin{bmatrix} r_{b.\partial}\cos V_\partial + U_\partial \cos\tau_{b.\partial}\sin V_\partial \\ r_{b.\partial}\sin V_\partial - U_\partial \sin\tau_{b.\partial}\sin V_\partial \\ r_{b.\partial}\tan\tau_{b.\partial} - U_\partial \sin\tau_{b.\partial} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь U_∂ и V_∂ – гауссовы координаты текущей точки на поверхности $Д$ (см. рис. 1.12).

Исходя из этого уравнения, запишем:

[1]Пример разработан совместно с канд. техн. наук, доцентом В.А.Палагутой.

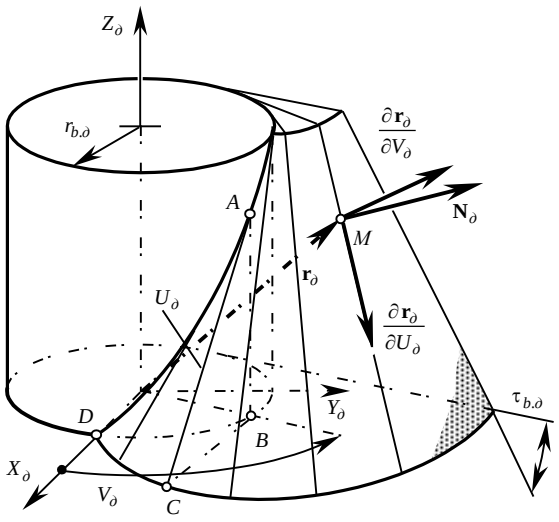


Рис. 1.12. К примеру определения коэффициентов первой и второй квадратичных форм.

$$\frac{d\mathbf{r}_\partial}{dU_\partial} = \begin{bmatrix} \cos\tau_{b.\partial} \sin V_\partial \\ -\cos\tau_{b.\partial} \cos V_\partial \\ -\sin\tau_{b.\partial} \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \frac{d\mathbf{r}_\partial}{dV_\partial} = \begin{bmatrix} -r_{b.\partial} \sin V_\partial + U_\partial \cos\tau_{b.\partial} \cos V_\partial \\ r_{b.\partial} \cos V_\partial + U_\partial \cos\tau_{b.\partial} \sin V_\partial \\ r_{b.\partial} \tan\tau_{b.\partial} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому $E_\partial = 1$, $F_\partial = -\frac{r_{b.\partial}}{\cos\tau_{b.\partial}}$ и $G_\partial = \frac{U_\partial^2 \cos^4\tau_{b.\partial} + r_{b.\partial}^2}{\cos^2\tau_{b.\partial}}$.

На основании этих результатов получим:

$$\Phi_{1.\partial} \quad \Rightarrow \quad ds_\partial^2 = dU_\partial^2 - 2\frac{r_{b.\partial}}{\cos\tau_{b.\partial}} dU_\partial dV_\partial + \frac{U_\partial^2 \cos^4\tau_{b.\partial} + r_{b.\partial}^2}{\cos^2\tau_{b.\partial}} dV_\partial^2 .$$

Дискриминант H_∂ первой основной квадратичной формы поверхности $Д$ равен $H_\partial = \sqrt{E_\partial G_\partial - F_\partial^2} = U_\partial \cos\tau_{b.\partial}$.

Касательная плоскость к поверхности $Д$ проходит через два направления, касательные к U_∂ – и V_∂ – линиям на ней. Направление, касательное к U_∂ – линии на $Д$ определяется уравнением:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} = \mathbf{i}_\partial \cos\tau_{b.\partial} \sin V_\partial - \mathbf{j}_\partial \cos\tau_{b.\partial} \cos V_\partial - \mathbf{k}_\partial \sin\tau_{b.\partial} .$$

Второе направление касательно к V_∂ – координатной линии на $Д$ и соответственно равно:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} = -\mathbf{i}_\partial \left(r_{b.\partial} \sin V_\partial - U_\partial \cos\tau_{b.\partial} \cos V_\partial\right) + \mathbf{j}_\partial \left(r_{b.\partial} \cos V_\partial + U_\partial \cos\tau_{b.\partial} \sin V_\partial\right) + \mathbf{k}_\partial r_{b.\partial} \tan\tau_{b.\partial}.$$

Приведенные результаты позволяют записать уравнение касательной плоскости $КП$, проходящей через точку $M(X_M, Y_M, Z_M)$ на поверхности $Д$:

$$r_{КП} = \begin{vmatrix} X_{КП} - X_M & Y_{КП} - Y_M & Z_{КП} - Z_M \\ \cos\tau_{b.\partial} \sin V_\partial & -\cos\tau_{b.\partial} \cos V_\partial & \sin\tau_{b.\partial} \\ \sin V_\partial + U_\partial \cos\tau_{b.\partial} \cos V_\partial & \cos V_\partial + U_\partial \cos\tau_{b.\partial} \sin V_\partial & r_{b.\partial} \tan\tau_{b.\partial} \end{vmatrix},$$

где $X_{КП}$, $Y_{КП}$ и $Z_{КП}$ – координаты текущей точки касательной плоскости $КП$.

Нормаль к поверхности $Д$ детали определяется так:

$$\mathbf{N}_\partial = \mathbf{i}_\partial N_{\partial.X} + \mathbf{j}_\partial N_{\partial.Y} + \mathbf{k}_\partial N_{\partial.Z} .$$

Орт нормали равен:

$$\mathbf{n}_\partial = \mathbf{i}_\partial \frac{N_{\partial.X}}{\sqrt{N_{\partial.X}^2 + N_{\partial.Y}^2 + N_{\partial.Z}^2}} + \mathbf{j}_\partial \frac{N_{\partial.Y}}{\sqrt{N_{\partial.X}^2 + N_{\partial.Y}^2 + N_{\partial.Z}^2}} + \mathbf{k}_\partial \frac{N_{\partial.Z}}{\sqrt{N_{\partial.X}^2 + N_{\partial.Y}^2 + N_{\partial.Z}^2}} .$$

Здесь:

$$N_{\partial.X} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos\tau_{b.\partial} \cos V_\partial & -\sin\tau_{b.\partial} \\ r_{b.\partial} \cos V_\partial + U_\partial \cos\tau_{b.\partial} \sin V_\partial & r_{b.\partial} \tan\tau_{b.\partial} \end{vmatrix} = U_\partial \sin\tau_{b.\partial} \cos\tau_{b.\partial} \sin V_\partial ;$$

$$N_{\partial.Y}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} & \dfrac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial}\\ \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} & \dfrac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} & \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial}\\ \dfrac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} & \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\tau_{b.\partial}\sin V_\partial & -\sin\tau_{b.\partial}\\ -r_{b.\partial}\sin V_\partial+U_\partial\cos\tau_{b.\partial}\cos V_\partial & r_{b.\partial}\tan\tau_{b.\partial}\end{vmatrix}=U_\partial\sin\tau_{b.\partial}\cos\tau_{b.\partial}\cos V_\partial\ ;$$

$$N_{\partial.Z}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} & \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial}\\ \dfrac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} & \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\tau_{b.\partial}\sin V_\partial & -\cos\tau_{b.\partial}\cos V_\partial\\ -r_{b.\partial}\sin V_\partial+U_\partial\cos\tau_{b.\partial}\cos V_\partial & r_{b.\partial}\cos V_\partial+U_\partial\cos\tau_{b.\partial}\sin V_\partial\end{vmatrix}=U_\partial\cos^2\tau_{b.\partial}\ .$$

Поэтому:

$$\mathbf{N}_\partial=\mathbf{i}_\partial U_\partial\sin\tau_{b.\partial}\cos\tau_{b.\partial}\sin V_\partial+\mathbf{j}_\partial U_\partial\sin\tau_{b.\partial}\cos\tau_{b.\partial}\cos V_\partial+\mathbf{k}_\partial U_\partial\cos^2\tau_{b.\partial}$$

и

$$\mathbf{n}_\partial=\mathbf{i}_\partial\frac{U_\partial\sin\tau_{b.\partial}\cos\tau_{b.\partial}\sin V_\partial}{|\mathbf{N}_\partial|}+\mathbf{j}_\partial\frac{U_\partial\sin\tau_{b.\partial}\cos\tau_{b.\partial}\cos V_\partial}{|\mathbf{N}_\partial|}+\mathbf{k}_\partial\frac{U_\partial\cos^2\tau_{b.\partial}}{|\mathbf{N}_\partial|}\ .$$

В этом уравнении

$$|\mathbf{N}_\partial|=\sqrt{U_\partial^2\sin^2\tau_{b.\partial}\cos^2\tau_{b.\partial}\sin^2V_\partial++U_\partial^2\sin^2\tau_{b.\partial}\cos^2\tau_{b.\partial}\cos^2V_\partial+U_\partial^2\cos^4\tau_{b.\partial}}=U_\partial\cos\tau_{b.\partial}\ ,$$

поэтому можно записать:

$$\mathbf{n}_\partial=\mathbf{i}_\partial\sin\tau_{b.\partial}\sin V_\partial+\mathbf{j}_\partial\sin\tau_{b.\partial}\cos V_\partial+\mathbf{k}_\partial\cos\tau_{b.\partial}$$

Вторая основная квадратичная форма поверхности $Д$ находится так:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_\partial}{dU_\partial^2}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T;\qquad \frac{d^2\mathbf{r}_\partial}{dU_\partial dV_\partial}=\begin{bmatrix}\cos\tau_{b.\partial}\cos V_\partial\\ \cos\tau_{b.\partial}\sin V_\partial\\ 0\\ 1\end{bmatrix};\qquad \frac{d^2\mathbf{r}_\partial}{dV_\partial^2}=\begin{bmatrix}-r_{b.\partial}\cos V_\partial-U_\partial\cos\tau_{b.\partial}\sin V_\partial\\ -r_{b.\partial}\sin V_\partial+U_\partial\cos\tau_{b.\partial}\cos V_\partial\\ 0\\ 1\end{bmatrix};$$

Поэтому $L_\partial=0;\ \ M_\partial=0;\ \ N_\partial=-U_\partial\sin\tau_{b.\partial}\cos\tau_{b.\partial}$. На основании этих результатов получим:

$$\Phi_{2.\partial}\quad\Rightarrow\quad -d\mathbf{r}_\partial\cdot d\mathbf{N}_\partial=-U_\partial\sin\tau_{b.\partial}\cos\tau_{b.\partial}dV_\partial^2\ .$$

Дискриминант T_∂ второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial}$ равен $T_\partial=\sqrt{L_\partial M_\partial-N_\partial^2}=0$.

1.2.3. Разложение уравнения поверхности *Д(И)* в ряды. В случаях, когда аналитическая форма (7) задания уравнения поверхности $Д(И)$ приводит к громоздким преобразованиям и техническим трудностям при вычислениях, следует проанализировать целесообразность разложения функции (7) в ряды.

Уравнениями (3) векторная функция $\mathbf{r}_{\partial(u)}=\mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)})$ определяется через скалярные функции $X_{\partial(u)},\ Y_{\partial(u)},\ Z_{\partial(u)}$. Если все скалярные функции (3) дифференцируемы вплоть до порядка $(n-1)$ и существует $n-$я производная, т.е. в окрестности значений параметров $U_{\partial(u)}^{(M)}$ и $V_{\partial(u)}^{(M)}$ все три скалярные функции раскладываются в ряд Тэйлора, вектор-функцию (7) также можно разложить в ряд Тэйлора в окрестности этих же значений $U_{\partial(u)}^{(M)}-$ и $V_{\partial(u)}^{(M)}-$ параметров:

$$\mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}+h;\quad V_{\partial(u)}+k)=$$

$$= \mathbf{r}_{\partial(u)}\Big|_M + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right)_M h + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right)_M k\right] + \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right)_M h + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right)_M k\right]^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right)_M h + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right)_M k\right]^{(n-1)} + \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right)_{\substack{U_M+\theta h \\ V_M+\theta k}} h + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right)_{\substack{U_M+\theta h \\ V_M+\theta k}} k\right]^n . \; 0 < \theta < 1.$$

Разложение функции (7) в ряд Тейлора может существенно упростить расчет геометрических характеристик локальных участков поверхности $Д(И)$.

Наряду с использованием разложения вектор-функции вида (7) в ряд Тейлора, находит применение разложение в ряд Маклорена и в другие ряды (Бронштейн И.Н, Семендяев К.А., 1986).

При использовании функций, разложенных в ряд, следует помнить, что их почленное интегрирование возможно только при равномерной сходимости ряда.

1.2.4. Требования к аналитическому представлению геометрической информации о поверхности *Д(И)*. При организации управления многокоординатной обработкой деталей с помощью ЧПУ математические модели поверхностей деталей и инструментов должны обеспечивать возможность формирования траекторий движения инструмента относительно детали и контроля точности обработки. Следствием этого является ряд требований к аналитическому представлению геометрической информации о поверхности $Д(И)$ как сложной, так и относительно простой формы.

Пусть исходная поверхность $Д(И)$ с собственными параметрами $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$ в своей системе координат $X_{\partial(u)}Y_{\partial(u)}Z_{\partial(u)}$ задана матрицей-столбцом:

$$[\mathbf{r}_{\partial(u)}] = \begin{bmatrix} X_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ Y_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ Z_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.60)$$

В это уравнение входят действительные функции

$$X_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}), \quad Y_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \quad \text{и} \quad Z_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$$

действительных переменных $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$; сама же функция $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ будет векторной функцией скалярного аргумента.

Функция $[\mathbf{r}_{\partial(u)}] = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ должна быть гладкой. Принадлежность функции классу гладкости C^n означает, что она имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно. Для вектор-функции (60) запись

$$\mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) = \mathbf{i}_{\partial(u)} X_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) + \mathbf{j}_{\partial(u)} Y_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) + \mathbf{k}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}); \quad (U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \in C^n$$

означает, что каждая из координат $X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}$ и $Z_{\partial(u)}$ как функция параметров $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$ принадлежит C^n. Запись $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ требует только непрерывности по совокупности аргументов. Требование непрерывности поверхности $Д$ сводится к тому, чтобы форма (60) ее представления была непрерывной функцией аргументов $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$.

Полагаем, что все производные, которые необходимы для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали (а это, как правило, производные не выше второго порядка), существуют и непрерывны, подразумевая при этом, что операции, которые описываются ниже, следует прекратить, когда входящие в рассмотрение производные перестают удовлетворять этому требованию.

Если отсек поверхности $Д(И)$ в пределах ограничивающего его контура обладает тем свойством, что каждый его локальный участок является простым[1] и в этой же области поверхность имеет непрерывные все частные производные первого порядка – следовательно допускается повторное дифференцирование и уравнение поверхности $Д(И)$ имеет вторые производные, то такой отсек будет регулярным.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы отсек поверхности $Д(И)$ был гладким регулярным, является требование неравенства нулю в пределах ограничивающего его контура по крайней мере одного из якобианов (13)-(15).

Иными словами для гладкого регулярного отсека поверхности $Д(И)$ выполняется условие:

(1.61) $$J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \neq 0.$$

Соотношение (61) является условием невырождения поверхности $Д(И)$ в точку или в линию. Его выполнение необходимо для того, чтобы локальные участки поверхности не были сингулярными (не находились в окрестности особых точек на поверхности $Д(И)$). Вместе с тем выполнение условия (61) не всегда достаточно для исключения сингулярностей на поверхностях – это следствие того, что оно отражает не только особенности геометрической структуры поверхности $Д(И)$ в текущей точке на ней, но зависит также и от характера параметризации этой поверхности. Например, если координатную плоскость XY, задать уравнениями $X = U$, $Y = V$, $Z = 0$, то $J_z = 1 \neq 0$. Но если ту же плоскость параметризовать иначе: $X = U^3$; $Y = V^3$; $Z = 0$, то в начале координат получим $J_x = J_y = J_z = 0$ и условие (61) не выполняется.

Выполнение условия (61) можно проверять в иной форме: требуется, чтобы через каждую точку на поверхности $Д(И)$ проходили две и только две координатные линии $U_{д(u)} = Const$ и $V_{д(u)} = Const$, имеющие в этой точке две несовпадающие одна с другой касательные. Иными словами, параметры $U_{д(u)}$ и $V_{д(u)}$ должны быть независимыми.

Требование независимости $\lfloor U_{д(u)}, V_{д(u)} \rfloor$ – параметров означает, что ранг матрицы

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{д(u)}}{\partial U_{д(u)}} & \frac{\partial Y_{д(u)}}{\partial U_{д(u)}} & \frac{\partial Z_{д(u)}}{\partial U_{д(u)}} \\ \frac{\partial X_{д(u)}}{\partial V_{д(u)}} & \frac{\partial Y_{д(u)}}{\partial V_{д(u)}} & \frac{\partial Z_{д(u)}}{\partial V_{д(u)}} \end{bmatrix}$$

должен быть равен двум. Точки, где ранг матрицы $[M]$ равен 1 и 0, являются сингулярными. Если ранг матрицы $[M]$ во всех точках равен 1 – поверхность вырождается в кривую. Это имеет место, например, в случае: $X = U + V$; $Y = (U + V)^2$ и $Z = (U + V)^3$.

Если два определителя матрицы $[M]$ вырождаются в нуль, в нуль вырождается и третий, т.е. все три вырождаются одновременно (кроме столбца, состоящего из двух нулей), но вырождение в нуль только одного определителя не свидетельствует о том, что локальный участок поверхности $Д(И)$ в окрестности такой точки сингулярный. Если, например, некоторая поверхность задана уравнениями $X = U + V$; $Y = U + V$ и $Z = UV$,

[1] Помним, что отсек поверхности $Д(И)$ будет простым, если координаты текущей точки на нем могут удовлетворять уравнению вида $Z_{д(u)} = Z_{д(u)}(X_{д(u)}, Y_{д(u)})$.

тогда $\frac{\partial X}{\partial U}\cdot\frac{\partial Y}{\partial V}-\frac{\partial X}{\partial V}\cdot\frac{\partial Y}{\partial U}=0$, но $\frac{\partial X}{\partial U}\cdot\frac{\partial Z}{\partial V}-\frac{\partial X}{\partial V}\cdot\frac{\partial Z}{\partial U}\neq 0$ и поверхность представляет собой плоскость, проходящую через ось Z.

Другой пример: $X=X(U)$; $Y=Y(U)$ и $Z=V$, когда поверхность является цилиндром.

Еще одна возможность проверки уравнения поверхности $Д(И)$ на наличие сингулярных точек на ней: если уравнение поверхности $Д(И)$ записано в векторной форме $\mathbf{r}_{\partial(u)}=\mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)},V_{\partial(u)})$, условие, по которому ранг матрицы $[M]$ равен двум, может быть записано в форме:

$$\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}\neq 0 \qquad \text{или так} \qquad \det\left(\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,U_{\partial(u)}}\times\frac{\partial\,\mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial\,V_{\partial(u)}}\right)\neq 0\,.$$

Появляющиеся вследствие особенностей строения поверхности и вследствие выбранной ее параметризации сингулярные точки (собственно сингулярные и ложные точки) часто встречаются при решении задач многокоординатного формообразования сложных поверхностей деталей на станках с ЧПУ, например, при конструировании режущих инструментов и аналитическом описании их исходной инструментальной поверхности $И$.

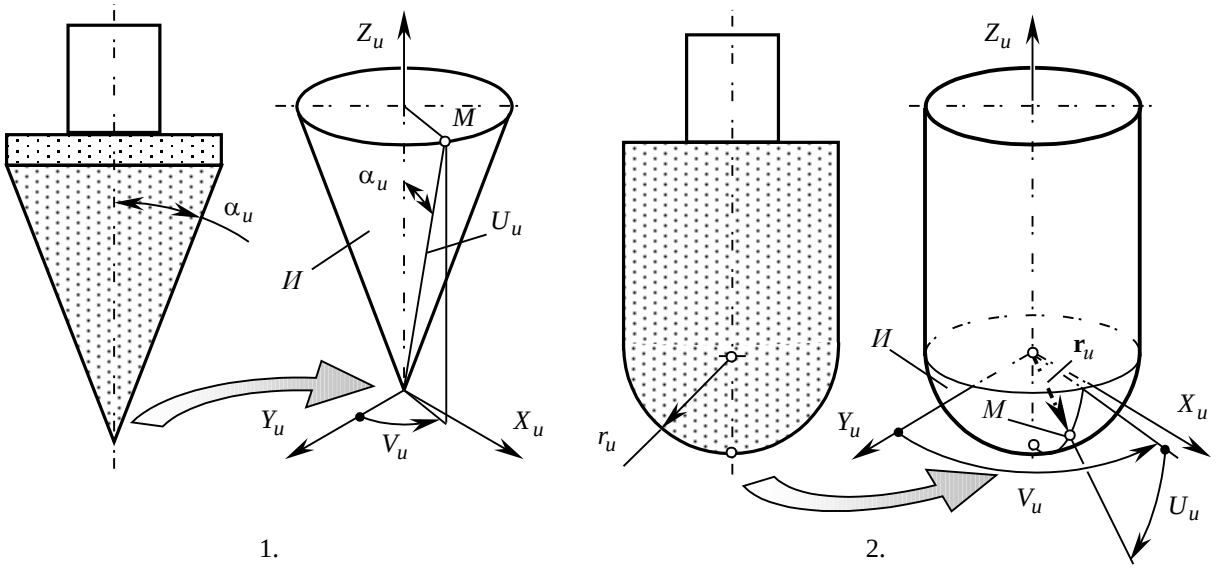


Рис. 1.13. Примеры сингулярностей на исходной инструментальной поверхности $И$.

Примером собственно сингулярной точки служит вершинная точка кругового конуса на исходной инструментальной поверхности $И$ конического инструмента (рис. 1.13.1). В этом случае координаты точек поверхности $И$ удовлетворяют уравнению:

$$\mathbf{r}_u=\mathbf{i}_u U_u\sin\alpha_u\sin V_u+\mathbf{j}_u U_u\sin\alpha_u\cos V_u+\mathbf{k}_u U_u\cos\alpha_u,$$

где α_u – угол при вершине исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента.

Для рассматриваемого случая

$$[M]=\begin{bmatrix}\sin\alpha_u\sin V_u & \sin\alpha_u\cos V_u & \cos\alpha_u\\ U_u\sin\alpha_u\cos V_u & -U_u\sin\alpha_u\sin V_u & 0\end{bmatrix}.$$

Следовательно, при $U_u = 0$ (т.е. в вершине поверхности $И$) имеется сингулярная точка – это изолированная точка поверхности, в которой строение поверхности $И$ отличается от строения этой же поверхности в других ее точках.

Примером ложной сингулярности, вызванной особенностями параметризации поверхности, а не ее строением, служит полярная точка сферы на исходной инструментальной поверхности $И$ цилиндрического инструмента со сферическим концом (рис. 1.13.2). Сферический участок поверхности $И$ может быть параметризован уравнением

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i}_u r_u \cos U_u \sin V_u + \mathbf{j}_u r_u \cos U_u \cos V_u - \mathbf{k}_u r_u \sin U_u ,$$

где r_u – радиус сферического участка исходной инструментальной поверхности $И$.

Исходя из уравнения сферического участка поверхности $И$ имеем:

$$[M] = \begin{bmatrix} -r_u \sin U_u \sin V_u & -r_u \sin U_u \cos V_u & r_u \cos U_u \\ r_u \cos U_u \cos V_u & -r_u \cos U_u \sin V_u & 0 \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом случае поверхность $И$ имеет сингулярную точку при $U_u = \frac{\pi}{2}$: это ложная сингулярная точка – следствие исключительно выбора вида параметризации поверхности $И$.

Рассмотренные примеры свидетельствуют о необходимости выполнения проверки уравнения поверхности $Д(И)$ (или ее отсеков) на наличие сингулярных точек.

Приведенные сведения позволяют дополнить требования к аналитическому описанию и виду параметризации поверхности $Д(И)$, а именно: чтобы поверхность $Д(И)$ была гладкой, не имела выступов или складок, все три частные производные должны быть непрерывны – сингулярные точки могут быть там, где $\nabla Д = 0$ (и $\nabla И = 0$).

Проверку выполненния требований, предъявляемых к аналитическому представлению геометрической информации о поверхности $Д(И)$, удобнее выполнять, если ее уравнение представлено в локальной системе координат. Локальная система координат внутренне связана с поверхностью $Д(И)$, вследствие чего называют *внутренней*. Если локальная система координат естественным образом связана с поверхностью $Д(И)$, а это имеет место, когда в качестве координатных линий на поверхности приняты линии ее кривизны, получим канонический репер[1], называемый также трехгранником Дарбу[2]. Его использование часто позволяет избежать громоздких преобразований.

Требования к аналитическому описанию поверхности $Д(И)$, приведенные выше, являются основными и должны удовлетворяться всегда. По мере необходимости они дополняются другими требованиями, существенными при решении конкретных задач.

1.2.5. Дискретное задание и элементы локальной геометрии сложных поверхностей деталей и инструментов. Получение геометрической информации о строении сложной поверхности $Д$ детали часто основывается на результатах исследований технических характеристик этих поверхностей (аэро-, гидро-, газодинамических и др.) – это следствие сложности строения и геометрической структуры рабочих

---

[1]Метод подвижного трехгранника разработан Френе (*J.Frenet*) для исследования пространственных кривых. Применительно к исследованию поверхностей этот метод адаптирован (1880) Дарбу (*G.Darboux*): в каждой точке поверхности существует два направления экстремальной нормальной кривизны, известных как главные направления; совместно с единичной нормалью они определяют единственный главный трехгранник, чрезвычайно удобный в применении. В общей постановке метод подвижного репера развит Картаном (*E.Cartan*) – он в полном объеме показал потенциальные возможности и преимущества метода подвижного репера.

[2]**Дарбу**, Жан Гастон (***Darboux***, *Jean Gaston*) (13.8.1842, Ним, - 23.2.1917, Париж), французский математик. Член Парижской АН (1884), с 1900 непременный секретарь ее; чл.-корр. Петербургской АН (1895). Основные труды посвящены проблемам дифференциальной геометрии (теория поверхностей, теория криволинейных координат) – *"Лекции по общей теории поверхностей"* (тт. 1-4, 1887-96) и *"Лекции об ортогональных системах и криволинейных координатах"* (1898). Геометрические исследования привели Дарбу к рассмотрению различных вопросов интегрирования дифференциальных уравнений. Из работ, относящихся к другим областям математики, важны мемуары по теории интегрирования, теории аналитических функций, а также исследования по вопросу о разложении функций по ортогональным функциям, в частности полиномам Якоби. В механике плодотворно занимался различными вопросами кинематики, равновесия, малых колебаний системы точек и др.

поверхностей многих деталей и экспериментальным либо численным подходом к получению координат их точек, например, в виде числовых отметок. Поэтому на практике информация о сложной поверхности $Д$ часто задается таблично числовыми отметками, координатами отдельных точек на поверхности детали с указанием направления нормалей или касательных к $Д$ в них, системой двух трансверсальных семейств определенным образом расположенных на поверхности $Д$ линий, графически в виде чертежа на плазе и др. Задача получения необходимой полной геометрической информации о дискретно заданной поверхности $Д$ является неотъемлемой составной частью проблемы синтеза наивыгоднейшего формообразования сложной поверхности детали на многокоординатном станке с ЧПУ.

Геометрическая информация о дискретно заданной поверхности $Д$ принципиально может быть получена непосредственно из данных об элементах, задающих поверхность, например по координатам точек, принадлежащих $Д$. Для этого можно использовать методы аналитической обработки дискретно заданных функций двух переменных. Такой подход связан с необходимостью выполнения в большом объеме вычислений. Очевидно, что вследствие неполного задания поверхности $Д$ он менее точен.

Для увеличения точности расчетов требуется большая плотность элементов, задающих поверхность, особенно на ее участках с большой кривизной. Это приводит к еще большему объему вычислений. Поэтому на практике дискретно заданную рабочую поверхность детали целиком либо по частям заменяют аналитически описанными поверхностями заданного вида. Во втором случае – отсеками таких поверхностей с решением вопросов их стыковки по условию непрерывности или исходя из требования достижения требуемого порядка гладкости.

В качестве аппроксимирующих поверхностей часто используются поверхности второго и более высоких порядков, реже поверхности других типов. Для получения аппроксимационных формул с производными широкое распространение получила сплайн-аппроксимация поверхности $Д$ сплайн-функциями степени k. Сплайн-аппроксимация позволяет получать простые уравнения отсеков поверхностей $Д$ достаточно больших площадей. В приложениях часто бывает достаточно применить только кубическую или бикубическую сплайн-аппроксимацию, что существенно упрощает решение задач многокоординатного формообразования сложных поверхностей деталей.

Здесь и далее термин *отсек поверхности* $Д$ детали предполагает:

Определение 1.4. *Отсек поверхности* $Д$ *– это сопряженный с другими из условия непрерывности или по требуемому порядку гладкости участок одной (сплошной) обрабатываемой поверхности детали, ограниченный криволинейным многоугольником, внутри которого поверхность описывается одним уравнением.*

Из отсеков поверхности состоит ее фрагмент. В частных случаях отсек и фрагмент поверхности могут совпадать один с другим.

Обычно границы отсека поверхности $Д$ представляют собой криволинейные многоугольники (рис. 1.14). Вместе с тем нет принципиальных ограничений на то, чтобы они имели форму замкнутого полностью или частично криволинейного контура.

Кратко рассмотренные выше способы дискретного задания и аналитического описания поверхностей деталей далеко не исчерпывают всего многообразия способов, встречающихся в практике, особенно в практике отраслевого машиностроения.

Для эффективного применения дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей при механической обработке деталей требуется создание своеобразного *“мостика”* – перехода от исходного задания геометрической информации о поверхности $Д(И)$ к аналитическому их описанию в натуральной форме. При этом следует помнить, что вид задания и аналитического описания (параметризации) поверхности $Д(И)$ оказывает существенное влияние на эффективность решения задачи синтеза, в частности уже потому, что трудоемкость определения и точность расчета первых и вторых производных от $\mathbf{r}_{\partial(u)}$ по $U_\partial -$ и V_∂ –параметрам при различных способах задания поверхности $Д(И)$ различна.

1.2.5.1. Сложные поверхности деталей и инструментов, аппроксимированные сплайнами. Заданные исходно в дискретной форме (координатами лежащих на них точек) сложные поверхности деталей могут быть предварительно аппроксимированы аналитическими функциями, после чего элементы их локальной гео-

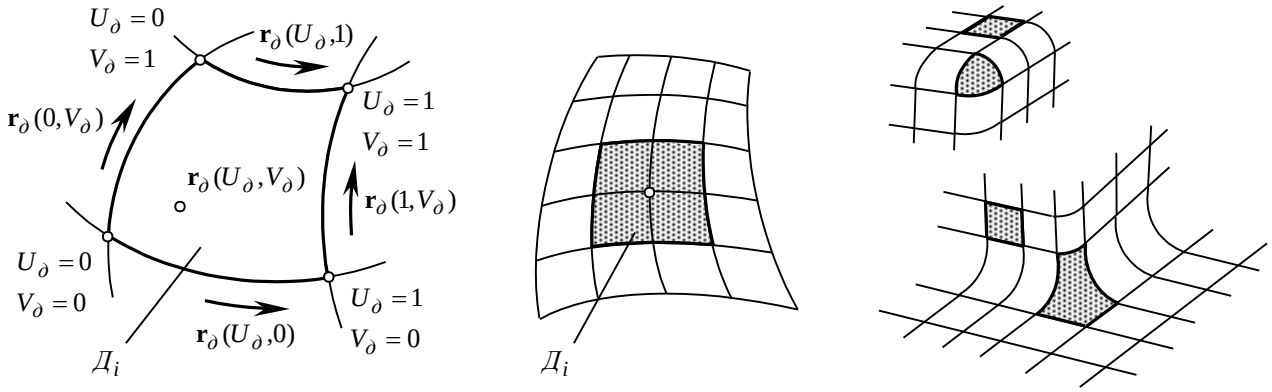


Рис. 1.14. Примеры отсеков обрабатываемой поверхности детали: выделенный отсек параметрически заданной поверхности $Д$ (1); сопряженные отсеки поверхности $Д$ (2); 3-х, 4-х и 5-и угольные отсеки поверхности $Д$ (3).

метрии находятся как для поверхностей, заданных аналитически. Решение задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования дискретно заданных сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ в этом случае связано с решением дополнительной задачи аппроксимации формообразуемой поверхности $Д$, например, полиномиальными сплайнами, с широким использованием для этого методов вычислительной геометрии.

Уравнение поверхности Д(И) деталей и инструментов. Алгебраическая форма отсека поверхности $Д$, описанного бикубическим сплайном, имеет вид:

$$\mathbf{r}_\partial(U_\partial, V_\partial) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{a}_{ij} U_\partial^i V_\partial^j, \tag{1.62}$$

где $\mathbf{a}_{ij}$ – векторные коэффициенты.

Выпишем уравнение (62) в развернутом виде и расположим его члены в таком порядке:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\partial(U_\partial,V_\partial) = {} & \mathbf{a}_{33}U_\partial^3V_\partial^3 + \mathbf{a}_{32}U_\partial^3V_\partial^2 + \mathbf{a}_{31}U_\partial^3V_\partial + \mathbf{a}_{30}U_\partial^3 + \\ & + \mathbf{a}_{23}U_\partial^2V_\partial^3 + \mathbf{a}_{22}U_\partial^2V_\partial^2 + \mathbf{a}_{21}U_\partial^2V_\partial + \mathbf{a}_{20}U_\partial^2 + \\ & + \mathbf{a}_{13}U_\partial V_\partial^3 + \mathbf{a}_{12}U_\partial V_\partial^2 + \mathbf{a}_{11}U_\partial V_\partial + \mathbf{a}a_{10}U_\partial + \\ & + \mathbf{a}_{03}V_\partial^3 + \mathbf{a}_{02}V_\partial^2 + \mathbf{a}_{01}V_\partial + \mathbf{a}_{00}.\end{aligned} \tag{1.63}$$

Этот 16-членный полином – вектор-функция скаляров U_∂ и V_∂, определяет все точки, лежащие на отсеке поверхности детали.

Алгебраической форме (63) бикубического отсека поверхности детали соответствует матричная форма записи его уравнения:

$$[\mathbf{r}_\partial] = [\tilde{\mathbf{U}}_\partial]\cdot[\mathbf{A}]\cdot[\tilde{\mathbf{V}}_\partial]^T, \tag{1.64}$$

где обозначено:

$$\left[\tilde{U}_\partial\right]=\left|U_\partial^3 \quad U_\partial^2 \quad U_\partial \quad 1\right|^T; \qquad \left[\tilde{V}_\partial\right]=\left|V_\partial^3 \quad V_\partial^2 \quad V_\partial \quad 1\right|^T; \qquad [\mathbf{A}]=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{30} \\ \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{20} \\ \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{10} \\ \mathbf{a}_{03} & \mathbf{a}_{02} & \mathbf{a}_{01} & \mathbf{a}_{00} \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что индексы векторных элементов матрицы $[\mathbf{A}]$ соответствуют индексам в развернутом уравнении (63).

Рассмотрим случай, когда произвольный отсек сложной поверхности детали ограничен двумя парами кривых – граничными кривыми, и дискретно задан так: известны координаты $\mathbf{r}_\partial^{(i)}$ четырех его вершин $(i=1, 2, 3, 4)$, в каждой вершине определены направления касательных $\left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right|_i$ и $\left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|_i$ к каждой из граничных кривых и, кроме того, в каждой вершине известен вектор кручения $\left.\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial}\right|_i$. Исходя из этих данных геометрическая форма бикубического отсека поверхности $Д$ приводится к виду:

$$[\mathbf{r}_\partial]=\left[\tilde{\mathbf{U}}_\partial\right]\cdot[M]\cdot[\mathbf{B}]\cdot[M]^{-1}\cdot\left[\tilde{\mathbf{V}}_\partial\right]^T. \tag{1.65}$$

где матрица коэффициентов равна:

$$[\mathbf{e}]=\begin{bmatrix} \mathbf{r}_\partial^{(1)} & \mathbf{r}_\partial^{(2)} & \left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|_1 & \left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|_2 \\ \mathbf{r}_\partial^{(4)} & \mathbf{r}_\partial^{(3)} & \left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|_4 & \left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|_3 \\ \left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right|_1 & \left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right|_2 & \left.\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial}\right|_1 & \left.\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial}\right|_2 \\ \left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right|_4 & \left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right|_3 & \left.\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial}\right|_4 & \left.\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial}\right|_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left[\mathbf{r}_\partial^{(i)}\right] & \left[\left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right|_i\right] \\ \left[\left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|_i\right] & \left[\left.\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial}\right|_i\right] \end{bmatrix}. \tag{1.66}$$

Сопоставляя (65) и (64) видим, что

$$[\mathbf{B}]=[M]^{-1}\cdot[\mathbf{A}]\cdot[M]^{T-1}.$$

Для рассматриваемого случая дискретного задания поверхности $Д$ матрица $[M]^{-1}$ равна

$$[M]^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.67}$$

Например (Dinauer, W.R., Daffie, N.A., Philpott, M.L., 1994), если отсек поверхности $Д$ представлен вектором

$$\mathbf{r}_\partial(U_\partial, V_\partial) = \left[X_\partial(U_\partial, V_\partial) \quad Y_\partial(U_\partial, V_\partial) \quad Z_\partial(U_\partial, V_\partial) \quad 1\right]^T,$$

где параметры U_∂ и V_∂ пронормированы, т.е. изменяются от 0 до 1, то он может быть переписан в Эрмитовой форме (Mortenson, M., 1985)

$$\mathbf{r}_\partial(U_\partial, V_\partial) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_\partial \mathbf{M}_{h.\partial} \mathbf{Q}_{x.\partial} \mathbf{M}_{h.\partial}^T \mathbf{V}_\partial^T \\ \mathbf{U}_\partial \mathbf{M}_{h.\partial} \mathbf{Q}_{y.\partial} \mathbf{M}_{h.\partial}^T \mathbf{V}_\partial^T \\ \mathbf{U}_\partial \mathbf{M}_{h.\partial} \mathbf{Q}_{z.\partial} \mathbf{M}_{h.\partial}^T \mathbf{V}_\partial^T \\ 1 \end{bmatrix},$$

где векторы $\mathbf{U}_\partial$ и $\mathbf{V}_\partial$ равны

$$\mathbf{U}_\partial = \left| U_\partial^3 \quad U_\partial^2 \quad U \quad 1 \right|; \qquad \mathbf{V}_\partial = \left| V_\partial^3 \quad V_\partial^2 \quad V_\partial \quad 1 \right|.$$

Матрица Эрмита[1] $\mathbf{M}_{h.\partial}$ имеет вид:

$$\mathbf{M}_{h.\partial} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{Q}_{x.\partial}$ есть матрица, определяющая $\mathbf{r}_\partial$ – компоненты вектора положения, касательные к U_∂ – и V_∂ – линиям, а также векторы кручения в четырех углах отсека:

$$\mathbf{Q}_{x.\partial} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_\partial(0,0) & \mathbf{r}_\partial(0,1) & \dfrac{\partial\, \mathbf{r}_\partial(0,0)}{\partial\, V_\partial} & \dfrac{\partial\, \mathbf{r}_\partial(0,1)}{\partial\, V_\partial} \\ \mathbf{r}_\partial(1,0) & \mathbf{r}_\partial(1,1) & \dfrac{\partial\, \mathbf{r}_\partial(1,0)}{\partial\, V_\partial} & \dfrac{\partial r\, \mathbf{r}_\partial(1,1)}{\partial\, V_\partial} \\ \dfrac{\partial\, \mathbf{r}_\partial(0,0)}{\partial\, U_\partial} & \dfrac{\partial\, \mathbf{r}_\partial(0,1)}{\partial\, U_\partial} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial(0,0)}{\partial\, U_\partial} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial(0,1)}{\partial\, U_\partial \partial\, V_\partial} \\ \dfrac{\partial\, \mathbf{r}_\partial(1,0)}{\partial\, U_\partial} & \dfrac{\partial\, \mathbf{r}_\partial(1,1)}{\partial\, U_\partial} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial(1,0)}{\partial\, U_\partial \partial\, V_\partial} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial(1,1)}{\partial\, U_\partial \partial\, V_\partial} \end{bmatrix}.$$

По форме матрицы $\mathbf{Q}_{y.\partial}$ и $\mathbf{Q}_{z.\partial}$ подобны матрице $\mathbf{Q}_{x.\partial}$.

В алгебраической форме (64) аналитического описания бикубического отсека сложной поверхности *Д* переменными являются матрицы $\left[\tilde{\mathbf{U}}_\partial\right]$ и $\left[\tilde{\mathbf{V}}_\partial\right]$ – соответственно первый и последний сомножитель. Матрица $[\mathbf{A}]$ в качестве своих элементов содержит векторы $\mathbf{a}_{ij}$, каждый из которых является величиной постоянной – следовательно, матрицу $[\mathbf{A}]$ следует рассматривать как постоянную.

Геометрическая форма (65) бикубического отсека сложной поверхности детали содержит переменные матрицы $\left[\tilde{\mathbf{U}}_\partial\right]$ и $\left[\tilde{\mathbf{V}}_\partial\right]$, также являющиеся первым и последним сомножителем соответственно. Произведение

---

[1]**Эрмит**, Шарль (***Hermite***, *Charles*) (24.12.1822, Дьёз, – 14.1.1901, Париж), французский математик, член Парижской АН (1856). С 1848 работал в Политехнической школе, с 1869 – профессор Парижского университета. Эрмиту принадлежат исследования по различным вопросам классического анализа, алгебры и теории чисел. Основные работы связаны с теорией эллиптических функций и ее приложениями. Эрмит изучил класс ортогональных многочленов – *многочлены Эрмита*. Ряд работ Эрмита посвящены теории алгебраических форм и их инвариантов. Доказал (1873) трансцендентность числа *e*.

матриц $[M]\cdot[\mathbf{B}]\cdot[M]^T$ в (65) – величина постоянная. Это очевидно, во-первых, потому, что элементы матрицы $[\mathbf{B}]$ в (66) – величины постоянные и матрица (67) состоит из констант. Во-вторых, произведение $[M]\cdot[\mathbf{B}]\cdot[M]^T=[\mathbf{A}]$, где $[\mathbf{A}]$, как было отмечено, является постоянной матрицей.

Для различных способов задания бикубического отсека поверхности $Д$ всегда имеем произведение нечетного количества матриц-констант, умноженного с обеих сторон на переменные матрицы $[\tilde{\mathbf{U}}_\partial]$ и $[\tilde{\mathbf{V}}_\partial]$. Поэтому для расчета элементов локальной геометрии поверхности детали в виде отсека поверхности, описанного бикубическим сплайном, достаточно задать уравнение вида (64), с той лишь разницей, что матрицу $[\mathbf{A}]$ будем рассматривать как произведение нечетного количества постоянных по величине матриц $[\mathbf{A}_\partial]$:

$$[\mathbf{r}_\partial]=[\tilde{\mathbf{U}}_\partial]\cdot\left(\prod_{q=1}^{n}[\mathbf{A}_q]\right)\cdot[\tilde{\mathbf{V}}_\partial]^T, \tag{1.68}$$

где q – порядковый номер матрицы в произведении;

n – количество перемножаемых матриц.

Получение аппроксимационной формулы дает возможность перейти от дискретного задания к непрерывному аналитическому описанию поверхности детали уравнением, являющимся ее математической моделью.

Первые производные уравнения поверхности детали. Если дискретно заданная поверхность $Д$ аналитически описана бикубическим уравнением вида (68), то для нахождения необходимых производных уравнение отсека этой поверхности удобно переписать в форме:

$$\mathbf{r}_\partial(U_\partial,V_\partial)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\left[\left(\prod_{q=1}^{n}a_{ij}^{q}\right)U_\partial^i V_\partial^i\right];$$

$$\begin{aligned}
&=\left(\prod_{q=1}^{n}a_{33}^{q}V_\partial^3+\prod_{q=1}^{n}a_{32}^{q}V_\partial^2+\prod_{q=1}^{n}a_{31}^{q}V_\partial+\prod_{q=1}^{n}a_{30}^{q}\right)U_\partial^3+\\
&+\left(\prod_{q=1}^{n}a_{23}^{q}V_\partial^3+\prod_{q=1}^{n}a_{22}^{q}V_\partial^2+\prod_{q=1}^{n}a_{21}^{q}V_\partial+\prod_{q=1}^{n}a_{20}^{q}\right)U_\partial^2+\\
&+\left(\prod_{q=1}^{n}a_{13}^{q}V_\partial^3+\prod_{q=1}^{n}a_{12}^{q}V_\partial^2+\prod_{q=1}^{n}a_{11}^{q}V_\partial+\prod_{q=1}^{n}a_{10}^{q}\right)U_\partial+\\
&+\left(\prod_{q=1}^{n}a_{03}^{q}V_\partial^3+\prod_{q=1}^{n}a_{02}^{q}V_\partial^2+\prod_{q=1}^{n}a_{01}^{q}V_\partial+\prod_{q=1}^{n}a_{00}^{q}\right);
\end{aligned} \tag{1.69}$$

$$=\begin{bmatrix}U_\partial^3 & U_\partial^2 & U_\partial & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\prod_{q=1}^{n}a_{33}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{32}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{31}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{30}^{q}\\ \prod_{q=1}^{n}a_{23}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{22}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{21}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{20}^{q}\\ \prod_{q=1}^{n}a_{13}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{12}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{11}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{10}^{q}\\ \prod_{q=1}^{n}a_{03}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{02}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{01}^{q} & \prod_{q=1}^{n}a_{00}^{q}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_\partial^3\\ V_\partial^2\\ V_\partial\\ 1\end{bmatrix};$$

(1.70) $$= \left| U_\partial^3 \quad U_\partial^2 \quad U_\partial \quad 1 \right| \cdot \left[\prod_{q=1}^{n} a_{ij}^q \right] \cdot \left| V_\partial^3 \quad V_\partial^2 \quad V_\partial \quad 1 \right|^T .$$

Из (70) находим, что

(1.71) $$\left[\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \right] = \left| 3U_\partial^2 \quad 2U_\partial \quad 1 \quad 0 \right| \cdot \left[\prod_{q=1}^{n} a_{ij}^q \right] \cdot \left| V_\partial^2 \quad V_\partial \quad V_\partial \quad 1 \right|^T ;$$

(1.72) $$\left[\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \right] = \left| U_\partial^2 \quad U_\partial \quad U_\partial \quad 1 \right| \cdot \left[\prod_{q=1}^{n} a_{ij}^q \right] \cdot \left| 3V_\partial^2 \quad 2V_\partial \quad 1 \quad 0 \right|^T .$$

Если матричную форму записи уравнений (71) и (72) производных развернуть и полученный результат сопоставить с уравнениями соответствующих производных, полученных путем дифференцирования уравнения (69), то будем видеть, что получен один и тот же результат.

Касательные к координатным линиям. Уравнения (71) и (72) первых производных уравнения (70) поверхности $Д(И)$ по $(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ – параметрам определяют векторы $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$, касательные к координатным линиям для отсека поверхности, описанного бикубическим уравнением. По аналогии с рассмотренным выше для рассмотрения дифференциально-геометрических характеристик поверхности вводятся в рассмотрение: касательные направления, касательная плоскость, нормаль к поверхности и составляется уравнение первой основной квадратичной формы поверхности $Д(И)$.

Вторые производные уравнения поверхности $Д(И)$. Если дискретно заданная поверхность $Д$ аналитически описана бикубическим уравнением вида (68), то с учетом (71) и (72) имеем

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial^2} \right] = \left[6U_\partial \quad 2 \quad 0 \quad 0 \right] \cdot \left[\prod_{q=1}^{n} a_{ij}^q \right] \cdot \left| V_\partial^3 \quad V_\partial^2 \quad V_\partial \quad 1 \right|^T ;$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial} \right] = \left| 3U_\partial^2 \quad 2U_\partial \quad 1 \quad 0 \right| \cdot \left[\prod_{q=1}^{n} a_{ij}^q \right] \cdot \left| 3V_\partial^2 \quad 2V_\partial \quad 1 \quad 0 \right|^T ;$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial^2} \right] = \left| U_\partial^3 \quad U_\partial^2 \quad U_\partial \quad 1 \right| \cdot \left[\prod_{q=1}^{n} a_{ij}^q \right] \cdot \left[6V_\partial \quad 2 \quad 0 \quad 0 \right]^T .$$

На основании этих формул, по аналогии с рассмотренным выше, для нахождения дифференциально-геометрических характеристик поверхности $Д(И)$ вводится в рассмотрение вторая ее основная квадратичная форма, которая используется для расчета параметров кривизны поверхности и др.

1.2.5.2. Сложные поверхности деталей и инструментов, заданные числовыми отметками. Применяемое на практике дискретное задание рабочих поверхностей деталей и инструментов в виде матрицы преимущественно с равномерным распределением элементов (как правило, точек), позволяет при необходимости определить элементы локальной геометрии поверхности $Д(И)$, непосредственно исходя из матрицы, определяющей координаты принадлежащих поверхности $Д(И)$ точек. При решении этой задачи в дискретной форме появляются особенности.

Необходимые для определения коэффициентов первой $Ф_{1.\partial(u)}$ и второй $Ф_{2.\partial(u)}$ основных квадратичных форм первые и вторые производные уравнения поверхности $Д(И)$, заданной дискретно, могут быть найдены

путем использования методов дифференцирования функций, заданных дискретно.

Первые производные поверхности $Д(И)$. *Касательные прямые*. В окрестности текущей точки $M_{i,j}$ на поверхности детали или инструмента выбраны две пары близлежащих к ней точек $M_{i,(j-1)}$, $M_{i,(j+1)}$, $M_{(i-1),j}$, и $M_{(i+1),j}$ (рис. 1.15.1), расположенные в двух трансверсальных направлениях на $Д(И)$. Через три соседние точки $M_{i,(j-1)}$, $M_{i,j}$ и $M_{i,(j+1)}$ одного ряда проходит плоскость Σ_i, уравнение которой представимо в виде (рис. 1.15.2):

$$\begin{vmatrix} X_i^{(M)} - X_{i,j} & Y_i^{(M)} - Y_{i,j} & Z_i^{(M)} - Z_{i,j} \\ X_{i,(j-1)} - X_{i,j} & Y_{i,(j-1)} - Y_{i,j} & Z_{i,(j-1)} - Z_{i,j} \\ X_{i,(j+1)} - X_{i,j} & Y_{i,(j+1)} - Y_{i,j} & Z_{i,(j+1)} - Z_{i,j} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.73)$$

или в векторной форме:

$$(\mathbf{r}_{\kappa.i} - \mathbf{r}_{i,j}) \times (\mathbf{r}_{i,(j-1)} - \mathbf{r}_{i,j}) \cdot (\mathbf{r}_{i,(j+1)} - \mathbf{r}_{i,j}) = 0 .$$

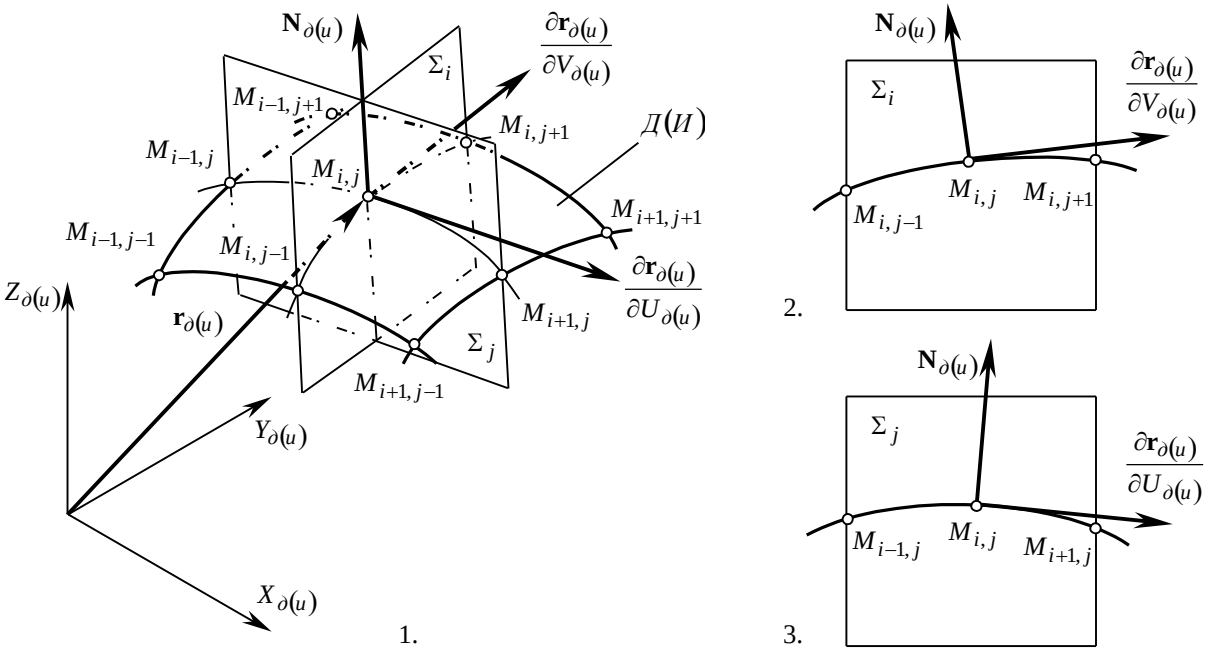


Рис. 1.15. Локальный участок дискретно заданной поверхности $Д(И)$ в окрестности точки $M_{i,j}$ на ней.

Аналогичные уравнения справедливы и для поскости Σ_j, проходящей через другие три соседние точки $M_{(i-1),j}$, $M_{i,j}$ и $M_{i,(j+1)}$ во втором ряду:

$$\begin{vmatrix} X_j^{(M)} - X_{i,j} & Y_j^{(M)} - Y_{i,j} & Z_j^{(M)} - Z_{i,j} \\ X_{(i-1),j} - X_{i,j} & Y_{(i-1),j} - Y_{i,j} & Z_{(i-1),j} - Z_{i,j} \\ X_{(i+1),j} - X_{i,j} & Y_{(i+1),j} - Y_{i,j} & Z_{(i+1),j} - Z_{i,j} \end{vmatrix} = 0$$

и в векторной форме:

$$\left(\mathbf{r}_{к.j}-\mathbf{r}_{i,j}\right)\times\left(\mathbf{r}_{i,(j-1)}-\mathbf{r}_{i,j}\right)\cdot\left(\mathbf{r}_{i,(j+1)}-\mathbf{r}_{i,j}\right)=0\,.$$

Система координат $X_iY_iZ_i$ связана с плоскостью (73) таким образом, что ее начало расположено в плоскости (73), а координатная плоскость X_iY_i совпадает с этой же плоскостью. Тогда в системе координат $X_iY_iZ_i$ уравнение окружности, проходящей через три точки $M_{i,(j-1)}$, $M_{i,j}$ и $M_{i,(j+1)}$, имеет вид:

$$\left(X_{c.i}-X_{O,i}\right)^2+\left(Y_{c.i}-Y_{O.i}\right)^2=R_i^2\,, \tag{1.74}$$

где $X_{c.i}$ и $Y_{c.i}$ – координаты текущей точки окружности в системе координат $X_iY_iZ_i$;

$X_{O.i}$ и $Y_{O.i}$ – координаты цетра окружности;

R_i – радиус окружности.

Неизвестные параметры окружности $X_{O.i}$, $Y_{O.i}$ и R_i находятся как решение системы уравнений:

$$\begin{cases}\left(X_i^*-X_{O.i}\right)^2+\left(Y_i^*-Y_{O.i}\right)^2=R_i^2;\\ \left(X_{(i-1)}^*-X_{O.i}\right)^2+\left(Y_{(i-1)}^*-Y_{O.i}\right)^2=R_i^2;\\ \left(X_{(i+1)}^*-X_{O.i}\right)^2+\left(Y_{(i+1)}^*-Y_{O.i}\right)^2=R_i^2,\end{cases} \tag{1.75}$$

где $X_{(i-1)}^*, Y_{(i-1)}^*$; X_i^*, Y_i^* и $X_{(i+1)}^*, Y_{(i+1)}^*$ – координаты точек $M_{i,(j-1)}$, $M_{i,j}$ и $M_{i,(j+1)}$ в системе координат X_iY_i.

Исходя из (74) с учетом (75) уравнение касательной к окружности (74) в точке $M_{i,j}$ представимо в виде столбцовой матрицы:

$$\mathbf{r}_i^*=\begin{bmatrix}X_i^*\\ Y_i^*\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_i^* & Y_i^* & 0 & 1\end{bmatrix}^T. \tag{1.76}$$

Перейдя от системы координат X_iY_i к исходной системе координат $X_{\partial(u)}Y_{\partial(u)}Z_{\partial(u)}$, в которой поверхность $Д(И)$ задана изначально, получим вектор $\mathbf{r}_i$ касательной $\mathbf{r}_i^*$ (76), записанный в исходной системе координат $X_{\partial(u)}Y_{\partial(u)}Z_{\partial(u)}$:

$$\mathbf{r}_i=\mathbf{Res}\ (i\to Д)\cdot\mathbf{r}_i^*=\mathbf{M}_{i\to\partial}\cdot\begin{bmatrix}X_i^*\left(U_{\partial(u)}\right)\\ Y_i^*\left(U_{\partial(u)}\right)\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_i\left(U_{\partial(u)}\right)\\ Y_i\left(U_{\partial(u)}\right)\\ Z_i\left(U_{\partial(u)}\right)\\ 1\end{bmatrix}. \tag{1.77}$$

Аналогичное соотношение может быть получено и для другой плоскости (рис. 1.15.3), проходящей через три соседние точки $M_{(i-1)j}$, $M_{i,j}$ и $M_{i,(j+1)}$:

$$\mathbf{r}_j=\mathbf{Res}\ (i\to Д)\cdot\mathbf{r}_j^*=\mathbf{M}_{j\to\partial}\cdot\begin{bmatrix}X_j^*\left(V_{\partial(u)}\right)\\ Y_j^*\left(V_{\partial(u)}\right)\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_j\left(V_{\partial(u)}\right)\\ Y_j\left(V_{\partial(u)}\right)\\ Z_j\left(V_{\partial(u)}\right)\\ 1\end{bmatrix}. \tag{1.78}$$

Параметрами в уравнениях касательных являются $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$параметры. В качестве $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$параметров могут быть использованы, например, углы поворота радиус-вектора окружностей в каждом из плоских нормальных сечений поверхности $Д(И)$.

Касательная плоскость к поверхности $Д(И)$ в некоторой ее точке $M_{i,j}$ находится как плоскость, проходящая через эту точку и содержащая два направления (77) и (78). Поэтому ее уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} X_{КП}-X_{i,j} & Y_{КП}-Y_{i,j} & Z_{КП}-Z_{i,j} \\ l_i & m_i & n_i \\ l_j & m_j & n_j \end{vmatrix}=0.$$

Нормаль к поверхности $Д(И)$ определяется через векторное произведение касательных. С учетом (77) и (78) в этом случае имеет место соотношение:

$$\mathbf{N}_{\partial(u)}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_i & Y_i & Z_i \\ X_j & Y_J & Z_j \end{vmatrix}.$$

Для расчета орта нормали справедлива формула:

$$\mathbf{n}_{\partial(u)}=\frac{\mathbf{N}_{\partial(u)}}{\left|\mathbf{N}_{\partial(u)}\right|}=\frac{\mathbf{N}_{\partial(u)}}{\sqrt{(X_i-X_j)^2+(Y_i-Y_j)^2+(Z_i-Z_j)^2}}=\frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_i & Y_i & Z_i \\ X_j & Y_j & Z_j \end{vmatrix}}{\sqrt{(X_i-X_j)^2+(Y_i-Y_j)^2+(Z_i-Z_j)^2}}.$$

Первая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$ определяется уравнением (23), коэффициенты первой основной квадратичной формы $Ф_{1.\partial(u)}$ равны соответственно (25).

С учетом (77) и (78) можно записать, что:

$$E_{\partial(u)}=(X_i)^2+(Y_i)^2+(Z_i)^2; \tag{1.79}$$

$$F_{\partial(u)}=X_i\cdot X_j+Y_i\cdot Y_j+Z_i\cdot Z_j; \tag{1.80}$$

$$G_{\partial(u)}=(X_j)^2+(Y_j)^2+(Z_j)^2. \tag{1.81}$$

Тогда с учетом (79)-(81) первая основная квадратичная форма представима в виде:

$$Ф_{1.\partial(u)} \Rightarrow dS^2_{\partial(u)}=\left[(X_i)^2+(Y_i)^2+(Z_i)^2\right]dU^2_{\partial(u)}+ \\ +2(X_i\cdot X_j+Y_i\cdot Y_J+Z_i\cdot Z_j)\,dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)}+\left[(X_j)^2+(Y_j)^2+(Z_j)^2\right]dV^2_{\partial(u)}.$$

Вторые производные и вторая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$. Вторая основная квадратичная форма поверхности $Д(И)$ определяется как (38), а ее коэффициенты равны (48)-(50) соответственно.

Для вычисления коэффициентов $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$ и $N_{\partial(u)}$ второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial(u)}$ в рассматриваемом случае известны все первые производные от $X_{\partial(u)}$, $Y_{\partial(u)}$ и $Z_{\partial(u)}$ по параметрам $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$, а также коэффициенты $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$ и $G_{\partial(u)}$ первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ (см. выше). Не известными остаются входящие в формулы (48)-(50) вторые производные от $X_{\partial(u)}$, $Y_{\partial(u)}$ и $Z_{\partial(u)}$ по параметрам $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$. Чтобы отыскать эти производные при дискретном задании поверхности $Д(И)$, воспользуемся подходом, используемым при выводе формул Вейтгартена (Struik, D.J., 1961).

*Уравнения Вейтгартена (*или *Гаусса-Вейнгартена)*. Коэффициенты $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$ и $G_{\partial(u)}$ первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ зависят только от первых производных $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$, а коэффициенты $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$ и $N_{\partial(u)}$ второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial(u)}$ зависят как от первых $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$, так и от вторых производных $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}}$. Поэтому соотношения между коэффициентами первой и второй основными квадратичными формами не могут быть чисто алгебраическим (чисто алгебраические соотношения имеют место в особых случаях, для характеристики специальных поверхностей или для описания локальной топологии поверхностей в специальных точках, таких, как омбилические). В общем случае соотношения между коэффициентами $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ и $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$, $N_{\partial(u)}$ носят дифференциальный характер и могут быть найдены так.

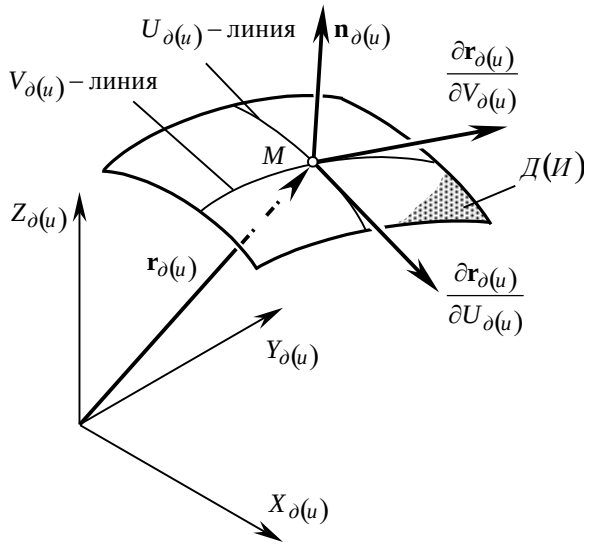


Рис. 1.16. Подвижный трехгранник, связанный с текущей точкой M на поверхности $Д(И)$.

Введем в рассмотрение подвижный трехгранник (рис. 1.16) с началом в текущей точке M на поверхности $Д(И)$, который образован не тремя взаимно перпендикулярными единичными векторами, а тремя линейно независимыми векторами $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$ и $\mathbf{n}_{\partial(u)}$. Векторы $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$ лежат в плоскости, касательной в точке M к поверхности $Д(И)$, которая в свою очередь ортогональна орту нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$. Этот подвижный трехгранник зависит от двух параметров $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$.

Любой вектор может быть линейно выражен через составляющие подвижного трехгранника. Если выполнить это для векторов $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}}$, то получим уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U^2_{\partial(u)}} = \alpha_1 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \alpha_2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \alpha_3 \mathbf{n}_{\partial(u)};$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} = \beta_1 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \beta_2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \beta_3 \mathbf{n}_{\partial(u)};$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V^2_{\partial(u)}} = \gamma_1 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \gamma_2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \gamma_3 \mathbf{n}_{\partial(u)},$$

где коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ должны быть определены.

Используя соотношения (25) для гауссовых коэффициентов $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ и уравнение (23) для первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$, приходим к результату:

$$\alpha_3 = \frac{d^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU^2_{\partial(u)}} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = L_{\partial(u)}; \qquad \beta_3 = \frac{d^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)}} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = M_{\partial(u)}; \qquad \gamma_3 = \frac{d^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{dV^2_{\partial(u)}} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = N_{\partial(u)}.$$

Снова используя соотношения (25) для гауссовых коэффициентов $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ и введя обозначения:

$$[11,1] = \frac{d^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU^2_{\partial(u)}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}; \qquad [11,2] = \frac{d^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU^2_{\partial(u)}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}},$$

находим, что

$$[11,1] = E_{\partial(u)} \alpha_1 + F_{\partial(u)} \alpha_2; \qquad [11,2] = F_{\partial(u)} \alpha_1 + G_{\partial(u)} \alpha_2$$

или, решая эти уравнения относительно α_1 и α_2,

$$\alpha_1 = \frac{G_{\partial(u)}[11,1] - F_{\partial(u)}[11,2]}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}; \qquad \alpha_2 = \frac{E_{\partial(u)}[11,2] - F_{\partial(u)}[11,1]}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}. \tag{1.82}$$

Взятые в квадратные скобки символы $[11,1]$ и $[11,2]$ выражаются через производные от $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$ и $G_{\partial(u)}$, поскольку

$$2 \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU^2_{\partial(u)}} = \frac{dE_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}; \qquad 2 \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)}} = \frac{dE_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}};$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)} dU_{\partial(u)}} + \frac{d^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU^2_{\partial(u)}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}} = \frac{dF_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}.$$

Поэтому:

$$[11,1] = \frac{1}{2} \frac{dE_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}; \qquad [11,2] = \frac{dF_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} - \frac{1}{2} \frac{dE_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}$$

и, если подставить эти выражения в (82), видно, что коэффициенты α_1 и α_2 могут быть определены через $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$ и $G_{\partial(u)}$ и их первые производные. Аналогичное справедливо и в отношении коэффициентов β_1, β_2 и γ_1, γ_2.

Введем новые обозначения для коэффициентов α_1 и α_2: обозначим их через Γ_{11}^1 и Γ_{11}^2 соответственно. Если подобным образом изменить обозначения для коэффициентов β_1, β_2 и γ_1, γ_2, то придем к системе уравнений:

(1.83) $$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + L_{\partial(u)} \mathbf{n}_{\partial(u)};$$

(1.84) $$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + M_{\partial(u)} \mathbf{n}_{\partial(u)};$$

(1.85) $$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + N_{\partial(u)} \mathbf{n}_{\partial(u)},$$

где коэффициенты Γ_{jk}^i $(i, j, k = 1, 2)$ определены следующим образом:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{G_{\partial(u)} \frac{dE_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} - 2F_{\partial(u)} \frac{dF_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} + F_{\partial(u)} \frac{dE_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}}{2\left(E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2\right)};$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{G_{\partial(u)} \frac{dE_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}} - F_{\partial(u)} \frac{dG_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}}{2\left(E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2\right)};$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2G_{\partial(u)} \frac{dF_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}} - G_{\partial(u)} \frac{dG_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} - F_{\partial(u)} \frac{dG_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}}{2\left(E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2\right)};$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2E_{\partial(u)} \frac{dF_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} - E_{\partial(u)} \frac{dE_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}} - F_{\partial(u)} \frac{dE_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}}{2\left(E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2\right)};$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{E_{\partial(u)} \frac{dG_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} - F_{\partial(u)} \frac{dE_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}}{2\left(E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2\right)};$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{E_{\partial(u)} \frac{dG_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}} - 2F_{\partial(u)} \frac{dF_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}} + F_{\partial(u)} \frac{dG_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}}{2\left(E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2\right)}.$$

В уравнениях (83)-(85) неизвестными остаются гауссовы коэффициенты $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$ и $N_{\partial(u)}$ второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$.

Коэффициенты Γ^i_{jk} называют *символами Кристоффеля*. Здесь удобно ввести в рассмотрение не только символы Γ^i_{jk}, но и символы Γ^i_{kj}, определив их как $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, (поскольку $\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12}$ и $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}$).

Выражения $[ij, k]$ называют *символами Кристоффеля первого рода*; в этом случае коэффициенты Γ^i_{jk} называют *символами Кристоффеля второго рода*. Они зависят только от коэффициентов $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$ и $G_{\partial(u)}$ первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ и их первых производных по параметрам $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$.

Уравнения Гаусса (83)-(85) полезно дополнить двумя уравнениями, которые выражают производные $\frac{d\mathbf{n}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}$ и $\frac{d\mathbf{n}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}$ через их проекции на оси подвижного трехгранника. Поскольку $\frac{d\mathbf{n}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}$ и $\frac{d\mathbf{n}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}$ лежат в касательной плоскости, выражения для их расчета могут быть представлены в таком виде:

$$\frac{d\mathbf{n}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} = p_1 \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} + p_2 \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}; \qquad \frac{d\mathbf{n}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}} = q_1 \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} + q_2 \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}.$$

Вновь используя соотношения (25) для гауссовых коэффициентов $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ и уравнение (23), получаем:

$$-L_{\partial(u)} = p_1 E_{\partial(u)} + p_2 F_{\partial(u)}; \qquad -M_{\partial(u)} = q_1 E_{\partial(u)} + q_2 F_{\partial(u)};$$
$$-M_{\partial(u)} = p_1 F_{\partial(u)} + p_2 G_{\partial(u)}; \qquad -N_{\partial(u)} = q_1 F_{\partial(u)} + q_2 G_{\partial(u)},$$

или

$$\frac{d\mathbf{n}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} = \frac{F_{\partial(u)} M_{\partial(u)} - G_{\partial(u)} L_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} + \frac{F_{\partial(u)} L_{\partial(u)} - E_{\partial(u)} M_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}; \tag{1.86}$$

$$\frac{d\mathbf{n}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}} = \frac{F_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - G_{\partial(u)} M_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}} + \frac{F_{\partial(u)} M_{\partial(u)} - E_{\partial(u)} N_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}. \tag{1.87}$$

Эти уравнения называют *уравнениями Вейнгартена*.

Зная уравнения (77) и (78) касательных к поверхности $Д(И)$, находим уравнение нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ к ней, производные $\frac{d\mathbf{n}_{\partial(u)}}{dU_{\partial(u)}}$ и $\frac{d\mathbf{n}_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}$ по параметрам $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$, а также величину угла $\omega_{\partial(u)}$ между касательными. Это дает возможность дополнить систему из двух уравнений (86) и (87) третьим уравнением

$$\cos\omega_{\partial(u)} = \frac{F_{\partial(u)}}{\sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)}}} \tag{1.88}$$

и таким путем получить полностью определенную систему из трех уравнений (87)-(88) для нахождения трех искомых коэффициентов $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$ и $N_{\partial(u)}$.

Вернемся к рассмотрению вопроса о нахождении производных для функций, заданных дискретно.

Дифференцирование таблично заданной функции $z = z(x)$ (рис. 1.17) производится по формулам:

$$Z'(X_0+ph)_3=\frac{1}{h}\left|(p-0{,}5)Z_{-1}-2pZ_0+(p+0{,}5)Z_{+1}\right|;$$

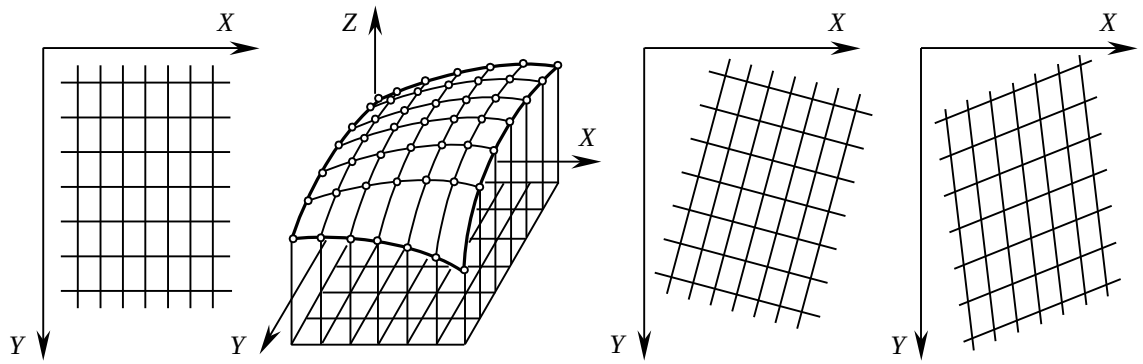
$$Z'(X_0+ph)_4=\frac{1}{h}\left(-\frac{3p^2-6p+2}{6}Z_{-1}+\frac{3p^2-4p-1}{2}Z_0-\frac{3p^2-2p-2}{2}Z_{+1}+\frac{3p^2-1}{6}Z_{+2}\right);$$

$$Z'(X_0+ph)_5=\frac{1}{h}\left(\frac{2p^3-3p^2-p+1}{12}Z_{-2}-\frac{4p^3-3p^2-8p+4}{6}Z_{-1}\frac{2p^3-5p}{2}Z_0-\right.$$

(1.89)

$$\left.-\frac{4p^3+3p^2-8p-4}{6}Z_{+1}+\frac{2p^3+3p^2-p-1}{12}Z_{+2}\right).$$

В этих формулах $p=\dfrac{X-X_0}{h}$ и $X=X_0+ph$.



1. 2. 3. 4.

Рис. 1.17. Касательные прямые и дифференцирование поверхностей, заданных числовыми отметками.

Пример 1.4. Найти производную $Z'(X)$ в точке $X=0{,}51$ функции $Z(X)$, заданной при $X_0=0{,}5$ и $h=0{,}02$ пятью значениями: $Z_{-2}=0{,}35889029$, $Z_{-1}=0{,}35553253$, $Z_0=0{,}35206533$, $Z_{+1}=0{,}34849251$ и $Z_{+2}=0{,}344818$. Подставив приведенные исходные данные в (89), получим: $\dfrac{\partial Z}{\partial X}(0{,}51)=-0{,}1786491875$.

Для определения производных используются соответствующие зависимости, а именно:

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=\frac{Z_{+1}-Z_{-1}}{2h};\qquad\qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}=\frac{Z_{+1}-2Z_0+Z_{-1}}{h^2}$$

– когда число узлов равно трем;

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=\frac{-Z_{+2}+8Z_{+1}-8Z_{-1}+Z_{+2}}{12h};$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}=\frac{-Z_{+2}+16Z_{+1}-30Z_0+16Z_{-1}-Z_{-2}}{12h^2};$$

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial X^3} = \frac{Z_{+2} - 2Z_{+1} + 2Z_{-1} - Z_{-2}}{2h^3};$$

– когда число узлов равно пяти и

$$Z' = \frac{Z_{+3} - 9Z_{+2} + 45Z_{+1} - 45Z_{-1} + 9Z_{-2} - Z_{-3}}{60h}$$

$$Z'' = \frac{2Z_{+3} - 27Z_{+2} + 270Z_{+1} - 490Z_0 + 270Z_{-1} - 27Z_{-2} + 2Z_{-3}}{180h^2};$$

$$Z''' = \frac{-Z_{+3} + 8Z_{+2} - 13Z_{+1} + 13Z_{-1} - 8Z_{-2} + Z_{-3}}{8h^3}$$

– когда число узлов равно семи.

Формулы для нахождения производных в узлах $Z(X)$ существенно проще приведенных выше, так как в узлах $P(X)$ принимает фиксированные значения. Особенно простыми являются формулы для центрального узла $P(X) = 0$. Эти формулы удобны для дифференцирования таблично заданных функций в точке $X = X_0$.

Частные производные функции ряда переменных $Z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ вычисляются по приведенным выше формулам, если задавать приращение одной из переменных и оставлять неизменными (равными заданным значениям) остальные переменные.

Для полного решения задачи нахождения производных дополнительно производится анализ чувствительности функции $Z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ к изменению ее параметров $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Один из простейших способов нахождения смешанных производных уравнения $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ состоит в следующем.

Уравнение поверхности $Д(И)$ рассматривается первоначально в неявной форме:

$$A X^2 + B Y^2 + C Z^2 + D XY + E XZ + F YZ + G X + H Y + L Z + M = 0,$$

после чего его преобразуют к виду:

$$X^2 + \frac{B}{A} Y^2 + \frac{C}{A} Z^2 + \frac{D}{A} XY + \frac{E}{A} XZ + \frac{F}{A} YZ + \frac{G}{A} X + \frac{H}{A} Y + \frac{L}{A} Z + \frac{M}{A} = 0$$

и записывают в исходной форме:

$$X^2 + a_1 Y^2 + a_2 Z^2 + a_3 XY + a_4 XZ + a_5 YZ + a_6 X + a_7 Y + a_8 Z + a_9 = 0.$$

В окрестности точки $M_{0,0}$ (рис. 1.18) на поверхности $Д(И)$ рассматриваем ближайшие к ней точки $M_{i,j}$ (здесь $i = -1, 0, +1$ и $j = -1, 0, +1$), координаты которых известны (заданы или могут быть расчитаны).

Координаты этих точек $M_{i,j}$ подставляем в исходное уравнение и таким путем приходим к системе из

$$X^2_{-1,-1} + a_1 Y^2_{-1,-1} + a_2 Z^2_{-1,-1} + a_3 X_{-1,-1} Y_{-1,-1} + a_4 X_{-1,-1} Z_{-1,-1} + a_5 Y_{-1,-1} Z_{-1,-1} + \\ + a_6 X_{-1,-1} + a_7 Y_{-1,-1} + a_8 Z_{-1,-1} + a_9 = 0;$$

$$X^2_{-1,0} + a_1 Y^2_{-1,0} + a_2 Z^2_{-1,0} + a_3 X_{-1,0} Y_{-1,0} + a_4 X_{-1,0} Z_{-1,0} + a_5 Y_{-1,0} Z_{-1,0} + a_6 X_{-1,0} + a_7 Y_{-1,0} + a_8 Z_{-1,0} + a_9 = 0;$$

$$X_{-1,+1}^2 + a_1 Y_{-1,+1}^2 + a_2 Z_{-1,+1}^2 + a_3 X_{-1,-1} Y_{-1,+1} + a_4 X_{-1,+1} Z_{-1,+1} + a_5 Y_{-1,+1} Z_{-1,+1} + a_6 X_{-1,+1} + a_7 Y_{-1,+1} + a_8 Z_{-1,+1} + a_9 = 0;$$

$$X_{0,-1}^2 + a_1 Y_{0,-1}^2 + a_2 Z_{0,-1}^2 + a_3 X_{0,-1} Y_{0,-1} + a_4 X_{0,-1} Z_{0,-1} + a_5 Y_{0,-1} Z_{0,-1} + a_6 X_{0,-1} + a_7 Y_{0,-1} + a_8 Z_{0,-1} + a_9 = 0;$$

$$X_{0,0}^2 + a_1 Y_{0,0}^2 + a_2 Z_{0,0}^2 + a_3 X_{0,0} Y_{0,0} + a_4 X_{0,0} Z_{0,0} + a_5 Y_{0,0} Z_{0,0} + a_6 X_{0,0} + a_7 Y_{0,0} + a_8 Z_{0,0} + a_9 = 0;$$

$$X_{0,+1}^2 + a_1 Y_{0,+1}^2 + a_2 Z_{0,+1}^2 + a_3 X_{0,+1} Y_{0,+1} + a_4 X_{0,+1} Z_{0,+1} + a_5 Y_{0,+1} Z_{0,+1} + a_6 X_{0,+1} + a_7 Y_{0,+1} + a_8 Z_{0,+1} + a_9 = 0;$$

$$X_{+1,-1}^2 + a_1 Y_{+1,-1}^2 + a_2 Z_{+1,-1}^2 + a_3 X_{+1,-1} Y_{+1,-1} + a_4 X_{+1,-1} Z_{+1,-1} + a_5 Y_{+1,-1} Z_{+1,-1} + a_6 X_{+1,-1} + a_7 Y_{+1,-1} + a_8 Z_{+1,-1} + a_9 = 0;$$

$$X_{+1,0}^2 + a_1 Y_{+1,0}^2 + a_2 Z_{+1,0}^2 + a_3 X_{+1,0} Y_{+1,0} + a_4 X_{+1,0} Z_{+1,0} + a_5 Y_{+1,0} Z_{+1,0} + a_6 X_{+1,0} + a_7 Y_{+1,0} + a_8 Z_{+1,0} + a_9 = 0;$$

$$X_{+1,+1}^2 + a_1 Y_{+1,+1}^2 + a_2 Z_{+1,+1}^2 + a_3 X_{+1,+1} Y_{+1,+1} + a_4 X_{+1,+1} Z_{+1,+1} + a_5 Y_{+1,+1} Z_{+1,+1} + a_6 X_{+1,+1} + a_7 Y_{+1,+1} + a_8 Z_{+1,+1} + a_9 = 0$$

девяти линейных уравнений для нахождения девяти неизвестных коэффициентов a_1, a_2, …, a_9.

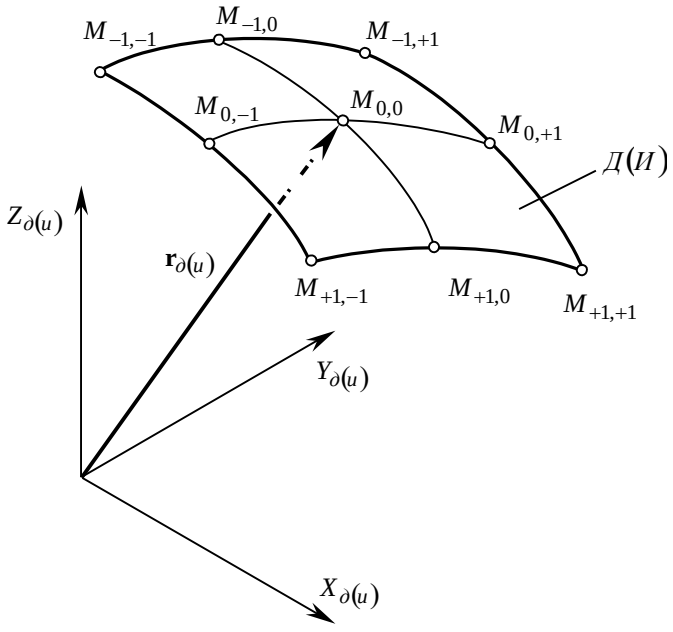


Рис. 1.18. К нахождению смешанных производных дискретно заданной поверхности $Д(И)$.

Найденные путем решения этой системы коэффициенты a_1, a_2, …, a_9 подставляются в исходное уравнение, которое затем пребразуется (для этого используются методы, рассмотренные ниже, в гл. 3) к виду $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}\left(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right)$.

В результате появляется возможность находить смешанные и все другие необходимые производные, причем не только в узловых точках $M_{i,j}$, но и в промежуточных между ними, в том числе и за пределами отсека поверхности, ограниченного дугами $M_{-1,-1}M_{-1,0}M_{-1,+1}$, $M_{-1,+1}M_{0,+1}M_{+1,+1}$, $M_{+1,+1}M_{+1,0}M_{+1,-1}$ и $M_{+1,-1}M_{0,-1}M_{-1,-1}$. В последнем случае к результатам нахождения всех производных следует относиться с некоторой долей осторожности – чем дальше от центра интерполирования $M_{0,0}$ расположена точка, в которой требуется расчитать производные, тем больше погрешности расчетов.

Как видно из изложенного, рассмотренный подход к нахождению смешанных производных уравнения поверхности $Д(И)$ предельно прост – для более точных расчетов могут быть использованы более совершенные (и вместе с тем, как правило, более громоздкие) методы нахождения смешанных производных.

1.2.6. Задание сложных поверхностей *Д(И)* с учетом допусков на точность их размеров и формы. При формообразовании поверхностей деталей режущими инструментами неизбежны погрешности

технологической системы. Поэтому номинальные значения параметров обработанной поверхности задают с допусками. В связи с этим появляется некоторая неоднозначность в задании поверхности $Д$. Чтобы исключить такую неоднозначность и обеспечить однозначность в задании поверхности детали, необходимую для последующего расчета инструмента, вводят в рассмотрение так называемую расчетную поверхность, которую обычно располагают в поле допуска на поверхность $Д$ детали и рассматривают ее как расчетную поверхность (рис. 1.19).

Рассмотренные выше методы задания и аналитического описания поверхностей деталей и инструментов позволяют ввести в рассмотрение аналитическое представление поверхности $Д(И)$ с учетом допусков на точность их размеров и формы.

Реальные поверхности $Д(И)$ всегда имеют отклонения размеров и параметров формы от их номинальных значений, заданных чертежом детали и инструмента. Приемлемые величины отклонений регламентируются допусками на точность каждого из параметров. Результирующая погрешность обработки h_Σ не должна превышать величину допуска $[h_д]$ на точность обработки ($h_\Sigma \le [h_д]$).

Наряду с номинальными поверхностями $Д_н$ и $И$ будем рассматривать поверхности $Д^{\delta.в}_{\delta.н}$ и $И^{\delta.в}_{\delta.н}$, отстоящие от номинальных поверхностей $Д(И)$ на величины верхних $\delta^{д.в}, \delta^{и.в}$ и нижних $\delta_{д.н}, \delta_{и.н}$ предельных отклонений для поверхностей $Д$ и $И$ соответственно. Аналитическое описание поверхностей предельных отклонений рассмотрим на примере поверхностей $Д^{\delta.в}$ и $Д_{\delta.н}$ (рис. 1.19), после чего распространим полученный результат на поверхности предельных отклонений $И^{\delta.в}$ и $И_{\delta.н}$ исходной инструментальной поверхности.

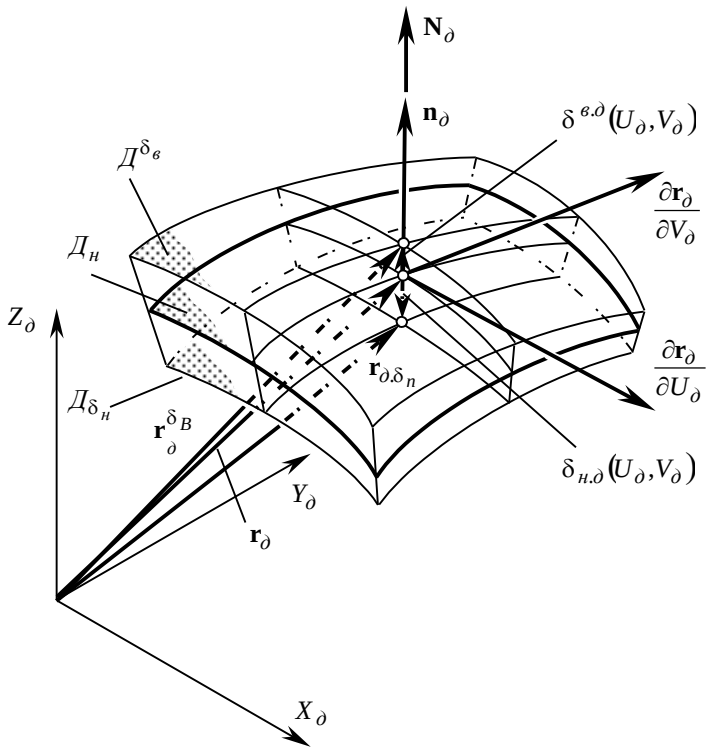


Рис. 1.19. Поверхность $Д$ детали и поверхности $Д^{\delta_B}$ верхнего и $Д_{\delta_H}$ нижнего предельных отклонений.

В наиболее простом случае одно из предельных отклонений рассматривается равным нулю ($\delta^{д.в} = 0$ или $\delta_{д.н} = 0$). Тогда допуск на точность обработки будет равен значению того предельного отклонения, которое не равно нулю: $[h_д] = \delta_{д.н}$ или $[h_д] = \delta^{д.в}$.

В более общем случае оба предельных отклонения не равны нулю: $\delta^{д.в} \ne 0$, $\delta_{д.н} \ne 0$, в том числе они могут иметь противоположные знаки (противоположные направления отсчета), а также быть равными по модулю.

Поверхность допуска $Д[h]$ (в первом случае) и поверхности верхнего $Д^{+\delta.в}$ и нижнего $Д_{-\delta.н}$ предельных отклонений (во втором случае) будут эквидистантными (параллельными) номинальной поверхности $Д$ детали.

Как правило каждая поверхность детали обрабатывается одним технологическим методом. Поэтому естественно предположить, что в виду постоянства условий обработки величины верхнего и нижнего предельных отклонений должны быть постоянными по величине – именно это имеет место при обработке большинства деталей общемашиностроительного назначения. При обработке деталей с рабочими поверх-

ностями сложной формы, когда имеет место изменение в большом диапазоне кривизны обрабатываемой поверхности, условия взаимодействия инструмента с деталью в пределах обрабатываемой поверхности $Д$ переменны. Это оказывает влияние на точность обработки и игнорировать это влияние можно не всегда. Поэтому допуск на точность обработки сложной поверхности детали может быть переменным в пределах обрабатываемого участка ее поверхности: в наиболее общем случае переменные величины предельных отклонений для всей обрабатываемой поверхности детали можно рассматривать как функции гауссовых координат на $Д$, т.е.

$$\delta^{\partial.в} = \delta^{\partial.в}(U_\partial, V_\partial); \qquad \delta_{\partial.н} = \delta_{\partial.н}(U_\partial, V_\partial).$$

Допуск на точность обработки, верхние и нижние предельные отклонения отсчитываются от номинальной поверхности $Д$ по нормали к ней.

Исходим из того, что номинальная поверхность $Д$ аналитически описана уравнением в векторной форме: $\mathbf{r}_\partial = \mathbf{r}_\partial(U_\partial, V_\partial)$, а орт нормали к поверхности $Д$ будет:

$$\mathbf{n}_\partial = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \right|}.$$

Векторные уравнения поверхности допуска и поверхностей верхнего и нижнего предельных отклонений для детали представимы в виде

(1.90) $$\mathbf{r}_{\partial[h]} = \mathbf{r}_\partial + \mathbf{n}_\partial \cdot [h_\partial](U_\partial, V_\partial);$$

(1.91) $$\mathbf{r}^{\partial.в} = \mathbf{r}_\partial + \mathbf{n}_\partial \cdot \delta^{\partial.в}(U_\partial, V_\partial);$$

(1.92) $$\mathbf{r}_{\partial.н} = \mathbf{r}_\partial + \mathbf{n}_\partial \cdot \delta_{\partial.н}(U_\partial, V_\partial)$$

соответственно. В эти уравнения подставляются алгебраические значения параметров $[h_\partial]$, $\delta^{в.\partial}(U_\partial, V_\partial)$ и $\delta_{н.\partial}(U_\partial, V_\partial)$, т.е. взятые с учетом их знака.

Каждое из приведенных трех уравнений может быть записано в проекциях на координатные оси, например, так:

$$\mathbf{r}_{\partial[h]} = \{r_{\partial.x} + n_{\partial.x}[h_\partial](U_\partial, V_\partial)\}\mathbf{i}_\partial + \{r_{\partial.y} + n_{\partial.y}[h_\partial](U_\partial, V_\partial)\}\mathbf{j}_\partial + \{r_{\partial.z} + n_{\partial.z}[h_\partial](U_\partial, V_\partial)\}\mathbf{k}_{\partial.в}$$

(1.93) $$\mathbf{r}^{\partial.в} = \{r_{\partial.x} + n_{\partial.x}\delta^{\partial.в}(U_\partial, V_\partial)\}\mathbf{i}_\partial + \{r_{\partial.y} + n_{\partial.y}\delta^{\partial.в}(U_\partial, V_\partial)\}\mathbf{j}_\partial + \{r_{\partial.z} + n_{\partial.z}\delta^{\partial.в}(U_\partial, V_\partial)\}\mathbf{k}_{\partial.в};$$

$$\mathbf{r}_{\partial.н} = \{r_{\partial.x} + n_{\partial.x}\delta_{\partial.н}(U_\partial, V_\partial)\}\mathbf{i}_\partial + \{r_{\partial.y} + n_{\partial.y}\delta_{\partial.н}](U_\partial, V_\partial)\}\mathbf{j}_\partial + \{r_{\partial.z} + n_{\partial.z}\delta_{\partial.н}(U_\partial, V_\partial)\}\mathbf{k}_{\partial.в}$$

или соответственно в параметрической форме.

Очевидно, что изложенное справедливо и в отношение исходной инструментальной поверхности $И$. Поэтому по аналогии с (90), (91) и (92) сразу запишем векторные уравнения поверхностей допуска и поверхностей верхнего и нижнего предельных отклонений для инструмента:

(1.94) $$\mathbf{r}_{u[h]} = \mathbf{r}_u + \mathbf{n}_u \cdot [h_u](U_u, V_u);$$

$$\mathbf{r}^{u.в} = \mathbf{r}_u + \mathbf{n}_u \cdot \delta^{u.в}(U_u, V_u); \tag{1.95}$$

$$\mathbf{r}_{u.н} = \mathbf{r}_u + \mathbf{n}_u \cdot \delta_{u.н}(U_u, V_u). \tag{1.96}$$

Для инструмента уравнения, аналогичные (93), записываются так:

$$\mathbf{r}_{u[h]} = \{r_{u.x} + n_{u.x}[h_u](U_u, V_u)\}\mathbf{i}_u + \{r_{u.y} + n_{u.y}[h_u](U_u, V_u)\}\mathbf{j}_u + \{r_{u.z} + n_{u.z}[h_u](U_u, V_u)\}\mathbf{k}_{u.в};$$

$$\mathbf{r}^{u.в} = \{r_{u.x} + n_{u.x}\delta^{u.в}(U_u, V_u)\}\mathbf{i}_u + \{r_{u.y} + n_{u.y}\delta^{u.в}(U_u, V_u)\}\mathbf{j}_u + \{r_{u.z} + n_{u.z}\delta^{u.в}(U_u, V_u)\}\mathbf{k}_{u.в};$$

$$\mathbf{r}_{u.н} = \{r_{u.x} + n_{u.x}\delta_{u.н}(U_u, V_u)\}\mathbf{i}_u + \{r_{u.y} + n_{u.y}\delta_{u.н}](U_u, V_u)\}\mathbf{j}_u + \{r_{u.z} + n_{u.z}\delta_{u.н}(U_u, V_u)\}\mathbf{k}_{u.в}.$$

Уравнения (94), (95) и (96), а также соответствующие им формы записи в проекциях на координатные оси (93) или в параметрическом виде используются при расчете производительности многокоординатного формообразования сложных поверхностей деталей на станках с ЧПУ и при решении других задач синтеза.

1.3. О классификации рабочих поверхностей деталей и инструментов

Многообразие форм обрабатываемых поверхностей деталей и типоразмеров применяемых для этих целей фасонных инструментов огромно. Это приводит к большому разнообразию в технологии формообразующей обработки деталей. Для решения задачи синтеза наивыгоднейшего варианта технологии многокоординатной обработки сложных поверхностей деталей на станках с ЧПУ необходима подробная научная классификация поверхностей $Д(И)$, включающая в себя все возможные виды этих поверхностей, определенным образом стратифицированных.

1.3.1. Необходимость разработки классификации поверхностей деталей и инструментов. Геометрическая классификация поверхностей деталей и инструментов, учитывающая требования технологии изготовления деталей, необходима для систематизации известных способов формообразования поверхностей при механической обработке деталей, упрощения исследования сложных поверхностей $Д(И)$ и изучения их геометрической структуры с целью разработки новых высокоэффективных способов формообразования – с тем, чтобы уметь точно и с минимальными затратами времени и средств обрабатывать любую поверхность детали.

Известны многократные попытки классифицировать поверхности технических форм, сгруппировать разнообразные детали по определенным признакам в однотипные семейства для нормализации и типизации технологических процессов их изготовления. Вместе с тем не охваченное единой классификацией их разнообразие сохраняется большим – это приводит к серьезным затруднениям при проектировании, выборе и назначении рациональных видов оборудования, к тому, что многие задачи технологии машиностроения решаются эмпирическим путем.

Поиски принципов для разработки научных основ технологии машиностроения сопряжены с рядом затруднений. Избежать по крайней мере одного из серьезных затруднений, вызванных разнообразием видов изготавливаемых деталей и типов обрабатываемых их рабочих поверхностей, представляется возможным, если использовать формализованный подход к анализу и систематизации форм технических поверхностей, поскольку огромнейшее разнообразие видов изготовляемых деталей сводится к разнообразию форм их рабочих поверхностей.

С уверенностью можно утверждать, что в настоящее время нет научной классификации поверхностей технических форм, в полной мере удовлетворяющей потребностям теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей, технологии машиностроения и смежных технических дисциплин. Это следствие большой сложности задачи разработки научной классификации поверхностей $Д(И)$. Установлено (Фролов С.А., 1983), что в обозримом будущем трудно ожидать возможности решения проблемы разработки классификации поверхностей не только вообще, но и классификации в более узком смысле – классификации поверхностей технических форм. В этой связи подчеркивается, что многообразие поверхностей $Д(И)$ и

способов их получения не позволяет создать строгую систему для классификации как поверхностей вообще, так и поверхностей $Д(И)$ в частности. С геометрической точки зрения классификация поверхностей в целом (как единого геометрического образа) не может иметь научного обоснования. Опыт убедительно показал бесплодность попыток создать научную классификацию поверхностей деталей и инструментов на макроуровне – как единых геометрических образов, которая для технических приложений является более предпочтительной.

Сложившееся положение с разработкой классификации поверхностей технических форм вынуждает изменить уровень рассмотрения этой проблемы, а именно: вместо систематизации поверхностей $Д(И)$ в целом как таковых (*глобальный подход*) классифицировать возможные виды их локальных участков (*локальный подход*).

Правомерность локального подхода к вопросу разработки классификации поверхностей $Д(И)$ оправдывается, в частности, следующим постулируемым положением:

Постулат 1.1. *Если при обработке детали обеспечить выполнение всех условий формообразования поверхностей резанием в каждой точке обрабатываемой поверхности $Д$, то тем самым указанные условия формообразования могут быть выполнены и для всей обрабатываемой поверхности детали; если хотя бы в одной точке обрабатываемой поверхности детали одно из условий формообразования поверхностей не выполняется, то в этом случае обработать деталь в полном соответствии с требованиями чертежа нельзя.*

Первая часть постулированного положения является только необходимой, но не достаточной для обеспечения возможности обработки поверхности детали в полном соответствии с требованиями чертежа, тогда как вторая является достаточной для того, чтобы точно изготовить деталь было нельзя.

Сложные поверхности деталей не допускают движения "*самих по себе*" – это предопределяет целесообразность *локального* подхода к их формообразованию, а именно – в дифференциальной окрестности текущей точки на $Д$ и, в этой связи, предполагает широкое использование результатов, полученных в дифференциальной геометрии поверхностей (Радзевич С.П., 1991). Это также свидетельствует в пользу развития локального подхода к разработке классификации поверхностей деталей и инструментов.

При локальном подходе классификация может быть основана на анализе внутренних свойств и локальной топологии поверхностей $Д(И)$.

1.3.2. Круговые диаграммы локальных участков поверхностей деталей и инструментов. Для анализа, наглядной графической интерпретации свойств и разработки классификации гладких регулярных локальных участков поверхностей $Д$ деталей и исходных инструментальных поверхностей $И$ целесообразно примененить круговые диаграммы (круги Мора[1]). Уравнение круговых диаграмм локальных участков поверхностей $Д(И)$ могут быть получены так.

Следуя Nutbourn A. A. (1984) и Nutbourn A. A., Martin R. (1988) при рассмотрении круговых диаграмм локальных участков гладкой регулярной поверхности *Д(И)* исходим из формулы Эйлера[2]

(1.97) $$k_{д(u)} = k_{1.д(u)} \cos^2 \theta + k_{2.д(u)} \sin^2 \theta$$

---

[1] **Мор**, Христианн Отто (***Mohr***, *Christian Otto*) (8.10.1835-2.10.1918) – немецкий ученый в области механики. Родился в Вессельбурне (Гольштейн). Окончил Политехническую школу в Ганновере (1855). В 1856-1866 работал инженером железных дорог, в 1867-1873 – профессор Штуттгартского, в 1873-1899 Дрезденского политехнических институтов. С 1900 – в отставке. Одним из первых получил степень инженера-доктора *honoris causa*. Один из основоположников графической кинематики. Развивал методы графостатики. Предложил графический метод построения упругой линии в простых и неразрезных балках. Разработал метод расчета неразрезных балок с помощью уравнения трех моментов. Создал теорию прочности (теория Мора), разработал графический метод определения напряжений при сложном напряженном состоянии (круг Мора). Впервые применил расчет конструкций на невыгодное нагружение с помощью линий влияния, создал теорию расчета статически неопределимых систем методом сил. Дал обобщение формулы Максвелла (формула Мора-Максвелла).

[2] **Эйлер**, Леонард (***Euler***, *Leonhard*) [4(15). 4.1707, Базель, Швейцария, – 7(18) 9.1783, Петербург], Математик, механик и физик. Родился в семье небогатого пастора Пауля Эйлера. Работал во многих отраслях математики, механики и др. В дифференциальной геометрии детально исследовал свойство геодезических линий, впервые применил натуральные уравнения кривых, а главное, заложил основы теории поверхностей. Ввел понятие главных направлений в точке поверхности, доказал их ортогональность, вывел формулу для кривизны любого нормального сечения, начал изучать развертывающиеся поверхности и др. В одной посмертно опубликованной работе предварил исследования К.-Ф.Гаусса по внутренней геометрии поверхностей.

и соотношения С. Жермен[1]

$$t_{\partial(u)} = \left(k_{2.\partial(u)} - k_{1.\partial(u)}\right)\sin\theta\,\cos\theta\ , \tag{1.98}$$

где $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ – главные кривизны локального участка поверхности $Д(И)$ в заданной ее точке M (причем $k_{1.\partial(u)} > k_{2.\partial(u)}$);

$k_{\partial(u)}$ – кривизна плоского нормального сечения поверхности $Д(И)$ в точке M, составляющего угол θ с первым главным сечением $C_{1.\partial(u)}$;

$t_{\partial(u)}$ – кручение поверхности $Д(И)$ в точке M в наперед заданном направлении на поверхности.

Формуле (97) эквивалентно соотношение (Koenderink, J.J., 1990, с. 228):

$$k_{\partial(u)}(\theta) = k_{1.\partial(u)}\cos^2\theta + k_{2.\partial(u)}\sin^2\theta = H_{\partial(u)} + \frac{k_{1.\partial(u)} - k_{2.\partial(u)}}{2}\cos 2\theta .$$

Формула (97) позволяет определить кривизну текущего нормального сечения поверхности $Д(И)$, если известны главные радиусы кривизны и угол между исследуемым сечением и одним из них.

Чтобы получить уравнение круговой диаграммы для кривизны и кручения локального участка поверхности $Д(И)$, перепишем уравнения (97) и (98) в виде

$$k_{\partial(u)} = \frac{1}{2}\left(k_{1.\partial(u)} + k_{2.\partial(u)}\right) + \frac{1}{2}\left(k_{1.\partial(u)} - k_{2.\partial(u)}\right)\cos 2\theta\ ;$$

$$t_{\partial(u)} = -\frac{1}{2}\left(k_{1.\partial(u)} - k_{2.\partial(u)}\right)\sin 2\theta$$

соответственно, после чего исключим из них параметр θ. Выполнив необходимые преобразования, приходим к уравнению окружности

$$\left(k_{\partial(u)} - k_{1.\partial(u)}\right)\cdot\left(k_{\partial(u)} - k_{2.\partial(u)}\right) + t^2_{\partial(u)} = 0\ . \tag{1.99}$$

В системе координат $k_{\partial(u)}t_{\partial(u)}$ круговая диаграмма локального участка поверхности $Д(И)$ представляет собой окружность радиуса $\frac{k_{1.\partial(u)} - k_{2.\partial(u)}}{2}$ с центром $\left(\frac{k_{1.\partial(u)} - k_{2.\partial(u)}}{2}, 0\right)$. Обратим внимание на то, что $\frac{k_{1.\partial(u)} + k_{2.\partial(u)}}{2} = \tilde{M}_{\partial(u)}$ – т.е. равно средней кривизне поверхности $Д(И)$ в точке M. Задаваемая уравнением (99) круговая диаграмма пересекает ось абсцисс (рис. 1.20) в точках $\left(k_{1.\partial(u)}, 0\right)$ и $\left(k_{2.\partial(u)}, 0\right)$.

Прежде, чем перейти к рассмотрению круговых диаграмм локальных участков поверхности $Д(И)$, дополнительно введем в рассмотрение их *векторные диаграммы*. Для этого требуется кратко рассмотреть доказательство следующей теоремы (Nutbourn A. A., Martin R., 1988):

---

[1]**Жермен,** Софи (***Germain***, *Sophie*) (1.4.1776 – 17.6.1831) – французский математик и механик, родилась в Париже, дочь ювелира. Самостоятельно изучила метаматику. Состояла в переписке с Ж.Л.Д'Аламбером, Ж.Л.Лагранжем, К.-Ф.Гауссом. Оказала Гауссу существенную поддержку в 1807, когда французские войска оккупировали Ганновер. Разрабатывала теорию чисел, теорию упругости и теорию колебаний. Доказала невозможность положительного решения в целых числах выражения $x^n + y^n = z^n$, если x, y, z – простые числа, не равные друг другу, а n – любое простое число меньше 100. Вывела несколько формул, названных ее именем. В развитии математической физики труды Жермен являются основополагающими. Нашла ряд важных положений в теории упругих пластинок. Написала также *"Рассуждения о состоянии наук и литературы в различные культурные эпохи"* (1833). Премия Института Франции (1816).

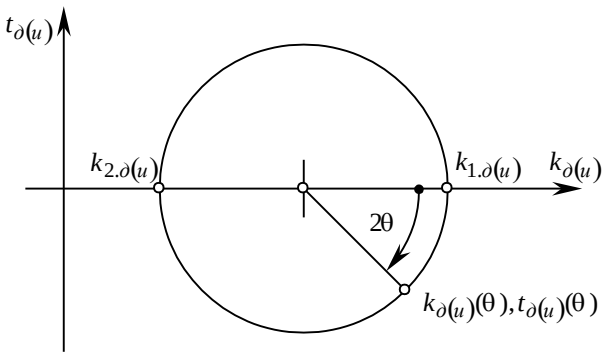


Рис. 1.20. Пример круговой диаграммы выпуклого локального участка гладкой регулярной поверхности $Д(И)$.

Теорема 1.1. *Если для некоторого локального участка гладкой регулярной поверхности* $Д(И)$ *в текущей ее точке* M *известны главные кривизны* $k_{1.\partial(u)}$ *и* $k_{2.\partial(u)}$*, измеренные в заданных единичными векторами* $\mathbf{t}_{1.\partial(u)}$ *и* $\mathbf{t}_{2.\partial(u)}$ *главных секущих плоскостях* $C_{1.\partial(u)}$ *и* $C_{2.\partial(u)}$*, то текущие значения нормальной кривизны* $k_{\partial(u)}(\theta)$ *и кручения* $t_{\partial(u)}(\theta)$ *этой поверхности в направлении* $\mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta)$*, составляющем угол* θ *с первым главным сечением* $C_{1.\partial(u)}$*, будут соответственно равны:*

$$k_{\partial(u)}(\theta) = k_{1.\partial(u)}\cos^2\theta + k_{2.\partial(u)}\sin^2\theta \ ;$$

$$t_{\partial(u)}(\theta) = (k_{2.\partial(u)} - k_{1.\partial(u)})\sin\theta\ \cos\theta \ .$$

Отдельные фрагменты доказательства этой теоремы используются при построении векторных диаграмм локальных участков поверхностей $Д(И)$.

Исходим из того, что вектор единичной касательной к поверхности $Д(И)$ в точке M в направлении, заданном углом θ, задается так:

(1.100) $$\mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta) = \mathbf{t}_{1.\partial(u)}\cos\theta + \mathbf{t}_{2.\partial(u)}\sin\theta \ .$$

Вектор $\mathbf{t}^{*}_{\partial(u)}(\theta)$ другой единичной касательной к поверхности $Д(И)$ в точке M на ней, перпендикулярный $\mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta)$, в этом случае будет иметь вид

(1.101) $$\mathbf{t}^{*}_{\partial(u)}(\theta) = \mathbf{t}_{2.\partial(u)}\cos\theta - \mathbf{t}_{1.\partial(u)}\sin\theta \ .$$

На основании (100) перемещение $\mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta)dS_{\partial(u)}$ можно разложить на две составляющие

$$\mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta)dS_{\partial(u)} = \mathbf{t}_{1.\partial(u)}\cos\theta\ dS_{\partial(u)} + \mathbf{t}_{2.\partial(u)}\sin\theta\ dS_{\partial(u)}.$$

Поскольку это перемещение производится в главных направлениях $\mathbf{t}_{1.\partial(u)}$ и $\mathbf{t}_{2.\partial(u)}$ на поверхности $Д(И)$, то нормальные составляющие этих перемещений соответственно равны:

$$d\mathbf{N}_{1.\partial(u)} = -k_{1.\partial(u)}\mathbf{t}_{1.\partial(u)}\cos\theta\ dS_{\partial(u)};$$

$$d\mathbf{N}_{2.\partial(u)} = -k_{2.\partial(u)}\mathbf{t}_{2.\partial(u)}\sin\theta\ dS_{\partial(u)}.$$

Объединяя эти выражения, приходим к результату

(1.102) $$d\mathbf{N}_{\partial(u)} = d\mathbf{N}_{1.\partial(u)} + d\mathbf{N}_{2.\partial(u)} = \mathbf{N}'_{\partial(u)}dS_{\partial(u)} = -k_{1.\partial(u)}\mathbf{t}_{1.\partial(u)}\cos\theta\ dS_{\partial(u)} - k_{\partial(u)}\mathbf{t}_{2.\partial(u)}\sin\theta\ dS_{\partial(u)}.$$

Из уравнений (100) и (101) имеем

$$\mathbf{t}_{1.\partial(u)} = \mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta)\cos\theta - \mathbf{t}^{*}_{\partial(u)}(\theta)\sin\theta\ ;$$

$$\mathbf{t}_{2.\partial(u)} = \mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta)\sin\theta - \mathbf{t}^{*}_{\partial(u)}(\theta)\cos\theta\ . \qquad (1.103)$$

Подставляя эти значения в (1.102), получим

$$d\mathbf{N}_{\partial(u)} = -\left(k_{1.\partial(u)}\cos^2\theta + k_{2.\partial(u)}\sin^2\theta\right)\mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta)\,dS_{\partial(u)} - \left(k_{2.\partial(u)} - k_{1.\partial(u)}\right)\mathbf{t}^{*}_{\partial(u)}(\theta)\sin\theta\cos\theta\ dS_{\partial(u)}. \qquad (1.104)$$

Известно, что перемещение на $dS_{\partial(u)}$ в направлении $\mathbf{t}_{\partial(u)}$ ведет к перемещению в нормальном направлении

$$d\mathbf{N}_{\partial(u)} = \left[-k_{\partial(u)}\mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta) - t_{\partial(u)}\mathbf{t}^{*}_{\partial(u)}(\theta)\right]dS_{\partial(u)}. \qquad (1.105)$$

Сопоставление формул (104) и (105) показывает, что теорема 1.1. доказана.

Для выяснения основных свойств круговых диаграмм локальных участков гладких регулярных поверхностей $Д(И)$ приведенное доказательство теоремы 1.1 позволяет ввести в рассмотрение их векторные диаграммы относительно факторов $\mathbf{t}_{\partial(u)}$ и $\mathbf{N}'_{\partial(u)}$. Для этого уравнение (100) и частично преобразованные уравнения (102) и (105) перепишем совместно:

$$\mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta) = \mathbf{t}_{1.\partial(u)}\cos\theta + \mathbf{t}_{2.\partial(u)}\sin\theta\ ;$$

$$\mathbf{N}'_{\partial(u)} = -k_{1.\partial(u)}\mathbf{t}_{1.\partial(u)}\cos\theta - k_{2.\partial(u)}\mathbf{t}_{2.\partial(u)}\sin\theta\ ;$$

$$\mathbf{N}'_{\partial(u)} = -k_{\partial(u)}\mathbf{t}_{\partial(u)}(\theta) - t_{\partial(u)}\mathbf{t}^{*}_{\partial(u)}(\theta).$$

Пример векторной диаграммы поверхности $Д(И)$ сложной формы представлен на рис. 1.21.

Помним, что $d\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{t}_{\partial(u)}dS_{\partial(u)}$ и $d\mathbf{N}_{\partial(u)} = \mathbf{N}'_{\partial(u)}dS_{\partial(u)}$, поэтому векторная диаграмма является изображением, масштабированным по параметру $dS_{\partial(u)}$ (поскольку требуется, чтобы векторная диаграмма была отнесена к параметрам $d\mathbf{r}_{\partial(u)}$ и $d\mathbf{N}_{\partial(u)}$).

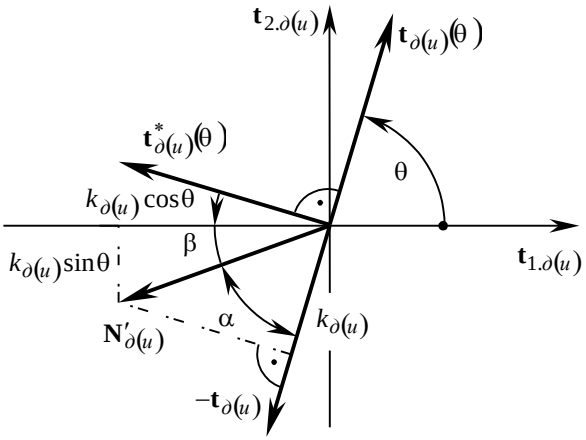


Рис. 1.21. Пример векторной диаграммы локального участка гладкой регулярной поверхности $Д(И)$ относительно параметров $\mathbf{t}_{\partial(u)}$ и $\mathbf{N}'_{\partial(u)}$.

Векторы $\mathbf{N}'_{\partial(u)}$ и $\mathbf{t}_{\partial(u)}$ (или их противоположные направления) однонаправленны для $\theta = 0^{\circ}$ или $\theta = 90^{\circ}$, но они имеют различные направления при других значениях угла θ, если $k_{1.\partial(u)} \neq k_{2.\partial(u)}$.

Из рис. 1.21 следует, что кручение поверхности $Д(И)$ отрицательно при $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ когда $k_{1.\partial(u)} > k_{2.\partial(u)}$; следовательно длина, показанная как $-\mathbf{t}_{\partial(u)}$ (см. рис. 1.21), является положительной.

По теореме Пифагора из рис. 1.21 имеем

$$\left|\mathbf{N}'_{\partial(u)}\right| = \sqrt{k^2_{1.\partial(u)}\cos^2\theta + k^2_{2.\partial(u)}\sin^2\theta} = \sqrt{k^2_{\partial(u)} + t^2_{\partial(u)}}\ .$$

Обозначим через α угол между векторами $\mathbf{N}'_{\partial(u)}$ и $-\mathbf{t}_{\partial(u)}$ (см. рис. 1.21). На круговой диаграмме локального участка поверхности $Д(И)$ (рис. 1.22) показана длина отрезка $\left|\mathbf{N}'_{\partial(u)}\right|$ и угол, равный по величине α [1].

Для случая, когда $k_{1.\partial(u)}$ положительно $\left(k_{1.\partial(u)} > 0\right)$, поведение конца вектора $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ нормали к локальному участку поверхности $Д(И)$ будет следующим.

Если $k_{2.\partial(u)}$ также положительно $\left(k_{2.\partial(u)} > 0\right)$, круговая диаграмма не пересекает ось ординат $t_{\partial(u)}$. Такой локальный участок поверхности $Д(И)$ будет эллиптическим. Возможное направление вектора $\mathbf{N}'_{\partial(u)}$ относительно направления $-\mathbf{t}_{\partial(u)}$ зависит от величины угла $\alpha_{\max}$, который определяется направлением OP в положении, касательном к круговой диаграмме, и рассчитывается по формуле

$$\alpha_{\max} = \sin^{-1}\left|\frac{k_{1.\partial(u)} - k_{2.\partial(u)}}{k_{1.\partial(u)} + k_{2.\partial(u)}}\right|.$$

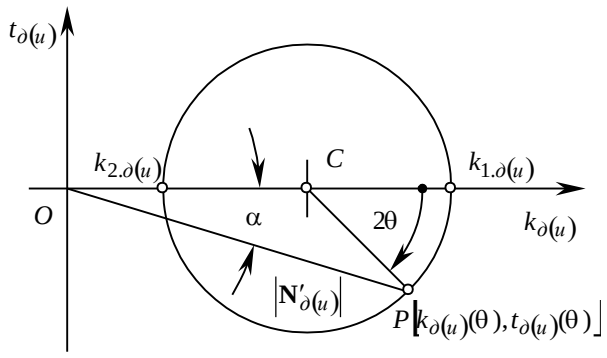


Рис. 1.22. Круговая диаграмма локального участка поверхности $Д(И)$ (показаны угол α и абсолютная величина вектора $\mathbf{N}'_{\partial(u)}$).

В этом случае обе главные кривизны положительны, а поверхность $Д(И)$ локально выпукла.

Если $k_{2.\partial(u)}$ отрицательно $\left(k_{2.\partial(u)} < 0\right)$, круговая диаграмма пересекает ось ординат $t_{\partial(u)}$. Такой локальный участок поверхности $Д(И)$ будет гиперболическим. Направление вектора $\mathbf{N}'_{\partial(u)}$ может быть любым; главные кривизны имеют противоположные знаки, а поверхность $Д(И)$ локально выпукловогнутая.

Если $k_{2.\partial(u)}$ равно нулю $\left(k_{2.\partial(u)} = 0\right)$, круговая диаграмма только касается оси ординат $t_{\partial(u)}$, а такого типа локальный участок поверхности $Д(И)$ будет параболическим. Возможные направления вектора $\mathbf{N}'_{\partial(u)}$ ограничены пределами $\pm 90^\circ$ относительно $-\mathbf{t}_{\partial(u)}$. Если одна из главных кривизн равна нулю, поверхность $Д(И)$ локально можно рассматривать как цилиндр.

Таким образом как только для заданной точки локального участка гладкой регулярной поверхности $Д(И)$ определены главные кривизны, нормальные кривизны и кручение поверхности $Д(И)$ становятся известными для всех направлений. Круговая диаграмма (см. рис. 1.22) наглядно показывает эту зависимость. Теоретически поведение нормали $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ к поверхности $Д(И)$ может быть определено из круговой диаграммы, но поскольку $d\mathbf{N}_{\partial(u)}\left(= \mathbf{N}'_{\partial(u)}\, dS_{\partial(u)}\right)$, вектор смещения конца единичной нормали к поверхности $Д(И)$ проще получить из векторной диаграммы (см. рис. 1.21).

1.3.2.1. Использование круговых диаграмм локальных участков поверхности $Д(И)$. Многие особенности локальной топологии гладкой регулярной поверхности $Д(И)$ могут быть просто выведены исходя из рассмотрения круговых диаграмм. При этом полагаем, что алгебраически наибольшая кривизна есть $k_{1.\partial(u)}$, поэтому на круговой диаграмме она всегда будет обозначена правее кривизны $k_{2.\partial(u)}$ вдоль оси абсцисс. (за

[1] Не следует пытаться показывать на круговой диаграмме (см. рис. 1.22) аргумент θ вектора $\mathbf{N}'_{\partial(u)}$, поскольку это не векторная диаграмма. Для построения угла θ следует воспользоваться векторной диаграммой локального участка поверхности $Д(И)$ (см. рис. 1.21).

исключением случаев, когда локальный участок поверхности вырождается в омбилический локальный участок или в локальный участок уплощения).

1.3.2.2. *Омбилические локальные участки поверхности* $Д(И)$. Если $k_{1.\partial(u)} \to k_{2.\partial(u)}$, круговая диаграмма стягивается в точку. Поэтому все нормальные кривизны $k_{\partial(u)}$ становятся равны друг другу: $k_{\partial(u)} = k_{1.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)}$. Более того, в этом случае кручение поверхности $Д(И)$ во всех направлениях равно нулю (рис. 1.23.1).

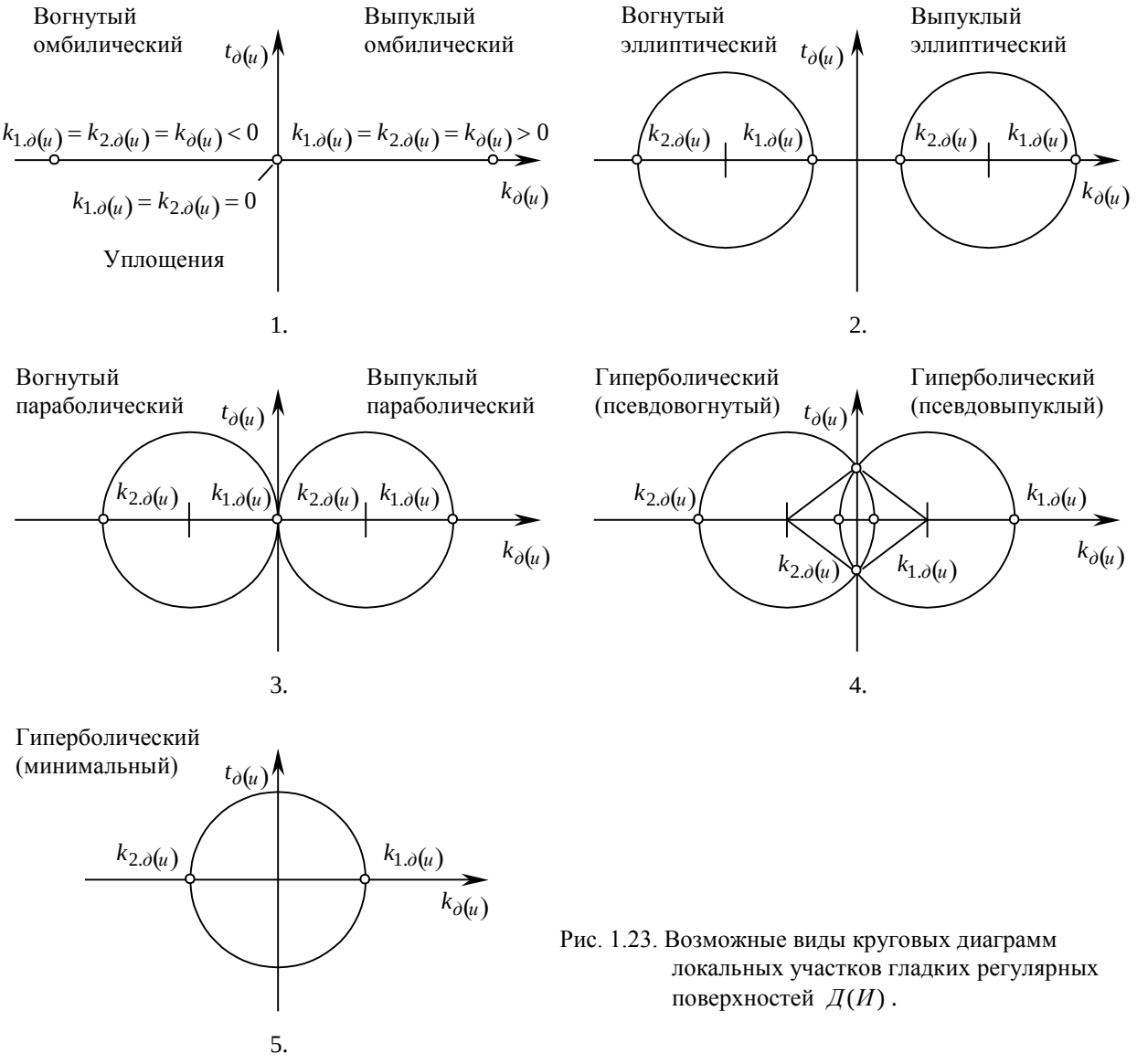


Рис. 1.23. Возможные виды круговых диаграмм локальных участков гладких регулярных поверхностей $Д(И)$.

1.3.2.3. Кручение поверхности $Д(И)$. Когда главные кривизны $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ определены, текущие значения нормальной кривизны $k_{\partial(u)}(\theta)$ и кручения $t_{\partial(u)}(\theta)$ локального участка поверхности $Д(И)$ становятся определенными однозначно – их значения взаимоувязаны. В частности, это значит, что кручение поверхности детали или инструмента не является параметром, которым конструктор может варьировать, синтезируя поверхность $Д(И)$.

Кручение поверхности максимально в направлении, составляющем угол 45° с главными направлениями

$C_{1.\partial(u)}$ и $C_{2.\partial(u)}$ локального участка поверхности $Д(И)$, где его значения достигают величины $\frac{k_{1.\partial(u)} - k_{2.\partial(u)}}{2}$. Если в некотором заданном направлении кручение поверхности $Д(И)$ равно $t_{\partial(u)}$, то кручение этой же поверхности в противоположном направлении (т.е. в направлении, составляющем угол 180° с заданным направлением) также равно $t_{\partial(u)}$. Кручение поверхности $Д(И)$ в направлении, ортогональном заданному, равно $-t_{\partial(u)}$. Этот факт был использован выше при выводе уравнения (103).

1.3.2.4. *Эллиптические локальные участки поверхности* $Д(И)$. Если главные кривизны $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ имеют одинаковый знак, такой же знак имеет и текущая нормальная кривизна $k_{\partial(u)}(\theta)$ во всех направлениях. Это следствие того, что сечение поверхности $Д(И)$ плоскостью, параллельной и близко расположенной к касательной плоскости, является кривой, близкой к эллипсу. В пределе, когда расстояние между секущей и касательной плоскостями стремится к нулю, а масштаб изображения кривой их пересечения при этом увеличивается до бесконечности, кривая сечения поверхности $Д(И)$ в точности становится эллипсом.

Асимптотические линии $(k_{\partial(u)} = 0)$, проходящие через некоторую точку M на поверхности $Д(И)$, в этом случае отсутствуют (они мнимые) – круговая диаграмма не пересекает ось ординат (рис. 1.23.2).

1.3.2.5. *Параболические локальные участки поверхности* $Д(И)$. В особых случаях, когда одна из главных кривизн равна нулю $(k_{1.\partial(u)} = 0,\ k_{2.\partial(u)} < 0)$ или $(k_{1.\partial(u)} > 0,\ k_{2.\partial(u)} = 0)$ круговая диаграмма касается оси ординат t (рис. 1.23.3). Локальный участок поверхности $Д(И)$ в этом случае будет параболическим. Название *параболический* происходит не потому, что его индикатриса кривизны является параболой – это не так. Индикатриса кривизны параболического локального участка поверхности $Д(И)$ представляет собой пару прямых, параллельных асимптотическому направлению. Название такого типа локального участка поверхности $Д(И)$ происходит из аналогии с параболическим дифференциальным уравнением, которое используется для описания особенностей локальной геометрии поверхности $Д(И)$ в дифференциальной окрестности параболической точки на ней.

В пределах локального участка параболического типа его можно рассматривать как параболический цилиндр – это также в некоторой мере объясняет происхождение названия локального участка поверхности $Д(И)$ рассматриваемого типа.

1.3.2.6. *Гиперболические локальные участки поверхности* $Д(И)$. Если первая главная кривизна $k_{1.\partial(u)}$ положительна $(k_{1.\partial(u)} > 0)$, а вторая $k_{2.\partial(u)}$ – отрицательна $(k_{2.\partial(u)} < 0)$, имеем гиперболический локальный участок гладкой регулярной поверхности $Д(И)$. Его индикатриса кривизны состоит из двух мнимых и двух действительных ветвей гиперболы. Круговая диаграмма в этом случае имеет вид (рис. 1.23.4).

Для рассматриваемого случая можно указать две асимптотические прямые, для которых $k_{\partial(u)} = 0$; однако эти прямые не будут взаимно перпендикулярными до тех пор, пока главные кривизны $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ не будут равны друг другу по модулю $(|k_{1.\partial(u)}| = |k_{2.\partial(u)}|)$.

На рис. 1.23.4 показаны удвоенные величины углов между асимптотическими направлениями на поверхности $Д(И)$. Ось абсцисс $k_{\partial(u)}$ является биссектрисой этих углов. Отсюда можно заключить, что углы между асимптотическими направлениями делятся линиями кривизны пополам.

Две асимптотические прямые для гиперболического локального участка поверхности $Д(И)$ вырождаются в одну прямую линию для параболического ее локального участка.

1.3.2.7. *Минимальные локальные участки поверхности* $Д(И)$. Если первая главная кривизна $k_{1.\partial(u)}$ положительна $(k_{1.\partial(u)} > 0)$, а вторая $k_{2.\partial(u)}$ – отрицательна $(k_{2.\partial(u)} < 0)$ и при этом выполняется условие $(|k_{1.\partial(u)}| = |k_{2.\partial(u)}|)$, имеем минимальный локальный участок гладкой регулярной поверхности $Д(И)$. Его индикатриса кривизны состоит из двух мнимых и двух действительных ветвей гиперболы, которые зеркально- и центрально-симметричны. Круговая диаграмма в этом случае имеет вид (рис. 1.23.5).

1.3.2.8. *Полная (гауссова), средняя и абсолютная кривизна локального участка поверхности* $Д(И)$. Нормальная кривизна поверхности $\mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ в некотором направлении $\mathbf{t}_{\partial(u)}$, где $\mathbf{t}_{\partial(u)} = \left\langle \delta_{\partial(u)}, \left(\frac{\delta\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\delta U_{\partial(u)}}, \frac{\delta\, \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\delta V_{\partial(u)}} \right) \right\rangle$ и $\delta_{\partial(u)} = \left(\frac{dU_{\partial(u)}}{dt}, \frac{dV_{\partial(u)}}{dt} \right)$, находится как (Elber, G., Cohen, E., 1993):

$$k_{n.\partial(u)} = \frac{\Phi_{2.\partial(u)}\left(\frac{dU_{\partial(u)}}{dt}, \frac{dV_{\partial(u)}}{dt} \right)}{\Phi_{1.\partial(u)}\left(\frac{dU_{\partial(u)}}{dt}, \frac{dV_{\partial(u)}}{dt} \right)} = \frac{\delta_{\partial(u)} L_{\partial(u)} \delta^{T}_{\partial(u)}}{\delta_{\partial(u)} G_{\partial(u)} \delta^{T}_{\partial(u)}}. \qquad (1.106)$$

Нормальная кривизна зависит от направления касательной $\mathbf{t}_{\partial(u)}$ и равна радиусу кривизны окружности, соприкасающейся к линии пересечения поверхности $\mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ соответствующей нормальной секущей плоскостью.

Нормальная кривизна является внутренним свойством поверхности и не зависит от вида ее параметризации. После дифференцирования (106) по $\delta_{\partial(u)}$, задача нахождения экстремальных значений нормальной кривизны поверхности сводится к задаче нахождения корней уравнения:

$$\left|\tilde{\mathbf{G}}_{\partial(u)}\right| k^{2}_{n.\partial(u)} + (g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12})k_{n.\partial(u)} + \left|\tilde{\mathbf{L}}_{\partial(u)}\right| = ak^{2}_{n.\partial(u)} + bk_{n.\partial(u)} + c = 0. \qquad (1.107)$$

Гауссова кривизна является произведением корней $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ уравнения (107)

$$\tilde{G}_{\partial(u)} = k_{1.\partial(u)} k_{2.\partial(u)} = \frac{\left|L_{\partial(u)}\right|}{\left|G_{\partial(u)}\right|}.$$

Произведение главных кривизн $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ локального участка поверхности $Д(И)$ равно его полной кривизне:

$$\tilde{G}_{\partial(u)} = k_{1.\partial(u)} \cdot k_{2.\partial(u)}. \qquad (1.108)$$

Кривизну $\tilde{G}_{\partial(u)}$ К.-Ф. Гаусс назвал *полной кривизной* поверхности в заданной точке *M* на ней. Она является мерой формы локального участка поверхности $Д(И)$, хотя с ее использованием связана некоторая потеря информации по сравнению с использованием главных кривизн $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ раздельно.

Потеря этой информации может быть восстановлена введением в рассмотрение средней кривизны локального участка поверхности $Д(И)$ в заданной точке на ней:

$$\tilde{M}_{\partial(u)} = \frac{k_{1.\partial(u)} + k_{2.\partial(u)}}{2} = -\frac{g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12}}{2\left|G_{\partial(u)}\right|}.$$

Как видим, обратные уравнения

$$k_{1.\partial(u)} = \tilde{M}_{\partial(u)} + \left(\tilde{M}^{2}_{\partial(u)} - \tilde{G}_{\partial(u)}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$k_{2.\partial(u)} = \tilde{M}_{\partial(u)} - \left(\tilde{M}^{2}_{\partial(u)} - \tilde{G}_{\partial(u)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

указывают на то, что в этом случае потери информации о геометрии локального участка поверхности $Д(И)$ нет.

Из уравнения (108) следует, что для эллиптических локальных участков поверхности $Д(И)$ полная кривизна положительна $\left(\tilde{G}_{\partial(u)} > 0\right)$, для гиперболических – отрицательна $\left(\tilde{G}_{\partial(u)} < 0\right)$, а для параболических – равна нулю $\left(\tilde{G}_{\partial(u)} = 0\right)$. Для любого типа локального участка поверхности $Д(И)$ координаты центра соответствующей круговой диаграммы будут $\left(\tilde{M}_{\partial(u)}; 0\right)$.

Для выпуклых локальных участков поверхности $Д(И)$ средняя кривизна положительна $\left(\tilde{M}_{\partial(u)} > 0\right)$, для вогнутых она отрицательна $\left(\tilde{M}_{\partial(u)} < 0\right)$ и равна нулю для локальных участков уплощения и минимальных локальных участков $\left(\tilde{M}_{\partial(u)} = 0\right)$.

Для эллиптических локальных участков поверхности $Д(И)$ длина касательной, проведенной из начала координат к круговой диаграмме, равна $\sqrt{\tilde{G}_{\partial(u)}}$ (рис. 1.24.1). Этот результат очевиден из теоремы, доказанной в элементарной математике: квадрат касательной к окружности равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

Для локальных участков гиперболического типа длина полухорды вдоль оси ординат равна $\sqrt{-\tilde{G}_{\partial(u)}}$ (рис. 1.24.2).

Этот результат очевиден из теоремы, также доказанной в элементарной геометрии: если две хорды окружности пересекают одна другую под прямым углом, то произведения их частей равны друг другу. Это сразу приводит к теореме Эннепера, в соответствие с которой геодезическое кручение любой асимптотической линии, проходящей через гиперболическую точку поверхности, равно $\sqrt{-\tilde{G}_{\partial(u)}}$.

Для локальных участков параболического типа гладких регулярных поверхностей $Д(И)$ полная кривизна равна нулю $\left(\tilde{G}_{\partial(u)} = 0\right)$. Это очевидно из уравнения (108), если рассматривать его с алгебраической точки зрения. К такому же результату придем с геометрических позиций, рассматривая круговую диаграмму параболического локального участка поверхности *Д(И)* как предельный случай аналогичных диаграмм для эллиптического или для гиперболического локальных участков поверхности $Д(И)$.

Числитель в формуле $\tilde{M}_{\partial(u)} = \dfrac{2F_{\partial(u)}M_{\partial(u)} - E_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - G_{\partial(u)}L_{\partial(u)}}{2(E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F^{2}_{\partial(u)})}$ для расчета средней кривизны, и его первые производные соответственно равны (Maekawa, T., Patrikalakis, N,. 1994):

$$B_{\partial(u)} = 2F_{\partial(u)}M_{\partial(u)} - E_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - G_{\partial(u)}L_{\partial(u)};$$

$$\frac{\partial B_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = 2\left(F_{\partial(u)}\frac{\partial M_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \frac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}M_{\partial(u)}\right) - \left(\frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}N_{\partial(u)} + E_{\partial(u)}\frac{\partial N_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right) - \left(\frac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}L_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}\frac{\partial L_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right);$$

$$\frac{\partial B_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = 2\left(F_{\partial(u)}\frac{\partial M_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \frac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}M_{\partial(u)}\right) - \left(\frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}N_{\partial(u)} + E_{\partial(u)}\frac{\partial N_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right) - \left(\frac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}L_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}\frac{\partial L_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right).$$

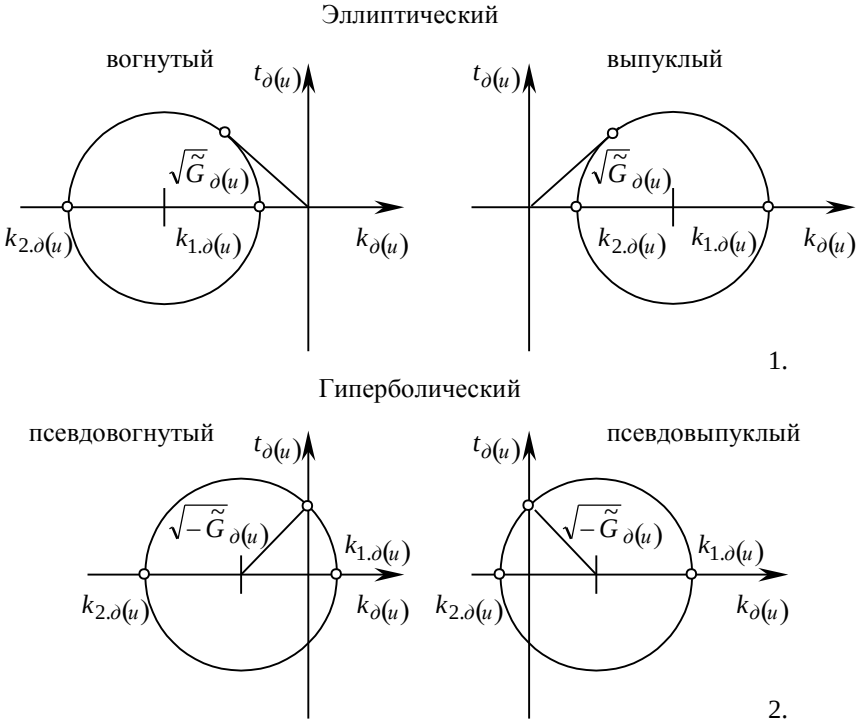


Рис. 1.24. Геометрическая интерпритация полной (гауссовой) кривизны локального участка поверхности $Д(И)$.

Средняя кривизна $\tilde{M}_{\partial(u)}$ локального участка поверхности $Д(И)$ просто находится по его круговой диаграмме. Поскольку центр окружности всегда расположен на середине ее диаметра, средняя кривизна $\tilde{M}_{\partial(u)}$ будет равна среднему значению из двух нормальных кривизн, измеренных в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Для этого не обязательно определять сначала главные кривизны поверхности $Д(И)$. Обратим внимание на то, что соответствующее утверждение не будет справедливым в отношение гауссовой кривизны локального участка поверхности $Д(И)$. В этом легко убедиться из геометрической интерпретации средней $\tilde{M}_{\partial(u)}$ и полной $\tilde{G}_{\partial(u)}$ кривизны поверхности $Д(И)$ по круговой диаграмме поверхности. Из рис. 1.25 следует, что

$$k_{\partial(u)}(\theta)k_{\partial(u)}(\theta+90^\circ)=OD\cdot OE=OC^2-CD^2,$$

но CD изменяется при изменении величины угла θ, тогда как величина OC постоянна.

1.3.2.9. *Построение круговой диаграммы локального участка поверхности* $Д(И)$. Достаточно знать координаты двух разных точек круговой диаграммы локального участка поверхности $Д(И)$, чтобы определить ее однозначно.

Кривизна $k_{\partial(u)}$ и кручение $t_{\partial(u)}$ для касательных направлений $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$ расчитаны путем подстановки $h=0$ и $\frac{1}{h}=0$ соответственно в уравнения:

$$k_{\partial(u)}=\frac{L_{\partial(u)}+2M_{\partial(u)}h+h^2}{E_{\partial(u)}+2F_{\partial(u)}h+G_{\partial(u)}h^2};$$

$$t_{\partial(u)}=\frac{\left(E_{\partial(u)}M_{\partial(u)}-F_{\partial(u)}L_{\partial(u)}\right)+\left(E_{\partial(u)}N_{\partial(u)}-G_{\partial(u)}L_{\partial(u)}\right)h+\left(F_{\partial(u)}N_{\partial(u)}-G_{\partial(u)}M_{\partial(u)}\right)h^2}{H_{\partial(u)}\left(E_{\partial(u)}+2F_{\partial(u)}h+G_{\partial(u)}h^2\right)},$$

получим две точки $\left(\frac{L_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}};\ \frac{E_{\partial(u)}M_{\partial(u)}-F_{\partial(u)}L_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}H}\right)$ и $\left(\frac{N_{\partial(u)}}{G_{\partial(u)}};\ \frac{F_{\partial(u)}N_{\partial(u)}-G_{\partial(u)}M_{\partial(u)}}{G_{\partial(u)}N_{\partial(u)}}\right)$.

Этот результат может быть переписан в форме

$$\left(\frac{\partial k_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}};\ \ \frac{M_{\partial(u)} - F_{\partial(u)} \dfrac{\partial k_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}}{H_{\partial(u)}} \right); \qquad \left(\frac{\partial k_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}};\ \ \frac{F_{\partial(u)} \dfrac{\partial k_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} - M_{\partial(u)}}{H_{\partial(u)}} \right),$$

где $\dfrac{\partial k_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \dfrac{L_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}}$ и $\dfrac{\partial k_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \dfrac{N_{\partial(u)}}{G_{\partial(u)}}$.

Использование круговых диаграмм позволяет дать наглядную геометрическую интерпретацию характера взаимосвязи между локальными участками разного типа гладких регулярных локальных участков поверхностей $Д(И)$ при изменении величин, соотношений и знаков их главных кривизн.

Проследим какие изменения происходят с локальным участком поверхности $Д(И)$, если в системе координат $k_{\partial(u)}\, t_{\partial(u)}$ (рис. 1.26.1) перемещаться справа от диаграммы выпуклого эллиптического локального участка влево к вогнутому эллиптическому локальному участку и обратно (рис. 1.26.2).

Образующиеся при этом различные типы локальных участков поверхности $Д(И)$ удобно расположить по периметру окружности, например, по ходу часовой стрелки. В результате придем к таким схемам расположения круговых диаграмм (рис. 1.27), индикатрис кривизны (рис. 1.28) и собственно локальных участков (рис. 1.29) гладких регулярных поверхности $Д(И)$.

Приведенные результаты (см. рис. 1.27 – рис. 1.29) наглядно иллюстрируют трансформацию различного типа локальных участков гладкой регулярной поверхности $Д(И)$ из одного в другой. Эти схемы взаимно дополняют друг друга и позволяют выразительнее представить классификацию гладких регулярных локальных участков сложных поверхностей деталей и инструментов (табл. 1.1), разработанную ранее (Радзевич С.П., 1988).

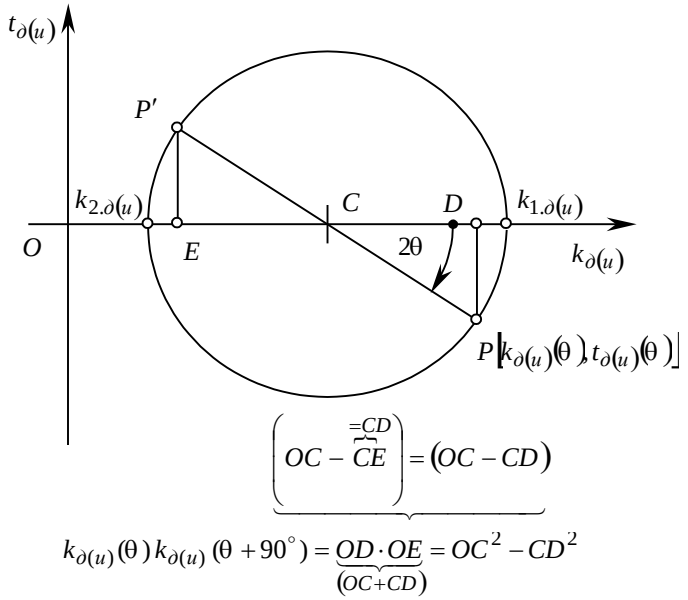


Рис. 1.25. К построению круговой диаграммы поверхности $Д(И)$.

Введение в рассмотрение круговых диаграмм позволяет однозначно определиться с тем, что одна из главных кривизн (а именно первая $k_{1.\partial(u)}$) больше другой *алгебраически* и нет необходимости в рассмотрении соотношений их абсолютных величин. Становится ясным взаимосвязь между различного типа локальными участками поверхностей $Д(И)$ и порядок рассмотрения особенностей их локальной геометрии: логично это делать, рассматривая перемещение круговой диаграммы вдоль оси абсцисс справа налево и в обратном направлении, что хорошо видно при рассмотрении рис. 1.26 совместно с рис. 1.27 – рис. 1.29. При этом также рассматриваются круговые диаграммы разного радиуса, в том числе и вырождающиеся в точку, что имеет место для омбилических локальных участков поверхности $Д(И)$ и их локальных участков уплощения. Это также хорошо иллюстрируется схемами с расположением круговых диаграмм (рис. 1.27), индикатрис кривизны (рис. 1.28) или схем локальных участков поверхностей $Д(И)$ (рис. 1.29) по окружности единичного радиуса.

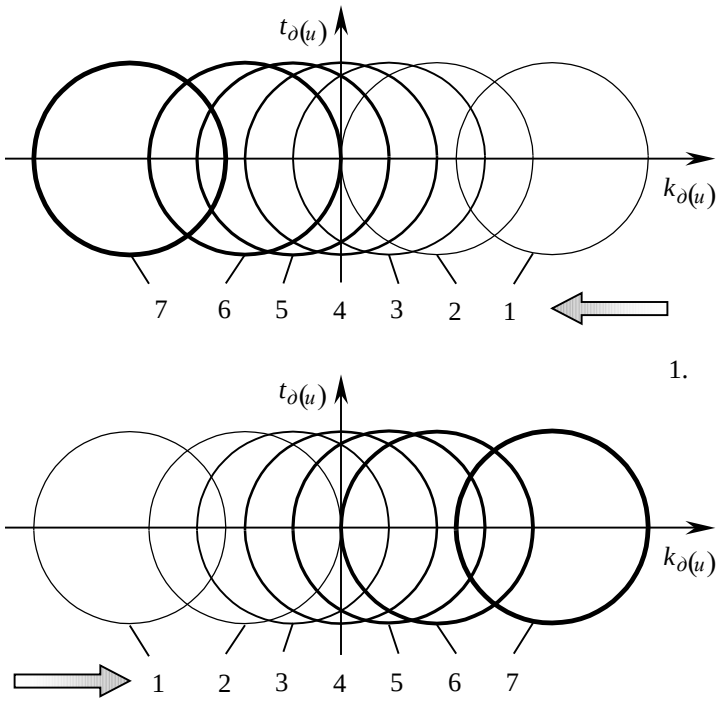


Рис. 1.26. Расположение круговых диаграмм для различного типа локальных участков гладких регулярных поверхностей $Д(И)$.

Рассматривая локальные участки поверхностей $Д(И)$, их форму можно определять не только через главные кривизны $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$, но и через среднюю кривизну $\tilde{M}_{\partial(u)}$ и так называемый *индекс формы* $S_{\partial(u)}$. Эти параметры можно рассчитать так (Koenderink, J.J., 1990):

$$\tilde{M}_{\partial(u)} = \frac{\sqrt{k_{1.\partial(u)}^2 + k_{2.\partial(u)}^2}}{2};$$

$$S_{\partial(u)} = -\frac{2}{\pi}\arctan\frac{k_{1.\partial(u)} + k_{2.\partial(u)}}{k_{1.\partial(u)} - k_{2.\partial(u)}}.$$

Индекс формы $S_{\partial(u)}$ рассматривается как мера *"формы"*, а средняя кривизна $\tilde{M}_{\partial(u)}$ – как мера размера. Например, все сферы разного радиуса имеют одинаковый индекс формы, но разную среднюю кривизну.

За исключением локального участка уплощения, каждому отдельному локальному участку поверхности $Д(И)$ соответствует единственное значение индекса формы. Положительному значению индекса формы соответствуют выпуклые локальные участки поверхностей $Д(И)$, а отрицательному – вогнутые.

Интересные результаты дополнительно могут быть получены, если вместо средней кривизны $\tilde{M}_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ рассматривать ее *"искривленность"*, равную $C_{\partial(u)} = \frac{2}{\pi}\ln\tilde{M}_{\partial(u)}$. Это позволяет исключить из рассмотрения масштабный фактор. В таких координатах все формы отображаются на ленту бесконечной длины в $C_{\partial(u)}$ – направлении (Koenderink, J.J., 1990).

На параметры $\tilde{M}_{\partial(u)}$ и $S_{\partial(u)}$ можно смотреть как на полярные координаты в плоскости, когда началу системы координат соответствует локальный участок уплощения. При таком подходе на окружности, по периметру которой расположены различные типы локальных участков поверхностей $Д(И)$ (см. рис. 1.27 – рис. 1.29) можно смотреть как на окружности единичного радиуса – средняя кривизна постоянна, изменяется только индекс формы.

Таким образом для описания локальной геометрии поверхностей $Д(И)$ можно использовать различные меры кривизны:

$k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ – главные кривизны;
$\tilde{M}_{\partial(u)}$ – средняя кривизна;
$\tilde{A}_{\partial(u)}$ – абсоютная кривизна;
$\tilde{G}_{\partial(u)}$ – полная (гауссова) кривизна;
$C_{\partial(u)}$ – искривленность;
$S_{\partial(u)}$ – индекс формы.

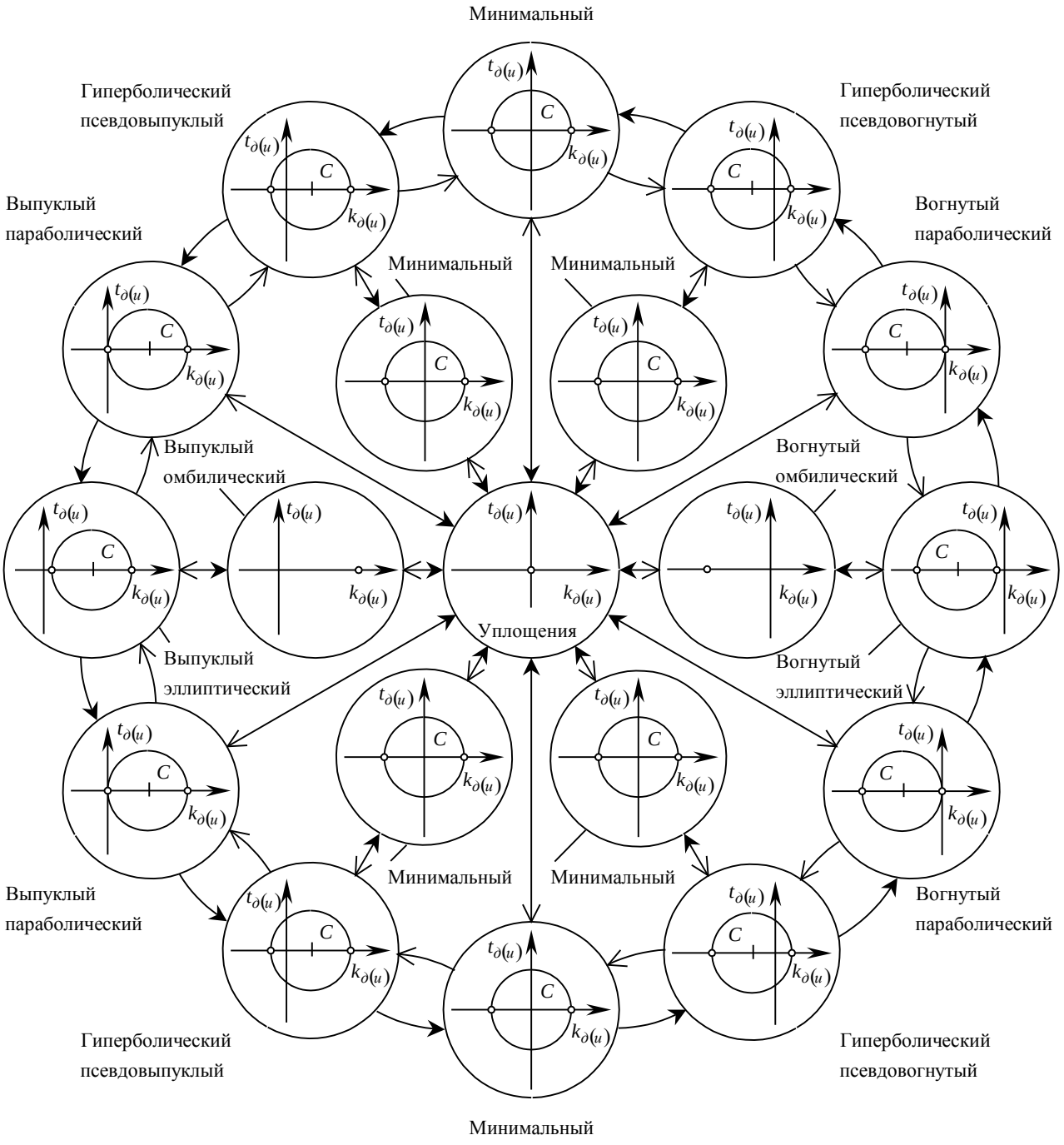


Рис. 1.27. Взаимосвязь между различного типа локальными участками гладких регулярных поверхностей $Д(И)$: круговые диаграммы.

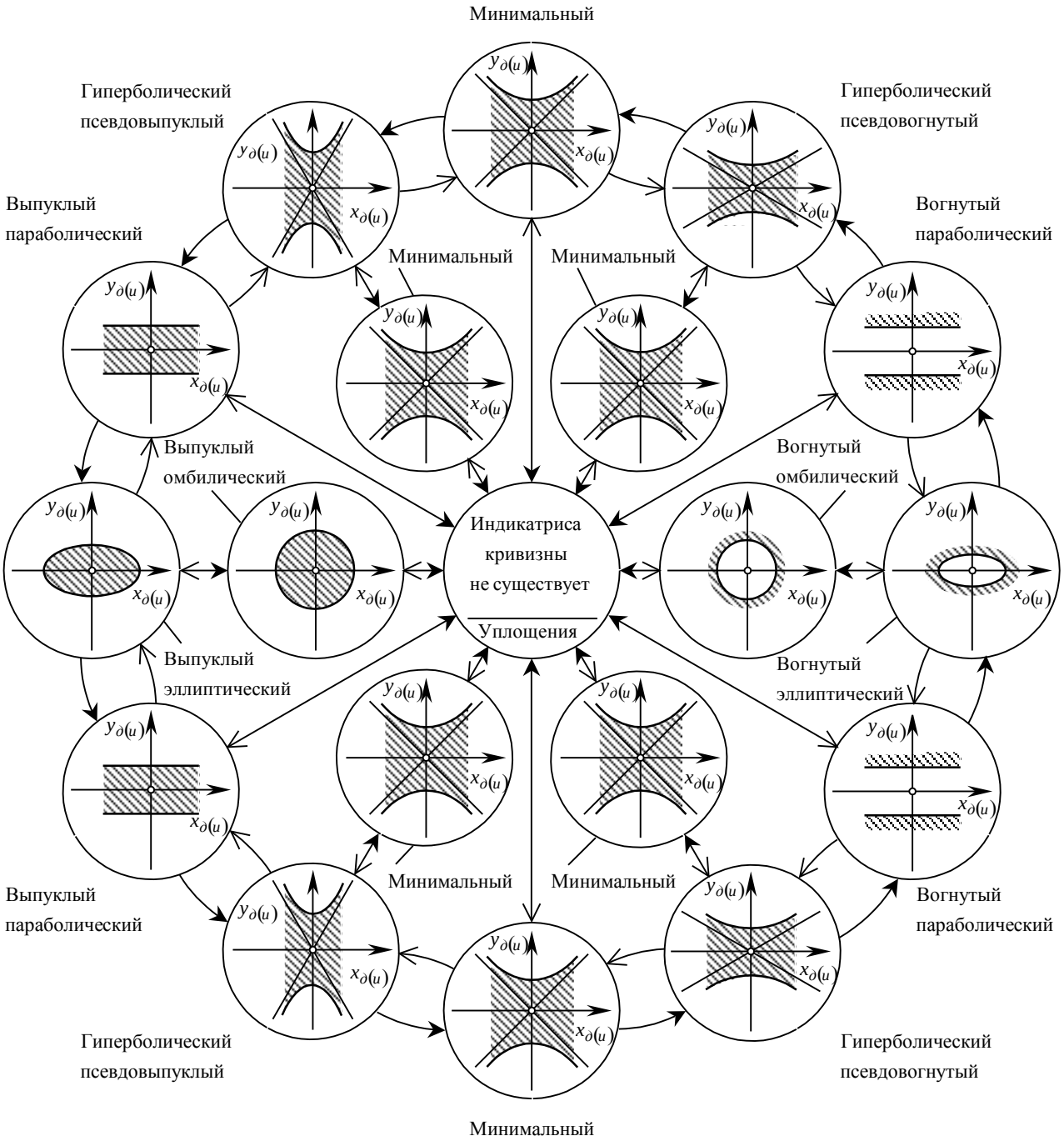


Рис. 1.28. Взаимосвязь между различного типа локальными участками гладких регулярных поверхностей $Д(И)$: индикатрисы кривизны (индикатрисы Дюпена).

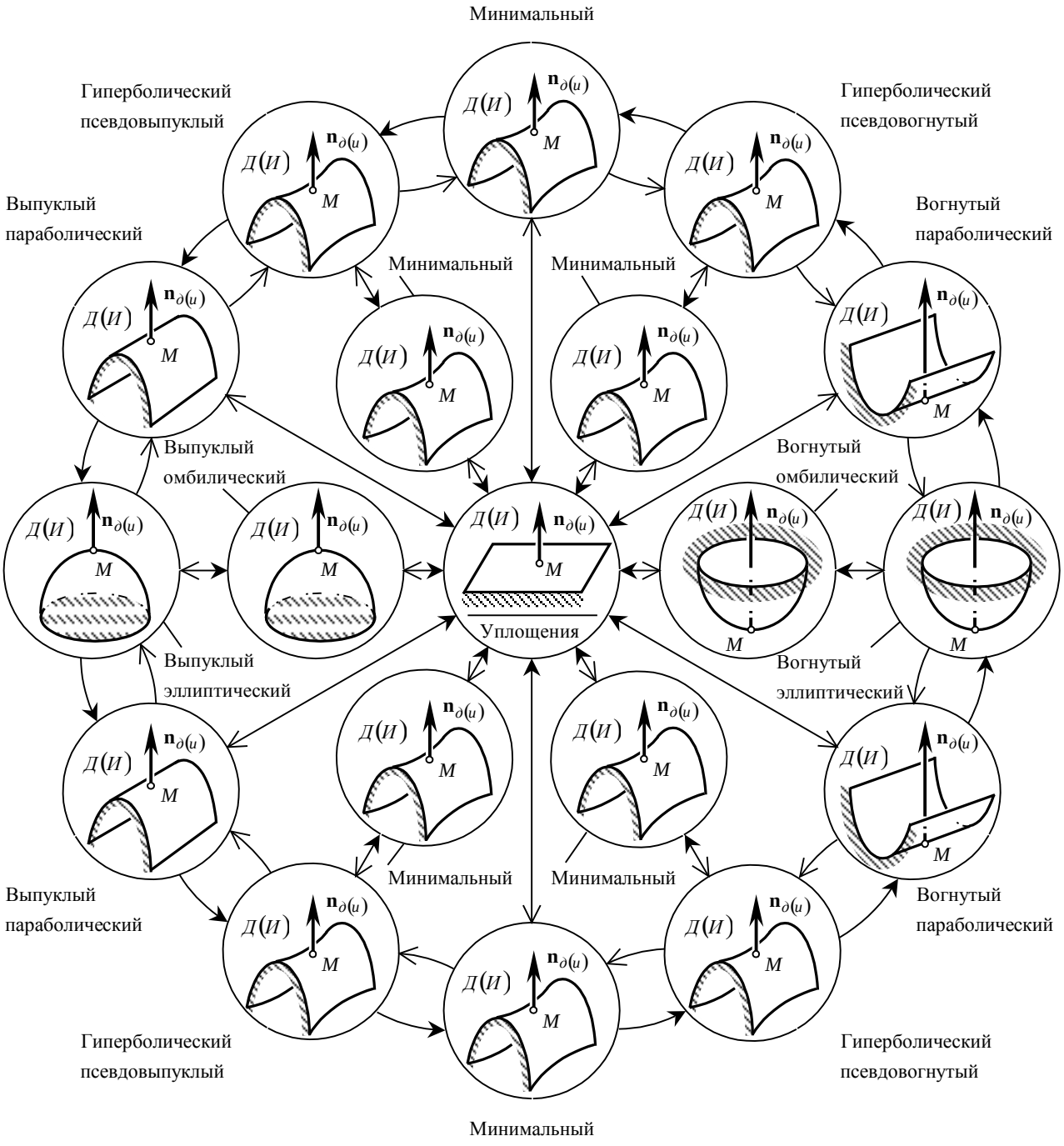
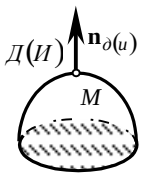
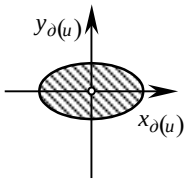
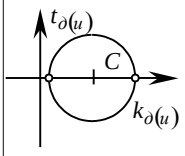
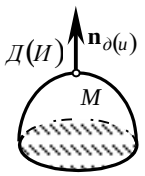
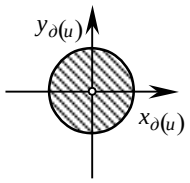
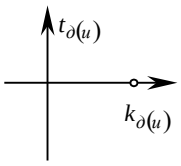
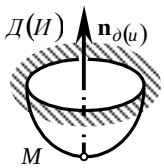
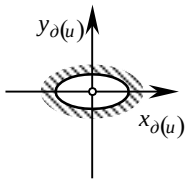
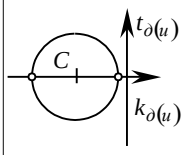
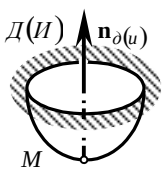
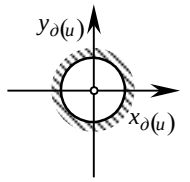
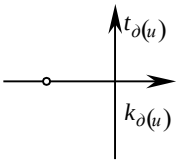
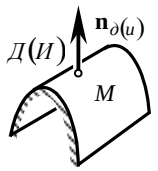
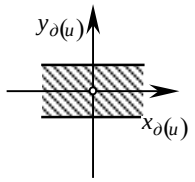
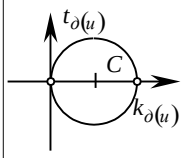
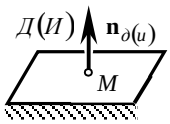
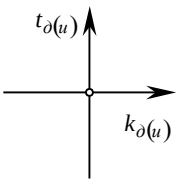
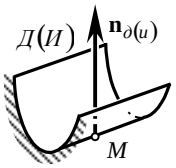
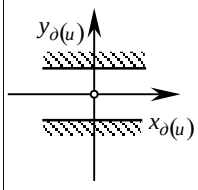
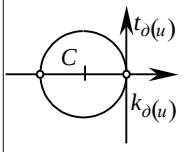
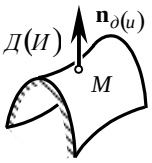
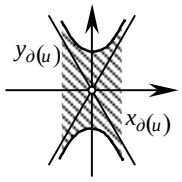
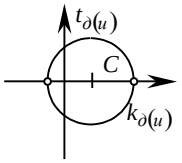
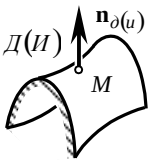
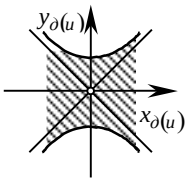
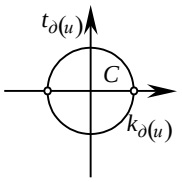
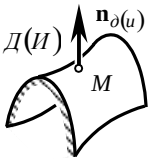
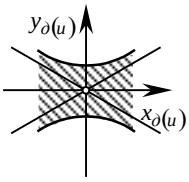
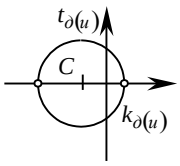


Рис. 1.29. Взаимосвязь между различного типа локальными участками гладких регулярных поверхностей $Д(И)$: схемы локальных участков.

Таблица 1.1.

Гладкие регулярные локальные участки поверхности $Д(И)$ сложной формы

Тип локального участка поверхности $Д(И)$			Характеристика локального участка поверхности $Д(И)$				
кривизна			название	вид локального участка	индикатриса кривизны	круговая диаграмма	аналитический признак
полная (гауссова)	средняя	соотнош k_1 и k_2					
1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$	$\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$	$k_1 > k_2 > 0$	Выпуклый эллиптический				$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} > 0$
		$k_1 = k_2 > 0$	Выпуклый омбилический				$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} > 0$ $\frac{E_{\partial(u)}}{L_{\partial(u)}} = \frac{F_{\partial(u)}}{M_{\partial(u)}} = \frac{G_{\partial(u)}}{N_{\partial(u)}}$
	$\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$	$k_1 > k_2 < 0$	Вогнутый эллиптический				$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} > 0$
		$k_1 = k_2 < 0$	Вогнутый омбилический				$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} > 0$ $\frac{E_{\partial(u)}}{L_{\partial(u)}} = \frac{F_{\partial(u)}}{M_{\partial(u)}} = \frac{G_{\partial(u)}}{N_{\partial(u)}}$
$\tilde{G}_{\partial(u)} = 0$	$\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$	$k_1 > k_2 (= 0)$	Выпуклый параболический				$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} = 0$
	$\tilde{M}_{\partial(u)} = 0$	$k_1 = k_2 = 0$	Уплощения		Индикатриса кривизны не существует		$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} > 0$ $L_{\partial(u)} = N_{\partial(u)} = M^2_{\partial(u)}$

1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{G}_{\partial(u)}=0$	$\tilde{M}_{\partial(u)}<0$	$k_1(=0)>k_2$	Вогнутый параболический				$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)}-M^2_{\partial(u)}>0$
$\tilde{G}_{\partial(u)}<0$	$\tilde{M}_{\partial(u)}>0$	$k_1>k_2$ $k_1>\lvert k_2\rvert$	Гиперболический псевдовыпуклый				$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)}-M^2_{\partial(u)}<0$
	$\tilde{M}_{\partial(u)}=0$	$k_1=-k_2$	Минимальный				$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)}-M^2_{\partial(u)}<0$
	$\tilde{M}_{\partial(u)}<0$	$k_1>k_2$ $k_1<\lvert k_2\rvert$	Гиперболический псевдовогнутый				$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)}-M^2_{\partial(u)}<0$

Краткая историческая справка. В исследованиях геометрии поверхностей круговые диаграммы впервые были применены, по-видимому, R.Miron (1958). Они использовались I.Vaisman (1959) для графической интерпретации свойств поверхностей Вейнгартена. Из более поздних публикаций по этому вопросу следует указать на работы P.Lowe (1980, 1982), A.Nutbourne (1986), на монографии A.Nutbourne and R.Martine (1988) и C.Calladine (1983). Тем не менее историю применения круговых диаграмм в различных технических приложениях следует начинать с изучения трудов Х.О. Мора (Mohr, H.O.).

1.3.3. Типы локальных участков поверхности *Д(И).* На поверхностях деталей и инструментов можно выделить локальные участки следующих видов.

1.3.3.1. Гладкие регулярные локальные участки поверхности Д(И). В каждой неособой точке гладкой регулярной (следовательно, дважды непрерывно дифференцируемой) поверхности $Д(И)$ существует (причем единственный) соприкасающийся параболоид. Гладкие регулярные локальные участки поверхности $Д(И)$ удобно различать по типу соприкасающегося в рассматриваемой точке поверхности параболоида, в окрестности которой он расположен. Соприкасающийся параболоид определяет форму локального участка сложной поверхности $Д(И)$ в окрестности обыкновенной точки на ней.

Кривизна поверхности $Д(И)$ в текущей ее точке M рассматривается как кривизна соответствующей линии на этой поверхности. Если через точку M провести нормаль $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ к поверхности $Д(И)$, через которую проходит пучок секущих плоскостей, то кривизна линий пересечения поверхности плоскостями этого пучка в общем случае не будет одинаковой для разных нормальных сечений. Те плоские нормальные сечения $C_{1.\partial(u)}$ и $C_{2.\partial(u)}$, в которых кривизна линий пересечения поверхности $Д(И)$ принимает соответственно минимальное

и максимальное значения, являются главными секущими плоскостями, а соответствующие им кривизны $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ – главными кривизнами поверхности $Д(И)$. Главные кривизны поверхности находятся как корни характеристического уравнения (Struik, D.J., 1961):

$$\begin{vmatrix} L_{\partial(u)} - E_{\partial(u)} k_{\partial(u)} & M_{\partial(u)} - F_{\partial(u)} k_{\partial(u)} \\ M_{\partial(u)} - F_{\partial(u)} k_{\partial(u)} & N_{\partial(u)} - G_{\partial(u)} k_{\partial(u)} \end{vmatrix} = 0,$$

а для вычисления их значения удобно воспользоваться квадратным уравнением, получаемым после раскрытия этого определителя:

$$\left(E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}\right) k^2_{\partial(u)} - \left(E_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)} M_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} L_{\partial(u)}\right) k_{\partial(u)} + \left(L_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)}\right) = 0. \qquad (1.109)$$

Главные радиусы кривизны $R_{1.\partial(u)}$ и $R_{2.\partial(u)}$ – величины, обратные главным кривизнам $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ соответствтенно $\left(R_{1.\partial(u)} = k^{-1}_{1.\partial(u)}\right.$ и $\left. R_{2.\partial(u)} = k^{-1}_{2.\partial(u)}\right)$, удобно находить как корни квадратного уравнения:

$$\left(L_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)}\right) R^2_{\partial(u)} - \left(E_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)} M_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} L_{\partial(u)}\right) R_{\partial(u)} + \left(E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}\right) = 0. \qquad (1.110)$$

Первая главная кривизна $k_{1.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ измеряется в первом главном сечении $C_{1.\partial(u)}$ и имеет большее алгебраическое значение, а вторая главная кривизна $k_{2.\partial(u)}$ – измеряется во втором главном сечении $C_{2.\partial(u)}$ – ее алгебраическое значение меньше. При таком допущении радиус кривизны $R_{1.\partial(u)}$ первого главного сечения $C_{1.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ будет меньшим, а радиус кривизны $R_{2.\partial(u)}$ второго главного сечения $C_{2.\partial(u)}$ – большим.

Радиус кривизны текущего плоского нормального сечения $C_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ расчитывается по формуле:

$$R_{\partial(u)} = \frac{\Phi_{1.\partial(u)}}{\Phi_{2.\partial(u)}} = \frac{E_{\partial(u)}\, dU^2_{\partial(u)} + 2F_{\partial(u)}\, dU_{\partial(u)}\, dV_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}\, dV^2_{\partial(u)}}{L_{\partial(u)}\, dU^2_{\partial(u)} + 2M_{\partial(u)}\, dU_{\partial(u)}\, dV_{\partial(u)} + N_{\partial(u)}\, dV^2_{\partial(u)}}.$$

Пример 1.5. Рабочая поверхность $Д$ детали представляет собой гиперболический параболоид, заданный в декартовой системе координат (рис. 1.30) уравнением

$$Z_{\partial} = \frac{X^2_{\partial}}{4} - \frac{Y^2_{\partial}}{4}.$$

Требуется определить основные элементы локальной геометрии поверхности $Д$: касательную плоскость, нормаль, коэффициенты первых двух основных квадратичных форм, главные радиусы кривизны.

Преобразуем уравнение поверхности $Д$ в параметрическую форму. Поскольку гиперболический параболоид является линейчатой поверхностью, то в данном случае в качестве координатных U_{∂} – и V_{∂} – линий удобно принять линии на поверхности $Д$, удовлетворяющие двум условиям:

– первое семейство прямых линий на $Д$

$$\frac{X_{\partial}}{2} + \frac{Y_{\partial}}{2} = U_{\partial}; \qquad U_{\partial}\left(\frac{X_{\partial}}{2} - \frac{Y_{\partial}}{2}\right) = Z_{\partial};$$

$$\frac{X_{\partial}}{2} + \frac{Y_{\partial}}{2} = U_{\partial}; \qquad U_{\partial}\left(\frac{X_{\partial}}{2} - \frac{Y_{\partial}}{2}\right) = Z_{\partial};$$

– второе семейство прямых линий на $Д$

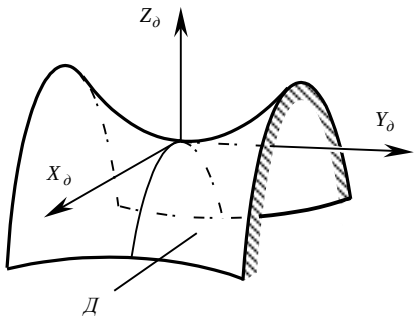


Рис. 1.30. Элементы локальной геометрии поверхности $Д$, имеющей форму гиперболического параболоида.

$$\frac{X_\partial}{2} - \frac{Y_\partial}{2} = V_\partial; \qquad V_\partial\left(\frac{X_\partial}{2} + \frac{Y_\partial}{2}\right) = Z_\partial .$$

Сформулированное требование не является обязательным и решать эту и подобные задачи можно и при иной параметризации поверхности $Д$.

Почленно складывая первое и третье уравнения, получим, что $X_\partial = U_\partial + V_\partial$. Вычтя почленно из первого уравнения третье, найдем, что $Y_\partial = U_\partial - V_\partial$. Подставив первое уравнение в четвертое или третье уравнение во второе, придем к результату: $Z_\partial = U_\partial V_\partial$. Следовательно, уравнение гиперболического параболоида $Д$ в векторной форме может быть записано так:

$$\mathbf{r}_\partial = (U_\partial + V_\partial)\mathbf{i} + (U_\partial - V_\partial)\mathbf{j} + U_\partial V_\partial \mathbf{k} .$$

Продифференцировав это уравнение по параметрам U_∂ и V_∂, приходим к следующим зависимостям для:
– направлений касательных прямых

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + V_\partial \mathbf{k}; \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + U_\partial \mathbf{k};$$

– касательной плоскости

$$\begin{vmatrix} X_{КП} - X_\partial^{(M)} & Y_{КП} - Y_\partial^{(M)} & Z_{КП} - Z_\partial^{(M)} \\ 1 & 1 & V_\partial \\ 1 & -1 & U_\partial \end{vmatrix} = 0 ;$$

– прямой, нормальной к поверхности $Д$

$$\frac{X - X_\partial^{(M)}}{U_\partial + V_\partial} = \frac{Y - Y_\partial^{(M)}}{U_\partial - V_\partial} = \frac{Z - Z_\partial^{(M)}}{2} ;$$

– коэффициентов первой основной квадратичной формы

$$E_\partial = 2 + V_\partial; \qquad F_\partial = U_\partial V_\partial; \qquad G_\partial = 2 + U_\partial .$$

– коэффициентов второй основной квадратичной формы

$$L_\partial = 0 ; \qquad M_\partial = \frac{2}{\sqrt{4 + 2(U_\partial + V_\partial) + U_\partial V_\partial (1 - U_\partial V_\partial)}} ; \qquad N_\partial = 0 .$$

Главные радиусы кривизны $R_{1.\partial}$ и $R_{2.\partial}$ поверхности $Д$ находятся как корни квадратного уравнения (110) после подстановки в него найденных значений коэффициентов E_∂, F_∂, G_∂ первой $\Phi_{1.\partial}$ и L_∂, M_∂, N_∂ второй $\Phi_{2.\partial}$ основных квадратичных форм.

Для анализа строения локального участка сложной поверхности $Д(И)$ будем использовать среднюю $\tilde{M}_{\partial(u)}$, полную (гауссову) $\tilde{G}_{\partial(u)}$ и абсолютную $\tilde{A}_{\partial(u)}$ кривизну. По определению эти кривизны равны:

$$\tilde{M}_{\partial(u)} = \frac{k_{1.\partial(u)} + k_{2.\partial(u)}}{2} = \frac{E_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)} M_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} L_{\partial(u)}}{2[E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}]};$$

(1.111)
$$\tilde{G}_{\partial(u)} = k_{1.\partial(u)} k_{2.\partial(u)} = \frac{L_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}};$$

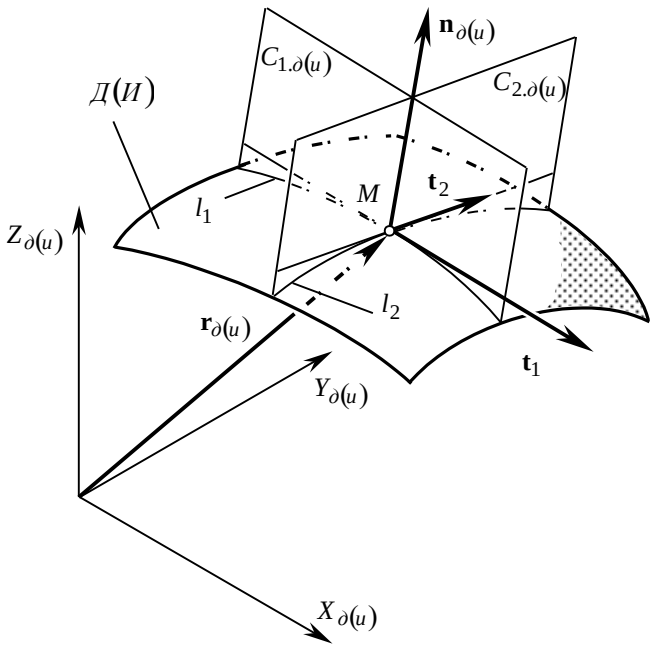


Рис. 1.31. Нормальная кривизна локального участка сложной поверхности $Д(И)$.

$$\tilde{A}_{\partial(u)} = \left|k_{1.\partial(u)}\right| + \left|k_{2.\partial(u)}\right|,$$

где $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ – главные кривизны поверхности $Д(И)$, определяемые как корни квадратного уравнения $k^2_{\partial(u)} - 2M_{\partial(u)}k_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} = 0$.

Нормальная кривизна $k_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ представляет собой величину, обратно пропорциональную радиусу кривизны $R_{\partial(u)}$ сечения поверхности $Д(И)$ плоскостью $C_{\partial(u)}$, проходящей через нормаль $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ к поверхности: $k_{\partial(u)} = R^{-1}_{\partial(u)}$.

Считаем, что поверхность $Д(И)$ задана (рис. 1.31) и известна единичная нормаль $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ к ней в регулярной точке M. Единичные векторы $\mathbf{t}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, \infty$) лежат в плоскости, касательной к $Д(И)$ в точке M, и представляют различные направления на этой поверхности. Плоскость $C_{i.\partial(u)}$, проходящая через векторы $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ и $\mathbf{t}_i$, пересекает поверхность по плоской кривой l_i. Нормальная кривизна $k_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ в точке M равна кривизне соответствующей кривой l_i. Текущее значение нормальной кривизны рассчитывается по формуле:

$$k_{\partial(u)} = \frac{\Phi_{2.\partial(u)}}{\Phi_{1.\partial(u)}} = \frac{L_{\partial(u)}dU^2_{\partial(u)} + 2M_{\partial(u)}dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)} + N_{\partial(u)}dV^2_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}dU^2_{\partial(u)} + 2F_{\partial(u)}dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV^2_{\partial(u)}}. \qquad (1.112)$$

Если секущую плоскость $C_{\partial(u)}$ поворачивать вокруг нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$, то для разных ее положений будем иметь свое значение нормальной кривизны $k_{i.\partial(u)}$. Главные кривизны при этом соответствуют наибольшему $k_{1.\partial(u)}$ и наименьшему $k_{2.\partial(u)}$ алгебраическому значению нормальной кривизны $k_{\partial(u)}$, измеряем в главных секущих плоскостях $C_{1.\partial(u)}$ и $C_{2.\partial(u)}$ соответственно.

Главные кривизны $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ находятся как корни квадратного уравнения (109) и измеряются в нормальных плоскостях, касательных к главным направлениям $\mathbf{t}_{1.\partial(u)}$ и $\mathbf{t}_{2.\partial(u)}$ на поверхности $Д(И)$ в основании перпендикуляра $\mathbf{n}_{\partial(u)}$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы направление $\dfrac{dU_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}$ было главным, является равенство нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} E_{\partial(u)}dU_{\partial(u)} + F_{\partial(u)}dV_{\partial(u)} & F_{\partial(u)}dU_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV_{\partial(u)} \\ L_{\partial(u)}dU_{\partial(u)} + M_{\partial(u)}dV_{\partial(u)} & M_{\partial(u)}dU_{\partial(u)} + N_{\partial(u)}dV_{\partial(u)} \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (1.113)$$

Существование и единственность соприкасающегося параболоида позволяет классифицировать гладкие регулярные локальные участки поверхности $Д(И)$ сложной формы исходя из того, определенна, полуопреде-

ленна или неопределенна его вторая основная квадратичная форма $\Phi_{2.\partial(u)}$.

Условие определенности второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.\partial(u)}$ не зависит от вида параметризации поверхности $Д(И)$, т.е. от выбора криволинейных координат на ней.

Если вторая основная квадратичная форма $\Phi_{2.\partial(u)}$ определенна – то такой локальный участок будет эллиптическим, если полуопределенна – параболическим и если неопределенна – гиперболическим гладким регулярным локальным участком поверхности $Д(И)$.

В пределах *эллиптического* локального участка соприкасающийся параболоид является эллиптическим параболоидом, аналитический признак которого $L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} > 0$, а его полная (гаусовая) кризизна всегда положительна ($\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$). Такой локальный участок поверхности $Д(И)$ не пересекает касательную плоскость, а кривизна всех нормальных сечений имеет один знак – она положительна для выпуклых эллиптических локальных участков (в этом случае средняя кривизна поверхности $\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$) и отрицательна для вогнутых эллиптических локальных участков поверхности ($\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$).

В частном случае, когда все кривизны становятся равными одна другой $\left(k_{1.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)} = k_{\partial(u)}\right)$, эллиптический локальный участок вырождается в *омбилический* гладкий регулярный локальный участок (локальный участок *округления*) поверхности $Д(И)$. В пределах омбилического локального участка соприкасающийся эллиптический параболоид вырождается в параболоид вращения. Аналитическим признаком омбилического локального участка поверхности $Д(И)$ являются соотношения

$$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} > 0; \qquad \frac{E_{\partial(u)}}{L_{\partial(u)}} = \frac{F_{\partial(u)}}{M_{\partial(u)}} = \frac{G_{\partial(u)}}{N_{\partial(u)}}.$$

Гауссова кривизна омбилического локального участка поверхности $Д(И)$ всегда положительна ($\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$), а средняя – положительна для выпуклых ($\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$) и отрицательна для вогнутых ($\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$) омбилических локальных участков.

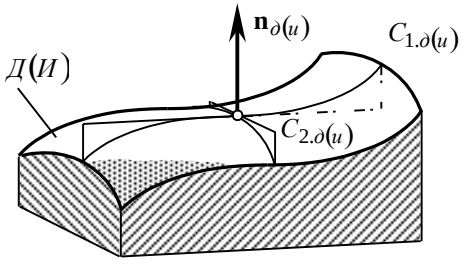


Рис. 1.32. Пример параболического локального участка гладкой регулярной поверхности $Д(И)$.

В пределах омбилического локального участка положение главных секущих плоскостей $C_{1.\partial(u)}$ и $C_{2.\partial(u)}$ на поверхности $Д(И)$ становится неопределенным.

В пределах *параболического* локального участка соприкасающийся параболоид вырождается в параболический цилиндр; его аналитический признак $L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} = 0$, а гауссова кривизна всегда равна нулю ($\tilde{G}_{\partial(u)} = 0$). В пределах параболического локального участка поверхность $Д(И)$ касается плоскости по прямой линии, одна из ее главных кривизн равна нулю (это главное сечение имеет точку перегиба (рис. 1.32) или является прямой линией), а другая может быть либо положительной – для выпуклых параболических локальных участков (в этом случае $\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$), либо отрицательной – для вогнутых параболических локальных участков сложной поверхности ($\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$).

В частном случае, когда все кривизны параболического локального участка поверхности $Д(И)$ равны нулю $\left(k_{1.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)} = k_{\partial(u)} = 0\right)$, параболический локальный участок поверхности вырождается в гладкий регулярный локальный участок *уплощения***.** В пределах локального участка уплощения соприкасающийся

параболоид вырождается в плоскость, касательную к поверхности $Д(И)$ в рассматриваемой ее точке. Аналитическим признаком локального участка уплощения являются соотношения

$$L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} = 0; \qquad L_{\partial(u)} = M_{\partial(u)} = N_{\partial(u)} = 0.$$

Гауссова и средняя кривизны локального участка уплощения всегда равны нулю ($\tilde{G}_{\partial(u)} = 0$; $\tilde{M}_{\partial(u)} = 0$), следовательно нельзя говорить выпуклы они или вогнуты. По этой причине локальные участки уплощения инвариантны относительно стороны расположения тела детали или инструмента: любой из двух возможных вариантов расположения тела детали или инструмента может быть приведен к противоположному путем поворота поверхности $Д(И)$.

Как и для омбилического локального участка, для локального участка уплощения положение главных секущих плоскостей $C_{1.\partial(u)}$ и $C_{2.\partial(u)}$ на поверхности $Д(И)$ становится неопределенным.

Все локальные участки на плоскости (регулярные локальные участки уплощения) можно рассматривать как гладкие регулярные локальные участки параболического типа. Локальные участки уплощения можно также рассматривать и как частный случай омбилических локальных участков поверхностей $Д(И)$, когда нормальная кривизна омбилического локального участка равна нулю. Возможны и иные интерпретации локальных участков уплощения (см. рис. 1.27 – рис. 1.29).

В пределах *гиперболического* локального участка, соприкасающийся параболоид является гиперболическим параболоидом. Его аналитический признак $L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)} < 0$.

Гауссова кривизна поверхности всегда отрицательная ($\tilde{G}_{\partial(u)} < 0$), а ее средняя кривизна может принимать любые значения ($\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$ для *псевдовыпуклых*, $\tilde{M}_{\partial(u)} = 0$ для *минимальных* и $\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$ для *псевдовогнутых* гладких регулярных локальных участков гиперболического типа поверхностей $Д(И)$ в том числе и при фиксированной абсолютной кривизне ($\tilde{A}_{\partial(u)} = Const$). Главные кривизны имеют взаимно противоположные знаки – следовательно имеются как выпуклые, так и вогнутые нормальные сечения.

Поэтому поверхность $Д(И)$ в пределах гиперболического локального участка выпукловогнута – имеет седлообразный вид и пересекает *касательную* плоскость по двум прямым линиям.

Таким образом на гладких регулярных отсеках поверхности $Д(И)$ встречаются локальные участки только 10 типов, которые могут быть классифицированы так (рис. 1.33).

Локальный подход к рассмотрению процесса многокоординатного формообразования поверхностей деталей подтверждает правильность использования локального подхода к разработке классификации локальных участков поверхностей деталей и инструментов (см. рис. 1.33) и хорошо согласуется с постулированным выше положением (см. постулат 1.1), в соответствие с которым формообразование сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ следует рассматривать в первую очередь локально: в окрестности текущей точки касания поверхностей $Д$ и $И$.

Анализ топологии гладких регулярных локальных участков поверхности $Д(И)$ включает определение соотношений нормальных кривизн поверхности в дифференциальной окрестности текущей точки на ней.

Структуру нормальных кривизн в заданной точке на поверхности $Д(И)$ удобно графически изображать при помощи характеристической кривой – *индикатрисы кривизны*, которая дает наглядное представление о распределении нормальных радиусов кривизны в окрестности точки на поверхности $Д(И)$. В геометрии для этих целей используется индикатриса Дюпена[1] – плоская характеристическая кривая второго порядка, которая

---

[1]**Дюпен**, Франсуа Пьер-Шарль (***Dupin**, F.P.-C.*). (6.10.1784, Варзи, Ниверне - 18.1.1873, Париж), французский геометр и экономист, чл. Парижской АН (1818), почетный член Петербургской АН (с 1828). Окончил Политехническую школу в Париже (1804). Был морским инженером, затем – главным инженером французского флота, с 1819 – профессор Консерватории искусств и ремесел, с 1834 –морской министр. Труды в области дифференциальной геометрии – поверхности ортогональной системы пересекаются вдоль общих линий кривизны (теорема Дюпена). Развивая идеи своего учителя Г.Монжа, ввел кривую, позволяющую наглядно представить распределение кривизн поверхности в различных нормальных ее сечениях (индикатриса Дюпена). Как экономист выступал сторонником протекционизма.

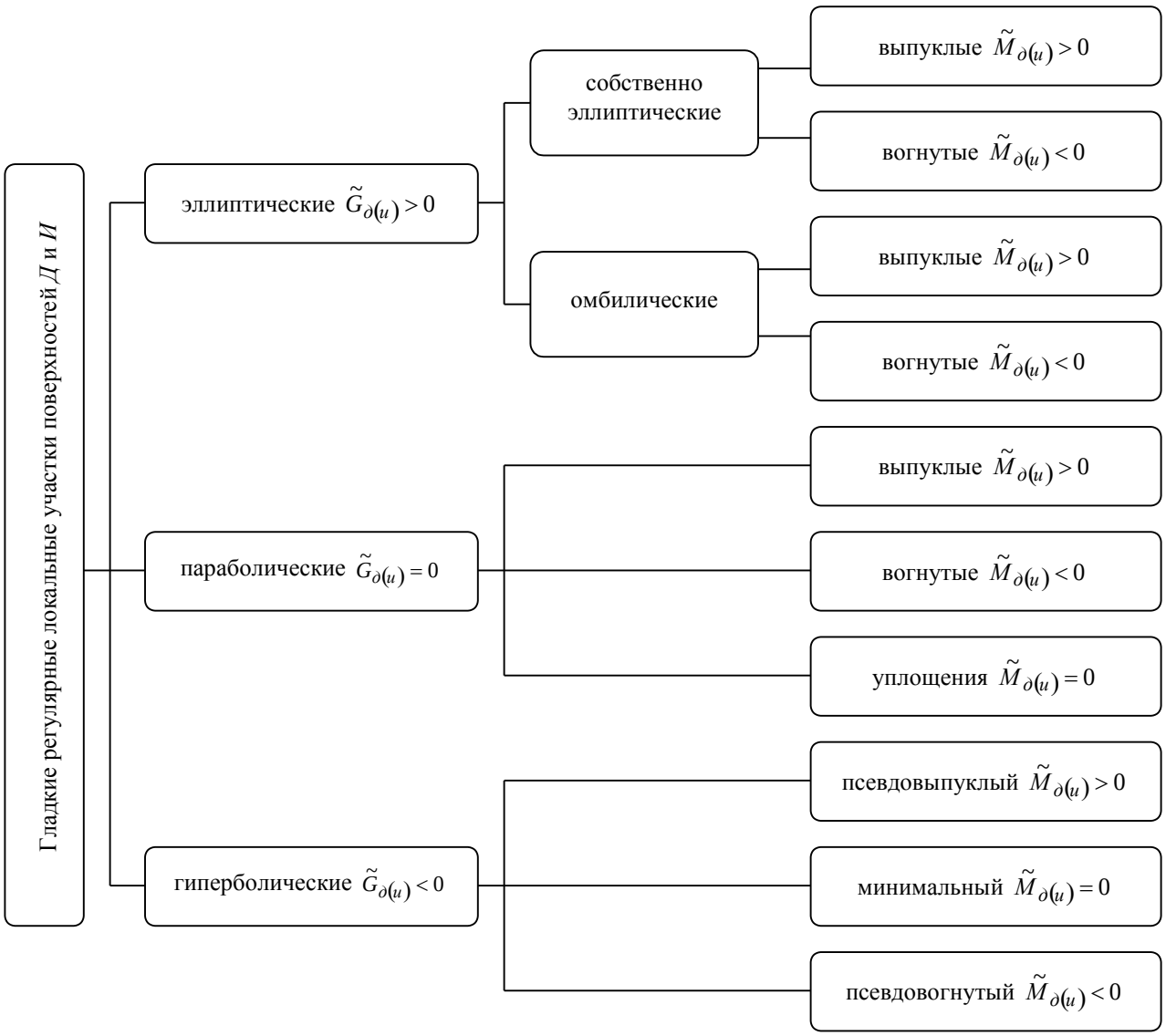


Рис. 1.33. Классификация гладких регулярных локальных участков поверхностей $Д(И)$ сложной формы.

представляет собой бесконечно увеличенное сечение поверхности плоскостью, перпендикулярной нормали к этой поверхности в заданной ее точке и отстоящей от нее на бесконечно малом расстоянии или (что то же самое) – это проекция сечения поверхности на касательную плоскость.

Пусть через **n** обозначена единичная нормаль к поверхности S в точке P на ней. Рассмотрим сечение поверхности S плоскостью, проходящей через **n**, т.е. нормальной секущей плоскостью (Todd, P.H., McLood, R.J.Y., 1986). Каждая из таких плоскостей пересекает поверхность по кривой линии, которая является линией нормального сечения поверхности S.

В каждом нормальном сечении можно провести направление **t** – направление единичной касательной, т.е. касательной к кривой на поверхности, проходящей через точку P, а также определить нормальную кривизну поверхности – кривизну k_t, (кривизну кривой нормального сечения поверхности в точке P). Нормальные кривизны поверхности изменяются при вращении плоского сечения вокруг нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$. Наибольшее и наименьшее значение k_t измеряются во взаимно-ортогональных сечениях и являются

главными кривизнами поверхности в точке P. Главные кривизны k_1 и k_2 измеряются в направлениях $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ соответственно.

Обозначим через Ψ угол между направлением $\mathbf{t}$ текущего нормального сечения и направлением $\mathbf{t}_1$. Л.Эйлер (1760) показал, что нормальная кривизна k_t в текущем нормальном направлении $\mathbf{t}$ связана с главными кривизнами k_1 и k_2 соотношением:

$$k_t = k_1 \cos^2 \Psi + k_2 \sin^2 \Psi. \tag{1.114}$$

Пусть

$$x = \pm \frac{\cos \Psi}{\sqrt{|k_t|}} \quad \text{и} \quad y = \pm \frac{\sin \Psi}{\sqrt{|k_t|}}, \tag{1.115}$$

где x, y – координаты текущей точки индикатрисы Дюпена, откладываемые от точки K в касательной плоскости.

Тогда

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1. \tag{1.116}$$

Это уравнение определяет плоскую центрально- и зеркально-симметричную кривую, которая является *индикатрисой Дюпена* поверхности S в точке P на ней. Кривизна индикатрисы Дюпена в текущей ее точке связана с производными этой кривой уравнением:

$$k(\Psi) = \frac{[\mathbf{x}'(\Psi) \times \mathbf{x}''(\Psi)]}{[\mathbf{x}'''(\Psi)]^3}.$$

Поскольку в теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей поверхности $Д(И)$ рассматриваются не сами по себе как геометрические образы, а как технические поверхности – совместно с деталью (или инструментом), носителями формы поверхности, это требует различать с какой стороны поверхности $Д(И)$ расположено тело детали или инструмента. В этой связи под индикатрисой кривизны гладкого регулярного участка поверхности $Д(И)$ будем понимать *участок плоскости*, ограниченный индикатрисой Дюпена этой поверхности. Тогда, для выпуклого локального участка поверхности $Д(И)$ индикатриса кривизны будет представлять собой *участок плоскости*, расположенный внутри индикатрисы Дюпена, а ее точки будут удовлетворять соотношению

$$\frac{L_{д(u)}}{E_{д(u)}} x^2_{д(u)} + \frac{2M_{д(u)}}{\sqrt{E_{д(u)} G_{д(u)}}} x_{д(u)} y_{д(u)} + \frac{N_{д(u)}}{G_{д(u)}} y^2_{д(u)} \le 1, \tag{1.117}$$

где $x_{д(u)}, y_{д(u)}$ – координаты точек индикатрисы кривизны поверхности $Д(И)$.

Аналогично для вогнутого локального участка поверхности $Д(И)$ индикатриса кривизны будет представлять собой *участок плоскости*, расположенный вне индикатрисы Дюпена поверхности; ее точки удовлетворяют неравенству:

$$\frac{L_{д(u)}}{E_{д(u)}} x^2_{д(u)} + \frac{2M_{д(u)}}{\sqrt{E_{д(u)} G_{д(u)}}} x_{д(u)} y_{д(u)} + \frac{N_{д(u)}}{G_{д(u)}} y^2_{д(u)} \ge 1. \tag{1.118}$$

При построении индикатрисы кривизны выпукловогнутого локального участка поверхности $Д(И)$ с отрицательной гауссовой кривизной следует принимать во внимание с какой стороны поверхности располага-

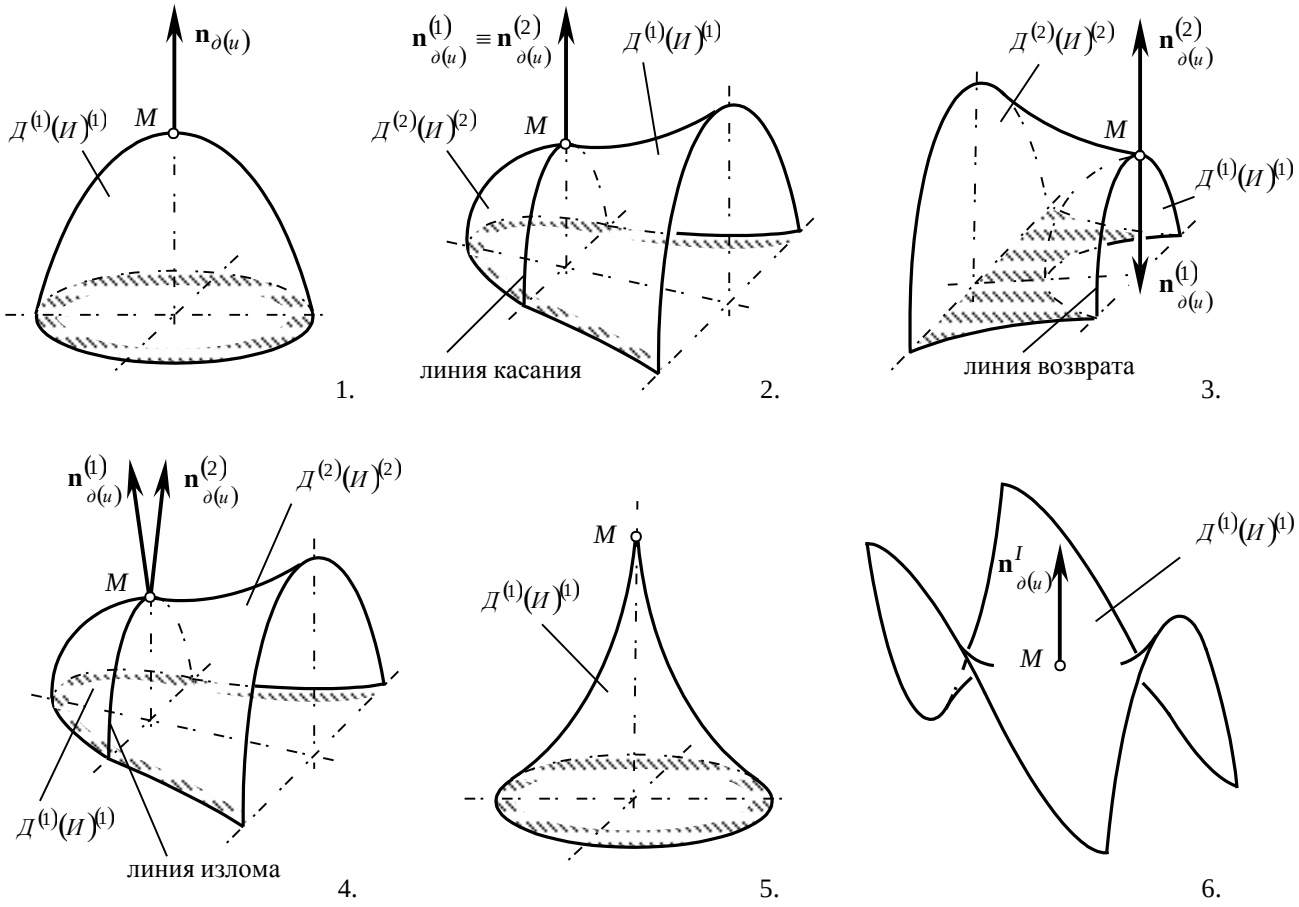


Рис. 1.34. Примеры локальных участков поверхностей $Д(И)$.

ется секущая плоскость.

Индикатриса кривизны поверхности $Д(И)$ является удобным инструментом для изучения строения локального участка поверхности $Д(И)$ в дифференциальной окрестности текущей точки на ней, при исследовании условий касания поверхностей $Д$ и $И$ и др., в связи с чем целесообразно шире использовать эту характеристическую кривую при решении задач формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

Изложенное дает основание при классификации гладких регулярных участков поверхностей $Д(И)$ сложной формы (рис. 1.34.1) ограничить их количество десятью (см. табл. 1.1).

Следует отметить, что на одной и той же поверхности $Д(И)$, в том числе и заданной одним уравнением, могут быть гладкие регулярные локальные участки как одного, так и разных типов. Например, на поверхности шарика шарикоподшипника имеются только омбилические гладкие регулярные локальные участки, на плоской поверхности детали – только локальные участки уплощения, а на поверхности $И$ в виде тора (рис. 1.35) одновременно имеются эллиптические (в том числе могут быть и омбилические), параболические и гиперболические гладкие регулярные локальные участки поверхности.

1.3.3.2. *Нерегулярные локальные участки поверхности* $Д(И)$ могут рассматриваться как локальные участки в дифференциальной окрестности точки M на линии сопряжения двух гладких регулярных локальных участков поверхностей $Д(И)$. В зависимости от вида сопряжения двух смежных локальных участков $Д^{(1)}(И^{(1)})$ и $Д^{(2)}(И^{(2)})$ различают:

1). *гладкие нерегулярные локальные участки* (рис. 1.34.2) – расположены в дифференциальной окрестности точек линии прямого касания двух гладких регулярных отсеков сложных поверхностей $Д(И)$, т.е. когда в дифференциальной окрестности точки на линии их сопряжения смежные отсеки расположены по обе стороны касательной к линии сопряжения (здесь и далее векторы единичных нормалей к каждому из сопрягаемых гладких регулярных отсеков $Д^{(1)}(И^{(1)})$ и $Д^{(2)}(И^{(2)})$ обозначены соответственно $\mathbf{n}^{(1)}_{\partial(u)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}_{\partial(u)}$. У гладких нерегулярных локальных участков поверхностей $Д(И)$ нормали $\mathbf{n}^{(1)}_{\partial(u)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}_{\partial(u)}$ совпадают одна с другой $(\mathbf{n}^{(1)}_{\partial(u)} \equiv \mathbf{n}^{(2)}_{\partial(u)})$;

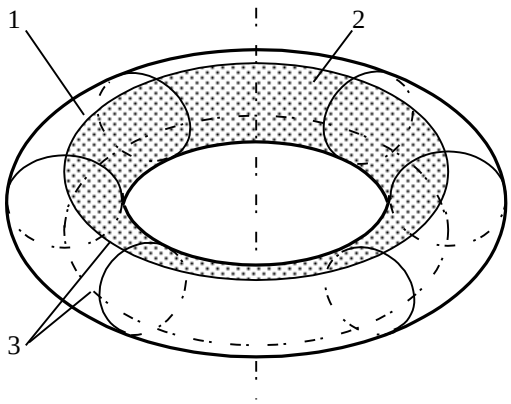


Рис. 1.35. Эллиптические (1), гиперболические (2) и параболические (3) гладкие регулярные локальные участки на поверхности тора.

2). *локальные участки возврата* (рис. 1.34.3) – расположены в дифференциальной окрестности точек линии обратного касания двух гладких регулярных отсеков сложных поверхностей $Д(И)$, т.е. когда в дифференциальной окрестности точки на линии их сопряжения смежные отсеки расположены по одну сторону касательной к линии сопряжения. У локальных участков возврата поверхностей $Д(И)$ нормали $\mathbf{n}^{(1)}_{\partial(u)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}_{\partial(u)}$) противоположно направленны $(\mathbf{n}^{(1)}_{\partial(u)} \equiv -\mathbf{n}^{(2)}_{\partial(u)})$;

3). *локальные участки излома* (рис. 1.34.4) – расположены в дифференциальной окрестности точек линии пересечения двух гладких регулярных отсеков сложных поверхностей $Д(И)$. Линия пересечения смежных отсеков поверхности $Д(И)$ является линией излома. У локальных участков излома нормали $\mathbf{n}^{(1)}_{\partial(u)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}_{\partial(u)}$) направлены под некоторым углом одна к другой;

4). *изолированные локальные участки* (рис. 1.34.5; рис. 1.34.6) расположены в дифференциальной окрестности изолированных (особых) точек на поверхности $Д(И)$: собственно особых точек гладких регулярных отсеков поверхностей: конических точек первого, второго и более высоких порядков (рис. 1.33.5); гладких изолированных точек[1] на поверхности $Д(И)$ (рис. 1.34.6); точек касания, точек пересечения или точек касания и пересечения одновременно трех и более гладких регулярных отсеков поверхностей $Д(И)$.

Другие классы локальных участков сложных поверхностей $Д(И)$ не известны, а любой из известных локальных участков поверхностей может быть отнесен к одному из перечисленных выше пяти классов локальных участков, образующих три их группы.

1.3.3.3. Обобщенная классификация локальных участков поверхностей $Д(И)$. Научная классификация должна удовлетворять сформулированным Костецким Б.И. (1984) требованиям, а именно: а) классификационный признак должен носить фундаментальный характер; б) классификация должна быть конструктивной; в) должна обладать универсальностью, состоящей в возможности включения в нее вновь открываемых объектов без изменения структуры классификации; г) в классификации должна быть потенциальная полнота.

Любая классификация характеризуется объектом классификации, классификационными признаками, а также последовательностью признаков, в соответствие с которой группируются классифицируемые объекты. Локальные участки сложных поверхностей $Д$ и $И$ удобно классифицировать по типу точек на этих поверх-

---

[1]Задаваемая уравнением вида $Z = Y^3 - 3YX^2$ (Koenderink, J.J., 1990, с.325) поверхность типа *"обезьянье седло"* (рис. 1.34.6) имеет гладкую изолированную точку *M* – точку уплощения, в которой все нормальные кривизны равны нулю. Индикатриса Дюпена этой поверхности в точке *M* не определена. Известные (Гильберт, Д., Кон-Фоссен, С., 1981) попытки представить индикатрису кривизны в виде трех сопряженных ветвей гиперболы ошибочны.

Для изолированных локальных участков гладких поверхностей деталей и инструментов индикатриса кривизны неинформативна. В таких случаях можно использовать индикатрисы кривизны более высоких порядков, например, используя разложение в ряд Тейлора с учетом слагаемых более высоких порядков – предела для увеличения порядка слагаемых нет.

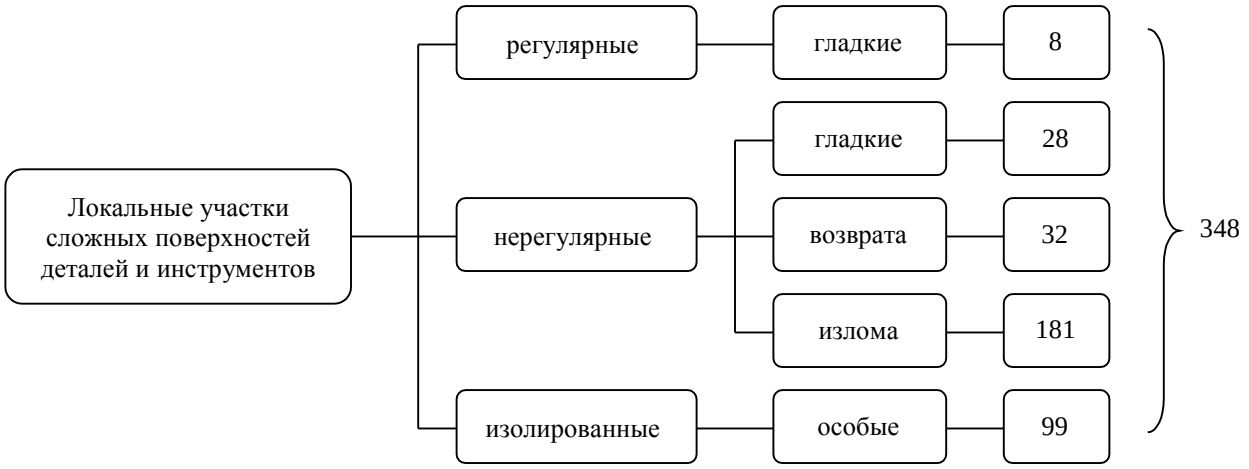


Рис. 1.36. Обобщенная классификация локальных участков поверхностей $Д$ деталей и исходных инструментальных поверхностей $И$.

ностях, в дифференциальных окрестностях которых они расположены. Точки на сложных поверхностях $Д(И)$ бывают регулярными, нерегулярными и изолированными – соответственно этому различаются регулярные, нерегулярные и изолированные локальные участки поверхности $Д(И)$.

Регулярные локальные участки $Д(И)$ бывают только гладкими регулярными.

Гладкие регулярные локальные участки расположены в дифференциальной окрестности гладких регулярных точек *M* на поверхности $Д(И)$, которые включают в себя в том числе и аналитические точки перегиба. Такого типа локальные участки поверхностей $Д(И)$ сложной формы (рис. 1.34.1) детально рассмотрены выше – их 8 видов (или 10, если дополнительно различать псевдовыпуклые, минимальные и псевдовогнутые локальные участки гиперболического типа на поверхности $Д(И)$).

Исследование каждого типа локальных участков поверхностей $Д(И)$ (Радзевич, С.П., 1988) показало, что общее количество их типов ограничено и равно:

10 (8)[1] (гладкие регулярные локальные участки)
+ 28 (гладкие нерегулярные локальные участки)
+ 32 (локальные участки возврата)
+ 181 (локальные участки излома)
+ 99 (особые локальные участки) = 348.

С учетом изложенного обобщения классификация локальных участков поверхностей $Д(И)$ приобретает вид (рис. 1.36).

Все типы локальные участков поверхности $Д(И)$ образованы из одного, двух или более гладких регулярных локальных участков. Следовательно, умея наивыгоднейшим образом формообразовывать гладкие регулярные локальные участки поверхности детали, можно эффективно формообразовать любую поверхность $Д$ вцелом. Это дает возможность ограничиться в дальнейшем рассмотрением только 10 типов гладких регулярных локальных участков, т.е. таких участков, которые расположены на гладких регулярных отсеках поверхностей деталей и инструментов.

Для нерегулярных и изолированных локальных участков поверхности $Д(И)$ дополнительно могут быть разработаны свои специфические способы формообразования, учитывающие особенности их строения и геометрической структуры.

[1] Общее количество типов локальных участков поверхностей деталей и инструментов подсчитано без учета различия между псевдовыпуклыми, минимальными и псевдовогнутыми локальными участками гиперболического типа. Локальные участки перечисленных типов рассматривались как локальные участки одного типа – как выпукловогнутые. Поэтому учтено не 10 (см. табл. 1.1), а 8 типов гладких регулярных локальных участков поверхностей деталей и инструментов.

Г л а в а 2. **Кинематика формообразования поверхностей деталей**

В процессе формообразующей обработки деталей механическое воздействие инструмента на твердое тело (на заготовку) всегда осуществляется при движении инструмента относительно заготовки. Это справедливо в отношение всех видов обработки поверхностей деталей.

Различают следующие виды движений инструмента относительно детали:

- установочные движения (они служат для перемещения инструмента в позицию, соответствующую началу обработки);
- движения резания (они необходимы для снятия операционного припуска или его части в виде стружки);
- движения холостых ходов (с их помощью производится подготовка для повторения рабочих проходов обработки);
- движения подачи (с их помощью перемещают инструмент для повторения рабочих ходов резания);
- формообразующие движения инструмента (обеспечивают генерирование поверхности детали во времени);
- транспортные движения: если деталь содержит несколько повторяющихся по форме поверхностей, то инструменту сообщают транспортное движение для перехода от обработки одной номинальной поверхности детали к другой ее поверхности.

Каждое движение инструмента осуществляется циклически: после завершения цикла инструмент возвращается в исходное положение. Цикл движения может осуществляться непрерывно или дискретно, без реверса (когда холостой ход отсутствует) или с реверсом, поочередно с другими движениями или одновременно с одним или несколькими из них. Дискретность циклов движения характеризуется моментами прерывания движения, реверс – моментами изменения знака скорости движения, очередность движений – числом циклов главного движения резания за время одного цикла данного движения, совмещение движений во времени – способами их совмещения (Лашнев С.И., Юликов М.И., 1980).

Движения детали и инструмента, совершаемые ими в процессе формообразующей обработки, являются предметом исследования теории формообразования поверхностей деталей.

Под *“формообразованием поверхностей”* в узком смысле, или под *собственно формообразованием поверхностей деталей*, понимается процесс генерирования номинальных (абсолютно точных) поверхностей деталей геометрически точным инструментом, который совершает номинальные рабочие движения относительно детали.

В широком смысле *формообразование поверхностей,* или *геометро-кинематический аспект технологии обработки поверхностей деталей*, изучает и другие вопросы геометрии поверхностей $Д(И)$ и их относительных движений, связанные с точностью формообразования номинальной поверхности $Д$, с образованием остаточного детерминированного регулярного микрорельефа на ней, с погрешностями формы, размеров, установки и движения инструмента относительно детали, с размерами срезаемых слоев при деформировании их в стружку, с некоторыми физико-механическими свойствами материала заготовки и инструмента, которые надежно прогнозируются и могут быть точно описаны аналитически.

Металлорежущие инструменты предназначены для обработки деталей разной формы и размеров. В процессе обработки режущий клин инструмента непрерывно или периодически внедряется в материал заготовки и срезает операционный припуск или его часть в виде стружки. При обработке резанием форма и размеры поверхности детали предопределяются формой и размерами режущих кромок, которыми инструмент срезает припуск и формообразует обрабатываемую поверхность $Д$ детали, а также характером и параметрами его движений относительно заготовки. Таким образом характер и параметры движений инструмента относительно детали (т.е. характер и параметры кинематики обработки) оказывают непосредственное влияние на форму, точность и качество обработанной поверхности детали, а также однозначно устанавливают

основные требования к управляющей программе при обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

Для полного использования потенциальных возможностей многокоординатных станков с ЧПУ необходимо уметь определять наивыгоднейшие виды и оптимальные значения параметров кинематики формообразования исходя из формы и параметров формообразуемой поверхности $Д$: чтобы кинематика формообразования была логическим следствием, функцией обрабатываемой поверхности детали.

Кинематика формообразования предопределяет основные закономерности относительных движений детали (заготовки) и инструмента, совершаемых ими в процессе обработки детали на металлорежущем станке.

Воспроизводимые металлорежущим станком относительные движения детали и инструмента представляют собой сумму простых (элементарных) движений разного характера, которые в свою очередь могут быть разложены на ряд по-разному ориентированных один относительно другого прямолинейно-поступательных и вращательных движений исполнительных органов металлорежущего станка.

Сложные движения детали и инструмента на станке осуществляются не только за счет сложения элементарных движений, но и запрограммированно: от копиров, линеек, кулачковых механизмов, (которые можно рассматривать как *жесткий* программоноситель) и от системы числового программного управления – имеющей *гибкий* программоноситель. Наиболее широкими потенциальными возможностями для воспроизведения сложных движений детали и инструмента обладают станки с 5-6 и более одновременно управляемыми от системы ЧПУ координатами. Поэтому рассмотрение кинематики обработки логично начать с общего случая, а именно с кинематики формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

2.1. Мгновенная принципиальная кинематическая схема многокоординатного формообразования поверхностей деталей

В процессе обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ инструмент относительно простой конструкции совершает относительно детали сложные движения. Поэтому в рассматриваемом случае речь следует вести о *кинематике формообразования*, но не о кинематической *схеме формообразования*.

При многокоординатной обработке сложных поверхностей деталей кинематическая схема формообразования как таковая не существует. Для текущего момента времени может быть построена только *мгновенная* кинематическая схема формообразования, которая представляет собой комбинацию инфинитезимальных перемещений инструмента относительно детали и может дополняться движением их поворота вокруг контактной нормали.

Рассматривая кинематический аспект обработки поверхностей деталей, помним, что в реальном процессе обработки всегда имеются движения подвода инструмента к заготовке, отвода его от обработанной поверхности детали и т.п. Эти и подобные движения непосредственно не оказывают влияния на процесс формообразования, они не охватываются понятием “*кинематика формообразования*” и поэтому здесь не рассматриваются.

Реальный процесс обработки поверхности детали всегда сопровождается колебательными движениями инструмента, как вызванными собственно вибрациями, неизбежно имеющими место при резании металлов, так и целенаправленно вводимыми его колебаниями. Такие движения инструмента здесь также не рассматриваются.

Кинематика формообразования определяет закономерности относительного движения детали и инструмента без учета физических явлений, протекающих в зоне обработки, действующих сил, температур и активных сред. Это хорошо согласуется с основным допущением в теории формообразования поверхностей деталей (см. выше, с. 22, допущение 1.1).

Изучая процесс формообразования, исходим из того, что заранее задана полная, исчерпывающая и однозначная информация о геометрии обрабатываемой поверхности $Д$. Может быть известна исходная инструментальная поверхность $И$ применяемого режущего инструмента (вопросу профилирования инструмента посвящена глава 5). На данном этапе поверхность $И$ инструмента и геометрическая информация о ней могут отсутствовать. Поэтому под движением исходной инструментальной поверхности $И$ понимается

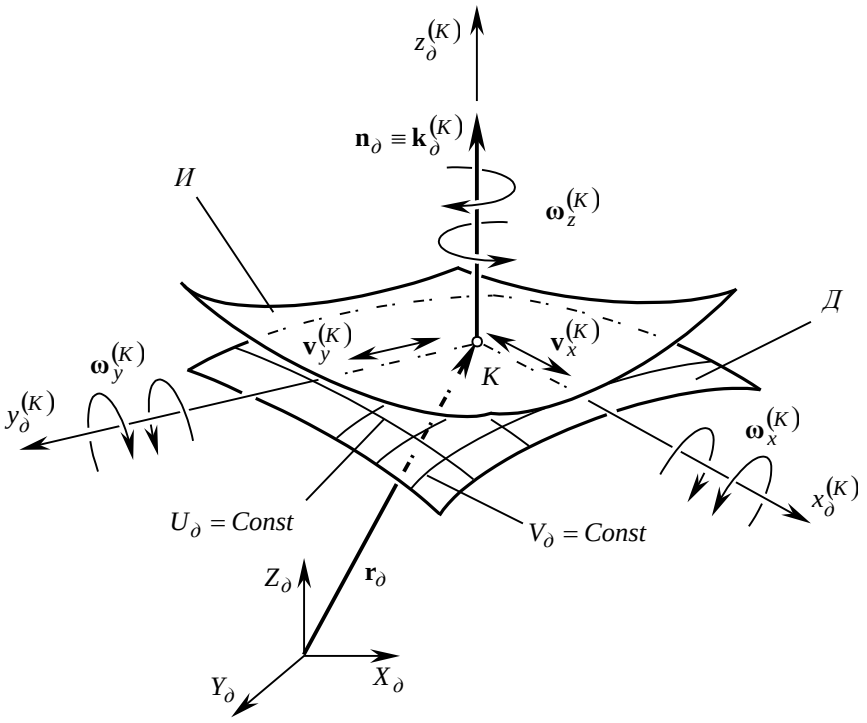


Рис. 2.1. Мгновенная принципиальная кинематическая схема многокоординатного формообразования поверхностей деталей.

либо движение собственно поверхности $И$ (если она известна), либо движение системы координат $X_u Y_u Z_u$, с которой впоследствие будет связан инструмент (если геометрическая информация о поверхности $И$ инструмента отсутствует).

Информация о поверхностях $Д$ и $И$ может быть задана, например, уравнением (1.7) поверхности $Д(И)$ в векторной форме:

$$\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}\left[U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right], \qquad \left[U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right] \in G. \tag{2.1}$$

Считаем, что кинематика многокоординатного формообразования потенциально полная, т.е. в процессе обработки может быть воспроизведено любое требуемое движение инструмента относительно детали.

Считаем также, что выполняются все условия формообразования поверхностей деталей (этот принципиально важный вопрос теории формообразования поверхностей также рассмотрен ниже – см. глава 7).

С целью упрощения аналитического описания процесса многокоординатного формообразования поверхностей деталей воспользуемся принципом инверсии, в соответствие с которым системе *"деталь-инструмент"* придадим движения со скоростями, равными по величине и противоположно направленными скоростям движений, которые совершает деталь в реальном процессе обработки. В результате этого деталь будет остановлена, а все движения, необходимые для ее обработки, будет совершать инструмент. При таком допущении неподвижной считается система координат, связанная с деталью.

Рассмотрим мгновенную принципиальную кинематическую схему многокоординатного формообразования поверхностей деталей (рис. 2.1).

В текущей точке K касания поверхности $Д$ детали с исходной инструментальной поверхностью $И$ (см. рис. 2.1) проведем контактную нормаль $\mathbf{N}_\partial$, орт $\mathbf{n}_\partial$ которой совпадает с ортом $\mathbf{k}_\partial^{(K)}$ оси аппликат $z_\partial^{(K)}$ локальной системы координат $x_\partial^{(K)} y_\partial^{(K)} z_\partial^{(K)}$. Если поверхность $Д$ в своей системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ задана

уравнением (1) в векторной форме, орт $\mathbf{k}_{\partial}^{(\kappa)}$ локальной подвижной системы координат может быть рассчитан по формуле вида (1.16):

$$\mathbf{k}_{\partial}^{(K)} \equiv \mathbf{n}_{\partial} = \left. \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial V_{\partial}}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \right|} \right|_{(K)} .$$

В качестве ортов $\mathbf{i}_{\partial}^{(K)}$ и $\mathbf{j}_{\partial}^{(K)}$ осей абсцисс $x_{\partial}^{(K)}$ и ординат $y_{\partial}^{(K)}$ системы координат $x_{\partial}^{(K)} y_{\partial}^{(K)} z_{\partial}^{(K)}$ используем орты касательных к координатным $U_{\partial}-$ и $V_{\partial}-$линиям. Орты $\mathbf{i}_{\partial}^{(K)}$ и $\mathbf{j}_{\partial}^{(K)}$ также могут быть найдены по формулам (1.16):

$$\mathbf{i}_{\partial}^{(\kappa)} = \left. \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial U_{\partial}}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \right|} \right|_{(K)} ; \qquad \mathbf{j}_{\partial}^{(K)} = \left. \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial V_{\partial}}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \right|} \right|_{(K)} .$$

Оси абсцисс и ординат локальной системы координат лежат в плоскости, касательной в точке K к поверхности $Д$. Эта координатная плоскость определяется так (1.11):

$$\left(\mathbf{r}_{\partial} - \mathbf{r}_{\partial}^{(K)} \right) \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \right|_{(K)} \times \left. \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \right|_{(K)} = 0 .$$

Две другие плоскости координат системы $x_{\partial}^{(K)} y_{\partial}^{(K)} z_{\partial}^{(K)}$ всегда будут нормальными секущими плоскостями поверхности $Д$ в точке K на ней. В случае, если они совпадают с главными секущими плоскостями $C_{1.\partial}^{(K)}$ и $C_{2.\partial}^{(K)}$, построенная локальная система координат будет трехгранником Дарбу. В противном случае будем иметь декартову систему координат, которая в общем случае не полностью ортогональна: оси $z_{\partial}^{(K)}$ и $x_{\partial}^{(K)}$, $z_{\partial}^{(K)}$ и $y_{\partial}^{(K)}$ всегда попарно взаимно ортогональны, тогда как угол между осями $x_{\partial}^{(K)}$ и $y_{\partial}^{(K)}$ в общем случае отличен от 90°. При ортогональной параметризации поверхности $Д$ обеспечить взаимную ортогональность осей координат $x_{\partial}^{(K)}$ и $y_{\partial}^{(K)}$ технически проще. Вопрос ортогонализации частично и полностью неортогональных декартовых систем координат рассматривается ниже (см. гл. 3.)

При рассмотрении конкретных задач многокоординатного формообразования поверхностей деталей часто приходится сталкиваться с альтернативой, а именно: что технически проще реализовать в программном обеспечении станка с ЧПУ – производить многократную ортогонализацию различных локальных систем координат или оперировать с частично не ортогональными локальными системами координат. Во многом решение этой альтернативной задачи определяется возможностями ЭВМ, которая используется для подготовки управляющих программ, возможностями системы ЧПУ металлорежущим станком, эффективностью применяемых математических методов ортогонализации систем координат и оперирования с частично либо полностью изогональными системами координат, эффективностью используемых алгоритмов и др. При этом не следует забывать, что используемая локальная система координат служит только системой отсчета. Поэтому независимо от ее выбора вопрос о наивыгоднейшей кинематике многокоординатного формообразования поверхностей деталей принципиально не меняется.

Поверхность $И$ вместе с твердым телом, носителем ее формы, может иметь в пространстве не более шести степеней свободы. Любое движение инструмента относительно детали в общем случае может быть

разложено не более, чем на шесть составляющих: на три поступательных и на три вращательных соответственно вдоль и вокруг осей некоторой системы координат.

Несложно видеть, что не все шесть потенциально возможных движений допускаются мгновенной принципиальной кинематической схемой многокоординатного формообразования поверхностей деталей (см. рис. 2.1). Поступательное движение инструмента вдоль оси $z_{\partial}^{(K)}$ следует исключить из рассмотрения по двум причинам. Во-первых, если допустить возможность существования такого движения в направлении от поверхности $Д$ детали, это неизбежно приведет к прерыванию касания поверхностей $Д$ и $И$, вследствие чего собственно процесс формообразования поверхности (в узком смысле) прекратится. Во-вторых, если допустить возможность существования такого движения в направлении на поверхность детали, это неизбежно приведет к недопустимому внедрению инструмента в обрабатываемую поверхность $Д$ и к появлению брака в обработке. Специальные случаи формообразующей обработки, когда нарушение рассматриваемого условия допускается, будут оговорены особо.

Таким образом скорость перемещения инструмента вдоль контактной нормали (см. рис. 2.1) должна равняться нулю:

$$\mathbf{v}_{z}^{(K)} = \frac{\partial z_{\partial}^{(K)}}{\partial t}\mathbf{k}_{\partial}^{(K)} = 0\,, \qquad (2.2)$$

где t – время.

Обозначим скорости поступательных перемещений вдоль осей координат $x_{\partial}^{(K)}$ и $y_{\partial}^{(K)}$ через $\mathbf{v}_{x}^{(K)}$ и $\mathbf{v}_{y}^{(K)}$. Тогда удобно ввести следующие обозначения скоростей поворотных $\boldsymbol{\omega}_{x}^{(K)}$, $\boldsymbol{\omega}_{y}^{(K)}$ и вращательного $\boldsymbol{\omega}_{z}^{(K)}$ движений вокруг осей системы координат $x_{\partial}^{(K)}y_{\partial}^{(K)}z_{\partial}^{(K)}$.

Очевидно, что мгновенная кинематическая схема многокоординатного формообразования допускает разложение любого перемещения инструмента относительно детали не более, чем на пять элементарных составляющих, осуществляемых со скоростями:

$$\mathbf{v}_{x}^{(K)} = \frac{\partial x_{\partial}^{(K)}}{\partial t}\mathbf{i}_{\partial}^{(K)} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial}^{(K)}}{\partial U_{\partial}\partial t}; \qquad \mathbf{v}_{y}^{(K)} = \frac{\partial y_{\partial}^{(K)}}{\partial t}\mathbf{j}_{\partial}^{(K)} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial}^{(K)}}{\partial U_{\partial}\partial t};$$

$$\boldsymbol{\omega}_{x}^{(K)} = \frac{\partial \varphi_{x}^{(K)}}{\partial t}; \qquad \boldsymbol{\omega}_{y}^{(K)} = \frac{\partial \varphi_{y}^{(K)}}{\partial t}; \qquad \boldsymbol{\omega}_{z}^{(K)} = \frac{\partial \varphi_{z}^{(K)}}{\partial t},$$

где $\varphi_{x}^{(K)}$, $\varphi_{y}^{(K)}$, $\varphi_{z}^{(K)}$ – углы поворота инструмента вокруг осей системы координат $x_{\partial}^{(K)}y_{\partial}^{(K)}z_{\partial}^{(K)}$ при его движении относительно детали.

Из изложенного следует, что за исключением движения $\boldsymbol{\omega}_{z}^{(K)}$ вокруг контактной нормали, которое может быть как поворотным, так и вращательным (иными словами, может осуществляться на произвольные по величине углы $\varphi_{z}^{(K)}$), остальные движения инструмента относительно детали (а именно движения $\mathbf{v}_{x}^{(K)}$, $\mathbf{v}_{y}^{(K)}$, $\boldsymbol{\omega}_{x}^{(K)}$) и $\boldsymbol{\omega}_{y}^{(K)}$) приводят к виртуальным перемещениям. Такими перемещениями принято называть элементарные перемещения на бесконечно малые расстояния. Точки механической системы *"деталь-инструмент"* могут совершать виртуальные перемещения из занимаемого в конкретный момент времени положения в другое положение, не нарушая при этом наложенных на эту систему связей.

Виртуальные перемещения относятся к геометрическим понятиям. Они определяются исключительно видом наложенных на систему *"деталь-инструмент"* связей и их следует рассматривать как характеристики этих связей, показывающие какие перемещения остаются для системы возможными. В рассматриваемом случае связью для точки K (см. рис. 2.1) является поверхность $Д$ обрабатываемой детали. Виртуальные

перемещения точки K будут отрезками элементарной длины $dx_{\partial}^{(K)}$, $dy_{\partial}^{(K)}$ и бесконечно малыми углами поворота $d\varphi_x^{(K)}$, $d\varphi_y^{(K)}$. Перемещение инструмента относительно детали в любом направлении либо будет виртуальным, когда его можно представить как сумму не более, чем четырех перечисленных виртуальных перемещений, либо не будет виртуальным, когда наложенная связь нарушается и точка K смещается с поверхности $Д$.

Понятие виртуальных перемещений относится как к покоящейся так и к движущейся точке K на поверхности $Д$ детали. Если наложенная на систему *"деталь-инструмент"* связь во времени не изменяется (а в процессе многокоординатного формообразования наложенные на систему *"деталь-инструмент"* связи сохраняются), то фактические виртуальные перемещения $dx_{\partial}^{(K)}$, $dy_{\partial}^{(K)}$, $d\varphi_x^{(K)}$, $d\varphi_y^{(K)}$ движущейся по поверхности $Д$ точки K в сумме совпадают с одним из реально возможных ее результирующих положений, в котором поверхность $И$ инструмента находится в допускаемом положении относительно поверхности $Д$ детали.

Использование понятия возможных перемещений полезно при составлении уравнения движений системы *"деталь-инструмент"*, при определении числа степеней свободы этой системы и др. Оно используется для составления полного описания процесса многокоординатной обработки сложных поверхностей деталей.

Важно обратить внимание на то, что мгновенная кинематическая схема многокоординатного формообразования поверхностей деталей (см. рис. 2.1) по сути своей имеет *дифференциальный* характер и ее следует рассматривать исключительно как локальную. В этом заключается ее принципиальное отличие от известных кинематических схем формообразования, в которых рассматриваются конечные величины перемещений и поворотов, линейных и угловых скоростей.

2.2. Формообразующие движения инструмента

Многокоординатное формообразование характерно тем, что обработка поверхности производится построчно. При этом движение инструмента вдоль строки формообразования является непрерывным следящим движением, а движение подачи инструмента на очередную строку формообразования – обычно дискретным следящим движением.

Огибание поверхности $Д$ детали поверхностью $И$ инструмента возможно только при линейном или точечном их касании. Здесь и далее под взаимоогибанием понимается возможность обеспечения касания двух поверхностей в каждой их точке без взаимного внедрения одной поверхности в другую.

Для взаимного огибания линейно касающихся поверхностей $Д$ и $И$ достаточно одной степени свободы в их относительном движении и, следовательно, одного параметра относительного движения. Для полного взаимоогибания точечно касающихся поверхностей $Д$ и $И$ необходимо иметь две степени свободы и, следовательно, два параметра относительного движения. В этом случае, задаваясь любыми сочетаниями двух независимых параметров и реализуя соответствующие таким случаям движения огибания, можно сделать контактной любую точку на поверхностях $Д$ и $И$.

Известные методы исключают возможность получения однозначного решения задач формообразования для случаев сочетания двух и более относительных движений поверхностей $Д$ и $И$. Бесконечное разнообразие способов многокоординатного формообразования заданной поверхности детали следует, в частности, из того, что параметры относительного движения поверхностей $Д$ и $И$ обычно определяются только из условия их правильного касания в момент формообразования поверхности $Д$. При этом в качестве основного условия требуется выполнения только условия контакта, определяемого уравнением контакта:

$$\mathbf{N}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = \mathbf{V}_{\Sigma} \cdot \mathbf{N}_{\partial(u)} = 0 , \tag{2.3}$$

где $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ – вектор контактной нормали;

$\mathbf{V}_{\Sigma}$ – вектор скорости результирующего движения точки K по поверхности $Д$ детали.

Геометрическая сущность уравнения контакта (3) заключается в том, что в момент формообразования в точках касания поверхностей *Д* и *И* скорость их относительного движения должна быть направлена касательно к обеим поверхностям, т.е. должна лежать в общей для поверхностей *Д* и *И* касательной плоскости.

Здесь полезно вспомнить известное положение из теории механизмов и машин, на котором основано доказательство теоремы Виллиса, а именно, что проекции скоростей контактирующих точек двух тел на общую нормаль, проведенную в точке их касания, должны быть одинаковы (в абсолютной системе координат) или равны нулю (если рассматриваются относительные движения двух тел).

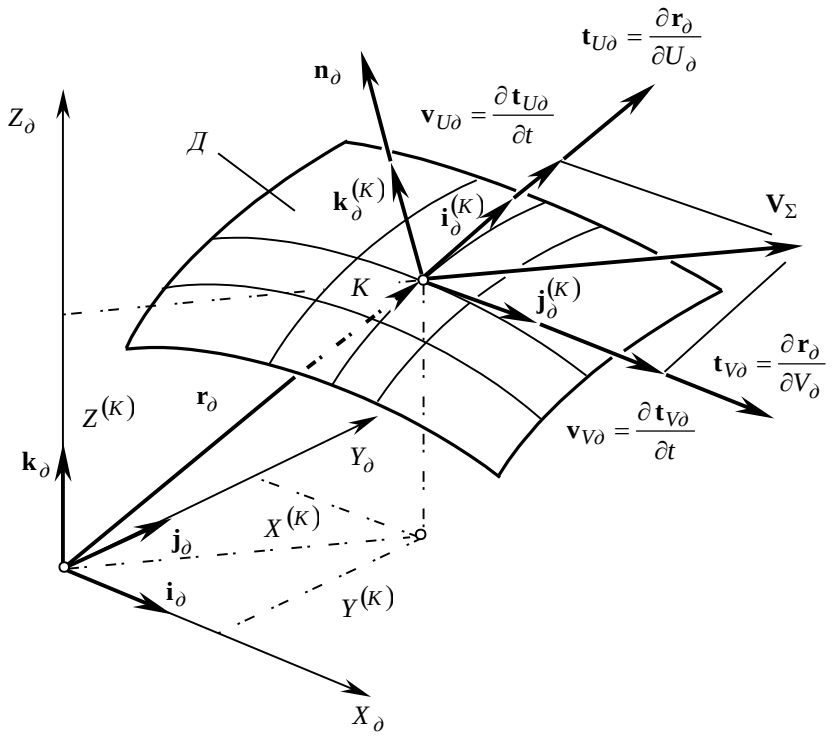


Рис. 2.2. К формообразующим движениям инструмента.

В подвижном репере с началом в текущей точке K на поверхности *Д* детали (рис. 2.2) вектор $\mathbf{V}_\Sigma$ результирующей скорости движения точки K относительно детали в общем случае можно записать в проекциях на оси координат так:

$$\mathbf{V}_\Sigma = \frac{\partial x_\partial^{(K)}}{\partial t}\mathbf{i}_\partial^{(K)} + \frac{\partial y_\partial^{(K)}}{\partial t}\mathbf{j}_\partial^{(K)} + \frac{\partial z_\partial^{(K)}}{\partial t}\mathbf{k}_\partial^{(K)}. \tag{2.4}$$

В той же системе координат $x_\partial^{(K)} y_\partial^{(K)} z_\partial^{(K)}$ орт $\mathbf{n}_\partial$ контактной нормали записывается так:

$$\mathbf{n}_\partial = |\mathbf{n}_\partial| \cdot \mathbf{k}_\partial^{(K)} = \mathbf{k}_\partial^{(K)}. \tag{2.5}$$

Подставив (4) и (5) в (3) с учетом (2), получим:

$$\mathbf{N}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{V}_\Sigma = \frac{\partial z_\partial^{(K)}}{\partial t} = 0. \tag{2.6}$$

Для выполнения условия (6) необходимо обеспечить равенство нулю проекции на контактную нормаль результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ движения инструмента относительно детали, т.е. расположить вектор $\mathbf{V}_\Sigma$ в координатной плоскости $x_\partial^{(K)} y_\partial^{(K)}$. Этим гарантируется выполнение условия (3).

Необходимо иметь ввиду, что наличие положительной составляющей скорости относительного движения инструмента и заготовки на направление контактной нормали $(\mathbf{V}_{отн} > 0)$ определяет условие предварительного срезания материала с заготовки. Равенство этой скорости нулю $(\mathbf{V}_{отн} = 0)$ (т.е. когда выполняется условие контакта (3)) соответствует моменту формообразования поверхности детали. Если же скорость $\mathbf{V}_{отн} < 0$, то режущие кромки инструмента отходят от обработанной поверхности детали.

Форма (6) записи уравнения контакта отражает инженерный подход. В дифференциальной геометрии используется иная форма ее записи

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial}(u)}{\partial U_{\partial}(u)} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial}(u)}{\partial V_{\partial}(u)}\right)}_{\mathbf{N}_{\partial}(u)} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial}(u)}{\partial \varphi_{\partial}(u)}}_{\mathbf{V}_{\Sigma}} = 0 .$$

Подвижная локальная система координат $x_{\partial}^{(K)} y_{\partial}^{(K)} z_{\partial}^{(K)}$ и неподвижная система координат детали $X_{\partial} Y_{\partial} Z_{\partial}$ в общем случае имеют различные начала координат и развернуты одна относительно другой вокруг трех координатных осей. Переход от локальной системы координат $x_{\partial}^{(K)} y_{\partial}^{(K)} z_{\partial}^{(K)}$ к системе координат детали может быть произведен при помощи оператора результирующего преобразования координат:

$$\mathbf{Res}\,(K \to Д) = \begin{bmatrix} \cos(\angle X_{\partial}, x_{\partial}^{(K)}) & \cos(\angle X_{\partial}, y_{\partial}^{(K)}) & \cos(\angle X_{\partial}, z_{\partial}^{(K)}) & X_{\partial}^{(K)} \\ \cos(\angle Y_{\partial}, x_{\partial}^{(K)}) & \cos(\angle Y_{\partial}, y_{\partial}^{(K)}) & \cos(\angle Y_{\partial}, z_{\partial}^{(K)}) & Y_{\partial}^{(K)} \\ \cos(Z_{\partial}, x_{\partial}^{(K)}) & \cos(\angle Z_{\partial}, y_{\partial}^{(K)}) & \cos(\angle Z_{\partial}, z_{\partial}^{(K)}) & Z_{\partial}^{(K)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

где $X_{\partial}^{(K)}, Y_{\partial}^{(K)}, Z_{\partial}^{(K)}$ – координаты текущей точки K на поверхности $Д$ детали, записанные в системе координат $X_{\partial} Y_{\partial} Z_{\partial}$.

При помощи оператора (7) вектор $\mathbf{V}_{\Sigma}$ результирующей скорости движения точки K по поверхности детали (4) и орт контактной нормали $\mathbf{n}_{\partial}$ в текущей точке K на поверхности $Д$ могут быть записаны в неподвижной системе координат $X_{\partial} Y_{\partial} Z_{\partial}$, связанной с деталью. Для этого уравнения (4) и (5) необходимо записать в виде матриц-столбцов, которые затем следует умножить слева на оператор $\mathbf{Res}\,(K \to Д)$. После выполнения необходимых преобразований получим:

$$\mathbf{V}_{\Sigma} = \frac{\partial X_{\partial}}{\partial t}\mathbf{i}_{\partial} + \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial t}\mathbf{j}_{\partial} + \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial t}\mathbf{k}_{\partial}; \tag{2.8}$$

$$\mathbf{n}_{\partial} = \frac{\partial(Y_{\partial}; Z_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\mathbf{i}_{\partial} + \frac{\partial(Z_{\partial}; X_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\mathbf{j}_{\partial} + \frac{\partial(X_{\partial}; Y_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\mathbf{k}_{\partial} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial U_{\partial}} & \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \\ \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial V_{\partial}} & \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \end{vmatrix}\mathbf{i}_{\partial} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial U_{\partial}} & \frac{\partial X_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \\ \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial V_{\partial}} & \frac{\partial X_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \end{vmatrix}\mathbf{j}_{\partial} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X_{\partial}}{\partial U_{\partial}} & \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \\ \frac{\partial X_{\partial}}{\partial V_{\partial}} & \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \end{vmatrix}\mathbf{k}_{\partial} =$$

$$= \left(\frac{\partial Y_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial V_{\partial}} - \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial U_{\partial}}\right)\mathbf{i}_{\partial} + \left(\frac{\partial Z_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \cdot \frac{\partial X_{\partial}}{\partial V_{\partial}} - \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \cdot \frac{\partial X_{\partial}}{\partial U_{\partial}}\right)\mathbf{j}_{\partial} + \left(\frac{\partial X_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \cdot \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial V_{\partial}} - \frac{\partial X_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \cdot \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial U_{\partial}}\right)\mathbf{k}_{\partial}. \tag{2.9}$$

Подставляя (8) и (9) в (3) после преобразований приходим к уравнению вида:

$$\left(\frac{\partial Y_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial V_{\partial}} - \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial U_{\partial}}\right)\frac{dX_{\partial}}{dt} + \left(\frac{\partial Z_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \cdot \frac{\partial X_{\partial}}{\partial V_{\partial}} - \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \cdot \frac{\partial X_{\partial}}{\partial U_{\partial}}\right)\frac{dY_{\partial}}{dt} + \left(\frac{\partial X_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \cdot \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial V_{\partial}} - \frac{\partial X_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \cdot \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial U_{\partial}}\right)\frac{dZ_{\partial}}{dt} = 0, \tag{2.10}$$

которое представляет собой общий вид развернутой дифференциальной формы записи уравнения контакта (3).

В зависимости от того, в какой системе координат: подвижной локальной или неподвижной, связанной с деталью либо со станком с ЧПУ, рассматриваются формообразующие движения инструмента, они должны удовлетворять уравнению контакта либо в форме (6) либо в форме (10).

Уравнение контакта играет важную роль в теории формообразования поверхностей деталей. Поэтому приведем еще две удобные в приложениях формы его записи:

$$\mathbf{N}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right) \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0 ;$$

$$\mathbf{N}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right) \cdot (\boldsymbol{\omega}_{\Sigma} \times \mathbf{r}) = 0 .$$

Положение вектора $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ контактной нормали в каждой точке поверхности $Д$ определено однозначно и изменять его направление, как правило, нельзя. Когда возможности управления положением нормали $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ имеются, они обычно ограниченны. Например, при обработке некоторых типов деталей из тонкостенных заготовок может применяться технологическое деформирование заготовки (рис. 2.3), которым заготовка переводится в технологическое состояние и которое снимается после завершения обработки детали. Перевод заготовки в технологическое состояние может производиться сосредоточенным усилием P, распределенной нагрузкой, путем теплового воздействия (нагрев-охлаждение), магнитным полем (магнитострикционный эффект), использованием материалов с “эффектом памяти” и др. Степень технологического деформирования может изменяться во времени (в процессе обработки).

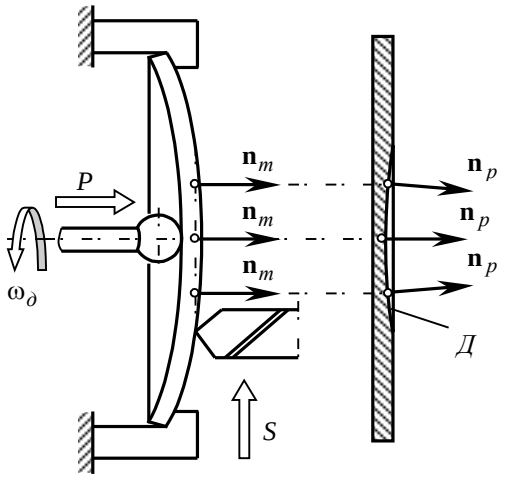


Рис. 2.3. Технологическое деформирование тонкостенной заготовки.

Возможности изменения положения нормали $\mathbf{N}_u$ к поверхности $И$ инструмента существенно шире, если применяются инструменты с изменяемой исходной инструментальной поверхностью (Родин П.Р. и др., 1986; Радзевич С.П., 1988).

Уравнению контакта (3) удовлетворяет любой i-й вектор скорости $\mathbf{V}_{\Sigma_i}$ результирующего относительного движения поверхностей $Д$ и $И$, лежащий в общей для этих поверхностей касательной плоскости. Отсюда очевидно, что условие контакта определяет кинематику многокоординатного формообразования поверхностей деталей неоднозначно. Его выполнение является необходимым, но не достаточным. Инструменту можно придать бесконечное множество различных по направлению движений относительно детали, в результате чего будет формообразована одна и та же поверхность $Д$. Однако эффективность обработки во всех случаях будет разной. Поэтому для синтеза наивыгоднейшей кинематики многокоординатного формообразования сложных поверхностей деталей выполнения только условия касания поверхностей $Д$ и $И$ не достаточно: оно необходимо, но не достаточно и должно быть дополнено критерием выбора из множества направлений $\mathbf{V}_{\Sigma_i}$ наивыгоднейшего направления вектора $\mathbf{V}_{\Sigma}$ скорости относительного движения детали и инструмент.

В процессе многокоординатного формообразования перемещение инструмента вдоль каждой строки формообразования (его непрерывное следящее движение формообразования) приводит к тому, что точка $К$ касания поверхностей $Д$ и $И$ перемещается по обрабатываемой поверхности детали. Исходя из этого сформулируем:

Определение 2.1. *Формообразующее движение инструмента – это такое его следящее движение относительно детали, в результате которого точка K касания поверхностей $Д$ и $И$ перемещается по обрабатываемой поверхности детали с некоторой непрерывной по величине скоростью.*

Движение подачи инструмента на очередную строку формообразования, которое также приводит к формообразованию поверхности $Д$ детали, является непрерывным или дискретным следящим движением инструмента:

Определение 2.2. *Движение подачи инструмента – это такое его формообразующее следящее движение относительно детали, в результате которого точка K касания поверхностей $Д$ и $И$ перемещается по обрабатываемой поверхности детали поперек строки формообразования.*

Формообразующие движения инструмента всегда удовлетворяют условию (3) касания поверхностей $Д$ и $И$. Они не могут быть устранены из цикла движения инструмента и осуществляются как с постоянными, так и с переменными скоростями. Формообразующие движения и движения резания, как и соответствующие им периоды времени формообразования и резания, могут следовать одно за другим (чередоваться) или совпадать одно с другим. Более того, одно и то же движение иногда служит как для резания, так и для формообразования в т.ч. и при несовпадающих периодах времени.

Мгновенная принципиальная кинематическая схема многокоординатного формообразования поверхностей деталей (см. рис. 2.1) дает ответ на вопрос о кинематике многокоординатного формообразования *"в малом"*: относительное движение детали и инструмента вдоль контактной нормали должно отсутствовать, а допустимыми являются только виртуальные относительные перемещения поверхностей $Д$ и $И$, совершаемые на бесконечно малые смещения $dx_{д}^{(K)}$, $dy_{д}^{(K)}$ и углы поворота $d\varphi_{x}^{(K)}$, $d\varphi_{y}^{(K)}$ вдоль и вокруг осей локальной системы координат $x_{д}^{(K)} y_{д}^{(K)} z_{д}^{(K)}$.

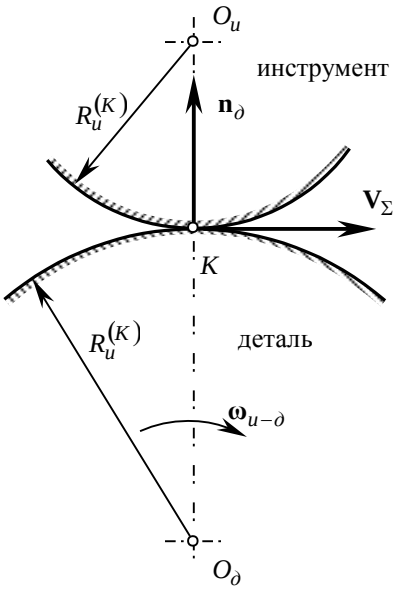


Рис. 2.4. Согласование элементарных движений в формообразующем движении инструмента.

Формообразующие движения детали и инструмента совершаются вдоль траекторий конечной длины и на углы конечной величины. Поэтому они не могут быть виртуальными, но могут быть получены из последних путем согласования между собой поступательных и поворотных виртуальных движений. Согласование указанных движений между собой должно быть таким, чтобы в соответствие с определениями 2.1. и 2.2. точка K перемещалась по поверхности $Д$ детали. Это будет достигнуто, когда в процессе обработки поверхность $И$ инструмента перекатывается со скольжением по обрабатываемой поверхности $Д$ детали. Поэтому виртуальные поступательные и поворотные движения следует попарно согласовать одно с другим в соответствие с соотношением (рис. 2.4):

$$\left|\mathbf{v}_{x}^{(K)}\right| = \left|\boldsymbol{\omega}_{y}^{(K)}\right| \cdot R_{д.x}^{(K)}; \tag{2.11}$$

$$\left|\mathbf{v}_{y}^{(K)}\right| = \left|\boldsymbol{\omega}_{x}^{(K)}\right| \cdot R_{д.y}^{(K)}, \tag{2.12}$$

где $R_{д.x}^{(K)}$ и $R_{д.y}^{(K)}$ – радиусы кривизны в точке K линий пересечения поверхности $Д$ детали плоскостями координат $x_{д}^{(K)} z_{д}^{(K)}$ и $y_{д}^{(K)} z_{д}^{(K)}$ соответственно.

Уравнения (11) и (12) могут быть переписаны в более удобной для рассматриваемого случая форме (см. рис. 2.4):

$$\left|\mathbf{V}_{\Sigma}^{(K)}\right| = \left|\boldsymbol{\omega}_{u\text{-}\partial}^{(K)}\right| \cdot R_{\partial}^{(K)},$$

где $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(K)}$ – скорость движения инструмента вдоль строки формообразования в точке K на поверхности детали;

$\boldsymbol{\omega}_{u\text{-}\partial}^{(K)}$ – вектор мгновенного вращательного движения поверхности $И$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости, проходящей через точку K вдоль вектора скорости $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(K)}$;

$R_{\partial}^{(K)}$ – радиус кривизны линии пересечения поверхности детали нормальнй плоскостью, направленной вдоль вектора скорости $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(K)}$.

Вектор результирующей скорости $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(K)}$ можно разложить по осям подвижного репера на две составляющие:

$$\mathbf{V}_{\Sigma}^{(K)} = \frac{\partial x_{\partial}^{(K)}}{\partial t}\mathbf{i}_{\partial}^{(K)} + \frac{\partial y_{\partial}^{(K)}}{\partial t}\mathbf{j}_{\partial}^{(K)}. \qquad (2.13)$$

Для выполнения условий (11) и (12) каждое слагаемое в уравнения (13) должно приводить к поступательному перемещению точки K по поверхности $Д$ детали – в противном случае такое элементарное движение инструмента не будет его формообразующим движением. Сформулированное условие будет выполнено, если

$$\frac{\partial x_{\partial}^{(K)}}{\partial t}\mathbf{i}_{\partial}^{(K)} = \boldsymbol{\omega}_{\partial,\,y} \cdot R_{\partial.x}^{(K)}; \qquad (2.14) \qquad \frac{\partial y_{\partial}^{(K)}}{\partial t}\mathbf{j}_{\partial}^{(K)} = \boldsymbol{\omega}_{\partial,\,y} \cdot R_{\partial.x}^{(K)}. \qquad (2.15)$$

С учетом (14) и (15) формула (13) преобразуется к виду

$$\mathbf{V}_{\Sigma}^{(K)} = \boldsymbol{\omega}_{\partial,\,y} \cdot R_{\partial.x}^{(K)} + \boldsymbol{\omega}_{\partial,\,x} \cdot R_{\partial.y}^{(K)}. \qquad (2.16)$$

Движения инструмента относительно детали, в каждый момент времени удовлетворяющие условию (16) и условию контакта, будут его формообразующими движениями.

Мгновенная принципиальная кинематическая схема многокоординатного формообразования сложных поверхностей деталей (см. рис. 2.1) исключает из рассмотрения относительные движения поверхностей $Д$ и $И$ вдоль контактной нормали не абсолютно. Если принять во внимание величину допуска на точность формообразования поверхности $Д$, то движение инструмента относительно детали вдоль контактной нормали не только допустимо, но и имеет место практически всегда: важно только, чтобы величина хода этого движения не приводила к смещению инструмента за пределы допуска на точность формообразования поверхности детали. Движение инструмента относительно детали вдоль контактной нормали учитываются при рассмотрении процесса формообразования поверхностей в широком понимании. Изложенное может быть учтено при составлении уравнений кинематического баланса относительного движения детали и инструмента в процессе обработки.

2.3. Ориентирующие движения инструмента

Формообразование сложной поверхности детали при точечном ее касании с исходной инструментальной поверхностью следует рассматривать как наиболее общий случай формообразования. Именно при точечном касании поверхностей $Д$ и $И$ потенциальные возможности кинематики формообразования на многокоординатном станке с ЧПУ реализуются наиболее полно.

Среди движений, охватываемых мгновенной принципиальной кинематической схемой многокоординатного формообразовавния сложных поверхностей деталей, можно выделить такие движения, в результате осуществления которых точка K не изменяет своего положения на поверхности $Д$ – движения такого типа не связаны со снятием операционного припуска. Они только изменяют ориентацию инструмента относительно детали. Отсюда следует:

Определение 2.3. *Движение ориентирования инструмента – это такое его движение относительно поверхности $Д$ детали, в результате которого точка K касания поверхностей $Д$ и $И$ не изменяет своего положения на поверхности детали.*

В результате осуществления относительного движения ориентирования инструмента точка K может занимать неизменное положение как на поверхностях $Д$ и $И$ одновременно, так и только на поверхности $Д$, изменяя при этом свое положение на поверхности $И$.

Будем различать движения ориентирования первого и второго рода:

Определение 2.4. *Движение ориентирования первого рода – это такое движение инструмента относительно поверхности $Д$ детали, в результате которого точка K касания поверхностей $Д$ и $И$ не изменяет своего положения как на поверхности детали, так и на поверхности инструмента.*

Определение 2.5. *Движение ориентирования второго рода – это такое движение инструмента относительно поверхности $Д$ детали, в результате которого точка K касания поверхностей $Д$ и $И$ не изменяет своего положения на поверхности $Д$ детали, но изменяет его на поверхности $И$ инструмента.*

Ориентирующие движения инструмента осуществляются с переменной скоростью, зависящей от характера изменения главных кривизн поверхностей $Д(И)$ в текущей точке K и скорости формообразующего движения инструмента (скорости его движения вдоль строки формообразования).

Из определений 2.4 и 2.5 следует, что движения ориентирования инструмента составляют группу относительных движений, не связанных со снятием операционного припуска (или его части) и с формообразованием поверхности $Д$ детали.

Чтобы выявить все виды относительных движений ориентирования, рассмотрим возможные группы относительных движений инструмента: как сингулярных, состоящих из одного элементарного движения, так и комбинированных, состоящих из двух и более элементарных движений.

Количество N_i движений в каждой группе равно числу сочетаний из пяти элементарных движений по i, где $i = 1, 2, \dots, 5$. Использование элементов комбинаторики позволяет подсчитать общее количество относительных движений инструмента, охватываемых мгновенной принципиальной кинематической схемой многокоординатного формообразования (см. рис. 2.1). Оно составляет:

$$N = \sum_{i=1}^{5} N_i = \sum_{i=1}^{5} C_5^i = 31. \qquad (2.17)$$

Усечение множества полученных (17) решений производится при помощи оценочных функций. Выполненный анализ каждого из 31 относительных движений инструмента в каждой из пяти групп показал, что движениями ориентирования инструмента могут быть только следующие элементарные движения и их сочетания:

1-я группа: $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}\}$;

2-я группа: $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$; $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \mathbf{v}_{\partial.x}\}$;

3-я группа: $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$; $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}\}$;

4-я группа: $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$;

5-я группа: $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$.

Таким образом движениями ориентирования инструмента являются:

- одно сингулярное движение ориентирования;
- шесть комбинированных движений ориентирования инструмента.

Движением ориентирования первого рода является единственное сингулярное движение $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}\}$.

Все комбинированные движения ориентирования инструмента относятся к движениям ориентирования второго рода. Наиболее общим из них является движение ориентирования $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$ – остальные движение ориентирования инструмента представляют собой частные случаи ориентирующего движения $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$. Комбинированные ориентирующие движения $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$ и $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \mathbf{v}_{\partial.x}\}$ можно также рассматривать либо как частные случаи комбинированных движений $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$ и $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}\}$ соответственно, либо как частные случаи одного комбинированного ориентирующего движения инструмента $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$. В свою очередь ориентирующие движения инструмента $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$, $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}\}$ и $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$ являются частными случаями обобщенного комбинированного ориентирующего движения $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$.

Составляющие комбинированное ориентирующее движение инструмента элементарные движения вдоль и вокруг осей абсцисс и ординат (см. рис. 2.1) должны быть попарно согласованы между собой: поворотное движение $\boldsymbol{\omega}_x^{(K)}$ вокруг оси абсцисс $x_{\partial}^{(K)}$ с поступательным движением $\mathbf{v}_y^{(K)}$ вдоль оси ординат $y_{\partial}^{(K)}$ и поворотное движение $\boldsymbol{\omega}_y^{(K)}$ вокруг оси ординат с $y_{\partial}^{(K)}$поступательным движением $\mathbf{v}_x^{(K)}$ вдоль оси абсцисс $x_{\partial}^{(K)}$. Эти элементарные движения согласовываются между собой так, чтобы в каждом нормальном сечении, проходящем через точку K, поверхность $И$ инструмента перекатывалась со скольжением по поверхности $Д$ детали, а точка K при этом не изменяла своего положения на поверхности $Д$. В противном случае элементарные относительные движения могут быть только виртуальными и не будут движениями ориентирования инструмента. Во избежание этого необходимо обеспечить выполнение следующего условия.

Движение инструмента можно рассматривать как поступательное с мгновенной скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$ и поворотное с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\partial\text{-}u}$. Чтобы это движение было ориентирующим движением второго рода, оно должно приводить поверхность $И$ к скольжению по поверхности $Д$ так, чтобы точка K (рис. 2.5) не изменяла своего положения на поверхности $Д$. Для этого достаточно, чтобы в каждый момент времени выполнялось условие

$$\frac{|\mathbf{V}_\Sigma|}{|\boldsymbol{\omega}_{\partial\text{-}u}|} = R_u^{(K)}, \qquad (2.18)$$

где $\boldsymbol{\omega}_{\partial\text{-}u}$ – вектор скорости мгновенного поворотного движения инструмента вокруг оси O_u, перекрещивающейся с вектором $\mathbf{V}_\Sigma$ под прямым углом;

$R_u^{(K)}$ – радиус кривизны нормального сечения поверхности $И$ инструмента плоскостью, перпендикулярной оси O_u поворотного движения (нормальной секущей плоскостью, проходящей через вектор $\mathbf{V}_\Sigma$).

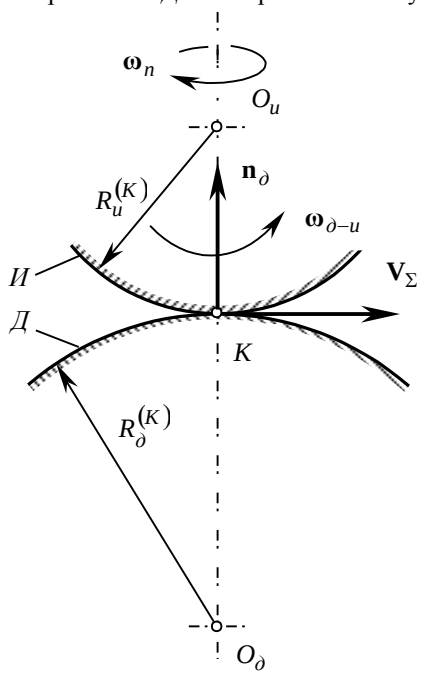


Рис. 2.5. Согласование элементарных движений в ориентирующем движении второго рода.

Вектор скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ можно разложить по осям локальной системы координат $x_\partial^{(K)} y_\partial^{(K)} z_\partial^{(K)}$ на две составляющие (см. рис. 2.1):

$$\mathbf{V}_\Sigma = \frac{\partial x_\partial^{(K)}}{\partial t}\mathbf{i}_\partial^{(K)} + \frac{\partial y_\partial^{(K)}}{\partial t}\mathbf{j}_\partial^{(K)}. \tag{2.19}$$

Для выполнения условия (18) каждое слагаемое в уравнении (19) должно обеспечивать скольжение поверхности $И$ по поверхности $Д$ так, чтобы точка K не изменяла своего положения на поверхности детали. Поставленное условие будет выполнено, если:

$$\frac{\partial x_\partial^{(K)}}{\partial t}\mathbf{i}_\partial^{(K)} = \boldsymbol{\omega}_{\partial.y} \cdot R_{u.x}^{(K)}; \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial y_\partial^{(K)}}{\partial t}\mathbf{j}_\partial^{(K)} = \boldsymbol{\omega}_{\partial.x} \cdot R_{u.y}^{(K)}, \tag{2.21}$$

где $R_{u.y}^{(K)}$ и $R_{u.x}^{(K)}$ – радиусы кривизны сечений поверхности $И$ координатными плоскостями $x_\partial^{(K)} z_\partial^{(K)}$ и $y_\partial^{(K)} z_\partial^{(K)}$;

$\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}$ и $\boldsymbol{\omega}_{\partial.y}$ – угловые скорости поворотных движений инструмента вокруг осей координат $x_\partial^{(K)}$ и $y_\partial^{(K)}$.

С учетом (20) и (21) формула (19) примет вид:

$$\mathbf{V}_\Sigma = \boldsymbol{\omega}_{\partial.x} \cdot R_{u.y}^{(K)} + \boldsymbol{\omega}_{\partial.y} \cdot R_{u.x}^{(K)}. \tag{2.22}$$

Если некоторое движение инструмента относительно детали удовлетворяет условию (22), то оно является его движением ориентирования второго рода.

Кроме перечисленных выше семи движений ориентирования инструмента других их видов нет и быть не может.

Движения ориентирования инструмента можно классифицировать следующим образом (рис. 2.6).

Существует единственное ориентирующее движение первого рода $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}\}$.

Шесть движений ориентирования второго рода можно разделить на простые, раскладывающиеся на составляющие $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$, $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \mathbf{v}_{\partial.x}\}$ и $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$, и комбинированные, дополнительно содержащие ориентирующее движение первого рода: $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$, $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}\}$ и $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$. Как простые, так и комбинированные ориентирующие движения второго рода первых двух типов могут рассматриваться как частные случаи ориентирующего движения третьего типа, соответственно простого и комбинированного. Исходя из этого на рис. 2.6 эта связь показана пунктиром. Очевидно, что простые движения ориентирования второго рода являются частным случаем комбинированных ориентирующих движений второго рода.

Количество элементарных движений, составляющих комбинированное движение ориентирования, показывает взаимосвязь различных ориентирующих движений инструмента (рис. 2.7). С этой точки зрения наиболее общим движением ориентирования также будет движение $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.x}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.y}, \boldsymbol{\omega}_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$, состоящее из пяти элементарных движений. Остальные движения ориентирования состоят из четырех, трех, двух или одного элементарного движения. Их можно рассматривать как поэтапное вырождение обобщенного

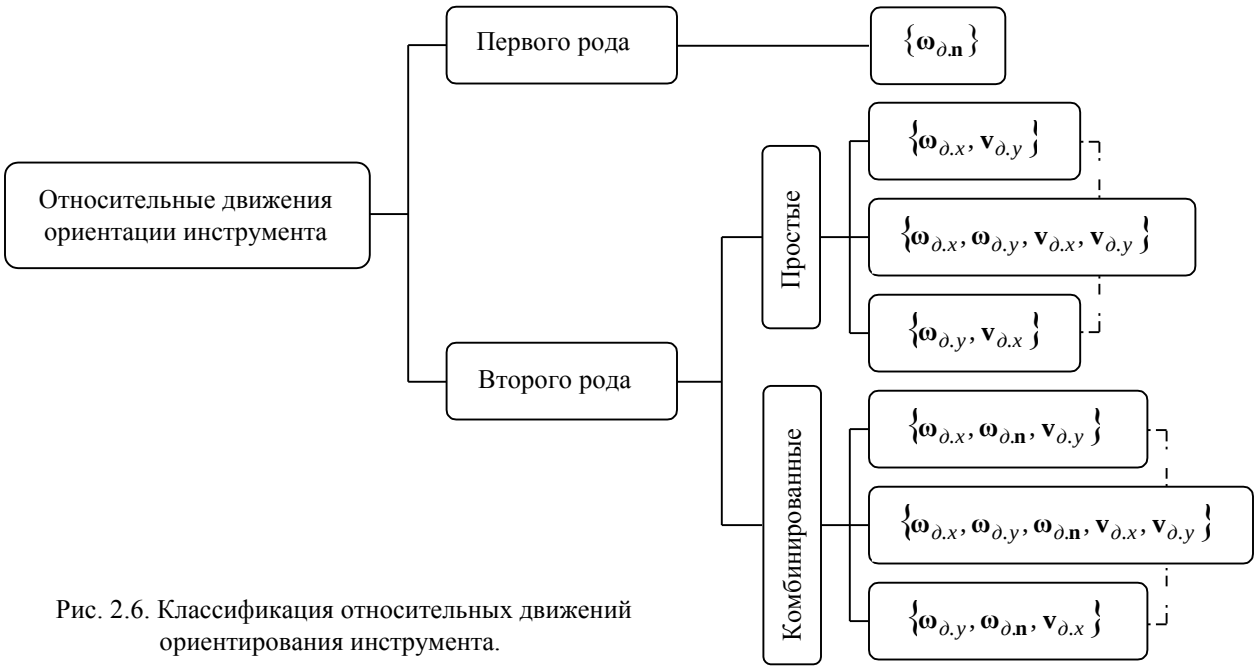


Рис. 2.6. Классификация относительных движений ориентирования инструмента.

ориентирующего движения $\{\omega_{\partial.x}, \omega_{\partial.y}, \omega_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$ в более простые движения ориентирования инструмента.

Могут иметь место случаи, когда некоторые из составляющих комбинированного движения ориентирования инструмента отсутствуют или не изменяют его ориентацию относительно детали. Это имеет место, например, в случае, когда составляющая относительного движения инструмента приводит его поверхность $И$ к движению *"самой по себе"*. При изучении процесса формообразования поверхностей деталей такие движения можно не учитывать.

Вид аналитического представления комбинированного относительного движения ориентирования инструмента связан с характером (U_∂, V_∂)– параметризации поверхности детали. Если рассматривать процесс формообразования поверхности $Д$ локально: в дифференциальной окрестности текущей точки K на ней, то путем изменения характера параметризации поверхности $Д$ обобщенное комбинированное ориентирующее движение вида $\{\omega_{\partial.x}, \omega_{\partial.y}, \omega_{\partial.\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\partial.x}, \mathbf{v}_{\partial.y}\}$ может быть сведено к одному из его частных видов (см. рис. 2.5). Для этого достаточно ось абсцисс или ось ординат локальной системы координат $x_\partial^{(K)} y_\partial^{(K)} z_\partial^{(K)}$ совместить с осью мгновенного поворотного движения инструмента относительно детали.

При *"жесткой"* кинематике формообразования движения ориентирования инструмента непосредственно реализовать нельзя – в этом случае они всегда вырождаются в *конструктивные движения ориентирования*, когда ориентацию инструмента относительно детали можно изменять только путем изменения конструктивных параметров инструмента. Вырождение движений ориентирования инструмента в конструктивные движения аналогично вырождению в конструктивные: движения подачи у протяжек и метчиков, движения обкатки у червячных фрез и др.

Мгновенная принципиальная кинематическая схема многокоординатного формообразования сложных поверхностей деталей включает пять движений формообразования, осуществляемых инструментом относительно детали. Поэтому поверхность $Д$ можно представить как огибающую последовательных положений пятипараметрического семейства поверхностей $И$. Поскольку ориентирующие движения инструмента не изменяют положения контактной точки K на обрабатываемой поверхности детали, то при выполнениее условий формообразования (что является обязательным) они не оказывают влияния на форму и параметры номинальной поверхности $Д_H$ детали, но определяют ее реальную поверхность $Д_P$, рассматри-

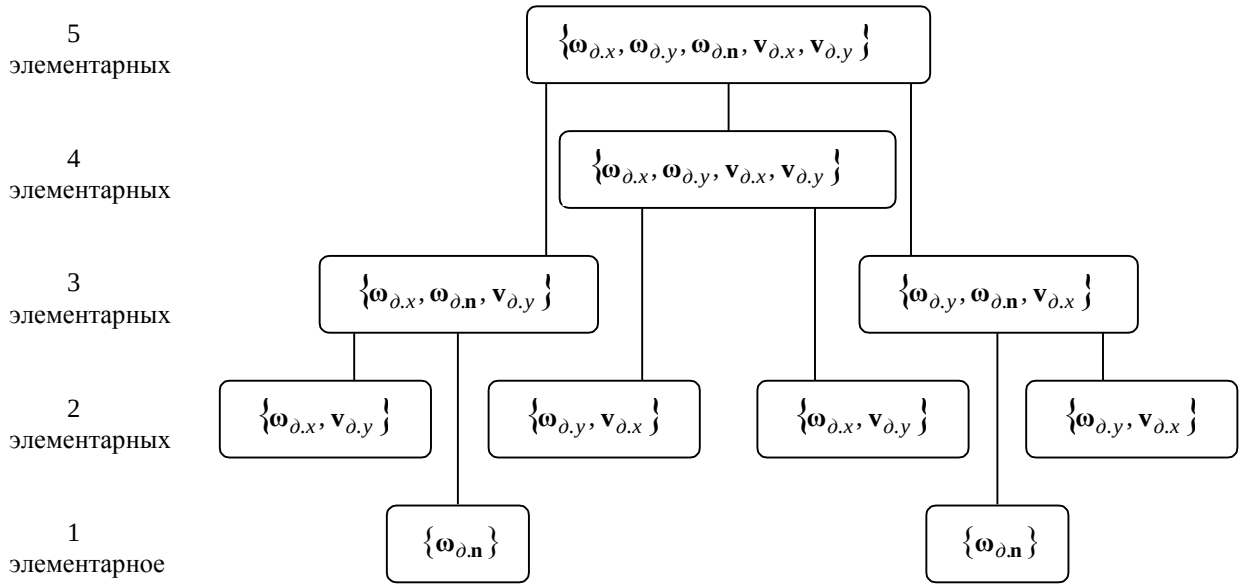


Рис. 2.7. Взаимосвязь относительных движений ориентирования инструмента.

ваемую с учетом остаточного детерминированного регулярного микрорельефа на $Д$. Следовательно при определении поверхности $Д$ как огибающей последовательных положений поверхности $И$ инструмента в ее многопараметрическом движении относительно детали ориентирующие движения инструмента можно не учитывать.

Поверхность $Д$ детали можно рассматривать как пространство двух измерений. Поэтому для полного ее формообразования может быть достаточно двухпараметрического движения поверхности $И$ инструмента относительно детали. В этом отношении представляет интерес возможность использования подхода (Chen, C. H., 1997), позволяющего представить любое относительное движение двух сопряженных поверхностей в виде суммы двух движений – это требует проведения дополнительных исследований. Для упрощения преобразований и расчетов целесообразно стремиться таким образом складывать и раскладывать относительные движения детали и инструмента, чтобы минимизировать количество параметров огибания и в пределе свести их не более, чем к двум простым параметрам.

Введение в кинематику формообразования движений ориентирования инструмента расширяет возможности управления собственно процессом многокоординатного формообразования и в то же время позволяет изменять площадь взаимодействия инструмента с обрабатываемой заготовкой, управлять полнотой прилегания поверхности $И$ к поверхности $Д$ и таким путем достичь наибольшей (при прочих одинаковых условиях) эффективности формообразования. Благодаря этому появляется возможность управлять количеством режущих кромок, одновременно срезающих припуск, суммарной длиной их активной части, величиной и характером распределения давления при обработке деталей методами ППД и др.

Предлагаемый подход к разработке технологии обработки сложных поверхностей деталей предусматривает установление наивыгоднейших значений параметров кинематики формообразования. Для реализации требуемой кинематики формообразования относительные движения детали и инструмента следует разложить на составляющие с учетом потенциальных возможностей кинематики конкретного металлорежущего станка, т.е. разложить относительные движения детали и инструмента на те движения, которые воспроизводятся исполнительными механизмами станка с ЧПУ.

2.4. Движения поверхностей детали и инструмента, приводящие их к перемещению *"самих по себе"*

Детали, рабочие поверхности которых допускают движение *"самих по себе"*, получили широкое распространение в промышленности. Это вызвано тем, что по сравнению с другими такие поверхности обладают важными технологическими и эксплуатационными преимуществами. Если поверхность $Д(И)$ перемещается в направлении, в котором она допускает движение *"самой по себе"*, условия ее касания с сопряженными поверхностями остаются неизменными. Поверхность $Д(И)$ рассматриваемого вида может быть образована движением практически любой линии, лежащей на ней.

Различают *движения*, которые приводят поверхности $Д(И)$ некоторых видов к перемещению *"самих по себе"*, и *поверхности* $Д(И)$ определенного класса, обладающие свойством допускать перемещение *"самих по себе"*. В рассматриваемом ниже аспекте эти понятия эквивалентны друг другу.

Воспроизведение движений, приводящих поверхности $Д(И)$ к движению *"самих по себе"*, как правило, не вызывает затруднений. На металлорежущем станке такие движения воспроизводятся за счет скрытых связей (Решетов Д.Н., Портман В.Т., 1986). Формальным признаком движений скрытых связей служит наличие среди частных производных $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial \omega_i}$ вектора $\mathbf{r}_{\partial(u)}$ пар коллинеарных или троек компланарных векторов (здесь обозначено: $\mathbf{r}_{\partial(u)}$ – радиус-вектор текущей точки поверхности $Д(И)$, а ω_i – i-й параметр огибания, $i = 1, 2, \ldots, n$, – целое положительное число, равное количеству параметров огибания).

Широкое применение на практике поверхностей $Д(И)$, допускающих движение *"самих по себе"*, послужило причиной появления первоначально интуитивного представления о поверхностях такого типа. Затем было введено (Радзевич С.П., 1988, 1991):

Определение 2.6. *Поверхность Д(И), допускающая движение "самой по себе" – это поверхность, для которой можно указать одно- или многопараметрическое движение, в результате воспроизведения которого огибающая к последовательным положениям движущейся поверхности $Д(И)$ конгруэнтна самой этой поверхности.*

Принимая во внимание большую практическую ценность поверхностей $Д(И)$, допускающих движение *"самих по себе"*, целесообразно выявить абсолютно все возможные их виды – это позволит расширить круг технологически удобных поверхностей $Д(И)$. Если поверхности рассматриваемого типа исчерпываются известными, а именно: винтовыми поверхностями постоянного шага, цилиндрами (призмами) общего вида, поверхностями вращения общего вида и их частными случаями – однозначно доказать это, прекратить заведомо бесперспективные поиски поверхностей $Д(И)$ рассматриваемого типа, а внимание сосредоточить на совершенствовании методов использования известных их типов.

Доказано (Радзевич С.П., 1988), что к поверхностям $Д(И)$, допускающим движение *"самих по себе"*, относятся только винтовые поверхности постоянного шага с недеформируемой (фиксированной формы) образующей, а также их частные типы: цилиндры (призмы) общего вида и поверхности вращения общего вида. Первые можно рассматривать как винтовые поверхности с шагом винта, равным бесконечности, а вторые – как винтовые поверхности с шагом винта, равным нулю. Более частными случаями поверхностей $Д(И)$, допускающих движение *"самих по себе"*, являются круглые цилиндры, торы, сферы, плоскость (рис. 2.8). Полученные результаты являются строгими и однозначными. Они позволили, в частности, ввести еще одно определение понятия "поверхность $Д(И)$, допускающая движение *"самой по себе"*":

Определение 2.7. *Поверхность Д(И), допускающая движение "самой по себе" – это поверхность, для которой существуют группы движений, относительно которых эта поверхность инвариантна.*

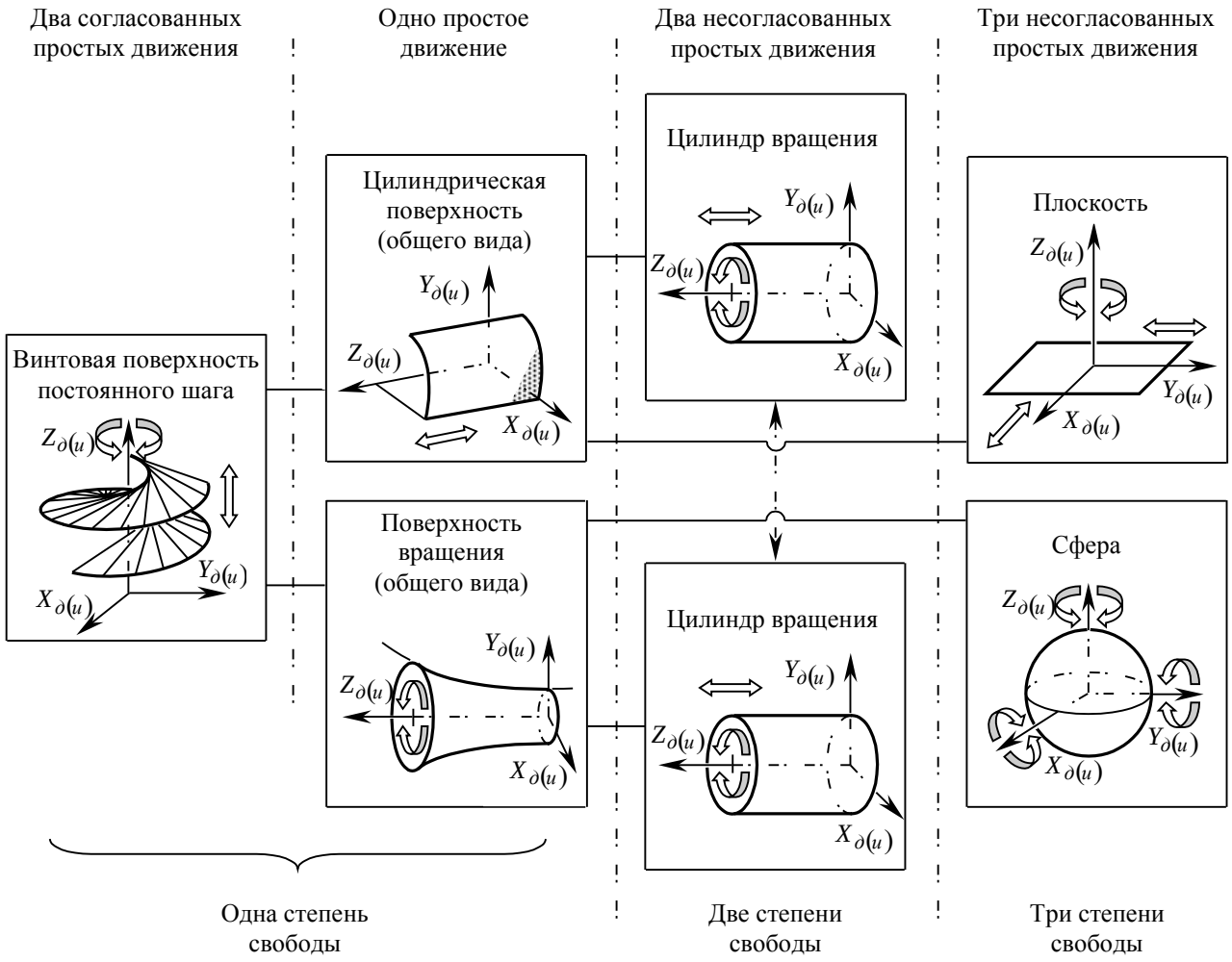


Рис. 2.8. Поверхности деталей и инструментов, инвариантные относительно группы движений (поверхности $Д(И)$ допускающие движение *"самих по себе"*).

В соответствие с основной теоремой теории поверхностей (теорема Бонне) гауссовы коэффициенты $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ первой $\Phi_{1.\partial(u)}$ и $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$, $N_{\partial(u)}$ второй $\Phi_{2.\partial(u)}$ основных квадратичных форм поверхности $Д(И)$ определяют ее с точностью до положения и ориентации в пространстве. Следовательно, логично предположить, что для поверхностей $Д(И)$, допускающих движение *"самих по себе"*, должны существовать состоящие из коэффициентов $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ и $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$, $N_{\partial(u)}$ аналитические критерии, по которым можно сделать вывод о том, допускает заданная поверхность $Д(И)$ движение *"самой по себе"*, или нет.

Для каждого вида поверхностей $Д(И)$, допускающих движение *"самих по себе"*, из коэффициентов $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ первой $\Phi_{1.\partial(u)}$ и $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$, $N_{\partial(u)}$ второй $\Phi_{2.\partial(u)}$ ее основных квадратичных форм составлены (Радзевич С.П., Петренко, Т.Ю., 1999) аналитические критерии, в соответствие с которыми можно сделать вывод о том, относится ли данная поверхность $Д(И)$ к рассматриваемому классу поверхностей и, если да, то к какому конкретному виду поверхностей следует ее отнести. Эти аналитические критерии отражают следующие свойства поверхности:

- для винтовых поверхностей шаг винта постоянен, образующая поверхности имеет постоянную форму и в любом своем положении одинаково ориентирована относительно винтовых линий;
- для поверхностей вращения общего вида шаг винта не только постоянен, но и равен нулю, средняя кривизна $\tilde{M}_{\partial(u)}$ может принимать любое значение, тогда как полная (гауссова) кривизна в общем случае $\tilde{G}_{\partial(u)} \neq 0$ (за исключением круглого цилиндра и параболических линий на поверхности вращения общего вида);
- для цилиндрических (призматических) поверхностей общего вида шаг винта не только постоянен, но и равен ∞, средняя кривизна $\tilde{M}_{\partial(u)}$ может принимать любое значение, а гауссова кривизна $\tilde{G}_{\partial(u)} = 0$.

Для частных случаев поверхностей $Д(И)$ (круглый цилиндр, сфера, плоскость) накладываются дополнительные частные ограничения.

2.5. Кинематические схемы формообразования

Кинематика резания является основой всего множества принципиально возможных технологических схем обработки, соответствующих им видов и типов исходных инструментальных поверхностей. Наряду с формой и параметрами поверхностей $Д(И)$ кинематические схемы формообразования предопределяют основную часть кинематической структуры металлорежущего станка.

"Жесткая" (с фиксированными параметрами) кинематика формообразования реализуется на универсальных и специальных станках, станках-автоматах и полуавтоматах. Различные ее варианты могут рассматриваться как частные случаи кинематики многокоординатного формообразования, которая воспроизводится на станках с ЧПУ.

Чтобы выявить все возможные принципиальные кинематические схемы резания, приемлемые для обработки заданной поверхности $Д$ детали, первоначально устанавливают все возможные принципиальные кинематические схемы ее формообразования, которые затем трансформируют в кинематические схемы резания: путем дополнения движениями, необходимыми для обеспечения рационального режима работы инструмента, и разложения относительных движений детали и инструмента на составляющие, которые воспроизводятся исполнительными органами металлорежущего станка.

В отличие от кинематической схемы резания, которая включает в себя *абсолютные* движения, совершаемые заготовкой и инструментом в процессе обработки, под кинематической схемой формообразования понимается совокупность *относительных* движений детали и инструмента, необходимых для придания поверхности $Д$ формы и размеров в полном соответствии с требованиями чертежа. Кинематические схемы резания содержат только абсолютные движения детали и инструмента и могут не содержать движений, которые приводят поверхность $И$ инструмента к движению *"самой по себе"*.

Считаем справедливым принцип инверсии, в соответствие с которым останавливаем деталь и фиксируем ее положение в пространстве. Движения, совершаемые в процессе обработки самой деталью, сообщаем инструменту – с той же скоростью, но в противоположном направлении. В результате поверхность $И$ будет перемещаться относительно неподвижной поверхности $Д$.

Для синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали необходимо обеспечить возможность перемещения инструмента по поверхности $Д$ и непрерывного повторения проходов формообразования до полного завершения обработки всей поверхности детали с минимальными затратами времени и средств на обработку.

В процессе обработки деталь и инструмент совершают относительные движения, которые существенно отличаются один от другого как по характеру, так и по параметрам. Чтобы отличать движения одного вида от движений другого, необходимы определения. Отсутствие правильных определений видов относительных движений инструмента приводит к противоречиям в оценке кинематической характеристики процессов механической обработки деталей и препятствует полному использованию потенциальных возможностей кинематики обработки.

Петрухин С.С. (1960) исследовал кинематику резания. Он дал определения связаным со снятием стружки движениям резания и подачи, а также не связанным со снятием стружки дополнительным движениям, необходимым, с одной стороны для обеспечения заданных параметров поверхности детали, а с другой – для

увеличения производительности обработки. Кинематику форомообразования исследовал Родин П.Р. (1960). Он работал над созданием классификации кинематических схем формообразования.

Изучение кинематики формообразования тесно связано с двумя основными задачами теории формообразования поверхностей деталей: прямой и обратной.

Сущность прямой задачи заключается в нахождении поверхности $И$, сопряженной с поверхностью $Д$. Известными при этом считаются поверхность $Д$ и совокупность движений, совершаемых в процессе обработки деталью и инструментом.

Обратная задача сводится к нахождению поверхности $Д$: известной при этом считается поверхность *И* и совокупности движений, совершаемых деталью и инструментом в процессе обработки. Вследствие нарушения условий формообразования поверхностей деталей поверхность $Д$, найденная в результате решения обратной задачи, может частично или полностью не совпадать с номинальной поверхностью $Д_н$, заданной чертежом детали.

Для формообразования поверхности детали безразлично какими сочетаниями движений заготовки и инструмента получено на станке требуемое относительное их движение, т.е. какие элементарные движения сообщены детали, а какие – инструменту (важно только их относительное движение). Поэтому в дальнейшем рассматривается совокупность только относительных движений детали и инструмента, называемых кинематической схемой формообразования:

Определение 2.8. *Кинематическая схема формообразования – это совокупность относительных движений детали и инструмента, которые они совершают в процессе обработки с целью получения заданной поверхности детали.*

При этом можно рассматривать как совокупность движений инструмента относительно неподвижной детали, так и совокупность движений детали относительно неподвижной системы координат, с которой впоследствие будет связан инструмент. В первом случае неподвижной считается деталь, а совокупность относительных движений инструмента представляет собой собственно кинематическую схему формообразования.

Определение 2.9. *Кинематическая схема собственно формообразования – это совокупность движений инструмента относительно неподвижной детали, необходимых для получения заданной ее поверхности $Д$.*

Во втором случае неподвижной является система координат инсрумента, а совокупность относительных движений детали представляет собой кинематическую схему формообразования исходной инструментальной поверхности *И* инструмента. Эту кинематическую схему удобнее называть кинематической схемой профилирования инструмента:

Определение 2.10. *Кинематическая схема профилирования – это совокупность движений детали относительно неподвижной системы координат, с которой впоследствие будет связан инструмент, необходимых для образования исходной инструментальной поверхности И.*

Кинематические схемы формообразования рассматриваются при определении формы и параметров поверхности $Д$ детали (при решении обратной задачи теории формообразования поверхностей деталей), а кинематические схемы профилирования – при определении формы и параметров поверхности *И* инструмента (при решении прямой задачи теории формообразования поверхностей деталей).

Наряду с движениями, учитываемыми при решении прямой и обратной задач теории формообразования поверхностей деталей, кинематические схемы формообразования и профилирования могут дополняться движениями, которые приводят поверхности $Д(И)$ к движению *“самих по себе”* – эти движения не оказывают влияния на положение поверхностей $Д$ и $И$ одна относительно другой и на характер их сопряжения. Введение в кинематические схемы формообразования движений указанного типа может быть вызвано стремлением либо обеспечить полную обработку всей поверхности $Д$ детали, либо создать рациональный режим работы инструмента, либо необходимостью введения в работу неизношенных участков режущих кромок инструмента (например, как это имеет место при диагональном фрезеровании цилиндрических зубчатых колес), либо другими причинами.

Могут иметь место случаи, когда требуемый режим работы инструмента обеспечиваются за счет движения поверхности $Д$ и поверхности $И$ *"самих по себе"* одновременно. Движения скольжения поверхности $Д$ *"самой по себе"* зачастую приходится вводить в схему обработки, чтобы обеспечить полную обработку поверхности детали $Д$ на всем ее протяжении. Характер этих движений определяется в результате анализа характера сопряжения поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$.

Рассматривая различные сочетания элементарных движений поверхностей $Д$ и $И$, можно прийти к разным кинематическим схемам формообразования. Чтобы получить возможно более простые кинематические схемы металлорежущих станков, необходимо, чтобы элементарные движения детали и инструмента были простыми и были удобно ориентированы одно относительно другого. По этой причине распространение получили кинематические схемы формообразования, основанные не более, чем на двух движениях: прямолинейно-поступательном и вращательном и на их сочетаниях. Поэтому общее количество возможных принципиальных кинематических схем формообразования, во-первых, конечно и, во-вторых, сравнительно невелико. Кинематические схемы формообразования, содержащие большее количество элементарных движений поверхностей $Д(И)$, на практике используются редко.

Рассмотрим несколько примеров (Родин П.Р., 1960). Кинематическая схема формообразования может не содержать относительных движений детали и инструмента. Это имеет место в случаях, когда поверхности $Д$ и $И$ совпадают одна с другой, что наблюдается, например, при протягивании поверхностей, нарезании резьб метчиками и плашками и др. В этом случае относительное движение поверхности *Д* детали и поверхности *И* инструмента сводится к движению поверхности $И$ *"самой по себе"*. Благодаря этому создается требуемая скорость резания. Однако это относительное движение не является формообразующим и не учитывается при решении ни прямой, ни обратной задач теории формообразования поверхностей деталей.

Кинематическая схема формообразования может содержать одно движение, которое является либо прямолинейно-поступательным, либо вращательным, либо винтовым. Такие кинематические схемы формообразования характерны тем, что при их воспроизведении подвижный и неподвижный аксоиды совпадают один с другим и вырождаются в прямую, которая совпадает либо с направлением прямолинейно-поступательного движения, либо с осью вращательного движения, либо с осью винтового движения (Родин П.Р., 1960).

Кинематическим схемам формообразования с прямолинейно-поступательным относительным движением соответствует процесс протягивания наружных поверхностей вращения, процесс точения фасонных поверхностей вращения тангенциальными фасонными резцами, работающими с прямолинейно-поступательным движением подачи и др.

Кинематическим схемам формообразования с вращательным относительным движением соответствует процесс фрезерования фасонных поверхностей вращения, процесс точения фасонных поверхностей вращения тангенциальными фасонными резцами, работающими с поворотным движением подачи и др.

Кинематическим схемам формообразования с винтовым относительным движением поверхностей $Д(И)$ соответствует процесс фрезерования винтовых поверхностей деталей и др.

Три кинематические схемы формообразования с одним относительным движением поверхностей рассмотрены в последовательности, когда предыдущая кинематическая схема является частным случаем последующей схемы. Кинематические схемы формообразования с прямолинейно-поступательным движением являются частным случаем кинематических схем формообразования с вращательным относительным движением: поступательное движение можно рассматривать как частный случай вращательного движения, когда ось вращения удалена в бесконечность.

Эти кинематические схемы формообразования не позволяют производить обработку сложных поверхностей *Д* деталей с образующими переменного вида.

Относительным движением в кинематических схемах формообразования могут быть мгновенное поворотное или мгновенное поступательное движение. Аксоидами в этом случае будут "цилиндр-плоскость" (рис. 2.9.1), "цилиндр-цилиндр" (рис. 2.9.2), "конус-плоскость" (рис. 2.9.3) и "конус-конус" (рис. 2.9.4). Кинематическим схемам формообразования рассматриваемого типа соответствуют процессы нарезания цилиндрических зубчатых колес долбяками и гребенками, нарезания цилиндрических зубчатых колес долбяками с наклонной осью и др.

Когда аксоиды представляют собой одинаковые поверхности ("цилиндр-цилиндр", "конус-конус") безразлично какой из аксоидов связан с деталью, а какой – с инструментом, как это имеет место, например, при нарезании цилиндрических зубчатых колес долбяками.

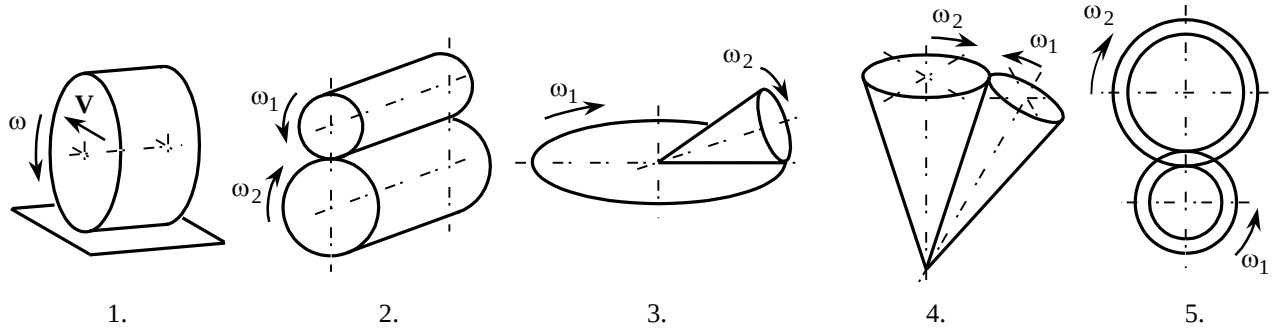


Рис. 2.9. Кинематические схемы формообразования II класса (Родин П.Р., 1960).

Если аксоиды имеют различную форму (“цилиндр-плоскость”, “конус-плоскость”), возможны два варианта кинематических схем формообразования – в зависимости от того, какой из аксоидов связан с деталью, а какой – с инструментом. Например, если аксоидами являются плоскость и цилиндр, то аксоидом детали может служить плоскость, а аксоидом инструмента – цилиндр. Такая кинематическая схема формообразования соответствует нарезанию зубчатой рейки долбяком. Если же аксоидом детали будет служить цилиндр, а аксоидом инструмента – плоскость, то такой кинематической схеме формообразования соответствует процесс нарезания цилиндрических зубчатых колес зуборезными гребенками.

Последние четыре из рассмотренных кинематических схем формообразования характерны тем, что относительные движения поверхностей $Д(И)$ в них можно свести к двум вращениям вокруг параллельных или пересекающихся осей. При этом кинематическая схема формообразования, соответствующая качению без скольжения цилиндра по плоскости, может рассматриваться как кинематическая схема, включающая два вращения вокруг параллельных осей, т.к. поступательное движение можно рассматривать как предельный случай вращательного движения, а плоскость – цилиндром бесконечно большого радиуса.

Кинематическая схема формообразования (рис. 2.9.5) представляет собой вырожденный случай кинематической схемы (см. рис. 2.9.4), когда образующие конусов становятся ортогональными осям их вращения.

Относительным движением поверхностей $Д(И)$ в кинематических схемах формообразования может быть мгновенное винтовое движение. Аксоидами в этом случае будут “цилиндр-плоскость” (рис. 2.10.1), “конус-плоскость” (рис. 2.10.2), “гиперболоид-гиперболоид” (рис. 2.10.3). В процессе обработки аксоиды детали и инструмента перекатываются один по другому со скольжением.

Следует обратить внимание на то, что схема (см. рис. 2.10.2) не может быть кинематической схемой формообразования. При таком относительном расположении осей вращения конус может перекатываться со скольжением по плоскости, однако аксоидами в этом случае будут два вращающихся однополостных гиперболоида вращения (см. рис. 2.10.3). Этот вопрос следует рассмотреть детальнее, поскольку он приводит

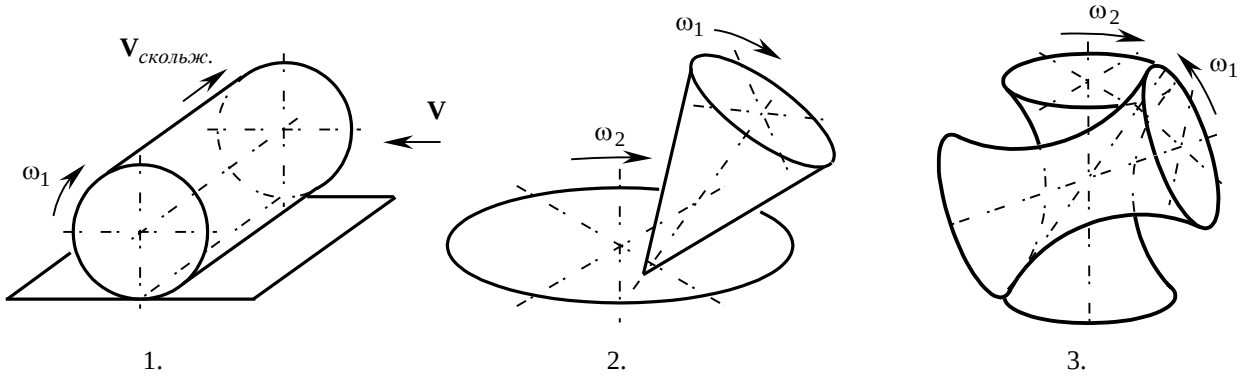


Рис. 2.10. Кинематические схемы формообразования III класса (Родин П.Р., 1960).

к широко распространенной ошибке.

Пусть плоскость 1 вращается вокруг своей оси O_1 с угловой скоростью ω_1 (рис. 2.11). Конус с углом при вершине χ_i (здесь $i=1,2,\ldots,6$), вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_i, может занимать на плоскости различные положения, в которых ось его вращения пересекает ось вращения плоскости или перекрещивается с ней. Во всех положениях конуса, когда ось его вращения перекрещивается с осью вращения плоскости 1, конус перекатывается по плоскости со скольжением, а аксоидами будут два однополостных гиперболоида вращения, вращающихся вокруг своих осей с угловыми скоростями ω_1 и ω_i. Параметры аксоидов в этом случае полностью и однозначно определяются величиной угла перекрещивания осей их вращения и соотношением угловых скоростей ω_1 и ω_i их вращения.

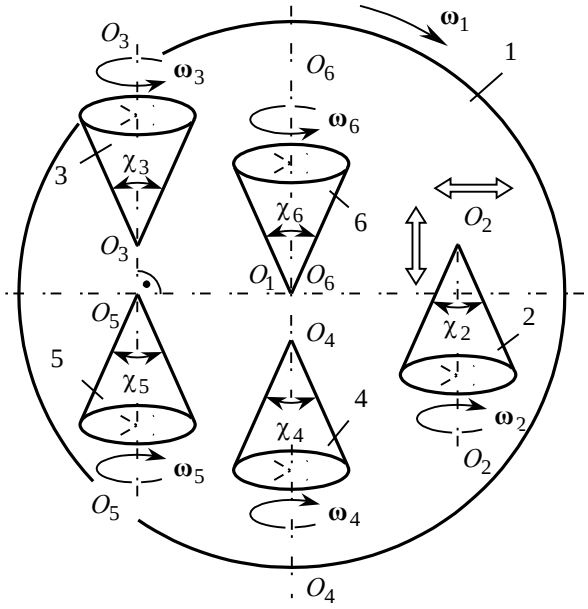
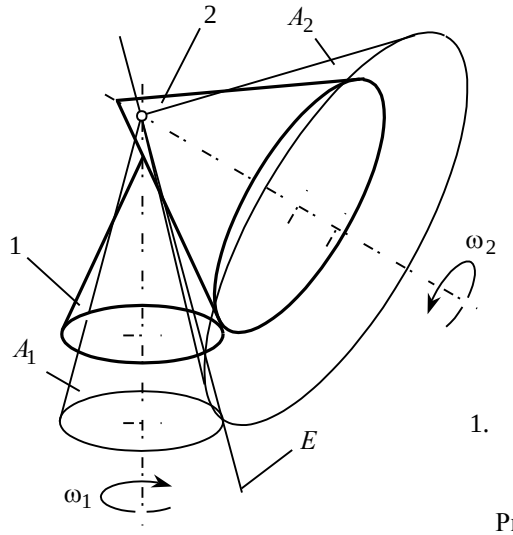


Рис. 2.11. Кинематические схемы формообразования, сводящиеся к качению конуса по плоскости.

Если оси вращения двух конусов пересекаются, это еще не значит, что эти конусы могут быть аксоидами. Если вершины конусов совпадают, конусы могут перекатываться один по другому без скольжения и в этом случае они будут аксоидами. Если вершины конусов 1 и 2 не совпадают (рис. 2.12.1), конусы могут перекатываться один по другому только со скольжением. Их аксоидами в этом случае будут конусы A_1 и A_2, касающиеся один другого вдоль характеристики E. Аналогичное имеет место и при перекатывании круглого цилиндра 1 по торцовой плоскости 2 (рис. 2.12.2).

Кинематическая схема формообразования, представляющая собой два вращения вокруг перекрещивающихся осей, относительное движение поверхностей $Д(И)$ в которой может быть представлено как качение со скольжением одного однополостного гиперболоида вращения по другому относят к самой общей. Все другие кинематические схемы формообразования рассматриваются как частные случаи этой схемы, получаемыми при частных положениях осей вращения аксоидов и соответствующих сочетаниях угловых скоростей их вращения. Такой кинематической схеме формообразования (см. рис. 2.10) соответствует процесс нарезания цилиндрических зубчатых колес червячными фрезами и т.п.



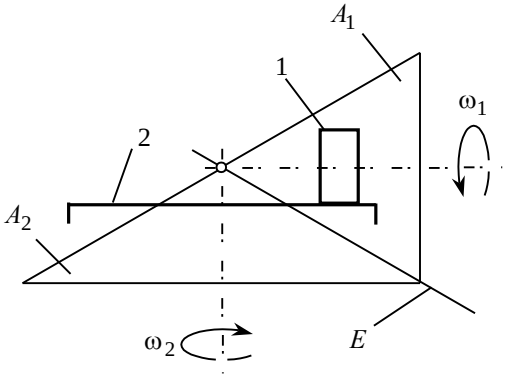


Рис. 2.12. Аксоиды при пересекающихся осях вращения детали и инструмента.

В кинематических схемах формообразования, которые могут быть представлены в виде перекатывающихся один по другому аксоидов детали и инструмента (см. рис. 2.9 и рис. 2.10), оси мгновенного относительного движения поверхностей $Д$ и $И$ могут изменять свое положение в системе координат $X_{\partial}Y_{\partial}Z_{\partial}$, связанной с поверхностью $Д$ детали. В таких случаях характеристика E в процессе обработки может изменять свою форму и ее можно рассматривать как проекцию на поверхность $Д$ оси мгновенно-винтового относительного движения поверхностей $Д(И)$. В точках характеристики E нормаль к поверхности $Д$ в каждый момент времени составляет некоторый угол ε с осью мгновенно-винтового движения:

$$\varepsilon = \arctan\frac{p}{h},$$

где p – параметр мгновенно-винтового относительного движения поверхности $Д(И)$;

h – кратчайшее расстояние между осью мгновенно-винтового движения и рассматриваемой нормалью к поверхности $Д$ в точках характеристики E.

Когда мгновенно-винтовое движение вырождается во вращательное, нормали к поверхности $Д$ в точках характеристики E будут пересекать ось вращательного движения.

Если изменить положение оси мгновенно-винтового относительного движения поверхностей $Д(И)$, то в общем случае ее проекция на поверхность $Д$ также изменит свое положение и форму. Из этого следует важный для практики вывод: на основе кинематических схем формообразования типа (см. рис. 2.9 и рис. 2.10) могут быть разработаны способы обработки различных поверхностей деталей, как допускающих движение *“самих по себе”*, так и сложных поверхностей $Д$ с образующими переменного вида. Способы обработки методом обкатки сложных поверхностей деталей с образующими переменного вида находят применение в промышленности (Антонова М.П., 1969).

Результирующая скорость сложного относительного движения поверхностей $Д$ и $И$ может быть представлена как векторная сумма скоростей составляющих ее элементарных движений:

$$\mathbf{V}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i, \tag{2.23}$$

где $\mathbf{V}_i$ – скорость i-ой составляющей скорости результирующего движения поверхностей $Д$ и $И$;

n – общее количество элементарных составляющих относительного движения поверхностей $Д$ и $И$.

Согласно уравнению контакта (3) можно записать, что

$$\mathbf{N}_{\partial}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i = 0. \tag{2.24}$$

Могут иметь место случаи, когда $\mathbf{N}_{\partial}\cdot\mathbf{V}_j = 0$, где j – номер скорости элементарного движения, которое приводит поверхность $Д(И)$ к движению *“самой по себе”*. То есть в одном или в нескольких из направлений поверхность $Д(И)$ перемещается *“сама по себе”*. Такие относительные движения не изменяют условий касания поверхностей $Д$ и $И$, вследствие чего при определении характеристики E их можно не учитывать и для нахождения огибающей поверхности использовать упрощенную кинематическую схему формообразования, для которой:

$$\mathbf{N}_{\partial}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i - \sum_{j=1}^{m}\mathbf{V}_j\right) = 0, \tag{2.25}$$

где m – количество элементарных движений, которые приводят поверхность *Д(И)* к движению *"самой по себе"*.

В частном случае, когда $n = 2$, $m = 1$ уравнения (23) – (25) упрощаются. В частности, уравнение (25) приводится к виду $\mathbf{N}_\partial \cdot \mathbf{V}_1 = 0$, в то время как относительное движение поверхностей *Д* и *И* со скоростью $\mathbf{V}_2$ приводит их к движению *"самих по себе"*.

Чтобы отличать кинематические схемы формообразования и профилирования, содержащие движения, которые приводят поверхность *Д* или поверхность *И* к движению *"самой по себе"*, от кинематических схем, не содержащих движений такого типа, введем:

Определение 2.11. *Кинематические схемы канонического вида – это кинематические схемы формообразования и профилирования, из которых исключены относительные движения, приводящие поверхность Д и (или) поверхность И к движению "самой по себе".*

Таким образом в канонической форме кинематические схемы формообразования поверхностей деталей не содержат движений, которые приводят поверхность *И* к движению *"самой по себе"*, а кинематические схемы профилирования инструмента в канонической форме не содержат движений поверхности *Д*, приводящих их к движению *"самих по себе"*.

При решении как прямой, так и обратной задач теории формообразования поверхностей деталей кинематические схемы формообразования канонического вида анализируются в первую очередь.

Зная характер относительных движений детали и инструмента в процессе обработки, иными словами зная кинематическую схему формообразования, необходимо решить следующие задачи: как воспроизвести эти движения на станке, какие из элементарных движений следует сообщить непосредственно заготовке, а какие – инструменту. Решение этой задачи не является однозначным. Например, при строгании плоскостей поступательное движение можно сообщить заготовке (как это имеет место на продольно-строгальных станках), а можно это движение придать инструменту (как это имеет место на поперечно-строгальных станках), хотя в обоих случаях кинематическая схема формообразования одна и та же.

2.6. Классификация кинематических схем формообразования поверхностей деталей

Обработка поверхностей деталей резанием предусматривает срезание операционного припуска или его части при взаимодействии инструмента с заготовкой, совершающих в процессе обработки движения друг относительно друга. Чтобы систематизировать различные методы формообразующей обработки поверхностей деталей, необходимо классифицировать кинематические схемы формообразования в соответствие с относительными движениями, совершаемыми заготовкой и инструментом на металлорежущем станке: их количеством, ориентацией направлений одного относительно другого, скоростями, ускорениями и пр. Перечисленные факторы оказывают непосредственное влияние на протекание процесса резания и на формирование обработанной поверхности детали.

Требуется глубокое понимание сущности кинематики формообразования с тем, чтобы для ее реализации не требовалось изобретательское творчество. Классификация принципиальных кинематических схем резания должна помогать решать задачи *синтеза* новых способов обработки деталей и профилирования режущих инструментов, а не только использоваться для *анализа* уже известных технических решений.

Относительные движения, которые сообщаются детали и инструменту исполнительными механизмами металлорежущего станка, группируются в кинематические схемы формообразования. Степень общности кинематических схем формообразования может быть установлена путем введения в рассмотрение соответствующего критерия.

Каждой кинематической схеме формообразования поверхностей деталей, от самой простой до самой сложной, свойственны следующие характерные признаки:

- количество составляющих ее элементарных вращательных и направлений поступательных перемещений;
- относительное расположение и ориентация направлений составляющих ее элементарных движений;
- характер элементарных движений и функциональных связей между ними.

Совокупность перечисленных признаков может быть положена в основу обобщенной классификации кинематических схем формообразования, содержащих любое количество элементарных движений.

В общем случае обработки деталей при *"жесткой"* кинематике формообразования деталь и инструмент согласованно вращаются вокруг перекрещивающихся осей с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Этому соответствуют две кинематические схемы формообразования, сводящиеся к качению одного однополостного гиперболоида вращения по другому: в первом случае при внешнем, а во втором – при внутреннем их касании (рис. 2.13).

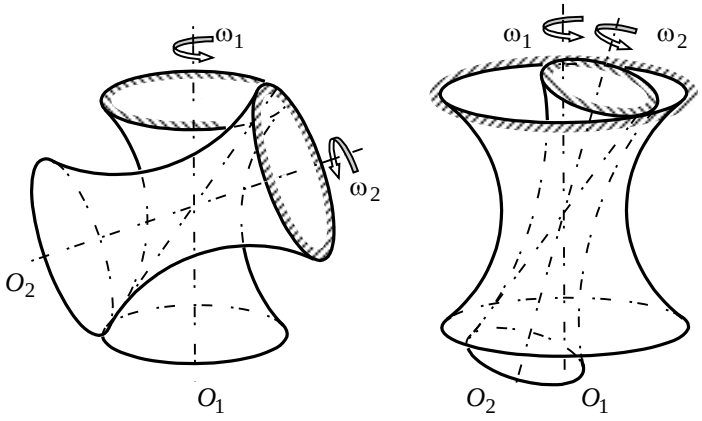


Рис. 2.13. Внешнее и внутреннее касание аксоидов в виде однополостных гиперболоидов вращения.

Поэтому кинематические схемы формообразования (см. рис. 2.13) следует рассматривать как общие. Их параметры определяются величиной угла перекрещивания осей аксоидов и соотношением угловых скоростей вращения детали и инструмента в процессе обработки. При частном расположении осей вращений аксоидов и ориентации их образующих, из общей кинематической схемы образуются более простые кинематические схемы формообразования.

Исходя из этого разработана классификация *"жестких"* принципиальных кинематических схем формообразования поверхностей деталей (рис. 2.14). В этой классификации кинематические схемы формообразования разделены на две группы. Первая группа охватывает кинематические схемы, сводящиеся к внешнему, а вторая – к внутреннему касанию аксоидов.

При внешнем касании аксоидов кинематическая схема формообразования первого уровня в частных случаях вырождается в кинематические схемы формообразования второго уровня, когда:

- один однополостный гиперболоид вращения перекатывается по другому, а оси их вращения ортогональны. Эта кинематическая схема формообразовани не допускает образование других кинематических схем формообразования путем дальнейшего ее вырождения;
- один круглый цилиндр перекатывается без скольжения по другому круглому цилиндру. В этом случае оси вращения аксоидов параллельны, а их образующие параллельны осям вращения;
- одно кольцо перекатывается по другому кольцу. В этом случае оси вращения аксоидов параллельны, а образующие аксоидов перпендикулярны осям их вращения.

Если оси вращения аксоидов пересекаются, образуется единственная кинематическая схема формообразования второго уровня, сводящаяся к качению без скольжения одного конуса по другому.

При внутреннем касании аксоидов существует две кинематические схемы формообразования второго уровня. При параллельном расположении осей вращения аксоидов образуется кинематическая схема, сводящаяся к качению одного круглого цилиндра по другому, а при пересекающихся – к качению одного круглого конуса по другому. Из этих кинематических схем формообразования новые кинематические схемы образованы быть не могут (помним, что касание аксоидов должно оставаться внутренним).

Кинематические схемы формообразования третьего уровня образуются как частные случаи некоторых кинематических схем второго уровня. В первой группе возможно образование трех кинематических схем формообразования.

Если диаметр одного из начальных цилиндров становится равным ∞, цилиндр вырождается в плоскость, а кинематическая схема формообразования при этом вырождается в схему, сводящуюся к качению цилиндра по плоскости.

Если диаметр одного из колец становится равным ∞, это кольцо вырождается в полосу, а кинематическая схема формообразования при этом вырождается в схему, сводящуюся к перекатыванию со скольжением полосы, движущейся со скоростью $\mathbf{V}$, по кольцу, которое вращается с угловой скоростью ω_2.

Если угол при вершине одного из конусов становится равным 180°, этот конус вырождается в плоскость, а кинематическая схема формообразования в этом случае сводится к качению без скольжения ко-

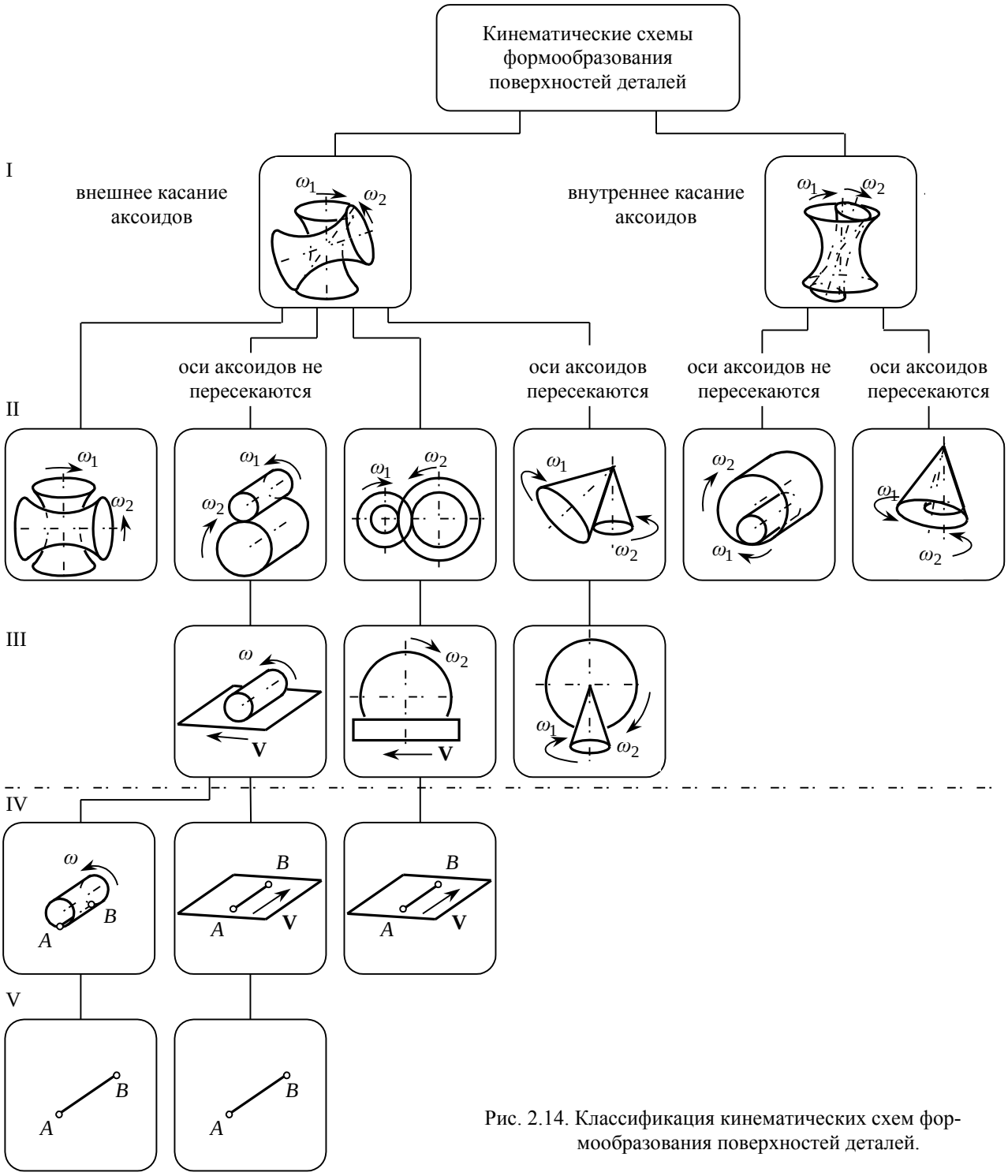


Рис. 2.14. Классификация кинематических схем формообразования поверхностей деталей.

нуса по плоскости.

Кинематические схемы формообразования четвертого и пятого уровней не могут быть представлены в виде аксоидов.

Если в кинематической схеме формообразования “цилиндр-плоскость” скорость $\mathbf{V}$ движения плоскости равна нулю, этот аксоид стягивается в расположенную на цилиндре линию AB. Если скорость ω вращатель-

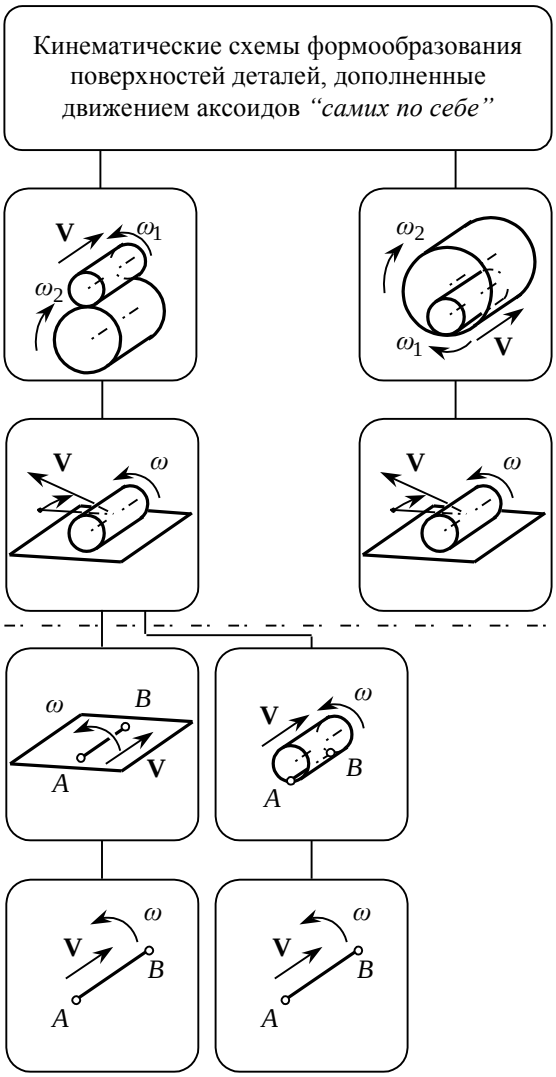


Рис. 2.15. Дополнение кинематических схем формообразования движениями, приводящими аксоиды к их движению *"самих по себе"*.

ного движения становится равной нулю, цилиндр стягивается в расположенную на плоскости линию AB. Аналогичная кинематическая схема может быть образована из кинематической схемы "кольцо-полоса". Поэтому кинематические схемы формообразования четвертого уровня исчерпываются только двумя схемами (см. рис. 2.14).

Единственная кинематическая схема формообразования пятого уровня не содержит движений. Она может быть реализована только за счет движений, приводящих поверхности $Д(И)$ к движению их *"самих по себе"*.

Таким образом существует только 14 принципиальных кинематических схем формообразования (см. рис. 2.14).

Из всех типов поверхностей, которые могут быть использованы в качетсве аксоидов, только поверхности наружного и внутреннего цилиндров допускают движение, приводящее эти поверхности к перемещению *"самих по себе"*. Поэтому из кинематических схем формообразования, которые сводятся к качению цилиндра по цилиндру при внешнем и внутреннем их касании, дополнительно могут быть получены новые кинематические схемы формообразования.

Поверхность круглого цилиндра допускает движение *"самой по себе"* при вращении ее вокруг и при перемещении вдоль собственной оси. Дополнительное вращательное движение цилиндра приводит к изменению диаметров аксоидов и только. Поэтому в данном случае интерес оно не представляет. При наложении на вращающийся аксоид поступательного движения дополнительно получаем еще шесть кинематических схем формообразования (рис. 2.15). Эти кинематические схемы формообразования можно представить как качение с продольным скольжением одного круглого цилиндра по другому при внешнем и внутреннем их касании; как качение с продольным скольжением круглого цилиндра по плоскости и др. (см. рис. 2.13) и вырожденные их случаи.

Образование новых кинематических схем формообразования путем дальнейшего вырождения приведенных схем невозможно. При попытке создать таким путем новую кинематическую схему получим предельный случай вырождения – точку, которая не может быть использована в качестве кинематической схемы формообразования. В таком предельно вырожденном случае нет не только аксоидов детали и инструмента, но и не допускаются их движения *"самих по себе"*.

Следовательно, общее количество кинематических схем формообразования исчерпывается 20 схемами.

Классификация кинематических схем формообразования (см. рис. 2.14 и рис. 2.15) позволяет решать не только прямую и обратную задачи теории формообразования поверхностей деталей, но и задачи иного рода: находить поверхности деталей, которые могут быть обработаны заданным инструментом. В общем виде эта задача не решена (Родин П.Р., 1960, 1990). Известны отдельные частные решения (Давыдов Я.И., 1951) – цилиндро-конические передачи первого и второго рода, которые находят применение в промышленности.

Чтобы решать задачи рассматриваемого вида, следует проанализировать какие поверхности могут быть получены как огибающие последовательных положений исходной инструментальной поверхности инструмента заданной конструкции при его движении в соответствие с каждой из кинематических схем формообразования поверхностей деталей (см. рис. 2.14 и рис. 2.15). Для случаев, когда огибающая

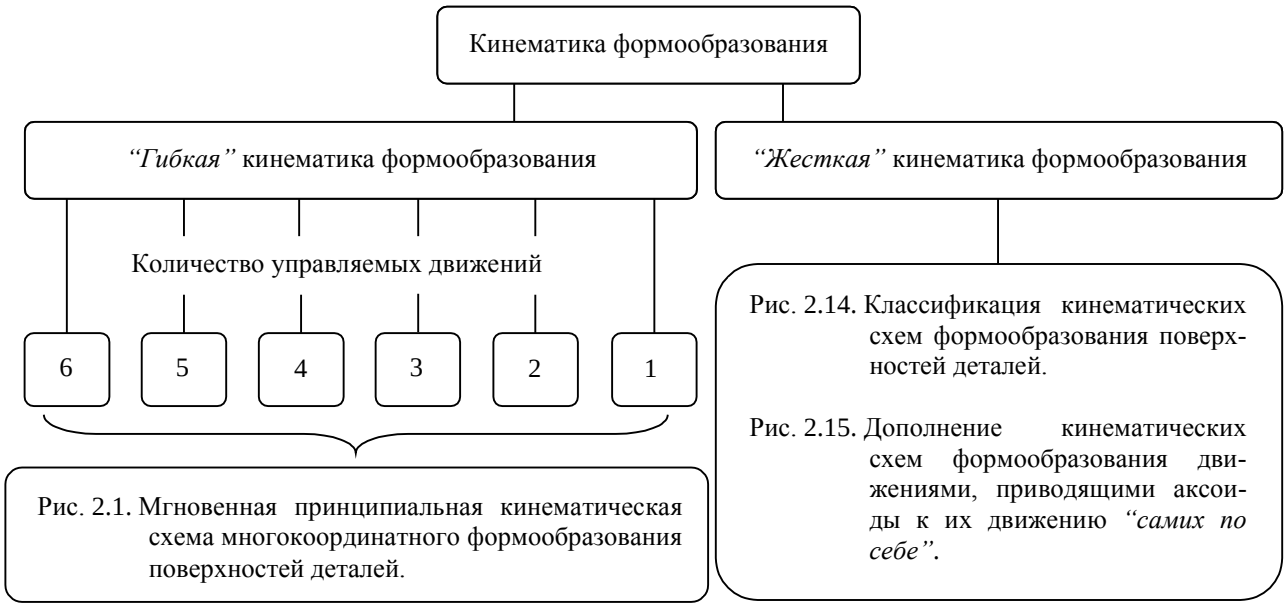


Рис. 2.1. Мгновенная принципиальная кинематическая схема многокоординатного формообразования поверхностей деталей.

Рис. 2.14. Классификация кинематических схем формообразования поверхностей деталей.

Рис. 2.15. Дополнение кинематических схем формообразования движениями, приводящими аксоиды к их движению *"самих по себе"*.

Рис. 2.16. Общность кинематики формообразования поверхностей деталей.

движущейся поверхности *И* существует, определить, для деталей какой конструкции целесообразно ее использовать.

Не все принципиальные кинематические схемы формообразования поверхностей деталей реализованы на практике. На основе неиспользованных схем могут быть разработаны новые высокоэффективные способы обработки поверхностей деталей, конструкции металлорежущих станков и инструментов для реализации этих способов.

Относительные движения детали и инструмента, совершаемые ими в процессе обработки детали, управляются либо от системы ЧПУ металлорежущим станком, либо от *"жесткого"* программоносителя. При *"гибкой"* кинематике от системы ЧПУ управляется не менее одного и не более шести относительных движений детали и инструмента (число управляемых от системы ЧПУ абсолютных движений при этом может быть большим).

Мгновенная принципиальная кинематическая схема многокоординатного формообразования (см. рис. 2.1) и классификация кинематических схем формообразования (см. рис. 2.15) приводят к схеме (рис. 2.16), которая показывает общность кинематики формообразования поверхностей деталей.

2.7. Кинематические схемы резания

Кинематические схемы резания введены в рассмотрение, исследованы и классифицированы Грановским Г.И. (1948). Принципиальные кинематические схемы резания представляют собой совокупность абсолютных движений, совершаемых в процессе обработки деталью и инструментом относительно станины металлорежущего станка. Они включают движения детали и инструмента, которые совершаются во время рабочего цикла с момента, когда режущая кромка вступает в контакт с материалом заготовки, и до момента, когда взаимодействие инструмента с заготовкой прекращается. Движения холостых ходов, в течение которых инструмент не взаимодействует с заготовкой, в кинематические схемы резания не входят.

Первоначально кинематические схемы резания рассматривались как заранее заданные, вытекающие из кинематики уже существующих станков. Отсутствовала классификация применяемых и потенциально возможных кинематических схем резания. Это служило существенным препятствием в разработке эффективных способов обработки деталей на металлорежущих станках, а также новых конструкций металлорежущих станков и режущих инструментов для выполнения такой обработки. До настоящего времени потенциальные возможности многих кинематических схем резания до конца не использованы.

Стремление производить обработку деталей наиболее простыми способами привело к тому, что при *"жесткой"* кинематике обработки использовались кинематические схемы резания, основанные на сочетании разного (от одного до трех) количества по-разному ориентированных одно относительно другого элементарных движений двух видов: поступательного и вращательного. Возможно сочетание четырех и более элементарных движений. Однако образованные таким путем кинематические схемы резания чрезмерно усложняют кинематическую схему металлорежущего станка.

В зависимости от количества и характера сочетаемых элементарных движений кинематические схемы резания разделены (Грановский Г.И., 1948) на 8 групп. Рассмотрим примеры кинематических схем резания разной степени сложности: от самых простых до наиболее сложных.

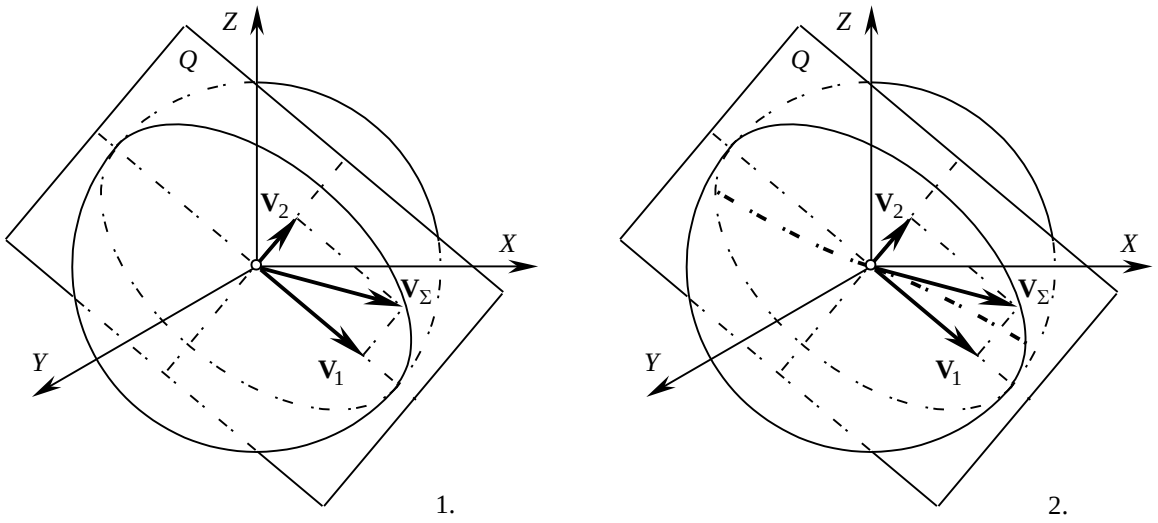


Рис. 2.17. Схемы сложения двух равномерных (1) и равномерного и неравномерного (2) прямолинейных поступательных движений (Грановский Г.И., 1948).

Кинематическая схема резания простейшей структуры содержит одно движение, сообщаемое либо инструменту (когда заготовка неподвижна), либо заготовке (если неподвижен инструмент). Это единственное движение является прямолинейно-поступательным или вращательным и определяет скорость резания, в связи с чем названо простым рабочим движением.

Кинематические схемы резания более сложной структуры содержат два одновременно осуществляемых элементарных движения. Одно из этих движений всегда совершается со скоростью резания, а другое – со скоростью подачи (кроме особых случаев, когда скорость второго движения неравномерна, а само движение осуществляется от копира – в этом случае оно является вспомогательным и предопределяет специфический характер траектории относительного движения режущей кромки инструмента). Каждое из сочетаемых движений, если его рассматривать отдельно, является простым (элементарным), а результирующее движение – сложным рабочим движением.

Два элементарных движения могут иметь произвольные направления и скорости – они образуют бесчисленное множество сочетаний. Эффективность обработки при различных сочетаниях двух элементарных движений в кинематической схеме резания будет разной.

Если оба элементарных движения являются прямолинейно-поступательными, то одно из них всегда осуществляется с постоянной скоростью $\mathbf{V}_1$, тогда как скорость $\mathbf{V}_2$ второго может быть как постоянной, так и переменной. Направление равномерного прямолинейного движения $\mathbf{V}_1$ проходит через начало системы координат XYZ (рис. 2.17.1).

Второе поступательное движение с постоянной или с переменной скоростью $\mathbf{V}_2$ направлено вдоль произвольно ориентированного радиуса r сферы с центром в начале системы координат XYZ. В первом случае (когда $\mathbf{V}_2 = Const$) результирующее движение будет прямолинейно-поступательным, осуществляемым с постоянной скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$ (рис. 2.17.2). Направление скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ проходит через начало системы координат XYZ и расположено в плоскости Q, образованной векторами $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. Эта плоскость занимает

фиксированное положение в системе координат XYZ. Во втором случае (когда $\mathbf{V}_2 = Var$) результирующее движение является сложным и осуществляется в плоскости Q по криволинейной траектории. Скорость и направление результирующего движения зависят от соотношения мгновенных значений скоростей $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ элементарных движений, а плоскость Q проходит через начало системы координат XYZ и может занимать в ней произвольное положение.

В кинематической схеме резания одно элементарное движение может быть прямолинейно-поступа-

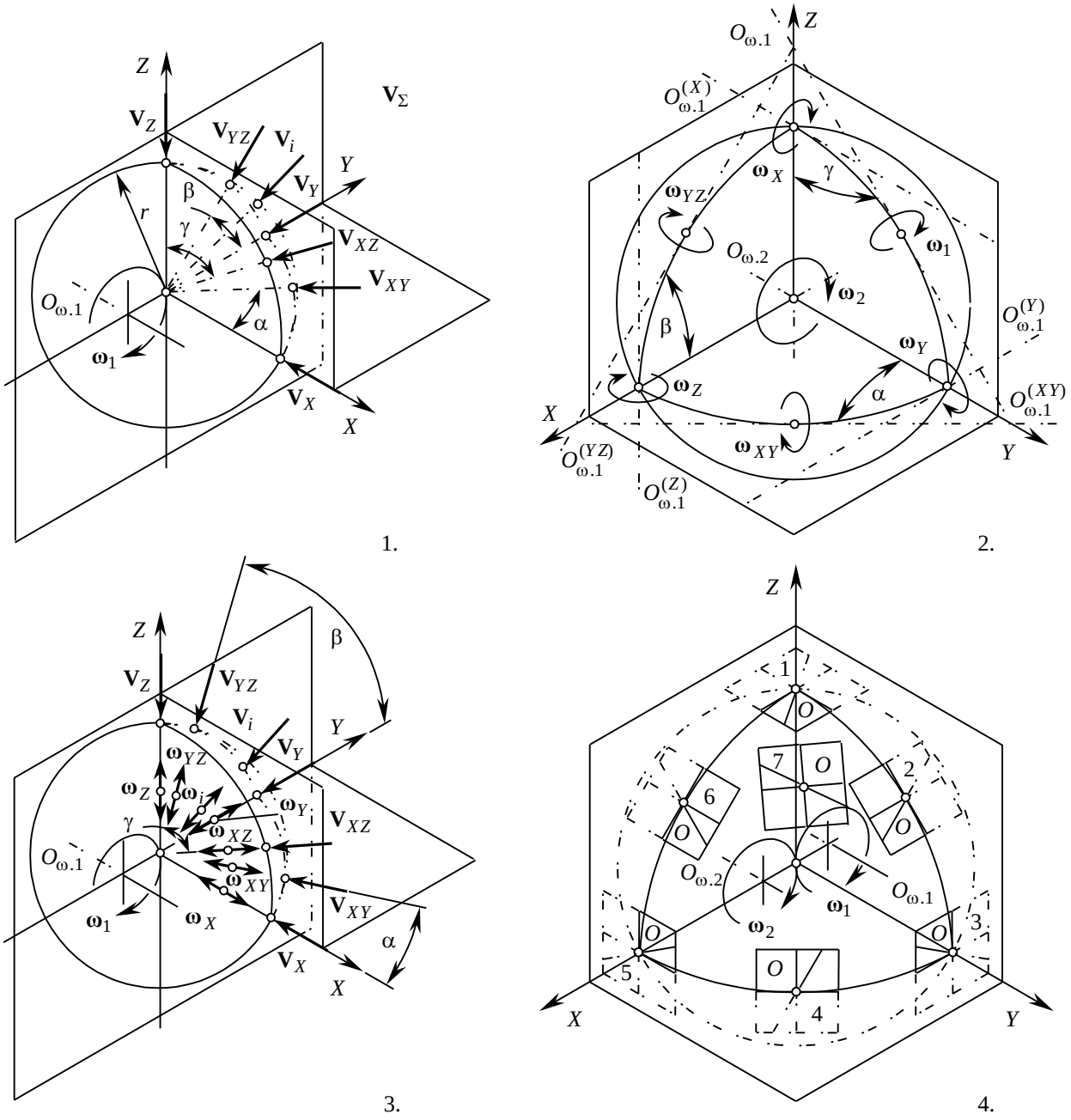


Рис. 2.18. Схемы сложения элементарных движений в принципиальных кинематических схемах: 1 – IV группы; 2 – V группы; 3 – VI группы и 4 – VII группы (Грановский Г.И., 1948).

тельным, а второе – равномерным вращательным (рис. 2.18.1). Вращательное движение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ осуществляется вокруг оси $O_{\omega.1}$, проходящей перпендикулярно плоскости координат YZ. Равномерное прямолинейно-поступательное движение со скоростью $\mathbf{V}_1$ направлено вдоль произвольного радиуса r сферы с центром в начале системы координат XYZ. Достаточно рассмотреть одну восьмую часть поверхности этой сферы, заключенную между плоскостями координат XY, XZ и YZ. Рассматривая частные сочетания элементарных движений, когда поступательное движение $\mathbf{V}_1$ направлено сначала вдоль одной из осей координат: $\mathbf{V}_X$, $\mathbf{V}_Y$, $\mathbf{V}_Z$, затем когда оно расположено в одной из плоскостей координат: $\mathbf{V}_{XY}$, $\mathbf{V}_{XZ}$, $\mathbf{V}_{YZ}$ и составляет с осями углы α, β, γ, и, наконец, когда $\mathbf{V}_i$ совпадает с направлением произвольного радиуса r_i сферы, получаем семь кинематических схем резания.

Результирующее движение в кинематической схеме резания рассматриваемого типа будет плоским с криволинейной лежащей в плоскости координат YZ траекторией (когда скорость поступательного движения $\mathbf{V}_1$ лежит в плоскости координат YZ). Если скорость $\mathbf{V}_1$ не лежит в плоскости координат YZ, траектория результирующего движения, будет пространственной кривой, расположенной на поверхности однополостного гиперболоида вращения (в частном случае – на поверхности круглого цилиндра).

Оба элементарных движения могут быть равномерными вращательными движениями (рис. 2.18.2).

Пусть второе вращательное движение осуществляется вокруг неподвижной оси $O_{\omega.2}$, совпадающей с осью абсцисс X, и имеет постоянную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_2$. Первое вращательное движение осуществляется вокруг оси $O_{\omega.1}$, занимающей в системе координат XYZ произвольное положение, и также имеет постоянную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_1$.

Поворачивая ось $O_{\omega.1}$ вокруг оси абсцисс X, в плоскости координат YZ можно получить два характеристических ее положения. В одном из них ось $O_{\omega.1}^{(Z)}$ параллельна оси аппликат Z и перпендикулярна осям X и Y при $\beta = 90^\circ$. В другом характеристическом положении ось $O_{\omega.1}^{(YZ)}$ расположена наклонно к этим осям координат таким образом, что $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Поворачивая ось $O_{\omega.1}$ вокруг оси ординат Y, в плоскости координат XZ также можно получить два характеристических ее положения. В одном и них ось $O_{\omega.1}^{(X)}$ параллельна оси абсцисс X и перпендикулярна осям Y и Z при $\gamma = 90^\circ$. В другом характеристическом положении ось $O_{\omega.1}^{(XZ)}$ расположена наклонно к этим осям координат таким образом, что $0^\circ < \gamma < 90^\circ$.

Поворачивая ось $O_{\omega.1}$ вокруг оси аппликат Z, в плоскости координат XY можно получить еще два характеристических ее положения. В одном из них ось $O_{\omega.1}^{(Y)}$ параллельна оси ординат Y и перпендикулярна осям X и Z при $\alpha = 90^\circ$. В другом характеристическом положении ось $O_{\omega.1}^{(XY)}$ расположена наклонно к этим осям координат таким образом, что $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Возможно еще одно характеристическое сочетание элементарных движений, когда ось $O_{\omega.1}$ в произвольной точке касается поверхности, заключенной между плоскостями координат XY, YZ и XZ в одной восьмой части сферы радиуса r. Однако рассматривать его как самостоятельное характеристическое частное сочетание элементарных движений не следует, поскольку оно может быть получено как результат сложения первых трех характеристических сочетаний.

Интерес представляет другое характеристическое положение, которое может быть получено смещением оси $O_{\omega.2}$ вращательного движения $\boldsymbol{\omega}_2$ с оси $O_{\omega.1}$ вращательного движения $\boldsymbol{\omega}_1$.

Результирующее движение, образованное сложением двух равномерных вращений, является сложным движением по криволинейной траектории. Оно может быть плоским, совершаемым в плоскости координат YZ (когда оси $O_{\omega.1}$ и $O_{\omega.2}$ параллельны одна другой), или пространственным, если эти оси пересекаются или перекрещиваются между собой. Траектории движения в первом случае будут плоскими кривыми, лежащими в плоскости координат YZ. Во втором случае – это пространственные кривые.

Общее количество кинематических схем резания, основанных на сочетаниях двух движений, равно семи.

Наиболее сложную структуру имеют кинематические схемы резания, основанные на сочетаниях трех одновременно воспроизводимых элементарных движений. Из трех движений одно всегда определяет номинальную скорость резания, второе – подачу, а третье является вспомогательным движением. Направление и скорость последнего предопределяет специфику траекторий рабочего движения и соответствующих методов обработки.

Каждое из элементарных движений, если его рассматривать отдельно от других, является простым, а результирующее движение – сложным рабочим движением. Скорость каждого элементарного движения может быть разной. Поэтому, во-первых, мгновенная скорость результирующего движения может быть как постоянной, так и переменной по величине, и, во-вторых, возможно бесконечное количество частных кинематических схем резания.

Принципиальные кинематические схемы резания, состоящие из трех элементарных движений, могут быть основаны либо на:

- одном равномерном поступательном движении, осуществляемом с постоянной скоростью $\mathbf{V}_1$;
- одном равномерном вращательном движении, осуществляемом с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$;
- одном равномерном или неравномерном возвратно-поступательном движении, осуществляемом со скоростью $\mathbf{V}_2$

либо на:

- двух равномерных вращательных движениях, осуществляемых с постоянными по величине угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$;
- одном равномерном поступательном движении, осуществляемом с постоянной скоростью $\mathbf{V}_1$.

В первом случае из трех элементарных движений сочетания первых двух ($\mathbf{V}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_1$) образуют семь рассмотренных выше кинематических схем резания. Введение в кинематическую схему резания третьего элементарного равномерного или неравномерного возвратно-поступательного движения ($\mathbf{V}_2$), последовательно занимающего те же положения (рис. 2.18.3), что и поступательное движение со скоростью $\mathbf{V}_1$, повторяет рассмотренные выше сочетания элементарных движений еще семь раз. Общее количество кинематических схем резания рассматриваемого типа (т.е. основанных на двух поступательных и одном вращательном движениях) составляет сорок девять.

Результирующее движение при воспроизведении кинематических схем резания рассматриваемого типа представляет собой равномерное или неравномерное прерывистое сложное рабочее движение. Оно может совершаться в плоскости, когда элементарные движения $\mathbf{V}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_1$ направлены вдоль осей Y и Z или же наклонно к этим осям в плоскости координат YZ. В противном случае оно совершается в пространстве – при этом движения $\mathbf{V}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_1$ направлены вдоль оси X или же наклонно к ней в плоскостях координат XY и XZ или же произвольно в системе координат XYZ.

Траектории сложного рабочего движения в первом случае будут плоскими кривыми, лежащими в плоскости координат YZ, а во втором случае – пространственными кривыми, все точки которых лежат на поверхности круглого конуса. Ось этого конуса совпадает с осью $O_{\omega.1}$ вращательного движения $\boldsymbol{\omega}_1$.

Во втором случае из трех элементарных движений сочетания первых двух ($\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$) образуют семь рассмотренных выше кинематических схем резания. Введение в кинематическую схему резания третьего элементарного равномерного поступательного движения ($\mathbf{V}_1$), последовательно занимающего те же положения, что и вращательное движение со скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, повторяет рассмотренные выше сочетания элементарных движений еще семь раз. Общее количество кинематических схем резания рассматриваемого типа (т.е. основанных на двух вращательных и одном поступательном движениях) также равно сорока девяти.

Результирующее движение в рассматриваемом случае представляет собой равномерное сложное рабочее движение. Оно совершается в плоскости координат YZ, когда оси $O_{\omega.1}$ и $O_{\omega.2}$ вращательных движений $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ параллельны, а прямолинейное движение со скоростью $\mathbf{V}_1$ направлено вдоль одной из осей координат Y или Z или же под углом к этим осям в плоскости координат YZ. Если это условие не выполняется (т.е. когда оси $O_{\omega.1}$ и $O_{\omega.2}$ пересекаются или перекрещиваются одна с другой или же когда поступательное движение со скоростью $\mathbf{V}_1$ направлено вдоль оси X или в одной из плоскостей координат XY или XZ), результирующее движение совершается в пространстве. В первом случае траектории результирующего рабочего движения

будут плоскими кривыми, расположенными в плоскости координат YZ; во втором случае – пространственными кривыми.

Последнюю группу кинематических схем резания составляют схемы, структура которых основана на сочетании трех вращательных движений, осуществляемых с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ и $\boldsymbol{\omega}_3$. Из этих вращений сочетания первых двух ($\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$) образуют рассмотренные выше семь характеристических сочетаний. Добавление к первым двум третьего вращательного движения $\boldsymbol{\omega}_3$ позволяет оси вращения $O_{\omega.1}$ и $O_{\omega.2}$ любого из первых двух вращений повернуть вокруг третьей оси $O_{\omega.3}$, занимающей в пространстве произвольное положение. Это существенно усложняет структуру кинематических схем резания.

Для определения возможных положений оси $O_{\omega.3}$ третьего вращательного движения $\boldsymbol{\omega}_3$ и установления количества характеристических сочетаний удобно рассмотреть схему (рис. 2.18.4).

Пусть оси $O_{\omega.1}$ и $O_{\omega.2}$ расположены параллельно оси абсцисс X, а траектории вращательных движений $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ касаются одна другой в начале системы координат XYZ. Тогда ось $O_{\omega.3}$ вращательного движения $\boldsymbol{\omega}_3$ можно рассматривать как касательную в произвольной точке к части сферы радиуса r с центром в начале системы координат XYZ и заключенной между плоскостями координат XY, YZ и XZ. В каждой точке одной восьмой части этой сферы можно провести бесконечное множество касательных прямых, поэтому количество возможных положений оси $O_{\omega.3}$ также бесконечно большое.

Из множества возможных положений оси $O_{\omega.3}$ в качестве характеристических принимают касательные в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. В каждой из первых шести точек рассматриваются три положения касательных: одно из них – касательно к дуге сферы и расположенно в одной из плоскостей координат XY, YZ и XZ, другое – перпендикулярно к первой касательной, и третье положение касательной – произвольное в касательной плоскости (см. рис. 2.18.4). В точке 7 одна касательная лежит в плоскости, проходящей через ось аппликат Z. Другая касательная расположена в плоскости, касательной к сфере радиуса r и перпендикулярна к первой. Третья касательная занимает произвольное положение в касательной плоскости (см. рис. 2.18.4). Общее количество характеристических положений оси $O_{\omega.3}$ равно 21, каждому из которых соответствует 7 характеристических сочетаний первых двух вращательных движений $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Общее количество сочетаний из трех вращений равно $21 \cdot 7 = 147$ – столько же кинематических схем резания основано на сочетании трех вращательных движений.

Результирующим движением при воспроизведении кинематических схем резания рассматриваемого вида является равномерное сложное рабочее движение, совершаемое в плоскости, когда все три оси $O_{\omega.1}$, $O_{\omega.2}$ и $O_{\omega.3}$ параллельны одна другой, и совершаемое в пространстве, когда хотя бы одна из этих осей пересекается или перекрещивается с двумя другими осями.

Общее количество кинематических схем резания, основанных не более, чем на трех элементарных движениях, равно 282. Возможно построение кинематических схем резания, основанных на четырех и более элементарных движениях. Однако увеличение количества движений в кинематической схеме резания до четырех и более чрезмерно усложняет конструкцию металлорежущего станка, на котором такие схемы могут быть реализованы.

Классификация кинематических схем резания (Грановский Г.И., 1948) обобщила все известные к тому времени методы обработки металлов резанием и указала перспективные направления для разработки принципиально новых способов обработки поверхностей деталей.

Изучение кинематических схем резания имеет важное значение для практики металлообработки, поскольку от вида применяемой схемы и соотношения скоростей составляющих ее элементарных движений во многом зависят геометрические параметры режущих кромок инструмента, параметры режима резания, производительность обработки, изнашивание и стойкость режущего инструмента и др.

2.8. Воспроизведение *“жесткой”* кинематики обработки

Решение задачи воспроизведения *“жесткой”* кинематики обработки на металлорежущем станке следует начинать с анализа геометрической информации об обрабатываемой поверхности детали. Чтобы установить возможные способы обработки заданной поверхности $Д$, надо проанализировать все кинематические схемы

формообразования и определить в соответствие с какими из них обработка заданной поверхности $Д$ возможна. Затем дополнить отобранные таким путем схемы формообразования движениями, приводящими поверхности $Д(И)$ к движению *"самих по себе"* – если это необходимо для обеспечения рационального режима резания и обеспечения обработки поверхности $Д$ детали в заданных границах. После этого приемлемые схемы формообразования трансформируются в принципиальные кинематические схемы резания. Для этого относительные движения детали и инструмента следует разложить на абсолютные движения заготовки и инструмента, совершаемые в системе координат металлорежущего станка. Задача превращения кинематической схемы формообразования в кинематическую схему резания не является однозначной: для одной и той же кинематической схемы формообразования могут быть образованы различные кинематические схемы резания (например, сверление отверстий на сверлильных, токарных и др. станках осуществляется при одной и той же кинематической схеме формообразования, но при разных кинематических схемах резания). Усложняя далее кинематическую схему резания введением установочных движений (в результате осуществления которых заготовка и режущий инструмент занимают исходные положения перед началом обработки), движений управления, вспомогательных движений, связанных с транспортированием и зажимом заготовки, снятием и транспортированием готовых изделий, установкой, подводом, отводом, зажимом и освобождением инструмента, удалением стружки и пр., получим принципиальную кинематику металлорежущего станка.

Взятое в отдельности каждое движение металлорежущего станка воспроизводится исполнительной кинематической группой. Обязательными элементами каждой исполнительной группы являются: исполнительный орган, источник движения и связи между ними. Связи могут быть механическими, гидравлическими, пневматическими, электрическими и др. Различные кинематические исполнительные группы металлорежущего станка могут иметь общие элементы. Например, все исполнительные группы станка могут приводиться в движение от одного электродвигателя. Совокупность кинематических исполнительных групп образует кинематическую схему металлорежущего станка, которая прежде всего зависит от количества и характера сочетаемых исполнительных групп и их назначения.

Для определения кинематики металлорежущего станка следует:

- определить принципиальную кинематическую схему формообразования, обеспечивающую правильную и полную обработку заданной поверхности $Д$ детали;
- разработать принципиальную кинематическую схему резания и распределить относительные движения детали и инструмента, предусмотренные кинематической схемой формообразования, на их абсолютные движения;
- спроектировать кинематическую схему металлорежущего станка, позволяющую воспроизвести все движения, как предусмотренные принципиальной кинематической схемой резания, так и дополнительные вспомогательные движения;

Таким образом проектируя кинематическую схему металлорежущего станка, в первую очередь необходимо определить кинематическую схему формообразования. Если металлорежущий станок проектируется как многоинструментальный, в его кинематической схеме следует предусмотреть возможность воспроизведения кинематической схемы формообразования в процессе работы каждого инструмента, т.е. при формообразовании каждой из поверхностей детали.

При обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ распределение движений формообразования между заготовкой и инструментом также существенно – оно определяет эффективность эксплуатации станка, воспроизводящего ту или иную кинематику формообразования.

Неправильный вариант распределения движений формообразования приводит к сложной функциональной зависимости между элементарными поступательными и вращательными движениями детали и инструмента, к невозможности обработки всей поверхности детали или ее части в полном соответствии с требованиями чертежа.

Г л а в а 3. **Системы координат и линейные преобразования**

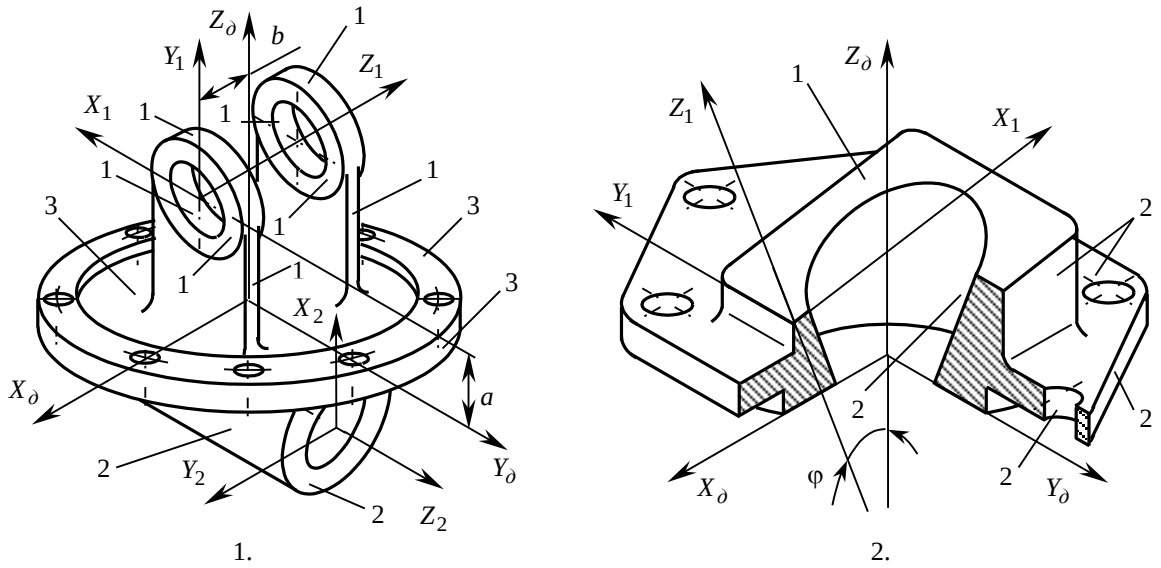
Для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали используются различные системы координат и соответствующие линейные преобразования. Применение находят системы координат следующих видов: прямоугольные и косоугольные декартовы, однородные, цилиндрические, сферические и другие криволинейные системы координат. Линейные преобразования в основном связаны с преобразованием аналитического описания геометрических образов детали и инструмента, заданных в различных системах координат.

3.1. Используемые системы координат

При разработке технологии формообразующей обработки первичной является деталь. Тело детали ограничено рядом поверхностей. Каждая отдельно взятая поверхность аналитически описывается в некоторой системе координат. Степень сложности аналитического представления геометрической информации об обрабатываемой поверхности $Д$ и о детали целиком зависит от выбора системы координат, в которой описывается как конкретная поверхность $Д$, так и вся деталь.

Для аналитического описания рабочих поверхностей деталей удобно вводить в рассмотрение системы координат $X_1Y_1Z_1$, $X_2Y_2Z_2$, …, $X_iY_iZ_i$, $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, $X_uY_uZ_u$ и др., связанные с отдельно взятой поверхностью. Очевидно, например, что поверхности детали, обозначенные 1 (рис. 3.1.1), удобно описывать в системе координат $X_1Y_1Z_1$, поверхности 2 имеют более простое аналитическое представление в системе координат $X_2Y_2Z_2$, а поверхности 3 – в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$. Аналитическое описание детали будет получено, если уравнения всех ее поверхностей будут представлены в некоторой общей системе координат, например, в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$. Для этого начала систем координат $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ следует совместить с началом системы координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ и обеспечить однонаправленность соответствующих осей координат. Например, чтобы систему координат $X_1Y_1Z_1$ совместить с системой координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, следует:

- первую систему координат $X_1Y_1Z_1$ развернуть вокруг оси X_1 в отрицательном направлении на угол -90°. Такое преобразование описывается оператором $\mathbf{Rt}\left(-90^\circ, X_1\right)$ поворота системы координат;
- в новом положении систему координат $X_1Y_1Z_1$ развернуть вокруг оси Z_1 в положительном направлении на угол 90°. Такое преобразование описывается оператором $\mathbf{Rt}\left(90^\circ, Z_1\right)$ поворота системы координат. После двух поворотов оси систем координат становятся однонаправленными;
- из последнего положения первую систему координат сместить вдоль оси Z_1 на величину $-a$, равную расстоянию между плоскостями координат X_1Y_1 и $X_\partial Y_\partial$. Такое преобразование описывается оператором $\mathbf{Tr}\left(-a, Z_1\right)$ переноса системы координат;
- и, наконец, из последнего положения сместить первую систему координат вдоль оси X_1 на величину $-b$, равную расстоянию между плоскостями координат Y_1Z_1 и $Y_\partial Z_\partial$. Это преобразование описывается оператором $\mathbf{Tr}\left(-b, X_1\right)$ переноса системы координат.



1. 2.

Рис. 3.1. Системы координат детали.

Результирующий переход от системы координат $X_1Y_1Z_1$ к системе координат $X_дY_дZ_д$ описывается оператором результирующего преобразования координат $\mathbf{Rs}(1 \to д)$, который определяется совокупностью и последовательностью применения операторов $\mathbf{Rt}(-90^\circ, X_1)$, $\mathbf{Rt}(90^\circ, Z_1)$, $\mathbf{Tr}(-a, Z_1)$ и $\mathbf{Tr}(-b, Z_1)$ частных преобразований координат.

Аналогичное справедливо и в отношение детали (рис. 3.1.2): в этом случае поворот первой системы координат $X_1Y_1Z_1$ вокруг оси Y_1 на угол φ описывается оператором $\mathbf{Rt}(\varphi, Y_1)$ поворота системы координат.

При автоматизированном воспроизведении сложных поверхностей, состоящих из отдельных отсеков, на станке ЧПУ требуется определить положение каждого из формообразуемых отсеков поверхности детали. Отдельные отсеки сложной поверхности *Д* детали, как и отдельные поверхности одной и той же детали, могут быть аналитически представлены в различных (своих) системах координат. Вследствие преимуществ такого подхода к заданию и аналитическому описанию отсеков отдельных поверхностей, он часто используется при решении задач формообразования поверхностей деталей. Это выполняется в порядке, рассмотренном выше.

Автоматизированная подготовка управляющих программ для многокоординатных металлорежущих станков с ЧПУ предусматривает формирование в памяти системы ЧПУ численных данных, описывающих обрабатываемую деталь, инструмент, движения рабочих органов станка и др. в некоторой системе координат. При подготовке к обработке даже относительно простой детали (рис. 3.2) должны быть установлены размерные связи между системой координат $X_{ст}Y_{ст}Z_{ст}$ станка с ЧПУ, относительно которой производится отсчет размеров, исходной точкой, являющейся началом программы обработки (она служит началом системы координат $X_{u.m}.Y_{u.m.}Z_{u.m.}$), деталью и инструментом, с которыми связаны системы координат $X_дY_дZ_д$ и $X_uY_uZ_u$ соответственно и др. При этом многие отдельные поверхности обрабатываемой детали (плоскости, наружные и внутренние круглые цилиндры, внутренние и наружные участки поверхностей тора, конуса, сферы, винтовых поверхностей и др.) обычно задаются в своих системах координат. Кроме перечисленных (см. рис. 3.2) используются и иные (вспомогательные, промежуточные и пр.) системы координат, необходимые для упрощения аналитического описания процесса обработки заданной детали.

Взаимное расположение и относительная ориентация систем координат определяется векторами $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_{u.m.}$, $\mathbf{r}_{прогр.}$, $\mathbf{r}_n$, $\mathbf{r}_i$ и др., для оперирования которыми необходимо иметь их аналитическое представление в некоторой *общей* для всех векторов и других геометрических элементов процесса формообразования системе координат. Приведение перечисленных векторов к общей системе координат предполагает наличие соотношений, описывающих связи между используемыми системами координат.

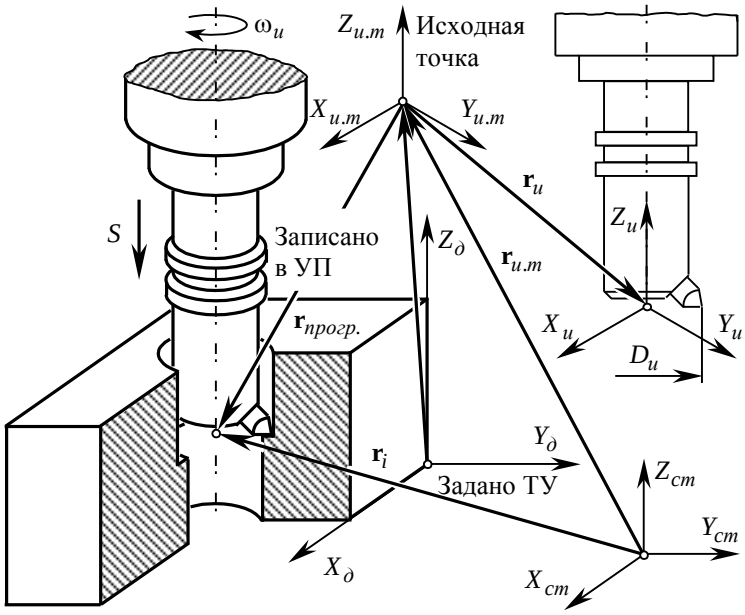


Рис. 3.2. Примеры связей между системами координат при обработке деталей на станке с ЧПУ.

В процессе обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ требуется образование замкнутого цикла последовательных преобразований координат. В простейшем случае такой цикл составляют системы координат $X_{ст}Y_{ст}Z_{ст}$ металлорежущего станка, $X_д Y_д Z_д$ обрабатываемой детали, $X_u Y_u Z_u$ применяемого металлорежущего инструмента, $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ локальная система координат, связанная с точкой K касания поверхностей $Д$ и $И$ и другие вспомогательные системы координат (рис. 3.3). Образование замкнутого цикла прямых и обратных последовательных преобразований координат также предполагает возможность аналитического описания перехода от одной системы координат к другой в прямом и в обратном направлениях.

В памяти системы ЧПУ металлорежущим станком необходимо иметь данные, описывающие соотношения и взаимосвязь между используемыми системами координат с тем, чтобы определить относительную взаимную ориентацию отдельных отсеков и отдельных обрабатываемых поверхностей деталей. Такие соотношения описывают *преобразования координат*. Они основаны на том, что путем последовательных переносов и поворотов вдоль и вокруг осей координат одну систему координат можно привести к другой.

Следует обратить внимание на то, что линейное преобразование координат в трехмерном пространстве можно толковать двояко. Во-первых, на координаты X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 можно смотреть как на координаты одной и той же точки в различных системах координат (Смирнов В.И., 1974). Такое преобразование обычно называют *координатным*. Во-вторых, возможно толкование линейного преобразования как переход от одной точки с координатами X_1, Y_1, Z_1 к другой X_2, Y_2, Z_2 в одной и той же системе координат. Такое преобразование принято называть *отображающим*. Использование линейных преобразований дает возможность, с одной стороны, генерировать геометрические образы – если считать параметры $\{\rho_n\}_{n=1,\,N}$ их криволинейными координатами. Это особенно существенно при решении задач геометрического моделирования. С другой стороны – описывать траектории движений: относительные повороты и перемещения систем координат (если какие-либо из параметров $\{\rho_n\}_{n=1,\,N}$ считать параметрами этих движений).

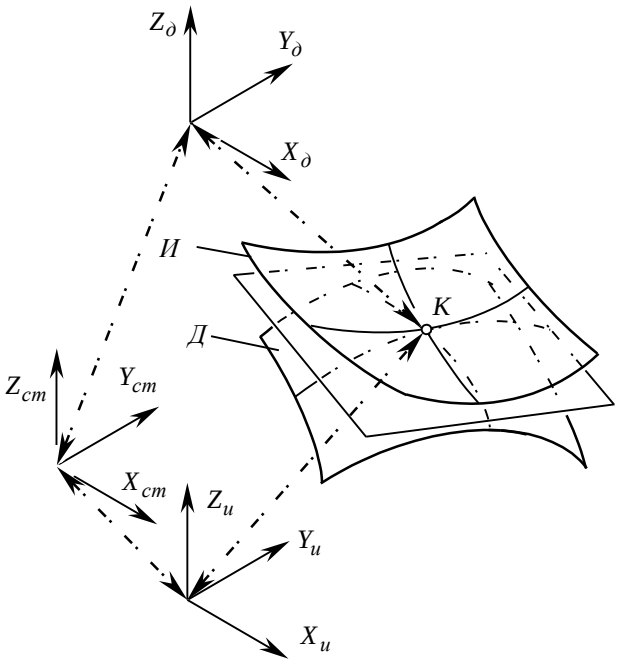


Рис. 3.3. Простейший пример замкнутого цикла прямых и обратных последовательных преобразований координат.

Операторы преобразований координат: $\mathbf{Tr}(a, X_1)$, $\mathbf{Tr}(b, Y_1)$, $\mathbf{Tr}(c, Z_1)$ переноса исходной системы координат $X_1Y_1Z_1$ на величины a, b и c вдоль осей координат X_1, Y_1, Z_1 в новое положение $X_2Y_2Z_2$ и операторы $\mathbf{Rt}(\alpha, X_1)$, $\mathbf{Rt}(\beta, Y_1)$, $\mathbf{Rt}(\gamma, Z_1)$ поворота вокруг этих же осей координат на углы α, β и γ удобно (хотя это и не является обязательным) представлять в матричной форме. В этом случае для нахождения опреатора $\mathbf{Rs}(2 \to 1)$ результирующего преобразования координат операции с ними существенно упрощаются.

Рассмотрим основные свойства матриц и операций с ними, которые находят применение при решении задач формообразования поверхностей деталей.

3.2. Сведения о матрицах, необходимые для решения задач формообразования поверхностей деталей

Решение задач формообразования поверхностей деталей требует многократных прямых и обратных преобразований систем координат и пространства, в которых одни величины линейно выражаются через другие. Операции такого рода удобно описывать при помощи матриц.

3.2.1. Основные определения. *Матрицей* принято называть совокупность элементов a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), расположенных в виде прямоугольной таблицы из "m" строк и "n" столбцов, где m и n – числа, определяющие размер матрицы:

$$\mathbf{A} = [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрица $[A]$ сокращенно записывается так: $[A] = \|a_{ij}\|_{(m \times n)}$.

К прямоугольным матрицам относится *матрица-столбец*, часто называемая вектором (у нее $n = 1$):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}$$

и *матрица-строка*, у которой число строк $m = 1$: $[C] = [C_1 \quad C_2 \quad \ldots \quad C_n]$.

Если $m = n$, матрица будет *квадратной*, в этом случае n – порядок матрицы.

Линия, на которой располагаются элементы a_{ij} квадратной матрицы, является *главной диагональю*, а элементы a_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, n$) – главными.

Линии, параллельные главной диагонали, называют *кодиагоналями*.

Квадратная матрица будет *симметричной*, если $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратная матрица, все элементы которой (кроме диагональных), равны нулю $(a_{ij} = 0;\ i \neq j)$, является *диагональной*:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

или в такой форме: $[A]=[a_{11} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{nn}]$.

Диагональная матрица, все элементы которой равны единице, является *единичной* и обозначается $[E]$:

$$[E]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

В алгебре матриц единичная матрица имеет такое же значение, какое в элементарной алгебре – единица.

Матрица, все элементы которой равны нулю, является *нулевой* и обозначается символом $[0]$.

Две матрицы одинаковых размеров равны, если равны их соответствующие элементы.

Кодиагональная (или *ленточная*) матрица – это квадратная матрица с ненулевой диагональю, по обе стороны от которой имеется одинаковое число ненулевых диагоналей; остальные элементы кодиагональной матрицы равны нулю. Примером трехдиагональной матрицы служит матрица:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & a_{n(n\text{-}1)} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Применение кодиагональных матриц позволяет более эффективно использовать память ЭВМ и других вычислительных устройств. Поэтому целесообразно предварительно матрицы преобразовывать таким образом, чтобы возможно большее их количество представляло собой кодиагональные матрицы.

В пределах каждой симметричной пары диагоналей все элементы кодиагональной матрицы могут быть равны один другому. В этом случае матрица становится *модулированной кодиагональной* матрицей вида

$$[A]=\begin{bmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & b & a & b & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & b & a \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, является *треугольной*. Различают верхнюю (правую) треугольную $(a_{ij}=0; i<j)$ и нижнюю (левую) треугольную $(a_{ij}=0; i>j)$ матрицы:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & & a_{nn} \end{bmatrix}; \qquad [B]=\begin{bmatrix} b_{11} & & & & 0 \\ b_{21} & b_{22} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица будет *транспонированной* (по отношению к исходной $[A]=[a_{ij}]_{(m\times n)}$) и обозначается $[A]^T$, если ее столбцы служат строками матрицы $[A]$, а строки – столбцами:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \qquad [A]^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

или в сокращенной записи $[A]=\lfloor a_{ij} \rfloor_{(m\times n)}$; $[A]^T=\lfloor a_{ji} \rfloor_{(n\times m)}$.

Симметричная квадратная матрица тождественна своей транспонированной матрице, т.е. в этом случае справедливо тождество $[A]=[A]^T$.

В свою очередь матрицы могут быть элементами другой матрицы. Матрица, составленная из других матриц, известна как *клеточная* или *квазиматрица*:

$$[A]=\begin{bmatrix} [A]_{11} & [A]_{12} & \dots & [A]_{1n} \\ [A]_{21} & [A]_{22} & \dots & [A]_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [A]_{m1} & [A]_{m2} & \dots & [A]_{mn} \end{bmatrix}.$$

Если в квазиматрице все элементы, кроме диагональных, равны нулю, она преобразуется в *квазидиагональную*:

$$[A]=\begin{bmatrix} [A]_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [A]_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [A]_{mn} \end{bmatrix}.$$

Кодиагональная и треугольная матрицы в этом случае будут *квазидиагональной* и *квазитреугольной* соответственно.

3.2.2. Операции с матрицами. Математические операции с матрицами сводятся к операциям с их элементами. Матрицы можно складывать, умножать на скаляр, умножать на вектор (представленный в виде матрицы-столбца), а также умножать одну матрицу на другую. Делить матрицы одна на другую нельзя.

Складывать одну матрицу с другой можно только если их размеры одинаковы. В этом случае *суммой двух матриц* $[A]=\lfloor a_{ij} \rfloor_{(m\times n)}$ и $[B]=\lfloor b_{ij} \rfloor_{(m\times n)}$ будет матрица $[C]=\lfloor c_{ij} \rfloor_{(m\times n)}$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц $[A]$ и $[B]$: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$; $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$.

Пример 3.1. В результате сложения матриц $[A]=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ и $[B]=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ получим матрицу $[C]$, равную:

$$[C]=[A]+[B]=\begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 5 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Сложение матриц обладает свойством коммутативности (от перестановки матриц их сумма не меняется) и подчиняется сочетательному закону:

$$[A]+[B]=[B]+[A];$$

$$([A]+[B])+[C]=[A]+([B]+[C]).$$

Умножение матрицы на скаляр p равносильно умножению всех ее элементов на это число: $b_{ij} = p\, a_{ij}$; $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$.

Действие *вычитания* в алгебре матриц определяется как сложение двух матриц, одна из которых умножена на скаляр $p=-1$.

При *умножении двух матриц* каждый элемент матрицы произведения $[C]$ равен сумме произведений элементов k – ой строки матрицы $[A]$ на соответствующие элементы j – го столбца матрицы $[B]$

(3.1) $$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\ .$$

Из этого следует, что две матрицы могут быть перемножены лишь в случае, когда число столбцов первой (левой) равно числу строк второй (правой). Если размер первой матрицы $(m\times n)$, а второй $(n\times p)$, то матрица произведения $[C]$ будет иметь размер $(m\times p)$. В общем случае $[A]\times[B]\neq[B]\times[A]$ (если существуют оба произведения), т.е. операция умножения матриц не обладает свойством коммутативности. Поэтому следует оговаривать порядок перемножения матриц (например, умножим матрицу $[B]$ слева на матрицу $[A]$).

Пример 3.2. Требуется умножить матрицу $[B]$ слева на матрицу $[A]$:

$$[A]=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix};\qquad [B]=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix};\qquad [C]=[A]\times[B]=\begin{bmatrix}(3\times5+1\times4) & (3\times2+1\times3)\\ (2\times5+4\times4) & (2\times2+4\times3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 9\\ 26 & 16\end{bmatrix}.$$

Аналогично перемножаются прямоугольные матрицы с согласованным числом строк и столбцов:

$$[A]=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}_{(2\times3)};\qquad [B]=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}_{(3\times2)};\qquad [C]=[A]\cdot[B]=\begin{bmatrix}(3\times5+2\times1+1\times3) & (3\times4+2\times4+1\times2)\\ (4\times5+1\times1+3\times3) & (4\times4+1\times4+3\times2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 22\\ 30 & 26\end{bmatrix}_{(2\times2)}.$$

Умножение матрицы на вектор является частным случаем перемножения прямоугольных матриц. Умножение производится в порядке, определяемом уравнением (1). В этом случае векторы записываются в виде матрицы-столбца:

$$[C]=[A]\cdot\mathbf{X}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}X_j\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}X_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}X_j\end{bmatrix}.$$

Пример 3.3. Рассмотрим операцию умножения матрицы $[A]=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 8 & 1\\ 4 & 9 & 2\end{bmatrix}$ справа на вектор $\mathbf{X}=19\mathbf{i}+12\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

Вектор **X** перепишем в виде столбцовой матрицы

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 19 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = [19 \quad 12 \quad 4]^T .$$

Тогда

$$[C] = [A] \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times19 + 3\times12 + 5\times4 \\ 2\times19 + 8\times12 + 1\times4 \\ 4\times19 + 9\times12 + 2\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 138 \\ 192 \end{bmatrix}.$$

Полученную матрицу-столбец снова можно записать в векторной форме: $\mathbf{C} = 75\mathbf{i} + 138\mathbf{j} + 192\mathbf{k}$.

Произведение матриц подчиняется сочетательному и распределительному законам:

$$[A] \cdot [B] \cdot [C] = ([A] \cdot [B]) \cdot [C] = [A] \cdot ([B] \cdot [C]);$$

$$[C] \cdot ([A] + [B]) = [C] \cdot [A] + [C] \cdot [B];$$

$$([A] + [B]) \cdot [C] = [A] \cdot [C] + [B] \cdot [C],$$

но

$$([A] + [B]) \cdot [C] \neq [C] \cdot ([A] + [B]).$$

В теории формообразования поверхностей деталей обычно приходится выполнять операции с квадратными матрицами. С квадратной матрицей связано понятие *определителя* и *обратной матрицы*.

Определитель матрицы составляется из ее элементов при неизменном их расположении и называется *модулем матрицы*:

$$Det[A] = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Между матрицей и определителем существует принципиальное различие. Запись определителя в виде упорядоченной таблицы только внешне напоминает квадратную матрицу. Определитель – это *число*, а запись его в виде таблицы – только удобная форма, позволяющая по известным правилам вычислять его значения.

Для квадратной матрицы $[A]$ *обратной матрицей* будет квадратная матрица $[A]^{-1}$ того же порядка, обладающая свойством:

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [E],$$

где $[E]$ – единичная матрица того же порядка.

Решение матричного уравнения

$$[A] \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D} \tag{3.2}$$

можно получить, умножив обе части этого равенства на матрицу $[A]^{-1}$: $[A]^{-1}[A] \cdot \mathbf{X} = [A]^{-1}\mathbf{D}$, но поскольку $[A]^{-1}[A] = [E]$, следовательно, $\mathbf{X} = [A]^{-1}\mathbf{D}$.

Таким образом решение матричного уравнения (2) сводится к нахождению обратной матрицы $[A]^{-1}$.

Для заданной матрицы $[A]$ обратная матрица $[A]^{-1}$ существует лишь в случае, когда исходная матрица не является особенной, т.е. определитель матрицы не равен нулю: $Det[A] \neq 0$.

Известно много методов нахождения матрицы, обратной заданной. Остановимся на двух из них.

Обратную матрицу можно получить путем деления всех элементов *присоединенной (союзной)* матрицы на определитель исходной матрицы. Присоединенная матрица получается путем транспонирования матрицы, составленной из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы.

Элементы обратной матрицы равны

$$a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{Det[A]},$$

где $Det[A]$ – определитель матрицы $[A]$;

$\lfloor A_{ji} \rfloor$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе $Det[A]$.

Алгебраическое дополнение $\lfloor A_{ji} \rfloor$ получается путем вычеркивания в определителе $Det[A]$ строки и столбца, которые проходят через этот элемент. Так алгебраическим дополнением элемента a_{22} в определителе пятого порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

будет определитель четвертого порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Применение рассмотренного способа нахождения обратной матрицы оправдано в случаях, когда исходная матрица имеет порядок не выше четвертого. Это ограничение вызвано тем, что при более высоком порядке исходной матрицы объем вычислительной работы резко увеличивается.

Другой способ нахождения обратной матрицы заключается в последовательном вычислении обратной матрицы путем подбора при помощи единичной матрицы. Записав рядом с заданной матрицей единичную матрицу, производим сложение строк, предварительно подобрав множители так, чтобы на месте заданной матрицы получить единичную. В этом случае на месте единичной матрицы будет искомая обратная матрица.

Пример 3.4. Вычислить матрицу, обратную матрице четвертого порядка

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Рядом с заданной матрицей $[A]$ запишем единичную матрицу $[E]$ такого же порядка

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ко второй, третьей и четвертой строкам обеих матриц прибавим их первую строку, умноженную: на $\frac{1}{2}$ – для второй строки, на –1 – для второй строки и на $-\frac{1}{2}$ – для четвертой строки.

Первая строка каждой матрицы остается неизменной. Получим

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -8 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь к первой, третьей и четвертой строкам полученных матриц прибавим их вторую строку, умноженную: на 6 – для первой строки, на –4 – для третьей строки и на –1 – для четвертой строки. Имеем

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

К первой, второй и четвертой строкам этих матриц прибавим их третью строку, умноженную: на $\frac{4}{3}$ – для первой строки, на $-\frac{1}{12}$ – для второй строки и на $-\frac{1}{3}$ – для четвертой строки. Приходим к такому промежуточному результату

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{7}{12} & \frac{4}{3} & \frac{1}{12} & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

К первой, второй и третьей строкам этих матриц прибавим их четвертую строку, умноженную: на $-\frac{2}{7}$ – для первой строки, на $\frac{5}{28}$ – для второй строки и на $\frac{3}{7}$ – для третьей строки. Это позволяет получить

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} & \frac{10}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{9}{14} & \frac{39}{28} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{28} \\ \frac{6}{7} & -\frac{27}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Чтобы на месте исходной матрицы получить единичную матрицу, достаточно умножить: первую строку на $\frac{1}{2}$, вторую строку на –2, третью строку на $-\frac{1}{6}$ и четвертую строку на $\frac{3}{7}$. Получим

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix}-\frac{2}{7}&\frac{2}{7}&\frac{5}{7}&-\frac{1}{7}\\ \frac{9}{7}&-\frac{39}{14}&\frac{2}{7}&-\frac{5}{14}\\ -\frac{1}{7}&\frac{9}{14}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{14}\\ -\frac{1}{7}&\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{bmatrix}.$$

Полученная выше матрица (она расположена справа) и есть искомая матрица $[A]^{-1}$, обратная заданной матрице $[A]$:

$$[A]^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{7}&\frac{2}{7}&\frac{5}{7}&-\frac{1}{7}\\ \frac{9}{7}&-\frac{39}{14}&\frac{2}{7}&-\frac{5}{14}\\ -\frac{1}{7}&\frac{9}{14}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{14}\\ -\frac{1}{7}&\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{bmatrix}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}-4&4&10&-2\\18&-39&4&-5\\-2&9&-2&-1\\-2&2&-2&6\end{bmatrix}.$$

В правильности полученного результата легко убедиться, сделав проверку: $[A]\cdot[A]^{-1}$ должно быть равно $[E]$:

$$\begin{bmatrix}2&3&11&5\\1&1&5&2\\2&1&3&2\\1&1&3&4\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{14}\begin{bmatrix}-4&4&10&-2\\18&-39&4&-5\\-2&9&-2&-1\\-2&2&-2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Следовательно, найденная матрица действительно является матрицей $[A]^{-1}$, обратной к исходной матрице $[A]$.

Отметим, что для обращения матриц высоких порядков разработаны эффективные программы для ЭВМ.

Приведение матриц к удобному для выполнения вычислений диагональному виду связано с понятиями *собственного числа* и *собственного вектора* матрицы.

Для квадратной матрицы $[A]$, при помощи которой производится линейное преобразование вектора $\mathbf{X}$ в вектор $\mathbf{Y}$: $[A]\cdot\mathbf{X}=\mathbf{Y}$, можно подобрать такой вектор $\mathbf{X}$, что произведение $[A]\cdot\mathbf{X}$ даст вектор, равный исходному, умноженному на скаляр λ:

$$[A]\cdot\mathbf{X}=\lambda\cdot\mathbf{X}. \tag{3.3}$$

В этом случае вектор $\mathbf{X}$ будет собственным вектором матрицы $[A]$, а λ – ее собственным числом.

Записав уравнение (3) в форме

$$([A]-\lambda\cdot[E])\cdot\mathbf{X}=0,$$

представим его в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix}(a_{11}-\lambda)&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1n}\\ a_{21}&(a_{22}-\lambda)&a_{23}&\dots&a_{2n}\\ a_{31}&a_{32}&(a_{33}-\lambda)&\dots&a_{3n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\dots&(a_{nn}-\lambda)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\\vdots\\X_n\end{bmatrix}=0. \tag{3.4}$$

Полученная система однородных уравнений может иметь ненулевое решение, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda) & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.5)$$

или в свернутой матричной форме $|[A]-\lambda\cdot[E]|=0$.

Это уравнение будет *характеристическим уравнением* матрицы $[A]$. Раскрывая определитель (5), получим уравнение n – й степени относительно λ:

$$\lambda^n + B_1\lambda^{n-1} + \dots + B_{n-1}\lambda + B_n = 0. \qquad (3.6)$$

Уравнение (6) имеет "n" корней, следовательно, квадратная матрица n – го порядка имеет "n" собственных чисел λ_i $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$. Каждому собственному числу соответствует собственный вектор:

$$\mathbf{X} = [X_{1i} \quad X_{2i} \quad X_{3i} \quad \cdots \quad X_{ni}]^T.$$

Один из возможных путей нахождения собственных векторов заключается в следующем. Равенство нулю определителя системы линейных уравнений (4) означает, что одно из уравнений системы является линейной комбинацией остальных. Исключая это зависимое уравнение, получим систему из $(n-1)$ уравнений. Подставляя последовательно $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,$ в (6) и решая систему "n" раз, можем с точностью до произвольного множителя найти векторы $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2, \dots$

Квадратная матрица, составленная из собственных векторов

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{n1} \\ X_{12} & 1 & X_{32} & \dots & X_{n2} \\ X_{13} & X_{23} & 1 & \dots & X_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & X_{3n} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

называется *фундаментальной*. Она обладает тем свойством, что умножение матрицы $[A]$ на фундаментальную матрицу слева и на обратную фундаментальной справа приводит исходную матрицу к *диагональному* виду:

$$[X]\cdot[A]\cdot[X]^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Пример 3.5. Рассмотрим как находятся собственные числа и собственные векторы матрицы

$$[A] = \begin{bmatrix} 72 & -18 \\ -18 & 6 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы $[A]$

$$\begin{vmatrix} (72-\lambda) & -18 \\ -18 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрыв определитель, после преобразований получим квадратное уравнение $\lambda^2 - 78\lambda + 108 = 0$. Корни этого уравнения являются собственными числами матрицы $[A]$: $\lambda_1 = 76{,}59$ и $\lambda_2 = 1{,}41$.

Собственные векторы матрицы $[A]$ определяем из уравнений

$$\begin{aligned} (72-\lambda_i)X_{1i} - 18X_{2i} &= 0; \\ -18X_{1i} + (6-\lambda_i)X_{2i} &= 0. \end{aligned}$$

Так как эти уравнения линейно зависимы, для определения собственных векторов можно использовать любое из них, Полагая $X_{11} = 1$, из первого уравнения при $\lambda_1 = 76{,}59$ находим $X_{21} = -0{,}255$. Аналогично, принимая $X_{22} = 1$, $\lambda_2 = 1{,}41$, получаем $X_{12} = 0{,}255$.

Матрица собственных векторов имеет вид

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}255 \\ 0{,}255 & 1 \end{bmatrix}.$$

Легко убедиться, что произведение $[X]\cdot[A]\cdot[X]^{-1}$ дает диагональную матрицу.

Приведенные сведения из алгебры матриц являются полезными при решении задач формообразования поверхностей деталей. Более полное изложение теории матриц и ее применения можно найти в многочисленных изданиях (Hohn, F.E., 1973; Метьюз Д., Уокер Р., 1972; Беклемишев Д.В., 1974; Strang, G., 1986: Potter, M.C., 1978 и др.).

3.3. Системы координат станков с ЧПУ

Станок с числовым программным управлением характеризуется количеством и характером управляемых от системы ЧПУ движений его рабочих органов. Это линейные и поворотные движения вдоль и вокруг осей координат, в совокупность которых не входят вращения инструмента или заготовки, необходимые для осуществления собственно процесса резания. Например, токарный станок с ЧПУ имеет только два поступательных движения вдоль осей, параллельной и перпендикулярной оси шпинделя станка, т.е. вдоль осей X_{cm} и Z_{cm}, тогда как вертикально-фрезерный станок имеет три управляемых от системы ЧПУ движения.

Вращение шпинделя (шпинделя заготовки на токарном станке или шпинделя инструмента на вертикально-фрезерном станке) обычно от системы ЧПУ не управляется (Melkanoff, M.M., Chang, C.-H. 1989).

Для определения взаимного положения и относительных движений инструмента и заготовки используется правая ортогональная система координат. Оси координат и управляемые от системы ЧПУ движения регламентированы стандартом ISO-R 841[1].

Особенностью стандарта ISO-R 841 является то, что ось координат Z_{cm} всегда приимают параллельной оси главного шпинделя станка (рис. 3.4) независимо от того как этот шпиндель расположен – вертикально или горизонтально. При контурной обработке плоскостей эта особенность позволяет использовать в программном обеспечении обозначение координат через X_{cm}, Y_{cm} независимо от расположения оси шпинделя станка. В качестве положительного направления оси Z_{cm} принимают направление от заготовки к инструменту. Ось

[1]EIA Standard RS-267-B: *Axis and Motion Nomenclature for Numerically Controlled Machines (ANSI/EIA RS267-B-83).* Washington, D.C.: Electronic Industries Association, June 1983.

ISO Standard 841-1974: *Axis and Motion Nomenclature for Numerically Controlled Machines.* Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization, 1974.

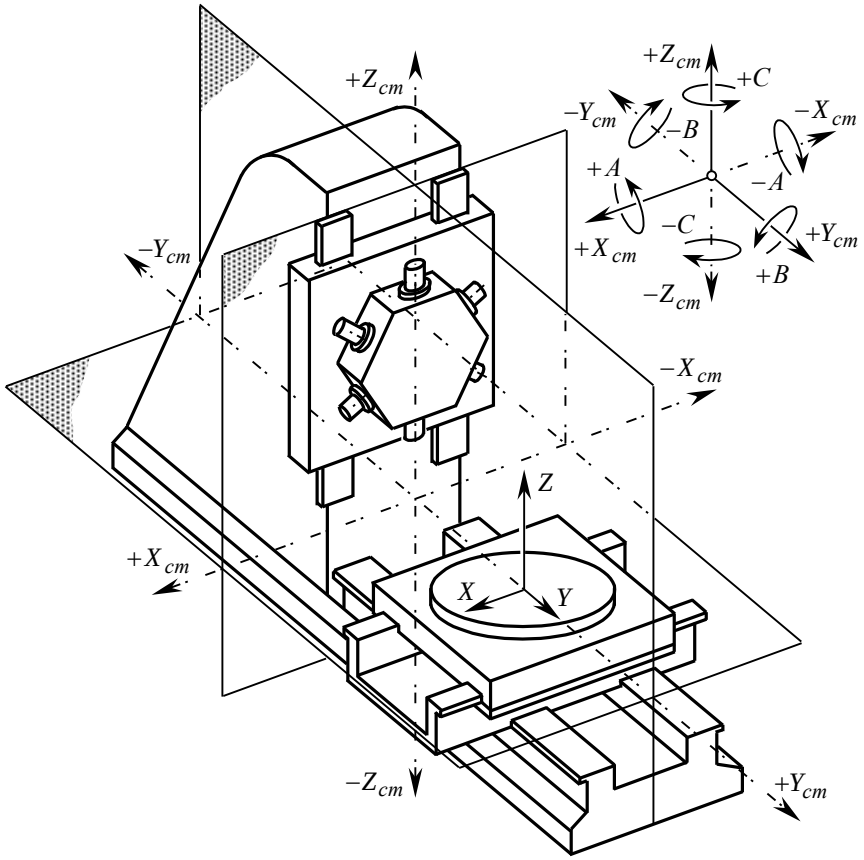


Рис. 3.4. Оси координат и управляемые от системы ЧПУ движения станка.

X_{cm} всегда горизонтальна. Если ось Z_{cm} вертикальна, то положительное направление оси X_{cm} будет направлено вправо, если смотреть от лицевой стороны станка в сторону тыльной его стороны. Если ось Z_{cm} горизонтальная, положительное направление оси X_{cm} будет направлено вправо, если смотреть в направлении от шпинделя к заготовке. Направление оси Y_{cm} определяется по направлениям двух других осей. Положительное направление оси Y_{cm} определяется по правилу правого винта, расположенного вдоль оси Z_{cm}: поворот винта в направлении от оси $+X_{cm}$ к оси $+Y_{cm}$ должен соответствовать продвижению его в направлении $+Z_{cm}$, поскольку используется правая система координат.

Положение начала координат допускается принимать произвольно. Поступательное движение инструмента вдоль осей координат обозначают так же, как и соответствующие оси. Перемещение подвижных органов станка с ЧПУ, приводящее к увеличению расстояния между заготовкой и инструментом, дополнительные движения, параллельные осям X_{cm}, Y_{cm}, Z_{cm}, обозначают u, v и w (вторичные) или p, q и r (третьей очереди). Вращательные движения вокруг осей X_{cm}, Y_{cm} и Z_{cm} обозначают буквами A, B и C, а дополнительные вращательные движения – буквами D и E. Положительные направления вращательных движений $+A$, $+B$ и $+C$ соответствуют направлению вращения правого винта при его движении соответственно вдоль осей $+X_{cm}$, $+Y_{cm}$ и $+Z_{cm}$. Перемещения заготовки и инструмента в системе обозначают по-разному: движения заготовки помечают штрихом сверху (X'_{cm}, Y_{cm}, Z'_{cm}, A', B', C' и т.д.), а положительные направления перемещений заготовки соответствуют отрицательным направлениям перемещений инструмента. Если станок с ЧПУ имеет несколько шпинделей, один из них принимают в качестве главного. Для станков с ЧПУ, в конструкции которых предусмотрены повороты оси шпинделя, он в основном своем положении, соответствующем оси Z_{cm}, перпендикулярен плоскости установки заготовки. В случае дублирования координатных перемещений в качестве первичных движений X_{cm}, Y_{cm} и Z_{cm} принимают движения узлов, расположенных ближе к шпинделю. В соответствие с этим вращение главного шпинделя всегда обозначают буквой C. Если в компоновке станка предусмотрены одновременно шпиндели детали и инструмента, первый считают главным и его вращение обозначают буквой C, а вращение второго – буквой A (вращение вокруг оси X_{cm}), буквой B (вращение вокруг оси Y_{cm}) или буквой D (вращение вокруг оси Z_{cm}).

3.4. Преобразования декартовых систем координат

Системой координат считаем систему правил, описывающих геометрический образ: точку, линию или поверхность в пространстве соответствующим набором чисел X, Y, Z, которые являются координатами или компонентами геометрического образа. Число координат, требуемых для задания точки, определяется размерностью пространства, в котором она описывается. В теории формообразования поверхностей деталей геометрические образы рассматриваются в двумерном (E_2) и трехмерном (E_3) евклидовом пространстве.

3.4.1. Системы координат с параллельными осями. Рассмотрим исходную систему координат $X_1Y_1Z_1$, в которой разместим новую систему координат $X_2Y_2Z_2$. Последовательные переносы системы координат $X_1Y_1Z_1$ вдоль собственных осей до положения $X_2Y_2Z_2$ можно представить так (рис. 3.5).

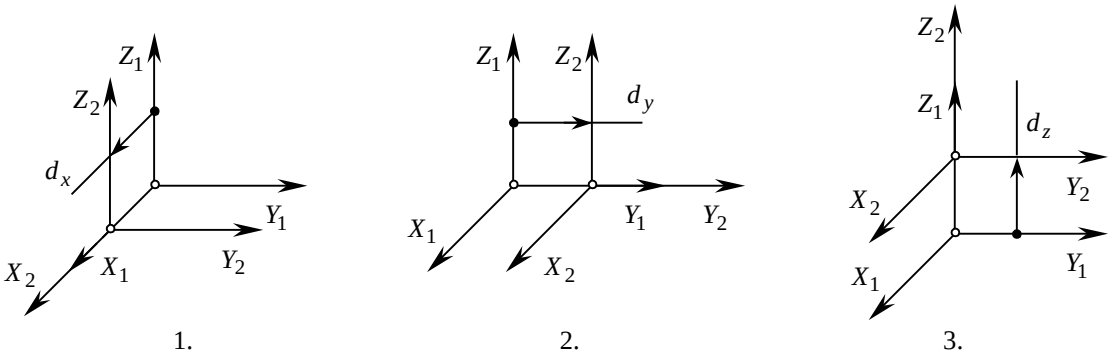


Рис. 3.5. Последовательный перенос системы координат вдоль собственных осей.

В общем случае начало системы координат $X_2Y_2Z_2$ в исходной системе $X_1Y_1Z_1$ определим вектором $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}^T$. Ее оси направим параллельно соответствующим осям системы координат $X_1Y_1Z_1$. Пусть в исходной системе координат произвольная точка M задана радиус-вектором $\mathbf{r}_1^{(M)}$. Тогда ее координаты в новой системе координат определятся так (рис. 3.6):

$$\mathbf{r}_2^{(M)} = \mathbf{r}_1^{(M)} - \mathbf{d}. \tag{3.7}$$

Если использовать развернутую матричную форму записи, то уравнение (7) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ d_y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}.$$

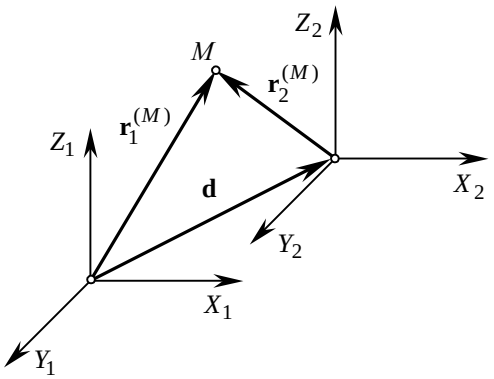


Рис. 3.6. Параллельный перенос начала координат.

Таким образом переход от исходной системы координат к новой осуществляется при помощи столбцовой матрицы $\begin{bmatrix} d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}^T$. Обратный переход от новой системы координат $X_2Y_2Z_2$ к исходной $X_1Y_1Z_1$ описывается уравнением

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}.$$

3.4.2. Линейные преобразования. В декартовых координатах вектор $[X_2\ Y_2\ Z_2]^T$, получаемый из исходного вектора $[X_1\ Y_1\ Z_1]^T$ в результате линейного преобразования пространства, в общем виде записывается так:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}}_{\text{Матрица линейного преобразования}} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}.$$

Компоненты A_{ij} матрицы $[A]$ линейного преобразования определяются через направляющие косинусы углов между осями координат исходной $X_1Y_1Z_1$ и новой $X_2Y_2Z_2$ системами координат:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \cos[\angle X_1, X_2]; & A_{12} &= \cos[\angle Y_1, X_2]; & A_{13} &= \cos[\angle Z_1, X_2]; \\ A_{21} &= \cos[\angle X_1, Y_2]; & A_{22} &= \cos[\angle Y_1, Y_2]; & A_{23} &= \cos[\angle Z_1, Y_2]; \\ A_{31} &= \cos[\angle X_1, Z_2]; & A_{32} &= \cos[\angle Y_1, Z_2]; & A_{33} &= \cos[\angle Z_1, Z_2]. \end{aligned}$$

При этом *положительное направление отсчета углов* между осями координат противоположно направлению хода часовой стрелки.

В приведенных соотношениях на косинусы углов можно также смотреть как на проекции ортов $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$ новой системы координат на оси X_1, Y_1, Z_1 исходной системы.

Обратное преобразование, которое необходимо для перехода от новой системы координат $X_2Y_2Z_2$ к исходной системе $X_1Y_1Z_1$, описывается матрицей, обратной матрице $[A]$, т.е. матрицей $[A]^{-1}$. Поскольку матрица $[A]$ ортогональна, то $[A]^{-1} = [A]^T$, а матрица $[A]^{-1}$ обратного преобразования координат может быть получена путем транспонирования матрицы $[A]$ прямого преобразования координат:

$$[A]^{-1} = [A]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Нахождение транспонированной матрицы менее трудоемко, чем определение обратной (если обратная равна транспонированной). Это следует отнести к преимуществам рассматриваемого способа преобразования координат.

Часто встречаются случаи, когда исходная и новая системы координат развернуты одна относительно другой вокруг *одной общей* оси координат. Более того, сложное относительное расположение систем координат $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$, как правило, удобнее разложить на несколько простых поворотов вокруг осей координат с тем, чтобы матрицу результирующего преобразования координат получить как произведение записанных в соответствующем порядке матриц частных преобразований координат. Для подобных случаев взаимного расположения систем координат матрицы преобразования координат существенно упрощаются и могут быть записаны так:

при повороте вокруг оси X_1 на угол χ (рис. 3.7.1):

$$[A_X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\chi & -\sin\chi \\ 0 & \sin\chi & \cos\chi \end{bmatrix};$$

при повороте вокруг оси Y_1 на угол ξ (рис. 3.7.2):

$$[A_Y]=\begin{bmatrix}\cos\xi & 0 & \sin\xi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\xi & 0 & \cos\xi\end{bmatrix};$$

при повороте вокруг оси Z_1 на угол ζ (рис. 3.7.3):

$$[A_Z]=\begin{bmatrix}\cos\zeta & -\sin\zeta & 0\\ \sin\zeta & \cos\zeta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

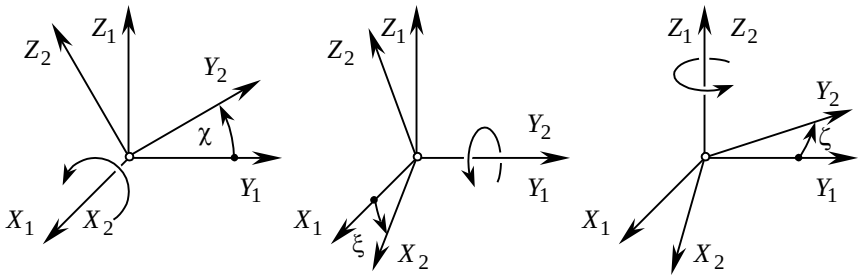


Рис. 3.7. Поворот системы координат вокруг осей координат.

Обратные преобразования производятся при помощи транспонированных матриц $[A_X]^{-1}=[A_X]^T$, $[A_Y]^{-1}=[A_Y]^T$ и $[A]^{-1}=[A]^T$ соответственно.

Векторы $\mathbf{A}_i=[A_{i1}\ \ A_{i2}\ \ A_{i3}]$ (строки матрицы), комплектующие матрицу $[A]$ линейного преобразования, представляют собой линейно независимую систему векторов. Поэтому из девяти элементов матрицы $[A]$ независимыми являются только три ее элемента, которые не должны составлять какой-либо столбец или строку этой матрицы.

Пусть матрица $[A_{1\to 2}]$ перехода от первой системы координат $X_1Y_1Z_1$ ко второй системе координат $X_2Y_2Z_2$ представлена в форме:

$$[A_{1\to 2}]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\angle X_2,X_1) & \cos(\angle X_2,Y_1) & \cos(\angle X_2,Z_1)\\ \cos(\angle Y_2,X_1) & \cos(\angle Y_2,Y_1) & \cos(\angle Y_2,Z_1)\\ \cos(\angle Z_2,X_1) & \cos(\angle Z_2,Y_1) & \cos(\angle Z_2,Z_1)\end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Обозначим орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ исходной системы координат $X_1Y_1Z_1$ после перевода ее в новую систему координат $X_2Y_2Z_2$ через $\mathbf{a}_2(a_{x_2},a_{y_2},a_{z_2})$, $\mathbf{b}_2(b_{x_2},b_{y_2},b_{z_2})$, $\mathbf{c}_2(c_{x_2},c_{y_2},c_{z_2})$. Эта запись указывает на то, что орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ разложены по осям новой системы координат $X_2Y_2Z_2$. На основании формулы (8) матричное представление этих векторов может быть записано в форме:

$$\mathbf{a}_2=[a_2]=\begin{bmatrix}a_{x_2}\\ a_{y_2}\\ a_{z_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}_2=[b_2]=\begin{bmatrix}b_{x_2}\\ b_{y_2}\\ b_{z_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ a_{32}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{c}_2=[c_2]=\begin{bmatrix}c_{x_2}\\ c_{y_2}\\ c_{z_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{bmatrix}.$$

Линейные преобразования, задаваемые матрицей $[A]=[a_{ij}]$, ортогональны. Условия ортогональности записываются так:

$$a_ia_j^T=a_{i_1}^2+a_{i_2}^2+a_{i_3}^2=1;\qquad a_ia_j^T=a_{i_1}a_{j_1}+a_{i_2}a_{j_2}+a_{i_3}a_{j_3}=0,\qquad (i\neq j).$$

Так как орты $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_2$ – единичные и взаимно перпендикулярные, то

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1;\\
&\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1;\\
&\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1;\\
&\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0;\\
&\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0;\\
&\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0.
\end{aligned}
\qquad (3.9)
$$

Шесть уравнений (9) связывают девять элементов матрицы (8). Следовательно, независимыми являются только три элемента матрицы $[A_{1\to 2}]$.

Для контроля правильности выполнения действий в случае необходимости выполнения многократных преобразований координат целесообразно использовать соотношения, связывающие элементы матрицы $[A_{1\to 2}]$. Помимо зависимостей (9), можно получить еще шесть зависимостей для указанных элементов матрицы $[A_{1\to 2}]$.

Обозначим через $\mathbf{a}_1(a_{x_1}, a_{y_1}, a_{z_1})$, $\mathbf{b}_1(b_{x_1}, b_{y_1}, b_{z_1})$, $\mathbf{c}_1(c_{x_1}, c_{y_1}, c_{z_1})$ орты новой системы координат $X_2Y_2Z_2$, разложенные по осям исходной системы координат $X_1Y_1Z_1$. На основании (8) запишем

$$
[a_1] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}; \qquad [b_1] = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}; \qquad [c_1] = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}.
$$

Так как векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ – единичные и взаимно перпендикулярные, то

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1;\\
&\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1;\\
&\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1;\\
&\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0;\\
&\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = a_{11}a_{32} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0;\\
&\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.
\end{aligned}
\qquad (3.10)
$$

Три независимых элемента матрицы преобразования координат $[A_{1\to 2}]$ должны быть выбраны таким образом, чтобы ни одно из уравнений (9) или (10) не вырождалось в тождество.

На основании (9) и (10) можно указать следующее правило проверки правильности вычисления элементов матрицы $[A_{1\to 2}]$:

- определитель матрицы преобразования $[A_{1\to 2}]$ равен $|A_{1\to 2}| = \pm 1$ (“+”– если левая система координат преобразована в левую или правая система координат преобразована в правую, и “–” – если левая система координат преобразована в правую и наоборот, если правая система координат преобразована в правую);
- сумма квадратов элементов, содержащихся в одной и той же строке (или в одном и том же столбце), равна единице;
- сумма произведений соответствующих элементов двух строк (или двух столбцов) равна нулю;
- каждый элемент определителя матрицы преобразования равен своей адъюнкте (адъюнкта – это минор определителя, взятый с учетом знака), умноженной на $|A_{1\to 2}| = \pm 1$.

Если исходная и новая системы координат не только имеют разные начала координат, но и их оси развернуты одна относительно другой, то результирующее преобразование координат описывается выражением:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix},$$

где первая матрица в произведении описывает линейное преобразование, а последняя столбцовая матрица задает линейное смещение начала новой системы координат $X_2Y_2Z_2$ в исходной системе координат $X_1Y_1Z_1$.

3.4.3. Однородные координаты точек. Для решения задач формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ преобразования координат, удобно описывать при помощи матриц и векторов четвертого порядка. Основная особенность и главное преимущество этого подхода заключается в том, что любые преобразования координат могут быть описаны при помощи одной математической операции умножения матриц, тогда как использование матриц и векторов третьего порядка требует применения двух операций: преобразование поворота системы координат моделируется умножением матриц, а преобразовани смещения – сложением векторов. Для этого введем в рассмотрение однородные координаты, являющиеся обобщением декартовых координат.

В зависимости от геометрической (физической) природы векторы четвертого порядка точек в трехмерном пространства E_3 делят на собственные и несобственные. К первым относят радиус-векторы точек, ко вторым – векторы, получаемые дифференцированием или бесконечно малым преобразованием радиус-векторов. Координаты векторов четвертого порядка называют однородными координатами. Собственные векторы имеют четвертую однородную координату равную единице, а несобственные – четвертую координату, равную нулю.

Радиус-вектор некоторой точки M с декартовыми координатами $X^{(M)}$, $Y^{(M)}$, $Z^{(M)}$ записывается в виде матрицы-столбца четвертого порядка:

$$\mathbf{r}^{(M)} = \begin{bmatrix} X^{(M)} \\ Y^{(M)} \\ Z^{(M)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{(M)} & Y^{(M)} & Z^{(M)} & 1 \end{bmatrix}^T. \tag{3.11}$$

Вектор $\mathbf{r}^{(M)}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{r}^{(M)} = \mathbf{i}X^{(M)} + \mathbf{j}Y^{(M)} + \mathbf{k}Z^{(M)} + \mathbf{e}.$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – орты системы координат. Аналитически они записываются так:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Радиус-вектор начала координат равен

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \tag{3.12}$$

Единственная операция, которая преобразует один радиус-вектор в другой радиус-вектор – это умножение первого радиус-вектора на оператор преобразования координат.

По определению радиус-вектора его начало всегда совпадает с началом системы координат.

Несобственный вектор $\mathbf{a}$ имеет однородные координаты a_x, a_y, a_z и 0, т.е.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

и не представляет никакую точку.

Несобственными векторами вида (13) являются скорость и ускорение точек, нормаль к поверхности, погрешности положения точек и др.

Несобственные векторы можно складывать один с другим и с собственными векторами. В результате получаются соответственно несобственный и собственный вектор, что легко установить, формально выполняя операции с векторами вида (11) и (13). Кроме того, несобственный вектор можно умножить на скаляр, получая в результате этой операции снова несобственный вектор. Координатная запись этих операций может быть представлена так

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{x_1} + a_{x2} \\ a_{y_1} + a_{y2} \\ a_{z_1} + a_{z2} \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{r} + \mathbf{a} = \begin{bmatrix} r_x + a_x \\ r_y + a_y \\ r_z + a_z \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad p \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} pa_x \\ pa_y \\ pa_z \\ 0 \end{bmatrix},$$

где p – скаляр.

Эти операции имеют ясную геометрическую трактовку. Например, складывая собственный и несобственный векторы, по определению, получаем вектор, приложенный там же, где приложено первое слагаемое, т.е. получаем радиус-вектор.

Для двух несобственных векторов и пары, состоящей из собственного и несобственного векторов, определено скалярное $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ и векторное $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ произведения, например,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = r_x a_x + r_y a_y + r_z a_z \qquad \text{и} \qquad \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Для трех векторов, из которых хотя бы один несобственный, определено смешанное произведение, например:

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} a_{1_x} & a_{1_y} & a_{1_z} \\ a_{2_x} & a_{2_y} & a_{2_z} \\ a_{3_x} & a_{3_y} & a_{3_z} \end{vmatrix}.$$

3.4.4. Применение однородных координат. Рассмотрим две системы координат: исходную $X_1Y_1Z_1$ и новую $X_2Y_2Z_2$. Одна и та же точка M пространства имеет в этих системах разные координаты, за исключением тривиального случая, когда системы координат $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ полностью совпадают одна с другой. Обозначим через $\mathbf{r}_1^{(M)}$ и $\mathbf{r}_2^{(M)}$ радиус-векторы вида (13) точки M в каждой из систем координат соответственно. Радиус-векторы $\mathbf{r}_1^{(M)}$ и $\mathbf{r}_2^{(M)}$ связаны между собой соотношением

$$\mathbf{r}_2^{(M)} = \mathbf{Rs}(1 \to 2) \cdot \mathbf{r}_1^{(M)},$$

где $\mathbf{Rs}(1 \to 2)$ – оператор результирующего преобразования координат, имеющий следующее матричное представление:

$$\mathbf{Rs}(1 \to 2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Левый верхний блок порядка 3×3 описывает поворот новой системы координат $X_2Y_2Z_2$ относительно своего начала координат в такое положение, в котором оси этой системы располагаются параллельно соответствующим осям исходной системы координат $X_1Y_1Z_1$ и одинаково направлены с ними. Отсюда следует, что этот блок представляет собой ортогональную матрицу, т.е. для всех $i, k = 1, 2, 3$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^{3} a_{ji} a_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq k; \\ 1, & \text{если} \quad i = k \end{cases}$$

и, кроме того, определитель этой матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1.$$

Три первые координаты a_{14}, a_{24}, a_{34} четвертого столбца оператора $\mathbf{Rs}(1 \to 2)$ результирующего преобразования координат представляют собой декартовы координаты начала новой системы координат $X_2Y_2Z_2$ в исходной системе координат $X_1Y_1Z_1$.

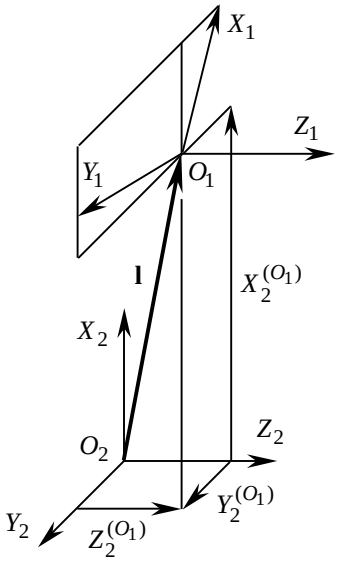


Рис. 3.8. К выводу матрицы преобразования оординат.

Оператор $\mathbf{Rs}(1 \to 2)$ результирующего преобразования координат может быть получен так.

Рассмотрим две системы координат $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ (рис. 3.8). Положение некоторой точки M в исходной системе координат $X_1Y_1Z_1$ определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_1^{(M)} = \left| X_1^{(M)} \quad Y_1^{(M)} \quad Z_1^{(M)} \quad 1 \right|^T$.

Положение этой же точки M в системе координат $X_2Y_2Z_2$ может быть определено радиус-вектором $\mathbf{r}_2^{(M)} = \left| X_2^{(M)} \quad Y_2^{(M)} \quad Z_2^{(M)} \quad 1 \right|^T$.

Справедливо соотношение $\mathbf{r}_2 = \mathbf{Rs}(1 \to 2) \cdot \mathbf{r}_1$. Оператор $\mathbf{Rs}(m \to n)$ преобразования координат составляется так:

$$\mathbf{Rs}(1 \to 2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{l} \cdot \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{l} \cdot \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{l} \cdot \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\angle X_2, X_1) & \cos(\angle X_2, Y_1) & \cos(\angle X_2, Z_1) & X_2^{(O_1)} \\ \cos(\angle Y_2, X_1) & \cos(\angle Y_2, Y_1) & \cos(\angle Y_2, Z_1) & Y_2^{(O_1)} \\ \cos(\angle Z_2, X_1) & \cos(\angle Z_2, Y_1) & \cos(\angle Z_2, Z_1) & Z_2^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (3.14)$$

Здесь $\mathbf{l}$ – вектор, направленный из O_2 в O_1 $\left(|\mathbf{l}| = O_2O_1\right)$; $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$ – орты новой системы координат $X_2Y_2Z_2$, а $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ – орты исходной системы координат $X_1Y_1Z_1$; O_1 и O_2 – начала исходной $X_1Y_1Z_1$ и новой $X_2Y_2Z_2$ систем координат.

Использование однородных координат позволяет унифицировать математические действия при многократных преобразованиях координат, с чем часто приходится сталкиваться при решении задач формообразования поверхностей деталей.

Операторы результирующих преобразований координат можно представить как произведения относительно простых операторов последовательных преобразований координат (табл. 3.1). Следует помнить, что порядок матриц в произведениях имеет существенное значение.

Пример 3.6. Пусть новая система координат $X_2Y_2Z_2$ получена в результате поворота исходной системы координат $X_1Y_1Z_1$ на угол 30° вокруг оси Z_1 и смещения на вектор $[0 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 1]^T$ (рис. 3.9). Такое преобразование координат описывается оператором $\mathbf{Rs}(1 \to 2)$ результирующего преобразования координат:

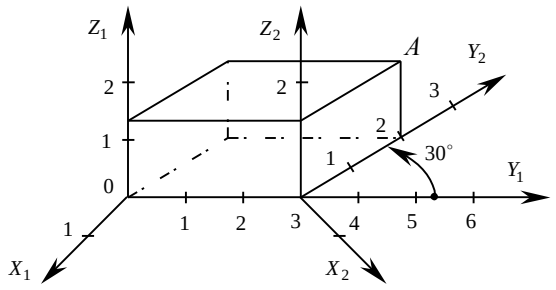


Рис. 3.9. Пример преобразования координат при переносе начала системы координат, совмещенного с поворотом вокруг оси аппликат (Marciniak, K, 1991).

$$\mathbf{Rs}(1 \to 2) = \mathbf{Rt}\left(30^\circ, Z_1\right)\mathbf{Tr}(3, Y_1) = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Координаты некоторой точки M, заданные в исходной системе координат $X_1Y_1Z_1$ радиус-вектором $\mathbf{r}_1^{(M)} = [0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$, в новой системе координат $X_2Y_2Z_2$ выражаются радиус-вектором $\mathbf{r}_2^{(M)}$, равным:

$$\mathbf{r}_2^{(M)} = \mathbf{Rs}(1 \to 2) \cdot \mathbf{r}_1^{(M)} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 3{,}866 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

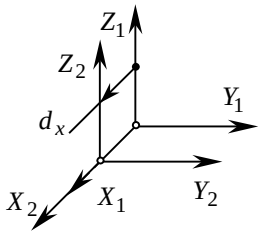
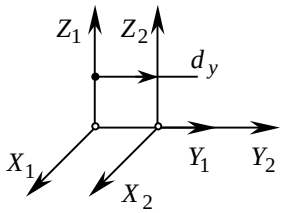
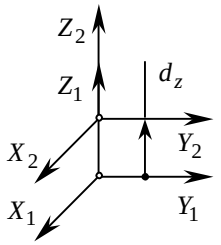
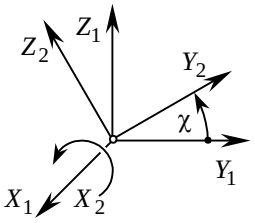
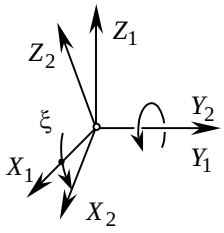
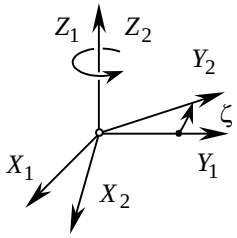
При использовании однородных координат обратное преобразование координат требует нахождения оператора обратного преобразования координат $\mathbf{Rs}(2 \to 1)$, который равен обратному оператору $\mathbf{Rs}^{-1}(1 \to 2)$ прямого преобразования координат, т.е. $\mathbf{Rs}(2 \to 1) = \mathbf{Rs}^{-1}(1 \to 2)$. Если

$$\mathbf{Rs}(1 \to 2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а элементы матрицы обратного преобразования координат обозначены через b_{ik}:

Операторы преобразования правых систем координат

Таблица 3.1

Преобразования координат			Описание оператора преобразования координат	
действие	схема	обозначение оператора	в матричной форме	системой уравнений
перенос вдоль оси X на d_x		$\mathbf{Tr}(d_x, X)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$X_2 = X_1 - d_x;$ $Y_2 = Y_1;$ $Z_2 = Z_1.$
перенос вдоль оси Y на d_y		$\mathbf{Tr}(d_y, Y)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$X_2 = X_1;$ $Y_2 = Y_1 - d_y;$ $Z_2 = Z_1.$
перенос вдоль оси Z на d_z		$\mathbf{Tr}(d_z, Z)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$X_2 = X_1;$ $Y_2 = Y_1;$ $Z_2 = Z_1 - d_z.$
поворот вокруг оси X на угол χ		$\mathbf{Rt}(\chi, X)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ 0 & -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$X_2 = X_1;$ $Y_2 = Y_1 \cos\chi + Z_1 \sin\chi;$ $Z_2 = -Y_1 \cos\chi + Z_1 \sin\chi;$
поворот вокруг оси Y на угол ξ		$\mathbf{Rt}(\xi, Y)$	$\begin{bmatrix} \cos\xi & 0 & -\sin\xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\xi & 0 & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$X_2 = X_1 \cos\xi - Z_1 \sin\xi;$ $Y_2 = Y_1;$ $Z_2 = X_1 \sin\xi + Z_1 \cos\xi.$
поворот вокруг оси Z на угол ζ		$\mathbf{Rt}(\zeta, Z)$	$\begin{bmatrix} \cos\zeta & \sin\zeta & 0 & 0 \\ -\sin\zeta & \cos\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$X_2 = X_1 \cos\zeta + Y_1 \sin\zeta;$ $Y_2 = -X_1 \sin\zeta + Y_1 \cos\zeta;$ $Z_2 = Z_1.$

$$\mathbf{Rs}\,(2\to 1)=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то

$$\mathbf{Rs}\,(2\to 1)\cdot[B]=\mathbf{Rs}^{-1}(1\to 2)=[a_{ik}]^{-1}=\left[\frac{A_{ik}}{\det[a_{ik}]}\right], \tag{3.15}$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе $\det[a_{ik}]$.

Вследствие ортогональности минора

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

оператора $\mathbf{Rs}\,(1\to 2)$ прямого преобразования координат процедура нахождения оператора $\mathbf{Rs}\,(2\to 1)$ обратного преобразования координат существенно упрощается:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Оставшиеся элементы b_{14}, b_{24}, b_{34} матрицы $\mathbf{Rs}\,(2\to 1)$ обратного преобразования координат могут быть получены по формуле (15), используя которую, находим:

$$b_{14}=-(a_{11}a_{14}+a_{21}a_{24}+a_{31}a_{34});$$

$$b_{24}=-(a_{12}a_{14}+a_{22}a_{24}+a_{32}a_{34});$$

$$b_{34}=-(a_{13}a_{14}+a_{23}a_{24}+a_{33}a_{34}).$$

В конечном итоге можно записать, что

$$\mathbf{Rs}\,(2\to 1)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -(a_{11}a_{14}+a_{21}a_{24}+a_{31}a_{34}) \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -(a_{12}a_{14}+a_{22}a_{24}+a_{32}a_{34}) \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -(a_{13}a_{14}+a_{23}a_{24}+a_{33}a_{34}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если оператор $\mathbf{Rs}\,(1\to 2)$ результирующего преобразования координат представить в виде:

$$\mathbf{Rs}\,(1\to 2)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_x & b_y & c_y & d_y \\ a_y & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

оператор $\mathbf{Res}(2 \to 1)$ обратного преобразования координат записывается так:

$$\mathbf{Rs}(2 \to 1) = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & -\mathbf{d}\cdot\mathbf{a} \\ b_x & b_y & b_z & -\mathbf{d}\cdot\mathbf{b} \\ c_x & c_y & c_z & -\mathbf{d}\cdot\mathbf{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$ и $\mathbf{d} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$.

Пример 3.6. (продолжение). Оператор $\mathbf{Re}(2 \to 1)$ обратного результирующего преобразования координат (от новой $X_2Y_2Z_2$ к исходной $X_1Y_1Z_1$) имеет вид:

$$\mathbf{Rs}(2 \to 1) = \mathbf{Rs}^{-1}(1 \to 2) = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 & 0 & -1{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}866 & 0 & -2{,}595 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для описания многократных $n-$кратных последовательных преобразований координат достаточно воспользоваться формулой

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{Rs}((n-1) \to n)\cdot \mathbf{Rs}((n-2) \to (n-1))\cdot \ldots \cdot \mathbf{Rs}(1 \to 2)\cdot \mathbf{r}_1 = \left(\prod_{i=1}^{n} [\mathbf{Rs}((n-i) \to (n-i+1))]\right)\cdot \mathbf{r}_1, \tag{3.16}$$

которая представляет собой произведения матриц частных последовательных преобразований координат вида (14) и (табл. 3.1).

Следует еще раз подчеркнуть, что в общем случае порядок перемножения матриц в (16) имеет существенное значение. Операторы $\mathbf{Tr}(d_x, X)$, $\mathbf{Tr}(d_y, Y)$, $\mathbf{Tr}(d_z, Z)$, $\mathbf{Rt}(\alpha, X)$, $\mathbf{Rt}(\beta, Y)$ и $\mathbf{Rt}(\gamma, Z)$ последовательных переносов вдоль и поворотов вокруг осей системы координат XYZ входят в (16) как вырожденные случаи некоторого оператора результирующего преобразования координат $\mathbf{Rs}((n-i+1) \to (n-i))$, когда он описывает единственное смещение вдоль или только поворот вокруг одной из осей системы координат XYZ.

3.4.5. Правые и левые системы координат. Изменение направленности систем координат. В математике вообще и в геометрии в частности принято использовать левые системы координат. При программировании обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ общепринятым является использование правых систем координат металлорежущего станка.

Преобразование правой системы координат в левую и обратно производится при помощи операторов отображения.

Чтобы изменить направление оси абсцисс на противоположное, т.е. чтобы для новой $X_2Y_2Z_2$ и исходной $X_1Y_1Z_1$ систем координат справедливыми были соотношения $X_2 = -X_1$, $Y_2 = Y_1$ и $Z_2 = Z_1$, достаточно воспользоваться оператором $\mathbf{Rf}(Y_1Z_1)$ отображения относительно плоскости координат Y_1Z_1:

$$\mathbf{Rf}(Y_1Z_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Изменение направления оси ординат на противоположное (т.е. чтобы для новой $X_2Y_2Z_2$ и исходной $X_1Y_1Z_1$ систем координат справедливыми были соотношения $X_2 = X_1$, $Y_2 = -Y_1$ и $Z_2 = Z_1$) производится оператором $\mathbf{Rf}\,(X_1Z_1)$ отображения относительно плоскости координат X_1Z_1:

$$\mathbf{Rf}\,(X_1Z_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Чтобы изменить направление оси аппликат на противоположное, т.е. чтобы для новой $X_2Y_2Z_2$ и станой $X_1Y_1Z_1$ систем координат справедливыми были соотношения $X_2 = X_1$, $Y_2 = Y_1$ и $Z_2 = -Z_1$, достаточно воспользоваться оператором $\mathbf{Rf}\,(X_1Y_1)$ отображения относительно плоскости координат X_1Y_1:

$$\mathbf{Rf}\,(X_1Y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При каждом из таких преобразований правая система координат становится левой или наоборот.

3.5. Влияние преобразований координат на основные квадратичные формы поверхности детали и исходной инструментальной поверхности

При решении задач формообразования поверхностей деталей производятся многократные преобразования координат. Это приводит к тому, что уравнение поверхности $Д(И)$ изменяется. Поэтому коэффициенты первых двух основных квадратичных форм форм $Ф_{1.\partial(u)}$ и $Ф_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ следует находить заново. Избежать необходимости многократного выполнения этой рутинной операции можно путем использования операторов преобразования координат. Коэффициенты первых двух основных квадратичных форм, найденные в одной системе координат, в этом случае могут быть использованы, когда поверхность $Д(И)$ определена в другой системе координат или иначе параметризована. Эти факторы учитываются путем применения операторов преобразования координат и якобиана преобразования параметров при определении коэффициентов квадратичных форм $Ф_{1.\partial(u)}$ и $Ф_{2.\partial(u)}$.

Поэтому важным является вопрос о влиянии преобразований координат на основные квадратичные формы $Ф_{1.\partial(u)}$ и $Ф_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$.

Рассмотрим случай когда поверхность $Д(И)$ задана уравнениями в параметрической форме (1.1):

$$X_{\partial(u)} = X_{\partial(u)}\lfloor U_{\partial[u]}, V_{\partial(u)} \rfloor; \qquad Y_{\partial(u)} = Y_{\partial(u)}\lfloor U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)} \rfloor; \qquad Z_{\partial(u)} = Z_{\partial(u)}\lfloor U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)} \rfloor.$$

Первая основная квадратичная форма $Ф_{1.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$, определяющая метрику поверхности, записывается в форме (1.23):

$$Ф_{1.\partial(u)} \Rightarrow \quad dS^2_{\partial(u)} = E_{\partial(u)} dU^2_{\partial(u)} + 2F_{\partial(u)} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} dV^2_{\partial(u)}.$$

Вторая основная квадратичная форма $\Phi_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$, определяющая кривизну поверхности и ее кручение, записывается так (1.35):

$$\Phi_{2.\partial(u)} \Rightarrow -d\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot d\mathbf{n}_{\partial(u)} = d^2\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = L_{\partial(u)} dU^2_{\partial(u)} + 2M_{\partial(u)} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + N_{\partial(u)} dV^2_{\partial(u)}.$$

Третья $\Phi_{3.\partial(u)}$ и четвертая $\Phi_{4.\partial(u)}$ квадратичные формы поверхности $Д(И)$ выражаются через первые две ее основные квадратичные формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ и $\Phi_{2.\partial(u)}$.

Для удобства каждую из обрабатываемых поверхностей детали и каждый отдельный участок ИИП $И$ задают в своих системах координат, связанных с соответствующей поверхностью $Д(И)$. По этой причине, а также вследствие того, что в задачах формообразования часто применяют и другие системы координат, необходимо приведение уравнений каждого участка поверхности $Д(И)$ к некоторой общей для всех системе координат. Для этого удобно уравнения поверхности $Д(И)$ представлять в матричной форме (в виде матриц-столбцов): $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \begin{bmatrix} X_{\partial(u)} & Y_{\partial(u)} & Z_{\partial(u)} & 1 \end{bmatrix}^T$, а преобразования координат производить при помощи оператора $\mathbf{Rs}(1 \to 2)$ результирующего преобразования координат (14):

(3.17)
$$\mathbf{Rs}(1 \to 2) = \begin{bmatrix} \cos(\angle X_1 X_2) & \cos(\angle Y_1 X_2) & \cos(\angle Z_1 X_2) & d_x \\ \cos(\angle X_1 Y_2) & \cos(\angle Y_1 Y_2) & \cos(\angle Z_1 Y_2) & d_y \\ \cos(\angle X_1 Z_2) & \cos(\angle Y_1 Z_2) & \cos(\angle Z_1 Z_2) & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Чтобы получить уравнение поверхности $Д(И)$ в новой системе координат, матрицу-столбец $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \begin{bmatrix} X_{\partial(u)} & Y_{\partial(u)} & Z_{\partial(u)} & 1 \end{bmatrix}^T$ следует умножить слева на оператор $\mathbf{Rs}(1 \to 2)$:

$$\mathbf{r}_{\partial(u)_2} = \mathbf{Rs}(1 \to 2) \cdot \mathbf{r}_{\partial(u)_1}.$$

Очевидно, что уравнение поверхности $Д(И)$ в новой системе координат $X_2Y_2Z_2$ будет отличаться от исходного уравнения этой же поверхности, заданной в исходной системе координат $X_1Y_1Z_1$. По этой причине изменится и форма описания первых двух основных квадратичных форм $\Phi_{1.\partial(u)}$ и $\Phi_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$. Очевидно, что используя уравнения (1.47) и (1.48)-(1.50), можно рассчитать гауссовы коэффициенты первых двух основных квадратичных форм для уравнения $\mathbf{r}_{\partial(u)_2} = \begin{bmatrix} X_{\partial(u)} & Y_{\partial(u)} & Z_{\partial(u)} & 1 \end{bmatrix}^T$ в новой системе координат $X_2Y_2Z_2$.

Любая квадратичная форма допускает матричное представление. Квадратичные формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ и $\Phi_{2.\partial(u)}$ в матричном виде представляются так:

(3.18)
$$\begin{bmatrix} \Phi_{1.\partial(u)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)} & dV_{\partial(u)} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{\partial(u)} & F_{\partial(u)} & 0 & 0 \\ F_{\partial(u)} & G_{\partial(u)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)} \\ dV_{\partial(u)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

(3.19)
$$\begin{bmatrix} \Phi_{2.\partial(u)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)} & dV_{\partial(u)} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{\partial(u)} & M_{\partial(u)} & 0 & 0 \\ M_{\partial(u)} & N_{\partial(u)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)} \\ dV_{\partial(u)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

По правилу перемножения матриц произведение второго и третьего сомножителей в (18) и в (19) является столбцовой матрицей, а произведение матрицы-строки (первого сомножителя) на столбцовую матрицу произведения второго и третьего сомножителей равно матрице первого порядка, т.е. числу $\Phi_{1.\partial(u)}$ или $\Phi_{2.\partial(u)}$.

В результате преобразования координат столбцовая матрица переменных в (18) и в (19) преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_2} \\ dV_{\partial(u)_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Rs}\,(1 \to 2) \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_1} \\ dV_{\partial(u)_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Подставив это выражение в (18) и в (19), получим

$$\left[\Phi_{1.\partial(u)_2}\right] = \left\{ \mathbf{Rs}\,(1 \to 2) \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_1} \\ dV_{\partial(u)_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^T \cdot \begin{bmatrix} E_{\partial(u)_1} & F_{\partial(u)_1} & 0 & 0 \\ F_{\partial(u)_1} & G_{\partial(u)_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Rs}\,(1 \to 2) \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_1} \\ dV_{\partial(u)_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\left[\Phi_{2.\partial(u)_2}\right] = \left\{ \mathbf{Rs}\,(1 \to 2) \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_1} \\ dV_{\partial(u)_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^T \cdot \begin{bmatrix} L_{\partial(u)_1} & M_{\partial(u)_1} & 0 & 0 \\ M_{\partial(u)_1} & N_{\partial(u)_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Rs}\,(1 \to 2) \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_1} \\ dV_{\partial(u)_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

По правилу транспонирования произведения имеем:

$$\left\{ \mathbf{Rs}\,(1 \to 2) \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)} \\ dV_{\partial(u)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^T = \mathbf{Rs}^T\,(1 \to 2) \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)} \\ dV_{\partial(u)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T.$$

Следовательно

$$\left[\Phi_{1.\partial(u)_2}\right] = \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_1} \\ dV_{\partial(u)_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \left(\mathbf{Rs}^T\,(1 \to 2) \cdot \begin{bmatrix} E_{\partial(u)_1} & F_{\partial(u)_1} & 0 & 0 \\ F_{\partial(u)_1} & G_{\partial(u)_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Rs}\,(1 \to 2) \right) \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_1} \\ dV_{\partial(u)_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\Phi_{2.\partial(u)_2}\right] = \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_1} \\ dV_{\partial(u)_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \left(\mathbf{Rs}^T\,(1 \to 2) \cdot \begin{bmatrix} L_{\partial(u)_1} & M_{\partial(u)_1} & 0 & 0 \\ M_{\partial(u)_1} & N_{\partial(u)_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Rs}\,(1 \to 2) \right) \cdot \begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_1} \\ dV_{\partial(u)_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

В уравнениях (20) матрицы в круглых скобках

$$\mathbf{Rs}^T(1\to 2)\cdot\begin{bmatrix} E_{\partial(u)} & F_{\partial(u)} & 0 & 0\\ F_{\partial(u)} & G_{\partial(u)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{Rs}(1\to 2) \quad \text{и} \quad \mathbf{Rs}^T(1\to 2)\cdot\begin{bmatrix} L_{\partial(u)} & M_{\partial(u)} & 0 & 0\\ M_{\partial(u)} & N_{\partial(u)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{Rs}(1\to 2)$$

симметричны, а столбцовая матрица

$$\begin{bmatrix} dU_{\partial(u)_1}\\ dV_{\partial(u)_1}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

составлена из переменных $dU_{\partial(u)_1}$ и $dV_{\partial(u)_1}$. Поэтому (20) является квадратичной формой относительно этих величин.

Если заданная в исходной системе координат $X_1Y_1Z_1$ поверхность $Д(И)$ имеет квадратичные формы $\Phi_{1.\partial(u)_1}$ или $\Phi_{2.\partial(u)_1}$ с матрицами соответственно

$$\begin{bmatrix} E_{\partial(u)_1} & F_{\partial(u)_1} & 0 & 0\\ F_{\partial(u)_1} & G_{\partial(u)_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} L_{\partial(u)_1} & M_{\partial(u)_1} & 0 & 0\\ M_{\partial(u)_1} & N_{\partial(u)_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

то после перехода к новой системе координат $X_2Y_2Z_2$, в новых переменных эти квадратичные формы будут иметь матрицы

(3.21)

$$\left[\Phi_{1.\partial(u)_2}\right] = \mathbf{Rs}^T(1\to 2)\cdot\begin{bmatrix} E_{\partial(u)_1} & F_{\partial(u)_1} & 0 & 0\\ F_{\partial(u)_1} & G_{\partial(u)_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{Rs}(1\to 2);$$

$$\left[\Phi_{2.\partial(u)_2}\right] = \mathbf{Rs}^T(1\to 2)\cdot\begin{bmatrix} L_{\partial(u)_1} & M_{\partial(u)_1} & 0 & 0\\ M_{\partial(u)_1} & N_{\partial(u)_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{Rs}(1\to 2).$$

Квадратичные формы $\Phi_{1.\partial(u)}$ и $\Phi_{2.\partial(u)}$ в исходной $X_1Y_1Z_1$ и новой $X_2Y_2Z_2$ системах координат имеют различные коэффициенты. При этом необходимо помнить, что одна и та же точка M поверхности $Д(И)$ в исходной системе координат $X_1Y_1Z_1$ имеет координаты $X_1^{(M)}$, $Y_1^{(M)}$, $Z_1^{(M)}$, а в новой – свои координаты $X_2^{(M)}$, $Y_2^{(M)}$, $Z_2^{(M)}$. Координаты $X_1^{(M)}$, $Y_1^{(M)}$, $Z_1^{(M)}$ и $X_2^{(M)}$, $Y_2^{(M)}$, $Z_2^{(M)}$ связаны между собой оператором (17) результирующего преобразования координат.

Использование соотношений (21) и (22) для перерасчета первых двух основных квадратичных форм $\Phi_{1.\partial(u)}$ и $\Phi_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ после преобразования координат заметно упрощает расчеты и способствует получению точных и надежных результатов.

В общем случае после каждого преобразования координат коэффициенты $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ и $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$, $N_{\partial(u)}$ первых двух основных квадратичных форм $\Phi_{1.\partial(u)}$ и $\Phi_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ изменяются. Гауссовы коэффициенты инвариантны относительно только переноса начала координат, когда поворот осей координат отсутствует – это однозначно следует из структуры формул (1.47) и (1.48)-(1.50) для расчета коэффициентов $E_{\partial(u)}$, $F_{\partial(u)}$, $G_{\partial(u)}$ и $L_{\partial(u)}$, $M_{\partial(u)}$, $N_{\partial(u)}$. Перенос начала координат приводит к появлению новых констант, которые исчезают после первого дифференцирования, тогда как структурные изменения формул для расчета этих же коэффициентов при повороте осей координат более существенны.

3.6. Косоугольные системы координат

Косоугольные системы координат встречаются при решении задач формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ. Например, подвижный репер с началом на поверхности $Д(И)$, с двумя осями, касательными к координатным линиям на поверхности, и третьей осью, направленной по нормали к поверхности $Д(И)$, в общем случае неортогональны. Поэтому необходимо либо уметь по заданному косоугольному базису строить ортогональный, либо преобразовывать косоугольные координаты.

3.6.1. Базисы косоугольных систем координат. Координаты вектора зависят от выбора базиса. Пусть некоторый вектор $\mathbf{r}$ в исходном базисе $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ имеет координаты r_{x_1}, r_{y_1}, r_{z_1}, а в новом базисе $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$ – координаты r_{x_2}, r_{y_2}, r_{z_2} (рис. 3.10).

Установим связь между координатами одного и того же вектора в этих базисах $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$.

Выразим новые базисные векторы в исходном базисе (Клиот-Дашинский М.И., 1974). Обозначив координаты вектора $\mathbf{i}_2$ в исходном базисе через t_{11}, t_{12}, t_{13}, координаты вектора $\mathbf{j}_2$ – через t_{21}, t_{22}, t_{23}, а координаты вектора $\mathbf{k}_2$ – через t_{31}, t_{32}, t_{33}, получим

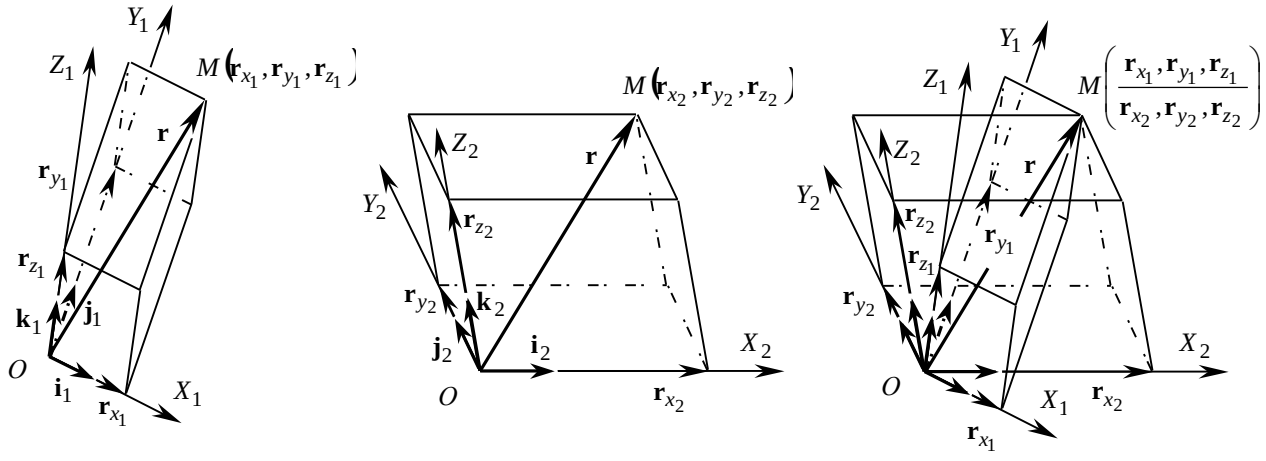
$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_2 &= t_{11}\mathbf{i}_1 + t_{12}\mathbf{j}_1 + t_{13}\mathbf{k}_1;\\
\mathbf{j}_2 &= t_{21}\mathbf{i}_1 + t_{22}\mathbf{j}_1 + t_{23}\mathbf{k}_1;\\
\mathbf{k}_2 &= t_{31}\mathbf{i}_1 + t_{32}\mathbf{j}_1 + t_{33}\mathbf{k}_1.
\end{aligned} \qquad (3.22)$$

Коэффициенты правых частей этих равенств образуют матрицу

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица неособенная, т.к. при $D(T) = 0$ не существует обратной матрицы $[T]^T$, а это означает, что исходные базисные векторы не могут быть выражены в виде линейных комбинаций векторов $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$. Последнее утверждение противоречит предположению, что система $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ образует базис трехмерного пространства.

Неособенная матрица $[M_{1\to 2}]$, транспонированная по отношению к матрице $[T]$:



1. 2. 3.

Рис. 3.10. Базисы косоугольных систем координат.

(3.23) $$[M_{1\to 2}]=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}=[T]^T,$$

будет матрицей перехода от первой системы координат $X_1Y_1Z_1$ ко второй системе координат $X_2Y_2Z_2$. Ее $i-$й столбец, совпадающий с $i-$й строкой матрицы $[T]$, состоит из координат нового базиса $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$, выраженных в исходном базисе $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$.

Найдем зависимость новых координат вектора $\mathbf{r}$ от исходных его координат. Для этого представим вектор $\mathbf{r}$ через базисные векторы исходного $X_1Y_1Z_1$ и нового $X_2Y_2Z_2$ базисов:

(3.24) $$\mathbf{r}=r_{x_1}\mathbf{i}_1+r_{y_1}\mathbf{j}_1+r_{z_1}\mathbf{k}_1;$$

(3.25) $$\mathbf{r}=r_{x_2}\mathbf{i}_2+r_{y_2}\mathbf{j}_2+r_{z_2}\mathbf{k}_2.$$

Воспользовавшись формулами (22), в разложении (25) новые базисные векторы выразим через исходные:

$$\mathbf{r}=r_{x_2}(t_{11}\mathbf{i}_1+t_{12}\mathbf{j}_1+t_{13}\mathbf{k}_1)+r_{y_2}(t_{21}\mathbf{i}_1+t_{22}\mathbf{j}_1+t_{23}\mathbf{k}_1)+r_{z_2}(t_{31}\mathbf{i}_1+t_{32}\mathbf{j}_1+t_{33}\mathbf{k}_1).$$

Приведя в этом соотношении подобные члены, получим

(3.26) $$\mathbf{r}=(t_{11}r_{x_2}+t_{21}r_{y_2}+t_{31}r_{z_2})\mathbf{i}_1+(t_{12}r_{x_2}+t_{22}r_{y_2}+t_{32}r_{z_2})\mathbf{j}_1+(t_{13}r_{x_2}+t_{23}r_{y_2}+t_{33}r_{z_2})\mathbf{k}_1.$$

Так как равенства (24) и (26) выражают один и тот же вектор в одном и том же базисе, то в силу единственности разложения вектора соответственные координаты в этих равенствах должны совпадать:

$$\begin{aligned} r_{x_1}&=t_{11}r_{x_2}+t_{21}r_{y_2}+t_{31}r_{z_2};\\ r_{y_1}&=t_{12}r_{x_2}+t_{22}r_{y_2}+t_{32}r_{z_2};\\ r_{z_1}&=t_{13}r_{x_2}+t_{23}r_{y_2}+t_{33}r_{z_2}, \end{aligned}$$

откуда после замены t_{ki} на m_{ik} находим

$$\begin{aligned} r_{x_1} &= m_{11}r_{x_2} + m_{12}r_{y_2} + m_{13}r_{z_2};\\ r_{y_1} &= m_{21}r_{x_2} + m_{22}r_{y_2} + m_{23}r_{z_2};\\ r_{z_1} &= m_{31}r_{x_2} + m_{32}r_{y_2} + m_{33}r_{z_2}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

В равенствах (27) исходные координаты вектора выражены через его новые координаты. Решая систему уравнений (27) относительно неизвестных r_{x_2}, r_{y_2}, r_{z_2}, получаем

$$\begin{aligned} r_{x_2} &= s_{11}r_{x_1} + s_{12}r_{y_1} + s_{13}r_{z_1};\\ r_{y_2} &= s_{21}r_{x_1} + s_{22}r_{y_1} + s_{23}r_{z_1};\\ r_{z_2} &= s_{31}r_{x_1} + s_{32}r_{y_1} + s_{33}r_{z_1}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

где коэффициенты правых частей образуют матрицу

$$[S]=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix},$$

обратную матрице $[M_{1\to 2}]$:

$$[S]=[M_{1\to 2}]^{-1}. \tag{3.29}$$

В приведенных формулах использованы матрицы $[M_{1\to 2}]$, $[S]$ и $[T]$. Матрица $[T]$ – это таблица, составленная из коэффициентов равенства (22), определяющих зависимость новых базисных векторов от исходных. Матрица $[S]$ – это таблица из коэффициентов формул (28), характеризующих зависимость новых координат вектора от исходных его координат. Матрица перехода $[M_{1\to 2}]$ служит таблицей в формулах (27), устанавливающих зависимость исходных координат от новых.

Матрицы $[M_{1\to 2}]$, $[S]$ и $[T]$ несобственные и тесно связаны одна с другой. Из определяющих матрицы $[M_{1\to 2}]$, $[S]$ соотношений (23), (29) и правила транспонирования обратной матрицы $\left(\{[A]^{-1}\}^T=\{[A]^T\}^{-1}\right)$, получим $[S]=[M_{1\to 2}]^{-1}$, $[T]=[M_{1\to 2}]^T$, $[S]=\{[T]^T\}^{-1}$ и $[T]=\{[S]^T\}^{-1}$.

Если матрицу $[A]$ можно выразить через матрицу $[B]$ по формуле $[A]=\{[B]^T\}^{-1}$, то справедливо также и обратное равенство $[B]=\{[A]^T\}^{-1}$. Такие матрицы являются контрградиентными одна другой.

Из изложенного следует:

Правило 3.1. *Если зависимость новых базисных векторов от исходных определяется матрицей коэффициентов* $[T]$*, то зависимость новых координат вектора от исходных его координат определяется матрицей* $[S]$*, контрградиентной матрице* $[T]$.

Рассматривая вопрос преобразования косоугольных координат, Faux, I.D. и Pratt, M.J. (1987) отмечают, что применение косоугольных координат удобно в случаях, когда базисные векторы взаимно не ортогональны. На рис. 3.11 положение каждой точки плоскости, проходящей через точки A, B, O, определяется радиус-вектором $\mathbf{r}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ с началом в точке O', где $|\mathbf{a}|=O'A$, $|\mathbf{b}|=O'B$ при условии, что

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq 0$. Таким образом точку O' можно считать началом косоугольной системы осей с координатами (α,β). Длины отрезков $O'A$ и $O'B$ определяют масштабы вдоль этих осей.

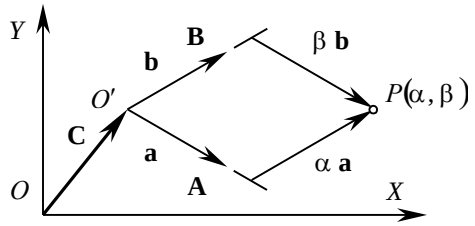


Рис. 3.11. К преобразованию косоугольных координат (Faux, I.D., and Pratt, M.J., 1987).

Абсолютные координаты точки $P(\alpha,\beta)$ определяются соотношением $\mathbf{r}=\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b}+\mathbf{c}$, где $|\mathbf{c}|=OO'$.

Если A, B, O' лежат в одной плоскости OXY, это уравнение можно так представить в матричном виде:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}X\\Y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\1\end{bmatrix}.$$

где $[a_1\ \ a_2\ \ 0]^T$, $[b_1\ \ b_2\ \ 0]^T$, $[c_1\ \ c_2\ \ 1]$ – декартовы компоненты векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ соответственно.

В трехмерном пространстве абсолютный радиус-вектор можно представить при помощи трех не компланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и радиус-вектора $\mathbf{r}_o$, определяющего положение начала системы координат, т.е.: $\mathbf{r}=\mathbf{r}_o+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}$.

Это уравнение представимо в матричной форме

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\\1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{r}_o\\ \hline 0^T & & & 1\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\\1\end{bmatrix}.$$

Детерминант этой матрицы задается величиной $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$; он не равен нулю, т.к. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не компланарны. Параметры λ, μ, ν являются косоугольными координатами по отношению к осям с началом в $\mathbf{r}_o$ и с направляющими векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ соответственно.

3.6.2. Построение ортонорминованного базиса. По заданному произвольному базису $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ можно (Клиот-Дашинский М.И., 1974) построить ортонормированный базис $\mathbf{i}_N$, $\mathbf{j}_N$, $\mathbf{k}_N$ – базис, векторы которого попарно ортогональны и имеют норму, равную единице (ортонормированному базису соответствует прямоугольная декартова система координат). Найдем сначала вспомогательный базис $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$, векторы которого попарно ортогональны, но могут иметь норму, не равную единице.

Первый базисный вектор определим как $\mathbf{i}_2=\mathbf{i}_1$. Ясно, что $\mathbf{i}_2\neq 0$, т.к. вектор $\mathbf{i}_1$ ненулевой, ибо он входит в линейно независимую систему $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$. Второй базисный вектор определим формулой $\mathbf{j}_2=\mathbf{j}_{1_1}-\nu_1\mathbf{i}_2$, где скаляр ν_1 подобран так, чтобы вектор $\mathbf{j}_2$ был ортогонален вектору $\mathbf{i}_2$ (рис. 3.12):

$$\mathbf{j}_2\cdot\mathbf{i}_2=(\mathbf{j}_1-\nu_1\mathbf{i}_2)\cdot\mathbf{i}_2=\mathbf{j}_1\cdot\mathbf{i}_2-\nu_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2=0.$$

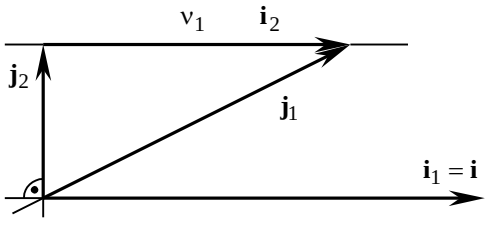


Рис. 3.12. К построению ортонормированного базиса.

Следовательно, $\nu_1=\dfrac{\mathbf{j}_1\cdot\mathbf{i}_2}{\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{i}_2}$. Знаменатель этой дроби не равен нулю, т.к. $\mathbf{i}_2\neq 0$. Поэтому и $\mathbf{j}_2$ – ненулевой вектор, ибо векторы $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{j}_1$ линейно независимы.

Допустим, что попарно ортогональные ненулевые векторы $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{j}_2$ уже определены. Построим вектор $\mathbf{k}_2$. Для этого положим $\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_1-\nu_2\mathbf{i}_1-\nu_3\mathbf{j}_2$ и определим числа ν_2 и ν_3 из условия ортогональности вектора $\mathbf{k}_2$

векторам $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{j}_2$: $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2 - \nu_2 \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2$ и $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2 - \nu_3 \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_2$. Откуда $\nu_2 = \dfrac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2}{\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2}$ и $\nu_3 = \dfrac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2}{\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_2}$.

Знаменатели этих дробей не равны нулю, т.к. $\mathbf{i}_2 \neq 0$, $\mathbf{j}_2 \neq 0$. Поэтому и $\mathbf{k}_2$ – ненулевой вектор, т.к. он выражается в виде линейной комбинации линейно независимых векторов $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ с ненулевыми коэффициентами.

Построенные ненулевые векторы $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$ попарно ортогональны и линейно независимы.

Так как векторы $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$ линейно независимы, то они образуют базис в трехмерном пространстве. Если каждый из векторов разделить на его норму, получим векторы $\mathbf{i}_N = \dfrac{\mathbf{i}_2}{|\mathbf{i}_2|}$; $\mathbf{j}_N = \dfrac{\mathbf{j}_2}{|\mathbf{j}_2|}$; $\mathbf{k}_N = \dfrac{\mathbf{k}_2}{|\mathbf{k}_2|}$, образующие ортонормированный базис.

Рассмотренный способ построения ортонормированного базиса по заданной линейно независимой системе называют процессом ортогонализации системы векторов.

Пример 3.7. Построим ортонормированную систему векторов по линейно независимой системе $\mathbf{i}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{j}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{k}_1 = (1, 3, -3)$. Координаты векторов заданы в естественном базисе.

1. Построим вспомогательную систему $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$, векторы которой попарно ортогональны:

а). $\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_1 = (1, 1, 0)$;

б). $\mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_1 - \nu_1 \mathbf{i}_2$, $\nu_1 = \dfrac{\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2}{\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2} = \dfrac{2}{2} = 1$, $\mathbf{j}_2 = (1, 1, 1) - (1, 1, 0) = (0, 0, 1)$;

в). $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 - \nu_2 \mathbf{i}_2 - \nu_3 \mathbf{j}_2$, $\nu_2 = \dfrac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2}{\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2} = \dfrac{4}{2} = 2$, $\nu_3 = \dfrac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2}{\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_2} = -\dfrac{3}{1} = -3$, $\mathbf{k}_2 = (1, 3, -3) - 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (-1, 1, 0)$.

2. Построим ортонормированную систему:

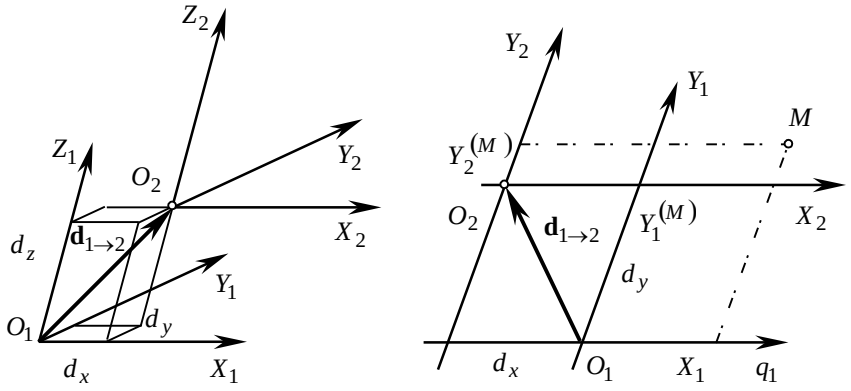
$$\mathbf{i}_N = \frac{\mathbf{i}_2}{|\mathbf{i}_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \qquad \mathbf{j}_N = \frac{\mathbf{j}_2}{|\mathbf{j}_2|} = (0, 0, 1); \qquad \mathbf{k}_N = \frac{\mathbf{k}_2}{|\mathbf{k}_2|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Для локального репера с началом на поверхности $Д(И)$ направления касательных $\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$ могут быть взаимно перпендикулярными (в этом случае $\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = 0$), тогда векторы $\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$ и $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ (здесь $\mathbf{N}_{\partial(u)} = \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$) образуют локальный ортогональный базис в точке. Если направления касательных взаимно не перпендикулярны, такой базис можно построить несколькими путями. Например, $\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ формируют такой базис, если мы определим $\mathbf{m} = \mathbf{N}_{\partial(u)} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$. Далее переход к ортонормированному базису очевиден.

3.6.3. Преобразования косоугольных координат. Преобразования косоугольных координат удобно рассмотреть в такой последовательности: сначала рассмотрим параллельный перенос систем координат в пространстве, а затем поворот систем координат.

3.6.3.1 Параллельный перенос систем координат. Исходная система координат $X_1 Y_1 Z_1$ с началом координат в точке O_1 (рис. 3.13.1) переносом на вектор $\mathbf{d}_{1\to 2}$ преобразуется в систему координат $X_2 Y_2 Z_2$ с началом координат в точке O_2. Оси X_2, Y_2, Z_2 параллельны соответствующим осям X_1, Y_1, Z_1 исходной системы координат. Параллельный перенос описывается следующими формулами:

$$X_2 = X_1 - d_x; \qquad Y_2 = Y_1 - d_y; \qquad Z_2 = Z_1 - d_z.$$



1. 2.

Рис. 3.13. Преобразования косоугольных координат: параллельный перенос начала координат.

Аналогичное имеет место при параллельном переносе косоугольных систем координат на плоскости (рис.3.13.2). Поэтому приведенные формулы справедливы и для вырожденного случая преобразоваия координат на плоскости.

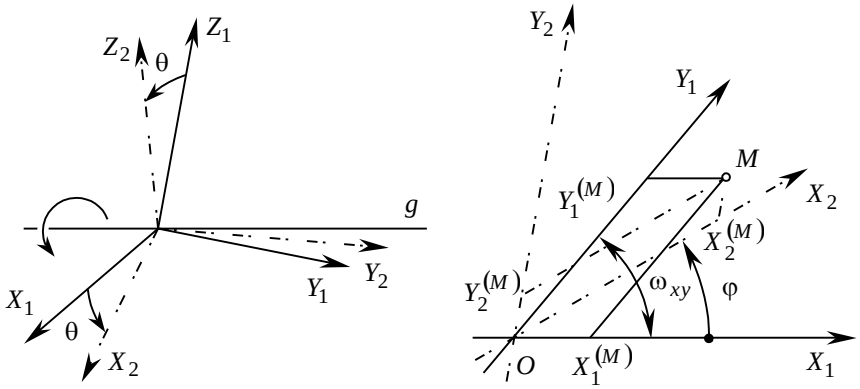
3.6.3.2. Поворот систем координат. Поворот декартовой системы координат $X_1Y_1Z_1$ вокруг проходящей через начало координат оси g (рис. 3.14.1) с направляющими косинусами $\cos\angle(X_1, g)=\alpha$, $\cos\angle(Y_1, g)=\beta$, $\cos\angle(Z_1, g)=\gamma$ на угол θ переводит ее в систему кооридинат $X_2Y_2Z_2$. Такое преобразование координат описывается формулами:

$$X_2 = X_1\left(\cos\theta + \alpha^2(1-\cos\theta)\right) + Y_1\left(\gamma\sin\theta + \alpha\beta(1-\cos\theta)\right) + Z_1\left(-\beta\sin\theta + \alpha\gamma(1-\cos\theta)\right);$$

$$Y_2 = X_1\left(-\gamma\sin\theta + \alpha\beta(1-\cos\theta)\right) + Y_1\left(\cos\theta + \beta^2(1-\cos\theta)\right) + Z_1\left(\alpha\sin\theta + \beta\gamma(1-\cos\theta)\right);$$

$$Z_2 = X_1\left(\beta\sin\theta + \alpha\gamma(1-\cos\theta)\right) + Y_1\left(-\alpha\sin\theta + \beta\gamma(1-\cos\theta)\right) + Z_1\left(\cos\theta + \gamma^2(1-\cos\theta)\right).$$

Если известны направляющие косинусы углов между осями декартовой системы координат систем координат $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ с общим началом, то справедливы следующие формулы:



1. 2.

Рис. 3.14. Преобразование косоугольных координат: поворот системы координат.

$$X_2 = l_1X_1 + m_1Y_1 + n_1Z_1;$$

$$Y_2 = l_2X_1 + m_2Y_1 + n_2Z_1;$$

$$X_3 = l_3X_1 + m_3Y_1 + n_3Z_1,$$

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы ($i=1,2,3$).

В векторной форме:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{Rs}(1\to 2)\cdot\mathbf{X}_1,$$

где $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ и $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2(X_2, Y_2, Z_2)$. Оператор результирующего преобразования координат может быть представлен в матричной форме:

$$\mathbf{Rs}(1 \to 2) = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

где матрица в правой части является ортогональной.

Если заданы две системы координат $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ с общим началом координат и известны косинусы углов между положительными направлениями осей X_1, Y_1, Z_1 системы $X_1Y_1Z_1$ и осей X_2, Y_2, Z_2 системы $X_2Y_2Z_2$, а также косинусы ω_{xy}, ω_{yz}, ω_{xz} координатных углов системы координат $X_1Y_1Z_1$, то, зная положение точки M в системе координат $X_2Y_2Z_2$, можно вычислить положение той же точки в системе координат $X_1Y_1Z_1$. В этом случае следует воспользоваться такими формулами:

$$X_1 = \frac{(1-\omega_{xy}^2)X - (\omega_{xz} - \omega_{xy}\omega_{yz})Y - (\omega_{yz} - \omega_{xz}\omega_{xy})Z}{1 + 2\omega_{xy}\omega_{yz}\omega_{xz} - \omega_{xy}^2 - \omega_{yz}^2 - \omega_{xz}^2};$$

$$Y_1 = \frac{(1-\omega_{yz}^2)Y - (\omega_{xy} - \omega_{yz}\omega_{xz})Z - (\omega_{xz} - \omega_{xy}\omega_{yz})X}{1 + 2\omega_{xy}\omega_{yz}\omega_{xz} - \omega_{xy}^2 - \omega_{yz}^2 - \omega_{xz}^2};$$

$$Z_1 = \frac{(1-\omega_{xz}^2)Z - (\omega_{yz} - \omega_{xz}\omega_{xy})X - (\omega_{xy} - \omega_{yz}\omega_{xz})Y}{1 + 2\omega_{xy}\omega_{yz}\omega_{xz} - \omega_{xy}^2 - \omega_{yz}^2 - \omega_{xz}^2},$$

где:

$$X = X_2 \cos\angle(X_2, X_1) + Y_2 \cos\angle(Y_2, X_1) + Z_2 \cos\angle(Z_2, X_1);$$

$$Y = X_2 \cos\angle(X_2, Y_1) + Y_2 \cos\angle(Y_2, Y_1) + Z_2 \cos\angle(Z_2, Y_1);$$

$$Z = X_2 \cos\angle(X_2, Z_1) + Y_2 \cos\angle(Y_2, Z_1) + Z_2 \cos\angle(Z_2, Z_1).$$

Поворот косоугольных координат на плоскости производится так. Система координат $X_1Y_1Z_1$ с координатным углом ω_{xy} при повороте на угол φ переходит в систему координат $X_2Y_2Z_2$. При этом формулы преобразования координат имеют вид:

$$X_2 = \frac{\sin(\omega_{xy} + \varphi)}{\sin\omega_{xy}} X_1 + \frac{\sin\varphi}{\sin\omega_{xy}} Y_1; \qquad Y_2 = -\frac{\sin\varphi}{\sin\omega_{xy}} X_1 + \frac{\sin(\omega_{xy} - \varphi)}{\sin\omega_{xy}} Y_1.$$

Очевидно, что приведенные формулы являются частным (вырожденным) случаем соответствующих формул преобразования косоугольных координат в пространстве.

Если $\omega_{xy} = 90^\circ$, получим: $X_2 = X_1\cos\varphi + Y_1\sin\varphi$ и $Y_2 = -X_1\sin\varphi + Y_1\cos\varphi$.

3.7. Криволинейные системы координат

Для упрощения преобразований на некоторых этапах решения задач формообразования поверхностей деталей и профилирования режущего инструмента удобно от ортогональной системы декартовых координат перейти к криволинейным координатам в пространстве, а после решения задачи в криволинейных координатах совершить обратный переход к прямоугольным декартовым координатам. Возможность упрощения при этом формы записи уравнений очевидна из следующего простого примера. Если в декартовой системе координат уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат имеет вид $X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$, то та же сфера в сферических координатах будет описана уравнением $R = Const$, что существенно проще.

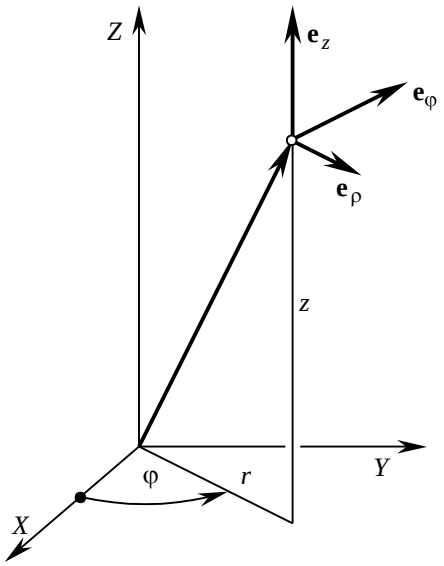


Рис. 3.15. К образованию оператора перехода $\mathbf{Cl}(z, \varphi, \rho)$.

Преобразования криволинейных координат рассмотрим на примере цилиндрических и сферических систем координат.

3.7.1. Взаимосвязь между ортогональными декартовыми и цилиндрическими координатами. Геометрическая информация о поверхностях детали и инструмента может быть представлена в цилиндрических коодинатах. Переход от ортогональной декартовой системы координат к системе цилиндрических координат производится путем переноса на r вдоль оси X, после которого следует поворот на угол φ вокруг оси Z и далее следующий перенос на z вдоль оси Z (рис. 3.15). Следовательно:

$$\mathbf{Cl}(z, \varphi, \rho) = \mathbf{Tr}(z, Z) \cdot \mathbf{Rt}(\varphi, Z) \cdot \mathbf{Tr}(r, X) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & r\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В цилиндрических координатах положение текущей точки M на поверхности $Д(И)$ определяется полярными координатами $\varphi^{(M)}$ и $\rho^{(M)}$ ее проекции на плоскость XY и аппликатой $Z^{(M)}$ (рис. 3.16.1). Через эти координаты радиус-вектор $\mathbf{r}^{(M)}$ текущей точки M на поверхности $Д(И)$ выражается так

$$\mathbf{r}^{(M)} = \rho^{(M)}\mathbf{e}(\varphi) + Z^{(M)}\mathbf{k},$$

где $\mathbf{e}(\varphi)$ – орт радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}^{(M)}$ проекции точки M на координатную плоскость XY.

Координатные поверхности представляют собой:

- $\rho = Const$ – круговые цилиндры с осью OZ;
- $\varphi = Const$ – плоскости, проходящие через ось Z;
- $Z = Const$ – плоскости, параллельные плоскости координат XY,

а координатные линии:

- $\varphi = Var$, $\rho = Cosnt$, $Z = Const$ (окружности с центром на оси Z, расположенной в плоскости, параллельной плоскости координат XY);
- $\varphi = Const$, $\rho = Var$, $Z = Const$ (прямые, проходящие через ось Z параллельно плоскости координат XY);
- $\varphi = Const$, $\rho = Var$, $Z = Const$ (прямые, параллельные оси Z).

Каждой точке M ставится в соответствие три единичных вектора $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_z\ (=\mathbf{k})$, которые касательны к координатным линиям и указывают направление возрастания соответствующей координаты как параметра.

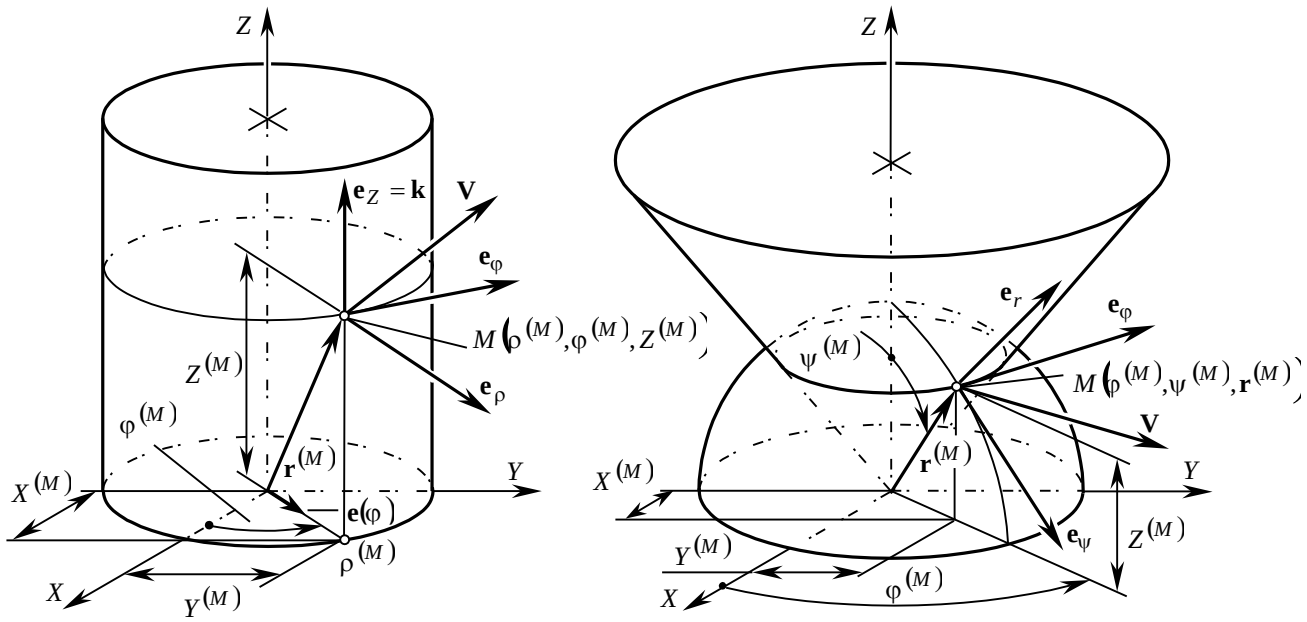


Рис. 3.16. Цилиндрические и сферические системы координат.

В противоположность базисным векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ прямоугольной декартовой системы координат, единичные векторы $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_z$ изменяются при переходе от одной точки поверхности $Д(И)$ к другой ее точке. Но в любой точке M они всегда взаимно перпендикулярны и образуют правую систему координат.

Если некоторый вектор $\mathbf{V}^{(M)}$ разложить по направлениям единичных векторов $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_z$, получим

$$\mathbf{V}^{(M)} = V_\varphi^{(M)}\mathbf{e}_\varphi + V_\rho^{(M)}\mathbf{e}_\rho + V_z^{(M)}\mathbf{e}_z,$$

где $V_\varphi^{(M)}$, $V_\rho^{(M)}$, $V_z^{(M)}$ – цилиндрические координаты некоторой точки M на поверхности $Д(И)$ – в противоположность декартовым координатам $V_x^{(M)}$, $V_y^{(M)}$, $V_z^{(M)}$, которые используются в разложении $\mathbf{V}^{(M)} = V_x^{(M)}\mathbf{i} + V_y^{(M)}\mathbf{j} + V_z^{(M)}\mathbf{k}$.

Декартовы координаты текущей точки M на поверхности $Д(И)$ выражаются через ее цилиндрические координаты по формулам

$$\begin{aligned} V_x &= -V_\varphi \sin\varphi + V_\rho \cos\varphi; \\ V_y &= V_\varphi \cos\varphi + V_\rho \sin\varphi; \\ V_z &= V_Z. \end{aligned}$$

Цилиндрические координаты точки M выражаются через ее декартовы координаты по формулам

$$\begin{aligned} V_\varphi &= -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi; \\ V_\rho &= V_x \cos\varphi + V_y \sin\varphi; \\ V_z &= V_z. \end{aligned}$$

Линейный элемент поверхности $Д(И)$ в цилиндрической системе координат равен

$$\Phi_{1.\partial(u)} \;\Rightarrow\; dS_{\partial(u)} = \rho_{\partial(u)} d\varphi^2 + d\rho^2_{\partial(u)} + dZ^2_{\partial(u)}.$$

Декартовы и цилиндрические координаты текущей точки M на поверхности $Д(И)$ связаны между собой соотношениями (см. рис. 3.16.1):

$$\tan\varphi^{(M)} = \frac{Y^{(M)}}{X^{(M)}}; \qquad \rho_{(M)} = \sqrt{\left(X^{(M)}\right)^2 + \left(Y^{(M)}\right)^2}; \qquad Z^{(M)} = Z^{(M)};$$

$$X^{(M)} = \rho^{(M)}\cos\varphi^{(M)}; \qquad Y^{(M)} = \rho^{(M)}\sin\varphi^{(M)}; \qquad Z^{(M)} = Z^{(M)},$$

где $X^{(M)}$, $Y^{(M)}$, $Z^{(M)}$ – декартовы координаты текущей точки M на поверхности $Д(И)$;

$\rho^{(M)}$ – радиус цилиндра, проходящего через точку M;

$\varphi^{(M)}$ – полярный угол точки M.

При решении задач на плоскости $Z^{(M)} = 0$. В этом случае цилиндрические координаты вырождаются в полярные, которые с декартовыми координатами на плоскости связаны соотношениями:

(3.30)
$$\begin{cases} \varphi^{(\text{M})} = \arctan\dfrac{Y^{(\text{M})}}{X^{(\text{M})}}; \\ \rho^{(\text{M})} = \sqrt{\left(X^{(\text{M})}\right)^2 + \left(Y^{(\text{M})}\right)^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} X^{(\text{M})} = \rho^{(\text{M})}\cos\varphi^{(\text{M})}; \\ Y^{(\text{M})} = \rho^{(\text{M})}\sin\varphi^{(\text{M})}. \end{cases}$$

3.7.2. Взаимосвязь между ортогональными декартовыми и сферическими координатами. Рассмотрим определение положения вектора при помощи сферических координат. Переход от ортогональной декартовой системы координат к системе сферических координат производится путем переноса на r вдоль оси Z, за которым следует поворот на угол ψ вокруг оси Y и затем поворот на угол φ вокруг оси Z (рис. 3.17):

$$\mathbf{Sph}(\varphi,\psi,r) = \mathbf{Rt}(\varphi, Z)\cdot\mathbf{Rt}(\psi, Y)\cdot\mathbf{Tr}(r, Z) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\psi & r\sin\varphi\sin\psi \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & r\cos\psi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

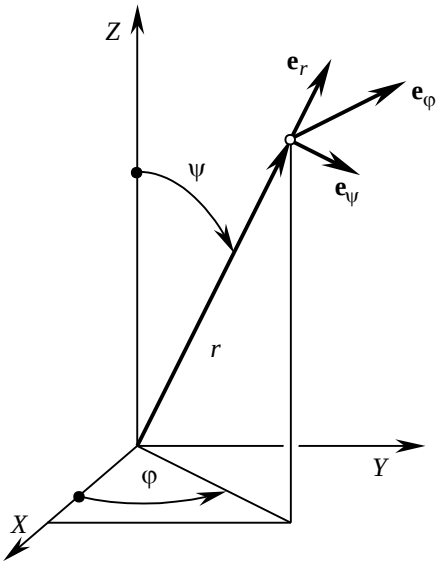


Рис. 3.17. К образованию оператора перехода $\mathbf{Sph}(\varphi,\psi,r)$.

В сферических координатах положение текущей точки M на поверхности $Д(И)$ определяется ее географическими координатами $\varphi^{(M)}$ и $\psi^{(M)}$ на сфере текущего радиуса $r^{(M)}$ с центром в начале координат и проходящей через эту точку (рис. 3.16.2). Радиус-вектор точки M выражается через эти координаты так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}(\varphi)\cos\psi + \mathbf{k}\sin\psi.$$

Координатные поверхности представляют собой:

- $r = \text{Const}$ – сферы;
- $\varphi = Const$ – плоскости, проходящие через ось Z;
- $\psi = Const$ – конусы вращения с осью, совпадающей с осью Z и вершиной, расположенной в начале координат,

а координатные линии:

- $\varphi = Var$, $\psi = Const$, $r = Const$ – параллели (широты);
- $\varphi = Const$, $\psi = Var$, $r = Const$ – меридианы (долготы);
- $\varphi = Const$, $\psi = Const$, $r = Var$ – прямые, проходящие через начало координат.

Как и в случае применения цилиндрических координат, каждой точке M на поверхности $Д(И)$ ставятся в соответствие единичные векторы $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\psi$, $\mathbf{e}_r$, которые касательны к соответствующим координатным линиям, идущим в направлении возрастания значений соответствующего параметра.

Если некоторый вектор $\mathbf{V}^{(M)}$ разложить по единичным векторам $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\psi$, $\mathbf{e}_r$, получим

$$\mathbf{V}^{(M)} = V_\varphi^{(M)}\mathbf{e}_\varphi + V_\psi^{(M)}\mathbf{e}_\psi + V_r^{(M)}\mathbf{e}_r,$$

где V_φ, V_ψ, V_r – сферические координаты текущей точки M на поверхности $Д(И)$.

Декартовы координаты выражаются через сферические координаты по формулам:

$$\begin{aligned} V_x &= -V_\varphi \sin\varphi + V_\psi \cos\varphi \cos\psi + V_r \cos\varphi \sin\psi; \\ V_y &= V_\varphi \cos\varphi + V_\psi \sin\varphi \cos\psi + V_r \sin\varphi \sin\psi; \\ V_z &= -V_\psi \sin\psi + V_r \cos\psi. \end{aligned}$$

Сферические координаты выражаются через декартовы координаты по формулам:

$$\begin{aligned} V_\varphi &= -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi; \\ V_\psi &= V_x \cos\varphi \cos\psi + V_y \sin\varphi \cos\psi - V_z \sin\psi; \\ V_r &= V_x \cos\varphi \sin\psi + V_y \sin\varphi \sin\psi + V_z \cos\psi. \end{aligned}$$

Единичные векторы $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\psi$, $\mathbf{e}_r$ взаимно перпендикулярны и образуют правую систему координат.

Линейный элемент поверхности $Д(И)$ в сферической системе координат можно рассчитать по формуле:

$$\Phi_{1.\partial(u)} \;\Rightarrow\; ds^2_{\partial(u)} = dr^2_{\partial(u)} + r^2_{\partial(u)} d\psi^2_{\partial(u)} + r^2_{\partial(u)} \cos\psi_{\partial(u)} d\psi^2_{\partial(u)}.$$

Декартовы и сферические координаты текущей точки M на поверхности $Д(И)$ связаны между собой зависимостями (см. рис. 3.16.2):

$$r^{(M)} = \sqrt{\left(X^{(M)}\right)^2 + \left(Y^{(M)}\right)^2 + \left(Z^{(M)}\right)^2}; \qquad \tan\varphi^{(M)} = \frac{Y^{(M)}}{X^{(M)}} \qquad \cos\psi^{(M)} = \frac{Z^{(M)}}{\sqrt{\left(X^{(M)}\right)^2 + \left(Y^{(M)}\right)^2 + \left(Z^{(M)}\right)^2}}$$

и

$$X^{(M)} = r^{(M)} \cos\varphi^{(M)} \sin\psi^{(M)}; \qquad Y^{(M)} = r^{(M)} \sin\varphi^{(M)} \sin\psi^{(M)}; \qquad Z^{(M)} = r^{(M)} \cos\psi^{(M)}.$$

Здесь $X^{(M)}$, $Y^{(M)}$, $Z^{(M)}$ – декартовы координаты текущей точки M на поверхности $Д(И)$;

$r^{(M)}$ – модуль радиус-вектора $\mathbf{r}^{(M)}$ точки M ;

$\varphi^{(M)}$ – полярный угол радиус-вектора $\mathbf{r}^{(M)}$ точки M ;

$\psi^{(M)}$ – широта положения точки M .

В задачах, решаемых на плоскости, угол $\psi^{(M)} = 90^\circ$ и сферические координаты (так же, как и цилиндрические) вырождаются в полярные координаты.

3.7.3. Взаимосвязь между цилиндрическими и сферическими координатами. В текущей точки M на поверхности $Д(И)$ ее цилиндрические и сферические координаты связаны следующими зависимостями:

$$r^{(M)} = \sqrt{\left(\rho^{(M)}\right)^2 + \left(Z^{(M)}\right)^2}\ ;\ \varphi^{(M)} = \varphi^{(M)};\ \tan\varphi^{(M)} = \frac{\rho^{(M)}}{Z^{(M)}}$$

и

$$\rho^{(M)} = r^{(M)}\sin\varphi^{(M)};\ \varphi^{(M)} = \varphi^{(M)};\ Z^{(M)} = r^{(M)}\cos\psi^{(M)}.$$

3.8. О линейных преобразованиях

Кроме координатного и отображающего преобразований в практике обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ находят применение и другие виды отображений. Если обрабатываемая деталь обладает симметрией (центральной, зеркальной или одновременно центральной и зеркальной), в памяти системы ЧПУ металлорежущим станком достаточно иметь данные, описывающие лишь часть обрабатываемой поверхности *Д* детали. В этом случае необходимая информация обо всей поверхности *Д* детали может быть получена при помощи вращений, сдвигов и отображений. Этим достигается более рациональное использование объема памяти системы ЧПУ металлорежущим станком. Выполняемые преобразования симметрии, сдвига, изменения масштаба по осям координат и т.п. являются преобразованиями объектов и не оказывают влияния на систему координат, в которой деталь описана. С такими преобразованеиями можно познакомиться по работам (Faux, I.D., Pratt, M.J., 1987; Marciniak, K, 1991; Mortenson, M.E., 1985). Матричное описание вращений вокруг координатной оси, вокруг оси, произвольным образом ориентированной в пространстве, в т.ч. как проходящей, так и не проходящей через начало координат, достаточно подробно описано в литературе (Люкшин В.С., 1968). Использование матриц для получения проекций геометрических образов на координатные плоскости рассмотрено в (Marciniak, K, 1991).

Г л а в а 4. **Геометрия касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности**

Эффективность формообразования поверхностей деталей зависит от множества различных факторов. Для определения наивыгоднейшего значения каждого из факторов и наилучшего сочетания всех факторов вместе взятых требуется информация. Часть необходимой информации содержится в исходных данных – в чертеже детали: это сведения о форме и параметрах обрабатываемых поверхностей, требования к точности их обработки, взаимного расположения и пр. Другая часть информации, необходимая для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали, генерируется в процессе разработки технологии изготовления детали, в частности, при подготовке управляющих программ для системы ЧПУ металлорежущим станком. Эту часть информации можно рассматривать как промежуточную – в окончательно разработанном технологическом процессе в явном виде она отсутствует. Дополнительным источником, позволяющим генерировать вторую часть необходимой информации, служит геометрия касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

В соответствие с дифференциально-геометрическим методом (Радзевич С.П., 1991) решение задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали основано на том, что поверхность $Д$ является первичной. Чтобы исходя из этого можно было решить задачу определения вида и параметров исходной инструментальной поверхности $И$ наивыгоднейшего инструмента для обработки заданной поверхности детали, а затем синтезировать наивыгоднейшую кинематику формообразования, необходимо аналитически описать геометрию касания поверхности $Д$ детали и ИИП $И$ инструмента в каждый момент формообразующей обработки.

Характер касания поверхностей $Д$ и $И$, параметры их локальной топологии и относительная локальная ориентация определяют эффективность применяемого способа обработки детали. Эффективным средством увеличения производительности и повышения точности формообразования поверхностей деталей гладким регулярным отсеком поверхности $И$ инструмента является управление значениями параметров локальной топологии поверхностей $Д$ и $И$ в точке K их касания, которые определяют геометрию касания этих поверхностей.

Используются различные аналитические методы описания геометрии касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности в дифференциальной окрестности точки их касания (Радзевич С.П., 1987).

В процессе формообразования поверхность $Д$ детали и поверхность $И$ инструмента являются сопряженными: в относительном движении в каждый момент времени они касаются одна другой и имеют не менее одной общей точки – точки K их касания. Если поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой в точке, то точка K будет единственной (или их множество конечно, когда поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой одновременно в нескольких точках – такие случаи в практике формообразующей обработки деталей встречаются как исключение). Если же поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой вдоль некоторой линии – характеристики E, или в пределах некоторого участка поверхности $Д$, множество точек касания бесконечно.

Понятие *геометрия касания* поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента подразумевает как *качественную*, так и *количественную* оценку соотношений элементов их локальной топологии в точке K и охватывает различные подходы к аналитическому описанию полноты прилегания поверхности $И$ к поверхности $Д$. Для этого используются геометрические образы, обобщающие элементы локальной топологии обеих поверхностей $Д$ и $И$ и представляющие собой своеобразный комбинированный геометрический образ.

Интуитивное представление о геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ и о полноте их прилегания одна к другой (т.е. о степени *конформности*[1] исходной инструментальной поверхности $И$ к обрабатываемой поверхности $Д$ детали) можно получить из простого примера. Пусть выпуклая сфера некоторого радиуса касается:

- другой выпуклой сферы;
- плоскости;
- вогнутой сферы некоторого (большего) радиуса.

Интуиция подсказывает, что в первом случае касающиеся поверхности наименее полно прилегают одна к другой, во втором – больше, а в третьем – еще больше. Степень конформности касающихся поверхностей в первом случае наименьшая, во втором – больше, а в третьем – еще больше.

Чтобы описать аналитически *геометрию касания* поверхностей $Д$ и $И$ требуется, чтобы обе эти поверхности были аналитически представлены в некоторой общей системе координат и был образован замкнутый цикл прямого и обратного последовательного преобразования координат.

4.1. Образование замкнутого цикла последовательных преобразований координат

Под *замкнутым* циклом последовательных преобразований координат понимается такая последовательность их преобразований, при которой к любой из систем координат, входящих в цикл, можно прийти от любой другой системы координат, образующей этот цикл. В этом случае использование формулы (3.16) для всего цикла приведет к тому, что после выполнения всех входящих в цикл преобразований возвращаемся к исходной системе координат. Это необходимый и достаточный признак того, что цикл последовательных преобразований координат является замкнутым.

Введение в рассмотрение замкнутых циклов последовательных преобразований координат дает возможность рассматривать решение задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали в любой из систем координат, образующих цикл, в первую очередь в той из них, в которой описание процесса наиболее удобно.

В замкнутом цикле последовательных преобразований координат можно выделить прямое и обратное направление преобразования координат (рис. 4.1.).

В прямом цикле (рис. 4.1.1) переход от системы коодинат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ детали первоначально производится к локальной подвижной системе координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ с началом в точке K касания поверхности $Д$ детали и $И$ инструмента. Такой переход осуществляется либо непосредственно оператором $\mathbf{Res}\,(Д \to \partial)$, либо (например, когда заданная в своей системе координат $X_{n\partial}Y_{n\partial}Z_{n\partial}$ поверхность $Д$ представляет собой совокупность отдельных отсеков, каждый из которых задан в своей системе координат) через некоторые промежуточные системы координат $X_{n\partial.i}Y_{n\partial.i}Z_{n\partial.i}$ каждого из отдельных отсеков поверхости детали.

В обратном цикле последовательных преобразований координат (рис. 4.1.2) переход от системы координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ детали первоначально производится в направление подвижной локальной системы координат $x_u^{(K)}y_u^{(K)}z_u^{(K)}$ с началом в точке K касания поверхности $Д$ детали и $И$ инструмента. Такой переход описывается совокупностью операторов преобразований координат последовательно от одной к другой.

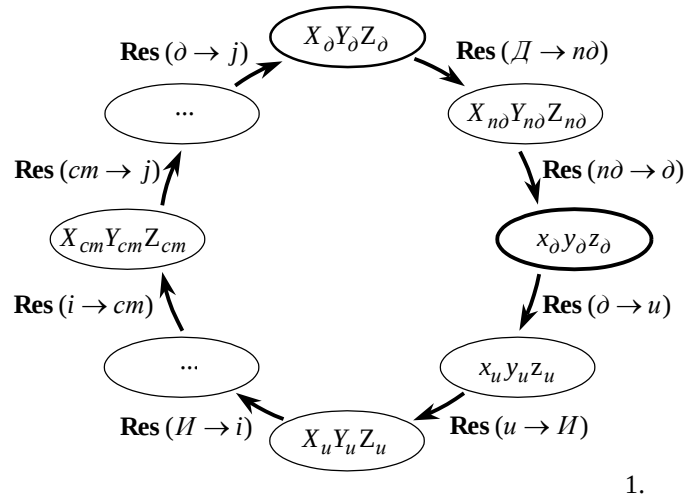
В замкнутом цикле последовательных преобразований координат составление операторов преобразования одной локальной системы координат $x_\partial y_\partial z_\partial$ в другую $x_u y_u z_u$ описывается, как правило, проще.

Геометрическая информация о поверхности $Д(И)$ может быть задана, например, ее уравнением (1.2):

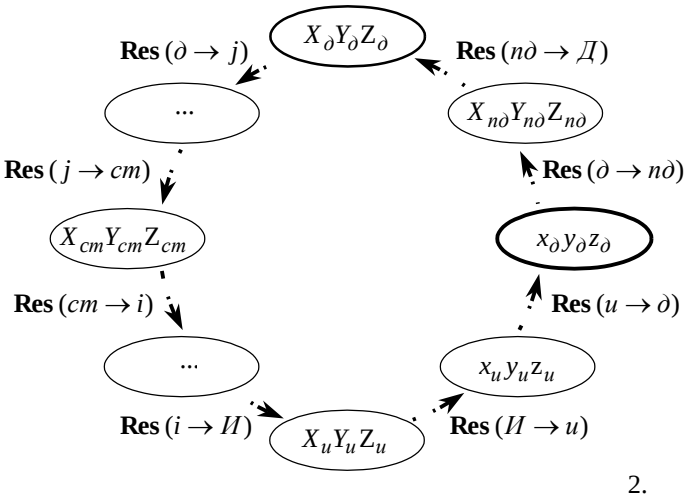
$$\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}\lfloor U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\rfloor, \qquad \lfloor U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\rfloor \in G \tag{4.1}$$

в векторной форме.

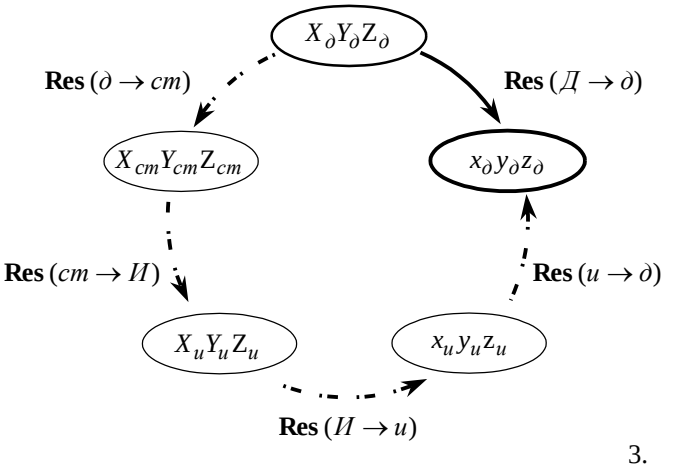
[1] Конформный – от лат. *conformis* – подобный, соответствующий, сообразный.



1.



2.



3.

Рис. 4.1. Замкнутые циклы последовательных преобразований координат: 1 – прямой, 2 – обратный, 3 – пример применения.

Изначально каждая из поверхностей обычно задается в своей (удобной для ее описания) системе координат. Для аналитического описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ их уравнения должны быть представлены в общей системе координат. Такой системой может служить любая система координат: связанная со станком, с деталью, с инструментом и пр. Принципиальным является лишь требование, чтобы используемая система координат была общей как для детали, так и для инструмента.

При любом виде касания поверхностей $Д$ и $И$ в каждой их общей точке K плоскость, касательная к одной из поверхностей $Д(И)$, будет касательной к другой поверхности. Общая касательная плоскость ортогональна орту контактной нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$.

Для аналитического описания геометрии касания заданных в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ поверхностей $Д$ и $И$ удобно использовать подвижную локальную систему координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ с началом в точке K, имеющей ортонормированный базис, одна из координатных плоскостей которого касательна к поверхности $Д$. Использование такой системы координат упрощает преобразования и форму представления конечного результата.

Рассмотрим порядок построения замкнутого цикла прямого и обратного последовательных преобразований координат.

Для построения ортонормированного базиса системы координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ воспользуемся промежуточной системой координат $x_1y_1z_1$, оси которой направлены так (рис. 4.2):

- ось x_1 направлена вдоль касательной $\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}$ к координатной U_∂ – линии;

- ось y_1 направлена вдоль касательной $\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}$ к координатной V_∂ – линии;

- ось z_1 направлена вдоль нормали $\mathbf{N}_\partial$ к поверхности $Д$ в точке M на ней (впоследствие с точкой M будет совмещена точка K касания поверхностей $Д$ и $И$).

Если поверхность $Д$ параметризована таким образом, что U_∂ – и V_∂ – линии обра-

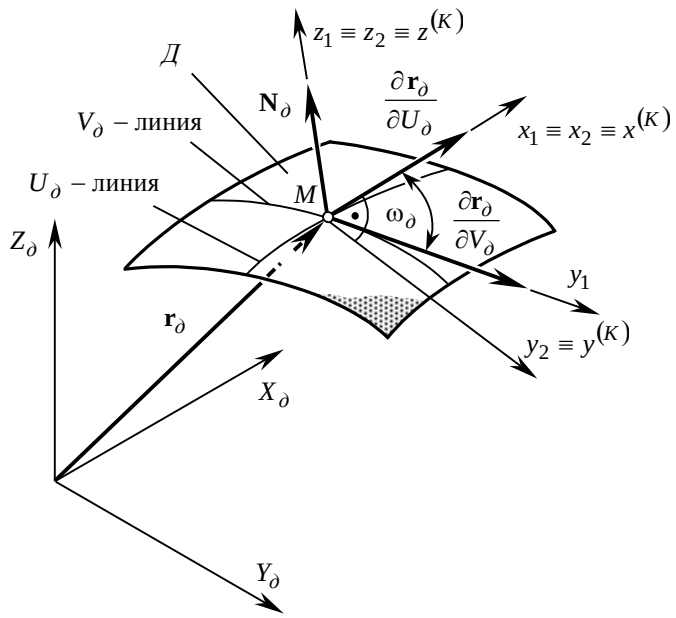


Рис. 4.2. К построению локальной подвижной системы координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$, связанной с поверхностью $Д$ детали.

образуют ортогональную сеть линий на ней, процедура преобразования координат заметно упрощается. Упрощению преобразований координат способствует также такая ортогональная параметризация поверхности $Д$, при которой U_∂ – и V_∂ – линии совпадают с линиями кривизны наней. В этом случае локальная система координат будет представлять собой трехгранник Дарбу (т.е. трехгранник, у которого оси, расположенные в общей для поверхностей $Д$ и $И$ касательной плоскости, касательны к главным направлениям на поверхности $Д$ в текущей точке на ней). Необходимые для построения трехгранника Дарбу главные направления определяются как направления на гладкой регулярной поверхности $Д$, в которых кручение поверхности равно нулю – поэтому главные направления совпадают с направлениями линий кривизны на $Д$.

Направление $d\mathbf{r}_\partial$ на поверхности $Д$ будет главным, если $d\mathbf{N}_\partial \times d\mathbf{r}_\partial = 0$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы направление $\frac{dU_\partial}{dV_\partial}$ было главным, является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} E_\partial dU_\partial + F_\partial dV_\partial & F_\partial dU_\partial + G_\partial dV_\partial \\ L_\partial dU_\partial + M_\partial dV_\partial & M_\partial dU_\partial + N_\partial dV_\partial \end{vmatrix} = 0. \tag{4.2}$$

Уравнение (2) может быть записано в виде:

$$\frac{L_\partial dU_\partial + M_\partial dV_\partial}{E_\partial dU_\partial + F_\partial dV_\partial} - \frac{M_\partial dU_\partial + N_\partial dV_\partial}{F_\partial dU_\partial + G_\partial dV_\partial} = 0$$

или в симметричной форме:

$$\begin{vmatrix} dV_\partial^2 & -dU_\partial dV_\partial & dV_\partial^2 \\ E_\partial & F_\partial & G_\partial \\ L_\partial & M_\partial & N_\partial \end{vmatrix} = 0. \tag{4.3}$$

Раскрывая определитель (3), получим:

$$(F_\partial L_\partial - E_\partial M_\partial)dU_\partial^2 + (G_\partial L_\partial - E_\partial N_\partial)dU_\partial d_\partial V + (G_\partial M_\partial - F_\partial N_\partial)dV_\partial^2 = 0$$

откуда

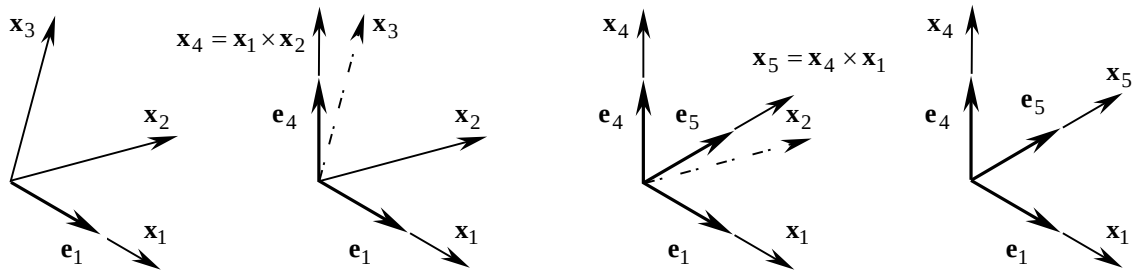
$$(G_\partial M_\partial - F_\partial N_\partial)\cdot\left(\frac{\partial V_\partial}{\partial U_\partial}\right)^2 + (G_\partial L_\partial - E_\partial N_\partial)\frac{\partial V_\partial}{\partial U_\partial} + (F_\partial L_\partial - E_\partial M_\partial) = 0\,. \tag{4.4}$$

В системе координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ главные направления на поверхности $Д$ находятся как корни квадратного уравнения (4).

При ортогональной (U_∂, V_∂) – параметризации поверхности $Д$ отношение $\dfrac{dV_\partial}{dU_\partial}$ определит величину тангенса угла ξ_∂ между ортом $\mathbf{t}_{1.\partial}$, касательным к следу главного сечения $C_{1.\partial}$ поверхности $Д$, и U_∂ – линией на ней.

В случае неортогональной параметризации поверхности $Д$ угол ω_∂ между осями x_1 и y_1 локальной системы координат в общем случае отличен от 90°, тогда как ось z_1 всегда ортогональна координатной плоскости x_1y_1 и, следовательно, каждой из координатных осей x_1 и y_1. Поэтому система координат $x_1y_1z_1$ будет "частично" косоугольной.

Рассмотрим произвольный исходный не ортогональный и не нормированный базис $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ (рис. 4.3.1) и построим на его основе ортонормированный базис.



1. 2. 3. 4.

Рис. 4.3. Построение ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5$ по призвольному $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ исходному.

Векторное произведение любых двух из трех $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ векторов, например, произведение $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$, определяет вектор $\mathbf{x}_4$ (рис. 4.3.2), который вследствие известного свойства векторного произведения перпендикулярен координатной плоскости $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Затем используем найденный вектор $\mathbf{x}_4$ и один из двух исходных $\mathbf{x}_1$ или $\mathbf{x}_2$, например, вектор $\mathbf{x}_2$, и находим вектор $\mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_4 \times \mathbf{x}_2$ (рис. 4.3.3). Найденный базис $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4\mathbf{x}_5$ будет ортогональным. Чтобы преобразовать его в ортонормированный, разделим каждый из векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_4$, $\mathbf{x}_5$ на его модуль: $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|}$, $\mathbf{e}_4 = \dfrac{\mathbf{x}_4}{|\mathbf{x}_4|}$, $\mathbf{e}_5 = \dfrac{\mathbf{x}_5}{|\mathbf{x}_5|}$. Построенный базис $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5$ (см. рис. 4.3.4) всегда будет ортонормированным.

Принимаем во внимание, что ось z_1 (см. рис. 4.2) перпендикулярна координатной плоскости x_1y_1. Строим ортогональную подвижную локальную систему координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ с началом в произвольной точке M на поверхности $Д$. Пусть ось $x^{(K)}$ совпадает с осью x_1 (т.е. $x^{(K)} \equiv x_1$); ось $z^{(K)}$ совпадает с осью z_1 (т.е. $z^{(K)} \equiv z_1$); а ось $y^{(K)}$ построена таким образом, что она перпендикулярна координатной плоскости $x^{(K)}z^{(K)}$. Для этого достаточно орт $\mathbf{j}^{(K)}$ оси $y^{(K)}$ определить как векторное произведение ортов $\mathbf{i}^{(K)}$ и $\mathbf{k}^{(K)}$ осей $x^{(K)}$ и $z^{(K)}$. Аналогично можно построить вспомогательную систему координат $x_2y_2z_2$, у которой $z_2 \equiv z_1$ и $y_2 \equiv y_1$, а ось x_2 достраивается ортогонально координатной плоскости y_2z_2.

При построении системы координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ следует обратить внимание на направление оси $y^{(K)}$: устанавливая порядок сомножителей в векторном произведении исходных направляющих векторов надо

следить за тем, чтобы эта ось образовала с другими осями левую систему координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$. Впоследствие это позволит исключить необходимость дополнительного введения операторов отображения $\mathbf{Refl}(x_1y_1)$, $\mathbf{Refl}(y_1z_1)$ и $\mathbf{Refl}(z_1x_1)$ (см. выше, гл. 3, с.174-175), преобразующих правую систему координат в левую.

В исходной системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, связанной с обрабатываемой поверхностью $Д$, направляющий вектор $\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}$ оси абсцисс $x^{(K)}$ (см. рис. 2.1) записывается так:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} = \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial}\mathbf{i}_\partial + \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial}\mathbf{j}_\partial + \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial}\mathbf{k}_\partial .$$

Этот вектор составляет с осями координат X_∂, Y_∂, Z_∂ углы, определяемые из соотношений

$$\text{(4.5)} \qquad \cos\angle\left(x^{(K)}, X_\partial\right) = \frac{1}{\Delta_x}\cdot\frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial}; \qquad \cos\angle\left(x^{(K)}, Y_\partial\right) = \frac{1}{\Delta_x}\cdot\frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial}; \qquad \cos\angle\left(x^{(K)}, Z_\partial\right) = \frac{1}{\Delta_x}\cdot\frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial},$$

где нормирующий множитель Δ_x равен:

$$\Delta_x = \sqrt{\left[\frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial}\right]^2 + \left[\frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial}\right]^2 + \left[\frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial}\right]^2} = \sqrt{E_\partial}\ .$$

В исходной системе координат направляющий вектор $\mathbf{N}_\partial$ оси $z^{(K)}$, идущей вдоль нормали к поверхности $Д$ и направленный от тела детали, равен:

$$\text{(4.6)} \qquad \mathbf{N}_\partial = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_\partial & \mathbf{j}_\partial & \mathbf{k}_\partial \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} \end{vmatrix}}_{A}\mathbf{i}_\partial + \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} \end{vmatrix}}_{B}\mathbf{j}_\partial + \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} \end{vmatrix}}_{C}\mathbf{k}_\partial =$$

$$= \left(\frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} - \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial}\right)\mathbf{i}_\partial + \left(\frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} - \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial}\right)\mathbf{j}_\partial + \left(\frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} - \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial}\right)\mathbf{k}_\partial .$$

Этот вектор составляет с осями X_∂, Y_∂, Z_∂ исходной системы координат углы, косинусы которых соответственно равны:

$$\text{(4.7)} \qquad \cos\angle\left(z^{(K)}, X_\partial\right) = \frac{A}{\Delta_z}; \qquad \cos\angle\left(z^{(K)}, Y_\partial\right) = \frac{B}{\Delta_z}; \qquad \cos\angle\left(z^{(K)}, Z_\partial\right) = \frac{C}{\Delta_z},$$

где величины A, B, C обозначены в средней части формулы (6), а нормирующий множитель Δ_z равен $\Delta_z = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Зная (5) и (7) косинусы углов, которые оси $x^{(K)}$ и $z^{(K)}$ составляют с осями координат исходной системы $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, орты $\mathbf{i}^{(K)}$ и $\mathbf{j}^{(K)}$ этих осей в проекциях на оси координат X_∂, Y_∂, Z_∂ можно записать так:

$$\mathbf{i}^{(K)} = \mathbf{i}_\partial \cos\angle\left(x^{(K)},\ X_\partial\right) + \mathbf{j}_\partial \cos\angle\left(x^{(K)},\ Y_\partial\right) + \mathbf{k}_\partial \cos\angle\left(x^{(K)},\ Z_\partial\right);$$
$$\mathbf{k}^{(K)} = \mathbf{i}_\partial \cos\angle\left(z^{(K)},\ X_\partial\right) + \mathbf{j}_\partial \cos\angle\left(z^{(K)},\ Y_\partial\right) + \mathbf{k}_\partial \cos\angle\left(z^{(K)},\ Z_\partial\right). \quad (4.8)$$

С учетом (8) и того, что $x^{(K)} \equiv x_1$ и $y^{(K)} \equiv y_1$, находим орт $\mathbf{j}^{(K)}$ оси $y^{(K)}$ системы координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$:

$$\mathbf{j}^{(K)} = \mathbf{i}^{(K)} \times \mathbf{k}^{(K)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_\partial & \mathbf{j}_\partial & \mathbf{k}_\partial \\ \cos\angle(x^{(K)},\ X_\partial) & \cos\angle(x^{(K)},\ Y_\partial) & \cos\angle(x^{(K)},\ Z_\partial) \\ \cos\angle(z^{(K)},\ X_\partial) & \cos\angle(z^{(K)},\ Y_\partial) & \cos\angle(z^{(K)},\ Z_\partial) \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}_\partial \begin{vmatrix} \cos\angle(x^{(K)},Y_\partial) & \cos\angle(x^{(K)},Z_\partial) \\ \cos\angle(z^{(K)},Y_\partial) & \cos\angle(z^{(K)},Z_\partial) \end{vmatrix} - \mathbf{j}_\partial \begin{vmatrix} \cos\angle(x^{(K)},X_\partial) & \cos\angle(x^{(K)},Z_\partial) \\ \cos\angle(z^{(K)},X_\partial) & \cos\angle(z^{(K)},Z_\partial) \end{vmatrix} + \mathbf{k}_\partial \begin{vmatrix} \cos\angle(x^{(K)},X_\partial) & \cos\angle(x^{(K)},Y_\partial) \\ \cos\angle(z^{(K)},X_\partial) & \cos\angle(z^{(K)},Y_\partial) \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\cos\angle(x^{(K)},\ Y_\partial)\cos\angle(z^{(K)},\ Z_\partial) - \cos\angle(V)\cos\angle(y^{(K)},\ Y_\partial)\right| \mathbf{i}_\partial -$$
$$- \left|\cos\angle(x^{(K)},\ X_\partial)\cos\angle(z^{(K)},\ Z_\partial) - \cos\angle(x^{(K)},\ Z_\partial)\cos\angle(z^{(K)},\ X_\partial)\right| \mathbf{j}_\partial + \quad (4.9)$$
$$+ \left|\cos\angle(x^{(K)},\ X_\partial)\cos\angle(z^{(K)},\ Y_\partial) - \cos\angle(x^{(K)},\ Y_\partial)\cos\angle(z^{(K)},\ X_\partial)\right| \mathbf{k}_\partial.$$

В выражение (9) нормирующий множитель Δ_y не вводился, т.к. в данном случае $\Delta_y = 1$. Это следствие того, что орт $\mathbf{j}^{(K)}$ определен через через нормированные векторы – через орты $\mathbf{i}^{(K)}$ и $\mathbf{k}^{(K)}$, а не через другие ненормированные векторы.

Полученный результат (9) позволяет определить косинусы углов, которые ось $y^{(K)}$ составляет с осями системы координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$:

$$\cos\angle\left(y^{(K)},\ X_\partial\right) = \left|\cos\angle\left(x^{(K)},\ Y_\partial\right)\cos\angle\left(z^{(K)},\ Z_\partial\right) - \cos\angle\left(x^{(K)},\ Z_\partial\right)\cos\angle\left(z^{(K)},\ Y_\partial\right)\right|;$$
$$\cos\angle\left(y^{(K)},\ Y_\partial\right) = \left|\cos\angle\left(x^{(K)},\ X_\partial\right)\cos\angle\left(z^{(K)},\ Z_\partial\right) - \cos\angle\left(x^{(K)},\ Z_\partial\right)\cos\angle\left(z^{(K)},\ X_\partial\right)\right|; \quad (4.10)$$
$$\cos\angle\left(y^{(K)},\ Z_\partial\right) = \left|\cos\angle\left(x^{(K)},\ X_\partial\right)\cos\angle\left(x^{(K)},\ Y_\partial\right) - \cos\angle\left(x^{(K)},\ Y_\partial\right)\cos\angle\left(z^{(K)},\ X_\partial\right)\right|.$$

Поскольку косинусы углов между осями исходной $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ и локальной $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ системами координат определены (см. формулы (5), (7) и (10)), операторы $\mathbf{Rs}\left(\partial \to K\right)$ прямого и $\mathbf{Rs}\left(K \to \partial\right)$ обратного результирующих преобразований координат записываются так:

$$\mathbf{Rs}\left(\partial \to K\right) = \begin{bmatrix} \cos\angle(x^{(K)},\ X_\partial) & \cos\angle(x^{(K)},\ Y_\partial) & \cos\angle(x^{(K)},\ Z_\partial) & o_x^{(K)} \\ \cos\angle(y^{(K)},\ X_\partial) & \cos\angle(y^{(K)},\ Y_\partial) & \cos\angle(y^{(K)},\ Z_\partial) & o_Y^{(K)} \\ \cos\angle(z^{(K)},\ X_\partial) & \cos\angle(z^{(K)},\ Y_\partial) & \cos\angle(z^{(K)},\ Z_\partial) & o_z^{(K)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.11)$$

$$\mathbf{Rs}\left(K \to \partial\right)=\begin{bmatrix} \cos\angle(x^{(K)},\, X_\partial) & \cos\angle(y^{(K)},\, X_\partial) & \cos\angle(z^{(K)},\, X_\partial) & O_{X_\partial} \\ \cos\angle(x^{(K)},\, Y_\partial) & cos\angle(y^{(K)},\, Y_\partial) & \cos\angle(z^{(K)},\, Y_\partial) & O_{Y_\partial} \\ \cos\angle(x^{(K)},\, Z_\partial) & \cos\angle(y^{(K)},\, Z_\partial) & \cos\angle(z^{(K)},\, Z_\partial) & O_{Z_\partial} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $o_x^{(K)}$, $o_y^{(K)}$, $o_z^{(K)}$ – координаты начала локальной системе координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ в исходной системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, а O_{X_∂}, O_{Y_∂}, O_{Z_∂} – координаты начала системы координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ в системе координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$.

Четвертый столбец в операторе $\mathbf{Rs}\left(\partial \to K\right)$ (11) определяется координатами точки K. Оператор $\mathbf{Rs}\left(K \to \partial\right)$ является обратным по отношению к оператору $\mathbf{Rs}\left(\partial \to K\right)$, т.е. $\mathbf{Rs}\left(K \to \partial\right)=\mathbf{Rs}^{-1}\left(\partial \to K\right)$. Используя известные правила нахождения обратной матрицы (см. гл. 3, раздел 3.2.2 на с.157-158 и раздел 3.4.4 на с.171-174), исходя из этого можно определить элементы четвертого вектор-столбца, компонующего оператор $\mathbf{Rs}\left(K \to \partial\right)$.

Переход от системы координат детали $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ к системе координат инструмента $X_u Y_u Z_u$ и обратно описывается операторами преобразования координат $\mathbf{Rs}\left(\partial \to u\right)$ и $\mathbf{Rs}\left(u \to \partial\right)$. Оператор $\mathbf{Rs}\left(\partial \to u\right)$ в общем случае находится как произведение операторов промежуточных преобразований координат (3.16).

С поверхностью $И$ инструмента связана подвижная локальная система координат $x_u^{(K)}y_u^{(K)}z_u^{(K)}$, имеющая общее начало с системой координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ (рис. 4.4).

Для полного аналитического описания замкнутого цикла прямых и обратных последовательных преобразований координат остается описать прямое и обратное преобразование систем координат $x_u^{(K)}y_u^{(K)}z_u^{(K)}$ и $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ (рис. 4.1.3).

В рассматриваемом случае оси $z^{(K)}$ и $z_u^{(K)}$ совпадают с контактной нормалью и направлены: ось $z^{(K)}$ – от тела детали, ось $z_u^{(K)}$ – от тела инструмента. Поэтому оси $z^{(K)}$ и $z_u^{(K)}$ противоположно направленные. Это упрощает образование операторов прямого $\mathbf{Rs}\left(K_u \to K\right)$ и обратного $\mathbf{Rs}\left(K \to K_u\right)$ преобразований координат. Вследствие того, что $z^{(K)}=-z_u^{(K)}$, рассматриваемая задача приводится к плоской.

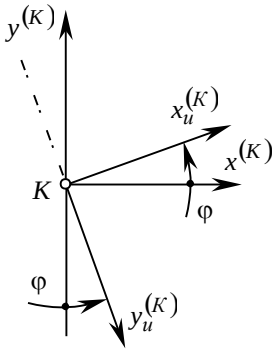


Рис. 4.4. Локальные подвижные системы координат детали и инструмента.

Из рис. 4.4. следует, что

$$x_u^{(K)}=x^{(K)}\cos\varphi+y^{(K)}\sin\varphi\,; \qquad y_u^{(K)}=-x^{(K)}\sin\varphi+y^{(K)}\cos\varphi\ .$$

Формулы обратного преобразования координат записываются так:

$$x^{(K)}=x_u^{(K)}\cos\varphi-y_u^{(K)}\sin\varphi\,; \qquad y^{(K)}=x_u^{(K)}\sin\varphi+y_u^{(K)}\cos\varphi$$

Исходя из приведенных формул, операторы прямого $\mathbf{Rs}\left(K_u \to K\right)$ и обратного $\mathbf{Rs}\left(K \to K_u\right)$ преобразований координат примут вид:

(4.12) $$\mathbf{Rs}\left(K_u \to K\right)=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{Rs}\left(K \to K_u\right)=\mathbf{Rs}^{-1}\left(K_u \to K\right)=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если один из промежуточных операторов, образующих результирующий оператор преобразования координат, описывает либо смещение вдоль единственной оси системы координат, либо поворот вокруг единственной оси системы координат, он вырождается в оператор перемещения или в оператор поворота системы координат и поэтому обозначается соответствующим образом (см. табл. 3.1):

$$\mathbf{Rs}\,(K_u \to K) = \mathbf{Rt}\,(-\varphi,\, z_\partial) = \mathbf{Rt}\,(\varphi,\, z_u)$$

и

$$\mathbf{Rs}\,(K \to K_u) = \mathbf{Rt}\,(\varphi,\, z_\partial) = \mathbf{Rt}\,(-\varphi,\, z_u).$$

Для аналитического описания геометрии касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности полученные результаты дают возможность, во-первых, записать уравнения поверхностей $Д$ и $И$ в одной общей системе координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ и, во-вторых, при необходимости вести рассмотрение процесса формообразования поверхности детали в любой промежуточной системе координат, переход к любой из которых возможен по цепи последовательных преобразований координат как в прямом, так и в обратном направлении.

Следует отметить, что несмотря на то, что построенные локальные системы координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ и $x_u^{(K)}y_u^{(K)}z_u^{(K)}$ ортогональны, это не изменяет характера параметризации самой поверхности $Д(И)$: если в исходной системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ поверхность $Д(И)$ параметризована не ортогонально, это не значит, что та же поверхность $Д(И)$ в новой ортогональной системе координат $x_1y_1z_1$ будет параметризована ортогонально. Поэтому выполнять дополнительную проверку на ортогональность параметризации поверхности $Д(И)$ (т.е. выполнение условия $F_{\partial(u)} \equiv 0$) не требуется. Эта проверка связана с видом параметризации поверхности $Д(И)$, но не с видом системы координат, в которой эта поверхность описана.

Оценку целесообразности изменения исходной параметризации поверхности $Д$ на ортогональную следует производить на ранних этапах решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали. Однако это не всегда удобно, т.к. характер параметризации поверхности $Д$ детали бывает связан с формой и параметрами контура, ограничивающего обрабатываемый участок поверхности $Д$, с формой, параметрами и количеством “островков” на ней и пр. Поэтому изменять исходную параметризацию поверхности $Д$ не всегда целесообразно[1].

При образовании замкнутых циклов последовательных преобразований координат используются не только ортогональные декартовы системы координат, но и косоугольные системы координат, а также криволинейные координаты: цилиндрические, сферические и др.

---

[1] На любой поверхности $Д(И)$ можно так ввести координаты, чтобы выполнялись условия $E_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \equiv 1$, $F_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \equiv 0$. При этом функция $G_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ может быть любой положительной – такая система называется *полугеодезической*. Другой удобный вид координат – *изотермические* или *конформные* координаты. В этой системе $F_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \equiv 0$, $E_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \equiv G_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$. Эти координаты характерны тем, что лежащие в некоторой области V прообразы “маленьких фигур” на поверхности $Д(И)$ почти подобны им, а углы между кривыми сохраняются. Находят применение *чебышевские* координаты: в них $E_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \equiv G_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) \equiv 1$. Здесь длины координатных линий не изменяются, а $F_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ равняется косинусу угла между координатными линиями: $F_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}) = \cos\omega_{\partial(u)}$. Эти координаты применяются, например, при решении задач, связанных с раскроем листового материала.

4.2. Относительная локальная ориентация детали и инструмента

Для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразованя поверхности детали необходима количественная мера, позволяющая дать ответ на вопрос как ориентирован инструмент относительно детали. В общем случае относительная ориентация детали и инструмента в точке K определяется величиной угла относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$ – *локальной* потому, что эта мера относится только к дифференциальной окрестности точки K. Введем

Определение 4.1. *Угол* μ *относительной локальной ориентации поверхностей* $Д$ *и* $И$ *– это угол, который составляют первые* $\mathbf{T}_{1.д}$ *и* $\mathbf{T}_{1.и}$*, (или, что то же самое, вторые* $\mathbf{T}_{2.д}$ *и* $\mathbf{T}_{2.и}$*) главные направления на поверхности* $Д$ *детали и исходной инструментальной поверхности* $И$ *в точке* K *их касания.*

Угол μ измеряется в общей для поверхностей $Д$ и $И$ касательной плоскости.

Решая задачу нахождения угла μ, предполагаем, что поверхности $Д$ и $И$ заданы аналитически в общей системе декартовых координат, например, в системе координат $X_д Y_д Z_д$, связанной с деталью, а уравнения этих поверхностей представлены в параметрической (1.1) или в векторной (1.2) форме.

Если поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой в точке, то координаты точки K, в которой собственно и требуется определить величину угла μ, одновременно удовлетворяют уравнениям поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$. Совместное решение этих уравнений однозначно определит координаты, как правило, единственной точки K.

Если поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой вдоль отрезка линии, то совместное решение уравнений этих поверхностей определит координаты всех точек линии касания – *характеристики* E (также, как правило, единственной). В этом случае угол μ можно рассчитать в любой точке характеристики E. Следовательно, для случая линейного касания поверхностей $Д$ и $И$ задача определения величины угла μ дополняется необходимостью конкретизации (выбора или установления по определенным правилам) точки K на характеристике E, в которой требуется расчитать величину угла μ. Таким образом при линейном касании текущее значение угла μ определяет относительную локальную ориентацию поверхностей $Д$ и $И$ в текущей точке K характеристики E.

Если поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой в пределах некоторого участка поверхности, задача определения величины угла μ вырождается в тривиальную и не представляет интерес: угол μ в этом случае тождественно равен нулю $(\mu \equiv 0)$ в каждой точке общего для поверхностей $Д$ и $И$ отсека или не определен.

Определение величины угла μ представляет интерес только в случаях, когда поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой либо в точке, либо вдоль характеристики E.

В единственной или в выбранной на характеристике E точке K (рис. 4.5) проведем общую касательную плоскость и контактную нормаль.

В системе координат $X_д Y_д Z_д$ положение касательной плоскости и нормали к поверхности $Д$ однозначно определяется через направления касательных $\dfrac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}$ и $\dfrac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д}$ к координатным $U_д -$ и $V_д -$линиям. Поскольку поверхности $Д(И)$ отнесены к криволинейным координатам, векторы касательных $\dfrac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}$ и $\dfrac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д}$ можно записать в форме

$$\mathbf{x}_д^{(K)} = \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д} = \mathbf{i}_д \frac{\partial X(U_д, V_д)}{\partial U_д}\bigg|_K + \mathbf{j}_д \frac{\partial Y(U_д, V_д)}{\partial U_д}\bigg|_K + \mathbf{k}_д \frac{\partial Z(U_д, V_д)}{\partial U_д}\bigg|_K ; \tag{4.13}$$

$$\mathbf{y}_д^{(K)} = \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д} = \mathbf{i}_д \frac{\partial X(U_д, V_д)}{\partial V_д}\bigg|_K + \mathbf{j}_д \frac{\partial Y(U_д, V_д)}{\partial V_д}\bigg|_K + \mathbf{k}_д \frac{\partial Z(U_д, V_д)}{\partial V_д}\bigg|_K . \tag{4.14}$$

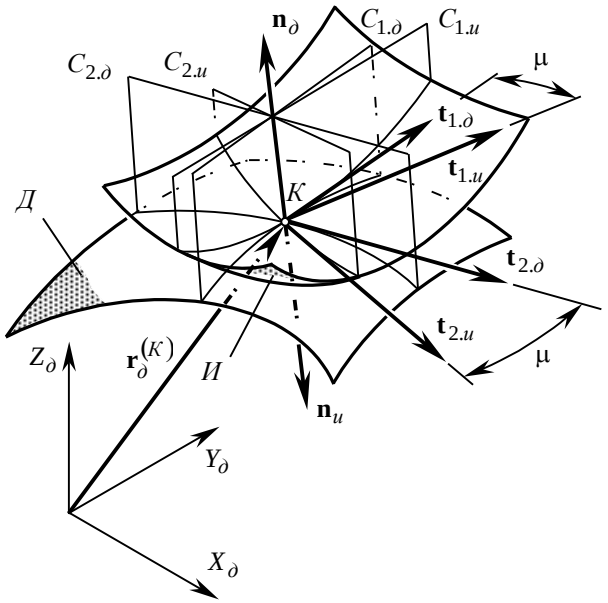


Рис. 4.5. К определению величины угла μ относительной локальной ориентации детали и инструмента.

Уравнения (13) и (14) позволяют записать уравнение плоскости, касательной к поверхностям $Д$ и $И$ в их неособой точке K:

$$\left\{\left[\mathbf{r}_д - \mathbf{r}_д^{(K)}\right] \quad \left[\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}\bigg|_K\right]; \quad \left[\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д}\bigg|_K\right]\right\} = 0;$$

$$\left(\left|\mathbf{r}_д - \mathbf{r}_д^{(K)}\right| \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}\bigg|_K \times \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д}\bigg|_K = 0\right)$$

или в такой форме

$$\begin{vmatrix} X_д - x^{(K)} & \frac{\partial X_д}{\partial U_д}\Big|_K & \frac{\partial X_д}{\partial V_д}\Big|_K \\ Y_д - y^{(K)} & \frac{\partial Y_д}{\partial U_д}\Big|_K & \frac{\partial Y_д}{\partial V_д}\Big|_K \\ Z_д - z^{(K)} & \frac{\partial Z_д}{\partial U_д}\Big|_K & \frac{\partial Z_д}{\partial V_д}\Big|_K \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.15)$$

Все производные по параметрам $U_д$ и $V_д$ рассчитываются в точке K.

Уравнение касательной плоскости также представимо в виде

$$a\left|X_д - x^{(K)}\right| + b\left|Y_д - y^{(K)}\right| + c\left|Z_д - z^{(K)}\right| = 0,$$

где коэффициенты a, b, c равны

$$a = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_д}{\partial U_д} & \frac{\partial Z_д}{\partial U_д} \\ \frac{\partial Y_д}{\partial V_д} & \frac{\partial Z_д}{\partial V_д} \end{vmatrix}; \qquad b = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_д}{\partial U_д} & \frac{\partial X_д}{\partial U_д} \\ \frac{\partial Z_д}{\partial V_д} & \frac{\partial X_д}{\partial V_д} \end{vmatrix}; \qquad c = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_д}{\partial U_д} & \frac{\partial Y_д}{\partial U_д} \\ \frac{\partial X_д}{\partial V_д} & \frac{\partial Y_д}{\partial V_д} \end{vmatrix}. \qquad (4.16)$$

Контактная нормаль $\mathbf{N}_д^{(K)}$ в точке касания поверхностей $Д$ и $И$ проходит через точку K перпендикулярно общей касательной плоскости, т.е. перпендикулярно плоскости, содержащей векторы $\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д}$. Уравнение контактной нормали записывается так $\mathbf{N}_д^{(K)} = \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}\Big|_K \times \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д}\Big|_K$ и может быть представлено в форме $\mathbf{r}_д - \mathbf{r}_д^{(K)} = t \cdot \mathbf{n}_д^{(K)}$, где t – постоянная величина; $\mathbf{n}_д^{(K)}$ – орт контактной нормали, равный:

$$\mathbf{n}_д^{(K)} = \frac{a\,\mathbf{i}_д + b\,\mathbf{j}_д + c\,\mathbf{k}_д}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

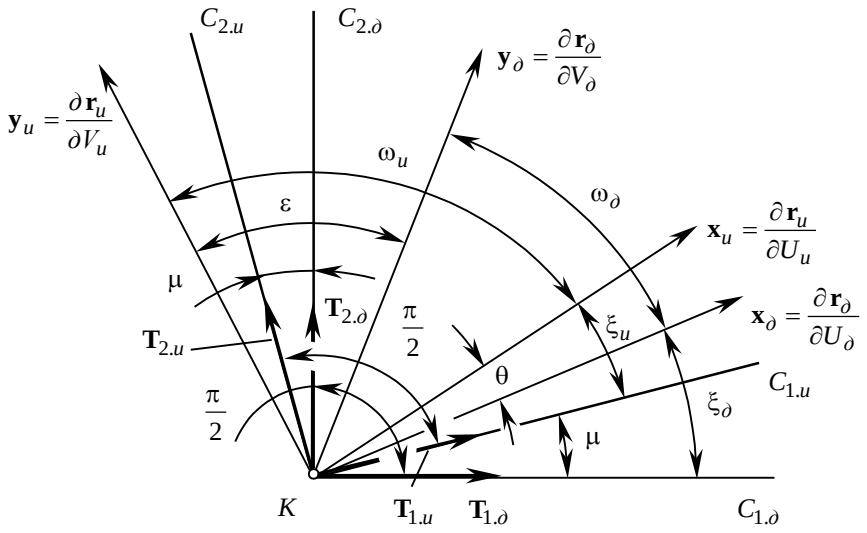


Рис. 4.6. Относительная локальная ориентация поверхности $Д$ детали и ИИП $И$.

В общей касательной плоскости через точку K попарно проходит по два направления $\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}$, касательные к координатным $U_\partial -$, $V_\partial -$ и $U_u -$, $V_u -$ линиям. Углы $\omega_\partial^{(K)}$ и $\omega_u^{(K)}$ между координатными линиями рассчитываются по формулам:

$$(4.17)\qquad \sin\omega_\partial = \frac{\sqrt{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}}{\sqrt{E_\partial G_\partial}}; \qquad \cos\omega_\partial = \frac{F_\partial}{\sqrt{E_\partial G_\partial}} \qquad \sin\omega_u = \frac{\sqrt{E_u G_u - F_u^2}}{\sqrt{E_u G_u}}; \qquad \cos\omega_u = \frac{F_u}{\sqrt{E_u G_u}}.$$

Направления касательных $\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}$ приняты в качестве направлений осей двух локальных косоугольных систем координат $x_\partial y_\partial$ и $x_u y_u$, развернутых одна относительно другой (рис. 4.6) на некоторый угол.

Углы θ и ε между осями x_∂ и x_u, а также y_∂ и y_u систем координат $x_\partial y_\partial$ и $x_u y_u$ (см. рис. 4.6.) рассчитываются по формулам

$$\cos\theta = \cos\angle(x_\partial, x_u) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}\right|}; \qquad \cos\varepsilon = \cos\angle(y_\partial, y_u) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\right|}.$$

В точке K строим две пары взаимно ортогональных направлений $\mathbf{T}_{1.\partial(u)}$ и $\mathbf{T}_{2.\partial(u)}$, совпадающих со следами пересечения касательной плоскости (15) главными секущими плоскостями $C_{1.\partial(u)}$ и $C_{2.\partial(u)}$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы направление $\frac{\partial U_\partial}{\partial V_\partial}$ было главным, является равенство нулю определителя (2)

$$\begin{vmatrix} E_\partial dU_\partial + F_\partial dV_\partial & F_\partial dU_\partial + G_\partial dV_\partial \\ L_\partial dU_\partial + M_\partial dV_\partial & M_\partial dU_\partial + N_\partial dV_\partial \end{vmatrix} = 0, \tag{4.18}$$

раскрывая который, получим (4) или:

$$(F_\partial L_\partial - E_\partial M_\partial)\cdot\left(\frac{\partial U_\partial}{\partial V_\partial}\right)^2 + (G_\partial L_\partial - E_\partial N_\partial)\cdot\frac{\partial U_\partial}{\partial V_\partial} + (G_\partial M_\partial - F_\partial N_\partial) = 0. \tag{4.19}$$

В системах координат $x_\partial y_\partial$ и $x_u y_u$ главные направления определяются как корни квадратного уравнения (4) или (19).

При ортогональной (U_∂, V_∂)– параметризации поверхности $Д$ отношение $\frac{\partial U_\partial}{\partial V_\partial}$ определяет величину тангенса угла ξ_∂ между направлением $\mathbf{T}_{1.\partial}$ и U_∂ – линией. При изогональной (U_∂, V_∂)– параметризации величина угла ξ_∂ по известному соотношению $\frac{\partial U_\partial}{\partial V_\partial}$ расчитываются по формуле

$$\sin\xi_\partial = \frac{\frac{\partial U_\partial}{\partial V_\partial}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U_\partial}{\partial V_\partial}\right)^2 - 2\frac{\partial U_\partial}{\partial V_\partial}\cos\omega_\partial + 1}}\sin\omega_\partial. \tag{4.20}$$

Угол $\sin\xi_\partial$ можно также расчитать другим путем. В соответсвие с цепным правилом запишем

$$d\mathbf{r}_\partial = \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}dU_\partial + \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}dV_\partial.$$

По определению $\tan\xi_\partial = \frac{\sin\xi_\partial}{\cos\xi_\partial}$. Функции $\sin\xi_\partial$ и $\cos\xi_\partial$ можно расчитать по формулам:

$$\sin\xi_\partial = \frac{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\times d\mathbf{r}_\partial\right|}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right|\cdot|d\mathbf{r}_\partial|} \quad \text{и} \quad \cos\xi_\partial = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot d\mathbf{r}_\partial}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right|\cdot|d\mathbf{r}_\partial|}.$$

Отсюда следует, что:

$$\tan\xi_\partial = \frac{\sin\xi_\partial}{\cos\xi_\partial} = \frac{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\times d\mathbf{r}_\partial\right|}{\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot d\mathbf{r}_\partial} = \frac{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\times d\mathbf{r}_\partial\right|}{\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}dU_\partial + \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}dV_\partial\right)} = \frac{\left|\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\times\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|dV_\partial}{\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}dU_\partial + \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}dV_\partial}.$$

Но в соответствие с (1.24) и (1.26)

$$\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}=E_д;\qquad \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д}=F_д;\qquad \left|\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}\times\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д}\right|=\sqrt{E_д G_д - F_д^2}\ .$$

Отсюда получаем, что

$$\tan\xi_д=\frac{\sqrt{E_д G_д - F_д^2}\,\dfrac{dV_д}{dU_д}}{E_д + F_д\dfrac{dV_д}{dU_д}}.$$

Из рис.4.6. следует, что $\mu=\varepsilon-\omega_u+\omega_д-\xi_u+\xi_д$ и $\theta=\omega_u-\omega_д-\varepsilon=\xi_д-\xi_u-\mu$, откуда $\mu=\xi_д-\xi_u-\theta$.

Зависимость $\mu=\xi_д-\xi_u-\theta$ дает возможность аналитически рассчитать величину угла μ относительной локальной ориентации детали и инструмента в текущей точке K их касания.

Найденное значение угла μ используется при решении многих задач формообразования поверхностей деталей, например, при составлении формул и операторов результирующего преобразования локальных систем координат.

Пример 4.1. Требуется определить величины углов между осями локальных систем координат. Для этого рассмотрим две компланарные системы косоугольных координат с общим началом в точке K (рис. 4.7).

Оси системы координат $x_д y_д$ расположены касательно к координатным $U_д-$ и $V_д-$ линиям на поверхности $Д$. Направления осей $x_д$ и $y_д$ такой системы координат определяются направлениями векторов $\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д}$ соответственно.

Оси второй системы координат $x_u y_u$ расположены касательно к координатным координатным U_u- и V_u- линиям на поверхности $И$. Направления осей x_u и y_u этой системы координат определяется направлениями векторов $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}$ соответственно.

Аналогично (20) имеем:

$$\sin\xi_u=\frac{\dfrac{\partial V_u}{\partial U_u}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial V_u}{\partial U_u}\right)^2-2\dfrac{\partial V_u}{\partial U_u}\cos\omega_u+1}}\sin\omega_u. \tag{4.21}$$

В общем случае поверхности $Д$ и $И$ развернуты одна относительно другой на угол относительной локальной ориентации μ. При заданном относительном положении поверхностей величина угла μ в каждой точке их касания либо известна, либо может быть рассчитана (см. выше).

Из изложенного и рис. 4.6. следует, что угол ε между осями $y_д$ и y_u локальных подвижных систем координат $x_д y_д$ и $x_u y_u$ равен:

$$\varepsilon=\omega_u-\omega_д+\xi_д-\xi_u+\mu, \tag{4.22}$$

а угол θ между осями $x_д$ и x_u:

$$\theta=\omega_u-\omega_д-\varepsilon=\xi_д-\xi_u-\mu. \tag{4.23}$$

Формулы для расчета величин углов: $\omega_д$ – (17), $\xi_д$ – (20), ω_u – (17), ξ_u – (21), ε – (22) и θ – (23), позволяют установить формулы $x_д=x_д(x_u,y_u)$, $y_д=y_д(x_u,y_u)$ перехода от системы координат $x_u y_u$ к

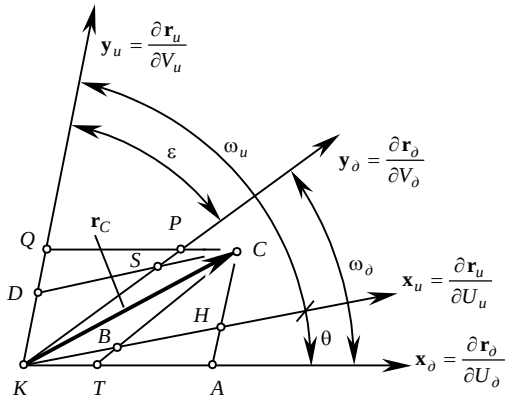


Рис. 4.7. Локальные косоугольные системы координат детали и инструмента.

системе координат $x_\partial y_\partial$ и формулы $x_u = x_u(x_\partial, y_\partial)$, $y_u = y_u(x_\partial, y_\partial)$ обратного перехода. Из рис. 4.7 следует, что:

$$x_\partial = x_u\left[\frac{\sin\omega_u}{\sin(\omega_u+\theta)} - \frac{\sin\theta\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_\partial\sin(\omega_u+\theta)}\right] + y_u\frac{\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_\partial};$$

$$y_\partial = x_u\frac{\sin\theta}{\sin\omega_\partial} + y_u\left[\frac{\sin\omega_u}{\sin(\omega_\partial-\theta)} - \frac{\sin\theta\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_\partial\sin(\omega_\partial-\theta)}\right].$$

Аналогично получаем, что

$$x_u = x_\partial\left[\frac{\sin\omega_\partial}{\sin(\omega_\partial-\theta)} - \frac{\sin\theta\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_u\sin(\omega_\partial-\theta)}\right] + y_\partial\frac{\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_u};$$

$$y_u = -x_\partial\frac{\sin\theta}{\sin\omega_u} + y_\partial\left[\frac{\sin\omega_\partial}{\sin(\omega_u+\theta)} - \frac{\sin\theta\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_u\sin(\omega_u+\theta)}\right].$$

Эти уравнения могут быть представлены в виде оператора прямого:

$$\mathbf{Rs}(u\to\partial) = \begin{bmatrix} \frac{\sin\omega_u}{\sin(\omega_u+\theta)} - \frac{\sin\theta\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_\partial\sin(\omega_u+\theta)} & \frac{\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_\partial} & 0 & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\sin\omega_\partial} & \frac{\sin\omega_u}{\sin(\omega_\partial-\theta)} - \frac{\sin\theta\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_\partial\sin(\omega_\partial-\theta)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

И обратного

$$\mathbf{Rs}(\partial\to u) = \begin{bmatrix} \frac{\sin\omega_\partial}{\sin(\omega_\partial-\theta)} - \frac{\sin\theta\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_u\sin(\omega_\partial-\theta)} & \frac{\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_u} & 0 & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\sin\omega_u} & \frac{\sin\omega_\partial}{\sin(\omega_u-\theta)} - \frac{\sin\theta\sin(\omega_u-\omega_\partial+\theta)}{\sin\omega_u\sin(\omega_u+\theta)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

преобразования координат:

В случае ортогональной параметризации поверхности $Д$ приведенные выше формулы преобразуются к виду:

$$x_\partial = x_u\cos\theta - y_u\sin\theta; \qquad x_u = x_\partial\cos\theta + y_\partial\sin\theta;$$
$$y_\partial = x_u\sin\theta + y_u\cos\theta; \qquad y_u = -x_\partial\sin\theta + y_\partial\cos\theta$$

и также могут быть представлены в виде оператора прямого:

$$\mathbf{Rs}(u\to\partial) = \mathbf{Rt}(\theta, z_u) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и обратного

$$\mathbf{Rs}(\partial\to u) = \mathbf{Rt}(-\theta, z_\partial) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

преобразования координат.

Очевидно, что приведенные результаты находятся в полном соответствии с подходом, рассмотренным выше (см. гл.3).

4.3.Первое приближение: общая касательная плоскость

Касающиеся одна другой поверхность $Д$ детали и исходная инструментальная поверхность $И$ всегда имеют общую касательную плоскость. Касательную плоскость можно рассматривать как первое приближение некоторого геометрического образа, позволящего составить представление о геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ в дифференциальной окрестности точки K. Положение и ориентация касательной плоскости определяются координатами точки K и направлением контактной нормали в ней.

Если поверхность $Д(И)$ задана векторным уравнением (1), уравнение общей касательной плоскости записывается так (1.11):

$$\left(\mathbf{r}_{КП} - \mathbf{r}_{д}^{(K)}\right) \frac{\partial \mathbf{r}_{д}}{\partial U_{д}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{д}}{\partial V_{д}}\Bigg|_{(K)},$$

где $\mathbf{r}_{КП}$ – радиус-вектор текущей точки касательной плоскости в исходной системе координат $X_{д}Y_{д}Z_{д}$;

$\mathbf{r}_{д}^{(K)}$ – радиус-вектор точки K в той же системе координат.

Контактная нормаль в точке K равна

$$\mathbf{N}_{д} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{д}}{\partial U_{д}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{д}}{\partial V_{д}}\right)\Bigg|_{(K)}.$$

Если формообразование поверхности $Д$ детали рассматривается в локальной подвижной системе координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$, приведенные уравнения существенно упрощаются и приводятся к виду

- $Z^{(K)} = 0$ – для касательной плоскости;
- $\mathbf{N}_{д} = |\mathbf{N}_{д}| \cdot \mathbf{k}^{(K)}$ – для контактной нормали (и $\mathbf{n}_{д} = \mathbf{k}^{(K)}$ – для орта контактной нормали).

Уравнение общей касательной плоскости малоинформативно и дает чрезмерно упрощенное представление о геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$, что закономерно, поскольку касательная плоскость описывается уравнением всего лишь первого порядка.

Использование общей касательной плоскости является необходимым, но не достаточным для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали. Это вынуждает вводить в рассмотрение приближения второго и более высоких порядков.

4.4. Второе приближение: соприкасающиеся квадрики, поверхность приведенной кривизны

Касающиеся одна другой поверхности $Д$ и $И$ локально могут быть аппроксимированы поверхностями второго порядка – квадриками.

4.4.1. Соприкасающиеся квадрики. Для фиксированной точки на поверхности $Д(И)$ всегда можно выбрать такую декартову систему координат, начало которой совпадает с заданной точкой на поверхности, а направление одной из координатных осей совпадает с контактной нормалью. Такой системой координат может служить, в частности, локальная система координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$. В этой системе координат поверхность $Д(И)$ в дифференциальной окрестности точки K можно представить уравнением (1.10) в явной форме:

(4.24) $$Z_{д(u)} = Z_{д(u)}\left[X_{д(u)}, Y_{д(u)}\right].$$

В начале координат справедливо соотношение

$$Z_{\partial(u)} = \left.\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}\right|_{(0,0)} = 0 .$$

В дифференциальной окрестности точки K разложение уравнения (24) в ряд Тейлора представимо в форме:

$$Z_{\partial(u)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}(0,0)}{\partial X^2_{\partial(u)}} X^2_{\partial(u)} + \frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}\partial Y_{\partial(u)}} X_{\partial(u)} Y_{\partial(u)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z_{\partial(u)}(0,0)}{\partial Y^2_{\partial(u)}} Y^2_{\partial(u)} + \ldots \qquad (4.25)$$

Путем поворота локальной системы координат $x^{(K)}y^{(K)}z^{(K)}$ вокруг оси $z^{(K)}$ разложение (25) приводится к виду

$$Z_{\partial(u)} = \frac{1}{2}\left[k_{1.\partial(u)} X^2_{\partial(u)} + k_{2.\partial(u)} Y^2_{\partial(u)}\right] + \ldots \qquad (4.26)$$

Здесь $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ – главные кривизны поверхности $Д(И)$ в точке K. Они соответсвенно равны:

$$k_{1,2.\partial(u)} = \frac{\left(G_{\partial(u)}L_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)}M_{\partial(u)} + E_{\partial(u)}N_{\partial(u)}\right) \pm \sqrt{\left(G_{\partial(u)}L_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)}M_{\partial(u)} + E_{\partial(u)}N_{\partial(u)}\right) - 4H^2_{\partial(u)}T^2_{\partial(u)}}}{2H^2_{\partial(u)}} . \qquad (4.27)$$

В этой формуле $H^2_{\partial(u)} = E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}$ (см. выше, с.42) и $T^2_{\partial(u)} = L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)}$ (см. выше, с.50).

В разложении (25) можно также учитывать члены третьего и более высокого порядка.

Например, для поверхности $Д(И)$ локальная аппроксимация третьего порядка в трехграннике Дарбу представима в форме (Koenderink, J.J., 1990):

$$Z_{\partial(u)} = \frac{1}{2}\left[k_{1.\partial(u)} X^2_{\partial(u)} + k_{2.\partial(u)} Y^2_{\partial(u)}\right] + \frac{1}{6}\left[\frac{\partial k_{1.\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}} X^3_{\partial(u)} + 3\frac{\partial k_{1.\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}} X^2_{\partial(u)} Y_{\partial(u)} + 3\frac{\partial k_{2.\partial(u)}}{\partial X_{\partial(u)}} X_{\partial(u)} Y^2_{\partial(u)} + \frac{\partial k_{2.\partial(u)}}{\partial Y_{\partial(u)}}\right] + R\left[X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}\right], \qquad (4.28)$$

где остаточный член $R\left[X_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}\right]$ содержит слагаемые 4-го и более высоких порядков.

Коэффициенты уравнения (28) наглядно интерпретируются геометрически. Если поверхность $Д(И)$ представлена в трехграннике Дарбу, они являются компонентами градиентов ее главных кривизн.

Очевидно, что разложение (28) является более точным.

4.4.2. Поверхность приведенной кривизны. Под приведенной нормальной кривизной k_{np} понимается разность алгебраических значений нормальных кривизн двух касающихся одна другой поверхностей, расчитанных в их общем нормальном сечении. Для поверхностей $Д$ и $И$ приведенная нормальная кривизна k_{np} определяется так:

$$k_{np} = k_{\partial} - k_{u} . \qquad (4.29)$$

Текущее значение нормальной кривизны $k_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ находится по расчитанным (27) значениям ее главных кривизн. Для этого достаточно воспользоваться формулой Эйлера (1.97):

(4.30) $$k_{\partial(u)} = k_{1.\partial(u)} \cos^2 \theta_{\partial(u)} + k_{2.\partial(u)} \sin^2 \theta_{\partial(u)}.$$

С учетом (30) развернутая форма записи формулы (29) может быть получена так.

Текущее значение нормальной кривизны k_∂ поверхности $Д$ детали равно:

$$k_\partial = k_{1.\partial} \cos^2 \theta + k_{2.\partial} \sin^2 \theta .$$

Поверхность $И$ инструмента развернута относительно поверхности $Д$ детали на угол μ относительной локальной ориентации. В общем случае этот угол не равен нулю ($\mu \neq 0^\circ$). Поэтому текущее значение нормальной кривизны k_u поверхности $И$ инструмента равно:

$$k_u = k_{1.u} \cos^2 (\theta + \mu) + k_{2.u} \sin^2 (\theta + \mu).$$

В соответствие с (29) можно записать

(4.31) $$k_{np} = k_{1.\partial} \cos^2 \theta + k_{2.\partial} \sin^2 \theta - k_{1.u} \cos^2 (\theta + \mu) - k_{2.u} \sin^2 (\theta + \mu).$$

После несложных преобразований уравнение (31) приводится в виду:

$$k_{np} = (k_{1.\partial} - k_{1.u} \cos^2 \mu - k_{2.u} \sin^2 \mu) \cos^2 \theta + (k_{2.\partial} - k_{1.u} \sin^2 \mu - k_{2.u} \cos^2 \mu) \sin^2 \theta + (k_{1.u} - k_{2.u}) \frac{\sin 2\mu}{2} \sin 2\theta .$$
(4.32)

Можно показать, что сумма приведенных кривизн k_{np}^{Σ} в любых двух взаимно перпендикулярных направлениях является величиной постоянной. Для этого достаточно в зависимость (31) подставить значения $\theta_{\partial(u)}$, отличающиеся одно от другого на 90°. После преобразований для любой пары ортогональных направлений получим: $k_{np}^{\Sigma} = k_{1.\partial} + k_{2.\partial} - k_{1.u} - k_{2.u}$.

Экстремальные (наибольшее $k_{1.np}$ и наименьшее $k_{2.np}$) значения приведенной кривизны измеряются в двух ортогональных одно другому нормальных сечения поверхности приведенной кривизны. В этом можно убедиться исходя из условия $\frac{\partial k_{np}(\theta_{\partial(u)})}{\partial \theta_{\partial(u)}} = 0$. Продифференцировав (31) по $\theta_{\partial(u)}$ и приравняв производную нулю, после преобразований получим:

$$(k_{1.\partial} - k_{1.u}) \sin 2\theta_{\partial(u)} - (k_{2.\partial} - k_{2.u}) \sin 2(\theta_{\partial(u)} - \mu) = 0.$$

Но

(4.33) $$\cot 2\theta = \cot 2\mu - \frac{k_{1.\partial} - k_{1.u}}{(k_{2.\partial} - k_{2.u}) \sin 2\mu} \qquad \text{или} \qquad \tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Легко убедиться в том, что уравнение (33) выполняется при двух значениях угла μ, отличающихся одно от другого на 90°. Поэтому экстремальным значениям приведенной кривизны всегда соответствуют два взаимно перпендикулярных направления.

Без доказательства укажем, что если обозначить

$$a_{11} = k_{1.\partial} - k_{1.u} \cos^2 \mu - k_{2.u} \sin^2 \mu = k_{1.\partial} - \frac{k_{1.u} + k_{2.u}}{2} - \frac{k_{1.u} - k_{2.u}}{2} \cos 2\mu ;$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{k_{1.и} - k_{2.и}}{2} \sin 2\theta \ ;$$

$$a_{22} = k_{2.д} - k_{1.и} \sin^2 \mu - k_{2.и} \cos^2 \mu = k_{2.д} - \frac{k_{1.и} + k_{2.и}}{2} + \frac{k_{1.и} - k_{2.и}}{2} \cos 2\mu,$$

то в соответствие в (32) получим

$$k_{1,2.пр} = 0{,}5\left[a_{11} + a_{22} + (a_{11} - a_{22})\cos 2\theta\right] + a_{12} \sin 2\theta \ . \tag{4.34}$$

Приведенные зависимости позволяют в таком виде записать выражение для расчета величин главных кривизн поверхности приведенной кривизны

$$k_{1,2.пр} = 0{,}5\left\{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right\}. \tag{4.35}$$

Уравнения (33)-(35) справедливы как в случае точечного, так и линейного касания поверхностей $Д$ и $И$. Но при линейном их касании коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} дополнительно связаны между собой соотношением $a_{22} = \frac{a_{12}^2}{a_{11}}$. Поэтому главные кривизны поверхности приведенной кривизны могут быть рассчитаны по более простым формулам:

$$k_{1.пр} = 0 \ ; \qquad k_{2.пр} = a_{11} + a_{22} = (k_{1.д} + k_{2.д}) - (k_{1.и} + k_{2.и}). \tag{4.36}$$

Первое главное направление на поверхности приведенной кривизны совпадает с направлением касательной к линии касания поверхностей $Д$ и $И$, а второе – перпендикулярно первому.

Здесь следует обратить внимание на то, что обратное утверждение неверно: если справедливы соотношения (36), это не значит, что поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой вдоль линии. Иными словами выполнение условий (36) необходимо, но не достаточно для обеспечения линейного касания поверхностей $Д$ и $И$.

При точечном касании поверхностей $Д$ и $И$ также имеется два ортогональных направления, соответствующие экстремальным значениям $k_{1.пр}$ и $k_{2.пр}$ нормальной кривизны. В одном из этих направлений нормальная кривизна $k_{пр}$ достигает максимального, а в другом – минимального значения. Однако при точечном касании поверхностей $Д$ и $И$, в отличие от линейного их касания, $k_{1.пр} \neq 0$.

Определение главных кривизн и главных направлений поверхности приведенной кривизны может быть интерпретировано как задача диагонализации симметричной матрицы

$$[П] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

Известно (см. гл. 3), что эта операция описывается уравнением вида

$$\begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} = [C]^T \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot [C],$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Уравнения (36) и (37) позволяют записать, что

$$P_{12} = a_{12}\cos 2\theta - \frac{(a_{11} - a_{22})\sin 2\theta}{2} = 0 ; \qquad \text{и} \qquad \tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} ;$$

$$P_{11} = 0{,}5\left[a_{11} + a_{22} - (a_{11} - a_{22})\cos 2\theta\right] + a_{12}\sin 2\theta ;$$

$$P_{22} = 0{,}5\left[a_{11} + a_{22} - (a_{11} - a_{22})\cos 2\theta\right] - a_{12}\sin 2\theta .$$

Эти уравнения эквивалентны уравнениям (33) и (35).

Так как взаимоогибаемые поверхности $Д$ и $И$ не должны внедряться одна в другую, то при изменении величины угла θ в пределах $0 \le \theta \le \pi$ зазор между поверхностями, измеренный на некотором достаточно малом расстоянии от точки K, должен быть одного знака – положительным. Поэтому поверхность приведенной кривизны представляет собой эллиптический параболоид, в частных случаях вырождающийся в параболический цилиндр. Она не может быть гиперболическим параболоидом.

В локальном подвижном ортонормированном базисе, например, в трехграннике Дарбу, уравнение поверхности приведенной кривизны приводится к виду:

(4.38) $$2z = k_{1.np}x^2 + k_{2.np}y^2 .$$

Это, в частности, следует из (26).

Наряду с поверхностью приведенной кривизны, которая определяется исходя из (29), в рассмотрение может быть введена *поверхность приведенного радиуса кривизны*. Для такой поверхности выполняется условие

$$R_{np} = R_{\partial} - R_{u} .$$

Без доказательства укажем, что в локальном подвижном ортонормированном базисе уравнение поверхности приведенного радиуса кривизны также можно привести к виду

$$2z = R_{1.np}x^2 + R_{2.np}y^2 .$$

Во многих отношениях поверхность приведенного радиуса кривизны эквивалентна поверхности приведенной кривизны.

4.4.3. Индикатриса кривизны (индикатриса Дюпена) поверхности *Д(И).* Строение и особенности локальной топологии поверхности $Д(И)$ в дифференциальной окрестности текущей точки M на ней удобно исследовать при помощи *индикатрисы кривизны*. Индикатриса[1] кривизны поверхности показывает характер распределения нормальных кривизн поверхности $Д(И)$ в дифференциальной окрестности текущей точке на ней. Эта характеристическая кривая может быть построена так (рис. 4.8).

В текущей точке M строится нормаль $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ к поверхности $Д(И)$ (см. рис. 4.8). На некотором достаточно малом расстоянии δ от точки M перпендикулярно нормали $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ проводится секущая плоскость Q (если локальный участок поверхности выпукловогнутый, проводятся две параллельные одна другой секущие плоскости Q_1 и Q_2, которые расположены с двух сторон от точки M на расстоянии $\pm\delta$ от нее). Плоскость Q пересекает поверхность $Д(И)$ по некоторой кривой $i_{\partial(u)}$. Эта кривая представляет собой некоторое приближение индикатрисы Дюпена. Далее считаем, что расстояние δ стремится к нулю $(\delta \to 0)$ и

[1] Индикатриса (франц. *indicatrice*, букв. – указывающая), линия или поверхность, наглядно характеризующая какое-либо свойство изучаемого объекта.

одновременно с этим масштаб изображения кривой $i_{\partial(u)}$ увеличивался до бесконечности $(m \to \infty)$. В пределе получим индикатрису кривизны $Ind\ Д(И)$ поверхности детали или исходной инструментальной поверхности.

Индикатрису кривизны $Ind\ Д(И)$ поверхности $Д(И)$ можно также рассматривать как проекцию бесконечно увеличенной кривой $i_{\partial(u)}$ в предельном ее положении (т.е. при $\delta \to 0$) на плоскость, касательную к поверхности $Д(И)$ в текущей гладкой регулярной точке M на ней[2].

Уравнение индикатривсы кривизны $Ind\ Д(И)$ можно получить исходя из формулы (1.112):

$$k_{\partial(u)} = \frac{\Phi_{1.\partial(u)}}{\Phi_{2.\partial(u)}} = \frac{L_{\partial(u)} dU^2_{\partial(u)} + 2M_{\partial(u)} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + N_{\partial(u)} dV^2_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)} dU^2_{\partial(u)} + 2F_{\partial(u)} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} dV^2_{\partial(u)}} \tag{4.39}$$

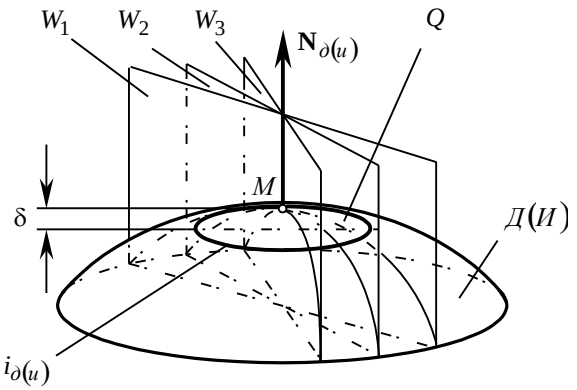


Рис. 4.8. К построению индикатрисы кривизны (индикатрисы Дюпена) поверхности $Д(И)$.

для расчета кривизны текущего плоского нормального сечения поверхности $Д(И)$.

Положение текущего плоского нормального сечения W относительно главных секущих плоскостей $C_{1.\partial(u)}$ и $C_{2.\partial(u)}$ определяется соотношением $\frac{dU_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}$. При вращении плоскости W вокруг нормали $\mathbf{N}_{\partial(u)}$, она последовательно занимает положения W_1, W_2, W_3, …, W_i, … – при этом соотношение $\frac{dU_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}$ изменяет свою величину.

Исходя их того, что квадрат линейного элемента $d\mathbf{r}^2_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ равен (1.23):

$$dr^2_{\partial(u)} = E_{\partial(u)} dU^2_{\partial(u)} + 2F_{\partial(u)} dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)} + G dV^2_{\partial(u)}, \tag{4.40}$$

с учетом (39) получаем

$$\frac{1}{R_{\partial(u)}} = L_{\partial(u)} \left[\frac{dU_{\partial(u)}}{dr_{\partial(u)}}\right]^2 + 2M_{\partial(u)} \frac{dU_{\partial(u)} dV_{\partial(u)}}{dr^2_{\partial(u)}} + N_{\partial(u)} \left[\frac{dV_{\partial(u)}}{dr_{\partial(u)}}\right]^2. \tag{4.41}$$

В этой формуле соотношение $\frac{dU_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}$ определяет положение нормальной секущей плоскости, в которой требуется определить радиус кривизны $R_{\partial(u)}$, но относительно не главных секущих плоскостей $C_{1.\partial(u)}$ и $C_{2.\partial(u)}$, как это имеет место в (40), а относительно координатных линий.

Координатные $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$линии пересекают одна другую под координатным углом $\omega_{\partial(u)}$, измеряемым между касательными

---

[2] Следует обратить внимание на то, что рассмотренный подход к определению индикатрисы кривизны $Ind\ Д(И)$ поверхности $Д(И)$ правомерен лишь в случае гладких *регулярных* точек на этой поверхности. Если точка на поверхности $Д(И)$ гладкая, но не регулярная (т.е. особая, как это имеет место, например, для седловинной точки на поверхности типа "обезьянье седло": – См.: Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. Пер. с нем., 3-е изд. – М.: Наука, 1981. -344с.), то использовать его следует осторожно. Так, особая точка поверхности типа "обезьянье седло" является точкой уплощения и поэтому для нее индикатриса кривизны не существует. Вместе с тем в литературе (там же и др.) можно встретить построенную для рассматриваемого случая "индикатрису кривизны" в виде трехлепестковой гиперболы – это неверно.

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{R^{(U)}_{\partial(u)}}{\sqrt{E_{\partial(u)}}}\mathbf{t}^{(U)}_{\partial(u)} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{R^{(V)}_{\partial(u)}}{\sqrt{G_{\partial(u)}}}\mathbf{t}^{(V)}_{\partial(u)}$$

к ним. Здесь $R^{(V)}_{\partial(u)}$ и $R^{(U)}_{\partial(u)}$ – нормальные радиусы кривизны поверхности $Д(И)$, измеренные в точке M в направлениях $\mathbf{t}^{(U)}_{\partial(u)}$ и $\mathbf{t}^{(V)}_{\partial(u)}$, касательных к $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$ линиям соответственно. Угол между плоскостью W_i и плоскостью, касательной к $V_{\partial(u)}-$ линии, обозначен через θ . С учетом изложенного можно записать:

$$\sqrt{E_{\partial(u)}}\frac{dU_{\partial(u)}}{d\mathbf{r}_{\partial(u)}} + \frac{F_{\partial(u)}}{\sqrt{E_{\partial(u)}}}\frac{dV_{\partial(u)}}{d\mathbf{r}_{\partial(u)}} = \cos\theta\ ; \qquad \frac{F_{\partial(u)}}{\sqrt{G_{\partial(u)}}}\frac{dU_{\partial(u)}}{d\mathbf{r}_{\partial(u)}} + \sqrt{G_{\partial(u)}}\frac{dV_{\partial(u)}}{d\mathbf{r}_{\partial(u)}} = \cos\left(\omega_{\partial(u)} - \theta\right).$$

Исходя из этого и с учетом вытекающего из (40) соотношения:

$$E_{\partial(u)}\left[\frac{dU_{\partial(u)}}{dr_{\partial(u)}}\right]^2 + 2F_{\partial(u)}\frac{dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)}}{dr^2_{\partial(u)}} + G_{\partial(u)}\left[\frac{dV_{\partial(u)}}{dr_{\partial(u)}}\right]^2 = 1,$$

после преобразований получим:

(4.42)
$$\sqrt{G_{\partial(u)}}\frac{dV_{\partial(u)}}{dr_{\partial(u)}} = \frac{\sin\theta}{\sin\omega_{\partial(u)}}\ ; \qquad \sqrt{E_{\partial(u)}}\frac{dU_{\partial(u)}}{dr_{\partial(u)}} = \frac{\sin\left[\omega_{\partial(u)} - \theta\right]}{\sin\omega_{\partial(u)}}.$$

Уравнения (42) позволяют преобразовать (41) к виду:

(4.43)
$$\frac{1}{R_{\partial(u)}} = \frac{L_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}}\frac{\sin^2\left[\omega_{\partial(u)} - \theta\right]}{\sin^2\omega_{\partial(u)}} + \frac{2M_{\partial(u)}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}}}\frac{\sin\left[\omega_{\partial(u)} - \theta\right]\sin\theta}{\sin^2\omega_{\partial(u)}} + \frac{N_{\partial(u)}}{G_{\partial(u)}}\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\omega_{\partial(u)}}.$$

Для построения индикатрисы кривизны $Ind\ Д(И)$ поверхности $Д(И)$ в касательной к $Д(И)$ плоскости через точку M проводим семейство лучей и вдоль каждого из них откладываем от точки M отрезок $\rho_{\partial(u)}$, равный по длине квадратному корню из абсолютной величины радиуса кривизны $R_{\partial(u)}$ соответствующего плоского нормального сечения, т.е. положим, что $\rho_{\partial(u)} = \sqrt{\left|R_{\partial(u)}\right|}$. В этом случае в косоугольной системе координат $x_{\partial(u)}y_{\partial(u)}$ с ортами $\mathbf{t}^{(U)}_{\partial(u)}$ и $\mathbf{t}^{(V)}_{\partial(u)}$ концы таких отрезков определятся координатами $x^{(i)}_{\partial(u)}$ и $y^{(i)}_{\partial(u)}$ (рис. 4.9).

Подставив (42) в (43) и выполнив необходимые преобразования, приходим к уравнению индикатрисы кривизны $Ind\ Д(И)$:

$$\frac{L_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}}x^2_{\partial(u)} + \frac{2M_{\partial(u)}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}}}x_{\partial(u)}y_{\partial(u)} + \frac{N_{\partial(u)}}{G_{\partial(u)}}y^2_{\partial(u)} = \pm 1$$

.(4.44)

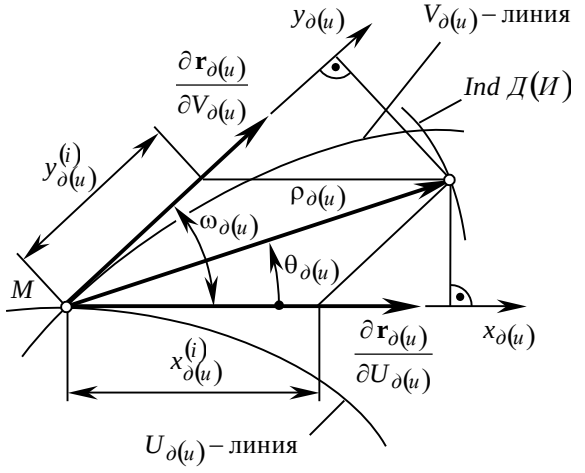


Рис. 4.9. К определению координат текущей точки индикатрисы кривизны поверхности $Д(И)$.

При ортогональной параметризации поверхности $Д(И)$ уравнение (44) упрощается и преобразуется к виду:

$$L_{∂(u)}x^2_{∂(u)} + 2M_{∂(u)}x_{∂(u)}y_{∂(u)} + N_{∂(u)}y^2_{∂(u)} = \pm 1. \tag{4.45}$$

Если рассмотрение вести в трехграннике Дарбу, начало которого совмещено с точкой M, уравнение индикатрисы кривизны может быть получено существенно проще. В этом случае из формулы Эйлера

$$k_{∂(u)} = k_{1.∂(u)}\cos^2\theta_{∂(u)} + k_{2.∂(u)}\sin^2\theta_{∂(u)} \tag{4.46}$$

следует

$$\frac{\rho_{1.∂(u)}\cos^2\theta_{∂(u)}}{\rho_{∂(u)}} + \frac{\rho_{2.∂(u)}\sin^2\theta_{∂(u)}}{\rho_{∂(u)}} = 1, \tag{4.47}$$

что и является уравнением индикатрисы Дюпена.

Из (44) и (45) следует, что индикатриса Дюпена представляет собой плоскую кривую второго порядка. Это позволяет использовать матричную форму записи уравнения этой характеристической кривой исходя при этом из общего уравнения конического сечения:

$$S = ax^2_{∂(u)} + 2hx_{∂(u)}y_{∂(u)} + by^2_{∂(u)} + 2gx_{∂(u)} + 2fy_{∂(u)} + c. \tag{4.48}$$

Это уравнение можно представить в виде

$$S = \begin{bmatrix} x_{∂(u)} & y_{∂(u)} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{∂(u)} \\ y_{∂(u)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{∂(u)} & y_{∂(u)} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{∂(u)} \\ y_{∂(u)} \\ 1 \end{bmatrix} = \tag{4.49}$$

$$= Ax^2_{∂(u)} + 2Hx_{∂(u)}y_{∂(u)} + By^2_{∂(u)} + 2Gx_{∂(u)} + 2Fy_{∂(u)} + C.$$

Здесь $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Приведенные результаты (44), (48) и (49) позволяют представить уравнение (44) индикатрисы кривизны $Ind\ Д(И)$ поверхности $Д(И)$ в форме

$$S_{∂(u)} = \begin{bmatrix} x_{∂(u)} & y_{∂(u)} & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{L_{∂(u)}}{E_{∂(u)}} & \dfrac{2M_{∂(u)}}{\sqrt{E_{∂(u)}G_{∂(u)}}} & 0 & 0 \\ \dfrac{2M_{∂(u)}}{\sqrt{E_{∂(u)}G_{∂(u)}}} & \dfrac{N_{∂(u)}}{G_{∂(u)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{∂(u)} \\ y_{∂(u)} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

и уравнение (45) в форме

$$S_{∂(u)} = \begin{bmatrix} x_{∂(u)} & y_{∂(u)} & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{∂(u)} & F_{∂(u)} & 0 & 0 \\ F_{∂(u)} & G_{∂(u)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{∂(u)} \\ y_{∂(u)} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Индикатриса кривизны $Ind\ Д(И)$ дает наглядное качественное и количественное представление о распределении нормальной кривизны поверхности $Д(И)$ в дифференциальной окрестности гладкой регулярной точки на ней. Это плоская характеристическая кривая, во всех случаях обладающая зеркальной и центральной симметрией. Ее асиптоты совпадают с асиптотическими направлениями на поверхности $Д(И)$, а оси – с направлениями касательных к линиям кривизны.

Индикатриса кривизны $Ind\ Д(И)$ полностью эквивалентна второй основной квадратичной форме $Ф_{2.\partial(u)}$ поверхности (см. выше, с. 46):

$$Ф_{2.\partial(u)} = d^2\mathbf{r}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = L_{\partial(u)}dU^2_{\partial(u)} + 2M_{\partial(u)}dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)} + N_{\partial(u)}dV^2_{\partial(u)}. \tag{4.51}$$

Индикатрису Дюпена (44) и (45) можно также интерпретировать как вращение оператора формы $Ф_{2.\partial(u)}$ (Koenderink, J.J., 1990).

В дифференциальной геометрии поверхности рассматриваются как бесконечно тонкие оболочки, т.е. без учета стороны, с которой расположен материальный носитель формы поверхности. В теории формообразования поверхностей деталей в обязательном порядке учитывается сторона поверхности, с которой расположено тело детали или инструмента, т.е. различают открытую и закрытую стороны поверхности (см. выше, рис. 1.6). Вследствие этого появляются особенности в определении понятия "*индикатриса кривизны поверхности* $Д(И)$". В указанном смысле понятие индикатриса кривизны поверхности $Д(И)$ представляет собой не кривую линию, а *участок плоскости*, расположенный внутри или вне собственно индикатрисы Дюпена. Поэтому уравнение индикатрисы кривизны для поверхности $Д(И)$ требует уточнения и может быть записано так (1.117), (1.118):

$$\frac{L_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}}x^2_{\partial(u)} + \frac{2M_{\partial(u)}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}}}x_{\partial(u)}y_{\partial(u)} + \frac{N_{\partial(u)}}{G_{\partial(u)}}y^2_{\partial(u)} \le \pm 1; \tag{4.52}$$

$$\frac{L_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}}x^2_{\partial(u)} + \frac{2M_{\partial(u)}}{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}}}x_{\partial(u)}y_{\partial(u)} + \frac{N_{\partial(u)}}{G_{\partial(u)}}y^2_{\partial(u)} \ge \pm 1. \tag{4.53}$$

Индикатрисы кривизны $Ind\ Д(И)$, построенные по (52) и (53), приведены в табл. 1.1.

Индикатрису Дюпена точнее следовало бы называть не индикатрисой кривизны, а *индикатрисой нормального радиуса кривизны*, поскольку она определяет характер распределения в дифференциальной окрестности точки M на поверхности $Д(И)$ не собственно кривизны $k_{\partial(u)}$, а нормального радиуса кривизны $R_{\partial(u)}$ (точнее – квадратного корня из абсолютной величины нормального радиуса кривизны).

Аналогично индикатрисе Дюпена $Ind\ Д(И)$ можно построить индикатрису $Ind^{(k)}Д(И)$ собственно кривизны, т.е. характеристическую кривую, в отличие от индикатрисы Дюпена определяемую не соотношением $\rho_{\partial(u)} = \sqrt{\left|R_{\partial(u)}\right|}$, а соотношением $\rho^{(k)}_{\partial(u)} = \sqrt{\left|k_{\partial(u)}\right|} = \sqrt{\left|R^{-1}_{\partial(u)}\right|}$. Такая характеристическая кривая может оказаться удобной в приложениях. В частности, для локального участка уплощения поверхности индикатриса Дюпена не определена, тогда как индикатриса собственно кривизны $Ind^{(k)}Д(И)$ в этом случае однозначно определяет точку, совпадающую с началом системы координат $x_{\partial(u)}y_{\partial(u)}$, т.е. точку M.

В трехграннике Дарбу уравнение индикатрисы кривизны $Ind^{(k)}Д(И)$ может быть получено из формулы Эйлера (30):

$$\frac{k_{1.\partial(u)}}{k_{\partial(u)}}\cos^2\theta_{\partial(u)} + \frac{k_{2.\partial(u)}}{k_{\partial(u)}}\sin^2\theta_{\partial(u)} = 1. \tag{4.54}$$

Из (54) следует, что

$$\frac{\partial k_{\partial(u)}}{\partial \theta_{\partial(u)}} = \left(k_{1.\partial(u)} + k_{2.\partial(u)}\right)\sin 2\theta_{\partial(u)}. \tag{4.55}$$

Очевидно, что производная (55) равна нулю ($\frac{\partial k_{\partial(u)}}{\partial \theta_{\partial(u)}} = 0$) при $\theta = 0$ и $\theta = 0{,}5\pi$.

Вторая производная равна

$$\frac{\partial^2 k_{\partial(u)}}{\partial \theta^2_{\partial(u)}} = 2\left(k_{\partial(u)} + k_{\partial(u)}\right)\cos 2\theta_{\partial(u)}. \tag{4.56}$$

В этом случае

$$\left.\frac{\partial^2 k_{\partial(u)}}{\partial \theta^2_{\partial(u)}}\right|_{\theta=0} = 2\left(k_{1.\partial(u)} + k_{2.\partial(u)}\right) \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial^2 k}{\partial \theta}\right|_{\varsigma=\frac{\pi}{2}} = -2\left(k_{1.\partial(u)} + k_{2.\partial(u)}\right). \tag{4.57}$$

С учетом изложенного можно записать, что

$$\begin{aligned} k_{\partial(u)} &= \left(k_{1.\partial(u)}\cos^2\theta + k_{2.\partial(u)}\sin^2\theta\right)\Big|_{\theta=0} = k_{1.\partial(u)}; \\ k_{\partial(u)} &= \left(k_{1.\partial(u)}\cos^2\theta + k_{2.\partial(u)}\sin^2\theta\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = k_{2.\partial(u)}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Приведенные результаты (56)-(58) дают возможность геометрически интерпретировать уравнение (54) индикатрисы собственно кривизны $Ind^{(k)}Д(И)$ поверхности $Д(И)$ (рис. 4.10).

Индикатрисы кривизны $Ind^{(k)}Д(И)$ (см. рис. 4.10) построены для случаев:

Номер эскиза на рис. 4.10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{k_{1.\partial(u)}}{k_{\partial(u)}}$	3,0	2,0	2,0	1,5	1,0	0	0,5	0	-2,0	-1,0
$\frac{k_{2.\partial(u)}}{k_{\partial(u)}}$	1,0	2,0	0	-0,5	-1,0	0	-1,5	-2,0	-2,0	-3,0

Для описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ используется поверхность приведенной кривизны (см. выше, с. 207). Уравнение индикатриса кривизны $Ind^{(np)}(Д/И)$ поверхности приведенной кривизны записывается так:

$$\frac{L_{np}}{E_{np}}x_{np}^2 + \frac{2M_{np}}{\sqrt{E_{np}G_{np}}}x_{np}y_{np} + \frac{N_{np}}{G_{np}}y_{np}^2 = \pm 1. \tag{4.59}$$

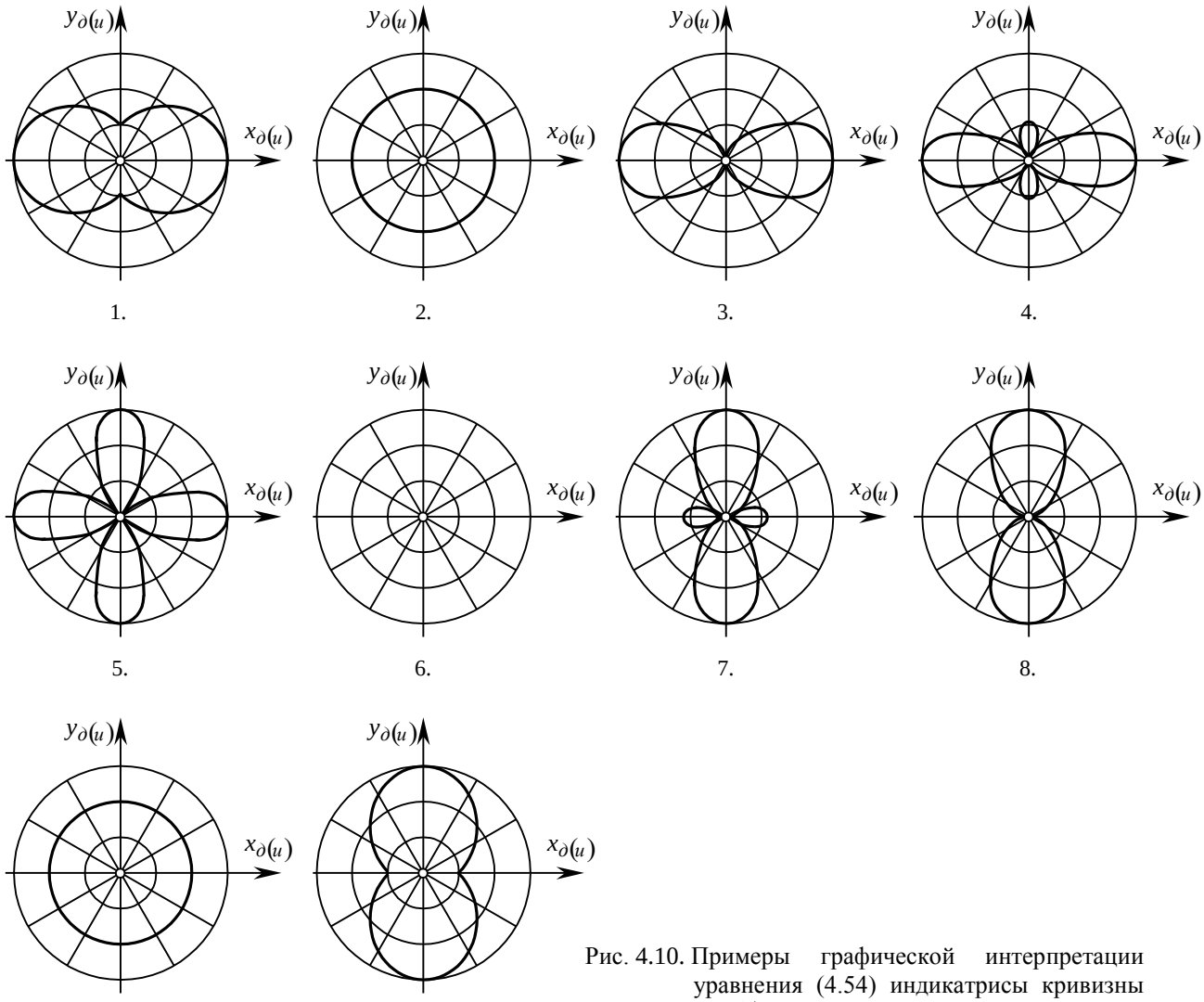


Рис. 4.10. Примеры графической интерпретации уравнения (4.54) индикатрисы кривизны $Ind^{(k)}Д(И)$ поверхности $Д(И)$.

Индикатриса кривизны $Ind^{(np)}(Д/И)$ достаточно полно описывает локальную топологию поверхностей $Д$ и $И$ в дифференциальной окрестности точки $К$. Это дает возможность использовать эту характеристическую кривую для описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$.

Пусть, например, выпуклая исходная инструментальная поверхность $И$ своим эллиптическим локальным участком касается в точке $К$ вогнутого эллиптического локального участка поверхности $Д$ детали (рис. 4.11). Выясним при каких условиях поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой по характеристике E, т.е. условие линейного их касания.

Уравнение (44) индикатрисы кривизны $Ind\,Д$ поверхности $Д$ может быть приведено к виду

$$\frac{x^2}{R_{1.\partial}}+\frac{y^2}{R_{2.\partial}}=1.$$

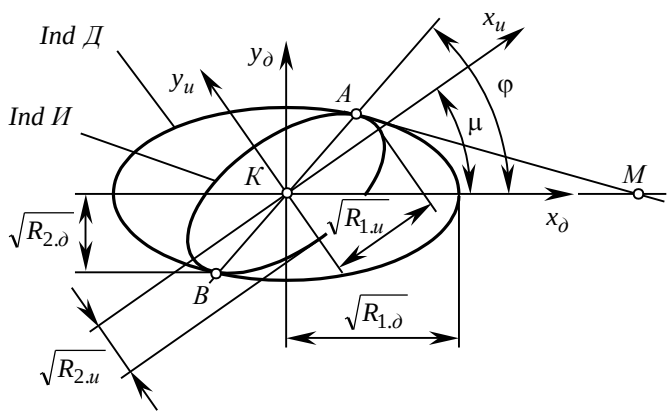


Рис. 4.11. Пример относительного расположения индикатрис кривизны $Ind\ Д$ и $Ind\ И$ при линейном касании поверхностей $Д$ и $И$.

Чтобы обеспечить линейное касание поверхностей $Д$ и $И$, их нормальные радиусы кривизны в направлении касательной к характеристике E должны быть равны один другому. Это значит, что искомая индикатриса кривизны $Ind\ И$ поверхности $И$ инструмента имеет с индикатрисой кривизны $Ind\ Д$ поверхности $Д$ детали общий диаметр и общие касательные, проходящие через концы этого диаметра. Общим диаметром является диаметр AB (рис. 4.11), составляющий с осью $x_д$ локальной системы координат $x_д y_д$ некоторый угол φ.

Сформулированным условиям удовлетворяет бесчисленное множество индикатрис $Ind_i\ И$, которые можно образовать аффинным сжатием или растяжением индикатрисы кривизны $Ind\ Д$. Направление родства (направление сжатия или растяжения) должно быть сопря-женным к диаметру AB, а значит – параллель-ным касательной AM.

Индикатриса кривизны $Ind\ И$ поверхности $И$ определяется единственным образом, если задан не только диаметр AB и касательная AM, но и дополнительные условия. Таким дополнительным условием может быть, например, известная относительная ориентация детали и инструмента – она определяется величиной угла μ относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$.

Графическое решение задачи нахождения длин осей индикатрисы кривизны $Ind\ И$ инструмента приведено на рис. 4.12. Известным приняты направления осей x_u и y_u локальной системы координат инструмента, положение одной из точек на $Ind\ И$ и направление касательной AM к $Ind\ И$ в точке A.

Эллипс $Ind\ И$ рассматривается как аффинный образ окружности с центром в точке K и диаметром, равным большей оси эллипса $Ind\ Д$.

Направление и ось родства окружности и эллипса $Ind\ И$ определяются направлениями осей x_u и y_u. Вдоль оси $x_д$ откладываем отрезок $KP = \sqrt{R_{1.д}}$. Под заданным углом ориентации μ располагаем локальную систему координат $x_u y_u$. Из точки P опускаем перпендикуляр на ось x_u. Основание этого перпендикуляра – точка C, определит большую полуось индикатрисы кривизны $Ind\ И$, которая равна KC. Прямая CP, перпендикулярная к KC, соответствует касательной AP к эллипсу $Ind\ И$. Следовательно, эта прямая касательна к окружности, аффинным образом которой является индикатриса кривизны $Ind\ И$.

Далее с помощью обычной конфигурации находим меньшую полуось KD. Для этого из точки P проводим прямую, направление которой определено заданным направлением касательной к эллипсу $Ind\ И$. Эта прямая пересекает ось x_u в точке A. Из точки C проводим прямую, параллельную оси $y_д$, кото-рая в точке Q пересекает AP. Через точку Q проводим прямую, параллельную оси $x_д$ до ее пересечения в точке D с KC.

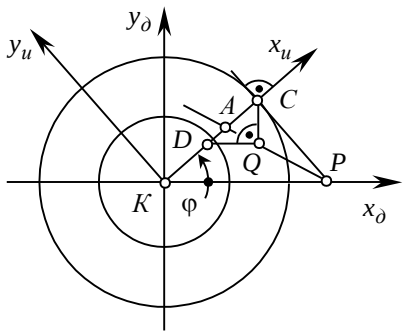


Рис. 4.12. Графическое решение задачи определения длин осей индикатрисы кривизны $Ind\ И$.

Чтобы установить зависимость между главными радиусами кривизны поверхностей $Д$ и $И$, необходимо исследовать уравнение касательной AM к эллипсам $Ind\ Д$ и $Ind\ И$ (см. рис. 4.11).

Координаты точки A в системе координат $x_\partial y_\partial$ соответсвенно равны $x_\partial = \sqrt{\rho_\partial}\cos\varphi$ и $y_\partial = \sqrt{\rho_\partial}\sin\varphi$.

Принимая во внимание свойства центральной и зеркальной симметрии эллипса, в рассмотрении достаточно ограничиться измене-нием угла φ от 0° до 90° ($0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$).

Уравнение касательной к эллипсу *Ind Д* в системе координат $x_\partial y_\partial$ записывается в виде

$$\frac{x_\partial \cos\varphi}{R_{1.\partial}}\sqrt{\rho_\partial} + \frac{y_\partial \sin\varphi}{R_{2.\partial}}\sqrt{\rho_\partial} = 1. \tag{4.60}$$

В локальной системе координат $x_u y_u$, развернутой относительно системы координат $x_\partial y_\partial$ на угол μ, точка A имеет координаты $x_u = \sqrt{\rho}_u \cos(\varphi - \mu)$ и $y_u = \sqrt{\rho_u}\sin(\varphi - \mu)$.

В рассматриваемых случаях $\mu < \varphi$, так как эллипс *Ind И* расположен внутри эллипса *Ind Д*.

Уравнение касательной к эллипсу *Ind И* в системе $x_\partial y_\partial$ имеет вид:

$$\frac{x_u \cos(\varphi - \mu)}{R_{1.u}}\sqrt{\rho} + \frac{y_u \sin(\varphi - \mu)}{R_{2.u}}\sqrt{\rho} = 1.$$

Используя формулы преобразования координат (см. гл. 3), запишем уравнение касательной к эллипсу *Ind И* в системе координат $x_\partial y_\partial$:

$$x_\partial\left[\frac{\cos\mu\cos(\varphi-\mu)}{R_{1.u}} - \frac{\sin\mu\sin(\varphi-\mu)}{R_{2.u}}\right]\sqrt{\rho_\partial} + y_\partial\left[\frac{\sin\mu\sin(\varphi-\mu)}{R_{1.u}} + \frac{\cos\mu\sin(\varphi-\mu)}{R_{2.u}}\right]\sqrt{\rho_\partial} = 1. \tag{4.61}$$

Так как уравнения (60) и (61) являются уравнениями одной и той же прямой, то

$$\frac{\cos\mu\cos(\varphi-\mu)}{R_{1.u}} - \frac{\sin\mu\sin(\varphi-\mu)}{R_{2.u}} = \frac{\cos\varphi}{R_{1.\partial}}; \qquad \frac{\sin\mu\cos(\varphi-\mu)}{R_{1.u}} + \frac{\cos\mu\sin(\varphi-\mu)}{R_{2.u}} = \frac{\sin\kappa}{R_{2.\partial}}.$$

Решая систему уравнений с двумя неизвестными $R_{1.u}$ и $R_{2.u}$, получим

$$\frac{1}{R_{1.u}} = \frac{1}{R_{1.\partial}} \cdot \frac{1 + \dfrac{R_{1.\partial}}{R_{2.\partial}}\tan\varphi\tan\mu}{1 + \tan\varphi\tan\mu}; \tag{4.62}$$

$$\frac{1}{R_{2.u}} = \frac{1}{R_{2.\partial}} \cdot \frac{\tan\varphi - \dfrac{R_{2.\partial}}{R_{1.\partial}}\tan\mu}{\tan\varphi - \tan\mu}. \tag{4.63}$$

Здесь предполагается, что определитель $D = \frac{1}{2}\sin 2(\varphi - \mu)$ системы уравнений (62)-(63) отличен от нуля. Равенство определителя нулю означало бы, что $\varphi - \mu = \frac{\pi}{2}n$ (здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$).

При n четном с диаметром AB должна совпасть ось x_u, а при нечетном с этим же диаметром эллипса *Ind И* должен совпадать ось Y_u. Очевидно, что этого не может быть, так как нельзя построить эллипс, у которого касательная в вершине не составляла бы прямой угол с осью, проходящей через ту же вершину.

Выражения (62) и (63) устанавливают зависимость между экстремальными кривизнами касающихся одна другой поверхностей $Д$ и $И$ и величинами углов φ и μ.

Нетрудно заметить, что при заданном угле φ главные кривизны тем меньше отличаются одна от другой, чем меньше величина угла μ. В предельном случае, когда $\mu = 0$, будем иметь $\frac{1}{R_{1.u}} = \frac{1}{R_{1.д}}$ и $\frac{1}{R_{2.u}} = \frac{1}{R_{2.д}}$.

Решение прикладных задач формообразования поверхностей деталей бывает основано на таких исходных данных, которые не позволяют определить главные кривизны поверхности $И$ по формулам (62) и (63).

Известные методы аналитического описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ позволяют определить величину угла φ как угла между касательной к характеристике E в точке K и одним из главных направлений на поверхности $Д$. Величину угла μ в соответствие с известными методами можно определить, если известны значения главных радиусов кривизны $R_{1.u}$ и $R_{2.u}$ поверхности $И$.

Чтобы найти главные радиусы кривизны $R_{1.u}$ и $R_{2.u}$ для случаев линейного касания взаимоогибаемых поверхностей, воспользуемся тем, что в текущей точке поверхности сумма кривизн нормальных сечений, направленных ортогонально одно к другому, есть величина постоянная, т.е.

$$\frac{1}{R_{1.u}} + \frac{1}{R_{2.u}} = \frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_k}, \qquad (4.64)$$

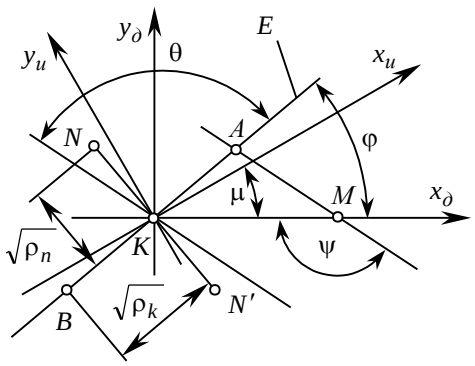


Рис. 4.13. К определению главных радиусов кривизны поверхности $И$ инструмента, линейно касающейся поверхности $Д$ детали.

где ρ_k – радиус кривизны характеристики E в точке K [Следует обратить внимание на то, что направление AK совпадает с касательной к характеристике E (рис. 4.13)];

ρ_n – радиус кривизны сечения поверхности $И$ плоскостью, ортогональной характеристике E ($KN \perp KA$).

Согласно теореме Аполлония для эллипса можно записать

$$\sqrt{\rho_k \rho_{k.1}} \sin\theta = \sqrt{R_{1.u} R_{2.u}} \qquad (4.65)$$

$$\rho_k + \rho_{k.1} = R_{1.u} + R_{2.u}. \qquad (4.66)$$

Здесь через $\sqrt{\rho_{k.1}}$ обозначен радиус эллипса $Ind\, И$, сопряженный радиусу $\sqrt{\rho_k}$. Он параллелен касательной AM.

Угол θ, образованный сопряженными радиусами $\sqrt{\rho_{k.1}}$ и $\sqrt{\rho_k}$, равен разности $\psi - \varphi$, где ψ – угол наклона касательной AM к оси $x_д$.

В системе координат $x_д y_д$ угловой коэффициент касательной к эллипсу $\frac{x^2}{R_{1.д}} + \frac{y^2}{R_{2.д}} = 1$ в точке (x_k, y_k) равен $k = \tan\psi = \left.\frac{dy}{dx}\right|_k = -\frac{R_{2.д}}{R_{1.д}} \cdot \frac{x_k}{y_k} = -\frac{R_{2.д}}{R_{1.д} \tan\varphi}$.

Это позволяет найти величину угла ψ, после чего – угол $\theta = \psi - \varphi$.

Теперь система уравнений (64)-(67) может быть решена. Получим:

$$R_{1.u} = \rho_k \frac{1 + c \pm \sqrt{(1-c)^2 + 4c^2 \cot^2\theta}}{2(\tan^2 - c)}; \qquad R_{2.u} = c \cdot \frac{\rho_k^2}{R_{1.u}} \cdot \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta - c},$$

где

$$\rho_k = \frac{R_{1.\partial} R_{2.\partial}}{R_{2.\partial} + R_{1.\partial}\tan^2\varphi}\left(1+\tan^2\varphi\right); \qquad c = \frac{\rho_n}{\rho_k}; \qquad \varphi = \arctan\left(-\frac{R_{2.\partial}}{R_{1.\partial}\tan\varphi}\right) - \varphi\ .$$

Таким образом $R_{1.u} = R_{1.u}\left(R_{1.\partial},\ R_{2.\partial},\ \varphi,\ \dfrac{\rho_n}{\rho_k}\right)$.

Первый главный радиус кривизны $R_{1.u}$ поверхности $И$ инструмента должен быть не только вещественным и положительным, но и больше ρ_k. Следовательно, кроме обычных условий существования вещественного и положительного корня, необходимо потребовать выполнение дополнительного условия, а именно, чтобы:

$$\frac{1 + c \pm \sqrt{(1-c)^2 + 4c^2\cot^2\theta}}{2(\tan^2\theta - c)} > 0\ .$$

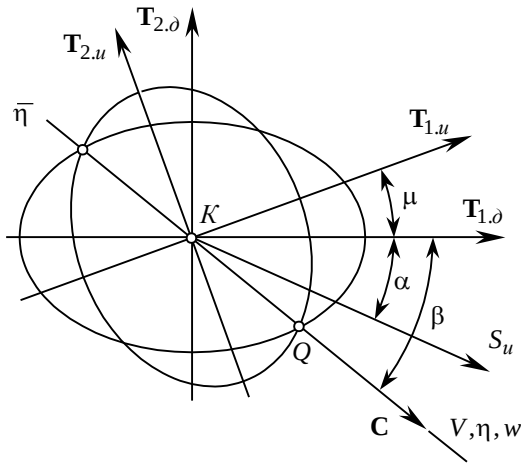


Рис. 4.14. Квадратичные индикатрисы кривизны сопряженных поверхностей $Д$ и $И$.

4.4.4. Квадратичная индикатриса Дюпена. Рассмотрим случай линейного касания поверхности детали и исходной инструментмльной поверхности.

Поверхность $Д$ может быть репараметризована таким образом, что первые производные от $\mathbf{r}_\partial$ по новым U_∂ и V_∂ параметрам имеют единичную длину, а новые параметрические $U_\partial -$ и $V_\partial -$линии совпадают с линиями кривизны на $Д$. Тогда в точке K справедливы соотношения

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial^2}\cdot\mathbf{N}_\partial = k_{1.\partial}, \qquad \frac{\partial^2\mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial}\cdot\mathbf{N}_\partial = 0, \qquad \frac{\partial^2\mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial^2} = k_{2.\partial}\ . \tag{4.67}$$

Обозначим через α угол между некоторым направлением $\dfrac{\partial\mathbf{r}_u}{\partial U_u}$ на поверхности $И$ и первым главным направлением $\mathbf{T}_{1.\partial}$ и через β угол между направлением $\mathbf{C}'(w)$ (здесь w – параметр характеристики E поверхностей $Д$ и $И$) и тем же первым главным направлением $\mathbf{T}_{1.\partial}$ (рис. 4.14).

Исходя из того, что

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}_u}{\partial U_u^2}\cdot\mathbf{n}_u = L_u; \qquad \frac{\partial^2\mathbf{r}_u}{\partial U_u \partial V_u}\cdot\mathbf{n}_u = M_u; \qquad \frac{\partial^2\mathbf{r}_u}{\partial V_u^2}\cdot\mathbf{n}_u = N_u$$

и принимая во внимание, что вдоль характеристики E выполняются соотношения

$$G_\partial(w) = G_u(w) = G(w) = \mathbf{C}'(w)\cdot\mathbf{C}'(w), \qquad N_\partial(w) = N_u(w) = N(w) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{N}(w),$$

из (67) можно получить, что

$$N = G\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial^2}\cos^2\beta + 2\frac{\partial^2\mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial}\cos\beta\sin\beta + \frac{\partial^2\mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial^2}\sin^2\beta\right) = G\left(k_{1.\partial}\cos^2\beta + k_{2.\partial}\sin^2\beta\right) \tag{4.68}$$

$$M_{\partial}^{*}=\sqrt{E_{\partial}G_{\partial}}\left[\frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial}}{\partial U_{\partial}^2}\cos\alpha\cos\beta+\frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial}}{\partial U_{\partial}\partial V_{\partial}}(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)+\frac{\partial^2\mathbf{r}_{\partial}}{\partial V_{\partial}^2}\sin\alpha\sin\beta\right]\cdot\mathbf{n}_{\partial};$$

(4.69)

$$=\sqrt{E_{\partial}G_{\partial}}\left[k_{1.\partial}\cos\alpha\cos\beta+k_{2.\partial}\sin\alpha\sin\beta\right].$$

Здесь и ниже знаком "*" отмечены элементы локальной геометрии репараметризованной поверхности $Д(И)$.

Уравнение (68) может быть также получено из формулы Эйлера (30).

По определению (см. выше, определение 4.1) угол между первыми главными направлениями $\mathbf{T}_{1.\partial}$ и $\mathbf{T}_{1.u}$ поверхностей $Д$ и $И$ в их общей точке K есть угол относительной локальной ориентации μ. Поэтому уравнения, аналогичные (68) и (69), для исходной инструментальной поверхности $И$ примут вид:

$$N=G\left|k_{1.u}\cos^2(\beta+\mu)+k_{2.u}\sin^2(\beta+\mu)\right|=\sqrt{E_uG_u}\left[k_{1.u}\cos(\alpha+\mu)\cos(\beta+\mu)+k_{2.u}\sin(\alpha+\mu)\sin(\beta+\mu)\right]$$

$$M_u^{*}=\sqrt{E_uG_u}\left[\frac{\partial^2\mathbf{r}_u}{\partial U_u^2}\cos(\alpha+\mu)\cos(\beta+\mu)+\frac{\partial^2\mathbf{r}_u}{\partial U_u\partial V_u}(\cos(\alpha+\mu)\sin(\beta+\mu)+\sin(\alpha+\mu)\cos(\beta+\mu))+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\mathbf{r}_u}{\partial V_u^2}\sin(\alpha+\mu)\sin(\beta+\mu)\right]\cdot\mathbf{n}_u=\sqrt{E_uG_u}\left[k_{1.u}\cos(\alpha+\mu)\cos(\beta+\mu)+k_{2.u}\sin(\alpha+\mu)\sin(\beta+\mu)\right] \quad (4.70)$$

Для направления, касательного к характеристике E, из уравнений (68)–(70) следуют зависимости, ограничивающие параметры поверхностей $Д$ и $И$, касающихся одна другой в точке K:

$$k=k_{1.\partial}\cos^2\beta+k_{2.\partial}\sin^2\beta=k_{1.u}\cos^2(\beta+\mu)+k_{2.u}\sin^2(\beta+\mu) \quad (4.71)$$

и (для направления, ортогонального предыдущему)

$$k'=k_{1.\partial}\cos\alpha\cos\beta+k_{2.\partial}\sin\varphi\sin\beta=k_{1.u}\cos(\alpha+\mu)\cos(\beta+\mu)+k_{2.u}\sin(\alpha+\mu)\sin(\beta+\mu). \quad (4.72)$$

Кривизна k' расчитывается по формуле $k'=\dfrac{M_{\partial}^{*}}{\sqrt{L_uN}}=\dfrac{M_u}{\sqrt{L_uN}}$.

Перепишем уравнения (71) и (72) в форме:

$$\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}k_{1.\partial}\cos\beta\\ k_{2.\partial}\sin\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\beta+\mu) & \sin(\beta+\mu)\\ \cos(\alpha+\mu) & \sin(\alpha+\mu)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}k_{1.u}\cos(\beta+\mu)\\ k_{2.u}\sin(\beta+\mu)\end{bmatrix}.$$

Следовательно $k_{1.\partial}$ и $k_{2.\partial}$ могут быть выражены через $k_{1.u}$, $k_{2.u}$ и μ:

$$\begin{bmatrix}k_{1.\partial}\cos\beta\\ k_{2.\partial}\sin\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\cos(\beta+\mu) & \sin(\beta+\mu)\\ \cos(\beta+\mu) & \sin(\beta+\mu)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}k_{1.u}\cos(\beta+\mu)\\ k_{2.u}\sin(\beta+\mu)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\mu & \sin\mu\\ -\sin\mu & \cos\mu\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}k_{1.u}\cos(\beta+\mu)\\ k_{2.u}\sin(\beta+\mu)\end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Произведение (73) можно подставить в (72). При этом помним, что (72) справедливо для любых значений α. Это следует из того, что характер касания поверхностей $Д$ и $И$ не зависит от вида их параметризации. Из уравнения (73) получим:

Определение 4.2. *Квадратичная индикатриса Дюпена гладкой регулярной поверхности Д(И) в текущей точке на ней – это кривая, определяемая совокупностью векторов* $\mathbf{W} = x_{\partial(u)}\mathbf{E}_1 + y_{\partial(u)}\mathbf{E}_2$, *координаты* $x_{\partial(u)}, y_{\partial(u)}$ *концов которых удовлетворяют уравнению*

$$k_{1.\partial(u)}^2 x_{\partial(u)}^2 + k_{2.\partial(u)}^2 y_{\partial(u)}^2 = 1,$$

где $k_{1.\partial(u)}$ *и* $k_{2.\partial(u)}$ *представляют собой главные кривизны поверхности* $Д(И)$ *в точке.*

Квадратичная индикатриса Дюпена $Ind_{sq}\, Д(И)$ (Ye, X., 1996) – это характеристическая кривая, представляющая собой эллипс в эллиптических (рис. 4.15.1) и гиперболических (рис. 4.15.3) точках поверхности $Д(И)$ и две параллельные прямые в параболических ее точках (рис. 4.15.2).

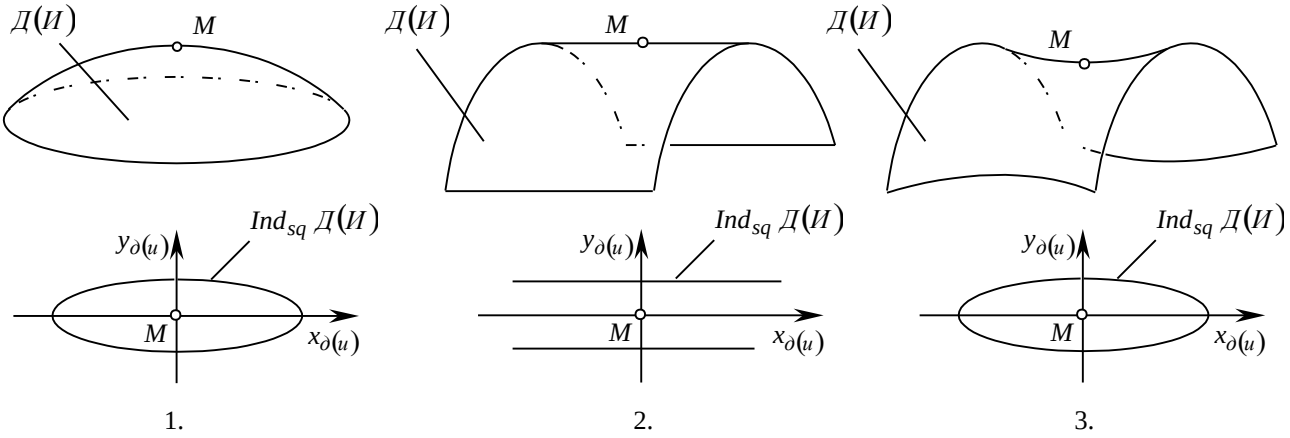


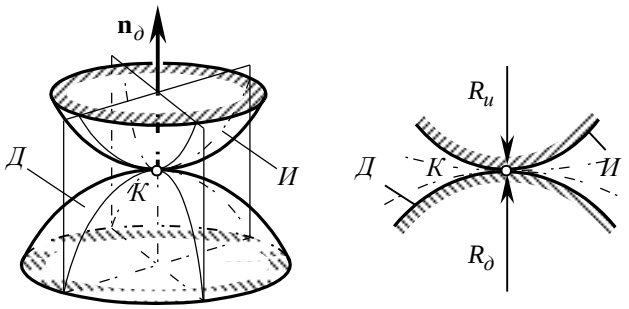
Рис. 4.15. Квадратичные индикатрисы кривизны $Ind_{sq}\, Д(И)$ поверхности $Д(И)$.

Использование этой характеристической кривой связано с потерей информации, в частности, потому, что по параметрам $Ind_{sq}\, Д(И)$ нельзя отличить эллиптический локальный участок поверхности $Д(И)$ от ее гиперболического участка, выпуклый локальный участок поверхности от вогнутого ее локального участка (в частности поэтому квадратичная индикатриса кривизны $Ind_{sq}\, Д(И)$ поверхности $Д(И)$ – это кривая, а не участок плоскости, как это имеет место для (52) и (53)) и пр. Вместе с тем в совокупности с другими параметрами локальной топологии поверхностей $Д$ и $И$ она оказывается полезной, так как позволяет составить дополнительное уравнение для описания геометрии касания поверхностей деталей и инструментов.

4.5. Мера степени конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности

Эффективность процесса формообразования поверхностей деталей инструментами с различными исходными инструментальными поверхностями неодинакова. Она определяется степенью конформности[1] (полнотой прилегания) поверхности $И$ к поверхности $Д$ в точке K их касания (или в каждой точке характеристики).

[1]Введение количественной оценки (меры) степени конформности поверхностей $Д$ и $И$ позволяет перейти от интуитивного и расплывчатого понятия “геометрия касания” поверхностей $Д$ и $И$ к строгому и однозначному понятию – к *мере* степени их конформности, которая может быть выражена числом.



1. 2.

Рис. 4.16. К определению индикатрисы конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ обрабатываемой детали.

4.5.1. Функции конформности. Для аналитического описания геометрии касания поверхностей деталей и инструментов введем меру степени их конформности, отражающую полноту прилегания поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали и особенности геометрии их касания в дифференциальной окрестности точки K.

Через контактную нормаль $\mathbf{n}_{д(u)}$ (рис. 4.16.1) проведем пучок секущих плоскостей. Каждая плоскость пучка пересекает поверхности $Д$ и $И$ по гладким кривым, касающимся одна другой в точке K. Обозначим радиусы кривизны линий пересечения поверхностей $Д$ и $И$ текущей плоскостью пучка через $R_д$ и R_u (рис. 4.16.2). Конформные свойства поверхностей $Д$ и $И$ определяются алгебраическими значениями радиусов кривизны $R_д$ и R_u. Для однозначного аналитического описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ используем аналитический функционал от $R_д$ и R_u, для которого не существует такого согласованного между собой изменения аргументов, при котором для разных значений аргументов функционал тождественен сам себе. Функционалы такого класса назовем функциями (функционалами) конформности. В общем виде они записываются так:

$$r_{conf} = F\left[f_1(R_д);\ f_2(R_u)\right], \tag{4.75}$$

где $f_1(R_д)$ –нелинейная функция от $R_д$;

$f_2(R_u)$ –нелинейная функция от R_u;

F – произвольный функционал.

В частных случаях функции $f_1(R_д)$ и $f_2(R_u)$ могут быть из одного класса функций, в том числе они могут быть одинаковыми (т.е. иметь вид $f(R_д)$ и $f(R_u)$).

Определение 4.3. *Функция конформности – это сложная функция (функционал) двух нелинейных функций, зависящих от алгебраических значений нормальных радиусов кривизны $R_д$ и R_u поверхностей $Д$ и $И$ в точке K их касания, для которого не существует такого согласованного между собой изменения аргументов, при котором для разных значений аргументов функционал тождественен сам себе.*

При изменении отношения $\dfrac{dU_д}{dV_д}$ (т.е. при вращении секущей плоскости вокруг контактной нормали) аргументы $R_д$ и R_u изменяются по величине, а соответствующее им значение функции конформности количественно отражает конформные свойства поверхностей $Д$ и $И$ в текущем положении секущей плоскости.

Текущее положение плоского нормального сечения удобно определить центральным углом φ, который это сечение образует с первым главным сечением $C_{1.д}$ поверхности $Д$.

С учетом того, что $R_д = R_д(\varphi)$ и $R_u = R_u(\varphi)$, функционал (75) преобразуется к виду

$$r_{conf.} = F\left[f_1^*(\varphi);\ f_2^*(\varphi)\right], \tag{4.76}$$

где функции f_1^*, f_2^* аналогичны функциям f_1, f_2 в уравнении (75).

Все функции класса (76) описывают геометрию касания поверхностей $Д$ и $И$ однозначно.

Поскольку функционал $F\left|f_1^*(\varphi);f_2^*(\varphi)\right.$ зависит от двух нелинейных функций f_1^* и f_2^*, он всегда нелинеен (за исключением случая, когда, во-первых, $f_1^*(\varphi)$ тождественно равно $-f_2^*(\varphi)$) и, во-вторых, имеет экстремумы, соответствующие экстремальным значениям степени конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали.

Для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали из класса функций конформности можно использовать любую функцию – каждая из них однозначно описывает геометрию касания поверхностей $Д$ и $И$ в дифференциальной окрестности точки K. Целесообразно выбрать функционал F возможно более простой структуры, не имеющий локальных экстремумов и обладающий другими полезными свойствами (см. ниже).

4.5.2. Индикатриса конформности. Для решении задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали удобно использовать частный случай функции конформности (76), а именно – индикатрису конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности (Радзевич С.П., 1987, 1988).

Чтобы получить уравнение этой характеристической кривой, рассмотрим дифференциальные окрестности точки K на поверхности $Д$ детали и на поверхности $И$ инструмента. Для этого с точкой K свяжем начало локальной системы координат $x_\partial y_\partial$.

Распределение нормальных кривизн поверхности $Д$ в дифференциальной окрестности точки K описывается индикатрисой кривизны $Ind\,Д$ (44):

$$\frac{L_\partial}{E_\partial}x_\partial^2+\frac{2M_\partial}{\sqrt{E_\partial G_\partial}}x_\partial y_\partial+\frac{N_\partial}{G_\partial}y_\partial^2=\pm 1. \tag{4.77}$$

Аралогичным уравнением (44):

$$\frac{L_u}{E_u}x_u^2+\frac{2M_u}{\sqrt{E_u G_u}}x_u y_u+\frac{N_u}{G_u}y_u^2=\pm 1 \tag{4.78}$$

индикатрисы кривизны $Ind\,И$ описывается распределение нормальных кривизн поверхности $И$ в дифференциальной окрестности точки K на ней.

Индикатрису конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ поверхностей $Д$ и $И$ определим как плоскую кривую, радиус-вектор r_{conf} каждой точки которой равен алгебраической сумме

$$r_{conf}=r_\partial\,\mathrm{sgn}\,R_\partial+r_u\,\mathrm{sgn}\,R_u=\sqrt{|R_\partial|}\,\mathrm{sgn}\,\Phi_{2.\partial}^{-1}+\sqrt{|R_u|}\,\mathrm{sgn}\,\Phi_{2.u}^{-1}. \tag{4.79}$$

Формула (79) находится в соответствии с (76) – следовательно, индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ принадлежит к классу функций конформности (75). Второй сомножитель каждого слагаемого в (79) – функция-знак, не изменяет величин r_∂ и r_u, он определяет их знак с учетом характера кривизны плоских нормальных сечений поверхностей $Д$ и $И$ в точке K: “+” – для выпуклых и “–“ – для вогнутых нормальных сечений этих поверхностей.

Чтобы воспользоваться уравнениями (77) и (78) индикатрис кривизны $Ind\,Д$ и $Ind\,И$, необходимо эти уравнения, во-первых, записать в общей системе декартовых координат, и, во-вторых, перейти к общей системе полярных координат.

В процессе обработки инструмент занимает различные положения относительно детали – ориентация поверхности $И$ относительно поверхности $Д$ изменяется во времени. Более того, в фиксированной точке K инструмент имеет одну степень подвижности относительно детали – возможность поворота вокруг контактной нормали (см. гл. 3, раздел 2.3. *“Ориентирующие движения инструмента”*). Поэтому в общем случае поверхности $Д$ и $И$ занимают такое положение одна относительно другой, в котором их первые главные секущие плоскости $C_{1.\partial}$ и $C_{1.u}$ образуют угол μ относительной локальной ориентации.

Чтобы записать уравнения (77) и (78) в общей системе декартовых координат, достаточно уравнение (78) привести к локальной системе координат $x_\partial y_\partial$ детали. Для этого воспользуемся оператором $\mathbf{Res}\left(K_u \to K\right)$ преобразования координат (12). После приведения (78) примет вид:

$$\left(\frac{L_u}{E_u}\cos^2\mu + \frac{M_u}{\sqrt{E_u G_u}}\sin 2\mu + \frac{N_u}{G_u}\sin^2\mu\right)x_\partial^2 - \left(\frac{L_u}{E_u}\sin 2\mu - \frac{2M_u}{\sqrt{E_u G_u}}\cos 2\mu - \frac{N_u}{G_u}\sin 2\mu\right)x_\partial y_\partial + \\ + \left(\frac{L_u}{E_u}\sin^2\mu - \frac{M_u}{\sqrt{E_u G_u}}\sin 2\mu + \frac{N_u}{G_u}\cos^2\mu\right)y_\partial^2 = \pm 1. \tag{4.80}$$

Уравнения (77) и (80) индикатрис кривизны $Ind\,Д$ и $Ind\,И$ представлены в общей системе координат $x_\partial y_\partial$.

Для перехода к полярным координатам воспользуемся формулами (3.30).

После преобразований из (77) и (80) соответственно получим

$$r_\partial = \sqrt{\left|\frac{E_\partial G_\partial}{L_\partial G_\partial \cos^2\varphi - M_\partial\sqrt{E_\partial G_\partial}\sin 2\varphi + N_\partial E_\partial \sin^2\varphi}\right|}; \tag{4.81}$$

$$r_u = \sqrt{\left|\frac{E_u G_u}{L_u G_u \cos^2(\varphi+\mu) - M_u\sqrt{E_u G_u}\sin 2(\varphi+\mu) + N_u E_u \sin^2(\varphi+\mu)}\right|}. \tag{4.82}$$

Подставляя (81) и (82) в (79), приходим к результату:

$$r_{conf} = \sqrt{\left|\frac{E_\partial G_\partial}{L_\partial G_\partial \cos^2\varphi - M_\partial\sqrt{E_\partial G_\partial}\sin 2\varphi + N_\partial E_\partial \sin^2\varphi}\right|}\,\mathrm{sgn}\Phi_{2.\partial}^{-1} + \\ + \sqrt{\left|\frac{E_u G_u}{L_u G_u \cos^2(\varphi+\mu) - M_u\sqrt{E_u G_u}\sin 2(\varphi+\mu) + N_u E_u \sin^2(\varphi+\mu)}\right|}\,\mathrm{sgn}\Phi_{2.u}^{-1}. \tag{4.83}$$

Уравнение (83) является уравнением характеристической кривой – индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ первого рода поверхности детали и исходной инструментальной поверхности. Анализ этого уравнения показывает, что в общем случае индикатриса конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ является плоской кривой четвертого порядка. Она обладает центральной и, в частных случаях (когда угол μ локальной ориентации кратен $0{,}5\pi$) зеркальной симметрией. Свойство центральной симметрии индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ позволяет без потери информации рассматривать ее в пределах не центрального угла $\varphi = 2\pi$, а в пределах центрального угла $\varphi = \pi$ и тем самым уменьшить занимаемый объем памяти ЭВМ и системы ЧПУ металлорежущим станком. Если же в каждой точке касания поверхностей $Д$ и $И$ эта характеристическая кривая дополнительно обладает зеркальной симметрией, угол φ может быть уменьшен еще в два раза $(\varphi = 0{,}5\pi)$.

Индикатриса конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ инвариантна относительно характера параметризации поверхностей $Д$ и $И$ – при изменении параметризации изменяется уравнение этой кривой, но не ее форма и параметры. Параметры $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ не зависят от величин углов $\omega_{\partial(u)}$ между координатными $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$ линиями, но зависят от относительной ориентации контактирующих поверхностей $Д$ и $И$.

Если поверхности $Д$ и $И$ параметризованы ортогонально, то при выводе уравнения (83) можно исходить не из уравнений (44) индикатрис кривизны $Ind\,Д(И)$, а из более простых уравнений (45) – это приведет к получению более простого уравнения индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$, которое можно рассматривать как частный случай уравнения (83).

На рис. 4.17 приведены примеры индикатрис конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ для случаев касания гладких регулярных локальных участков поверхностей $Д$ и $И$: выпуклого эллиптического локального участка поверхности $И$ инструмента с гиперболическим (рис. 4.17.1) и выпуклым параболическим (рис. 4.17.2) локальным участком поверхности $Д$ детали; показаны соответствующие индикатрисы кривизны и характерные параметры формы контактирующих поверхностей.

Индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ (83) тесно связана со вторыми основными квадратичными формами $Ф_{2.д(и)}$ поверхностей $Д$ и $И$.

Параметры индикатрисы конформности (83) требуется расчитывать в большом количестве точек касания поверхностей $Д$ и $И$. В случаях, когда достаточно знать параметры этой характеристической кривой в локальной системе координат, связанной с деталью, с помощью операторов преобразования координат (см. гл. 3) уравнение (83) можно из любой системы координат преобразовать в локальную подвижную систему координат. Можно поступить иначе и вывести уравнение уравнение этой характеристической кривой непосредственно в локальной подвижной системе координат. Для этого исходим из формулы Эйлера (30), которую для поверхности $Д$ детали и отдельно для поверхности $И$ инструмента представим в такой форме:

$$R_д = \frac{R_{1.д}R_{2.д}}{R_{1.д}\sin^2\varphi + R_{2.д}\cos^2\varphi}; \qquad R_u = \frac{R_{1.u}R_{2.u}}{R_{1.u}\sin^2(\varphi+\mu)+ R_{2.u}\cos^2(\varphi+\mu)}.$$

Подставив эти значения $R_д$ и R_u нормальных радиусов кривизны в (79), получим:

$$r_{conf} = \sqrt{\left|\frac{R_{1.д}R_{2.д}}{R_{1.д}\sin^2\varphi + R_{2.д}\cos^2\varphi}\right|}\operatorname{sgn}Ф_{2.д}^{-1} + \sqrt{\left|\frac{R_{1.u}R_{2.u}}{R_{1.u}\sin^2(\varphi+\mu)+ R_{2.u}\cos^2(\varphi+\mu)}\right|}\operatorname{sgn}Ф_{2.u}^{-1}.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (83) индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$, но записано в подвижной локальной системе координат, связанной с поверхностью $Д$ детали.

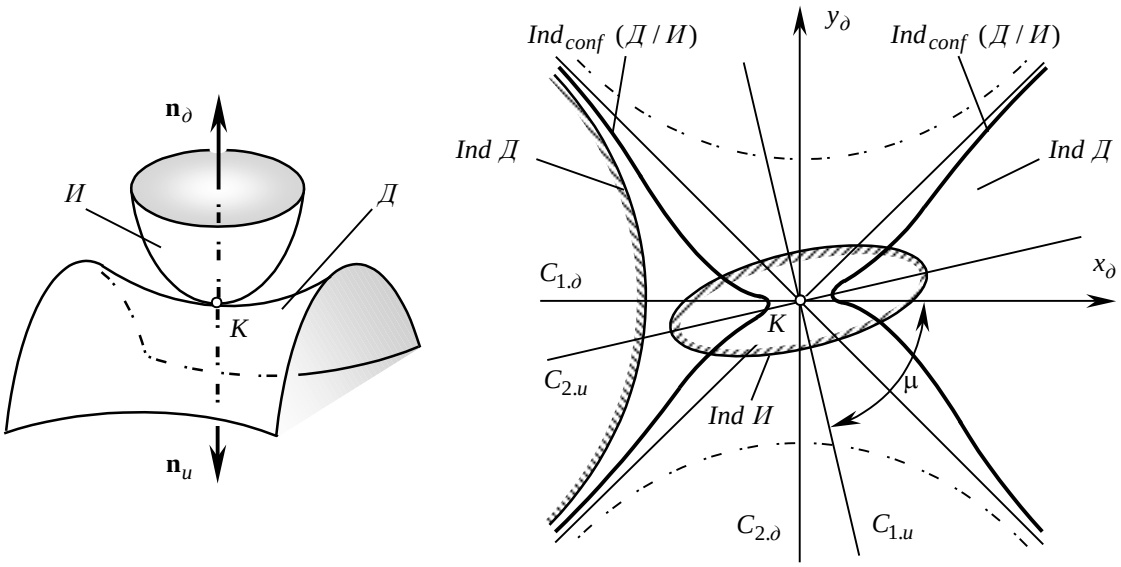
Уравнение (83) может быть переписано в матричной форме. Для этого окажется полезным приведенное выше матричное уравнение (50) индикатрисы кривизны поверхностей $Д(И)$.

Подобно тому, как наряду с индикатрисой кривизны (индикатрисой Дюпена) (44) выше в рассмотрение введена индикатриса собственно кривизны (54), так и наряду с уравнением (83) индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$, построенном исходя из соотношений радиусов кривизны поверхностей $Д$ и $И$ (см. (79)), можно ввести в рассмотрение индикатрису конформности второго рода, построенную исходя из соотношений собственно кривизн поверхностей $Д$ и $И$. По аналогии с (79) индикатрису конформности второго рода $Ind^{(k)}_{conf}(Д/И)$ определим как:

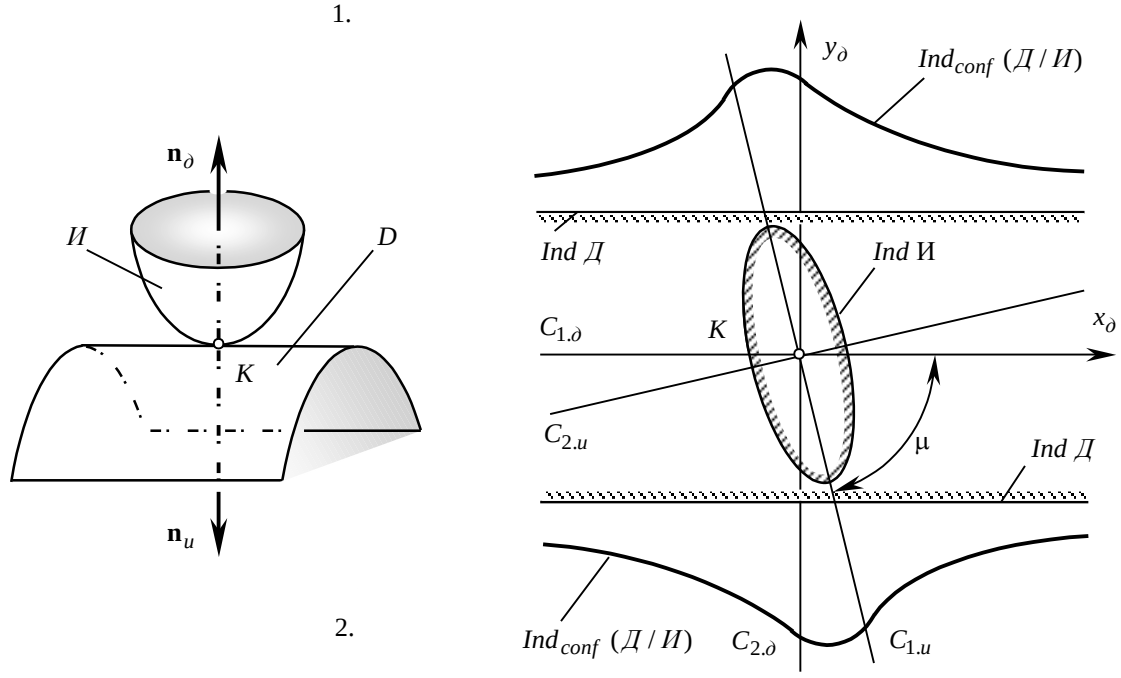
(4.84) $$k_{conf} = \sqrt{|k_д|}\operatorname{sgn}k_д + \sqrt{|k_u|}\operatorname{sgn}k_u.$$

В рассматриваемом случае удобно воспользоваться формулой Эйлера (30), которую запишем для поверхности $Д$ детали и для поверхности $И$ инструмента

$$k_д = k_{1.д}\cos^2\varphi + k_{2.д}\sin^2\varphi; \qquad k_u = k_{1.u}\cos^2(\varphi+\mu)+ k_{2.u}\sin^2(\varphi+\mu).$$



1.



2.

Рис. 2.17. Примеры индикатрис конформности $Ind_{conf}\,(Д / И)$ для случаев касания выпуклого эллиптического локального участка поверхности $И$ инструмента с гиперболическим (1) и выпуклым параболическим (2) локальным участком поверхности $Д$ детали.

Подставив эти значения k_∂ и k_u в (84), получим

$$k_{conf} = \sqrt{\left|k_{1.\partial}\cos^2\varphi + k_{2.\partial}\sin^2\varphi\right|}\,\mathrm{sgn}\,\Phi_{2.\partial}^{-1} + \sqrt{\left|k_{1.u}\cos^2(\varphi+\mu) + k_{2.u}\sin^2(\varphi+\mu)\right|}\,\mathrm{sgn}\,\Phi_{2.u}^{-1}. \qquad (4.85)$$

Уравнение (85) – это уравнение индикатрисы конформности второго рода $Ind_{conf}^{(k)}(Д/И)$, выраженное через собственно кривизны поверхностей $Д$ и $И$ и записанное в подвижной локальной системе координат, связанной с деталью.

Уравнения (79) и (84) индикатрис конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ и $Ind_{conf}^{(k)}(Д/И)$ справедливы для всех случаев формообразования поверхностей деталей – как поверхностей $Д$ относительно простой формы, так и сложных поверхностей деталей. Они могут быть использованы также в вырожденных случаях. Например, если при контурном точении фасонных поверхностей деталей требуется количественно оценить полноту прилегания (степень конформности) криволинейной режущей кромки резца к фасонной образующей поверхности детали. В этом случае в (79) подставляются соответствующие значения радиусов кривизны $R_д$ и $R_и$ фасонной образующей поверхности детали и криволинейной режущей кромки или в (84) – их кривизны $k_д$ и $k_и$.

4.5.3. Особенности формы индикатрисы конформности первого рода. Поверхности $Д$ и $И$ могут касаться одна другой в точке, вдоль характеристики E, в пределах некоторого участка поверхности и могут взаимно интерферировать. Перечисленные особенности характера сопряжения локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ отражаются на особенностях формы индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$.

Из уравнения (83) следует, что каждому виду касания поверхностей $Д$ и $И$ соответствуют особенности формы индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ (рис. 4.18). Например, при точечном касании поверхностей $Д$ и $И$ (рис. 4.18.1) минимальный диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ всегда положителен ($d_{conf}^{(\min)} > 0$); при касании поверхностей $Д$ и $И$ по характеристике E (рис. 4.18.2) минимальный диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ всегда равен нулю ($d_{conf}^{(\min)} = 0$); при касании поверхностей $Д$ и $И$ в пределах некоторого участка поверхности (рис. 4.18.3) индикатриса конформности вырождается в точку, совпадающую с началом локальной системы координат $x_д y_д$.

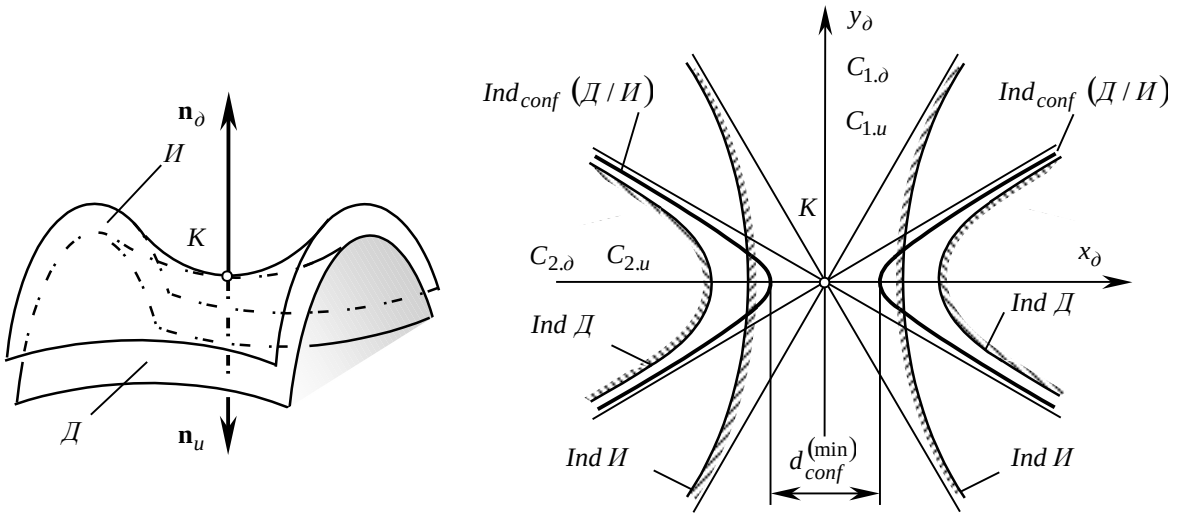
Приведенные на рис. 4.18. примеры индикатрис конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ построены для случаев, когда оба локальных участка поверхностей $Д$ и $И$ являются выпукловогнутыми гладкими регулярными локальными участками гиперболического типа. По уравнению (83) можно построить индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ для всех случаев касания любых типов гладких регулярных локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ (табл. 4.1)[1].

Могут иметь место случаи, когда в процессе обработки поверхность $И$ инструмента пересекает поверхность $Д$ детали (рис. 4.19) и, следовательно, поверхности $Д$ и $И$ интерферируют. В результате интерференции радиус-вектор r_{conf} индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ принимает отрицательные значения. По этой причине для любой пары интерферирующих поверхностей $Д$ и $И$ минимальный диаметр индикатрисы конформности всегда отрицателен ($d_{conf}^{(\min)} < 0$).

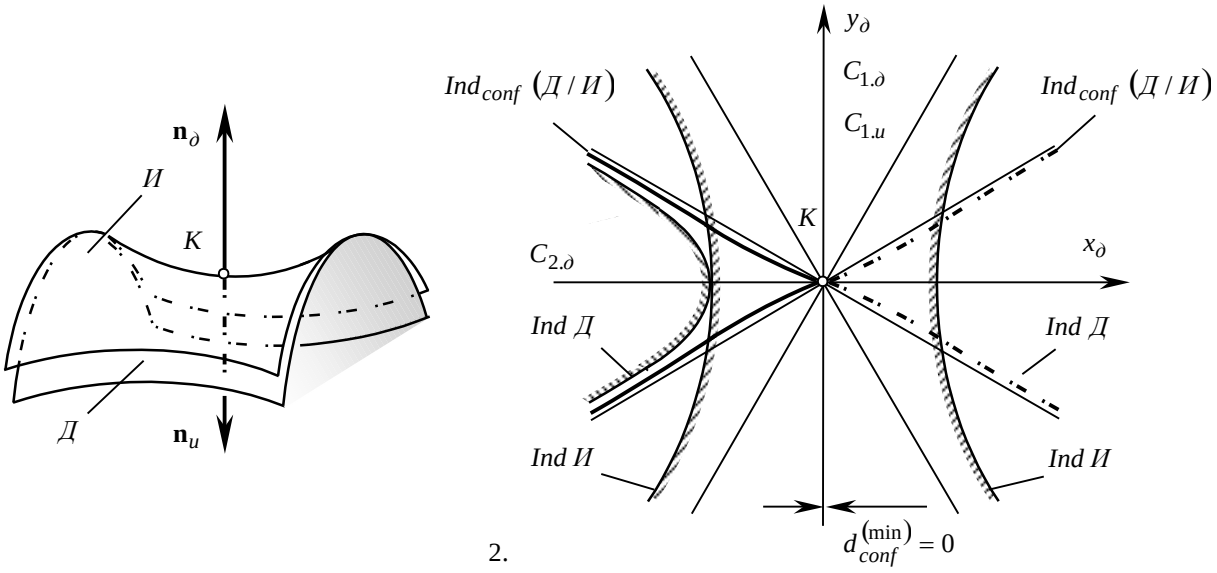
Следует различать частичную и полную интерференцию поверхностей $Д$ и $И$ в дифференциальной окрестности их общей точки K (рис. 4.19).

Например, локальный участок эллиптического типа поверхности $И$ может частично пересекать локальный участок гиперболического типа поверхности $Д$ в дифференциальной окрестности их общей точки K (рис. 4.19.1). В этом случае выполняется условие $d_{conf}^{(\min)} < 0$, имеет место самопересечение не только собственно индикатрисы конформности $Ind_{conf}Д(И)$, но и каждой из ее ветвей в отдельности. При изменении цетрального угла φ в пределах $0 \le \varphi \le \pi$, текущее значение радиус-вектора r_{conf} принимает как положительные, так и отрицательные значения.

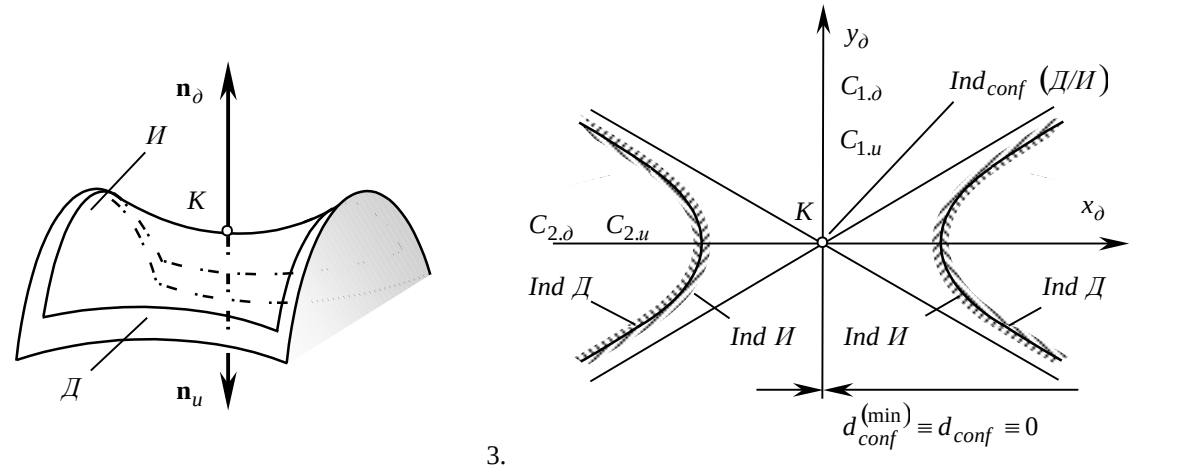
[1] В табл. 4.1 одновременно представлены диаграммы конформности – это кривые, построенные в декартовых координатах в соответствие с (79).



1.



2.

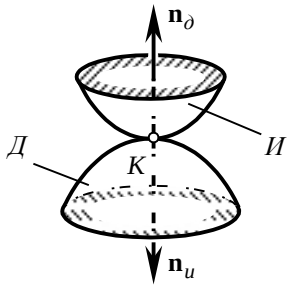
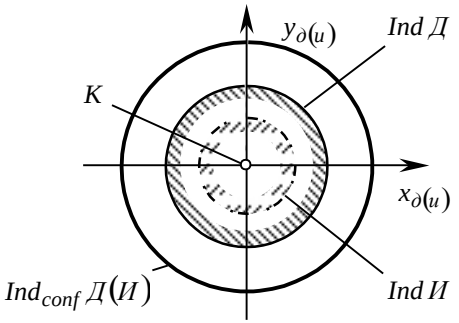
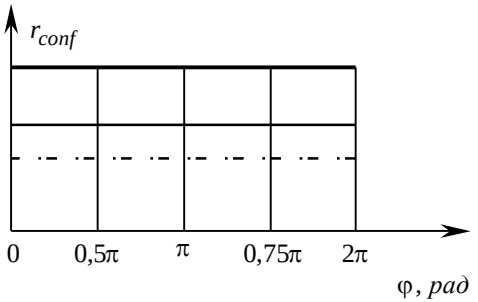
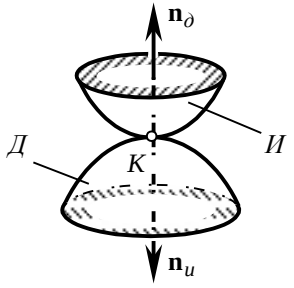
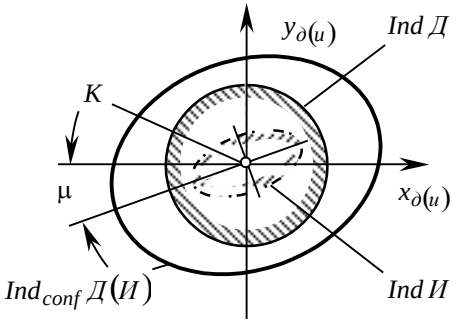
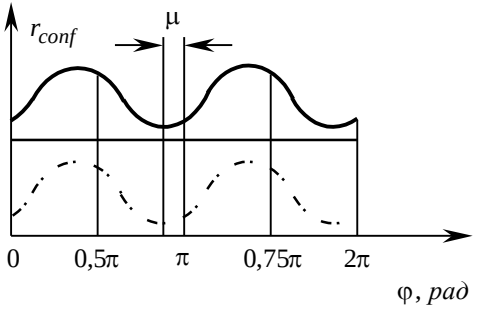
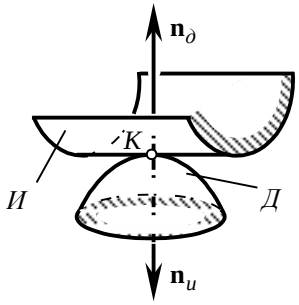
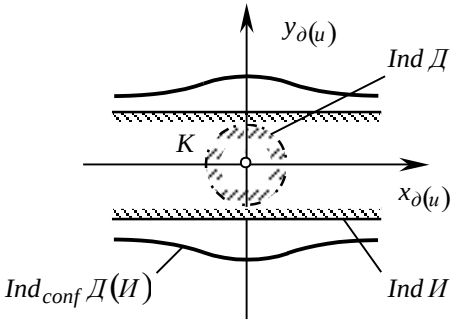
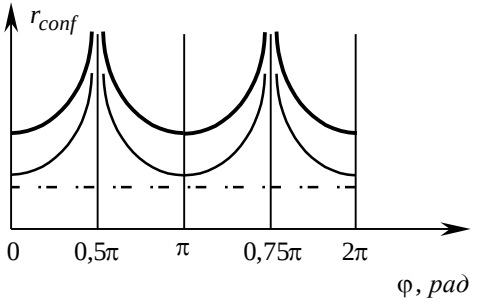


3.

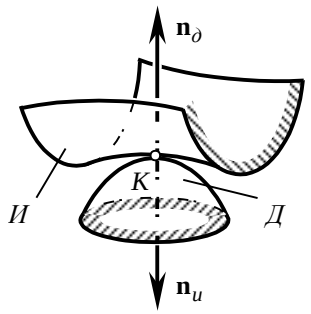
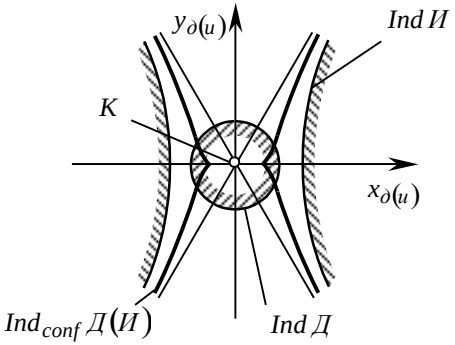
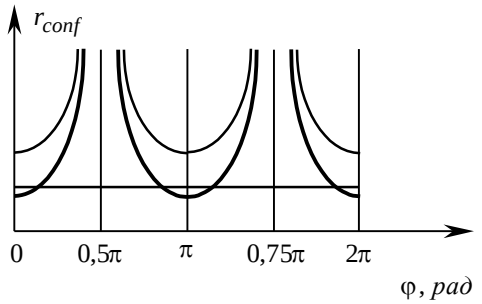
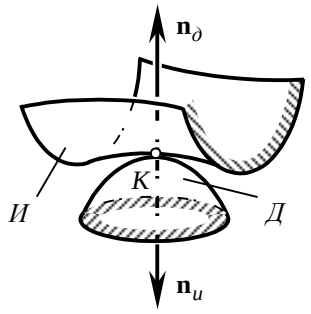
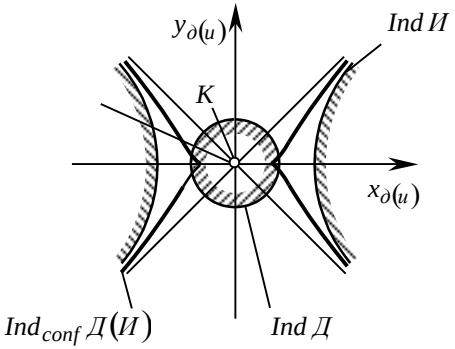
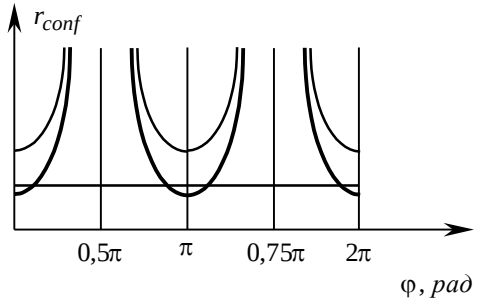
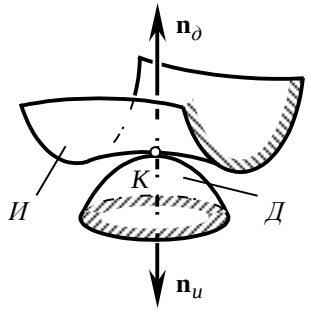
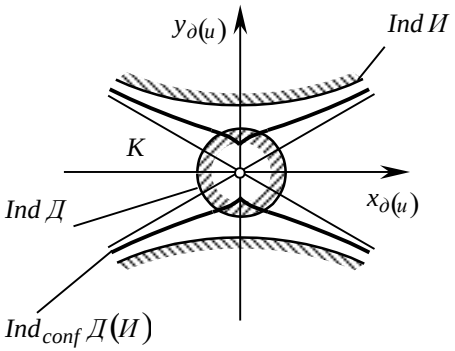
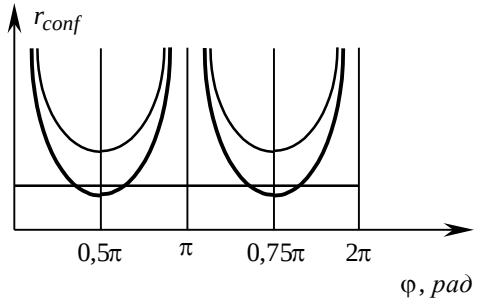
Рис. 4.18. Особенности формы индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д / И)$, вызванные различным видом сопряжения поверхностей $Д$ и $И$.

Элементы геометрии касания поверхностей *Д* и *И*

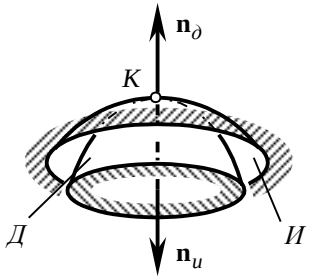
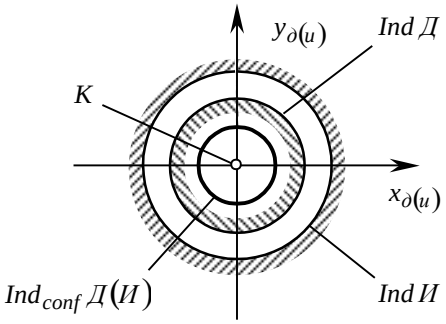
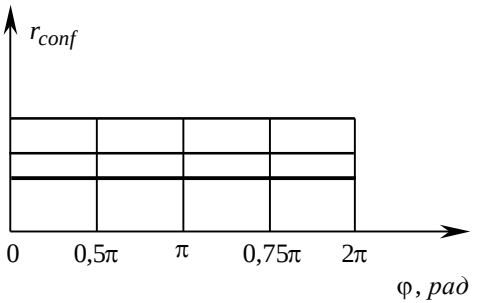
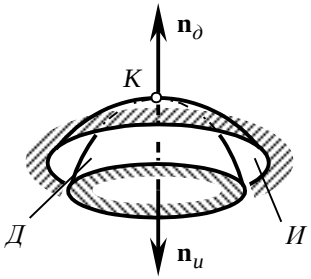
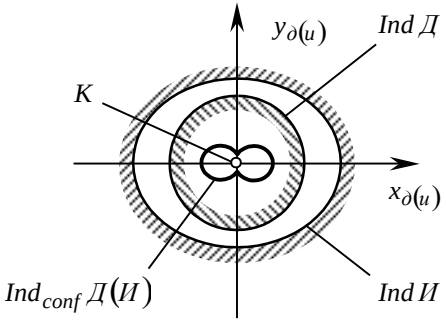
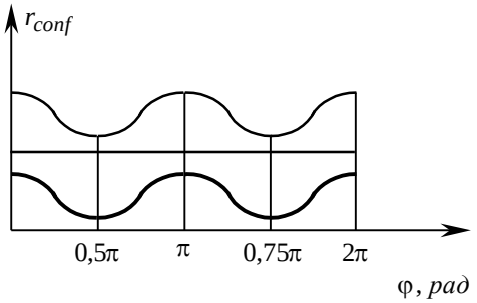
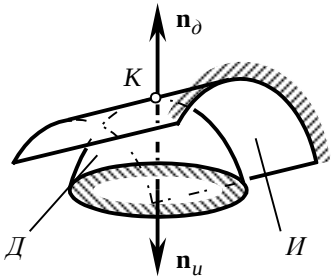
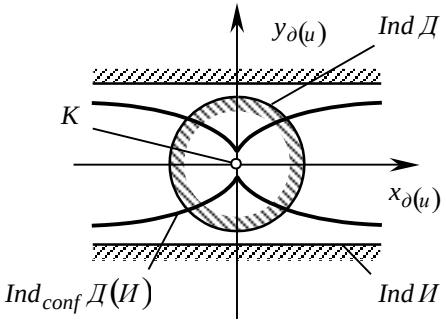
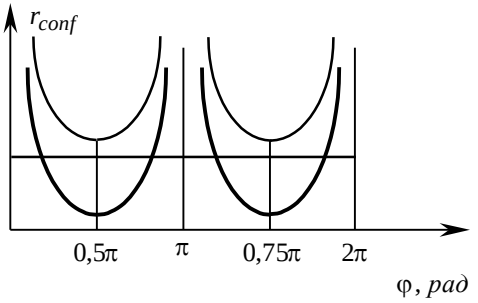
Таблица 4.1

Вид контактирующих поверхностей				Схема касания поверхностей *Д* и *И*	Характеристическая кривая	
детали		инструмента			индикатриса конформности	диаграмма конформности
1	2	3	4	5	6	7
Выпуклый	омбилический	выпуклый	омбилический			
			эллиптический			
			параболический			

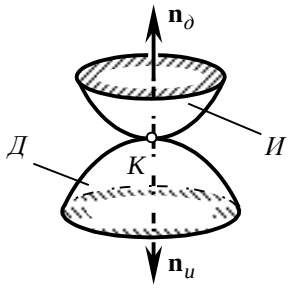
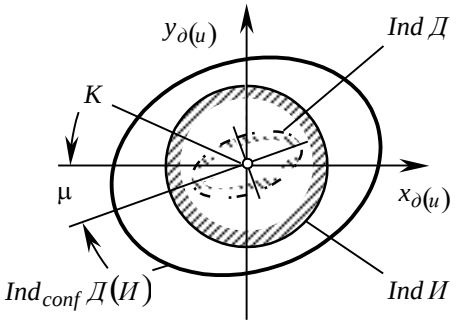
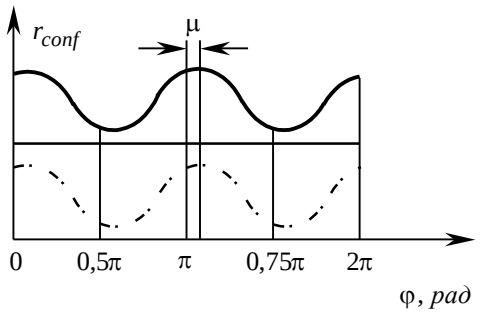
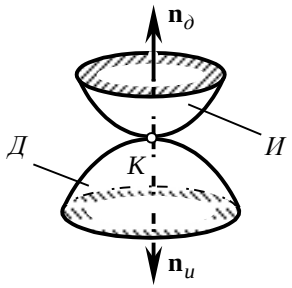
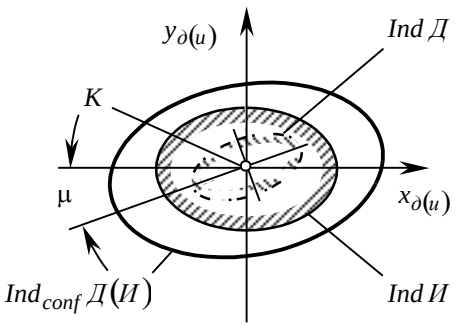
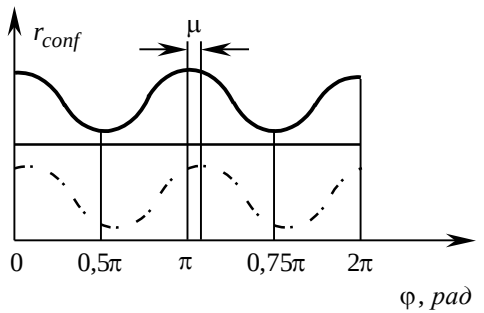
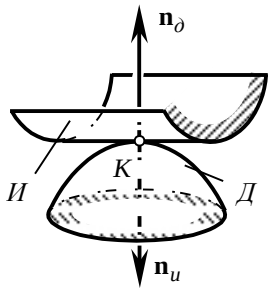
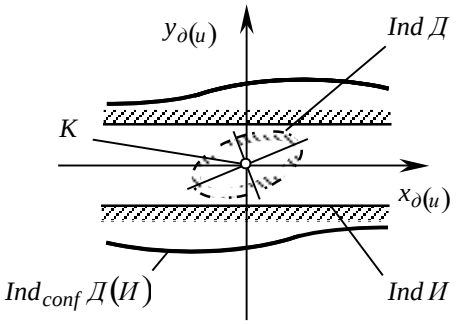
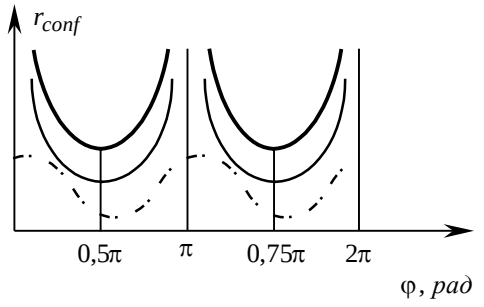
продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Выпуклый	омбилический	Выпукло-вогнутый гиперболический	псевдовыпуклый			
			минимальный			
			псевдовогнутый			

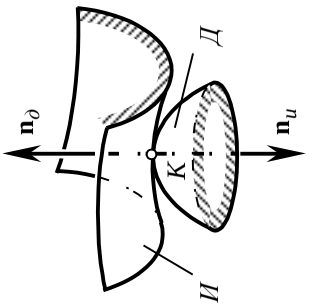
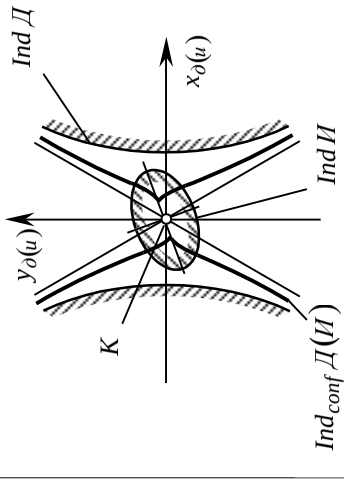
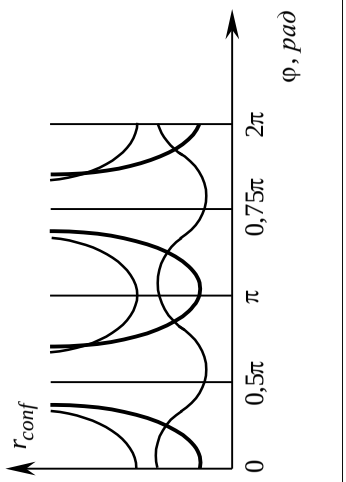
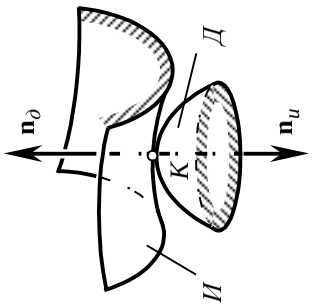
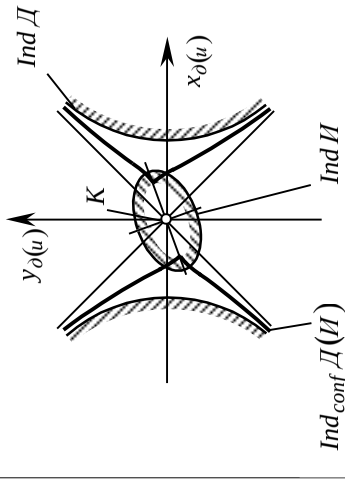
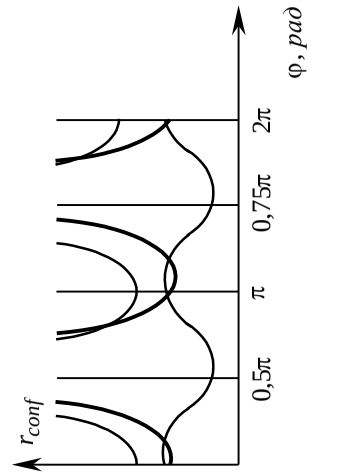
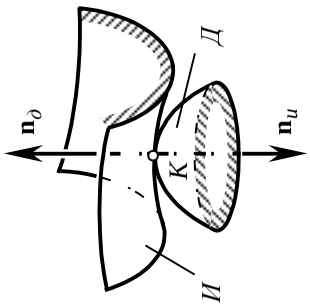
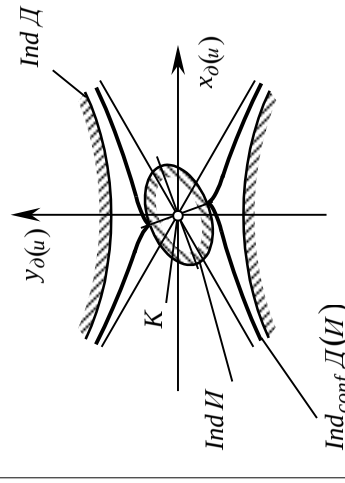
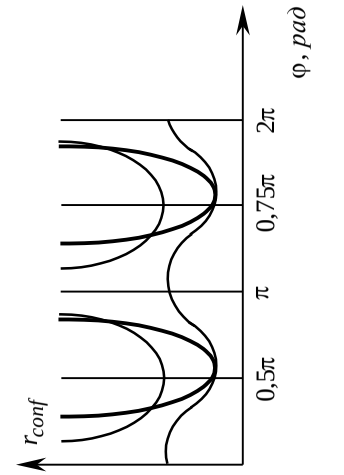
продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Выпуклый	омбилический	Вогнутый	омбилический			
			эллиптический			
			параболический			

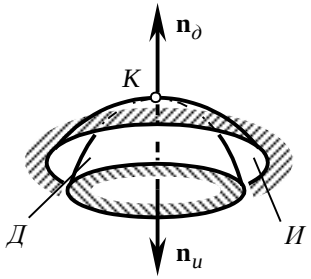
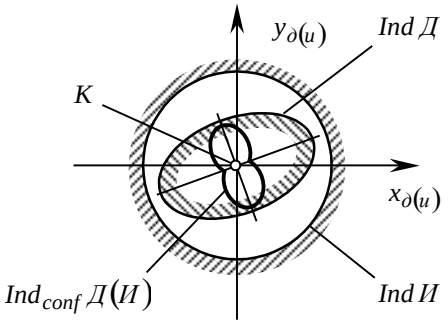
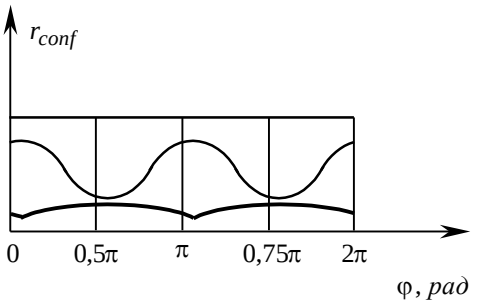
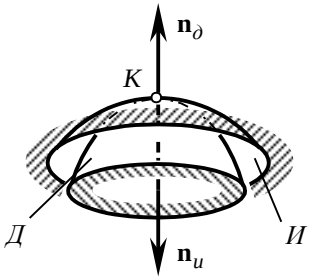
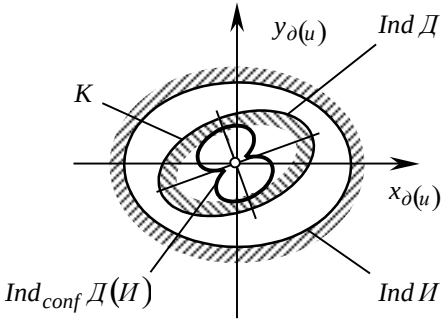
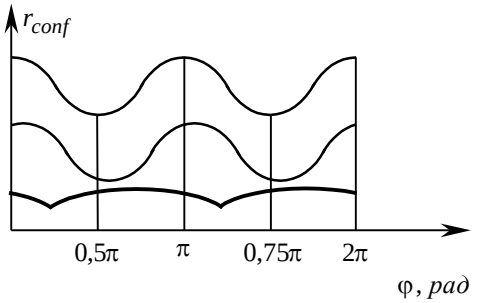
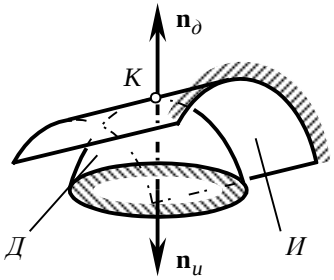
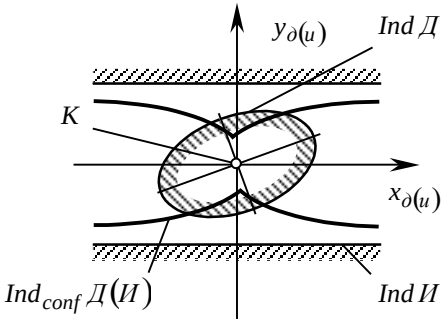
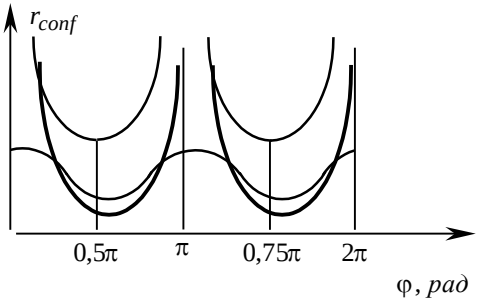
продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Выпуклый	эллиптический	выпуклый	омбилический			
			эллиптический			
			параболический			

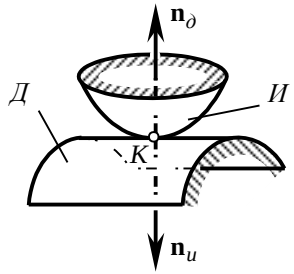
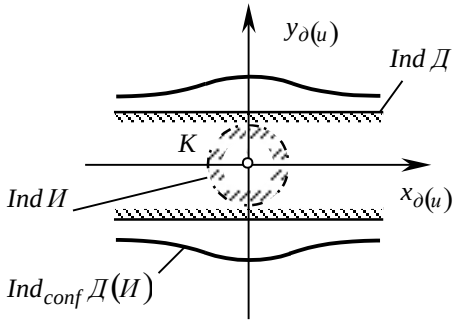
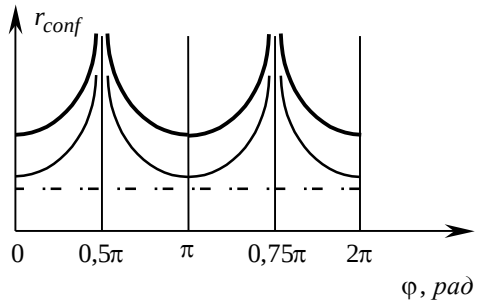
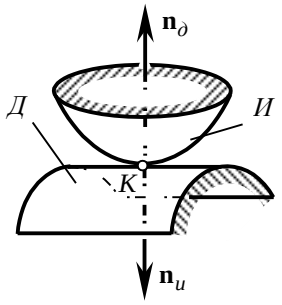
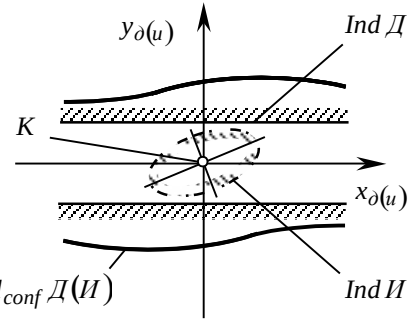
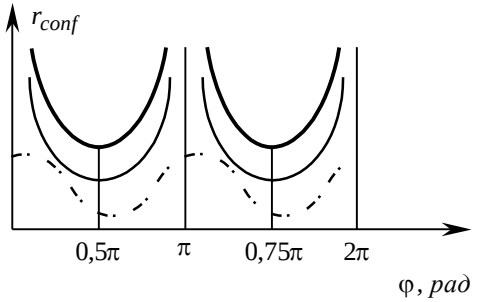
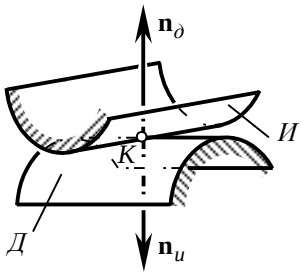
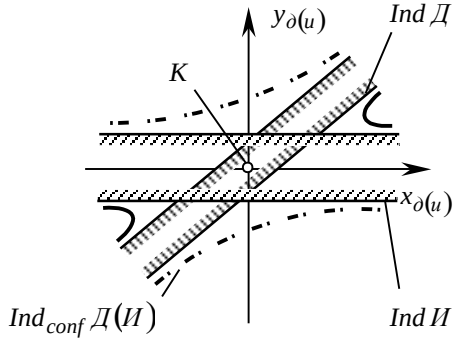
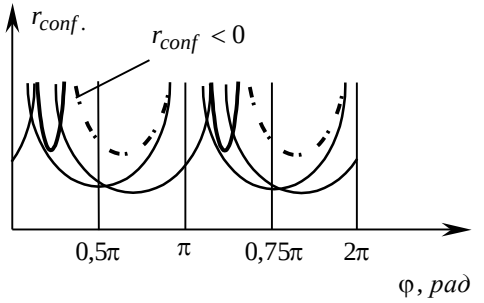
продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Выпуклый	эллиптический	выпукло-вогнутый гиперболический	псевдовыпуклый			
			минимальный			
			псевдовогнутый			

продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Выпуклый	эллиптический	Вогнутый	омбилический			
			эллиптический			
			параболический			

продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Выпуклый	параболический	выпуклый	омбилический			
			эллиптический			
			параболический			

продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Выпуклый	параболический	выпукло-вогнутый гиперболический	псевдовыпуклый			
			минимальный			
			псевдовогнутый			

продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Выпукло-вогнутый гиперболический	псевдовыпуклый	выпуклый	омбилический			
			эллиптический			
			параболический			

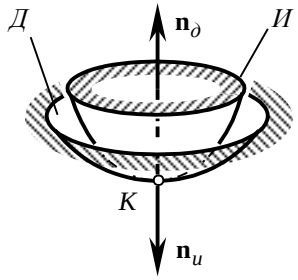
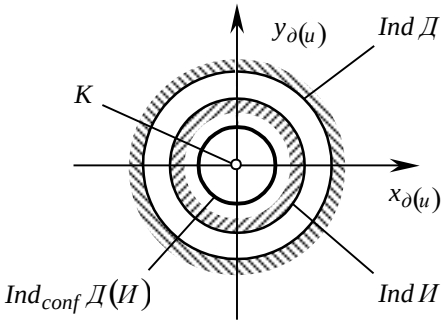
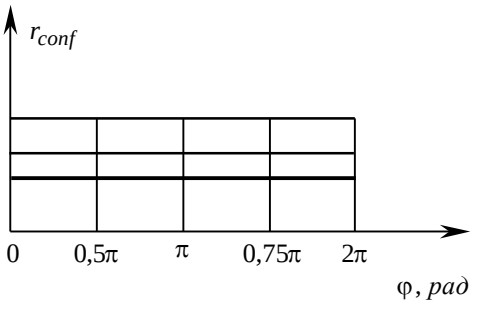
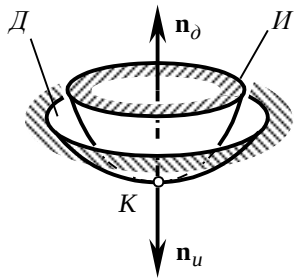
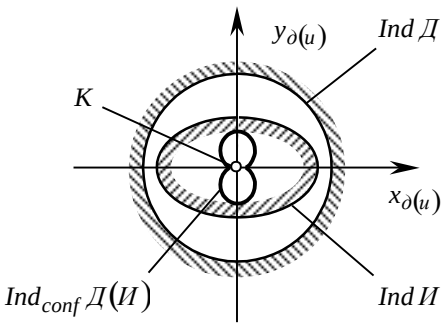
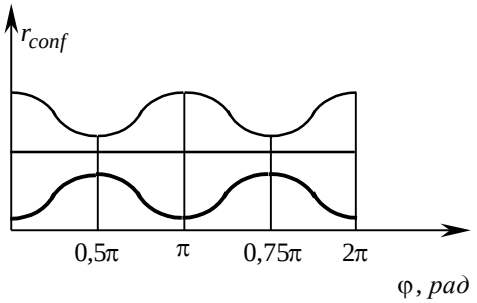
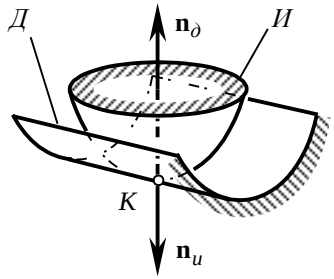
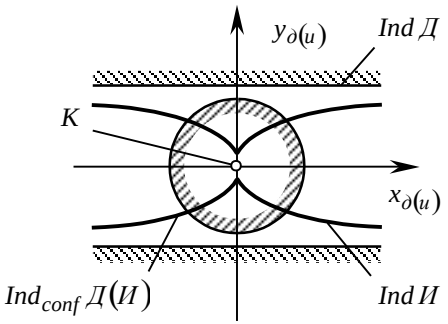
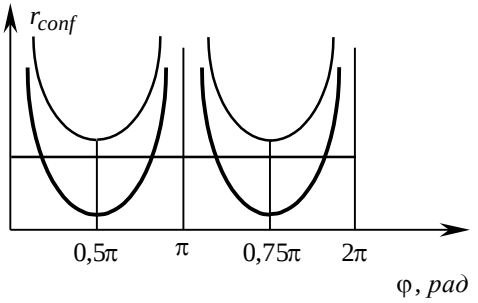
продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Выпукло-вогнутый гиперболический	минимальный	выпуклый	омбилический			
			эллиптический			
			параболический			

продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Выпукло-вогнутый гиперболический	псевдовогнутый	выпуклый	омбилический			
			эллиптический			
			параболический			

продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Вогнутый	омбилический	выпуклый	омбилический			
	эллиптический					
	параболический					

продолжение таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Вогнутый	омбилический	выпуклый	эллиптический			
	эллиптический					
	параболический					

окончание таблицы 4.1

1	2	3	4	5	6	7
Вогнутый	параболический	выпуклый	параболический			
Выпукло-вогнутый	гиперболический	Выпукло-вогнутый	гиперболический			

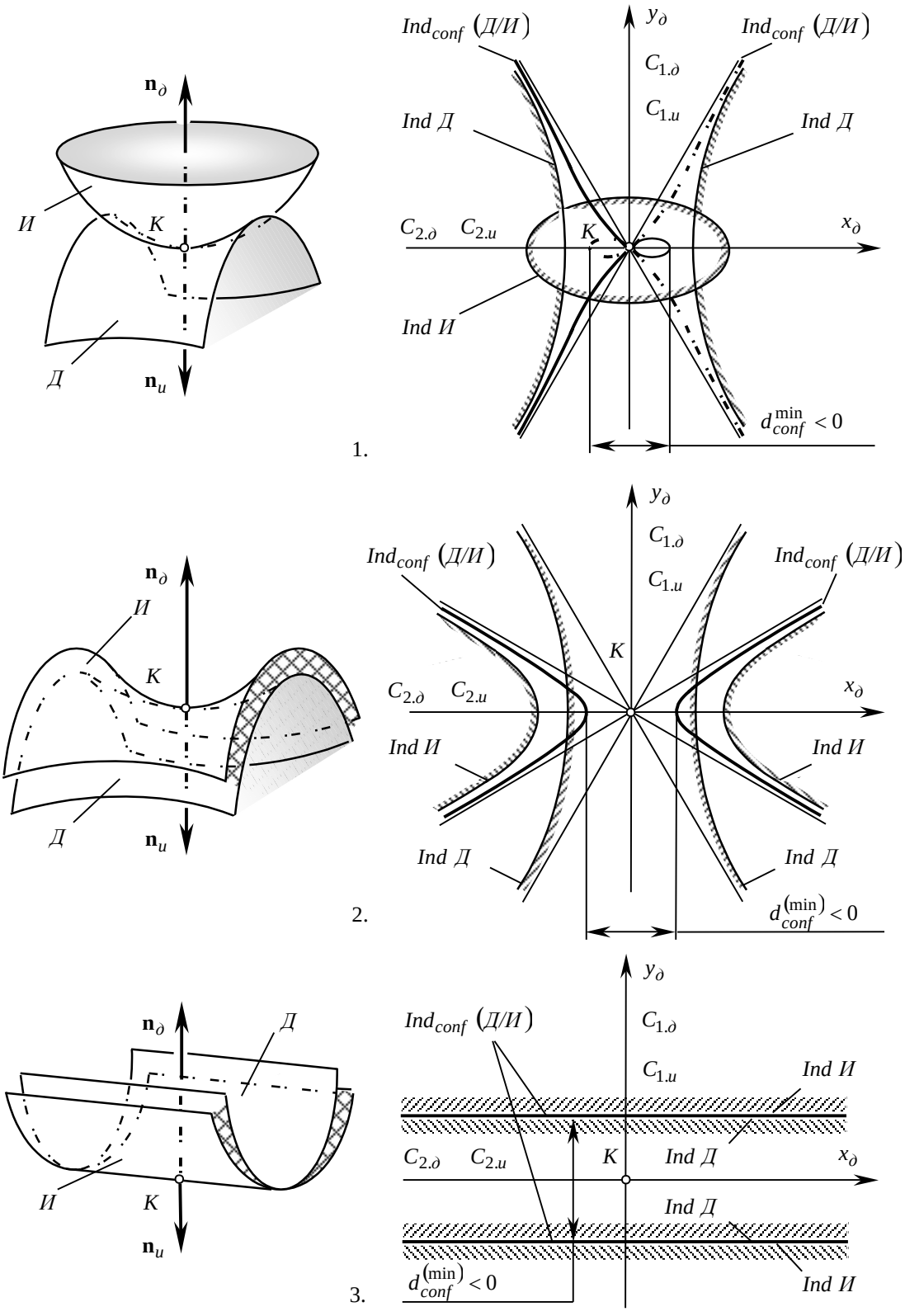


Рис. 4.19. Примеры индикатрис конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ для случаев интерференции поверхностей $Д$ и $И$.

Локальный участок поверхности $И$ инструмента может полностью внедряться в локальный участок поверхности $Д$ детали в дифференциальной окрестности точки K, как это показано на примере интерференции двух локальных участков гиперболического (рис. 4.19.2) и двух локальных участков параболического (рис. 4.19.3) типов поверхностей $Д$ и $И$. При полной интерференции условие $d_{conf}^{(\min)} < 0$ также выполняется, однако особенностью формы индикатрисы конформности $Ind_{conf}\, Д(И)$ в этом случае является то, что отрицательны все текущие значения радиус-вектора r_{conf}, т.е. $r_{conf} < 0$ при любом значении центрального угла φ.

Приведенные примеры показывают, что характер касания поверхностей $Д$ и $И$ полностью и однозначно определяет характерные особенности формы и параметры индикатрисы конформности $Ind_{conf}\, Д(И)$. В этой связи логично предположить, справедливо ли обратное, а именно: не являются ли характерные особенности формы и параметры индикатрисы конформности $Ind_{conf}\, Д(И)$ необходимым и достаточным условием касания поверхностей $Д$ и $И$ в точке, по характеристике E или в пределах некоторого участка? Иными словами, не является ли величина и знак минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\, Д(И)$, а также характерные особенности ее формы критерием вида касания поверхностей $Д$ и $И$?

Установлено, что величина и знак минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\, Д(И)$, а также, характерные особенности формы и параметры этой характеристической кривой не являются однозначным критерием вида касания поверхностей $Д$ и $И$. Положительное значение минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)} > 0$ служит лишь достаточным условием точечного касания поверхностей $Д$ и $И$, но не являются необходимым его условием. Вырождение индикатрисы конформности $Ind_{conf}\, Д(И)$ в точку не является признаком ни точечного, ни достаточным условием касания поверхностей $Д$ и $И$ в пределах некоторого участка поверхности. Однако можно утверждать, что если поверхности $Д$ и $И$ взаимно конгруэнтны, индикатриса конформности $Ind_{conf}\, Д(И)$ всегда вырождается в точку. Обратное справедливым не будет – поверхности $Д$ и $И$ в этом случае могут быть локально взаимно конгруэнтны. Следовательно, вырождение индикатрисы конформности $Ind_{conf}\, Д(И)$ в точку является только необходимым, но не достаточным условием касания поверхностей $Д$ и $И$ в пределах некоторого их общего участка – в этом случае поверхности $Д$ и $И$ могут касаться одна другой как по характеристике E, так и в точке.

Равенство нулю минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\, Д(И)$ нельзя рассматривать как достаточное условие касания поверхностей $Д$ и $И$ по характеристике E. Это условие является только необходимым, но не достаточным – при $d_{conf}^{(\min)} = 0$ поверхности $Д$ и $И$ могут касаться одна другой в точке.

Из изложенного следует, что при касании поверхностей $Д$ и $И$ по характеристике E направление измерения минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\, Д(И)$ совпадает с направлением касательной к характеристике E в точке K. Это важный результат – он закономерно следует из того, что в дифференциальной окрестности точки K направление измерения $d_{conf}^{(\min)}$ совпадает с направлением, в котором поверхности $Д$ и $И$ наиболее конформны одна другой и которое совпадает с направлением прямой, касательной к характеристике E. Следовательно направление касательной к характеристике E и направление измерения минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ совпадают – в точке K они неразличимы. Поэтому точка K всегда является точкой касания направления измерения диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ и прямой, касательной к характеристике E.

4.5.4. О структуре уравнения индикатрисы конформности. Индикатриса конформности $Ind_{conf}\,Д(И)$ поверхностей $Д$ и $И$ является одной из множества функций конформности (75). Естественно предположить, что существует такая функция конформности, которая наилучшим образом соответствует потребностям теории формообразования поверхностей деталей вообще и решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали в частности.

При точечном касании гладких регулярных локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ в окрестности точек A и B пересечения индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,Д(И)$ с направлением измерения ее минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ (рис. 4.20) радиус кривизны индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,Д(И)$ равен некоторому конечному значению ρ_{conf}. В точках A и B индикатриса конформности $Ind_{conf}\,Д(И)$ локально может быть аппроксимирована дугами окружности радиуса ρ_{conf}.

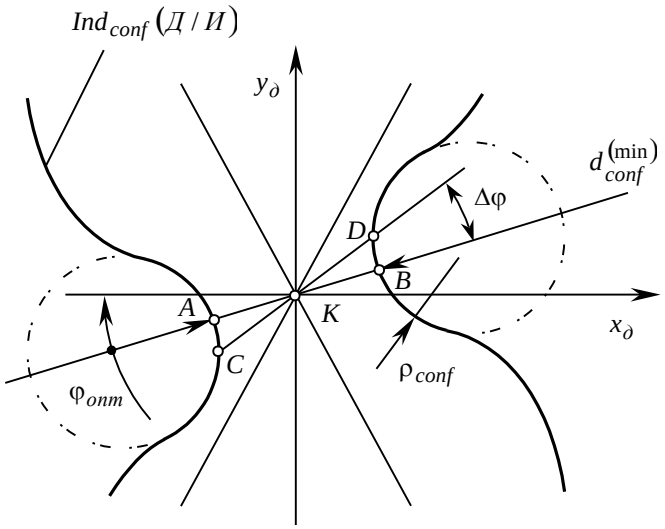


Рис. 4.20. Погрешности измерения направления минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$.

Очевидно, что даже незначительное отклонение диаметра d_{conf} индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,Д(И)$ от его минимального значения $d_{conf}^{(\min)}$ может привести к существенной погрешности в расчете величины угла φ, определяющего направление измерения минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$. Так, например, диаметр CD незначительно отличается от $d_{conf}^{(\min)} = AB$. Однако если его считать минимальным диаметром, это приведет к появлению существенной погрешности $\Delta\varphi$ отклонения угла φ от его оптимального значения $\varphi = \varphi_{опт}$ (см. рис. 4.20).

По мере увеличения ρ_{conf} решение $\varphi = \varphi_{опт}$ может стать неустойчивым. Для повышения его устойчивости следует использовать функцию конформности такой структуры, которая обеспечивает возможно меньшее значение радиуса кривизны ρ_{conf}. В пределе радиус ρ_{conf} должен быть равным нулю ($\rho_{conf} = 0$). В этом случае решение $\varphi = \varphi_{опт}$ будет устойчивым. Одна из причин неустойчивости решения – погрешности счета компьютера и системы ЧПУ станком.

При построении функции конформности желательно стремиться к тому, чтобы (рис. 4.21.1):

- касательная к индикатрисе конформности в точке ее пересечения с направлением измерения минимального диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ совпадала с этим направлением или минимально отклонялась от него. Иными словами рассматриваемая точка индикатрисы конформности должна быть либо ее точкой возврата (рис. 4.21.2), в которой обе ветви характеристической кривой $Ind_{conf}\,Д(И)$ имеют общую касательную, либо ее точкой излома (рис. 4.21.3), в которой обе ветви индикатрисы конформности имеют разные касательные;
- если предыдущее условие не выполняется, желательно, чтобы радиус кривизны ρ_{conf} индикатрисы конформности был по возможности меньшим, т.е. желательно, чтобы $\rho_{conf}\big|_{d_{conf}^{(\min)}} \to 0$ (рис. 4.21.4).

Определить локальные параметры исходной инструментальной поверхности $И$ или некоторые параметры мгновенной кинематики формообразования можно, в частности, так.

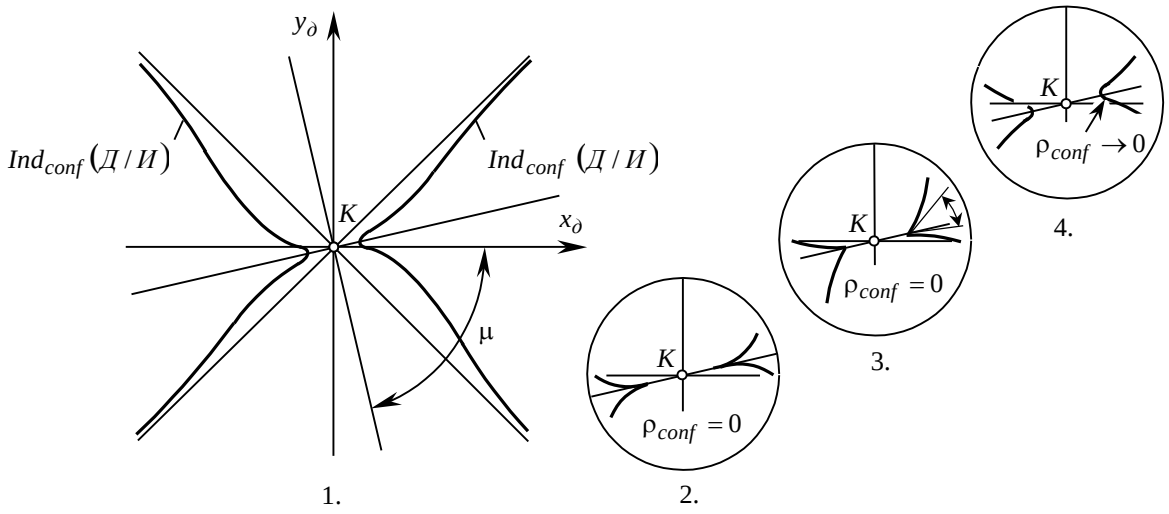


Рис. 4.21. К построению индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$.

При линейном и локально-линейном касании поверхностей $Д$ и $И$ в одном из направлений, проходящем через точку K, нормальные кривизны этих поверхностей одинаковы по величине и противоположны по знаку $(k_д = -k_u)$. Поэтому на основании формулы Эйлера (30) для поверхностей $Д$ и $И$ запишем уравнение

$$k_{1.д}\cos^2\varphi + k_{2.д}\sin^2\varphi = -k_{1.u}\cos^2(\varphi+\mu) - k_{2.u}\sin^2(\varphi+\mu).$$

Это уравнение можно представить в виде:

$$k_{1.д}\cos^2\varphi + k_{2.д}\sin^2\varphi + k_{1.u}\cos^2(\varphi+\mu) + k_{2.u}\sin^2(\varphi+\mu) = 0\,. \qquad (4.86)$$

В случае линейного касания поверхностей $Д$ и $И$ уравнение (86) необходимо, но не достаточно для нахождения неизвестных параметров. Для нахождения двух неизвестных $k_{1.u}$, $k_{2.u}$ или φ, μ имеется только одно уравнение (86).

Недостающее второе уравнение составляется исходя из следующего.

Индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ (83) пересекает направление измерения своего минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ под прямым углом (это следствие того, что в указанном направлении измеряется именно минимальный $d_{conf}^{(\min)}$, а не какой либо иной диаметр индикатрисы конформности). Исходя из этого следует еще одно уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[k_{1.д}\cos^2\varphi + k_{2.д}\sin^2\varphi + k_{1.u}\cos^2(\varphi+\mu) + k_{2.u}\sin^2(\varphi+\mu)\right]\right)^{-1} = 0\,. \qquad (4.87)$$

Если при формообразовании локального участка заданной поверхности $Д$ (т.е. когда известны ее главные кривизны $k_{1.д}$, $k_{2.д}$) известна поверхность $И$ инструмента и определена точка ее касания с поверхностью $Д$, из (86) и (87) находим параметры μ и φ и наоборот. Можно задаться требуемыми

значениями параметров μ и φ и из уравнений (86) и (87) найти параметры такого локального участка поверхности $И$ инструмента, которой наиболее конформен к поверхности $Д$ детали.

4.6. Недифференциальные методы аналитического описания геометрии касания поверхностей деталей и инструментов

Наряду с дифференциальными находят применение недифференциальные методы аналитического описания геометрии касания поверхностей деталей и инструментов (Лопато Г.А., Кабатов Н.Ф., Сегаль М.Г., 1977; Радзевич С.П., 1987; и др.).

Недифференциальные методы аналитического описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ основаны на различных подходах. Например, в точке касания поверхностей $Д$ и $И$ может быть проведена контактная нормаль $\mathbf{n}_{\partial(u)}$, которая служит осью круглого цилиндра некоторого радиуса, пересекающего обе поверхности $Д$ и $И$. Расстояние между поверхностями $Д$ и $И$, измеренное вдоль различных образующих круглого цилиндра, является функцией угла φ, аналогичного аргументу индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$. Это расстояние можно использовать для построения функции зазоров. Построив семейство концентричных цилиндров, можно образовать поверхность зазоров, напоминающую поверхность приведенной кривизны. В случае, когда радиус цилиндра стремится к нулю, а масштаб рисунка увеличивается до бесконечности, функция зазоров вырождается в индикатрису зазоров. В отличие от поверхности зазоров, эта характеристическая кривая описывает геометрию касания поверхностей $Д$ и $И$ уже на дифференциальном уровне – в дифференциальной окрестности точки K.

Для оценки полноты прилегания поверхностей $Д$ и $И$ используют разные варианты функции зазоров. Эти функции определяют расстояние δ между поверхностями $Д$ и $И$, измеренное в направлении, параллельном направлению контактной нормали (рис. 4.22.1). Расстояние Δ от общей нормали до линии измерения зазора δ постоянно во всех направлениях и определяется некоторым образом формализованно (Бабак В.Ф., 1969).

Для определения величин зазоров обычно рассматривают непосредственно уравнения поверхностей $Д$ и $И$. Поэтому величина зазора δ не является дифференциальной характеристикой и зависит от выбранной величины Δ. Определение величин зазоров непосредственно из уравнений поверхностей $Д$ и $И$ сопряжено с необходимостью выполнения в большом объеме громоздких преобразований, что неудобно, трудоемко и связано с повышенным риском появления технических ошибок при вычислениях. Поэтому величины зазоров целесообразно определять путем аппроксимации поверхностей $Д$ и $И$ соприкасающимися параболоидами.

На рис. 4.22.2 показано сечение поверхностей $Д$ и $И$ нормальной секущей плоскостью – она пересекает их по линиям L_∂ и L_u соответственно.

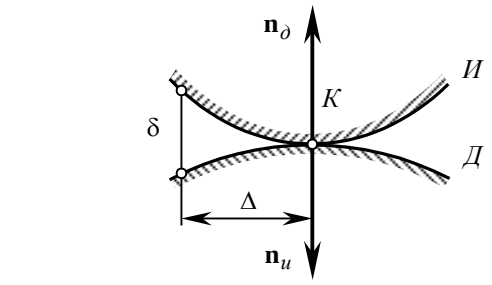
Положение точки K определено радиус-вектором $\mathbf{r}(s)$. На расстоянии $\Delta = KC$ проведена прямая, параллельная контактной нормали. Эта прямая пересекает поверхность $И$ инструмента в точке M_u, радиус-вектор которой $\mathbf{r}_u(s+\Delta s)$. Приращение $\Delta\mathbf{r}_u$ радиус-вектора $\mathbf{r}(s)$ определим из разложения:

$$\Delta\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(s+\Delta s) - \mathbf{r}_u(s) = \frac{d\,\mathbf{r}_u(s)}{ds}\Delta s + \frac{d^2\mathbf{r}_u(s)}{ds^2}\frac{\Delta s^2}{2} + \ldots .$$

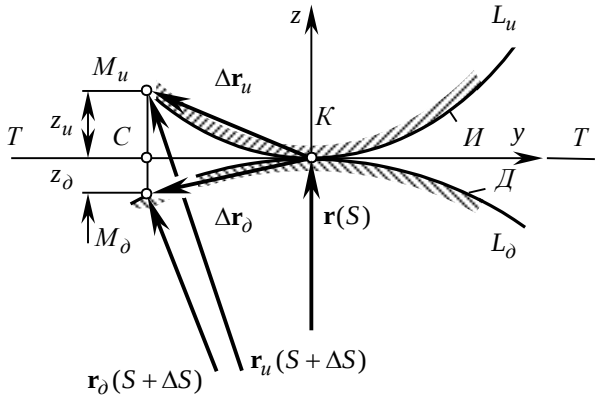
В этом разложении ограничимся рассмотрением бесконечномалых до второго порядка включительно.

Величина отклонения точки M_u от касательной TT равна (рис.4.22.2):

$$z_u = CM_u = \left|\underbrace{\Delta\mathbf{r}_u}_{KM_u} - \underbrace{\mathbf{t}\Delta s}_{KC}\right| = \left|\underbrace{\frac{\partial\mathbf{r}_u(s)}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial\mathbf{r}_u(s)}{\partial s}\frac{\Delta s^2}{2}}_{KM_u} - \underbrace{\mathbf{t}\Delta s}_{KC}\right|$$



1.



2.

Рис. 4.22. К построению функции зазоров (Бабак В.Ф., 1969).

Здесь $\mathbf{t}$ – единичный вектор касательной в точке K, равный $\mathbf{t}=\dfrac{\mathbf{r}(s)}{|\mathbf{r}(s)|}$.

С учетом того, что $|\mathbf{r}_u(s)|=k_u$ (здесь k_u – кривизна кривой L_u в точке K), из этого уравнения следует:

$$z_u = k_u \frac{\Delta s^2}{2}. \qquad (4.88)$$

Аналогично вычисляется величина

$$z_д = k_д \frac{\Delta s^2}{2} \qquad (4.89)$$

для поверхности $Д$ детали (здесь $k_д$ – кривизна кривой $L_д$ в точке K).

Соотношения (88) и (89) устанавливают функциональные зависимости вида $z_д = z_д(y)$ и $z_u = z_u(y)$. Действительно, т.к. $\mathbf{t}\cdot\Delta s=\mathbf{y}$ и учитывая, что $\mathbf{t}^2=1$, имеем $\Delta s^2 = y^2$. Подставляя это значение в (88) и (89), находим: $z_u = k_u\dfrac{y^2}{2}$ и $z_д = k_д\dfrac{y^2}{2}$. В результате сумма отклонений от касательной плоскости точек $M_д$ и M_u, находящихся на расстоянии y от точки K, равна

$$\delta = (k_д + k_u)\frac{y^2}{2}.$$

Это выражение устанавливает зависимость величины зазора δ между поверхностями $Д$ и $И$ от расстояния y от точки K до рассматриваемой точки $M_д$ (или M_u) – $\delta = \delta(y)$.

Известны другие подходы к определению поверхности зазоров (Шевелева Г.И., 1973; Лопато Г.А., Кабатов Н.Ф., Сегаль М.Г., 1977; Радзевич С.П., 1987; и др.).

4.7. Преимущества индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ поверхности детали и исходной инструментальной поверхности

Индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ описывается уравнением (83) четвертого порядка. Естественно предположить, что она более точно описывает геометрию касания поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$, чем, например, индикатриса кривизны поверхности приведенной кривизны этих поверхностей, являющаяся кривой второго порядка. Это подтверждается, в частности, следующим.

Во-первых, определяемые индикатрисой конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ направления экстремальной (максимальной и минимальной) полноты прилегания поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали в

общем случае *взаимно неортогональны* (см. рис. 4.17 и табл. 4.1), тогда как оси индикатрисы кривизны $Ind^{(np)}(Д / И)$ поверхности приведенной кривизны (59) всегда взаимно ортогональны.

Взаимная неортогональность направлений экстремальной степени конформности поверхностей $Д$ и $И$ просто доказывается аналитически. Для этого достаточно уравнение (79) переписать в виде

$$r_{conf} = \sqrt{\left| r_{1.\partial} \cos^2 \varphi + r_{2.\partial} \sin^2 \varphi \right|} \operatorname{sgn} \Phi_{2.\partial}^{-1} + \sqrt{\left| r_{1.и} \cos^2 (\varphi + \mu) + r_{2.и} \sin^2 (\varphi + \mu) \right|} \operatorname{sgn} \Phi_{2.и}^{-1} .$$

Корни φ_1 и φ_2 уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sqrt{\left| r_{1.\partial} \cos^2 \varphi + r_{2.\partial} \sin^2 \varphi \right|} \operatorname{sgn} \Phi_{2.\partial}^{-1} + \sqrt{\left| r_{1.и} \cos^2 (\varphi + \mu) + r_{2.и} \sin^2 (\varphi + \mu) \right|} \operatorname{sgn} \Phi_{2.и}^{-1} \right) = 0$$

в общем случае отличаются один от другого на некоторый угол, не равный $0{,}5\pi$, т.е. $\varphi_1 \neq \varphi_2 \pm 0{,}5\pi n$ (здесь n – целое число). Условие $\varphi_1 = \varphi_2 \pm 0{,}5\pi n$ выполняется только в частных случаях, когда $\mu = \pm 0{,}5\pi n$ и главные секущие плоскости $C_{1,2.\partial}$ поверхности $Д$ детали совпадают с главными секущими плоскостями $C_{1,2.и}$ поверхности $И$ инструмента. Из этого следует, что в общем случае направления экстремальной степени конформности поверхностей $Д$ и $И$ взаимно не ортогональны.

Во-вторых, в отличие от индикатрисы кривизны $Ind^{(np)}(Д / И)$ поверхности приведенной кривизны индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д / И)$ описывает геометрию касания поверхностей $Д$ и $И$ в дифференциальной окрестности точки K однозначно – не существуют такие две разные пары поверхностей $Д'$, $И'$ и $Д''$, $И''$, которые имели бы одинаковую индикатрису конформности $Ind_{conf}(Д / И)$. Это важное свойство характеристической кривой $Ind_{conf}(Д / И)$, позволяющее использовать ее для решения задач не только анализа, но и синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей. Оно доказывается аналитически. Для этого сформулируем:

Теорема 4.1. *Индикатриса конформности поверхности Д детали и исходной инструментальной поверхности И описывает геометрию касания этих поверхностей в дифференциальной окрестности точки их касания однозначно с точностью до членов второго порядка малости включительно.*

Чтобы доказать[1] теорему 4.1, преобразуем (79) к виду

$$r_{conf} = \sqrt{|R_\partial|} \operatorname{sgn} R_\partial + \sqrt{|R_u|} \operatorname{sgn} R_u .$$

Если теорема 4.1 верна, то не существуют такие две разные пары поверхностей $Д'$, $И'$ и $Д''$, $И''$, для которых индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д' / И')$ и $Ind_{conf}(Д'' / И'')$ взаимно конгруэнтны. Исходя из этого можно заключить, что тождество:

$$\sqrt{|R'_\partial|} \operatorname{sgn} R'_\partial + \sqrt{|R'_u|} \operatorname{sgn} R'_u \equiv \sqrt{|R''_\partial|} \operatorname{sgn} R''_\partial + \sqrt{R''_u} \operatorname{sgn} R''_u \tag{4.90}$$

не имеет места и справедливо неравенство:

$$\sqrt{|R'_\partial|} \operatorname{sgn} R'_\partial + \sqrt{|R'_u|} \operatorname{sgn} R'_u \neq \sqrt{|R''_\partial|} \operatorname{sgn} R''_\partial + \sqrt{R''_u} \operatorname{sgn} R''_u$$

(равенство возможно только в отдельных направлениях).

В соответствие с формулой Эйлера (30) радиус кривизны R'_∂ текущего плоского нормального сечения поверхности $Д'$ детали равен

$$R'_\partial = \frac{R'_{1.\partial} R'_{2.\partial}}{R'_{1.\partial} \sin^2 \varphi + R'_{2.\partial} \cos^2 \varphi} ,$$

[1]Теорема доказана д-ром физ.-мат. наук, проф. .А.А.Лигуном.

где $R'_{1.\partial}$ и $R'_{2.\partial}$ – главные радиусы кривизны поверхности $Д'$ в точке K ее касания с поверхностью $И'$ инструмента.

Поверхность $И'$ инструмента развернута по отношению к поверхности $Д'$ на угол μ' относительной локальной ориентации. Поэтому радиус кривизны R'_u ее плоского нормального сечения, измеренный в той же секущей плоскости, равен

$$R'_u = \frac{R'_{1.u} R'_{2.u}}{R'_{1.u} \sin^2(\varphi + \mu') + R'_{2.u} \cos^2(\varphi + \mu')},$$

где $R'_{1.u}$ и $R'_{2.u}$ – главные радиусы кривизны поверхности $И'$ инструмента в точке K ее касания с поверхностью $Д'$ детали.

Аналогичные уравнения справедливы для нормальных радиусов кривизны R''_∂ и R''_u второй пары контактирующих поверхностей $Д''$ и $И''$:

$$R''_\partial = \frac{R''_{1.\partial} R''_{2.\partial}}{R''_{1.\partial} \sin^2\varphi + R''_{2.\partial} \cos^2\varphi}; \qquad R''_u = \frac{R''_{1.u} R''_{2.u}}{R''_{1.u} \sin^2(\varphi + \mu'') + R''_{2.u} \cos^2(\varphi + \mu'')},$$

где $R''_{1.\partial}$ и $R''_{2.\partial}$ – главные радиусы кривизны поверхности $Д''$ в точке K;

$R''_{1.u}$ и $R''_{2.u}$ – главные радиусы кривизны поверхности $И''$ в точке K;

μ'' – угол относительной локальной ориентации второй $Д''$ и $И''$ пары поверхностей.

Приведенные зависимости для нормальных радиусов кривизны поверхностей $Д'$, $И'$ и $Д''$, $И''$ позволяют преобразовать (90) к виду:

$$\sqrt{\left|\frac{R'_{1.\partial} R'_{2.\partial}}{R'_{1.\partial} \sin^2\varphi + R'_{2.\partial} \cos^2\varphi}\right|} \cdot \operatorname{sgn} \frac{R'_{1.\partial} R'_{2.\partial}}{R'_{1.\partial} \sin^2\varphi + R'_{2.\partial} \cos^2\varphi} + \sqrt{\left|\frac{R'_{1.u} R'_{2.u}}{R'_{1.u} \sin^2(\varphi + \mu') + R'_{2.u} \cos^2(\varphi + \mu')}\right|} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sgn} \frac{R'_{1.u} R'_{2.u}}{R'_{1.u} \sin^2(\varphi + \mu') + R'_{2.u} \cos^2(\varphi + \mu')} \equiv \sqrt{\left|\frac{R''_{1.\partial} R''_{2.\partial}}{R''_{1.\partial} \sin^2\varphi + R''_{2.\partial} \cos^2\varphi}\right|} \operatorname{sgn} \frac{R''_{1.\partial} R''_{2.\partial}}{R''_{1.\partial} \sin^2\varphi + R''_{2.\partial} \cos^2\varphi} + \tag{4.91}$$

$$+ \sqrt{\left|\frac{R''_{1.u} R''_{2.u}}{R''_{1.u} \sin^2(\varphi + \mu'') + R''_{2.u} \cos^2(\varphi + \mu'')}\right|} \operatorname{sgn} \frac{R''_{1.u} R''_{2.u}}{R''_{1.u} \sin^2(\varphi + \mu'') + R''_{2.u} \cos^2(\varphi + \mu'')}.$$

Рассмотрим подкоренное выражение в первом сомножителе второго слагаемого в (91), взятое без знака абсолютной величины:

$$\frac{R'_{1.u} R'_{2.u}}{R'_{1.u} \sin^2(\varphi + \mu') + R'_{2.u} \cos^2(\varphi + \mu')}. \tag{4.92}$$

Путем несложных преобразований его можно привести к виду:

$$2\left[\left(\frac{1}{R'_{1.u}} + \frac{1}{R'_{2.u}}\right) + \left(\frac{1}{R'_{1.u}} - \frac{1}{R'_{2.u}}\right)\cos 2\varphi \cos 2\mu' - \left(\frac{1}{R'_{1.u}} - \frac{1}{R'_{2.u}}\right)\sin 2\varphi \sin 2\mu'\right]^{-1}.$$

Обозначим $\tan\varphi = x$. Тогда, воспользовавшись соотношениями

$$\cos 2\varphi = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi = \frac{2x}{1 + x^2},$$

выражение (92) преобразуется к виду:

$$\frac{1 + x^2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2},$$

где a_2, b_2, c_2 – постоянные величины, соответственно равные:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R'_{1.u}} + \frac{1}{R'_{2.u}} - \left(\frac{1}{R'_{1.u}} - \frac{1}{R'_{2.u}}\right)\cos 2\mu'\right]; \qquad b_2 = \left(\frac{1}{R'_{1.u}} - \frac{1}{R'_{2.u}}\right) \cdot \sin 2\mu'; \qquad c_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R'_{1.u}} + \frac{1}{R'_{2.u}} + \left(\frac{1}{R'_{1.u}} - \frac{1}{R'_{2.u}}\right)\cos 2\mu'\right].$$

Очевидно, что аналогично подкоренные выражения в первых сомножителях первого, третьего и четвертого слагаемых в (91) без знака абсолютной величины могут быть преобразованы к виду

$$\frac{1+x^2}{a_1x^2+b_1x+c_1}, \qquad \frac{1+x^2}{a_3x^2+b_3x+c_3}, \qquad \frac{1+x^2}{a_4x^2+b_4x+c_4},$$

где a_1, b_1, c_1; a_3, b_3, c_3 и a_4, b_4, c_4 – постоянные величины, аналогичные константам a_2, b_2, c_2. Их значения рассчитываются по соотношениями, аналогичным соотношениям для расчета констант a_2, b_2, c_2 (см. выше).

С учетом приведенных результатов соотношение, эквивалентное (91), представимо в виде:

$$\pm\sqrt{\frac{1+x^2}{a_1x^2+b_1x+c_1}}\pm\sqrt{\frac{1+x^2}{a_2x^2+b_2x+c_2}}\equiv\pm\sqrt{\frac{1+x^2}{a_3x^2+b_3x+c_3}}\pm\sqrt{\frac{1+x^2}{a_4x^2+b_4x+c_4}}. \tag{4.93}$$

Очевидно, что (93) является мажорантным по отношению к исходному уравнению (91). Следовательно, если доказать, что мажорантное выражение (93) не выполняется ни при каких значениях постоянных коэффициентов a_i, b_i, c_i (здесь $i=1,\ldots,4$), то и минорантное по отношению к нему выражение (91) тем более не выполняется ни при каких значениях этих же коэффициентов.

Перепишем (93) в виде:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}}\pm\frac{1}{\sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}}\equiv\pm\frac{1}{\sqrt{a_3x^2+b_3x+c_3}}\pm\frac{1}{\sqrt{a_4x^2+b_4x+c_4}}.$$

В этом уравнении каждое подкоренное выражение можно приравнять нулю, найти корни x_1, x_2, …, x_8 полученных уравнений, после чего оно преобразуется к виду:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}}\pm\frac{1}{\sqrt{(x-x_3)(x-x_4)}}\equiv\pm\frac{1}{\sqrt{(x-x_5)(x-x_6)}}\pm\frac{1}{\sqrt{(x-x_7)(x-x_8)}}.$$

Последнее уравнение допускает такое представление:

$$\pm\frac{h_1}{\sqrt{x-x_1}}\mp\frac{h_2}{\sqrt{x-x_2}}\pm\frac{h_3}{\sqrt{x-x_3}}\mp\frac{h_4}{\sqrt{x-x_4}}\equiv\pm\frac{h_5}{\sqrt{x-x_5}}\mp\frac{h_6}{\sqrt{x-x_6}}\pm\frac{h_7}{\sqrt{x-x_7}}\mp\frac{h_8}{\sqrt{x-x_8}}, \tag{4.94}$$

где h_1, h_2, …, h_8 – постоянные величины.

Очевидно, что (94), не может быть тождеством ни при каких значениях входящих в него коэффициентов a_i, b_i, c_i. Но поскольку мажорантное выражение (94) не может быть тождеством, то миноратное по отношению к нему выражение (91), а следовательно и (90), ни при каких значениях коэффициентов a_i, b_i, c_i также не может быть тождеством. Этим теорема 4.1 доказана.

Если сопоставить индикатрису конформности (79) с индикатрисой кривизны поверхности приведенной кривизны (59), то можно заключить, что с точки зрения эффективности и полноты аналитического описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ более информативна, она более точно описывает особенности геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ в дифференциальной окрестности точки K и поэтому ее применение для решения задач синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей предпочтительнее. Это следует из того, что:

- направления экстремальной степени конформности поверхностей $Д$ и $И$, найденные как направления осей индикатрисы Дюпена поверхности приведенной кривизны, всегда взаимно ортогональны, тогда как в действительности степень конформности поверхностей $Д$ и $И$ в этих направлениях может быть не экстремальной. Индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ лишена этого недостатка – за счет увеличения степени уравнения этой характеристической кривой (от второй степени для индикатрисы Дюпена поверхности приведенной кривизны до четвертой у индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$);

- использование приближения более высокого (третьего) порядка вида (28) для оценки характера касания гладких поверхностей $Д$ и $И$ в рассматриваемом случае нецелесообразно. Сам по себе учет членов третьего и более высокого порядка ничего не дает – принципиальный недостаток вызван, в первую очередь, невысокой

(второй) степенью уравнения поверхности приведенной кривизны, а не степенью точности расчета ее параметров;

- кривизна текущего плоского нормального сечения поверхности приведенной кривизны является линейной функцией соответствующих нормальных кривизн поверхностей $Д$ и $И$ (см. (4.78)), поэтому при одной и той же разности нормальных кривизн этих поверхностей индикатриса Дюпена $Ind^{(np)}(Д/И)$ поверхности приведенной кривизны описывает геометрию касания поверхностей неоднозначно, а именно: при постоянной (для разных пар поверхностей $Д$ и $И$) разности кривизн k_{∂} и k_u значение приведенной кривизны $k_{np.}$ не изменяется и вследствие этого индикатрисы Дюпена двух разных поверхностей приведенной кривизны неотличимы одна от другой – они взаимно конгруэнтными. Поэтому ее можно использовать для решения задач анализа, но не синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей;

Поверхность приведенной кривизны находит применение при решении контактных задач теории упругости. При этом обычно построив индикатрису Дюпена для поверхности приведенной кривизны, сравнивают длины ее полуосей с длинами полуосей эллипсовидной площадки контакта двух упругих тел и заключают, что они пропорциональны одна другой и одинаково ориентированы. Отсюда делается вывод, что по форме и расположению осей индикатрисы Дюпена $Ind^{(np)}(Д/И)$ поверхности приведенной кривизны можно судить о контуре площадки контакта касающихся поверхностей. Этот хорошо экспериментально проверенный факт не противоречит изложенному выше.

Несмотря на то, что решения контактных задач теории упругости многократно проверялись экспериментально, такие проверки имели место для случаев контакта тел относительно простой формы: “плоскость-сфера”, “сфера-сфера”, “цилиндр-цилиндр” (с параллельными или с пересекающимися под прямым углом осями) и т.п., т.е. когда главные секущие плоскости контактирующих поверхностей совпадают. По этой причине результаты экспериментальных исследований хорошо согласуются с результатами аналитических решений. Несоответствия, которые имеют место при касании более сложных поверхностей, не обнаружены потому, что такие исследования не проводились – поэтому опубликованные результаты экспериментальных исследований контакта упругих тел не противоречат тому, что индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ более точно описывает геометрию касания гладких регулярных отсеков поверхностей деталей и инструментов.

Используя уравнение (83) индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$, можно получить еще одну полезную характеристическую кривую – кривую минимумов наименьших диаметров индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ для различной ориентации инструмента относительно детали. Учитывая свойства симметрии каждого из локальных участков поверхностей $Д$ и $И$, угол μ относительной локальной ориентации можно рассматривать в пределах $0 \le \mu \le \pi$. Этот интервал изменения угла μ делится на части с некоторым относительно небольшим шагом $\Delta\mu$ так, что текущее значение μ_i равно $\mu_i = i \cdot \Delta\mu$. Для каждого фиксированного значения угла μ_i из уравнения

$$\frac{\partial r_{conf}}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\sqrt{\left|\frac{E_{\partial}G_{\partial}}{L_{\partial}G_{\partial}\cos^2\varphi - M_{\partial}\sqrt{E_{\partial}G_{\partial}}\sin 2\varphi + N_{\partial}E_{\partial}\sin^2\varphi}\right|}\,\mathrm{sgn}\Phi_{2.\partial}^{-1} + \\ + \frac{\partial}{\partial\varphi}\sqrt{\left|\frac{E_uG_u}{L_uG_u\cos^2(\varphi+\mu) - M_u\sqrt{E_uG_u}\sin 2(\varphi+\mu) + N_uE_u\sin^2(\varphi+\mu)}\right|}\,\mathrm{sgn}\Phi_{2.u}^{-1} = 0 \qquad (4.95)$$

находится соответствующее ему значение центрального угла φ_i. Из всех найденных значений центрального угла φ_i выбирается то, которое удовлетворяет условию $\frac{\partial^2 r_{conf}}{\partial\varphi^2} > 0$. Подстановкой найденного значения угла φ_i в уравнение (83), находится величина минимального диаметра индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ для текущего положения инструмента относительно детали. Совокупность концов найденных таким путем

значений $d_{conf}^{(\min)}$ минимального диаметра индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ определит новую характеристическую кривую, которая позволяет установить направление измерения $d_{conf}^{(\min)}$ при известной относительной локальной ориентации детали и инструмента. Уравнение этой характеристической кривой может быть получено аналитически.

Для чистовой обработки поверхностей деталей интерес в первую очередь представляет направление плоского нормального сечения поверхностей $Д$ и $И$, в котором они наиболее конформны одна другой. Это направление находится по уравнениям (83) и (95). Для черновой обработки важно удалить весь припуск с минимальным числом повторных проходов, как правило, без повторных проходов. Поэтому для черновой обработки представляет интерес то направление плоского нормального сечения поверхностей $Д$ и $И$, в котором они наименее конформны одна другой. Очевидно, что и эти направления относительно просто могут быть найдены из (83), аналогично может быть построена кривая максимальных диаметров $d_{conf}^{(\max)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ и выведено ее уравнение.

4.8. Асимптоты индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ поверхности детали и исходной инструментальной поверхности

Важной геометрической характеристикой поверхности детали и исходной инструментальной поверхности являются асимптотические направления на каждой из них. Эти направления однозначно определяют расположение асимптотических линий на поверхности $Д(И)$. Асимптотические линии на $Д(И)$ важны тем, что в направлении каждой из них касательная плоскость к поверхности имеет более тесное соприкосновение (не менее, чем второго порядка), чем в любом другом направлении. Соприкасающаяся плоскость асимптотической линии является либо касательной плоскостью к поверхности $Д(И)$, либо не определена. Локальные участки гиперболического типа поверхности $Д(И)$ разделяются асимптотическими касательными на четыре области, из которых две лежат по одну сторону, а две – по другую сторону относительно касательной плоскости.

При некоторых сочетаниях значений параметров уравнения (83) индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ может иметь асимптоты: прямые линии, к которым эта характеристическая кривая неограниченно удаляясь от расположенного в точке K начала координат своей бесконечной ветвью неограниченно приближается к ним с одной стороны.

Асимптоты индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ описываются уравнениями вида $y = ax + b$.

В ортогональной локальной системе координат, в которой выполняются соотношения $E_{\partial(u)} = 1$, $F_{\partial(u)} = 0$, $G_{\partial(u)} = 1$, константа a для уравнения вида (40) равна

$$a = \frac{-M_{\partial(u)} \pm \sqrt{M_{\partial(u)}^2 - N_{\partial(u)} L_{\partial(u)}} - N_{\partial(u)} \tan\mu}{N_{\partial(u)} - M_{\partial(u)} \tan\mu \pm \sqrt{M_{\partial(u)}^2 - N_{\partial(u)} L_{\partial(u)}} \tan\mu}.$$

Каждая из поверхностей $Д(И)$ в точке K их касания имеет свою характеристическую кривую – индикатрису Дюпена $Ind\ Д$ и $Ind\ И$ соответственно [см. (44) или (45) – для ортогонально параметризованной поверхности $Д(И)$]. Получено, что

$$a = \frac{\left[-M_{\partial(u)} \pm \sqrt{M_{\partial(u)}^2 - L_{\partial(u)} N_{\partial(u)}}\right]}{N_{\partial(u)}} \cdot \sqrt{\frac{G_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}}},$$

а для ортогонально параметризованной поверхности $Д(И)$, когда спаведливо соотношение $\sqrt{\frac{G_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}}}=1$, имеем

$$a=\frac{\left[-M_{\partial(u)}\pm\sqrt{M^2_{\partial(u)}-L_{\partial(u)}N_{\partial(u)}}\right]}{N_{\partial(u)}}.$$

Индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ и индикатриса кривизны $Ind\,Д(И)$ каждой из поверхностей $Д(И)$ могут иметь совпадающие асимптоты. Для этого одна из касающихся поверхностей или одновременно обе должны иметь асимптоты – во втором случае они будут общими.

Уравнения асимптот индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ имеют важное прикладное значение: асимптоты индикатрисы конформности $Ind\,Д(И)$ совпадают с асимптотическими направлениями (если таковые существуют) на поверхности $Д(И)$, т.е. с такими направлениями в точке касания поверхностей $Д$ и $И$, которые касательны к нормальным сечениям поверхностей с равной нулю кривизной в этой точке K. Поэтому направление $\frac{dU_{\partial(u)}}{dV_{\partial(u)}}$ на регулярной поверхности $Д(И)$ в точке K будет асимптотическим (если оно вообще существует), когда вторая основная квадратичная форма $\Phi_{2.\partial(u)}$ (1.38) поверхности в этой точке обращается в нуль и, следовательно, выполняется условие:

$$L_{\partial(u)}dU^2_{\partial(u)}+2M_{\partial(u)}dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)}+N_{\partial(u)}dV^2_{\partial(u)}=0. \qquad (4.96)$$

Условие (96) однозначно следует из того, что $R_{\partial(u)}=\frac{\Phi_{1.\partial(u)}}{\Phi_{2.\partial(u)}}$. Асимптотическое направление (называемое также асимптотической касательной) имеет с поверхностью $Д(И)$ касание не ниже второго порядка и является направлением, соприкасающимся в точке K к поверхности $Д(И)$.

Асимптотическое направление в точке K определяет асимптотическую кривую – кривую, касательная к которой в каждой точке поверхности направлена по асимптотическому направлению к ней в этой точке. Так как в асимптотическом направлении нормальная кривизна поверхности $Д(И)$ равна нулю, условие (96) одновременно является дифференциальным уравнением асимптотических линий на поверхности $Д(И)$.

В случае, когда координатные линии на поверхности $Д(И)$ являются асимптотическими, имеем $L_{\partial(u)}=0$ и $N_{\partial(u)}=0$. И обратно, если $L_{\partial(u)}=0$ и $N_{\partial(u)}=0$, координатные линии на поверхности $Д(И)$ асимптотические.

Если на поверхности $Д(И)$ лежит прямая линия, то очевидно, что она будет асимптотической линией. Касательная плоскость к поверхности $Д(И)$ в каждой точке асимптотической линии на ней является соприкасающейся плоскостью.

Индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ поверхностей $Д$ и $И$ могут асимптотически приближаться к индикатрисе Дюпена поверхности $Д(И)$. Вместе с тем индикатриса Дюпена $Ind\,Д(И)$ может быть асимптотой индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ лишь в случаях, когда один или одновременно оба локальных участка поверхностей $Д$ и $И$ являются локальными участками параболического типа и, следовательно, одна или обе индикатрисы Дюпена вырождаются в пару параллельных прямых. Необходимым и достаточным условием этого является выполнение равенства $E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}-F^2_{\partial(u)}=0$, получаемого путем раскрытия определителя Грама:

$$\Gamma\left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right]=\begin{vmatrix}\left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right]^2 & \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\\ \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right]^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_{\partial(u)} & F_{\partial(u)}\\ F_{\partial(u)} & G_{\partial(u)}\end{vmatrix}=E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}-F^2_{\partial(u)}.$$

Представляет интерес связь между кручением $\tau_{\partial(u)}$ асимптотической линии на поверхности $Д(И)$ с полной кривизной этой поверхности. Эннепер установил, что вдоль асимптотических линий угол θ между главной нормалью к этой линии и вектором $\mathbf{n}_{\partial}$ равен нулю или π. Следовательно, угол φ асимптотического направления определяется уравнением (Фавар Ж., 1960):

$$k_{1.\partial(u)}\cos^2\varphi+k_{2.\partial(u)}\sin^2\varphi=0$$

или $\tan\varphi=\pm\sqrt{-\frac{k_{1.\partial(u)}}{k_{2.\partial(u)}}}$.

Подставляя эти значения в формулу $\tau_{\partial(u)}=\left[k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}\right]\sin\varphi\cos\varphi$, получаем $\tau_{\partial(u)}=\pm\sqrt{-k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}}=$ $=\pm\sqrt{-\tilde{G}_{\partial(u)}}$, где знак перед радикалом определяется формулой, задающей $\tan\varphi$. Следовательно, квадрат кручения $\tau_{\partial(u)}$ асимптотической линии на поверхности $Д(И)$ равен взятой с обратным знаком полной (гауссовой) кривизне $\tilde{G}_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$.

Гладкие регулярные локальные участки гиперболического и параболического типов имеют действительные асимптотические линии. У эллиптических и омбилических их локальных участков асимптотические линии мнимые. По этой причине гладкие регулярные локальные участки эллиптического и омбилического типов с касательной плоскостью в точке K не пересекаются.

Иногда на поверхности $Д(И)$ можно определить сеть кривых, касательные в каждой точке к которым имеют асимптотическое направление. Такая задача решается аналогично определению ортогональной сети кривых на поверхности $Д(И)$, координатные $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$ линии которой в каждой точке касательны к главным направлениям на поверхностях.

Наряду с сетью линий кривизны и сетью асимптотических линий представляют интерес сети линий на поверхности $Д(И)$, в которых гауссова кривизна поверхности равна нулю $\tilde{G}_{\partial(u)}=0$.

Поскольку гауссова кривизна $\tilde{G}_{\partial(u)}$ поверхности изменяется непрерывно, могут существовать точки, для которых $\tilde{G}_{\partial(u)}=0$. Такие точки образуют непрерывные кривые, отделяющие области положительной гауссовой кривизны на поверхности $Д(И)$ от областей отрицательной гауссовой кривизны. Эти кривые целиком состоят из параболических точек, в связи с чем их называют параболическими кривыми. Для них всегда выполняется условие $E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}-F^2_{\partial(u)}=0$.

Параболические кривые имеются только на тех поверхностях $Д(И)$, в пределах участков которых полная кривизна поверхности принимает как положительные, так и отрицательные значения**.** Примером такой поверхности $Д(И)$ служит тор (см. рис. 1.35). Все локальные участки его наружной поверхности 1 являются эллиптическими локальными участками, а внутренней поверхности 2 – гиперболическими локальными участками. Локальные участки поверхности тора в дифференциальной окрестности точек двух окружностей 3, которыми тор $Д(И)$ касается плоскости – это параболические локальные участки, а окружности – параболические кривые на поверхности тора.

4.9. Упрощенная индикатриса конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности

При решении некрторых задач теории формообразования поверхностей деталей, например, когда формообразование поверхности $Д$ производится заданным отсеком исходной инструментальной поверхности $И$ при "жесткой" кинематике формообразования, для упрощения аналитического описания процесса формообразования допустимо использовать упрощенную индикатрису конформности, отличную от индикатрисы конформности (79).

Упрощенная индикатриса конформности $Ind^*_{conf}(Д/И)$ представляет собой плоскую кривую, радиус-вектор каждой точки которой определен как алгебраическая сумма нормальных радиусов кривизны поверхностей $Д$ и $И$ в соответствующих плоских нормальных сечениях:

$$r^*_{conf} = R_{\partial} + R_u, \tag{4.97}$$

где r^*_{conf} – радиус-вектор текущей точки индикатрисы конформности $Ind^*_{conf}(Д/И)$.

В развернутом виде это уравнение записывается так:

$$r^*_{conf} = \frac{(E_{\partial}dU_{\partial}^2 + 2F_{\partial}dU_{\partial}dV_{\partial} + G_{\partial}dV_{\partial}^2)(L_u dU_u^2 + 2M_u dU_u dV_u + N_u dV_u^2) + \cdots \rightarrow}{(L_{\partial}dU_{\partial}^2 + 2M_{\partial}dU_{\partial}dV_{\partial} + N_{\partial}dV_{\partial}^2)(L_{\partial}dU_{\partial}^2 + 2M_{\partial}dU_{\partial}dV_{\partial} + N_{\partial}dV_{\partial}^2)} \cdots \rightarrow$$
$$\rightarrow \cdots \frac{+(E_u dU_u^2 + 2F_u dU_u dV_u + G_u dV_u^2)(L_{\partial}dU_{\partial}^2 + 2M_{\partial}dU_{\partial}dV_{\partial} + N_{\partial}dV_{\partial}^2)}{}. \tag{4.98}$$

Чтобы получить уравнение индикатрисы конформности $Ind^*_{conf}(Д/И)$ в удобной для использования форме, преобразуем формулу Эйлера (30) к виду:

$$R_{\partial} = \frac{R_{1.\partial}R_{2.\partial}}{R_{1.\partial}\sin^2\varphi + R_{2.\partial}\cos^2\varphi}. \tag{4.99}$$

Главные радиусы кривизны $R_{1.\partial}$ и $R_{2.\partial}$ находятся как корни характеристического уравнения:

$$(L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)})R^2_{\partial(u)} - (E_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)}M_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}L_{\partial(u)})R_{\partial(u)} + (E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}) = 0 \tag{4.100}$$

и равны

$$R_{1,2.\partial(u)} = \frac{(E_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)}M_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}L_{\partial(u)}) \pm \sqrt{(E_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)}M_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}L_{\partial(u)})^2 - 4H^2_{\partial(u)}T^2_{\partial(u)}}}{2T^2_{\partial(u)}}. \tag{4.101}$$

Здесь $H^2_{\partial(u)} = E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}$ (см. выше, с.42), а $T^2_{\partial(u)} = L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)}$ (см. выше, с.50).

Вследствие того, что в общем случае поверхности $Д$ и $И$ развернуты одна относительно другой вокруг контактной нормали на угол μ относительной локальной ориентации, радиус кривизны текущего плоского нормального сечения поверхности $И$ в точке K равен:

$$R_u = \frac{R_{1.u}R_{2.u}}{R_{1.u}\sin^2(\varphi + \mu) + R_{2.u}\cos^2(\varphi + \mu)}. \tag{4.102}$$

С учетом (99) и (102) уравнение индикатрисы конформности $Ind^{*}_{conf}(Д/И)$ в полярных координатах записывается в форме:

$$r^{*}_{conf} = \frac{R_{1.\partial}R_{2.\partial}}{R_{1.\partial}\sin^2\varphi + R_{2.\partial}\cos^2\varphi} + \frac{R_{1.u}R_{2.u}}{R_{1.u}\sin^2(\varphi+\mu) + R_{2.u}\cos^2(\varphi+\mu)}. \tag{4.103}$$

Для перехода от полярных координат к ортогональной системе декартовых координат (к локальной подвижной системе координат $x_\partial y_\partial$) воспользуемся соотношениями (см. гл. 3):

$$\sin^2\varphi = \frac{y_\partial^2}{x_\partial^2 + y_\partial^2}, \qquad \cos^2\varphi = \frac{x_\partial^2}{x_\partial^2 + y_\partial^2}, \qquad r^{*}_{conf} = x_\partial^2 + y_\partial^2.$$

Тогда из (103) получим уравнение индикатрисы конформности $Ind^{*}_{conf}(Д/И)$, записанное в ортогональной системе декартовых координат:

$$\frac{(R_{1.\partial}y_\partial^2 + R_{2.\partial}x_\partial^2)\left|R_{1.u}(x_\partial\sin\mu + y_\partial\cos\mu)^2 + R_{2.u}(x_\partial\cos\mu - y_\partial\sin\mu)^2\right.}{R_{1.\partial}R_{2.\partial}R_{1.u}(x_\partial\sin\mu + y_\partial\cos\mu)^2 + R_{1.\partial}R_{2.\partial}R_{2.u}(x_\partial\cos\mu - y_\partial\sin\mu)^2 + R_{1.u}R_{2.u}(R_{1.\partial}y_\partial^2 + R_{2.\partial}x_\partial^2)} = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{4.104}$$

Чтобы исключить параметр φ из уравнения этой характеристической кривой, исходим из уравнения (97): $r^{*}_{conf} = R_\partial + R_u$, записанного в обобщенной форме. В соответствие с формулой Эйлера (30) для поверхности $Д$ детали справедливо соотношение

$$\frac{1}{R_\partial} = \frac{\cos^2\varphi}{R_\partial} + \frac{\sin^2\varphi}{R_\partial}.$$

Для поверхности $И$ инструмента аналогичное соотношение представимо в форме

$$\frac{1}{R_u} = \frac{\cos^2(\varphi+\mu)}{R_u} + \frac{\sin^2(\varphi+\mu)}{R_u}.$$

С учетом этого уравнение (97) преобразуется к виду

$$r^{*}_{conf} = \frac{R_{1.\partial}R_{2.\partial}}{R_{1.\partial}\sin^2\varphi + R_{2.\partial}\cos^2\varphi} + \frac{R_{1.u}R_{2.u}}{R_{1.u}\sin^2(\varphi+\mu) + R_{2.u}\cos^2(\varphi+\mu)}. \tag{4.105}$$

Следует обратить внимание на то, что полная (гауссова) кривизна $\tilde{G}_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ может быть рассчитана по формуле (1.111):

$$\tilde{G}_{\partial(u)} = k_{\partial(u)}k_{\partial(u)} = \frac{1}{R_{\partial(u)}R_{\partial(u)}} = \frac{L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}. \tag{4.106}$$

Этот результат позволяет представить (104) в виде:

$$r^{*}_{conf} = \frac{E_{\partial}G_{\partial} - F^{2}_{\partial}}{L_{\partial}N_{\partial} - M^{2}_{\partial}} \cdot \frac{1}{R_{1.\partial}\sin^{2}\varphi + R_{2.\partial}\cos^{2}\varphi} + \frac{E_{u}G_{u} - F^{2}_{u}}{L_{u}N_{u} - M^{2}_{u}} \cdot \frac{1}{R_{1.u}\sin^{2}(\varphi+\mu) + R_{2.u}\cos^{2}(\varphi+\mu)}.$$

Формула Эйлера (30) допускает представление в форме (Фиников С.П., 1952, с.223):

$$k_{\partial(u)} = k_{1.\partial(u)} \cdot \frac{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}} + k_{2.\partial(u)} \cdot \frac{G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(\ )}}.$$

Если сопоставить эту зависимость с общепринятой формой записи формулы Эйлера (30), легко видеть, что справедливы соотношения:

$$\cos^{2}\varphi = \frac{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}}; \qquad \sin^{2}\varphi = \frac{G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}}. \tag{4.107}$$

Этот результат может быть получен иным путем.

Если раскрыть функцию $\sin^{2}(\varphi+\mu)$ и выполнить необходимые преобразования с учетом соотношений (107), придем к результату:

$$\sin^{2}(\varphi+\mu) = \frac{G_{\partial(u)}\cos^{2}\mu dV^{2}_{\partial(u)} + E_{\partial(u)}\sin^{2}\mu dU^{2}_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi. \tag{4.108}$$

Аналогично, если раскрыть функцию $\cos^{2}(\varphi+\mu)$, получим:

$$\cos^{2}(\varphi+\mu) = \frac{E_{\partial(u)}\cos^{2}\mu dU^{2}_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}\sin^{2}\mu dV^{2}_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\sin 2\mu. \tag{4.109}$$

Кроме того, из (107) следует, что

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}}}; \qquad \sin^{2}\varphi = \sqrt{\frac{G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}dU^{2}_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV^{2}_{\partial(u)}}}. \tag{4.110}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{E_{\partial(u)}G_{\partial(u)}}dU_{\partial(u)}dV_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)}dU_{\partial(u)} + G_{\partial(u)}dV_{\partial(u)}}. \tag{4.111}$$

Приведенные результаты (106), (107)-(111) дают возможность таким образом записать уравнение индикатрисы конформности $Ind^{*}_{conf}(Д/И)$

$$r^{*}_{conf} = \frac{1}{\tilde{G}_{\partial}} \cdot \frac{E_{\partial}dU^{2}_{\partial} + G_{\partial}dV^{2}_{\partial}}{R_{1.\partial}G_{\partial}dV^{2}_{\partial} + R_{2.\partial}E_{\partial}dU^{2}_{\partial}} +$$

(4.112)
$$+\frac{1}{\tilde{G}_u}\cdot\frac{E_u dU_u^2+G_u dV_u^2}{R_{1.u}\left(E_u\sin^2\mu dU_u^2+\sqrt{E_uG_u}\sin 2\mu dU_u dV_u+G_u\cos^2\mu dV_u^2\right)+}\cdots\rightarrow$$
$$\rightarrow\cdots\frac{}{+R_u\left(E_u\cos^2\mu dU_u^2-\sqrt{E_uG_u}\sin 2\mu dU_u dV_u+G_u\sin^2\mu dV_u^2\right)}$$

Структура уравнения (104) индикатрисы конформности $Ind^*_{conf}(Д/И)$ [также, как и структура уравнения (112)] отлична от структуры уравнения (79). Следствием этого является то, что индикатриса конформности $Ind^*_{conf}(Д/И)$ может быть использована для решения задач анализа, но не синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей, что сужает возможности характеристической кривой (103). Частично устранить этот недостаток можно, если вместо главных радиусов кривизны $R_{1.\partial(u)}$ и $R_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ использовать собственно их кривизны $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ и таким путем перейти к нелинейной структуре уравнения индикатрисы конформности. Тогда аналогично (97) индикатриса конформности определяется так:

$$k^*_{conf}=\frac{k_\partial k_u}{k_\partial+k_u}.$$

Эта формула представима в развернутом виде:

$$k^*_{conf}=\frac{(L_\partial dU_\partial^2+2M_\partial dU_\partial dV_\partial+N_\partial dV_\partial^2)(L_u dU_u^2+2M_u dU_u dV_u+N_u dV_u^2)}{(E_\partial dU_\partial^2+2F_\partial dU_\partial dV_\partial+G_\partial dV_\partial^2)(L_u dU_u^2+2M_u dU_u dV_u+N_u dV_u^2)+}\cdots\rightarrow$$
(4.113)
$$\rightarrow\cdots\frac{}{+(E_u dU_u^2+2F_u dU_u dV_u+G_u dV_u^2)(L_\partial dU_\partial^2+2M_\partial dU_\partial dV_\partial+G_\partial dV_\partial^2)}.$$

Из уравнений (98), (104) и (113) следует, что индикатрисы конформности $Ind^*_{conf}(Д/И)$ являются плоскими центральносимметричными кривыми, в частных случаях (при совпадении одна с другой главных секущих плоскостей $C_{1.\partial}$, $C_{2.\partial}$ и $C_{1.u}$, $C_{2.u}$ соответственно – т.е., когда угол μ относительной локальной ориентации кратен $\frac{\pi}{2}$) обладающими дополнительно и зеркальной симметрией. Очевидно также, что характеристические кривые (98), (104) и (113) инвариантны относительно вида параметризации поверхности $Д(И)$, а их форма и параметры не зависят от величины углов между параметрическими $U_{\partial(u)}-$ и $V_{\partial(u)}-$ линиями на поверхностях $Д$ и $И$.

4.10. Виды касания поверхностей деталей и инструментов

Для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали необходимо систематизировать виды касания поверхностей деталей и инструментов и разработать классификацию всех их возможных видов, обеспечив при этом выполнение требований, предъявляемых к научным классификациям (Б.И.Костецкий, 1984).

Постулируем положение:

Постулат 4.1. *Если поверхность Д детали и исходная инструментальная поверхность И касаются одна другой, то существует не менее одной их общей точки – точки касания этих поверхностей.*

Очевидно, что если постулированное положение 4.1 не выполняется, касание поверхностей $Д$ и $И$ невозможно в принципе. При взаимном пересечении поверхности $Д$ и $И$ имеют бесчисленное множество общих точек, что однако не противоречит постулату 4.1.

Поверхности $Д$ и $И$ могут касаться одна другой в точке (в нескольких точках, количество которых конечно), вдоль характеристики E (вдоль нескольких характеристик, количество которых также конечно) или в пределах некоторого участка поверхности – других видов касания поверхностей $Д$ и $И$ не существует. Это следствие того, что окружающее нас пространство трехмерно, а находящиеся в нем поверхности являются двухмерными геометрическими образами, погруженными в трехмерное пространство.

В первом приближении можно выделить три различных вида касания поверхностей деталей и инструментов, а именно: точечное, линейное и поверхностное.

Особенности собственно точечного, линейного и поверхностного касания поверхностей деталей и инструментов очевидны. Эти виды касания не требуют определений – они тривиальны.

Важно обратить внимание на следующее.

1. Касание поверхностей $Д$ и $И$, оставаясь точечным, может:

1.1. Ни в одном из плоских нормальных сечений, проходящих через точку K, не иметь равных по величине и противоположных по знаку нормальных радиусов кривизны $R_д$ и $R_и$ – $\left(R_д \neq -R_и\right)$. Соотношение кручений поверхностей $Д$ и $И$ в этом случае значения не имеет. Такой вид касания поверхностей $Д$ и $И$ назовем *собственно точечным*.

Собственно точечное касание характерно для всех случаев касания выпуклых участков поверхностей $Д$ и $И$. Оно может иметь место также в случаях касания выпуклых их локальных участков с вогнутыми или с выпукловогнутыми локальными участками. Если оба локальные участка поверхностей $Д$ и $И$ в дифференциальной окрестности точки K не являются одновременно выпуклыми, то на основании формулы Эйлера (30) аналитический признак $\left(R_д \neq -R_и\right)$ собственно точечного вида касания поверхностей $Д$ и $И$ в развернутом виде записывается так:

$$\frac{R_{1.д}R_{2.д}}{R_{1.д}\sin^2\varphi + R_{2.д}\cos^2\varphi} \neq -\frac{R_{1.и}R_{2.и}}{R_{1.и}\sin^2(\varphi+\mu) + R_{2.и}\cos^2(\varphi+\mu)}. \qquad (4.114)$$

При этом помним, что речь идет именно о *касании* поверхностей $Д$ и $И$, т.е. когда условие (114) выполняется не за счет их интерференции.

При собственно точечном касании поверхностей $Д$ и $И$ условие (114) выполняется при всех значениях аргумента φ.

1.2. В одном (и только в одном) из плоских нормальных сечений, проходящих через точку K, иметь равные по величине и противоположные по знаку нормальные радиусы кривизны $R_д$ и $R_и$ – $\left(R_д = -R_и\right)$. В этом случае локально, в дифференциальной окрестности точки K, поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой вдоль отрезка кривой бесконечно малой длины. Если при этом поверхности $Д$ и $И$ имеют в точке K одинаковые по величине и совпадающие по направлению относительные кручения[1] $\left(\tau_{g.д} = \tau_{g.и}\right)$, такой вид точечного касания поверхностей $Д$ и $И$ является *локально-линейным* видом их касания.

Определение 4.4.[2] *Локально-линейное касание поверхностей Д и И – это вид точечного касания, при котором в одном (и только в одном) проходящем через точку K плоском нормальном сечении поверхности Д*

---

[1]Это название принадлежит Булигану. Раньше часто говорили и теперь говорят "*геодезическое кручение*". Однако эта величина не является геодезическим элементом. Название объясняется тем, что кручение геодезической кривой, касательной в некоторой точке к линии на поверхности, совпадает с ее относительным кручением (Фавар Ж., 1960).

Булиган, Жорж Луи (***Bouligand***, *Geprges Louios*) (13.10.1889 – 1961), французский математик, член Парижской АН. Родился в Лоренье. Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1909). Работал на факультете наук в Пуатье (1921) и в Париже (с 1932 – профессор, с 1938 – почетный профессор). Основные исследования посвящены теории гармонических функций, функциональным уравнениям, уравнениям с частными производными, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии.

[2]Определение 4.3. основано на положении, согласно которому *две величины, а именно нормальная кривизна* k_n *и относительное кручение* τ_r *будут одни и те же для двух касающихся кривых, лежащих на поверхности*: в этом состоят два результата, из которых один принадлежит Менье, а другой – Оссиану Бонне (Фавар Ж., 1960).

и И имеют одинаковые по величине и противоположные по знаку кривизны, а также одинаковые по величине и совпадающие по направлению относительные кручения.

При локально-линейном касании поверхностей $Д$ и $И$ соотношение

$$\frac{R_{1.д}R_{2.д}}{R_{1.д}\sin^2\varphi + R_{2.д}\cos^2\varphi} = -\frac{R_{1.и}R_{2.и}}{R_{1.и}\sin^2(\varphi+\mu)+ R_{2.и}\cos^2(\varphi+\mu)}. \quad (4.115)$$

выполняется при единственном значении параметра φ.

Локально-линейное касание тождественно линейному касанию поверхностей $Д$ и $И$ на уровне вторых производных.

1.3. В двух разных проходящих через точку K плоских нормальных сечениях (без доказательства укажем, что, следовательно, и во всех остальных) иметь равные по величине и противоположные по знаку радиусы кривизны $R_д$ и $R_и$ – $(R_д \equiv -R_и)$. Если при этом поверхности $Д$ и $И$ имеют в точке K одинаковые по величине и совпадающие по направлению относительные кручения $(\tau_{g.д} \equiv \tau_{g.и})$, такой вид точечного касания является *локально-поверхностным (первого рода)* видом касания поверхностей $Д$ и $И$.

Определение 4.5. *Локально-поверхностное (первого рода) касание поверхностей Д и И – это вид точечного касания, при котором во всех проходящих через точку K плоских нормальных сечениях поверхности Д и И имеют одинаковые по величине и противоположные по знаку кривизны.*

При локально-поверхностном (первого рода) виде касания в дифференциальной окрестности точки K поверхности $Д$ и $И$ являются взаимно локально-конгруэнтными. Аналитически это выражается тождеством:

$$\frac{R_{1.д}R_{2.д}}{R_{1.д}\sin^2\varphi + R_{2.д}\cos^2\varphi} \equiv -\frac{R_{1.и}R_{2.и}}{R_{1.и}\sin^2(\varphi+\mu)+ R_{2.и}\cos^2(\varphi+\mu)}.$$

При линейном касании поверхностей $Д$ и $И$ в плоском нормальном сечении, совпадающем со спрямляющей плоскостью к характеристике E и проходящем через некоторую точку K на ней, нормальный радиус кривизны $R_д$ поверхности $Д$ детали и нормальный радиус кривизны $R_и$ поверхности $И$ инструмента всегда одинаковы по величине и противоположны по знаку $(R_д = -R_и)$. Это на единицу уменьшает количество возможных видов линейного касания поверхностей $Д$ и $И$ (по сравнению с точечным их касанием). Поэтому,

2. Касание поверхностей $Д$ и $И$, оставаясь линейным, может:

2.1. В одном (и только в одном) плоском нормальном сечении, проходящем через точку K на характеристике E и совпадающем со спрямляющей плоскостью к ней, иметь равные по величине и противоположные по знаку радиусы кривизны $R_д$ и $R_и$ – $(R_д = -R_и)$. При этом поверхности $Д$ и $И$ в точке K обязательно имеют одинаковые по величине и совпадающие по направлению относительные кручения $(\tau_{g.д} \equiv \tau_{g.и})$. Такой вид линейного касания является *собственно линейным* видом касания поверхностей $Д$ и $И$. Для него характерно выполнения условия (115) только в одном плоском нормальном сечении, соприкасающемся в точке K к характеристике E.

Относительное кручение $\tau_{g.д(и)}$ кривой l на поверхности $Д(И)$ определяет скорость поворота касательной плоскости к $Д(И)$ вокруг касательной к l. Предполагается, что кривая l и поверхность $Д(И)$ регулярны, а скорость поворота касательной плоскости есть функция длины s кривой l. Относительное кручение определяется точкой на кривой l и направлением на поверхности $Д(И)$. Оно равно кручению идущей в этом направлении геодезической кривой:

$$\tau_{g.\partial(u)} = \left[\frac{d\,\mathbf{r}_l}{ds} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \frac{d\,\mathbf{n}_{\partial(u)}}{ds} \right] = \tau_l + \frac{d\phi}{ds} = \left[k_{2.\partial(u)} - k_{1.\partial(u)} \right] \sin\kappa \cos\kappa \,, \tag{4.116}$$

где $\mathbf{r}_l$ – радиус-вектор текущей точки кривой l;

$\mathbf{n}_{\partial(u)}$ – орт нормали к поверхности $Д(И)$;

τ_l – обычное кручение кривой l;

ϕ – угол между соприкасающейся плоскостью кривой l и касательной плоскостью к поверхности $Д(И)$;

$k_{1.\partial(u)}$, $k_{2.\partial(u)}$ – главные кривизны поверхности $Д(И)$;

κ – угол между кривой l и первым главным направлением $\mathbf{T}_{1.\partial(u)}$ на поверхности $Д(И)$.

2.2. В двух разных, не обязательно главных, плоских нормальных сечениях (без доказательства укажем, что, следовательно, и во всех остальных), проходящих через точку K, иметь равные по величине и противоположные по знаку нормальные радиусы кривизны R_∂ и R_u – $(R_\partial = -R_u)$. Такой вид линейного касания назовем *локально-поверхностным (второго рода)* видом касания поверхностей $Д$ и $И$.

Определение 4.6. *Локально-поверхностное (второго рода) касание поверхностей Д и И – это вид линейного касания, при котором во всех проходящих через точку К нормальных сечениях поврехности Д и И имеют одинаковые по величине и противоположные по знаку кривизны.*

При локально-поверхностном (второго рода) виде касания в дифференциальной окрестности точки K поверхности $Д$ и $И$ взаимно локально-конгруэнтны. Поэтому справедливо тождество:

$$\frac{R_{1.\partial} R_{2.\partial}}{R_{1.\partial} \sin^2\varphi + R_{2.\partial} \cos^2\varphi} \equiv -\frac{R_{1.u} R_{2.u}}{R_{1.u} \sin^2(\varphi+\mu) + R_{2.u} \cos^2(\varphi+\mu)}\,. \tag{4.117}$$

При поверхностном касании во всех плоских нормальных сечениях, проходящих через находящуюся в пределах участка касания поверхностей $Д$ и $И$ точку K, нормальные радиусы кривизны R_∂ и R_u равны по величине и противоположны по знаку – $(R_\partial \equiv -R_u)$. Это еще на единицу уменьшает количество возможных видов поверхностного касания поверхностей $Д$ и $И$ (по сравнению с точечным их касанием). Поэтому,

3. Касание поверхностей $Д$ и $И$, оставаясь поверхностным:

3.1. Во всех плоских нормальных сечениях, проходящих через точку K имеет равные по величине и противоположные по знаку нормальные радиусы кривизны R_∂ и R_u – $(R_\partial \equiv -R_u)$. Такой вид касания является *собственно поверхностным* видом касания поверхностей деталей и инструментов.

При собственно поверхностном касании поверхности $Д$ и $И$ взаимно конгруэнтны в пределах всего их общего участка, а тождество (117) выполняется при всех значениях аргумента φ.

При локально-экстремальных (локально-линейном и локально-поверхностном первого и второго родов) видах касания поверхностей $Д$ и $И$ имеются плоские нормальные сечения, в которых выполняется условие $(R_\partial = -R_u)$. Выполнение этого условия предполагает, что порядок касания поверхностей в таких сечениях не ниже второго – он может быть и выше. Более полная информация о геометрии касания может быть получена, если определен порядок касания поверхностей $Д$ и $И$ при локально-экстремальных видах их касания.

Исходим из того, что для каждой из касающихся поверхностей точка K является обыкновенной и поверхности $Д$ и $И$ имеют в ней касание достаточно высокого порядка. Соотношения

$$\left.\frac{\partial^{i+j}\mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial^i \partial V_\partial^j}\right|_K = \left.\frac{\partial^{i+j}\mathbf{r}_u}{\partial U_u^i \partial V_u^j}\right|_K ; \qquad 1 \le (i+j) \le n$$

выражают геометрическое свойство, называемое *касанием порядка* не ниже n поверхностей $Д$ и $И$ в точке K. Если при этом не существуют такие представления, при которых эти равенства имеют место также для $i+j=n+1$, поверхности $Д$ и $И$ имеют в точке K касание порядка n. Определение точного порядка касания поверхностей $Д$ и $И$ производится по известным правилам[3] (Фавар Ж., 1960).

В реальном процессе обработки всегда имеют место погрешности положения инструмента относительно детали. Поэтому вместо наивыгоднейшего локально-экстремального следует обеспечить иной вид касания поверхностей $Д$ и $И$. Это достигается путем соответствующего изменения величин главных радиусов кривизны $R_{1.и}$, $R_{2.и}$ исходной инструментальной поверхности $И$ применяемого инструмента. Если отклонения, вносимые в значения главных радиусов кривизны, небольшие, вместо локально-экстремальных видов касания будем иметь сходные с ними квазилинейный, квазиповерхностный (первого рода) или к квазиповерхностный (второго рода) виды касания поверхностей $Д$ и $И$.

Величины преднамеренно вводимых “небольших” отклонений в значения нормальных радиусов кривизны определяются исходя из следующего. При максимальных (предельно допустимых) погрешностях относительного положения детали и инструмента степень конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали должна быть не более, чем при одном из видов их локально-экстремального касания. Если фактические погрешности относительного положения детали и инструмента не превышают предельно допустимых, приходим к одному из видов квази-касания поверхностей $Д$ и $И$.

Очевидно, что чем большие погрешности относительного положения поверхностей $Д$ и $И$ вносит в процессе обработки технологическая система, тем большие отклонения в значения нормальных радиусов кривизны $R_{1.и}$, $R_{2.и}$ требуется ввести и наоборот. В идеальном случае, когда погрешности относительного положения детали и инструмента отсутствуют, следует назначать такие параметры инструмента, при которых достигается один из локально-экстремальных видов касания поверхностей $Д$ и $И$ (в первую очередь – локально-поверхностное (второго рода) их касание) и тем самым достигается минимальное значение радиуса $r_{conf}^{(\min)}=0$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$. В реальном процессе обработки, когда пренебрегать погрешностями относительного положения детали и инструмента недопустимо, вид касания поверхностей $Д$ и $И$, обеспечивающий $r_{conf}^{(\min)}=0$, неприемлем – вследствие погрешностей относительного положения и движения инструмента это неизбежно приведет к внедрению инструмента в тело детали. Поэтому в первую очередь следует обеспечивать квазиповерхностное (второго рода) касание поверхностей $Д$ и $И$, при котором гарантированно исключена их интерференция, а минимальный радиус r_{conf} индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ близок к нулю, но $r_{conf}^{(\min)}\neq 0$.

Квази-касание поверхностей $Д$ и $И$ имеет место только при учете погрешностей относительного положения детали и инструмента.

Определение 4.7. *Квази-линейное касание поверхностей Д и И – это вид точечного касания, при котором в зависимости от величины погрешности положения инструмента относительно детали, касание изменяется от точечного до локально-линейного.*

Определение 4.8. *Квази-поверхностное (первого рода) касание поверхностей Д и И – это вид точечного касания, при котором в зависимости от величины погрешности положения инструмента относительно детали, касание изменяется от собственно точечного до локально-поверхностного (первого рода).*

Определение 4.9. *Квази-поверхностное (второго рода) касание поверхностей Д и И – это вид линейного касания, при котором в зависимости от величины погрешности положения инструмента относительно детали, касание изменяется от собственно линейного до локально-поверхностного (второго рода).*

---

[3]Имеют место случаи, когда порядок касания поверхностей $Д$ и $И$ равен бесконечности и поверхности, тем не менее, не совпадают одна с другой (это удобно проиллюстрировать на примере кривых $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ и $y=0$, которые в начале координат имеют порядок касания, равный ∞, но взаимно не конгруэнтны, что очевидно).

Различия между разными видами квази-касания поверхностей деталей и инструментов, а также между ними и соответствующими видами локально-экстремального касания поверхностей $Д$ и $И$ можно установить только при предельных значения допускаемых погрешностей относительного положения детали и инструмента. Если же отличные от нуля погрешности по величине меньше предельно допустимых, разные виды квази-касания поверхностей $Д$ и $И$ неотличимы один от другого и не отличимы от соответствующих видов локально-экстремального их касания – за исключением изменения положения точки K : она смещается из теоретически точного в некоторое другое положение.

Существует только девять принципиально различных видов касания поверхностей деталей и инструментов: кроме точечного, линейного и поверхностного возможны также три вида локально-экстремального их касания (локально-линейное и локально-поверхностное первого и второго родов), а также три вида квази-касания: квазилинейное и квазиповерхностное (первого и второго родов).

Если принять во внимание, что существует всего лишь по десять различных видов гладких регулярных локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ (см. гл. 1, табл. 1.1), каждый из девяти видов касания поверхностей деталей и инструментов может быть детализирован. Для этого составляется квадратная морфологическая матрица формата $10\times10=100$, охватывающая все возможные комбинации касающихся локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ (одной осью такой морфологической матрицы являются 10 видов гладких регулярных локальных участков обрабатываемой поверхности $Д$ детали, а другой – 10 подобных локальных участков формообразующей поверхности $И$ инструмента). Морфологическая матрица содержит $\frac{100-10}{2}+10=55$ не повторяющих одна другую комбинаций локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ – только эти 55 пар локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ подлежат изучению и анализу. Дальнейшее усечение множества вариантов касания локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ производится на основе анализа соотношений алгебраических значений главных кривизн поверхностей в точке K с учетом (где это существенно) относительной локальной ориентации детали и инструмента. Установлено, что существует

- 29 вариантов собственно точечного касания;
- 23 варианта линейного касания;
- 8 вариантов поверхностного касания;
- 20 вариантов локально-линейного касания;
- 7 вариантов локально-поверхностного (первого рода) касания;
- 8 вариантов локально-поверхностного (второго рода) касания;
- 20 вариантов квазилинейного касания;
- 7 вариантов квазиповерхностного (первого рода) касания;
- 8 вариантов квазиповерхностного (второго рода) касания

– всего 29+23+8+20+7+8+20+7+8+=130 вариантов касания гладких регулярных локальных участков поверхностей деталей инструментов. Для некоторых вариантов нет ограничений на величину угла μ относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$; для некоторых вариантов существует диапазон допустимых значений величины угла ориентации μ : $[\mu_{\min}]\le\mu\le[\mu_{\max}]$, а для некоторых возможно единственное допустимое его значение $\mu=[\mu]$.

Исходя из этого разработана обобщенная классификация видов касания поверхностей деталей и инструментов (рис. 4.23).

Классификация (см. рис. 4.23) обладает потенциальной полнотой: ее можно развить и углубить. Она может быть использована для качественной оценки степени эффективности процессов формообразования поверхностей деталей. Переход от собственно точечного вида касания поверхностей $Д$ и $И$ к локально-линейному и далее к линейному, локально-поверхностному первого рода, локально-поверхностному второго рода и к собственно поверхностному изменяет характер формообразования поверхности $Д$ детали во времени (здесь и далее речь идет о локально-экстремальных видах касания поверхностей $Д$ и $И$ если рассматривается идеальный процесс формообразования поверхности $Д$; если рассматривается формообразование с учетом погрешностей относительного положения и движения инструмента относительно детали, то вид локально-экстремального касания следует заменить на соответствующий ему вид квази-касания поверхностей $Д$ и $И$).

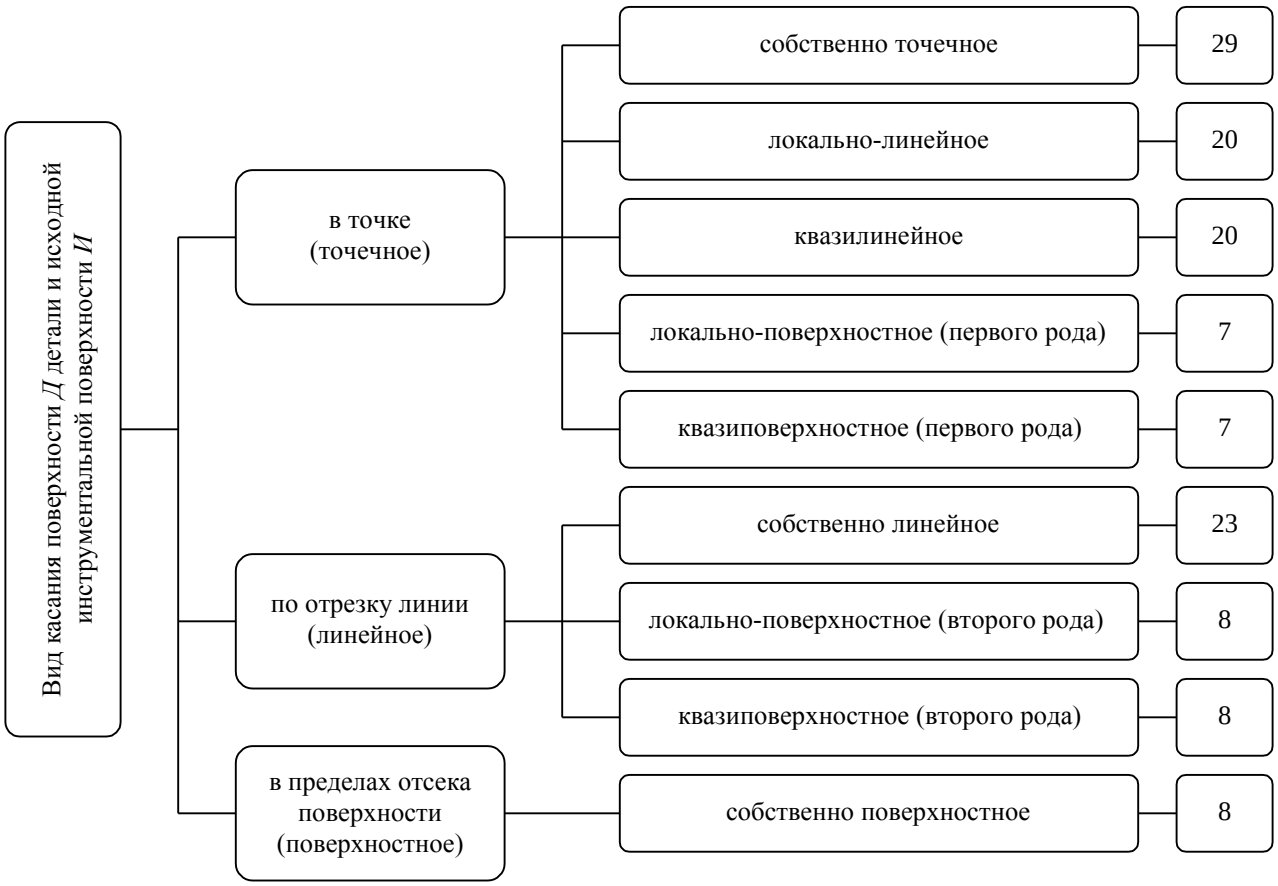


Рис. 4.23. Обобщенная классификация видов касания поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$.

Для достижения наивысшей, предельно достижимой, производительности формообразования наиболее эффективным, при прочих одинаковых условиях, будут способы обработки, обеспечивающие собственно поверхностное касание поверхностей $Д$ и $И$: в этом случае обеспечивается одновременное формирование как всех образующих, так и всех направляющих поверхности $Д$ детали (при любом виде ее параметризации), т.е. вся поверхность $Д$ формообразуется мгновенно. Однако в соответствие со способами обработки, обеспечивающим собственно поверхностное касание поверхностей $Д$ и $И$, нельзя обработать крупногабаритные детали. Наименее эффективными (с точки зрения воспроизводимого вида касания поверхностей $Д$ и $И$) являются способы обработки, обеспечивающие собственно точечное касание поверхностей $Д$ и $И$ – в этом случае формирование как каждой образующей, так и каждой направляющей поверхности детали происходит во времени.

В зависимости от воспроизводимого вида касания поверхностей $Д$ и $И$ способы формообразующей обработки в порядке потенциальных возможностей увеличения производительности формообразования можно проранжировать, как обеспечивающие:

- собственно точечное;
- локально-линейное или квазилинейное;
- локально-поверхностное (первого рода) или квазиповерхностное (первого рода);
- собственно линейное;
- локально-поверхностное (второго рода) или квазиповерхностное (второго рода);
- собственно поверхностное касание поверхностей $Д$ и $И$.

Производительность формообразования является не единственным критерием эффективности процесса обработки деталей. Другим ее важным показателем является универсальность способа обработки, степень которой определяется номенклатурой сложных поверхностей $Д$, которые можно обработать в соответствие с заданным способом *данным* инструментом. С этой точки зрения наиболее эффективными, при прочих одинаковых условиях, являются способы обработки, обеспечивающие собственно точечное касание поверхностей $Д$ и $И$, а наименее эффективными – способы, обеспечивающие собственно поверхностное их касание. Способы обработки, обеспечивающие другие виды касания, с точки зрения увеличения степени универсальности обработки, ранжируются в порядке, обратном приведенному выше.

Собственно точечное касание поверхностей $Д$ и $И$ не только обеспечивает наибольшую степень гибкости кинематики формообразования и универсальность способов обработки, но и одновременно является наиболее общим – при таком виде касания деталь и инструмент в процессе обработки при минимальных ограничениях могут совершать в общем случае пятипараметрическое движение одна относительно другой, оставаясь при этом в постоянном касании между собой.

При собственно поверхностном касании относительное движение детали и инструмента в процессе формообразования в общем случае невозможно. Исключение составляют лишь способы обработки, при которых поверхности $Д$ и $И$ допускают движение *“самих по себе”*, т.е. когда поверхности $Д$ и $И$ и огибающие их последовательных положений в процессе обработки взаимно конгруэнтны. В таких частных случаях эти поверхности могут совершать в общем случае однопараметрическое, но не более, чем трехпараметрическое относительное движение (см. гл. 2, раздел 2.4).

Г л а в а 5. **Профилирование фасонных режущих инструментов**

Формообразующая обработка поверхностей деталей производится инструментом – лезвийным, абразивным, инструментом для поверхностного пластического деформирования, комбинированным и пр.

Обычно расходы на инструмент составляют около 2% суммарных затрат на производство любого вида продукции. Несмотря на это выбор инструмента и назначение режимов обработки в значительной степени влияют на производственные затраты и только себестоимость обработки за счет этого может быть снижена на 10% и более.

Чтобы режущие кромки инструмента формировали номинальную поверхность $Д$, заданную чертежом детали, они должны располагаться на исходной инструментальной поверхности $И$.

Определение 5.1. *Исходная инструментальная поверхность – это сопряженная с обрабатываемой поверхностью детали поверхность $И$, которая воспроизводится движущимися профилирующими режущими кромками инструмента (или их профилирующими участками) и в процессе обработки непрерывно или периодически касается номинальной поверхности $Д$.*

Приведенному определению понятия "*исходная инструментальная поверхность"* удовлетворяет бесчисленное множество различных поверхностей. Это предопределяет многовариантность решения задачи определения поверхности $И$ инструмента, предназначенного для обработки заданной поверхности детали, и делает актуальной проблему синтеза наивыгоднейшей поверхности $И$, а именно: однозначного установления формы и параметров исходной инструментальной поверхности $И$ в функции формы и параметров поверхности $Д$ с целью последующего проектирования на ее основе наивыгоднейшего инструмента для обработки заданной поверхности детали[1].

В процессе формообразования поверхности $Д$ и $И$ являются взаимоогибаемыми. Здесь и далее под взаимоогибанием понимается возможность обеспечения касания в каждой точке каждой из двух поверхностей (или их участков) при использовании имеющейся свободы относительного движения, без нарушения условий касания и без искажения поверхностей, т.е. без взаимной интерференции в пределах их рабочих участков.

В процессе обработки деталь и инструмент можно рассматривать как своеобразный механизм[2], состоящий из двух касающихся один другого звеньев $Д$ и $И$. Существенное отличие заключается в том, что в механизме определены рабочие поверхности обеих элементов кинематической пары и задан закон движения ведущего звена – выходным параметром является закон движения ведомого звена. В процессе формообразующей обработки определены законы движения как заготовки, так и инструмента, известна также форма исходной инструментальной поверхности $И$ – выходным параметром является форма обработанной

---

[1]Решение задачи проектирования фасонного режущего инструмента, как правило, начинается с образования его исходной инструментальной поверхности. Вместе с тем встречаются случаи, когда разрабатывается технологический процесс изготовления детали при отсутствии исчерпывающе полной информации о форме и параметрах ее поверхности $Д$. Это относится, в частности, к операциям затылования червячных фрез различного назначения, нарезания конических колес с круговыми зубьями, изготовлении колес цилиндро-конических передач и других колес передач неэвольвентного зацепления (первого и второго рода) и пр. В этих и т.п. случаях видом и параметрами исходной инструментальной поверхности *задаются*, после чего может быть найдена фактическая поверхность детали.

Обрабатываемая поверхность детали первична – именно исходя из ее формы и параметров геометрии можно разработать наивыгоднейший технологический процесс изготовления детали, которая наилучшим образом соответствует своему функциональному назначению. В противном случае решение задачи формообразования поверхности детали всегда будет приближенным – в большей или в меньшей мере близким к наивыгоднейшему ее решению.

[2]Если проводить аналогию между сопряжением поверхностей в процессе формообразования и зацеплением поверхностей, например, в зубчатых передачах, то важно обратить внимание на то, что при формообразовании поверхность зацепления всегда конгруэнтна поверхности $Д$ детали.

поверхности $Д$ детали (это обратная задача теории формообразования поверхностей деталей; при решении прямой задачи искомой является исходная инструментальная поверхность проектируемого инструмента).

5.1. Обобщенный метод образования исходных инструментальных поверхностей

Объектом формообразования являются поверхности, ограничивающие деталь. Разрабатывая обобщенный метод образования исходных инструментальных поверхностей, исходим из того, что доступна вся необходимая геометрическая информация о поверхности $Д$. При этом не следует опасаться трудностей, вызванных необходимостью выполнения в большом объеме вычислений и нельзя отказываться от применения того или иного инструмента только потому, что его трудно рассчитать (Шишков В.А., 1951, с. 82).

Чтобы найти исходную инструментальную поверхность $И$ и решить задачу профилирования, а затем – задачу проектирования режущего инструмента, в первую очередь необходимо иметь исчерпывающе полную, точную и однозначную геометрическую информацию о форме и параметрах обрабатываемой поверхности $Д$ детали. Необходимая геометрическая информация должна допускать представление поверхности $Д$ в натуральной форме (см. гл. 1).

В процессе формообразующей обработки инструмент совершает относительно детали одно-, двух- или многопараметрическое движение. В общем случае относительное движение инструмента сводится не более, чем к пятипараметрическому (см. гл. 2). Чем более сложное относительное движение совершает инструмент, тем большими потенциальными возможностями обладает способ обработки детали и тем более общий требуется соответствующий ему способ образования исходной инструментальной поверхности. С этой точки зрения способ образования поверхностей $И$ фасонных режущих инструментов, предназначенных для обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ, является наиболее общим (обобщенным).

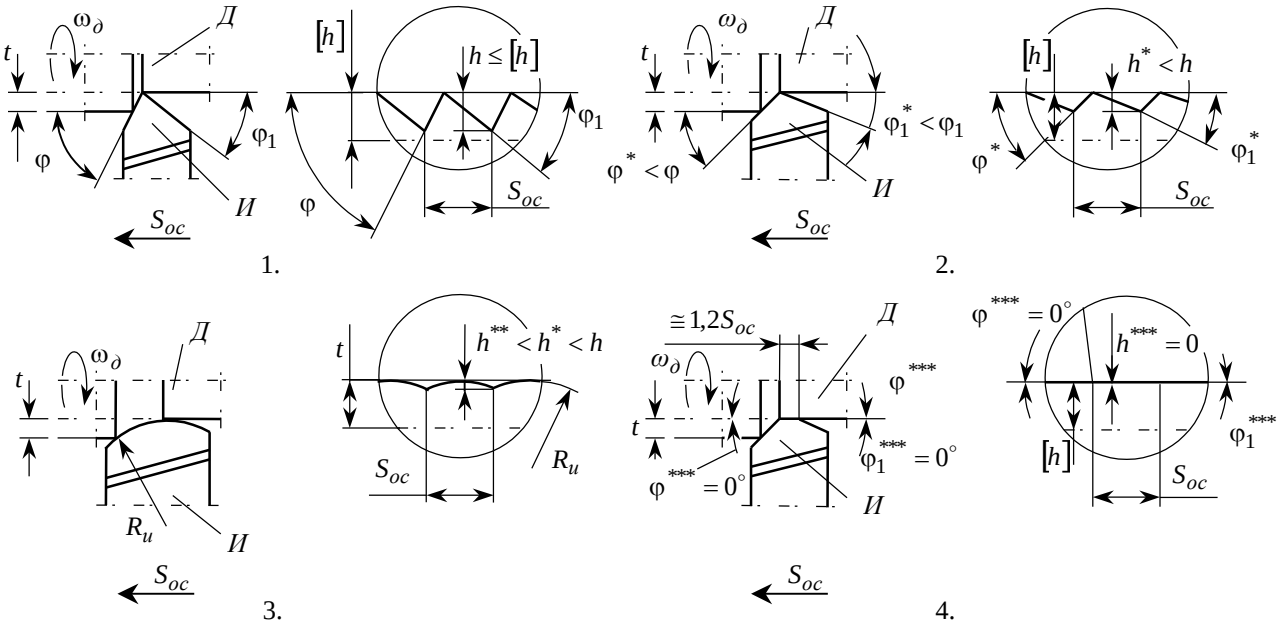


Рис. 5.1. Разная степень конформности режущей кромки токарного резца к образующей круглого валика.

При многокоординатной обработке сложных поверхностей деталей воспроизводится обладающая большими потенциальными возможностями *гибкая* кинематика формообразования. Полное использование потенциальных возможностей гибкой кинематики формообразования может быть достигнуто только в случае применения соответствующим образом спрофилированных режущих инструментов. Для этого исходная

инструментальная поверхность должна быть образована исходя из того, чтобы в каждой точке K касания поверхностей $Д$ и $И$ достигалась требуемая (экстремальная или близкая к ней) степень конформности поверхности $И$ инструмента к обрабатываемой поверхности $Д$ детали (см. гл. 4). Целесообразность этого требования иллюстрируется следующими примерами (рис. 5.1).

Обработка поверхности $Д$ круглого валика (рис. 5.1.1) может производиться резцом с главным φ и вспомогательным φ_1 углами в плане. Заготовка в процессе обработки вращается вокруг своей оси с угловой скорость $\omega_д$, а резец $И$ перемещается вдоль образующей детали с подачей S_{oc}. При этом с заготовки удаляется припуск толщиной t. После обработки на поверхности детали образуется остаточный детерминированный регулярный микрорельеф – остаточные "гребешки", высота h которых не должна превышать предельно допускаемого значения $[h]$, т.е. должно выполнятся условие $h \le [h]$.

Для обработки круглого валика может быть использован резец с главным φ^* и вспомогательным φ_1^* углами в плане (рис. 5.1.2). Если $\varphi^* < \varphi$ и $\varphi_1^* < \varphi_1$, то при прочих одинаковых условиях высота h^* остаточных гребешков уменьшится ($h^* < h$).

Обработка поверхности круглого валика может производиться резцом с криволинейной режущей кромкой (рис. 5.1.3). При достаточно большом радиусе кривизны $R_и$ режущей кромки высота h^{**} остаточного микрорельефа еще меньше ($h^{**} < h^* < h$).

Наконец, для обработки круглого валика может быть использован резец с дополнительной режущей кромкой (рис. 5.1.4). Дополнительная ражущая кромка расположена параллельно образующей круглого валика. Поэтому ее главный φ^{***} и вспомогательный φ_1^{***} углы в плане равны нулю ($\varphi^{***} = 0^\circ$ и $\varphi_1^{***} = 0^\circ$). Длина дополнительной режущей кромки превышает величину перемещения резца за один оборот детали и равна, например, $(1{,}1 \div 1{,}2)\, S_{oc}$. В этом случае остаточный детерминированный регулярный микрорельеф на поверхности детали не образуется, а шероховатость обработанной поверхности полностью определяется стохастической ее составляющей.

В рассмотренном примере полнота прилегания режущей кромки резца к образующей поверхности детали возрастает от первого случая к последнему (в котором она достигает предельного значения). Очевидно, что по мере увеличения полноты прилегания (т.е. по мере увеличения степени конформности) режущей кромки резца к образующей круглого валика высота остаточного детерминированного регулярного микрорельефа уменьшается.

Аналогичное справедливо для многокоординатной обработки сложных поверхностей деталей, что удобно проследить на примерах проведенных через контактную нормаль плоских сечений поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$ (рис. 5.2).

Выпуклый профиль детали (рис. 5.2.1), имеющий радиус кривизны $R_д$, формообразуется выпуклым профилем инструмента – $R_и^* > 0$. Профили $Д$ и $И$ касаются один другого в точке K. При ширине строки формообразования $S_и$ высота остоточного детерминированного регулярного микрорельефа равна некоторой величине $h_д^*$.

Тот же профиль детали может быть формообразован другим выпуклым профилем исходной инструментальной поверхности, имеющим радиус кривизны $R_и^{**} > R_и^* > 0$ (рис. 5.2.2). При неизменных значениях остальных параметров процесса обработки высота остаточных гребешков в этом случае уменьшается до $h_д^{**} < h_д^*$.

Если радиус кривизны нормального сечения поверхности $И$ инструмента стремится к бесконечности ($R_и^{***} \to \infty$), это приводит к еще более существенному уменьшению высоты остаточных гребешков – до значения $h_д^{***} < h_д^{**} < h_д^*$ (рис. 5.2.3).

Формообразования того же исходного профиля детали вогнутым участном исходной инструментальной поверхности $И$ (рис. 5.2.4), у которого $R_и^{****} < 0$, приведет к дальнейшему уменьшению высоты остаточного детерминированного регулярного микрорельефа на $Д$, равного в этом случае $h_д^{****} < h_д^{***} < h_д^{**} < h_д^*$.

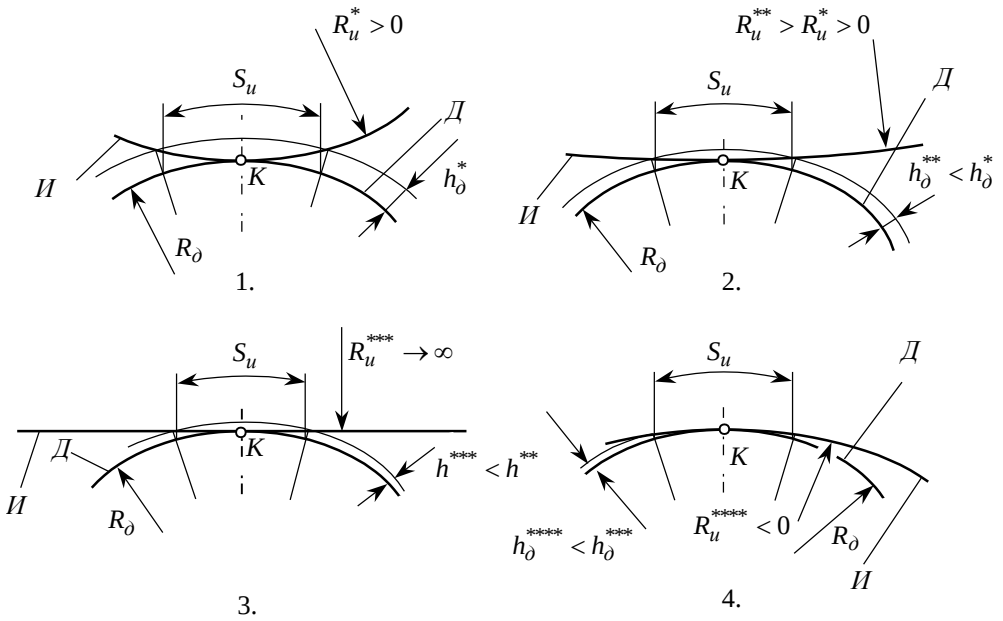


Рис. 5.2. Различная степень конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали в общем плоском нормальном сечении.

Как в первом (см. рис. 5.1), так и во втором случае (см. рис. 5.2) последовательное увеличение степени конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали при прочих одинаковых условиях приводит к соответствующему умешьшению высоты остаточного детерминированного регулярного микрорельефа на обработанной поверхности детали.

Следовательно, для повышения эффективности обработки следует увеличивать степень конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали. Поэтому целесообразно разработать такой метод образования исходной инструментальной поверхности, в соответствие с которым поверхность $И$ инструмента образуется как отображение поверхности $Д$ детали, когда каждой точке на поверхности $Д$ ставится в соответствие точка на поверхности $И$, в которой главные радиусы кривизны $R_{1.u}$ и $R_{2.u}$ функционально связаны с соответствующими главными радиусами кривизны $R_{1.\partial}$ и $R_{2.\partial}$ поверхности $Д$. Такой вид отображения поверхностей назван $\mathbb{R}$-отображением (Радзевич С.П., 1987). Впоследствие идея образования исходной инструментальной поверхности $И$ как $\mathbb{R}$-отображения поверхности $Д$ детали получила дальнейшее развитие (Радзевич С.П., 1987, 1989, 1991, 2000 и др.).

Поверхность $И$ инструмента предельно конформна поверхности $Д$ детали, когда в каждой точке K во всех проходящих через нее плоских нормальных сечениях касающиеся поверхности имеют одинаковые по модулю и противоположные по знаку нормальные радиусы кривизны, т.е. когда выполняется условие:

$$R_u = -R_\partial \tag{5.1}$$

или эквивалентное ему условие: $k_u = -k_\partial$, записанное через собственно кривизны поверхностей $Д$ и $И$.

При выполнении условия (1) имеет место поверхностное или локально-поверхностное (первого или второго рода) касание поверхностей $Д$ и $И$.

В рассматриваемой постановке задача профилирования фасонного режущего инструмента сводится к разработке метода нахождения для заданного отсека поверхности $Д$ детали такого отсека поверхности $И$ инструмента, в пределах которого гарантированно обеспечивается выполнение условия (1) или, в обобщенном виде, условия $R_u = R_u(R_\partial)$.

Радиус кривизны $R_д$ текущего плоского нормального сечения поверхности детали рассчитывается по формуле Эйлера (4.30)

$$\frac{1}{R_д} = \frac{\cos^2\varphi}{R_{1.д}} + \frac{\sin^2\varphi}{R_{2.д}}, \tag{5.2}$$

где главные радиусы кривизны $R_{1.д}$ и $R_{2.д}$ поверхности $Д$ находятся по формуле (4.101).

Аналогично радиус кривизны R_u текущего плоского нормального сечения исходной инструментальной поверхности *И* инструмента равен:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{\cos^2(\varphi+\mu)}{R_{1.u}} + \frac{\sin^2(\varphi+\mu)}{R_{2.u}},$$

где главные радиусы кривизны $R_{1.u}$ и $R_{2.u}$ поверхности $И$ находятся аналогично (2).

Из (2) следует, что текущее значение нормального радиуса кривизны $R_д$ однозначно определяется величинами главных радиусов кривизны $R_{1.д}$ и $R_{2.д}$ поверхности $Д$ и текущим значением центрального угла φ. При заданной или известной ориентации инструмента относительно детали текущее значение нормального радиуса кривизны R_u поверхности $И$ также однозначно определяется величинами главных радиусов кривизны $R_{1.u}$ и $R_{2.u}$ поверхности $И$ и текущим значением центрального угла φ.

Для выполнения условия $R_u = R_u(R_д)$ необходимо таким образом отобразить заданный участок поверхности $Д$ на искомый участок поверхности $И$, чтобы выполнялись соотношения:

$$L_u N_u - M_u^2 = \mathcal{F}_1\left(L_д N_д - M_д^2\right); \tag{5.3}$$

$$E_u N_u - 2F_u M_u + G_u L_u = \mathcal{F}_2\left(E_д N_д - 2F_д M_д + G_д L_д\right); \tag{5.4}$$

$$E_u G_u - F_u^2 = \mathcal{F}_3\left(E_д G_д - F_д^2\right), \tag{5.5}$$

где $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ – известные (наперед заданные, устанавливаемые на основании экспериментальных данных) функции, определяемые геометрической структурой поверхности $Д$.

Функции $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ могут быть различными, в том числе линейными с коэффициентом пропорциональности, например, равным единице. В частном случае, когда

$$\mathcal{F}_1\left(L_д N_д - M_д^2\right) = L_д N_д - M_д^2;$$

$$\mathcal{F}_2\left(E_д N_д - 2F_д M_д + G_д L_д\right) = E_д N_д - 2F_д M_д + G_д L_д; \tag{5.6}$$

$$\mathcal{F}_3\left(E_д G_д - F_д^2\right) = E_д G_д - F_д^2$$

выполнение условия (1) обеспечивается гарантированно.

При выполнении условия $R_u = R_u(R_д)$ индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ поверхностей $Д$ и $И$ приобретает форму эллипсообразной кривой, а ее диаметры минимально допустимы. Текущее значение диаметра d_{conf} этой характеристической кривой определяется видом и параметрами функций $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ и необходимостью выполнения условий формообразования поверностей деталей в т.ч. с учетом погрешностей

относительного положения детали и инструмента в процессе обработки. Если $R_u = -R_\partial$, индикатриса конформности стягивается в точку.

В зависимости от характера и параметров функций $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, может иметь место случай, когда в соответствие с (6) средняя кривизна $\tilde{M}_u$ исходной инструментальной поверхности $И$ окажется функционально связанной с ее гауссовой кривизной $\tilde{G}_u$. В этом случае поверхность $И$ инструмента принадлежит к классу поверхностей Вейнгартена[1]. Чтобы некоторая поверхность принадлежала к классу поверхностей Вейнгартена, необходимо и достаточно, чтобы обе полости ее эволюты были разложимы на поверхности вращения, а ребра возврата нормалей линий кривизны поверхности $И$ налагались на меридианы. Например, винтовая поверхность изгибается в поверхность вращения так, что винтовые линии, образующие поверхность, накладываются на параллели – это следует из теоремы Бура. К поверхностям Вейнгартена относятся поверхности вращения, поверхности постоянной гауссовой $\tilde{G}_u = Const$ или постоянной средней $\tilde{M}_u = Const$ кривизны и др.

Важно обратить внимание на то, что геометрия касания поверхностей $Д$ и $И$ может служить "мостиком" между собственно процессом формообразования поверхностей и реальным процессом обработким деталей. Она позволяет учитывать физические явления, происходящие при обработке детали, в том числе в условиях несвободного резания, с учетом различной интенсивности изнашивания разных участков режущих кромок инструмента и др. Поэтому функции $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ следует устанавливать по результатам экспериментальных исследований. Для проведения таких исследований разработан способ моделирования обработки сложных поверхностей деталей.

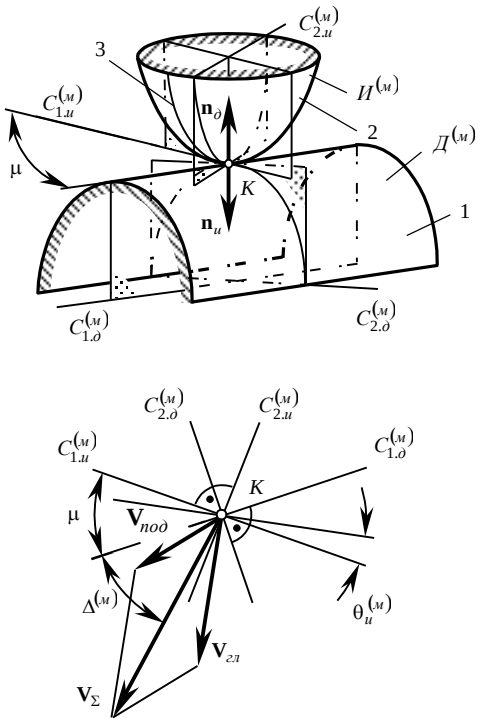


Рис. 5.3. Способ моделирования обработки сложных поверхностей деталей.

В соответствие со способом[2] моделирование обработки сложных поверхностей деталей осуществляют моделями детали 1 и инструмента 2, каждая из которых имеет рабочую поверхность $Д^{(м)}$ и $И^{(м)}$ соответственно (рис. 5.3). Поверхности $Д^{(м)}$ и $И^{(м)}$ представляют собой квадрики, соприкасающиеся в точке K с номинальными поверхностям $Д$ и $И$. Из условия соприкосновения поверхности $Д^{(м)}$ моделирующей квадрики и обрабатываемой поверхности $Д$ детали следует, что в точке K главные направления $\mathbf{T}^{(м)}_{1.\partial}$ и $\mathbf{T}^{(м)}_{2.\partial}$ моделирующей квадрики $Д^{(м)}$ совпадают с соответствующими главными направлениями $\mathbf{T}_{1.\partial}$ и $\mathbf{T}_{2.\partial}$ поверхности $Д$. Кроме того, главные радиусы кривизны $R^{(м)}_{1.\partial}$ и $R^{(м)}_{2.\partial}$ моделирующей квадрики $Д_м$ в точке K равны соответствующим главным радиусам кривизны $R_{1.\partial}$ и $R_{2.\partial}$ поверхности $Д$, т.е. $R^{(м)}_{1.\partial} \equiv R_{1.\partial}$ и $R^{(м)}_{2.\partial} \equiv R_{2.\partial}$.

Равенство главных радиусов кривизны поверхностей $Д^{(м)}$ и $Д$ дает основание утверждать, что, на основании формулы Эйлера, в текущем плоском нормальном сечении, проходящем через точку K, радиусы кривизны этих поверхностей равны один другому. Из этого следует, что в дифференциальной окрестности точки K соприкасающаяся квадрика $Д^{(м)}$ с точностью не ниже, чем до членов второго порядка малости, локально конгруэнтна моделируемой поверхности $Д$ детали.

Аналогичное справедливо в отношение квадрики $И^{(м)}$, локально моделирующей исходную инструментальную поверхность $И$ – в дифференциальной окрестности точки K соприкасающаяся квадрика $И^{(м)}$ локально конгруэнтна исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента с точностью не ниже, чем до членов второго порядка малости.

На модели инструмента сохранена такая же локальная ориентация рабочих элементов (режущих кромок, упрочняющих ленточек и пр.) отно-

[1]Понятие *"поверхность Вейнгартена"* введено Вейнгартеном в связи с задачей отыскания всех поверхностей, изометрических с данной поверхностью вращения. Эта задача сводится к задаче отыскания всех поверхностей Вейнгартена того же класса.

[2]А.с. №1449246 (СССР). *Способ моделирования обработки пространственных поверхностей деталей*./С.П.Радзевич. Опубл. 07.01.89, в Б.И. №1, 1989.

сительно главных направлений $\mathbf{T}_{1.u}^{(м)}$ и $\mathbf{T}_{2.u}^{(м)}$, что и у моделируемого инструмента. Чтобы обеспечить это, сначала определяется ориентация главных секущих плоскостей $C_{1.u}$ и $C_{2.u}$ поверхности $И$ инструмента относительно координатных U_u – и V_u – линий на ней. Ориентация плоского нормального сечения поверхности однозначно определяется отношением $\frac{\partial V_u}{\partial U_u}$, значения которых для главных направлений $\mathbf{T}_{1.u}$ и $\mathbf{T}_{2.u}$ находятся как корни квадратного уравнения:

$$(G_u M_u - F_u N_u)\left(\frac{\partial V_u}{\partial U_u}\right)^2 + (G_u L_u - E_u N_u)\frac{\partial V_u}{\partial U_u} + (F_u L_u - E_u M_u) = 0\,,$$

откуда следует, что:

$$\left(\frac{\partial V_u}{\partial U_u}\right)_{1,2} = \frac{-(G_u L_u - E_u N_u) \pm \sqrt{(G_u L_u - E_u N_u)^2 - 4(G_u M_u - F_u N_u)(F_u L_u - E_u M_u)}}{2(G_u M_u - F_u N_u)}\,.$$

В случае ортогональной $(U_u; V_u)$– параметризации поверхности $И$ отношение $\frac{\partial V_u}{\partial U_u}$ определяет величину тангенса угла ξ_u наклона главных секущих плоскостей $C_{1.u}$ и $C_{2.u}$ к координатным линиям. Обычно поверхность $И$ инструмента параметризована не ортогонально. В этом случае величина угла ξ_u (на рис. 5.3 не показан) рассчитывается по формуле (4.21):

$$\sin\xi_u = \frac{\partial V_u}{\partial U_u}\left(\left(\frac{\partial V_u}{\partial U_u}\right)^2 - 2\frac{\partial V_u}{\partial U_u}\cos\omega_u + 1\right)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

В точке K режущая кромка 2 составляет с координатной U_u – линией угол ζ_u, равный

$$\cos\varsigma_u = \frac{E_u dU_u \delta V_u + F_u(dU_u \delta V_u + dV_u \delta U_u) + G_u \delta U_u dV_u}{\sqrt{E_u dU_u^2 + 2F_u dU_u dV_u + G_u dV_u^2}\sqrt{E_u \delta U_u^2 + 2F_u \delta U_u \delta V_u + G_u V_u^2}}\,, \tag{5.7}$$

где буквой "δ " обозначено дифференцирование вектора $\mathbf{T}_u^{(U)}$ (на рис. 5.3 не показан), касательного к координатной U_u – линии. Вдоль координатной U_u – линии параметр $\delta V_u = Const$, поэтому $\delta V_u = 0$. С учетом этого (7) упрощается и приводится к виду:

$$\cos\varsigma_u = \frac{E_u dU_u + G_u dV_u}{\sqrt{E_u dU_u^2 + 2F_u dU_u dV_u + G_u dV_u^2}\sqrt{E_u}}\,.$$

Алгебраическая сумма углов ξ_u и ς_u определяет искомую величину угла $\theta_u = \xi_u + \varsigma_u$, который режущая кромка составляет с первым главным сечением $C_{1.u}$ поверхности $И$ инструмента. Следовательно, расположение режущей кромки 3 под углом $\theta_u^{(м)} = \theta_u = \xi_u + \varsigma_u$ к первому главному сечению $C_{1.u}^{(м)}$ моделирующей квадрики в дифференциальной окрестности точки K обеспечивает локальную идентичность расположения режущей кромки на моделирующей квадрике $И^{(м)}$ расположению соответствующей режущей кромки на моделируемой поверхности $И$ инструмента с точностью не ниже, чем до членов второго порядка малости.

Моделирующие квадрики $Д^{(м)}$ и $И^{(м)}$ располагают одна относительно другой под углом относительной локальной ориентации $\mu^{(м)}$, равным углу относительной локальной ориентации μ поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$ в моделируемом процессе обработки ($\mu^{(м)} \equiv \mu$). Для определения величины угла $\mu^{(м)}$ достаточно рассчитать значение угла μ между двумя векторами: вектором $\mathbf{T}_{1.д}$ первого главного направления на поверхности $Д$ и вектором $\mathbf{T}_{1.u}$ первого главного направления на исходной инструментальной поверхности $И$ (см. раздел 4.2). Относительная локальная ориентация моделирующих квадрик $Д^{(м)}$ и $И^{(м)}$ в дифференциальной окрестности точки K с точностью не менее, чем до членов второго порядка малости, идентична относительной локальной ориентации детали и инструмента в моделируемом процессе обработки.

Траектории движений точек режущих кромок инструмента относительно заготовки – это результат сочетания относительных движений детали и инструмента, совершаемых ими на станке в процессе обработки.

Моделирующим квадрикам $Д^{(м)}$ и $И^{(м)}$ придают относительное движение с результирующей скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$, являющейся векторной суммой скорости главного движения $\mathbf{V}_{гл}$ и всех остальных элементарных ее составляющих $\mathbf{V}_i$, а именно: $\mathbf{V}_\Sigma = \mathbf{V}_{гл} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{V}_i$ (где " n "– общее количество других элементарных составляющих результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$). В процессе моделирования движение модели инструмента относительно модели детали с результирующей скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$ по характеру и направлению соответствует мгновенному движению инструмента относительно детали. Это достигается тем, что при моделировании величина угла $\Delta^{(м)}$ между вектором результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ и первым главным сечением $C_{1.и}^{(м)}$ квадрики $И^{(м)}$ назначается в точности равной величине угла Δ между вектором результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ и первым главным сечением $C_{1.д}$ обрабатываемой детали ($\Delta^{(м)} \equiv \Delta$), а модуль $|\mathbf{V}_\Sigma|$ вектора скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ при моделировании и в моделируемом процессе обработки одинаков. Поэтому относительное движение квадрик $Д^{(м)}$ и $И^{(м)}$ идентично мгновенному относительному движению детали и инструмента.

Очевидно, что в соответствие со способом моделирования обработки сложных поверхностей деталей (см. рис. 5.3) в дифференциальной окрестности точки K гарантированно достигается локальная:

– конгруентность поверхности моделирующей квадрики $Д^{(м)}$ поверхности $Д$ обрабатываемой детали;

– конгруентность поверхности моделирующей квадрики $И^{(м)}$ формообразующей исходной инструментальной поверхности $И$ применяемого инструмента;

– идентичность расположения рабочего элемента (режущей кромки) на модели инструмента расположению соответствующего рабочего элемента на моделируемой поверхности $И$ инструмента;

– идентичность относительной локальной ориентации моделей относительной локальной ориентации детали и инструмента;

– идентичность мгновенной кинематики при моделировании и при обработке детали.

Этим достигается высокая точность моделирования и получение экспериментальных данных, адекватно отражающих влияние технологических параметров на характер протекания моделируемого процесса обработки.

Моделирование обработки деталей в ряде случаев может быть произведено при помощи квадрик $Д^{(м)}$ и $И^{(м)}$, одна из которых или одновременно обе допускают движение *"самих по себе"* (см. выше, гл. 2, раздел 2.4). Такие квадрики в общем случае представляют собой фрагменты винтовых поверхностей постоянного шага. Если винтовой поверхности придать винтовое движение с параметром винта, равным по величине и одинаковым по направлению винтовому параметру самой винтовой поверхности, огибающая последовательных положений движущейся винтовой поверхности будет конгруэнтна исходной винтовой поверхности. Частным случаем квадрик, допускающих движение "*самих по себе*", являются квадрики вращения (их можно рассматривать как винтовые поверхности, винтовой параметр которых равен нулю) и цилиндрические (призматические) квадрики (их можно рассматривать как винтовые поверхности, винтовой параметр которых равен бесконечности). Более частными случаями квадрик $Д(И)$, допускающих движение "*самих по себе*", являются круглый цилиндр, сфера, плоскость.

Выполнение моделирующих квадрик в виде поверхностей $Д^{(м)}$ и $И^{(м)}$, допускающих движение *"самих по себе"*, упрощает технологию изготовления моделей детали и инструмента и позволяет вместо мгновенных относительных движений моделирующих квадрик $Д^{(м)}$ и $И^{(м)}$ воспроизводить непрерывные их относительные движения – это повышает эффективность моделирования.

Дополнительная информация о функциях $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ может быть получена путем анализа большого количества опубликованных результатов экспериментальных исследований в области обработки материалов резанием.

Применение способа моделирования обработки сложных поверхностей деталей (см. рис. 5.3) позволяет упростить процедуру моделирования и повысить эффективность экспериментальных исследований. Применение этого способа дает возможность создать потенциально полный банк данных по рациональным условиям обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ. Он также применим для моделирования обработки деталей общемашиностроительного назначения, производимой при "*жесткой*" кинематике формообразования.

Преобразуем (1.109)

$$\left[E_{\partial(u)}G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2\right] k_{\partial(u)}^2 - \left[G_{\partial(u)}L_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)}M_{\partial(u)} + E_{\partial(u)}N_{\partial(u)}\right] k_{\partial(u)} + \left[L_{\partial(u)}N_{\partial(u)} - M_{\partial(u)}^2\right] = 0$$

к виду

$$k_\partial^2 - \frac{L_\partial G_\partial - 2F_\partial M_\partial + E_\partial N_\partial}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2} k_\partial + \frac{L_\partial N_\partial - M_\partial^2}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2} = 0 ,$$

откуда получаем

$$\tilde{G}_\partial^2 - 2\tilde{M}_\partial \tilde{G}_\partial + \tilde{G}_\partial = 0 .$$

Аналогично для поверхности $И$ инструмента имеем $\tilde{G}_u^2 - 2\tilde{M}_u\tilde{G}_u + \tilde{G}_u = 0$.

Система уравнений (3)-(5) не полностью определяет поверхность $И$ инструмента. Очевидно, что при этом поверхность $И$ должна удовлетворять двум условиям.

Первое условие

$$\tilde{G}_u = \tilde{G}_u\left(\tilde{M}_\partial, \tilde{G}_\partial\right) \tag{5.8}$$

или, в частном случае, $\tilde{G}_u = \tilde{G}_\partial$, где $\tilde{G}_u = k_{1.u}k_{2.u}$ и $\tilde{G}_\partial = k_{1.\partial}k_{2.\partial}$ – полные (гауссовы) кривизны поверхностей $Д$ и $И$.

Если поверхность $Д(И)$ параметризована ортогонально (при этом не обязательно, чтобы направления координатных линий совпадали с главными направлениями на поверхности $Д(И)$), полная ее кривизна $\tilde{G}_{\partial(u)}$ равна:

$$\tilde{G}_{\partial(u)} = \frac{1}{\frac{\partial R_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial R_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}} - \frac{1}{\frac{\partial^2 R_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}}.$$

Второе условие

$$\tilde{M}_u = \tilde{M}_u\left(\tilde{M}_\partial, \tilde{G}_\partial\right) \tag{5.9}$$

или, в частном случае, $\tilde{M}_u = -\tilde{M}_\partial$, где $\tilde{M}_u = \frac{k_{1.u} + k_{2.u}}{2}$ и $\tilde{M}_\partial = \frac{k_{1.\partial} + k_{2.\partial}}{2}$ – средние кривизны поверхностей $Д$ и $И$.

Если выполняется условие $\tilde{G}_u = \tilde{G}_\partial$, поверхность $И$ инструмента допускает разворачиваемость на поверхность $Д$ детали, а $\mathbb{R}$-отображение в этом случае обладает свойством изометричности.

В частном случае, когда $\tilde{G}_\partial = 0$, исходная инструментальная поверхность $И$ разворачивается на плоскость ($\tilde{G}_u = \tilde{G}_\partial = 0$) (Смирнов В.И., 1958, с. 395-397). В приложениях это свойство полезно тем, что, например, при профилировании прижимного кулака для ленточного шлифования сложных поверхностей деталей следует установить такие параметры его движения относительно детали, при которых рабочая поверхность кулака допускает разворачиваемость на плоскость. Необходимость выполнения этого требование очевидна: абразивная лента изготавливается из разворачивающегося на плоскость листа тканного материала. Если рабочая поверхность прижимного кулака не допускает разворачиваемость на плоскость, абразивная лента в отдельных местах будет растягиваться неравномерно и рваться, что не допустимо. Допускаются лишь незначительные отклонения формы рабочей поверхности прижимного кулака от той, которая в точности допускает разворачиваемость на плоскость – величины этих отклонений должны приводить только к упругим (но не к остаточным) растяжениям абразивной ленты. В этом случае при решении инженерных задач важно уметь количественно оценить *"степень неразворачиваемости"* фрагмента поверхности $И$. Для этого необходимо установить критерий, позволяющий установить допускаемую степень неразворачиваемости поверхности $Д$, в пределах которой упругие растяжения абразивной ленты не превышают допустимых пределов.

Углы между направлениями на поверхности $И$ инструмента, образованной как $\mathbb{R}$-отображение поверхности $Д$ детали, равны углам между соответствующими направлениями на поверхности $Д$. Следовательно, $\mathbb{R}$-отображение поверхностей $Д$ и $И$ обладает свойством конформности (Бронштейн И.Н, Семендяев К.А., 1981, с.544).

Из (8) и (9) следует, что

$$k_{1,2.u} = k_{1,2.u}\left(-\tilde{M}_\partial \pm \sqrt{\tilde{M}_\partial^2 - \tilde{G}_\partial}\right). \tag{5.10}$$

При выполнении условий $\tilde{G}_u = \tilde{G}_\partial$ и $\tilde{M}_u = -\tilde{M}_\partial$ справедливы соотношения $k_{1.u} + k_{2.u} = -2\tilde{M}_\partial$ и $k_{1.u} \cdot k_{2.u} = \tilde{G}_\partial$.

Из условия $\tilde{M}_u = -\tilde{M}_\partial$ следует, что поверхность $И$ инструмента в каждой своей точке имеет среднюю кривизну, равную по величине и противоположную по знаку средней кривизне поверхности $Д$ детали в соответствующей ее точке. Если в каждой точке поверхности ее средняя кривизна равна нулю $\left(\tilde{M}_{\partial(u)} = 0\right)$, поверхности $Д$ и $И$ будут минимальными, допускающими разворачиваемость одна на другую.

Вопросы существования поверхностей с заданными свойствами, о сгибании поверхностей и т.п. сводятся к исследованию совместимости уравнений Гаусса-Майнарди-Кодацци[1] и тех дополнительных уравнений, которые определяются условиями конкретной задачи (Кованцов М.І., 1973, с. 124). Поэтому при образовании исходной инструментальной поверхности $И$ как $\mathbb{R}$-отображения поверхности $Д$ наряду с выполнением условий (8) и (9) необходимо, чтобы она удовлетворяла условиям совместимости (условиям интегрируемости), определяемыми уравнением Гаусса и двумя уравнениями Майнарди-Кодацци.

Уравнение совместимости Гаусса, составляющее содержание его *theorema egregium*, представимо в форме (Koenderink, J.J., 1990, с. 223):

$$\tilde{G}_u\left(E_u G_u - F_u^2\right) = \left[\frac{\partial^2 F_u}{\partial U_u \partial V_u} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E_u}{\partial V_u^2} + \frac{\partial^2 G_u}{\partial U_u^2}\right)\right]\left(E_u G_u - F_u^2\right) +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F_u}{\partial V_u} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_u}{\partial U_u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G_u}{\partial V_u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E_u}{\partial U_u} & E_u & F_u \\ \frac{\partial F_u}{\partial U_u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E_u}{\partial V_u} & F_u & G_u \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial E_u}{\partial V_u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G_u}{\partial U_u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E_u}{\partial V_u} & E_u & F_u \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G_u}{\partial U_u} & F_u & G_u \end{vmatrix}. \tag{5.11}$$

Уравнения совместимости Майнарди-Кодацци записываются так (Koenderink, J.J., 1990, с. 223):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_u}{\partial V_u} - \frac{\partial M_u}{\partial U_u} &= L_u \Gamma_{12}^1 + M_u\left(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\right) - N_u \Gamma_{11}^2; \\ \frac{\partial M_u}{\partial V_u} - \frac{\partial N_u}{\partial U_u} &= L_u \Gamma_{22}^1 + M_u\left(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\right) - N_u \Gamma_{12}^2. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Уравнения совместимости (12) записаны с использованием коэффициентов связности – трехиндексных символов Кристоффеля второго рода (иногда коэффициенты связности называют трехиндексными символами Кристоффеля-Шварца), которые для поверхностей $Д(И)$ рассчитываются по формулам (Maekawa, T., 1996, с.500):

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{G_u \frac{\partial E_u}{\partial U_u} - 2F_u \frac{\partial F_u}{\partial U_u} + F_u \frac{\partial E_u}{\partial V_u}}{2(E_u G_u - F_u^2)}; \qquad \Gamma_{11}^2 = \frac{2E_u \frac{\partial F_u}{\partial U_u} - E_u \frac{\partial E_u}{\partial V_u} + F_u \frac{\partial E_u}{\partial U_u}}{2(E_u G_u - F_u^2)};$$

[1] Эти условия совместимости также называют “условиями совместимости Картана”.

(5.13)
$$\Gamma_{12}^1 = \frac{G_u \frac{\partial E_u}{\partial V_u} - F_u \frac{\partial G_u}{\partial U_u}}{2(E_u G_u - F_u^2)} = \Gamma_{21}^1; \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{E_u \frac{\partial G_u}{\partial U_u} - F_u \frac{\partial E_u}{\partial V_u}}{2(E_u G_u - F_u^2)} = \Gamma_{21}^2$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2G_u \frac{\partial F_u}{\partial V_u} - G_u \frac{\partial G_u}{\partial U_u} + F_u \frac{\partial G_u}{\partial V_u}}{2(E_u G_u - F_u^2)}; \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{E_u \frac{\partial G_u}{\partial V_u} - 2F_u \frac{\partial F_u}{\partial V_u} + F_u \frac{\partial G_u}{\partial U_u}}{2(E_u G_u - F_u^2)}.$$

Коэффициенты связности (13) выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы $\Phi_{1.u}$ и их производные. Следовательно, они не изменяются при изгибаниях (изометриях) поверхности $И$.

Формулы (13) для расчета коэффициентов связности могут быть получены следующим образом (Постников М.М., 1987, с.88-90).

Для сопровождающего базиса $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$, $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ поверхности $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ могут быть записаны деривационные формулы Вейнгартена[1], аналогичные формулам Френе[2] (или Френе-Серре[3]) для кривых. Эти формулы определяют разложение производных $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2}$, $\frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$, $\frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$ векторов сопровождающего базиса по этому же базису:

(5.14)
$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + L_{\partial(u)} \mathbf{n}_{\partial(u)};$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + M_{\partial(u)} \mathbf{n}_{\partial(u)};$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + N_{\partial(u)} \mathbf{n}_{\partial(u)};$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{F_{\partial(u)} M_{\partial(u)} - G_{\partial(u)} L_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2} \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \frac{F_{\partial(u)} L_{\partial(u)} - E_{\partial(u)} M_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2} \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{F_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - G_{\partial(u)} M_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2} \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} + \frac{F_{\partial(u)} M_{\partial(u)} - E_{\partial(u)} N_{\partial(u)}}{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2} \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}},$$

где i, j, k =1,2.

---

[1] Называемые также деривационными формулами Гаусса-Вейнгартена.

[2] **Френе**, Фредерик Жан (***Frenet***, *Frederic Jean*) (7.2.1816-12.6.1900) – французский математик, профессор (1849). Родился в Перигё (Дордень). Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1844). В 1848-1868 – профессор Лионского факультета наук, с 1868 – заслуженный профессор. Исследования относятся к дифференциальной геометрии. При изучении пространственных кривых нашел (1847) фундаментальные формулы для направляющих косинусов касательной, нормали и бинормали и их производных по длине дуги. В 1851 независимо от Френе это открытие повторил Ж.А.Серре (формулы Френе-Серре). Составил известный задачник по математическому анализу (1856), которым пользовались более 50 лет.

[3] **Серре**, Жозеф Альфред (***Serret***, *Joseph Alfred*) (30.8.1819-2.3.1885) – французский математик, член Парижской АН (с 1860). Родился в Париже. Окончил Политехническую школу в Париже (1840). С 1848 работал там же, с 1856 – профессор Коллеж де Франс, с 1863 – Сорбонны, с 1873 – член Бюро долгот. Направления исследований – математический анализ, теория чисел и механика. Занимался вопросами арифметики и алгебры. Ему принадлежат исследования приводимости уравнения деления круга, кривых постоянной кривизны и постоянного поворота, мнимых поверхностей постоянной кривизны. В 1851 опубликовал формулы, известные впоследствии как формулы Френе-Серре, повторив открытие Ф.Ж.Френе. Указал, что кривизна и кручение являются двумя основными свойствами пространственных кривых. Показал, что на полном нециклическом римановом многообразии существует всегда счетная последовательность геодезических, соединяющих две любые заданные точки. Впервые изложил на лекциях в Сорбонне теорию Галуа, посвятил ряд исследований теории групп. Развил новые методы алгебраической топологии. Написал ценные учебники по арифметике, алгебре и тригонометрии. В особенности это относится к его двухтомному “Курсу высшей алгебры”, в котором были изложены элементы теории Галуа.

Для вычисления коэффициентов связности Γ_{ij}^{k} следует найти шесть произведений: произведений векторов $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2}$ на векторы $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$.

Так как $\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right)^2 = E_{\partial(u)}$, то $2\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $2\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$, т.е. $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{1}{2}\frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{1}{2}\frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$.

Аналогично, поскольку $\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right)^2 = G_{\partial(u)}$, то $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{1}{2}\frac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{1}{2}\frac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$.

Кроме того, так как $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = F_{\partial(u)}$, то $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2} = \frac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$, откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} - \frac{1}{2}\frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}.$$

Умножив первые три формулы (14) на $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}$ и на $\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}$, получим шесть соотношений

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}; \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_U - \frac{1}{2}\frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}; \end{cases} \quad \begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial E_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}; \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} G_U; \end{cases} \quad \begin{cases} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = \frac{\partial F_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}; \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial G_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}, \end{cases}$$

из которых находятся коэффициенты связности Γ_{ij}^{k}. Приведенные уравнения однозначно разрешимы, поскольку определитель $\left(E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F_{\partial(u)}^2\right)$ каждой пары уравнений отличен от нуля.

Коэффициенты деривационных формул связаны тремя соотношениями, которые появляются при вычислении с помощью этих формул частных производных $\frac{\partial^3 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}^2 \partial V_{\partial(u)}}$, $\frac{\partial^3 \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)} \partial V_{\partial(u)}}$ двумя различными способами.

Наряду с (13), используется другое обозначение коэффициентов связности – это так называемые *скобки Кристоффеля*. Между обозначениями (13) коэффициентов связности и скобками Кристоффеля имеет место такое соответствие:

$$\Gamma_{11}^1 = \begin{Bmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}; \quad \Gamma_{12}^1 = \begin{Bmatrix} 1 & \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}; \quad \Gamma_{22}^1 = \begin{Bmatrix} 1 & \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}; \qquad (5.15)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \begin{Bmatrix} 2 & \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}; \quad \Gamma_{12}^2 = \begin{Bmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}; \quad \Gamma_{22}^2 = \begin{Bmatrix} 2 & \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}.$$

В теории формообразования поверхностей деталей рассматриваются только *поверхности Д* и *И*. Поэтому нет потребности вводить дополнительные индексы, чтобы отличать коэффициенты связности (13), (15) поверхности от коэффициентов связности объемлющего пространства. При решении задачи восстановления поверхности *И* инструмента по ее первым двум основным квадратичным формам (поверхность *Д* детали задана изначально), в обозначения коэффициентов связности (13), (15) также не требуется вводить индексы "∂" или "u".

Уравнения (10)-(12) определяют исходную инструментальную поверхность *И* как $\mathbb{R}$-отображение обрабатываемой поверхности *Д*.

Для нахождения шести неизвестных гауссовых коэффициентов E_u, F_u, G_u, L_u, M_u, N_u первых двух основных квадратичных форм $\Phi_{1.u}$ и $\Phi_{2.u}$ поверхности $И$ инструмента имеется пять уравнений (10)-(12). Недостающее шестое уравнение, дополняющее систему уравнений (10)-(12) до определенной, может быть получено из анализа процесса формообразования.

Например, для ленточного шлифования сложной поверхности детали рабочая поверхность $И$ прижимного кулака должна допускать разворачиваемость на плоскость. Исходя из того, что изометричные поверхности (поверхности, разворачивающиеся одна на другую) имеют одинаковую метрику $(\Phi_{1.u} = \Phi_{1.д})$, а ограничений на соотношение вторых основных квадратичных форм $\Phi_{2.u}$ и $\Phi_{2.д}$ нет, это требование позволяет записать недостающее шестое уравнение в виде:

$$L_u N_u - M_u^2 = 0 . \tag{5.16}$$

Следует отметить, что если некоторую поверхность, например, плоскую абразивную ленту, изгибать без растяжений и разрывов, то уравнение изгибаемой поверхности при этом изменится, но ее метрика останется прежней – первая основная квадратичная форма $\Phi_{1.u}$ при изгибаниях поверхности $И$ не изменяется.

Другим примером служит случай, когда требуется обеспечить разворачиваемость поверхности $И$ профилируемого инструмента на обрабатываемую поверхность $Д$ детали, но поверхности $Д$ и $И$ при этом не допускают разворачиваемость на плоскость. Это условие $\Phi_{1.u} \equiv \Phi_{1.д}$ в развернутой форме записывается так: $L_u N_u - M_u^2 \equiv L_д N_д - M_д^2$.

Поверхность $И$ путем изгибания может быть наложена на имеющую такую же первую основную квадратичную форму поверхность $Д$ детали. Вопрос о наложении одной поверхности на другую подробно рассмотрен в работе (Forsyth, A.R., 1912).

Дополнительное шестое уравнение может быть составлено, если потребовать, например, чтобы поверхность $И$ инструмента допускала движение "*самой по себе*" или чтобы имела место определенная функциональная (линейная или нелинейная) зависимость между интенсивностями изменения нормальных кривизн поверхностей $Д$ и $И$ и др.

Коэффициенты E_u, F_u, G_u и L_u, M_u, N_u первых двух основных квадратичных форм $\Phi_{1.u}$ и $\Phi_{2.u}$, найденные исходя из уравнений $\mathbb{R}$-отображения поверхности $Д$, однозначно определяют искомую исходную инструментальную поверхность $И$ фасонного инструмента с точностью до ее расположения в пространстве, например, в системе координат станка с ЧПУ. Это следует из теоремы Бонне, являющейся основной в теории поверхностей.

Теорема 5.1. *Если заданы дважды непрерывно дифференцируемые функции* $E_u = E_u(U_u, V_u)$; $F_u = F_u(U_u, V_u)$; $G_u = G_u(U_u, V_u)$ *и один раз непрерывно дифференцируемые функции* $L_u = L_u(U_u, V_u)$, $M_u = M_u(U_u, V_u)$, $N_u = N_u(U_u, V_u)$, *для которых выполняются условия интегрируемости Гаусса-(Петерсена)*[1]*-Майнарди-Кодацци и, кроме того, для любых действительных чисел* λ *и* μ *таких, что* $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, *справедливо неравенство* $E_u\lambda^2 + 2F_u\mu\lambda + G_u\mu^2 > 0$, *то существует описываемая трижды непрерывно дифференцируемым уравнением* $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(U_u, V_u)$ *поверхность* $И$, *коэффициенты первой* $\Phi_{1.u}$ *и второй* $\Phi_{2.u}$ *основных квадратичных форм которой совпадают с заданными функциями – поверхность* $И$ *в этом случае определена однозначно с точностью до положения и ориентации в пространстве.*

Восстановление поверхности $И$ инструмента по значениям шести коэффициентов E_u, F_u, G_u первой $\Phi_{1.u}$ и L_u, M_u, N_u второй $\Phi_{2.u}$ ее основных квадратичных форм производится путем решения системы двух деривационных дифференциальных уравнений, записанных в тензорной форме (Jeffreys, H., 1961):

[1]См. сноску на с. 60.

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{k}\mathbf{r}_u + b_{ij}\mathbf{n}_u; \\ \mathbf{n}_i = -b_{ik}g^{kj}\mathbf{r}_j, \end{cases} \tag{5.17}$$

где $\mathbf{r}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u^i}$; $\mathbf{r}_{ij} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial U_u^i \partial V_u^j}$; $\mathbf{n}_i = \dfrac{\partial \mathbf{n}_u}{\partial U_u^i}$; $b_{ij} = \mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{n}_u = -\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{r}_j - \mathbf{n}_j\cdot\mathbf{r}_i$; g_{ij} – метрический, а g^{ij} – контравариантный тензор исходной инструментальной поверхности $И$.

Записанная в тензорной форме система деривационных дифференциальных уравнений (17) в развернутом виде представима в виде системы пяти дифференциальных уравнений, записанных в векторной форме:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial U_u^2} = \frac{1}{E_u G_u - F_u^2}\left[\left(\frac{1}{2}G_u\frac{\partial E_u}{\partial U_u} - F_u\frac{\partial F_u}{\partial U_u} + \frac{1}{2}F_u\frac{\partial F_u}{\partial V_u}\right)\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} + \left(E_u\frac{\partial F_u}{\partial U_u} - \frac{1}{2}E_u\frac{\partial E_u}{\partial V_u} - \frac{1}{2}F_u\frac{\partial E_u}{\partial U_u}\right)\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\right] + L_u\mathbf{n}_u;$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial U_u \partial V_u} = \frac{1}{E_u G_u - F_u^2}\left[\left(G_u\frac{\partial E_u}{\partial U_u} - F_u\frac{\partial G_u}{\partial U_u}\right)\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} + \left(E_u\frac{\partial G_u}{\partial U_u} - F_u\frac{\partial E_u}{\partial V_u}\right)\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\right] + M_u\mathbf{n}_u;$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial V_u} = \frac{1}{E_u G_u - F_u^2}\left[\left(G_u\frac{\partial F_u}{\partial V_u} - \frac{1}{2}G_u\frac{\partial G_u}{\partial U_u} - \frac{1}{2}F_u\frac{\partial G_u}{\partial V_u}\right)\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} + \left(\frac{1}{2}E_u\frac{\partial G_u}{\partial V_u} - F_u\frac{\partial F_u}{\partial V_u} + \frac{1}{2}F_u\frac{\partial G_u}{\partial U_u}\right)\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\right] + N_u\mathbf{n}_u;$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_u}{\partial U_u} = \frac{F_u M_u - G_u L_u}{E_u G_u - F_u^2}\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} + \frac{F_u L_u - E_u M_u}{E_u G_u - F_u^2}\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}; \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_u}{\partial V_u} = \frac{F_u N_u - G_u M_u}{E_u G_u - F_u^2}\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} + \frac{F_u M_u - E_u N_u}{E_u G_u - F_u^2}\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}.$$

Векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{n}_u$ имеют по три координаты: $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(X_u, Y_u, Z_u)$ и $\mathbf{n}_u = \mathbf{n}_u\left(n_u^{(X)}, n_u^{(Y)}, n_u^{(Z)}\right)$. Поэтому система пяти уравнений (18), записанных в векторной форме, может быть представлена в виде системы пятнадцати дифференциальных уравнений, записанных в параметрической форме.

Решением системы дифференциальных уравнений в тензорной форме (17) либо эквивалентной ей системы уравнений в векторной (18) или параметрической форме является уравнение искомой исходной инструментальной поверхности $И$ профилируемого фасонного инструмента.

Чтобы найти постоянные интегрирования, на поверхности $И$ фиксируется положение некоторой точки, в которой инструмент нужным образом располагается и ориентируется относительно детали. Этим определяются значения всех констант интегрирования, которые, в свою очередь, определяют положение и ориентацию инструмента относительно детали.

Задача профилирования режущего инструмента в соответствие с обобщенным методом образования исходных инструментальных поверхностей решается в последовательности (рис. 5.4).

Пример 5.1. Рассмотрим порядок восстановления исходной инструментальной поверхности $И$ фасонного инструмента по коэффициентам ее первых двух основных квадратичных форм, найденных как $\mathbb{R}$-отображение поверхности $Д$. Решение этой задачи сводится к тому, чтобы показать, что система уравнений Гаусса-Вейнгартена (14)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial U_u^2} = \Gamma_{11}^1\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} + \Gamma_{11}^2\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} + L_u\mathbf{n}_u; \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial U_u \partial V_u} = \Gamma_{12}^1\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} + \Gamma_{12}^2\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} + M_u\mathbf{n}_u; \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial V_u^2} = \Gamma_{22}^1\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} + \Gamma_{22}^2\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} + N_u\mathbf{n}_u;$$

$$\left(E_u G_u - F_u^2\right)\frac{\partial \mathbf{n}_u}{\partial U_u} = \left(F_u M_u - G_u L_u\right)\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} + \left(F_u L_u - E_u M_u\right)\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}; \qquad \left(E_u G_u - F_u^2\right)\frac{\partial \mathbf{n}_u}{\partial V_u} = \left(F_u N_u - G_u M_u\right)\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} + \left(F_u M_u - E_u N_u\right)\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} \tag{5.19}$$

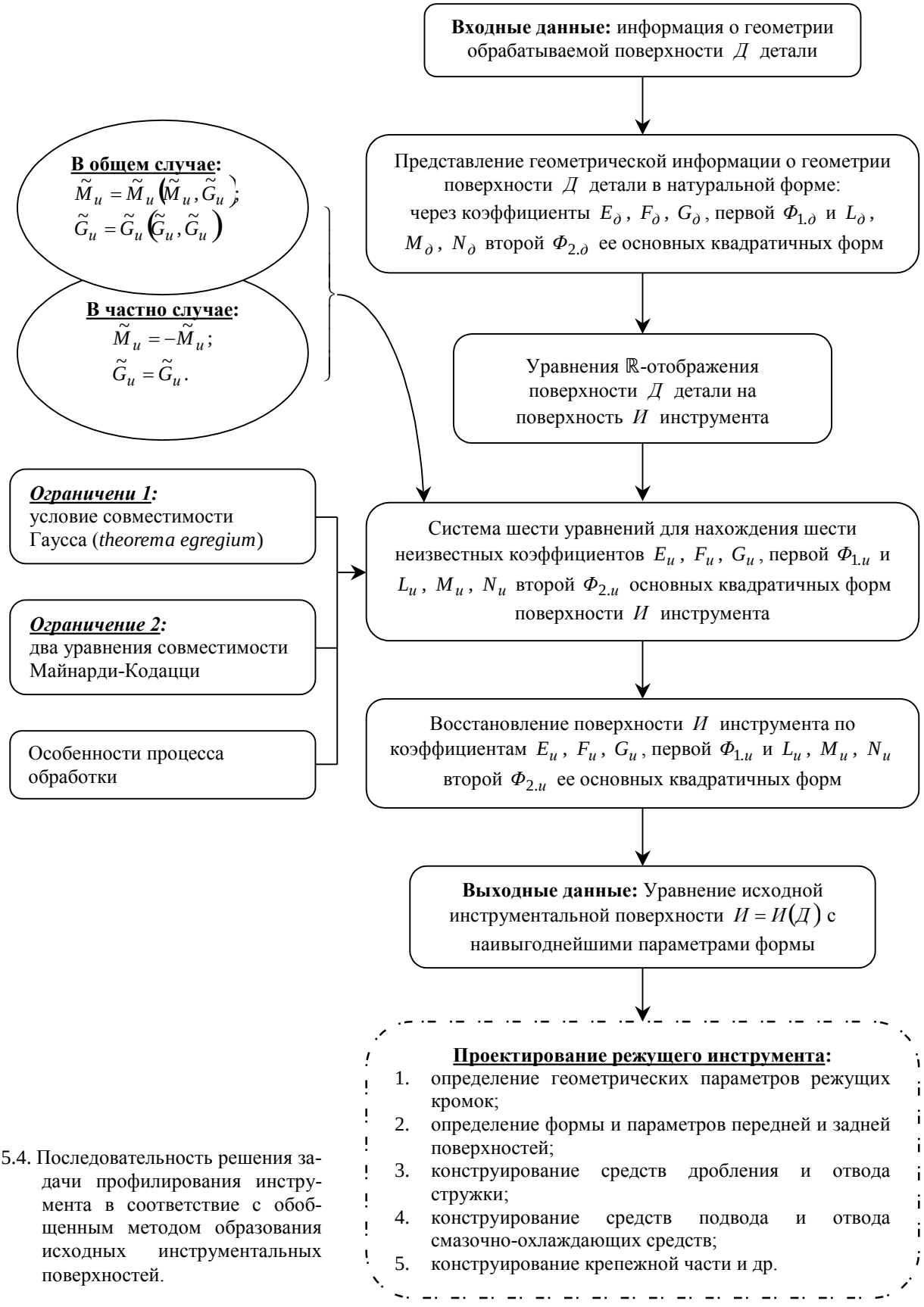


Рис. 5.4. Последовательность решения задачи профилирования инструмента в соответствие с обобщенным методом образования исходных инструментальных поверхностей.

при выполнении условий:

$$\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_u = 1\,, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}\cdot \mathbf{n}_u = 0\,, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\cdot \mathbf{n}_u = 0\,, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}\cdot \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} = E_u\,, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}\cdot \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} = F_u\,, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\cdot \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} = G_u,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial U_u^2}\cdot \mathbf{n}_u = L_u\,, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial U_u \partial V_u}\cdot \mathbf{n}_u = M_u\,, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\cdot \mathbf{n}_u = N_u \tag{5.20}$$

определяет двенадцать скалярных функций от U_u и V_u, аналогичных заданным в векторной форме функциям $\mathbf{r}_u(U_u, V_u)$, $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}(U_u, V_u)$, $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}(U_u, V_u)$ и $\mathbf{n}_u(U_u, V_u)$, с таким же количеством констант интегрирования, что и искомая поверхность $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(U_u, V_u)$. Решение этой задачи для общего случая громоздко и требует навыков интегрирования смешанных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Сущность решения задачи восстановления исходной инструментальной поверхности $И$ по значениям коэффициентов ее первых двух основных квадратичных форм рассмотрим на примере, когда обе квадратичные формы найдены и имеют вид:

$$\Phi_{1.\partial} = dU_u^2 + \cos^2 U_u dV_u^2\,; \qquad \Phi_{2.\partial} = dU_u^2 + \cos^2 U_u dU_u^2\,.$$

Из этого следует, что $E_u = 1,\ F_u = 0,\ G_u = \cos^2 U_u,\ L_u = 1,\ M_u = 0,\ N_u = \cos^2 U_u$. Поэтому символы Кристоффеля равны $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = -\tan U_u$ и $\Gamma_{22}^1 = \sin U_u \cos U_u$. Прямой подстановкой можно убедиться, что они удовлетворяет условиям совместимости Гаусса (11) и Майнарди-Кодацци (12).

Для рассматриваемого случая уравнения Гаусса-Вейнгартена (19) приводятся к виду:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial U_u^2} = \mathbf{n}_u\,; \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial U_u \partial V_u} = -\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\tan U_u\,; \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial V_u^2} = \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}\sin U_u \cos U_u + \mathbf{n}_u \cos^2 U_u\,; \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_u}{\partial U_u} = \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}\,; \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_u}{\partial V_u} = \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}\,. \tag{5.25}$$

Необходимо решить эту систему уравнений относительно X_u, Y_u, Z_u.

Исключая $\mathbf{n}_u$ из уравнений (21) и (24), получим

$$\frac{\partial^3 \mathbf{r}_u}{\partial U_u^3} + \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} = 0 \qquad \text{или} \qquad \mathbf{r}_u = \mathbf{a}(V_u)\cos U_u + \mathbf{b}(V_u)\sin U_u + \mathbf{c}(V_u). \tag{5.26}$$

На основании (22) запишем

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial V_u}\cos U = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial V_u}\sin^2 U_u \sec U_u - \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial V_u \tan U_u} \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial V_u} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial V_u} = 0\,.$$

Поскольку векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ постоянны, то $\mathbf{r}_u = \mathbf{a}(V_u)\cos U_u + \mathbf{b}\sin U_u + \mathbf{c}$.

Исходя из этого уравнения и уравнений (22), (23) и (25) получим:

$$\frac{\partial^3 \mathbf{r}_u}{\partial V_u^3} = \frac{\partial^3 \mathbf{a}}{\partial V_u^3}\cos U_u = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_u}{\partial U_u \partial V_u}\sin U_u \cos U_u + \frac{\partial \mathbf{n}_u}{\partial V_u}\cos^2 U_u = -\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial V_u} \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{a}}{\partial V_u^3} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial V_u} = 0,; \qquad \mathbf{a} = \mathbf{p}\cos V_u + \mathbf{q}\sin V_u + \mathbf{r}\,,$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ – постоянные векторы.

Согласно (23) $\mathbf{r}_u = 0$, поэтому решением системы уравнений (19) будет:

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{p}\cos V_u \cos U_u + \mathbf{q}\sin V_u \cos U_u + \mathbf{b}\sin U_u + \mathbf{c}.$$

Определяем векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ так, чтобы удовлетворялись условия (20). Поскольку

$$\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} = -\mathbf{p}\cos V_u \sin U_u - \mathbf{q}\sin V_u \sin U_u + \mathbf{b}\cos U_u \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} = -\mathbf{p}\sin V_u \cos U_u + \mathbf{q}\cos V_u \cos U_u$$

находим, что для всех U_u и V_u

$$\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} = \cos^2 U_u = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})\sin^2 V_u \cos^2 U_u - 2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\sin V_u \cos V_u \cos^2 U_u + (\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})\cos^2 V_u \cos^2 U_u$$

или $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = 1$, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = 1$.

Аналогично из $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} = 0$ получаем, что $\mathbf{q}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{b} = 0$.

Из соотношения $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} = 1$ следует $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$ – это указывает на то, что векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{b}$ образуют ортонормированную тройку векторов. Очевидно, что остальные условия (26) также выполняются.

Если векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{b}$ обозначить через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, решение системы уравнений (21)-(25) может быть представлено в виде:

(5.27) $$\mathbf{r}_u = \mathbf{e}_1 \cos V_u \cos U_u + \mathbf{e}_2 \sin V_u \cos U_u + \mathbf{e}_3 \sin U_u + \mathbf{c}.$$

Уравнение (27) описывает сферу единичного радиуса.

Путем выбора коэффициентов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ сферу (27) можно разместить в любой точке пространства и выбирать различные ортогональные системы параллелей и меридианов для U_u – и V_u – координатных линий на ней. Поверхность $И$ (27) просто масштабируется[1].

Поверхность $И$ фасонного режущего инструмента, образованная в соответствие с разработанным обобщенным методом образования исходных инструментальных поверхностей, представляет собой отображение поверхности $Д$ на поверхность $И$. Точки поверхности $И$, как правило, не взаимозаменяемы. Каждой точке на поверхности $Д$ соответствует одна точка на поверхности $И$ – но не наоборот: одной и той же точке на поверхности $И$ инструмента может соответствовать несколько (в т.ч. бесчисленное множество) точек на поверхности $Д$ детали. Положенный в основу этого метода вид отображения дополняет известные виды отображений поверхностей: изометрическое, конформное и др.

Применение $\mathbb{R}$-отображения впервые дало возможность решать задачи профилирования фасонных режущих инструментов для обработки сложных поверхностей на многокоординатных станках с ЧПУ вместо обычно применяемого выбора инструмента из имеющейся его номенклатуры.

Для решения задачи профилирования фасонных режущих инструментов в соответствие с изложенным обобщенным методом образования исходных инструментальных поверхностей полезны результаты исследований по конструированию поверхностей с наперед заданной средней или полной кривизной (Giutsi, E., 1978; Trudinger, N.S., and Urbas, J.I.E., 1983; Urbas, J.I.E., 1984; Trudinger, N.S., 1990; Flaquer, J., Garate, G., Pargada, M., 1992; Anderson, R.K.E., 1993; и др.).

Обобщенный метод позволяет образовать исходную инструментальную поверхность как отображение поверхности детали. Следовательно форма и параметры исходной инструментальной поверхности $И$

---

[1]Важно акцентировать внимание на том, что даже при выполнении условий совместимости Гаусса и Майнарди-Кодацци средняя $\tilde{M}_u$ и полная $\tilde{G}_u$ кривизны не всегда определяют единственную поверхность $И$ (Koenderink, J.J., 1990, с. 338). Примером служит катеноид, поверхность которого допускает разворачиваемость на геликоид – поверхность, имеющую совершенно иной вид. Геликоид имеет такую же полную кривизну, что и катеноид и очевидно, что эти поверхности имеют одинаковую среднюю кривизну. Вместе с тем геликоид является разворачивающейся на плоскость поверхностью, а катеноид – нет. Следовательно даже средняя и гауссова кривизны вместе не всегда определяют поверхность полностью (Koenderink, J.J., 1990, с. 253).

являются функцией формы и параметров поверхности $Д$. Аналитически эта зависимость описывается функцией вида $И = И(Д)$.

Кинематика многокоординатного формообразования устанавливается в функции параметров формы поверхностей $Д$ и $И$. Но поверхность $И$ является функцией формы и параметров поверхности $Д$,т.е. $И = И(Д)$. Поэтому если кинематику формообразования обозначить через K_{rm} [1], в обобщенном виде она может быть описана функцией вида $K_{rm} = K_{rm}[Д, И(Д)] = K_{rm}(Д)$ (или $K_{rm} = K_{rm}[Д, П_u(Д)]$, если рассматривается формообразование поверхности детали производящей поверхностью $П_u$ инструмента[2], отличающейся от его исходной инструментальной поверхности $И$). В обоих случаях аргументом функций $K_{rm} = K_{rm}[Д, И(Д)]$ и в $K_{rm} = K_{rm}[Д, П_u(Д)]$ служат параметры формы обрабатываемой поверхности $Д$ детали и только. При этом заданную чертежом детали ее поверхность $Д$ следует рассматривать как номинальную, идеально точную, даже если изначально ее форма и параметры определены с погрешностями, например, путем аппроксимации дискретно заданных элементов на ней (точек или линий).

После того, как определена исходная инструментальная поверхность $И = И(Д)$, а затем кинематика формообразования $K_{rm} = K_{rm}[Д, И(Д)] = K_{rm}(Д)$, решаются другие (обратные) задачи – установливаются параметры фактически формообразованной поверхности $Д^{(ф)}$ детали:

– $Д^{(ф)} = Д^{(ф)}(И, K_{rm}^{(ф)})$ с учетом погрешностей кинематики формообразования, когда фактически воспроизводимая в процессе обработки кинематика $K_{rm}^{(ф)}$ отличается от номинальной кинематики формообразования rm , т.е. когда $K_{rm}^{(ф)} \neq K^{(ф)}$;

– $Д^{(ф)} = Д^{(ф)}(П_u, K_{rm})$ с учетом погрешностей профилирования фасонного режущего инструмента, т.е. когда $П_u \neq И$;

– $Д^{(ф)} = Д^{(ф)}(П_u, K_{rm}^{(ф)})$ с учетом погрешностей кинематики формообразования и профилирования режущего инструмента, когда $K_{rm}^{(ф)} \neq K^{(ф)}$ и $П_u \neq И$ одновременно.

Другую группу задач составляют задачи нахождения производящей поверхности $П_u$ инструмента в случаях, когда:

– вместо номинальной поверхности $Д$ детали известны параметры фактической ее поверхности $Д^{(ф)}$, т.е. когда $П_u = П_u(Д^{(ф)}, K_{rm})$;

– реально воспроизводимая кинематика отличается от номинальной кинематики формообразования, т.е. когда $П_u = П_u(Д, K_{rm}^{(ф)})$;

– одновременно вместо номинальной поверхности $Д$ детали известны параметры ее поверхности $Д^{(ф)}$ и реально воспроизводимая кинематика отличается от номинальной кинематики формообразования, т.е. когда $П_u = П_u(Д^{(ф)}, K_{rm}^{(ф)})$,

Перечисленные задачи ассоциируются с известной *обратной задачей* теории формообразования поверхностей деталей, решаемой при "*жесткой*" кинематике формообразования, однако это задачи принципиально разного типа.

---

[1] K_{rm} – от *relative motion* (англ.) – относительное движение.

[2] Производящая поверхность $П_u$ аппроксимирует поверхность $И$ инструмента с приемлемой для заданного случая обработки точностью. Одна из причин необходимости введения в рассмотрение понятия "*производящая поверхность инструмента*" является невозможность профилирования и изготовления геометрически точных инструментов. Вследствие неустранимых, так называемых *органических*, погрешностей инструмента исходная инструментальная поверхность $И$ заменяется производящей поверхностью $П_u$. Это не единственная причина необходимости введения в рассмотрения понятия "*производящая поверхность инструмента*".

5.2. Элементы теории огибающих в профилировании фасонных режущих инструментов

По обобщенному методу (см. выше, раздел 5.1) исходная инструментальная поверхность может быть образована для любого способа формообразующей обработки поверхностей деталей. В промышленности широко используются инструменты, исходные инструментальные поверхности которых допускают движение "*самих по себе*" (см. выше, гл. 2, раздел 2.4). Чтобы образовать поверхности $И$ такого класса, систему уравнений (17) или (18) следует дополнить условиями, которые относят искомую поверхность $И$ к классу поверхностей, допускающих движение "*самих по себе*" (Радзевич С.П., 1988; Радзевич С.П., Петренко Т.Ю., 1999).

Вместе с тем для инструментов, исходная инструментальная поверхность которых обладает указанным свойством, задача образования поверхности $И$ может быть решена проще – исходя из того, что в процессе обработки поверхности $Д$ и $И$ являются взаимоогибаемыми. Методы образования исходных инструментальных поверхностей для таких случаев обработки основаны на результатах, полученных в теории огибающих: в теории огибающих кривых и огибающих поверхностей.

Ниже приведены некоторые из полученных в теории огибающих результатов, которые используются для образования исходных инструментальных поверхностей. Полные сведения по этому вопросу изложены в монографии (Залгаллер В.А., 1975) и др.

5.2.1. Огибающая последовательных положений плоской кривой. Некоторая плоская кривая l может совершать движение в плоскости, в которой она расположена, и образовать при этом семейство плоских кривых. При выполнении определенных условий это семейство имеет огибающую. Например, для семейства окружностей радиуса r с центрами на прямой l (в рассматриваемом примере прямая l совмещена с осью абсцисс X системы координат XY) огибающей являются две параллельные прямые l_1 и l_2 (рис. 5.5), отстоящие одна от другой на $2r$.

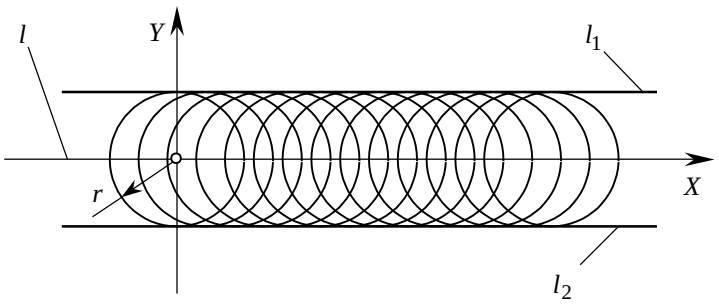


Рис. 5.5. Огибающая семейства окружностей радиуса r с центрами на прямой l.

Огибающая семейства плоских кривых в каждой своей точке касается одной из кривых семейства: каждая окружность семейства (см. рис. 5.5) касается каждой из огибающих l_1 и l_2 в единственной точке.

Если параметр семейства плоских кривых обозначить через ω, параметр огибающей – через u, а значение ω для одной из кривых семейства, касающейся огибающей в точке с параметром u – через $\omega(u)$, то предполагается существование функции $\omega(u)$, которая не постоянна ни на каком участке изменения u.

5.2.1.1. *Огибающая последовательных положений кривой, заданной уравнением в векторной форме.* Для семейства плоских кривых, заданных гладкой функцией вида

$$\mathbf{r}(u,\omega)=\mathbf{r}[X(u,\omega),Y(u,\omega)],$$

где u – параметр огибающей;

ω – параметр семейства кривых на плоскости,

необходимым условием существования огибающей является параллельность одного другому векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega}$ или, что то же самое:

$$\psi=\frac{D(X,Y)}{D(u,\omega)}=0. \qquad (5.28)$$

Достаточным является выполнение условий (30), $\mathbf{r} = \in \omega^2$ и

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial u} \neq 0 . \tag{5.29}$$

5.2.1.2. Огибающая последовательных положений кривой, заданной уравнением в неявной форме. Для семейства кривых, заданного уравнением вида $f(X, Y, \omega)$, (здесь $f \in \omega^1$; ω^1 – семейство кривых, дифференцируемых не менее одного раза; $\left|\frac{\partial f}{\partial X}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \neq 0$), необходимым условием существования огибающей является совместимость функций:

$$f(X, Y, \omega) = 0 , \qquad \frac{\partial}{\partial \omega}(X, Y, \omega) = 0 . \tag{5.30}$$

Система уравнений (30) определяет координаты точек огибающей.
Уравнениям (30) могут удовлетворять другие, так называемые, *особые точки* семейства.

Достаточным условием существования огибающей является справедливость равенства $f \in \omega^2$ (ω^2 – семейство кривых, дифференцируемых не менее двух раз) и выполнение условий

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} \neq 0 , \qquad \frac{D\left(f, \frac{\partial f}{\partial \omega}\right)}{D(X, Y)} \neq 0 . \tag{5.31}$$

Нарушение условий (29) и (31) чаще всего связано с образованием на огибающей точек возврата.

5.2.2. Огибающая последовательных положений однопараметрического семейства поверхностей. Для зависящего от одного параметра ω семейства поверхностей огибающей является поверхность, которая в каждой своей точке с внутренними параметрами (U, V) касается поверхности семейства с параметром $\omega(U, V)$, причем функция $\omega(U, V)$ ни в какой области изменения параметров (U, V) не постоянна. Например, для сфер радиуса r с центрами на прямой l (в рассматриваемом примере прямая l совмещена с осью абсцисс X системы координат XYZ) огибающей является поверхность круглого цилиндра радиуса r (рис. 5.6).

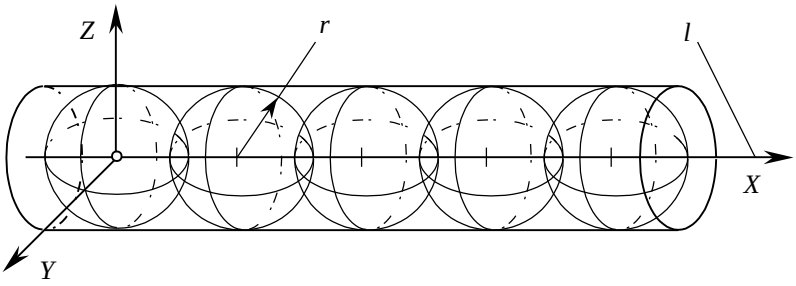


Рис. 5.6. Огибающая последовательных положений сферы радиуса r с центрами на прямой l.

5.2.2.1. Огибающая последовательных положений, поверхности, заданной уравнением в векторной форме. Для семейства поверхностей $\mathbf{r}(U, V, \omega)$, (где $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial U} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial V} \neq 0$), необходимые условия существования огибающей имеют вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(U, V, \omega); \qquad \boldsymbol{\psi} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Z}{\partial U} \\ \frac{\partial X}{\partial V} & \frac{\partial Y}{\partial V} & \frac{\partial Z}{\partial V} \\ \frac{\partial X}{\partial \omega} & \frac{\partial Y}{\partial \omega} & \frac{\partial Z}{\partial \omega} \end{vmatrix} = 0 , \tag{5.32}$$

Уравнения (32) определяют *характеристику* E – линию касания огибающей с одной из поверхностей семейства. Совокупность характеристик E образует огибающую[1].

В случаях, когда огибающая поверхность относится к классу поверхностей, допускающих движение "*самих по себе*", уравнение (32) определяет профиль огибающей. Достаточным условием этого является выполнение условий $\mathbf{r} \in \omega^2$, соотношений (32) и условий

$$(5.33) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial U} & \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial V} & \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \omega} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\right)^2 & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial V} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial V} & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\right)^2 & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \left|\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial U}\right| + \left|\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial V}\right| \neq 0.$$

Нарушение первого из условий (33) обычно связано с образованием на огибающей ребра возврата.

Ребро возврата на огибающей в свою очередь является огибающей характеристик E. Его уравнение находится путем решения системы уравнений:

$$(5.34) \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(X, Y, Z, \omega); \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega}\right) = 0.$$

Исключая из уравнений (34) параметр ω, получим две поверхности, линия пересечения которых и есть ребро возврата огибающей.

Ребро возврата касается каждой характеристики в ее характеристической точке второго порядка, а сечение огибающей семейства поверхностей плоскостью, проходящей через касательную к ребру возврата, имеет в точке пересечения с ним особую точку – в общем случае точку возврата первого рода (Люкшин В.С., 1968).

Поверхность, касающаяся каждой поверхности семейства вдоль линии, является огибающей; линия, касающаяся всех характеристик, является ребром возврата огибающей (Люкшин В.С., 1968).

Справедливо более сильное утверждение: если существует огибающая E^* некоторого однопараметрического семейства кривых в пространстве, то это семейство кривых образовано характеристиками E однопараметрического семейства поверхностей $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\omega)$ и огибающая E^* является ребром возврата огибающей семейства поверхностей $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\omega)$ (Люкшин В.С., 1968).

Характеристики огибаемой и огибающей поверхностей на поверхностях *Д* и *И* описываются уравнениями

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(U_1, V_1, \omega), \qquad f(U_1(\omega), V_1(\omega), \omega) = 0, \qquad \omega = Const;$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(U_2, V_2, \omega), \qquad f(U_2(\omega), V_2(\omega), \omega) = 0, \qquad \omega = Const.$$

Касательные к кординатным линиям в системах координат $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ задаются уравнениями:

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial V_1} - \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial U_1} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{T}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial U_2}\cdot\frac{\partial f}{\partial V_2} - \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial V_2}\cdot\frac{\partial f}{\partial U_2}.$$

---

[1] В системе координат инструмента геометрическое место характеристик E определяет исходную инструментальную поверхность *И* – для этого второе уравнение в (32)следует рассматривать совместно с операторами преобразования координат, описывающими движение характеристики E в системе координат инструмента. Если решается обратная задача, то геометрическое место характеристик E в системе координат детали определит фактически формообразованную поверхность *Д* детали.

Поверхность, образованная совокупностью последовательных положений характеристик в неподвижной системе координат, например, в системе координат, связанной со станком, описывается уравнениями $\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial f} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial f}(U_2, V_2, \omega)$, $f(U_2, V_2, \omega) = 0$, где $\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial f}(U_2, V_2, \omega) = \mathbf{Res}\,(1 \to 2) \cdot \mathbf{r}_1(U_1, V_1)$, а оператор $\mathbf{Res}\,(1 \to 2)$ результирующего преобразования координат является функцией параметра огибания ω. В задачах формообразования поверхностей деталей эта поверхность конгруэнтна поверхности детали.

5.2.2.2. Условия существования огибающей семейства поверхностей, представленных уравнением в неявной форме. Для семейства поверхностей, заданного уравнением вида $f(X_1, Y_1, Z_1, \omega) = 0$, где $f \in \omega^1$ и $\left|\frac{\partial f}{\partial X_1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial Z_1}\right| \neq 0$, необходимым условием существования огибающей является совместимость системы уравнений $f = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$, а достаточным – $f \in \omega^2$ и выполнение условий

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} \neq 0; \qquad \left|\frac{D\left(f, \frac{\partial f}{\partial \omega}\right)}{D(X, Y)}\right| + \left|\frac{D\left(f, \frac{\partial f}{\partial \omega}\right)}{D(Y, Z)}\right| + \left|\frac{D\left(f, \frac{\partial f}{\partial \omega}\right)}{D(Z, X)}\right| \neq 0. \tag{5.35}$$

Как и в рассмотренном выше случае (см. (33)), нарушение первого из условий (35) обычно связано с образованием на огибающей ребра возврата.

5.2.3. Огибающая последовательных положений характеристик на поверхности. Характеристики на огибающей поверхности также могут иметь огибающую. Огибающая E^* характеристик делит описываемую общим уравнением огибающую поверхность f на две части (рис. 5.7): на доступную для касания с огибаемой поверхностью часть A и часть B, недоступную для касания с огибаемой поверхностью.

Семейство характеристик E на поверхности f в системе координат $X_1Y_1Z_1$ может быть представлено зависимостями:

$$\mathbf{r}_1(U_1, V_1) \in C^2, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1} \neq 0, \qquad f(U_1, V_1, \omega) = 0, \qquad (U_1, V_1) \in f, \qquad \omega^{(\min)} \le \omega \le \omega^{(\max)}.$$

Для существования огибающей E^* необходимо выполнение условия $\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$.

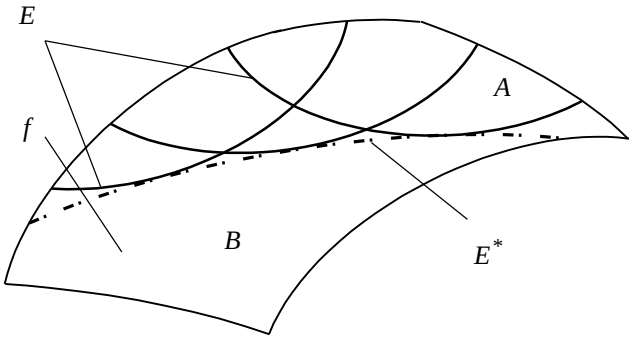


Рис. 5.7. Образование огибающей характеристик на поверхности.

Если огибаемая поверхность представлена в векторной форме $\mathbf{r}_1(U_1, V_1) \in C^2$, $\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1} \neq 0$, $(U_1, V_1) \in Д$, $\omega^{(\min)} \le \omega \le \omega^{(\max)}$ и в точке $M\left(U^{(M)}, V^{(M)}, \omega^{(M)}\right)$ выполняются условия:

$$f(U_1, V_1, \omega) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \omega}(U_1, V_1, \omega) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}(U_1, V_1, \omega) \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial U_1} & \frac{\partial f}{\partial V_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \omega\, \partial U_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega\, \partial V_1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то огибающая E^* существует, является регулярной кривой и может быть представлена в виде:

(5.36) $$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(U_1, V_1), \qquad f(U_1, V_1, \omega), \qquad \frac{\partial f}{\partial \omega}(U_1, V_1, \omega) = 0 .$$

Необходимые и достаточные условия существования огибающей E^* характеристик на поверхности можно также записать в форме:

$$f(U_1, V_1, \omega) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1} \right) \cdot \mathbf{V}_{1-2} = 0 ,$$

$$g_1(U_1, V_1, \omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial U_1} & \frac{\partial f}{\partial V_1} & \frac{\partial f}{\partial \omega} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} \right)^2 & \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} \right) \cdot \mathbf{V}_{1-2} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1} \right)^2 & \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1} \right) \cdot \mathbf{V}_{1-2} \end{vmatrix} = 0 ;$$

(5.37) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial U_1} & \frac{\partial f}{\partial V_1} \\ \frac{\partial g}{\partial U_1} & \frac{\partial g}{\partial V_1} \end{vmatrix} \neq 0 , \qquad \mathbf{H}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} & \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1} & \mathbf{V}_{1-2} \\ \frac{\partial f}{\partial U_1} & \frac{\partial f}{\partial V_1} & \frac{\partial f}{\partial \omega} \\ \frac{\partial g}{\partial U_1} & \frac{\partial g}{\partial V_1} & \frac{\partial g}{\partial \omega} \end{vmatrix} .$$

При выполнении этих условий огибающая E^* существует и является регуляной кривой (36). Огибающая E^* не существует если нарушается хотя-бы одно из условий (37).

Касательные к E^* коллинеарны касательной $\mathbf{T}_2$ к характеристике E в точке M касания E^* и $\mathbf{T}_2$.

5.2.4. Кинематический метод определения огибающей последовательных положений поверхности основан на том, что в точке касания вектор скорости $\mathbf{V}_{1-2}$ относительного движения поверхностей расположен в их общей касательной плоскости. Это условие следует из того, что взаимоогибаемые поверхности в относительном движении могут только скользить и перекатываться одна по другой – составляющая скорости относительного движения в направлении контактной нормали всегда равна нулю (рис. 5.8).

В общем случае инструмент совершает некоторое движение относительно заготовки и формирует на ней поверхность $Д$ как огибающую последовательных положений поверхности $И$.

На поверхности $И$ движущегося инструмента можно выделить три типа точек.

В точках первого типа, например, в точке A (рис. 5.8.1), проекция $Пр_{\mathbf{N}} \mathbf{V}_{\Sigma}^{(A)}$ вектора $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(A)}$ результирующей скорости относительного движения детали и инструмента на вектор нормали $\mathbf{N}_u^{(A)}$ направлена в тело детали ($Пр_{\mathbf{N}} \mathbf{V}_{\Sigma}^{(A)} > 0$). Поэтому в окрестности этой точки инструмент внедряется в заготовку и срезает припуск черновыми участками режущих кромок.

В точках второго типа, например, в точке B (см. рис. 5.8.1), проекция $Пр_{\mathbf{N}} \mathbf{V}_{\Sigma}^{(B)}$ вектора $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(B)}$ результирующей скорости относительного движения детали и инструмента на вектор нормали $\mathbf{N}_u^{(B)}$ направлена перпендикулярно этой нормали – по касательной к поверхности $Д$ ($Пр_{\mathbf{N}} \mathbf{V}_{\Sigma}^{(B)} = 0$). Поэтому в

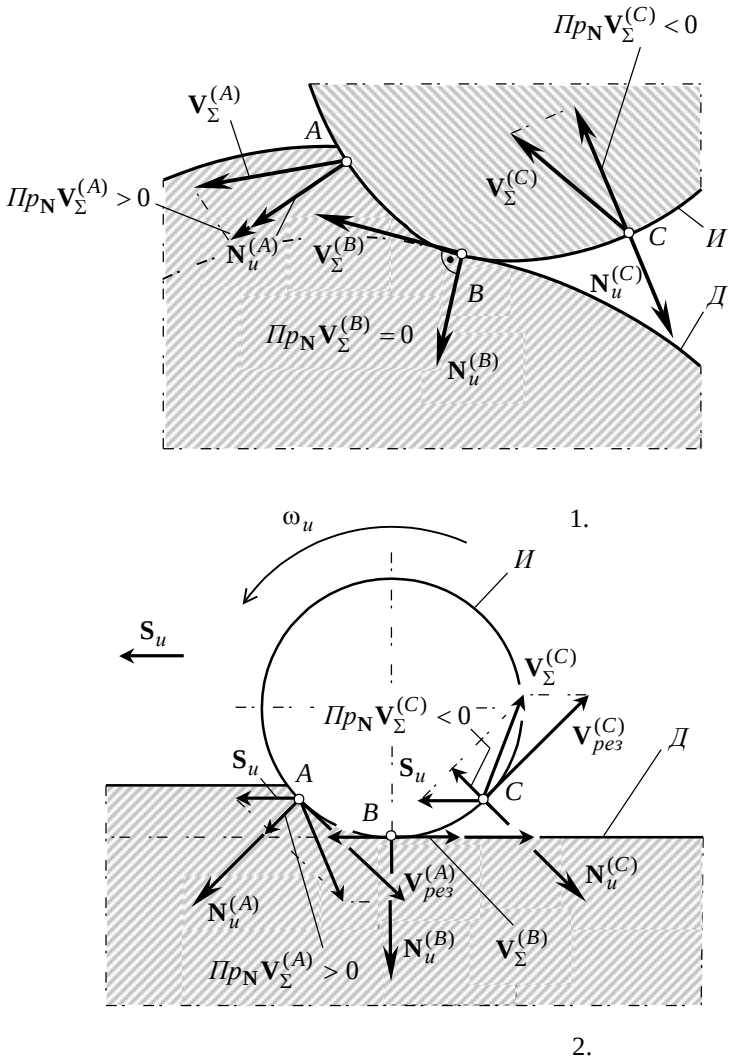


Рис. 5.8. К кинематическому методу определения огибающей последовательных положений поверхности $И$ инструмента.

окрестности этой точки инструмент в заготовку не внедряется, припуск с нее не срезает, а формообразует (генерирует) поверхность $Д$.

В точках третьего типа, например, в точке C (см. рис. 5.8.1), проекция $Пр_{\mathbf{N}}\mathbf{V}_{\Sigma}^{(C)}$ вектора $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(C)}$ результирующей скорости относительного движения детали и инструмента на вектор нормали $\mathbf{N}_u^{(C)}$ направлена от тела детали ($Пр_{\mathbf{N}}\mathbf{V}_{\Sigma}^{(C)} < 0$). Поэтому в окрестности этой точки инструмент удаляется от обработанной поверхности детали. Очевидно, что припуск при этом не срезается и поверхность $Д$ не генерируется.

Изложенный подход, иллюстрирующий сущность кинематического метода образования огибающих поверхностей, может быть просто применен к анализу реальных процессов формообразующей обработки деталей в машиностроении.

В качестве примера рассмотрим формообразование плоскости $Д$ при фрезеровании детали цилиндрической фрезой с исходной инструментальной поверхностью $И$.

В процессе обработки инструмент вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω_u и перемещается поступательно с подачей $\mathbf{S}_u$. В каждой из точек A, B и C на поверхности $И$ инструмента результирующая скорость $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(A)}$, $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(B)}$ и $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(C)}$ относительного движения детали и инструмента является векторной суммой вектора $\mathbf{S}_u$ движения подачи, который одинаков для всех точек, и соответствующего вектора $\mathbf{V}_{рез}^{(A)}$, $\mathbf{V}_{рез}^{(B)}$ и $\mathbf{V}_{рез}^{(C)}$ линейной скорости вращательного движения инструмента, обеспечивающего требуемую скорость резания. Очевидно, что векторы $\mathbf{V}_{рез}^{(A)}$, $\mathbf{V}_{рез}^{(B)}$ и $\mathbf{V}_{рез}^{(C)}$ одинаковы по модулю ($\left|\mathbf{V}_{рез}^{(A)}\right| = \left|\mathbf{V}_{рез}^{(B)}\right| = \left|\mathbf{V}_{рез}^{(C)}\right|$) и отличаются один от другого только направлением. Векторы $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(A)}$, $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(B)}$ и $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(C)}$ результирующей скорости относительного движения детали и инструмента в окрестности точек A, B и C отличаются одни от другого как по величине, так и по направлению: $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(A)} \neq \mathbf{V}_{\Sigma}^{(B)} \neq \mathbf{V}_{\Sigma}^{(C)}$ и $\left|\mathbf{V}_{\Sigma}^{(A)}\right| \neq \left|\mathbf{V}_{\Sigma}^{(B)}\right| \neq \left|\mathbf{V}_{\Sigma}^{(C)}\right|$.

Проекции векторов $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(A)}$, $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(B)}$ и $\mathbf{V}_{\Sigma}^{(C)}$ на направление нормали $\mathbf{N}_u^{(A)}$, $\mathbf{N}_u^{(B)}$ и $\mathbf{N}_u^{(C)}$ в точках A, B и C следующие: $Пр_{\mathbf{N}}\mathbf{V}_{\Sigma}^{(A)} > 0$, $Пр_{\mathbf{N}}\mathbf{V}_{\Sigma}^{(B)} = 0$ и $Пр_{\mathbf{N}}\mathbf{V}_{\Sigma}^{(C)} < 0$. Поэтому в окрестности точки A

цилиндрическая фреза срезает припуск, в окрестности точки B – формообразует поверхность детали, а в окрестности точки C – удаляется от обработанной поверхности $Д$.

Очевидно, что изложенное справедливо также для случая шлифования плоскости $Д$ на плоскошлифовальном станке.

Аналогичный анализ может быть выполнен для любого вида формообразующей обработки деталей в машиностроении.

Уравнения характеристики E на движущейся с параметром огибания ω поверхности $F(X_1, Y_1, Z_1)=0$ исходя из этого условия (см. рис. 5.8) записываются так:

$$F(X_1, Y_1, Z_1, \omega)=0; \qquad \mathbf{N}\cdot\mathbf{V}_{1-2}=0$$

или в проекциях:

$$F(X_1, Y_1, Z_1, \omega)=0; \qquad N_x V_{1-2.x}+N_y V_{1-2.y}+N_z V_{1-2.z}=0.$$

Точки характеристики E удовлетворяют условию перпендикулярности вектора нормали $\mathbf{N}$ вектору скорости $\mathbf{V}_{1-2}$ относительного движения.

Нормаль $\mathbf{N}$ может быть представлена как векторное произведение векторов, касательных к координатным линиям на поверхности $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{N}=\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial U_1}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial V_1}$. Следовательно скалярное произведение $\mathbf{N}\cdot\mathbf{V}_{1-2}$ двух векторов можно представить как смешанное произведение $\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1}\cdot\mathbf{V}_{1-2}$ трех векторов. Скорость относительного движения поверхностей с некоторым параметром ω равна:

$$\mathbf{V}_{1-2}^{(\omega)}=\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \omega}=\frac{\partial X_1}{\partial \omega}\mathbf{i}+\frac{\partial Y_1}{\partial \omega}\mathbf{j}+\frac{\partial Z_1}{\partial \omega}\mathbf{k}.$$

Уравнение касания $\mathbf{N}\cdot\mathbf{V}_{1-2}^{(\omega)}=\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1}\cdot\mathbf{V}_{1-2}^{(\omega)}=0$ можно записать в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial U_1} & \dfrac{\partial Y_1}{\partial U_1} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial U_1} \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial V_1} & \dfrac{\partial Y_1}{\partial V_1} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial V_1} \\ \dfrac{\partial Z_1}{\partial \omega} & \dfrac{\partial Y_1}{\partial \omega} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial \omega} \end{vmatrix}=0.$$

Выполнив необходимые преобразования, получим:

$$\frac{\partial X_1}{\partial U_1}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial V_1}\cdot\frac{\partial Z_1}{\partial \omega}-\frac{\partial Y_1}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial Z_1}{\partial V_1}\right)-\frac{\partial Y_1}{\partial U_1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial V_1}\frac{\partial Z_1}{\partial \omega}-\frac{\partial X_1}{\partial \omega}\frac{\partial Z_1}{\partial V_1}\right)+\frac{\partial Z_1}{\partial U_1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial V_1}\frac{\partial Y_1}{\partial \omega}-\frac{\partial X_1}{\partial \omega}\frac{\partial Y_1}{\partial V_1}\right)=0.$$

Это уравнение характеристики E.

При использовании кинематического метода достаточное условие существованияе огибающей записывается исходя из следующего.

Пусть некоторая регулярная поверхность $\mathbf{r}_1$ в системе координат $X_1Y_1Z_1$ задана уравнением вида $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(U_1, V_1)\in C^2$. Семейство $\mathbf{r}_1(\omega)$ этих поверхностей в системе координат $X_2Y_2Z_2$ представлено уравнением $\mathbf{r}_1(\omega)=\mathbf{r}_1(U_1, V_1, \omega)$, $\omega^{(\min)}\le\omega\le\omega^{(\max)}$. Если в некоторой точке выполняются условия:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_1(\omega)}{\partial U_1(\omega)}\times\frac{\partial \mathbf{r}_1(\omega)}{\partial V_1(\omega)}\right)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_1(\omega)}{\partial \omega}= f\left(U_1(\omega),V_1(\omega),\omega\right)=0,\qquad f\in C^1;$$

или

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_1(\omega)}{\partial \mathbf{r}_1(\omega)}\times\frac{\partial \mathbf{r}_1(\omega)}{\partial V_1(\omega)}\right)\cdot\mathbf{V}_{1-2}= f\left(U_1(\omega),V_1(\omega),\omega\right)=0,\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial U_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial V_1}\right)^2\neq 0;$$

$$g_1\left(U_1(\omega),V_1(\omega),\omega\right)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial U_1} & \dfrac{\partial f}{\partial V_1} & \dfrac{\partial f}{\partial \omega} \\ \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1}\right) & \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1}\right)\cdot\mathbf{V}_{1-2} \\ \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1}\right) & \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1}\right)^2 & \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1}\right)\cdot\mathbf{V}_{1-2} \end{vmatrix}\neq 0,$$

то огибающая существует и может быть представлена уравнениями вида $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(U_1,\,V_1,\,\omega)$ и $\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \omega}=0$.

5.2.5. Огибающая двухпараметрического семейства поверхностей. Огибающая зависящего от двух параметров ω_1 и ω_2 семейства поверхностей в каждой своей точке касается одной поверхности семейства с параметрами $\omega_1(U,V)$, $\omega_2(U,V)$. Во всех точках каждой из поверхностей семейства параметры ω_1 и ω_2 постоянны по величине, но изменяются в различных точках огибающей.

5.2.5.1. *Огибающая двухпараметрического семейства поверхностей, заданных уравнениями в векторной форме.* При выполнении соотношения $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\neq 0$, необходимые условия существования огибающей семейства поверхностей $\mathbf{r}(U,V,\omega_1,\omega_2)$ записываются так:

$$\psi_1=\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega_1}\right)=0;\qquad \psi_2=\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega_2}\right)=0,$$

а достаточные – дополняются необходимостью выполнение условий

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial A} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial B} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial A} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial B} \\ \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\right)^2 & \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial V} & \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega_1} & \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial U}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega_2} \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial U} & \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\right)^2 & \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega_1} & \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega_2} \end{vmatrix}\neq 0,\qquad \frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(\omega_1,\omega_2)}\neq 0.$$

Если поверхность $\mathbf{r}(U,V,\omega_1,\omega_2)$ может совершать два независимых одно от другого движения и в результате каждого из этих движений в отдельности образуются характеристики E_1 и E_2 на $\mathbf{r}(U,V,\omega_1,\omega_2)$, то на пересечении этих характеристик лежит характеристическая точка поверхности. В характеристической точке выполняются условия $\mathbf{N}\cdot\mathbf{V}_{1-2}^{(\omega_1)}=0$ и $\mathbf{N}\cdot\mathbf{V}_{1-2}^{(\omega_2)}=0$.

5.2.5.2. *Огибающая двухпараметрического семейства поверхностей, заданных уравнениями в неявной форме.* Для семейства поверхностей, заданного уравнением вида $f(X,Y,Z,\omega_1,\omega_2)=0$, где

$\left|\frac{\partial f}{\partial X}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial Z}\right|\neq 0$, необходимым условием существования огибающей является совместимость системы уравнений:

(5.38) $f(X,Y,Z,\omega_1,\omega_2)=0$; $\frac{\partial f}{\partial \omega_1}(X,Y,Z,\omega_1,\omega_2)=0$; $\frac{\partial f}{\partial \omega_2}(X,Y,Z,\omega_1,\omega_2)=0$,

а достаточным – также выполнение условий

$$\frac{D\left(f,\frac{\partial f}{\partial \omega_1},\frac{\partial f}{\partial \omega_2}\right)}{D(X,Y,Z)}\neq 0, \qquad \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial \omega_1},\frac{\partial f}{\partial \omega_2}\right)}{D(\omega_1,\omega_2)}\neq 0.$$

Исключая из уравнений (38) параметры ω_1 и ω_2, находим уравнение огибающей двухпараметрического семейства поверхностей.

Если на огибающей поверхности существует ребро возврата, для его нахождения достаточно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} f(X,Y,Z,\omega_1,\omega_2)=0; & \frac{\partial f}{\partial \omega_1}(X,Y,Z,\omega_1,\omega_2)=0; & \frac{\partial f}{\partial \omega_2}(X,Y,Z,\omega_1,\omega_2)=0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_1^2}(X,Y,Z,\omega_1,\omega_2)=0; & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}(X,Y,Z,\omega_1,\omega_2)=0; & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_2^2}(X,Y,Z,\omega_1,\omega_2)=0. \end{cases}$$

Из уравнений (38) следует, что огибающая касается каждой из поверхностей семейства только в одной точке.

Исходя из (38) можно показать, что любая поверхность может быть представлена как огибающая двухпараметрического семейства собственных касательных плоскостей.

Методы нахождения огибающей поверхности, основанные на дифференциальном подходе, позволяют находить только точки локального касания огибающей с поверхностями семейства при фиксированных значениях параметра огибания ω. Может иметь место случай, когда при некотором $\omega = Const$ в глобальной окрестности точки касания имеет место интерференция огибаемой и огибающей поверхностей.

Дифференциальный подход к определению огибающей семейства поверхностей применим для случаев, когда уравнение огибаемой поверхности в точке касания с огибающей дифференцируемо. Вследствие того, что используемые в приложениях поверхности не безграничны, могут быть представлены кусочно и др., поверхность детали могут формировать в том числе и точки, которые принадлежат линиям излома и которые являются особыми точками на огибаемой поверхности.

При задании огибающей поверхности только уравнениями вида (30), (32), (38) и т.п., открытым остается вопрос, по какую сторону находится материальный носитель формы огибающей поверхности. Системы уравнений (30), (32), (38) и др. могут иметь корни, соответствующие касанию “изнутри” – с закрытой стороны поверхности (см. рис. 1.6). Такое касание невозможно при касании материальных тел, носителей формы поверхности. Для выделения корней подобного рода и исключения их из дальнейшего рассмотрения требуется выполнять дополнительный анализ, который часто оказывается трудно алгоритмизируемым (Несмелов И.П., Гольдфарб В.И., 1983).

В общей теории огибающих рассматриваются семейства поверхностей, изменяющих свою форму при изменении параметров огибания. Результаты этих исследований могут быть использованы в теории формообразования поверхностей деталей, в частности, когда рассматривается формообразование поверхности детали инструментами с изменяемыми в процессе обработки параметрами исходной инструментальной поверхности (Родин П.Р., Линкин Г.А., Татаренко В.Н., 1976; Радзевич С.П., 1987, 1988, 1989; и др.).

5.3. Способы образования исходных инструментальных поверхностей, допускающих движение "*самих по себе*"

Обобщенный метод образования исходных инструментальных поверхностей (см. выше, раздел 5.1), позволяет определить вид и расчитать наивыгоднейшие параметры поверхности $И$ инструмента, предназначенного для формообразования заданной поверхности $Д$ детали. Он применим для профилирования инструмента, используемого как при "*гибкой*" кинематике формообразования, воспроизводимой при обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ, так и при "*жесткой"* кинематике, свойственной обработке деталей с рабочими поверхностями относительно простой формы, обычно[1] допускающими движение "*самих по себе*". В первом случае спрофилировать фасонный инструмент нельзя иначе, как на основе $\mathbb{R}$-отображения поверхностей $Д$ и $И$, тогда как во втором случае наряду в обобщенным методом могут быть использованы более простые подходы, основанные на разработанных Т.Оливье[2] (Olivier, T., 1842) принципах образования огибающих поверхностей.

В соответствие с первым принципом Оливье (Olivier, T., 1842; Левитский Н.И., 1990) обе сопряженные (взаимоогибаемые) поверхности образуются одной (вспомогательной) производящей поверхностью, форма которой отличается от формы сопрягаемых поверхностей. В соответствие со вторым принципом Оливье вспомогательная производящая поверхность совпадает с одной из сопрягаемых поверхностей (Olivier, T., 1842; Левитский Н.И., 1990, с. 449).

В соответствие с рассматриваемыми ниже способами образовывают исходные инструментальные поверхности $И$, преимущестуенно допускающие движение "*самих по себе*". Для большинства случаев обработки деталей в машиностроении исходные инструментальные поверхности такого типа представляют интерес в первую очередь.

Рассматривая способы образования исходных инструментальных поверхностей, исходим из того, что обрабатываемая поверхность $Д$ первична, а необходимая геометрическая информация о ней задана и представлена в удобной форме (см. гл. 1). Определена (выбрана по рис. 2.14 и рис. 2.15) кинематическая схема формообразования и обратная ей кинематическая схема профилирования (см. гл. 2).

Воспользовавшись операторами линейного преобразования (операторами предельного перехода от неподвижной системы координат, связанной с деталью, к подвижной системе координат, связанной с инструментом; см. гл. 3), можно образовать и описать аналитически исходную инструментальную поверхность $И$ как огибающую последовательных положений поверхности $Д$ в относительном движении детали и инструмента, совершаемыми ими в процессе обработки. Если при этом поставить задачу не только спрофилировать фасонный инструмент и определить соответствующие параметры кинематической схемы формообразования (т.е. найти *позитивное* решение задачи), а дополнительно потребовать, чтобы спрофилированный инструмент и параметры кинематической схемы формообразования были *наивыгоднейшими* (т.е. получить *оптимальное* решение задачи), для этого потребуется привлечь методы аналитического описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ (см. гл. 4).

Чтобы спроектировать инструмент для обработки заданной детали, необходимо иметь полную информацию о геометрии обрабатываемой поверхности $Д$ – деталь первична.

Проектирование режущего инструмента производится на базе исходной инструментальной поверхности – образование поверхности $И$ является отправным пунктом в решении инженерной задачи проектирования режущего инструмента.

В процессе обработки детали ее поверхность $Д$ и система координат $X_u Y_u Z_u$, с которой впоследствие будет связан инструмент (помним, что поверхность $И$ инструмента пока еще не найдена), совершают одна

---

[1] Обработанная поверхность детали, как и исходная инструментальная поверхность, может не допускать движения "*самой по себе*" (см., например, Антонова М.П., "Применение принципов обкатки для обработки поверхностей двойной кривизны". – В кн.: *Усовершенствование зубообрабатывающего инстирумента. Материалы конференции*. – М.: НИИМАШ, 1969, с.425-437).

[2] **Оливье**, Теодор (***Olivier, Theodore***) (21.1.1793 - 5.8.1853) – французский математик и механик. Родился в Лионе. Окончил Политехническую школу в Париже и Артиллерийскую школу в Метце. Служил в армии артиллерийским офицером. В 1821 приглашен в Швецию для участия в организации Политехнической школы. Преподавал в Военной академии в Мариенборге. По возвращении во Францию принял деятельное участие в организации в Париже Центральной школы искусств и ремесел. Профессор начертательной геометрии в Консерватории искусств и ремесел, репетитор Политехнической школы. Исследования относятся к начертательной и дифференциальной геометрии. В 1816 начал исследования пространственных зацеплений; является одним из основоположников современной теории зацеплений. В качестве общего способа получения любых зацеплений предложил способ огибающих поверхностей и обосновал возможность получения таких поверхностей при помощи вспомогательной поверхности при линейном и при точечном их касании.

относительно другой некоторое движение. В результате этого движения поверхность $Д$ занимает в системе координат $X_u Y_u Z_u$ инструмента последовательные положения, огибающая к которым является исходной инструментальной поверхностью инструмента, предназначенного для обработки заданной детали.

5.3.1. Образование исходной инструментальной поверхности при однопараметрической кинематической схеме формообразования. К однопараметрическим кинематическим схемам формообразования отнесены схемы, движение инструмента относительно детали в которых является однопараметрическим. Соответственно и обратная схеме формообразования кинематическая схема профилирования (см. выше, определение 2.10 на с. 134) также будет однопараметрической. Движение поверхности $Д$ (в первом случае) и движение поверхности $И$ (во втором случае), приводящие эти поверхности к движению "*самих по себе*", из рассмотрения исключаются.

Образование исходной инструментальной поверхности при использовании однопараметрической кинематической схемы формообразования рассмотрим на примере обработки круглого валика радиуса $R_д$ (рис. 5.9.1, Родин П.Р., 1960). В процессе обработки заготовка круглого валика вращается вокруг своей оси $O_д$ с постоянной угловой скоростью $\omega_д$. Система координат $X_u Y_u Z_u$ инструмента вращается с угловой скоростью ω_u вокруг оси O_u, перекрещивающейся под прямым углом с осью $O_д$, и перемещается вдоль нее с некоторой подачей S_u. Исходная инструментальная поверхность $И$ образуется как огибающая последовательных положений поверхности $Д$ детали в ее движении относительно системы координат $X_u Y_u Z_u$, с которой впоследствие будет связан инструмент. Поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой по линии – вдоль характеристики E, которая в рассматриваемом примере представляет собой дугу $\cup ABC$ окружности радиуса $R_д$.

Исходная инструментальная поверхность может быть также образована как геометрическое место последовательных положений совершающей соответствующее однопараметрическое движение характеристики E: в рассматриваемом примере это вращение характеристики вокруг оси O_u.

На базе исходной инструментальной поверхности $И$ в виде тора (см. рис. 5.9.1) могут быть спроектированы различные инструменты, предназначенные для обработки круглого валика – дисковые фасонные фрезы, шлифовальные круги и пр.

Если ограничиться рассмотрением случая задания поверхности $Д$ детали уравнением в неявной форме:

$$Д(X_д, Y_д, Z_д) = 0,$$

ее текущее положение в движении с одним параметром Ω описывается уравнением вида:

$$Д(X_д, Y_д, Z_д, \Omega) = 0.$$

Рассматривая это уравнение совместно с уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} Д(X_д, Y_д, Z_д, \Omega) = 0,$$

получим уравнение исходной инструментальной поверхности $И$:

$$\left.\begin{array}{l} Д(X_д, Y_д, Z_д, \Omega) = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial \Omega} Д(X_д, Y_д, Z_д, \Omega) = 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \quad И.$$

Исключив из этих уравнений параметр огибания Ω, после преобразований получим уравнение исходной инструментальной поверхности, которое может быть приведено к виду $И = И(X_u, Y_u, Z_u) = 0$. В рассматриваемом примере она представляет собой участок поверхности тора, радиус R_u образующей окружности которого равен радиусу $R_д$ круглого валика ($R_д \equiv R_u$), а радиус направляющей окружности – расстоянию H между осями вращения детали и инструмента в процессе обработки.

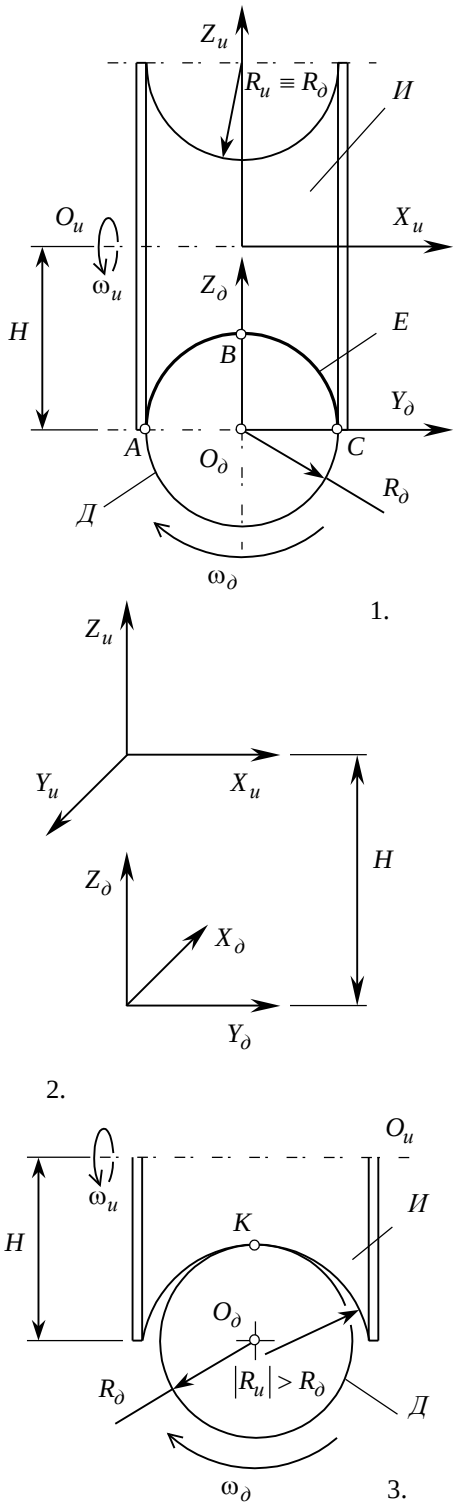


Рис. 5.9. Образование исходной инструментальной поверхности при однопараметрической кинематической схеме формообразования.

Если поверхность $Д$ задана уравнениями в векторной, параметрической или в иной форме, нахождение исходной инструментальной поверхности производится аналогично (см. выше, раздел 5.2). В случае, когда формообразуемая поверхность $Д$ задана дискретно, можно воспользоваться результатами, приведенными в гл. 1 (см. раздел 1.2.5).

Способ образования исходных инструментальных поверхностей при однопараметрической кинематической схеме формообразования дает качественный, но не дает количественный ответ на вопрос об относительном положении детали и инструмента в процессе обработки: открытым остается вопрос установления наивыгоднейших значений параметров кинематической схемы формообразования. В приведенном примере (см. рис. 5.9.1) такими параметрами являются расстояние H (рис. 5.9.2) между осями O_∂ и O_u вращения детали и инструмента (между осями X_u и X_∂ систем координат $X_uY_uZ_u$ инструмента и $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ и детали) и величина угла χ перекрещивания этих осей. Точное аналитическое решение этой задачи (задачи определения наивыгоднейших значений параметров кинематической схемы профилирования и на этой основе расчета параметров поверхности $И$ наивыгоднейшего инструмента, предназначенного для обработки заданной детали) может быть получено исходя из анализа геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ (исходя из условия обеспечения в процессе обработки детали требуемой степени конформности исходной инструментальной поверхности $И$ к поверхности $Д$ (см. гл. 4)).

В реальном процессе обработки всегда имеют место погрешности относительного положения детали и инструмента. Это вынуждает целенаправленно изменять степень конформности поверхностей $Д$ и $И$. На примере схемы формообразования (рис. 5.9.3), когда степень конформности уменьшена и поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой в одной точке (а не вдоль характеристики – в этом случае характеристика E стягивается в точку K), можно исследовать влияние на точность и качество обработки степени конформности поверхностей $Д$ и $И$, погрешностей относительного положения детали и инструмента, (в т.ч. когда оси их вращения перекрещиваются под углом $\chi \neq 90^\circ$), чувствительности результирующей погрешности формообразования к величинам погрешностей наладок и пр.

При определении исходной инструментальной поверхности как огибающей последовательных положений поверхности детали относительные движения, приводящие поверхность $Д$ к движению "*самой по себе*", из рассмотрения исключаются – огибающая поверхности $Д$, совершающей такое движение, конгруэнтна самой поверхности $Д$ (см. раздел 2.4).

Способ образования исходных инструментальных поверхностей при однопараметрической кинематической схеме формообразования (см. рис.5.9) следует рассматривать как пример применения к решению задач профилирования инструмента второго принципа Оливье (Olivier, T., 1842) образования взаимоогибаемых поверхностей.

5.3.2. Образование исходной инструментальной поверхности при двухпараметрической кинематической схеме формо-

образования. К двухпараметрическим кинематическим схемам формообразования отнесены схемы, движение инструмента относительно детали в которых является двухпараметрическим. Соответственно и кинематическая схема профилирования (см. выше, определение 2.10, с. 134) также будет двухпараметрической.

Способ образования поверхностей $И$ инструментов при двухпараметрической кинематической схеме формообразования используется в случаях, когда относительное движение детали и инструмента, совершаемые ими в процессе обработки, можно представить как векторную сумму двух простых движений, а именно как сумму по разному ориентированных одно относительно другого двух вращательных или поступательного и вращательного движений, ни одно из которых не приводит поверхность $Д$ к движению "*самой по себе*". При решении обратной задачи теории формообразования поверхностей деталей из кинематической схемы формообразования исключаются движения, приводящие поверхность $И$ к движению "*самой по себе*".

Как и для однопараметрической кинематической схемы, образование исходной инструментальной поверхности при двухпараметрической кинематической схеме формообразования рассмотрим на примере обработки круглого валика (рис. 5.10). В процессе обработки заготовка круглого валика вращается вокруг своей оси $O_д$ с постоянной угловой скоростью $\omega_д$. Система координат $X_u Y_u Z_u$ инструмента вращается с угловой скоростью ω_u вокруг оси O_u, перекрещивающейся с осью $O_д$ под прямым углом. Считаем, что кинематическая схема формообразования известна – выбрана из рис. 2.14 (с. 141) или рис. 2.15 (с. 142).

Пусть результирующая скорость $\mathbf{V}_\Sigma$ относительного движения детали и инструмента, совершаемого ими в процессе обработки, разложена на две составляющие $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ (и равна $\mathbf{V}_\Sigma = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$).

Определим вспомогательную производящую поверхность T как огибающую последовательных положений поверхности $Д$ в ее движении со скоростью $\mathbf{V}_1$. Тогда огибающая последовательных положений вспомогательной производящей поверхности T в ее движении со скоростью $\mathbf{V}_2$ относительно системы координат $X_u Y_u Z_u$ будет исходной инструментальной поверхностью $И$ (в рассматриваемом примере скорость $\mathbf{V}_2$ представляет собой линейную скорость вращательного движения плоскости T вокруг оси $O_д - O_д$ с угловой скоростью ω_u). Поверхность $И$ инструмента, найденная в соответствие с рассматриваемым способом, касается поверхности $Д$, как правило, в одной точке K.

Действительно, характеристикой поверхностей $Д$ и T является линия E_1. Вспомогательная производящая поверхность T касается исходной инструментальной поверхности $И$ по характеристике E_2. Характеристики E_1 и E_2 расположены на вспомогательной производящей поверхности T и в общем случае пересекаются в некоторой точке K (характеристики E_1 и E_2 не могут не иметь общих точек, т.к. в этом случае образовать исходную инструментальную поверхность невозможно в принципе). Сопрягаемые поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой в этой же точке K. В частных (вырожденных) случаях характеристики E_1 и E_2 могут совпадать одна с другой – в этом случае касание поверхностей $Д$ и $И$ становится линейчатым.

При движении поверхностей $Д$ и T одна относительно другой со скоростью $\mathbf{V}_1$ характеристика E_1 на поверхности $Д$ занимает неизменное положение, но перемещается при этом относительно поверхности T. При вращении плоскости T вокруг оси $O_u - O_u$ инструмента характеристика E_2 на поверхности T занимает неизменное положение, но движется относительно поверхности $И$. Поэтому в общем случае, когда в реальном процессе обработки воспроизводятся все движения, рассматриваемые при определении поверхности $И$ инструмента (см. рис. 5.10), точка K как точка пересечения характеристик E_1 и E_2, будет подвижной.

Таким образом использование способа образования исходных инструментальных поверхностей при двухпараметрической кинематической схеме формообразования приводит к тому, что поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой в точке. Поэтому инструментами, поверхность $И$ которых образована в соответствие с рассматриваемым способом, в течение конечного промежутка времени нельзя геометрически точно формообразовать поверхность $Д$ детали – как правило, имеет место дискретное ее формообразование с некоторой результирующей погрешностью h_Σ. Погрешность формообразования h_Σ не должна превышать допуск $[h]$ на точность формообразования, т.е. должно выполняться условие $h_\Sigma \le [h]$.

В частном случае может иметь место линейное касание поверхностей $Д$ и $И$ – для этого характеристики E_1 и E_2 должны совпадать одна с другой. При этом поверхность $Д$ может быть формообразована геометрически точно.

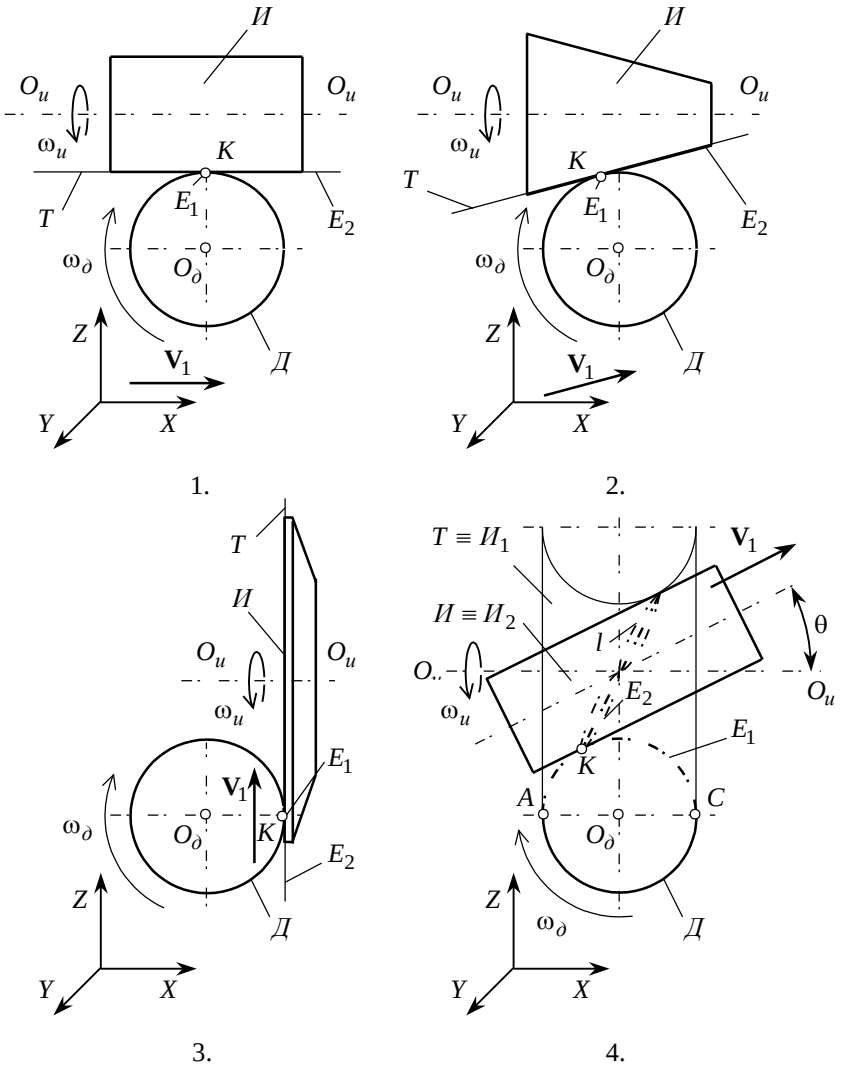


Рис. 5.10. Примеры образования исходной инструментальной поверхности при двухпараметрической кинематической схеме формообразования (Родин, П.Р., 1960).

Положение точки K зависит, в том числе, от характера и направления движения вспомогательной производящей поверхности T со скоростью $\mathbf{V}_2$, от которого зависит форма исходной инструментальной поверхности: цилиндр, конус, плоскость и пр. (рис. 5.10.1 – рис. 5.10.3).

Вспомогательная производящая поверхность T касательна к обрабатываемой поверхности $Д$ детали. Поэтому она может быть использована не только в качестве вспомогательной производящей поверхности, но и в качестве исходной инструментальной поверхности, которую в этом случае следует рассматривать как поверхность, образованную в соответствие со способом при однопараметрической кинематической схеме формообразования.

Для образования исходной инструментальной поверхности (рис. 5.10.4) можно сначала найти поверхность $И_1$ как огибающую последовательных положений поверхности $Д$ детали в ее движении относительно системы координат $X_u Y_u Z_u$, с которой впоследствие будет связан инструмент, т.е. в соответствие со способом (см. рис. 5.10.1). Далее поверхности $И_1$ сообщается некоторое движение в пространстве (Родин П.Р., 1960). При этом исходная инструментальная поверхность $И_2$ находится как огибающая последовательных положений поверхности $И_1$.

Рассматривая пример обработки цилиндрической поверхности $Д$ круглого валика и образуя исходную инструментальную поверхность $И_2$ таким путем (рис. 5.10.4), придадим поверхности тора $И_1$ поступательное движение со скоростью $\mathbf{V}_1$ под некоторым углом θ к оси $O_u - O_u$. Огибающей последовательных положений поверхности $И_1$ является сложная цилиндрическая поверхность $И_2$, в каждый момент времени касающаяся поверхности детали в точке K. Точка K меняет свое положение как на исходной инструментальной поверхности $И_2$, так и на поверхности $Д$ обрабатываемой детали. Замкнутая кривая l является траектории точки K в ее движении по вспомогательной производящей поверхности T.

Поверхность $И_1$ (рис. 5.10.4) можно рассматривать как вспомогательную производящую поверхность T при образовании поверхности $И$ инструмента в соответствие со способом (см. рис. 5.9) – отличие заключается только в обозначениях. Вспомогательная производящая поверхность T и исходная инструментальная поверхность $И_1$ взаимно эквивалентны ($T \equiv И_1$), а рассматриваемые технические решения неотличимы одно

от другого. Так, при проектировании зуборезной гребенки находим, что ее исходная инструментальная поверхность, образованная в соответствие со способом (см. рис. 5.9), представляет собой поверхность прямобочной рейки $И$. Если же проектировать эвольвентную червячную фрезу, то точно такая же прямобочная рейка служит вспомогательной производящей поверхностью $Т$ при образовании исходной инструментальной поверхности в соответствие со способом (см. рис. 5.10). В рассматриваемом примере поверхности $И$ и $Т$ идентичны одна другой и рейка $Т$ может рассматриваться как поверхность $И_1 \equiv Т$.

Если ограничиться рассмотрением случая, когда поверхность $Д$ детали задана уравнением в неявной форме, ее текущее положение относительно неподвижной системы координат XYZ при движении со скоростью $\mathbf{V}_1$ (с параметром огибания Ω_1) записывается так:

$$Д(X_д, Y_д, Z_д, \Omega_1) = 0.$$

Рассматривая это уравнение совместно с уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial \Omega_1} Д(X_д, Y_д, Z_д, \Omega_1) = 0,$$

находим уравнение вспомогательной производящей поверхности $Т$:

$$\left.\begin{aligned} &Д(X_Т, Y_Т, Z_Т, \Omega_1) = 0; \\ &\frac{\partial}{\partial \Omega_1} Д(X_Т, Y_Т, Z_Т, \Omega_1) = 0; \end{aligned}\right\} \Rightarrow Т.$$

Исключив из этих уравнений параметр огибания Ω_1, после преобразований приходим к уравнению вспомогательной производящей поверхности $Т$ в виде:

$$Т = Т(X_Т, Y_Т, Z_Т) = 0.$$

Поступая аналогично, а именно, перемещая в пространстве вспомогательную производящую поверхность $Т$ со скоростью $\mathbf{V}_2$ (с параметром огибания Ω_2) получим уравнение исходной инструментальной поверхности $И$:

$$\left.\begin{aligned} &Т(X_Т, Y_Т, Z_Т, \Omega_2) = 0; \\ &\frac{\partial}{\partial \Omega_2} Т(X_Т, Y_Т, Z_Т, \Omega_2) = 0; \end{aligned}\right\} \Rightarrow И,$$

которое после преобразований приводится к виду:

$$И = И(X_и, Y_и, Z_и) = 0.$$

Текущее положение поверхности $Д$ инструмента, совершающего двухпараметрическое движение, можно задать уравнением:

$$Д(X_д, Y_д, Z_д, \Omega_1, \Omega_2) = 0.$$

Тогда исходная инструментальная поверхность $И$ определится из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial, \Omega_1, \Omega_2)=0 \\ &\frac{\partial}{\partial\Omega_1} Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial, \Omega_1, \Omega_2)=0 \\ &\frac{\partial}{\partial\Omega_2} Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial, \Omega_1, \Omega_2)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad И,$$

которая также может быть преобразована к виду $И = И(X_u, Y_u, Z_u)=0$.

Результирующее относительное движение поверхностей $Д$ и $И$ не обязательно раскладывать на составляющие. Его можно рассматривать как сложное движение с результирующим параметром огибания Ω_Σ. В этом случае поверхность $И$ инструмента описывается системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} &Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial, \Omega_\Sigma)=0; \\ &\frac{\partial}{\partial\Omega_\Sigma} Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial, \Omega_\Sigma)=0; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad И,$$

которая также приводится к виду $И = И(X_u, Y_u, Z_u)=0$.

Если поверхность $Д$ задана уравнениями в векторной, параметрической или в иной форме, нахождение исходной инструментальной поверхности производится аналогично (см. выше, раздел 5.2).

Образование исходной инструментальной поверхности непосредственно по результирующему относительному движению, осуществляемому со скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$, менее удобно, поскольку связано с необходимостью выполнения громоздких преобразований – их удобнее выполнять поэтапно. Это очевидно из примера образования исходной инструментальной поверхности червячной фрезы – ее поверхность $И$ можно образовать как по способу при однопараметрической, так и по способу при двухпараметрической кинематической схеме формообразования. В обоих случаях результат будет тот же, но второй способ в данном случае предпочтительнее.

При определении поверхности $И$ инструмента как огибающей последовательных положений поверхности детали относительные движения, которые приводят поверхность $Д$ детали или вспомогательную поверхность $Т$ к движению "*самой по себе*", во внимание не принимаются – огибающая как поверхности $Д$, так и поверхности $Т$, совершающей такое движение, конгруэнтна самой поверхности $Д$ и $Т$ соответственно (см. раздел 2.4).

Способ образования исходной инструментальной поверхности при двухпараметрической кинематической схеме формообразования дает качественный, но не дает количественный ответ на вопрос об относительном положении детали и инструмента в процессе обработки. Открытым остается вопрос выбора параметров кинематической схемы формообразования. Точное аналитическое решение этой задачи (задачи определения наивыгоднейших параметров кинематической схемы профилирования и на этой основе расчета параметров геометрии поверхности *И* наивыгоднейшего фасонного режущего инструмента) может быть получено исходя из аналитического описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ и обеспечения в процессе обработки требуемой степени конформности исходной инструментальной поверхности к поверхности детали (см. гл. 4).

На примере кинематических схем формообразования (см. рис. 5.10) также можно исследовать влияние на точность и качество обработки изменения степени конформности поверхностей $Д$ и $И$, как это сказывается на чувствительности результирующей погрешности формообразования к величинам погрешностей наладок и др.

Способ образования исходных инструментальных поверхностей при двухпараметрической кинематической схеме формообразования (см. рис.5.10) можно рассматривать как пример применения к решению задач профилирования инструмента первого принципа Оливье (Olivier, T., 1842) образования взаимоогибаемых поверхностей.

5.3.3. Образование исходной инструментальной поверхности при многопараметрической кинематической схеме формообразования. Скорость $\mathbf{V}_\Sigma$ результирующего относительное движение поверхностей $Д$

и $И$ можно представить как сумму скоростей $\mathbf{V}_i$ конечного (в общем случае больше двух) числа элементарных движений: $\mathbf{V}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i$ – принципиальных ограничений на количество элементарных движений нет[1].

Если движение со скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$ раскладывается на n составляющих, можно образовать $(n-1)$ вспомогательных производящих поверхностей T_1, T_2, …, T_{n-1}. Последняя вспомогательная производящая поверхность T_n конгруэнтна исходной инструментальной поверхности $И$ (т.е. $T_n \equiv И$). Развитие принципов Оливье в этом направлении подтверждается возможностью образования сопряженных поверхностей при помощи двух вспомогательных производящих поверхностей (Левитский Н.И., 1990), что следует рассматривать как третий принцип образования сопряженных поверхностей (Николаев А.Ф., 1953). Однако увеличение количества элементарных движений приводит к образованию сложных кинематических схем формообразования. В технологии формообразующей обработки поверхностей деталей исходная инструментальная поверхность образуется, как правило, при помощи не более, чем двух вспомогательных производящих поверхностей (Кирсанов Г.Н., 1977, 1978).

Если исходить из того, что поверхность $Д$ детали задана в параметрической форме уравнениями вида (1.44):

$$X_\partial = X_\partial(U_\partial, V_\partial); \qquad Y_\partial = Y_\partial(U_\partial, V_\partial) \qquad Z_\partial = Z_\partial(U_\partial, V_\partial)$$

и известно, что кинематическая схема формообразования состоит из n элементарных движений Ω_i (здесь $i = 1, 2, \ldots, n$), исходная инструментальная поверхность $И$ находится как решение системы уравнений:

$$X_u = X_\partial(U_\partial, V_\partial, \Omega_1, \ldots, \Omega_i, \ldots, \Omega_n);$$

$$Y_u = Y_\partial(U_\partial, V_\partial, \Omega_1, \ldots, \Omega_i, \ldots, \Omega_n);$$

$$Z_u = Z_\partial(U_\partial, V_\partial, \Omega_1, \ldots, \Omega_i, \ldots, \Omega_n);$$

(5.39)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial \Omega_1} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial \Omega_1} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial \Omega_1} \end{vmatrix} = 0; \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial \Omega_i} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial \Omega_i} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial \Omega_i} \end{vmatrix} = 0; \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial \Omega_n} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial \Omega_n} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial \Omega_n} \end{vmatrix} = 0,$$

где первые три уравнения определяют текущее положение поверхности $Д$ в ее многопараметрическом движении относительно системы координат инструмента, а каждое последующее – характеристику E_i (здесь E_1 – характеристика поверхности $Д$ детали и первой вспомогательной производящей поверхности T_1; E_i – характеристика T_{i-1} и T_i вспомогательных производящих поверхностей и E_n – характеристика последней вспомогательной производящей поверхности T_{n-1} и исходной инструментальной поверхности $И$).

Уравнения (39) дают возможность решить прямую задачу теории формообразования поверхностей деталей, т.е позволяют найти поверхность $И$ инструмента при любом количестве элементарных движений в принципиальной кинематической схеме формообразования. Их следует рассматривать как необходимые условия существования исходной инструментальной поверхности.

Аналогичное имеет место при решении обратной задачи теории формообразования поверхностей деталей, когда после выполнения необходимых преобразований уравнения поверхности $И$ инструмента приводятся к параметрическому виду:

$$X_u = X_u(U_u, V_u); \qquad Y_u = Y_u(U_u, V_u) \qquad Z_u = Z_u(U_u, V_u).$$

[1]Известны, например, способы затылования цилиндрических и конических червячных фрез, кинематическая схема формообразования которых состоит из четырех, пяти и даже шести элементарных движений.

В этом случае формообразованная поверхность детали находится путем решения системы уравнений:

$$X_u = X_\partial(U_\partial, V_\partial, \omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n);$$

$$Y_u = Y_\partial(U_\partial, V_\partial, \omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n);$$

$$Z_u = Z_\partial(U_\partial, V_\partial, \omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n);$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial \omega_1} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial \omega_1} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial \omega_1} \end{vmatrix} = 0; \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial \omega_i} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial \omega_i} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial \omega_i} \end{vmatrix} = 0; \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} \\ \frac{\partial X_\partial}{\partial \omega_n} & \frac{\partial Y_\partial}{\partial \omega_n} & \frac{\partial Z_\partial}{\partial \omega_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.40}$$

где первые три уравнения определяют текущее положение поверхности $И$ в ее движении относительно системы координат детали, а каждое последующее уравнения – характеристику E_i.

В уравнениях (39) и (40) через ω_i обозначен i-й параметр огибания. Он отличается от соответствующего ему Ω_i-го параметра огибания направлением движения, т.е. знаком.

Уравнения (2.29) и (2.30) дают возможность решить обратную задачу теории формообразования поверхностей деталей – позволяют найти фактически формообразованную поверхность $Д$ детали спрофилированным инструментом при известной многопараметрической кинематической схеме формообразования.

Каждая дополнительная степень свободы в принципиальной кинематической схеме формообразования приводит к появлению в системах уравнений (39) и (40) дополнительного определителя с частными производными. Следствием этого являются громоздкие преобразования при решении как прямой, так и обратной задач. Исключение из кинематической схемы формообразования элементарных движений приводит к исключению соответствующего количества определителей в системах уравнений (39) и (40), что упрощает решение задачи. Принципиально относительно простая задача нахождения огибающей при решении прямой и обратной задач теории формообразования поверхностей деталей часто сопряжена с трудностями технического характера.

5.3.4. Определение характеристики поверхности детали и исходной инструментальной поверхности. Пусть в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ уравнение поверхности детали задано уравнением в неявной форме $Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial) = 0$. Требуется найти уравнение сопряженной с ней исходной инструментальной поверхности.

Особенностью рассматриваемого подхода является возможность нахождения параметров характеристики E в системе координат, где это выполняется наиболее просто. Например, для определения характеристики в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ не возникает необходимость предварительного перехода к системе координат $X_u Y_u Z_u$ инструмента, решения в этой системе координат системы уравнений вида

$$\begin{cases} И(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 0; \\ \frac{\partial И}{\partial \omega_1}(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 0; \\ \frac{\partial И}{\partial \omega_2}(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 0; \\ \vdots \\ \frac{\partial И}{\partial \omega_n}(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 0 \end{cases}$$

и обратного перехода затем к системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ детали.

Искомые уравнения характеристики записываются так:

$$Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)=0;$$

$$\frac{\partial Д}{\partial \omega_1}\left[X_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), Y_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), Z_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\right]=0;$$

(5.41) $$\frac{\partial Д}{\partial \omega_2}\left[X_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), Y_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), Z_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\right]=0;$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial Д}{\partial \omega_n}\left[X_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), Y_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), Z_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\right]=0.$$

В этих уравнениях функции

(5.42) $$\begin{aligned} X_\partial &= X_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n);\\ Y_\partial &= Y_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n);\\ Z_\partial &= Z_\partial(X_u, Y_u, Z_u, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \end{aligned}$$

выражены через операторы преобразований координат (см. гл. 3).

При таком подходе к определению характеристики E известной считается исходная инструментальная поверхность $И(X_u, Y_u, Z_u)=0$ и параметры кинематической схемы формообразования.

Уравнение поверхности детали рассматривается в виде $Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)=0$, где X_∂, Y_∂, Z_∂ – функции (42), описывающие семейство поверхностей $И$ с параметрами ω_1, ω_2, …, ω_i, …, ω_n. Очевидно, что для нахождения поверхности $Д$ как огибающей этого семейства необходимо рассмотреть (42) совместно с уравнениями, полученными дифференцированием $Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)=0$, считая X_∂, Y_∂, Z_∂ функциями X_u, Y_u, Z_u.

Уравнения (41) запишем в форме:

$$Д(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)=0;$$

$$\frac{\partial Д}{\partial X_\partial}\cdot\frac{\partial X_\partial}{\partial \omega_1}+\frac{\partial Д}{\partial Y_\partial}\cdot\frac{\partial Y_\partial}{\partial \omega_1}+\frac{\partial Д}{\partial Z_\partial}\cdot\frac{\partial Z_\partial}{\partial \omega_1}=0;$$

(5.43) $$\frac{\partial Д}{\partial X_\partial}\cdot\frac{\partial X_\partial}{\partial \omega_2}+\frac{\partial Д}{\partial Y_\partial}\cdot\frac{\partial Y_\partial}{\partial \omega_2}+\frac{\partial Д}{\partial Z_\partial}\cdot\frac{\partial Z_\partial}{\partial \omega_2}=0;$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial Д}{\partial X_\partial}\cdot\frac{\partial X_\partial}{\partial \omega_n}+\frac{\partial Д}{\partial Y_\partial}\cdot\frac{\partial Y_\partial}{\partial \omega_n}+\frac{\partial Д}{\partial Z_\partial}\cdot\frac{\partial Z_\partial}{\partial \omega_n}=0.$$

Выражения для частных производных $\frac{\partial X_\partial}{\partial \omega_i}$, $\frac{\partial Y_\partial}{\partial \omega_i}$, $\frac{\partial Z_\partial}{\partial \omega_i}$ содержат координаты X_u, Y_u, Z_u. Чтобы в этих выражениях перейти от переменных X_u, Y_u, Z_u к переменным X_∂, Y_∂, Z_∂, запишем

$$X_u = X_u(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n);$$

$$Y_u = Y_u(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n); \qquad (5.44)$$

$$Z_u = Z_u(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Если поверхность $Д$ задана в параметрической форме, уравнения характеристики на ней записываются так:

$$\begin{cases} X_\partial = X_\partial(U_\partial, V_\partial); \quad Y_\partial = {}_\partial(U_\partial, V_\partial); \quad Z_\partial = Z_\partial(U_\partial, V_\partial); \\ \mathbf{n}_{\partial.x} \cdot \dfrac{\partial X_\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{n}_{\partial.y} \cdot \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{n}_{\partial.z} \cdot \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial \omega_1} = 0; \\ \mathbf{n}_{\partial.x} \cdot \dfrac{\partial X_\partial}{\partial \omega_2} + \mathbf{n}_{\partial.y} \cdot \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial \omega_2} + \mathbf{n}_{\partial.z} \cdot \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial \omega_2} = 0; \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{\partial.x} \cdot \dfrac{\partial X_\partial}{\partial \omega_n} + \mathbf{n}_{\partial.y} \cdot \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial \omega_n} + \mathbf{n}_{\partial.z} \cdot \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial \omega_n} = 0. \end{cases} \qquad (5.45)$$

Переход от уравнений (44) к (45) основан на том, что согласно

$$\frac{\partial F}{\partial X} : n_x = \frac{\partial F}{\partial Y} : n_y = \frac{\partial F}{\partial Z} : n_z = \frac{k}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial X}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial Z}\right)^2}} = \frac{k}{\lambda},$$

справедливы соотношения:

$$\frac{\partial Д}{\partial X} : n_{\partial.x} = \frac{\partial Д}{\partial Y} : n_{\partial.y} = \frac{\partial Д}{\partial Z} : n_{\partial.z} = \frac{k}{\lambda}.$$

5.3.5. Производящие поверхности инструментов. В технологии машиностроения не ставится задача абсолютно точной обработки поверхностей деталей – это не реально. Исходную инструментальную поверхность фасонного инструмента допустимо образовать приближенными методами, в том числе путем выбора ее из определенного класса поверхностей. В этом случае задача профилирования инструмента сводится, во-первых, к определению класса (или классов) поверхностей, из которого выбирается исходная инструментальная поверхность $И$, и, во-вторых, к определению параметров фрагмента выбранной поверхности, использование которого обеспечит формообразование поверхности $Д$ в пределах заданного допуска на точность обработки.

Очевидно, что для заданной поверхности детали всегда можно найти такую поверхность, что спрофилированный на ее основе инструмент обеспечит обработку с любым (в том числе и с асимптотически стремящемся к нулю) наперед заданным допуском. Минимизация отклонений асимптотически точной исходной инструментальной поверхности от номинальной производится, например, по методу наименьших квадратов.

Обычно стремятся к тому, чтобы исходная инструментальная поверхность $И$ была из класса технологически удобных поверхностей, допускающих движение "*самих по себе*" (см. гл. 2). Очевидно, что это требование не является обязательным.

Рассматриваемый подход не позволяет образовать геометрически точные исходные инструментальные поверхности – они могут быть не более, чем асимптотически точными. Асимптотически точная исходная инструментальная поверхность является примером *производящей поверхности инструмента*.

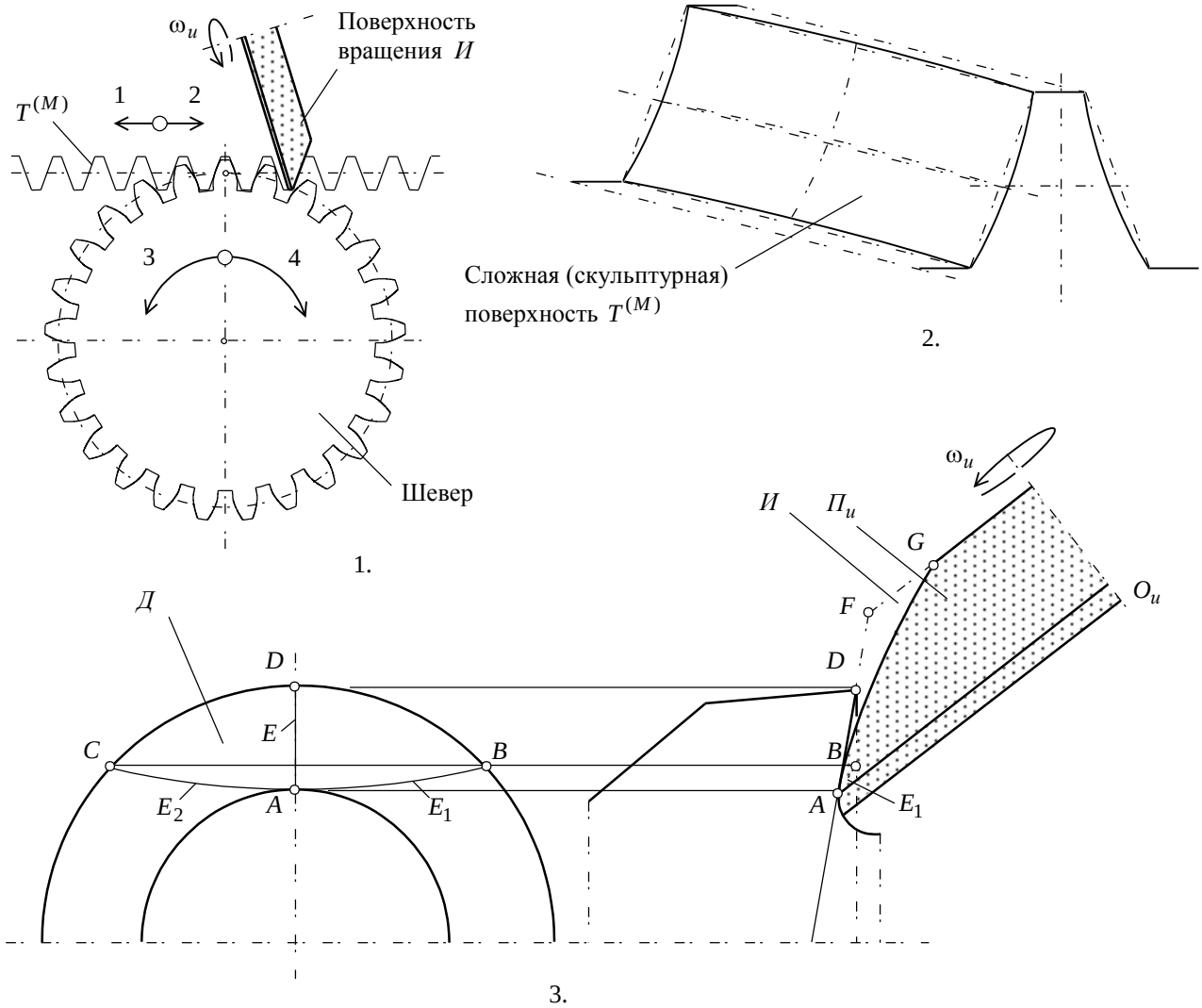


Рис. 5.11. Примеры образования производящих поверхностей инструментов.

Определение 5.2. *Производящая поверхность инструмента – это поверхность, которая в относительном движении образует огибающую, отклоняющуюся от номинальной поверхности детали не более, чем на величину допуска на точность формообразования.*

Необходимость введения в рассмотрение понятия *производящая поверхность инструмента* вызвана:

– использованием приближенных методов профилирования инструмента, приводящих к образованию неустранимых (т.н. *органических*) погрешностей профилирования;

– аппроксимацией рабочих поверхностей зубьев инструмента технологически просто воспроизводимыми поверхностями;

– невозможностью геометрически точного формообразования рабочих поверхностей режущей части инструмента, имеющих форму сложных (скульптурных) поверхностей[1] и пр.

Под погрешностью профилирования понимается величина отклонения производящей поверхности $П_u$ инструмента от его исходной инструментальной поверхности, измеренная вдоль перпендикуляра к поверхности $И$.

[1]Такими поверхностями являются, например, задние поверхности боковых сторон профиля зубьев геометрически точных червячных фрез, точное формообразование которых затылованием невозможно.

В процессе обработки производящая поверхность $П_и$ инструмента отстоит на некоторое расстояние от номинальной поверхности $Д_н$ детали, касается ее в точке или пересекает по некоторой, обычно замкнутой, кривой. В частных случаях может имеет место касание поверхностей $Д_н$ и $П_и$ по линии.

Рассмотрим пример образования производящей поверхности $П_и$ фасонного шлифовального круга для затачивания дисковых шеверов, предназначенных для врезного шевингования цилиндрических колес с топологически модифицированными зубьями (рис. 5.11).

В процессе затачивания (рис. 5.11.1) дисковый шевер и шлифовальный круг, вращающийся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\omega_и$, совершают обкаточное движение (возвратно-поступательное 1-2 и качательное 3-4), в результате которого начальный цилиндр затачиваемого инструмента перекатывается без скольжения по воспроизводимой в станочном зацеплении начальной плоскости. Периодически заточной круг подают на дисковый шевер (на рис. 5.11 это движение не показано).

В обкаточном движении воспроизводится правильное зацепление дискового шевера с воображаемой рейкой $Т^{(М)}$. Зубья рейки $Т^{(М)}$ топологически модифицированы – их боковая поверхность является сложной, не допускающей движения "*самой по себе*" поверхностью (рис.5.11.2). При затачивании она заменяется фрагментом фасонной поверхности вращения $П_и$, которая в точности не накладывается на поверхность $Т^{(М)}$. Диаметр, параметры установки и профиль заточного круга определяются исходя из условия обеспечения заданных параметров модификации зубьев рейки $Т^{(М)}$ и отклонения производящей поверхности $П_и$ от номинальной поверхности $Т^{(М)}$ не более, чем на величину допуска на точность формообразования. Аппроксимация фрагмента поверхности зуба рейки $Т^{(М)}$ фрагментом производящей поверхности $П_и$ может быть произведена, например, по методу наименьших квадратов.

По рассматриваемому способу может быть образована производящая поверхность $П_и$ шлифовального круга для затачивания протяжек по внутренним конически передним поверхностям зубьев. Обычно протяжки перетачивают коническим заточным кругом. Размеры и параметры установки заточного круга рассчитывают исходя из условия обеспечения геометрически точного формообразования передней поверхности затачиваемого инструмента. Образующая AF конического заточного круга совмещается с прямолинейной обрабазующей AD передней поверхности зубьев протяжки. Характеристикой $Е$ поверхностей $Д$ и $И$ является отрезок прямой линии AD. В результате ограничений, накладываемых необходимостью выполнения условий формообразования поверхностей деталей (условия формообразования поверхностей деталей рассмотрены ниже, см. гл. 7), на этой операции используются заточные круги очень небольшого диаметра.

Протяжки можно затачивать *фасонными* шлифовальными кругами, исходная инструментальная поверхность которых образована по рассматриваемому способу. Вращающийся вокруг своей оси $О_и$ с угловой скоростью $\omega_и$ шлифовальный круг имеет криволинейную образующую AG производящей поверхности $П_и$ (рис. 5.11.3). Поверхность $П_и$ касается обрабатываемой поверхности $Д$ по линии BAC. Участок BA этой линии является характеристикой $Е_1$, а участок AC – характеристикой $Е_2$ поверхностей $Д$ и $П_и$. В рассматриваемом случае производящая поверхность $П_и$ заточного круга представляет собой фасонную поверхность вращения, касающуюся поверхности $Д$ по двум симметрично расположенным характеристикам $Е_1$ и $Е_2$. Параметры криволинейной образующей AG производящей поверхности расчитаны так, что в пределах затачиваемого участка фактически формообразованная поверхность $Д$ отклоняется от номинальной конической передней поверхности не более, чем на величину допуска на точность формообразования. Как и в рассмотренном выше случае, аппроксимация фрагмента исходной инструментальной поверхности $И$ фрагментом производящей поверхности $П_и$ может быть произведена по методу наименьших квадратов и др.

Способ образования производящих поверхностей[1] инструментов применим как в случаях, когда исходная инструментальная поверхность может быть образована при одно-, двух- и многопараметрической кинематических схемах формообразования, так и в случаях, когда эти способы неприменимы.

5.3.6. Выбор исходной инструментальной поверхности из номенклатуры имеющегося инструмента. Особенностью обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ является

[1]В частных случаях производящая поверхность инструмента вырождается в линию – в производящую кромку инструмента. В таких частных случаях формообразование поверхности детали является *кромочным*.

возможность формообразования одной и той же поверхности $Д$ разными поверхностями $И$ при разной кинематике формообразования. Для обработки заданной детали поверхность $И$ фасонного режущего инструмента выбирают из относительно небольшого количества типов поверхностей вращения: цилиндров, конусов, сфер, торов, эллипсоидов, гиперболоидов и т.п. (см., например, ГОСТ 18934-73 – ГОСТ 18949-73 и др.), руководствуясь при этом накопленным производственным опытом проектирования, изготовления и эксплуатации инструмента. В большинстве случаев поверхности $И$ представляют собой поверхности вращения, образующие которых составлены из отрезков прямых линий, дуг окружностей и других технологически просто воспроизводимых кривых (рис. 5.12). Уравнение исходной инструментальной поверхности $И$ фасонного инструмента находится как уравнение поверхности вращения с образующая вида $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

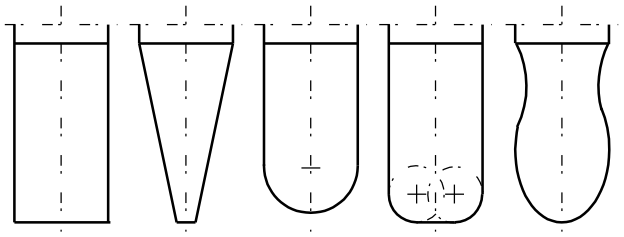


Рис. 5.12. Исходные инструментальные поверхности инструментов для обрабоки сложных поверхностей деталей.

Выбирая вид и определяя параметры исходной инструментальной поверхности из номенклатуры имеющгося инструмента, следует обеспечить возможность, с одной стороны, полной обработки поверхности детали без подрезов, а с другой – достижение требуемой степени конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности детали в пределах всего участка формообразуемой поверхности $Д$. Это относится не только к инструмента для обработки сложных поверхностей деталей, но и к инструментам для обработки деталей общемашиностроительного назначения.

Программирование обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ производится для инструмента с заданными параметрами его поверхности $И$. Для упрощения программирования и обеспечения возможности обработки детали различными режущими инструментами, например, в зависимости от имеющегося в наличии, разрабатываются управляющие программы по так называемому обобщенному APT [1] инструменту, имеющему комбинированную исходную инструментальную поверхность (рис. 5.13). В зависимости от введенных в управляющую программу величин параметров: α, β, d, f, h и r (Chang, C.-H., Melkanoff, M.A., 1989) исходная инструментальная поверхность $И$ APT инструмента вырождается в круглый цилиндр или в конус, в тор или в комбинированную поверхность вращения и др.

Для расширения технологических возможностей универсального инструмента, исходная инструментальная поверхность которого имеет форму поверхности вращения, экстремальные значения главных радиусов кривизны поверхности $И$ должны быть равны или почти равны (см. гл. 4) соответствующим, но взятым с противоположным знаком экстремальным значениям главных радиусов кривизны поверхности $Д$ детали. Для этого диапазон изменения радиуса кривизны образующей поверхности $И$ и расположение ее относительно оси вращения инструмента назначают в соответствие с диапазоном изменения главных радиусов кривизны поверхности $Д$. Интенсивность изменения радиуса кривизны вдоль образующей поверхности $И$ постоянна.

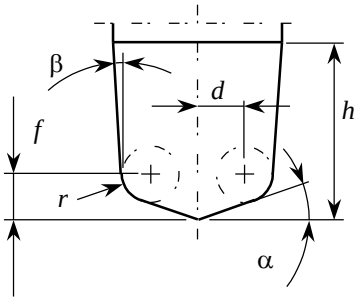


Рис. 5.13. Параметры исходной инструментальной поверхности APT инструмента.

Чтобы радиус кривизны ρ_u образующей исходной инструментально поверхности изменялся линейно с постоянной интенсивностью c, его значение и длина L_u дуги образующей, отсчитываемая от некоторой фиксированной начальной точки, должны удовлетворять условию $\rho_u = cL_u$ – это натуральная форма уравнения образующей исходной инструментальной поверхности $И$ фасонного инструмента. В полярной системе координат уравнение этой образующей находится так.

Радиус кривизны ρ_u плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением вида $R_u = R_u(\psi)$, расчитывается по формуле:

[1] *APT – Automatically Programmed Tools* – это инструмент, служащий для разрабоки управляющих програм (материально он не существует).

$$\rho_u = \frac{\left[R_u^2 + \left(\frac{dR_u}{d\psi}\right)^2\right]^{3/2}}{R_u^2 + 2\left(\frac{dR_u}{d\psi}\right)^2 - R_u\left(\frac{d^2R_u}{d\psi^2}\right)}. \qquad (5.46)$$

Здесь R_u – радиус-вектор текущей точки кривой, а ψ – ее угловой параметр.

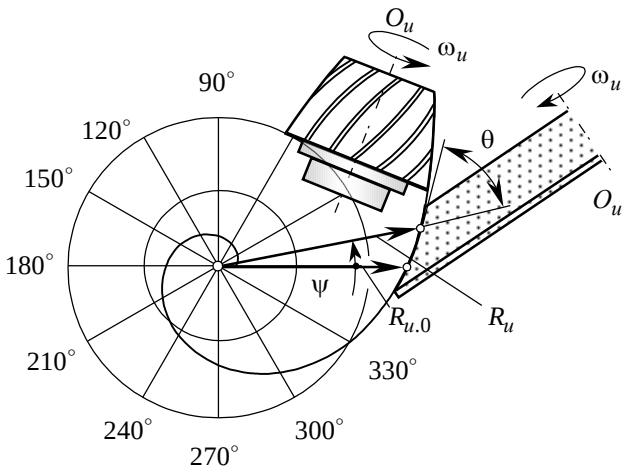


Рис. 5.14. Образование исходной инструментальной поверхности фасонного инструмента вращением логарифмической спирали.

Изменению параметра ψ от значения ψ_1 до ψ_2 соответствует длина

$$L_u = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{dR_u^2 + R_u^2 d\psi^2} \qquad (5.47)$$

дуги кривой $R_u = R_u(\psi)$.

Подставив (46) и (47) в $\rho_u = cL_u$, после преобразований получим:

$$R_u = R_{u.o} \exp(c\psi), \qquad (5.48)$$

где $R_{u.o}$ – радиус-вектор образующей $R_u = R_u(\psi)$ в некоторой наперед заданной ее точке (рис. 5.14).

Образующая (48) является изогональной кривой для пучка прямых линий на плоскости, проходящих через полюс. В этом можно убедиться, если подставить уравнение $\varphi(Y - kX) = 0$ пучка прямых линий в дифференциальное уравнение для изогональных траекторий (Корн Г., Корн Т., 1974):

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\cos\theta - \frac{\partial\varphi}{\partial Y}\sin\theta\right)dX + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\sin\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial Y}\cos\theta\right)dY = 0. \qquad (5.49)$$

Здесь θ – угол, под которым кривая $R_u = R_{u.o}\exp(c\psi)$ пересекает линии пучка прямых $(\theta = \arctan c)$.

Свойство образующей $R_u = R_{u.o}\exp(c\psi)$ пересекать прямые пучка на плоскости под постоянным углом полезно в практических приложениях и используется при проектировании приспособлений для затачивания фрез, для правки фасонных шлифовальных кругов, при разработке конструкций устройств для измерения и контроля профиля инструментов[1] и др.

Если отрезку образующей $R_u = R_{u.o}\exp(c\psi)$ придать вращение вокруг некоторой оси, получим исходную инструментальную поверхность $И$ в виде поверхности вращения (рис. 5.15).

Уравнение поверхности $И$, полученной вращением вокруг оси O_u инструмента заданной в полярных координатах произвольной кривой, записывается так:

$$\begin{cases} X_u = (R_n\cos\varphi + R_u\cos\psi)\sin\delta; \\ Y_u = (R_n\cos\varphi + R_u\cos\psi)\cos\delta; \\ Z_u = R_n\sin\varphi + R_u\sin\psi, \end{cases}$$

[1] А.с. №№1077706, №1106977, №1117127, №1146134, №1199458, №1335426, №1371875, №1393527, №1433769, №1516738, №1629741, №1664517, №1754352, №1771937, №2009762, Радзевич С.П., Винокуров И.В., 1987, 1991, 1995; Радзевич С.П., Тихонцов А.М., Винокуров И.В., 1989; Радзевич С.П. и др., 1989; Радзевич С.П., Палагута В.А., Винокунов И.В., 1991 и др.

где R_n – расположенный под постоянным углом φ радиус-вектор, определяющий положение полюса системы координат.

В этих уравнениях первое слагаемое постоянно по величине. Поэтому

$$\begin{cases} X_u = (r_u + R_u \cos\psi)\sin\delta; \\ Y_u = (r_u + R_u \cos\psi)\cos\delta; \\ Z_u = r_u \tan\varphi + R_u \sin\psi. \end{cases}$$

Подставив (48) в последние уравнение, получим уравнение поверхности $И$ инструмента, записанное в параметрической форме:

$$\begin{cases} X_u = (r_u + R_o e^{c\psi} \cos\psi)\sin\delta; \\ Y_u = (r_u + R_o e^{c\psi} \cos\psi)\cos\delta; \\ Z_u = r_u \tan\varphi + R_o e^{c\psi} \sin\psi. \end{cases} \tag{5.50}$$

Таким путем можно образовать исходную инструментальную поверхность как с выпуклой, так и с вогнутой образующей, поверхность $И$ инструмента охватывающего типа и др. На основе найденных поверхностей $И$ проектируются различные конструкции фасонных фрез, шлифовальных кругов и др. фасонных инструментов.

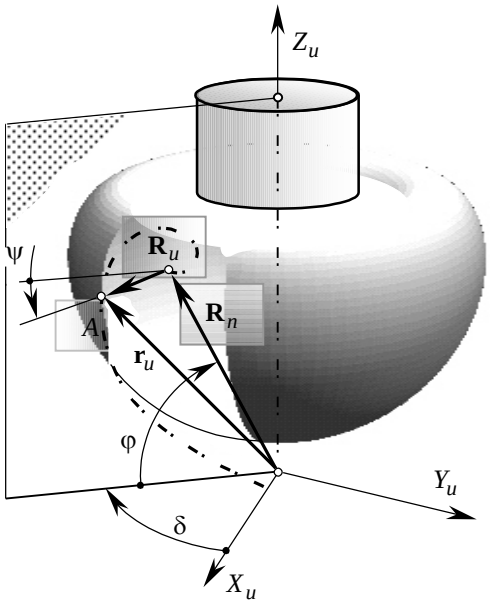


Рис. 5.15. Образование исходной инструментальной поверхности фасонного инструмента вращением логарифмической спирали.

Чтобы найти уравнение индикатрисы кривизны $Ind\ И$ исходной инструментальной поверхности и таким путем получить информацию о геометрической структуре этой поверхности в дифференциальной окрестности текущей точки на ней, необходимо определить гауссовы коэффициенты E_u, F_u, G_u первой $\Phi_{1.u}$ и L_u, M_u, N_u второй $\Phi_{2.u}$ основных квадратикных форм. Для этого продифференцируем каждое из уравнений (50) по ψ и δ и подставим найденные значения производных в (1.47). После преобразований получим:

$$E_u = R_o^2 e^{2c\psi}(1 + c^2); \qquad F_u = 0; \qquad G_u = (r_u + R_o e^{c\psi} \cos\psi)^2. \tag{5.51}$$

Вычислив вторые производные (50) по ψ и δ и подставив найденные их значения в (1.48)-(1.50), находим, что:

$$L_u = -R_o e^{c\psi} \sqrt{1 + c^2}; \qquad M_u = 0, \qquad N_u = -(r_u + R_o e^{c\psi} \cos\psi)\frac{c\sin\psi + \cos\psi}{\sqrt{1 + c^2}}. \tag{5.52}$$

Подставив (51) и (52) в (4.52), приходим к уравнению индикатрисы кривизны $Ind\ И$ поверхности $И$ инструмента:

$$\frac{1}{R_o e^{c\psi}\sqrt{1 + c^2}} x^2 + \frac{c\sin\psi + \cos\psi}{r_u + R_o e^{c\psi}\sqrt{1 + c^2}\cos\psi} y^2 = \pm 1.$$

Значения главных радиусов кривизны исходной инструментальной поверхности $И$ рассчитываются как корни квадратного уравнения (1.110), которое для рассматриваемого случая преобразуется к виду:

$$(c\sin\psi + \cos\psi)R_{1,2.u}^2 - \left| r_u + R_o e^{c\psi}\cos\theta + R_o e^{c\psi}(c\sin\psi + \cos\psi)\right| \sqrt{1 + c^2}\, R_{1,2.u} + R_o e^{c\psi}(r_u + R_o e^{c\psi}\cos\psi)(1 + c^2) = 0.$$

Из этого уравнения находим, что:

$$R_{1.u} = -\frac{2\sqrt{1+c^2}\left(r_u + R_o e^{c\theta}\cos\theta\right)}{c\sin\theta + \cos\theta}; \qquad R_{2.u} = -2R_o e^{c\theta}\sqrt{1+c^2}\ .$$

Аналогичная задача может быть решена для более общего случая, когда интенсивность изменения кривизны образующей поверхности $И$ инструмента не постоянна, а является функцией L_u, т.е.: $\rho_u = c_u(L_u)L_u$.

Пример 5.1. Инструмент[1] для обработки сложных поверхностей деталей (рис. 5.16) состоит из рабочей части 1, хвостовика 2 (или посадочного отверстия) и дополнительно может иметь опорную цапфу 3.

Криволинейная образующая 4 исходной инструментальной поверхности является кривой переменной кривизны. Кривизна образующей 4 от одной ее точки к другой точке изменяется с постоянной интенсивностью. Уравнение образующей имеет вид:

(5.53) $$k = k_0 \exp a\varphi,$$

где k – значение кривизны в текущей точке образующей;

k_0 – значение кривизны в некоторой наперед заданной (начальной) точке образующей;

a – коэффициент интенсивности изменения кривизны образующей ($a = Const$);

φ – текущее значение аргумента (угловой параметр).

Коэффициент a является постоянной величиной, равной тангенсу угла θ между касательной к образующей 4 и радиус-вектором, проведенном в текущую ее точку, т.е. $a = \tan\theta = const$ (см. выше, дифференциальное уравнение (49) для изогональных траекторий).

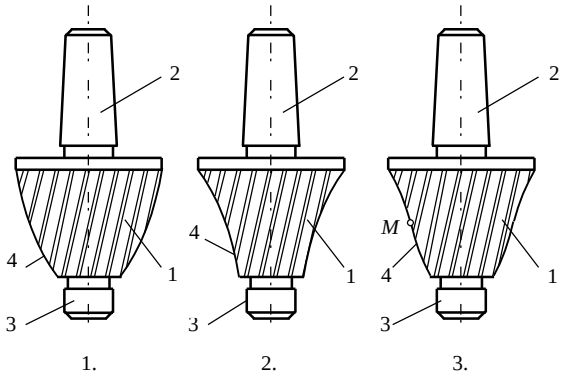


Рис. 5.16. Инструменты для обработки сложных поверхностей деталей (а.с. №1271680).

Инструмент для обработки сложных поверхностей деталей может быть выполнен с выпуклой (рис. 5.17.1), с вогнутой (рис. 5.17.2) или с комбинированной, например, с выпукловогнутой (рис. 5.17.3) образующей. В последнем случае две ветви кривой (53) сопрягаются в точке M. Возможно его исполнение в виде инструмента охватывающего типа (Радзевич С.П., 1987), когда деталь в процессе обработки располагается внутри инструмента.

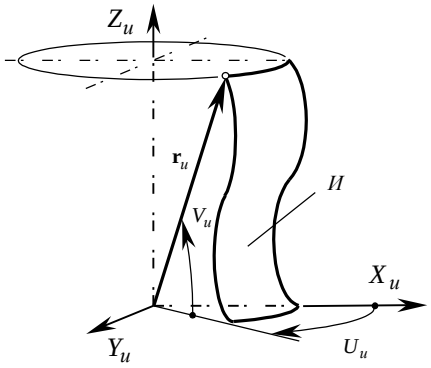


Рис. 5.17. К выводу уравнения исходной инструментальной поверхности.

Уравнение исходной инструментальной поверхности $И$ для каждого из вариантов исполнения инструмента (см. рис. 5.17), в т.ч. для инструментов с составной образующей (рис. 5.17.3) и инструментов охватывающего типа, может быть найдено как уравнение поверхности вращения с известной образующей (53) и с заданной осью вращения. Для этого достаточно воспользоваться общепринятым подходом к составлению уравнения поверхности вращения, например, в векторной форме $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(U_u, V_u)$ с U_u – и V_u – параметрами (рис. 5.18).

Форма образующей поверхности $И$ инструмента позволяет для любого значения нормальной кривизны обрабабываемой поверхности детали определить такую точку на образующей 4, при введение которой в касание с поверхностью $Д$ достигается требуемая степень конформности поверхностей $Д$ и $И$ в точке K их касания. Указанное обеспечивается тем, что кривизна образующей в такой точке и кривизна соответствующего нормального сечения поверхности детали в точке их касания равны (или минимально отличаются одна от другой). Это позволяет уменьшить высоту остаточного детерминированного регулярного микрорельефа и тем самым повысить качество обработанной поверхности детали.

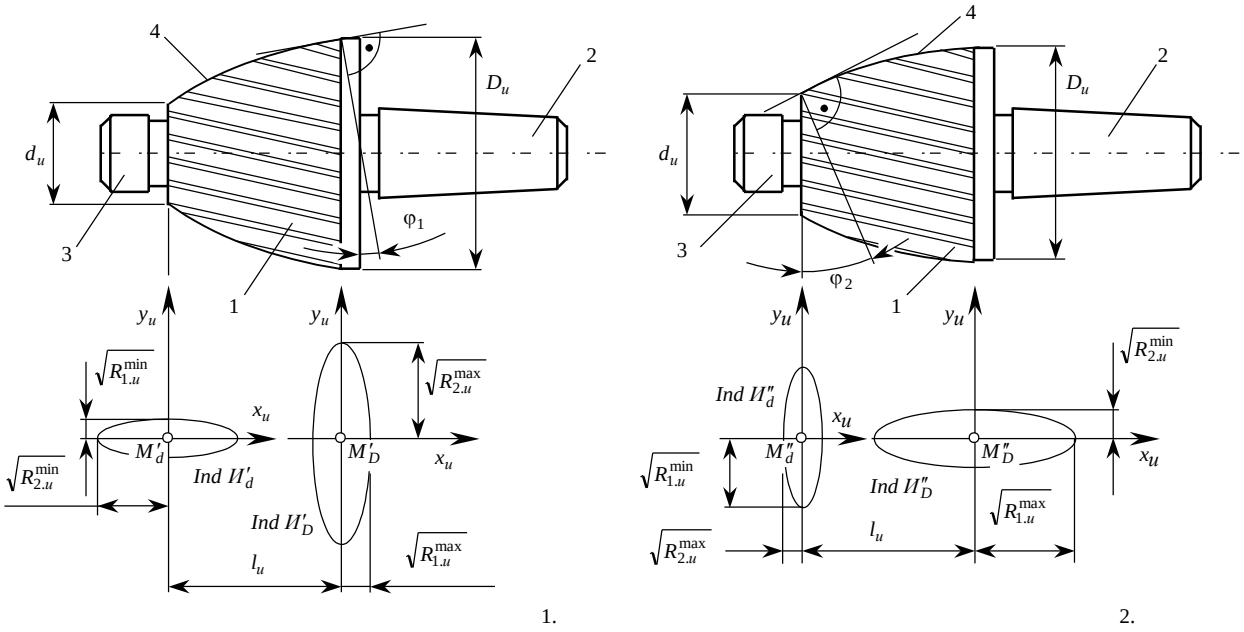
Пример 5.2. Инструмент[2] для обработки сложных поверхностей деталей (рис. 5.18) состоит из рабочей части 1, хвостовика 2 (или посадочного отверстия) и дополнительноможет быть снабжен опорной цапфой 3.

Исходная инструментальная поверхность $И$ инструмента (см. рис. 5.18) имеет форму поверхности вращения с криволинейной образующей 4 переменной кривизны (53).

Значения главных радиусов кривизны $R_{1.u}$ и $R_{2.u}$ изменяются от одной точки поверхности $И$ инструмента к другой ее точке. Для заданной исходной инструментальной поверхности можно указать не менее двух точек, в которых первый главный радиус кривизны $R_{1.u}$

[1] А.с. №1271680 (СССР). *Инструмент для обработки криволинейных поверхностей*./С.П.Радзевич. – Опубл. 23 ноября 1986 г. в Б.И. №43, 1986. – Заявлено 09 августа 1984 г. МКИ[4] В 23 С 5/10.

[2] А.с. №1355378 (СССР). *Инструмент для обработки криволинейных поверхностей*./С.П.Радзевич. – Опубл. 30 ноября 1987 г. в Б.И. №44, 1987. – Заявлено 14 апреля 1986 г. МКИ[4] В 23 С 5/10.



1. 2.

Рис. 5.18. Инструмент для обработки сложных поверхностей деталей (а.с. №1355378).

принимает соответственно минимальное $R_{1.u}^{\min}$ и максимальное $R_{1.u}^{\max}$ значения. Можно также указать не менее двух точек, в которых второй главный радиус кривизны $R_{2.u}$ принимает минимальное $R_{2.u}^{\min}$ и максимальное $R_{2.u}^{\max}$ значения. В частном случае точки (две пары точек), в которых главные радиусы кривизны принимают экстремальные значения, могут попарно совпадать. Возможны два варианта таких пар точек.

В первом случае главные радиусы кривизны принимают экстремальные значения $R_{1.u}^{\min}$, $R_{2.u}^{\min}$ в одной из точек поверхности $И$ и $R_{1.u}^{\max}$, $R_{2.u}^{\max}$ – в другой. Во втором случае они принимают экстремальные значения $R_{1.u}^{\min}$, $R_{2.u}^{\max}$ в одной и $R_{1.u}^{\max}$, $R_{2.u}^{\min}$ – в другой точке исходной инструментальной поверхности.

Ориентация образующей 4 поверхности $И$ инструмента (рис. 5.18) относительно оси его вращения зависит от диаметров d_u и D_u у его торцов и расстояния l_u между ними. С учетом изложенного выше она может быть увязана с этими параметрами двумя путями.

В первом случае (рис. 5.18.1) образующая 4 так расположена относительно оси вращения инструмента, что экстремальные значения главных радиусов кривизны исходной инструментальной поверхности принимают значения $R_{1.u}^{\min}$, $R_{2.u}^{\min}$ у торца меньшего диаметра и $R_{1.u}^{\max}$, $R_{2.u}^{\max}$ – у торца большего диаметра. В точке M'_d образующей у торца меньшего диаметра индикатриса кривизны поверхности $И$ инструмента имеет вид $Ind\,И'_d$, а в точке M'_D у торца большего диаметра – $Ind\,И'_D$. Индикатрисы кривизны $Ind\,И'_d$ и $Ind\,И'_D$ построены каждая в своей локальной системе координат $x_u M'_d y_u$ и $x_u M'_D y_u$ соответственно.

Во втором случае (рис. 5.18.2) образующая 4 расположена относительно оси вращения инструмента так, что экстремальные значения главных радиусов кривизны поверхности $И$ инструмента принимают значения $R_{1.u}^{\min}$, $R_{2.u}^{\max}$ у торца меньшего диаметра и $R_{1.u}^{\max}$, $R_{2.u}^{\min}$ – у торца большего диаметра. В точке M''_d образующей у торца меньшего диаметра индикатриса кривизны поверхности $И$ инструмента имеет вид $Ind\,И''_d$, а в точке M''_D у торца большего диаметра – $Ind\,И''_D$. Индикатрисы кривизны $Ind\,И''_d$ и $Ind\,И''_D$ построены каждая в своей локальной системе координат $x_u M''_d y_u$ и $x_u M''_D y_u$ соответственно.

Значения главных радиусов кривизны $R_{1.u}$ и $R_{2.u}$ исходной инструментальной поверхности $И$ в произвольной ее точке равны (4.101)

$$R_{1,2.u} = \frac{-(E_u N_u - 2F_u M_u + G_u L_u) \pm \sqrt{(E_u N_u - 2F_u M_u + G_u L_u)^2 - 4(E_u G_u - F_u^2)(L_u N_u - M_u^2)}}{2(L_u N_u - M_u^2)}.$$

Больший диаметр D_u инструмента (см. рис. 5.18.1) равен $D_u = 2R_{2.u}^{\max}\cos\varphi_1$, а меньший диаметр инструмента (см. рис. 5.18.2) – $d_u = 2R_{2.u}^{\min}\cos\varphi_2$. Здесь φ_1 и φ_2 – углы между касательными к образующей исходной инструментальной поверхности и осью вращения

инструмента, измеренные у его торца большего и меньшего диаметра соответсвенно (углы φ_1 и φ_2 удобно показывать как углы между нормалями к указанным прямым).

Применение инструмента (см. рис. 5.18) позволяет увеличить производительность обработки сложных поверхностей деталей и улучшить ее качество.

Пример 5.3. Инструмент[1] для упрочнения деталей, ограниченных поверхностями сложной формы (рис. 5.19), содержит корпус, в котором закреплена рабочая часть 1 с криволинейной образующей 2 исходной инструментальной поверхности $И$. Образующая 2 выполнена в виде кривой линии с монотонно изменяющейся кривизной. Кривизна образующей по ее длине изменяется с постоянной интенсивностью. Координаты текущей точки образующей 2 в полярных координатах определяются по формуле

$$R_u = \frac{R_{u.0}}{\exp a\varphi},$$

где R_u – радиус-вектор текущей точки образующей 2;

$R_{u.0}$ – радиус-вектор образующей в некоторой наперед заданной ее точке M;

a – коэффициент интенсивности изменения кривизны образующей;

φ – текущее значение аргумента (угловой параметр) образующей.

Образующая 2 строится в полярных координатах с полюсом в точке O. На построенной кривой выбирается дуга 3 – 4 с требуемым максимальным $R_u^{\max}$ (в точке 3) и минимальным $R_u^{\min}$ (в точке 4) значениями радиуса кривизны.

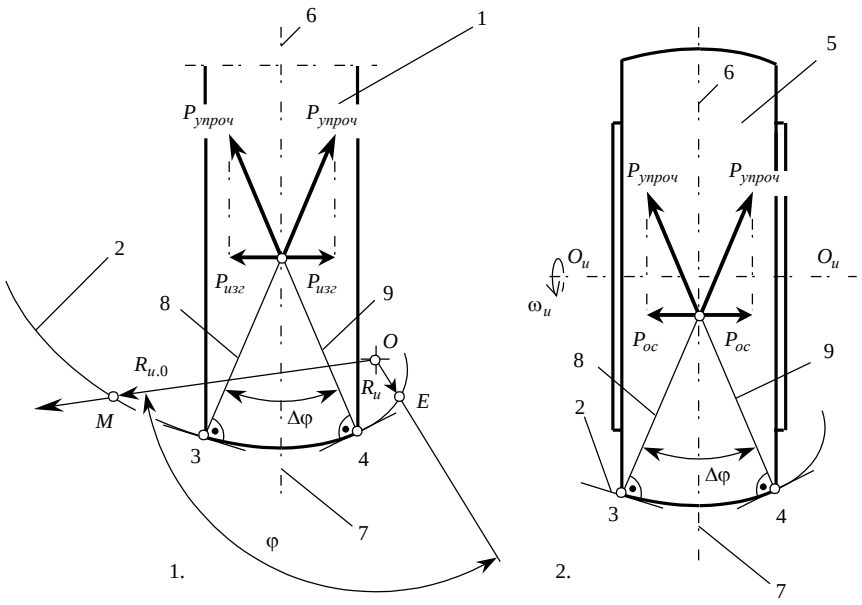


Рис. 5.19. Инструмент для упрочнения деталей, ограниченных поверхностями сложной формы (а.с. №1428563).

Инструмент может быть выполнен в виде выглаживателя (рис. 5.19.1) или в виде свободно вращающегося вокруг своей оси $O_u - O_u$ с некоторой угловой скоростью ω_u ролика 5 (рис. 5.19.2).

Ось 6 закрепления инструмента совмещена с бисектрисой 7 угла $\Delta\varphi$ между нормалями 8 и 9 в крайних точках 3 и 4 образующей поверхности $И$ инструмента. Ось вращения ролика 5 установлена перпендикулярно оси 6 закрепления инструмента.

Инструмент (см. рис. 5.19) может быть использован на металлорежущих станках с ЧПУ. Обработка сложной поверхности детали производится методом построчного огибания при точечном касании поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента. Для обработки инструмент вводят в контакт с деталью и перемещают его строками по поверхности $Д$ с периодическим смещением от строки к строке на величину подачи $S_П$ на очередную строку формообразования. По мере перемещения инструмента вдоль строки формообразования и при переходе от обработки одной к следующей строке формообразования инструменту сообщают непрерывное следящее движение ориентирования. Это движение направлено так, чтобы в работе постоянно находился тот участок образующей исходной инструментальной поверхности $И$, кривизана которого в точке касания с поверхностью $Д$ детали равна либо минимально отличается от нормальной кривизны поверхности $Д$ в соответствующем плоском нормальном сечении, проходящем через точку касания поверхностей $Д$ и $И$.

Совмещение оси закрепления инструмента с бисектрисой угла $\Delta\varphi$ позволяет выравнять по величине воспринимаемые инструментом усилия упрочнения $P_{упрочн}$, возникающие как в случае упрочнения участком образующей в окрестности точки 3, так и в случае упрочнения участком образующей в окрестности точки 4. И в первом, и во втором случаях изгибающие усилия $P_{изг}$ одинаковы.

Расположение оси вращения ролика перпендикулярно оси закрепления инструмента позволяет выравнять по величине противоположно направленные усилия $P_{ос}$ вдоль оси вращения ролика, когда упрочнение поверхности детали производится участком образующей в окрестности точки 3 и когда – участком образующей в окрестности точки 4.

---

[1] А.с. №1428563 (СССР). Инструмент для упрочнения деталей, ограниченных поверхностями сложной формы./С.П.Радзевич. – Опубл. 07 октября 1988 г. в Б.И., №37, 1988 г. – МКИ[4] В 24 В 39/00, заявлено 11 февраля 1986 г.

Применение инструмента (см. рис. 5.19) поволяет увеличить производительность обработки и улучшить ее качество.

Для многокоординатной обработки сложных поверхностей деталей находят применение инструменты, параметрами формы исходной инструментальной поверхности которых можно управлять от системы ЧПУ станком (Родин П.Р. и др., 1976; Радзевич С.П., 1988; и др.). Такого типа инструменты используются, например, при изготовлении деталей оснастки из древесины, пластмасс, легких сплавов и др. Уравнение исходной инструментальной поверхности фасонных инструментов подобного типа всегда содержит не менее одного переменного параметра, которым в процессе обработки можно управлять от системы ЧПУ станком.

Очевидно, что для случаев формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ образовать исходную инструментальную поверхность $И$ фасонного режущего инструмента как огибающую последовательных положений поверхности $Д$ в ее движении относительно системы координат инструмента нельзя – кинематика формообразования заранее не известна. Одна и та же сложная поверхность детали может быть обработана одним и тем же фасонным инструментом при *различной* кинематике формообразования. Поэтому для случаев обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ наивыгоднейший фасонный инструмент может быть спроектирован только исходя из $\mathbb{R}$-отображения поверхности $Д$ на поверхность $И$, т.е. на основе соответствия элементов локальной топологии в точках поверхности $И$ элементам локальной топологии в точках поверхности $Д$.

Использование частных способов образования ИИП $И$ предполагает, что для заданной детали анализируется возможность ее формообразования в соответствие с каждой из принципиальных кинематических схем формообразования (см. гл. 2). Те принципиальные кинематические схемы формообразования, в соответствие с которыми для заданной поверхности $Д$ детали образовать поверхность $И$ инструмента нельзя, из дальнейшего рассмотрения исключаются. Те же принципиальные кинематические схемы формообразования, в соответствие с которыми для заданной поверхности $Д$ может быть образована исходная инструментальная поверхность $И$, подвергаются детальному анализу, в соответствие с ними образуют исходные инструментальные поверхности, на основе которых проектируются соответствующие конструкции режущих инструментов.

5.4. Основные задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали

Профилирование фасонных режущих инструментов представляет собой сложную инженерную проблему, сущность решения которой заключается в том, чтобы определить всю информацию о геометрии рабочих поверхностей режущего клина, необходимую для изготовления инструмента.

Чтобы решить задачу профилирования инструмента относительно простой конструкции достаточно найти профиль некоторого (обычно нормального) сечения его задней (при известной передней) или передней (при известной задней) поверхности. Например, профилирование призматического фасонного резца, сводится к нахождению профиля нормального сечения его задней поверхности; круглого фасонного резца – к нахождению профиля осевого сечения его задней поверхности; затылованных дисковых фрез – к отысканию профиля нормального сечения затылованной задней поверхности и т.д. Найденных параметров профиля нормального сечения задней поверхности достаточно для изготовления такого инструмента.

Вопрос о сущности решения задачи профилирования усложняется, когда речь идет о профилировании более сложных фасонных режущих инструментов, например, инструментов, работающих по методу обката – затылованных червячных фрез и др.

Единственно правильной постановкой задачи профилирования фасонных режущих инструментов следует считать такую, при которой найденное решение позволяет однозначно ответить на все принципиальные вопросы формообразования рабочих поверхностей режущего клина инструмента. В таком аспекте сущность решения проблемы профилирования режущего инструмента сводится к нахождению полной геометрической информации о рабочих поверхностях режущего клина фасонного режущего инструмента и формы его режущей кромки, совпадающей с линией пересечения рабочих поверхностей режущего клина инструмента.

Проблема профилирования фасонных режущих инструментов в такой постановке является наиболее полной и имеет законченную форму. Она включает в себя нахождение исходной инструментальной поверхности, образование передних и задних поверхностей зубьев инструмента и формообразование его рабочих поверхностей. В этом разделе ограничимся рассмотрением только первого этапа решения рассматриваемой проблемы, а именно: определения формы и параметров исходной инструментальной поверхности профилируемого

фасонного режущего инструмента. Образование (или выбор формы) его рабочих поверхностей рассмотрено ниже (см. раздел 6.1), а их формообразование является частным случаем формообразования поверхностей деталей вообще, чему посвящена данная монография.

При определении формы и параметров исходной инструментальной поверхности считаем, что имеется вся необходимая информация о геометрии поверхности $Д$ обрабатываемой детали[1].

Решение задачи профилирования фасонного режущего инструмента начинается с анализа имеющейся геометрической информации об обрабатываемой поверхности детали. При любом способе задания геометрическая информация о формообразуемой поверхности $Д$ должна быть полной и должна допускать возможность представления ее в натуральной форме – через первые две основные квадратичные формы $Ф_{1.д}$ и $Ф_{2.д}$ (см. гл. 1).

Будем различать следующие основные задачи профилирования фасонного редущего инструмента и формообразования поверхности детали.

Задача 1. Исходя из известных (заданных или найденных) значений функций $Ф_{1.д}$ и $Ф_{2.д}$ и их коэффициентов – гауссовых коэффициентов $E_д$, $F_д$, $G_д$ первой и $L_д$, $M_д$, $N_д$ второй основных квадратичных форм поверхности $Д$, синтезируется (этап 1) наивыгоднейшая геометрия касания заданной поверхности $Д$ и искомой поверхности $И$ (рис. 5.20). Для этого используется уравнение индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ поверхностей $Д$ и $И$ или любой другой функции из класса функций конформности (см. гл. 4). Затем находится (этап 2) наивыгоднейшая исходная инструментальная поверхность $И_R^{(1)}$ фасонного режущего инструмента как $\mathbb{R}$-отображение поверхности детали. Найденная поверхность $И_R^{(1)}$ изначально представлена в натуральной форме – она выражена через гауссовы коэффициенты E_u, F_u, G_u и L_u, M_u, N_u первых двух ее основных квадратичных форм $Ф_{1.u}$ и $Ф_{2.u}$. Натуральная форма представления исходной инструментальной поверхности впоследствие преобразуется в другую аналитическую форму ее представления, удобную при решении конкретной задачи профилирования фасонного режущего инструмента. Это выполняется путем решения системы деривационных дифференциальных уравнений Гаусса-Вейнгартена (см. выше, раздел 5.1).

По данным о геометрии поверхности $Д$ (1) с учетом аналитического описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ (3) и о геометрии поверхности $И_R^{(1)}$ инструмента (4) решается задача синтеза наивыгоднейшей кинематики $K_{rm}^{(1)}$ – "*гибкой*" кинематики многокоординатного формообразования. Такая кинематика относительного движения детали и инструмента в процессе обработки воспроизводится на многокоординатных станках с ЧПУ и является наиболее общей.

Заданная поверхность $Д$ детали может быть формообразована найденным $И_R^{(1)}$ инструментом при кинематике, не совпадающей с наивыгоднейшей кинематикой формообразования $K_{rm}^{(1)}$. Такое техническое решение является *позитивным*[2] (см.ниже, *Задача* 4).

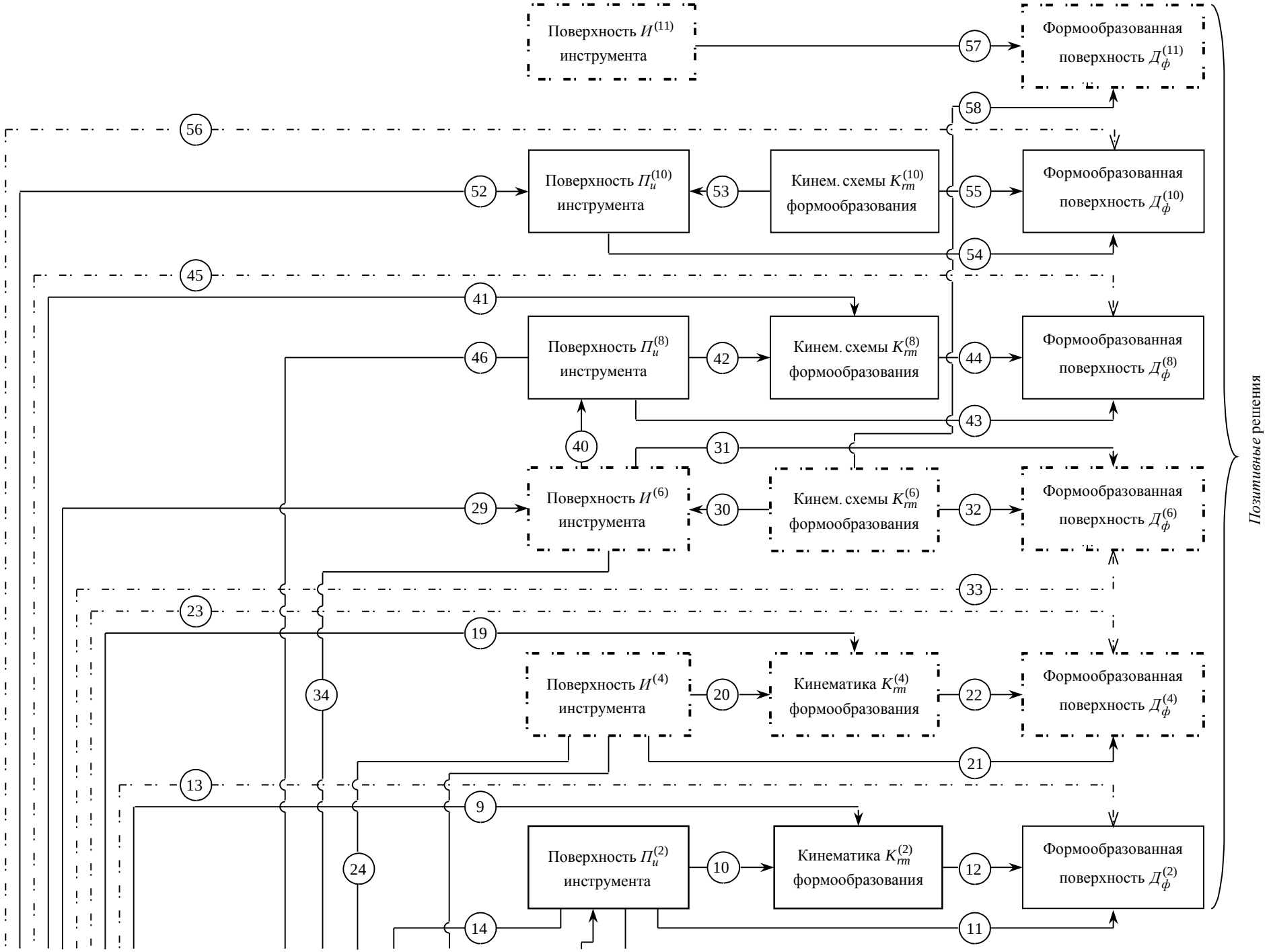
Исходя из данных о геометрии найденной исходной инструментальной поверхности $И_R^{(1)}$ (5) и синтезированной кинематики формообразования $K_{rm}^{(1)}$ (6) решается *обратная* задача – определяются параметры фактически формообразованной поверхности $Д_ф^{(1)}$ детали. Сопоставление (7) параметров формообразованной $Д_ф^{(1)}$ и номинальной $Д$ поверхностей позволяет сделать вывод о том, насколько точно решены задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали.

Задача 2. Найденная поверхность $И_R^{(1)}$ геометрически точного фасонного режущего инструмента может оказаться нетехнологичной – неудобной при изготовлении инструмента. В таком случае она аппроксимируется (целиком или кусочно) фрагментом технологически просто воспроизводимой поверхности. Аппроксима-

---

[1]При этом деталь может быть спроектирована так, чтобы наилучшим образом соответствавать своему служебному назначению.

[2]Помним, что *позитивным* является решение, позволяющее более или менее успешно решать задачу профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали (см. с. 12).


Поверхность $И^{(11)}$ инструмента
57
Формообразованная поверхность $Д_ф^{(11)}$
58
56
52
Поверхность $П_u^{(10)}$ инструмента
53
Кинем. схемы $K_{rm}^{(10)}$ формообразования
55
Формообразованная поверхность $Д_ф^{(10)}$
54
45
41
46
Поверхность $П_u^{(8)}$ инструмента
42
Кинем. схемы $K_{rm}^{(8)}$ формообразования
44
Формообразованная поверхность $Д_ф^{(8)}$
43
40
31
29
Поверхность $И^{(6)}$ инструмента
30
Кинем. схемы $K_{rm}^{(6)}$ формообразования
32
Формообразованная поверхность $Д_ф^{(6)}$
33
23
19
34
Поверхность $И^{(4)}$ инструмента
20
Кинематика $K_{rm}^{(4)}$ формообразования
22
Формообразованная поверхность $Д_ф^{(4)}$
21
13
9
24
Поверхность $П_u^{(2)}$ инструмента
10
Кинематика $K_{rm}^{(2)}$ формообразования
12
Формообразованная поверхность $Д_ф^{(2)}$
14
11
Позитивные решения

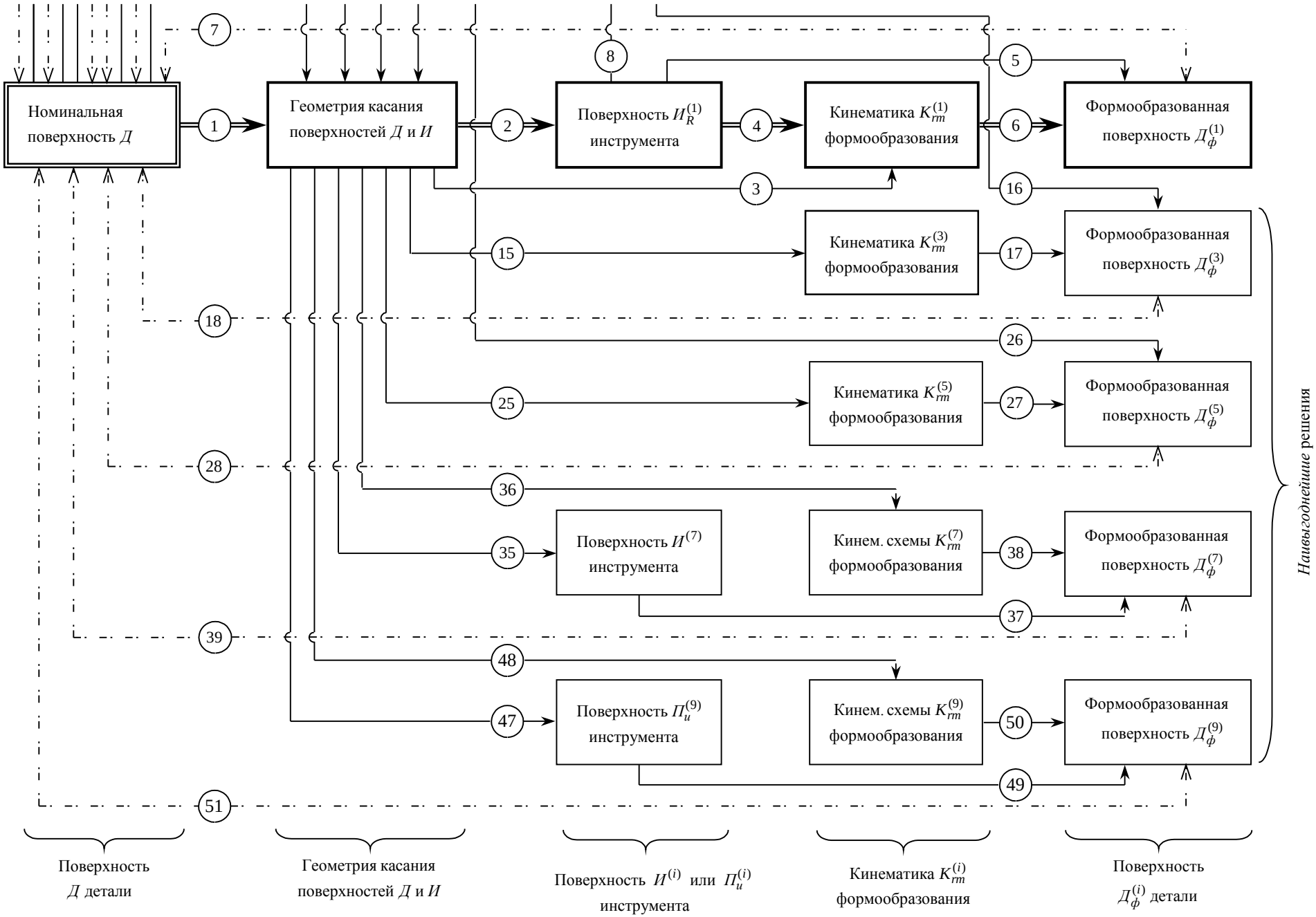


Рис. 5.20. Основные задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали.

ция (8) приводит к тому, что формообразование поверхности $Д$ производится не геометрически точной исходной инструментальной поверхностью $И_R^{(1)}$, а приближенной производящей поверхностью $П_u^{(2)}$. Поверхность $П_u^{(2)}$ аппроксимирует поверхность $И_R^{(1)}$ так, что погрешность аппроксимации минимальна и не превышает заданный допуск на точность профилирования.

Данные о геометрии поверхности $Д$ детали (9) и производящей поверхности $П_u^{(2)}$ инструмента (10) позволяют найти кинематику формообразования $K_{rm}^{(2)}$.

Затем по данным о геометрии производящей поверхности $П_u^{(2)}$ инструмента (11) и о кинематике формообразования $K_{rm}^{(2)}$ (12) определяются параметры фактически формообразованной поверхности $Д_ф^{(2)}$ детали. Эти параметры сопоставляются (13) с соответствующими параметрами номинальной поверхности $Д$, на основании чего делается вывод о том, насколько точно решены задачи аппроксимации поверхности $И$ инструмента и формообразования поверхности детали.

Найденное таким путем решение будет *позитивным* решением задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали. *Наивыгоднейшее* решение задачи может быть получено путем синтеза наивыгоднейшей геометрии касания поверхности $Д$ детали и производящей поверхности $П_u^{(2)}$ инструмента. Для этого:

Задача 3. по данным (1) о геометрии поверхности $Д$ и производящей поверхности $П_u^{(2)}$ (14) (параметры которой связаны (10) с кинематикой формообразования) синтезируется (15) наивыгоднейшая кинематика формообразования $K_{rm}^{(3)}$ (с учетом ограничений, являющихся следствием замены геометрически точной исходной инструментальной поверхности $И$ производящей поверхностью $П_u^{(2)}$ инструмента). После этого по данным (16) о геометрии поверхности $П_u^{(3)} \equiv П_u^{(2)}$ инструмента и о кинематике формообразования $K_{rm}^{(3)}$ (17) находится фактически формообразованная поверхность $Д_ф^{(3)}$ детали. Сопоставление (18) параметров ее формы с параметрами формы поверхности $Д$ позволяет сделать вывод о том, насколько точно решены задачи аппроксимации поверхности $И$ поверхностью $П_u^{(2)}$ и синтеза кинематики формообразования $K_{rm}^{(3)}$.

Задача 4. Обработка детали, как правило, ее сложной поверхности, может быть произведена инструментом, выбранным из номенклатуры имеющегося. В этом случае параметры его исходной инструментальной поверхности $И^{(4)}$ непосредственно не связаны с параметрами поверхности $И_R^{(1)}$, найденной как $\mathbb{R}$-отображение поверхности $Д$.

Исходя из геометрии заданной чертежом номинальной поверхности $Д$ детали (19) и геометрии поверхности $И^{(4)}$ выбранного инструмента (20) расчитываются параметры кинематики формообразования $K_{rm}^{(4)}$. Так находится *позитивное* решение задачи профилирования фасонного режущего инструмента и формообразования поверхности детали.

При выборе инструмента из номенклатуры имеющегося не исключена возможность, что будет выбран инструмент, исходная инструментальная поверхность которого совпадает с $\mathbb{R}$-отображением поверхности $Д$, т.е. $И^{(4)} \equiv И_R^{(1)}$ (см. выше, *Задача* 1). В этом случае кинематика формообразования заданной поверхности $Д$ детали поверхностью $И_R^{(1)}$ инструмента находится как и для любой другой поверхности $И$ выбранного инструмента.

Информация о геометрии поверхности $И^{(4)}$ выбранного инструмента (21) и о кинематике формообразования $K_{rm}^{(4)}$ используется (22) для нахождения фактически формообразованной поверхности $Д_ф^{(4)}$ детали. Ее параметры сопоставляются (23) с соответствующими параметрами номинально поверхности $Д$ детали. На этом основании делается вывод о том, насколько удачно решены задачи выбора инструмента и формообразования поверхности детали.

Задача 5. Обработка детали инструментом выбранной конструкции может производиться при наивыгоднейшей для него кинематике формообразования. Для этого по данным о геометрии поверхности $Д$ детали (1) и поверхности $И^{(4)}$ инструмента (24) синтезируется наивыгоднейшая геометрия касания поверхностей $Д$ и $И^{(4)}$ и на этом основании чего расчитываются (25) параметры наивыгоднейшей кинематики формообразования $K_{rm}^{(5)}$ заданной поверхности детали выбранным инструментом.

Если (в частном случае) эта задача решена для исходной инструментальной поверхности, в качестве которой выбрана поверхность $И_R^{(1)}$, то формообразованная поверхность $Д_ф^{(5)}$ детали будет идентична поверхности $Д_ф^{(1)}$, формообразование которой рассмотрено выше (см. выше. *Задача* 1).

Данные о геометрии поверхности $И^{(5)} \equiv И^{(4)}$ выбранного инструмента (26) и о синтезированной кинематике формообразования $K_{rm}^{(5)}$ (27) позволяют определить фактически формообразованную поверхность $Д_ф^{(5)}$ детали. Сопоставив $Д_ф^{(5)}$ с номинальной поверхностью $Д$, заключаем (28) насколько точно решены задачи выбора инструмента, синтеза кинематики и формообразования поверхности детали.

Этот подход к решению задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали находит практическое применение.

Задача 6. На параметры синтезированной наивыгоднейшей кинематики многокоординатного формообразования могут быть наложены ограничения, которые могут носить такой характер, что *наивыгоднейшая* ”*гибкая*” кинематика формообразования заменяется “*жесткой*” принципиальной кинематической схемой формообразования. Общее количество потенциально возможных принципиальные кинематические схемы формообразования конечно (см. выше, раздел 5.3) и исчерпывается двадцатью принципиальными кинематическими схемами формообразования (см. рис. 2.14 и рис. 2.15). Очевидно, что кинематика формообразования $K_{rm}^{(6)}$, реализуемая одной из принципиальных кинематических схем формообразования, является частным случаем “*гибкой*” кинематики формообразования $K_{rm}^{(1)}$.

Решение задачи профилирования инструмента, а затем – задачи формообразования поверхности детали при использовании “*жестких*” принципиальных кинематических схем формообразования, выполняется в такой последовательности.

По данным о геометрии обрабатываемой поверхности $Д$ детали (29) и выбранной из рис. 2.14 и рис. 2.15 кинематической схеме формообразования $K_{rm}^{(6)}$ находится (30) исходная инструментальная поверхность $И^{(6)}$. Поверхность $И^{(6)}$ инструмента является огибающей последовательных положений поверхности $Д$ детали в ее одно-, двух- или многопараметрическом движении относительно системы координат, с которой впоследствие будет связан инструмент (см. выше, раздел 5.3).

Найденная поверхность $И^{(6)}$ инструмента совершает относительно детали одно-, двух- или многопараметрическое движение. Это движение имеет те же параметры, что и движение, рассматриваемое при профилировании инструмента, но противоположно направленно. Это дает возможность по данным о геометрии поверхности $И^{(6)}$ инструмента (31) и о реализуемой принципиальными кинематическими схемами кинематике формообразования $K_{rm}^{(6)}$ (32) найти фактически формообразованную поверхность $Д_ф^{(6)}$ детали. Поверхность $Д_ф^{(6)}$ является огибающей последовательных положений поверхности $И^{(6)}$, движущейся относительно системы координат детали. Сопоставление (33) параметров геометрии поверхности $Д_ф^{(6)}$ с параметрами номинальной поверхности $Д$ дает основание сделать вывод о том, насколько точно решены задачи профилирования инструмента и формообразования поверхности детали.

Этот подход к решению задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали находит практическое применение.

Таким путем находится *позитивное* решение задачи профилирования фасонного режущего инструмента и формообразования поверхности детали при использования “*жестких*” принципиальных кинематических схем формообразования. Чтобы найденное решение было наивыгоднейшим (т.е. чтобы найти наивыгодней-

шее решение этой задачи), необходимо обеспечить наивыгоднейшие условия касания поверхностей $Д$ и $И$ в процессе обработки.

Задача 7. В этом случае по данным о геометрии номинальной поверхности $Д$ детали (1) и об исходной инструментальной поверхности $И^{(6)}$, параметры которой выражены в функции параметров кинематической схемы формообразования выбранной структуры (34), синтезируется наивыгоднейшая геометрия касания поверхностей $Д$ и $И$. Исходя из этого расчитываются (35) наивыгоднейшие параметры выбранной кинематической схемы формообразования $K_{rm}^{(7)}$ (структура которой известна) и находится (36) соответствующая ей исходная инструментальная поверхность $И^{(7)}$ с наивыгоднейшими для данной принципиальной кинематической схемы формообразования параметрами формы. По данным о геометрии о исходной инструментальной поверхности $И^{(7)}$ (37) и по параметрам кинематической схемы формообразования $K_{rm}^{(7)}$ выбранной структуры находится (38) фактически формообразванная поверхность $Д_{ф}^{(7)}$ детали. Сопоставление (39) параметров ее формы с параметрами формы номинальной поверхности $Д$ детали позволяет сделать вывод о том, насколько точно решены задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали.

Задача 8. Исходная инструментальная поверхность $И^{(6)}$, найденная как огибающая последовательных положений движущейся поверхности детали, может иметь сложную технологически сложно воспроизводимую форму. В этом случае целесообразно целиком или кусочно аппроксимировать ее (40) фрагментом технологически просто воспроизводимой поверхности. Аппроксимация исходной инструментальной поверхности $И^{(6)}$ фрагментом производящей поверхности $П_{и}^{(8)}$ производится так, чтобы погрешности аппроксимации были минимальными не превышали пределы заданного допуска на точность поверхности $И^{(6)}$ инструмента.

По данным (41) о геометрии поверхности $Д$ детали и о ранее найденной (40) производящей поверхности $П_{и}^{(8)}$ фасонного режущего инструмент расчитываются (42) наивыгоднейшие параметры кинематической схемы формообразования $K_{rm}^{(8)}$.

После этого по данным о геометрии производящей поверхности $П_{и}^{(8)}$ инструмента (43) и о параметрах кинематики формообразования (44) находится фактически формообразованная поверхность $Д_{ф}^{(8)}$ детали. Сопоставив (45) параметры поверхностей $Д_{ф}^{(8)}$ и $Д$, можно сделать вывод о том, насколько точно решены задачи профилирования фасонного режущего инструмента и формообразования поверхности детали.

Задача 9. Позитивное решение задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали (см. выше, *Задача* 8) может быть использовано для нахождения наивыгоднейшего ее решения. Для этого по данным о геометрии номинальной поверхности $Д$ детали и о производящей поверхности $П_{и}^{(8)}$ инструмента, параметры которой выражены в функции параметров кинематической схемы формообразования выбранной структуры (46), синтезируется наивыгоднейшая геометрия касания поверхностей $Д$ и $П_{и}^{(8)}$. Исходя из этого расчитываются (47) параметры геометрии производящей поверхности $П_{и}^{(9)}$ инструмента и соответствующей ей кинематической схемы формообразования $K_{rm}^{(9)}$ (48). По данным о геометрии наивыгоднейшей производящей поверхности $П_{и}^{(9)}$ (49) и по параметрам кинематической схемы формообразования $K_{rm}^{(9)}$ (50) находится фактически формообразованная поверхность $Д_{ф}^{(9)}$ детали. Сопоставление (51) параметров ее формы с соответствущими параметрами формы заданной поверхности детали позволяет сделать вывод о том, насколько точно решены задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали.

Задача 10. Производящая поверхность инструмента вводится в рассмотрение не только вследствие аппроксимации исходной инструментальной поверхности технологически прости воспроизводимой поверхностью. При использовании “*жестких*” кинематических схем формообразования геометрически точная

поверхность $И$ может вообще не существовать, например, как это имеет место при затылковании червячных фрез, предназначенных для нарезания зубчатых колес с эвольвентным профилем зубьев, при затылковании шлицевых и др. фасонных червячных фрез, при затачивании дисковых шеверов, предназначенных для врезного шевингования топологически модифицированных цилиндрических зубчатых колес (см. выше, рис. 5.11.1) и др. В приведенных и в других подобных случаях образовать геометрически точную исходную инструментальную поверхность $И$ шлифовального круга как огибающую последовательных положений движущейся поверхности $Д$ невозможно в приципе – она не существует. Производящая поверхность $П_u$ инструмента в этом случае образуется по рассмотренному выше методу (см. раздел 5.3.5).

Чтобы найти поверхность $П_u^{(10)}$ следует по данным о геометрии поверхности $Д$ детали (52) и выбранной кинематике формообразования $K_{rm}^{(10)}$ установить (53) параметры некоторым образом выбранного фрагмента поверхности, принадлежащего к классу технологически просто воспроизводимых поверхностей. Найденный таким путем отсек используется в качестве призводящей поверхности $П_u^{(10)}$ профилируемого фасонного режущего инструмента.

Затем по данным о геометрии производящей поверхности $П_u^{(10)}$ (54) и о кинематической схеме формообразования (55) находится фактически формообразованная поверхность $Д_ф^{(10)}$ детали. Сопоставление (56) параметров формы формообразованной поверхности $Д_ф^{(10)}$ с параметрами номинальной поверхности $Д$ детали позволяет сделать вывод о том, насколько точно решены задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали.

Задача 11. Наконец, деталь может быть обработана инструментом выбранной конструкции, что практикуется, например, при изготовлении колес цилиндро-конических передач первого и второго рода (Давыдов Я.И., 1950), конических зубчатых колес с криволинейными по длине зубьями (круговыми, спиральными, циклоидальными и др.) и пр. В этом случае задаются некоторым инструментом известной конструкции, после чего анализируется какую деталь $Д_ф^{(11)}$ можно изготовить, используя этот инструмент при различной кинематике формообразования.

По данным о геометрии исходной инструментальной поверхности $И^{(11)}$ выбранного инструмента (57) и о кинематической схеме формообразования $K_{rm}^{(11)} \equiv K_{rm}^{(6)}$ (58) находится фактически формообразованная поверхность $Д_ф^{(11)}$ детали.

Заключение об эффективности разработанного таким путем процесса формообразования можно сделать по результатам его практического применения.

В этом случае возможно только *позитивное* решение задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали. Наивыгоднейшее решение синтезировать нельзя, т.к. нет информации о геометрии требуемой поверхности $Д$ детали – она не задана. По этой же причине отсутствует процедура сравнения параметров поверхностей $Д_ф^{(11)}$ и $Д$.

При таком подходе нельзя изготовить деталь, которая *наилучшим образом соответствует своему служебному назначению*. Однако реально обработанная поверхность $Д_ф^{(11)}$ может как угодно мало (асимптотически мало) отличаться от идеальной (неизвестной) поверхности $Д$ и минимально отличаться от нее – этого достаточно для инжинерных приложений. Чем меньше обработанная поверхность $Д_ф^{(11)}$ отличается от неизвестной поверхности $Д$, там *живучее* найденное техническое решение.

Задачи профилирования фасонных режущих инструментов и формообразования поверхностей деталей в общем случае включают пять этапов: аналитическое описание поверхности $Д$ детали, синтез геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$, нахождение исходной инструментальной $И^{(i)}$ или производящей $П_u^{(i)}$ поверхности инструмента, определение кинематики формообразования $K_{rm}^{(i)}$ и фактически формообразованной поверх-

ности $Д_{ф}^{(i)}$ детали. Решение задачи профилирования инструмента и формообразования поверхности детали начинается, как правило, с анализа заданной информации о геометрии обрабатываемой поверхности детали и заканчивается сопоставлением фактически формообразованной поверхности с требованиями, заданным чертежом детали.

Не все задачи содержат все перечисленные этапы. В задачах некоторых типов отдельные этапы отсутствуют – это приводит к изменению порядка решения задачи профилирования режущего инструмента и формообразования поверхности детали.

Схема (см. рис. 5.20) наглядно иллюстрирует связь основных задач профилирования фасонных режущих инструментов и формообразования поверхностей деталей. Очевидно, что эти задачи не изолированы одна от другой, они логически увязаны между собой. Наиболее общей из них является задача 1 профилирования фасонных режущих инструментов, решение которой основано на применении $\mathbb{R}$-отображения поверхности $Д$ на поверхность $И$. На схеме (см. рис. 5.20) выше этой задачи расположены *позитивные*, а ниже – *наивыгоднейшие* задачи профилирования режущих инструментов и формообразования поверхностей деталей.

Если принять во внимание, что как кинематика формообразования, так и исходная инструментальная поверхности всегда воспроизводятся с погрешностями, схема (см. рис. 5.20) может быть развита. В этом случае она становится громоздкой в связи с чем здесь не приводится.

Г л а в а 6. **Геометрические параметры режущих кромок инструмента**

Для изучения условий работы режущего клина и оптимизации на этой основе условий эксплуатации режущего инструмента следует знать величины геометрических параметров режущих кромок, определяющих протекание процесса резания, характер стружкообразования, контактные процессы на передней и на задней поверхностях, тепловое и механическое нагружение режущего клина и пр. Правильное описание зависимости выходных параметров процесса резания от величин геометрических параметров режущих кромок предполагает введение системы для их отсчета, позволяющей установить зависимости, адекватно описывающие процессы, происходящие при резании металлов.

Проектируя режущий инструмент, необходимо знать величины геометрических параметров режущих кромок: переднего и заднего углов, угла наклона режущей кромки, углов в плане и др. Геометрические параметры задаются в неподвижной системе координат, удобной при проектировании режущего инструмента и для его контроля. Такие системы координат непосредственно или косвенно связаны с базовыми поверхностями корпуса инструмента, они неподвижны, в связи с чем называются *статическими системами отсчета*. Измеренные в них геометрические параметры принято называть *статическими геометрическими параметрами* режущих кромок[1].

Значения геометрических параметров режущих кромок, измеренные в статической системе отсчета, в общем случае не сохраняются в процессе работы инструмента. В зависимости от параметров рабочих движений, расположения режущих кромок относительно поверхности резания и действительного направления схода стружки по передней поверхности, геометрические параметры режущих кромок в движении инстумента отличаются по абсолютной величине и расположению плоскостей измерения от значений соответствующих геометрических параметров в статическом его положении.

Для правильного описания зависимости выходных параметров процесса резания от величин геометрических параметров режущих кромок необходима система отсчета их значений *в движении* инструмента. Геометрические параметры режущих кромок, непосредственно определяющие характер протекания процесса резания и изнашивания инструмента, измеряются в плоскостях, ориентация которых определяется относительно поверхности резания. Для определения (расчета) величин этих геометрических параметров удобно использовать подвижные системы координат с началом, расположенным в текущей точке режущей кромки. Такие системы логично назвать *кинематическими системами отсчета*.

В зависимости от формы режущих кромок, их расположения и характера движения относительно поверхности резания, а также от направления скорости схода стружки по передней поверхности, фактические величины геометрических параметров отличаются по величине от соответствующих статических геометрических параметров. Это так называемые *кинематические геометрические параметры* режущих кромок инструмента. Положение плоскостей, в которых рассчитываются значения кинематических геометрических параметров, определяются в кинематической системе отсчета.

Первая задача конструктора заключается в определении статических геометрических параметров режущих кромок по требуемым кинематическим их значениям. Статические геометрические параметры используются при изготовлении и контроле переточенного инструмента. Они определяют расположение передних и задних поверхностей зубьев инструмента относительно базовых поверхностей и оказывают влияние на форму рабочих поверхностей режущего клина.

Расчет величин кинематических геометрических параметров по известным статическим их значениям составляет сущность второй задачи. Очевидно, что первая и вторая задачи неразрывно связаны одна с другой.

---

[1]Встречающийся термин "*углы резания*" неудачен. Резание всегда производится при движении инструмента относительно детали. Поэтому термин "*углы резания*" предполагает движение. Его употребление к статическим геометрическим параметрам приводит к абсурду: "*статические углы резания*" – *резание (движение)* и *статика* взаимно исключают одно другое.

Некоторые из статических и кинематических геометрических параметров режущих кромок могут измеряться в одних и тех же плоскостях и иметь одинаковые значения. В общем случае это условие не выполняется.

Задача расчета величин кинематических геометрических параметров режущих кромок инструмента усложняется при обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ, когда в процессе обработки воспроизводится "*гибкая*" кинематика формообразования, а инструмент совершает относительно детали сложное многопараметрическое движение. В результате этого величины кинематических геометрических параметров изменяются не только по периметру режущей кромки, но и во времени в каждой ее точке. Наряду с изменением параметров формы и толщины срезаемого припуска в текущей точке поверхности резания, указанное приводит к тому, что условия отделения стружки в разных точках режущей кромки и в разные моменты времени различны – в свою очередь это усложняет решение задачи оптимизации условий резания при обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

Следовательно, чтобы управлять процессом резания металлов, необходимо уметь рассчитывать значения кинематических геометрических параметров режущей кромки инструмента в текущий момент времени в каждой ее точке с тем, чтобы в процессе обработки обеспечить их оптимальные значения и исключить возможность создания таких условий резания, при которых геометрические параметры режущего клина принимают неблагоприятные или даже недопустимые по величине значения.

Для установления взаимосвязи между значениями статических и кинематических геометрических параметров режущих кромок необходим обобщенный метод, применимый для всех конструкций режущего инструмента, совершающего относительно детали многопараметрическое движение любой степени сложности.

6.1. О преобразовании исходного инструментального тела в работоспособный режущий инструмент

Основными функциями режущего инструмента являются срезание операционного припуска и формообразование поверхности детали. Кроме того, конструкция режущего инструмента должна обеспечивать возможность выполнения им других важных функций, как то: надежный отвод стружки, ее завивание, дробление и транспортирование из зоны резания; подвод смазочно-охлаждающих технологических сред и др.

В данной работе рассматривается первая и вторая основные функции режущего инструмента.

Исходная инструментальная поверхность $И$ фасонного инструмента образуется одним из рассмотренных способов (см. выше, гл. 5). Материальным носителем формы исходной инструментальной поверхности $И$ является *исходное инструментальное тело*.

Определение 6.1. *Исходное инструментальное тело – это тело, ограниченное исходной инструментальной поверхностью, целиком или частично (режущий клин) выполненное из инструментального материала.*

Исходное инструментальное тело преобразуют в работоспособный инструмент путем придания ему свойства срезать с заготовки припуск – путем образования режущих кромок, передних и задних поверхностей; путем выполнения его из абразивного материала и др.

Преобразуя исходное инструментальное тело в работоспособный инструмент, необходимо следить за тем, чтобы режущий клин по всей длине режущей кромки был наивыгоднейшим образом ориентирован относительно исходной инструментальной поверхности. Практически это достигается за счет образования оптимальных величин геометрических параметров режущих кромок.

Многочисленными экспериментальными исследованиями и накопленным практическим опытом производства доказано, что придание режущей части инструмента требуемых по условиям резания оптимальных геометрических параметров режущих кромок является эффективным путем совершенствования конструкций инструментов и увеличения эффективности обработки резанием.

Оптимальными величинами геометрических параметров режущих кромок инструмента являются такие их значения, которые обеспечивают достижение требуемого экстремума заданного критерия оптимизации: наибольшую стойкость инструмента при допустимом его износе, наивысшую производительность обработки, наиболее высокое качество приповерхностного слоя, наибольшую размерную стойкость инструмента и пр.

Возможны три принципиально разных подхода к решению задачи преобразования исходного инструментального тела в работоспособный инструмент.

6.1.1. Первый подход заключается в том, что выбирают форму и назначают параметры и расположение относительно поверхности $И$ *передних* поверхностей инструмента. Эти поверхности обычно выбирают из класса технологически просто воспроизводимых поверхностей, преимущественно допускающих движение "*самих по себе*" (см. выше, раздел 2.4). Для этого в исходном инструментальном теле прорезают стружечные канавки. Режущие кромки образуются как линии пересечения исходной инструментальной поверхности $И$ передней поверхностью $П$. После этого образуют заднюю поверхность $З$ таким образом, чтобы она проходила через режущую кромку под заданным задним углом. Предпочтение отдают таким по форме задним поверхностям, которые воспроизводятся технологически просто и допускают возможность движения "*самих по себе*". Выполнить задние поверхности технологически просто воспроизводимыми удается не всегда.

Первый подход к решению задачи преобразования исходного инструментального тела в работоспособный инструмент используется наиболее широко. Его применение позволяет получить технологичный и удобный в эксплуатации режущий инструмент.

Недостатком этого подхода является, во-первых, то, что при его применении в общем случае практически невозможно придать режущей кромке в каждой ее точке оптимальные по условиям резания значения *всех* геометрических параметров режущего клина. Во-вторых, его использование, как правило, влечет за собой появление погрешностей профилирования (*органических* погрешностей фасонного инструмента). Это является следствием того, что режущая кромка геометрически точного фасонного инструмента должна совпадать с линией пересечения *трех* поверхностей: передней $П$, задней $З$ и исходной инструментальной $И$. Стремление выполнить передние и задние поверхности технологически просто воспроизводимыми усложняет решение задачи профилирования геометрически точного инструмента. По этой причине вынужденно приходится усложнять форму одной из рабочих поверхностей (передней или задней), а иногда отказываться от придания одной из них технологически просто воспроизводимой формы. В противном случае неизбежно появляются органические погрешности и формообразование поверхности детали будет произведено не геометрически точной исходной инструментальной поверхностью $И$, а производящей поверхностью $П_и$ инструмента. Применение приближенно спрофилированного инструмента допустимо только в случаях, когда органические погрешности (т.е. измеряемые вдоль нормали к исходной инструментальной поверхности величины отклонений производящей поверхности $П_и$ от номинальной поверхности $И$) не превышают заданного допуска на их величины.

6.1.2. Второй подход заключается в том, что выбирают форму и назначают параметры и расположение относительно поверхности $И$ *задних* поверхностей инструмента. Задние поверхности выбирают из класса технологически просто воспроизводимых поверхностей, допускающих движение "*самих по себе*". Режущие кромки образуются как линии пересечения исходной инструментальной поверхности $И$ задней поверхностью $З$. После этого образуют переднюю поверхность $П$ таким образом, чтобы она проходила через режущую кромку под заданным передним углом. Предпочтение отдают таким по форме передним поверхностям, которые относятся к классу технологически просто воспроизводимых и допускают возможность движения "*самих по себе*". В некотором смысле второй подход является обратным первому. Он обладает практически теми же преимуществами и недостатками, что и первый, но применяется реже.

Характерным для первого и второго подходов к решению задачи преобразования исходного инструментального тела в работоспособный инструмент является то, что угол наклона режущей кромки λ инструмента однозначно предопределяется выбранными формой, параметрами и расположением передней $П$ (или задней $З$) поверхности относительно его исходной инструментальной поверхности $И$. Поэтому нельзя образовать в каждой точке режущей кромки угол наклона λ, равный его оптимальному значению $\lambda_{опт}$.

6.1.3. Третий подход к решению задачи преобразования исходного инструментального тела в работоспособный инструмент является новым. Его сущность заключается в том, что на исходной инструментальной поверхности $И$ строится семейство предполагаемых траекторий 1 движения точки $К$ касания поверхностей $Д$ и $И$, перемещающейся в процессе обработки детали по поверхности $И$ (рис. 6.1). После этого строится другое семейство линий 2, изогональное первому и пересекающее линии первого семейства под углом $\lambda_{опт}$. В текущей точке $М$ режущей кромки угол ее наклона всегда равен $\lambda_{опт}$. Это следствие того, что семейство линий 2 изогонально по отношению к семейству линий 1 и пересекает его требуемым по условиям резания оптимальным углом наклона $\lambda_{опт}$.

Различные участки режущей кромки фасонного инструмента по-разному удалены от оси его вращения и, следовательно, работают с разной скоростью резания. По этой и другим причинам величина угла $\lambda_{опт}$ в

общем случае переменна вдоль режущей кромки. В частных случаях угол λ_{onm} постоянен либо равен усредненному его значению.

Из второго семейства кривых 2 выбирают линии, отстоящие одна от другой на величину шага между зубьями проектируемого инструмента – с этими линиями совмещают его режущие кромки.

Через образованные таким путем режущие кромки под требуемыми по условиям резания оптимальными передним γ_{onm} и задним α_{onm} углами проходят, как правило, криволинейные передние *П* и задние *З* поверхности. Форма этих поверхностей зависит от характера результирующего относительного движения детали и инструмента в процессе обработки. Она определяется исходя из того, чтобы как новый, так и переточенный режущий инструмент имели требуемые по условиям резания оптимальные значения переднего γ_{onm} и заднего α_{onm} углов. Величина угла наклона режущей кромки после перетачивания инструмента сохраняет свое исходное значение λ_{onm}.

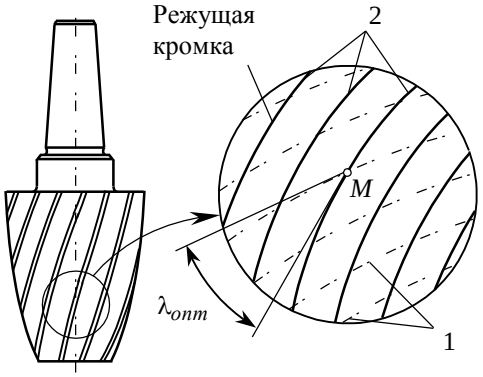


Рис. 6.1. К обоснованию третьего подхода к преобразованию исходного инструментального тела в работоспособный инструмент.

Для исходной инструментальной поверхности *И*, представляющей собой поверхность вращения, образованная на основе третьего подхода режущая кромка представляет собой *локсодрому* (*локсодромию* или *локсодромную кривую*). По определению, *локсодрома*[1] – это линия, пересекающая все плоскости пучка плоскостей под постоянным по величине углом. Поэтому локсодрома является изогональной траекторией меридианов.

Очевидно, что локсодромы могут быть определены только относительно координатных кривых на поверхности *И* инструмента (Koenderink, J.J., 1990, с. 204). Поэтому использование третьего подхода предполагает возможность преобразования исходной параметризации поверхности *И* к такому ее виду, в котором одно из семейств координатных кривых пересекает траекторию движения точки *K* по поверхности *И* инструмента под исходным углом $\lambda_{исх} = 0^\circ$ (или $\lambda_{исх} = Const$). В случае перехода к такой параметризации указанное семейство координатных линий служит базой для отсчета оптимальной величины угла наклона режущих кромок λ_{onm} инструмента (при $\lambda_{исх} = 0^\circ$) или величины некоторого угла, дополняющего $\lambda_{исх}$ до λ_{onm} (при $\lambda_{исх} = Const \neq 0^\circ$).

Локсодрома пересекает все меридианы исходной инструментальной поверхности *И* под постоянным углом наклона λ_{onm}. Это свойство локсодромы используется для решения задачи преобразования исходного инструментального тела в работоспособный инструмент.

Если исходная инструментальная поверхность *И* параметризована так, что ее первая основная квадратичная форма представима в форме:

$$\Phi_{1.u} \quad \Rightarrow \quad dS_u^2 = dU_u^2 + G_u(U_u)dV_u^2,$$

уравнение режущей кромки имеет вид:

$$V_u \cot\lambda_{onm} = \pm \int_{U_{0.u}}^{U_u} \frac{dU_u}{\sqrt{G_u(U_u)}}. \tag{6.1}$$

Пример 6.1. Найдем уравнение режущей кромки на сферической (радиуса R_u) исходной инструментальной поверхности. Радиус-вектор $\mathbf{r}_u$ текущей точки исходной инструментальной поверхности равен:

[1]От греческого *loxos* – косой и *dromos* – бег, путь.

$$\mathbf{r}_u = \begin{bmatrix} R_u \sin\varphi \cos\theta \\ R_u \sin\varphi \sin\theta \\ R_u \cos\varphi \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (6.2)$$

Уравнение режущей кромки будем искать как уравнение кривой, расположенной на исходной инструментальной поверхности и пересекающей меридианы под углом $(90^\circ - \lambda_{опт})$.

Параметрическое уравнение вида $\theta = \theta(\varphi)$ описывает некоторую линию на сфере (2). Если $\theta = 0^\circ$, эти линии являются меридианами, а если $\theta = 90^\circ$ – параллелями.

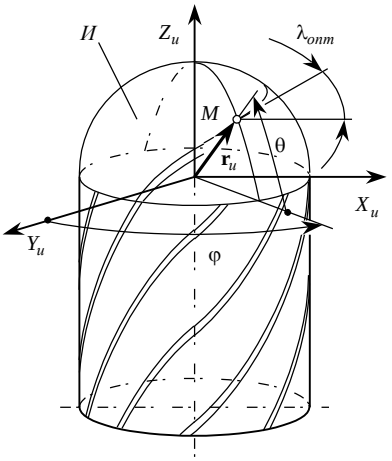
Косинусы углов между осями системы координат $X_u Y_u Z_u$ инструмента и касательной прямой к кривой $\theta = \theta(\varphi)$ на исходной инструментальной поверхности (2) равны:

$$\cos\alpha = \frac{dX_u}{dS_u} = \frac{\cos\varphi\cos\theta\ d\varphi - \sin\varphi\sin\theta\ d\theta}{\sqrt{d\varphi^2 + \sin^2\varphi\ d\theta^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{dY_u}{dS_u} = \frac{\cos\varphi\sin\theta\ d\varphi + \sin\varphi\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{d\varphi^2 + \sin^2\varphi\ d\theta^2}}; \qquad \cos\gamma = \frac{dZ_u}{dS_u} = \frac{-\sin\varphi\ d\varphi}{\sqrt{d\varphi^2 + \sin^2\varphi\ d\theta^2}},$$

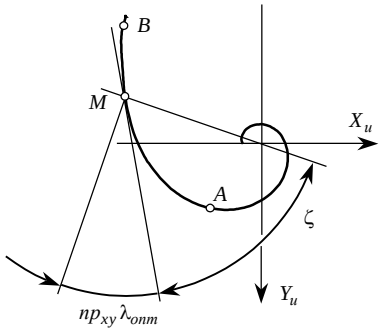
где dS_u – дифференциал дуги режущей кромки.

В частности, косинусы углов между осями координат и касательной прямой к меридиану (при $\theta = Const$) на исходной инструментальной поверхности (2) представляются в виде:

$$\cos\alpha = \frac{dX_u}{dS_u} = \cos\varphi\cos\theta\ ; \qquad \cos\beta = \frac{dY_u}{dS_u} = \cos\varphi\sin\theta\ ; \qquad \cos\gamma = \frac{dZ_u}{dS_u} = -\sin\varphi\ .$$



1.



2.

Рис. 6.2. Стабилизированный вдоль режущей кромки угол наклона $\lambda_{опт}$ у фрезы со сферической исходной инструментальной поверхностью.

Исходя из условия постоянства косинуса угла между касательной к режущей кромке и касательной к меридиану на поверхности $И$ (2), приходим к соотношению:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{d\varphi^2 + \sin^2\varphi\ d\theta^2}} = \cos m,$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \pm\cot m\ d\theta\ .$$

Здесь m – некоторый угол.

Интегрируя, получим:

$$\tan\frac{\varphi}{2} = e^{q(\theta + C)},$$

где $q = \pm\cot m$ и C – произвольная константа.

По формулам

$$\sin\varphi = \frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1 + \tan^2\frac{\varphi}{2}}; \qquad \cos\varphi = \frac{1 - \tan^2\frac{\varphi}{2}}{1 + \tan^2\frac{\varphi}{2}}$$

приходим к результату:

$$\sin\varphi = \frac{1}{ch\ q(\theta + C)}; \qquad \cos\varphi = th\ q(\theta + C).$$

Поставим условие, чтобы $\theta = \lambda_{опт}$. Тогда уравнения режущей кромки в параметрической форме представимы так:

$$X_u = \frac{R_u\cos\lambda_{опт}}{ch\ q(\lambda_{опт} + C)}; \qquad Y_u = \frac{R_u\sin\lambda_{опт}}{ch\ q(\lambda_{опт} + C)} \qquad Z_u = R_u th\ q(\lambda_{опт} + C). \qquad (6.3)$$

Если радиус-вектор текущей точки режущей кромки обозначить через $\mathbf{r}_{ce}$, соответствующая (3) матричная форма записи ее уравнения может быть представлена в форме:

$$\mathbf{r}_{ce} = \left[\frac{R_u \cos\lambda_{onm}}{ch\, q(\lambda_{onm} + C)} \quad \frac{R_u \sin\lambda_{onm}}{ch\, q(\lambda_{onm} + C)} \quad R_u th\, q(\lambda_{onm} + C) \quad 1 \right]^T .$$

В качестве режущей кромки используется некоторая дуга AB (рис. 6.2.2) локсодромы (3).

Уравнение (3) можно получить и иным путем (Бюшгенс, С.С., 1940, с. 158-159; Норден, А.П., 1948, с. 128; Struik, D.J., 1961, с. 43; Weatherburn, C.E., 1961, p. 169; и др.).

Для сферической (радиуса R_u) исходной инструментальной поверхности, параметризованной так, что ее первая основная квадратичная форма имеет вид:

$$\Phi_{1.u} \quad \Rightarrow \quad dS_u^2 = R_u^2 \left(dU_u^2 + \cos^2 U_u\, dV_u^2 \right)$$

уравнение режущей кромки записывается так:

$$V_u \cot\lambda_{onm} = R_u \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{U_u}{2R_u} \right).$$

Следует обратить внимание на то, что локсодрома образует бесконечное число витков вокруг полюса[1], приближаясь к нему бесконечно близко. Эта кривая обходит полюс как асимптотическую точку, что создает некоторые неудобства при конструировании, изготовлении и перетачивании режущего инструмента. Избежать возникающих неудобств можно путем использования бор-фрез со сферической исходной инструментальной поверхностью $И$ (рис. 6.3), режущие кромки которых образованы путем аппроксимации локсодромы технологически просто воспроизводимой кривой (Арманский Е.Я. и др., 1986; Радзевич С.П., 1988).

Зубья бор-фрезы (рис. 6.3.1) расположены группами и, за исключением центрального, смещены относительно оси вращения инструмента. Чтобы изготовить такую бор-фрезу, необходимо:

– обеспечить равенство шагов зубьев в тех сечениях исходной инструментальной поверхности $И$, в которых число зубьев инструмента изменяется;
– обеспечить постоянство высоты зубьев в различных сечениях;
– выполнить первые зубья группы сходящимися к оси с постоянным шагом спирали, а остальные – с переменным.

Для вышлифовывания стружечных канавок на станке воспроизводят следующие формообразующие движения (рис. 6.3.2): поворот фрезы вокруг оси $O_u - O_u$ на угол θ, равномерный поворот фрезы вокруг вертикальной оси $O - O$ на угол φ и разворот шлифовального круга на угол ω.

При вышлифовывании произвольной стружечной канавки на равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси $O - O$ сферической фрезе ее поворот вокруг собственной оси необходимо согласовать с остальными движениями так, чтобы выполнялось условие

$$\theta_{ik} = 2\pi \frac{k-1}{m} \pm \varphi_i \tan\omega_0 + 2\pi \frac{i-1}{mn\cos(\pm\varphi_i)}, \tag{6.4}$$

где k – номер группы зубьев;
m – число групп зубьев;
$\pm\varphi_i$ – текущая координата при вращении бор-фрезы вокруг вертикальной оси $O - O$ (положительное направление совпадает в направлением к вершине фрезы);
i – номер зуба в группе;
n – число зубьев в группе;
ω_0 – угол наклона винтовой линии зуба инструмента в сечении ее максимального диаметра.

В качестве нулевой координаты при повороте фрезы на угол θ принимают начальное положение при прорезании первой стружечной канавки первой группы зубьев фрезы.

[1]Полюс локсодромы совпадает с точкой пересечения исходной инструментальной поверхности фрезы осью вращения инструмента.

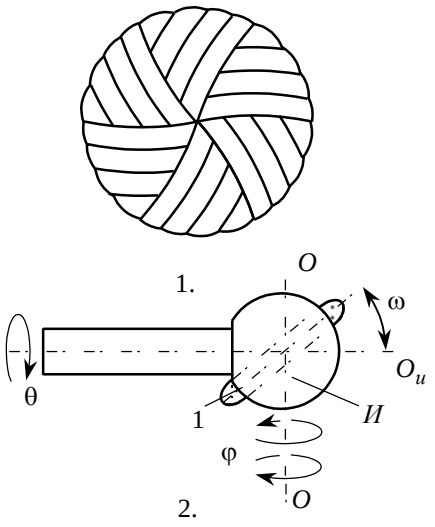


Рис. 6.3. Бор-фреза с групповым расположением зубьев (1) и схема вышлифовывания стружечных канавок (2).

При прорезании стружечных канавок угол наклона винтовой линии на сферической бор-фрезе постоянно изменяется. Поэтому для получения требуемого профиля зубьев следует соответствующим образом постоянно изменять угол наклона шлифовального круга. Для сохранения неизменным профиля зубьев, обеспечения постоянства переднего угла и размеров впадины между соседними зубьями фрезы, необходимо, чтобы торец шлифовального круга всегда был параллелен вектору результирующей линейной скорости вращательных движений инструмента вокруг собственной оси $O_u - O_u$ и вертикальной оси $O - O$. Это обеспечивается при следующем законе изменения угла наклона шлифовального круга:

$$\omega = \arctan\left[\tan\omega_0 \cos(\pm\varphi_i) + 2\pi \frac{i-1}{mn}\tan(\pm\varphi_i)\right]. \qquad (6.5)$$

Полный поворот бор-фрезы вокруг вертикальной оси при прорезании любой стружечной канавки определяется из условия равенства окружных шагов в сечениях этого инструмента с различным числом зубьев и равен:

$$\pm\varphi_i = \arccos\frac{i-1}{n}. \qquad (6.6)$$

Зависимости (4)–(6) используются при составлении управляющих программ для систем ЧПУ станками, используемыми для вышлифовывания стружечных канавок на концевых фрезах со сферической головкой и групповым расположением зубьев.

Режущая кромка в виде локсодромы может быть образована на исходной инструментальной поверхности любого фасонного режущего инструмента, в т.ч. когда его поверхность $И$ является комбинированной. Например, пальцевая фреза (рис. 6.4) имеет исходную инструментальную поверхность, состоящую из трех участков: цилиндрического участка $И_1$, плоского торца $И_2$ и переходного радиусного участка $И_3$ в виде фрагмента тора.

Для цилиндрического участка $И_1$ исходной инструментальной поверхности режущая кромка AB с углом наклона $\lambda_{опт} = Const$ вырождается в винтовую режущую кромку 1 постоянного шага; для плоского торца $И_2$ – приобретает форму логарифмической спирали 2, а уравнение режущей кромки BC для участка $И_3$ в виде фрагмента тора находится путем решения уравнения (1) – это будет дуга 3 локсодромы на торе.

Зависимость (1) позволяет найти уравнение режущей кромки для исходной инструментальной поверхности любого типа. В частных случаях возможны упрощения.

Например, для торцового участка $И_2$ пальцевой фрезы (см. рис. 6.4) уравнение режущей кромки можно определить не только как для поверхности вращения общего вида, вырожденной в плоскость, но и другим способом. В этом случае удобнее воспользоваться дифференциальным уравнением для изогональных траекторий. Семейство кривых, пересекающих все кривые исходного однопараметрического семейства $\varphi(x, y, \theta) = 0$ под заданным постоянным углом ς, определяется дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\varsigma - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\varsigma\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin\varsigma + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\varsigma\right)dy = 0. \qquad (6.7)$$

Для торцового участка $И_2$ исходной инструментальной поверхности пальцевой фрезы исходное однопараметрическое семейство линий $\varphi(x, y, \theta) = 0$ представляет собой семейство прямых, расположенных в торцовой плоскости и проходящих через ось вращения фрезы под некоторым текущим углом θ. Уравнение исходного семейства прямых записывается так:

$$\varphi(x, y, \theta) = y - x\tan\theta = 0. \qquad (6.8)$$

Полагая, что $\varsigma = 90^\circ - \lambda_{опт}$, и подставляя (8) в (7), после преобразований получим уравнение режущей кромки в виде логарифмической спирали (в виде локсодромы на плоскости). Эту кривую удобно представить в полярных координатах:

(6.9) $$\rho = \rho_0 e^{\varphi \tan\lambda_{опт}}; \qquad (\rho_0 > 0,\ -\infty < \varphi < +\infty),$$

где ρ – радиус-вектор текущей точки режущей кромки;

ρ_0 – радиус-вектор некоторой наперед заданной точки режущей кромки, от которого отсчитывается текущее значение угла φ.

Кривая (9) пересекает все лучи, выходящие из точки O, под одним и тем же углом $\varsigma = 90^\circ - \lambda_{опт}$.

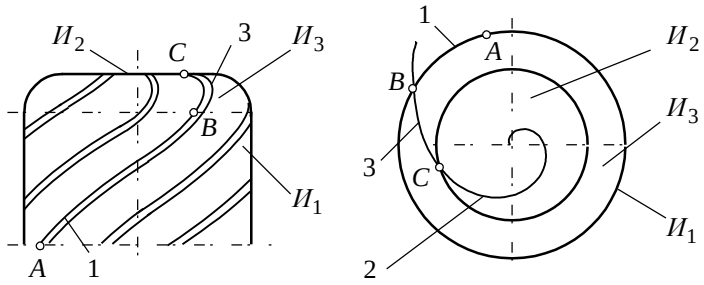


Рис. 6.4. Оптимальный угол наклона режущей кромки пальцевой фрезы с комбинированной исходной инструментальной поверхностью.

Особенностью логарифмической спирали является то, что ее полюс, лежащий на оси вращения пальцевой фрезы, является асимптотической точкой этой кривой. Поэтому режущая кромка на торцовом участке $И_2$ не может проходить через ось инструмента. Режущую кромку в форме логарифмической спирали можно выполнить только в пределах некоторого участка – аналогично дуге AB (см. рис. 6.2.2). В этом случае ее уравнение удобно представить в виде:

$$\rho = \rho_A e^{\varphi \tan\lambda_{опт}}; \qquad (\rho_A > 0,\ \varphi_A = 0^\circ < \varphi < \varphi_B).$$

Здесь ρ_A – радиус-вектор точки A режущей кромки AB.

Длина S_{AB} режущей кромки AB расчитывается по формуле:

$$S_{AB} = \frac{(\rho_B - \rho_A)\sqrt{1 + \tan^2\lambda_{опт}}}{\tan\lambda_{опт}} = \frac{(\rho_B - \rho_A)}{\sin\lambda_{опт}},$$

где ρ_B – радиус-вектор точки B режущей кромки.

Текущее значение радиуса кривизны R_u^* режущей кромки инструмента расчитывается по формуле:

$$R_u^*(\rho) = \rho\sqrt{1 + \tan^2\lambda_{опт}} = \rho_A e^{\varphi \tan\lambda_{опт}}\sqrt{1 + \tan^2\lambda_{опт}} = \frac{\rho_A e^{\varphi \tan\lambda_{опт}}}{\cos\lambda_{опт}}.$$

Третий подход к преобразованию исходного инструментального тела в работоспособный инструмент может быть использован при проектировании инструментов, применяемых как на универсальных станках, станках-автоматах и полуавтоматах и т.п., т.е. при "*жестких*" кинематических схемах формообразования, так и фасонных инструментов, используемых на многокоординатных станках с ЧПУ при "*гибкой*" кинематике формообразования.

Для целей проектирования фасонных режущих инструментов различного назначения понятие локсодромы может быть развито в двух направлениях.

Во-первых, кривые, аналогичные локсодроме, могут быть построены не только на исходных инструментальных поверхностях в виде поверхностей вращения, но и на исходных инструментальных поверхностях других типов, как допускающих, так и не допускающих движение "*самих по себе*". Таким путем понятие "*локсодромы*" расширяется в область сложных поверхностей $Д(И)$, что представляет практический интерес.

Во-вторых, понятие "*локсодромы*" можно расширить и рассматривать более общий случай, когда наивыгоднейшее значение угла наклона λ_{opm} переменно вдоль режущей кромки и изменяется в соответствие с требуемым законом, т.е. когда $\lambda_{opm} = \lambda_{opm}(U_u, V_u)$. Кривые $\lambda_{opm} = \lambda_{opm}(U_u, V_u)$ могут быть построены на исходных инструментальных поверхностях $И$, как допускающих, так и не допускающих движение "*самих по себе*". Требуемый закон $\lambda_{opm} = \lambda_{opm}(U_u, V_u)$ изменения угла наклона режущей кромки λ_{opm} может быть установлен экспериментальным путем.

Использование третьего подхода к решению задачи преобразования исходного инструментального тела в работоспособный инструмент дает возможность проектировать режущий инструмент с требуемыми по условиям резания оптимальными значениями *всех* геометрических параметров режущей кромки в каждой ее точке. Однако в этом случае инструмент может оказаться менее технологичным, не исследована возможность использования в его конструкции технологически просто воспроизводимых передних и задних поверхностей, вероятно его сложнее будет перетачивать.

Решение задачи профилирования геометрически точного фасонного режущего инструмента в рассматриваемом случае сопряжено с теми же сложностями, что и при использовании первых двух подходов.

Установление области рационального применения третьего подхода к преобразованию исходного инструментального тела в работоспособный инструмент требует проведение дополнительных исследований.

Выбор одного из трех возможных подходов к решению задачи преобразования исходного инструментального тела в работоспособный инструмент следует производить с учетом результатов детального анализа преимуществ и недостатков каждого из них для каждого конкретного случая.

После того, как в соответствие с одним из трех рассмотренных выше подходов к преобразованию исходного инструментального тела в работоспособный инструмент образованы режущие кромки, следует определить форму и параметры передних и задних поверхностей его режущего клина. Как правило, передние и задние поверхности режущего клина инструмента имееют форму технологически просто воспроизводимых поверхностей, допускающих движение "*самих по себе*". Если ставится задача спроектировать инструмент такой конструкции, чтобы передние и задние углы как нового, так и переточенного инструмента были равны оптимальным по условиям резания их значениям, следует принять во внимание следующее.

Во-первых, если исходная инструментальная поверхность имеет форму цилиндра общего вида, передние и задние поверхности должны допускать возможность представления через два семейства прямых линий, одно из которых расположено под передним γ_{opm}, а другое под задним α_{opm} углами.

Во-вторых, если исходная инструментальная поверхность является поверхностью вращения, передние и задние поверхности режущего клина должны допускать возможность представления через два семейства логарифмических спиралей с полюсами (в обоих случаях) на оси вращения инструмента. Параметр роста логарифмических спиралей одного семейства является функцией переднего угла γ_{opm}, а второго – заднего угла α_{opm}.

Наконец, в-третьих, если исходная инструментальная поверхность имеет форму винтовой поверхности, форма передней и задней поверхностей усложняется. В этом случае вид винтообразных кривых, одним семейством которых может быть представлена передняя, а другим – задняя поверхности, заранее не известен. Однако задача их определения может быть решена относительно просто, если использовать приведенные выше результаты. Это же относится и к инструментам, поверхности $И$ которых являются сложными поверхностями.

6.2. Статические геометрические параметры режущих кромок инструмента

Режущие кромки инструмента образованы двумя пересекающимися одна с другой поверхностями режущего клина, одна из которых является передней (по ней сходит стружка), а другая – задней (она обращена к поверхности резания). Часть режущего клина, непосредственно примыкающую к режущей кромке и контактирующую в процессе резания с материалом заготовки и со стружкой, называют лезвием. Различают профилирующие (чистовые) и непрофилирующие (черновые) режущие кромки и части лезвия.

Профилирующие участки режущих кромок инструмента располагаются на исходной инструментальной поверхности, а непрофилирующие – внутри исходного инструментального тела. Если в процессе обработки имеет место точечное касание поверхности детали и исходной инструментальной поверхности, непрофилирующие участки режущих кромок могут располагаться также и на поверхности $И$ инструмента.

В конструкциях многих инструментов можно выделить главную и вспомогательную режущие кромки. Часть режущей кромки фасонного инструмента, обращенная в сторону движения подачи, является главной, а другая – вспомогательной режущей кромкой. Первая контактирует со срезаемым слоем, вторая – с остаточным. Обе вместе определяют размеры остаточного детерминированного регулярного микрорельефа на поверхности детали и оказывают существенное влияние на выходные параметры процесса резания.

Для образования системы отсчета статических[1] геометрических параметров профилирующих режущих кромок можно использовать исходную инструментальную поверхность. Для непрофилирующих режущих кромок (или их непрофилирующих участков) использовать поверхность $И$ для образования системы отсчета статических геометрических параметров режущих кромок не удобно.

Для исследования статических геометрических параметров криволинейных режущих кромок фасонного инструмента следует выделить элементарный ее участок длиной dl – в дифференциальной окрестности текущей точки режущей кромки. Правомерность такого подхода основана на допущении, что процесс косоугольного резания можно рассматривать как совокупность взаимодействующих между собой косоугольных резов режущими кромками бесконечно малой длины.

Выделяя на криволинейной режущей кромке прямолинейную элементарную режущую кромку длиной dl, сохраняем все ее геометрические параметры, за исключение радиуса кривизны. Каждый инфинитезимальный элемент режущей кромки в этом случае можно рассматривать как режущий элемент с прямолинейной режущей кромкой, совершающий косоугольное резание.

Найденные исходя из этого формулы для расчета геометрических параметров можно использовать для построения и анализа эпюр изменения их величин по периметру режущих кромок.

6.2.1. Система отсчета статических геометрических параметров. При проектировании, контроле изготовленного и переточенного режущего инструмента измерение статических геометрических параметров режущих кромок производят в неподвижной (статической) системе отсчета, связанной с установочными и базовыми поверхностями режущего инструмента.

Следует уметь расчитывать величины геометрических параметров режущей кромки в положении инструмента, заданном в любой системе отсчета. Это требует аналитического представления зависимостей для расчета геометрических параметров.

Требования к точности определения величин геометрических параметров возрастают при использовании инструментов с увеличенными углами наклона режущих кромок. При исследовании механики процесса резания необходимо учитывать даже небольшие изменения геометрических параметров режущей кромки. По этой причине предложено (Astakhov, V.P., 1999) ввести в рассмотрение также так называемую *tool-in-machine system*, учитывающую погрешности фактической установки инструмента на станке, влияние которых на величины геометрических параметров режущих кромок может оказаться существенным.

Для отсчета статических геометрических параметров режущего клина используют плоскости, касательные к исходной инструментальной поверхности $И$, к передней $П$ и к задней поверхности $З$ режущего клина инструмента. В простейших случаях поверхности $И$, $П$ и $З$ представляют собой плоскости.

Отсчет величин геометрических параметров режущих кромок фасонного инструмента производится в связанной с ним неподвижной системе координат – это так называемая *статическая* система координат $X_u Y_u Z_u$. Положение статической системы координат относительно инструмента может быть различным. Даже для одного и того же инструмента при решении разных задач могут быть использованы различные связанные с ним статические системы координат.

---

[1]Какие геометрические параметры режущей кромки следует рассматривать в первую очередь, *статические*, а потом *кинематические* или наоборот, зависит от принятой точки зрения. С одной стороны, инструмент сначала надо изготовить (для этого необходимо знать величины статических геометрических параметров), после чего его можно эксплуатировать (в этом случае требуется знание кинематических геометрических параметров). Поэтому логично начать рассмотрение геометрии режущей кромки со статических ее параметров.

С другой стороны, чтобы изготовить инструмент, следует *экспериментально* установить рациональные величины кинематических геометрических параметров его режущих кромок, после чего расчитать соответствующие им значения статических геометрических параметров. Следовательно, в первую очередь надо рассмотреть кинематические, а затем статические геометрические параметры режущих кромок.

В пользу второй точки зрения свидетельствует также то, что статические геометрические параметры можно рассматривать как частный (вырожденный) случай кинематических геометрических параметров, когда направление результирующей скорости относительного движения детали и инструмента в процессе обработки совпадает с *предполагаемым* направлением главного движения и в результате этого кинематическая система отсчета геометрических параметров вырождается в статическую систему их отсчета.

Ниже будем придерживаться первой точки зрения: сначала рассмотрим геометрические параметры режущих кромок инструмента в статической, после чего – в кинематической системе отсчета, помня при этом однако, что выбранный порядок рассмотрения условен.

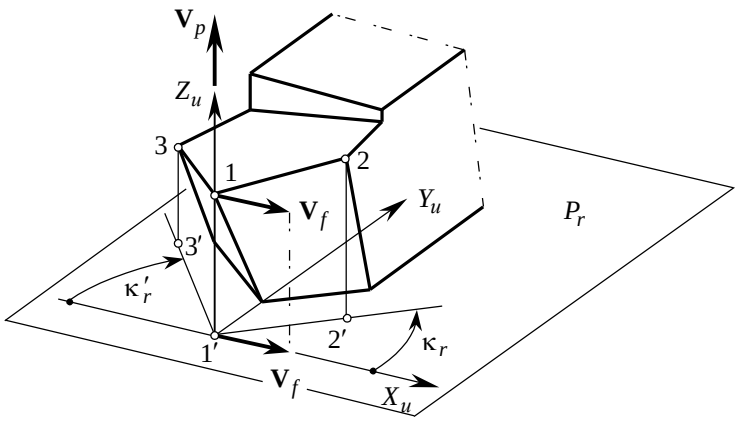


Рис. 6.5. К определению положения основной плоскости. (по ISO 3002).

Определяя положение статической системы координат относительно инструмента, следует руководствоваться соображениями удобства выполнения расчетов: система координат $X_u Y_u Z_u$ должна быть расположена таким образом, чтобы решение задач приводило к возможно менее громоздкими преобразованиям формул, а конечный результат был получен наиболее коротким и простым путем.

В качестве статической системы Международный стандарт ISO 3002 рекомендует использовать правую систему координат $X_u Y_u Z_u$ (рис. 6.5), ось Z_u которой направлена вдоль вектора $\mathbf{V}_p$ скорости *предполагаемого* главного движения, ось X_u – вдоль вектора $\mathbf{V}_f$ скорости *предполагаемого* движения подачи, а ось Y_u – дополняет оси X_u и Z_u до правой ортогональной системы декартовых координат.

В системе координат $X_u Y_u Z_u$ запишем уравнения:

– исходной инструментальной поверхности

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(U_u, V_u) = \left[X(U_u, V_u) \quad Y(U_u, V_u) \quad Z(U_u, V_u) \quad 1\right]^T; \tag{6.10}$$

– передней поверхности режущего клина

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(U_n, V_n) = \left[X(U_n, V_n) \quad Y(U_n, V_n) \quad Z(U_n, V_n) \quad 1\right]^T; \tag{6.11}$$

– задней поверхности режущего клина

$$\mathbf{r}_з = \mathbf{r}_з(U_з, V_з) = \left[X(U_з, V_з) \quad Y(U_з, V_з) \quad Z(U_з, V_з) \quad 1\right]^T. \tag{6.12}$$

Если каждое из уравнений (10) – (12) записано в своей системе координат (что бывает удобным при составлении уравнений каждой их этих поверхностей в отдельности), ортам каждой из осей собственных систем координат этих поверхностей следует присваивать соответствующий индекс "u", "n" или "$з$". Затем уравнения поверхностей *И*, *П* и *З* приводятся к общей системе координат $X_u Y_u Z_u$ с использованием для этого методов преобразования координат (см. гл. 3).

В общем случае поверхности *И*, *П* и *З* параметризованы не ортогонально. Для упрощения преобразований координат удобнее использовать ортогонально параметризованные поверхности. Преобразование исходной параметризации поверхностей *И*, *П* и *З* в ортогональную ее параметризацию, в том числе и в такую, когда в текущей точке поверхности подвижная локальная система координат является трехгранником Дарбу, производится известными методами (см. гл. 2). Где это необходимо, характер параметризации поверхностей *И*, *П* и *З* оговаривается особо.

По уравнениям касательных $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial U_n}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial V_n}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_з}{\partial U_з}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_з}{\partial V_з}$, полученных дифференцированием уравнений (10), (11) и (12), из зависимостей:

$$\begin{vmatrix} X_u - X_u^{(M)} & Y_u - Y_u^{(M)} & Z_u - Z_u^{(M)} \\ \dfrac{\partial X}{\partial U_u} & \dfrac{\partial Y}{\partial U_u} & \dfrac{\partial Z}{\partial U_u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial V_u} & \dfrac{\partial Y}{\partial V_u} & \dfrac{\partial Z}{\partial V_u} \end{vmatrix} = 0 ; \tag{6.13}$$

$$\begin{vmatrix} X_n - X_n^{(M)} & Y_n - Y_n^{(M)} & Z_n - Z_n^{(M)} \\ \dfrac{\partial X_n}{\partial U_n} & \dfrac{\partial Y_n}{\partial U_n} & \dfrac{\partial Z_n}{\partial U_n} \\ \dfrac{\partial X_n}{\partial V_n} & \dfrac{\partial Y_n}{\partial V_n} & \dfrac{\partial Z_n}{\partial V_n} \end{vmatrix} = 0 ; \tag{6.14}$$

$$\begin{vmatrix} X_з - X_з^{(M)} & Y_з - Y_з^{(M)} & Z_з - Z_з^{(M)} \\ \dfrac{\partial X_з}{\partial U_з} & \dfrac{\partial Y_з}{\partial U_з} & \dfrac{\partial Z_з}{\partial U_з} \\ \dfrac{\partial X_з}{\partial V_з} & \dfrac{\partial Y_з}{\partial V_з} & \dfrac{\partial Z_з}{\partial V_з} \end{vmatrix} = 0 \tag{6.15}$$

после выполнения необходимых преобразований приходим к уравнениям плоскостей $И$, $П$ и $З$ и преобразуем их к удобному для вычислений виду.

По уравнениям этих же касательных находим зависимости для определения ортов нормалей $\mathbf{n}_u$ к исходной инструментальной поверхности, $\mathbf{n}_n$ к передней и $\mathbf{n}_з$ к задней поверхностям режущего клина инструмента:

$$\mathbf{n}_u = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} \right|}; \tag{6.16}$$

$$\mathbf{n}_n = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial U_n} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial V_n}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial U_n} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial V_n} \right|}; \tag{6.17}$$

$$\mathbf{n}_з = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_з}{\partial U_з} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_з}{\partial V_з}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_з}{\partial U_з} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_з}{\partial V_з} \right|}. \tag{6.18}$$

При определении порядка сомножителей в векторных произведениях (16) – (18) необходимо следить за тем, чтобы орт $\mathbf{n}_u$ был направлен в сторону от материала исходного инструментального тела, а орты $\mathbf{n}_n$ и $\mathbf{n}_з$ – в сторону от материала режущего клина инструмента.

Для отсчета статических геометрических параметров режущих кромок фасонного инструмента используется статическая система координат $X_u Y_u Z_u$ и заданные в ней плоскости $И$ (13), $П$ (14) и $З$ (15), касательные в текущей точке M режущей кромки к исходной инструментальной поверхности, к передней и к задней поверхностям режущего клина. Для вычислений также используются орты нормалей $\mathbf{n}_u$ (16), $\mathbf{n}_n$ (17) и $\mathbf{n}_з$ (18) к этим поверхностям.

6.2.2. Секущие плоскости и измеряемые в них статические геометрические параметры режущих кромок. Введение в рассмотрение статической системы отсчета (см. рис. 6.5) позволяет задать в ней положение секущих плоскостей и вывести аналитически зависимости для расчета соответствующих геометрических параметров режущих кромок.

6.2.2.1. *Секущие плоскости режущего клина*. В качестве секущих плоскостей для измерения геометрических параметров режущих кромок инструмента Международный стандарт ISO 3002 [1] рекомендует исполь-

[1] ISO 3002. *Basic Quantities in Cutting and Grinding*. – Part 1: *Geometry of the Active Part of Cutting Tools – General Terms, Reference Systems, Tool and Working Angles, Chip Breakers*, 1982, 52p.

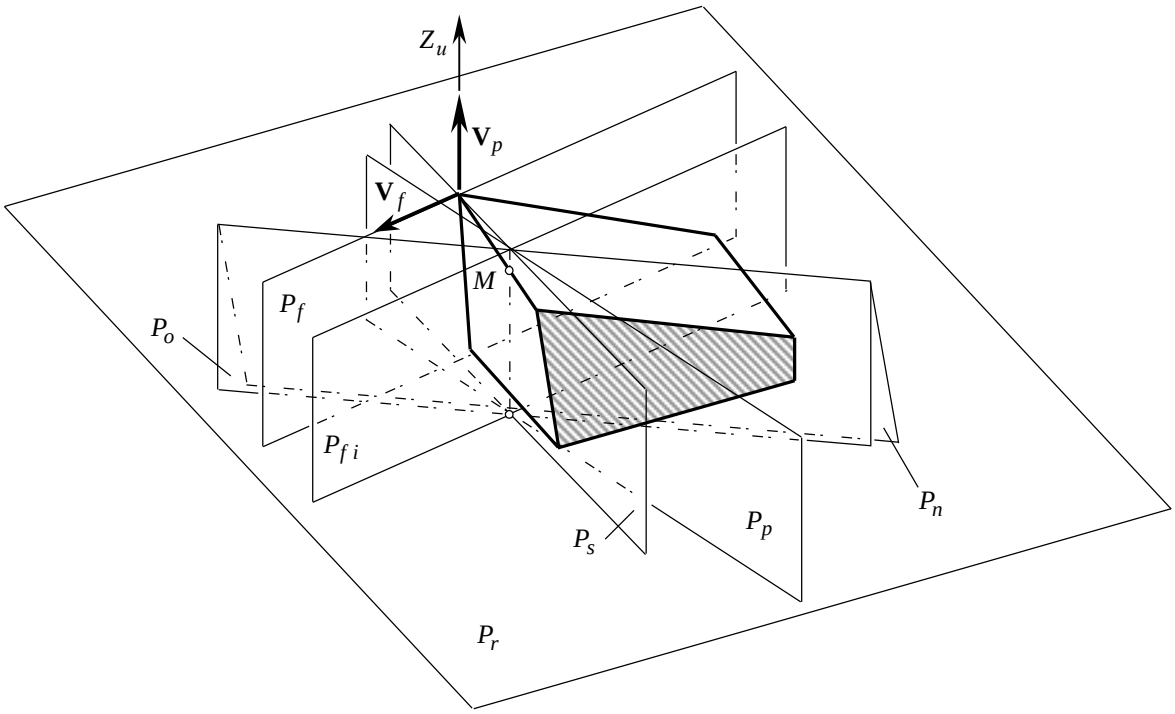


Рис. 6.6. Секущие плоскости главной режущей кромки в статической системе отсчета (по ISO 3002).

зовать систему из пяти базовых плоскостей, положение которых определено относительно основной плоскости.

Основная плоскость. По определению, *основная плоскость* (*the main reference plane*) P_r перпендикулярна к *предполагаемому* направлению главного движения $\mathbf{V}_p$ (рис. 6.6) и совпадает с плоскостью $X_u Y_u$ статической системы координат $X_u Y_u Z_u$ (см. рис. 6.5).

Предполагаемая рабочая плоскость (*assumed working plane*) P_f проходит через *предполагаемое* направление движения подачи $\mathbf{V}_f$ и перпендикулярна основной плоскости P_r.

Плоскость режущего лезвия (*tool cutting edge plane*) P_s перпендикулярна основной плоскости P_r и проходит через касательную к режущей кромке инструмента (к режущей кромке $1-2$ на рис. 6.5). Для профилирующих режущих кромок и их профилирующих участков плоскость P_s касательна к исходной инструментальной поверхности.

Обратная плоскость инструмента (*tool back plane*) P_p расположена перпендикулярно основной P_r и рабочей P_f плоскостям (см. рис. 6.6).

Ортогональная плоскость (*orthogonal plane*) P_o проходит перпендикулярно к проекции режущей кромки на основную плоскость.

Нормальная секущая плоскость (*cutting edge normal plane*) P_n перпендикулярна режущей кромке. Эту секущую плоскость можно также определить как плоскость, перпендикулярную передней Π и задней 3 плоскостям режущего клина (рис. 6.7).

ISO 3002-1/AMD1. *Amendment 1 to ISO 30021, 1982*. 1992, 3p.

ISO 3002. *Basic Quantities in Cutting and Grinding*. – Part 2: *Geometry of the Active Part of Cutting Tools– General Conversion Formulae to Relate Tool and Working Angles*, 1982, 35p.

Нормальная секущая плоскость P_n проходит через нормаль $\mathbf{n}_c$, проведенную к режущей кромке в плоскости P_s. Ее положение однозначно определено одной из пар выходящих из точки M векторов $\mathbf{n}_n$ и $\mathbf{n}_з$, $\mathbf{n}_u$ и $\mathbf{n}_c$ (рис. 6.8), другими их комбинациями или точкой M и единичным вектором $\mathbf{c}$, направленным вдоль режущей кромки.

В текущей точке M режущей кромки нормальная секущая плоскость перпендикулярна единичному вектору $\mathbf{c}$, направленному вдоль режущей кромки (касательно к ней). Вектор $\mathbf{c}$ ортогонален векторам нормалей $\mathbf{n}_n$ и $\mathbf{n}_з$ к передней $П$ и задней $З$ поверхностям режущего клина инструмента и определяется по формуле:

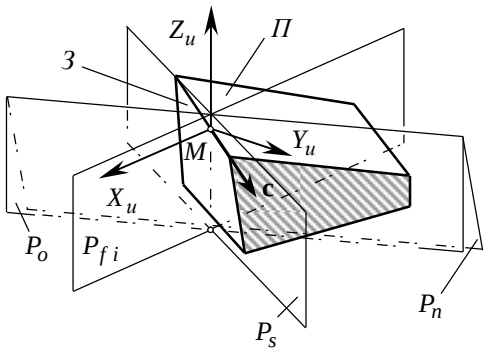


Рис. 6.7. К выводу уравнения нормальной секущие плоскости P_n.

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{N}_n \times \mathbf{N}_з}{\left|\mathbf{N}_n \times \mathbf{N}_з\right|} = \mathbf{n}_n \times \mathbf{n}_з = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ n_{n.x} & n_{n.y} & n_{n.z} \\ n_{з.x} & n_{з.y} & n_{з.z} \end{vmatrix}. \tag{6.19}$$

Входящие в (19) нормали к передней $\mathbf{N}_n$ и к задней $\mathbf{N}_з$ поверхностям находятся из (11) и (12) и соответственно равны

$$\mathbf{N}_n = \frac{\partial \mathbf{r}_n(U_n, V_n)}{\partial U_n} \times \frac{\partial \mathbf{r}_n(U_n, V_n)}{\partial V_n}; \qquad \mathbf{N}_з = \frac{\partial \mathbf{r}_з(U_з, V_з)}{\partial U_з} \times \frac{\partial \mathbf{r}_з(U_з, V_з)}{\partial V_з}.$$

В системе координат $X_u Y_u Z_u$ уравнение нормальной секущей плоскости P_n, проходящей через текущую точку M режущей кромки, можно записать в виде:

$$(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}^{(M)}) \cdot \mathbf{c} = 0, \tag{6.20}$$

где $\mathbf{r}_n$ – радиус-вектор текущей точки нормальной секущей плоскости.

Плоскости, аналогичные плоскостям измерения геометрических параметров главной режущей кромки, вводятся для вспомогательной режущей кромки и обозначаются соответственно через P'_f P'_s, P'_p, P'_o и P'_n.

Наряду с секущими плоскостями P_r, P_f, P_s, P_p, P_o и P_n, использование которых регламентировано ISO 3002, для измерения соответствующих геометрических параметров режущей кромки при необходимости в рассмотрение вводятся и другие секущие плоскости.

6.2.2.2. Статические геометрические параметры. В соответствие с ISO 3002 геометрия режущего клина инструмента определяется основными углами, измеряемыми в соответствующих плоскостях.

В основной плоскости измеряются следующие регламентируемы стандартом ISO 3002 статические геометрические параметры режущей кромки:

– φ главный угол в плане (*the tool cutting edge angle* κ_r) – это острый угол, который секущая плоскость P_s составляет с секущей плоскостью P_f. Этот угол может быть также определен как острый угол между проекцией $1'-2'$ на основную плоскость главной режущей кромки $1-2$ и осью X_u системы координат $X_u Y_u Z_u$. Главный угол в плане всегда положителен и измеряется в направлении против хода часовой стрелки от положения P_f (см. рис. 6.5).

– φ_1 вспомогательный угол в плане (*the tool minor* (*end*) *cutting edge angle* κ_{r1}) – это острый угол, который плоскость P_s составляет с плоскостью P_f. Этот угол может быть также определен как острый угол между проекцией $1'-3'$ на основную плоскость вспомогательной режущей кромки $1-3$ и осью X_u системы

координат $X_u Y_u Z_u$. Всомогательный угол в плане всегда принимает только неотрицательные (в т.ч. и равные 0°) значения и измеряется в направлении по ходу часовой стрелки от положения P_f (см. рис. 6.5).

– ψ_r *the tool approach angle* ($\psi_r = 90^\circ - \varphi$) – это острый угол, который секущая плоскость P_s составляет с секущей плоскостью P_p (см. рис. 6.6).

Наряду с регламентируемыми стандартом ISO 3002, в основной плоскости также измеряются:

– ε угол при вершине ($\varepsilon = 180^\circ - (\varphi + \varphi_1) = 180^\circ - (\kappa_r + \kappa_{r1}) = 90^\circ + \psi_r - \kappa_{r1}$);

– R_u ридиус кривизны проекции режущей кромки на основную плоскость P_r.

В предполагаемой рабочей плоскости (assumed working plane) P_f измеряются следующие геометрические параметры режущей кромки:

– γ_f передний угол – это угол между основной плоскостью P_r (ее след перпендикулярен *предполагаемому* направлению главного движения) и линией пересечения плоскостью P_f передней плоскости инструмента (рис. 6.8).

– α_f задний угол – это угол между плоскостью режущего лезвия P_s и линией пересечения задней плоскости инструмента секущей плоскостью P_f (см. рис. 6.8).

– β_f угол заострения режущего клина – это угол между линиями пересечения передней и задней плоскостей секущей плоскостью P_f. В предполагаемой рабочей плоскости сумма переднего угла γ_f, угла заострения режущего клина β_f и заднего угла α_f равна 90°:

$$\gamma_f + \beta_f + \alpha_f = 90^\circ.$$

В плоскости режущего лезвия (tool cutting edge plane) P_s измеряется статический угол наклона режущей кромки λ_s. Угол λ_s заключен между перпендикуляром к режущей кромке и касательной к линии на исходной инструментальной поверхности, вдоль которой поверхность $И$ допускает движение "*самой по себе*". Для инструментов с исходной инструментальной поверхностью в виде поверхности вращения эти линии представляют собой окружности соответствующего радиуса; для поверхностей $И$ в виде цилиндров общего вида – это прямолинейные образующие; для поверхностей $И$ в виде винтовых поверхностей – соответствующие винтовые линии. Если исходная инструментальная поверхность является поверхностью сложной формы, не допускающей движения "*самой по себе*", измерить статический угол наклона режущей кромки λ_s можно только в случае, когда определено направление, от которого следует отсчитывать величину этого угла.

В обратной плоскости инструмента (tool back plane) P_p измеряются такие геометрические параметры режущей кромки:

– γ_p передний угол – это угол между основной плоскостью P_r (ее след перпендикулярен направлению главного движения) и линией пересечения плоскостью P_p передней плоскости инструмента (см. рис. 6.8).

– α_p задний угол – это угол между плоскостью режущего лезвия P_s и линией пересечения задней плоскости инструмента секущей плоскостью P_p (см. рис. 6.8).

– β_p угол заострения режущего клина – это угол между линиями пересечения передней и задней плоскости секущей плоскостью P_p. В секущей плоскости P_p сумма переднего угла γ_p, угла заострения режущего клина β_p и заднего угла α_p равна 90°:

$$\gamma_p + \beta_p + \alpha_p = 90^\circ.$$

В ортогональной плоскости (orthogonal plane) P_o измеряются следующие геометрические параметры режущей кромки:

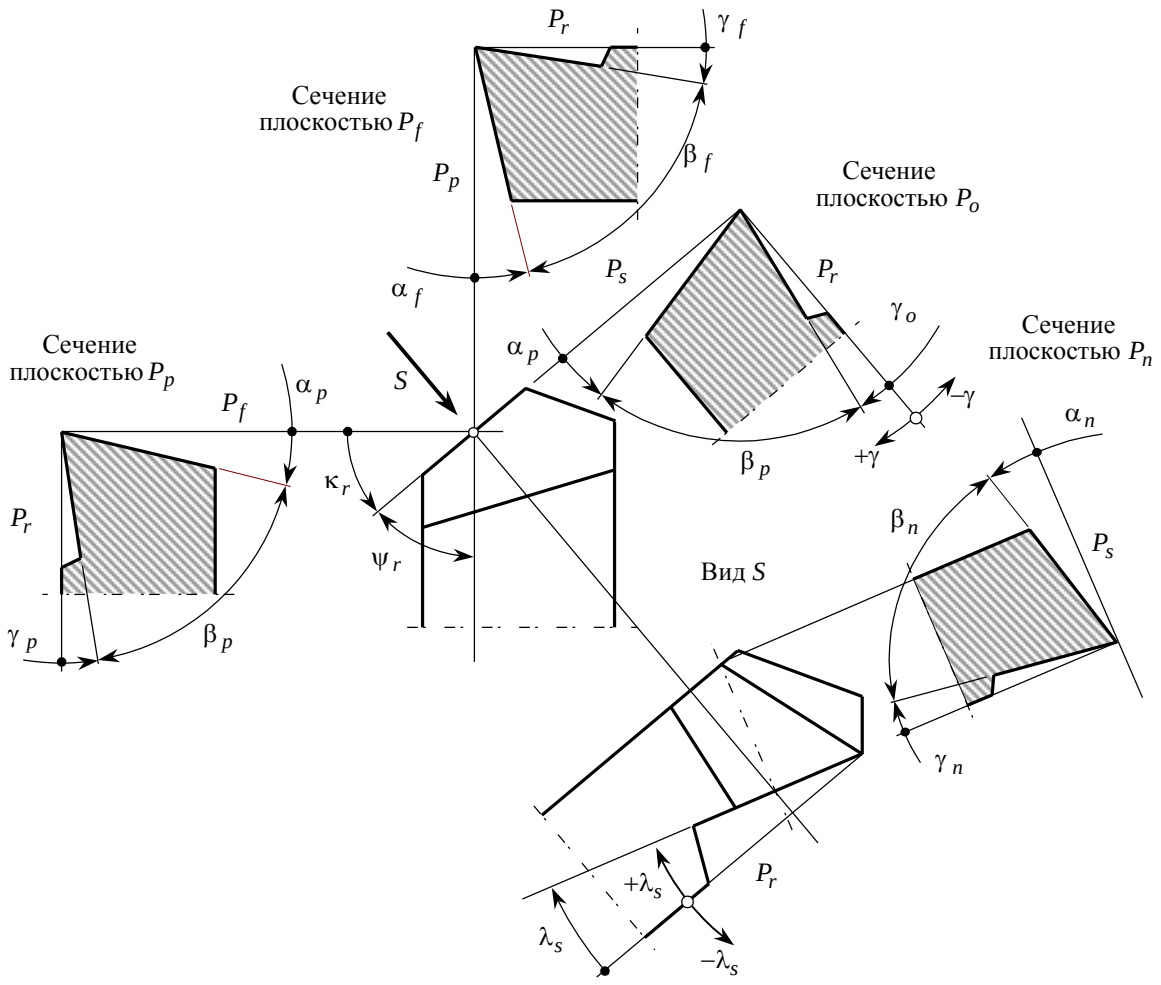


Рис. 6.8. Геометрические параметры режущей кромки в статической системе отсчета (по ISO 3002).

– γ_o передний угол – это угол между основной плоскостью P_r (ее след перпендикулярен направлению главного движения) и линией пересечения плоскостью P_o передней плоскости инструмента (см. рис. 6.8).

– α_o задний угол – это угол между плоскостью режущего лезвия P_s и линией пересечения задней плоскости инструмента секущей плоскостью P_o (см. рис. 6.8).

– β_o угол заострения режущего клина – это угол между линиями пересечения передней и задней плоскости секущей плоскостью P_o. В ортогональной плоскости сумма переднего угла γ_o, угла заострения режущего клина β_o и заднего угла α_o равна 90°:

$$\gamma_o + \beta_o + \alpha_o = 90^\circ .$$

В нормальной секущей плоскости (cutting edge normal plane) P_n измеряются:

– γ_n передний угол – это угол между основной плоскостью P_r (ее след перпендикулярен направлению главного движения) и линией пересечения плоскостью P_n передней плоскости инструмента (см. рис. 6.8).

– α_n задний угол – это угол между плоскостью режущего лезвия P_s и линией пересечения задней плоскости инструмента секущей плоскостью P_n (см. рис. 6.8).

– β_n угол заострения режущего клина – это угол между линиями пересечения передней и задней плоскости секущей плоскостью P_n. В нормальной секущей плоскости сумма переднего угла γ_n, угла заострения режущего клина β_n и заднего угла α_n равна 90°:

$$\gamma_n + \beta_n + \alpha_n = 90^\circ.$$

Наряду с нормальным передним углом γ_n, нормальным задним углом α_n и нормальным углом заострения режущего клина β_n, в плоскости P_n на инструменте непосредственно также измеряется нормальное значение ρ_n радиуса округления режущей кромки.

Положение передней поверхности режущего клина инструмента относительно плоскости P_s определяется величиной нормального переднего угла γ_n. Этот угол измеряется в нормальной секущей P_n плоскости между нормалью $\mathbf{n}_s$ к плоскости P_s и передней плоскостью $П$. Величина переднего угла γ_n отсчитывается от нормали $\mathbf{n}_s$: угол γ_n положителен при отсчете в направлении по ходу часовой стрелки (см. рис. 6.8) и отрицателен – при отсчете в противоположном направлении. От величины переднего угла γ_n зависят условия деформирования срезаемого припуска при превращении его в стружку, направление движения стружки, трение на передней поверхности, прочность и изнашивание режущего клина и др. показатели качества работы режущего инструмента.

Нормальный передний угол. Нормальный передний угол γ_n удобно определять как угол, дополняющий до 90° угол между нормалью $\mathbf{n}_s$ к плоскости режущего лезвия P_s и нормалью $\mathbf{n}_n$ к передней плоскости $П$ инструмента (рис. 6.8):

$$\gamma_n = 90^\circ - \angle(\mathbf{n}_n, \mathbf{n}_s) = 90^\circ - \arctan\frac{|\mathbf{n}_n \times \mathbf{n}_u|}{\mathbf{n}_n \cdot \mathbf{n}_u}.$$

Используя приведенные выше формулы (16) и (17) для расчета ортов нормалей $\mathbf{n}_s$ и $\mathbf{n}_n$, запишем:

$$\gamma_n = 90^\circ - \arccos\angle(\mathbf{n}_n \cdot \mathbf{n}_s) = \arcsin\angle(\mathbf{n}_n \cdot \mathbf{n}_s).$$

Нормальный задний угол. Положение задней поверхности *З* режущего клина инструмента относительно плоскости P_s определяется величиной нормального заднего угла α_n. Нормальный задний угол α_n измеряется в нормальной секущей плоскости между нормалью $\mathbf{n}_s$ к плоскости режущего лезвия P_s и задней поверхностью *З*. Величину нормального заднего угла α_n отсчитывают в направлении от плоскости P_s к задней поверхности *З* – он всегда положителен ($\alpha_n > 0^\circ$), за исключением случаев, когда в пределах узкой фаски, расположенной на задней поверхности вдоль режущей кромки, образуется дополнительная задняя поверхность, в пределах которой нормальный задний угол α_n может принимать не только нулевые, но и отрицательные значения ($\alpha_{n.ф} \le 0^\circ$).

Нормальный задний угол α_n удобно определять как угол, дополняющий до 180° (рис. 6.9) угол между нормалью $\mathbf{n}_s$ к плоскости режущего лезвия и нормалью $\mathbf{n}_з$ к задней поверхности *З*:

$$\alpha_n = 180^\circ - \angle(\mathbf{n}_з, \mathbf{n}_s).$$

С учетом (18) получим:

$$\alpha_n = 180^\circ - \arctan\frac{|\mathbf{n}_s \times \mathbf{n}_з|}{\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_з}.$$

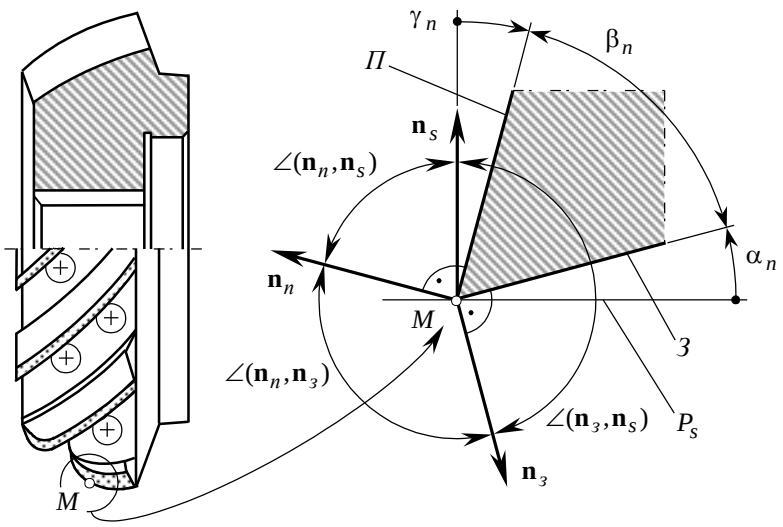


Рис. 6.9. Геометрические параметры режущей кромки инструмента в нормальной секущей плоскости.

От величины нормального заднего угла α_n зависит степень свободы перемещения задней поверхности режущего клина инструмента относительно поверхности резания, условия трения в пределах контактной зоны на задней поверхности, прочность и изнашивание режущего клина инструмента и др. показатели работы режущего инструмента. Для каждого конкретного случая обработки существует оптимальное значение заднего угла α_n и свое оптимальное сочетание геометрических параметров режущей части инструмента, при котором стойкость инструмента максимальна. Отклонение каждого из геометрических параметров от его оптимального значения приводит к необходимости соответствующим образом изменять величины других геометрических параметров режущих кромок, чтобы при этом обеспечить максимальную стойкость инструмента. Так, увеличение переднего угла приводит к необходимости уменьшать задний угол и наоборот. Например, при обработке стали средней твердости резцом с передним углом $\gamma_n = 30 \div 35^\circ$ задний угол уменьшают до $\alpha_n = 4 \div 6^\circ$.

Нормальный угол заострения режущего клина. Величина нормального угла заострения β_n режущего клина инструмента определяется из соотношения:

$$\beta_n = 90^\circ - (\alpha_n + \gamma_n).$$

Нормальный радиус округления режущей кромки инструмента. Нормальный радиус округления режущей кромки ρ_n определяется экспериментально и у инструментов из быстрорежущей стали обычно равен $\rho_n = 6 \div 32$ *мкм*. У твердосплавных инструментов радиус округления режущих кромок ρ_n находится в пределах $\rho_n = 10 \div 25$ *мкм*.

6.2.3. Соотношения между статическими геометрическими параметрами режущих кромок инструмента. На инструменте можно измерить следующие статические геометрические параметры режущих кромок:

– статический угол наклона режущей кромки λ_s;

– угол при вершине ε' (этот угол измеряется в передней плоскости, он заключен между главной и вспомогательной режущими кромками, а его проекция на основную плоскость P_r равна ε) и радиус кривизны режущей кромки (его проекция ра основную плоскость P_r равна R_u);

– нормальный передний угол γ_n, нормальный задний угол α_n, нормальный угол заострения режущего клина β_n и нормальное значение радиуса округления режущей кромки ρ_n.

По измеренным величинам статических геометрических параметров рассчитываются соответствующие их значения в базовых и в других секущих плоскостях (Радзевич С.П., 1992; Радзевич С.П., Палагута В.А., 1996). При решении подобных задач целесообразно использовать элементы векторного исчисления. Одним из первых элементы векторного исчисления для расчета геометрических параметров режущих кромок инструмента применил С.С. Можаев (1948).

Например, пусть для элементарного режущего клина длиной dl известны его статические геометрические параметры в нормальной секущей плоскости P_n и определена величина статического угла наклона

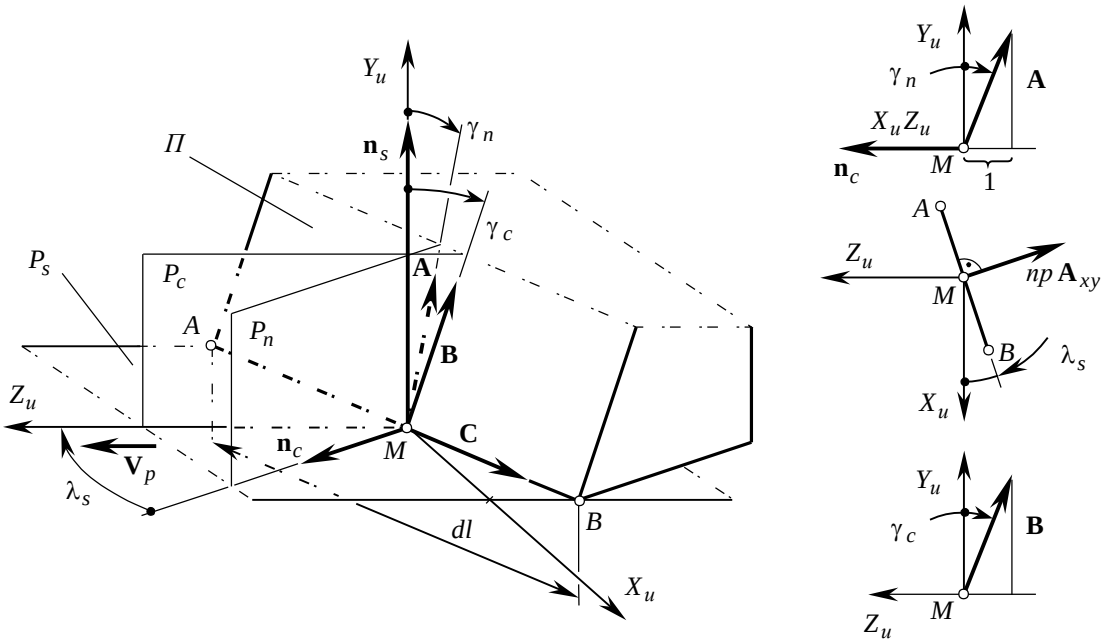


Рис. 6.10. К определению соотношений между статическими геометрическими параметрами режущих кромок в различных секущих плоскостях.

режущей кромки λ_s. Требуется рассчитать величину переднего угла γ_c в плоскости P_c, проходящей через точку M режущей кромки AB в направлении $\mathbf{V}_p$ перпендикулярно плоскости P_s режущего лезвия (рис. 6.10).

В точке M расположено начало системы координат $X_u Y_u Z_u$. Ось Z_u направлена вдоль вектора $\mathbf{V}_p$; ось Y_u – перпендикулярно плоскости режущего лезвия P_s, а ось X_u – перпендикулярно координатной плоскости $Y_u Z_u$ (рис. 6.5).

Касательно к линии пересечения передней поверхности нормальной секущей плоскостью P_n направлен вектор $\mathbf{A}$, длина которого выбрана такой, чтобы его проекция на плоскость координат $Y_u Z_u$ равнялась единице ($np.\mathbf{A}_{xy} = 1$). В проекциях на оси системы координат $X_u Y_u Z_u$ этот вектор записывается так:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{i}\sin\lambda_s + \mathbf{j}\cot\gamma_n - \mathbf{k}\cos\lambda_s .$$

Касательно к линии пересечения передней поверхности плоскостью P_c направлен единичный вектор $\mathbf{B}$. В проекциях на оси системы координат $X_u Y_u Z_u$ вектор $\mathbf{B}$ можно записать так:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{j}\cos\gamma_c + \mathbf{k}\sin\gamma_c .$$

Вдоль режущей кромки направлен единичный вектор $\mathbf{C}$. В проекциях на оси системы координат $X_u Y_u Z_u$ он записывается так:

$$\mathbf{C} = \mathbf{i}\cos\lambda_s - \mathbf{k}\sin\lambda_s .$$

По построению три вектора $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ являются компланарными – они лежат в общей плоскости, касательной к режущей кромке AB в точке M. Поэтому их смешанное (векторно-скалярное) произведение равно нулю:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=\begin{vmatrix}-\sin\lambda_s & \cot\gamma_n & -\cos\lambda_s\\ 0 & -\cos\gamma_c & \sin\gamma_c\\ \cos\lambda_s & 0 & -\sin\lambda_s\end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв этот определитель и выполнив необходимые преобразования, получим, что:

$$\cot\gamma_c=\cos\lambda_s\cdot\cot\gamma_n.$$

Величины углов режущего клина, измеренные в нормальной секущей плоскости, связаны между собой соотношением: $\gamma_n+\alpha_n+\beta_n=90^\circ$, в которое подставляются алгебраические значения слагаемых.

Аналогичные соотношения справедливы и для других плоских сечений режущего клина инструмента.

В передней плоскости измеряется угол ε' – это угол между главной и вспомогательной режущими кромками инструмента. По его значению в основной плоскости P_r рассчитывается величина угла при вершине ε. Угол ε' является проекцией угла ε на переднюю плоскость.

Международный стандарт ISO 3002 рекомендует использовать следующие соотношения между углами режущего клина инструмента в статической системе отсчета:

$$\tan\lambda_s=\sin\kappa_r\tan\gamma_p-\cos\kappa_r\tan\gamma_f;$$

$$\tan\gamma_n=\cos\lambda_s\tan\gamma_o;$$

$$\tan\gamma_o=\cos\kappa_r\tan\gamma_p+\sin\kappa_r\tan\gamma_f;$$

$$\cot\alpha_n=\cos\lambda_s\cot\alpha_o.$$

Эти соотношения выведены в предположении, что боковой передний угол γ_f инструмента, передний угол γ_p, измеренный в плоскости P_p, и главный угол в плане κ_r являются основными для передней поверхности, а боковой задний угол α_f, задний угол α_p в сечении плоскостью P_p и главный угол в плане κ_r являются основными для задней поверхности инструмента.

Некоторые из приведенных соотношений справедливы, когда главный угол в плане κ_r меньше 90°. Если угол $\kappa_r>90^\circ$, следует пользоваться соотношениями (Astakhov, V.P., 1999):

$$\cot\alpha_o=\cos\kappa_r\cot\alpha_p+\sin\kappa_r\cot\alpha_f;$$

$$\tan\lambda_s=-\sin\kappa_r\tan\gamma_p-\cos\kappa_r\tan\gamma_f;$$

$$\tan\gamma_n=\cos\lambda_s\tan\gamma_o;$$

$$\tan\gamma_o=-\cos\kappa_r\tan\gamma_p+\sin\kappa_r\tan\gamma_f;$$

$$\cot\alpha_n=\cos\lambda_s\cot\alpha_o;$$

$$\cot\alpha_o=-\cos\kappa_r\cot\alpha_p+\sin\kappa_r\cot\alpha_f.$$

6.2.3.1. Радиус кривизны режущей кромки инструмента. Если касательно к режущей кромке провести плоскость P_c, перпендикулярную плоскости режущего лезвия P_s, то радиус кривизны R_u сечения исходной

инструментальной поверхности этой плоскостью и радиус кривизны режущей кромки R'_u, измеренный в передней плоскости инструмента, связаны между собой формулой Мёнье:

$$R_u = \frac{R'_u}{\cos\gamma_n} = \frac{R_{1.u}\sin^2\lambda_s + R_{2.u}\cos^2\lambda_s}{R_{1.u}R_{2.u}\cos\gamma_n}. \qquad (6.21)$$

Справедлива обратная формула – радиус кривизны R'_u режущей кромки, измеренный в передней плоскости $П$ зуба инструмента, равен:

$$R'_u = R_u\cos\gamma_n = \frac{R_{1.u}R_{2.u}\cos\gamma_n}{R_{1.u}\sin^2\lambda_s + R_{2.u}\cos^2\lambda_s}.$$

Если известен один из главных радиусов кривизны ($R_{1.u}$ или $R_{2.u}$) исходной инструментальной поверхности, то по измеренной величине статического угла наклона режущей кромки λ_s и рассчитанному (21) значению радиуса кривизны R_u можно найти значение другого главного радиуса кривизны поверхности $И$ инструмента. Эти конструктивные параметры фасонного режущего инструмента связаны между собой формулой Эйлера:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{\cos^2\lambda_s}{R_{1.u}} + \frac{\sin^2\lambda_s}{R_{2.u}}. \qquad (6.22)$$

Следует обратить внимание на то, что в формуле (22) значение первого главного радиуса кривизны $R_{1.u}$ соответствует меньшему алгебраическому значению R_u из всех возможных, а значение второго главного радиуса кривизны – большему его значению. Поэтому в зависимости от соотношения диаметральных размеров инструмента и параметров его профиля в формуле (22) значение угла λ_s может потребоваться заменить на $(90^\circ - \lambda_s)$. В этом случае формула (22) преобразуется к виду:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{\sin^2\lambda_s}{R_{1.u}} + \frac{\cos^2\lambda_s}{R_{2.u}}.$$

Радиус кривизны R_u текущего плоского нормального сечения поверхности $И$ инструмента рассчитывается исходя из формулы Эйлера:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{\cos^2\xi}{R_{1.u}} + \frac{\sin^2\xi}{R_{2.u}},$$

где $R_{1.u}$ и $R_{2.u}$ – главные радиусы кривизны исходной инструментальной поверхности в точке M на ней;

ξ – угол между первым главным сечением $C_{1.u}$ поверхности $И$ инструмента и плоскостью, проходящей касательно к режущей кромке перпендикулярно плоскости режущего лезвия P_s.

Влияние радиуса кривизны R'_u режущей кромки инструмента и главных радиусов кривизны $R_{1.u}$, $R_{2.u}$ его исходной инструментальной поверхности на выходные параметры процесса резания исследовано недостаточно, в связи с чем требуется проведение всесторонних экспериментальных исследований.

Детальные экспериментальные исследования также необходимо провести для изучения мало исследованного вопроса зависимости качества шлифованной сложной поверхности детали от значений ее главных радиусов кривизны $R_{1.д}$ и $R_{2.д}$, от значений главных радиусов кривизны $R_{1.u}$ и $R_{2.u}$ поверхности $И$ применяемого фасонного шлифовального круга, от относительной ориентации детали и инструмента в

процессе обработки и от элементов режима резания. По этому вопросу имеются лишь отдельные публикации (Якимов А.В., 1984; Якимов А.В., Ларшин В.П., Скляр А.М., 1986 и др.).

6.2.3.2. Радиус округления режущей кромки. Режущая кромка любого режущего инструмента образуется в месте пересечения его передней *П* и задней *З* поверхностей. Независимо от тщательности отделки, рабочие поверхности *П* и *З* всегда имеют некоторую шероховатость (величина которой поддается измерению). Поэтому даже после очень тщательной заточки и доводки рабочих поверхностей режущего клина всегда имеет место некоторое округление режущей кромки по радиусу ρ_n (рис. 6.11).

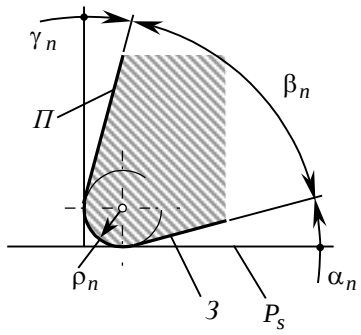


Рис. 6.11. Радиус округления режущей кромки.

Величина радиуса ρ_n оказывает влияние на характер протекания процесса резания, причем особенно существенно при срезании тонких стружек, толщина которых соизмерима с ρ_n. При толщине среза до $0{,}003\,мм$ величина переднего угла не оказывает существенного влияния на процесс резания и обычно принимается равной 0°.

Радиус округления режущей кромки ρ, измеренный в плоскости, проходящей вдоль $\mathbf{V}_p$ перпендикулярно плоскости режущего лезвия P_s, связан с радиусом ее округления ρ_n, измеренным в нормальной секущей плоскости, в соответствие с формулой Мёнье[1]:

$$\rho = \rho_n \cos\lambda_s .$$

6.2.3.3. Кручение режущей кромки инструмента. На характер изменения геометрических параметров режущей части инструмента непосредственно влияет форма передних и задних поверхностей, поскольку величины передних и задних углов измеряется между линиями, касательными к рассматриваемым поверхностям. В этой связи следует обратить внимание еще на один геометрический параметр режущей кромки – ее кручение. Этот геометрический параметр режущего клина ранее не рассматривался, а его влияние на процесс резания не исследовано.

Передняя *П* и задняя *З* поверхности режущего клина инструмента в общем случае могут иметь сложную форму, а режущая кромка – форму не только плоской но и пространственной кривой. По этой причине криволинейную режущую кромку можно рассматривать как пространственную кривую, имеющую в текущей точке определенную кривизну и кручение. Примером тому могут служить цилиндрические (пальцевые) фрезы с винтовыми стружечными канавками, кручение режущей кромки которых определяется их винтовым параметром.

Режущая кромка условно рассматривается как линия пересечения трех поверхностей: исходной инструментальной *И*, передней *П* и задней *З*. Уравнение режущей кромки может быть получено путем преобразований одной из трех эквивалентных пар уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(U_n, V_n) = \left[X(U_n, V_n) \;\; Y(U_n, V_n) \;\; Z(U_n, V_n) \;\; 1\right]^T; \\ \mathbf{r}_з = \mathbf{r}_з(U_з, V_з) = \left[X(U_з, V_з) \;\; Y(U_з, V_з) \;\; Z(U_з, V_з) \;\; 1\right]^T; \end{cases} \tag{6.23}$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(U_u, V_u) = \left[X(U_u, V_u) \;\; Y(U_u, V_u) \;\; Z(U_u, V_u) \;\; 1\right]^T; \\ \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(U_n, V_n) = \left[X(U_n, V_n) \;\; Y(U_n, V_n) \;\; Z(U_n, V_n) \;\; 1\right]^T; \end{cases} \tag{6.24}$$

или

[1] **Мёнье** де ла Плас Жан Батист Мари Шарль (***Meusnier*** *de La Place Jean Baptiste Marie Charles*) (19.06.1754, Тур – 17.6.1793, Майнц), французский математик, член Парижской АН (1784), генерал. Окончил Мезьерскую инженерную школу (1776). Ученик Г.Монжа. Подполковник к началу Великой французской революции. Вместе с Г. Монжем, Ш.О. Вандермондом и физиком Ж.А. Ассенфратцем вошел в состав Якобинского клуба (1790). Начальник отдела Военного министерства (1792), дивизионный генерал. Проектировал управляемый аэростат, ряд машин и механизмов. Исследования относятся к дифференциальной геометрии. Изучал свойства кривизн плоских сечений поверхности. Его единственная математическая работа "*Мемуар о кривизне поверхностей*" (1785) имела большое значение для развития дифференциальной геометрии и теории поверхностей. Доказал теорему (теорема Мёнье – установлена в 1776, опубликована в 1785) о проекции радиуса кривизны сечения поверхности на нормальную плоскость. Известен главным образом своими исследованиями по дифференциальной геометрии.

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(U_u, V_u) = [X(U_u, V_u) \;\; Y(U_u, V_u) \;\; Z(U_u, V_u) \;\; 1]^T; \\ \mathbf{r}_з = \mathbf{r}_з(U_з, V_з) = [X(U_з, V_з) \;\; Y(U_з, V_з) \;\; Z(U_з, V_з) \;\; 1]^T, \end{cases} \tag{6.25}$$

что в некоторой мере отражает подход, используемый при профилировании режущего инструмента: (23) – для черновых инструментов, используемых преимущественно на обдирочных операциях; (24) – для инструментов (в том числе и затылованных) с перетачиваемой передней и сложной по форме задней поверхностью зубьев; (25) – для острозаточенных инструментов с перетачиваемой задней и сложной по форме передней поверхностью зубьев.

Считаем, что в системе координат инструмента $X_u Y_u Z_u$ режущая кромка определена уравнениниями вида (23). После выполнения необходимых преобразований ее уравнение может быть представлено в векторной форме

$$\mathbf{r}_{р.к.} = \mathbf{r}_{р.к.}(t_{р.к.}) = X_u(t_{р.к.})\mathbf{i} + Y_u(t_{р.к.})\mathbf{j} + Z_u(t_{р.к.});$$

где $t_{р.к.}$ – параметр, в частности может быть $t_{р.к.} = X_u$, $t_{р.к.} = Y_u$; $t_{р.к.} = Z_u$ или $t_{р.к.} = S_{р.к.}$, (здесь $S_{р.к.}$ – длина режущей кромки, отсчитываемая от некоторой фиксированной ее точки до текущей точки M)

Величина кручения режущей кромки равна:

$$T_{р.к.} = \frac{1}{\tau_{р.к.}} = \rho_{р.к.}^2 \left(\frac{d\mathbf{r}_{р.к.}}{dS_{р.к.}} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}_{р.к.}}{dS_{р.к.}^2} \cdot \frac{d^3\mathbf{r}_{р.к.}}{d^3 S_{р.к.}} \right) = \rho_{р.к.}^2 \frac{\dfrac{d\mathbf{r}_{р.к.}}{dt_{р.к.}} \cdot \dfrac{d^2\mathbf{r}_{р.к.}}{dt_{р.к.}^2} \cdot \dfrac{d^3\mathbf{r}_{р.к.}}{dt_{р.к.}^3}}{\left| \left(\dfrac{d\mathbf{r}_{р.к.}}{dt_{р.к.}} \right)^2 \right|^3}.$$

Знак кручения τ_u не согласован с направлением отсчета угла наклона режущей кромки λ_s.

Кручение τ_u режущей кромки зависит от формы, параметров и относительного положения передней *П* и задней *З* поверхностей режущего клина инструмента, вид, форма и ориентация которых оказывают влияние на процесс резания материалов. Имеются основания предположить, что кручение τ_u режущей кромки также влияет на протекания процесса резания – это влияние должно быть тем сильнее, чем больше величина кручения.

Влияние величины кручения режущей кромки на выходные параметры процесса резания исследовано мало, в частности, потому, что нет простых и надежных средств для непосредственного измерения его величины.

6.2.4. Графо-аналитический метод определения геометрических параметров режущих кромок. Если необходимо определить геометрические параметры режущих кромок инструмента в плоских сечения, проходящих через заданную точку режущей кромки в разных направлениях ортогонально основной плоскости, удобно применить графоаналитический метод определения геометрических параметров. Этот метод основан на построении круговых диаграмм изменения тригонометрических функций геометрических параметров (Кудевицкий Я.В., 1978; Shi Han-min, 1982). Особенности метода рассмотрим на примере его использования для анализа статических геометрических параметров режущих кромок дисковых фасонных фрез.

У дисковых фасонных фрез углы γ_o и λ_s, а также углы γ_p и γ_f измеряются во взаимно перпендикулярных плоскостях P_o и P_s и являются соответствующими проекциями максимального переднего угла $\gamma_{\max}$. Поэтому зависимости между величинами передних углов, измеренных в различных сечениях, перпендикулярных основной плоскости фрезы, можно наглядно представить как отношение элементов окружности 1 передних углов (рис. 6.7.1). Так, если в некоторой точке M режущей кромки фасонной фрезы

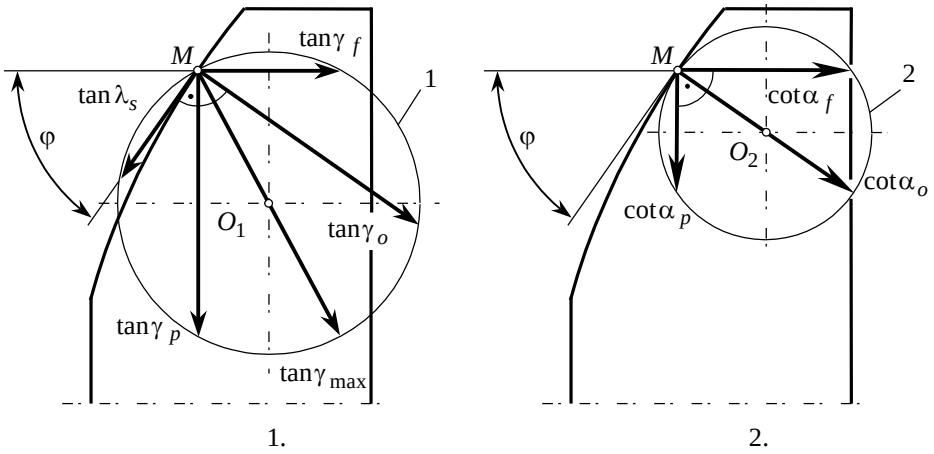


Рис. 6.12. Определение передних (1) и задних (2) углов фасонного инструмента графо-аналитическим методом.

известны значения углов γ_p и γ_f, то окружность 1, построенная по векторным величинам $\tan\gamma_p$ и $\tan\gamma_f$ известных углов γ_p и γ_f, определяет зависимость между передними углами в этой точке M. Хорды базовой окружности 1 представляют собой функции тангенсов $(\tan\gamma)$ передних углов в заданных секущих плоскостях. В секущей плоскости, проходящей через центр окружности 1 и исследуемую точку профиля, измеряется максимальный передний угол, величина тангенса которого $(\tan\gamma_{max})$ в принятом масштабе определяет диаметр базовой окружности 1 и равна геометрической сумме векторов $\tan\gamma_p$ и $\tan\gamma_f$.

Хорда окружности в секущей плоскости, нормальной к профилю и проходящей через точку M на нем, определяет функцию тангенса переднего угла $\tan\gamma_o$, а хорда в плоскости, касательной к профилю, – тангенс угла наклона режущей кромки $\tan\lambda_s$. Угол наклона передней поверхности в произвольной секущей плоскости также определяется величиной проведенной в заданном направлении хорды базовой окружности.

Зависимость между задними углами фасонной фрезы в различных ее сечениях, так же как и зависимость между передними углами, можно представить как отношения элементов окружности задних углов (рис. 6.7.2). В этом случае базовая окружность 2 строится по векторным величинам котангенсов $(\cot\alpha)$ известных величин задних углов, а диаметр базовой окружности 2 в принятом масштабе равен котангенсу заднего угла α_o в сечении, нормальном к профилю. Хорды базовой окружности, проходящие через точку M, определяют задний угол $(\cot\alpha)$ в заданной секущей плоскости.

Графо-аналитический метод определения передних и задних углов фасонной фрезы эффективен при исследовании геометрических параметров режущей части фасонного инструмента в процессе его проектирования. С его помощью можно достаточно просто исследовать влияние формы профиля, угла наклона зуба и размеров фрезы на изменение угловых параметров по длине режущей кромки.

Графо-аналитический метод полезен и непосредственно при исследованиях, связанных с изучением процесса фасонного фрезерования металлов, когда направление схода стружки по передней поверхности фрезы отличается от направления, нормального к профилю и ее сход происходит в плоскости, составляющей угол η с нормальной плоскостью. Если известен установленный, например, экспериментальным путем, угол η, то при помощи окружности передних углов можно установить действительный передний в плоскости схода стружки и геометрию режущего клина фасонной фрезы в процессе резания в каждой точке ее режущей кромки.

6.3. Кинематические геометрические параметры режущих кромок инструмента

При работе инструмента фактическое направление главного движения и движения подачи могут отличаться от предполагаемых направлений, используемых в статической системе отсчета. Кинематические геометрические параметры режущей кромки определяют положение передних и задних поверхностей инструмента с учетом характера и параметров его движения относительного детали.

Поверхность обработанной детали можно рассматривать, с одной стороны, как огибающую последовательных положений исходной инструментальной поверхности в движении инструмента относительно детали, а с другой – как совокупность дискретных поверхностей резания P_{se}. В момент формообразования исходная инструментальная поверхность $И$ и поверхность резания P_{se} касаются поверхности $Д$ детали и, следовательно, касаются одна другой. Поэтому безразлично, по отношению к какой из них определять *статические* геометрические параметры режущих кромок инструмента. Однако при работе инструмента определять *кинематические* геометрические параметры его режущих кромок относительно исходной инструментальной поверхности нельзя – их следует определять в плоскостях, связанных с поверхностью резания и соответствующим образом ориентированных относительно нее.

Поскольку в общем случае форма передней и задней поверхностей лезвия может быть сложной, относительное положение этих поверхностей следует рассматривать в отдельных точках режущей кромки в зоне контакта режущего клина с материалом заготовки. Из-за малости площади контакта в зоне лезвия каждая из рассматриваемых поверхностей может быть заменена плоскостью – соответственно передней, задней и плоскостью резания.

Поэтому кинеметические геометрические параметры режущих кромок инструмента удобно исследовать применительно к элементарной режущей кромке длиной dl – в дифференциальной окрестности текущей точки M на ней и в конкретный момент времени, т.е. когда известно мгновенное положение инструмента относительно детали и мгновенное направление результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ его относительного движения (либо всех ее составляющих). После этого можно строить и анализировать эпюры изменения кинематических геометрических параметров по периметру режущих кромок инструмента и во времени. Для этого требуется обобщенный метод определения кинематических значений геометрических параметров режущих кромок с учетом влияния на их значения всех движений инструмента относительно детали.

Поскольку при многокоординатной обработке сложных поверхностей деталей величины кинематических геометрических параметров фасонного инструмента переменны как во времени, так и по периметру режущих кромок, текущие их значения могут ограничивать параметры рабочих движений инструмента (движений подачи, движений ориентирования инструмента и др.). Поэтому необходимо уметь определять допустимые пределы изменения геометрических параметров, в частности, с учетом ограничений, накладываемых параметрами относительных движений ориентирования инструмента. Исследование зависимости величин кинематических геометрических параметров режущих кромок от значений параметров кинематики формообразования позволяет выявить неиспользованные резервы кинематики резания и формообразования, например, установить те параметры процесса формообразования, которые для повышения эффективности обработки предпочтительнее изменять в первую очередь.

6.3.1. Результирующая скорость относительного движения детали и инструмента в процессе обработки. Принципиально важным для создания системы отсчета кинеметических геометрических параметров режущих кромок инструмента является определение направления вектора результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ относительного движения детали и инструмента в процессе обработки.

В общем случае инструмент совершает относительно детали сложное движение, которое можно представить как многопараметрическое. Его удобно разложить на элементарные составляющие: на движение резания, движения формообразования, движения одной или нескольких подач, движения ориентирования инструмента и пр. Тогда результирующую скорость $\mathbf{V}_\Sigma$ можно представить как суперпозицию скоростей элементарных движений:

$$\mathbf{V}_\Sigma = \mathbf{V}_p + \mathbf{V}_\phi + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_{S.i} + \mathbf{V}_{op}^{\mathrm{I}} + \mathbf{V}_{op}^{\mathrm{II}} + \ldots = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{V}_j \,, \tag{6.26}$$

где $\mathbf{V}_p$ – скорость движения резания (скорость главного движения);

$\mathbf{V}_{\phi}$ – скорость движения формообразования;

$\mathbf{V}_{S.i}$ – скорость движения i – й подачи;

n – количество подач;

$\mathbf{V}_{op}^{\mathrm{I}}$ – скорость движения ориентирования первого рода;

$\mathbf{V}_{op}^{\mathrm{II}}$ – скорость движения ориентирования второго рода;

$\mathbf{V}_j$ – скорость j – го элементарного движения, составляющего результирующее движение инструмента относительно детали – это могут быть в том числе вибраци (инструмента, детали или всей технологической системы), биение режущих кромок инструмента и пр.

m – общее количество элементарных движений, на которые раскладывается результирующее движение инструмента относительно детали.

При определении результирующей скорости $\mathbf{V}_{\Sigma}$ движения инструмента относительно детали во внимание принимаются все их относительные движения, в т.ч. и движения, приводящие поверхность $Д(И)$ к движению "*самой по себе*".

Движение формообразования часто совпадает с движением одной из подач. Это следует учитывать при определении величины и направления результирующей скорости $\mathbf{V}_{\Sigma}$ относительного движения детали и инструмента в процессе обработки.

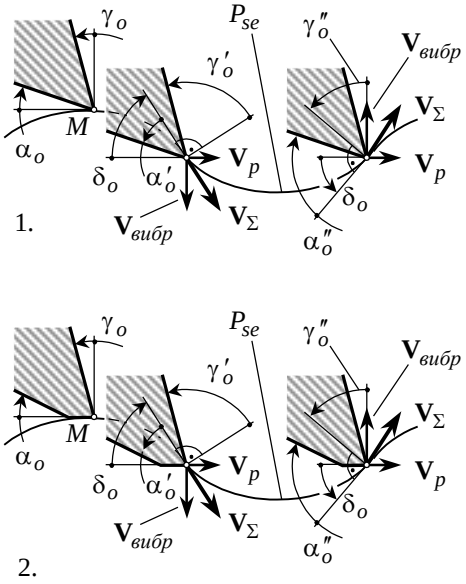


Рис. 6.13. Характер изменений геометрических параметров режущей кромки, вызванных вибрациями инструмента.

Скорости ориентирующих движений инструмента (первого $\mathbf{V}_{op}^{\mathrm{I}}$ и второго $\mathbf{V}_{op}^{\mathrm{II}}$ родов) обычно невелики – их вклад в абсолютную величину скорости $\mathbf{V}_{\Sigma}$ не очень существенен. Однако в (26) учитывать скорости $\mathbf{V}_{op}^{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{V}_{op}^{\mathrm{II}}$ надо в обязательном порядке, поскольку они изменяют направление результирующего относительного движения, а это, в свою очередь, может привести к существенным изменениям формы и параметров траектории перемещения по поверхности детали точки K касания поверхностей $Д$ и $И$.

Скорости движений подач обычно малы и их значениями при определении скорости $\mathbf{V}_{\Sigma}$ результирующего движения часто пренебрегают. Однако когда речь идет о расчете малых по величине углов (в первую очередь задних углов), учитывать скорости движений подачи следует обязательно.

В некоторых случаях скорость движения подачи может быть соизмерима и даже превышать скорость резания. Например, при сверлении отверстий скорость резания (линейная скорость вращательного движения) в некоторой точке режущей кромки равна по модулю скорости осевой подачи, а ближе к оси сверла она меньше скорости этого движения.

При резании всегда имеют место вибрации инструмента. В разных фазах колебательного движения инструмента задние углы его режущей кромки попеременно принимают то положительные, то отрицательные значения (рис. 6.13.1). При определенной частоте и амплитуде колебаний, других параметрах колебательного движения инструмента (детали или всей технологической системы) не учитывать влияние вектора $\mathbf{V}_{вибр}$ скорости колебательного движения на величины кинематических передних и задних углов недопустимо (Kocic, K., 1988; Ismail, F., *et al*, 1993). В результате вибраций, биения режущих кромок инструмента и т.п. поверхность резания P_{se} приобретает волнообразную форму, а передний и задний углы изменяются на $\pm\delta_o$. Текущее значение этого угла равно

$\delta_o = \arctan\dfrac{\left|\mathbf{V}_{вибр}\right|}{\left|\mathbf{V}_p\right|}$. Когда скорость $\mathbf{V}_{вибр}$ направлена на деталь, это приводит к тому, что $\gamma'_o = \gamma_o + \delta_o$ и $\alpha'_o = \alpha_o - \delta_o$. Если скорость $\mathbf{V}_{вибр}$ направлена от детали, то $\gamma''_o = \gamma_o - \delta_o$ и $\alpha''_o = \alpha_o + \delta_o$ (см. рис. 6.13).

На задней поверхности инструмента, проработавшего даже непродолжительное время, практически сразу образуется площадка износа, в пределах которой задний угол равен 0°. При работе изношенным инструментом влияние вибраций на величину заднего угла становится более существенным (см. рис. 6.13.2).

6.3.2. Система отсчета кинематических геометрических параметров режущих кромок инструмента. Принципиальным вопросом в исследованиях процесса резания является определение положения базовых плоскостей, в которых следует измерять или расчитывать величины геометрических параметров режущих кромок. Поскольку условия отделения стружки определяются расположением режущего клина инструмента относительно поверхности резания, именно она должна служить тем базовым элементом, с которым следует связать систему отсчета кинематических геометрических параметров режущих кромок.

Совершая относительное движение с результирующей скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$, режущая кромка описывает поверхность резания P_{se}, которую можно рассматривать как геометрическое место (непрерывную последовательность) положений режущей кромки в движении инструмента относительно детали. Плоскость резания расположена касательно к поверхности резания в текущей точке на ней. В частных случаях поверхность резания вырождается в плоскость.

Режущий клина инструмента должен быть ориентирован относительно поверхности резания под оптимальными кинематическими геометрическими параметрами режущих кромок.

В соответствие с Международным стандартом ISO 3002 в кинематической системе отсчета основная плоскость заготовки P_{re} расположена перпендикулярно направлению результирующего движения резания, а рабочая плоскость P_{re} проходит через направления главного движения и направления движения подачи. Следовательно, рабочая плоскость P_{fe} перпендикулярна рабочей основной плоскости P_{re}. Рабочая обратная плоскоть P_{pe} перпендикулярна плоскостям P_{re} и P_{fe} и составляет с остальными плоскостями ортогональную систему, известную как *рабочая система* (Astakhov, V.P., 1999).

Для отсчета кинематических геометрических параметров режущей кромки может быть также использована система, состоящая из плоскости резания P_{se}, передней плоскости $П$, задней плоскости $З$ и вектора результирующей скорости относительного движения $\mathbf{V}_\Sigma$ детали и инструмента в процессе обработки. Три плоскости P_{se}, $П$, $З$ и вектор скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ образуют систему отсчета кинематических геометрических параметров режущей кромки инструмента. Они рассекаются плоскостями, в которых эти геометрические параметры измеряются.

Положение передней плоскости в текущей точке режущей кромки определяется векторами $\mathbf{n}_n$ и $\mathbf{c}$, задней – векторами $\mathbf{n}_з$ и $\mathbf{c}$, а плоскости резания – векторами $\mathbf{n}_n$ и $\mathbf{n}_з$.

По заданным в общей системе координат $X_u Y_u Z_u$ уравнениям $\mathbf{r}_д = \mathbf{r}_д(U_д, V_д)$ поверхности $Д$ детали и $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(U_u, V_u)$ исходной инструментальной поверхности $И$ запишем уравнения касательных к ним в текущей точке M плоскостей

$$\begin{vmatrix} X - X^{(M)} & Y - Y^{(M)} & Z - Z^{(M)} \\ \dfrac{\partial X}{\partial U_д} & \dfrac{\partial Y}{\partial U_д} & \dfrac{\partial Z}{\partial U_д} \\ \dfrac{\partial X}{\partial V_д} & \dfrac{\partial Y}{\partial V_д} & \dfrac{\partial Z}{\partial V_д} \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{и} \qquad \begin{vmatrix} X - X^{(M)} & Y - Y^{(M)} & Z - Z^{(M)} \\ \dfrac{\partial X}{\partial U_u} & \dfrac{\partial Y}{\partial U_u} & \dfrac{\partial Z}{\partial U_u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial V_u} & \dfrac{\partial Y}{\partial V_u} & \dfrac{\partial Z}{\partial V_u} \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение поверхности $Д$ детали задано. Уравнение поверхности $И$ инструмента также известно – оно находится рассмотренными выше методами (см. гл. 5) или устанавливается по данным чертежа инструмента.

Уравнение поверхности резания P_{se} может быть получено исходя из кинематического способа ее образования. Для этого необходимо знать уравнение режущей кромки и параметры ее движения относительно детали.

Порядок составления уравнения поверхности резания P_{se} рассмотрим на примере, когда режущая кромка инструмента задана уравнениями вида (23).

В системе координат инструмента записываем уравнения (23) режущей кромки и связываем с ней систему координат. Далее рассматриваем движение этой системы координат относительно системы координат детали – это движение идентично относительному движению детали и инструмента, осуществляемому на станке в процессе обработки. Совместное рассмотрение уравнений, описывающих текущее положение режущей кромки и оператора результирующего перехода от системы координат, связанной с режущей кромкой, к системе координат детали, после выполнения необходимых преобразований и исключения из рассмотрения параметров относительного движения дает возможность получить уравнение поверхности резания в форме $\mathbf{r}_{se} = \mathbf{r}_{se}(U_{se}, V_{se})$.

Если результирующее движение инструмента относительно детали является многопараметрическим (общий случай), эта задача решается в такой последовательности.

Режущий клин инструмента совершает некоторое движение относительно поверхности резания P_{se}. Это движение состоит из m элементарных движений $\mathbf{V}_j$. Текущее положение режущей кромки определяется совокупностью движений $\mathbf{V}_j$, каждое из которых осуществляется с параметром Ξ_j. Совокупность $\sum_{j=1}^{m}\mathbf{V}_j$ всех m движений определяет (26) результирующее относительное движение, скорость которого равна $\mathbf{V}_\Sigma = \sum_{j=1}^{m}\mathbf{V}_j$.

Соответствующий составляющей $\mathbf{V}_j$ элементарный параметр движения Ξ_j определяет j-ю составляющую текущего положения режущей кромки относительно поверхности резания P_{se}. Все m параметры Ξ_j могут быть сведены к одному обобщенному параметру Ξ_Σ результирующего относительного движения. Поэтому уравнение текущего положения режущей кромки относительно детали в процессе обработки представимо в форме:

$$\begin{cases}\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(U_u, V_u, \Xi_\Sigma);\\ \mathbf{r}_з = \mathbf{r}_з(U_u, V_u, \Xi_\Sigma).\end{cases}$$

Чтобы получить уравнение поверхности резания P_{se}, достаточно эти уравнения рассмотреть в системе координат детали. Переход от системы координат инструмента к системе координат детали описывается оператором **Res** $(И \to Д)$ результирующего преобразования координат (см. гл. 3), который содержит параметр Ξ_Σ движения со скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$.

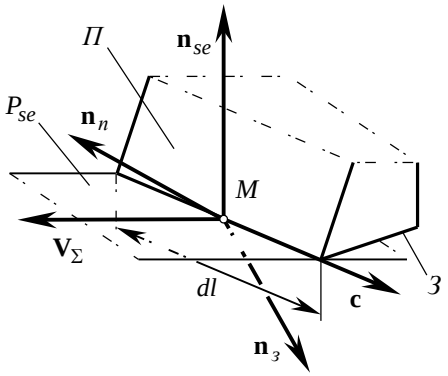


Рис. 6.14. Элементарный режущий клин.

Рассмотрение уравнений текущего положения режущей кромки совместно с оператором **Res** $(И \to Д)$ приводит к уравнению $\mathbf{r}_{se} = \mathbf{r}_{se}(U_{se}, V_{se})$ поверхности резания P_{se}.

При воспроизводимой в процессе обработки "*жесткой*" кинематике формообразования (частный случай) решение задачи определения поверхности резания упрощается. В этом случае число m параметров огибания не превышает одного-двух ($m \le 2$).

Чтобы найти нормаль $\mathbf{N}_{se}$ к поверхности резания P_{se} (рис. 6.14), продифференцируем $\mathbf{r}_{se} = \mathbf{r}_{se}(U_{se}, V_{se})$ по каждой из

переменных. Получим уравнения касательных к $U_{se}-$ и $V_{se}-$линиям на поверхности P_{se}

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{se}}{\partial U_{se}}=\left[\frac{\partial X}{\partial U_{se}}(U_{se},V_{se}) \quad \frac{\partial Y}{\partial U_{se}}(U_{se},V_{se}) \quad \frac{\partial Z}{\partial U_{se}}(U_{se},V_{se}) \quad 1\right]^T;$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{se}}{\partial V_{se}}=\left[\frac{\partial X}{\partial V_{se}}(U_{se},V_{se}) \quad \frac{\partial Y}{\partial V_{se}}(U_{se},V_{se}) \quad \frac{\partial Z}{\partial V_{se}}(U_{se},V_{se}) \quad 1\right]^T.$$

На основе свойства векторного произведения:

$$\mathbf{N}_{se}=\frac{\partial \mathbf{r}_{se}}{\partial U_{se}}\times\frac{\partial \mathbf{r}_{se}}{\partial V_{se}}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial X}{\partial U_{se}} & \dfrac{\partial Y}{\partial U_{se}} & \dfrac{\partial Z}{\partial U_{se}} \\ \dfrac{\partial X}{\partial V_{se}} & \dfrac{\partial Y}{\partial V_{se}} & \dfrac{\partial Z}{\partial V_{se}} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{N}_{se}=\mathbf{V}_{\Sigma}\times\mathbf{c}.$$

Орт $\mathbf{n}_{se}$ получим нормированием вектора нормали $\mathbf{N}_{se}$:

$$\mathbf{n}_{se}=\frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{se}}{\partial U_{se}}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}_{se}}{\partial V_{se}}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_{se}}{\partial U_{se}}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}_{se}}{\partial V_{se}}\right|}.$$

Поскольку вектор $\mathbf{V}_{\Sigma}$ результирующей скорости движения режущего клина относительно поверхности резания известен (см. выше, (26)), для определения орта нормали $\mathbf{n}_{se}$ удобно воспользоваться свойством двойного векторного произведения:

$$\mathbf{n}_{se}=\frac{\mathbf{V}_{\Sigma}\times[\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_з]}{|\mathbf{V}_{\Sigma}\times[\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_з]|},$$

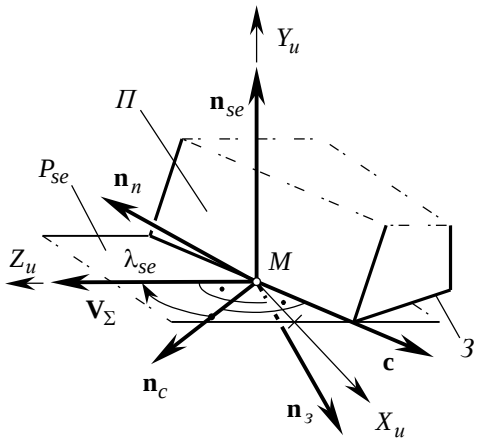
где произведение $[\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_з]$ определяет вектор, касательный к режущей кромке в точке M. Орт этого вектора $\mathbf{c}=\dfrac{\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_з}{|\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_з|}$ (см. рис. 6.14).

6.3.3. Плоскости измерения кинематических геометрических параметров режущей кромки инструмента. Кинематические значения геометрических параметров режущей кромки инструмента в большинстве случаев, особенно при обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ, существенно отличаются по величине от статических их значений. Вопрос об отличии кинематических геометрических параметров режущих кромок инструмента от их статических значений давно находится в поле зрения исследователей (Панкин А.В., 1936, 1940).

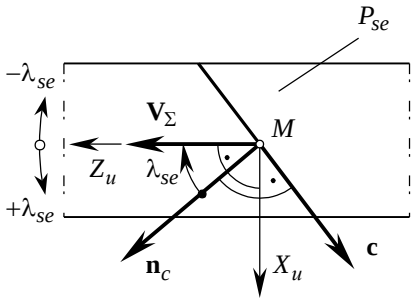
Правильный выбор системы отсчета является необходимым, но не достаточным условием установления величин кинематических геометрических параметров режущих кромок инструмента. Это требование необходимо дополнить, указав положение плоскостей, в которых следует их измерять. В случае, когда при свободном резании направление результирующей скорости движения режущего клина инструмента относительно поверхности резания перпендикулярно режущей кромке, плоскость измерения переднего и заднего углов расположена перпендикулярно к режущей кромке. Существуют различные точки зрения по вопросу о расположении плоскости измерения этих же углов при произвольном направлении вектора скорости результи-

рующего движения режущего клина инструмента относительно поверхности резания и при несвободном резании.

6.3.3.1. *Плоскость резания и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки.* Плоскость резания касательна к режущей кромке и к поверхности резания. Она проходит через вектор результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$, а ее положение определяется выходящими из точки M векторами $\mathbf{V}_\Sigma$ и $\mathbf{c}$ (рис. 6.15).



1.



2.

Рис. 6.15. Плоскость резания P_{se} и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки.

Уравнение плоскости резания можно вывести как уравнение плоскости, проходящей через текущую точку $M(X^{(M)}, Y^{(M)}, Z^{(M)})$ режущей кромки касательно к поверхности резания. Для этого удобно воспользоваться уравнениями касательных к $U_{se}-$ и $V_{se}-$линиям на поверхности резания. В этом случае уравнение плоскости резания можно записать в форме:

$$\begin{vmatrix} X_{se}-X^{(M)} & Y_{se}-Y^{(M)} & Z_{se}-Z^{(M)} \\ \dfrac{\partial X}{\partial U_{se}} & \dfrac{\partial Y}{\partial U_{se}} & \dfrac{\partial Z}{\partial U_{se}} \\ \dfrac{\partial X}{\partial V_{se}} & \dfrac{\partial Y}{\partial V_{se}} & \dfrac{\partial Z}{\partial V_{se}} \end{vmatrix} = 0,$$

где X_{se}, Y_{se}, Z_{se} – координаты текущей точки плоскости резания.

Это уравнение бывает удобно представить как уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно орту нормали $\mathbf{n}_{se}$:

$$(\mathbf{r}_{se}-\mathbf{r}^{(M)})\cdot\mathbf{n}_{se}=0,$$

где $\mathbf{r}_{se}$ – радиус-вектор текущей точки плоскости резания.

Угол наклона режущей кромки. Положение режущей кромки относительно вектора скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ определяется величиной и знаком угла наклона режущей кромки λ_{se}. Угол λ_{se} измерятся в плоскости резания P_{se} между нормалью $\mathbf{n}_c$ к режущей кромке и направлением вектора $\mathbf{V}_\Sigma$ (рис. 6.15.1)[1]. Если смотреть с конца орта нормали $\mathbf{n}_{se}$ к поверхности резания P_{se}, положительному значению угла λ_{se} соответствует поворот режущей кромки вокруг оси Y_u (вокруг орта нормали $\mathbf{n}_{se}$) против часовой стрелки (см. рис. 6.15.2).

Если $\lambda_{se}=0^\circ$, резание прямоугольное (ортогональное), при $\lambda_{se}\neq 0^\circ$ имеет место более общий случай – косоугольное резание.

От величины угла наклона режущей кромки λ_{se} зависят условия трения на рабочих поверхностях режущего клина инструмента, условия деформирования срезаемого слоя при превращении его в стружку, направление движения стружки и отдельных ее элементов (сколов) по передней поверхности и пр.

Величина угла наклона режущей кромки λ_{se} (рис. 6.15.2) с учетом знака равна:

[1]Международный стандарт ISO 3002 определяет угол наклона режущей кромки λ_{se} как угол между режущей кромкой и плоскостью, перпендикулярной направлению результирующей скорости резания.

$$\lambda_{se} = \angle\left(\mathbf{c}\cdot\mathbf{V}_{\Sigma}\right) - 90^{\circ} = \arctan\frac{\left|\mathbf{c}\times\mathbf{V}_{\Sigma}\right|}{\mathbf{c}\cdot\mathbf{V}_{\Sigma}} - 90^{\circ}.$$

Угол наклона режущей кромки λ_{se} оказывает комплексное влияние на процесс резания. Он влияет на процесс стружкообразования, на усадку стружки, на интенсивность изнашивания режущих кромок инструмента и др. Это приводит к изменению силовой и тепловой нагруженности контактных площадок режущего клина.

Режущим кромкам инструментов придают угол наклона режущей кромки λ_{se} с различной целью. Оптимальное его значение находится в диапазоне от 0° до $\pm 80^{\circ}$.

Чтобы обеспечить отвод стружки в требуемом направлении, угол λ_{se} назначают равным $\lambda_{se} = 5 \div 15^{\circ}$. Оптимальное значение угла наклона режущей кромки у инструментов для обработки закаленных сталей достигает $\lambda_{se} = 45^{\circ}$. Концевые фрезы с неравномерным шагом зубьев имеют углы наклона режущих кромок $\lambda_{se} = 30 \div 45^{\circ}$. Опыты по фрезерованию жаропрочных сплавов цилиндрическими фрезами показали, что наилучшие результаты достигаются при $\lambda_{se} = 60^{\circ}$.

Механическая обработка лезвийными инструментами с большим углом наклона режущих кромок λ_{se} особенно эффективна при срезании тонких стружек. В этом случае величина угла наклона режущих кромок может достигать значения $\lambda_{se} = 60 \div 80^{\circ}$, что имеет место, например, при шевинговании (Подураев В.Н., Камалов В.С., 1973).

Для недостаточно жестких инструментов и при обработке маложестких деталей величину угла λ_{se} уменьшают.

Увеличение угла наклона режущих кромок λ_{se} приводит к уменьшению оптимальной величины переднего угла.

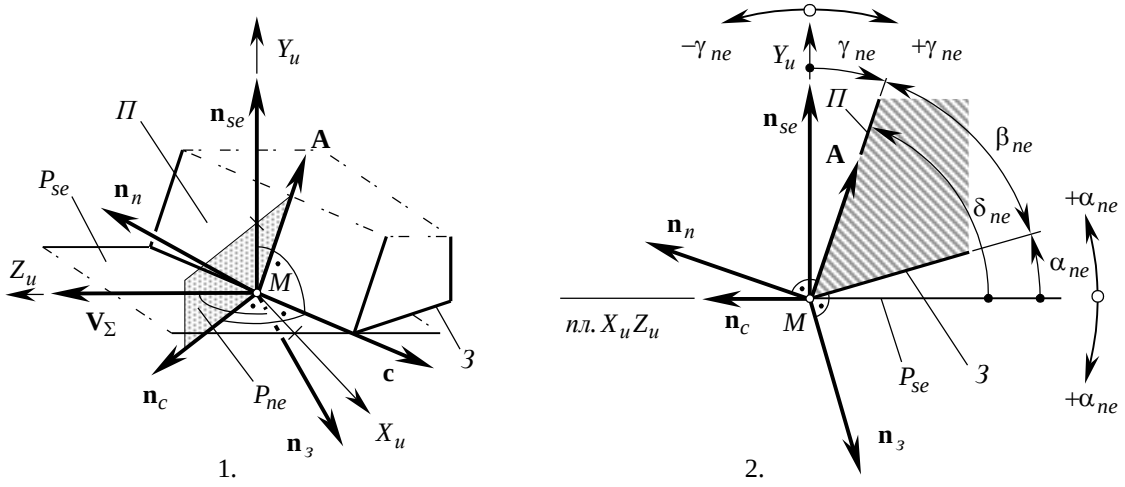


Рис. 6.16. Нормальная секущая плоскость $\mathbf{V}_{\Sigma}$ и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки.

6.3.3.2 *Нормальная секущая плоскость и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки*. Положение нормальной секущей плоскости P_{ne} относительно инструмента в движении идентично ее положению в статике. Вместе с тем при изучении кинематических геометрических параметров режущей кромки требуется определить ее положение относительно поверхности резания. Одновременно с этим появляются дополнительные возможности определения ее положения относительно инструмента.

Нормальная секущая плоскость перпендикулярна передней *П* и задней *З* плоскостям режущего клина, а также плоскости резания P_{se} и режущей кромке (рис. 6.16). Она проходит через расположенную в плоскости резания нормаль $\mathbf{n}_c$ к режущей кромке. Таким образом положение нормальной секущей плоскости в движении инструмента определено любой парой выходящих из точки M векторов: $\mathbf{n}_n$, $\mathbf{n}_з$, $\mathbf{n}_{se}$ и $\mathbf{n}_c$ (рис. 6.16) или точкой M и вектором $\mathbf{n}_c$, к которому нормальная секущая плоскость ортогональна. Очевидно, что в статическом положении инструмента возможности определения положения нормальной секущей плоскости заметно уже.

Нормальный передний угол. Положение передней поверхности относительно плоскости резания определяется величиной нормального переднего угла γ_{ne}. Этот угол измеряется между ортом нормали $\mathbf{n}_{se}$ к плоскости резания P_{se} и передней плоскостью *П*. Величина переднего угла γ_{ne} отсчитывается от орта нормали $\mathbf{n}_{se}$: угол γ_{ne} положителен при отсчете в направлении хода часовой стрелки (рис. 6.16.2) и отрицателен – при отсчете в противоположном направлении.

От величины переднего угла γ_{ne} зависят условия деформирования срезаемого припуска при превращении его в стружку, направление движения стружки, трение на передней поверхности, изнашивание режущего клина, его прочность и др. показатели эффективности работы режущего инструмента.

Нормальный передний угол γ_{ne} удобно определять как угол, дополняющий до 90° угол между ортом $\mathbf{n}_{se}$ нормали к плоскости резания P_{se} и ортом $\mathbf{n}_n$ нормали к передней плоскости (см. рис. 6.16.2):

$$\gamma_{ne} = 90^\circ - \angle(\mathbf{n}_n, \mathbf{n}_{se}) = 90^\circ - \arctan\frac{|\mathbf{n}_n \times \mathbf{n}_{se}|}{\mathbf{n}_n \cdot \mathbf{n}_{se}} = 90^\circ - \arctan\frac{|\mathbf{N}_n \times \mathbf{N}_{se}|}{\mathbf{N}_n \cdot \mathbf{N}_{se}}.$$

Оптимальное значение переднего угла зависит от свойств обрабатываемого и инструментального материалов. При обработке более прочных и более твердых материалов оптимальная величина переднего угла уменьшается, а при использовании более прочных инструментальных материалов она увеличивается. Например, при обработке алюминиевых и магниевых сплавов инструментом из быстрорежущей стали нормальный передний угол назначают равным $\gamma_{ne} = 20 \div 30^\circ$, конструкционных сталей – $\gamma_{ne} = 10 \div 20^\circ$, легированных конструкционных сталей – $\gamma_{ne} = 5 \div 10^\circ$, высоколегированных сталей $-\gamma_{ne} = 0 \div 15^\circ$, чугуна – $\gamma_{ne} = 0 \div 10^\circ$, а титановых сплавов – $\gamma_{ne} = 3 \div 8^\circ$.

Для инструментов из твердых сплавов передние углы выбираются меньшими по величине. При обработке различных материалов их назначают в диапазоне $\gamma_{ne} = -10 \div +10^\circ$.

Экспериментально установлено, что величины геометрических параметров режущих кромок оказывают существенное влияние на работоспособность режущего инструмента. Например, отклонение величины переднего угла только на 5° по отношению к его оптимальному значению может привести к снижению стойкости резцов до трех раз, фрез – до двух раз.

Наиболее простой формой передних и задних поверхностей является плоская. Вместе с тем установлено, что стойкость режущего инструмента может быть заметно увеличена, если вдоль режущей кромки с положительным передним углом (порядка $\gamma_{ne} = +30^\circ$ для инструментов из быстрорежущей стали и порядка $\gamma_{ne} = +15^\circ$ для твердосплавных инструментов) образовать фаску с уменьшенным до $0 \div 10^\circ$ передним углом. Ширина такой фаски примерно равна толщине срезаемого слоя для инструментов из быстрорежущей стали и в $1{,}5 \div 2{,}0$ раза превышает ее у инструментов, оснащенных твердым сплавом.

Нормальный задний угол. Положение задней плоскости *З* относительно плоскости резания P_{se} определяется величиной нормального заднего угла α_{ne}. Нормальный задний угол измеряется между ортом нормали $\mathbf{n}_{se}$ к плоскости резания P_{se} и задней поверхностью *З*. Величину угла α_{ne} отсчитывают в направлении от поверхности резания P_{se} к задней поверхности *З* – он всегда положителен $(\alpha_{ne} > 0^\circ)$, за исключением случаев, когда в пределах узкой фаски, расположенной на задней поверхности вдоль режущей кромки,

образуется дополнительная задняя поверхность, в пределах которой нормальный задний угол α_{ne} может принимать не только нулевые, но и отрицательные значения ($\alpha_{ne} \le 0^\circ$).

От величины нормального заднего угла α_{ne} зависит степень свободы перемещения задней поверхности режущего клина относительно поверхности резания, условия трения в пределах контактной зоны на задней поверхности, интенсивность изнашивания режущего клина, его прочность и др. показатели работы инструмента.

Нормальный задний угол α_{ne} удобно определить как угол, дополняющий до 180° (рис. 6.16.2) угол между ортом нормали $\mathbf{n}_{se}$ к плоскости резания P_{se} и ортом нормали $\mathbf{n}_з$ к задней поверхности *3*:

$$\alpha_{ne} = 180^o - \angle(\mathbf{n}_з, \mathbf{n}_{se}) = 180^\circ - \arctan\frac{|\mathbf{n}_з \times \mathbf{n}_{se}|}{\mathbf{n}_з \cdot \mathbf{n}_{se}} = 180^\circ - \arctan\frac{|\mathbf{N}_{se} \times \mathbf{N}_з|}{\mathbf{N}_{se} \cdot \mathbf{N}_з}.$$

Оптимальное значение заднего угла определяется, в первую очередь, толщиной срезаемого слоя a и увеличивается по мере ее уменьшения. Известна приближенноя эмпирическая формула проф. М.Н. Ларина для определения оптимальной величины заднего угла α_{ne} в зависимости от толщины срезаемого слоя:

$$\alpha_{ne} = \arcsin\frac{0{,}13}{a^{0{,}3}}.$$

При черновой обработке задние углы назначают обычно в диапазоне $\alpha_{ne} = 5^\circ \div 10^\circ$, а при чистовой – в диапазоне $\alpha_{ne} = 10^\circ \div 15^\circ$. У инструментов, срезающих тонкие стружки, задние углы увеличивают до $\alpha_{ne} = 20 \div 30^\circ$. Для достижения высокой точности и низкой шероховатости обработанной поверхности величину заднего угла требуется назначать не более, чем $\alpha_{ne} = 10^\circ$.

Для уменьшения давления на задней поверхности вдоль режущей кромки выполняют фаску шириной $f = 0{,}07 \div 0{,}10$ *мм*, в пределах которой задний угол равен 0°. Такая фаска позволяет более благоприятно распределить нагрузку, действующую на режущий клин при резании, уменьшить интенсивность изнашивания инструмента, снизить шероховатость обработанной поверхности. У всех режущих инструментов, проработавших даже весьма незначительное время, на задней поверхности образуется площадка износа, в пределах которой задний угол равен 0°.

Отклонение величины заднего угла на 5° по отношению к его оптимальному значению может привести к уменьшению стойкости резцов в два раза, фрез – до пяти раз.

Обязательное соотношение. Для обеспечения нормальной работы инструмента необходимо обеспечить выполнение соотношения (см. рис. 6.16): $\mathbf{N}_{se} \cdot \mathbf{N} < 0$ или эквивалентного ему соотношения $\operatorname{sgn}(\mathbf{n}_{se} \cdot \mathbf{n}_з) = -1$.

Если при правильном направлении нормалей $\mathbf{n}_{se}$ и $\mathbf{n}_з$ эти соотношения не выполняются, инструмент будет неработоспособным. Их нарушение допустимо только в пределах узких фасок вдоль режущей кромки.

Нормальный угол заострения режущего клина. Величина нормального угла заострения β_{ne} режущего клина определяется из соотношения (см. рис. 6.16.2): $\beta_{ne} = 90^o - (\alpha_{ne} + \gamma_{ne})$.

Нормальный угол резания. Угол резания δ_{ne} равен (см. рис. 6.16.2): $\delta_{ne} = 90^\circ - \gamma_{ne}$.

6.3.3.3. *Главная секущая плоскость и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки*. Положение главной секущей плоскости P_{ve} определено двумя проходящими через текущую ее точку направлениями: направлением вектора орта нормали $\mathbf{n}_{se}$ к поверхности резания P_{se} и направлением вектора результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ режущего клина относительно поверхности резания (рис. 6.17.1). Главная секущая P_{ve} плоскость расположена перпендикулярно плоскости резания P_{se}.

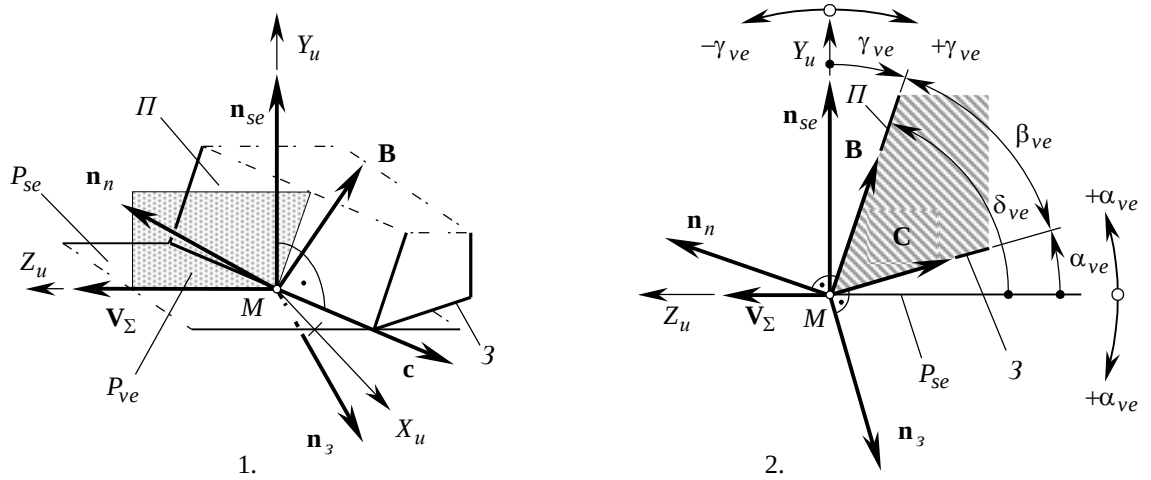


Рис. 6.17. Главная секущая плоскость P_{ve} и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки.

В сечении режущего клина главной секущей плоскостью (рис. 6.17.2) положение следа передней плоскости $П$ относительно плоскости резания P_{se} определяется величиной переднего угла γ_{ve}, измеряемого между ортом нормали $\mathbf{n}_{se}$ к плоскости резания и линей пересечения передней плоскости $П$ главной секущей плоскостью. Величина переднего угла γ_{ve} отсчитывается от орта нормали $\mathbf{n}_{se}$: угол γ_{ve} положителен при отсчете по направлению хода часовой стрелки (рис. 6.17.2) и отрицателен – при отсчете в противоположном направлении.

Если вектор результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ представить в проекциях:

$$\mathbf{V}_\Sigma = \mathbf{i}V_{\Sigma.x} + \mathbf{j}V_{\Sigma.y} + \mathbf{k}V_{\Sigma.z},$$

а орт нормали $\mathbf{n}_{se}$ к поверхности резания в виде

$$\mathbf{n}_{se} = \mathbf{i}n_{se.x} + \mathbf{j}n_{se.y} + \mathbf{k}n_{se.z},$$

то уравнение проходящей через точку M режущей кромки главной секущей плоскости P_{ve} записывается так:

$$\begin{vmatrix} X_{ve} - X^{(M)} & Y_{ve} - Y^{(M)} & Z_{ve} - Z^{(M)} \\ V_{\Sigma.x} & V_{\Sigma.y} & V_{\Sigma.z} \\ N_{P.x} & N_{P.y} & N_{P.z} \end{vmatrix} = 0,$$

где X_{ve}, Y_{ve}, Z_{ve} – координаты текущей точки главной секущей плоскости P_{ve}.

Нормаль $\mathbf{N}_{ve}$ к главной секущей плоскости P_{ve} перпендикулярна вектору $\mathbf{V}_\Sigma$ результирующей скорости и орту нормали $\mathbf{n}_{se}$ к поверхности резания. Поэтому ее уравнение может быть записано так:

$$\mathbf{N}_{ve} = \mathbf{V}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_{se} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ V_{\Sigma.x} & V_{\Sigma.y} & V_{\Sigma.z} \\ n_{se.x} & n_{se.y} & n_{se.z} \end{vmatrix}.$$

Орт $\mathbf{n}_{ve}$ нормали к главной секущей плоскости соответственно равен:

$$\mathbf{n}_{ve} = \frac{\mathbf{V}_\Sigma \times \mathbf{N}_{se}}{\left|\mathbf{V}_\Sigma \times \mathbf{N}_{se}\right|} = \frac{\mathbf{V}_\Sigma \times \mathbf{n}_{se}}{\left|\mathbf{V}_\Sigma \times \mathbf{n}_{se}\right|}.$$

Уравнение проходящей через точку M главной секущей плоскости может быть записано так:

$$\left(\mathbf{r}_{ve} - \mathbf{r}^{(M)}\right) \cdot \mathbf{N}_{ve} = 0,$$

где $\mathbf{r}_{ve}$ – радиус-вектор текущей точки главной секущей плоскости.

В главной секущей плоскости измеряются следующие кинематические геометрические параметры режущей крмки инструмента.

Передний угол γ_{ve} определяется как угол между ортом нормали $\mathbf{n}_{se}$ к поверхности резания P_{se} и вектором $\mathbf{B}$, направленным касательно к линии пересечения передней поверхности Π главной секущей плоскостью P_{ve} (см. рис. 6.17.2):

$$\gamma_{ve} = \angle\left(\mathbf{n}_{se}, \mathbf{B}\right) = \arctan\frac{\left|\mathbf{n}_{se} \times \mathbf{B}\right|}{\mathbf{n}_{se} \cdot \mathbf{B}}.$$

Задний угол α_{ve} определяется как угол между ортом нормали $\mathbf{n}_{se}$ к плоскости резания P_{se} и вектором $\mathbf{C}$, направленным касательно к линии пересечения задней поверхности *3* главной секущей плоскостью P_{ve} (см. рис. 6.17.2):

$$\alpha_{ve} = \angle\left(\mathbf{n}_{se}, \mathbf{C}\right) = \arctan\frac{\left|\mathbf{n}_{se} \times \mathbf{C}\right|}{\mathbf{n}_{se} \cdot \mathbf{C}}.$$

Угол заострения режущего клина β_{ve} равен углу между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, направленными касательно к линиям пересечения передней Π и задней *3* поверхнстей главной секущей плоскостью P_{ve} (см. рис. 6.17.2):

$$\beta_{ve} = \angle\left(\mathbf{B}, \mathbf{C}\right) = \arctan\frac{\left|\mathbf{B} \times \mathbf{C}\right|}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}.$$

В главной секущей плоскости выполняется соотношение: $\beta_{ve} = 90^\circ - \left(\alpha_{ve} + \gamma_{ve}\right)$.

Угол резания δ_{ve} равен углу между вектором $\mathbf{B}$, направленным касательно к линии пересечения передней поверхности главной секущей плоскостью, и противоположным направлением вектора результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ (см. рис. 6.17.2). Он равен:

$$\delta_{ve} = 180^\circ - \angle\left(\mathbf{B}, \mathbf{V}_\Sigma\right) = 180^\circ - \arctan\frac{\left|\mathbf{B} \times \mathbf{V}_\Sigma\right|}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_\Sigma}.$$

В главной секущей плоскости выполняется соотношение: $\delta_{ve} = 90^\circ - \gamma_{ve}$.

6.3.3.4. Соотношения между кинематическими геометрическими параметрами режущей кромки, измеренными в главной и нормальной секущей плоскостях. По известным величинам кинематических геометрических параметров режущей кромки, найденным в плоскости резания P_{se} и в нормальной секущей плоскости

P_{ne}, можно рассчитать соответствующие значения геометрических параметров режущих кромок в главной секущей плоскости P_{ve} и наоборот.

Определять величину переднего угла γ_{ve} можно так. В точке M режущей кромки расположим начало системы координат $X_u Y_u Z_u$ (см. рис. 6.15). Касательно к линии пересечения передней поверхности Π нормальной секущей плоскостью P_{ne} (см. рис. 6.16) проведем вектор $\mathbf{A}$, длину которого выберем такой, чтобы его проекция на плоскость координат $X^{(M)}Z^{(M)}$ равнялась единице $(np.\,\mathbf{A}_{xz}=1)$. Тогда в проекциях на оси координат вектор $\mathbf{A}$ можно записать так:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{i}\sin\lambda_{se} + \mathbf{j}\cot\gamma_{ne} - \mathbf{k}\cos\lambda_{se}.$$

Касательно к линии пересечения передней поверхности Π главной секущей плоскостью P_{ve} (см. рис. 6.17) проведем единичный вектор $\mathbf{B}$: ($|\mathbf{B}|=1$), который можно представить так:

$$\mathbf{B} = \mathbf{j}\cos\gamma_{ve} - \mathbf{k}\sin\gamma_{ve}.$$

В плоскости резания P_{se} касательно к режущей кромке (см. рис. 6.15) проведем единичный вектор $\mathbf{C}$: ($|\mathbf{C}|=1$), который в проекциях на оси координат запишется так:

$$\mathbf{C} = \mathbf{i}\cos\lambda_{se} - \mathbf{k}\sin\lambda_{se}.$$

По построению три вектора $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ компланарны – они лежат в одной плоскости, касательной в точке M к передней поверхности. Поэтому их смешанное (векторно-скалярное) произведение тождественно равно нулю:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\equiv 0.$$

Это соотношение записывается в виде определителя:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = \begin{vmatrix} -\sin\lambda_{se} & \cot\gamma_{ne} & -\cos\lambda_{se} \\ 0 & \cos\gamma_{ve} & -\sin\gamma_{ve} \\ \cos\lambda_{se} & 0 & -\sin\lambda_{se} \end{vmatrix} = 0,$$

раскрывая который, после преобразований находим, что: $\tan\gamma_{ve} = \dfrac{\tan\gamma_{ne}}{\cos\lambda_{se}}$ или $\cot\gamma_{ve} = \cot\gamma_{ne}\cos\lambda_{se}$.

Поступая аналогично, для заднего угла α_{ve} можно получить: $\tan\alpha_{ve} = \tan\alpha_{ne}\cos\lambda_{se}$.

Эти зависимости для расчета углов α_{ve} и γ_{ve} известны уже из работы Stabler G.V. (1951).

Радиус округления режущей кромки ρ, измеренный в главной секущей плоскости, связан с радиусом ее округления ρ_{ne}, измеренным в нормальной секущей плоскости, в соответствие с формулой: $\rho_{ve} = \rho_{ne}\cos\lambda_{se}$.

6.3.3.5. Основная плоскость и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки. Основная плоскость P_{re} расположена ортогонально вектору результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ движения режущего клина инструмента относительно поверхности резания P_{se} (рис. 6.18). Она проходит через направление орта нормали $\mathbf{n}_{se}$ к поверхности резания P_{se} и через направление расположенной в плоскости резания P_{se} нормали $\mathbf{m}_e$ к вектору $\mathbf{V}_\Sigma$ (рис. 6.18.1). При выбранном расположении осей системы координат $X_u Y_u Z_u$ (см. рис. 6.18) единичный вектор $\mathbf{m}_e$ равен орту $\mathbf{i}$ (т.е. $\mathbf{m}_e = \mathbf{i}$).

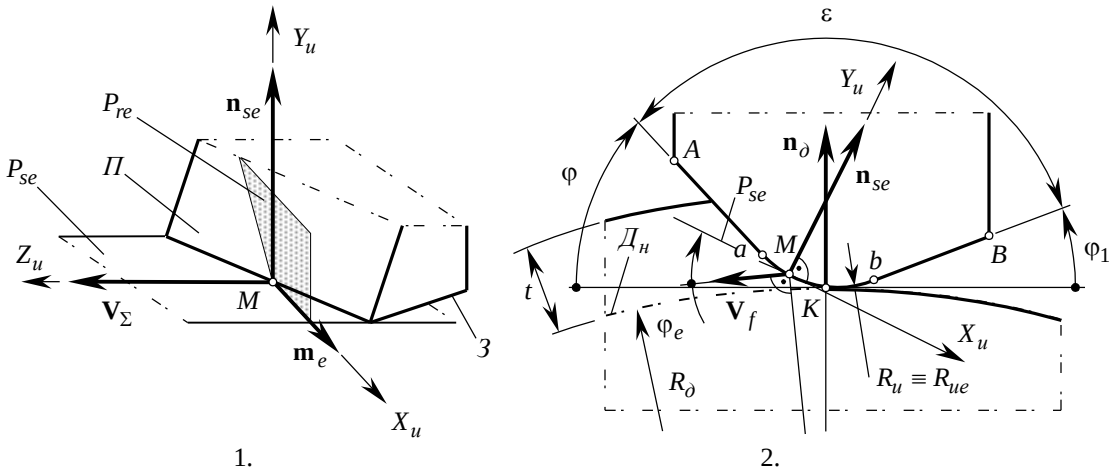


Рис. 6.18. Основная плоскость P_{re} и измеряемые в ней кинематические геометрические параметры режущей кромки.

Главный и вспомогательный углы в плане. Главный угол в плане φ_e и вспомогательный угол в плане φ_{1e} измеряются между направлением вектора движения подачи $\mathbf{V}_f$ и касательными соответственно к главной и к вспомогательной режущим кромкам (рис. 6.19): угол φ_e – со стороны главной режущей кромки, обращенной в сторону срезаемого припуска, а угол φ_{1e} – со стороны вспомогательной режущей кромки, обращенной к обработанной поверхности детали. Эти углы соответственно равны (рис. 6.19):

$$\varphi_e = \arctan \frac{\left|\mathbf{V}_f^{(\varphi)} \times \mathbf{C}^{(\varphi)}\right|}{\mathbf{V}_f^{(\varphi)} \cdot \mathbf{C}^{(\varphi)}} \qquad \text{и} \qquad \varphi_{e1} = \arctan \frac{\left|\mathbf{V}_f^{(\varphi_1)} \times \mathbf{C}^{(\varphi_1)}\right|}{\mathbf{V}_f^{(\varphi)} \cdot \mathbf{C}^{(\varphi_1)}}.$$

Вспомогательный угол в плане φ_{1e} расчитывается на участке режущей кромки, соответствующем высоте остаточных гребешков, т.е. где она контактирует с несрезанным (остаточным) припуском.

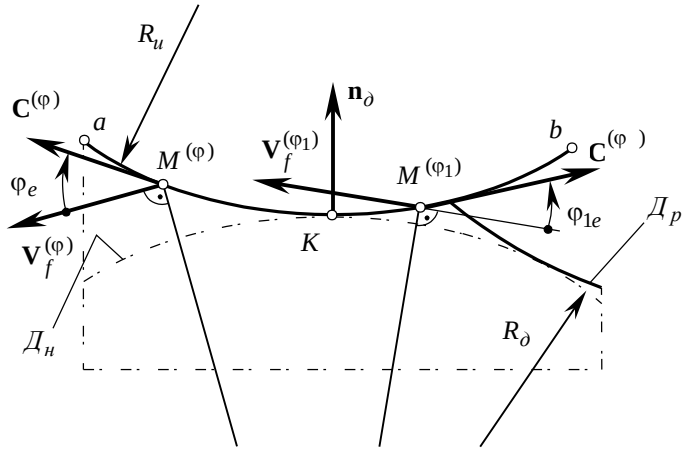


Рис. 6.19. Кинематические главный φ_e и вспомогательный φ_{1e} углы в плане на криволинейном участке режущей кромки.

При выполнении приближенных расчетов и в случаях, когда величины углов γ_{ne} и λ_{se} небольшие, углы в плане φ_e и φ_{1e} допускается измерять в передней плоскости между касательной к режущей кромке и направлением движения подачи.

Угол при вершине ε_e определяется только для вершины инструмента, где он равен:

$$\varepsilon_e = 180^\circ - (\varphi_e + \varphi_{1e}).$$

В вершине криволинейного участка режущей кромки (в точке K (см. рис. 6.19)) этот угол равен $\varepsilon_e = 180^\circ$. На других участках криволинейной режущей кромки он не определен.

При неизменных значениях глубины ре-

зания t и подачи S изменение величины главного угла в плане φ_e приводит к соответствующему изменению толщины a и ширины b срезаемого слоя, поскольку $a = S\sin\varphi_e$ а $b = \frac{t}{\sin\varphi_e}$. Чем меньше значение угла в плане φ_e, тем больше ширина среза b и величина угла при вершине ε_e – это способствует улучшению отвода тепла из зоны резания. Уменьшение главного угла в плане φ_e способствует увеличению стойкости инструмента. При чрезмерном его уменьшении повышается вероятность появления вибраций в процессе резания.

Придание режущим кромкам инструмента вспомогательного угла в плане φ_{1e} приводит к уменьшению трения вспомогательной режущей кромки об обработанную поверхность. Увеличение угла φ_{1e} приводит к увеличению высоты остаточных гребешков на обработанной поверхности детали, к соответствующему уменьшению угла при вершине ε_e, к ухудшению отвода тепла из зоны резания. Максимальная стойкость инструмента обычно наблюдается при $\varphi_{1e} \cong 10^\circ$.

Главный φ_e и вспомогательный φ_{1e} углы в плане обычно рекомендуется уменьшать. Это ведет к соответствующему увеличению угла при вершине ε_e и, как следствие, к уменьшению степени интерференции потоков стружки от смежных режущих кромок. С этой же целью режущие кромки выполняют криволинейными по радиусу R_u.

6.3.3.6. Плоскость схода стружки и измеряемый в ней передний угол. При свободном ортогональном резании вектор скорости схода стружки по передней поверхности перпендикулярен режущей кромке. Кинематические геометрические параметры режущей кромки рассчитывают в плоском сечении, перпендикулярном режущей кромке. Правомерность такого подхода подтверждена экспериментально.

Величину переднего угла, непосредственно определяющего характер протекания процесса резания металлов при косоугольном резании, необходимо определять, принимая во внимание направление схода стружки по передней поверхности режущего инструмента. Точно установить направление движения стружки по передней поверхности при косоугольном резании сложнее – оно определяется процессами, происходящими в зоне стружкообразования и в зоне контакта стружки с передней поверхностью зуба инструмента.

Без учета краевых эффектов ортогональное резание можно рассматривать в плоскости. Косоугольное резание существенно сложнее ортогонального в первую очередь в связи с тем, что деформация металла в процессе резания происходит не в плоскости, проходящей через направление вектора скорости резания и направление нормали к поверхности резания, а в некотором объеме, в связи с чем его следует рассматривать в пространстве. Процесс свободного косоугольного резания является сложным и малоизученным. Он трудно поддается исследованию. Вместе с тем малоизученное косоугольное резание с некоторым приближением можно свести к более изученному ортогональному резанию.

Г.И.Грановский (1948) предложил рассматривать процесс свободого косоугольного резания в плоскости стружкообразования – в плоскости схода стружки, положение которой определено проходящими через текущую точку режущей кромки вектором результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ перемещения режущего клина инструмента относительно поверхности резания P_{se} и вектором скорости схода стружки $\mathbf{V}_{cf}$ по передней поверхности. Этим подразумевается, что существует такое плоское сечение режущего клина инструмента, в котором происходит процесс деформирования срезаемого припуска, подобный процессу его деформирования при ортогональном резании[1]. Передний угол режущего клина инструмента и глубину резания, измеренные в этой плоскости, предложено (Грановский Г.И., 1948) называть *эффективным передним углом* и *эффективной глубиной резания*.

Существует иная точка зрения по вопросу о расположении плоскости, в которой следует определять величину эффективного переднего угла. А.М.Розенберг (1976 и более ранние работы) доказывал, что эффективный передний угол γ_{cf} следует измерять в плоскости схода не стружки целиком, а в плоскости схода отдельных ее элементов.

---

[1]Очевидно, нельзя считать, что при свободном косоугольном резании в плоскости стружкообразования в точности выполняются условия плоского деформирования. Однако поскольку при значениях угла наклона режущей кромки $\lambda_{se} < 30 \div 40^\circ$ коэффициент уширения стружки K_b близок к единице, эти условия выполняются с достаточно высокой точностью.

Закон схода стружки (Stabler, G.V., 1951). Передний угол γ_{cf} и глубина резания t_{cf}, измеренные в плоскости схода стружки, отличны от соответствующих их значений, измеренных в других секущих плоскостях. Угол схода стружки по передней поверхности η связан с шириной стружки b_{cf} и шириной b обрабатываемой плоскости следующей зависимостью:

$$\cos\eta = \frac{b_{cf}}{b}\cos\lambda_{se}\,.$$

В этом уравнении пренебрегают течением стружки по ее ширине, что находится в соответствии с предположением, что при ортогональном резании деформации по ширине стружки нет (Shaw, M.C., 1984).

Согласно закону схода стружки в широком диапазоне условий резания угол схода стружки η примерно равен углу наклона режущей кромки: $\eta \cong \lambda_{se}$. Это следует из предположения, что $b_{cf} = b$ В более поздних работах Stabler G.V. уточнил этот закон, представив его в форме $\eta \cong (1{,}0 \div 0{,}9)\lambda_{se}$.

Экспериментально доказано (Бобров В.Ф., 1962), что при свободном резании инструментами с углом наклона режущих кромок $\lambda_{se} < 45^\circ$ направление скорости $\mathbf{V}_{cf}$ схода стружки составляет с перпендикуляром к режущей кромке, проведенным в передней плоскости Π (или касательно к передней поверхности), угол $\eta \cong \lambda_{se}$. При $\lambda_{se} \geq 45^\circ$ величина угла схода стружки η превышает угол наклона режущей кромки λ_{se} не более, чем на $5 \div 6^\circ$.

Наряду с углом схода стружки η для определения направления скорости движения стружки по передней поверхности иногда используют величину проекции этого угла на основную плоскость (Stabler, G.V., 1951).

Стремление свести трудно поддающееся исследованию свободное косоугольное резание к более изученному свободному ортогональному резанию явилось причиной введения в рассмотрение понятия *плоскость схода стружки*, в которой измеряется т.н. *эффективный передний угол* γ_{cf}. Здесь и далее, не вдаваясь в тонкости механики процесса резания, рассмотрим как могут быть определены геометрические параматры режущей кромки инструмента в плоскости схода стружки.

Плоскость схода стружки, в которой (с некоторыми допущениями) срезаемый припуск превращается в стружку, проходит через вектор результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ движения режущего клина относительно поверхности резания и вектор $\mathbf{V}_{cf}$ скорости схода стружки по передней поверхности. Вектор скорости $\mathbf{V}_{cf}$ лежит в плоскости, касательной в точке M к передней поверхности, и составляет угол η с перпендикуляром к режущей кромке, проведенным передней плоскости (рис. 6.20).

Вектор скорости $\mathbf{V}_{cf}$ скорости схода стружки ортогонален орту $\mathbf{n}_n$ нормали к передней поверхности P_n. Поэтому $\mathbf{V}_{cf} \cdot \mathbf{n}_n = 0$.

Уравнение плоскости схода стружки P_{cf} может быть составлено как уравнение плоскости, проходящей через текущую точкк M режущей кромки и содержащей два направления – вектор $\mathbf{V}_\Sigma$ результирующей скорости движения режущего клина и вектор $\mathbf{V}_{cf}$ скорости схода стружки по передней поверхности. Вектор $\mathbf{V}_\Sigma$ определен выше. Вектор скорости $\mathbf{V}_{cf}$ в проекциях на координатные оси может быть представлен так:

$$\mathbf{V}_{cf} = \mathbf{i}V_{cf.x} + \mathbf{j}V_{cf.y} + \mathbf{k}V_{cf.z}\,.$$

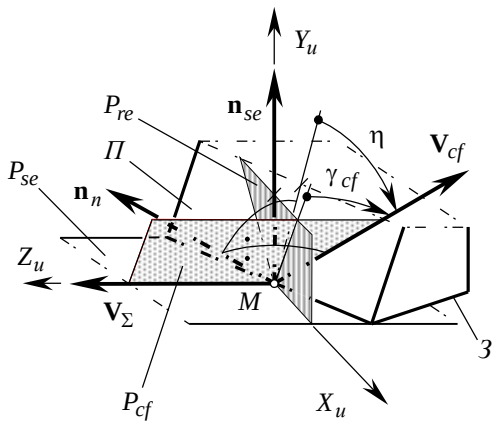


Рис. 6.20. Плоскость схода стружки P_{cf} и измеряемый в ней передний угол γ_{cf}.

С учетом изложенного, уравнение плоскости схода стружки P_{cf} записывается так:

$$\begin{vmatrix} X_u - X^{(M)} & Y_u - Y^{(M)} & Z_u - Z^{(M)} \\ V_{\Sigma.x} & V_{\Sigma.y} & V_{\Sigma.z} \\ V_{cf.x} & V_{cf.y} & V_{cf.z} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Передний угол γ_{cf} заключен между основной плоскостью P_{re} и вектором $\mathbf{V}_{cf}$ скорости схода стружки (рис. 6.20). Поэтому:

$$\gamma_{cf} = \angle\left(\mathbf{V}_\Sigma, \mathbf{V}_{cf}\right) - 90^\circ = \arctan\frac{\left|\mathbf{V}_\Sigma \times \mathbf{V}_{cf}\right|}{\mathbf{V}_\Sigma \cdot \mathbf{V}_{cf}} - 90^\circ = \arctan\frac{\mathbf{V}_\Sigma \cdot \mathbf{V}_{cf}}{\left|\mathbf{V}_\Sigma \times \mathbf{V}_{cf}\right|}.$$

Величина эффективного переднего угла γ_{cf} может быть определена графически. Для этого режущий клин инструмента расположим в системе плоскостей проекций HVF (рис. 6.21). Здесь и далее проекциям элементов на горизонтальную плоскость проекций H присвоен индекс "1", их проекциям на вертикальную плоскость проекций V – индекс "2", а соответствующим проекциям на фронтальную плоскость проекций F – индекс "3".

В процессе обработки режущий клин 1 перемещается параллельно оси H/V с результирующей скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$, вектор которой без искажения проецируется как на горизонтальную плоскость проекций H, так и на вертикальную плоскость проекций V (поэтому проекции вектора скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ дополнительными индексами не обозначены).

Режущая кромка ab расположена под углом наклона λ_{se}, плоскость P_{se} измерения которого расположена параллельно горизонтальной плоскости проекций H. Угол наклона λ_{se} измеряется между построенным в плоскости резания P_{se} вектором нормали $\mathbf{n}_c$ к режущей кромке и вектором результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$.

В текущей точке M режущей кромки построена нормаль $\mathbf{n}_{se}$ к поверхности резания P_{se}.

Чтобы построить вектор $\mathbf{V}_{cf}$ скорости схода стружки, введены две дополнительные плоскости проекций W и U, проекциям элементов на которые присвоены индексы "4" и "5" соответственно. Ось проекций HW расположена перпендикулярно проекции a_1b_1 режущей кромки на горизонтальную плоскость проекций H. В дополнительной плоскости проекций W режущая кромка изобразится точкой $A_4 \equiv B_4 \equiv M_4$, передняя плоскость – следом Π_4, а нормальный передний угол проецируется без искажений – в натуральную величину γ_{ne}.

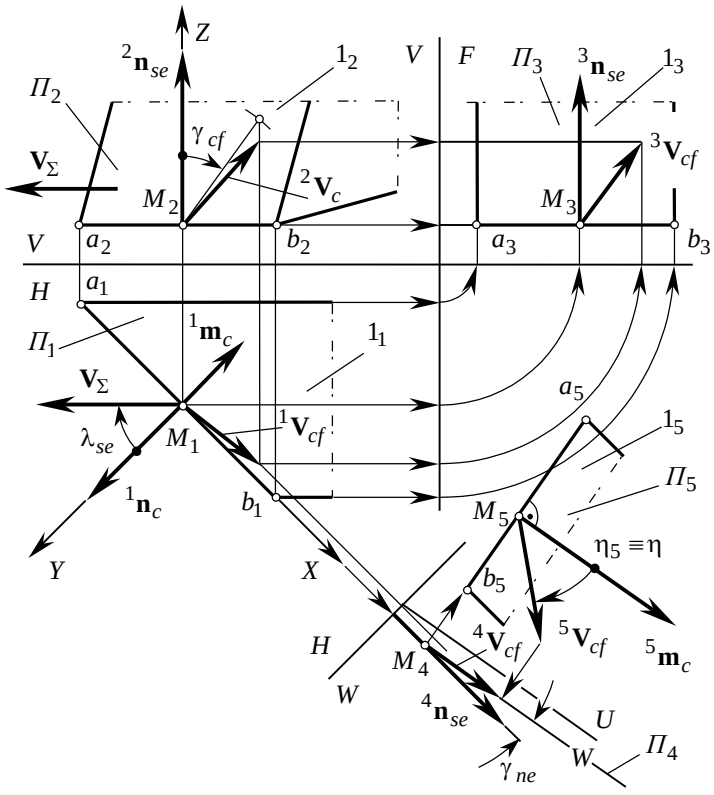


Рис. 6.21. К построению натуральной величины переднего угла γ_{cf}, измеренного в плоскости схода стружки P_{cf}.

Ось проекций W/U проведена параллельно следу Π_4 передней плоскости. Следовательно, передняя плоскость проецируется на дополнительную плоскость проекций U без искажений. Поэтому в плоскости

проекций U угол схода стружки η [1], определяющий направление движения стружки по передней поверхности, изобразится в натуральную величину. Вследствие этого вектор скорости схода стружки $\mathbf{V}_{cf}$ на дополнительной плоскости проекций U проходит под углом η к расположенному в передней плоскости перпендикуляру $\mathbf{m}_c$ к режущей кромке.

Используя известные правила начертательной геометрии, по проекции $\mathbf{V}_{cf}^{5}$ вектора скорости $\mathbf{V}_{cf}$ изображаем его в остальных плоскостях проекций. Развернув проекцию $\mathbf{V}_{cf}^{1}$ вокруг оси, параллельной оси V/H, до положения, в котором эта проекция параллельна вертикальной плоскости проекций, в плоскости проекций V получаем неискаженный передний угол γ_{cf} (рис. 6.21).

Величина переднего угла γ_{cf} может быть расчитана аналитически. Для этого в системе координат XYZ с началом в текущей точке M режущей кромки (рис. 6.21) для нормированного вектора $\mathbf{v}_\Sigma = \dfrac{\mathbf{V}_\Sigma}{|\mathbf{V}_\Sigma|}$ запишем:

$$\mathbf{v}_\Sigma = -\mathbf{i}\sin\lambda_{se} + \mathbf{j}\cos\lambda_{se}. \tag{6.27}$$

Аналогично, выбрав модуль вектора $\mathbf{v}_{cf}$ таким, чтобы его проекция на плоскость координат YZ равнялась единице, получим:

$$\mathbf{v}_{cf} = \mathbf{i}\tan\eta - \mathbf{j}\sin\gamma_{ne} + \mathbf{k}\cos\gamma_{ne}. \tag{6.28}$$

Для угла $\angle(\mathbf{v}_\Sigma, \mathbf{v}_{cf})$ справедливо соотношение:

$$\cos\angle(\mathbf{v}_\Sigma, \mathbf{v}_{cf}) = -\sin\lfloor\angle(\mathbf{v}_\Sigma, \mathbf{v}_{cf}) - 0{,}5\pi\rfloor.$$

Для переднего угла γ_{cf} можно записать:

$$\sin\gamma_{cf} = -\frac{|\mathbf{V}_\Sigma \times \mathbf{V}_{cf}|}{|\mathbf{V}_\Sigma| \cdot |\mathbf{V}_{cf}|} = -|\mathbf{v}_\Sigma \times \mathbf{v}_{cf}|. \tag{6.29}$$

Подставив (27) и (28) в (29), после преобразований получим:

$$\sin\gamma_{cf} = -\frac{\sin\lambda_{se}\tan\eta + \cos\lambda_{se}\sin\gamma_{ne}}{\sqrt{1+\tan^2\eta}} = \sin\lambda_{se}\cos\eta\tan\eta + \cos\lambda_{se}\sin\gamma_{ne}\cos\eta,$$

откуда:

$$\sin\gamma_{cf} = \sin\eta\sin\lambda_{se} + \cos\eta\cos\lambda_{se}\sin\gamma_{ne}. \tag{6.30}$$

Для широко распространенных случаев обработки резанием угол наклона режущей кромки $\lambda_{se} \le 45^\circ$. Экспериментально доказано, что при $\lambda_{se} \le 45^\circ$ выполняется соотношение $\eta \cong \lambda_{se}$, с учетом которого из (30) следует известная формула (Stabler, G.V., 1951):

---

[1] Величина угла η схода стружки может быть расчитана аналитически (Куцер В.М., 1990). Результаты оаналитических расчетов хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований Н.Н. Зорева.

$$\sin\gamma_{cf} \cong \sin^2\lambda_{se} + \cos^2\lambda_{se}\sin\gamma_{ne} \cong 1-\cos^2\lambda_{se}\left(1-\sin\gamma_{ne}\right). \qquad (6.31)$$

Если условие $\eta \cong \lambda_{se}$ не выполняется, как это имеет место, например, при шевинговании цилиндрических зубчатых колес, когда величина угла наклона режущей кромки достигает значения $\lambda_{se} = 80^\circ$ (Подураев В.Н., Камалов В.С., 1973), следует пользоваться более общей зависимостью (30).

В процессе работы инструмента угол наклона режущей кромки λ_{se} может изменяться как во времени в текущей точке режущей кромки, так и вдоль ее периметра. Диапазон изменения величины угла λ_{se} по периметру режущей кромки достигает $\lambda_{se} = \pm 50^\circ$, что наблюдается, например, при зубошевинговании дисковым шевером (Петрухин С.С., 1960). Изменение величины угла наклона режущей кромки λ_{se} существенно сказывается на условиях отделения и отвода стружки.

Принимая во внимание, что величины передних углов γ_{ne} и γ_{ve}, измеренных в нормальной и в главной секущей плоскостях, связаны между собой соотношением:

$$\tan\gamma_{ne} = \tan\gamma_{ve}\cos\lambda_{se},$$

с учетом того, что:

$$\sin\gamma_n = \frac{\tan\gamma_n}{\sqrt{1+\tan^2\gamma_n}} = \frac{\tan\gamma_{ve}\cos\lambda_{se}}{\sqrt{1+\tan^2\gamma_{ve}\cos^2\lambda_{se}}},$$

из (30) получим:

$$\sin\gamma_{cf} = \sin\eta\sin\lambda_{se} - \cos\eta\cos^2\lambda_{se}\frac{\tan\gamma_{ve}\cos\lambda_{se}}{\sqrt{1+\tan^2\gamma_{ve}\cos^2\lambda_{se}}}.$$

Из (31) можно получить аналогичную формулу

$$\sin\gamma_{cf} \cong 1-\cos^2\lambda_{se}\left(1-\frac{\tan\gamma_{ve}\cos\lambda_{se}}{\sqrt{1+\tan^2\gamma_{ve}\cos^2\lambda_{se}}}\right).$$

Приведенные зависимости справедливы для случая свободного косоугольного резания. Они позволяют рассчитать значение переднего угла γ_{cf} при любой величине угла наклона режущей кромки λ_{se}.

При несвободном косоугольном резании надежно определить величину угла η аналитически сложно – для этого требуется проведение экспериментальных исследований.

Использованный подход, базирующийся на применении элементов векторной алгебры, позволяет достаточно просто вывести формулы для расчета величин статических и кинематических геометрических параметров режущей кромки в любом наперед заданном плоском сечении режущего клина инструмента. Его применение эффективно также при выводе формул для расчета значений геометрических параметров процесса резания: угла резания[1], углов скалывания, угла действия, глубины резания и др., измеряемых в произвольном сечении.

---

[1]Эффективный угол резания δ_{cf} измеряется между противоположным направлением вектора скорости резания $\mathbf{V}_\Sigma$ и вектором скорости схода стружки $\mathbf{V}_{cf}$. При свободном косоугольном резании величина угла δ_{cf} зависит от угла наклона режущей кромки λ_{se} и угла схода стружки η: $\delta_{cf} = \arccos\left[\cos\lambda_{se}\cos\eta\cos\delta_{ne} + \sin\lambda_{se}\sin\eta\right]$. Из этой формулы следует, что угол резания δ_{cf} уменьшается по мере увеличения угла наклона режущей кромки λ_{se} и угла схода стружки η, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Г л а в а 7. **Условия формообразования поверхностей деталей**

Обработка детали производится на станке инструментом, который перемещается относительно заготовки. В результате этого материал припуска срезается в виде стружки и таким образом формируется поверхность детали.

Особенности формы обрабатываемой поверхности детали, параметров исходной инструментальной поверхности применяемого инструмента и кинематики формообразования могут привести к тому, что в некоторых случаях обработать деталь в полном соответствие с требованиями чертежа невозможно или такая обработка окажется затруднительной. Часть материала припуска может оказаться несрезанной (в этом случае наблюдается т.н. *недорез*) или, наоборот, срезанной окажется часть материала детали (в этом случае наблюдается т.н. *подрез*). И первое, и второе нежелательно, однако может быть допустимо, если размеры окончательно обработанной поверхности детали укладываются в поле допуска на точность ее изготовления.

Важно выявить причины, которые приводят к появлению отклонений формы окончательно обработанной поверхности детали $Д_р$ от номинальной ее поверхности $Д_н$. Это будет способствовать разработке эффективных методов и средств по устранению погрешностей формообразования и тем самым позволит повысить эффективность обработки детали с заданной точностью.

Установление условий, при выполнении которых поверхность детали формообразуется геометрически точно (или когда результирующие отклонения формы реальной $Д_р$ от номинальной $Д_н$ поверхности находится в пределах допуска на точность обработки детали), является важной инженерной задачей. В общей постановке эту проблему исследовал Родин П.Р. (1960). Впоследствие она изучалась другими исследователями (Лашнев С.И., Юликов М.И., 1975; Перепелица Б.А., 1981; Радзевич С.П., 1991; Борисов А.Н., 1993; Marciniak K., 1987, 1991; и др.).

Машинная подготовка управляющих программ для станков с ЧПУ предполагает наличие аналитического представления условий, при выполнении которых деталь может быть обработана в полном соответствие с требованиями чертежа. Потребность в формализованном представлении таких условий вызвана тем, что возможность оператора вмешиваться в процесс обработки детали на станке с ЧПУ практически исключена. Поэтому вся информация о процессе, в том числе и ограничения на его параметры, накладываемые необходимостью обеспечения возможности правильного формообразования поверхности детали, должна быть задана в предельно формализованном и удобном для программирования виде.

Изучение и аналитическое описание условий, при выполнении которых поверхность детали может быть формообразована геометрически точно или когда погрешности формообразования не выходят за пределы допуска на точность обработки, предполагает, что кинематика формообразования известна (см. гл. 2), а соответствующая исходная инструментальная поверхность определена (см. гл. 5).

7.1. Аналитическое представление условий формообразования поверхностей деталей

Правильное формообразование поверхности детали заданным инструментом возможно лишь при выполнении комплекса условий, которые принято называть *условиями формообразования поверхностей деталей*. Система условий формообразования поверхностей определяется структурой обрабатываемой поверхности детали, формообразующей исходной инструментальной поверхности и кинематикой формообразования.

7.1.1. Первое условие формообразования. Это необходимое условие формообразования поверхностей деталей впервые сформулировал Родин П.Р. (1960). Оно заключается в том, что должна существовать исходная инструментальная поверхность.

Способы образования исходных инструментальных поверхностей рассмотрены выше (см. гл. 5). Поэтому ограничимся только тем, что сформулируем:

Первое условие: *Поверхность $Д$ детали может быть правильно формообразована, если существует сопряженная с ней исходная инструментальная поверхность $И$.*

Это условие формообразования поверхностей деталей выполняется не всегда. Оно может нарушаться для одного или нескольких участков поверхности детали, в том числе может не выполняться и для всей поверхности $Д$. Если бы не только исходная инструментальная поверхность была огибающей последовательных положений обрабатываемой поверхности детали, но и наоборот – поверхность $Д$ была огибающей последовательных положений движущейся поверхности $И$, исследование процесса формообразования существенно упростилось бы. Однако огибающая поверхности, совершающей движение в пространстве, существует не всегда. Например, если плоскость перемещается в направлении, перпендикулярном ей самой – образовать огибающую движущейся таким образом плоскости невозможно. То же самое наблюдается, если плоскость вращать вокруг оси, лежащей в этой плоскости. Однако если ту же плоскость вращать вокруг оси, параллельной плоскости и не лежащей в ней, либо вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости, найти огибающую несложно.

Обычно выполнение первого условия формообразования поверхностей деталей затруднений не вызывает – например, варьируя кинематикой формообразования, исходную инструментальную поверхность можно образовать практически всегда, в том числе и такую поверхность $И$ инструмента, форма и параметры которой в процессе обработки изменяется по программе (Родин П.Р., Линкин Г.А., Татаренко В.Н., 1976; Радзевич С.П., 1988). Вместе с тем возможны случаи, когда исходная инструментальная поверхность не существует и образована быть не может. Например, для известных (см. выше, гл. 2) кинематических схем формообразования не существует исходная инструментальная поверхность эвольвентных червячных фрез с углом профиля $\alpha_u = 0^\circ$ (в этом случае диаметр основного цилиндра инструмента $d_{bu} \to \infty$); нельзя образовать исходную инструментальную поверхность для случая шлифования колес с эвольвентным профилем зубьев, когда начальный диаметр колеса в станочном зацеплении меньше его основного диаметра; не существует исходная инструментальная поверхность $И$ для инструмента, предназначенного для чистового затылования *геометрически точных* модульных, шлицевых, фасонных червячных фрез и др. Затыловочные круги в этом случае имеют не точную исходную инструментальную поверхность $И$, а приближенную *производящую поверхность* $П_u$. Эта поверхность не сопряжена с затылованной поверхностью геометрически точных червячных фрез и поэтому обеспечивает только приближенное формообразование затылованных поверхностей зубьев инструментов указанных конструкций.

Если первое условие формообразования не выполняется, т.е. не существует сопряженная с поверхностью $Д$ поверхность $И$, спроектировать соответствующий инструмент невозможно, а потому обработать деталь без органических погрешностей в этом случае нельзя.

7.1.2. Второе условие формообразования. В процессе обработки сопряженные поверхности детали и инструмента непрерывно или периодически касаются одна другой по линии или в точке (поверхностное их касание при обработке деталей лезвийным и абразивным инструментом не является характерным). Чтобы поверхности $Д$ и $И$ могли касаться одна другой, должно быть выполнено условие касания. Это условие обычно записывают в виде уравнения контакта:

$$\mathbf{N}_{д-u} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0, \tag{7.1}$$

где $\mathbf{N}_{д-u}$ – вектор контактной нормали к поверхностям $Д$ и $И$ в точке $К$ их касания;

$\mathbf{V}_{\Sigma}$ – вектор результирующей скорости относительного движения поверхностей $Д$ и $И$ в точке $К$.

Анализ уравнения контакта (1) показывает, что при обработке заданной поверхности детали влиять на процесс формообразования можно в первую очередь за счет изменения направления вектора относительной скорости $\mathbf{V}_{\Sigma}$. Направление вектора нормали $\mathbf{N}_{д-u}$ для заданной точки поверхности $Д$ детали обычно является строго определенным, и изменять его, не меняя форму обработанной поверхности, как правило, нельзя.

Однако это не всегда так – направление вектора нормали $\mathbf{N}_{д-u}$ можно изменять, переводя заготовку в технологическое состояние, например, когда заготовка упруго деформирована или подвержена иному

технологическому воздействию, убираемому после окончания процесса обработки (см. рис. 2.3, с.123). Этот пример достаточно убедительно свидетельствует о том, что в уравнении контакта (1) в общем случае следует вести речь о нормали не к поверхности $Д$ детали, а о нормали к поверхности детали *в технологическом состоянии заготовки*, т.е. о нормали к поверхности $Д_{технол.}$. В большинстве случаев эти нормали совпадают одна с другой.

Уравнение контакта (1) может быть записано в иной форме, если исходить из того, что в точках касания нормали к каждой из поверхностей $Д$ и $И$ должны лежать на одной прямой – они должны быть коллинеарными и противоположно направленными:

$$\mathbf{n}_д + \mathbf{n}_и = 0 \tag{7.2}$$

или

$$\operatorname{sgn} \mathbf{N}_д + \operatorname{sgn} \mathbf{N}_и = 0. \tag{7.3}$$

Уравнение контакта отражает только геометрический и кинематический аспекты аналитического представления условия, выполнение которого необходимо для обеспечения возможности касания

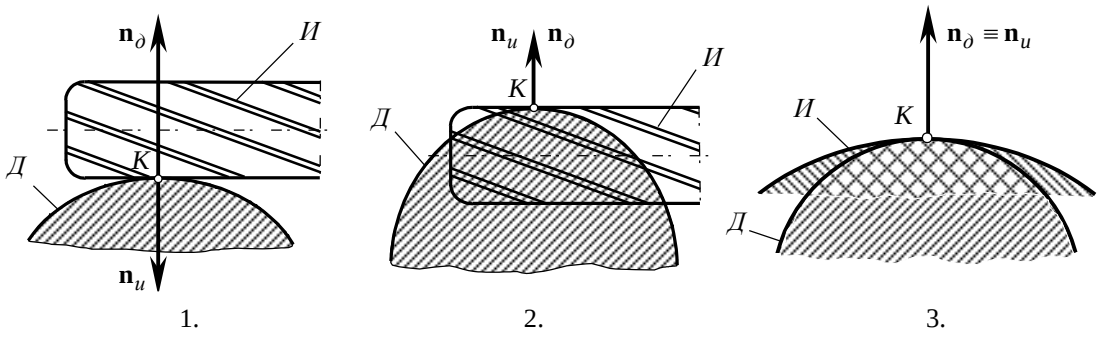


Рис. 7.1. Примеры выполнения и нарушения второго условия формообразования поверхностей деталей.

поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента.

Поверхность детали и исходная инструментальная поверхность имеют материальный носитель своей формы. Возможность правильного касания поверхностей $Д$ и $И$ как геометрических образов является необходимым, но не достаточным условием возможности правильного касания поверхностей реальной детали и реального инструмента. Дополнительно должно быть выполнено очевидное условие физического характера, которое может быть названо физическим условием касания. Суть физического условия заключается в том, что тело детали и часть пространства, ограниченная исходной инструментальной поверхностью $И$, не должны одновременно занимать одну и ту же область пространства. Например (рис. 7.1), поверхности $Д$ и $И$ как геометрические образы касаются одна другой в точке K и имеют в ней общую (контактную) нормаль. Вместе с тем очевидно, что при выполнении условия геометрического контакта обработка детали возможна не всегда. Если в первом случае (рис. 7.1.1) обработка детали возможна, то во втором (рис. 7.1.2) – невозможна: по штриховке видно, что в этом случае имеется область, одновременно занятая телом детали и частью пространства, ограниченного поверхностью $И$ инструмента. Очевидно, что в результате взаимной интерференции деталь и инструмент не могут занимать такое положение одна относительно другой. Деталь и инструмент должны касаться одна другой только открытой для контакта стороной.

Интерференцию вида (см. рис. 7.1.3), когда деталь и инструмент располагаются по одну сторону от общей для поверхностей $Д$ и $И$ касательной плоскости, будем называть *интерференцией первого рода* детали и инструмента.

Выполнение второго условия формообразования поверхностей не допускает интерференции первого рода и тем самым исключает из дальнейшего рассмотрения все случаи обработки, приводящие к касанию поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента, когда нормали к ним оказываются однонаправленными или не лежат на одной прямой.

Для обеспечения возможности правильного касания поверхностей детали и инструмента необходимо, чтобы в каждой их общей точке K тело детали и часть пространства, занятая инструментом, находились с противоположных сторон от общей касательной плоскости. Это условие аналитически может быть представлено так.

Считаем, что нормаль к поверхности $Д$ направлена от тела детали, а нормаль к поверхности $И$ – от инструмента. Чтобы указанные нормали были направлены в требуемых направлениях, достаточно проследить за порядком сомножителей в находящемся в числителе векторном произведении:

$$\mathbf{n}_{\partial(u)} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right|} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}}, \tag{7.4}$$

которым определяются направления ортов нормалей к поверхностям $Д(И)$.

С учетом изложенного сформулируем:

Второе условие: *Поверхность $Д$ детали может быть правильно формообразована, если в текущей точке ее касания с исходной инструментальной поверхностью $И$ нормали к ним коллинеарны и противоположно направленны.*

Для выполнения второго условия формообразования поверхностей деталей должно соблюдаться условие (2) или (3). Если $\mathbf{N}_\partial$ – нормаль к поверхности $Д$ детали, а $\mathbf{N}_u$ – нормаль к поверхности $И$ инструмента, это же условие аналитически записывается так: $\mathbf{N}_\partial \cdot \mathbf{N}_u < 0$. Переходя к ортам нормалей, получим:

$$\mathbf{n}_\partial \cdot \mathbf{n}_u = -1. \tag{7.5}$$

С учетом (4) формула (5) может быть записана так:

$$\mathbf{n}_\partial \cdot \mathbf{n}_u = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \right|} \cdot \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} \right|} = -1. \tag{7.6}$$

В уравнении (6) знаменатели всегда положительны, из чего следует:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} = -\sqrt{(E_\partial G_\partial - F_\partial^2) \cdot (E_u G_u - F_u^2)} < 0 \tag{7.7}$$

или в такой форме:

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial U_u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial V_u} \right) = -1; \tag{7.8}$$

$$\operatorname{sgn} \sqrt{(E_\partial G_\partial - F_\partial^2) \cdot (E_u G_u - F_u^2)} = +1. \tag{7.9}$$

Аналитическая форма (7) представления второго условия формообразования поверхностей резанием в развернутом виде записывается так:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_д}{\partial U_д} & \frac{\partial Y_д}{\partial U_д} \\ \frac{\partial X_д}{\partial V_д} & \frac{\partial Y_д}{\partial V_д} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial X_u}{\partial U_u} & \frac{\partial Y_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial X_u}{\partial V_u} & \frac{\partial Y_u}{\partial V_u} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_д}{\partial U_д} & \frac{\partial Z_д}{\partial U_д} \\ \frac{\partial Y_д}{\partial V_д} & \frac{\partial Z_д}{\partial V_д} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_u}{\partial U_u} & \frac{\partial Z_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial Y_u}{\partial V_u} & \frac{\partial Z_u}{\partial V_u} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_д}{\partial U_д} & \frac{\partial X_д}{\partial U_д} \\ \frac{\partial Z_д}{\partial V_д} & \frac{\partial X_д}{\partial V_д} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_u}{\partial U_u} & \frac{\partial X_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial Z_u}{\partial V_u} & \frac{\partial X_u}{\partial V_u} \end{vmatrix} < 0; \qquad (7.10)$$

или так:

$$\operatorname{sgn}\left(\begin{vmatrix} \frac{\partial X_д}{\partial U_д} & \frac{\partial Y_д}{\partial U_д} \\ \frac{\partial X_д}{\partial V_д} & \frac{\partial Y_д}{\partial V_д} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial X_u}{\partial U_u} & \frac{\partial Y_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial X_u}{\partial V_u} & \frac{\partial Y_u}{\partial V_u} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_д}{\partial U_д} & \frac{\partial Z_д}{\partial U_д} \\ \frac{\partial Y_д}{\partial V_д} & \frac{\partial Z_д}{\partial V_д} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_u}{\partial U_u} & \frac{\partial Z_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial Y_u}{\partial V_u} & \frac{\partial Z_u}{\partial V_u} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_д}{\partial U_д} & \frac{\partial X_д}{\partial U_д} \\ \frac{\partial Z_д}{\partial V_д} & \frac{\partial X_д}{\partial V_д} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_u}{\partial U_u} & \frac{\partial X_u}{\partial U_u} \\ \frac{\partial Z_u}{\partial V_u} & \frac{\partial X_u}{\partial V_u} \end{vmatrix} \right) = -1. \qquad (7.11)$$

Используя сокращенную форму записи определителей, составленных из производных, можно получить еще два уравнения, эквивалентные (10) и (11):

$$\left|\frac{\partial(X_д, Y_д)}{\partial(U_д, V_д)}\right| \cdot \left|\frac{\partial(X_u, Y_u)}{\partial(U_u, V_u)}\right| + \left|\frac{\partial(Y_д, Z_д)}{\partial(U_д, V_д)}\right| \cdot \left|\frac{\partial(Y_u, Z_u)}{\partial(U_u, V_u)}\right| + \left|\frac{\partial(Z_д, X_д)}{\partial(U_д, V_д)}\right| \cdot \left|\frac{\partial(Z_u, X_u)}{\partial(U_u, V_u)}\right| < 0;$$

$$\operatorname{sgn}\left(\left|\frac{\partial(X_д, Y_д)}{\partial(U_д, V_д)}\right| \cdot \left|\frac{\partial(X_u, Y_u)}{\partial(U_u, V_u)}\right| + \left|\frac{\partial(Y_д, Z_д)}{\partial(U_д, V_д)}\right| \cdot \left|\frac{\partial(Y_u, Z_u)}{\partial(U_u, V_u)}\right| + \left|\frac{\partial(Z_д, X_д)}{\partial(U_д, V_д)}\right| \cdot \left|\frac{\partial(Z_u, X_u)}{\partial(U_u, V_u)}\right| \right) = -1.$$

Как видно, в рассмотренной интерпретации второе условие формообразования поверхностей деталей достаточно просто описывается аналитически, что в первую очередь важно при составлении управляющих программ для систем ЧПУ металлорежущими станками.

7.1.3. Третье условие формообразования. В зависимости от соотношения величин и знаков радиусов кривизны нормальных сечений поверхностей *Д* и *И*, третье условие формообразования может либо выполняться (рис. 7.2.1), либо нарушается (рис. 7.2.2).

Причиной нарушения третьего условия формообразования поверхностей деталей является локальное внедрение инструмента в деталь – внедрение в дифференциальной окрестности точки *К* касания поверхностей *Д* и *И*. Это *интерференция второго рода* детали и инструмента.

Третье условие формообразования требует, чтобы деталь и инструмент одновременно не занимали одну и ту же часть пространства в пределах *дифференциальной окрестности* точки их касания. Это условие формообразования имеет локальный характер – оно относится исключительно к дифференциальной окрестности точки *К*, несмотря на то, что при его нарушении искажения формы обработанной поверхности детали распространяются за пределы ее дифференциальной окрестности.

Сформулируем:

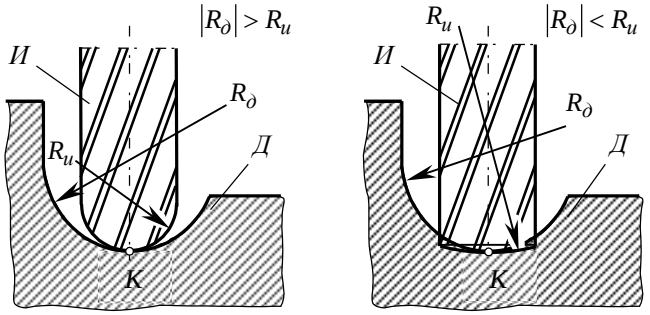


Рис. 7.2. Примеры выполнения и нарушения третьего условия формообразования поверхностей деталей.

Третье условие: *Поверхность Д детали может быть правильно формообразована, если она не интерферирует с поверхностью И инструмента в дифференциальной окрестности каждой точки их касания.*

Выполнение или нарушение третьего условия формообразования поверхностей деталей определяется соотношением величин и знаков радиусов кривизны линий пересечения поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента соответствующей нормальной плоскостью.

Правильное формообразование поверхности $Д$ детали возможно только в случае, когда в каждой точке $К$ третье условие формообразования выполняется во всех плоских нормальных сечениях, т.е. во всех плоскостях, проходящих через контактную нормаль.

В текущей точке $К$ через контактную нормаль может быть проведено бесчисленное множество нормальных секущих плоскостей, образующих пучок плоскостей. Определение значений нормальных радиусов кривизны поверхностей $Д$ и $И$ в каждом сечении пучка плоскостей трудоемко, поскольку требует выполнения большого объема громоздких вычислений. Кроме того, не всегда в этом имеется потребность: проверку выполнения третьего условия формообразования достаточно произвести только в одном или в нескольких наиболее неблагоприятных (так называемых “опасных”) нормальных сечениях. Положение опасного сечения можно установить исходя из анализа параметров формы и относительного расположения поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента в точке $К$.

В пределах дифференциальной окрестности точки $К$ в любом из проходящих через нее плоских нормальных сечений линия пересечения поверхностей $Д$ и $И$ с точностью до членов второго порядка может рассматриваться как выпуклая или вогнутая дуга кривой второго порядка. В частных случаях эта дуга вырождается в отрезок прямой линии. Других типов линий пересечения гладких регулярных локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ нормальной секущей плоскостью нет и быть не может.

Несложный анализ показывает, что в пределах дифференциальной окрестности точки $К$ возможно только тринадцать принципиально различных схем касания линий сечения поверхностей $Д$ и $И$ нормальной плоскостью (табл. 7.1). Очевидно, что для случаев 1.1.0; 1.2.1; 1.2.2; 1.3.0; 2.1.1; 2.1.2; 3.1.0 и 3.3.0 третье условие формообразования выполняется, тогда как для случаев 1.2.3; 2.1.3; 2.2.0; 2.3.0 и 3.2.2 – не выполняется.

Соотношения величин и знаков нормальных радиусов кривизны $R_д$ и $R_и$ (см. табл. 7.1) по сути являются аналитической формой записи третьего условия формообразования применительно к каждой частной схеме касания линий нормального сечения поверхностей $Д$ и $И$. Совокупность частных соотношений дает возможность составить одно обобщенное уравнение

$$(R_д + R_и)\operatorname{sgn} R_д \operatorname{sgn} R_и \geq 0, \tag{7.12}$$

которое представляет собой обобщенную аналитическую форму записи третьего условия формообразования поверхностей деталей. Уравнение (12) справедливо для всех случаев касания линий нормального сечения поверхностей $Д$ и $И$ (см. табл. 7.1).

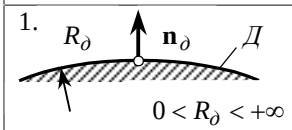
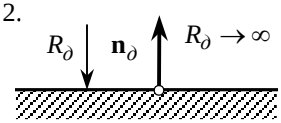
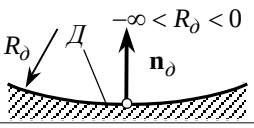
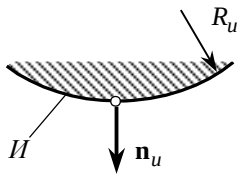
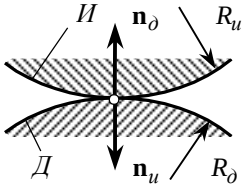
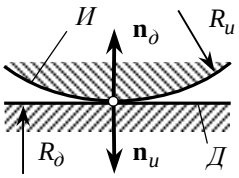
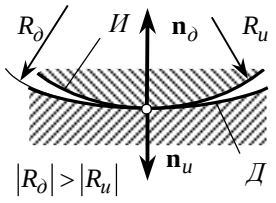
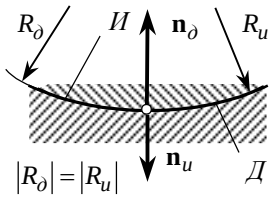
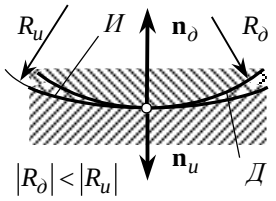
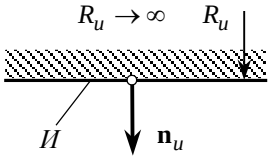
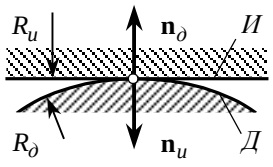
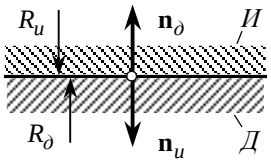
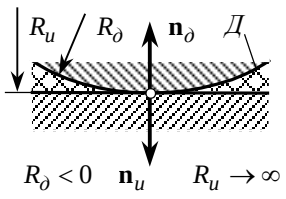
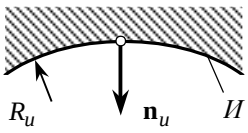
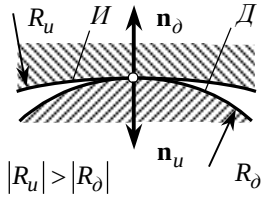
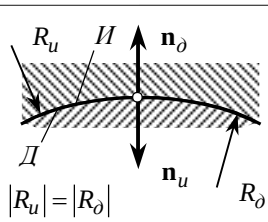
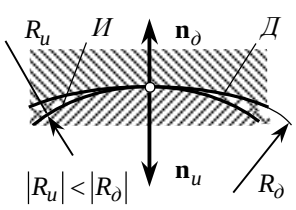
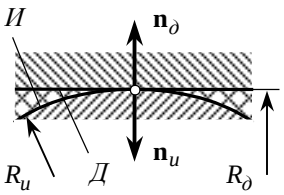
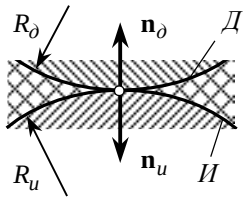
Для удобства вычислений зависимость (12) бывает целесообразным представить в таком виде:

$$\operatorname{sgn}(R_д + R_и)\operatorname{sgn} R_д \operatorname{sgn} R_и = \begin{cases} 0 \\ +1 \end{cases}. \tag{7.13}$$

В фиксированной точке $К$ величины нормальных радиусов кривизны $R_д$ поверхности $Д$ детали и $R_и$ поверхности $И$ инструмента переменны и зависят от направления, через которое проходит нормальная секущая плоскость. Следствием этого является то, что в аналитическом представлении третьего условия формообразования поверхностей деталей появляется избыточный параметр. Поэтому использовать аналитическое представление третьего условия формообразования в форме (13) (так же, как и в форме (12)) не всегда удобно. Количество переменных параметров в (13) удобнее уменьшить. Для этого переменные величины $R_д$ и $R_и$ следует выразить через постоянные по величине соответствующие значения главных радиусов кривизны. С этой целью воспользуемся формулой Эйлера.

Для поверхности $Д$ детали, пересекаемой нормальной секущей плоскостью $C_д$, формулу Эйлера запишем так:

Таблица 7.1

Вид плоского нормального сечения локального участка исходной инструментальной поверхности $И$		Вид плоского нормального сечения локального участка поверхности $Д$		
		выпуклый	прямолинейный	вогнутый
		1. 	2. 	3. 
выпуклый	1. $0 < R_u < +\infty$ 	1.1 $R_\partial > 0$ $R_u > 0$ 	1.2 $0 < R_u < R_\partial \to \infty$ 	  
прямолинейный	2. $R_u \to \infty$ 			
вогнутый	3. $-\infty < R_u < 0$ 	  	3.2 $R_\partial \to \infty$ $R_u < 0$ 	3.3 $R_\partial < 0$ $R_u < 0$ 

(7.14)
$$\frac{1}{R_д} = \frac{\cos^2\varphi}{R_{1.д}} + \frac{\sin^2\varphi}{R_{2.д}}$$

Поверхность $И$ инструмента развернута относительно поверхности $Д$ детали на угол μ относительной локальной ориентации. Поэтому радиус кривизны сечения поверхности $И$ инструмента той же нормальной плоскостью $C_д$ можно определить из соотношения

(7.15)
$$\frac{1}{R_и} = \frac{\cos^2(\varphi+\mu)}{R_{1.и}} + \frac{\sin^2(\varphi+\mu)}{R_{2.и}}.$$

Подставив (14) и (15) в (13) и выполнив необходимые преобразования, получим уравнение

(7.16)
$$\operatorname{sgn}\left(\frac{R_{1.д}R_{2.д}}{R_{1.д}\sin^2\varphi + R_{2.д}\cos^2\varphi} + \frac{R_{1.и}R_{2.и}}{R_{1.и}\sin^2(\varphi+\mu) + R_{2.и}\cos^2(\varphi+\mu)}\right) \cdot$$
$$\cdot \operatorname{sgn}\frac{R_{1.д}R_{2.д}}{R_{1.д}\sin^2\varphi + R_{2.д}\cos^2\varphi} \cdot \operatorname{sgn}\frac{R_{1.и}R_{2.и}}{R_{1.и}\sin^2(\varphi+\mu) + R_{2.и}\cos^2(\varphi+\mu)} = +1,$$

которое содержит только один переменный параметр φ.

Если использовать формулы для расчета величин главных кривизн:

$$k_д = k_{1.д}\sin^2\varphi + k_{2.д}\cos^2\varphi;$$

$$k_и = k_{1.и}\sin^2(\varphi+\mu) + k_{2.и}\cos^2(\varphi+\mu),$$

получим зависимость:

$$\operatorname{sgn}\left[k_{1.д}\sin^2\varphi + k_{2.д}\cos^2\varphi + k_{1.и}\sin^2(\varphi+\mu) + k_{2.и}\cos^2(\varphi+\mu)\right] \cdot$$
$$\cdot \operatorname{sgn}\left(k_{1.д}\sin^2\varphi + k_{2.д}\cos^2\varphi\right) \operatorname{sgn}\left[k_{1.и}\sin^2(\varphi+\mu) + k_{2.и}\cos^2(\varphi+\mu)\right] = +1.$$

которая также содержит единственный переменный параметр φ и эквивалентна (18).

Для некоторых технологических операций выполнение третьего условия формообразования поверхностей деталей является особенно важным, например, как это имеет место при затачивании по передним поверхностям зубьев протяжек, предназначенных для обработки отверстий.

7.1.3.1. Использование поверхности приведенной кривизны. В дифференциальной окрестности точки $К$ для описания во втором приближении условий касания поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента может быть использовано уравнение поверхности приведенной кривизны (см. раздел 4.4.2). В локальном подвижном ортонормированном базисе уравнение этой поверхности приводимо к виду (4.38):

$$2z = k_{1.пр}x^2 + k_{2.пр}y^2,$$

где $k_{1.пр}$ и $k_{2.пр}$ – главные кривизны поверхности приведенной кривизны (4.35).

Чтобы исключить возможность локальной интерференции детали и инструмента, измеряемый параллельно контактной нормали зазор между поверхностями $Д$ и $И$ в дифференциальной окрестности точки $К$ обязательно должен быть неотрицательным. Для выполнения этого условия приведенная кривизна должна быть неотрицательной во всех проходящих через точку $К$ направлениях. Из этого следует, что

поверхность приведенной кривизны может быть только эллиптическим параболоидом либо параболическим цилиндром (см. раздел 1.8). Гиперболическим параболоидом она быть не может – это свидетельствует о нарушении третьего условия формообразования поверхностей деталей.

Чтобы поверхность приведенной кривизны была эллиптическим параболоидом или параболическим цилиндром, необходимо, чтобы сумма главных кривизн сопряженных поверхностей $Д$ и $И$ во всех направлениях была неотрицательной. Нарушение этого условия приводит к тому, что по крайней мере в некоторых направлениях приведенная кривизна примет отрицательные значения. Это, в свою очередь, ведет к неизбежной интерференции поверхностей $Д$ и $И$ и, как следствие, к нарушению третьего условия формообразования поверхностей деталей.

7.1.3.2. Использование индикатрисы конформности. Положение опасных сечений, в которых в первую очередь следует проверять выполнение третьего условия формообразования поверхностей деталей, не всегда можно определить просто, без выполнения в большом объеме громоздких вычислений. Если руководствоваться вторым[1] условием формообразования поверхностей в форме (Родин П.Р., 1960), не всегда очевидно, какое из нормальных сечений поверхности детали и инструмента необходимо исследовать в первую очередь. При жесткой кинематике формообразования эта задача решается относительно просто. При формообразовании сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ проверка выполнения третьего условия формообразования существенно усложняется. Для упрощения решения этой задачи целесообразно воспользоваться уравнением индикатрисы конформности поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$ в точке $К$ их касания, а именно тем свойством этой характеристической кривой, в соответствие с которым при выполнении третьего условия формообразования минимальный диаметр $d_{conf}^{\min} = 2r_{conf}^{\min}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ всегда неотрицателен и, следовательно, эта кривая не имеет точек самопересечения.

Аналитическая форма представления третьего условия формообразования поверхностей деталей может быть получена из уравнения (4.79) индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ или из уравнений (4.75) и (4.76) других функций из класса функций конформности.

Чтобы индикатриса конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ не имела отрицательных по величине диаметров и тем самым обеспечивалось выполнение третьего условия формообразования поверхностей деталей, достаточно потребовать, чтобы выполнялось условие $r_{conf} \geq 0$ или эквивалентные ему условия $\operatorname{sgn} r_{conf} = 0$ или $\operatorname{sgn} r_{conf} = +1$. С учетом (4.83), получим:

$$r_{conf} = \sqrt{\left|\frac{E_д G_д}{L_д G_д \cos^2\varphi - M_д\sqrt{E_д G_д}\sin 2\varphi + N_д E_д \sin^2\varphi}\right|}\operatorname{sgn}\Phi_{2.д}^{-1} + \\ + \sqrt{\left|\frac{E_u G_u}{L_u G_u \cos^2(\varphi+\mu) - M_u\sqrt{E_u G_u}\sin 2(\varphi+\mu) + N_u E_u \sin^2(\varphi+\mu)}\right|}\operatorname{sgn}\Phi_{2.u}^{-1} \geq 0. \tag{7.17}$$

При комплексном подходе к решению задачи формообразования сложной поверхности детали на многокоординатном станке с ЧПУ форма (17) представления третьего условия формообразования поверхностей деталей оказывается предпочтительнее. Это следствие того, что уравнение (4.83) индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ используется для описания геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ и его параметры определяются на более ранних этапах решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали. Поэтому уравнение (17) удобно использовать для аналитического описания третьего условия формообразования поверхностей деталей.

Использование индикатрисы конформности для установления факта выполнения или нарушения третьего условия формообразования поверхностей деталей удобно проиллюстрировать на примере

[1] В системе условий формообразования, разработанных ранее (Родин П.Р., 1960), условие, подобное рассматриваемому в данном разделе третьему условию формообразования поверхностей деталей, названо вторым условием формообразования.

формообразования вогнутого участка поверхности $Д$ детали выпуклым участком поверхности $И$ инструмента (рис. 7.3.1), когда третье условие формообразования заведомо нарушается. Вследствие интерференции поверхностей $Д$ и $И$ в пределах сектора κ индикатриса конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ пересекает сама себя (рис. 7.3.2.) – ветви этой кривой, для которых $d_{conf}^{\min} < 0$, показаны пунктиром. Самопересечение ветвей индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ свидетельствует о том, что в текущем плоском нормальном сечении поверхностей $Д$ и $И$, проходящем в пределах сектора с центральным углом κ, имеет место нарушение третьего условия формообразования поверхностей деталей (рис. 7.3.3), когда справедливо соотношение $|R_u| > R_\partial$. В этом случае геометрически точно формообразовать поверхность детали нельзя.

Индикатриса конформности (17) не только позволяет описать геометрию касания поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента во всех нормальных сечениях, проходящих через точку $К$, но дает однозначный ответ на вопрос об ориентации наиболее опасного нормального сечения, в котором следует производить проверку выполнения третьего условия формообразования поверхностей деталей в первую очередь (в том числе при очевидном его выполенении) – направление наиболее опасного плоского нормального сечения совпадает с направлением измерения минимального диаметра $d_{conf}^{\min}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$.

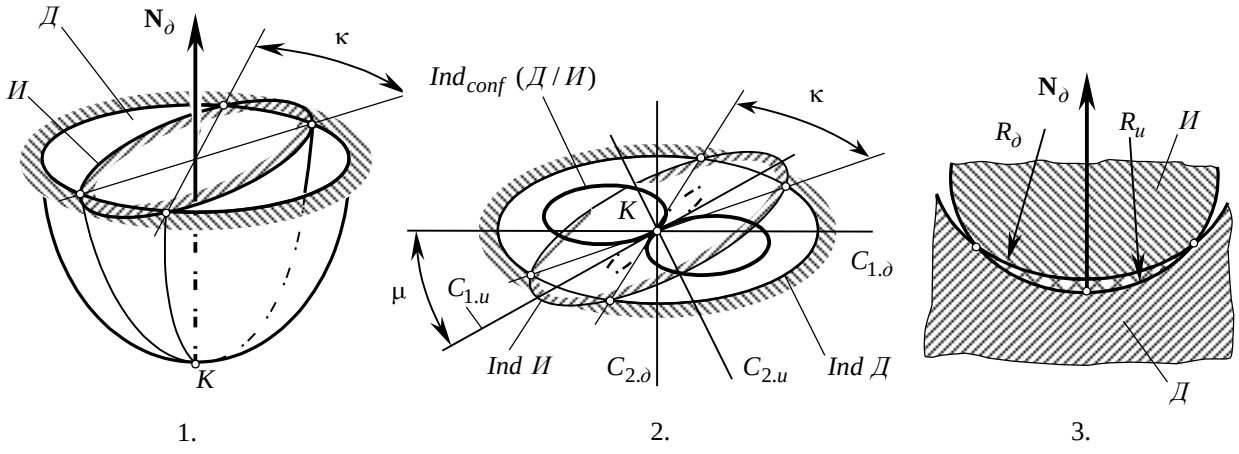


Рис. 7.3. Пример нарушения третьего условия формообразования поверхностей деталей.

7.1.3.3. *Особые случаи касания поверхностей деталей и инструментов.* Особые случаи возникают, когда линии пересечения одной или одновременно обеих поверхностей $Д$ и $И$ в точке $К$ имеют перегиб (рис. 7.4). В дифференциальной окрестности точки перегиба линия пересечения поверхности $Д(И)$ нормальной секущей плоскостью с точностью до членов второго порядка малости может рассматриваться как отрезок прямой линии. Например (рис. 7.4.1), в точке $К$ радиусы кривизны нормального сечения поверхности детали и исходной инструментальной поверхности равны один другому и равны бесконечности ($R_\partial = R_u = \infty$), однако на участке KI профиля сечения детали наблюдается интерференция поверхностей $Д$ и $И$. Аналогичное явление может наблюдаться при определенном соотношении радиуса кривизны нормального сечения поверхности $И$ инструмента и параметров кривизны поверхности $Д$ детали (рис. 7.4.2). Если плоское нормальное сечение поверхности детали представляет собой дугу кривой с монотонно изменяющейся кривизной (рис. 7.3), то в некоторой точке $К$ радиусы кривизны нормальных сечений поверхностей $Д$ и $И$ равны один другому по модулю и противоположны по знаку ($|R_\partial| = R_u$). Очевидно, что в этом случае на участке KI профиля неизбежно имеет место интерференция поверхностей $Д$

и $И$. Последнее характерно для любых кривых профиля нормального сечения поверхностей $Д$ и $И$, например, если они описываются разными кубическими параболами (рис. 7.4.4.), когда третье условие формообразования поверхностей нарушается только с одной стороны от точки K.

В дифференциальной окрестности точки перегиба кривизна нормального сечения поверхности $Д(И)$ равна нулю. Такое плоское нормальное сечение поверхности $Д(И)$ неотличимо от аналогичного сечения другой поверхности, имеющей другие параметры формы.

В особых случаях для аналитического описания третьего условия формообразования поверхностей

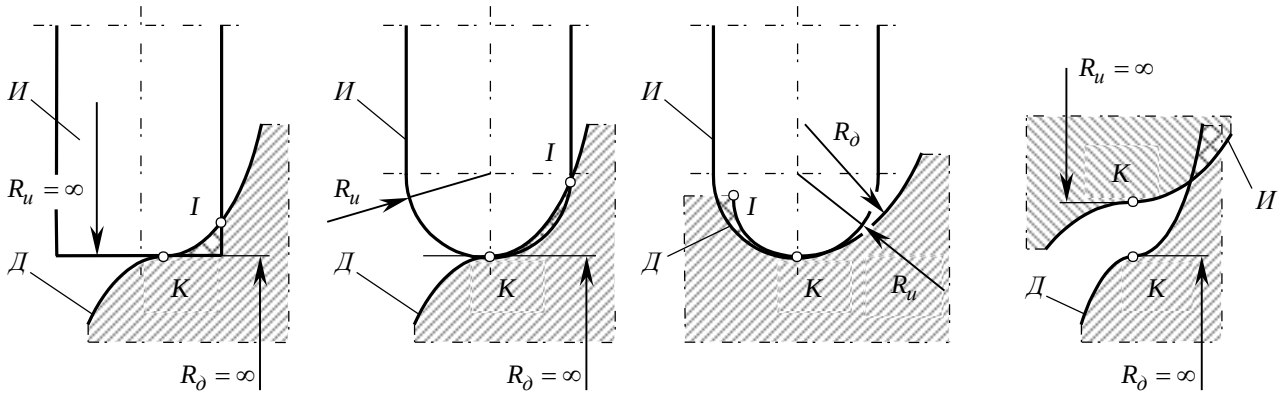


Рис. 7.4. Особенности касания поверхностей $Д$ и $И$ в дифференциальной окрестности точки перегиба.

(рис. 7.5) учитывать только соотношения величин и знаков радиусов кривизны линий соответствующего нормального сечения поверхностей $Д$ и $И$ не достаточно – необходимо дополнительно принимать во внимание соотношение интенсивностей их изменения в дифференциальной окрестности точки K.

Мерой интенсивности изменения величин нормальных радиусов кривизны поверхностей $Д$ и $И$ могут служить производные $\frac{\partial R_\partial}{\partial l_\partial}$ и $\frac{\partial R_u}{\partial l_u}$ радиусов нормальной кривизны, взятые по длине дуги линий нормального сечения этих поверхностей. С учетом изложенного, для особых случаев аналитическое представление третьего условия формообразования поверхностей деталей записывается в форме:

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial R_\partial}{\partial l_\partial}+\frac{\partial R_u}{\partial l_u}\right)\cdot\operatorname{sgn}\frac{\partial R_\partial}{\partial l_\partial}\cdot\operatorname{sgn}\frac{\partial R_u}{\partial l_u}=-1;\qquad \operatorname{sgn}R_\partial=+1;\qquad \operatorname{sgn}R_u=+1. \tag{7.18}$$

Если учесть, что $R_{\partial(u)}=\frac{\Phi_{1.\partial(u)}}{\Phi_{2.\partial(u)}}$, а $dl_{\partial(u)}=\sqrt{\Phi_{1.\partial(u)}}$, получим:

$$\frac{\partial R_{\partial(u)}}{\partial l_{\partial(u)}}=\frac{1}{\sqrt{\Phi_{1.\partial(u)}}}\partial\left(\frac{\Phi_{1.\partial(u)}}{\Phi_{2.\partial(u)}}\right).$$

Это соотношение может быть использовано в (18).

Если в общем плоском нормальном сечении интенсивности изменения радиусов кривизны поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента одинаковые (т.е. когда справедливо соотношение $\frac{\partial R_\partial}{\partial l_\partial} = \frac{\partial R_u}{\partial l_u}$), следует перейти к рассмотрению соотношений вторых производных $\frac{\partial^2 R_\partial}{\partial l_\partial^2}$ и $\frac{\partial^2 R_u}{\partial l_u^2}$:

$$(7.19) \qquad \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 R_\partial}{\partial l_\partial^2} + \frac{\partial^2 R_u}{\partial l_u^2}\right) \cdot \operatorname{sgn}\frac{\partial^2 R_\partial}{\partial l_\partial^2} \cdot \operatorname{sgn}\frac{\partial^2 R_u}{\partial l_u^2} = -1; \qquad \operatorname{sgn} R_\partial = +1; \qquad \operatorname{sgn} R_u = +1,$$

а при необходимости – производных более высоких порядков.

Интенсивность изменения кривизны нормального сечения поверхностей $Д$ и $И$ в дифференциальной окрестности точки перегиба может быть различной по разные стороны от точки перегиба. Это следует учитывать при проверке выполнения или нарушения третьего условия формообразования поверхностей деталей.

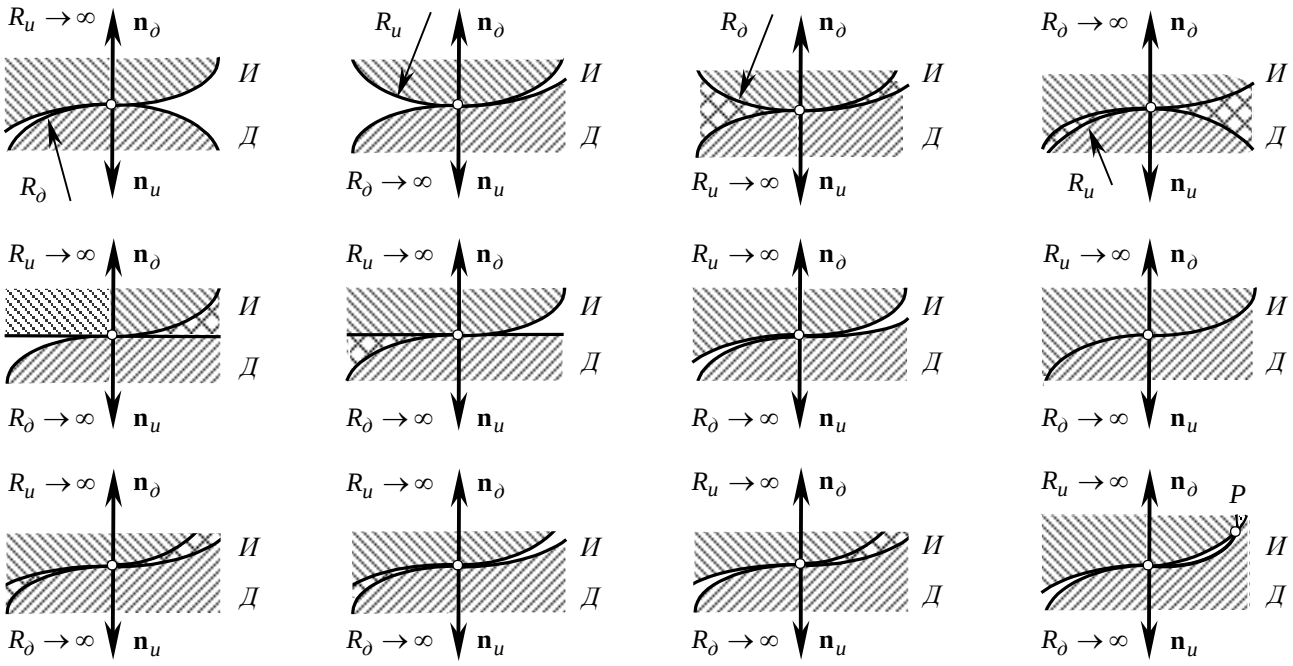


Рис. 7.5. Характерные плоские нормальные сечения поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$ в окрестности точки перегиба.

7.1.3.4. Локально-экстремальные виды касания поверхностей деталей и инструментов. Обеспече-ние локально-экстремального касания поверхностей $Д$ и $И$ представляют интерес в первую очередь в связи с тем, что при таком виде касания в дифференциальной окрестности точки K поверхность $И$ инструмента предельно конформна поверхности $Д$ детали. Это ведет к тому, что высота остаточных гребешков на поверхности детали уменьшается, а точность ее формообразования повышается. В свою очередь это позволяет исключить или существенно уменьшить объем последующей ручной доработки деталей.

К локально-экстремальным относятся локально-линейное и локально-поверхностное первого и второго рода виды касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности (см. гл. 4).

При локально-линейном касании в плоском нормальном сечении, проходящем через точку K в направлении, соответствующем наибольшей степени конформности поверхности $И$ инструмента к

поверхности $Д$ детали, всегда справедливо соотношение $R_{\partial} = -R_u$ (или $-R_{\partial} = R_u$). Поэтому всегда имеется плоское нормальное сечение, в котором выполняется условие $r_{conf} = 0$.

При локально-поверхностном касании первого и второго рода условие $r_{conf} = 0$ выполняется во всех, проходящих через точку *К*, плоских нормальных сечениях поверхностей $Д$ и $И$.

В случае локально-экстремального касания справедливость соотношения $r_{conf} = 0$ является необходимой, но не достаточной для того, чтобы третье условие формообразования поверхностей деталей выполнялось.

В приведенной выше интерпретации (18) третье условие формообразования в случаях локально-экстремального касания поверхностей $Д$ и $И$ становится неопределенным. Поэтому наряду с необходимостью его выполнения, необходимо дополнительно потребовать выполнения условия (19).

С целью упрощения последующих вычислений, аналитическое представление третьего условия формообразования поверхностей деталей в рассматриваемом случае целесообразно представить в более простой для использования численных методов форме. Имея в виду, что $l_{\partial(u)}$ представимо в виде $l_{\partial(u)} = l_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$, функции $R_{\partial}(l_{\partial})$ и $R_u(l_u)$ можно разложить в ряд Тейлора: всякая функция $R_{\partial(u)}(l_{\partial(u)})$, аналитическая внутри некоторой области с центром в точке $K[U^{(K)}_{\partial(u)}, V^{(K)}_{\partial(u)}]$, во всех точках этой области может быть единственным образом представлена в виде степенного ряда:

$$R_{\partial(u)}\left\{\left[U_{\partial(u)} + U^{(K)}_{\partial(u)}\right]; \left[V_{\partial(u)} + V^{(K)}_{\partial(u)}\right]\right\} = R_{\partial(u)}\left[U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right] + \left\{\frac{\partial R_{\partial(u)}\left[U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right]}{\partial U_{\partial(u)}} U^{(K)}_{\partial(u)} + \frac{\partial R_{\partial(u)}\left[U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right]}{\partial V_{\partial(u)}} V^{(K)}_{\partial(u)}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 R_{\partial(u)}\left[U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right]}{\partial U^2_{\partial(u)}}\left[U^{(K)}_{\partial(u)}\right]^2 + 2\frac{\partial^2 R_{\partial(u)}\left[U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right]}{\partial U_{\partial(u)}\partial V_{\partial(u)}} U^{(K)}_{\partial(u)} V^{(K)}_{\partial(u)} + \frac{\partial^2 R_{\partial(u)}\left[U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}\right]}{\partial V^2_{\partial(u)}}\left[V^{(K)}_{\partial(u)}\right]^2\right\} + \qquad (7.20)$$

$$+ \frac{1}{6}\{..\} + \ldots \frac{1}{n!}\{..\} + S_n,$$

где остаточный член рассчитывается по формуле:

$$S_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial}{\partial U_{\partial(u)}} U^{(K)}_{\partial(u)} + \frac{\partial}{\partial V_{\partial(u)}} V^{(K)}_{\partial(u)}\right]^{(n+1)} R_{\partial(u)}\left\{\left[U_{\partial(u)} + \varepsilon_1 U^{(K)}_{\partial(u)}\right]\left[V_{\partial(u)} + \varepsilon_2 V^{(K)}_{\partial(u)}\right]\right\}$$

$$0 < \varepsilon_1 < 1; \qquad 0 < \varepsilon_2 < 1.$$

Значения нормальных радиусов кривизны $R_{\partial(u)}$, рассчитанные по формуле (20), можно использовать в (18) и (19) при проверке выполнения третьего условия формообразования поверхностей деталей.

7.1.4. Четвертое условие формообразования. Установленные соотношения между дифференциальными характеристиками поверхностей $Д$ и $И$ не являются достаточным основанием для решения вопроса о наличии или отсутствии интерференции детали и инструмента вне дифференциальной окрестности их общей точки $К$. При отсутствии локальной интерференции деталь и инструмент могут интерферировать одна в другую вне дифференциальной окрестности точки их касания – глобально (рис. 7.6.1). Чтобы исключить возможность такой интерференции, в рассмотрение вводится четвертое условие формообразования поверхностей деталей, которое требует отсутствия интерференции поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента вне дифференциальной окрестности точки их касания. Интерференция такого типа является *интерференцией третьего рода* поверхностей $Д$ и $И$.

Для рассмотрения четвертого условия формообразования уравнения поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента следует привести к общей системе координат. Четвертое условие формообразования будет выполнено, если за пределами точки K система уравнений:

$$\mathbf{r}_{\partial} = \mathbf{r}_{\partial}(U_{\partial}, V_{\partial});$$
$$\mathbf{r}_{u} = \mathbf{r}_{u}(U_{u}, V_{u}) \tag{7.21}$$

решений не имеет[1]. Таким образом:

Четвертое условие: *Поверхность $Д$ детали может быть правильно формообразована, если вне дифференциальной окрестности каждой точки ее касания с поверхностью $И$ инструмента эти поверхности не интерферируют одна с другой.*

Аналитическое представление четвертого условия формообразования поверхностей деталей может быть получено с использованием элементов теории множеств.

Деталь можно рассматривать как часть пространства, ограниченного поверхностью $Д$. Каждая точка этого пространства представляет собой элемент ограниченного замкнутого множества $\hat{Д}$ с бесконечно большим числом элементов $\hat{Д}_i$. Аналогично поверхность $И$ ограничивает часть пространства, занимаемого инструментом, а каждая точка этого пространства может рассматриваться как элемент ограниченного замкнутого множества $\hat{И}$ с бесконечно большим числом элементов $\hat{И}_j$. Для выполнения четвертого условия формообразования поверхностей деталей необходимо, чтобы за пределами точки (или точек) касания поверхностей $Д$ и $И$ множества $\hat{Д}$ и $\hat{И}$ не пересекались одно с другим. Для этого они должны быть дизъюнктивными: $\hat{Д} \cap \hat{И} = \varnothing$, т.е. за пределами точки K (или точек K_i) множество $\hat{Д} \cap \hat{И}$ должно быть пустым множеством $\varnothing$.

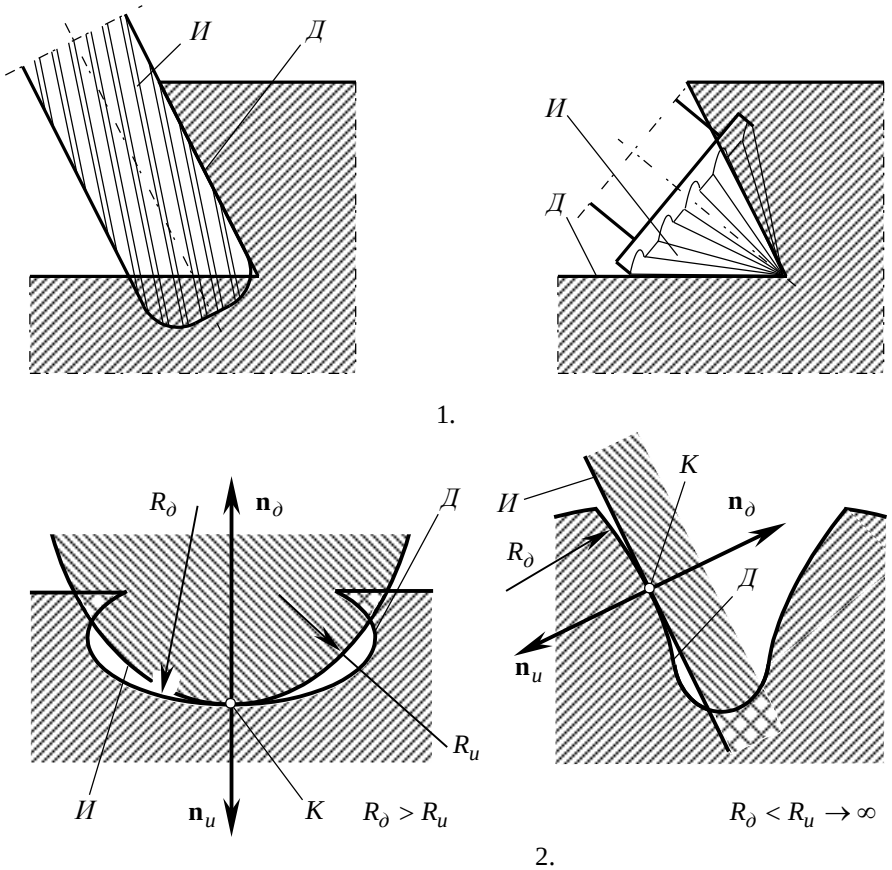


Рис. 7.6. Примеры нарушения четвертого условия формообразования поверхностей деталей.

Выполнение или нарушение четвертого условия

[1] В пределах дифференциальной окрестности точки K система уравнений (23) решение имеет. Если система уравнений (23) не имеет решений вообще (т.е. и в точке K), такой случай интереса не представляет, поскольку при этом процесс формообразования прерывается.

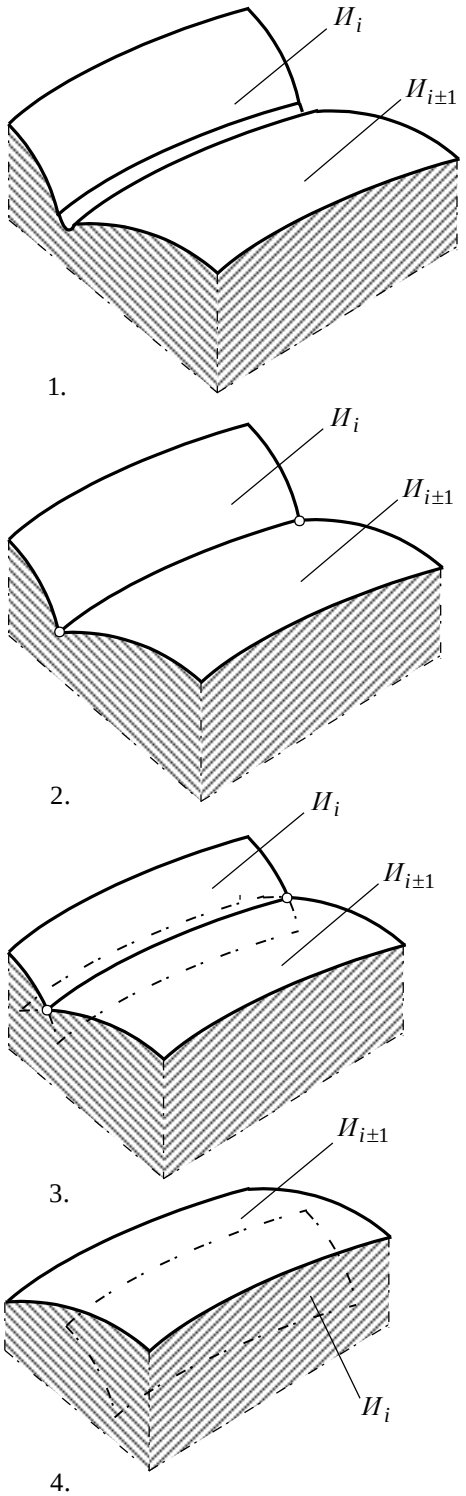


Рис. 7.7. Относительное расположение смежных участков исходной инструментальной поверхности.

формообразования поверхностей деталей удобно иллюстрировать при помощи схем, которые представляют собой диаграммы Эйлера-Венна (рис. 7.6.2).

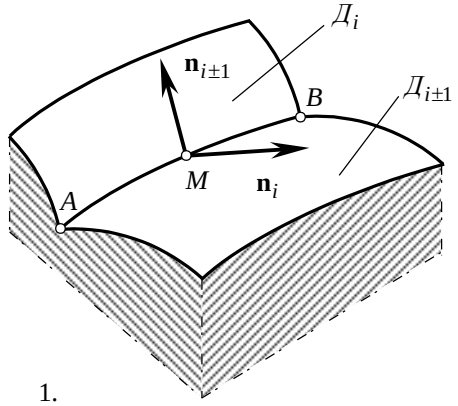
В отличие от интерференции детали и инструмента, имеющей место при нарушении третьего условия формообразования, когда интерференция носит локальный (дифференциальный) характер (распространяясь при этом и за пределы дифференциальной окрестности точки K), интерференция детали и инструмента при нарушении четвертого условия формообразования поверхностей изначально носит недифференциальный характер. Она всегда приводит к внедрению инструмента в деталь в больших недифференциальных (глобальных) масштабах.

Интерференция третьего рода возможна только с рабочей частью режущего инструмента, обладающей способностью срезать припуск. Интерференция детали с корпусом или с крепежной частью инструмента (с хвостовиком и пр.) имеет другую природу и ее следует рассматривать совместно с вопросами исключения возможности столкновения между собой детали, инструмента и элементов конструкции станка.

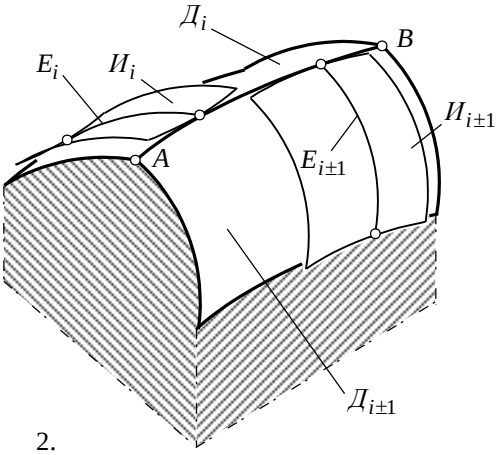
7.1.5. Пятое условие формообразования. Применяеме в промышленности детали машин ограничены несколькими поверхностями. Применение находят инструменты, которыми одновременно обрабатывают две и более поверхности детали. Исходная инструментальная поверхность инструментов такого типа состоит из нескольких участков $И_i$ (здесь $i = 1, 2, 3, \ldots, n$) – по числу n обрабатываемых поверхностей детали, по числу их типов и т.п.

Смежные участки $И_i$ и $И_{i\pm1}$ исходной инструментальной поверхности могут занимать один относительно другого различное положение: они могут быть удалены один от другого на некоторое расстояние (рис. 7.7.1), могут соприкасаться один с другим (рис. 7.7.2), взаимно пересекаться (рис. 7.7.3) или находиться один внутри исходного инструментального тела другого (рис. 7.7.4).

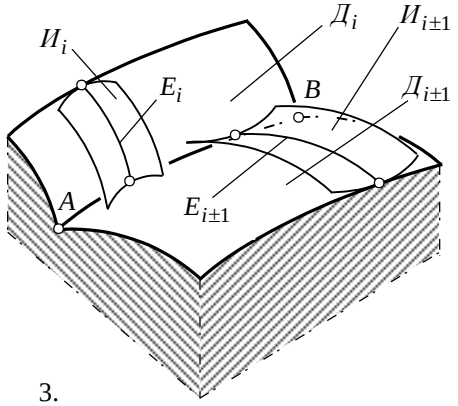
Если смежные участки $И_i$ и $И_{i\pm1}$ отстоят один от другого на некоторое расстояние или соприкасаются один с другим, воспроизвести исходную инструментальную поверхность выполненным в металле инструментом можно полностью. В этих случаях деталь может быть обработана в полном соответствие с требованиями чертежа. Если наблюдается пересечение смежных участков исходной инструментальной поверхности, воспроизвести их полностью невозможно. Поэтому те участки поверхности детали, которые должны были бы быть формообразованы невоспроизведенными в металле режущими кромками инструмента, обработаны не будут. В результате на детали в области границы смежных ее участков образуется переходная поверхность, образованная как результат частично не срезанного припуска или как частично срезанной детали. Такое явление часто наблюдается при обработке по методу обкатки зубчатых колес, шлицевых валов и т.п. деталей, а также в других случаях. Как образование переходных кривых, так и образование подрезов приводит к искажениям формы



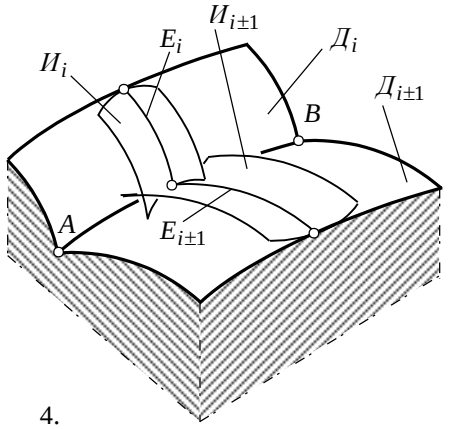
1.



2.



3.



4.

окончательно обработанной детали и может быть допустимо только, если имеющие при этом место отклонения формы не выходят за пределы допуска на точность изготовления детали.

Рассмотрим случай обработки детали в области сопряжения двух разделенных между собой линией AB ее участков $Д_i$ и $Д_{i\pm1}$ (рис. 7.8.1). В каждой точке линии AB можно провести нормали $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_{i\pm1}$ соответственно к каждому из двух участков $Д_i$ и $Д_{i\pm1}$ поверхности детали. Очевидно, что нормали $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_{i\pm1}$ в общем случае не совпадают одна с другой, а характеристики E_i и $E_{i\pm1}$ на линии AB имеют разрыв. Это следствие того, что в общем случае векторы $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_{i\pm1}$ не могут быть одновременно перпендикулярны третьему вектору – вектору результирующей скорости $\mathbf{V}_\Sigma$, т.е. одновременно оба условия контакта $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{V}_\Sigma = 0$ и $\mathbf{n}_{i\pm1} \cdot \mathbf{V}_\Sigma = 0$ в текущей точке M линии AB не выполняются (рис. 7.8.1).

При обработке детали в области “выступа” (рис. 7.2.2) участки $И_i$ и $И_{i\pm1}$ исходной инструментальной поверхности, касаются поверхности детали по характеристикам E_i и $E_{i\pm1}$. В рассматриваемом случае смежные участки исходной инструментальной поверхности удалены один от другого на некоторое расстояние и обработка детали возможна в полном соответствие с требованиями чертежа.

Если обрабатывается деталь в области “впадины” (рис. 7.8.3), смежные участки $И_i$ и $И_{i\pm1}$ исходной

Рис. 7.8. Относительное расположение сопряженных участков поверхностей детали и инструмента.

инструментальной поверхности касаются поверхности детали по характеристикам E_i и $E_{i\pm1}$. Поскольку в этом случае характеристики имеют разрыв, смежные участки $И_i$ и $И_{i\pm1}$ исходной инструментальной поверхности перескают один другой. Поэтому на детали формируется переходная поверхность. В пределах переходной поверхности имеет место кромочное ее касание с исходной инструментальной поверхностью. Размеры переходной поверхности зависят от формы обрабатываемой поверхности детали и от характера относительного движения детали и инструмента в процессе обработки. Изменяя параметры кинематики формообразования, можно изменять размеры переходной поверхности и даже избежать возможности ее образования.

При обработке детали в области впадины смежные участки $И_i$ и $И_{i\pm1}$ исходной инструментальной поверхности взаимно не пересекаются, когда на границе AB участков $Д_i$ и $Д_{i\pm1}$ характеристики E_i и $E_{i\pm1}$ не

имеют разрыва (рис. 7.8.4). Это наблюдается, когда вектор скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ относительного движения детали и инструмента в точке M направлен по касательной к линии AB или равен нулю. В этом случае точка M является точкой касания участков $Д_i$ и $Д_{i\pm1}$ поверхности детали с соответствующими участками $И_i$ и $И_{i\pm1}$ исходной инструментальной поверхности, а вектор скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ в точке M перпендикулярен обеим нормалям $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_{i\pm1}$ одновременно. Следовательно, в точке M одновременно выполняются оба уравнения контакта $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{V}_\Sigma = 0$ и $\mathbf{n}_{i\pm1} \cdot \mathbf{V}_\Sigma = 0$. Только в таком случае обработка детали в области впадины возможна в полном соответствие с требованиями чертежа.

Смежные участки $И_i$ и $И_{i\pm1}$ исходной инструментальной поверхности могут располагаться один внутри исходного инструментального тела другого (см. рис. 7.7.4). Например, если ось пальцевой фрезы располагается несимметрично относительно боковых сторон обрабатываемой канавки, один из участков исходной инструментальной поверхности располагается внутри исходного инструментального тела другого участка. В этом случае обработка заданной поверхности детали в полном соответствие с требованиями чертежа невозможна.

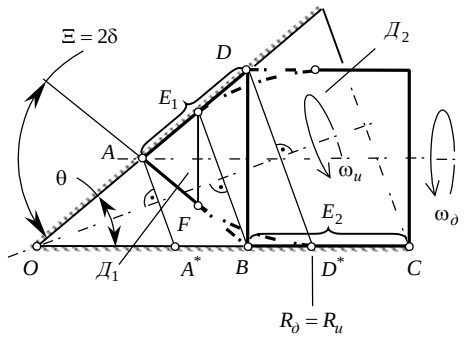


Рис. 7.9. Формообразование цилиндрического и конического участков поверхности детали поверхностью врутреннего конуса.

Пример 7.1. Обрабатывается детали, поверхность которой состоит из конического участкма $Д_1$ с образующей AB и цилиндрического участка $Д_2$ с образующей BC (рис. 7.9). Обработка производится комбинированным инструментом, исходная инструментальная поверхность которого состоит из двух кинических участков $И_1$ и $И_2$, являющихся частями одной общей конической поверхности. Параметры исходной инструментальной поверхности определены таким образом, чтобы характеристика E_1 и E_2 лежали на одной конической поверхности – для этого в качестве исходной инструментальной поверхности использована поверхность внутреннего конуса, угол θ при вершине O которого в два раза меньше угла Ξ при вершине A конического участка $Д_1$ поверхности детали ($2\theta = \Xi$).

В процессе обработки деталь вращается вокруг своей оси с угловай скоростью $\omega_д$, а инструмента – вокруг перекрещивающейся в осью детали своей оси с угловой скоростью ω_u.

Характеристикой E_1 исходной инструментальной поверхности и конического участка $Д_1$ поверхности детали является отрезок AD. Симметрично (относительно оси вращения инструмента) расположенный ему участок образующей исходной инструментальной поверхности обозначен через A^*D^*. Характеристикой E_2 исходной инструментальной поверхности и цилиндрического участка $Д_2$ поверхности детали является отрезок BC.

Правильное формообразование поверхности детали возможно только на участках AF и CD^* ее образующей. Как следует из построений на рис. 7.9, участок FBD^* образующей детали точно формообразовать нельзя – он заменяется криволинейной образующей FD^* переходной поверхности.

Пример 7.2. Обработка ступенчатого валика может быть произведена пальцевой фрезой (рис. 7.10). Для исключения возможности появления областей, где скорость резания равна нулю или достигает недопустимо малых величин, ось вращения инструмента смещена с оси вращения детали на некоторую величину e. В результате оси их вращения перекрещиваются.

Характеристики E_1 торцового участка $Д_1$ поверхности детали и цилиндрического участка $И_1$ исходной инструментальной поверхности и E_2 цилиндрического участка $Д_2$ поверхности детали и торцового участка $И_2$ исходной инструментальной поверхности пересекаются одна с другой. Поэтому в месте сопряжения участков $Д_1$ и $Д_2$ на детали образуется переходная поверхность. Переходная поверхность имеет форму поверхности вращения, образованная торцовой окружностью пальцевой фрезы.

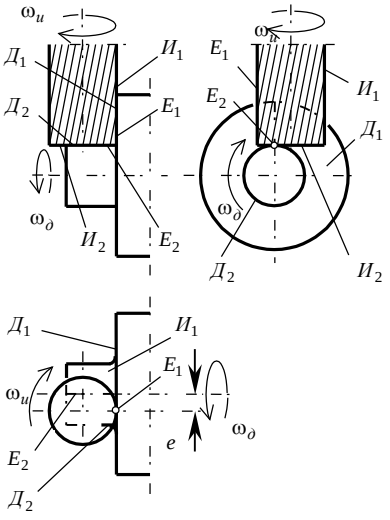


Рис. 7.10. Формообразование поверхности ступенчатого валика концевой фрезой (Родин, П.Р., 1977).

Переходная поверхность ограничена кривыми, которые являются огибающими характеристик E_i и $E_{i\pm1}$ (см. выше, гл. 5, раздел 5.2.3).

В некоторых случаях обработку детали целесообразно производить при кромочном касании исходной инструментальной поверхности с фактически формообразованной на детали поверхностью, т.е. аппроксимировать номинальную поверхность детали переходной поверхностью, которая воспроизводится в процессе обработки. В ряде случаев это расширяет технологические возможности применяемых инструментов, позволяет упростить их конструкцию и обеспечивает обработку инструментом относительно простой конструкции сложных поверхностей деталей.

Таким образом, чтобы правильно обработать деталь, необходимо исключить возможность пересечения между собой смежных участков исходной инструментальной поверхности, для чего должно быть выполнено

Пятое условие: *Поверхность Д детали может быть правильно формообразована, если смежные участки исходной инструментальной поверхности не пересекаются между собой.*

Пятое условие формообразования поверхностей деталей[1] будет выполнено, если система уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u^{(i)} = \mathbf{r}_u^{(i)}(U_u^{(i)}; V_u^{(i)}); \\ \mathbf{r}_u^{(i\pm1)} = \mathbf{r}_u^{(i\pm1)}(U_u^{(i\pm1)}; V_u^{(i\pm1)}), \end{cases}$$

либо не имеет решений, либо имеет решения только на стыке смежных участков $И_i$ и $И_{i\pm1}$ исходной инструментальной поверхности – на их границах.

При многокоординатной обработке, когда инструмент совершает относительно детали сложное движеие, характеристика поверхностей $Д$ и $И$ может изменять свою форму, параметры и положение в процессе обработки. В этом случае необходимо исследовать, соблюдаются ли условия формообразования на протяжении всего процесса обработки детали – во времени.

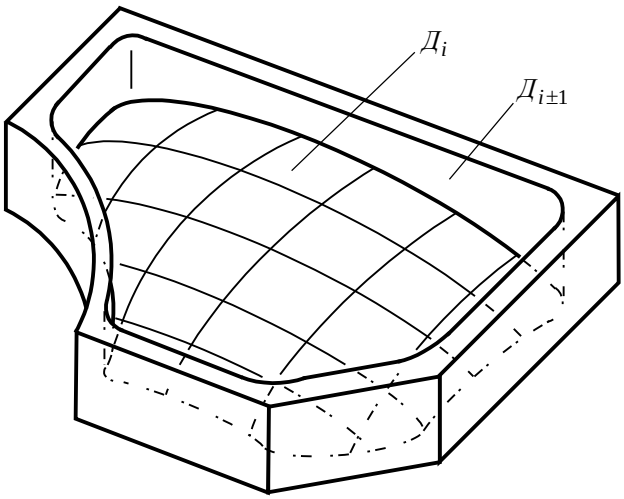


Рис. 7.11. Смежные участки на детали сложной формы.

Выполнение пятого условия формообразования поверхностей деталей в процессе многокоординатной обработки определяется, с одной стороны, формой и параметрами исходной инструментальной поверхности применяемого инструмента, а с другой – параметрами кинематики формообразования. Варьируя параметры кинематики формообразования, можно добиться возможности обработки детали даже не очень “удобным” инструментом и наоборот: даже для “удобного” инструмента возможна неприемлемая кинематика формообразования.

Воспроизводимая в процессе многокоординатной обработки “*гибкая*” кинематика формообразования является источником для расширения представлений о пятом условии формообразования поверхностей деталей, возможности выполнения которого в этом случае становятся существенно шире (рис. 7.11).

7.1.6. Шестое условие формообразования. В процессе обработки детали часто имеет место дискретное формообразование ее поверхности $Д$. Дискретное формообразование наблюдается всегда, когда поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой в точке. Если поверхности $Д$ и $И$ касаются вдоль отрезка кривой, то дискретное формообразование наблюдается при неполном (дискретном) воспроизведении исходной инструментальной поверхности в виде конечного числа режущих кромок, как это имеет место у большинства многолезвийных инструментов.

[1] В системе условий формообразования (Родин П.Р., 1960) это условие известно как третье условие формообразования поверхностей резанием

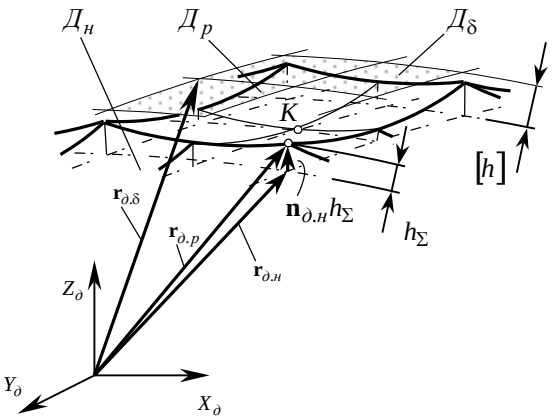


Рис. 7.12. К шестому условию формообразования поверхностей деталей.

В процессе обработки необходимо обеспечить полное или дискретное (с заданной точностью формообразования) совпадение обработанной поверхности детали $Д_p$ с номинальной ее поверхностью $Д_н$, заданной чертежом, когда максимальная результирующая погрешность $h_{\Sigma,\max}$ не превышает допуск $[h]$ на точность формообразования, т.е. необходимо обеспечить выполнение условия $h_{\Sigma,\max} \le [h]$. Следовательно

Шестое условие: *Поверхность Д детали может быть правильно формообразована, если в процессе дискретного формообразования результирующая погрешность не превышает допуск на точность обработки.*

Это очевидное условие давно находится в поле зрения исследователей и инженеров[1].

Обозначим радиус-вектор текущей точки номинальной поверхности детали $Д_н$ через $\mathbf{r}_{\partial.н}$. Реальная поверхность детали $Д_p$, радиус-вектор текущей точки которой $\mathbf{r}_{\partial.p}$, должна располагаться в пределах допуска на точность обработки, т.е. между поверхностью $Д_н$ и поверхностью допуска $Д_\delta$, отстоящей от поверхности $Д_н$ на величину допуска на точность обработки (о расположении поверхности допуска $Д_\delta$ относительно номинальной поверхность детали $Д_н$ см. выше, раздел 1.2.6).

Радиус-вектор $\mathbf{r}_{\partial.\delta}$ текущей точки поверхности допуска $Д_\delta$ равен $\mathbf{r}_{\partial.\delta} = \mathbf{r}_{\partial.н} + \mathbf{n}_{\partial.н}[h]$, где величина допуска на точность формообразования $[h]$ может быть как постоянной величиной ($[h] = Const$), так и изменяться в пределах обрабатываего отсека поверхности детали, т.е. быть функцией ее криволинейных координат: $[h] = [h](U_\partial, V_\partial)$.

Исходя из того, что при дискреном формообразовании должно выполнятся соотношение $h_{\Sigma,\max} \le [h]$, аналитически шестое условие формообразования поверхностей деталей записывается так (см. рис. 7.12):

$$\mathbf{r}_{\partial.p} - \mathbf{r}_{\partial.н} \le \mathbf{n}_{\partial.н}[h].$$

Проверку правильности выполнения шестого условия формообразования поверхностей деталей следует производить только в случаях дискретного их формообразования.

При обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ необходимость выполнения шестого условия ограничивает максимально допустимую величину подачи инструмента вдоль и поперек строк формообразования. Это в свою очередь ограничивает производительность формообразования поверхностей деталей.

7.2. Дополнительные методы анализа локальной интерференции поверхностей деталей и инструментов

Проверка выполнения или нарушения третьего условия формообразования при обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ сопряжена с техническими трудностями, вызванными необходимостью выполнения в большом объеме громоздких вычислений. Для упрощения решения этой задачи разработаны дополнительные подходы: локального характера – для отдельных точек касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности, и глобального – для всей обрабатываемой поверхности детали.

[1] В качестве условия формообразования поверхностей деталей оно предложено Перепелицей Б.А (1981).

Рассмотрим некоторые из дополнительных методов анализа локальной интерференции поверхностей деталей и инструментов, разработанные для решения задач синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей.

7.2.1. K-отображение локальных участков поверхности детали и исходной инструментальной поверхности. Обеспечение возможности выполнения третьего условия формообразования требует углубленного понимания особенностей локальной топологии касающихся одна другой в процессе обработки поверхности детали и исходной инструментальной поверхности. Для анализа локальной интерференции (интерференции *второго рода*) интерес представляет применение K-отображения поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента (Радзевич С.П., 1998).

Для любой гладкой регулярной поверхности $Д(И)$ определены первое $C_{1.\partial(u)}$ и второе $C_{2.\partial(u)}$ главные сечения, в которых измеряется первый $R_{1.\partial(u)}$ и второй $R_{2.\partial(u)}$ главные радиусы ее кривизны, а также соответствующие им главные кривизны[1] $k_{1.\partial(u)} = R_{1.\partial(u)}^{-1}$ и $k_{2.\partial(u)} = R_{2.\partial(u)}^{-1}$ (см. гл. 1).

Точкам плоскости координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$ (рис. 7.13) можно поставить в соответствие точки поверхности $Д(И)$ с соответствующими значениями главных кривизн $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$, Таки путем поверхность $Д(И)$ отображается на плоскость координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$ – полученное отображение является ее K-отображением.

Рассмотрим какое положение в плоскости координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$ занимают различные (см. выше, раздел 1.3, табл. 1.1) локальные участки поверхностей деталей и инструментов.

K-отображения гладких регулярных локальных участков всех типов поверхностей $Д(И)$ (см. рис. 7.13) представляют собой *точки*, по-разному расположенные в *разрешенной области* плоскости координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$ – на граничной прямой $k_{1.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)}$ и ниже нее.

Началу системы координат (см. рис. 7.13) соответствует локальный участок уплощения поверхности $Д(И)$. Для локального участка такого типа тождественно выполняется условие $k_{\partial(u)} \equiv 0$, а его средняя и полная кривизны равны нулю ($\tilde{G}_{\partial(u)} = 0$, $\tilde{M}_{\partial(u)} = 0$).

Разрешенная область разделена на три сектора α_1, α_2 и α_3.

В секторе α_1 находятся K-отображения локальных участков поверхностей $Д(И)$ с положительными средней ($\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$) и полной ($\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$) кривизнами – K-отображения выпуклых эллиптических локальных участков.

В секторе α_2 находятся K-отображения гиперболических (выпукловогнутых) локальных участков поверхности $Д(И)$, полная кривизна которых отрицательна ($\tilde{G}_{\partial(u)} < 0$).

В секторе α_3 находятся K-отображения локальных участков поверхностей $Д(И)$ с отрицательной средней ($\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$) и положительной полной ($\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$) кривизнами – K-отображения вогнутых эллиптических локальных участков.

На граничной прямой $k_{1.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)}$ расположены K-отображения омбилических локальных участков поверхности $Д(И)$. Они находятся в первом квадранте для выпуклых ($\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$, $\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$) и в третьем квадранте для вогнутых ($\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$, $\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$) омбилических локальных участков поверхностей детелей и инструментов (см. рис. 7.13).

На границе секторов α_1 и α_2 (на оси абсцисс $k_{1.\partial(u)}$) расположены K-отображения выпуклых параболических локальных участков поверхностей $Д(И)$, имеющих положительную среднюю ($\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$) и нулевую полную ($\tilde{G}_{\partial(u)} = 0$) кривизну, а на границе секторов α_2 и α_3 (на оси ординат $k_{2.\partial(u)}$) – параболических

---

[1] Помним, что для поверхности $Д(И)$ выполняется соотношение $k_{1.\partial(u)} > k_{2.\partial(u)}$, следовательно, $R_{1.\partial(u)} < R_{2.\partial(u)}$ (см. выше, раздел 1.3.2).

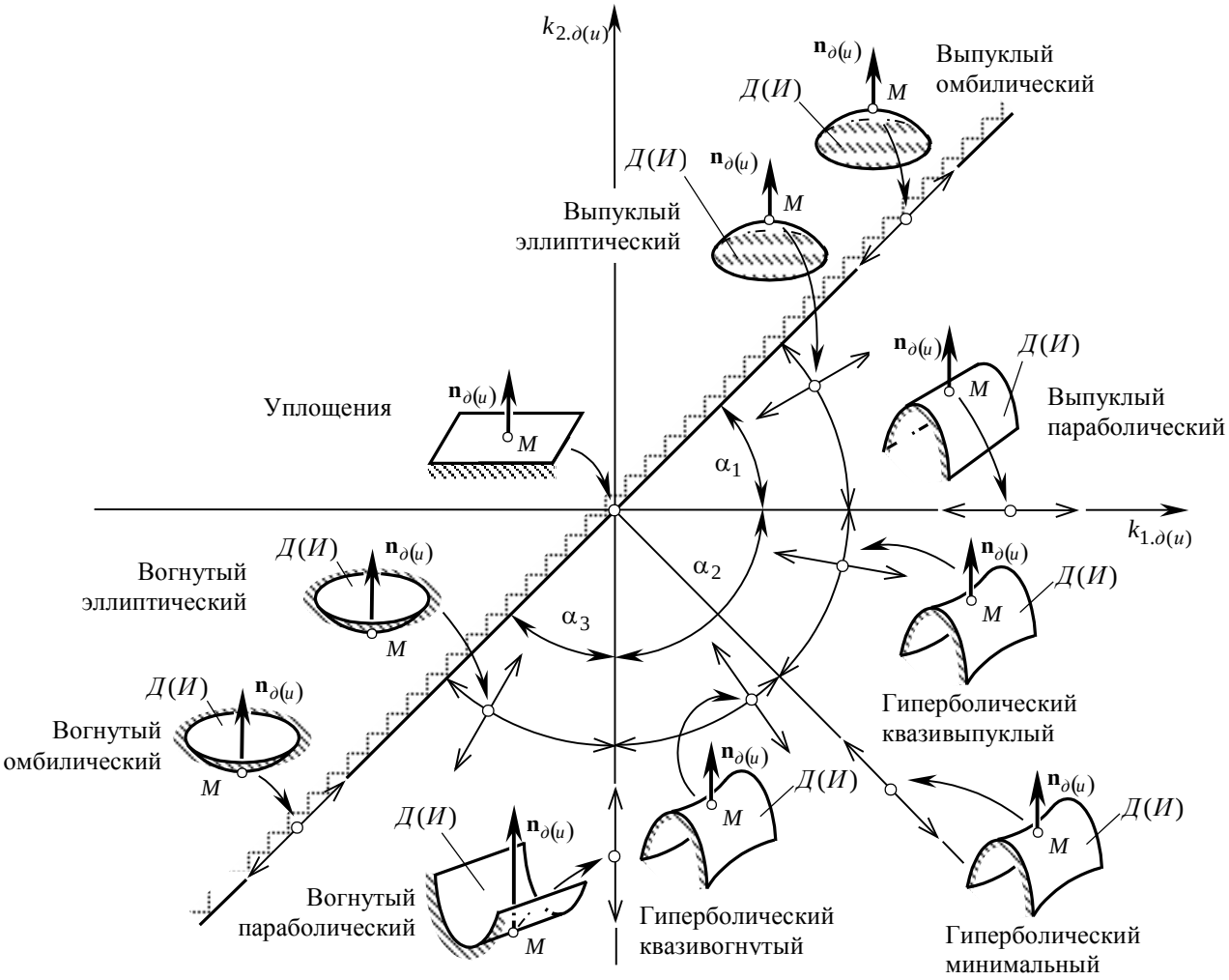


Рис. 7.13. К-отображение локальных участков поверхностей деталей и инструментов.

вогнутых локальных участков с отрицательной средней ($\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$) и также нулевой полной ($\tilde{G}_{\partial(u)} = 0$) кривизной.

Подобно тому, как наряду с эллиптическими локальными участками поверхности $Д(И)$ рассматриваются их частные случаи – омбилические локальные участки, так и наряду с гиперболическими локальными участками рассматриваются частные их случаи: минимальные локальные участки, для которых средняя кривизна рана нулю ($\tilde{M}_{\partial(u)} = 0$), а полная кривизна отрицательна ($\tilde{G}_{\partial(u)} < 0$). K -отображения гиперболических локальных участков такого типа расположены на прямой $k_{2.\partial(u)} = -k_{1.\partial(u)}$. Выше этой прямой в пределах сектора α_2 расположены K -отображения псевдовыпуклых ($\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$, $\tilde{G}_{\partial(u)} < 0$), а ниже – псевдовогнутых ($\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$, $\tilde{G}_{\partial(u)} < 0$) локальных участков поверхностей $Д(И)$. Прямая $k_{2.\partial(u)} = -k_{1.\partial(u)}$ может рассматриваться как дополнительная граничащая прямая, разделяющая сектор α_2 на две части.

Выходящими из K -отображений стрелками показаны (см. рис. 7.13) направления, при перемещении вдоль которых тип гладкого регулярного локального участка поверхности, которому принадлежит соответствующее K -отображение, не изменяется.

Если построить K -отображения локальных участков поверхности $Д$ детали и взятые с противоположными знаками главных кривизн (по отношению к своим исходным) K -отображения локальных участков поверхности $И$ инструмента, то по относительному расположению K-отображений можно судить о возможности правильного формообразования заданного локального участка поверхности детали заданным локальным участком исходной инструментальной поверхности, т.е. возможно ли выполнение третьего условия формообразования для заданной пары локальных участков поверхностей $Д$ и $И$.

7.2.2. Применение коноидов Плюккера. Для анализа локальной интерференции детали и инструмента могут быть использованы коноиды Плюккера[1] (Plucker J., 1865) поверхностей $Д$ и $И$. Коноид Плюккера – это характеристическая поверхность, которая представляет собой геометрическое место векторов нормальной кривизны поверхности $Д(И)$ в текущей точке M . Каждый вектор привизны расположен в соответствующей нормальной секущей плоскости, приложен в центре кривизны соотвествующего сечения поверхности и проходит перпендикулярно нормали к ней. Эта характеристическая поверхность имеет форму прямого коноида или цилиндра (рис. 7.14), а ее уравнение записывается так (Struik, D.J., 1961):

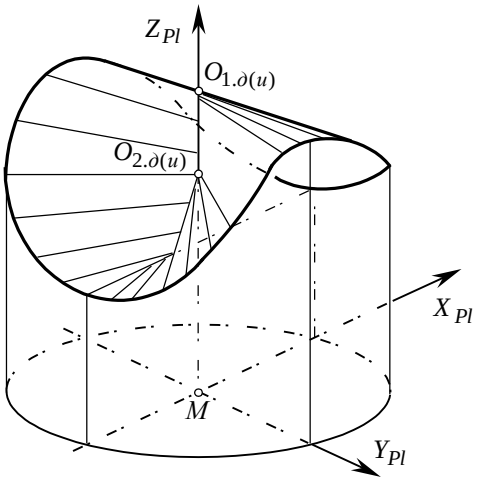


Рис. 7.14. Пример коноида Плюккера для поверхности $Д(И)$ в ее гладкой регулярной точке M .

$$Z_{Pl}\left(X_{Pl}^2 + Y_{Pl}^2\right) = \frac{X_{Pl}^2}{R_{1.\partial(u)}} + \frac{Y_{Pl}^2}{R_{2.\partial(u)}},$$

где X_{Pl} , Y_{Pl} , Z_{Pl} – декартовы координат текущей точки коноида Плюккера.

Если построить коноиды Плюккера локальных участков поверхности $Д$ детали и взятые с противоположными знаками главных кривизн (по отношению к своим исходным) коноиды Плюккера поверхности $И$ инструмента, то по относительному расположению коноидов можно судить о возможности правильного формообразования заданного локального участка поверхности $Д$ заданным локальным участком поверхности $И$, т.е. возможно ли выполнение третьего условия формообразования для заданной пары локальных участков поверхностей детали и инструмента.

Применение K -отображения локальных участков поверхности $Д$ детали и поверхности $И$ инструмента и их коноидов Плюккера удобно для иллюстрации возможности выполнения или нарушения третьего условия формообразования для отдельно взятых локальных участков поверхности детали.

7.3. Глобальный анализ третьего условия формообразования поверхностей деталей

Для анализа глобальной интерференции деталей и инструментов разработано несколько дополнительных методов. Эти методы учитывают локальные свойства поверхностей в дифференциальной окрестности точки их касания, однако позволяют судить о наличии или отсутствии интерференции глобально – для всего формообразуемого отсека поверхности детали.

---

[1] **Плюккер,** Юлиус (***Plucker,*** *Julius*) (16.6.1802–22.5.1868) – немецкий математик и физик. Родился в Эльберфельде. До 1824 учился в университетах Бонна, Гейдельберга, Берлина, Парижа. Преподавал в Боннском (1828–1833), Берлинском (1833–1834) университетах, университете в Галле (1834–1836), с 1836 – профессор Боннского университета. Основные работы относятся к геометрии и физике. Развил современную аналитическую геометрию, создал новые методы проективной геометрии, разработал теорию обобщенных однородных координат (координаты Плюккера). Открыл аналитическое соответствие метрического принципа двойственности, распространил его на трехмерное пространство. Исследовал плоские кривые высших порядков. Указал (1830), что кривую можно рассматривать как совокупность точек или как совокупность касательных, поскольку касательные так же определяют форму кривой, как и точки. Предложил (1834–1839) формулы, устанавливающие порядок и класс алгебраической кривой и ее особенности (формулы Плюккера). В 1864–1868 изучал геометрию в пространстве. Член Парижской АН (с 1867).

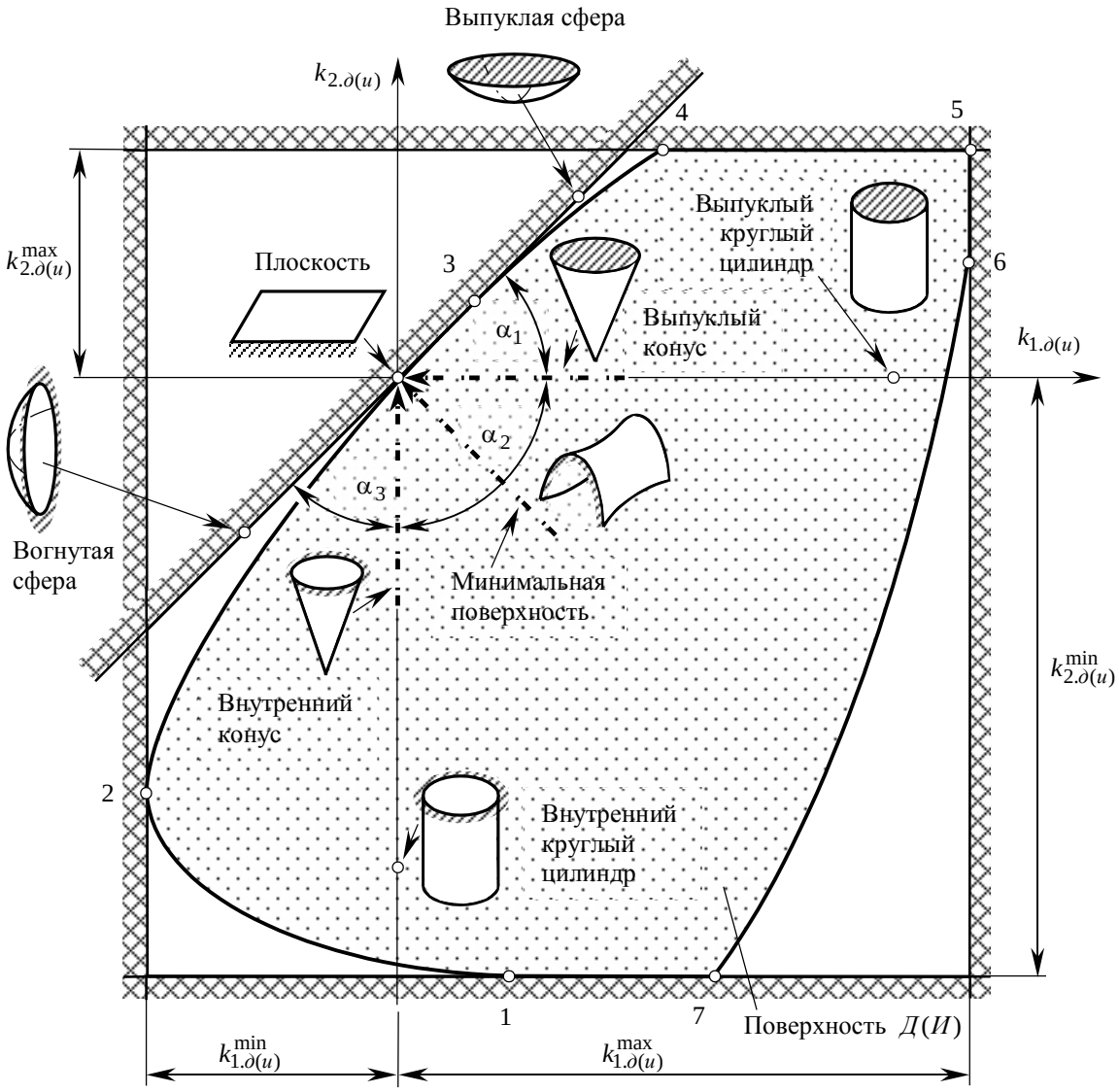


Рис. 7.15. Пример K-отображения отсека поверхности $Д(И)$.

7.3.1. *К*-отображение поверхности детали и исходной инструментальнй поверхности. Выполнение или нарушение третьего условия формообразования глобально – в каждой точке обрабатываемой поверхности, может быть установлено путем использования K-отображения поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

Чтобы построить K-отображение (рис. 7.15), каждой точке поверхности $Д(И)$ или ее отсека ставится в соответствие точка плоскости, координаты которой в системе координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$ равны главным кривизнам поверхности $Д(И)$. Очевидно, что при этом:

1. K-отображение поверхности $Д(И)$ всегда располагается только в разрешенной области: на линии $k_{2.\partial(u)} = k_{1.\partial(u)}$ и ниже нее (см. рис. 7.15).

В разрешенной области выделены три сектора α_1, α_2, α_3, которые являются *разрешенными секторами* – *К* -отображение никакой поверхности $Д(И)$ не выходит за их пределы. Для некоторых поверхностей $Д(И)$ их *К* -отображение может полностью или частично совпадать с границами разрешенных секторов.

2. В пределах разрешенного сектора α_1 располагаются К-отображения выпуклых отсеков поверхностей $Д(И)$ с положительной средней ($\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$) и положительной полной ($\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$) кривизной; в пределах разрешенного сектора α_2 – выпукловогнутых ($\tilde{G}_{\partial.(u)} < 0$, $\tilde{M}_{\partial(u)}$ – любое), а в пределах разрешенного сектора α_3 – вогнутых ($\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$, $\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$) поверхностей $Д(И)$. На границах разрешенных секторов α_1, α_2, α_3 располагаются К-отображения отсеков поверхностей $Д(И)$ с равной нулю полной кривизной ($\tilde{G}_{\partial(u)} = 0$): – на оси абсцисс располагаются К-отображения выпуклых ($\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$), а на оси ординат – вогнутых ($\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$) их отсеков.

3. Зависимости для расчета величин главных кривизн поверхности $Д(И)$ могут быть представлены в виде:

(7.22) $$k_{1.\partial(u)} = k_{1.\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)});$$

(7.23) $$k_{2.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)}).$$

Известными методами устанавливаются экстремальные значения $k_{1.\partial(u)}^{\min}$ и $k_{2.\partial(u)}^{\max}$ главных кривизн $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ из области определения параметров $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$.

В плоскости координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$ строятся прямые линии

(7.24) $$k_{1.\partial(u)} = k_{1.\partial(u)}^{\max}; \qquad k_{1.\partial(u)} = k_{1.\partial(u)}^{\min};$$

(7.25) $$k_{2.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)}^{\max}; \qquad k_{2.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)}^{\min}.$$

Это две пары параллельных прямых, одна из которых параллельна оси абсцисс $k_{1.\partial(u)}$, а другая – параллельна оси ординат $k_{2.\partial(u)}$ системы координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$.

Прямые (24) и (25) образуют *разрешенный прямоугольник*, в общем случае произвольным образом расположенный в системе координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$. В некоторых случаях разрешенный прямоугольник может быть открыт с одной, с двух, с трех и даже с четырех сторон.

К-отображение любой поверхности $Д(И)$ не выходит за пределы разрешенного прямоугольника. В то же время границы К-отображения касаются каждой из сторон своего разрешенного прямоугольника не менее, чем в одной точке или удаляются в бесконечность, если с соответствующей стороны разрешенный прямоугольник открыт. Границы К-отображения могут частично или полностью совпадать с одной или более его сторонами или целиком со всем разрешенным прямоугольником (при обязательном выполнении остальных ограничений).

4. Чтобы построить собственно К-отображение заданной поверхности $Д(И)$, можно для достаточно большого массива достаточно плотно расположенных на поверхности $Д(И)$ точек вычислить значения ее главных кривизн и каждой точке поверхности $Д(И)$ поставить в соответствие точку в плоскости координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$. Массив таким образом построенных точек определит К-отображение поверхности $Д(И)$.

Этот подход требует применения эффективных алгоритмов и программного обеспечения для многократного решения уравнений вида (22) и (23), а также для надежного отбора из найденного массива точек тех из них, которые принадлежат контуру К-отображения, т.е. удовлетворяют уравнению $k_{2.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)}(k_{1.\partial(u)})$.

Уравнение $k_{2.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)}(k_{1.\partial(u)})$ контура К-отображения поверхности $Д(И)$ может быть получено аналитически.

Задача сводится к тому, как в конкретных условиях проще построить К-отображение:

- путем расчета величин главных кривизн поверхности $Д(И)$ для массива дискретно заданных точек на ней или
- путем вывода уравнения контура К-отображения и построения этой граничной кривой по ее уравнению.

5. В общем случае гладкая регулярная поверхность $Д(И)$ сложной формы имеет выпуклые, вогнутые и выпукловогнутые участки. Поэтому К-отображение такой поверхности располагается в двух или в трех разрешенных сектора α_1, α_2, α_3 одновременно. Движению по поверхности $Д(И)$ от одной точки к другой соответствует перемещение из одной точки ее К-отображения в другую. Переход из одного разрешенного сектора К-отображения в другой возможен при пересечении одной из осей координат (точки которых соответствуют *К*-отображению параболических локальных участков поверхности $Д(И)$) либо через начало системы координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$ (совпадающая с ним точка соответствует К-отображению точки уплощения, являющейся вырожденной параболической точкой). Это хорошо согласуется с доказанным в дифференциальной геометрии поверхностей положением (Норден А.П., 1948; doCarmo M., 1976; Struik D.J., 1961): если некоторая поверхность содержит выпуклые и вогнутые участки, на ней всегда существуют параболические кривые.

6. К-отображение может быть "многослойным", что имеет место, когда на поверхности $Д(И)$ имеется два и более участка с одинаковыми значениями главных кривизн.

В качестве примера на рис. 7.15 показано К-отображение отсека некоторой поверхности $Д(И)$, которое удовлетворяет перечисленным требованиям – оно:

- расположено в разрешенной области;
- не выходит за пределы разрешенного прямоугольника;
- находится в пределах разрешенных секторов α_1, α_2, α_3;
- касается всех четырех сторон разрешенного прямоугольника в точках 1, 2, 3, 4, а также имеет общие с его сторонами участки 4-5, 5-6 и 1-7.

К-отображение поверхности $Д(И)$, представляющее собой в общем случае закрытый или открытый *участок плоскости* координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$, в частных случаях выпождается в линию или в точку. Так, например, минимальная поверхность имеет переменную по величине положительную первую главную кривизну ($k_{1.\partial(u)} = Var > 0$) и переменную по величине отрицательную вторую главную кривизну ($k_{2.\partial(u)} = Var < 0$). В каждой точке минимальной поверхности выполняется соотношение: $k_{1.\partial(u)} = -k_{2.\partial(u)}$. Поэтому К-отображение минимальной поверхности $Д(И)$ совпадает с линией $k_{2.\partial(u)} = -k_{1.\partial(u)}$, исключая точку, совпадающую с началом координат (см. рис. 7.15). Началу координат соответствует К-отображение минимальной поверхности, вырожденной в плоскость, когда все ее нормальные кривизны тождественно равны нулю ($k_{\partial(u)} \equiv 0$).

Поверхность выпуклого конуса имеет переменную по величине положительную первую главную кривизну $k_{1.\partial(u)} = Var > 0$. Вторая главная кривизна постоянна и равна нулю ($k_{2.\partial(u)} = 0$). Поверхность вогнутого конуса имеет постоянную первую главную кривизну ($k_{1.\partial(u)} = 0$). Вторая главная кривизна переменна по величине и отрицательна ($k_{2.\partial(u)} = Var < 0$). Поэтому К-отображения конических поверхностей $Д(И)$ представляют собой линию, в первом случае совпадающую с осью абсцисс $k_{1.\partial(u)}$, а во втором – с осью ординат $k_{2.\partial(u)}$ системы координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$ (см. рис. 7.15).

Первая $k_{1.\partial(u)}$ и вторая $k_{2.\partial(u)}$ главные кривизны поверхности, величины которых у конуса отличны от нуля, принимают нулевое значение только для точек поверхности "конуса", бесконечно удаленных от его вершины, т.е. для тех участков конической поверхности, которые вырождаются в плоскость. На рис. 7.15 это показано стрелками.

Для плоскости выполняется соотношение $k_{\partial(u)} \equiv 0$. Поэтому К-отображением всей плоскости будет точка, совпадающая с началом координат (см. рис. 7.15). Как и выше (см. раздел 7.2.1), такого типа отображение будет К-отображением, но не отдельного локального участка плоскости, а плоскости $Д(И)$ целиком.

К-отображения конических поверхностей можно рассматривать как вырожденные случаи К-отображения минимальной поверхности, когда одна из главных кривизн постоянна по величине и равна нулю.

Для выпуклого и вогнутого круглых цилиндров справедливы соотношения $k_{1.\partial(u)} = Const > 0$, $k_{2.\partial(u)} = 0$ и $k_{1.\partial(u)} = 0$, $k_{2.\partial(u)} = Const < 0$ соответственно. К-отображениями выпуклых и вогнутых цилиндров разного радиуса представляют собой точки, расположенные на оси абсцисс и на оси ординат (см. рис. 7.15). При перемещении точки вдоль оси абсцисс она всегда соответствует К-отображению выпуклого, а при перемещении вдоль оси ординат – К-отображению вогнутого цилиндра некоторого радиуса.

К-отображения цилиндрических поверхностей можно рассматривать как вырожденные случаи К-отображения конической поверхности, когда обе главные кривизны постоянны по величине и одна из них равна нулю.

Соотношение $k_{1.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)}$ выполняется для сферы, причем для выпуклой сферы $k_{1.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)} > 0$, а для вогнутой – $k_{1.\partial(u)} = k_{2.\partial(u)} < 0$. Поэтому К-отображения выпуклых и вогнутых сфер разного радиуса (или их участков) являются *точками*, расположенными на линии $k_{2.\partial(u)} = k_{1.\partial(u)}$ (см. рис. 7.15). При перемещении точки в любом направлении вдоль прямой $k_{2.\partial(u)} = k_{1.\partial(u)}$, она всегда соответствует К-отображению сферы $Д(И)$ некоторого радиуса.

В отличие от К-отображений гладких регулярных локальных участков поверхностей $Д(И)$, представляющих собой только различным образом расположенные в плоскости координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$ *точки* (см. рис. 7.13), К-отображение поверхности $Д(И)$ вцелом (см. рис. 7.15) представляет собой закрытый или открытый *участок плоскости* координат $k_{1.\partial(u)}k_{2.\partial(u)}$, только в частных случаях вырождающийся в линии или в точки. Этим К-отображение поверхности $Д(И)$ принципиально отличается от К-отображения ее локальных участков.

Точки контура К-отображения отсека поверхности $Д(И)$ в общем случае не соответствуют точкам границы самого отсека. Это следствие того, что экстремальные значения главных кривизн отсека поверхности $Д(И)$ могут иметь место в точках, не совпадающих с его границами. Следовательно, между точками контура К-отображения и между точками границы самого отсека поверхности $Д(И)$ взаимно однозначного соответствия в общем случае нет.

В некоторых случаях К-отображение всей поверхности и К-отображение некоторого ее отсека совпадают один с другим, как это имеет место, например:

- для поверхности сферы целиком и для произвольного ее отсека;
- для круглого цилиндра целиком и для произвольного “обруча” на нем;
- для эллипсоида общего вида целиком и для 1/8 части его поверхности (отсеченной по “экваториальным” плоскостями) и др.

К-отображение поверхности $Д(И)$ можно использовать для анализа выполнения третьего условия формообразования, в первую очередь при обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ. Для этого строится К-отображение обрабатываемого участка поверхности $Д$ детали. Размеры и положение разрешенного прямоугольника указывают на предельные величины главных кривизн поверхности $Д$.

Чтобы определить области, в которых расположение К-отображения поверхности $И$ инструмента допускается третьим условием формообразования поверхностей деталей, воспользуемся тем, что нормальное сечение локального участка поверхности $Д(И)$ может быть выпуклым, вогнутым или прямолинейным (см. выше, табл. 7.1). При касании двух выпуклых или выпуклого и прямолинейгого локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ третье условие формообразования выполняется всегда. При касании двух вогнутых или вогнутого и прямолинейного локальных участков это условие не может быть выполнено никогда. В рассматриваемом в данном разделе аспекте интерес представляют только случаи касания выпуклого локального участка поверхности с вогнутым, один из которых принадлежит детали, а другой – инструменту.

Предельным случаем, когда третье условие формообразования выполняется, является случай, когда степень конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали максимальна, т.е. когда радиусы кривизны этих поверхностей в текущем плоском нормальном сечении одинаковы по величине и противоположны по знаку. Поэтому для построения области, в которой допустимо расположение К-отображения ис-

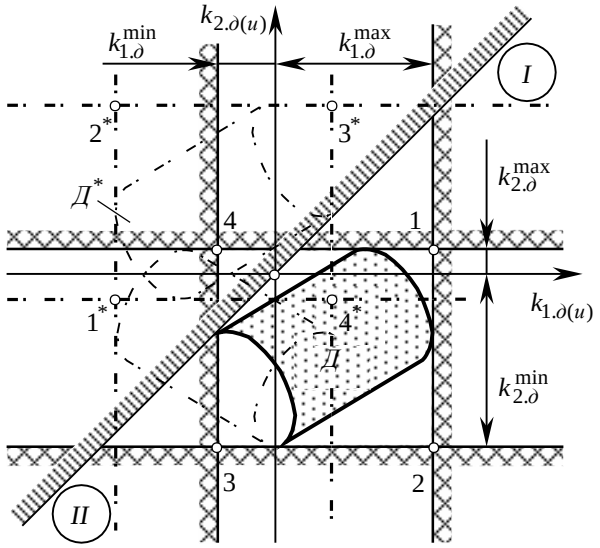


Рис. 7.16. Относительное положение K-отображений поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

ходной инструментальной поверхности, отобразим зеркально K-отображение поверхности детали (рис. 7.16) относительно оси ординат $k_{2.\partial(u)}$, а затем – относительно оси абсцисс $k_{1.\partial(u)}$ системы координат $k_{1.\partial(u)}\, k_{2.\partial(u)}$ (или в обратной последовательности). Получим K-отображение $Д^*$, разрешенный прямоугольник $1^*2^*3^*4^*$ которого расположен по отношению к разрешенному прямоугольнику 1234 аналогично расположению K-отображения $Д^*$ по отношению к исходному K-отображению поверхности детали. Очевидно, что разрешенный прямоугольник $1^*2^*3^*4^*$ также может быть получен путем двухкратного зеркального отбражения относительно осей координат $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ исходного разрешенного прямоугольника 1234.

Как и для K-отображения поверхности детали, искомая область расположения K-отображения исходной инструментальной поверхности находится в разрешенной области – на линии $k_{2.\partial(u)} = k_{1.\partial(u)}$ и ниже нее.

Если K-отображение исходной инструментальной поверхности целиком или частично располагается в области I, третье условие формообразования может быть выполнено для всего отсека обрабатываемой поверхности детали. Если оно целиком располагается в области II, третье условие формообразования не может быть выполнено ни в одной точке поверхности $Д$. Чтобы ответить на вопрос о выполнении третьего условия формообразования в остальных областях, следует сопоставить главные кривизны поверхности детали со значениями главных кривизн исходной инструментальной поверхности, допускаемые ее K-отображением.

Получаемая в результате сопоставления относительного положения K-отображений поверхности детали и инструмента информация является необходимой, но не достаточной для полного исключения возможности интерференции поверхностей $Д$ и $И$.

7.3.2. Фокальные поверхности деталей и инструментов. Глобальная (в масштабах всей обрабатываемой поверхности детали) проверка и наглядная графическая интерпретация третьего условия формообразования поверхностей деталей может быть выполнена с использованием фокальных поверхностей.

Чтобы построить фокальные поверхности, воспользуемся тем свойством гладкого регулярного участка поверхности $Д(И)$, в соответствие с которым через каждую его точку проходят по два главных сечения: $C_{1.\partial(u)}$ и $C_{2.\partial(u)}$, в которых измеряются соответствующие главные радиусы кривизны $R_{1.\partial(u)}$ и $R_{2.\partial(u)}$. На прямой линии, проходящей через текущую точку M в направлении орта нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ к поверхности $Д(И)$ всегда можно отметить две точки $O_{1.\partial(u)}$ и $O_{2.\partial(u)}$, соответствующие центрам кривизны (фокальным точкам) этой поверхности соответственно в первом $C_{1.\partial(u)}$ и во втором $C_{2.\partial(u)}$ главных сечениях (рис 7.17).

Совокупность фокальных точек $O_{1.\partial(u)}$ и $O_{2.\partial(u)}$, построенных для всех точек поверхности $Д(И)$, образует пару фокальных поверхностей. Фокальных поверхностей в общем случае две, поскольку в каждой точке гладкой регулярной поверхности существует только два главных радиуса ее кривизны – $R_{1.\partial(u)}$ и $R_{2.\partial(u)}$ соответственно. В вырожденных случаях две фокальные поверхности сливаются в одну общую фокальную поверхность и др.

При выполнении определенных условий прямые линии, на которых располагаются фокальные точки, могут образовывать огибающие – пространственные кривые. Такие пространственны кривые могут служить для определения фокальных поверхностей, поскольку они расположены на этих поверхностях.

На поверхности $Д(И)$ рассмотрим некоторую линию S (рис. 7.18). Направления нормалей к поверхности вдоль линии S образуют семейство прямых с одним параметром, определяющим положение точки на этой линии. В общем случае семейство нормалей к $Д(И)$ вдоль S огибающей не имеет (Смирнов В.И., 1958) – такая огибающая существует лишь в частных случаях.

Если огибающая кривая S_1 нормалей к поверхности вдоль кривой S существует, то (рис. 7.18):

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + a\,\mathbf{n}_{\partial(u)}, \tag{7.26}$$

где $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор текущей точки кривой S_1;

$\mathbf{r}$ – радиус-вектор текущей точки кривой S;

a – заключенная между кривыми S и S_1 длина отрезка прямой, направленной вдоль нормали к поверхности $Д(И)$.

Кривую S_1 рассматриваем как огибающую нормалей. Поэтому вектор $d\mathbf{r}_1$, направленный по касательной к ней, параллелен вектору нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$. Следовательно, $d\mathbf{r}_1 = b\mathbf{n}_{\partial(u)}$, где b – некоторый скаляр. С учетом этого из (26) получим:

$$b\mathbf{n}_{\partial(u)} = d\mathbf{r} + ad\mathbf{n}_{\partial(u)} + \mathbf{n}_{\partial(u)}da\,,$$

то есть

$$d\mathbf{r} + ad\mathbf{n}_{\partial(u)} = c\mathbf{n}_{\partial(u)}, \tag{7.27}$$

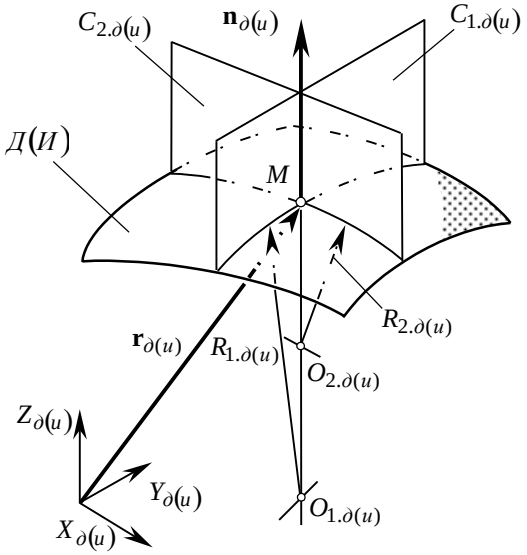


Рис. 7.17. Фокальные точки гладкого регулярного локального участка поверхности $Д(И)$.

где c – некоторый скаляр.

Можно показать, что $c = 0$. Для этого обе части уравнения (27) умножим скалярно на $\mathbf{n}_{\partial(u)}$:

$$\mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot d\mathbf{r} + a\mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot d\mathbf{n}_{\partial(u)} = c\,.$$

Вектор $d\mathbf{r}$ касателен к кривой S, следовательно, он перпендикулярен $\mathbf{n}_{\partial(u)}$. Поэтому $\mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Из $\mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = 1$ следует, что $\mathbf{n}_{\partial(u)} \cdot d\mathbf{n}_{\partial(u)} = 0$. В результате предыдущее равенство приводит к тому, что $c = 0$, а уравнение (27) может быть переписано в виде:

$$d\mathbf{r} + ad\mathbf{n}_{\partial(u)} = 0\,.$$

Это формула Родрига[1].

Кривая S_1 может рассматриваться как пространственная эволюта[2] кривой S. Таким образом, фокальные поверхности можно представить в виде двух семейств эволют линий кривизны поверхности $Д(И)$.

---

[1] **Родриг (Родригес)** Бенджамен Олинде (***Rodrigues,*** *Benjamin Olinde*) (16.10.1794-26.12.1851) – французский математик и экономист, последователь социалиста-утописта А.К.Сен-Симона. Родился в Бордо. Окончил Высшую нормальную школу в Париже. Работал в Политехнической школе репетитором, затем – директор ссудного банка. Основные работы относятся к механике, геометрии и теории чисел. В теории поверхностей дал (1815) новое выражение для полиномов Лежандра (формула Родригеса) и ввел сферическое представление. Предложил (1814) параметры, названные его именем. В механике изучал принцип наименьшего действия, сочетал этот принцип с законом живых сил и методом неопределенных множителей Лагранжа для получения уравнений движения. Решил (1840) фундаментальную задачу сложения двух вращений с растяжением.

[2] *Эволюта* – это геометрическое место центров кривизны плоской кривой, являющейся эвольвентой по отношению к эволюте. В рассматриваемом случае это свойство эвольвенты и эволюты распространяется на пространственные кривые и на поверхности, т.е. можно

Приведенный результат может быть получен другим путем.

Чтобы линия на поверхности была линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы нормали к поверхности вдоль этой линии образовывали разворачивающуюся поверхность.

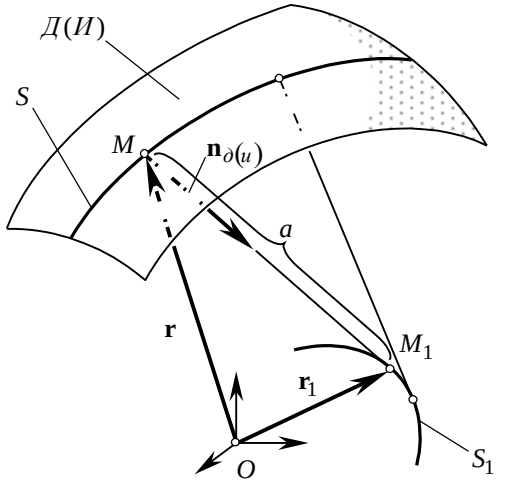


Рис. 7.18. Фокальная поверхность как огибающая нормалей к поверхности $Д(И)$.

Пусть кривая на поверхности задана в натуральной форме уравнением вида $S = S(l)$. Тогда:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dl}\cdot\mathbf{n}_{\partial(u)} = 0\,.$$

Положение текущей точки на линейчатой поверхности, образованной нормалями к исходной поверхности $Д(И)$, определяется радиус-вектором:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}(l) + a\mathbf{n}_{\partial(u)}(l).$$

Отсюда следуют соотношения:

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial l} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial l} + a\frac{\partial\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial l}; \qquad \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial a} = \mathbf{n}_{\partial(u)};$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{Q}}{\partial l\,\partial a} = \frac{\partial\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial l}; \qquad \frac{\partial^2\mathbf{Q}}{\partial a^2} = 0\,.$$

Из условия разворачиваемости поверхности $Д(И)$ на плоскость можно записать, что:

$$\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial l}\cdot\mathbf{n}_{\partial(u)}\cdot\frac{\partial\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial l} = 0\,. \tag{7.28}$$

Вектор нормали $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ перпендикулярен вектору $\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial l}$ и вектору $\frac{\partial\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial l}$ одновременно. Поэтому условие разворачиваемости (28) выполняется, когда вектор $\frac{\partial\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial l}$ или вектор $\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial l}$ коллинеарен вектору $\mathbf{n}_{\partial(u)}$.

В первом случае нормали к поверхности $Д(И)$ образуют цилиндр или плоскость – очевидно, что это разворачивающиеся поверхности.

Во втором случае справедливо соотношение:

$$d\mathbf{n}_{\partial(u)} = \lambda d\mathbf{S} \qquad (\text{вдоль кривой}), \tag{7.29}$$

где λ – некоторый скаляр.

Уравнению (29) эквивалентно векторное уравнение:

$$\frac{\partial\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}dU_{\partial(u)} + \frac{\partial\mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}dV_{\partial(u)} = \lambda\left(\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial U_{\partial(u)}}dU_{\partial(u)} + \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial V_{\partial(u)}}dV_{\partial(u)}\right),$$

из которого следует система двух скалярных уравнений

вести речь об эволюте пространственной кривой и об "*эволютной поверхности*", по отношению к которой исходная поверхность $Д(И)$ является "*эвольвентной поверхностью*".

$$\begin{cases} (L_{\partial(u)} + \lambda E_{\partial(u)})dU_{\partial(u)} + (M_{\partial(u)} + \lambda F_{\partial(u)})dV_{\partial(u)} = 0; \\ (M_{\partial(u)} + \lambda F_{\partial(u)})dU_{\partial(u)} + (N_{\partial(u)} + \lambda G_{\partial(u)})dV_{\partial(u)} = 0. \end{cases} \tag{7.30}$$

Приведенной форме записи уравнений (30) эквивалентна другая форма их представления:

$$\begin{cases} (L_{\partial(u)} - k_{\partial(u)}E_{\partial(u)})dU_{\partial(u)} + (M_{\partial(u)} - k_{\partial(u)}F_{\partial(u)})dV_{\partial(u)} = 0; \\ (M_{\partial(u)} - k_{\partial(u)}F_{\partial(u)})dU_{\partial(u)} + (N_{\partial(u)} - k_{\partial(\ )}G_{\partial(u)})dV_{\partial(u)} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что при $k_{\partial(u)} = -\lambda$ эти уравнения эквивалентны (30). Поэтому рассматриваемые кривые линии являются линиями кривизны на поверхности $Д(И)$. Более того, согласно (29), можно записать еще одно уравнение, характеризующее эти линии:

$$d\mathbf{n}_{\partial(u)} + k_{\partial(u)}d\mathbf{Q} = 0,$$

где $k_{\partial(u)}$ – нормальная кривизна поверхности в направлении $d\mathbf{Q}$ линии кривизны.

Это снова формула Родрига.

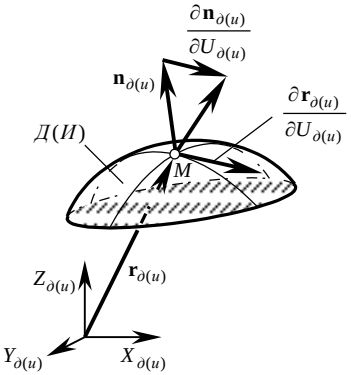


Рис. 7.19. К теореме Родрига.

Теорема 7.1. Если гладкая регулярная поверхность $Д(И)$, заданная уравнением вида $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$, параметризована так, что ее параметрические кривые являются линиями кривизны, то в текущей точке $M(U^{(M)}_{\partial(u)}, V^{(M)}_{\partial(u)})$ выполняются соотношения (рис. 7.19):

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}(U^{(M)}_{\partial(u)}, V^{(M)}_{\partial(u)}) = -k_{1.\partial(u)}\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}(U^{(M)}_{\partial(u)}, V^{(M)}_{\partial(u)});$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}(U^{(M)}_{\partial(u)}, V^{(M)}_{\partial(u)}) = -k_{2.\partial(u)}\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}(U^{(M)}_{\partial(u)}, V^{(M)}_{\partial(u)}),$$

где $k_{1.\partial(u)}$ и $k_{2.\partial(u)}$ – главные кривизны поверхности $Д(И)$ в точке $M(U^{(M)}_{\partial(u)}, V^{(M)}_{\partial(u)})$.

Это теорема Родрига (1815).

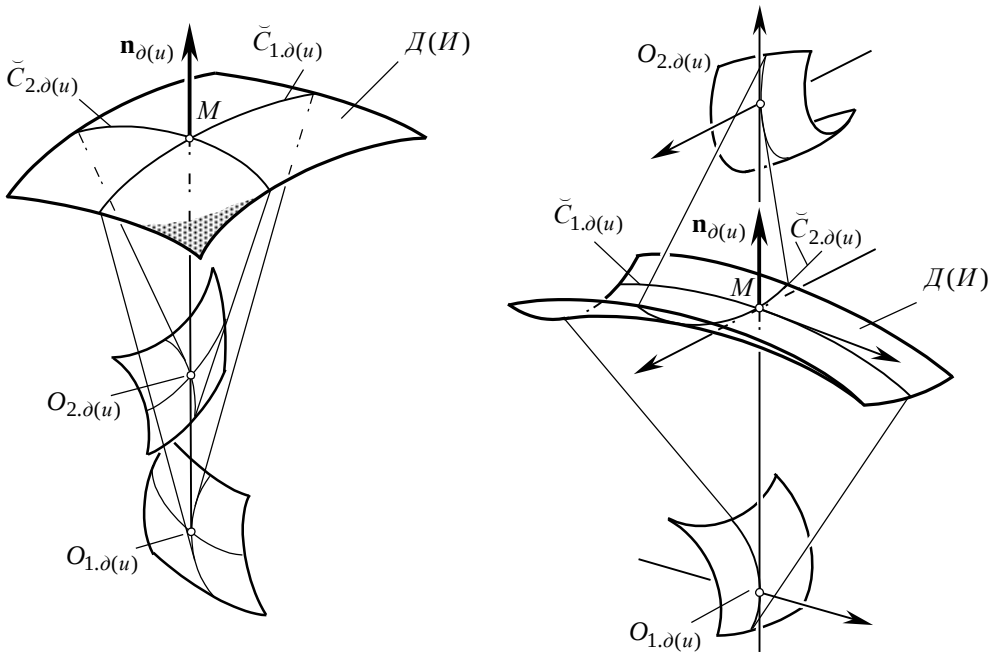
При $\lambda = -k_{\partial(u)} = 0$ уравнение (29) описывает круглый цилиндр или плоскость, а при $\lambda = -k_{\partial(u)} = Const$ – круглый конус. В этом можно убедиться, продифференцировав $\mathbf{Q} = \mathbf{S}(l) + a\mathbf{n}_{\partial(u)}(l)$:

$$d\mathbf{Q} = d\mathbf{S} + a(-k_{\partial(u)}\,d\mathbf{S}) + \mathbf{n}_{\partial(u)}da = (1 - k_{\partial(u)}a)d\mathbf{S} + \mathbf{n}_{\partial(u)}da,$$

что равно нулю при $a = k^{-1}$, $da = 0$ и только в этом случае.

Линии кривизны гладкого регулярного участка поверхности $Д(И)$ в общем случае являются пространственными кривыми. Во всех случаях нормали к поверхности вдоль линии ее кривизны образуют разворачивающуюся поверхность касательных (помним, что по определению разворачивающаяся поверхность касательных – это поверхность, образованная совокупностью касательных прямых к пространственной кривой; в этом случае пространственная кривая служит ребром регрессии разворачивающейся поверхности касательных).

Каждая нормаль к поверхности $Д(И)$ касательна к двум ребрам регрессии. Точки касания расположены на расстоянии $R_{1.\partial(u)}$ и $R_{2.\partial(u)}$ от текущей точки M – они являются фокальными точками поверхности $Д(И)$. Два семейства линий кривизны на поверхности образуют ортогональную сеть и поэтому определяют две разворачивающиеся поверхности касательных, которые пересекают одна другую под прямым углом вдоль нормали к поверхности $Д(И)$ (Struik D.J., 1961).



1. 2.

Рис. 7.20. Фокальные поверхности выпуклого ($\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$, $\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$) и выпукловогнутого $\tilde{G}_{\partial(u)} < 0$, гладких регулярных локальных участков поверхности $Д(И)$.

Фокальные поверхности представляют собой геометрическое место центров главных кривизн гладкой регулярной поверхности $Д(И)$. Простым примером могут служить меридианы и параллели поверхности вращения, которые являются линиями ее кривизны: вдоль меридианов нормали к поверхности вращения образуют плоскости, а вдоль параллелей – круглые конусы. Для поверхности вращения указанные плоскости и круглые конусы взаимно перпендикулярны.

Одна из фокальных поверхностей поверхности вращения вырождается в прямую линию, совпадающую с осью поверхности вращения. Сфера является единственной поверхностью, обе фокальные поверхности которой вырождаются в точку, совпадающу с центром сферы. Фокальную поверхность плоскости можно представить как параллельную ей плоскость, удаленную в бесконечность. Циклиды Дюпена являются единственным видом поверхностей, обе фокальные поверхности которых вырождаются в кривые линии.

Примеры фокальных поверхностей для выпуклого и выпукловогнутого участков гладких поверхностей $Д(И)$ показаны на рис. 7.20, где $\breve{C}_{1.\partial(u)}$ и $\breve{C}_{2.\partial(u)}$ есть проходящие через точку M линии кривизны, $O_{1.\partial(u)}$ и $O_{2.\partial(u)}$ – точки соответствующих фокальных поверхностей. Ребра возврата разворачивающейся поверхности касательных принадлежат фокальным поверхностям (doCarmo M., 1976).

Если исходить из того, что $\mathbf{r}_{\partial(u)}$ – радиус-вектор текущей точки M на поверхности $Д(И)$, $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ – орт нормали к поверхности в ее точке M, а $R_{1.\partial(u)}$ и $R_{2.\partial(u)}$ – соответствующие главные радиусы кривизны по-

верхности $Д(И)$ в точке M, радиус-вектор $\mathbf{f}_{1,2.\partial(u)}$ текущей точки первой и второй фокальных поверхностей для детали и для инструмента будет равен:

$$\mathbf{f}_{1,2.\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)} + R_{1,2.\partial(u)} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)} + R_{1,2.\partial(u)} \cdot \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right|} = \mathbf{r}_{\partial(u)} + R_{1,2.\partial(u)} \cdot \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}}.$$

Поверхность $Д(И)$ пересекается фокальными поверхностями в ее параболических точках – вдоль линий, в которых гауссова кривизна этой поверхности равна нулю ($\widetilde{G}_{\partial(u)} \equiv 0$).

Фокальные поверхности можно использовать для глобального анализа выполнения третьего условия формообразования поверностей деталей. С этой целью следует построить фокальные поверхности детали:

$$\mathbf{f}_{1.\partial} = \mathbf{r}_{\partial} + R_{1.\partial} \cdot \mathbf{n}_{\partial};$$

$$\mathbf{f}_{2.\partial} = \mathbf{r}_{\partial} + R_{2.\partial} \cdot \mathbf{n}_{\partial}.$$

Аналогичные фокальные поверхности

$$\mathbf{f}_{1.u} = \mathbf{r}_{u} + R_{1.u} \cdot \mathbf{n}_{u};$$

$$\mathbf{f}_{2.u} = \mathbf{r}_{u} + R_{12u} \cdot \mathbf{n}_{u}$$

строятся для исходной инструментальной поверхности.

Для выполнения третьего условия формообразования поверхностей деталей (13) форма, параметры и положение фокальных поверхностей инструмента $\mathbf{f}_{1.u}$ и $\mathbf{f}_{2.u}$ должны быть согласованы с формой, параметрами и положением фокальных поверхностей детали $\mathbf{f}_{1.\partial}$ и $\mathbf{f}_{2.\partial}$.

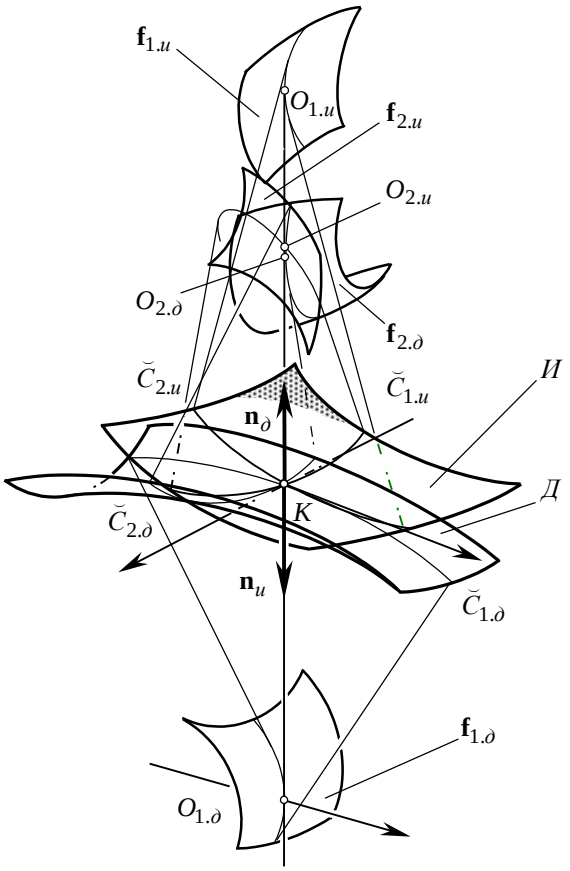


Рис. 7.21 Пример относительного расположения фокальных поверхностей детали и инструструмента.

Относительное расположение фокальных поверхностей $\mathbf{f}_{1.\partial}$, $\mathbf{f}_{2.\partial}$, $\mathbf{f}_{1.u}$ и $\mathbf{f}_{2.u}$ для случая формообразования выпукловогнутого локального участка поверхности $Д$ детали $(\widetilde{G}_{\partial} < 0)$ выпуклым локальным участком исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента ($\widetilde{G}_{u} > 0$, $\widetilde{M}_{u} > 0$) показано на рис. 7.21.

Для вогнутого участка поверхности детали точка фокальной поверхности инструмента, соответствующая точке поверхности $И$, которой она касается поверхности $Д$ детали, должна находиться в пределах отрезка проходящей через контактную нормаль прямой, заключенного между поверхностью детали и ее фокальной поверхностью, включая соотвествующую точку поверхности детали и точку ее фокальной поверхности. Аналогично определяется допустимое положение соответствующей точки фокальной поверхности инструмента в других случаях. Совокупность таким образом определенных точек образует две *производные фокальные поверхности инструмента*, радиус-вектор текущей точки которых равен:

$$\hat{\mathbf{f}}_{1.u} = \mathbf{r}_{\partial} + R_{1.u} \cdot \mathbf{n}_{\partial};$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{2.u} = \mathbf{r}_{\partial} + R_{12u} \cdot \mathbf{n}_{\partial} .$$

При выполнении третьего условия формообразования поверхностей деталей каждая из производных фокальных поверхностей располагается между выпуклой поверхностью детали и соответствующей ее фокальной поверхностью, в том числе может касаться этих поверхностей. Аналогично определяется положение производных фокальных поверхностей для вогнутого участка поверхности детали. Производные фокальные поверхности не должны пересекать поверхность детали и соответствующие фокальные поверхности инструмента – в противном случае третье условие формообразования поверхностей деталей неизбежно нарушается.

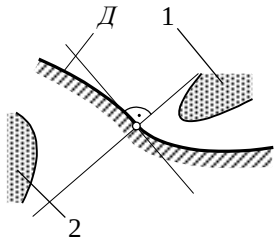


Рис. 7.22. Запрещенные зоны для выпукло-вогнутого плоского нормального сечения поверхности детали.

Вследствие того, что для выполнения третьего условия формообразования в каждом нормальном сечении поверхностей *Д* и *И* должно выполняться определенное соотношение между нормальными радиусами кривизны этих поверхностей, можно построить области, в которых центры главных кривиз исходной инструментальной поверхности расположены быть не могут – это так называемые *запрещенные зоны*. Например, для плоского нормального сечения поверхности детали (рис. 7.22) запрещенными являются зоны 1 и 2. При построении запрещенных зон требуется учет влияния на форму и положение производной фокальной поверхности величины угла относительной локальной ориентации детали и инструмента.

Для глобального анализа выполненея третьего условия формообразования поверхностей деталей при локально-экстремальных видах касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности вместо собственно фокальных поверхностей и производных фокальных поверхностей следует пользоваться поверхностями, определяемыми уравнениями:

$$\mathbf{f}^{*}_{1,2.\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)} + \frac{\partial^n R_{1,2.\partial(u)}}{\partial \breve{C}^n_{1,2.\partial(u)}} \cdot \mathbf{n}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)} + \frac{\partial^n R_{1,2.\partial(u)}}{\partial \breve{C}^n_{1,2.\partial(u)}} \cdot \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \right|} = \mathbf{r}_{\partial(u)} + \frac{\partial^n R_{1,2.\partial(u)}}{\partial \breve{C}^n_{1,2.\partial(u)}} \cdot \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\sqrt{E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}}} .$$

Здесь $n = 1, 2, \ldots$ – наименьшее целое число, при котором не возникает неопределенности при анализе третьего условия формообразования поверхностей деталей.

В рассматриваемом случае строятся фокальные поверхности детали

$$\mathbf{f}^{*}_{1.\partial} = \mathbf{r}_{\partial} + \frac{\partial^n R_{1.\partial}}{\partial \breve{C}^n_{1.\partial}} R_{1.\partial} \cdot \mathbf{n}_{\partial} ;$$

$$\mathbf{f}^{*}_{2.\partial} = \mathbf{r}_{\partial} + \frac{\partial^n R_{2.\partial}}{\partial \breve{C}^n_{2.\partial}} R_{2.\partial} \cdot \mathbf{n}_{\partial}$$

и аналогичные фокальные поверхности инструмента

$$\mathbf{f}^{*}_{1.u} = \mathbf{r}_{u} + \frac{\partial^n R_{1.u}}{\partial \breve{C}^n_{1.u}} \cdot \mathbf{n}_{u} ;$$

$$\mathbf{f}^{*}_{2.u} = \mathbf{r}_{u} + \frac{\partial^n R_{2.u}}{\partial \breve{C}^n_{2.u}} \cdot \mathbf{n}_{u}$$

Для выполнения третьего условия формообразования (13) форма, параметры и положение фокальных поверхностей инструмента $\mathbf{f}^*_{1.и}$ и $\mathbf{f}^*_{2.и}$ должны быть согласованы с формой, параметрами и положением фокальных поверхностей детали $\mathbf{f}^*_{1.д}$ и $\mathbf{f}^*_{2.д}$.

Как и выше, в рассмотрение вводятся производные фокальные поверхности вида

$$\hat{\mathbf{f}}^*_{1.и} = \mathbf{r}_д + \frac{\partial^n R_{1.и}}{\partial \breve{C}^n_{1.и}} \cdot \mathbf{n}_д ;$$

$$\hat{\mathbf{f}}^*_{2.и} = \mathbf{r}_д + \frac{\partial^n R_{2.и}}{\partial \breve{C}^n_{2.и}} \cdot \mathbf{n}_д ,$$

которые следует использовать так же, как и поверхности $\mathbf{f}_{1.д}$, $\mathbf{f}_{2.д}$, $\mathbf{f}_{1.и}$ и $\mathbf{f}_{2.и}$ при неэкстремальных видах касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

Можно построить две обобщенные фокальные поверхности $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ путем вычитания из фокальных поверхностей детали $\mathbf{f}_{1.д}$ и $\mathbf{f}_{2.д}$ соответствующих фокальных поверхностей инструмента $\mathbf{f}_{1.и}$ и $\mathbf{f}_{2.и}$, т.е. поверхности, задаваемые уравнениями вида $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_{1.д} - \mathbf{f}_{1.и}$ и $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_{2.д} - \mathbf{f}_{2.и}$. Таким путем количество характеристических поверхностей, по относительному расположению которых можно судить о глобальном выполнении третьего условия формообразования поверхностей деталей, уменьшается с четырех фокальных поверхностей $\mathbf{f}_{1.д}$, $\mathbf{f}_{2.д}$, $\mathbf{f}_{1.и}$ и $\mathbf{f}_{2.и}$ до двух обобщенных фокальных поверхностей $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, что удобнее.

Если хотя-бы одна из построенных таким путем поверхностей хотя-бы в одной точке имеет “отрицательные” размеры, третье условие формообразования поверхностей деталей нарушается и обработать деталь в полном соответствие с требованиями чертежа невозможно.

В текущем относительном положении детали и инструмента фокальные поверхности инструмента должны располагаться:

- при обработке выпуклых участков поверхности детали – в теле детали за пределами ее фокальной поверхности.

- при обработке вогнутых участков поверхности детали – между поверхностью $Д$ детали и соответствующей ее фокальной поверхностью.

Если это условие выполнено для предельного случая, когда исходная инструментальная поверхность конгруэнтна (или локально-конгруэнтна) поверхности детали, то третье условие формообразования поверхностей деталей может быть выполнено и для других видов касания поверхностей $Д$ и $И$. При этом появляется возможность управления процессом формообразования за счет изменения в требуемом направлении величины угла относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$ в процессе обработки.

7.3.3. Использоваение $\mathbb{R}$–поверхностей первого и второго рода. В зависимости от формы, параметров и расположения фокальных поверхностей инструмента относительно фокальных поверхностей детали можно выделить три принципиально разных случая:

1. Третье условие формообразования поверхностей деталей может быть гарантированно выполнено в любой точке формообразуемой поверхности детали.

2. Для обеспечения выполнения третьего условия формообразования поверхностей деталей требуется проведение дополнительных исследований, т.к. его выполнение может быть обеспечено только при соблюдении некоторых дополнительных условий.

3. Третье условие формообразования поверхностей деталей не может быть выполнено ни при каких дополнительных условиях.

В первом случае проблем с выполнением третьего условия формообразования нет – его выполнение обеспечивается легко. В третьем случае третье условие формообразования поверхностей деталей выполнено быть не может ни при каких условиях, рассматриваемая задача не имеет позитивного решения и ее не имеет смысла изучать детально. Поэтому остановимся на рассмотрении дополнительных требований, которые должны быть удовлетворены для выполнения третьего условия формообразования во втором случае. Для этого удобно ввести в рассмотрение $\mathbb{R}$–поверхности первого и второго рода.

Для заданной пары “деталь-инструмент” $\mathbb{R}$–поверхности первого и второго рода строятся так.

В текущей точке поверхности детали, заданной уравнением вида $\mathbf{r}_\partial = \mathbf{r}_\partial(U_\partial, V_\partial)$, строится нормаль, орт которой

$$\mathbf{n}_\partial(U_\partial, V_\partial) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \right|}.$$

В текущей точке поверхности детали вдоль определяемого ортом $\mathbf{n}_\partial$ направления откладываем алгебраическое значение соответствующего минимального радиуса $r_{conf}^{\min}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д / И)$ поверхности детали и исходной инструментальной поверхности – положительные значения $r_{conf}^{\min} > 0$ от тела детали и отрицательные значения $r_{conf}^{\min} < 0$ – в тело детали.

Совокупность концов векторов $[\mathbf{n}_\partial \cdot r_{conf}^{\min}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})]$ определяет новую характеристическую поверхность:

$$\mathbf{r}_R^{(1)} = \mathbf{r}_\partial + \mathbf{n}_\partial \cdot r_{conf}^{\min}(U_\partial, V_\partial), \tag{7.31}$$

которая является $\mathbb{R}$–поверхностью первого рода (или поверхностью $\mathbb{R}_1$).

Для выполнения третьего условия формообразования поверхностей деталей $\mathbb{R}$–поверхность первого рода должна находиться вне пределов тела детали и не должна пересекать ее поверхность $Д$ – допускается только их касание.

Далее переходим к характеристической поверхности, определяемой из:

$$\mathbf{r}_R^{(2)} = \mathbf{r}_R^{(1)} - \mathbf{r}_\partial = \mathbf{n}_\partial \cdot r_{conf}^{\min}(U_\partial, V_\partial).$$

Это уравнение $\mathbb{R}$–поверхности второго рода (или поверхности $\mathbb{R}_2$).

Векторы $[\mathbf{n}_\partial \cdot r_{conf}^{\min}]$ можно откладывать не только от номинальной поверхности $Д$ детали, как это имеет место при построении $\mathbb{R}$–поверхности первого рода, но и от сферы единичного радиуса или из начала некоторой системы координат.

Построенная поверхность $\mathbf{r}_R^{(2)}$ не должна пересекать сферу единичного радиуса (в первом случае) или (во втором случае) не должна иметь “отрицательных” радиус-векторов.

В результате, вместо поверхности $Д$ детали и ее двух фокальных поверхностей $\mathbf{f}_{1.\partial}$ и $\mathbf{f}_{2.\partial}$, исходной инструментальной поверхности $И$ и ее двух фокальных поверхностей $\mathbf{f}_{1.u}$ и $\mathbf{f}_{2.u}$ (т.е. в общей сложности вместо шести поверхностей $Д$, $\mathbf{f}_{1.\partial}$, $\mathbf{f}_{2.\partial}$ и $И$, $\mathbf{f}_{1.u}$, $\mathbf{f}_{2.u}$), необходимых для анализа выполнения третьего условия формообразования поверхностей деталей, приходим к одной поверхности: $\mathbb{R}$–поверхности первого или второго рода. Форма и параметры этой поверхности (как поверхности $\mathbb{R}_1$, так и поверхности $\mathbb{R}_2$) являются функцией угла μ относительной локальной ориентации поверхности детали и исходной инструментальной поверхности в точке их касания. Параметры $\mathbb{R}$–поверхности как первого, так и второго рода позволяют сделать вывод о том, выполняется или нарушается третье условие формообразования поверхностей деталей глобально, т.е. в пределах поверхности $Д$ целиком.

Элементы локальной топологии $\mathbb{R}$–поверхности первого рода могут быть определены через соответствующие элементы локальной топологии формообразуемой поверхности детали и значение минимального радиу-

са $r_{conf}^{\min}(U_\partial, V_\partial)$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\ (Д / И)$ в текущей точке K касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

Пусть поверхность $Д$ задана уравнением вида $\mathbf{r}_\partial = \mathbf{r}_\partial(U_\partial, V_\partial)$, а поверхность $\mathbb{R}_1$ – уравнением (7.31).

Координаты $g_{R.ij}$ метрического тензора поверхности $\mathbb{R}_1$ могут быть выражены через координаты фундаментальных тензоров g_{ij} (см. с. 31) и b_{ij} (см. с. 34), среднюю $\tilde{M}_\partial$ и полную $\tilde{G}_\partial$ кривизны номинальной поверхности детали:

$$g_{R.ij} = \left(1 - \tilde{G}_\partial \cdot (r_{conf}^{\min})^2\right) g_{ij} - 2 r_{conf}^{\min} \left(1 + \tilde{M}_\partial \cdot r_{conf}^{\min}\right) b_{ij}.$$

Определитель метрического тензора поверхности $\mathbb{R}_1$ равен

$$\det\left(g_{R.ij}\right) = A^2 \cdot \det\left(g_{ij}\right),$$

где (это следует из определения главных кривизн поверхности)

$$A = \tilde{G}_\partial \cdot (r_{conf}^{\min})^2 + 2\tilde{M}_\partial \cdot r_{conf}^{\min} + 1 = \left(1 + k_{1.\partial} \cdot r_{conf}^{\min}\right) \cdot \left(1 + k_{2.\partial} \cdot r_{conf}^{\min}\right).$$

Очевидно, что поверхность $\mathbb{R}_1$ имеет сингулярности в точках, соответствующих точкам поверхности детали, в которых одна из главных кривизн равна $-\dfrac{1}{r_{conf}^{\min}}$.

Нормаль $\mathbf{n}_R$ к $\mathbb{R}$-поверхности первого рода записывается так:

$$\mathbf{n}_R = \frac{A}{|A|}\mathbf{n}_\partial.$$

Второй фундаментальный тензор поверхности $\mathbb{R}_1$ может быть выражен через координаты фундаментальных тензоров g_{ij} (см. с. 31) и b_{ij} (см. с. 34), среднюю $\tilde{M}_\partial$ и полную $\tilde{G}_\partial$ кривизны поверхности $Д$ детали:

$$b_{R.ij} = \frac{A}{|A|}\left[\tilde{G}_\partial \cdot r_{conf}^{\min} \cdot g_{ij} + \left(1 + 2\tilde{M}_\partial \cdot r_{conf}^{\min}\right) \cdot b_{ij}\right].$$

Как и для метрического тензора, определитель второго фундаментального тензора

$$\det\left(b_{R.ij}\right) = A \cdot \det\left(b_{ij}\right)$$

имеет сингулярности в точках, соответствующих точкам поверхности детали, в которых одна из главных кривизн равна $-\dfrac{1}{r_{conf}^{\min}}$.

Гауссова $\tilde{G}_R$ и полная $\tilde{M}_R$ кривизны $\mathbb{R}$-поверхности первого рода расчитываются по формулам:

$$\tilde{G}_R = \frac{\tilde{G}_\partial}{A} \qquad \text{и} \qquad \tilde{M}_R = \frac{\tilde{M}_\partial + \tilde{G}_\partial \cdot r_{conf}^{\min}}{|A|},$$

а главные кривизны $k_{1.R}$ и $k_{2.R}$ поверхности $\mathbb{R}_1$, соответствующие главным кривизнам $k_{1.\partial}$ и $k_{2.\partial}$ поверхности $Д$ детали, находятся из:

$$k_{1,2.R} = \frac{A}{|A|} \cdot \frac{k_{1,2.\partial}}{\left|1 + k_{1,2.\partial} \cdot r_{conf}^{\min}\right|}.$$

Для выполнения третьего условия формообразования поверхностей деталей важно, чтобы в пределах обрабатываемого отсека поверхности детали минимальный радиус $r_{conf}^{\min}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д / И\right)$ принимал только неотрицательные значения, тогда как его абсолютная величина интереса в данном случае не представляет. Поэтому радиус $r_{conf}^{\min}$ может быть пронормирован, что приводит к уравнению нормированной $\mathbb{R}$–поверхности первого рода (или нормированной поверхности $\mathbb{R}_1$):

$$\bar{\mathbf{r}}_R^{(1)} = \mathbf{r}_\partial + \mathbf{n}_\partial \cdot \frac{r_{conf}^{\min}}{\left|r_{conf}^{\min}\right|}$$

или в такой форме

$$\bar{\mathbf{r}}_R^{(1)} = \mathbf{r}_\partial + \mathbf{n}_\partial \cdot \operatorname{sgn}\ r_{conf}^{\min}.$$

Аналогично нормированной $\mathbb{R}$–поверхности первого рода вводится в рассмотрение нормированная $\mathbb{R}$–поверхность второго рода (или нормированная поверхность $\mathbb{R}_2$). Ее уравнение записывается так:

$$\bar{\mathbf{r}}_R^{(2)} = \mathbf{r}_R^{(1)} - \mathbf{r}_\partial = \mathbf{n}_\partial \cdot \frac{r_{conf}^{\min}}{\left|r_{conf}^{\min}\right|}$$

или в форме

$$\bar{\mathbf{r}}_R^{(2)} = \mathbf{r}_R^{(1)} - \mathbf{r}_\partial = \mathbf{n}_\partial \cdot \operatorname{sgn}\ r_{conf}^{\min}.$$

Нормированные $\mathbb{R}$–поверхности первого и второго рода удобнее в применении.

7.4. Рациональное ориентирование детали на станке

Выполнение шести условий формообразования поверхностей деталей является необходимым, но не достаточным для обеспечения возможности обработки детали в полном соответствии с тебованиями чертежа. Невозможность правильной обработки может быть следствием неправильной ориентации детали на станке. Обрабатываемая поверхность детали должна быть сориентирована так, чтобы имелась возможность подвода инструмента ко всем ее участкам.

Решение задачи наивыгоднейшего ориентирования детали является обязательным этапом разработки автоматизированных систем подготовки производства при изготовлении деталей с рабочими поверхностями сложной формы на многокоординатных станках с ЧПУ. Ориентация сложной поверхности оказывает существенное влияние на протекание процесса обработки детали и его производительность. Правильная ориентация позволяет сократить время обработки и исключить необходимость перенастройки оборудования в процессе обработки.

Специфика обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ требует увязки положения заготовки в системе координат станка с ЧПУ с относительным положением инструмента и кинематикой формообразования.

Решение задачи правильного ориентирования обрабатываемой поверхности важно для всех случаев формообразующей обработки деталей. В общей постановке эта задача решается для случая обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ. Поэтому логично рассмотреть вопрос рационального ориентирования детали на станке на примере именно такой обработки. Полученное таким путем решение впоследствие может быть адаптировано для случаев обработки деталей общемашиностроительного назначения на металлорежущем оборудовании, воспроизводящем "*жесткую*" кинематику формообразования, поскольку ориентирование детали в таких случаях является частным случаем рационального ориентирования сложной поверхности детали на столе многокоординатного станка с ЧПУ.

7.4.1. Постановка задачи рационального ориентирования сложной поверхности детали на столе многокоординатного станка с ЧПУ. Обработка сложных поверхностей деталей является многоплановой проблемой, связанной с необходимостью решения комплекса взаимоувязанных задач. Решение задачи рационального ориентирования детали на столе многокоординатного станка с ЧПУ, являющейся одной из задач общей проблемы синтеза наивыгоднейшего формообразованя поверхностей деталей, предполагает введение в рассмотрение критерия, в соответствие с которым эта задача может быть решена.

Используются различные критерии правильности ориентирования деталей. Таким критерием может быть время обработки. Наилучшей ориентацией детали считают такую, которая при неизменных параметрах процесса обработки позволяет увеличить шаг между соседними строками формообразования, повысить скорость относительного движения инструмента вдоль каждой строки формообразования, воспроизводить наивыгоднейшие траектории относительного движения инструмента, т.е. максимально сократить время формообразования заданного отсека сложной поверхности детали.

При обработке крупногабаритных деталей на станках с ЧПУ критерием правильности ориентации заготовки может служить минимальный размер детали по одной из осей координат стола металлорежущего станка. Использование этого критерия вызвано ограниченным диапазоном изменения управляемых координат станка с ЧПУ. Находят применение другие критерии, позволяющие более или мении корректно оценить степень "рациональности" ориентации детали на станке.

Определяя степень "рациональности" ориентации детали на станке будем исходить из следующего.

В зависимости от параметров ориентации обрабатываемой сложной поверхности $Д$ детали и вследствие изменения в пределах обрабатываемого участка поверхности $Д$ параметров ее локальной топологии (в первую очередь значений ее главных радиусов кривизны $R_{1.\partial}$ и $R_{2.\partial}$ и направления нормали к $Д$) условия взаимодействия инструмента с деталью в разных точках поверхности $Д$ различны. Как следствие, различны и условия обработки (условия срезания припуска) вдоль каждой строки формообразования, а также при переходе от обработки одной строки формообразования на поверхности $Д$ к обработке другой.

В случае нерациональной ориентации детали обработка всей ее поверхности $Д$ невозможна либо производится в неблагоприятных условиях. Например, если заданная в ортогональной системе декартовых координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ обрабатываемая поверхность $Д$ расположена на столе станка таким образом, что ось аппликат Z_∂ параллельна оси $O_ш - O_ш$ шпинделя 3-координатного станка с ЧПУ (рис. 7.23), то полностью обработать ее в этом случае не представляется возможным: участок $ABCDPQST$ поверхности $Д$ обработать можно, а ее участок $ABCB^*A^*$ обработать нельзя – это очевидно. При такой ориентации детали (см. рис. 7.23) ее участок $ABCB^*A^*$ находится "в тени" по отношении к инструменту и проецируется на координатную плоскость $Y_\partial Z_\partial$ в контур $A_{xy}B_{xy}CB^*A^*$.

На поверхности $Д$ рассмотрим линию B^*BS, на которой некоторым образом выберем произвольные точки I, B, J, H. Если через каждую из этих точек провести единичную нормаль $\mathbf{n}_\partial$, то в момент формообразования поверхности $Д$ в окрестности соответствующей точки I, B, J, H, S орт нормали $\mathbf{n}_\partial$ совпадает с противоположным направлением орта нормали $\mathbf{n}_u$ к исходной инструментальной поверхности $И$ применяемого инструмента. В точках K_B, K_J, K_H, K_S, в которых поверхность $И$ инструмента касается поверхности $Д$ точками B, J, H, S, углы θ_B, θ_J, θ_H, θ_S (см. рис. 7.23) отличны по величине один от другого. Поэтому условия взаимодействия детали и инструмента в этих точках и, следовательно, условия

срезания припуска, также будут различными. В точке I из-за неизбежной интерференции детали и инструмента нарушается второе условие формообразования поверхностей деталей: очевидно, что в точке I справедливо соотношение $\mathbf{n}_\partial \neq -\mathbf{n}_u$ (в точке I орты нормалей $\mathbf{n}_\partial$ и $\mathbf{n}_u$ составляют некоторый угол Ω). Это приводит к тому, что при показанной на рис.7.23 ориентации детали обработать ее поверхность $Д$ в окрестности точки I нельзя. Поэтому рациональной следует считать такую ориентацию поверхности детали на столе станка с ЧПУ, при которой, во-первых, обеспечивается свободный доступ инструмента к каждому локальному участку обрабатываемой поверхности и, во-вторых, отклонения условий взаимодействия детали и инструмента от наивыгоднейших в пределах обрабатываемого участка поверхности $Д$ минимально возможны.

Сформулированное требование предполагает введение в рассмотрение количественной меры отклонения условий взаимодействия детали и инструмента от наивыгоднейших.

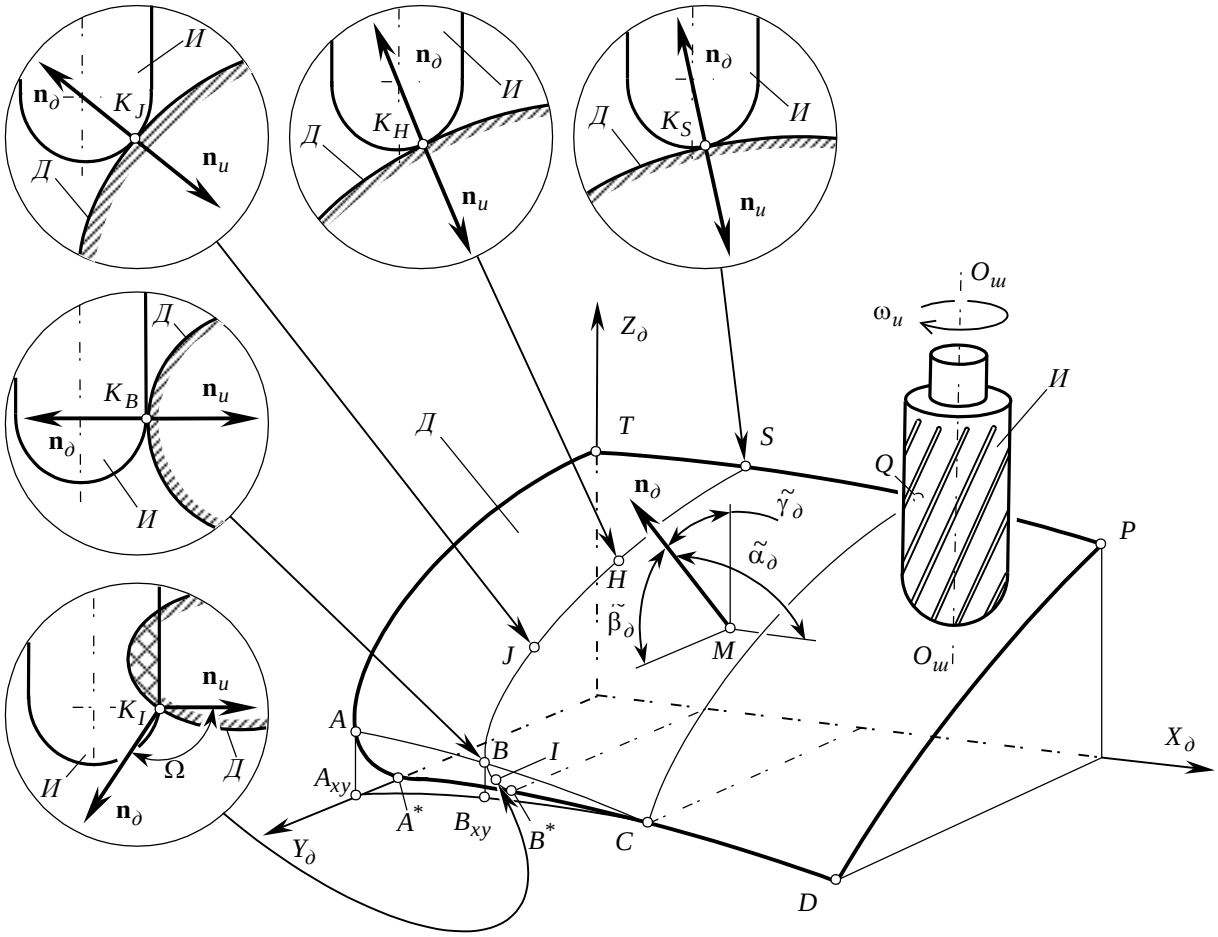


Рис. 7.23. Сложная поверхность детали в системе координат трехкоординатного станка с ЧПУ.

В общем виде рассматриваемая задача решена[1], а полученное решение впоследствие было развито (Радзевич С.П., 1990, 1991).

Решение рассматриваемой задачи основано на применении сферического отображения – отображения ориентированного участка поверхности $Д$ и $И$ на сферу единичного радиуса, и сферических индикатрис поверхностей $Д$ и $И$.

[1]А.с. №1442371 (СССР). *Способ ориентирования сложной поверхности детали на столе станка с ЧПУ*./С.П.Радзевич. – Опубл. в БИ, №45, 1988 (Заявка на изобретение №4218128/30-08 от 17.02.1987; положительное решение от 23.11.1987).

Как частный случай общего решения рассматриваемой задачи сферическое отображение Гаусса используется также (Chen, L., Chou, S., Woo, T., 1993) для расчета параметров рациональной ориентации на столе многокоординатного станка с ЧПУ деталей, ограниченных поверхностями относительно простой формы (плоскостями, круглыми цилиндрами и т.п.) с целью нахождения такой ориентации детали, при которой с одного установа можно обработать возможно большее количество ее отдельных поверхностей и, как следствие, минимизировать потребное количество переустановок детали.

7.4.2. Сферическое отображение[1] и сферическая индикатриса поверхности детали. Ориентация заготовки на столе станка с ЧПУ определяется положением в системе координат станка вектора нормали к поверхности $Д$ детали, который параллелен радиус-вектору некоторой точки ее сферического отображения. Также определяется в системе координат станка ориентация инструмента. Как правило, радиус-вектор представляющей интерес точки сферического отображения поверхности $И$ инструмента направлен параллельно оси его вращения. Относительная ориентация детали и инструмента определяется взаимным расположением векторов нормалей к поверхностям $Д$ и $И$, соответственно проходящих через определенным образом расположенные точки их сферических отображений $GMap(Д)$ и $GMap(И)$.

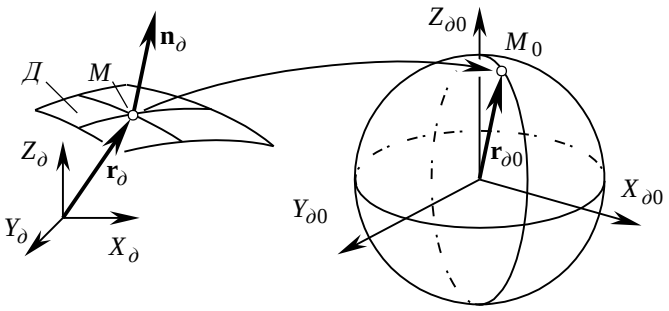


Рис. 7.24. Сферическое отображение M_0 точки M поверхности детали.

Рассмотрим порядок построения сферического отображения и сферической индикатрисы поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

Чтобы построить сферическое отображение, например, поверхности $Д$ детали, следует выбрать на ней некоторую точку M (рис. 7.24). Затем строится сфера единичного радиуса с центром, например, в начале O_∂ системы координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ детали.

1. Сферическим отображением M_0 текущей точки M на поверхности детали является положение конца радиуса сферы, параллельного нормали к поверхности $Д$ в точке M на ней (см. рис. 7.24).

2. Сферическое отображение поверхности (всей или ее фрагмента) представляет собой совокупность сферических отображений всех ее точек (Милинский В.И., 1934, с.287-292; Норден А.П., 1948, с.157; Banchoff, T., *et al*, 1982).

3. Контур сферического отображения обрабатываемой поверхности $Д$ является ее сферической индикатрисой.

4. Таким образом, сферическое отображение поверхности детали – это некоторый участок поверхности сферы единичного радиуса, а сферическая индикатриса поверхности $Д$ – это линия, ограничивающая этот участок поверхности сферы единичного радиуса.

Если орт нормали к поверхности $Д$ детали в текущей ее точке M обозначить через $\mathbf{n}_\partial$, а радиус-вектор текущей точки M_0 сферического отображения – через $\mathbf{r}_{\partial 0}$, то в системе координат $X_{\partial 0}Y_{\partial 0}Z_{\partial 0}$ с началом в центре сферы единичного радиуса справедливо соотношение:

$$\mathbf{r}_{\partial 0} = \mathbf{n}_\partial, \qquad |\nu_\partial| = 1 \tag{7.32}$$

Исходим из того, что уравнение поверхности $Д$ представлено в векторной форме (1.7): $\mathbf{r}_\partial = \mathbf{r}_\partial(U_\partial, V_\partial)$.

Единичную нормаль $\mathbf{n}_\partial$ к поверхности $Д$ определим через касательные к координатным U_∂- и V_∂-линиям:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} = \frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial}\mathbf{i} + \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial}\mathbf{j} + \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial}\mathbf{k}; \tag{7.33}$$

[1]Сферическое отображение поверхности разработано К.-Ф. Гауссом и названо его именем.

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} = \frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial}\mathbf{i} + \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial}\mathbf{j} + \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial}\mathbf{k}, \tag{7.34}$$

где X_∂, Y_∂, Z_∂ – декартовы координаты текущей точки на поверхности $Д$ детали, в которой определяются касательные.

Орт нормали расчитывается по формуле:

$$\mathbf{n}_\partial = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|} = \mathbf{i}\cos\alpha_\partial + \mathbf{j}\cos\beta_\partial + \mathbf{k}\cos\gamma_\partial,$$

где $\cos\alpha_\partial$, $\cos\beta_\partial$, $\cos\gamma_\partial$ – направляющие косинусы орта нормали $\mathbf{n}_\partial$. Они соответственно равны:

$$\cos\alpha_\partial = \frac{\dfrac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\dfrac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} - \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial}\cdot\dfrac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|};$$

$$\cos\beta_\partial = \frac{-\dfrac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\dfrac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} + \dfrac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial}\cdot\dfrac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|};$$

$$\cos\gamma_\partial = \frac{\dfrac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\dfrac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} - \dfrac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial}\cdot\dfrac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|}.$$

С учетом изложенного уравнение (32) преобразуется к виду:

$$\mathbf{r}_{\partial 0} = \mathbf{i}\cos\alpha_\partial + \mathbf{j}\cos\beta_\partial + \mathbf{k}\cos\gamma_\partial. \tag{7.35}$$

Очевидно, что при построении сферического отображения во внимание принимаются только орты нормалей $\mathbf{n}_\partial$, построенные в пределах обрабатываемого участка поверхности $Д$. Пределы изменения величин углов α, β, γ для обрабатываемого участка поверхности $Д$ и ее сферического отображения одинаковы.

1. Исследование сферического отображения (35) поверхности $Д$ детали приводится к каноническому виду в результате определения его первых двух основных квадратичных форм.

Квадрат дифференциала дуги $S_{\partial 0}$ сферического отображения поверхности $Д$ детали равен:

$$\Phi_{1.\partial 0} \quad \Rightarrow \quad dS^2_{\partial 0} = e_\partial dU^2_\partial + 2 f_\partial dU_\partial dV_\partial + g_\partial dV^2_\partial,$$

где e_∂, f_∂, g_∂ – гауссовы коэффициенты первого порядка сферического отображения поверхности $Д$.

Очевидно, что через первые производные по U_∂ и V_∂ от $\mathbf{r}_{\partial 0}$ коэффициенты e_∂, f_∂, g_∂ выражаются так:

$$e_\partial = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial 0}}{\partial U_\partial}\right)^2; \qquad f_\partial = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial 0}}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial 0}}{\partial V_\partial}; \qquad g_\partial = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial 0}}{\partial V_\partial}\right)^2$$

или, на основании (32):

(7.36)
$$e_\partial = \left(\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial}\right)^2; \qquad f_\partial = \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial}; \qquad g_\partial = \left(\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial}\right)^2.$$

Из соотношения (32) следует, что:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial.0}}{\partial U_\partial} = \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial} = \frac{(F_\partial M_\partial - G_\partial L_\partial)\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} + (F_\partial L_\partial - E_\partial M_\partial)\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial.0}}{\partial V_\partial} = \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial} = \frac{(F_\partial N_\partial - G_\partial M_\partial)\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} + (F_\partial M_\partial - E_\partial N_\partial)\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}.$$

Следовательно, коэффициенты первой основной квадратичной формы сферического отображения поверхности $Д$ могут быть выражены через гауссовы коэффициенты ее первых двух основных квадратичных форм:

$$e_\partial = \frac{E_\partial M_\partial^2 - 2F_\partial L_\partial M_\partial + G_\partial L_\partial^2}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2};$$

$$f_\partial = \frac{E_\partial M_\partial N_\partial - F_\partial M_\partial^2 - F_\partial L_\partial N_\partial + G_\partial L_\partial M_\partial}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2};$$

$$g_\partial = \frac{E_\partial N_\partial^2 - 2F_\partial M_\partial N_\partial + G_\partial M_\partial^2}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}$$

или через среднюю и полную кривизны поверхности $Д$:

$$e_\partial = 2\tilde{M}_\partial L_\partial - \tilde{G}_\partial E_\partial; \qquad f_\partial = 2\tilde{M}_\partial M_\partial - \tilde{G}_\partial F_\partial; \qquad g_\partial = 2\tilde{M}_\partial N_\partial - \tilde{G}_\partial G_\partial.$$

Также, поскольку $e_\partial g_\partial - f_\partial^2 = \tilde{G}_\partial^2(E_\partial G_\partial - F_\partial^2) = \tilde{G}_\partial^2 H_\partial^2$, то дискриминант первого порядка h_∂^2 сферического отбражения равен

$$h_\partial^2 = e_\partial g_\partial - f_\partial^2 = \tilde{G}_\partial^2 H_\partial^2$$

или $h_\partial = \pm\tilde{G}_\partial H_\partial$, где знак берется одинаковым со знаком полной кривизны $\tilde{G}_\partial$ поверхности детали: “+” – для участков поверхности $Д$ с положительной и “–” – для ее участков с отрицательной гауссовой кривизной.

Поскольку дискриминант h_∂ сферического отображения должен быть только положительным ($h_\partial > 0$), полная кривизна $\tilde{G}_\partial^2$ поверхности детали не должна быть равна нулю. Поэтому разворачивающиеся поверхности не могут быть представлены сферическим отображением (Stoker, J.J., 1969, p.113).

Коэффициенты l_∂, m_∂ и n_∂ второй основной квадратичной формы сферического отображения поверхности детали находятся так. Орт нормали к сферическому отображению определен из

$$h_\partial \cdot \mathbf{n}_{\partial.0} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial.0}}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial.0}}{\partial V_\partial} = \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial} = \frac{\tilde{G}_\partial \cdot \mathbf{n}_\partial}{\sqrt{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}}.$$

Но $h_\partial = \pm\tilde{G}_\partial H_\partial$ и, следовательно, $\mathbf{n}_{\partial.0} = \pm\mathbf{n}_\partial$. Поэтому

$$l_\partial = \mathbf{n}_{\partial.0}\cdot\mathbf{r}_{\partial.0} = \pm\mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial} = \pm\left\{\frac{\partial}{\partial U_\partial}\left(\mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial}\right)^2\right\} = \mp\left(\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial}\right)^2 = \mp e_\partial.$$

Поступая аналогично, получим $m_\partial = \mp f_\partial$ и $n_\partial = \mp g_\partial$.

Поэтому достаточно рассматривать коэффициенты только первой основной квадратичной формы сферического отображения поверхности детали.

Радиус кривизны текущего плоского нормального сечения сферического отображения поверхности детали определяется исходя из общей формулы

$$R_{\partial.0} = \frac{e_\partial dU_\partial^2 + 2 f_\partial dU_\partial dV_\partial + g_\partial dV_\partial^2}{l_\partial dU_\partial^2 + 2m_\partial dU_\partial dV_\partial + n_\partial dV_\partial^2}$$

и численно равен единице ($R_{\partial.0} \equiv 1$), как и следовало ожидать.

2. Коэффициенты квадратичных форм сферического отображения поверхности детали могут быть определены другим путем.

Векторы $\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial}$ и $\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial}$ ортогональны вектору $\mathbf{n}_\partial$ и, следовательно, расположены в касательной плоскости к поверхности $Д$ в текущей точке M на ней. Поэтому они компланарны касательным векторам $\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}$ (33) и $\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}$ (34) в этой же точке поверхности $Д$. Следовательно, векторы $\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial}$ и $\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial}$ можно некоторым образом разложить на составляющие по направлениям касательных векторов:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial} = a\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} + b\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}; \tag{7.37}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial} = c\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} + d\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}, \tag{7.38}$$

где a, b, c, d – некоторые скалярные коэффициенты, величины которых требуется определить.

Чтобы найти коэффициенты a, b, c, d, умножим скалярно каждое из равенств (37) и (38) на вектор $\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial} = a\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right)^2 + b\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial};$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial} = c\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right)^2 + d\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial},$$

а затем на вектор $\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\cdot\frac{\partial \nu_\partial}{\partial U_\partial} = a\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} + b\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right)^2;$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial} = c\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} + d\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right)^2.$$

Заменив в этих уравнениях скалярные произведения соответствующими гауссовыми коэффициентами поверхности $Д$, приходим к результату:

$$-L_\partial = aE_\partial + bF_\partial; \qquad -M_\partial = cE_\partial + dF_\partial; \qquad -M_\partial = aF_\partial + bG_\partial; \qquad -N_\partial = cF_\partial + dG_\partial.$$

Из этих уравнений находим коэффициенты a, b, c, d:

$$a = \frac{F_\partial M_\partial - G_\partial L_\partial}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}; \qquad b = \frac{F_\partial L_\partial - E_\partial M_\partial}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}; \qquad c = \frac{F_\partial N_\partial - G_\partial M_\partial}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}; \qquad d = \frac{F_\partial M_\partial - E_\partial N_\partial}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов a, b, c, d в (37) и (38), получим формулы:

$$\left(E_\partial G_\partial - F_\partial^2\right)\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial} = \left(F_\partial M_\partial - G_\partial L_\partial\right)\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} + \left(F_\partial L_\partial - E_\partial M_\partial\right)\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial};$$

$$\left(E_\partial G_\partial - F_\partial^2\right)\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial} = \left(F_\partial N_\partial - G_\partial M_\partial\right)\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} + \left(F_\partial M_\partial - E_\partial N_\partial\right)\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial},$$

которые называются формулами Вейнгартена.

Подставляя в (36) найденные выражения для производных $\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial}$ и $\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial}$, находим коэффициенты e_∂, f_∂, g_∂ первой основной квадратичной формы сферического отображения поверхности детали. Для упрощения формы их записи целесообразно воспользоваться зависимостями для рассчета средней $\tilde{M}_\partial$ и полной (гауссовой) $\tilde{G}_\partial$ кривизны поверхности $Д$:

$$\tilde{M}_\partial = \frac{L_\partial G_\partial - 2F_\partial M_\partial + E_\partial N_\partial}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}; \qquad \tilde{G}_\partial = \frac{L_\partial N_\partial - M_\partial^2}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}.$$

Используя приведенные формулы для $\tilde{M}_\partial$ и $\tilde{G}_\partial$, получим:

$$e_\partial = L_\partial \tilde{M}_\partial - E_\partial \tilde{G}_\partial; \qquad f_\partial = M_\partial \tilde{M}_\partial - F_\partial \tilde{G}_\partial; \qquad g_\partial = N_\partial \tilde{M}_\partial - G_\partial \tilde{G}_\partial.$$

Отсюда следует зависимость для дискриминанта: $h_\partial = \sqrt{e_\partial g_\partial - f_\partial^2} = \pm\tilde{G}_\partial \sqrt{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}$, знак которого берется одинаковым со знаком полной кривизны $\tilde{G}_\partial$ поверхности $Д$, т.к. дискриминантв $\sqrt{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}$ всегда неотрицателен.

Определим гауссовы коэффициенты второго порядка l_∂, m_∂, n_∂ для сферического отображения поверхности $Д$.

Единичный вектор нормали к сферическому отображению равен $\mathbf{n}_{\partial.0} = \mathbf{n}_\partial$. Тогда:

(7.39) $$l_\partial = \mathbf{n}_{\partial.0} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial 0}}{\partial U_\partial^2} = \pm\mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial^2};$$

(7.40) $$m_\partial = \mathbf{n}_{\partial.0} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial 0}}{\partial U_\partial \partial V_\partial} = \pm\mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial^2 n_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial};$$

(7.41) $$n_\partial = \mathbf{n}_{\partial.0} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\partial 0}}{\partial V_\partial^2} = \pm\mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial^2}.$$

Чтобы определить производные $\frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial^2}$, необходимо продифференцировать равенство $(\mathbf{n}_\partial)^2 = 1$ по U_∂ и по V_∂. После дифференцирования имеем: $2\mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial} = 0$ и $2\mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial} = 0$.

Дифференцируя еще раз по U_∂ и по V_∂, получим:

$$\mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial^2} + \left(\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial}\right)^2 = 0; \qquad \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial} + \mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial} = 0; \qquad \mathbf{n}_\partial \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial^2} + \left(\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial}\right)^2 = 0,$$

откуда следует, что:

$$\mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial^2} = -\left(\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial}\right)^2 = -e_\partial; \qquad \mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial \partial V_\partial} = -\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial} = -f_\partial; \qquad \mathbf{n}_\partial \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial^2} = -\left(\frac{\partial \mathbf{n}_\partial}{\partial V_\partial}\right)^2 = -g_\partial.$$

Подставляя эти значения в (39)-(40), находим:

$$l_\partial = \mp e_\partial; \qquad m_\partial = \mp f_\partial; \qquad n_\partial = \mp g_\partial.$$

Таким образом

$$dS_{\partial 0}^2 = e_\partial dU_\partial^2 + 2 f_\partial dU_\partial dV_\partial + g_\partial dV_\partial^2 = \left(L_\partial \tilde{M}_\partial - E_\partial \tilde{G}_\partial\right) dU_\partial^2 + 2\left(M_\partial \tilde{M}_\partial - F_\partial \tilde{G}_\partial\right) dU_\partial dV_\partial + \left(N_\partial \tilde{M}_\partial - G_\partial \tilde{G}_\partial\right) dV_\partial^2;$$

$$dS_{\partial 0}^2 = \tilde{M}_\partial \left(L_\partial dU_\partial^2 + 2M_\partial dU_\partial dV_\partial + N_\partial dV_\partial^2\right) - \tilde{G}_\partial \left(E_\partial dU_\partial^2 + 2F_\partial dU_\partial dV_\partial + G_\partial dV_\partial^2\right) = \tilde{M}_\partial \Phi_{2.\partial} - \tilde{G}_\partial \Phi_{1.\partial}. \qquad (7.42)$$

Дифференциальная квадратичная форма

$$e_\partial dU_\partial^2 + 2 f_\partial dU_\partial dV_\partial + g_\partial dV_\partial^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{3.\partial} \qquad (7.43)$$

является третьей квадратичной формой поверхности $Д$ детали. Равенство (42) показывает, что первая $\Phi_{1.\partial}$ (1.23), вторая $\Phi_{2.\partial}$ (1.35) и третья $\Phi_{3.\partial}$ (43) квадратичные формы поверхности $Д$ линейно зависимы:

$$\tilde{G}_\partial \Phi_{1.\partial} - \tilde{M}_\partial \Phi_{2.\partial} + \Phi_{3.\partial} = 0.$$

Это дополнительно поясняет, почему *основными* являются только первые две квадратичные формы поверхности детали.

Сферическое отображение (35) поверхности $Д$ детали обладает рядом полезных для теории формообразования поверхностей деталей свойств. Отметим некоторые из них[1]:

1. Сферическое отображение (35) ортогональной сети на поверхности $Д$, для которой средняя кривизна не равна нулю $(\tilde{M}_\partial \neq 0)$, является ортогональной сетью лишь в случае, когда она образована линиями кривизны.

Это свойство сферического отображения поверхности детали легко доказывается. Если на поверхности $Д$ имеется ортогональная сеть координатных линий, то ее можно принять в качестве параметрической сети. Тогда условием ее ортогональности будет условие $F_\partial = 0$. Условием ортогональности сети на сферическом отображении записывается так $f_\partial = M_\partial \tilde{M}_\partial - F_\partial \tilde{G}_\partial = M_\partial \tilde{M}_\partial = 0$.

Поскольку по условию $(\tilde{M}_\partial \neq 0)$, то M_∂ должно быть равно нулю, откуда следует, что сеть на поверхности $Д$ детали состоит из линий кривизны.

2. Если средняя кривизна поверхности $Д$ равна нулю $(\tilde{M}_\partial = 0)$, то сеть на сферическом отображении также будет ортогональной.

Это свойство сферического отображения очевидно, поскольку из условия $F_\partial = 0$ и $\tilde{M}_\partial = 0$ следует, что $f_\partial = M_\partial \tilde{M}_\partial - F_\partial \tilde{G}_\partial = 0$, т.е. условие ортогональности сети на сферическом отображении поверхности $Д$ детали выполняется.

3. При отображении поверхности детали на сферу единичного радиуса угол между двумя сопряженными линиями на поверхности $Д$ сохраняется по величине или переходит в дополнительный (в зависимости от того, будет ли локальный участок поверхности $Д$ в дифференциальной окрестности точки пересечения координатных линий эллиптическим или гиперболическим).

Если параметрическая сеть на поверхности $Д$ детали является сопряженной, то $M_\partial = 0$ и коэффициенты l_∂, m_∂, n_∂ квадратичной формы $\Phi_{3.\partial}$ будут равны:

$$e_\partial = \frac{G_\partial L_\partial^2}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}; \qquad f_\partial = \frac{F_\partial L_\partial N_\partial}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}; \qquad g_\partial = \frac{E_\partial N_\partial^2}{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}. \qquad (7.44)$$

[1]Рассматривая свойства сферического отображения поверхности детали, следует обратить внимание на следующий интересный факт, относящийся к параллельным (эквидистантным) поверхностям (Koenderink, J.J., 1990, p.267, 269): если строить параллельные поверхности на все большем и большем расстоянии от исходной поверхности, то в пределе параллельная поверхность, удаленная от исходной на бесконечно большое расстояние, становится сферой независимо от того, какую форму имеет исходная поверхность. Можно показать, что сферическое (гауссово) отображение поверхности является построенной в бесконечности поверхностью, параллельной исходной (в нашем случае – к поверхности детали), если размеры параллельной поверхности пронормированы.

Если угол между двумя параметрическими линиями на поверхности $Д$ равен ω_∂, а соответствующий угол на ее сферическом отображении – Ω_∂, то косинусы этих углов с учетом (44) будут равны:

$$\cos\Omega_\partial = \frac{F_\partial}{\sqrt{E_\partial G_\partial}}; \qquad \cos\omega_\partial = \pm\frac{f_\partial}{\sqrt{e_\partial g_\partial}} = \mp\frac{F_\partial}{\sqrt{E_\partial G_\partial}},$$

откуда $\cos\Omega_\partial = \mp\cos\omega_\partial$, что и следовало подтвердить.

4. Сферическое отображение поверхности детали обладает свойством конформности только для омбилического локального участка поверхности $Д$ и для ее участков со средней кривизной, равной нулю $\tilde{M}_\partial = 0$.

Убедиться в правильности этого утверждения можно, если соотношение (42) переписать в форме:

$$dS^2_{\partial 0} = \left[\tilde{M}_\partial \frac{L_\partial du^2_\partial + 2M_\partial du_\partial dv_\partial + N_\partial dv^2_\partial}{dS^2_\partial} - \tilde{G}_\partial\right] dS^2_\partial,$$

или так:

$$dS^2_\partial = \left(\tilde{M}_\partial k_\partial - \tilde{G}_\partial\right) dS^2_\partial,$$

где k_∂ – нормальная кривизна поверхности $Д$ в текущей точке M на ней.

Для выполнения условия конформности требуется, чтобы отношение $\frac{dS_{\partial 0}}{dS_\partial}$ не зависело от направления линейного элемента dS_∂. Следовательно, его можно записать так $\tilde{M}_\partial = 0$, поскольку кривизна k_∂ нормального сечения поверхности детали как раз зависит от направления линейного элемента (если локальный участок поверхности $Д$ в дифференциальной окрестности точки M не является омбилическим локальным участком или локальным участком уплощения).

5. Размеры и форма сферической индикатрисы поверхности детали в общем случае не связаны с размерами и формой контура самой обрабатываемой поверхности (ее площадью, протяженностью в различных направлениях и т.п.). Для поверхности $Д$ большей площади и протяженности соответствующие размеры сферической индикатрисы могут быть меньшими, чем для обрабатываемой поверхности детали меньшей площади и протяженности и наоборот.

Более того, даже в пределах одного и того же участка обрабатываемой поверхности детали направление ее большей протяженности на сферической индикатрисе может быть представлено дугой меньшей длины, чем направление на поверхности $Д$ меньшей протяженности и наоборот.

Это следствие того, что размеры и форма сферической индикатрисы отображают не площадь, размеры и форму контура обрабатываемой поверхности детали, а определяемый кривизной поверхности $Д$ характер изменения направления нормали к ней в пределах обрабатываемого ее участка. Иными словами, сферическое отображение представляет собой угловое распределение нормалей к поверхности $Д$.

Взаимно однозначное соответствие между точками на границе обрабатываемого участка поверхности детали и точками ее сферической индикатрисы не является обязательным: оно может иметь место, а может и не иметь.

Сферическое отображение может быть построено не только для всей поверхности детали или для ее фрагмента, но также и для локального участка поверхности $Д$. Поэтому классификация локальных участков поверхностей деталей и инструментов (см. выше, с.103-104) может быть развита, а табл. 1.1. дополнена колонкой, в которой представлены сферические отображения и сферические индикатрисы *локальных* участков поверхностей $Д(И)$. Глобальные сферические отображения и сферические индикатрисы строятся для конкретного случая обработки – в общем виде их классифицировать нельзя.

7.4.3. Положение "центра" сферического отображения обрабатываемого участка поверхности детали. С одного установа обработать всю поверхность детали (см. рис. 7.23) можно только после правильного ее ориентирования на столе станка с ЧПУ. При определении параметров рациональной ориентации детали

следует исходить из того, что ось $O_ш - O_ш$ шпинделя 3-координатного станка с ЧПУ (или нейтральное положение оси шпинделя станка с числом одновременно управляемых от системы ЧПУ координат более трех) должна быть параллельна средневзвешенному положению нормали к поверхности $Д$ детали. Такой подход справедлив при решении задачи рационального ориентирования любой поверхности детали относительно инструмента.

Среденевзвешенное положение нормали к сложной поверхности детали может быть найдено различными способами. Рассмотрим некоторые из них.

7.4.3.1. *Первый способ.* Обрабатываемый участок поверхности $Д$ детали разбивается на множество элементарных участков $\Delta U_{∂.i} \times \Delta V_{∂.i}$ достаточно малых размеров (здесь i – номер соответствующего элементарного участка поверхности $Д$). В некоторой точке M_i в пределах элементарного участка рассчитываются параметры нормали $\mathbf{N}_{∂.i}$:

$$\mathbf{N}_{∂.i} = \left.\frac{\partial \mathbf{r}_∂}{\partial U_∂}\right|_i \times \left.\frac{\partial \mathbf{r}_∂}{\partial V_∂}\right|_i ,$$

которую можно рассматривать как векторный элемент площади поверхности $Д$ детали.

Средневзвешенное положение нормали рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{N}_∂ = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{N}_{∂.i} \cdot \Delta U_{∂.i} \cdot \Delta V_{∂.i}}{S_∂} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{N}_{∂.i} \cdot \Delta S_{∂.i}}{S_∂},$$

где n – количество элементарных участков, на которые разбивается обрабатываемый участок поверхности детали;

$\Delta S_{∂.i}$ – площадь элементарного участка поверхности $Д$;

$S_∂$ – площадь всего обрабатываемого участка поверхности детали (если поверхность $Д$ является композиционной и состоит из m отсеков, то $S_∂ = \sum\limits_{j=1}^{m} S_{∂.j}$, где j – номер текущего отсека композиционной поверхности $Д$).

Переходя к бесконечно малым, получим:

$$\mathbf{N}_∂ = \frac{\int\limits_{S_∂} \mathbf{N}_∂(U_∂, V_∂) dU_∂ dV_∂}{S_∂} . \qquad (7.45)$$

Элемент площади поверхности $Д$ рассчитывается по формуле $dS_∂ = \sqrt{E_∂ G_∂ - F_∂^2}\, dU_∂ dV_∂$. С учетом (1.27) можно записать, что:

$$S_∂ = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{E_∂ G_∂ - F_∂^2}\, dU_∂ dV_∂ ,$$

где Σ – область интегрирования.

Эти формулы могут быть использованы в (45).

Если ставится задача с одного установа обработать не одну, а одновременно несколько поверхностей на детали, то средневзвешенное положение нормали расчитывается по формуле:

$$\mathbf{N}_{\partial} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \int_{S_{\partial}} \mathbf{N}_{\partial.i}(U_{\partial.i}, V_{\partial.i}) dU_{\partial.i} dV_{\partial.i}}{\sum\limits_{i=1}^{k} S_{\partial.i}},$$

где k – количество поверхностей детали, которые обрабатываются с одного установа.

Во втором случае речь идет не о центральной точке на поверхности $Д$ детали, а о центральной точке нескольких (k) обрабатываемых с одного установа поверхностей $Д_k$ детали. Такая точка является центральной точкой детали.

7.4.3.2. <u>*Второй способ*</u>. При задании поверхности $Д$ детали векторным уравнением вида:

$$\mathbf{r}_{\partial} = \mathbf{r}_{\partial}(U_{\partial}, V_{\partial}) = \mathbf{i}X_{\partial}(U_{\partial}, V_{\partial}) + \mathbf{j}Y_{\partial}(U_{\partial}, V_{\partial}) + \mathbf{k}Z_{\partial}(U_{\partial}, V_{\partial})$$

уравнение орта нормали $\mathbf{n}_{\partial}$ можно представить в такой форме:

$$\mathbf{n}_{\partial} = \frac{\left[\frac{\partial(Y_{\partial}; Z_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial(Z_{\partial}; X_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial(X_{\partial}; Y_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]\mathbf{k}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(Y_{\partial}; Z_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2 + \left[\frac{\partial(Z_{\partial}; X_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2 + \left[\frac{\partial(X_{\partial}; Y_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2}}.$$

Это уравнение дает возможность в следующем виде записать зависимости для расчета величин углов α_{∂}, β_{∂}, γ_{∂} между ортом нормали $\mathbf{n}_{\partial}$ и осями системы координат $X_{\partial}Y_{\partial}Z_{\partial}$ в текущей точке M на поверхности $Д$:

$$\alpha_{\partial} = \arccos \frac{\frac{\partial Y_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial V_{\partial}} - \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial U_{\partial}}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(Y_{\partial}; Z_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2 + \left[\frac{\partial(Z_{\partial}; X_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2 + \left[\frac{\partial(X_{\partial}; Y_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2}};$$

$$\beta_{\partial} = \arccos \frac{-\frac{\partial X_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial V_{\partial}} + \frac{\partial X_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \cdot \frac{\partial Z_{\partial}}{\partial U_{\partial}}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(Y_{\partial}; Z_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2 + \left[\frac{\partial(Z_{\partial}; X_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2 + \left[\frac{\partial(X_{\partial}; Y_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2}};$$

$$\gamma_{\partial} = \arccos \frac{\frac{\partial X_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \cdot \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial V_{\partial}} - \frac{\partial X_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \cdot \frac{\partial Y_{\partial}}{\partial U_{\partial}}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(Y_{\partial}; Z_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2 + \left[\frac{\partial(Z_{\partial}; X_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2 + \left[\frac{\partial(X_{\partial}; Y_{\partial})}{\partial(U_{\partial}; V_{\partial})}\right]^2}};$$

Эти зависимости удобно привести к форме:

$$\alpha_{\partial} = \alpha_{\partial}(X_{\partial}, Y_{\partial}, Z_{\partial}); \qquad \beta_{\partial} = \beta_{\partial}(X_{\partial}, Y_{\partial}, Z_{\partial}); \qquad \gamma_{\partial} = \gamma_{\partial}(X_{\partial}, Y_{\partial}, Z_{\partial}).$$

Объем тела с цилиндрической боковой поверхностью, расположенного под заданной уравнением вида $\alpha_{\partial} = \alpha_{\partial}(X_{\partial}, Y_{\partial}, Z_{\partial})$ поверхностью, определяется двойным интегралом (рис. 7.25):

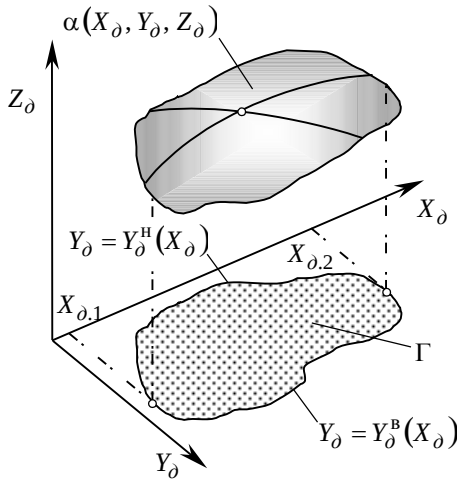


Рис. 7.25. Пример графической интерпретации зависимости $\alpha(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)$.

$$V_\alpha = \iint\limits_{(\Gamma)} \alpha_\partial(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)d\Gamma,$$

где интегрирование производится по области Γ, представляющей собой проекцию поверхности $\alpha_\partial = \alpha_\partial(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)$ на плоскость координат $X_\partial Y_\partial$.

Площадь области интегрирования равна (см. рис.7.25):

$$S_\Gamma = \int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} Y_\partial^{\text{в}}(X_\partial)dX_\partial - \int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} Y_\partial^{\text{н}}(X_\partial)dX_\partial. \qquad (46)$$

Средневзвешенное значение $\bar{\alpha}_\partial$ угла α_∂ для обрабатываемого участка поверхности $Д$ рассчитывается по формуле

$$\bar{\alpha}_\partial = \frac{\iint\limits_{(\Gamma)} \alpha_\partial(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)d\Gamma}{S_\Gamma}. \qquad (47)$$

Двойной интеграл в (47) так выражается через повторный:

$$\iint\limits_{(\Gamma)} \alpha_\partial(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)d\Gamma = \int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} dX_\partial \int\limits_{Y_\partial^{\text{н}}}^{Y_\partial^{\text{в}}} \alpha_\partial(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)dY_\partial. \qquad (7.48)$$

С учетом (46) и (48) можно записать:

$$\bar{\alpha}_\partial = \frac{\int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} dX_\partial \int\limits_{Y_\partial^{\text{н}}(X_\partial)}^{Y_\partial^{\text{в}}(X_\partial)} \alpha_\partial(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)dY_\partial}{\int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} Y_\partial^{\text{в}}(X_\partial)dX_\partial - \int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} Y_\partial^{\text{н}}dX_\partial}.$$

Аналогичные зависимости справедливы и для усредненных значений $\bar{\beta}_\partial$ и $\bar{\gamma}_\partial$ углов β_∂ и γ_∂ соответственно:

$$\bar{\beta}_\partial = \frac{\int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} dX_\partial \int\limits_{Y_\partial^{\text{н}}(X_\partial)}^{Y_\partial^{\text{в}}(X_\partial)} \alpha_\partial(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)dY_\partial}{\int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} Y_\partial^{\text{в}}(X_\partial)dX_\partial - \int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} Y_\partial^{\text{н}}dX_\partial};$$

$$\bar{\gamma}_\partial = \frac{\int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} dX_\partial \int\limits_{Y_\partial^{\text{н}}(X_\partial)}^{Y_\partial^{\text{в}}(X_\partial)} \alpha_\partial(X_\partial, Y_\partial, Z_\partial)dY_\partial}{\int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} Y_\partial^{\text{в}}(X_\partial)dX_\partial - \int\limits_{X_{\partial.1}}^{X_{\partial.2}} Y_\partial^{\text{н}}dX_\partial}.$$

По рассчитанным усредненным значениям $\bar{\alpha}_\partial$, $\bar{\beta}_\partial$, $\bar{\gamma}_\partial$ устанавливается точка (или точки) M на поверхности $Д$ детали, орт нормали $\mathbf{n}_\partial$ в которой (в которых) наклонен к осям системы координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ под этими углами.

7.4.3.3. *Третий способ*. Зависимости для расчета средневзвешенных значений углов $\bar{\alpha}_\partial$, $\bar{\beta}_\partial$, $\bar{\gamma}_\partial$ можно получить в ином виде (рис. 7.26). Усредненное значение $\bar{\alpha}_\partial$ угла α_∂ равно:

$$\bar{\alpha}_{\partial} = \frac{\int\limits_{(S)} \alpha_{\partial} dS_{\partial}}{S_{\partial}} = \frac{\int\limits_{(S)} \alpha_{\partial}(X_{\partial}, Y_{\partial}, Z_{\partial}) dS_{\partial}}{\int\limits_{(S)} dS_{\partial}} =$$

$$= \frac{\iint\limits_{\Delta} \alpha_{\partial}\left[X_{\partial}(U_{\partial};V_{\partial}); Y_{\partial}(U_{\partial};V_{\partial}); Z_{\partial}(U_{\partial};V_{\partial})\right]\sqrt{E_{\partial}G_{\partial} - F_{\partial}^2}\, dU_{\partial} dV_{\partial}}{\iint\limits_{\Delta} \sqrt{E_{\partial}G_{\partial} - F_{\partial}^2}\, dU_{\partial} dV_{\partial}} =$$

$$= \frac{\int\limits_{U_{\partial.1}}^{U_{\partial.2}} dU_{\partial} \int\limits_{V_{\partial.1}}^{V_{\partial.2}} \alpha_{\partial}\left[X_{\partial}(U_{\partial};V_{\partial}); Y_{\partial}(U_{\partial};V_{\partial}); Z_{\partial}(U_{\partial};V_{\partial})\right]\sqrt{E_{\partial}G_{\partial} - F_{\partial}^2}\, dV_{\partial}}{\int\limits_{U_{\partial.1}}^{U_{\partial.2}} dU_{\partial} \int\limits_{V_{\partial.1}}^{V_{\partial.2}} \sqrt{E_{\partial}G_{\partial} - F_{\partial}^2}\, dV_{\partial}},$$

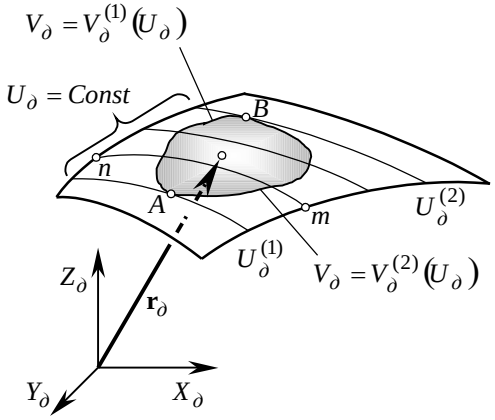


Рис. 7.26. К определению средневзвешенного значения угла $\bar{\alpha}_{\partial}$.

где Δ – область изменения аргументов, а $V_{\partial} = V_{\partial}^{(1)}(U_{\partial})$ и $V_{\partial} = V_{\partial}^{(2)}(U_{\partial})$ – уравнения контура, ограничивающего площадку S_{∂} (линии AmB и AnB).

Аналогичные зависимости справедливы и для усредненных значений $\bar{\beta}_{\partial}$ и $\bar{\gamma}_{\partial}$ углов β_{∂} и γ_{∂}.

7.4.3.4. Четвертый способ. Если сферическая индикатриса обрабатываемого участка поверхности $Д$ детали симметрична, определение средневзвешенного положения орти нормали $\mathbf{n}_{\partial}$ может быть упрощено. В этом случае следует провести радиус-векторы к наиболее удаленным одна от другой (или к наиболее близким) точкам сферической индикатрисы поверхности $Д$. Затем строится биссектриса угла, образованного этими радиус-векторами. Направление искомой нормали совпадает с направлением построенной биссектрисы. Полученное таким путем решение будет точным для поверхностей $Д$ с симметричной сферической индикатрисой. Чем в большей степени сферическая индикатриса поверхности $Д$ детали асимметрична, тем менее точным будет решение.

Использование рассматриваемого подхода (когда сферическая индикатриса поверхности $Д$ детали симметрична или когда его допустимо использовать для поверхностей $Д$, сферическая индикатриса которых имеет форму, незначительно отличающуюся от симметричной) упрощает составление алгоритмов расчета и программирование решения задачи рационального ориентирования детали на столе станка с ЧПУ.

Рассмотренный подход к решению задачи рационального ориентирования детали на столе многокоординатного станка с ЧПУ может быть адаптирован и применен к решению задачи рационального ориентирования инструмента относительно детали при обработке деталей общемашиностроительного назначения, которая выполняется на металлорежущих станках, воспроизводящих "*жесткую*" кинематику формообразования.

7.4.4. Приведение детали в наивыгоднейшее положение. В наивыгоднейшем положение детали на столе станка с ЧПУ орт нормали $\mathbf{n}_{\partial}$ к поверхности $Д$ в ее точке, соответствующей центру сферического отображения, параллелен оси вращения шпинделя 3-координатного станка с ЧПУ или нейтральному положению оси вращения шпинделя многокоординатного станка с ЧПУ.

В исходном положении детали нормаль $\mathbf{n}_{\partial}$ составляет с осями системы координат $X_{\partial}Y_{\partial}Z_{\partial}$ углы α, β, γ. Эти углы удобно показать на сферической индикатрисе поверхности $Д$ детали (рис. 7.20), что правомер-

но, поскольку согласно (32) нормаль $\mathbf{n}_\partial$ параллельна радиус-вектору центра сферического отображения. Очевидно, что для станков с ЧПУ, имеющих вертикально расположенный шпиндель, наивыгоднейшее положение поверхности $Д$ на столе станка будет таким, при котором центр сферической индикатрисы находится в точке M_0^* пересечения сферы единичного радиуса осью Z_∂, а ее радиус-вектор $\mathbf{r}_{\partial 0}$ затимает положение $\mathbf{r}_{\partial 0}^*$ (см. рис. 7.27).

Приведение поверхности $Д$ в наивыгоднейшее положение осуществляется так.

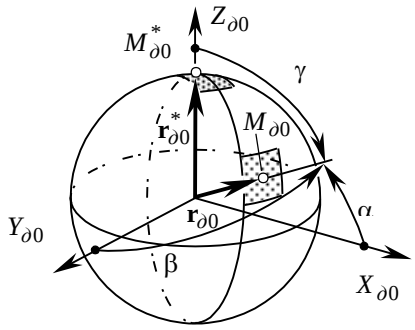


Рис. 7.27. Сферическое отображение поверхности $Д$ в исходном положении детали ($M_{\partial 0}$) и после ее приведения в наивыгоднейшее положение ($M_{\partial 0}^*$).

Систему координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, связанную с деталью, и систему координат $X_c Y_c Z_c$ детали в ее наивыгоднейшем положении на столе станка с ЧПУ можно рассматривать как исходное и последующее положения одного и того же трехгранника, совершающего в определенной последовательности повороты вокруг тех или иных ребер, или как исходное и конечное положения этого же трехгранника, совершающего как твердое тело поворот вокруг некоторой направленной оси $O\varsigma_\Omega$.

Введем обозначение $\mathbf{i}_c$, $\mathbf{j}_c$, $\mathbf{k}_c$ ортов осей координат X_c, Y_c и Z_c. Обозначим далее ребра подвижного трехгранника ортами $\mathbf{i}_\partial$, $\mathbf{j}_\partial$, $\mathbf{k}_\partial$. Для них справедливы соотношения:

$$\mathbf{i}_\partial = \mathbf{j}_\partial \times \mathbf{k}_\partial ; \quad \mathbf{j}_\partial = \mathbf{k}_\partial \times \mathbf{i}_\partial ; \quad \mathbf{k}_\partial = \mathbf{i}_\partial \times \mathbf{j}_\partial ;$$

$$\mathbf{i}_\partial \times \mathbf{i}_\partial = \mathbf{j}_\partial \times \mathbf{j}_\partial = \mathbf{k}_\partial \times \mathbf{k}_\partial = 0 ;$$

$$\mathbf{i}_\partial \cdot \mathbf{i}_\partial = \mathbf{j}_\partial \cdot \mathbf{j}_\partial = \mathbf{k}_\partial \cdot \mathbf{k}_\partial = 1;$$

$$\mathbf{i}_\partial \cdot \mathbf{j}_\partial = \mathbf{j}_\partial \cdot \mathbf{k}_\partial = \mathbf{k}_\partial \cdot \mathbf{i}_\partial = 0 .$$

Исходное положение трехгранника $\mathbf{i}_\partial\, \mathbf{j}_\partial\, \mathbf{k}_\partial$ совпадает с ортами системы координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, а конечное – с системой координат $X_c Y_c Z_c$. Переход от системы координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ к системе координат $X_c Y_c Z_c$ можно представить как перемещение трехгранника $\mathbf{i}_\partial\, \mathbf{j}_\partial\, \mathbf{k}_\partial$ из положения $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ в положение $X_c Y_c Z_c$ последовательными поворотами вокруг трех ребер.

Следует отметить, что если подвижный трехгранник $\mathbf{i}_\partial\, \mathbf{j}_\partial\, \mathbf{k}_\partial$ первоначально совпадает с трехгранником $\mathbf{i}_c\, \mathbf{j}_c\, \mathbf{k}_c$, то повороты, совершаемые последовательно вокруг ребер $\mathbf{i}_\partial\, \mathbf{j}_\partial\, \mathbf{k}_\partial$, приводят к тому же результату, что и повороты вокруг осей $\mathbf{i}_c$, $\mathbf{j}_c$ и $\mathbf{k}_c$, совершаемые в обратном порядке (Громов Г.Н., 1986). Эта теорема позволяет вместо поворотов вокруг мгновенных осей рассматривать повороты вокруг неподвижных осей.

Если $X_\partial^{(M)}, Y_\partial^{(M)}, Z_\partial^{(M)}$ – координаты некоторой точки M в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, а $X_c^{(M)}, Y_c^{(M)}, Z_c^{(M)}$ – координаты той же точки M в системе координат $X_c Y_c Z_c$, то

$$\left| X_c^{(M)}\, Y_c^{(M)}\, Z_c^{(M)} \right|^T = \mathbf{Rs}\,(Д \to C) \cdot \left| X_\partial^{(M)}\, Y_\partial^{(M)}\, Z_\partial^{(M)} \right|^T ,$$

где $\mathbf{Rs}\,(Д \to C)$ – составленный из направляющих косинусов осей X_c, Y_c и Z_c в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ оператор преобразования:

$$\mathbf{Rs}(Д \to C) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\partial} \cdot \mathbf{i}_c & \mathbf{i}_{\partial} \cdot \mathbf{j}_c & \mathbf{i}_{\partial} \cdot \mathbf{k}_c \\ \mathbf{j}_{\partial} \cdot \mathbf{i}_c & \mathbf{j}_{\partial} \cdot \mathbf{j}_c & \mathbf{j}_{\partial} \cdot \mathbf{k}_c \\ \mathbf{k}_{\partial} \cdot \mathbf{i}_c & \mathbf{k}_{\partial} \cdot \mathbf{j}_c & \mathbf{k}_{\partial} \cdot \mathbf{k}_c \end{bmatrix}.$$

Элементы m_{i1}, m_{i2}, m_{i3} i-й строки оператора $\mathbf{Rs}(Д \to C)$ есть направляющие косинусы осей X_c, Y_c и Z_c в системе координат $X_{\partial}Y_{\partial}Z_{\partial}$, а элементы m_{1j}, m_{2j}, m_{3j} его j-го столбца – направляющие косинусы осей X_{∂}, Y_{∂} и Z_{∂} – в системе координат $X_cY_cZ_c$.

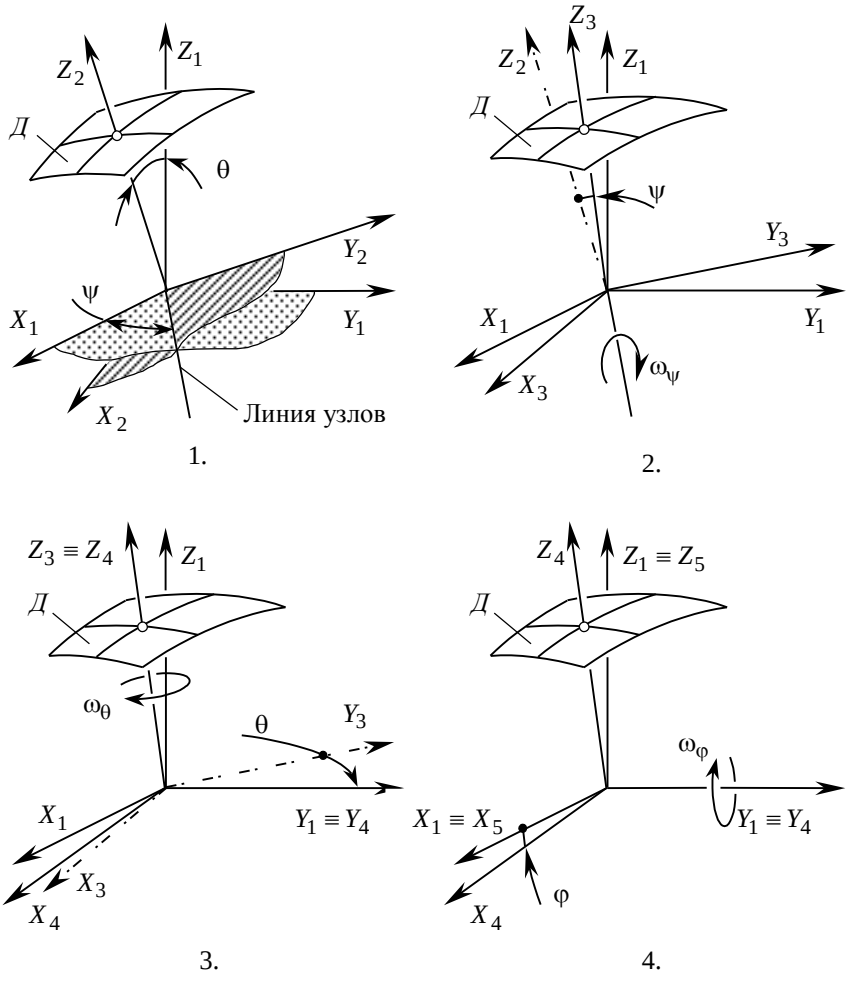


Рис. 7.28. Приведение детали в наивыгоднейшее положение на столе многокоординатного станка с ЧПУ.

Все возможные последовательности поворотов одной системы координат относительно другой можно совершить оператором преобразования Эйлера или операторами преобразования Эйлера-Крылова.

Положение одной (новой) системы координат относительно исходной (старой) может быть полностью определено введенными Эйлером тремя углами (рис. 7.28):

1. углом нутации θ – он измеряется между положительными направлениями осей Z_1 и Z_2 $(0 \le \theta \le \pi)$;

2. углом прецессии ψ – он измеряется между осью X_1 и прямой OA пересечения плоскостей X_1Y_1 и X_2Y_2, на которой выбрано положительное направление так, что OA и оси Z_1 и Z_2 образуют тройку той же ориентации, что и исходная система координатн; угол прецессии ψ отсчитывается от оси X_1 к оси Y_1 $(0 \le \psi \le 2\pi)$;

3. углом чистого вращения φ – он измеряется между направлением OA и осью X_2; направление его отсчета устанавливается от оси X_2 к оси Y_2 $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

В общепринятых обозначениях направляющие косинусы осей систем координат соответственно равны:

$$l_1 = \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi; \qquad l_2 = -\cos\psi\sin\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi; \qquad l_3 = \sin\theta\sin\psi;$$

$$m_1 = \sin\psi\cos\varphi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi; \qquad m_2 = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi; \qquad m_3 = -\sin\theta\cos\psi;$$

$$n_1 = \sin\theta \sin\varphi; \qquad n_2 = \sin\theta \cos\varphi; \qquad n_3 = \cos\theta.$$

Поворот осей координат описывается так (см. рис. 7.28):

$$X_1 = l_1 X_2 + l_2 Y_2 + l_3 Z_2; \qquad Y_1 = m_1 X_2 + m_2 Y_2 + m_3 Z_2; \qquad Z_1 = n_1 X_2 + n_2 Y_2 + n_3 Z_2.$$

Обратный поворот:

$$X_2 = l_1 X_1 + l_2 Y_1 + l_3 Z_1; \qquad Y_2 = m_1 X_1 + m_2 Y_1 + m_3 Z_1; \qquad Z_2 = n_1 X_1 + n_2 Y_1 + n_3 Z_1.$$

Определитель преобразования равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}.$$

Помним, что направляющие косинусы вектора в трехмерном пространстве равны: $l = \cos\alpha$; $m = \cos\beta$; $n = \cos\gamma$; при этом $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, а угол ϕ между двумя заданными направлениями рассчитывается по формуле: $\phi = \arccos(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)$.

Если требуемое положение трехгранника относительно исходного его положения определено тремя углами Эйлера, то трехгранник $\mathbf{i}_\partial\, \mathbf{j}_\partial\, \mathbf{k}_\partial$ можно переместить из исходного в конечное положение, совершая один за другим три последовательных поворота, один из которых повторится дважды.

Преобразованию этого вида соответствует последовательность поворотов трехгранника $\mathbf{i}_\partial\, \mathbf{j}_\partial\, \mathbf{k}_\partial$ сначала вокруг ребра $\mathbf{k}_\partial$ на угол прецессии ψ , затем вокруг переместившегося в новое положение ребра $\mathbf{i}_\partial$, или, что то же самое, вокруг линии узлов, на угол нутации θ и, наконец, на угол чистого вращения φ вокруг ребра $\mathbf{k}_\partial$, которое теперь совпадает с конечным положением ребра $\mathbf{k}_\partial$ и осью X_c системы координат $X_c Y_c Z_c$.

В рассматриваемом случае приведение детали в наивыгоднейшеее ее положение на столе станка осуществляется при помощи оператора $\mathbf{Eu}(\phi, \theta, \psi)$ [1] преобразования Эйлера (Paul, R.P., 1981, с.45):

$$\mathbf{Eu}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{Rt}(Z, \phi) \cdot \mathbf{Rt}(Y, \theta) \cdot \mathbf{Rt}(Z, \psi);$$

$$\mathbf{Eu}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\theta \cos\psi - \sin\phi \sin\psi & -\cos\phi \cos\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi & \cos\phi \cos\theta & 0 \\ \sin\phi \cos\theta \cos\psi + \cos\phi \sin\psi & -\sin\phi \cos\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \sin\phi \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta \cos\psi & \sin\theta \sin\psi & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что используются и другие наборы углов Эйлера, например, второй поворот трехгранника $\mathbf{i}_\partial\, \mathbf{j}_\partial\, \mathbf{k}_\partial$ осуществляется не вокруг ребра $\mathbf{i}_\partial$, а вокруг ребра $\mathbf{j}_\partial$ (Парлс Л.А., 1971).

Если исходное и требуемое положения детали определено одно относительно другого тремя углами Эйлера-Крылова, возможно только две существенно различные последовательности поворотов, переводящих трехгранник из исходного положения в требуемое.

Совершая один за другим три последовательных поворота вокруг каждого из ребер, трехгранник $\mathbf{i}_\partial\, \mathbf{j}_\partial\, \mathbf{k}_\partial$ можно переместить из исходного положения в требуемой путем использования преобразования Эйлера-Крылова первого или второго рода.

---

[1] Обозначение $\mathbf{Euler}(\phi, \theta, \psi)$ оператора преобразования Эйлера введено Paul, R.P. (1981).

Преобразование Эйлера-Крылова первого рода сводится к повороту трехгранника $\mathbf{i}_\partial\,\mathbf{j}_\partial\,\mathbf{k}_\partial$ вокруг ребра $\mathbf{i}_\partial$ на угол δ, вокруг ребра $\mathbf{j}_\partial$ на угол ς и вокруг ребра $\mathbf{k}_\partial$ на угол η. Оператор $\mathbf{Eu}_{Kr}^{(1)}(\delta,\varsigma,\eta)$ этого преобразования имеет вид:

$$\mathbf{Eu}_{Kr}^{(1)}(\delta,\varsigma,\eta)=\begin{bmatrix}\cos\varsigma\cos\eta & \sin\delta\sin\varsigma\cos\eta+\cos\delta\sin\eta & -\cos\delta\sin\varsigma\cos\eta+\sin\delta\sin\eta & 0\\ -\cos\varsigma\sin\eta & -\sin\delta\sin\varsigma\sin\eta+\cos\delta\cos\eta & \cos\delta\sin\varsigma\sin\eta+\sin\delta\cos\eta & 0\\ \sin\varsigma & -\sin\delta\cos\varsigma & \cos\delta\cos\varsigma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Преобразование Эйлера-Крылова второго рода предусматривает поворот трехгранника $\mathbf{i}_\partial\,\mathbf{j}_\partial\,\mathbf{k}_\partial$ вокруг ребра $\mathbf{j}_\partial$ на угол ς^*, вокруг ребра $\mathbf{i}_\partial$ на угол δ^* и вокруг ребра $\mathbf{k}_\partial$ на угол η^*. Оператор $\mathbf{Eu}_{Kr}^{(2)}(\delta,\varsigma,\eta)$ этого преобразования записывается так:

$$\mathbf{Eu}_{Kr}^{(2)}(\delta,\varsigma,\eta)=\begin{bmatrix}\sin\varsigma^*\sin\delta^*\sin\eta^*+\cos\delta^*\cos\eta^* & \cos\delta^*\cos\eta^* & \cos\varsigma^*\sin\delta^*\sin\eta^*-\sin\varsigma^*\cos\eta^* & 0\\ \sin\varsigma^*\sin\delta^*\cos\eta^*-\cos\varsigma^*\sin\eta^* & \cos\delta^*\cos\eta^* & \cos\varsigma^*\sin\delta^*\cos\eta^*+\sin\varsigma^*\sin\eta^* & 0\\ \sin\varsigma^*\cos\delta^* & -\sin\delta^* & \cos\varsigma^*\cos\delta^* & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Положительным значениям углов в операторах преобразований $\mathbf{Eu}(\phi,\theta,\psi)$, $\mathbf{Eu}_{Kr}^{(1)}(\delta,\varsigma,\eta)$ и $\mathbf{Eu}_{Kr}^{(2)}(\delta^*,\varsigma^*,\eta^*)$ здесь и далее соответствуют повороты трехгранника $\mathbf{i}_\partial\,\mathbf{j}_\partial\,\mathbf{k}_\partial$ вокруг ребер против часо-вой стрелки, если смотреть на вершину трехгранника с конца соответствующего его ребра. Если в каком-либо случае поворот совершается по часовой стрелке, то в операторах преобразований $\mathbf{Eu}(\phi,\theta,\psi)$, $\mathbf{Eu}_{Kr}^{(1)}(\delta,\varsigma,\eta)$ и $\mathbf{Eu}_{Kr}^{(2)}(\delta^*,\varsigma^*,\eta^*)$ значения $\sin(-\varphi_i)$ и $\cos(-\varphi_i)$ следует заменить на $-\sin\varphi_i$ и $\cos\varphi_i$ соответственно.

Таким образом возможно всего лишь три существенно отличных один от другого преобразования, переводящего трехгранник $\mathbf{i}_\partial\,\mathbf{j}_\partial\,\mathbf{k}_\partial$ из исходного положения в требуемое. Любое другое преобразование, состоящее из трех последовательных поворотов вокруг ребер трехгранника $\mathbf{i}_\partial\,\mathbf{j}_\partial\,\mathbf{k}_\partial$, сводится к одному из рассмотренных выше. Каждое из этих трех преобразований может быть использовано для приведения поверхности $Д$ детали в наивыгоднейшее ее положение на столе станка с ЧПУ.

7.4.5. Учет ограничений, накладываемых предельными величинами ходов стола станка с ЧПУ. Для окончательного решения задачи о наивыгоднейшем положении детали на столе многокоординатного станка с ЧПУ требуется правильно расположить деталь в зоне обработки[1] – так, чтобы каждая точка обрабатываемой поверхности $Д$ была досягаемой для инструмента.

Величины ходов стола станка с ЧПУ в его продольном и поперечном направлениях ограниченны – существуют предельные величины рабочих перемещений стола станка в двух взаимно перпендикулярных направлениях (в продольном и в поперечном соответственно). В реальном процессе обработки необходимо учитывать ограничения диапазона движений: как поступательных, так и поворотных. Если в конструкции станка дополнительно предусмотрена возможность управляемого перемещения инструментального шпинделя в плоскости стола, это расширяет технологические возможности станка, но не снимает ограничения рассматриваемого типа.

В плоскости стола станка с ЧПУ всегда можно очертить прямоугольник (или, в зависимости от конструктивных особенностей станка, другую фигуру), при расположении детали в пределах которого обработка ее поверхности $Д$ возможна, а за его пределами – нет.

---

[1]Понятие “зона обработки” следует понимать как часть объема технологического пространства, в пределах которого каждая точка поверхности детали может касаться исходной инструментальной поверхности применяемого инструмента.

Аналогично для станков с поворотным столом можно определить окружность наибольшего радиуса, при размещении детали в пределах которой обработка поверхности $Д$ возможна, а за ее пределами – нет. Если же в конструкции станка дополнительно предусмотрена возможность перемещения инструментального шпинделя в плоскости стола станка, это увеличивает радиус указанной окружности, но также не снимает ограничения рассматриваемого типа.

Поэтому правильно сориентированную деталь следует таким образом разместить на столе станка с ЧПУ и закрепить ее в этом положении, чтобы проекция обрабатываемой поверхности $Д$ на плоскость стола станка не выходила за пределы указанного прямоугольника (окружности или плоской фигуры, состоящей из дуг окружностей и прямых линий) и находилась возможно ближе к его центру, иными словами, чтобы проекция поверхности $Д$ находилась в пределах замкнутого контура, который может быть охвачен инструментом в его движении относительно стола станка. Этим учитываются габариты стола станка и предельные величины его перемещений.

Перемещения стола в вертикальном направлении (или аналогичные перемещения инструментального шпинделя в станках с ЧПУ, в конструкциях которых стол не имеет вертикальных перемещений) также ограниченны. Поэтому следует правильно располагать деталь по высоте с тем, чтобы условия обработки наиболее низко и наиболее высоко расположенных участков поверхности детали возможно меньше отличались между собой и от условий обработки ее срединной части.

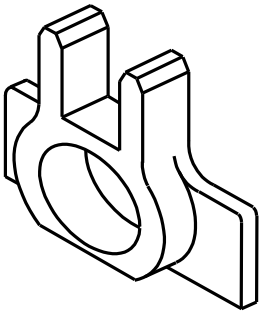


Рис. 7.29. Пример сложной детали, ограниченной совокупностью плоскостей и круглых цилиндров.

Изложенное справедливо как в случае обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ, так и в случае обработки сложных деталей, ограниченных несколькими относительно простыми поверхностями, например, деталей типа (рис. 7.29). В этом случае изложенным методом решается задача определения такой ориентации заготовки на столе станка, чтобы с одного установа можно было обработать:

- либо наибольшее количество отдельных поверхностей детали (при этом минимизируется количество переустановок заготовки);
- либо наибольшая суммарная площадь поверхностей детали. Это оправдано, когда, например, площадь одной из обрабатываемых поверхностей детали много больше каждой из остальных или даже всех остальных вместе взятых. В этом случае для расчета параметров наивыгоднейшей ориентации детали следует использовать понятие о средневзвешенном значении участка площади обрабатываемой поверхности.

Еще одна причина невозможности обработки детали: возможность столкновения детали (заготовки) с узлами станка, элементами крепежа, подвижных узлов станка между собой и с неподвижными частями и т.п. Дополнительно необходимо следить за тем, чтобы инструмент, срезая припуск в одном месте (например, в некоторой точке K_1) не задевал заготовку своим корпусом в том месте, где припуск еще не срезан (например, в другой точке K_2): для исключения возможности интерференции такого типа требуется вводить в рассмотрение уравнение поверхности заготовки – поверхности, отстоящей от номинальной поверхности детали на толщину припуска.

Такого типа задачи могут быть аналитически представлены и решены методами, разработанными в теории формообразования поверхностей деталей. Исключить возможность столкновений подвижных и неподвижных элементов конструкции станка с ЧПУ можно, введя в программу обработки ограничения, аналитически описанные с позиций необходимости выполнения четвертого условия формообразования поверхностей деталей. Однако это сложно и часто приводит к неоправданно громоздкому аналитическому описанию необходимых ограничений. По этой причине на практике применяются эффективные средства решения указанных задач, основанные на других принципах.

Например, способ[1] обработки сложных поверхностей деталей на станках с ЧПУ позволяет исключить возможность столкновения режущего инструмента с расположенными рядом частями станка. Датчики автоматически ощупывают сложную поверхность детали и окружающие заготовку части станка, а поступающие от

---

[1] *Способ обработки по копиру сложной формы на станке с ЧПУ*. Digitalisier-Verfahren mit Kollisionsprufung: Заявка 0450113 ЕПВ, МКИ[5] G05 B 19/42/ Schwefel Ernest; Johannes Heidenhain GmbH. – №90106287.7; Заявл. 02.04.90; Опубл. 09.10.91. [РЖ 14Б, №9/1992, реф.9Б107П].

них сигналы используются для образования совокупности данных о форме изделия и для контроля за отсутствием столкновений окружающих заготовку деталей станка с инструментом. Эти данные поступают в память устройства ЧПУ и выводятся на дисплей. В качестве датчиков используется многокоординатный переключающий или измерительный прибор бесконтактного типа, описывающий траекторию, например, типа спирали.

Известны также другие подходы (Cho, I., *et al*,1997; Choi, B.K., Jerard, R.B., 1998; Mirtich, B., 1998; Morishige, K., *et al*, 1997; и др.), применение которых позволяет исключить возможность столкновения подвижных и неподвижных элементов конструкции станка между собой, с заготовкой, с инструментом и т.п.

7.4.6. Сферические отображения исходных инструментальных поверхностей. Исходная инструментальная поверхность $И$ режущего инструмента, образованная как $\mathbb{R}$-отображение поверхности детали, может иметь форму, не менее сложную, чем обрабатываемая поверхность $Д$. Сферическое отображение может быть построено для поверхности $И$ любого инструмента. В качестве примера рассмотрим наиболее часто применяемые для обработки сложных поверхностей деталей на станках с ЧПУ режущие инструменты и соответствующие им сферические отображения их исходных инструментальных поверхностей (рис. 7.30).

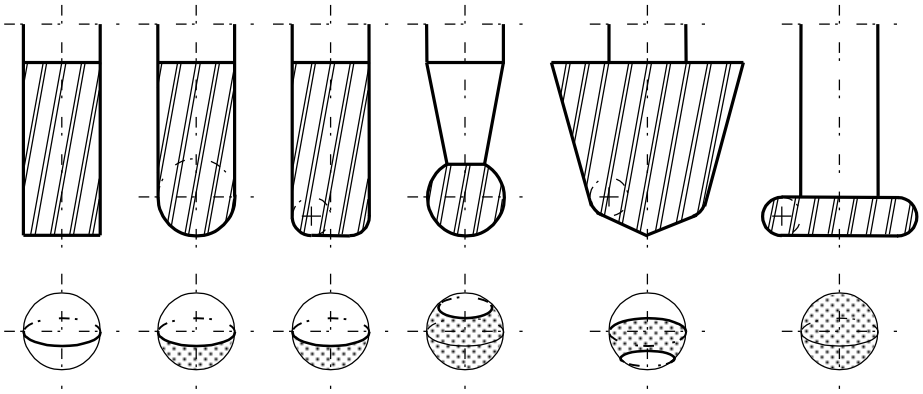


Рис. 7.30. Примеры отображений Гаусса и сферических индикатрис исходных инструментальных поверхностей универсальных инструментов для обработки сложных поверхностей деталей.

Наиболее часто применяемые для обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ инструменты имеют сферические отображения следующих видов (см. рис. 7.30):

- пальцевая фреза с плоским торцом (рис. 7.30.1) – окружность наибольшего диаметра на сфере единичного радиуса (экватор) и ее нижнюю (полярную) точку;
- пальцевая фреза с полусферической рабочей частью (рис. 7.30.2) – всю нижнюю часть полусферы единичного радиуса;
- пальцевая фреза с закругленным (торообразным) торцом (рис. 7.30.3) – всю нижнюю часть полусферы единичного радиуса;
- концевая фреза со сферической головкой (рис. 7.30.4) – всю нижнюю часть полусферы единичного радиуса и примыкающую к ней часть верхней полусферы;
- фреза обобщенной ($АРТ$) конструкции (рис. 7.25.5) – пояс на нижней части полусферы единичного радиуса;
- грибковая фреза с торообразной производящей поверхностью $И$ (рис. 7.30.6) – всю сферу единичного радиуса.

Как правило, технологические возможности инструмента тем шире, чем большую площадь охватывает сферические отображения его исходной инструментальной поверхности $И$.

Очевидно, что отображение Гаусса и сферическая индикатриса могут быть построены для исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента любой конструкции. Для этого достаточно использовать рассмотренный выше подход к построению отображения Гаусса и сферических индикатрис для поверхностей $Д$ деталей[1].

7.4.7. Расширенные сферические отображения и расширенные индикатрисы поверхности детали и исходной инструментальной поверхности. В процессе многокоординатной обработки сложной поверхности

[1]В дополнение к сферическим отображениям поверхности детали и инструмента можно построить центральные проекции их сферических отображений на плоскость и вместо собственно сферических отображений и сферических индикатрис поверхностей $Д$ и $И$ использовать их центральные проекции. Несложно вывести уравнения центральных проекций сферического отображения и сферической индикатрисы поверхности $Д(И)$.

детали заготовка и инструмент всегда перемещаются один относительно другого. Придерживаясь принципа суперпозиции, рассмотрим что происходит со сферическим отображением поверхности $И$ при движении инструмента относительно детали. Считаем при этом, что все условия формообразования поверхностей деталей выполняются.

В каждой точке касания поверхностей $Д$ и $И$ нормали к этим поверхностям направлены взаимно противоположно. Поэтому чтобы на одной сфере единичного радиуса построить удобные для последующего анализа сферические индикатрисы поверхности детали и исходной инструментальной поверхности, воспользуемся понятием *антипоидальных точек* (Kells, L.M., *et al*, 1951). Антипоидальные точки[1] на сфере единичного радиуса представляют собой пары диаметрально противоположно расположенных точек. Если гауссово отображение $GMap(И)$ исходной инструментальной поверхности $И$ отобразить центрально-симметрично, получим его *антипоидальное сферическое отображением* $GMap_A(И)$.

Анализ относительного расположения гауссового отображения $GMap(Д)$ обрабатываемой поверхности $Д$ детали и антипоидального сферического отображения $GMap_A(И)$ исходной инструментальной поверхности $И$ позволяет сформулировать:

Теорема 7.1. *Обработка детали возможна в случае, если сферическое отображение* $GMap(Д)$ ее *поверхности* $Д$ *целиком располагается внутри антипоидального сферического отображения* $GMap_A(И)$ *исходной инструментальной поверхности* $И$ *применяемого инструмента.*

Это необходимое, но не достаточное условие возможности обработки в полном соответствие с требованиями чертежа заданной детали заданным инструментом на заданном станке.

Теорема 7.2. *Если какая-либо часть сферического отображения* $GMap(Д)$ *поверхности* $Д$ *находится вне пределов антипоидального сферического отображения* $GMap_A(И)$ *исходной инструментальной поверхности, то осуществить обработку детали в полном соответствие с требованиями чертежа невозможно.*

Это достаточное условие невозможности обработки заданной детали заданным инструментом на заданном станке.

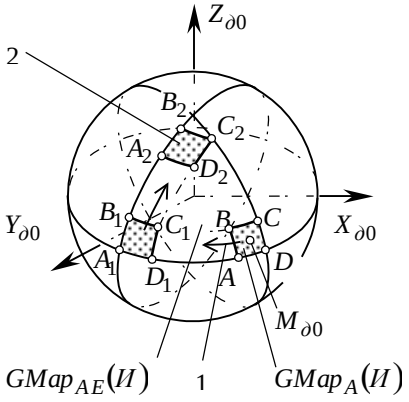


Рис. 7.31. К построению расширенного сферического отбражения $GMap_A(И)$ исходной инструментальной поверхности.

В случае обработки детали на трехкоординатном станке с ЧПУ положение сферического отображения $GMap(Д)$ поверхности $Д$ фиксировано и может быть изменено только путем изменения ориентации детали на столе станка. Поэтому возможности управления процессом обработки ограниченны. Это проявляется, в частности, в том, что управлять положением сферического отображения $GMap(Д)$ поверхности $Д$ относительно сферического отображения $GMap_A(И)$ поверхности $И$ можно только путем изменения конструктивных параметров применяемого инструмента.

В процессе многокоординатной обработки сложных поверхностей деталей режущий инструмент имеет большее количество степеней свободы, которые позволяют антипоидальному сферическому отображению $GMap_A(И)$ его исходной инструментальной поверхности перемещаться по сфере единичного радиуса, образуя при этом *расширенное антипоидальное сферическое отображение* $GMap_{AE}(И)$ поверхности $И$. Например (рис. 7.31), для случая трехкоординатной обработки антипоидальное сферическое отображение $GMap_A(И)$ поверхности $И$ занимает фиксированную область $ABCD$. Добавление четвертой управляемой

[1]Такие точки (как и др. геометрические образы) называют также “симметричными” (Степанов Н.Н., 1948) или “центрально-симметричными”.

от системы ЧПУ координаты приводит к тому, что антипоидальное сферическое отображение $GMap_A(И)$ поверхности $И$ инструмента перемещается в направлении 1 – расширяется и в результате этого охватывает область A_1B_1CD. Введение в рассмотрение дополнительной пятой и шестой управляемых от системы ЧПУ координат приводит к расширению антипоидального сферического отображения $GMap_A(И)$ исходной инструментальной поверхности в направлении 2 и др.

Участок поверхности сферы единичного радиуса, покрываемый антипоидальным сферическим отображением $GMap_A(И)$ поверхности $И$ в таком движении является *расширенным антипоидальным сферическим отображением* $GMap_{AE}(И)$ исходной инструментальной поверхности. Граница сферического отображения $GMap_{AE}(И)$ является расширенной антипоидальной сферической индикатрисой $GInd_{AE}(И)$ поверхности $И$ инструмента.

При обработке сложных поверхностей деталей на трехкоординатных станках с ЧПУ ориентация заготовки на столе станка фиксирована. Поэтому расширенная антипоидальная сферическая индикатриса $GMap_{AE}(И)$ поверхности $И$ и ее расширенное антипоидальное сферическое отображение $GMap_{AE}(И)$ не могут поворачиваться вокруг оси, проходящей через начало системы координат.

При известной кинематике формообразования для обрабатываемой заданным инструментом поверхности $Д$ детали параметры расширенной исходной $GInd_E(И)$ и расширенной антипоидольной $GInd_{AE}(И)$ сферических индикатрис поверхности $И$ могут быть рассчитаны методами сферической тригонометрии (Степанов Н.Н., 1948; Kells, L.M., *et al*, 1951).

В общем случае справедливы следующие две теоремы:

Теорема 7.3. *Обработка детали возможна, если сферическое отображение* $GMap(Д)$ *ее поверхности* $Д$ *полностью расположено внутри расширенного антипоидального сферического отображения* $GMap_{AE}(И)$ *исходной инструментальной поверхности* $И$ *применяемого инструмента.*

Это необходимое, но не достаточное условие возможности обработки в полном соответствие с требованиями чертежа заданной детали заданным инструментом на заданном станке.

Теорема 7.4. *Если сферическое отображение* $GMap(Д)$ *поверхности* $Д$ *хотя-бы частично расположено за пределами расширенного антипоидального сферического отображения* $GMap_{AE}(И)$ *исходной инструментальной поверхности И применяемого инструмента, обработка детали в полном соответствие с требованиями чертежа невозможна.*

Это достаточное условие невозможности обработки заданной детали заданным инструментом на заданном станке.

В некоторых случаях сложная поверхность детали может иметь несколько точек, нормали к $Д$ в которых взаимно параллельны. Это приводит к тому, что сферическое отображение $GMap(Д)$ поверхности детали становится "*многослойным*". Количество слоев равно наибольшему числу точек поверхности $Д$, в которых нормали к ней взаимно параллельны. Например, участок $ABCDEFG$ поверхности $Д$ (рис. 7.32) имеет параллельные нормали. Отображение $GMap(Д)$ поверхности $Д$ показывает, что участок $BCDG$ отображения $GMap(Д)$ имеет сферическое отображение $GMap(Д)$ в виде четырехугольника $B_0C_0D_0G_0$. Но сферическим отображением участка $ABDEFG$ поверхности $Д$ является многоугольник $A_0B_0D_0E_0F_0G_0$. Поэтому участок $A_0B_0D_0E_0F_0G_0$ сферического отображения $GMap(Д)$ перекрывается дважды. Ясно, что в общем случае число слоев сферического отображения может быть более двух.

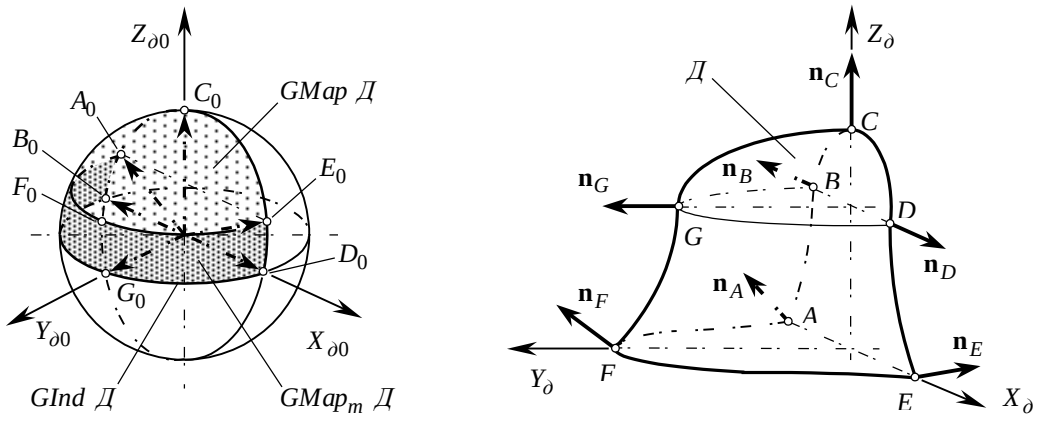


Рис. 7.32. Пример поверхности $Д$ с частично двухслойным сферическим отображением.

Формулы (45) и др. учитывают, что сферическое отображение $GMap(Д)$ поверхности $Д$ детали может быть многослойным.

Увеличение количества слоев сферического отображения $GMap(Д)$ приводит к тому, что вес его многослойного участка увеличивается пропорционально количеству слоев. Это может привести к тому, что при недостаточном числе управляемых от системы ЧПУ координат станка, в результате приведения детали в наивыгоднейшее положение появятся затененные участки ее поверхности $Д$.

В качестве примера рассмотрим обработку на трехкоординатном станке с ЧПУ детали, сложная поверхность $Д$ которой имеет двуслойное сферическое отображение $GMap(Д)$ (рис. 7.33). Для однослойного сферического отображения $GMap(Д)$ поверхности $Д$, имеющего форму $ABDCFE$, средневзвешенная нормаль к поверхности $Д$ проходит через точку $M^*_{\partial 0}$ и при такой ориентации заготовки поверхность $Д$ детали может быть обработана. Однако участок $CDEF$ является двухслойным и потому имеет вдвое больший вес. Это приводит к тому, что средневзвешенное положение нормали окзывается развернутым вокруг начала координат на некоторый угол ξ и занимает положение $M_{\partial 0}$. Если развернуть деталь до положения, в котором $\mathbf{r}_{\partial 0}$ займет вертикальное положение, то очевидно, что при такой ориентации обработка детали в полном соответствии с требованиями чертежа на трехкоординатном станке с ЧПУ невозможна. В этом и в подобных случаях вопрос сводится к тому, что является более целесообразным: обрабатывать сложную поверхность $Д$ детали на более дешовом трехкоординатном станке с ЧПУ при нерациональной относительной ориентации заготовки, или производить обработку при наивыгоднейшей относительной ориентации заготовки, но на более дорогом многокоординатном станке с ЧПУ.

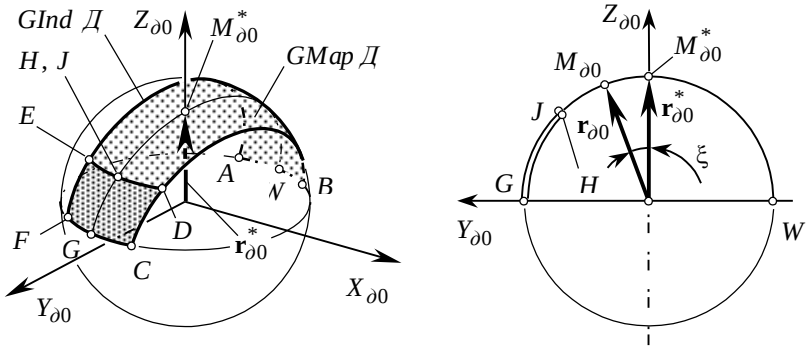
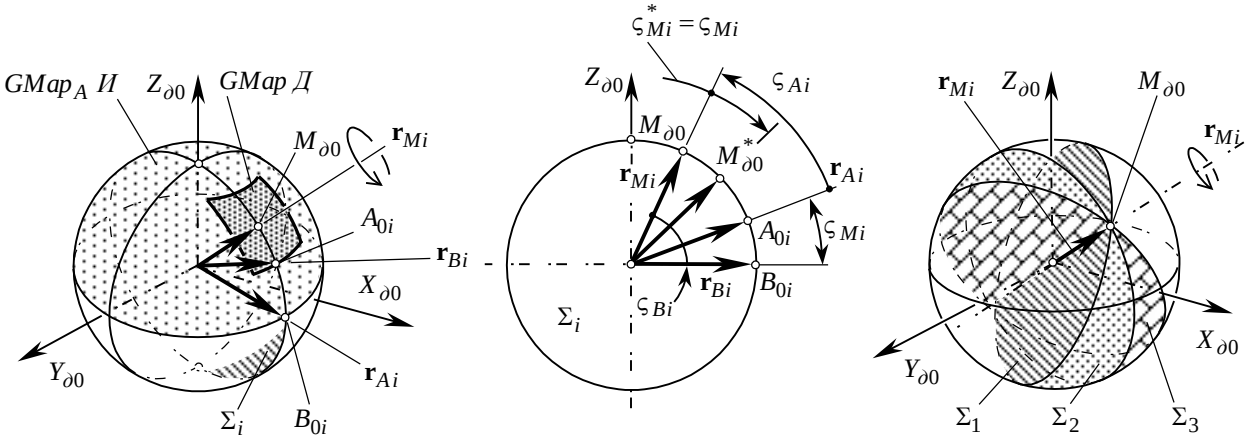


Рис. 7.33. Пример двухслойного сферического отображения сложной поверхности детали.

Уместно обратить внимание на то, что рис. 7.32 дополнительно иллюстрирует рассмотренное ранее важное свойство сферического отображения $GMap(Д)$ (см. выше, с. 410, свойство №5). Сферическим отображением $GMap(Д)$ контура BCD поверхности $Д$ детали является дуга $B_0C_0D_0$. В этом случае все точки контура BCD поверх-ности $Д$ детали и все точки дуги $B_0C_0D_0$ ее сферического отображения $GMap(Д)$ имеют взаимноодно-значное соответствие. С другой стороны поверхность $Д$ детали

имеет другой участок ограничивающего кон-тура AEF. Сферическое отображение $GMap\,(Д)$ участка ограничивающего контура AEF соответствует участку $A_0E_0F_0$, который не является границей контура сферического отображения $GMap\,(Д)$; и в то же время граница $B_0G_0D_0$ является отображением кривой BGD, которая не является участком контура поверх-ности $Д$ детали. Это свидетельствует о том, что граница сферического отображения $GMap\,(Д)$ поверхности детали, т.е. ее сферическая индикатриса может не соответствовать границе самой поверхности $Д$ и наоборот.

Исходя из изложенного вопрос о наивыгоднейшей ориентации детали на столе станка может быть решен в результате анализа относительного положения сферических индикатрис $GInd\,(Д)$ и $GInd\,(И)$ поверхностей $Д$ и $И$. Вместе с тем использовать две отдельные характреристические кривые $GInd\,(Д)$ и $GInd\,(И)$ для получения ответа на вопрос возможна или невозможна при известной ориентации детали обработка ее поверхности $Д$ на станке с ЧПУ не удобно. Поэтому в рассмотрение вводится новый вид характеристической кривой – *индикатриса обрабатываемости* $MInd\,(Д)$ поверхности $Д$ детали. Эта характеристическая кривая представляет собой замкнутую кривую на сфере единичного радиса. Она может быть построена так.



1. 2. 3.

Рис. 7.34. К построению индикатрисы обрабатываемости $MInd\,(Д)$ поверхности детали.

Рассмотрим пример многокоординатной обработки сложной поверхности детали концевой фрезой со сферической исходной инструментальной поверхностью $И$ (см. рис. 7.23). Для этого случая антипоидальное сферическое отображение $GMap_A\,(И)$ исходной инструментальной поверхности $И$ представляет собой верхнюю полусферу сферы единичного радиуса (рис. 7.34.1); сферическая индикатриса $GInd\,(И)$ является окружностью наибольшего диаметра на этой сфере и совпадает с границей отображения $GMap_A\,(И)$.

Внутри сферического отображения $GMap\,(Д)$ поверхности $Д$ детали выберем некоторую точку – это может быть точка $M_{∂0}$ средневзвешенного положения нормали к поверхности $Д$ (использовать эту точку удобнее). Через начало системы координат $X_{∂0}Y_{∂0}Z_{∂0}$ и точку $M_{∂0}$ проходит произвольная секущая плоскость Σ_i, которая пересекает сферические индикатрисы $GInd\,(Д)$ детали и $GInd_A\,(И)$ инструмента в точках A_{0i} и B_{0i} соответственно. Угол между радиус-вектором $\mathbf{r}_{Ai}$ точки A_{0i} и радиус-вектором $\mathbf{r}_{Mi}$ выбранной точки $M_{∂0}$ внутри сферического отображения $GInd\,(Д)$ детали обозначен через ς_{Ai} (рис. 7.34.2). Аналогичный угол между радиус-вектором $\mathbf{r}_{Bi}$ точки B_{0i} и радиус-вектором $\mathbf{r}_{Mi}$ точки $M_{∂0}$ обозначен через ς_{Bi}. Разность углов ς_{Ai} и ς_{Bi} равна $(\varsigma_{Ai}-\varsigma_{Bi})=\varsigma_{Mi}$. Угол ς^*_{Mi}, который определяет положение текущей точки M^*_{0i} индикатрисы обрабатываемости $MInd\,(Д)$ поверхности $Д$ детали равен $\varsigma^*_{Mi}\equiv\varsigma_{Mi}$. Этот угол измеря-

ется в плоскости Σ_i, проходящей через векторы $\mathbf{r}_{Mi}$, $\mathbf{r}_{Ai}$ и $\mathbf{r}_{Bi}$ по часовой стрелке, если $\varsigma_{Ai} < \varsigma_{Bi}$, или в противоположном направлении, если $\varsigma_{Ai} > \varsigma_{Bi}$ (в этом случае $\varsigma^*_{Mi} < 0^\circ$).

Поворачивая плоскость Σ_i вокруг радиус-вектора $\mathbf{r}_{Mi}$ до положения Σ_1, Σ_2, Σ_3 и так далее (рис. 7.34.3), получим все точки индикатрисы обрабатываемости $MInd\,(Д)$ поверхности $Д$ детали.

Теорема 7.5. *Поверхность детали может быть обработана в полном соответствие с требованиями черетежа тогда и только тогда, когода индикатриса обрабатываемости $MInd\,(Д)$ поверхности $Д$ не имеет отрицательных диаметров.*

Обычно если индикатриса обрабатываемости $MInd\,(Д)$ не имеет отрицательных диаметров, она не пересекает сама себя – в общем случае выполнения этого условия не достаточно, т.к. не исключен случай, когда все диаметры индикатрисы $MInd\,(Д)$ отрицательны. В этом случае самопересечения индикатрисы $MInd\,(Д)$ обрабатываемости нет – оно вырождено.

Исходя из изложенного уравнение индикатрисы обрабатываемости $MInd\,(Д)$ поверхности $Д$ детали может быть получено таким путем.

Радиус-вектор $\mathbf{r}_{Mi}$ точки $M_{0д}$ равен:

$$\mathbf{r}_{Mi} = \mathbf{i}\cos\alpha_{Mi} + \mathbf{j}\cos\beta_{Mi} + \mathbf{k}\cos\gamma_{Mi}. \qquad (7.49)$$

Из уравнения (35) сферического отображения $GMap\,(Д)$ поверхности детали следует, что:

$$\mathbf{r}_{Ai} = \mathbf{i}\cos\alpha_{Ai} + \mathbf{j}\cos\beta_{Ai} + \mathbf{k}\cos\gamma_{Ai}.$$

Аналогично, из уравнения антипоидального сферического отображения $GMap_A\,(И)$ исходной инструментальной поверхности $И$ можно записать:

$$\mathbf{r}_{Bi} = \mathbf{i}\cos\alpha_{Bi} + \mathbf{j}\cos\beta_{Bi} + \mathbf{k}\cos\gamma_{Bi}.$$

Угол ς_{Ai} между векторами $\mathbf{r}_{Ai}$ и $\mathbf{r}_{Mi}$ равен:

$$\varsigma_{Ai} = \angle(\mathbf{r}_{Mi}, \mathbf{r}_{Ai}) = \arctan\frac{|\mathbf{r}_{Mi} \times \mathbf{r}_{Ai}|}{\mathbf{r}_{Mi} \cdot \mathbf{r}_{Ai}}.$$

Величина аналогичного угла ς_{Bi} между векторами $\mathbf{r}_{Bi}$ и $\mathbf{r}_{Mi}$ равна:

$$\varsigma_{Bi} = \angle(\mathbf{r}_{Mi}, \mathbf{r}_{Bi}) = \arctan\frac{|\mathbf{r}_{Mi} \times \mathbf{r}_{Bi}|}{\mathbf{r}_{Mi} \cdot \mathbf{r}_{Bi}}.$$

В соответствие с приведенными зависимостями величина угла $\varsigma^*_{Mi} \equiv \varsigma_{Mi} = (\varsigma_{Ai} - \varsigma_{Bi})$, определяющего положение текущей точки $M^*_{д0}$ индикатрисы обрабатываемости $MInd\,(Д)$ поверхности $Д$ детали, определится из соотношения:

$$\varsigma^*_{Mi} = \varsigma_{Mi} = (\angle\mathbf{r}_{Ai}, \mathbf{r}_{Bi}) = (\varsigma_{Ai} - \varsigma_{Bi}) = \arctan\frac{|\mathbf{r}_{Mi} \times \mathbf{r}_{Ai}|}{\mathbf{r}_{Mi} \cdot \mathbf{r}_{Ai}} - \arctan\frac{|\mathbf{r}_{Mi} \times \mathbf{r}_{Bi}|}{\mathbf{r}_{Mi} \cdot \mathbf{r}_{Bi}} = \arctan\frac{|\mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{r}_{Bi}|}{\mathbf{r}_{Ai} \cdot \mathbf{r}_{Bi}}. \qquad (7.50)$$

Координаты текущей точки индикатрисы обрабатываемости $MInd(Д)$ поверхности детали определены тем, что:

1. Индикатриса обрабатываемости $MInd(Д)$ поверхности детали является пространственной кривой, расположенной на сфере единичного ридиуса;

2. Текущая точка индикатрисы обрабатываемости $MInd(Д)$ находится в текущем положении плоскости Σ_i, проходящей через радиус-вектор $\mathbf{r}_{Mi}$ точки $M_{\partial 0}$, а ее радиус-вектор $\mathbf{r}^*_{Mi}$ составляет с радиус-вектором $\mathbf{r}_{Mi}$ угол ζ^*_{Mi} (50). Направление отсчета угла ζ^*_{Mi} оговорено выше.

Построим некоторую плоскость Λ, по отношению к которой определим текущее положение плоскости Σ_i при ее повороте вокруг радиус-вектора $\mathbf{r}_{Mi}$. В качестве такой плоскости используем плоскость, проходящую через ось $X_{\partial 0}$ системы координат $X_{\partial 0}Y_{\partial 0}Z_{\partial 0}$ и радиус-вектор $\mathbf{r}_{Mi}$ точки $M_{\partial 0}$. Уравнение плоскости Λ может быть получено исходя из общего уравнения плоскости $(\mathbf{r}_\Lambda - \mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_2 = 0$, проходящей через точку $\mathbf{r}_1$ и содержащей два направления $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$.

В рассматриваемом случае плоскость Λ проходит через начало системы координат $X_{\partial 0}Y_{\partial 0}Z_{\partial 0}$ (поэтому $\mathbf{r}_1 = 0$) и содержит два направления: $\mathbf{R}_1 = \mathbf{i}$ и $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_{Mi}$ (49). Поэтому уравнение плоскости Λ можно записать так:

$$\mathbf{r}_\Lambda \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}_{Mi} = \mathbf{r}_\Lambda \cdot \mathbf{i} \cdot (\mathbf{i}\cos\alpha_{Mi} + \mathbf{j}\cos\beta_{Mi} + \mathbf{k}\cos\gamma_{Mi}) = 0 .$$

Здесь $\mathbf{r}_\Lambda$ – радиус-вектор текущей точки плоскости Λ.

В текущем положении плоскость Σ_i составляет с плоскостью Λ некоторый угол φ_Λ, который удобно использовать в качестве углового параметра индикатрисы обрабатываемости $MInd(Д)$ поверхности $Д$ детали.

Текущее значение угла φ_Λ измеряется между ортами нормалей $\mathbf{n}_\Lambda$ к плоскости Λ и $\mathbf{n}_{\Sigma i}$ к плоскости Σ_i. Следовательно:

$$\cos\varphi_\Lambda = \mathbf{n}_\Lambda \cdot \mathbf{n}_{\Sigma i} .$$

Если обе части этого уравнения умножить на $\mathbf{n}_\Lambda$, получим уравнение орта нормали

$$\mathbf{n}_{\Sigma i} = \mathbf{n}_\Lambda \cos\varphi_\Lambda$$

к текущему положению плоскости Σ_i.

Плоскость Σ_i проходит через начало системы координат $X_{\partial 0}Y_{\partial 0}Z_{\partial 0}$ и содержит направление $\mathbf{r}_{Mi}$ (49). Ее текущее положение будет определено однозначно, если задаться еще одним вектором, расположенным в плоскости $\mathbf{r}_{Mi}$. В качестве такого вспомогательного вектора используем единичный вектор $\mathbf{n}_1$, который определим как $\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_{Mi} \times \mathbf{n}_{\Sigma i}$. В этом случае вектор $\mathbf{n}_1$ перпендикулярен как вектору $\mathbf{r}_{Mi}$, так и вектору $\mathbf{n}_{\Sigma i}$. Следовательно, он располагается в плоскости Σ_i.

Теперь уравнение плоскости Σ_i можно составить исходя из общего уравнения плоскости, проходящей через заданную точку и содержащей два направления (в рассматриваемом случае – через начало системы координат $X_{\partial 0}Y_{\partial 0}Z_{\partial 0}$ и векторы $\mathbf{r}_{Mi}$ и $\mathbf{n}_1$). Получим:

(7.51) $$\mathbf{r}_{\Sigma i} \cdot \mathbf{r}_{Mi} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_{\Sigma i} \cdot \mathbf{r}_{Mi} \cdot \mathbf{r}_{Mi} \times \mathbf{n}_{\Sigma i} = 0 ,$$

где $\mathbf{r}_{\Sigma i}$ – радиус-вектор текущей точки плоскости Σ_i.

Искомые радиус-вектор $\mathbf{r}_{MInd}$ текущей точки индикатрисы обрабатываемости $MInd(Д)$ поверхности $Д$ детали составляет с радиус-вектором $\mathbf{r}_{Mi}$ угол ζ^*_{Mi}. Поэтому можно записать, что

$$\cos\zeta^*_{Mi} = \mathbf{r}_{Mi} \cdot \mathbf{r}_{MInd} .$$

Отсюда $\mathbf{r}_{MInd} = \mathbf{r}_{Mi} \cdot \cos\zeta^*_{Mi}$. Это уравнение представляет собой уравнение поверхности кругового конуса, ось которого проходит через вектор $\mathbf{r}_{Mi}$, а угол при вершине равен $2\zeta^*_{Mi}$.

Радиус-вектор $\mathbf{r}_{MInd}$, расположенный в плоскости Σ_i (т.е. удовлетворяющий уравнению (51)), определяет две точки на сфере единичного радиуса. Та из них (в зависимости от соотношения величин углов ζ_{Ai} и ζ_{Bi}), которая удовлетворяет условию выбора знака угла ζ^*_{Mi} (см. выше), является текущей точкой индикатрисы обрабатываемости $MInd(Д)$ поверхности $Д$ детали.

Индикатриса обрабатываемости $MInd\,(Д)$ поверхности $Д$ является удобной характеристической кривой, позволяющей однозначно ответить на вопрос возможно или невозможно формообразование сложной поверхности в конкретных условиях обработки детали. Она может быть использована для решения рассматриваемой задачи применительно к формообразованию сложной поверхности $Д$ любой формы.

В качестве упрощенного примера рассмотрим трехкоординатную обработку цилиндрического[1] (параболического) локального участка поверхности $Д$ с различными параметрами формы (рис. 7.35).

В рассматриваемом случае антипоидальная индикатриса $GInd_A\,(И)$ исходной инструментальной поверхности $И$ представляет собой верхнюю полусферу. Сферическая индикатрса $GInd\,(Д)$ обрабатываемой поверхности $Д$ детали представляет собой дугу большой окружности. Анализ взаимного относительного расположения индикатрис $GInd\,(Д)$ и $GInd_A\,(И)$ показывает, что поверхность детали может быть обработана в первых двух случаях, а в третьем случае обработана быть не может. Этот же результат может быть получен исходя из анализа формы индикатрисы обрабатываемости $MInd\,(Д)$ поверхности детали, которая показывает, что в первом случае поверхность $Д$ может быть обработана – при этом имеется некоторый запас "свободы" в ориентации детали – поверхность $Д$ может быть повернута вокруг своей оси в противоположных направлениях на некоторый угол $\xi > 0^\circ$. Во втором случае поверхность $Д$ детали также может быть обработана, но запаса "свободы" в ориентации детали нет – в этом случае $\xi = 0^\circ$. В третьем случае поверхность $Д$ детали обработана быть не может, потому, что дуга большой окружности, проходящей через сферическое отображение $GMap\,(Д)$ обрабатываемой поверхности детали, содержит точки, для которых $\xi < 0^\circ$. Это свидетельствует о том, что индикатриса обрабатываемости $MInd\,(Д)$ поверхности детали имеет отрицательные по величине диаметры. Таки образом приведенный выше результат получен более коротким путем. Использовать одну характеристическую кривую $MInd\,(Д)$ удобнее, чем две $GInd\,(Д)$ и $GInd_A\,(И)$.

Индикатриса обрабатываемости $MInd\,(Д)$ поверхности $Д$ может быть также использована для анализа локального формообразования поверхностей деталей. Для этого характеристические кривые $MInd\,(Д)$ строятся для каждой из возможных пар локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ с учетом того, что в общем случае они развернуты одна относительно другой на угол относительной локальной ориентации μ. Поскольку количество локальных участков поверхностей $Д$ и $И$ конечно и исчерпывается десятью типами (см. выше, с.103-104, табл. 1.1), количество локальных индикатрис $MInd\,(Д)$ обрабатываемости поверхности детали также конечно и они могут быть классифицированы. Уравнение локальных индикатрис обрабатываемости можно получить путем, аналогичным тому, который использован при выводе уравнения (50) уравнения индикатрисы $MInd\,(Д)$.

7.4.8. Относительное расположение сферических отображений поверхности детали и исходной инструментальной поверхности. В процессе обработки сложной поверхности детали на многокоординатном станке с ЧПУ инструмент, совершая, как правило, вращательное движение, перемещается по поверхности $Д$, осуществляя движение подачи вдоль строки формообразования, движения подачи на очередную строку формообразования, движения ориентирования и др. (см. гл. 2). В общем случае стол станка с ЧПУ с установленной на нем и закрепленной заготовкой совершает сложное движение, которое может быть разложено на ряд поступательных и поворотных движений. Для удобства решения задач формообразования поверхностей деталей удобно воспользоваться принципом инверсии, в соответствие с которым деталь рассматривается как неподвижная, а совершаемые ею в реальном процессе обработки движения приданы инструменту – с теми же скоростями, но в противоположных направлениях. Справедливо и обратное: инструмент можно рассматривать как неподвижный, а движения, которые он совершает в реальном процессе обработки, придать детали – также с теми же скоростями, но в противоположных направлениях.

В данном случае речь идет о движениях разворота детали из исходного положения в новое наивыгоднейшее относительно инструмента положение, а также о поворотных (качательных) движениях инструментального шпинделя станка с четырьмя и более одновременно управляемыми от системы ЧПУ координатами. Для

[1]Помним (см. с. 406), что разворачивающиеся поверхности не могут быть представлены сферическим отображением. Поэтому рассматриваемый пример условен.

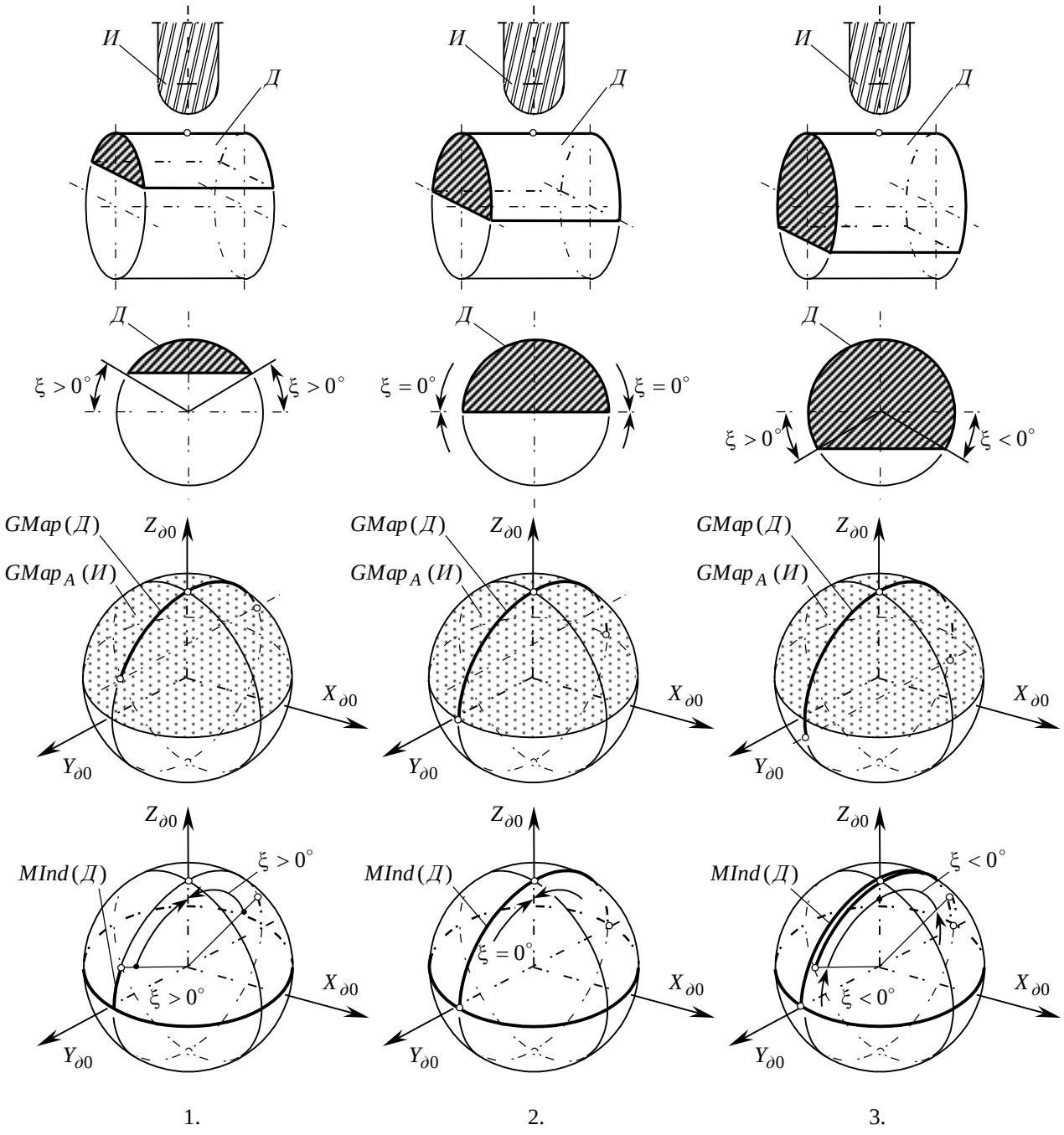


Рис. 7.35. Обработка параболического локального участка сложной поверхности детали на трехкоординатном станке с ЧПУ.

описания таких качательных движений могут быть составлены соответствующие операторы качания (см. гл. 3).

Как в исходном варианте кинематики многокоординатного формообразования сложной поверхности *Д* детали, так и в трансформированном в результате применения принципа инверсии ее варианте, в обязательном порядке должны быть учтены ограничения, накладываемые на вид и параметры относительных движений инструмента шестью условиями формообразования поверхностей деталей (см. выше). При этом следует иметь

ввиду, что антипоидальное сферическое отображение поверхности $И$ инструмента может оказаться многосвязной областью.

Сферические отображения обрабатываемой поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$ могут быть использованы для анализа возможности или невозможности обработки детали. Это важно при разработке новых и совершенствовании существующих систем класса *CAD/CAM*.

В каждой точке касания поверхностей $Д$ и $И$ нормали к ним направлены взаимно противоположно. Поэтому исходя из сферического отображения поверхности $И$ инструмента можно построить его центрально симметричный (относительно центра сферического отображения) образ, радиус-вектор каждой точки которого будет однонаправленным с соответствующей нормалью к поверхности $Д$ детали.

Если сферическая индикатриса поверхности $Д$ целиком находится внутри центрально симметричного образа сферической индикатрисы поверхности $И$ инструмента, то при выполнении шести условий формообразования поверхностей деталь может быть обработана в полном соответствии с требованиями чертежа.

Качательные движения инструмента относительно детали приводят к тому, что сферическая индикатриса поверхности $И$ инструмента перемещается по поверхности сферы единичного радиуса, покрывая в этом движении некоторую ее область и образуя тем самым расширенное сферическое отображение исходной инструментальной поверхности $И$. Контуром расширенного сферического отображения поверхности $И$ является ее расширенная сферическая индикатриса.

Если сферическая индикатриса поверхности $Д$ детали целиком находится внутри антипоидальной расширенной сферической индикатрисы поверхности $И$ инструмента, то при выполнении шести условий формообразования поверхностей деталь будет обработана в полном соответствии с требованиями чертежа. В противном случае обработка всей поверхности детали с одного установа невозможна. Эти условия являются необходимыми и достаточными.

Таким образом, использование сферического отображения поверхности $Д$ детали совместно с антипоидальным исходным и расширенным сферическим отображением поверхности $И$ инструмента позволяет сделать однозначный вывод о возможности или невозможности обработки с одного установа всей поверхности детали при установленной ее ориентации относительно инструмента. В последнем случае имеется ввиду следующее.

Если сферическую индикатрису поверхности $Д$ детали можно разместить целиком внутри антипоидальной исходной или расширенной сферической индикатрисы поверхности $И$ инструмента, то обработать деталь можно – в этом случае требуется лишь определить параметры наивыгоднейшей ориентации детали относительно инструмента (см. выше) и сориентировать деталь в соответствие с установленными значениями углов ее разворота. В противном случае обработка всей поверхности $Д$ детали с одного установа невозможна.

Другое следствие из приведенных результатов. Сложность ориентирования и обработки поверхности $Д$ детали возрастает по мере того, как увеличивается степень распространения ее сферической индикатрисы по поверхности сферы единичного радиуса. Для этого на сфере единичного радиуса следует построить окружность минимального (максимального) диаметра, в пределах которой целиком размещается сферическая индикатриса $GInd(Д)$ поверхности $Д$ (описанная окружность). Затем анализируются два случая:

1. Если сферическая индикатриса $GInd(Д)$ поверхности $Д$ детали не выходит за пределы некоторой полусферы на сфере единичного радиуса, то чем меньше радиус описанной вокруг нее окружности, тем возможности наивыгоднейшего ориентирования сложной поверхности $Д$ детали шире – одновременно это упрощает многокоординатную обработку детали.

2. Если сферическая индикатриса $GInd(Д)$ поверхности $Д$ детали не размещается целиком в пределах некоторой полусферы на сфере единичного радиуса и выходит за ее границы, то чем больше радиус описанной вокруг нее окружности, тем возможности наивыгоднейшего ориентирования сложной поверхности $Д$ детали шире, что также упрощает многокоординатную обработку детали.

Очевидно также, что чем большую площадь на сфере единичного радиуса занимает сферическое отображение поверхности $И$ инструмента, тем его технологические возможности шире, а диапазон ориентирования поверхности $Д$ детали относительно инструмента больший.

Базирование заготовки детали со сложной поверхностью в требуемом положении на столе станка с ЧПУ можно обеспечить определенной ориентацией приспособлений (в т.ч. приспособлений-спутников) относительно осей координат стола. Для этого обычно используют координатные плиты и блоки, имеющие сетку базовых отверстий с различным шагом. Обрабатываемые детали могут быть полностью ограниченными

сложными поверхностями, что является одной из причин усложнения конструкции технологической оснастки для их закрепления.

Выполнение каждого из условий формообразования поверхностей деталей в отдельности необходимо, а всех вместе достаточно для того, чтобы при правильной ориентации можно было обработать деталь в полном соответствии с требованиями чертежа.

Г л а в а 8. Синтез наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей

Правильно разработанный технологический процесс изготовления деталей предусматривает, что технологическая система и окружающая технологическая среда в процессе обработки эксплуатируется с максимальной отдачей. Для конкретных производственных условий в этом случае достигается наивысшая эффективность обработки.

Если в процессе обработки детали потенциальные возможности каждого элемента технологического процесса в отдельности и всех их вместе взятых используются наиболее полно, то реализуемые при этом технологии принято называть критическими (экстремальными, предельными или интенсивными).

Задача синтеза критических технологий обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ и деталей общемашиностроительного назначения на универсальном, автоматическом и полуавтоматическом оборудовании решается на основе дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей при механической обработке деталей (Радзевич С.П., 1991a, b, c). Для решения этой задачи требуется исходная информация и введение в рассмотрение критерия эффективности обработки, исходя из условия достижения требуемого критерия которого она решается.

Целью технологического процесса механической обработки детали является получение ее поверхности $Д$ в полном соответствии с требованиями чертежа при минимальных затратах времени и средств на изготовление детали. Поэтому при решении задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования следует исходить из заданной чертежом геометрической информации об обрабатываемой поверхности $Д$ детали – остальные составляющие технологического процесса (параметры применяемого инструмента и кинематики обработки, ориентация детали на столе станка с ЧПУ и др.) должны *вычисляться* (но не назначаться) исходя из условия достижения требуемого экстремума заданного критерия эффективности обработки.

Принципиальным является выбор критерия эффективности обработки, в соответствие с которым решается задача синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали. Он должен быть таким, чтобы при достижении заданного его экстремума *все* звенья технологического процесса работали в режиме, близком к предельному (критическому).

8.1. Критерии эффективности технологических процессов изготовления деталей в машиностроении

Наибоее эффективные технолонические процессы обработки поверхностей деталей на металлорежущих станках в некотором смысле оптимальны (или близки к оптимальным). Под оптимизацией технологического процесса обычно понимают принятие комплекса решений, обеспечивающих такое протекание технологического процесса, при котором критерий оптимизации достигает экстремального значения и вместе с тем соблюдается система ограничений, отражающих требования к качеству продукции и производительности обработки, накладываемых технологическими возможностями оборудования, инструмента, приспособлений, программой выпуска и организационно-техническими возможностями производства (Балакшин Б.С., 1969).

Задачи разработки технологических процессов изготовления деталей многовариантны. Решение задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали предполагает введение в рассмотрение критерия эффективности – наиболее важного для заданных условий обработки показателя ее эффективности либо комплексного критерия, обобщающего ряд частных показателей эффективности механической обработки поверхности детали.

Правильный выбор критерия эффективности имеет решающее значение для установления наивыгоднейших условий обработки. Поэтому в качестве такого критерия следует использовать показатель, в наиболее полной мере отражающий эффективность механической обработки деталей на металлорежущем оборудовании.

В качестве критерия эффективности обработки в машиностроении используются:

- приведенные затраты на изготовление детали;
- прибыль;
- себестоимость (технологическая, цеховая, заводская);
- производительность обработки;
- минимум затрат энергии на обработку;
- стойкость инструмента;
- качество обработки;
- точность обработки и пр.

В качестве критерия эффективности обработки находит применение введенное Этин А.О. понятие *"разрешающей способности режущей кромки"* (Воронов В.Н., 1993). Этот критерий эффективности определяется как произведение толщины срезаемого слоя на скорость резания. Его использование позволяет учесть разные скорости резания и толщины срезаемых слоев при обработке деталей в разных условиях.

Находят применение и другие, в том числе комплексные, критерии эффективности обработки деталей на металлорежущих станках.

Наиболее полным экономическим критерием эффективности является минимум приведенных затрат на изготовление детали. Однако этот критерий не всегда достаточно просто формализуем, его использование требует учета большого количества факторов и выполнения в большом объеме громоздких сложно алгоритмизируемых вычислений. Для конкретных условий обработки могут существовать более простые по структуре критерии эффективности, использование которых обеспечивает получение практически того же конечного результата, что и использование в этих целях приведенных затрат на изготовление детали.

Важным показателем эффективности технологического процесса является производительность обработки, которая может служить критерием эффективности при изготовлении однотипных деталей в сходных условиях обработки. Сравнивать производительность различных технологических процессов, отличающихся один от другого характером массопереноса, целевым назначением и другими факторами затруднительно, поскольку по объективным причинам не существует единого, абсолютного показателя производительности технологических процессов и оборудования, полностью отвечающего содержанию понятия "производительность", обладающего при этом достаточной общностью.

Об эффективности технологического процесса, оборудования или способа обработки, а также об их потенциальных возможностях можно судить по характеру генерирования поверхности детали во времени. В этом случае критерием оценки различных способов обработки служит скорость образования обработанной поверхности $Д$ во времени, т.е. производительность формообразования. Однако следует иметь ввиду, что площадь обработанной поверхности есть интегральная характеристика, в которой "растворяется" бесконечное многообразие форм изделий. Поэтому, строго говоря, применение критерия "*производительность формообразования*" правомерно лишь для сопоставления эффективности технологических процессов изготовления деталей одинаковой формы и из одинаковых заготовок.

Анализ наиболее широко применяемых критериев эффективности обработки показал, что в той или иной мере каждый из них зависит от производительности формообразования. Вследствие увеличения производительности, например, автоматизированного оборудования можно получить (по разным данным) до 60-70% экономического эффекта (Михайлов А.Н., 1992). Это дает основание использовать производительность формообразования в качестве частного критерия эффективности и на примере его применения показать потенциальные возможности дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей при механической обработке деталей. Выбор такаго критерия эффективности оправдан также тем, что производительность формообразования является важным показателем эффективности процесса обработки сложных поверхностей деталей и эксплуатациии многокоординатных станков с ЧПУ. Она является результирующей обобщенной характеристикой интегрального воздействия инструмента на заготовку и определяет интенсивность функционирования формообразующей системы станка с ЧПУ (Решетов Д.Н., Портман В.Т., 1986). Полученные при этом результаты без принципиальных ограничений могут быть обобщены на случай применения иного аналитически описанного критерия эффективности, в том числе и комплексного.

Выполненными под руководством Т.Н.Лоладзе исследованиями (Асатиани М.Д. и др., 1978) установлено, что при обработке деталей на станках с ЧПУ режимы резания, при которых затраты на обработку минимальны (т.н. *экономические режимы резания*) близки к режимам резания, при которых производительность обработки максимальна. Это следствие высокой стоимости как самих станков с ЧПУ, так и технологической подготовки их эксплуатации. Следовательно, производительность формообразования может быть использована в качестве критерия эффективности обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ[1].

Управлять производительностью оборудования для механической обработки деталей можно различными путями.

Увеличить производительность обработки можно путем повышения режима резания, установления наивыгоднейшей структуры многоинструментальной обработки и др. Большие резервы в этом отношении заключены в геометрических и кинематических аспектах процесса обработки, поскольку реализация неиспользованных их потенциальных возможностей позволяет увеличить производительность оборудования при неизменных, в том числе и предельно допустимых для него (критических) режимах резания. Поэтому повышение интенсивности собственно процесса формообразования является перспетивным направлением совершенствования обработки деталей в машиностроении.

Для случаев обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ с приемлемой для практических целей точностью можно вместо сложного в аналитическом описании и менее удобного критерия минимума приведенных затрат на изготовление детали использовать более удобный критерий – *максимальную производительность формообразования*. Такой критерий аналитически описывается существенно проще, что создает предпосылки для его более широкого применения.

Оценивая производительность формообразования, часто ограничиваются учетом только кинематических факторов (Юликов М.И. и др., 1987): протяженностью ходов, скоростью движений и временем цикла обработки. Для увеличения производительности обработки обычно стремятся сократить протяженность ходов, совместить некоторые движения во времени или устранить некоторые из них, выбрать рациональные траектории движений, обеспечивающие возможность увеличения скорости движения инструмента и др. Вместо одной формообразующей точки (универсальный резец) в работу вводится множество таких точек – используется формообразующая режущая кромка (фасонный резец); вместо одного зуба (резца) в работу вводится несколько зубьев (резцов) – используется многозубый инструмент; несколько инструментов объединяется в один – применяется комбинированный режущий инструмент и др. (Юликов М.И. и др., 1987).

При обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ следует различать следующие аспекты формообразования поверхностей деталей (Радзевич С.П., 1991a, b, c, d): локальное, региональное и глобальное их формообразование.

Под локальным понимается процесс формообразования поверхности детали в окрестности текущей точки на ней. Его эффективность зависит от параметров поверхности детали и исходной инструментальной поверхности в дифференциальной окрестности точки их касания, а также от относительной локальной ориентации этих поверхностей.

При региональном формообразовании рассматривается процесс образования поверхности детали в пределах одной строки формообразования[2] на ней.

Глобальное формообразование предполагает учет частичной интерференции соседних строк формообразования и "*краевой эффект*" – учет влияния на параметры процесса формообразования формы и параметров границ контура, ограничивающего обрабатываемую поверхность детали.

В соответствие с этим будем различать три вида производительности формообразования, отражающие различные его аспекты:

- мгновенная производительность – характеризует эффективность локального формообразования (в текущий момени времени);
- региональная производительность – отражает эффективность обработки в пределах одной строки формообразования (в пределах одной строки прохода инструмента по поверхности детали);

---

[1]Более производительный процесс формообразования обеспечивает экономию времени на обработку, а к экономии времени сводится в конечном счете вся экономия.

[2]Под "*строкой формообразования*" понимается обработанный за один проход инструмента участок номинальной поверхности детали, расположенный вдоль траектории перемещения по ней точки касания поверхностей $Д$ и $И$ и в пределах которого реальная поверхность $Д_р$ отклоняется от номинальной ее поверхности $Д_н$ не более, чем на величину допуска на точность формообразования.

- глобальная производительность – определяется затратами времени на формообразование всего участка обрабатываемой поверхности детали (при этом учитывается частичная интерференция соседних строк формообразования; влияние "*краевого эффекта*", характеризующего особенности формообразования при врезании инструмента в заготовку и выводе его из контакта с ней; ориентация детали на станке; положение точки начала обработки и пр.).

8.2. Производительность формообразования поверхностей деталей

Дифференциально-геометрический метод формообразования поверхностей при механической обработке деталей направлен на решение задач синтеза наивыгоднейшего формообразования. Его использование предполагает введение в рассмотрение соответствующего критерия эффективности, исходя из условия достижения требуемого экстремума которого задача синтеза может быть решена. В качестве критерия может быть использован любой аналитически описанный критерий, объективно и с достаточной степенью точности отражающий цель процесса обработки, например, *производительность формообразования*.

Производительность формообразования отражает интенсивность формирования во времени заданной чертежом номинальной поверхности детали. Она тесно связана с производительностью обработки.

Под производительностью формообразования понимается площадь поверхности детали, формообразованная на станке в единицу времени (Дикушин В.И., 1950). При этом имеется ввиду площадь именно номинальной поверхности $Д_н$ детали, а не ее реальной поверхности $Д_р$. Иными словами, при расчете производительности формообразования абстрагируемся от остаточного детерминированного регулярного микрорельефа, неизбежно образующегося на обрабатываемой поверхности $Д$ вследствие дискретности процесса формообразования. Очевидно, что с учетом площади поверхности остаточных гребешков расчетное значение производительности формообразования будет выше, что неправильно отражает сущность процесса формообразования.

Производительность формообразования может быть использована в качестве критерия эффективности обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

8.2.1. Факторы процесса обработки, определяющие производительность формообразования. При обработке сложных поверхностей деталей различают локальное, региональное и глобальное формообразование. Эти три аспекта можно также выявить при обработке деталей общемашиностроительного назначения на металлообрабатывающем оборудовании, воспроизводящем "*жесткую*" кинематику формообразования – здесь они наблюдаются в вырожденном виде.

Исследование факторов процесса обработки, определяющих производительность формообразования, логично начать с локального формообразования.

Мгновенную производительность формообразования определим так.

Определение 8.1. *Мгновенная производительность формообразования – это производительность, с которой была бы формообразована вся поверхность детали при фиксированных значениях всех параметров процесса обработки.*

Необходимость введения в рассмотрение этого определения вызвана, в частности, тем, что при многокоординатной обработке сложных поверхностей деталей все параметры процесса формообразования переменны во времени. Поэтому можно говорить о мгновенном значении производительности формообразования, т.е. о значении производительности формообразования в текущий момент времени.

Величина мгновенной производительности формообразования $P_ф$ определяется значениями подач инструмента S_B вдоль и $S_П$ поперек строки формообразования, а также величиной угла θ между направлениями этих подач:

$$P_ф = \left|\mathbf{S}_B \times \mathbf{S}_П\right| \quad \text{или} \quad P_ф = S_B \cdot S_П \cdot \sin\theta \,. \tag{8.1}$$

Увеличение подач S_B и $S_П$ приводит к увеличению производительности формообразования, а отклонение угла θ от $\frac{\pi}{2}$ приводит к ее уменьшению.

Предельные значения параметров S_B, $S_П$, и θ в текущей точке K касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности зависят от параметров локальной топологии (от дифференциальных характеристик) поверхностей $Д$ и $И$ в их общей точке K и от величины допуска $[h]$ на точность формообразования.

Величина допуска $[h]$ на точность формообразования назначается, как правило, постоянной и определяется по тому месту на поверхности детали, к которому предъявляются наиболее высокие требования к точности обработки (где допускается минимальная результирующая погрешность формообразования h_Σ). В остальных точках поверхности $Д$ (или ее отсека) он может быть большим по величине – из этого следует очевидный резерв увеличения производительности формообразования: величину допуска $[h]$ рационально устанавливать переменной в функции координат текущей точки на $Д$, а именно

$$[h]=[h](U_д, V_д).$$

Следовательно, в идеальном случае в текущей точке на поверхности $Д$ детали должно быть свое значение $[h](U_д, V_д)$ допуска на точность формообразования.

Допуск $[h]$ некоторым образом распределяется на две части $[h_B]$ и $[h_П]$, в пределах каждой из которых располагается соответствующая элементарная составляющая h_B и $h_П$ результирующей погрешности h_Σ формообразования. Составляющая h_B является следствием дискретности воспроизведения лезвийным инструментом его исходной инструментальной поверхности, а составляющая $h_П$ – следствием точечного характера касания поверхностей $Д$ и $И$ при дискретном формообразовании поверхности детали.

Очевидно, что:

$$[h]=[h_B]+[h_П],$$

тогда как соотношение

$$h_\Sigma \cong h_B + h_П \tag{8.2}$$

выполняется приближенно. Более точной является зависимость

$$h_\Sigma = ah_B + bh_П,$$

где a и b – константы ($0 \le a \le 1$; $0 \le b \le 1$), определяемые для текущей точки K номинальной поверхности детали.

В текущей точке $(U_д; V_д)$ поверхности $Д$ детали значения констанат a и b зависят от координат $(U_u; V_u)$ точки K на поверхности $И$ инструмента и от величины угла μ относительной локальной ориентации поверхности детали и исходной инструментальной поверхности:

$$a = a(U_д; V_д; U_u; V_u; \mu); \qquad b = b(U_д; V_д; U_u; V_u; \mu).$$

Величины составляющих $[h_B]$ и $[h_П]$ допуска $[h]$ на точность формообразования ограничивают предельные величины подач S_B и $S_П$, т.к. эти подачи являются функциями

$$S_B = S_B([h_B]) = S_B\{[h_B](U_д; V_д)\} = S_B(U_д; V_д);$$

$$S_П = S_П([h_П]) = S_П\{[h_П](U_д; V_д)\} = S_П(U_д; V_д).$$

составляющих $[h_B]$ и $[h_П]$ соответственно.

Поэтому производительность формообразования

$$P_ф = P_ф\left([h];[h_П];[h_B]\right) = P_ф\left\{[h](U_д;V_д);[h_П](U_д;V_д);[h_B](U_д;V_д)\right\} = P_ф(U_д;V_д)$$

также является функцией составляющих $[h_B]$ и $[h_П]$, а ее предельное значение также ограничено величинами этих параметров.

Очевидно, что не только допуск $[h]$, но и величины его составдяющих $[h_B]$ и $[h_П]$ могут быть как постоянными, так и переменными в пределах площади обратываемого участка поверхности детали. В первом случае считаем заданными их величины, а во втором – их значения в каждой точке обрабатываемой поверхности $Д$, т.е. считаем известными функции:

$$[h] = [h](U_д;V_д); \qquad [h_B] = [h_B](U_д;V_д); \qquad [h_П] = [h_П](U_д;V_д).$$

Зависимость величины подачи S_B вдоль строки формообразования и аналогичная зависимость величины подачи $S_П$ поперек строки формообразования описываются функционалами:

$$S_B = S_B\left[R_{д.B}(U_д;V_д);R_{и.B}(U_и;V_и);\varphi;\mu\right];$$

$$S_П = S_П\left[R_{д.П}(U_д;V_д);R_{и.П}(U_и;V_и);\varphi;\mu\right].$$

Эти подачи являются функциями значений нормальных радиусов кривизны $R_{д.B}$ поверхности детали и $R_{и.B}$ исходной инструментальной поверхности, измеренными в точке K в направлении подачи $\mathbf{S}_B$, а также значений нормальных радиусов кривизны $R_{д.П}$ поверхности $Д$ и $R_{и.П}$ поверхности $И$, измеренными в точке K в направлении подачи $\mathbf{S}_П$. Это следствие зависимости величин нормальных радиусов кривизны $R_д(u)$ от координат текущей точки K на поверхности $Д(И)$, от направления плоскостей измерения нормальных радиусов кривизны (угол φ) и от относительной локальной ориентации (угол μ) поверхностей $Д$ и $И$ в процессе обработки.

Как правило, управлять параметрами $R_{д.B}$ и $R_{д.П}$ поверхности детали нельзя – в заданной точке K на поверхности $Д$ их значения фиксированны. Параметрами $R_{и.B}$ и $R_{и.П}$ управлять можно, поскольку с заданной точкой K на поверхности $Д$ можно вводить в касание поверхность $И$ инструмента различными своими точками и, кроме того, путем изменения величины угла μ относительной локальной ориентации различным образом ориентировать инструмент относительно детали. Более широкими возможностями в этом отношении обладают инструменты с изменяемой в процессе обработки геометрией исходной инструментальной поверхности (Родин П.Р. и др., 1976; Радзевич С.П., 1988).

В текущей точке на поверхности $Д$ детали значения параметров ее кривизны фиксированы. Вместе с тем в некоторых случаях допустимо ввести один или группу управляемых параметров $D_д$, варьируя значения которых можно временно целенаправленно изменять величины главных кривизн поверхности $Д$ в заданной точке на ней, например, как это имеет место при упругом деформировании тонкостенной заготовки (см. выше, рис. 2.3 на с. 123). Таким путем заготовка переводится в технологическое состояние, появляется возможность управлять во время обработки степенью конформности исходной инструментальной поверхности $И$ к поверхности $Д$ детали и за счет этого увеличить производительность формообразования. После окончания обработки воздействие на заготовку группы параметров $D_д$ снимается.

Аналогично, можно ввести один или группу управляемых параметров $D_и$, варьируя в процессе обработки значения которых можно временно целенаправленно изменять форму и параметры исходной инструментальной поверхности $И$ (например, путем упругого деформировария инструмента) в заданной точке на ней с

тем, чтобы во время обработки предельно увеличить степень конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали и за счет этого увеличить производительность формообразования[1].

Формой и параметрами поверхности $И$ инструмента в ряде случаев можно управлять в широких пределах и достаточно просто, если производить обработку инструментами с изменяемой формой исходной инструментальной поверхности. Инструменты такой конструкции (Родин П.Р. и др., 1976; Радзевич С.П., 1988) допускают возможность целенаправленного изменения формы и параметров поверхности $И$ путем управляемого изменения значений одного или группы параметров D_u^*, что осуществляется по программе от системы ЧПУ станком.

Поэтому в общем случае производительность формообразования описывается функционалом вида:

$$P_ф = P_ф\left\{[h]; S_B; S_П; R_{д.B}(U_д; V_д); R_{u.B}(U_u; V_u); R_{д.П}(U_д; V_д); R_{u.П}(U_u; V_u); \varphi; \mu; \theta; D_д; D_u; D_u^*\right\}. \qquad (8.3)$$

Для заданных условий обработки эта формула может быть конкретизирована.

Производительность обработки поверхности детали оценивают (Лашнев С.И. и др., 1997) временем T_0, которое требуется для формообразования поверхности детали. Это время называется основным технологическим временем и расчитывается по формуле, определяемой видом формулы для схемы срезания припуска. Если последнюю представить как $\lfloor a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_j \rfloor = \lfloor a_j \rfloor_{j=0,\dots,J}$, то

$$T_0 = \left(\dots\left(\left(T_{ao} + T_{xxa_0} + \Delta T_{a_1}\right)\mathbf{i}_{a_1} + T_{xxa_1} + \Delta T_{a_2}\right)\mathbf{i}_{a_2} + T_{xxa_2} + \Delta T_{a_3}\right)\mathbf{i}_{a_3} + \dots + \Delta T_{a_J}\Big)\mathbf{i}_{a_J},$$

где a_j – параметр движения инструмента;

T_{ao} – время цикла главного движения (без учета затрат времени на холостые ходы);

T_{xxa_j} – время холостого хода (если таковой имеется) после выполнения цикла движения подачи D_{a_j};

ΔT_{a_j} – время, затрачиваемое на осуществление одного шага движения подачи D_{a_j};

$\mathbf{i}_{a_j}$ – число шагов, которое делает инструмент при осуществлении движения повдачи D_{a_j}.

С кинематической и геометрической точек зрения сократить основное технологическое время можно (Лашнев С.И. и др., 1997), если:

- выбрать способ обработки с возможно меньшим числом движений подач;
- увеличить шаг движений подач за счет использования конструктивных подач инструмента;
- сократить длину пути сближения производящей поверхности инструмента с формообразуемой номинальной поверхностью детали;
- устранить (или предельно уменьшить) количество холостых ходов инструмента и детали;
- совместить во времени разные движения, совершаемые инструментом;
- увеличить скорости движений;
- применить комбинированные инструменты;
- уменьшить время T_{ao} цикла главного движения, т.е. увеличить скорость движения резания (управлять скоростью резания можно путем изменения схемы срезания припуска в комплексе со стойкостными характеристиками режущей части инструмента).

Можно показать, что приведенная формула для расчета основного технологического времени обработки является частным случаем формулы (3).

Несмотря на имеющиеся потенциальные возможности управления производительностью формообразования путем изменения значений групп параметров $D_д$, D_u и D_u^*, в дальнейшем ограничимся рассмотрением функционала упрощенного вида:

$$P_ф = P_ф\left\{[h]; S_B; S_П; R_{д.B}(U_д; V_д); R_{u.B}(U_u; V_u); R_{д.П}(U_д; V_д); R_{u.П}(U_u; V_u); \varphi; \mu; \theta\right\},$$

который получен из (3). Введение в рассмотрение дополнительных параметров будет оговариваться особо.

8.2.2. Производительность съема припуска и производительность формообразования. Производительность съема припуска (срезания стружки) и производительность формообразования менее близки к экономическим показателям процесса обработки, чем, например, штучная производительность и др. Однако именно

[1]Технологическое изменение формы исходной инструментальной поверхности предусмотрено, например, в техническом решении по а.с. №1085778 (СССР). В 24 b 21/00.

они непосредственно определяют эффективность обработки деталей, в т.ч. деталей с рабочими поверхностями сложной формы (Решетов Д.Н., Портман В.Т., 1986).

8.2.2.1. *Производительность съема припуска* равна объему припуска, удаляемому с заготовки в единицу времени – она определяет интенсивность удаления операционного припуска в процессе обработки детали.

Для аналитического описания производительности съема припуска требуется уравнение поверхности *З* заготовки.

Уравнение поверхности *З* может быть определено исходя из данных, полученных, например, путем обмера заготовки. Припуск толщиной t постоянен по величине или может быть распределенным неравномерно и изменяться в пределах обрабатываемого участка поверхности детали согласованно с изменением параметров U_∂ и V_∂ (литая заготовка, деформированная заготовка после термообработки под шлифование и др.).

Располагая уравнением $\mathbf{r}_\partial = \mathbf{r}_\partial(U_\partial; V_\partial)$ поверхности *Д* детали, а также уравнением $\mathbf{r}_з = \mathbf{r}_з(U_з; V_з)$ поверхности заготовки (рис. 8.1), из уравнения

$$\mathbf{r}_з = \mathbf{r}_\partial + \mathbf{n}_\partial \cdot t(U_\partial; V_\partial) \tag{8.4}$$

находим, что в текущей точке на поверхности детали толщина припуска равна:

$$t(U_\partial; V_\partial) = |\mathbf{r}_з - \mathbf{r}_\partial| .$$

Исходя из уравнения (4) можно расчитать значения параметров среза – текущие значения длины, ширины и площади сечения срезаемого слоя.

Используя аналогичную формулу для реальной поверхности детали $Д_p$

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_\partial + \mathbf{n}_\partial \cdot h_\Sigma(U_\partial; V_\partial)$$

можно получить полную информацию об остаточном детерминированном регулярном микрорельефе на обработанной поверхности детали – о длине, ширине, высоте, кривизне, углах при вершине, объеме и пр. остаточных гребешков (как в случае окончательной обработки детали, так и в случае обработки под шлифование). Эти параметры описываются аналитически.

Формула $\mathbf{r}_{[h]} = \mathbf{r}_\partial + \mathbf{n}_\partial \cdot [h](U_\partial; V_\partial)$ описывает поверхность допуска на точность обработки.

Для расчета производительности съема операционного припуска необходимо знать векторное уравнение исходной поверхности заготовки и номинальной поверхности детали, записанные в общей системе координат.

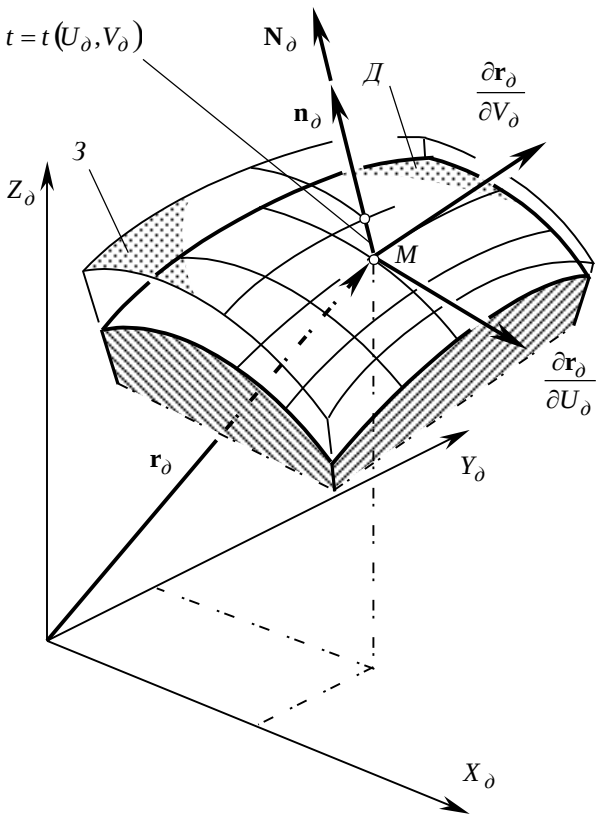


Рис. 8.1. К выводу уравнения поверхности *З* заготовки.

В случае, когда известна зависимость $t = t(U_\partial, V_\partial)$ (в частном случае – $t = Const$), уравнение поверхности *З* заготовки может быть получено так.

Обрабатываемая поверхность *Д* детали и поверхность *З* заготовки разделены между собой припуском толщина t, которого изменяется вдоль нормали $\mathbf{n}_\partial$ к номинальной поверхности детали. В общем случае толщина припуска в текущей точке поверхности детали может быть представлена как функция криволинейных координат (U_∂, V_∂) поверхности *Д*, а именно: $t = t(U_\partial, V_\partial)$. Эта формула позволяет описать поверхность заготовки *З* уравнением вида:

$$\mathbf{r}_з = \mathbf{r}_з(U_д, V_д) = \mathbf{r}_д(U_д, V_P) + \mathbf{n}_д \cdot t(U_д, V_д) =$$

$$= \begin{bmatrix} X_д(U_д, V_д) \\ Y_д(U_д, V_д) \\ Z_д(U_д, V_д) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_д}{\partial U_д} \cdot \frac{\partial Z_д}{\partial V_д} - \frac{\partial Y_д}{\partial V_д} \cdot \frac{\partial Z_д}{\partial U_д} \\ -\frac{\partial X_д}{\partial U_д} \cdot \frac{\partial Z_д}{\partial V_д} + \frac{\partial X_д}{\partial V_д} \cdot \frac{\partial Z_д}{\partial U_д} \\ \frac{\partial X_д}{\partial U_д} \cdot \frac{\partial Y_д}{\partial V_д} - \frac{\partial X_д}{\partial V_д} \cdot \frac{\partial Y_д}{\partial U_д} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t(U_д, V_д) =$$

$$= \begin{bmatrix} X_д(U_д, V_д) + \left(\frac{\partial Y_д}{\partial U_д} \cdot \frac{\partial Z_д}{\partial V_д} - \frac{\partial Y_д}{\partial V_д} \cdot \frac{\partial Z_д}{\partial U_д} \right) \cdot t(U_д, V_д) \\ Y_д(U_д, V_д) + \left(-\frac{\partial X_д}{\partial U_д} \cdot \frac{\partial Z_д}{\partial V_д} + \frac{\partial X_д}{\partial V_д} \cdot \frac{\partial Z_д}{\partial U_д} \right) \cdot t(U_д, V_д) \\ Z_д(U_д, V_д) + \left(\frac{\partial X_д}{\partial U_д} \cdot \frac{\partial Y_д}{\partial V_д} - \frac{\partial X_д}{\partial V_д} \cdot \frac{\partial Y_д}{\partial U_д} \right) \cdot t(U_д, V_д) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Элементы локальной топологии поверхности *З* заготовки могут быть определены через соответствующие элементы локальной топологии номинальной поверхности *Д* детали, аналогично тому, как это выполнено для $\mathbb{R}$-поверхности первого рода (см. выше, с.399-401).

В качестве показателя используют среднюю производительность съема стружки, равную $\tilde{P}_c = \frac{v_n}{t}$, где v_n – общий объем операционного припуска, удаляемого с заготовки за время t.

Другим показателем эффективности обработки служит мгновенная производительность съема припуска (Решетов Д.Н., Портман В.Т., 1986), равная:

$$P_c = \frac{dv_n}{dt}.$$

Элемент объема dv_n определяется по формуле:

$$dv_n = \mathbf{b}_n \cdot d\mathbf{F}_д,$$

где $d\mathbf{F}_д$ – векторный элемент площади формообразуемой поверхности *Д* детали; он расчитывается по формуле:

$$d\mathbf{F}_д = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д} \times \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д} \right) dU_д dV_д, \tag{8.5}$$

а векторный элемент припуска $\mathbf{b}_n$ равен разности векторов

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{r}_з - \mathbf{r}_д. \tag{8.6}$$

Здесь обозначено: $\mathbf{r}_з$ – радиус-вектор текущей точки поверхности *З* заготовки, заданной двухпараметрическим уравнением вида $\mathbf{r}_з = \mathbf{r}_з(U_д, V_д)$, а $U_д -$ и $V_д -$ криволинейные (гауссовы) координаты на поверхности *Д* детали.

Радиус-векторы $\mathbf{r}_з$ и $\mathbf{r}_\partial$ должны быть отнесены к общей системе координат.

Интегрируя $dv_n = \mathbf{b}_n \cdot d\mathbf{F}_\partial$, по поверхности $Д$, получим выражение для вычисления объема снятого припуска:

$$v_n = \iint\limits_{(Д)} \mathbf{b}_n \cdot d\mathbf{F}_\partial = \iint\limits_{(Д)} \left(\mathbf{b}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \right) dU_\partial dV_\partial .$$

Текущие значения криволинейных координат U_∂ и V_∂ в процессе обработки переменны во времени t и определяются соотношениями:

$$\begin{cases} U_\partial = U_\partial(w;\, t); \\ V_\partial = V_\partial(w;\, t), \end{cases} \tag{8.7}$$

где w – некоторая новая переменная.

Якобиан преобразования (7) равен (Корн Г., Корн Т., 1974):

$$J_\partial = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial U_\partial}{\partial w} & \dfrac{\partial U_\partial}{\partial t} \\ \dfrac{\partial V_\partial}{\partial w} & \dfrac{\partial V_\partial}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Рассматривается только область, в которой знак якобиана J_∂ постоянен.

Получим:

$$P_c(t) = \int\limits_{w_1(t)}^{w_2(t)} \left(\mathbf{b}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \right) |J_\partial| \, dU_\partial dV_\partial . \tag{8.8}$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ – предельные значения переменной w вдоль координатной линии $t = Const$, соответствующие границам обрабатываемого участка поверхности $Д$ детали (рис. 8.2).

При определении производительности съема припуска P_c по формуле (8) предполагается, что на поверхности $Д$ детали остаточный детерминированный регулярный микрорельеф (остаточные гребешки) не образуется, площадь его поверхности не учитывается, а материал припуска в объеме гребешков удаляется.

Производительность съема припуска может быть расчитана другим способом. Для этого рассмотрим поверхность резания – поверхность, по которой происходит отделение стружки.

Радиус-вектор $\mathbf{r}_p$ поверхности резания может быть найден из функции формообразования (Решетов Д.Н., Портман В.Т., 1986) путем подстановки вместо зависящих от времени переменных соответствующих им выражений. В результате получаем уравнение производительности съема припуска в одном из двух вариантов.

Первый вариант: при полном воспроизведении исходной инструментальной поверхности $И$ при превращении исходного инструменталь-

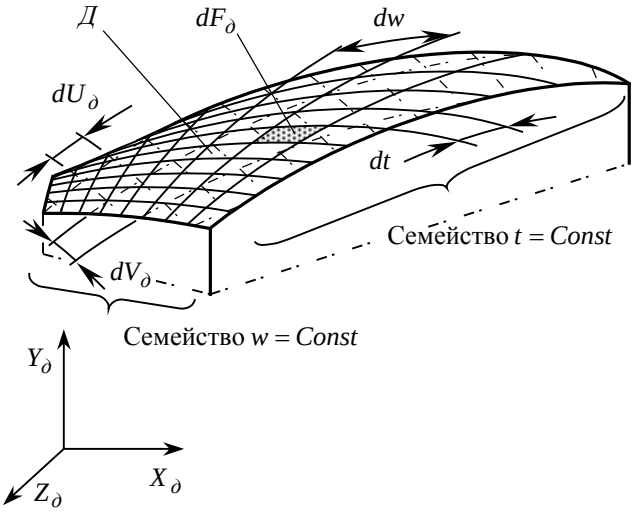


Рис. 8.2. К определению производительности формообразования.

ного тела в работоспособный инструмент (например, шлифовальные круги, многозубые лезвийные инструменты типа шеверов с небольшим шагом расположения режущих кромок и др.)

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p\,(U_u; V_u; T), \tag{8.9}$$

где T – фиксированный момент времени t.

Второй вариант: при дискретном воспроизведении исходной инструментальной поверхности $И$ при превращении ИИТ в работоспособный инструмент (например, фрезы различных конструкций и др.)

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p\,(U_p; t), \tag{8.10}$$

где U_p – координата вдоль лезвия применяемого режущего инструмента.

Векторный элемент площади $d\mathbf{F}_p$ поверхности резания равен:

$$d\mathbf{F}_p = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial U_p} \times \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial V_p}\right) dU_p dV_p$$

для первого (9) и

$$d\mathbf{F}_p = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial U_p} \times \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial V_p}\right) dU_p dt$$

для второго (10) вариантов.

Перемещаясь в толще материала заготовки, векторный элемент площади $d\mathbf{F}_p$ охватывает объем, равный удаляемому в единицу времени объему припуска $dv_n = \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{F}_p$, где $\boldsymbol{\omega}$ – скорость перемещения элемента $d\mathbf{F}_p$ относительно обрабатываемой детали. Скорость $\boldsymbol{\omega}$ находится дифференцированием по времени вектора $\mathbf{r}_\partial$, а именно: $\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{r}}_\partial$. С учетом изложенного находим, что:

$$P_c(t) = \iint\limits_{(\bar{F}_p)} \dot{\mathbf{r}}_\partial \cdot d\mathbf{F}_p = \iint\limits_{(\bar{F}_p)} \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial t} \cdot d\mathbf{F}_p\ . \tag{8.11}$$

Для случая обработки детали многолезвийным инструментом формула (11) преобразуется к виду:

$$P_c(t) = \sum_{i=1}^{N^*} \iint\limits_{(\bar{F}_{p.i})} \dot{\mathbf{r}}_{\partial.i} \cdot d\mathbf{F}_{p.i} = \sum_{i=1}^{N^*} \iint\limits_{(\bar{F}_{p.i})} \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial t} \cdot d\mathbf{F}_{p.i}\ ,$$

где N^* – число режущих кромок инструмента, одновременно участвующих в резании;

$\bar{F}_{p.i}$ – площадь поверхности резания, образуемая $i-м$ лезвием инструмента.

8.2.2.2. *Производительность формообразования* P_ϕ определяется интенсивностью увеличения формообразованной площади номинальной поверхности $Д_н$ в процессе обработки детали. В качестве показателя производительности формообразования принимают среднюю производительность $\tilde{P}_\phi$, равную

$$\tilde{P}_\phi = \frac{\bar{F}_\partial}{t},$$

где $\bar{F}_\partial$ – площадь поверхности $Д$ детали, формообразованная на станке за время t.

Другим показателем эффективности обработки детали служит мгновенная производительность формообразования, расчитываемая по формуле:

$$P_\phi = \frac{d\bar{F}_\partial(t)}{dt}. \tag{8.12}$$

Если $\bar{F}_\partial(t) = at$, где $a = Const$, то $P_\phi = \tilde{P}_\phi = a$. Выражение для определения производительности формообразования в общем случае многокоординатной обработки сложной поверхности детали можно найти, если учитывать изменение $\bar{F}_\partial(t)$ во времени.

Исходя из уравнения $\mathbf{r}_\partial = \mathbf{r}_\partial(U_\partial; V_\partial)$ поверхности $Д$ детали площадь $\bar{F}_\partial$ ее участка расчитывается по формуле: $\bar{F}_\partial = \iint\limits_F |d\mathbf{F}_\partial|$, где $d\mathbf{F}_\partial$ – векторный элемент площади, определяемый по формуле (5).

Модуль $|d\mathbf{F}_\partial|$ элементарного вектора $d\mathbf{F}_\partial$, определяющий элемент площади поверхности $Д$ детали, равен (см. выше, с. 42, формула (1.27)):

$$|d\mathbf{F}_\partial| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right| dU_\partial dV_\partial = \sqrt{E_\partial G_\partial - F_\partial^2}\, dU_\partial dV_\partial .$$

Текущие значения криволинейных координат U_∂ и V_∂ определяются из соотношений (7). Тогда исходя из (12), для расчета площади обработанной поверхности $Д$ детали справедлива формула:

$$\bar{F}_\partial = \iint\limits_{(\bar{F})} \sqrt{E_\partial G_\partial - F_\partial^2} \cdot |J_\partial|\, dt\, dw . \tag{8.13}$$

Подставив (13) в формулу (12), получим зависимость для вычисления величины мгновенной производительности формообразования:

$$P_\phi = \int\limits_{w_1(t)}^{w_2(t)} \sqrt{E_\partial G_\partial - F_\partial^2} \cdot |J_\partial|\, dw , \tag{8.14}$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ – предельные значения переменной w вдоль координатной линии $t = Const$ (см. рис. 8.2).

Пример 8.1. Требуется расчитать производительность формообразования при шлифовании плоских криволинейных контуров цилиндрическим шлифовальным кругом (рис. 8.3). Перечень звеньев формообразующей системы шлифовального станка и их движений представлен в табл. 8.1 (Решетов Д.Н., Портман В.Т., 1986).

Модель формообразующей системы шлифовального станка имеет вид:

$$\mathbf{r}_\partial = A^2(-Y_u)A^1(-X_u)A^6(\varphi)\mathbf{r}_u , \tag{8.15}$$

где $\mathbf{r}_u$ – радиус-вектор текущей точки исходной инструментальной поверхности $И$ шлифовального круга;

$$\mathbf{r}_u = A^6(\psi)A^3(Z_u)A^1(R_u)e^4 = [R_u\cos\psi \quad R_u\sin\psi \quad Z_u \quad 1]^T , \tag{8.16}$$

ψ – полярный угол на исходной инструментальной поверхности $И$ шлифовального круга;

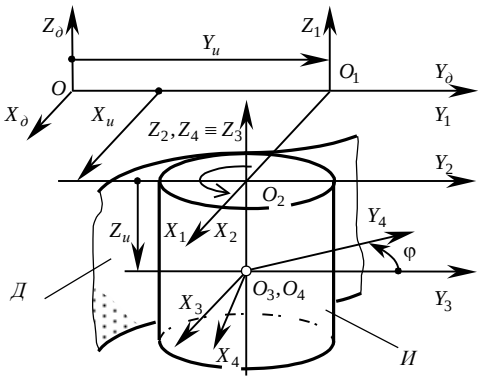


Рис. 8.3. Обработка криволинейного контура на контурношлифовальном станке (Решетов Д.Н., Портман В.Т., 1986).

R_u – радиус шлифовального круга;

Z_u – координата вдоль оси шлифовального круга ($0 \le Z_u \le B_u$);

B_u – ширина шлифовального круга.

Знак "–" при X и Y в формуле (15) означает, что фактически перемещение совершает система координат S_{i-1}, а не система S_i.

Формообразующая система контурно-шлифовального станка

Таблица 8.1.

Система координат	Звено формообразующей системы	Перемещение относительно предыдущего звена	
		описание	оператор
$X_\partial Y_\partial Z_\partial$	Обрабатываемая деталь со столом	Исходное звено (условно неподвижно)	$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$X_1 Y_1 Z_1$	Поперечные салазки	Формообразующее поступательное перемещение вдоль оси Y_∂ на величину $-Y_u$ (перемещение стола относительно станины)	$\mathbf{Trans}\,(Y_\partial, Y_u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$X_2 Y_2 Z_2$	Станина	Формообразующее поступательное перемещение вдоль оси X_1 на величину $-X_u$ (перемещение салазок относительно станины)	$\mathbf{Trans}\,(X_\partial, X_u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$X_3 Y_3 Z_3$	Шпиндель	Формообразующее поворотное движение вокруг оси Z_2 на угол φ	$\mathbf{Rot}\,(Z_2, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

В функциональной системе шлифовального станка имеются:

– скрытая связь $\varphi + \psi = \theta$;

– кинематическая (функциональная) связь $Y_\partial = Y_\partial(X_\partial)$;

– связь огибания $\mathbf{r}_X \cdot \mathbf{r}_Z \cdot \mathbf{r}_\theta = 0$.

Таким образом, $\dfrac{dY_\partial}{dX_\partial} + \cot\theta = 0$.

Следовательно, уравнение обработанной поверхности $Д$ после выполнения преобразований (15) с учетом (16) и уравнений связи примет вид

$$\mathbf{r}_\partial = \left[R_u \cos\theta - X_\partial \quad R_u \sin\theta - Y_\partial(X_\partial) \quad Z_\partial \quad 1\right]^T; \qquad \theta = -\arctan Y'_\partial(X_\partial). \tag{8.17}$$

Необходимые производные вектора $\mathbf{r}_0$ (см. (17) и др.) по координатам X_u и Y_u равны:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial X_u} = \left(1 \pm \frac{R_u}{\rho_\partial}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ Y'_u \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial Z_u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \rho_\partial = \frac{\left[1 + (Y'_\partial)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{Y''_\partial}, \tag{8.18}$$

где ρ_∂ – радиус кривизны криволинейного контура $Y_\partial = Y_\partial(X_\partial)$, соответствующий моменту времени t.

В формуле (18) знак "+" берется при обработке вогнутого участка поверхности $Д$ детали, а знак "–" – при обработке выпуклого.

В выражении (17) переменная X_∂ и, следовательно, Y_∂ представляют собой функции времени t. Преобразование (7) в рассматриваемом случае имеет вид: $Z_\partial = Z$ и $X_\partial = S_X \cdot t$, где S_X – подача вдоль оси X_∂. Якобиан этого преобразования равен $J = S_X$.

Подставив найденные зависимости в (14), получим

$$P_\phi(t) = \int_{Z_1}^{Z_2} \left| \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial Z_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial X_\partial} \right| S_X \, dZ_\partial = \int_0^B S_X \left| 1 \pm \frac{R_u}{\rho_\partial} \right| \sqrt{1 + (Y'_\partial)^2} \, dZ_\partial = \sqrt{S_X^2 + S_Y^2} \left| 1 + \frac{R_u}{\rho_\partial} \right| B_u,$$

где S_Y – подача инструмента вдоль оси Y_∂.

Таким образом, производительность контурной обработки зависит от радиуса кривизны траектории перемещения оси вращения шлифовального круга. Нетрудно видеть, что множитель при B_u есть скорость перемещения точки шлифовального круга вдоль профиля обрабатываемой детали. В частном случае, при обработке плоскости, для которой кривизна контура равна нулю, получим $P_\phi = B_u S$, где $S = \sqrt{S_X^2 + S_Y^2}$. При этом формообразуемая плоскость располагается под некоторым углом к оси X_∂, величина которого определяется отношением $\frac{S_X}{S_Y}$.

8.2.2.3. Производительность съема стружки. Для расчета производительности удаления операционного припуска P_c неоходимы векторные уравнения поверхности заготовки и обработанной поверхности детали, записанные в общей системе координат.

В качестве показателей производительности съема стружки может быть использована средняя производительность съема стружки

$$\tilde{P}_c = \frac{V_c}{t},$$

(здесь V_c – объем стружки, снятый за время t) и мгновенная производительность съема стружки:

$$P_c = \frac{dV_c}{dt}.$$

Элемент объема определяется по формуле

$$dv_c = \mathbf{b} \cdot d\mathbf{F}, \tag{8.19}$$

где $d\mathbf{F}$ – векторный элемент площади;

$\mathbf{b}$ – вектор толщины припуска, определяемый как разность двух векторов

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}_з - \mathbf{r}_\partial,$$

где $\mathbf{r}_з$ – радиус-вектор текущей точки поверхности $З$ заготовки;

$\mathbf{r}_\partial$ – радиус-вектор текущей точки поверхности $Д$ детали (помним, что $\mathbf{r}_\partial$ и $\mathbf{r}_з$ записаны в одних и тех же криволинейных координатах U_∂ и V_∂).

Интегрируя (19) по поверхности S, получаем выражене для объема срезанной стружки

$$V_c = \iint\limits_{(S)} \mathbf{b} \cdot d\,\mathbf{F} = \iint\limits_{(S)} \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \right) dU_\partial dV_\partial.$$

По аналогии с вычислением площади поверхности по формулам (13), выражаем U_∂ и V_∂ через новые переменные w и t, где t – текущее значение времени обработки поверхности.

Тогда по аналогии с (14) получим выражение для расчета мгновенной производительности съема операционного припуска:

$$P_c(t) = \int\limits_{w_1(t)}^{w_2(t)} \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} \right) \left| J_\partial \right| dw,$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ – предельные значения переменной w на координатной линии $t = Const$, соответствующее границам контура обрабатываемой поверхности $Д$ детали;

J_∂ – якобиан преобразования (см. выше, с. 440).

Производительность срезания стружки P_c также может быть расчитана другим способом.

Радиус-вектор $\mathbf{r}_{рез}$ поверхности резания может быть найден из функции формообразования $\mathbf{r}_u = A_{u,l} \cdot \mathbf{r}_l$ (здесь $A_{u,l} = \prod_{i=1}^{l} A_{i-1,i}^{j,l}$) путем подстановки вместо зависящих от времени t переменных q_j соответствующих выражений $q_j = q_j(t)$. В результате получим уравнение поверхности резания в одном из двух вариантов:

– при формообразовании исходной инструментальной поверхностью инструмента:

$$\mathbf{r}_{рез} = \mathbf{r}_{рез}(U_u, V_u, T), \tag{8.20}$$

где U_u и V_u – криволинейные координаты исходной инструментальной поверхности;

T – фиксированный момент времени t.

– при формообразовании отдельной режущей кромкой инструмента:

$$\mathbf{r}_{рез} = \mathbf{r}_{рез}(U_p, t), \tag{8.21}$$

где U_p – координата вдоль режущей кромки инструмента.

Векторный элемент площади $d\mathbf{S}_{рез}$ поверхности резания P равен:

– при формообразовании исходной инструментальной поверхностью (20):

$$d\mathbf{S}_{рез} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{рез}}{\partial U_u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{рез}}{\partial V_u}\right] dU_u dV_u ;$$

– при формообразовании отдельной режущей кромкой инструмента (21):

$$d\mathbf{S}_{рез} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{рез}}{\partial U_p} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{рез}}{\partial t}\right] dU_p dt .$$

Элемент площади, перемещаясь в толще материала срезаемого припуска, охватывает в единицу времени объем $dv_c = \mathbf{w} \cdot d\mathbf{S}_{рез}$, где $\mathbf{w}$ – скорость перемещения элемента $d\mathbf{S}_{рез}$ относительно обрабатываемой детали. Она определяется дифференцированием по времени t вектора $\mathbf{r}_\partial$:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{r}}_\partial = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial q_j} \cdot \frac{d q_j}{d t}.$$

Отсюда производительность срезания стружки равна:

$$P_c(t) = \iint_{(S)} \dot{\mathbf{r}}_\partial \cdot d\mathbf{S}_{рез} . \tag{8.22}$$

Для случаев обработки деталей многолезвийным инструментом формула (22) преобразуеся к виду:

$$P_c(t) = \sum_{n=1}^{N_{р.к}} \iint_{(S_{рез}^{(n)})} \dot{\mathbf{r}}_\partial^{(n)} \cdot d\mathbf{S}_{рез}^{(n)} ,$$

где $N_{р.к}$ – число режущих кромок, одновременно участвующих в срезании припуска;

$S_{рез}^{(n)}$ – поверхность резания, образованная n-й режущей кромкой.

8.2.3. Критические значения подач инструмента. Обработка сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ производится с двумя подачами: с подачей S_B инструмента вдоль строки формообразования и с подачей $S_П$ поперек строки прохода инструмента по поверхности детали для осуществления обработки очередной строки формообразования. Расчет критических значений подач S_B и $S_П$ производится исходя из условия достижения требуемой точности обработки, определяемой допуском $[h]$ на величину результирующей погрешности формообразования h_Σ. Во внимание при этом принимаются как постоянные, так и переменные параметры процесса обработки: текущие значения параметров локальной топологии поверхностей $Д$ и $И$, их локальная ориентация, направление мгновенного относительного движения формообразования. Если обработка производится лезвийным инструментом, учитываются особенности реализуемого в этом случае дискретного формообразования поверхности $Д$ детали.

Следует обратить внимание на то, что подача S_B (как и подача $S_П$) и движения подач, осуществляемые механизмами станка с ЧПУ, являются разными величинами. В первом случае имеются ввиду величины подач, с которыми по поверхности детали перемещается точка касания поверхности $Д$ и исходной инструментальной поверхности. Во втором случае рассматриваются скорости движения отдельных элементов конструкции станка. Величины одних подач достаточно просто могут быть расчитаны по известным значениям других и наоборот.

Среди факторов, функцией которых является производительность формообразования, величина подачи $S_П$ на строку прохода, как правило, оказывает превалирующее влияние на значение $P_ф$.

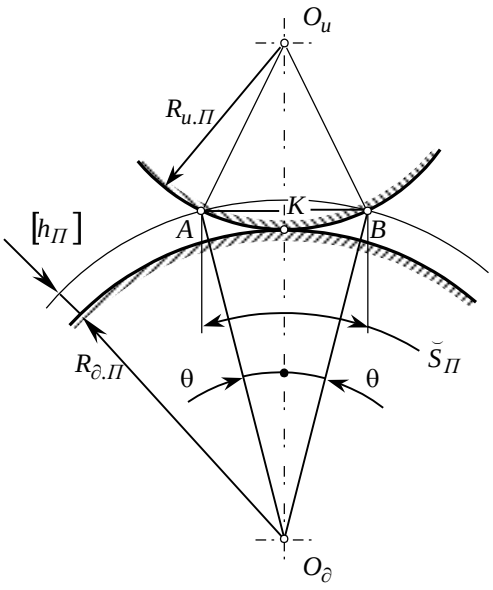


Рис. 8.4 Схема к расчету величины критической подачи $\breve{S}_П$.

Точное определение допустимой ширины строки формообразования (критической величины подачи $S_П$) представляет собой трудоемкую и сложную геометрическую задачу, связанную с необходимостью выполнения в большом объеме громоздких вычислений. Существенно упростить вывод необходимых зависимостей можно путем такого упрощения задачи, при котором точность полученного результата будет приемлемой. Считаем, что справедливо:

Допущение 8.1. *В пределах длины и ширины одной формообразованной ячейки (т.е. в пределах дуги длиной $\breve{S}_B$ и $\breve{S}_П$) на обработанной поверхности детали кривизны нормальных сечений поверхностей $Д$ и $И$ в направлениях, совпадающих с направлениеми отсчета подач S_B и $S_П$, постоянны, а их кручение принимается равным нулю.*

Принятое допущение уместно, поскольку в соответствующих плоских нормальных сечениях длина и ширина строки формообразования много меньше величин измеренных в точке K нормальных радиусов кривизны $R_{∂.B}$, $R_{∂.П}$ и $R_{u.B}$, $R_{u.П}$ поверхностей $Д$ и $И$ ($\breve{S}_B << R_{∂.B}$; $\breve{S}_B << R_{u.B}$ и $\breve{S}_П << R_{∂.П}$; $\breve{S}_П << R_{u.П}$).

Принятие допущения 8.1 приводит к тому, что реальная поверхность формообразованной ячейки на поверхности детали заменяется фрагментом поверхности тора, размеры, положение и ориентация которого относительно детали определяются параметрами формообразования поверхности $Д$ в текущей точке K. Таким образом предполагается возможность рассмотрения в текущий момент времени процесса формообразования поверхности $Д$ детали в двух нормальных секущих плоскостях.

С учетом допущения 8.1 критическое значение величины подачи $S_П$ определяется так (рис. 8.4.).

Мгновенное значение ширины строки формообразования измеряется в направлении подачи $\mathbf{S}_{П}$ и равно длине дуги $\breve{S}_{П} = 2R_{\partial.П}\theta$. По теореме косинусов (см. рис. 8.4) имеем:

$$\theta = \arccos\frac{R_{\partial.П}\left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right) + \left[h_{П}\right]\left(R_{\partial.П} + 0{,}5\left[h\right]\right)}{\left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right)\left(R_{\partial.П} + \left[h_{П}\right]\right)}.$$

Следовательно

$$\breve{S}_{П} = 2R_{\partial.П}\arccos\frac{R_{\partial.П}\left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right) + \left[h_{П}\right]\left(R_{\partial.П} + 0{,}5\left[h_{П}\right]\right)}{\left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right)\left(R_{\partial.П} + \left[h_{П}\right]\right)}. \tag{8.23}$$

Формула (23) допускает упрощение, вытекающее из того, что $\breve{S}_{П} << R_{\partial.П}$. В этом случае выполняется соотношение $\breve{S}_{П} \cong AB = S_{П}$, с учетом которого (см. рис. 8.4)

$$S_{П} = 2R_{\partial.П}\sqrt{1 - \left[\frac{R_{\partial.П}\left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right) + \left[h_{П}\right]\left(R_{\partial.П} + 0{,}5\left[h_{П}\right]\right)}{\left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right)\left(R_{\partial.П} + \left[h_{П}\right]\right)}\right]^{2}}\ . \tag{8.24}$$

Подача $\breve{S}_{П}$ может быть также определена по обобщенной формуле, применимой к формообразованию не только выпуклых, но и вогнутых участков поверхности $Д$:

$$\breve{S}_{П} = 2R_{\partial.П}\arccos\frac{\left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right)^{2} + \left(R_{\partial.П} + \left[h_{П}\right]\operatorname{sgn} R_{\partial.П}\right)^{2} - R_{u.П}^{2}}{2\left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right)\left(R_{\partial.П} + \left[h_{П}\right]\operatorname{sgn} R_{\partial.П}\right)}, \tag{8.25}$$

в которую подставляются алгебраические значения радиусов кривизны $R_{\partial.П}$ и $R_{u.П}$, а именно: эти радиусы кривизны берутся каждый со своим знаком – со знаком “+” для выпуклых и со знаком “–” для вогнутых участков поверхностей $Д$ и $И$.

Если пренебречь членами второго порядка малости, а именно, величиной $h_{П}^{2}$, то зависимость (25) упрощается и может быть записана так:

$$\breve{S}_{П} \cong 2R_{\partial.П}\arccos\frac{R_{\partial.П}^{2} + R_{u.П}\left(R_{u.П} + \left[h_{П}\right]\operatorname{sgn} R_{\partial.П}\right)}{\left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right)\left(R_{\partial.П} + \left[h_{П}\right]\operatorname{sgn} R_{\partial.П}\right)}. \tag{8.26}$$

В соответствие с формулой Эйлера

$$R_{\partial.П} = \frac{R_{1.\partial}R_{2.\partial}}{R_{1.\partial}\sin^{2}\varphi + R_{2.\partial}\cos^{2}\varphi}; \tag{8.27}$$

$$R_{u.П} = \frac{R_{1.u}R_{2.u}}{R_{1.u}\sin^{2}\left(\varphi + \mu\right) + R_{2.u}\cos^{2}\left(\varphi + \mu\right)}. \tag{8.28}$$

На основании (27) и (28) формула (23) представима в виде:

$$\breve{S}_{П} = 2R_{\partial.П}\left(\varphi\right)\arccos\frac{R_{\partial.П}(\varphi)\left\{R_{\partial.П}(\varphi) + R_{u.П}(\varphi;\,\mu)\right\} + \left[h_{П}\right]\left\{R_{\partial.П}(\varphi) + 0{,}5\left[h_{П}\right]\right\}}{\left\{R_{\partial.П}(\varphi) + R_{u.П}(\varphi;\,\mu)\right\}\left\{R_{\partial.П}(\varphi) + \left[h_{П}\right]\right\}}. \tag{8.29}$$

В случае обработи сложных поверхностей деталей лезвийным инструментом вдоль каждой строки формообразования образуется волнистость, высота которой ограничивает критическое значение подачи $\mathbf{S}_{B}$

вдоль строки прохода инструмента по поверхности $Д$ детали. В продольном направлении каждой строки формообразования ее профиль на прямолинейных участках формируется семействами удлиненных циклоид (семейством трохоид), на выпуклых участках – семейством удлиненных эпициклоид (семейством эпитрохоид), а на вогнутых – семейством удлиненных гипоциклоид (семейством гипотрохоид).

Если ограничиться рассмотрением наиболее распространенного вида обработки сложных поверхностей деталей фасонными фрезами, то, принимая во внимание соотношение линейной скорости точек режущих кромок инструмента от его вращательного движения и их скорости от движения подачи вдоль строки формообразования, любую из трохоидальных кривых в пределах одной формообразованной ячейки на $Д$ с приемлемой точностью можно заменить дугой окружности соответствующего радиуса $R_{u.B}$. На этом основании аналогично (23), (24), (25) и (29) можно зависать, что величина подачи $\breve{S}_B$ от параметров процесса многокоординатного формообразования зависит так:

$$\breve{S}_B = 2R_{\partial.B}\arccos\frac{R_{\partial.B}\left(R_{\partial.B}+R_{u.B}\right)+\left[h_B\right]\left(R_{\partial.B}+0{,}5\left[h_B\right]\right)}{\left(R_{\partial.B}+R_{u.B}\right)\left(R_{\partial.B}+\left[h_B\right]\right)}; \tag{8.30}$$

$$S_B = 2R_{\partial.B}\sqrt{1-\left[\frac{R_{\partial.B}\left(R_{\partial.B}+R_{u.B}\right)+\left[h_B\right]\left(R_{\partial.B}+0{,}5\left[h_B\right]\right)}{\left(R_{\partial.B}+R_{u.B}\right)\left(R_{\partial.B}+\left[h_B\right]\right)}\right]^2}; \tag{8.31}$$

$$\breve{S}_B = 2R_{\partial.B}\arccos\frac{\left(R_{\partial.B}+R_{u.B}\right)^2+\left(R_{\partial.B}+\left[h_B\right]\operatorname{sgn}R_{\partial.B}\right)^2-R_{u.B}^2}{2\left(R_{\partial.B}+R_{u.B}\right)\left(R_{\partial.B}+\left[h_B\right]\operatorname{sgn}R_{\partial.B}\right)}; \tag{8.32}$$

$$\breve{S}_B = 2R_{\partial.B}(\varphi)\arccos\frac{R_{\partial.B}(\varphi)\left\{R_{\partial.B}(\varphi)+R_{u.B}(\varphi;\mu)\right\}+\left[h_B\right]\left\{R_{\partial.B}(\varphi)+0{,}5\left[h_B\right]\right\}}{\left\{R_{\partial.B}(\varphi)+R_{u.B}(\varphi;\mu)\right\}\left\{R_{\partial.B}(\varphi)+\left[h_B\right]\right\}}. \tag{8.33}$$

Пренебрегая величиной h_B^2 как величиной второго порядка малости, из (32) нетрудно получить, что:

$$\breve{S}_B \cong 2R_{\partial.B}\arccos\frac{R_{\partial.B}^2+R_{u.B}\left(R_{u.B}+\left[h_B\right]\operatorname{sgn}R_{\partial.B}\right)}{\left(R_{\partial.B}+R_{u.B}\right)\left(R_{\partial.B}+\left[h_B\right]\operatorname{sgn}R_{\partial.B}\right)}.$$

Зависимости (30), (31), (32) и (33) записаны по аналогии с формулами (23), (24), (25), (26) и (29).

Расчитывая величины критических подач $\breve{S}_B$ и $\breve{S}_П$, следует помнить, что всегда имеют место погрешности положения инструмента относительно детали, в том числе и его смещения вдоль контактной нормали.

8.2.4. Мгновенная производительность формообразования. Для расчета производительности формообразования справедлива зависимость (1). Если в (1) подставить значения критических подач $\breve{S}_П$ (23) и $\breve{S}_B$ (30) либо эквивалентные им зависимости (24), (29) и (31), (33), получим в развернутом виде зависимость для расчета мгновенной производительности формообразования:

$$P_ф = 4R_{\partial.П}R_{\partial.B}\arccos\frac{R_{\partial.П}\left(R_{\partial.П}+R_{u.П}\right)+\left[h_П\right]\left(R_{\partial.П}+0{,}5\left[h_П\right]\right)}{\left(R_{\partial.П}+R_{u.П}\right)\left(R_{\partial.П}+\left[h_П\right]\right)}\cdot$$

$$\cdot\arccos\frac{R_{\partial.B}\left(R_{\partial.B}+R_{u.B}\right)+\left[h_B\right]\left(R_{\partial.B}+0{,}5\left[h_B\right]\right)}{\left(R_{\partial.B}+R_{u.B}\right)\left(R_{\partial.B}+\left[h_B\right]\right)}, \tag{8.34}$$

или

$$P_ф = 4R_{\partial.П}R_{\partial.B}\arccos\frac{R_{\partial.П}^2+R_{\partial.П}\left(R_{u.П}+\left[h_П\right]\operatorname{sgn}R_{\partial.П}\right)}{\left(R_{\partial.П}+R_{u.П}\right)\left(R_{\partial.П}+\left[h_П\right]\operatorname{sgn}R_{\partial.П}\right)}\cdot\arccos\frac{R_{\partial.B}^2+R_{\partial.B}\left(R_{u.B}+\left[h_B\right]\operatorname{sgn}R_{\partial.B}\right)}{\left(R_{\partial.B}+R_{u.B}\right)\left(R_{\partial.B}+\left[h_B\right]\operatorname{sgn}R_{\partial.B}\right)}\cdot\sin\theta. \tag{8.35}$$

Допуск $[h]$ на точность формообразования распределяется на две части. В пределах его части $[h_{\Pi}]=c[h]$ находится составляющая h_{Π} результирующей погрешности h_{Σ} формообразования ($h_{\Pi} \le [h_{\Pi}]$), а в пределах части $[h_B]=(1-c)[h]$ – составляющая h_B погрешности h_{Σ}, т.е. $h_B \le [h_B]$. Здесь c – некоторая фиксированная для текущей точки K величина ($0 \le c \le 1$).

Вид функции (35) производительности формообразования P_{ϕ} существенно проще аналитического описания приведенных затрат на изготовление детали, а использование ее в качестве аналитически описанного критерия эффективности механической обработи обеспечивает получение практически того же результата. Поэтому при выборе критерия эффективности обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ предпочтение следует отдавать производительности формообразования, представленной, например, в виде (35).

Дальнейшее упрощение аналитического описания критерия эффективности обработки возможно путем введения в рассмотрение его геометрических аналогов. Таким аналогом может служить любая функция из установленного (см. выше, гл. 4) класса (4.76) функций конформности, в частности, индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ поверхности детали и исходной инструментальной поверхности (4.83). Такая замена формы аналитического представления критерия эффективности обработки возможна на том основании, что структура функции (35) производительности формообразования соответствует структуре функций конформности. Но, как было установлено (см. выше, гл. 4), все функции конформности имеют экстремумы при одних и тех же значениях входных параметров.

8.3. Производительность формообразования как функция конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности

Как следует из формулы (1), производительность формообразования P_{ϕ} прямо зависит от величины подачи S_B инструмента вдоль и S_{Π} поперек строки формообразования. Поэтому чем больше значения подач S_B и S_{Π}, тем выше производительность формообразования P_{ϕ}.

Для заданной поверхности детали управлять величинами подач S_B и S_{Π} можно за счет изменения положения и ориентации инструмента относительно детали, а также путем управляемого изменения по программе от системы ЧПУ станком формы и параметров исходной инструментальной поверхности.

Один и тот же локальный участок поверхности детали может быть формообразован локальными участками исходной инструментальной поверхности различной формы. Локальное формообразование возможно в следующих случаях[1].

1. Выпуклый локальный участок поверхности $Д$ ($\tilde{G}_{\partial} \ge 0$; $\tilde{M}_{\partial} > 0$):

1.1. выпуклым локальным участком исходной инструментальной поверхности $И$ ($\tilde{G}_u \ge 0$; $\tilde{M}_u > 0$);

1.2. выпукло-вогнутым локальным участком исходной инструментальной поверхности $И$ ($\tilde{G}_u \le 0$).

1.3. вогнутым локальным участком исходной инструментальной поверхности $И$ ($\tilde{G}_u \ge 0$, $\tilde{M}_u < 0$);

2. Выпукло-вогнутый локальный участок поверхности $Д$ ($\tilde{G}_{\partial} \le 0$):

2.1. выпуклым локальным участком исходной инструментальной поверхности $И$ ($\tilde{G}_u \ge 0$; $\tilde{M}_u > 0$);

2.2. выпукло-вогнутым локальным участком исходной инструментальной поверхности $И$ ($\tilde{G}_u \le 0$).

3. Вогнутый локальный участок поверхности $Д$ ($\tilde{G}_{\partial} \ge 0$, $\tilde{M}_{\partial} < 0$):

3.1. выпуклым локальным участком исходной инструментальной поверхности $И$ ($\tilde{G}_u \ge 0$; $\tilde{M}_u > 0$).

Чем принципиально отличаются один от другого, например, случаи 1.1, 1.2 и 1.3?

Рассмотрим произвольное плоское нормальное сечение поверхности детали (рис. 8.5). В точке K линия сечения поверхности $Д$ имеет некоторый радиус кривизны R_{∂}. Если поверхность $Д$ обрабатывать ин-

[1]Это необходимые, но не достаточные условия.

струментом, радиус кривизны исходной инструментальной поверхности $И'$ которого в точке K равен R'_u, то при заданном допуске $[h]$ за один проход инструмента на поверхности детали будет обработана строка, ширина $A'B'$ которой равна S' (рис. 8.5.1).

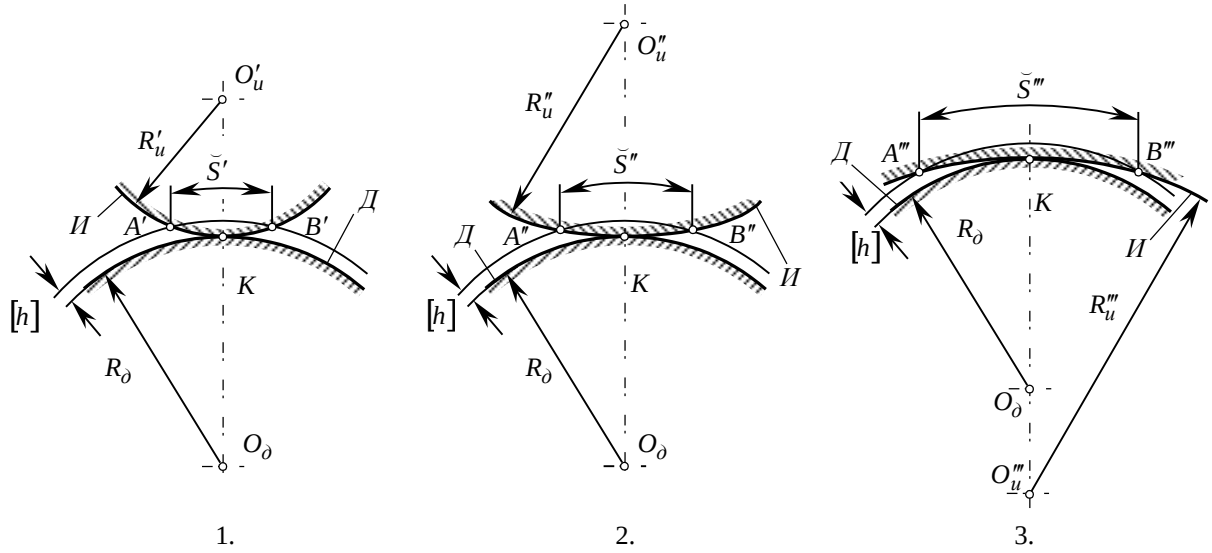


Рис. 8.5. Зависимость ширины строки формообразования $S_П$ от параметров формы исходной инструментальной поверхности.

Если ту же поверхность $Д$ обрабатывать инструментом, радиус кривизны исходной инструментальной поверхности $И''$ которого в точке K равен R''_u (причем $R''_u > R'_u$), то при том же допуске $[h]$ на точность формообразования за один проход инструмента будет обработана строка, ширина $A''B''$ которой равна подаче S'' (рис. 8.5.2). Очевидно, что увеличение радиуса кривизны исходной инструментальной поверхности от R'_u до R''_u приводит к соответствующему увеличению допустимого значения критической подачи: от значения S' до величины S'', вследствие чего пропорционально этому увеличивается производительность формообразования.

Обработка той же поверхности $Д$ детали может быть произведена инструментом с вогнутым сечением профиля исходной инструментальной поверхности. Это имеет место, например, при использовании инструмента охватывающего типа, радиус кривизны R'''_u поверхности $И'''$ которого отрицателен (рис. 8.5.3). При неизменном допуске $[h]$ на точность формообразования за один проход инструмента на поверхности детали будет обработана строка, ширина $A'''B'''$ которой равна подаче S'''. Причем очевидно, что $S''' > S'' > S'$. Соответственно этому увеличивается производительность формообразования.

Поэтому для увеличения эффективности обработки степень конформности поверхностей $Д$ и $И$ надо увеличивать, однако не беспредельно. Теоретически – до достижения локальнолинейного или до локальноповерхностного (первого или второго рода) вида касания поверхностей $Д$ и $И$. Практически же – “немного” не достигая этих видов касания: до квази-линейного и квази-поверхностного (первого и второго рода) касания. Последнее вызвано всегда имеющими место большими или меньшими погрешностями положения и ориентации инструмента относительно детали.

Не трудно видеть (см. рис. 8.5), что каждый последующий шаг увеличения степени конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали (от $И'$ к $И''$ и далее к $И'''$) оказывается эффективнее предыдущего.

Рассмотренные примеры (см. рис. 8.5) иллюстрируют влияние на эффективность обработки степени конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали. В пределе, когда $-R_u = R_д$, исходная инструментальная поверхность предельно конформна поверхности детали и поверхности $Д$ и $И$ становятся

локально-конгруэнтными. В этом случае при неизменном допуске $[h]$ ширина строки формообразования наибольшая и, следовательно, производительность формообразования равна своему предельному, максимально достижимому значению. Исходя из этого можно утверждать, что чем в большей степени поверхность $И$ инструмента конформна поверхности $Д$ детали, тем производительность формообразования при прочих одинаковых условиях выше.

Анализ зависимости (34) также показывает, что она относится к классу (4.76) функций конформности, в связи с чем, наряду с другими функциями этого класса, может быть использована в качестве аналитически описанного критерия эффективности обработки или заменена эквивалентной ей, но более простой функцией конформности.

С целью упрощения аналитического описания вместо (34) в рассмотрение могут быть введены геометрические аналоги производительности формообразования. Для выяснения сущности этого вопроса предварительно рассмотрим индикатрисы кривизны (индикатрисы Дюпена), построенные в точке K касания поверхностей $Д$ и $И$.

Уравнения индикатрис кривизны поверхности детали и исходной инструментальной поверхности в общей системе полярных координат с началом в точке K могут быть представлены в такой форме:

$$Ind\,(Д) \quad \Rightarrow \quad r_{\partial} = \sqrt{\frac{E_{\partial}G_{\partial}}{G_{\partial}L_{\partial}\cos^2\varphi + M_{\partial}\sqrt{E_{\partial}G_{\partial}}\sin 2\varphi + E_{\partial}N_{\partial}\sin^2\varphi}}; \tag{8.36}$$

$$Ind\,(И) \quad \Rightarrow \quad r_{u} = \sqrt{\frac{E_{u}G_{u}}{G_{u}L_{u}\cos^2(\varphi+\mu) + M_{u}\sqrt{E_{u}G_{u}}\sin 2(\varphi+\mu) + E_{u}N_{u}\sin^2(\varphi+\mu)}}. \tag{8.37}$$

При ортогональной $[U_{\partial(u)}; V_{\partial(u)}]$– параметризации поверхностей $Д$ и $И$ из (36) и (37) имеем:

$$Ind\,(Д) \quad \Rightarrow \quad r_{\partial} = \left[L_{\partial}\cos^2\varphi + M_{\partial}\sin 2\varphi + N_{\partial}\sin^2\varphi\right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$Ind\,(И) \quad \Rightarrow \quad r_{u} = \left[L_{u}\cos^2(\varphi+\mu) + M_{u}\sin 2(\varphi+\mu) + N_{u}\sin^2(\varphi+\mu)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Определяющая мгновенное направление движения подачи $\mathbf{S}_{П}$ на очередную строку формообразования величина угла ξ равна $\xi = \varphi + 90^{\circ}$. Из (27) и (28) следует:

$$R_{\partial.П} = \frac{E_{\partial}G_{\partial}}{G_{\partial}L_{\partial}\cos^2\xi + M_{\partial}\sqrt{E_{\partial}G_{\partial}}\sin 2\xi + E_{\partial}N_{\partial}\sin^2\xi}; \tag{8.38}$$

$$R_{u.П} = \frac{E_{u}G_{u}}{G_{u}L_{u}\cos^2(\xi+\mu) + M_{u}\sqrt{E_{u}G_{u}}\sin 2(\xi+\mu) + E_{u}N_{u}\sin^2(\xi+\mu)} \tag{8.39}$$

и аналогично

$$R_{\partial.В} = \frac{E_{\partial}G_{\partial}}{G_{\partial}L_{\partial}\sin^2\xi + M_{\partial}\sqrt{E_{\partial}G_{\partial}}\sin 2\xi + E_{\partial}N_{\partial}\cos^2\xi}; \tag{8.40}$$

$$R_{u.В} = \frac{E_{u}G_{u}}{G_{u}L_{u}\sin^2(\xi+\mu) + M_{u}\sqrt{E_{u}G_{u}}\sin 2(\xi+\mu) + E_{u}N_{u}\cos^2(\xi+\mu)}. \tag{8.41}$$

При ортогональной $[U_{\partial(u)}; V_{\partial(u)}]$ – параметризации поверхностей $Д$ и $И$ уравнения (38)-(41) преобразуются к виду:

$$R_{\partial.П} = \left[L_{\partial}\cos^2\xi + M_{\partial}\sin 2\xi + N_{\partial}\sin^2\xi\right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$R_{u.П} = \left[L_u\cos^2(\xi+\mu) + M_u\sin 2(\xi+\mu) + N_u\sin^2(\xi+\mu)\right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$R_{\partial.B} = \left[L_{\partial}\sin^2\xi + M_{\partial}\sin 2\xi + N_{\partial}\cos^2\xi\right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$R_{u.B} = \left[L_u\sin^2(\xi+\mu) + M_u\sin 2(\xi+\mu) + N_u\cos^2(\xi+\mu)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Приведенные формулы справедливы для всех случаев формообразования гладких регулярных участков поверхностей деталей гладкими регулярными исходными инструментальными поверхностями. При использовании этих формул полезно помнить, что сумма нормальных кривизн поверхности $Д(И)$ в любых двух взаимно ортогональных направлениях является величиной постоянной.

С учетом изложенного для упрощения аналитического описания критерия эффективности формообразования рассмотрим возможность использования для этих целей функций конформности поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$, в частности индикатрис и диаграмм коноформности (см. выше, гл. 4). Функции конформности представляют собой геометрические аналоги производительности формообразования. Их использование в качестве критериев эффективности CAD/CAM систем дает тот же результат, что и использование производительности формообразования, но требует выполнения существенно меньшего объема вычислений. Это достигается за счет того, что использование функций конформности поверхностей $Д$ и $И$ позволяет оценить эффективность CAD/CAM систем на более ранних этапах решения задач синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей.

Для случая формообразования выпукловогнутого локального участка поверхности $Д$ детали выпуклым участком исходной инструментальной поверхности $И$ (рис. 8.6.1) индикатрисы кривизны поверхностей $Д$ и $И$ представляют собой соответственно эллипс $Ind\,(И)$ и пару сопряженных гипербол $Ind\,(Д)$. Индикатриса конформности в этом слечае имеет две ветви $Ind_{conf}\,(Д/И)$ (рис. 8.6.2).

Если производится формообразование вогнутого локального участка поверхности детали выпуклым локальным участком исходной инструментальной поверхности (рис. 8.6.3), индикатрисами кривизны поверхностей $Д$ и $И$ являются два эллипса $Ind\,(Д)$ и $Ind\,(И)$, а индикатрисой конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ – замкнутая кривая четвертого порядка (рис. 8.6.4). По величине текущего диаметра d_{conf} индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ можно судить о степени конформности поверхности $И$ к поверхности $Д$ в соответствующем плоском нормальном сечении. В сечении, в котором диаметр d_{conf} принимает минимальное значение ($d_{conf} = d_{conf}^{(\min)}$), поверхность $И$ предельно конформна поверхности $Д$. В этом сечении угловой параметр φ индикатрисы конформности принимает значение $\varphi = \varphi_{эфф}$. Если в рассматриваемый момент времени перемещать инструмент по поверхности детали в направлении $\mathbf{V}_{эфф}$, которое ортогонально направлению $d_{conf}^{(\min)}$, мгновенное значение ширины строки формообразования $\tilde{S}_П$ при прочих одинаковых условиях достигнет максимума, что соответственно обеспечит максимум мгновенного значения производительности формообразования поверхности детали.

Каждый последующий шаг увличения степени конформности исходной инструментальной поверхности $И$ к обрабатываемой поверхности $Д$ детали эффективнее предыдущего. Поэтому обработка заданным инструментом вогнутого участка поверхности $Д$ детали при прочих одинаковых условиях всегда выше, чем

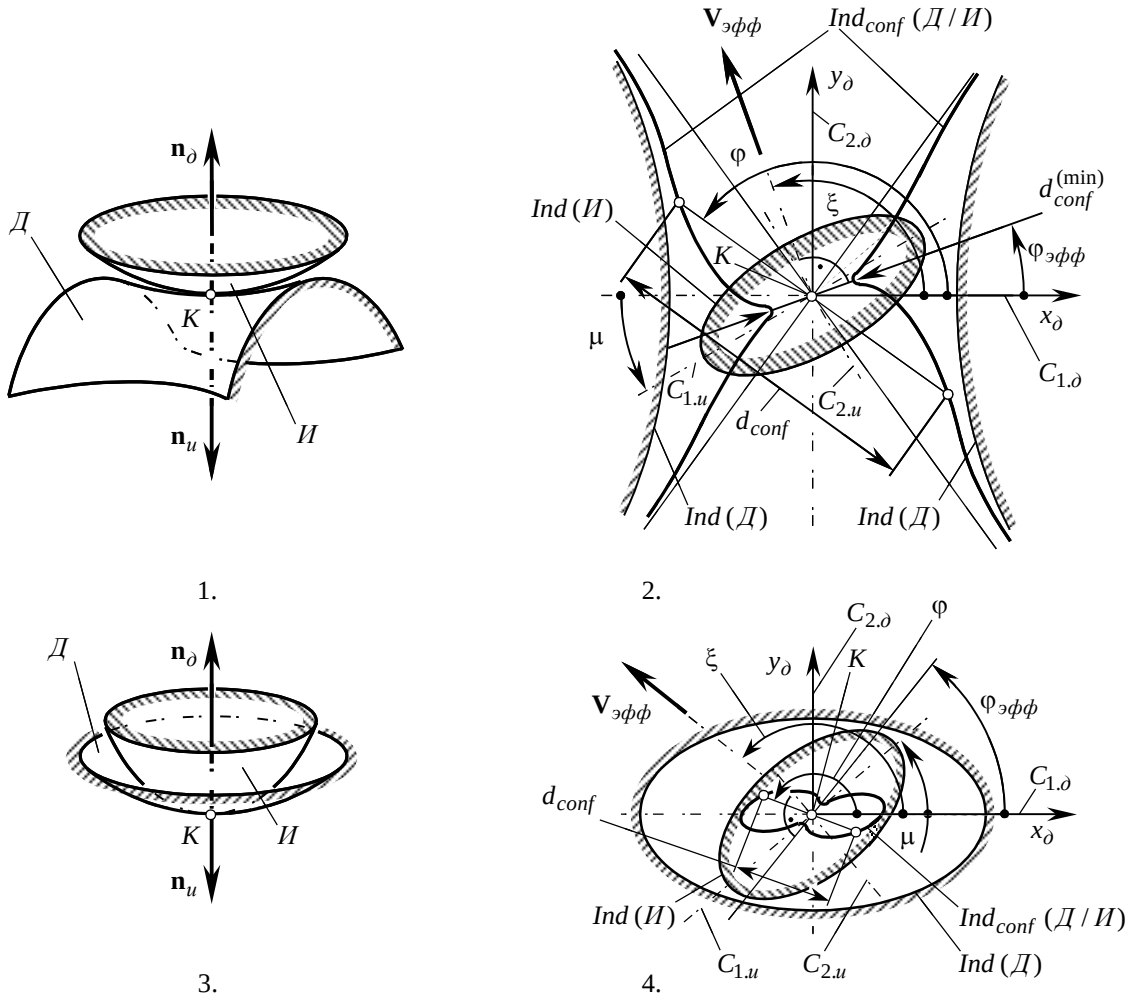


Рис. 8.6. Наивыгоднейшее направление движения формообразования.

выпуклого; обработка более вогнутого участка поверхности $Д$ – выше, чем менее вогнутого. Важно максимально приблизиться к потенциально достижимой степени конформности поверхности $И$ к поверхности $Д$ и за счет этого предельно увеличить эффективность обработки.

Практическая реализация рассматриваемого подхода к расчету производительности формообразования и параметров ее геометрических аналогов как критериев эффективности обработки деталей на металлорежущих станках предполагает широкое использование быстродействующей вычислительной техники и машинной подготовки управляющих программ для систем ЧПУ металлорежущими станками.

8.4. Синтез локального формообразования поверхностей деталей

В процессе обработки исходная инструментальная поверхность перемещается относительно поверхности детали. Относительное движение поверхности $И$ инструмента удобно рассматривать как векторную сумму элементарных движений, а именно: составляющих его движений формообразования, ориентирования и др. Целью задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали является, в первую очередь, установление наиболее выгодных значений параметров исходной инструментальной поверхности применяемого инструмента и параметров ее движения относительно детали.

Синтезирование наивыгоднейшего формообразования поверхности детали следует начинать с решения задачи синтеза локального формообразования.

Решением задачи синтеза локального формообразования являются, в частности, параметры наивыгоднейшего относительного положения, ориентации и направления движения поверхности $И$ инструмента относительно детали. Необходимость решения этой задачи следует из того, что в момент формообразования в точке K должно выполняться условие контакта $\mathbf{N}_{д-и} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0$, где $\mathbf{N}_{д-и}$ – вектор контактной нормали, а $\mathbf{V}_{\Sigma}$ – скорость результирующего движения исходной инструментальной поверхности относительно поверхности детали. Для выполнения этого условия в точке K скорость $\mathbf{V}_{\Sigma}$ должна быть ортогональна нормали $\mathbf{N}_{д-и}$.

Однако условию контакта удовлетворяет бесчисленное множество проходящих через точку K касания поверхностей $Д$ и $И$ векторов $\mathbf{V}_{\Sigma,i}$, лежащих в общей для поверхностей $Д$ и $И$ касательной плоскости. Естественно предположить, что в общем случае не все направления $\mathbf{V}_{\Sigma,i}$, удовлетворяющие условию $\mathbf{N}_{д-и} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0$, эквивалентны одно другому и что существует наивыгоднейшее направление, при движении в котором достигается наивысшая эффективность процесса обработки. Это направление движения формообразования следует установить исходя из условия достижения требуемого экстремума заданного критерия эффективности обработки.

Для решения задачи синтеза необходим критерий эффективности обработки поверхности детали на станке. В качестве такого критерия следует использовать (см. выше, раздел 8.3) производительность формообразования. Правомерность выбора этого критерия эффективности является следствием того, что речь идет о решении задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования одной и той же поверхности детали, а не разных поверхностей $Д$, когда допустимость применения производительности формообразования для оценки эффективности применяемых способов обработки допустима не всегда. Решение задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали, найденное исходя из применения в качестве критерия эффективности обработки геометрического аналога производительности формообразования, например, индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ поверхностей $Д$ и $И$, практически не отличается от решения, найденного исходя из применения в качестве этого критерия собственно производительности формообразования, но первое существенно проще.

Из изложенного следует два важных вывода.

Во-первых, поскольку наивыгоднейшее направление движения формообразования определяется в функции параметров индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ (т.е. является функцией параметров не только поверхности $Д$ детали, но и параметров поверхности $И$ инструмента, а также их относительной локальной ориентации), то в общем случае вопрос об определении наивыгоднейшего направления движенния формообразования и наивыгоднейших траекторий формообразования нельзя рассматривать вне связи с формой и параметрами исходной инструментальной поверхности $И$. Поэтому, зная только уравнение поверхности $Д$, преждевременно ставить задачу о разметке на ней сети наивыгоднейших траекторий формообразования[1].

Во-вторых, наивыгоднейшие траектории формообразования в общем случае не могут быть трансверсальными кривыми: они не пересекают одна другую.

Понятие "*локальное формообразование*" введено в рассмотрение в связи с исследованиями процесса формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ (Радзевич С.П., 1991). Оно также находит применение при решении задач синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей общемашиностроительного назначения.

Локальное формообразование рассматривается в пределах формообразуемой на поверхности детали элементарной ячейки $S_B \times S_П$, в пределах которой находится точка K касания поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$. Наивыгоднейшие его параметры должны обеспечить достижение максимума локальной производительности формообразования.

Согласно (1), увеличение производительности формообразования обеспечивается за счет увеличения критических значений подач S_B и $S_П$ инструмента соответственно вдоль и поперек строк формообразова-

[1]Это допустимо делать только в исключительных частных случаях, когда, например, поверхность $И$ касается поверхности $Д$ своей омбилической точкой (точкой округления) или точкой уплощения. В этом случае наивыгоднейшие траектории формообразования вырождаются в линии кривизны на поверхности детали. В общем случае формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ при определении параметров траекторий формообразования в обязательном порядке следует учитывать параметры формы исходной инструментальной поверхности применяемого инструмента, ее положение и ориентацию относительно детали.

ния. В свою очередь увеличение критических значений этих подач достигается путем увеличения степени конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали в направлении каждой из подач S_B и $S_П$. Для этого в обобщенной принципиальной кинематической схеме многокоординатного формообразования (см. выше, рис. 2.1) предусмотрены движения ориентирования инструмента, которыми с заданной точкой K на поверхности $Д$ детали вводится в касание наивыгоднейшая точка поверхности $И$ инструмента. После этого обеспечивается наивыгоднейшая их относительная ориентация и определяется наивыгоднейшее направление движения формообразования. Наряду с локальным синтезом исходной инструментальной поверхности, в этом состоит сущность решения *задачи синтеза локального формообразования*.

Мгновенная производительность формообразования расчитывается без учета формы и параметров границ контура участка поверхности $Д$ – при решении задачи синтеза локального формообразования поверхность детали рассматривается как неограниченная.

В процедуре решения задачи синтеза локального формообразования удобно выделить этапы, на которых:

- расчитываются координаты такой точки поверхности $И$, введя которую в касания с исходной точкой на поверхности $Д$ можно достичь наибольшей степени конформности поверхности $И$ к поверхности $Д$;
- в исходной точке касания на поверхности детали движениями ориентирования второго рода инструмент вводится в касание с деталью найденной точной на его поверхности $И$, не нарушая при этом условий формообразования поверхностей деталей (см. выше, гл. 7);
- в новом положении движениями ориентирования первого рода инструмент наивыгоднейшим образом ориентируют относительно детали. Этим гарантированно достигается наивысшая, предельная для конкретного случая обработки степень конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали. При этом условия формообразования поверхностей деталей также не должны нарушаться;
- в найденном окончательном положении и ориентации инструмента относительно детали расчитываются параметры индикатрисы конформности $Inc_{conf}\left(Д/И\right)$ поверхностей $Д$ и $И$;
- устанавливаются параметры направления измерения минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Inc_{conf}\left(Д/И\right)$;
- в общей для поверхностей $Д$ и $И$ касательной плоскости строится направление, перпендикулярное направлению измерения минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ характеристической кривой $Inc_{conf}\left(Д/И\right)$. С этим направлением совпадает наивыгоднейшее направление скорости $\mathbf{V}_{эфф}$ перемещения поверхности $И$ инструмента по поверхности $Д$ детали (см. выше, рис. 8.6), которой в рассматриваемом случае является подача $\mathbf{S}_B$ инструмента вдоль строки формообразования.

Это основные этапы решения задачи синтеза локального формообразования.

Следует помнить, что факторы процесса обработки, непосредственно влияющие на текущее значение мгновенной производительности формообразования, в общем случае переменны во времени, поэтому речь можно вести только об их мгновенных значениях.

Решение задачи синтеза локального формообразования поверхностей деталей по сути сводится к нахождению стационарного значения функции нескольких переменных: а именно, функции производительности формообразования или эквивалентной ей функции из класса (4.76) функций конформности, являющихся геометрическими аналогами мгновенной производительности формообразования.

Функция производительности локального формообразования (35) как минимум дважды непрерывно дифференцируема – этим свойством обладают все функции конформности (4.76). Поэтому необходимым условием ее локального максимума является равенство нулю первого дифференциала ($dP_ф = 0$). Для этого в точке K касания поверхностей $Д$ и $И$ должны выполняться условия:

$$\frac{\partial P_ф}{\partial \varphi} = 0; \qquad \frac{\partial P_ф}{\partial \mu} = 0; \qquad \frac{\partial P_ф}{\partial U_u} = 0; \qquad \frac{\partial P_ф}{\partial V_u} = 0; \qquad \frac{\partial P_ф}{\partial \xi} = 0. \tag{8.42}$$

Выполнение условий (42) необходимо, но не достаточно для того, чтобы мгновенная производительность формообразования (35) имела в точке K именно максимум. В соответствие с правилом высших производных для этого необходимо дополнительно потребовать выполнение условия:

$$\frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \varphi^2}\varphi^2 + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \mu^2}\mu^2 + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial U_u^2}U_u^2 + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial V_u^2}V_u^2 + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \xi^2}\xi^2 + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \varphi \partial \mu}\varphi\mu + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \varphi \partial U_u}\varphi U_u + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \varphi \partial V_u}\varphi V_u +$$

(8.43)

$$+ \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \varphi\, \partial \xi}\varphi\varepsilon + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \mu\, \partial U_u}\mu U_u + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \mu\, \partial V_u}\mu V_u + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \mu\, \partial \xi}\mu\xi + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial U_u \partial V_u}U_u V_u + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial U_u \partial \xi}U_u\xi + \frac{\partial^2 P_\phi}{\partial V_u \partial \xi}V_u\xi < 0 .$$

Решение системы уравнений (42), удовлетворяющее условию (43), определит те значения параметров функции (35), при которых в заданной точке K мгновенное значение производительности формообразования для заданной пары “деталь-инструмент” максимально.

Если квадратичная форма (43) окажется полуопределенной, для выяснения вопроса о характере экстремума функции $P_\phi(\varphi, \mu, U_u, V_u, \xi)$ следует принять во внимание значения производных более высоких порядков. Максимум функции $P_\phi(\varphi, \mu, U_u, V_u, \xi)$ можно найти, используя метод Лагранжа или другие методы.

Если сеть траекторий формообразования изначально задана, например, определена в связи с контурами обрабатываемого фрагмента поверхности детали, управлять эффективностью обработки можно только ориентирующими движениями первого и второго рода – направление движения формообразования в текущей точке траектории изменять нельзя. Движения ориентирования инструмента вдоль каждой траектории формообразования являются следящими движениями.

Принадлежность производительности локального формообразования $P_\phi(\varphi, \mu, U_u, V_u, \xi)$ к классу функций конформности (4.76) позволяет существенно упростить определение условий, при которых достигается максимум эффективности локального формообразования. Это следует из того, что в соответствие с теоремой 4.1. (см. выше, с. 250) экстремумы функции конформности имеют место при одних и тех же значениях аргументов. Поэтому наивыгоднейшие значения аргументов функции P_ϕ удобно определять при помощи индикатрисы конформности $Ind_{conf}\ (Д / И)$ (см. раздел 4.5), которая является геометрическим аналогом критерия эффективности обработки.

8.4.1. Относительное положение и локальная ориентация детали и инструмента в процессе обработки. Наивыгоднейшее относительное положение детали и инструмента в процессе обработки обеспечивается так.

Движениями ориентирования второго рода (см. выше, гл. 2) с текущей точкой на поверхности $Д$ детали в правильное касание[1] вводится точка поверхности $И$ инструмента, которая потенциально обеспечивает наивысшую степеть конформности исходной инструментальной поверхности к поверхности детали. В общей для поверхностей $Д$ и $И$ касательной плоскости строится индикатриса конформности $Ind_{conf}(Д / И)$ и расчитывается направление измерения ее минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$. В плоском нормальном сечении, проходящем через точку K в направлении измерения диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ поверхности $Д$ и $И$ максимально конформны одна другой. В точке K этого сечения расчитываются радиусы кривизны $R_д$ и R_u поверхностей $Д$ и $И$ соответственно и производная $\frac{\partial R_u}{\partial L_u}$ по длине дуги L_u линии пересечения исходной инструментальной поверхности $И$ найденным плоским нормальным сечением. По соотношению радиусов кривизны $R_д$ и R_u и значению производной $\frac{\partial R_u}{\partial L_u}$ устанавливается направление **A** или **B** (рис. 8.7) перекатывания со скольжением поверхности $И$ по поверхности $Д$. При этом положение точки K на поверхности детали остается неизменным, тогда как на исходной инструментальной поверхности оно изменяется.

[1]Под правильным понимается такое касание поверхности детали и исходной инструментальной поверхности, при котором условия формообразования поверхностей деталей не нарушаются (см. выше, гл. 7).

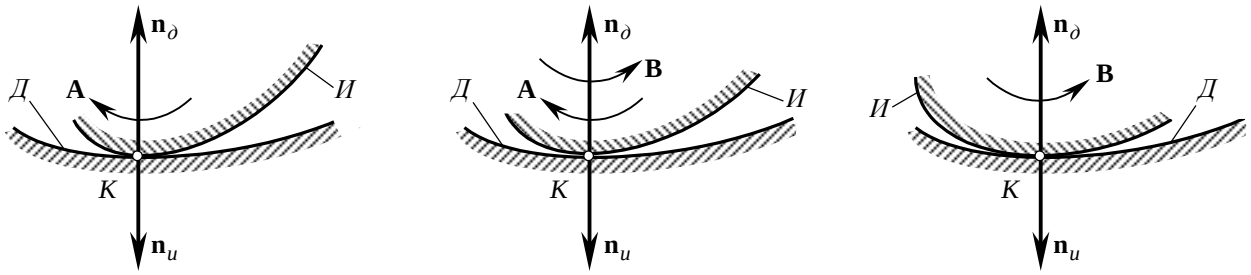


Рис. 8.7. Изменение движениями ориентирования второго положения инструмента относительно детали рода.

Перекатывание со скольжением поверхности $И$ по поверхности $Д$ осуществляется согласованными между собой поворотными и поступательными движениями: простыми движениями ориентирования второго рода $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.X};\mathbf{v}_{\partial.Y}\}$, $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.Y};\mathbf{v}_{\partial.X}\}$ или $\{\boldsymbol{\omega}_{\partial.X};\boldsymbol{\omega}_{\partial.Y};\mathbf{v}_{\partial.X};\mathbf{v}_{\partial.Y}\}$ (см. выше, раздел 2.3). По мере перемещения инструмента вдоль траектории формообразования ориентирующее движение второго рода может быть либо поворотным и осуществляться в направлении **A** (рис. 8.7.1), либо возвратно-поворотным и осуществляться в направлениях **A** и **B** поочередно (рис. 8.7.2), либо поворотным и осуществляться в направлении **B** (рис. 8.7.3).

За исключением случаев точечного касания поверхностей $Д$ и $И$ (а именно: собственно точечного, локально-линейного и локально-поверхностного первого и второго рода), на величину хода движения ориентирования второго рода всегда накладываются ограничения, вызванные необходимостью выполнения третьего условия формообразования поверхностей деталей (см. выше, гл. 7).

Направления движений ориентирования второго рода должны быть такими, чтобы функция двух переменных $r_{conf} = r_{conf}(U_u;V_u)$ стремилась к минимуму. Для этого необходимо выполнение условий:

$$\frac{\partial r_{conf}}{\partial U_u}=0\,; \qquad \frac{\partial r_{conf}}{\partial V_u}=0\,;$$

при

$$\frac{\partial^2 r_{conf}}{\partial U_u^2}>0 \qquad \text{и} \qquad \left[\frac{\partial^2 r_{conf}}{\partial U_u^2}\cdot\frac{\partial^2 r_{conf}}{\partial V_u^2}-\left(\frac{\partial^2 r_{conf}}{\partial U_u \partial V_u}\right)^2\right]_{U_u=U_u^{[K]};\,V_u=V_u^{[K]}}>0\,.$$

Чтобы на поверхности $И$ инструмента определить положение наивыгоднейшей точки, которую следует ввести в касание с исходной (заданной) точкой на поверхности $Д$ и наивыгоднейшим образом сориентировать инструмент относительно детали, надо:

- в системе координат $X_uY_uZ_u$, связанной с инструментом, расчитать координаты наивыгоднейшей точки на исходной инструментальной поверхости – это точка, главные кривизны поверхности $И$ в которой наиболее близки (в пределе – равны) главным кривизнам поверхности $Д$ в ее исходной точке. Положение точки на поверхности $И$ определено тремя переменными величинами X_u, Y_u и Z_u;

- найденной точкой поверхность $И$ инструмента вводится в касание с поверхностью $Д$ детали;

- наивыгоднейшая ориентация инструмента ($\mu=\mu_{опт}$) достигается поворотом его вокруг контактной нормали. Для этого инструмент разворачивают одновременно вокруг трех осей координат станка с ЧПУ. Ориентация инструмента определена тремя переменными параметрами φ_X, φ_Y и φ_Z.

Чтобы решить задачу синтеза локального формооб-разования в рассматриваемой постановке, необходимо найти экстремум функции шести переменных (X_u, Y_u, Z_u и φ_X, φ_Y, φ_Z) по всем шести параметрам.

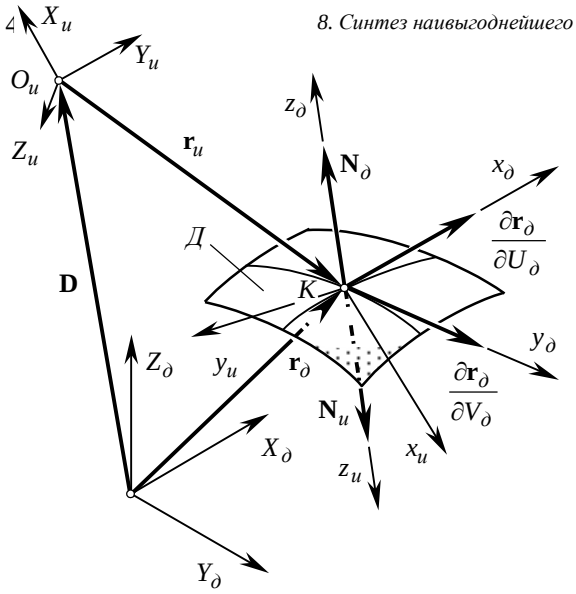


Рис. 8.8. Положение точки K в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, связанной с деталью, и $X_u Y_u Z_u$, связанной с инструментом.

Задача может быть существенно упрощена, если рассматривать ее в локальной системе координат. Требуемое поворотное движение, которым инструмент переводится из исходного в наивыгоднейшее его положение относительно детали, воспроизводится тремя вращениями вокруг осей координат станка с ЧПУ.

При этом следует иметь ввиду, что в момент формообразования радиус-векторы $\mathbf{r}_\partial^{(K)}$ и $\mathbf{r}_u^{(K)}$ (рис. 8.8) определяют одну и ту же точку K (несмотря на то, что эти векторы имеют различное аналитическое представление – они записаны в разных системах координат: $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ и $X_u Y_u Z_u$).

Если принять к сведению, что предварительно аналитически описан замкнутый цикл последовательных преобразований координат как в прямом, так и в обратном направлениях (см. выше, гл. 4), положение начала O_u системы координат $X_u Y_u Z_u$, связанной с инструментом, в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, связанной с деталью, определяется вектором $\mathbf{D}$ (здесь $|\mathbf{D}| = O_\partial O_u$). Из рис. 8.8 следует, что: $\mathbf{D} + \mathbf{r}_u^{(K)} = \mathbf{r}_\partial^{(K)}$, откуда

$$\mathbf{r}_u^{(K)} = \mathbf{r}_\partial^{(K)} - \mathbf{D}\,.$$

В процессе обработки деталь и инструмент сориентированы одна относительно другой не произвольно, а так, что их локальные системы координат $x_\partial y_\partial z_\partial$ и $x_u y_u z_u$ имеют совпадающее с точкой K общее начало, а оси аппликат z_∂ и z_u распололжены вдоль контактной нормали (на прямой, проходящей через векторы нормалей $\mathbf{N}_\partial$ и $\mathbf{N}_u$) и противоположно направленны. В этом случае переход от одной локальной системы координат $x_u y_u z_u$ к другой $x_\partial y_\partial z_\partial$ и обратно описывается операторами преобразования координат $\mathbf{Rs}\,(И^{(K)} \to Д)$ и $\mathbf{Rs}\,(Д^{(K)} \to И) = \mathbf{Rs}\,(И^{(K)} \to Д)^{-1}$ соответственно. В развернутом виде оператор $\mathbf{Rs}\,(И^{(K)} \to Д)$ преобразования записывается так:

(8.44)
$$\mathbf{Rs}\,(И^{(K)} \to Д) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обратное преобразование координат описывается оператором

(8.45)
$$\mathbf{Rs}\,(Д^{(K)} \to И) = \mathbf{Rs}\,(И^{(K)} \to Д)^{-1} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & 0 & 0 \\ f_{12} & f_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Знак "-" в операторах (44) и (45) появляется вследствие того, что оси аппликат z_∂ и z_u систем локальных координат $x_\partial y_\partial z_\partial$ и $x_u y_u z_u$ противоположно направленны.

Если локальные системы координат $x_Д y_Д z_Д$ и $x_u y_u z_u$ ортогональные, то элементы f_{ij} операторов $\mathbf{Rs}\,(И^{(K)} \to Д)$ (44) и $\mathbf{Rs}\,(Д^{(K)} \to И)$ (45) преобразования равны $\sin\mu$ и $\cos\mu$ – с учетом знака. Поэтому:

$$\mathbf{Rs}\,(И^{(K)} \to Д) = \begin{bmatrix} \cos\mu & -\sin\mu & 0 & 0 \\ \sin\mu & \cos\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{Rs}\,(Д^{(K)} \to И) = \begin{bmatrix} \cos\mu & \sin\mu & 0 & 0 \\ -\sin\mu & \cos\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С учетом изложенного можно определить траекторию перемещения точки K по поверхности $И$ инструмента в результате осуществления движения ориентирования второго рода.

Различные движения ориентирования второго рода приводят к образованию различных траекторий на исходной инструментальной поверхности. Если потребовать, чтобы длина такой траектории была минимальной (это целесообразно, поскольку приводит к уменьшению затрат времени на осуществление движения ориентирования инструмента), движение ориентирования второго рода следует осуществлять в направлении градиента нормального радиуса кривизны исходной инструментальной поверхности. В этом случае параметры траектории движения ориентирования определяются так.

Для исходной инструментальной поверхности, заданной уравнением вида $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(U_u, V_u)$, текущее значение нормального радиуса кривизны R_u равно (1.112):

$$R_u = \frac{\Phi_{1.u}}{\Phi_{2.u}} = \frac{E_u dU_u^2 + 2F_u dU_u dV_u + G_u dV_u^2}{L_u dU_u^2 + 2M_u dU_u dV_u + N_u dV_u^2}. \tag{8.46}$$

Из (46) следует, что текущее значение R_u радиуса кривизны зависит, в частности, от положения на поверхности $И$ фасонного инструмента точки, в которой он расчитывается: $R_u = R_u(X_u, Y_u, Z_u)$. Поэтому градиент $\mathbf{grad}\ R_u$ нормального радиуса кривизны R_u равен:

$$\mathbf{grad}\ R_u = \frac{\partial R_u}{\partial X_u}\mathbf{i}_u + \frac{\partial R_u}{\partial Y_u}\mathbf{j}_u + \frac{\partial R_u}{\partial Z_u}\mathbf{k}_u, \tag{8.47}$$

где $\mathbf{i}_u$, $\mathbf{j}_u$, $\mathbf{k}_u$ – орты системы координат $X_u Y_u Z_u$, связанной с инструментом.

Если в процессе обработки относительные движения детали и инструмента согласованы между собой так, что выполняется условие (47), очевидно, что затраты времени на осуществление движения ориентирования инструмента будут минимальными.

Траектория перемещения точки K по исходной инструментальной поверхности в результате осуществления движения ориентирования второго рода представляет собой некоторую пространственную кривую. Поскольку эта кривая лежит на поверхности $И$, она представима параметрическими уравнениями вида:

$$\begin{cases} U_u = U_u(t); \\ V_u = V_u(t), \end{cases} \tag{8.48}$$

где t – параметр, определяющий положение текущей точки на траектории формообразования.

Кривая (48) может быть представлена в векторной $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(t)$ форме.

В рассматриваемом случае функция $\mathbf{r}_u(U(t)_u, V_u(t))$ описывает кривую на поверхности $И$ инструмента, а функция $\mathbf{r}_u(t^{(K)})$ – точку K на этой кривой.

Если параметр t изменяется от значения $t = t_0$ в начальный момент до значения $t = t_1$ в конце осуществления движения ориентирования, длина L_u пути перемещения точки K по поверхности $И$ равна

$$L_u = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_u \left(\frac{dU_u}{dt}\right)^2 + 2F_u \frac{dU_u}{dt} \cdot \frac{dV_u}{dt} + G_u \left(\frac{dV_u}{dt}\right)^2} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_u dU_u^2 + 2F_u dU_u dV_u + G_u dV_u^2}\, dt .$$

Для исходных инструментальных поверхностей фасонных инструментов, допускающих движение "*самих по себе*[1]" (см. выше, гл. 2), вектор скорости $\mathbf{V}_u^{(K)}$ перемещения точки K по поверхности $И$ единственным образом раскладывается на составляющие по двум заданным направлениям:

$$\mathbf{V}_u^{(K)} = \mathbf{V}_{u.1}^{(K)} + \mathbf{V}_{u.2}^{(K)}.$$

Первую составляющую $\mathbf{V}_{u.1}^{(K)}$ удобно направить касательно к линии, вдоль которой исходная инструментальная поверхность допускает движение "*самой по себе*". Например, если поверхность $И$ является поверхностью вращения, составляющая $\mathbf{V}_{u.1}^{(K)}$ касательна к окружности соответствующего радиуса на ней.

Вторую составляющую $\mathbf{V}_{u.2}^{(K)}$ можно (но не обязательно) направить ортогонально $\mathbf{V}_{u.1}^{(K)}$.

Поскольку движение точки K со скоростью $\mathbf{V}_{u.1}^{(K)}$ приводит поверхность $И$ к движению "*самой по себе*", при решении задачи синтеза локального формообразования его можно не учитывать и определять траекторию движения контактной точки только со скоростью $\mathbf{V}_{u.2}^{(K)}$.

В общем случае траектория движения точки K по поверхности $И$ инструмента может быть найдена исходя из (47). В частных случаях, когда поверхность $И$ разворачивается на плоскость, для нахождения траектории движения точки K по исходной инструментальной поверхности может быть использовано дифференциальное уравнение изогональных траекторий.

Если однопараметрическое семейство винтовых линий постоянного шага на винтовой поверхности $И$ задать уравнением вида $И(U_u; V_u; \lambda) = 0$, где λ – параметр семейства винтовых линий, то искомая линия принадлежит семейству кривых, пересекающих все кривые однопараметрического семейства $И(U_u; V_u; \lambda) = 0$ под заданным углом σ, а ее уравнение является решением дифференциального уравнения изогональных траекторий (Корн Г., Корн Т., 1974):

$$\left(\frac{\partial И}{\partial U_u}\cos\sigma - \frac{\partial И}{\partial V_u}\sin\sigma\right)dU_u + \left(\frac{\partial И}{\partial U_u}\sin\sigma - \frac{\partial И}{\partial V_u}\cos\sigma\right)dV_u = 0 .$$

В рассматриваемом случае речь идет об ортогональных траекториях (т.е. $\sigma = \frac{\pi}{2}$). Поэтому приведенное дифференциальное уравнение упрощается и приводится к виду:

$$-\frac{\partial И}{\partial V_u}dU_u + \frac{\partial И}{\partial U_u}dV_u = 0 .$$

Из найденного семейства ортогональных траекторий выбирается единственная – для этого учитываются начальные условия, например, из всех ортогональных траекторий выбирается та, которая проходит через заданную точку на поверхности $И$ инструмента, в частности, через исходную точку K касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

[1]Исходные инструментальные поверхности большинства применяемых на практике режущих инструментов допускают движение "*самих по себе*".

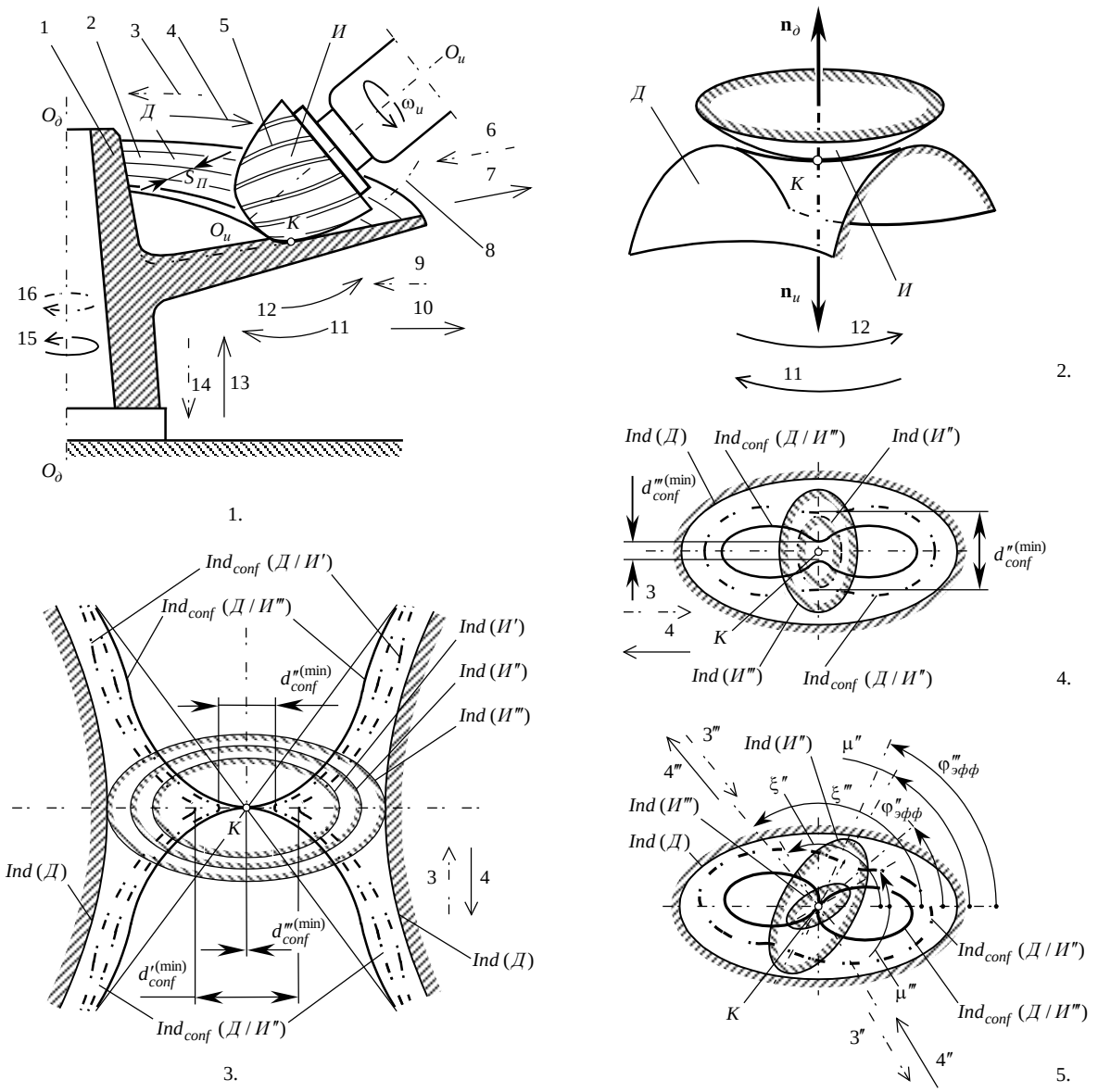


Рис. 8.9. Схема способа обработки сложных поверхностей деталей (а.с. №1249787).

Пример 8.2. Движение ориентирования второго рода предусмотрено в кинематике формообразования способа[1] обработки деталей, ограниченных поверхностями сложной формы (рис. 8.9).

В соответствие с этим способом обработка детали 1 производится инструментом 5, вращающимся вокруг своей оси $O_u - O_u$ с угловой скоростью ω_u (рис. 8.9.1). Обработка поверхности $Д$ производится построчно. Для этого инструменту придают движение построчного огибания 4, которое осуществляют по строкам 2 с шагом $S_П$ между ними. На станке с ЧПУ это движение воспроизводится различными путями, например, путем поворота детали вокруг своей оси $O_д - O_д$ в направлении 15 при одновременном перемещении инструмента в направлении 7. В свою очередь движение инструмента в направлении 7 на станке воспроизводится путем сложения движений 10 и 13, направленных соответственно перпендикулярно и вдоль оси $O_д - O_д$ поворота детали.

[1]А.с. №1249787 (СССР). *Способ обработки деталей, ограниченных поверхностями сложной формы.*/С.П.Радзевич. – Заявлено 27 декабря 1984. МКИ[4] В23С 3/16.

Для повторения проходов обработки инструмент возвращают в исходное положение. Для этого деталь и инструмент выводят из контакта, деталь ускоренно поворачивают вокруг своей оси в направлении 16, а инструменту придают ускоренное движение в направлении 6. Это движение инструмента, в свою очередь, на станке с воспроизводится за счет сложения движений 9 и 14.

Из исходного положения инструмент смещают на величину подачи S_{II}, вводят в контакт с заготовкой, после чего процесс повторяется до завершения обработки всей поверхности детали.

Для увеличения производительности обработки за счет устранения движений холостых ходов, по окончании обработки одной строки формообразования в конечном положении инструмент смещают на величину подачи S_{II} и перемещают со скоростью рабочего движения в направлении 3, противоположном направлению движения 4. В этом случае движения инструмента в направлениях 6 и 16 совершаются не ускоренно, а с рабочими скоростями (как движения 7 и 15).

Обработку детали производят инструментом, образующая 8 исходной инструментальной поверхности $И$ которого имеет переменную кривизну: кривизна образующей от одной ее точки к другой монотонно изменяется от минимального до максимального значения.

В кинематику формообразования способа (см. рис. 8.9) введено движение ориентирования второго рода.

Придание инструменту движения ориентирования второго рода приводит к тому, что образующая исходной инструментальной поверхности перекатывается со скольжением по кривой соответствующего плоского нормального сечения поверхности детали. В результате этого точка K касания поверхностей $Д$ и $И$ перемещается по поверхности $И$ инструмента, тогда как ее положение на поверхности $Д$ детали при этом неизменно.

По мере перемещения инструмента вдоль строки формообразования движение ориентирования второго рода 11 (12) направляют так, чтобы наименьший диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$ при этом уменьшался (рис. 8.9.2).

Введение в кинематику формообразования способа обработки (см. рис. 8.9) движения ориентирования второго рода приводит к тому, что с одной и той же точкой K на формообразуемой поверхности детали, в окрестности которой параметры кривизны (геометрически они интерпретируются характеристической кривой $Ind(Д)$) поверхности $Д$ фиксированы, в касании могут находиться разные точки образующей 8 с иными параметрами кривизны поверхности $И$ инструмента – следовательно, с разными индикатрисами кривизны.

Так, если в некотором исходном положении детали и инструмента индикатрисой кривизны исходной инструментальной поверхности является эллипс $Ind'(И)$, то движением ориентирования второго рода степень конформности поверхности $И$ к поверхности $Д$ можно увеличивать путем введения в касание с той же точкой на поверхности детали другой точки образующей исходной инструментальной поверхности. В новом относительном положении детали и инструмента индикатрисой кривизны поверхности $И$ будет эллипс $Ind''(И)$, а в предельном (наивыгоднейшем) относительном положении – эллипс $Ind'''(И)$. Аналогичное справедливо для всех случаев обработки сложных поверхностей деталей, в т.ч. когда угол μ относительной локальной ориентации поверхности детали и исходной инструментальной поверхности при этом не изменяется.

Таким образом, в соответствие со способом (см. рис. 8.9) повышение производительности обработки достигается за счет увеличения степени конформности исходной инструментальной поверхности $И$ к поверхности $Д$ детали, что осуществляется движением ориентирования второго рода.

Движение ориентирования инструмента производится не беспредельно, а только до достижения минимальным диаметром индикатрисы конформости $Ind_{conf}(Д/И)$ наименьшего значения. В предельном (наивыгоднейшем) положении инструмента относительно детали индикатрисой кривизны исходной инструментальной поверхности является эллипс $Ind'''(И)$. Этому относительному положению детали и инструмента в рассматриваемом примере соответствует индикатриса коноформности $Ind'''_{conf}(Д/И''')$, наименьший диаметр которой $d'''^{(\min)}_{conf} = 0$.

Движение 3 (4) построчного огибания (движение подачи $\mathbf{S}_B$ вдоль строки формообразования) осуществляется в направлении, перпендикулярном направлению измерения наименьшего диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$.

Чтобы найти направление движения подачи $\mathbf{S}_B$, продифференцируем (4.83)

$$r_{conf} = \sqrt{\left|\frac{E_\partial G_\partial}{G_\partial L_\partial \cos^2\varphi - M_\partial\sqrt{E_\partial G_\partial}\sin 2\varphi + E_\partial N_\partial \sin^2\varphi}\right|}\,\mathrm{sgn}\Phi_{2.\partial}^{-1} + \sqrt{\left|\frac{E_u G_u}{G_u L_u \cos^2(\varphi+\mu) - M_u\sqrt{E_u G_u}\sin 2(\varphi+\mu) + E_u N_u \sin^2(\varphi+\mu)}\right|}\,\mathrm{sgn}\Phi_{2.u}^{-1}$$

по углу φ и приравняем полученную производную нулю. Решая уравнение

$$\frac{\partial r_{conf}}{\partial\varphi} = \ldots = 0,$$

находим четыре экстремальных значения угла φ, из которых выберем то, при котором диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ минимален. Наименьшему значению диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ соответствует наивыгоднейшее значение угла $\varphi = \varphi'''_{эфф}$. Зная величину угла $\varphi'''_{эфф}$, находим наивыгоднейшее направление движения $\mathbf{S}_B$ построчного огибания – оно составляет угол $\xi''' = \varphi'''_{эфф} + \frac{\pi}{2}$ с осью индикатрисы кривизны $Ind(Д)$ поверхности детали.

Способ обработки сложных поверхностей деталей иллюстрируется примерами формообразования выпуклым ($\tilde{G}_u > 0$, $\tilde{M}_u > 0$) эллиптическим локальным участком исходной инструментальной поверхности $И$:

- выпукло-вогнутого гиперболического ($\tilde{G}_\partial < 0$) (рис. 8.9.3) и

- вогнутого эллиптического ($\tilde{G}_\partial > 0$, $\tilde{M}_\partial < 0$) (рис. 8.9.4) локальных участков поверхности детали при значении угла относительной локальной ориентации μ , кратном $\frac{\pi}{2}$, а также

- вогнутого эллиптического ($\tilde{G}_\partial > 0$, $\tilde{M}_\partial < 0$) (рис. 8.9.5) локального участка поверхности $Д$ при значении угла μ , не кратном $\frac{\pi}{2}$.

Если угол μ относительной локальной ориентации не кратен $\frac{\pi}{2}$, направление движения 3 (4) построчного огибания зависит от степени конформности поверхностей (рис. 8.9.5) и чем более поверхность $И$ инструмента конформна поверхности $Д$ детали, тем в большей степени наивыгоднейшее направление движения 3 (4) отклоняется от занимающей неизменное положение меньшей оси индикатрисы кривизны исходной инструментальной поверхности. Если же угол μ кратен $\frac{\pi}{2}$, то отклонения направления движения построчного огибания от меньшей оси этой индикатрисы кривизны нет ни при какой степени конформности поверхностей $Д$ и $И$.

Если, например, в точке касания вогнутого локального участка поверхности детали с выпуклым локальным участком исходной инструментальной поверхности индикатрисой кривизны поверхности детали является эллипс $Ind(Д)$, а индикатрисой кривизны исходной инструментальной поверхности – эллипс $Ind(И'')$, то индикатрисой конформности этих поверхностей в точке K в этом случае является кривая $Ind_{conf}(Д/И'')$, а наивыгоднейшее направление движения построчного огибания $3''(4'')$ перпендикулярно наименьшему диаметру $d''^{(\min)}_{conf}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И'')$ и составляет угол ξ'' с большей осью индикатрисы кривизны $Ind(Д)$ поверхности детали.

Для той же точки K на поверхности детали поворотным движением ориентирования второго рода можно изменить положение инструмента относительно детали и достичь более высокой степени их конформности. В этом случае с той же точкой на поверхности детали (следовательно с неизменными параметрами кривизны поверхности и с той же индикатрисой кривизны $Ind(Д)$) касается другая точка образующей исходной инструментальной поверхности. В новом относительном положении детали и инструмента индикатрисой кривизны поверхности $И$ инструмента будет эллипс $Ind''(И)$ с тем же направлением осей, но иной их длиной. Для такого относительного положения детали и инструмента индикатрисой конформности является кривая $Ind_{conf}(Д/И'')$, а наивыгоднейшее направление движения $3''(4'')$ построчного огибания направлено перпендикулярно наименьшему диаметру $d'''^{(\min)}_{conf}$ индикатрисы конформности $Ind'''_{conf}(Д/И)$ и составляет угол ξ''' с большей осью индикатрисы кривизны $Ind(Д)$ поверхности $Д$ детали.

Применение этого способа позволяет увеличить производительность обработки сложных поверхностей деталей.

Наивыгоднейшее текущее положение инструмента относительно детали, поддерживаемое вводимым в кинематику формообразования движением ориентирования второго рода, оказывается эффективным не только при обработке сложных поверхностей деталей на многокоординтных станках с ЧПУ, но и при обработке деталей менее сложной формы, например, при точении на станках с ЧПУ фасонных поверхностей деталей универсальными фасонными резцами.

Пример 8.3. В соответствие со пособом[1] точения (рис. 8.10) обработка детали 2 с криволинейной образующей 1 ее поверхности $Д$ производится универсальным резцом 4 с монотонно изменяющейся кривизной режущей кромки. Заготовке придают вращение вокруг собственной оси $O_\partial - O_\partial$ с угловой скоростью ω_∂ , а инструмент перемещают в осевой плоскости детали (в плоскости чертежа рис. 8.10.1) вдоль ее образующей в направлении 7. Это движение резца осуществляется путем его перемещения вдоль оси детали в направлении 9, согласованном с возвратно-поступательным движением в направлении 10 и обратно, в направлении 11.

Инструменту придают движение ориентирования второго рода 5 (6), которое осуществляют вокруг некоторой оси, перпендикулярной плоскости чертежа рис. 8.10. Это движение приводит к качению со скольжением образующей 3 поверхности $И$ инструмента по образующей 1 поверхности $Д$ детали. Движение ориентирования направлено так, чтоб степень конформности образующих 1 и 3 при этом увеличивается.

При обработке детали с монотонно изменяющейся кривизной образующей ее поверхности $Д$ инструмент по мере перемещения вдоль оси детали монотонно поворачивают в одном направлении – в этом случае движение ориентирования второго рода является поворотным. При обработке детали с переменным характером изменения кривизны образующей, по мере перемещения инструмента вдоль оси детали его поворачивают то в одном, то в противоположном направлении – в этом случае движение ориентирования инструмента возвратно-поворотное.

---

[1] А.с. №1171210 (СССР). *Способ точения.*/С.П.Радзевич. – Заявлено 11.03.84. Опубл. 07.08.85 в БИ, №29, 1985. МКИ[4] В23В 1/00.

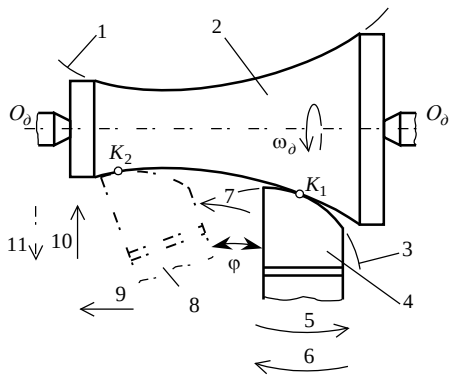


Рис. 8.10. Схема способа точения (а. с. № 1171210).

Для осуществления способа точения (см. рис. 8.10) деталь вращают вокруг оси $O_д - O_д$ с угловой скоростью $\omega_д$, а инструмент перемещают вдоль оси детали в направлении 9 и в поперечном направлении 10 (11). Движением ориентирования второго рода 5 (6) резец поворачивают относительно детали. Так, при переходе от формообразования поверхности детали в окрестности точки K_1 к формообразованию поверхности $Д$ в окрестности точки K_2 резец поворачивают на некоторый угол φ. В результате этого каждый участок профиля образующей поверхности детали формообразуется участком режущей кромки, кривизна которого близка к кривизне соответствующего участка образующей поверхности детали.

Поскольку обработка детали производится инструментом с переменной кривизной режущей кромки, при обработке любого фасонного профиля детали на режущей кромке всегда можно выделить участок, кривизна которого минимально отличается от кривизны соответствующего участка образующей поверхности $Д$. Указанным участком режущей кромки и производится формообразование соответствующего участка поверхности детали, а подвод к участку образующей поверхности $Д$ участка режущей кромки соответствующей кривизны производится ориентирующим движением второго рода.

Подобно точению (см. рис. 8.10), обработка деталей, ограниченных поверхностями вращения с криволинейными образующими, может производиться универсальным чашечным или призматическим резцом, дисковой фрезой, шлифовальным кругом и др. инструментами, кривизна образующей исходной инструментальной поверхности которых переменна.

Применение способа точения (см. рис. 8.10) позволяет увеличить производительность обработки фасонных поверхностей вращения и улучшить ее качество. Следствием более высокой степени конформности образующих поверхности детали и исходной инструментальной поверхности является уменьшение высоты остаточного детерминированного регулярного микрорельефа и за счет у этого уменьшение шероховатость обработанной поверхности детали. Путем увеличения подачи инструмента вдоль образующей поверхности детали достигается повышение производительности обработки.

При отделочной обработке деталей поверхностным пластическим деформированием (ППД) ориентирующим движением второго рода давление в зоне упрочнения поддерживается постоянным, равным оптимальному его значению. За счет этого улучшается качество обработанной поверхности.

Пример 8.4. По способу упрочнения[1] обработка сложной поверхности детали 1 производится поверхностным пластическим деформированием роликом 2, свободно вращающимся вокруг своей оси с некоторой угловой скоростью ω_u (рис. 8.11).

На первом (черновом) проходе упрочняющий ролик вводится в контакт с обрабатываемой поверхностью детали точкой K_1, в которой кривизна его образующей большая (следовательно, радиус кривизны $R_u^{(\min)}$ меньший). Ролик нагружают рабочим усилием $P_{упр}$ и производят упрочнение поверхностного слоя, перемещая его с подачей $S_{ос}$ относительно обрабатываемой поверхности детали. После чернового прохода ролик 2 разворачивают вокруг некоторой оси, перпендикулярной плоскости чертежа рис. 8.11 так, что он вступает в контакт с обрабатываемой поверхностью точкой K_2, в которой кривизна образующей меньшая (следовательно, радиус кривизны $R_u^{(\max)}$ больший), после чего производят чистовую обработку. Поворот упрочняющего ролика на угол θ представляет собой вырожденное движение ориентирования второго рода.

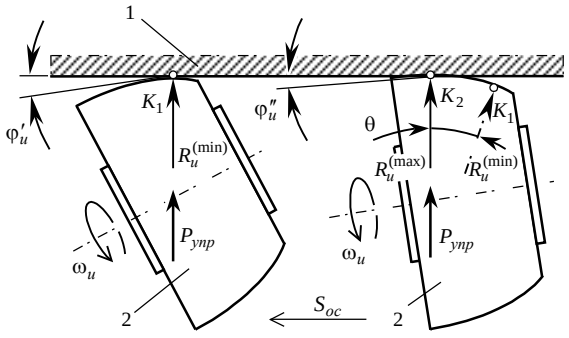


Рис. 8.11. Схема способа многопереходной обработки поверхностным пластическим деформированием (а.с. №1636196).

Применение ролика 2 с образующей переменной кривизны обеспечивает поддержание в процессе упрочнения каплевидного пятна контакта детали и инструмента, что способствует достижению высокого качества обработки. Во время чернового прохода, когда ролик контактирует с обрабатываемой поверхностью участком образующей с большей кривизной, заборный угол φ'_u больше, чем угол φ''_u при чистовом проходе, когда ролик контактирует с обрабатываемой поверхностью участком образующей с меньшей кривизной.

Применение одного ролика, разворачиваемого в процессе обработки детали на угол θ, позволяет достичь оптимальных условий обработки поверхностным пластическим деформированием. Применение способа упрочнения (рис. 8.11) позволяет улучшить качество обработанной поверхности детали.

---

[1] А.с. №1636196 (СССР). *Способ многопереходной обработки и инструмент для его осуществления.*/С.П.Радзевич, В.А.Палагута, В.В.Новодон и А.П.Радзевич. – Опубл. в Б.И., №11, 1991. Заявлено 30.01.1989, МКИ^5 В 24 В 39/00.

Пример 8.5. В соответствие со способом[1] обработку фасонной поверхности детали 3 производят иструментом 1, которому сообщают вращение вокруг своей оси $O_u - O_u$ с угловой скоростью ω_u, обеспечивающей требуемую скорость резания (рис. 8.12). Детали сообщают формообразующее движение в плоскости, проходящей через оси вращения детали и инструмента. Формообразующее движение может состоять из равномерного или неравномерного вращения детали с угловой скоростью $\omega_д$ вокруг оси $O_д - O_д$ и возвратно-поступательного движения 4 в направлении, перпендикуляром оси детали.

Формообразование поверхности детали производят конической исходной инструментальной поверхностью. Образующую поверхности $И$ совмещают с образующей поверхности $Д$. Детали и инструменту придают относительное движение 2 вдоль образующей конической поверхности $И$. Это движение согласовывают с углом поворота детали вокруг оси $O_д - O_д$ исходя из выполнения при этом в каждый момент времени условия постоянства скорости съема припуска

$$Q_{съема} = 0{,}5L^2 v_u b = Const ,$$

где $L = L(\varphi)$ – длина линии контакта поверхностей $Д$ детали и $И$ инструмента;

$v_u = v_u(\varphi)$ – скорость изменения ведущей координаты;

b – ширина обрабатываемой поверхности детали;

φ – угловая координата обрабатываемого участка профиля детали.

Постоянство скорости съема припуска достигается за счет регулирования параметра L – путем стабилизации длины линии контакта инструмента со срезаемым припуском.

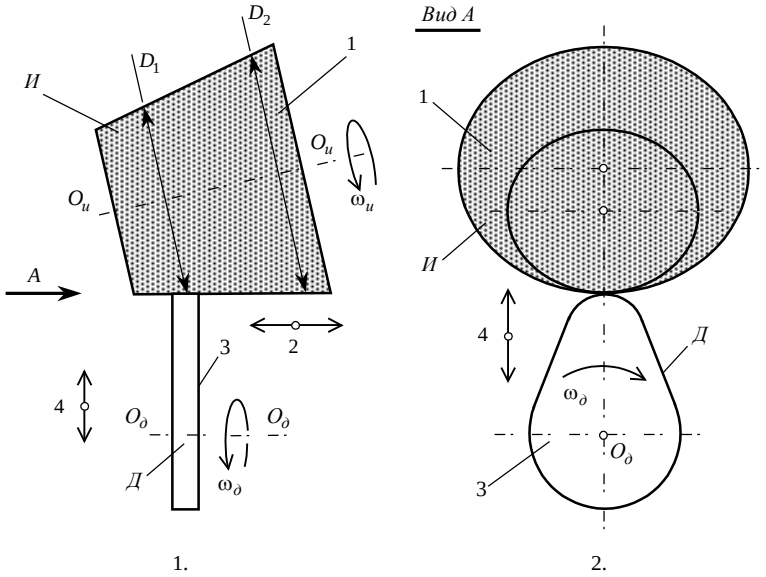


Рис. 8.12. Схема способа обработки фасонных поверхностей (а.с. №1703291).

Согласованно с поступательным перемещением дополнительно изменяют частоту ω_u вращения инструмента. Частоту ω_u изменяют обратно пропорционально изменению диаметра рабочего сечения конического инструмента. Если рабочее сечение инструмента имеет диаметр D_1, то инструмент вращают с угловой скоростью $\omega_{u.1}$. Если диаметр рабочего сечения инструмента D_2, то инструмент вращают с угловой скоростью $\omega_{u.2}$. При этом обеспечивается выполнение соотношения

$$\omega_{u.1} D_1 = \omega_{u.2} D_2 .$$

Способ обработки фасонных контуров (см. рис. 8.12) может быть использован при изготовлении дисковых и торцовых кулачков. Его применение обеспечивает повышение качества обработанной поверхности детали.

Если поверхность $И$ инструмента допускает движение "*самой по себе*" (а это условие выполняется для подавляющего большинства применяемых на практике режущих инструментов), то введение в кинематику формообразования движения такого вида одновременно с движением ориентирования второго рода позволяет при прочих одинаковых условиях увеличить точность текущего положения инструмента относительно детали.

Пример 8.6. С этой целью разработан способ[2] обработки деталей, ограниченных поверхностями сложной формы, в соответствие с которым обработка детали 1 производится инструментом 5, вращающимся вокруг своей оси $O_u - O_u$ с угловой скоростью ω_u (рис. 8.13.1). Обработка поверхности $Д$ производится построчно. Для этого инструменту придают движение построчного огибания 4, которое осуществляют по строкам 2 с шагом $S_П$ между ними. На станке с ЧПУ это движение воспроизводится различными путями, например, путем поворота детали вокруг своей оси $O_д - O_д$ в направлении 15 при одновременном перемещении инструмента в направлении 7. В свою

---

[1] А.с. №1703291 (СССР). *Способ обработки фасонных поверхностей*./С.И.Чухно и С.П.Радзевич. – Опубл. в Б.И. №1, 1992. – МКИ[5] В 23 С 3/16. Заявлено 02.08.1989 г.

[2] А.с. №1336366 (СССР). *Способ обработки деталей, ограниченных поверхностями сложной формы*./С.П.Радзевич. – Заявлено 21.10.1985. МКИ[4] В 23 С 3/16.

очередь движение инструмента в направлении 7 на станке воспроизводится путем сложения движений 10 и 13, направленных соответственно перпендикулярно и вдоль оси $O_д - O_д$ поворота детали.

Для повторения проходов обработки инструмент возвращают в исходное положение. Для этого деталь и инструмент выводят из контакта, деталь ускоренно поворачивают вокруг своей оси в направлении 16, а инструменту придают ускоренное движение в направлении 6. Это движение инструмента, в свою очередь, на станке с воспроизводится за счет сложения движений 9 и 14.

Из исходного положения инструмент смещают на величину подачи $S_П$, вводят в контакт с заготовкой, после чего процесс повторяется до завершения обработки всей поверхности детали.

Для увеличения производительности обработки за счет устранения движений холостых ходов, по окончании обработки одной строки формообразования в конечном положении инструмент смещают на величину подачи $S_П$ и перемещают со скоростью рабочего движения в направлении 3, противоположном направлению движения 4. В этом случае движения инструмента в направлениях 6 и 16 совершаются не ускоренно, а с рабочими скоростями (как движения 7 и 15).

Обработку детали производят инструментом, образующая 8 исходной инструментальной поверхности $И$ которого имеет переменную кривизну: кривизна образующей от одной ее точки к другой монотонно изменяется от минимального до максимального значения.

Инструменту сообщают движение ориентирования 11 (12) второго рода. Это движение ориентирования осуществляют вокруг оси, проходящей через точку K перпендикулярно нормали $\mathbf{n}_д$ (вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа рис. 8.13.1). Оно сводится к качению со скольжением образующей 8 исходной инструментальной поверхности по поверхности детали при неизменном положении точки K на поверхности $Д$. Это движение направлено так, что обеспечивает уменьшение минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

Шпинделю инструмента сообщают движение ориентирования 13 (14) второго рода. Поворотное движение шпинделя осуществляют вокруг оси, проходящей через точку K касания поверхностей $Д$ и $И$ перпендикулярно нормали $\mathbf{n}_д$ (вокруг оси, лежащей в плоскости чертежа рис. 8.13.1 и рис. 8.13.2). Оно сводится к качению со скольжением направляющей поверхности $И$ инструмента по поверхности $Д$ обрабатываемой детали при фиксированном положении точки K на ней. Это движение направлено так, что обеспечивает уменьшение минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$.

Результирующее движение ориентирования второго рода, осуществляемое со скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$, в этом случае разложено на две состаляющие: движение ориентирования 11 (12) со скоростью $\mathbf{V}_1$, касательной к образующей поверхности $И$ инструмента и движение ориентирования 13 (14) со скоростью $\mathbf{V}_2$, касательной к линии на поверхности $И$ инструмента, вдоль которой она допускает движение "*самой по себе*".

Движение 13 (14) ориентирования согласовывают с движением ориентирования 11 (12) так, чтобы в каждый момент времени выполнялось условие:

$$[h] = \frac{\delta V_1}{V_1^2 + V_2^2} \tag{8.49}$$

где $[h]$ – допуск на точность формообразования сложной поверхности детали;

δ – погрешность позиционирования рабочих органов металлорежущего станка с ЧПУ;

$\mathbf{V}_1$ – скорость движения ориентирования инструмента вдоль образующей поверхности $И$ инструмента;

$\mathbf{V}_2$ – скорость движения ориентирования инструмента вдоль

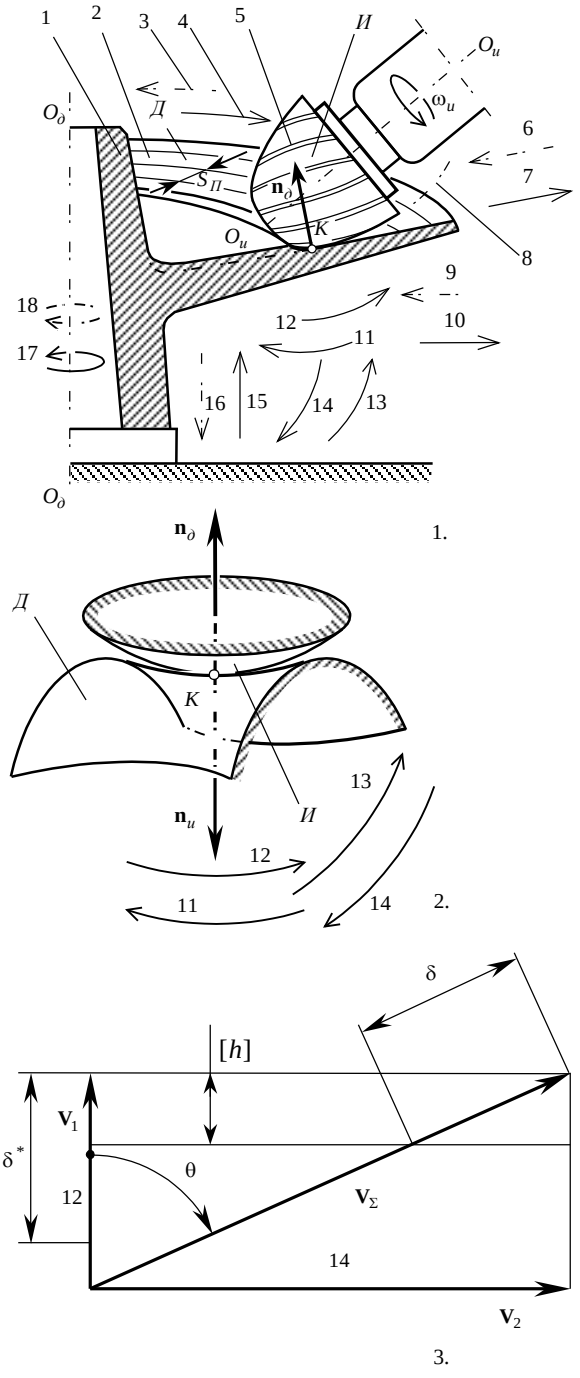


Рис. 8.13. Схема способа обработки сложных поверхностей деталей (а.с. №1336366).

направляющей поверхности $И$ инструмента.

Введение движения ориентирования 13 (14), осуществляемого со скоростью $\mathbf{V}_2$, приводит к тому, что результирующее движение ориентирования инструмента, совершаемое со скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$, направлено к первичному движению ориентирования $\mathbf{V}_1$ второго рода под некоторым углом θ. Очевидно, что при заданном допуске $[h]$ на точность формообразования сложной поверхности детали и заданной погрешности δ позиционирования рабочих органов металлорежущего станка в текущий момент времени должно выполняться условие: $[h] \geq \delta \cos\theta$.

Зависимость (49) следует из очевидного (см. рис. 8.13.3) соотношения $\tan\theta = \dfrac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|}$, если для ее вывода использовать известное тригонометрическое соотношение $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$.

Исключение из кинематики формообразования движения ориентирования 13 (14) приводит к тому, что погрешность позиционирования δ рабочих органов металлорежущего станка полностью переносится на деталь. В этом случае составляющая δ^* результирующей погрешности может превысить допуск $[h]$ на точность обработки, что недопустимо.

Применение способа (см. рис. 8.13) позволяет повысить точность обработки сложных поверхностей деталей.

Наивыгоднейшее относительное положение детали и инструмента достигается и в процессе обработки поддерживается введенными в кинематику формообразования движениями ориентирования второго рода. В задаче синтеза локального формообразования открытым остается вопрос о наивыгоднейшей в текущий момент времени ориентации инструмента относительно детали.

Наивыгоднейшая ориентация инструмента относительно детали в текущей точке $К$ определяется величиной угла $\mu_{эфф}$ относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$. Для управления в процессе обработки ориентацией инструмента относительно детали в кинематику формообразования вводится движение ориентирования первого рода. Этим движением можно изменять величину угла μ с целью придания ему наивыгоднейшего значения $\mu = \mu_{эфф}$.

Наивыгоднейшее значение $\mu_{эфф}$ угла относительной локальной ориентации детали и инструмента определяется так.

Сначала находятся все стационарные значения угла μ. Для этого уравнение (4.83) индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ дифференцируется по μ и находятся все действительные корни $\mu_i = \mu_1$, μ_2, μ_3, μ_4 уравнения:

$$\frac{\partial r_{conf}}{\partial \mu} = 0{,}5\sqrt{\left|\frac{G_u L_u \cos^2(\varphi+\mu) + M_u\sqrt{E_u G_u}\,\sin 2(\varphi+\mu) + E_u N_u \sin^2(\varphi+\mu)}{E_u G_u}\right|}\,\operatorname{sgn}\Phi_{2.u}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{E_u G_u\left[E_u N_u \sin 2(\varphi+\mu) + 2M_u\sqrt{E_u G_u}\cos 2(\varphi+\mu) - G_u L_u \sin 2(\varphi+\mu)\right]}{\left[G_u L_u \cos^2(\varphi+\mu) + M_u\sqrt{E_u G_u}\,\sin 2(\varphi+\mu) + E_u N_u \sin^2(\varphi+\mu)\right]^2} = 0 \tag{8.50}$$

В соответствие с правилом высших производных, из всех стационарных значений угла μ_i выбираем его значение, удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial^2 r_{conf}}{\partial \mu^2} > 0 \tag{8.51}$$

Если в каждой точке $К$ ориентировать инструмент относительно детали так, чтобы угол μ удовлетворял условиям (50) и (51), то при прочих одинаковых условиях поверхность $И$ инструмента будет наиболее конформна поверхности $Д$ детали, вследствие чего ширина строки формообразования достигает наибольшего значения и, как следствие, локальная производительность формообразования достигает максимума.

Пример 8.7. Для повышения точности и увеличения производительности путем достижения и поддержания в процессе обработки наивыгоднейшей ориентации инструмента относительно детали разработан способ[1] обработки сложных поверхностей деталей (рис. 8.14).

В соответствие с этим способом деталь 1 обрабатывается инструментом 5 (рис. 8.14.1). Иструменту сообщают главное движение – вращение вокруг своей оси $O_u - O_u$ с угловой скоростью ω_u.

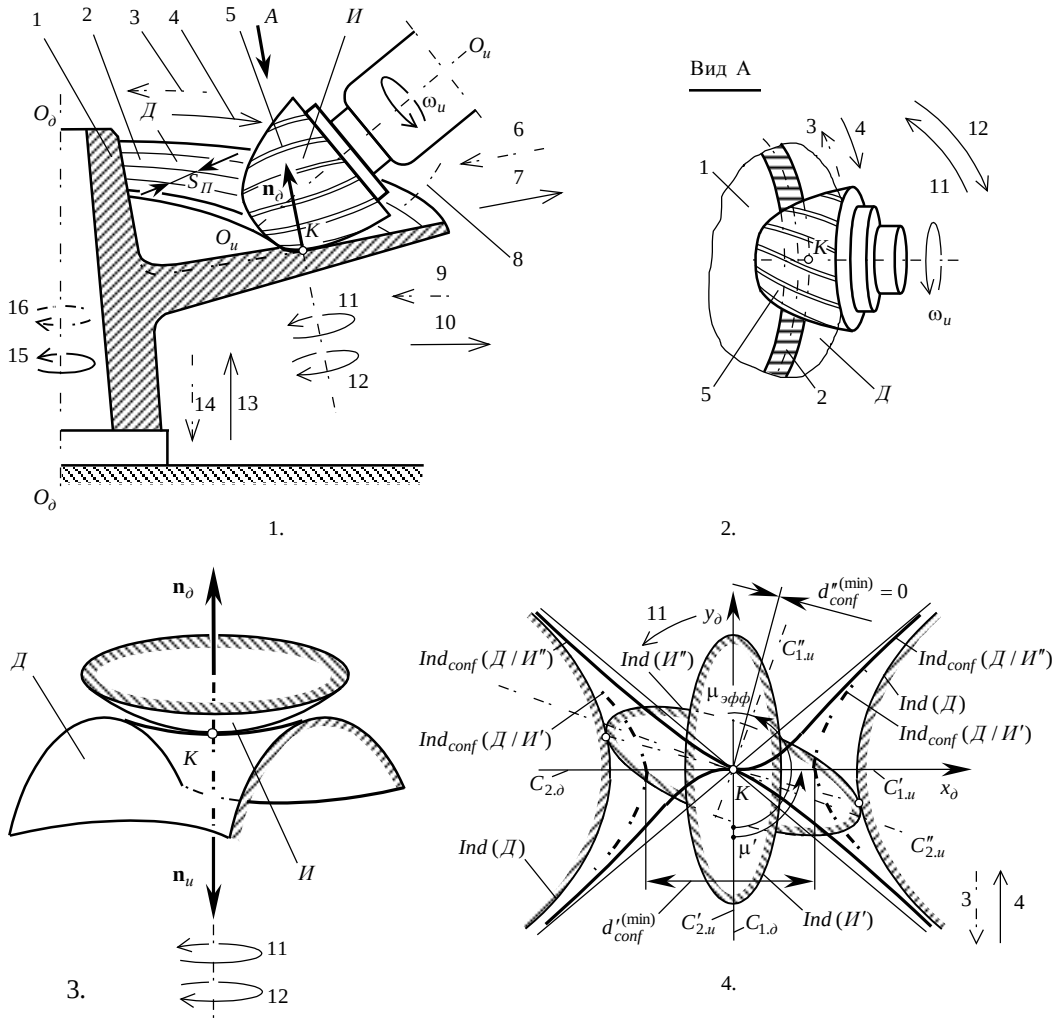


Рис. 8.14. Схема способа обработки сложных поверхностей деталей (а.с. №1185749).

Инструменту придают движение 4 вдоль строки формообразования 2 (рис. 8.14.2). На станке с ЧПУ оно может осуществляться, например, путем поворота детали вокруг своей оси $O_д - O_д$ в направлении 15 при одновременном перемещении инструмента в направлении 7. В свою очередь движение 7 на станке с ЧПУ может быть воспроизведено путем сложения движений 10 и 13, направленных нормально и вдоль оси поворота детали.

Для повторения проходов обработки, т.е. для перемещения инструмента вдоль следующей строки формообразования, инструмент возвращают в исходное положение. Для этого обрабатываемую деталь поворачивают вокруг своей оси в направлении 16, а инструменту придают движение в направлении 6. В свою очередь движение 6 может быть воспроизведено на станке с ЧПУ путем сложения движений 9 и 14.

Из исходного положения инструмент смещают на величину подачи $S_П$, после чего процесс обработки повторяется.

Инструменту и детали придают движение ориентирования первого рода 11 (12), которое осуществляют вокруг оси, проходящей через точку K в направлении орта нормали $\mathbf{n}_д$ (рис. 8.14.3).

---

[1] А.с. №1185749 (СССР). *Способ обработки деталей, ограниченных поверхностями сложной формы*./С.П.Радзевич. – Заявлено 24.10.83. МКИ[4] В 23 С 3/16.

Движение ориентирования 12 (11) направлено так, чтобы минимальный диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности поверхностей $Д$ и $И$ принимал значение, наименьшее из возможных. Например, при формообразовании выпукло-вогнутого ($\tilde{G}_o < 0$) гиперболического локального участка поверхности $Д$ выпуклым ($\tilde{M}_u > 0$, $\tilde{G}_u > 0$) эллиптическим локальным участком поверхности $И$ движение ориентирования 11 первого рода (см. рис. 8.14.4) направлено против часовой стрелки. В результате этого положение инструмента относительно детали изменяется. Если в некотором исходном ($Ind\,(И')$) положении инструмента индикатриса конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности $Ind_{conf}\,(Д/И')$ имеет наименьшим диаметр $d_{conf}^{\prime(\min)}$, то в конечном (наивыгоднейшем) положении инструмента ($Ind\,(И'')$) минимальный диаметр индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И'')$ равен $d_{conf}^{\prime\prime(\min)}$. Очевидно, что $d_{conf}^{\prime\prime(\min)} < d_{conf}^{\prime(\min)}$. Изменение ориентации инструмента из исходной ($Ind\,(И')$) до наивыгоднейшей ($Ind\,(И'')$) производится движением ориентирования первого рода.

Движение ориентирования первого рода производится до достижения инструментом относительного положения, в котором минимальный диаметр индикатрисы конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности достигает наименьшего неотрицательного значения.

В текущей точке траектории формообразования движение построчного огибания направлено ортогонально направлению измерения минимального диаметра индикатрисы конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

Задача синтеза локального формообразования решается в такой последовательности: сначала из условий (50) и (51) находится наивыгоднейшее значение угла $\mu_{эфф}$ относительной локальной ориентации поверхности детали и исходной инструментальной поверхности. Это значение угла $\mu_{эфф}$ подставляется в (4.83), после чего из полученного таким путем уравнения исходя из выполнения условий $\dfrac{\partial r_{conf}}{\partial \varphi} = 0$ и $\dfrac{\partial^2 r_{conf}}{\partial \varphi^2} > 0$ находится наивыгоднейшее значение $\varphi_{эфф}$ угла φ . Угол $\varphi_{эфф}$ определяет наивыгоднейшее ($\xi_{эфф} = \varphi_{эфф} + 90^\circ$) направление траектории формообразования в текущей точке K . Значения углов $\mu_{эфф}$ и $\varphi_{эфф}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial r_{conf}}{\partial \varphi} = 0\,; \qquad \frac{\partial r_{conf}}{\partial \mu} = 0\,;$$

$$\frac{\partial^2 r_{conf}}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial^2 r_{conf}}{\partial \mu^2} - \left(\frac{\partial^2 r_{conf.}}{\partial \varphi \partial \mu} \right)^2 > 0 \qquad \text{при} \qquad \frac{\partial^2 r_{conf}}{\partial \varphi^2} > 0\,. \tag{8.52}$$

Соотношения (52) должны выполняться в каждой точке K на поверхности $Д$ детали – это необходимое условие достижения наивысшей производительности локального формообразования поверхности детали.

Целесообразность введения в кинематику формообразования движения ориентирования первого рода иллюстрируется приведенными ниже примерами обработки деталей резанием и поверхностным пластическим деформированием как на многокоординатных станках с ЧПУ, так и на металлообрабатывающем оборудовании, воспроизводящем "*жесткую*"кинематику формообразования.

Пример 8.8. Движение ориентирования первого рода может быть введено в кинематику формообразования способа точения фасонных поверхностей вращения (см. выше, рис. 8.10). В этом случае[1] (рис. 8.15) обработка детали 1, ограниченной поверхностью вращения $Д$ с криволинейной образующей 2 переменной кривизны, производится резцом 10 с монотонно изменяющейся кривизной образующей 9 исходной инструментальной поверхности. Заготовку вращают вокруг своей оси $O_д - O_д$ с угловой скоростью $\omega_д$, а инструмент перемещают в осевой плоскости детали (в плоскости чертежа рис. 8.15.1) вдоль ее образующей в направлении 14. Перемещение вдоль образующей поверхности $Д$ детали складывается из перемещения резца вдоль оси $O_д - O_д$ в направлении 13 и нормально к этому направлению в направлении 17 (16).

[1] А.с. №1232375 (СССР). *Способ точения*./С.П.Радзевич. – Опубл. в БИ, №19, 1986. МКИ[4] В 23 В 1/00. Заявлено 13 сентября 1984 г.

Инструменту придают движение ориентирования второго рода 11 (12). Это движение сводится к качению со скольжением образующей исходной инструментальной поверхности по образующей поверхности детали и направлено так, чтобы образующие 2 и 9 прилегали одна к другой наиболее полно.

Кроме того, инструменту придают движение ориентирования 5 (6). Это движение осуществляют вокруг оси $O_1^{(K)} - O_1'^{(K)}$, проходящей через текущую точку K_1 касания поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности перпендикулярно оси вращения детали и направляют его так, чтобы образующие 2 и 9 поверхности детали и исходной инструментальной поверхности прилегали одна к другой наиболее полно.

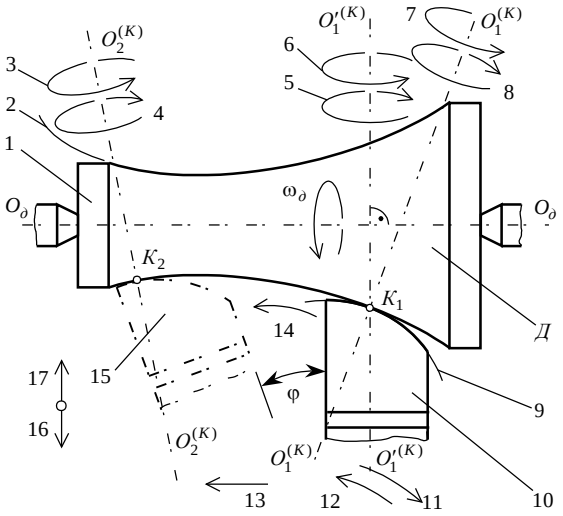


Рис. 8.15. Схема способа точения (а.с. №1232375).

При переходе от формообразования поверхности детали в окрестности точки K_1 ее образующей к формообразованию поверхности $Д$ в окрестности точки K_2 движением ориентирования второго рода инструмент поворачивают на некоторый угол φ и движением ориентирования 5 (6) – на некоторый угол Σ вокруг оси $O_1^{(K)} - O_1'^{(K)}$. В результате этого каждый участок профиля образующей поверхности детали формообразуется участком образующей исходной инструментальной поверхности, кривизна которого близка к кривизне соответствующего участка образующей детали.

Движение ориентирования 7 (8) первого рода может осуществляться вокруг оси $O_1^{(K)} - O_1^{(K)}$, перпендикулярной образующей поверхности детали в точке ее касания с исходной инструментальной поверхностью. В положении 15 инструмента движение ориентирования 3 (4) первого рода осуществляется вокруг оси $O_2^{(K)} - O_2^{(K)}$, также перпендикулярной обрабатываемой поверхности детали.

При обработке детали с монотонно изменяющейся кривизной образующей движения ориентирования являются поворотными, а при обработке детали с переменным характером изменения кривизны ее образующей эти движения являются возвратно-поворотными.

На величину хода движения ориентирования первого рода накладываются ограничения. Эти ограничения являются следствием того, что введение в кинематику формообразования движения ориентирования приводит к изменению геометрических параметров режущей кромки. Такие изменения допускаются только в определенных пределах.

Подобно точению универсальным фасонным резцом, обработка может производиться призматическим или чашечным резцом, дисковой фрезой или шлифовальным кругом.

Введенное в кинематику формообразования движения ориентирования первого рода расширяет технологические возможности способа точения фасонных поверхностей деталей универсальным инструментом.

При упрочнении сложных поверхностей деталей поверхностным пластическим деформированием введение в кинематику формообразования движения ориентирования первого рода позволяет повысить качество обработанной поверхности за счет поддержания постоянным (равным оптимальному его значению) давления в зоне упрочнения. Постоянство давления в зоне упрочнения достигается двумя путями:

- либо поддержанием постоянной площади пятна контакта детали и индентора при постоянном усилии упрочнения;
- либо поддержанием максимальной площади пятна контакта и изменением усилия упрочнения прямо пропорционально изменению площади пятна контакта детали и индентора.

Пример 8.9. Первый подход иллюстрируется способом[1] упрочнения сложных поверхностей деталей, который осуществляеется при постоянном по величине усилии упрочнения $P_{упр}$ (рис. 8.16). Усилие $P_{упр}$ направлено нормально к обрабатываемой поверхности детали. Его постоянство обеспечивается, например, путем поджатия инструмента тарированной пружиной.

Упрочнение детали 1 производится фасонным инструментом 6 (рис. 8.16.1). Для обработки используется инструмент с переменной кривизной нормальных сечений его рабочей поверхности $И$ (рис. 8.16.2). В каждой точке K контакта рабочей поверхности инструмента с упрочняемой поверхностью детали главные радиусы кривизны $R_{1.и}$ и $R_{2.и}$ его поверхности $И$ отличаются один от другого (сечение 7 рабочей поверхности инструмента плоскостью, перпендикулярной оси $O_o - O_o$, в непосредственной близости от точки K является некруглым).

[1] А.с. №1533174 (СССР). *Способ упрочнения деталей сложной формы.*/С.П.Радзевич. – Заявлено 02 декабря 1987 г. МКИ^4 В 24 В 39/00.

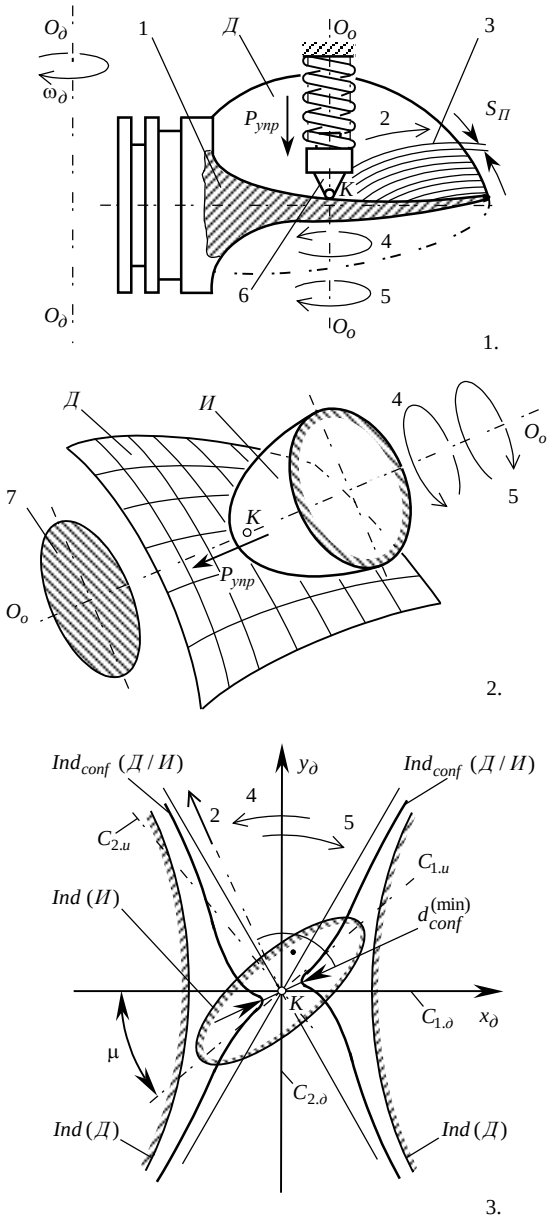


Рис. 8.16. Схема способа упрочнения сложных поверхностей деталей (а.с.1533174).

В процессе обработки инструменту и детали сообщают движение построчного огибания 2, в результате которого за один проход инструмента на поверхности $Д$ упрочняется одна строка 3.

Движение построчного огибания на станке может быть получено в результате сложения поворотного движения детали вокруг своей оси $O_д - O_д$, осуществляемого с угловой скоростью $\omega_д$, а также перемещения инструмента вдоль оси детали и в ее радиальном направлении. Все составляющие движения построчного огибания согласованы между собой.

После каждого прохода инструмент смещают на величину подачи $S_П$ для упрочнения следующей строки формообразования и так до полной обработки всей поверхности детали.

Инструменту и детали сообщают движение ориентирования 4 (5) первого рода, которое осуществляют вокруг оси $O_o - O_o$, проходящей через точку K ортогонально поверхности детали. Движение ориентирования 4 (5) направлено так, что площадь пятна контакта детали и инструмента поддерживается постоянной.

Направление и величина угла поворота инструмента вокруг оси $O_o - O_o$, требуемые для поддержания постоянной площади пятна контакта, устанавливаются в результате сопоставления параметров индикатрисы кривизн $Ind(Д)$ номинальной поверхности $Д$ детали и $Ind(И)$ исходной инструментальной поверхности $И$, а таже величины угла μ относительной локальной ориентации детали и инструмента.

При заданном усилии упрочнения $P_{упр}$ и неизменных упругих свойствах материалов детали и инструмента площадь пятна контакта зависит от параметров индикатрис кривизны $Ind(Д)$ и $Ind(И)$ и их относительной ориентации.

При перемещении инструмента вдоль строки формообразования площадь пятна контакта детали и инструмента должна изменяться в соответствие с изменением главных кривизн поверхности $Д$. Однако это не происходит. Изменение площади пятна контакта, вызванное изменением в текущей точке K главных кривизн $R_{1.д}$ и $R_{2.д}$ поверхности детали, компенсируется соответствующим изменением ориентации индикатрисы кривизны $Ind(И)$ поверхности $И$ – за счет изменения относительной локальной ориентации детали и инструмента. Это осуществляется движением ориентирования 4 (5) первого рода. Величина угла μ относительной локальной ориентации детали и инструмента при этом изменяется. Таким путем давление в зоне упрочнения поддерживается постоянным, равным его оптимальному значению, и за счет этого повышается качество обработанной поверхности детали.

Обработка производится на станках, имеющих 5-6 или более одновременно управляемых от системы ЧПУ координат.

Для увеличения производительности обработки движение формообразования направляют ортогонально направлению измерения минимального диаметра $d_{conf}^{(min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д / И)$ поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$. Направление измерения диаметра $d_{conf}^{(min)}$ устанавливается исходя из уравнение (4.83) характеристической кривой $Ind_{conf}(Д / И)$:

$$r_{conf} = \sqrt{\left|\frac{E_д G_д}{G_д L_д \cos^2\varphi - M_д\sqrt{E_д G_д}\sin 2\varphi + E_д N_д \sin^2\varphi}\right|}\,\mathrm{sgn}\Phi_{2.д}^{-1} + \sqrt{\left|\frac{E_u G_u}{G_u L_u \cos^2(\varphi+\mu) - M_u\sqrt{E_u G_u}\sin 2(\varphi+\mu) + E_u N_u \sin^2(\varphi+\mu)}\right|}\,\mathrm{sgn}\Phi_{2.u}^{-1}.$$

В качестве примера на рис. 8.16.3 представлена мгновенная кинематика формообразования при упрочнении выпукло-вогнутого ($\tilde{G}_д < 0$) гиперболического локального участка поверхности $Д$ детали выпуклым ($\tilde{M}_д > 0$, $\tilde{G}_д > 0$) участком поверхности $И$ инструмента.

Наименьший диаметр $d_{conf}^{(min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д / И)$ измеряется в нормальной секущей плоскости поверхностей $Д$ и $И$, в которой степень конформности исходной инструментальной поверхности $И$ к поверхности $Д$ детали наибольшая. Поэтому в каждой точке на поверхности $Д$ детали направление движения 5 построчного огибания должно быть направлено перпендикулярно

направлению измерения минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ поверхностей $Д$ и $И$. Направление движения построчного огибания ортогонально направлению измерения минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ обеспечивает наибольшую ширину строки фомообразования в текущей ее точке, тем самым уменьшает потребное количество проходов и увеличивает производительность обработки.

Движение ориентирования первого рода может вырождаться, как это имеет место, например, при выполнении одним и тем же инструментом предварительной и окончательной обработки фасонной поверхности вращения поверхностным пластическим деформированием.

Пример 8.10. В соответствие со способом[1] выглаживание фасонной поверхности детали производится индентором с цилиндрической рабочей поверхностью (рис. 8.17). В процессе обработки деталь 1, упрочнение которой производится индентором 2, вращается вокруг своей оси $O_д - O_д$ с угловой скоростью $\omega_д$.

На первом проходе инструмент 2 устанавливают под углом α_i' к оси вращения детали, вводят в контакт с заготовкой в некоторой точке K и поджимают к ней усилием $P_{упр}$, направленным перпендикулярно поверхности $Д$ детали. При вращении детали инструмент перемещают вдоль образующей поверхности $Д$. Для этого ему придают движение осевой подачи $S_{ос}$ и согласованное с ним движение, направленное перпендикулярно оси вращения детали. Результирующее (с учетом вращения детали) перемещение инструмента относительно детали производится вдоль траекторий 3.

Для поддержания постоянной площади пятна контакта угол α_i' наклона оси $O_u' - O_u'$ инструмента при перемещении его вдоль оси детали постоянно изменяют. Для этого в кинематику формообразования введено движние ориентирования $\boldsymbol{\omega}_n$ первого рода. Движение ориентирования осуществляют вокруг контактной нормали согласованно с текущим значением диаметра $d_д^{(i)}$ обрабатываемого сечения поверхности детали: при выглаживании участков поверхности $Д$ большего диаметра угол α_i' увеличивают, а при выглаживании участков ее поверхности меньшего диаметра – уменьшают.

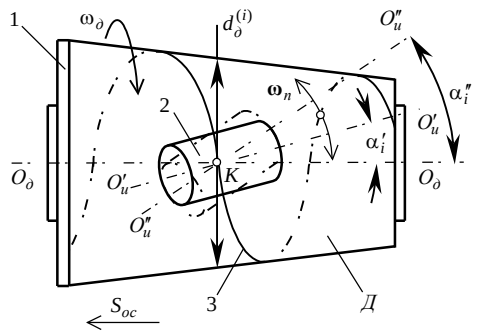


Рис. 8.17 Схема способа выглаживания (а.с. №1463454).

На втором проходе угол перекрещивания оси $O_u'' - O_u''$ инструмента и оси $O_д - O_д$ вращения детали уменьшают до значения α_i'' и поддерживают его меньшим соответствующего текущего значения угла α_i' на предварительном проходе упрочнения. Чистовую обработку той же поверхности $Д$ детали производят аналогично.

Способ (см. рис. 8.17) применяется для выглаживания шеек разгрузочной канавки вагонных осей (диаметр 130 *мм*, длина 165 *мм*) и ее средней части. При упрочнении шеек давление в зоне упрочннения составляет $p_1 = 3678{,}8$ *кПа*, а при выглаживании средней части – $p_2 = 2707{,}5$ *кПа*

В соответствие с исходным способом выглаживание производится при частоте вращения детали $\omega_д = 160$ *об/мин* с постоянной подачей $S_{ос} = 0{,}37$ *мм/об.д*. Основное время обработки при этом составляет 2,8 *мин*, вспомогательное – 1,65 *мин*.

Введение в кинематическую схему формообразования движения ориентирования первого рода, осуществляемого на угол $\alpha_i' = 25 - 90^\circ$, позволяет вести обработку с переменной осевой подачей $S_{ос}$, минимальное значение которой за один цикл обработки изменяется от $S_{ос} = 0{,}37$ *мм/об.д* до $S_{ос} = 0{,}62$ *мм/об.д*. За счет этого при том же вспомагательном времени машинное время снижается от 1,15 *мин* до 0,80 *мин*, а производительность обработки увеличивается на 30%. Поддержание при фиксированном усилии упрочнения площади пятна контакта постоянной дает возможность обеспечить требуемую глубину и степень наклепа.

Применение способа выглаживания (см. рис. 8.17) позволяет повысить производительность обработки фасонных поверхностей вращения и улучшить ее качество.

В частных случаях, когда задача синтеза локального формообразования решается применительно к обработке поверхностей, допускающих движение "*самих по себе*", в кинематику формообразования может быть введено простое движение, например, поступательное, которое позволяет управлять степенью конформности исходной инструментальной поверхности к поверхности детали. Такое простое движение инструмента отно-

[1] А.с. №1463454 (СССР). *Способ выглаживания.*/С.П.Радзевич. – Опубл. 07 марта 1989 в Б.И., №9, 1989. МКИ[4] В 24 В 39/00, 39/04. Заявлено 05 мая 1987 г.

сительно детали может быть представлено в виде суммы нескольких движений, по крайней мере одно из которых является движением ориентирования первого или второго рода и по крайней мере одно из остальных приводит поверхность $Д$ или поверхность $И$ к движению "*самой по себе*".

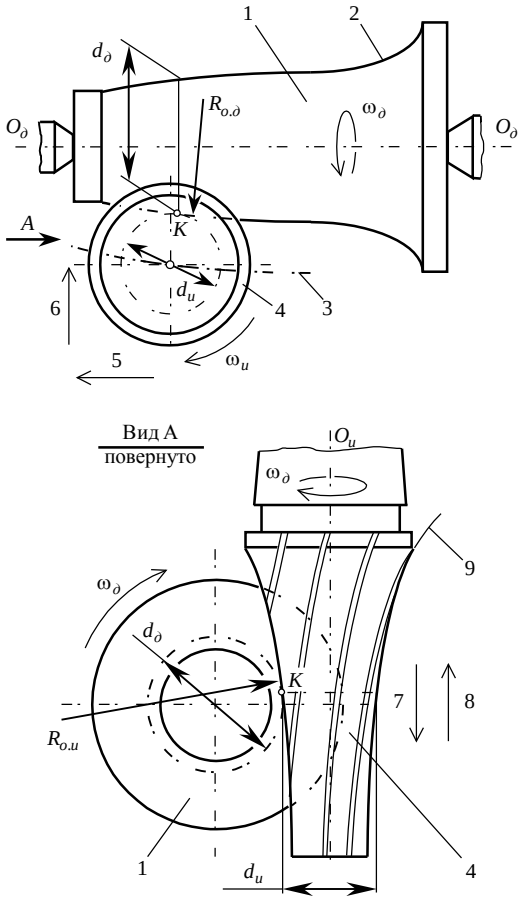


Рис. 8.18. Схема способа чистового фрезерования фасонной поверхности вращения.

Пример 8.11. В кинематическую схему формообразования фасонной поверхности вращения могут быть введены перемещения инструмента вдоль собственной оси, как это предусмотрено в способе чистового фрезерования фасонных поверхностей вращения (Радзевич С.П., Дмитренко Г.В., 1987). По этому способу деталь 1 и фрезу 4 располагают так, что оси их вращения перекрещиваются под прямым углом (рис. 8.18). Деталь и фрезу вращают вокруг своих осей $O_д - O_д$ и $O_u - O_u$ с постоянными угловыми скоростями $\omega_д$ и ω_u соответственно. Инструмент вводят в контакт с заготовкой, после чего фрезу перемещают вдоль образующей 2 обрабатываемой поверхности детали. Траекторией этого движения является кривая 3. Перемещение фрезы по траектории 3 на станке осуществляется двумя движениями 5 и 6, которые в текущий момент времени согласованы между собой по величине и направлению так, что результирующая скорость перемещения инструмента, равная векторной сумме скоростей в направленях 5 и 6, всегда направлена по касательной к образующей поверхности детали в точке K ее касания с исходной инструментальной поверхностью фрезы.

Фрезерование производят инструментом с криволинейной образующей 9 исходной инструментальной поверхности, кривизна которой монотонно изменяется от одной точки к другой ее точке.

Фрезе сообщают движение 7 (8) вдоль своей оси $O_u - O_u$. Это движение согласовывают с перемещением инструмента вдоль образующей обрабатываемой поверхности детали. Следствием введения в кинематическую схему формообразования движения 7 (8) является то, что построенная в плоскости чертежа рис. 8.18 траектория 3 перемещения оси $O_u - O_u$ вращения инструмента не эквидистантна образующей 2 обрабатываемой поверхности детали.

Движение 7 (8) направляют так, чтобы степень конформности исходной инструментальной поверхности фрезы к поверхности детали при этом увеличивалась.

Наиболее высокая степень конформности достигается, когда в текущей точке касания поверхностей $Д$ и $И$ в двух плоских сечениях, проходящих через точку K и оси вращения детали и инструмента, движением 7 (8) минимизирована разница между:

- значением диаметра $d_д$ детали и удвоенным радиусом кривизны $R_{о.u}$ образующей исходной инструментальной поверхности фрезы и
- проекцией половины диаметра d_u на проведенный в точку K радиус детали и удвоенным текущим значением радиуса кривизны $R_{о.д}$ образующей фасонной поверхности обрабатываемой детали.

За счет этого увеличивается степень конформности исходной инструментальной поверхности к поверхности детали, а минимальный диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}(Д/И)$ поверхностей $Д$ и $И$ (он измеряется в плоскости, проходящей через точку K и ось $O_д - O_д$ вращения детали) при этом уменьшается.

Движение 7 (8) можно разложить на две составляющие, одна из которых представляет собой движение ориентирования второго рода, а вторая – движение, приводящее поверхность детали к перемещению "*самой по себе*".

Применение способа чистового фрезерования (см. рис. 8.18) наиболее эффективно при получистовой и чистовой обработке на станках с ЧПУ фасонных поверхностей деталей, когда вследствие небольших толщин удаляемого припуска упругие деформации технологической системы невелики. В соответствие с этим способом обработка может быть произведена шлифованием.

Пример 8.12. Упрочнение фасонной поверхности вращения поверхностным пластическим деформированием может быть произведено инструментом с рабочей поверхностью конической формы – коническим индентором, ось $O_u - O_u$ которого перекрещивается под прямым углом с осью $O_д - O_д$ вращения детали (рис. 8.19).

Обрабатываемую деталь 1 вращают вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_д$. Для упрочнения поверхности $Д$ инструмент с коническим индентором 3 вводят в контакт с заготовкой, поджимают его направленным по нормали к поверхности $Д$ в точке K усилием $P_{упр}$ и перемещают вдоль образующей поверхности детали. Это движение инструмента является суммой согласованных между собой

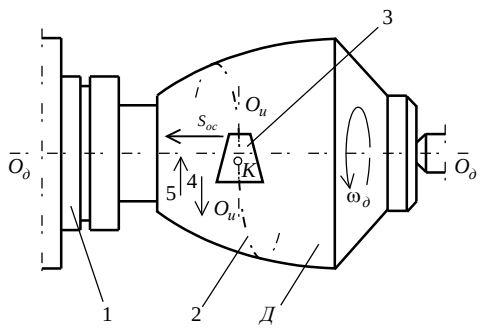


Рис. 8.19. Схема способа выглаживания фасонной поверхности вращения.

движений: движения осевой подачи S_{oc}, движений индентора к оси вращения детали и обратно и его перемещения вдоль собственной оси. В показанном (см. рис. 8.19) положении индентора (основание меньшего диаметра индентора расположено сверху) обработка участка поверхности $Д$ большего диаметра производится участком индентора меньшего диаметра – для этого индентор перемещают вверх. Обработка участка поверхности детали меньшего диаметра производится участком индентора большего диаметра – для этого индентор перемещают вниз. При обратном расположении индентора (большим основанием сверху) направления движений 4 (5) инструмента изменяются на противоположные.

Движение инструмента 4 (5) вдоль собственной оси можно разложить на две составляющие, одна из которых является движением ориентирования второго рода, а вторая – движением, приводящим поверхность детали к движению "*самой по себе*".

Применение способа выглаживания (см. рис. 8.19) позволяет улучшить качество чистовой обработки фасонных поверхностей вращения.

8.4.2. Некоторые особенности задачи синтеза локального формообразования поверхностей деталей. При решении задачи синтеза локального формообразования встречаются особые случаи, когда в точке касания одна или одновременно обе поверхности: поверхность детали и исходная инструментальная поверхность имеют особенности топологии или особое сочетание элементов их топологии.

Встречаются следующие особенности задачи синтеза локального формообразования поверхностей деталей.

8.4.2.1. *Неопределенности*. Если при решении задачи синтеза локального формообразования появляются неопределенности вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ или $0\cdot\infty$, вместо уравнения индикатрисы конформности $Ind_{conf}\ (Д / И)$ вида (4.83) следует использовать уравнение индикатрисы конформности $Ind^{(k)}_{conf}\ (Д / И)$ вида (4.85):

$$k_{conf} = \sqrt{\left|\frac{G_\partial L_\partial \cos^2\varphi - M_\partial\sqrt{E_\partial G_\partial}\sin 2\varphi + E_\partial N_\partial \sin^2\varphi}{E_\partial G_\partial}\right|}\,\mathrm{sgn}\Phi^{-1}_{2.\partial} +$$

(8.53)

$$+\sqrt{\left|\frac{G_u L_u \cos^2(\varphi+\mu) - M_u\sqrt{E_u G_u}\sin 2(\varphi+\mu) + E_u N_u \sin^2(\varphi+\mu)}{E_u G_u}\right|}\,\mathrm{sgn}\Phi^{-1}_{2.u}\,.$$

или, при ортогональной $\lfloor U_{\partial(u)}; V_{\partial(u)}\rfloor$– параметризации поверхностей $Д$ и $И$, вида:

$$k_{conf} = \sqrt{\left|L_\partial\cos^2\varphi + M_\partial\sin 2\varphi + N_\partial\sin^2\varphi\right|}\,\mathrm{sgn}\,\Phi^{-1}_{2.\partial} +$$

$$+\sqrt{\left|L_u\cos^2(\varphi+\mu) + M_u\sin 2(\varphi+\mu) + N_u\sin^2(\varphi+\mu)\right|}\,\mathrm{sgn}\,\Phi^{-1}_{.u}\,.$$

Тогда угол наивыгоднейшей локальной ориентации инструмента относительно детали находится как корень уравнения:

$$\frac{\partial k_{conf}}{\partial\mu} = \sqrt{\left|\frac{E_u G_u}{G_u L_u\cos^2(\varphi+\mu) - M_u\sqrt{E_u G_u}\sin 2(\varphi+\mu) + E_u N_u\sin^2(\varphi+\mu)}\right|}\cdot$$

$$\cdot\frac{-G_u L_u\sin 2(\varphi+\mu) - 2\sqrt{E_u G_u}\cos 2(\varphi+\mu) + E_u N_u\sin 2(\varphi+\mu)}{E_u G_u}\mathrm{sgn}\,\Phi^{-1}_{2.u} = 0\,,$$

Это уравнение эквивалентно (50).

Неравенство, эквивалентное (51), получаем исходя из соотношения $\frac{\partial^2 k_{conf}}{\partial \mu^2} < 0$.

Расчитанная таким путем величина угла $\mu_{эфф}$ является наивыгоднейшей.

Аналогично расчитывается наивыгоднейшее значение угла $\varphi_{эфф}$. Для этого из (53) находим:

$$\frac{\partial k_{conf}}{\partial \varphi} = 0{,}5\sqrt{\left|\frac{E_\partial G_\partial}{G_\partial L_\partial \cos^2\varphi + 2M_\partial\sqrt{E_\partial G_\partial}\sin 2\varphi + E_\partial N_\partial \sin^2\varphi}\right|}\,\operatorname{sgn}\Phi_{2.\partial}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{E_\partial G_\partial\left(E_\partial N_\partial \sin 2\varphi + 2M_\partial\sqrt{E_\partial G_\partial}\cos 2\varphi - G_\partial L_\partial \sin 2\varphi\right)}{\left(G_\partial L_\partial \cos^2\varphi + 2M_\partial\sqrt{E_\partial G_\partial}\sin 2\varphi + E_\partial N_\partial \sin^2\varphi\right)^2} +$$

$$+ 0{,}5\sqrt{\left|\frac{E_u G_u}{G_u L_u \cos^2(\varphi+\mu) + 2M_u\sqrt{E_u G_u}\sin 2(\varphi+\mu) + E_u N_u \sin^2(\varphi+\mu)}\right|}\,\operatorname{sgn}\Phi_{2.u}^{-1}\cdot \tag{8.54}$$

$$\cdot\frac{E_u G_u\left[E_u N_u \sin 2(\varphi+\mu) + 2M_u\sqrt{E_u G_u}\cos 2(\varphi+\mu) - G_u L_u \sin 2(\varphi+\mu)\right]}{\left[G_u L_u \cos^2(\varphi+\mu) + 2M_u\sqrt{E_u G_u}\sin 2(\varphi+\mu) + E_u N_u \sin^2(\varphi+\mu)\right]^2} = 0$$

и второе соотношение:

$$\frac{\partial^2 k_{conf}}{\partial \varphi^2} < 0. \tag{8.55}$$

Величина угла $\varphi_{эфф}$ является тем из корней уравнения (54), который удовлетворяет условию (55).

Центральный угол $\varphi_{эфф}$ измеряется в общей для поверхностей $Д$ и $И$ касательной плоскости и отсчитывается от первого главного сечения $C_{1.\partial}$ поверхности $Д$ детали.

Наивыгоднейшее направление движения формообразования ортогонально направлению измерения максимального диаметра индикатрисы конформности (54). Поэтому оно осуществляется под углом $\xi_{эфф}$ к первому главному сечению $C_{1.\partial}$ поверхности $Д$ детали:

$$\xi_{эфф} = \varphi_{эфф} + \frac{\pi}{2}.$$

8.4.2.2. *Альтернативные решения задачи синтеза локального формообразования.* При некоторых видах касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности могут иметь место случаи, когда задача синтеза локального формообразования имеет два эквивалентных одно другому решения. Следовательно, можно построить две индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И')$ и $Ind_{conf}\,(Д/И'')$ поверхностей $Д$ и $И$. В этом случае существует два эквивалентных одно другому положения инструмента относительно детали, в которых угол относительной локальной ориентации равен его наивыгоднейшему значению $\mu = \pm\mu_{эфф}$ (рис. 8.20) и два разных направления измерения минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ (величина которого в обоих случаях одна и та же). Как следствие, в этом случае существует два различных эквивалентных одно другому наивыгоднейших направления движения формообразования $\mathbf{V}'_{эфф}$ и $\mathbf{V}''_{эфф}$. Из этого однако не следует, что

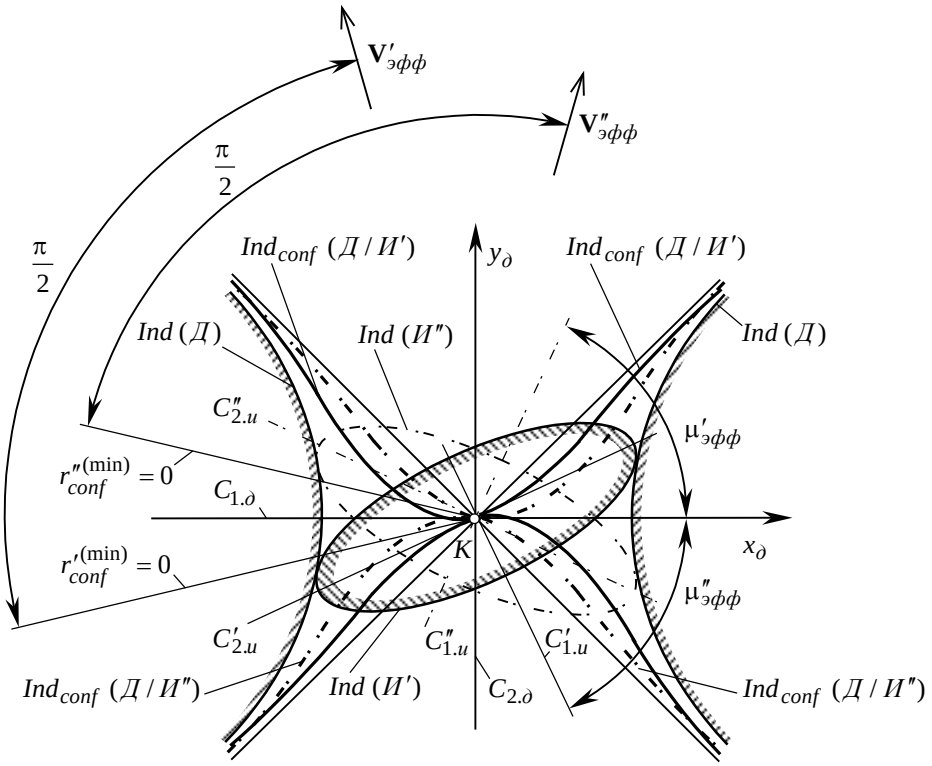


Рис. 8.20. Пример альтернативной наивыгоднейшей мгновенной кинематики формообразования.

траектории формообразования могут быть трансверсальными кривыми. При обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ в случаях, подобных (см. рис. 8.20), выбор одного из эквивалентных направлений $\mathbf{V}'_{эфф}$ или $\mathbf{V}''_{эфф}$ производится сам по себе и определяется тем, в каком направлении перемещался инструмент непосредственно перед входом его поверхности $И$ в касание с поверхностью $Д$, т.е. направлением траектории формообразования до входа инструмента в касание с поверхностью детали в особом случае рассматриваемого вида.

Случай (см. рис. 8.20) требует особого внимания, когда угол $\mu_{эфф}$ мал. При недостаточно высокой разрешающей способности система ЧПУ станком может в колебательном режиме отрабатывать оба значения угла $\mu_{эфф}$: значения $\mu'_{эфф}$ и $\mu''_{эфф}$ поочередно. Это недопустимо, поскольку неизбежно приведет к нарушению условий формообразования поверхностей деталей, в первую очередь – к нарушению третьего условия формообразования. Во избежание этого следует:

- либо с заданной точкой на поверхности $Д$ детали ввести в касание точку исходной инструментальной поверхности $И$ с такими значениями главных радиусов кривизны, при которых величина угла $\mu_{эфф}$ достаточна для исключения отработки системой ЧПУ станком другого (альтернативного) его значения. Такое решение возможно, если оно не связано с нарушением имеющихся ограничений на параметры процесса формообразования;
- либо обрабатывать деталь на станке, система ЧПУ которого имеет достаточно высокую разрешающую способность.

8.4.2.3. Две и более точек касания поверхности детали и исходной инстурментальной поверхности. Еще одна особенность решения задачи синтеза локального формообразования имеет место при касании поверхности детали и исходной инструментальной поверхности одновременно в двух и более точках.

В каждой из двух точек K_1 и K_2 касания поверностей $Д$ и $И$ должно выполняться условие контакта: $\mathbf{N}_{д.1} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma.1} = 0$ и $\mathbf{N}_{д.2} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma.2} = 0$, где $\mathbf{N}_{д.1}$ и $\mathbf{N}_{д.2}$ – векторы нормалей к поверхности детали, а $\mathbf{V}_{\Sigma.1}$ и $\mathbf{V}_{\Sigma.2}$ –

векторы мгновенной результирующей скорости движения исходной инструментальной поверхности относительно поверхности детали в точках K_1 и K_2 соответственно. Очевидно, что в рассматриваемом случае нормали $\mathbf{N}_{\partial.1}$ и $\mathbf{N}_{\partial.2}$ не должны быть взаимно параллельными.

Чтобы условие контакта выполнялось в каждой из точек K_1 и K_2, мгновенная скорость движения инструмента относительно детали должна быть направлена вдоль линии пересечения плоскостей, касательных к $Д$ в точках K_1 и K_2. Для этого единичный вектор $\mathbf{v}_\Sigma$ скорости относительного движения должен быть равна: $\mathbf{v}_\Sigma = \dfrac{\mathbf{V}_{\Sigma.1}}{|\mathbf{V}_{\Sigma.1}|} = \dfrac{\mathbf{V}_{\Sigma.2}}{|\mathbf{V}_{\Sigma.2}|} = \dfrac{\mathbf{N}_{\partial.1} \times \mathbf{N}_{\partial.2}}{|\mathbf{N}_{\partial.1}| \cdot |\mathbf{N}_{\partial.2}|} = \mathbf{n}_{\partial.1} \times \mathbf{n}_{\partial.2}$.

Если поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой в трех и более точках одновременно, то их относительное движение возможно только если касательные плоскости к поверхности детали во всех точках ее касания с исходной инструментальной поверхностью пересекаются вдоль одной общей линии. Результирующее мгновенное перемещение поверхности $И$ относительно поверхности $Д$ допустимого только в направлении, параллельном этой прямой.

8.4.3. Обобщение задачи синтеза локального формообразования поверхностей деталей. Рассмотренное выше решение задачи синтеза локального формообразования основано на использовании в качестве критерия эффективности обработки вместо производительности локального формообразования ее геометрических аналогов – функций конформности. Это решение задачи синтеза является точным, когда при дискретном формообразовании на поверхности детали образуются остаточные гребешки только высотой $h_П$ (вследствие дискретности подачи $S_П$ поперек строки формообразования) – гребешки высотой h_B (вследствие дискретности подачи на зуб при перемещении инструмента вдоль строки формообразования) либо не образуются, либо этой составляющей результирующей погрешности h_Σ формообразования можно пренебречь.

Остаточные гребешки только высотой $h_П$ на поверхности $Д$ детали образуются только в случае применения инструментов, полностью (или почти полностью) воспроизведящих исходную инструментальную поверхность.

Полное воспроизведение исходной инструментальной поверхности $И$ в реальном инструменте характерно для абразивных инструментов, для некоторых видов инструментов, предназначенных для поверхностного пластического деформирования, а почти полное – для некоторых видов лезвийных инструментов с большим количеством близко расположенных одна к другой режущих кромок, как это имеет место, например, у дисковых шеверов. В случаях, когда в силу имеющихся ограничений подача S_B инструмента вдоль строки формообразования много меньше его подачи $S_П$ поперек строки формообразования ($S_П >> S_B$) или когда составляющая h_B не учитывается при расчете высоты остаточных гребешков, полученные выше результаты применимы также и при использовании лезвийных инструментов других конструкций (фасонных фрез и пр.).

Вследствие того, что в процессе многокоординатной обработки сложных поверхностей деталей обычно выполняется условие $S_П >> S_B$, темп воспроизведения поверхности $Д$ вдоль и поперек строки формообразования различный: обычно обработка производится с увеличенной подачей $S_П$ на строку формообразования за счет уменьшения при этом подачи (на зуб инструмента) S_B вдоль строки формообразования, критические значения которых ограничены максимально допустимой высотой остаточных гребешков на поверхности детали (см. выше, раздел 8.2.3). В указанных случаях движение формообразования должно быть направлено ортогонально плоскому нормальному сечению, в котором степень конформности поверхности $И$ инструмента к поверхности $Д$ детали наибольшая.

Однако многообразие применяемых и потенциально возможных способов формообразующей обработки деталей в машиностроении не исчерпывается случаями обработки, когда $S_П >> S_B$.

Возможны случаи, когда для повышения эффективности обработки оказывается целесообразным предельно увеличивать в первую очередь величину подачи S_B вдоль строки формообразования, соответственно уменьшив при этом величину подачи $S_П$ на строку формообразования. В этом случае движение формообразования следует направлять не перпендикулярно наименьшему $d_{conf}^{(\min)}$, а вдоль наибольшего диаметра $d_{conf}^{(\max)}$ индикатрисы конформности (83).

Направления измерения экстремальных значений диаметров $d_{conf}^{(\min)}$ и $d_{conf}^{(\max)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д / И\right)$ в общем случае взаимно неортогональны. Поэтому если при обработке детали лезвийным инструментом (в случае, когда подачи S_B и $S_{П}$ соизмеримы по величине) направить движение формообразования ортогонально направлению измерения наименьшего диаметра $d_{conf}^{(\min)}$, вследствие неизбежного уменьшения при этом допустимого значения подачи S_B вдоль строки формообразования мгновенная производительность $P_{ф}$ формообразования уменьшится. Если движение формообразования направить вдоль направления измерения наибольшего диаметра $d_{conf}^{(\max)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д / И\right)$, то вследствие неизбежного уменьшения при этом допустимого значения подачи $S_{П}$ поперек строки формообразования, производительность $P_{ф}$ также уменьшится. В общем случае не существует такого направления движения формообразования, в котором подачи S_B и $S_{П}$ одновременно достигают своего максимального значения.

В общем случае, когда величины подач S_B и $S_{П}$ соизмеримы, задачу синтеза локального формообразования следует решать исходя из применения непосредственно соответствующего аналитически описанного критерия эффективности обработки.

Если в качестве такого критерия эффективности используется локальная производительность формообразования, то наивыгоднейшее значение $\mu_{эфф}$ угла относительной локальной ориентации детали и инструмента равно тому из корней уравнения $\frac{\partial P_{ф}}{\partial \mu}=0$, который удовлетворяет условию $\frac{\partial^2 P_{ф}}{\partial \varphi^2}<0$. Аналогично рассчитывается величина угла $\xi_{эфф}$, определяющего наивыгоднейшее направление движения формообразования. Этот угол расчитывается по формуле $\xi_{эфф}=\varphi_{эфф}+\frac{\pi}{2}$, где угол $\varphi_{эфф}$ равен тому из корней уравнения $\frac{\partial P_{ф}}{\partial \varphi}=0$, который удовлетворяет условию $\frac{\partial^2 P_{ф}}{\partial \varphi^2}<0$.

Если в каждый момент времени достигается максимальное значение мгновенной производительности формообразования, время обработки всего участка поверхности детали окажется наименьшим, а результирующая производительность формообразования максимальной. Или в более общей трактовке: если в текущей точке траектории формообразования поддерживать заданный экстремум используемого критерия эффективности обработки, результирующая эффективность обработки будет наиболее высокой.

Как следует из изложенного, обобщение задачи синтеза локального формообразования предполагает непосредственное использование аналитически описанных критериев эффективности обработки, для которых адекватные геометрические аналоги в настоящее время не разработаны. Поэтому потенциально возможный обобщенный подход к решению задачи синтеза локального формообразования в данной монографии не развивается. В сформулированной постановке эта проблема выходит за рамки предмета данного исследования, посвященного развитию собственно дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей деталей. Вместе с тем обобщение и развитие задачи синтеза локального формообразования поверхностей деталей представляет интерес, в частности, потому, что использование полученных на этой основе результатов является целесообразным для *количественной* оценки и сопоставления эффективности различных методов формообразования, как уже применяемых в промышленности, так и перспективных (Смирнов А.И., 1982), в частности новых методов лезвийной обработки (Ермаков Ю.М. 1983): фрезострогания, фрезоточения и др., которые нельзя отнести к традиционным.

8.4.4. Примеры технически рашений, созданных на основе результатов решения задачи синтеза локального формообразования. Использование в той или в иной мере результатов решения задачи синтеза локального формообразования поверхностей деталей позволило создать ряд способов обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ и деталей обшемашиностроительного назначения на металлообрабатывающем оборудовании, воспроизводящем "*жесткую*" кинематику формообразования. Некоторые из способов разработаны в рамках дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей деталей, другие – с учетом обобщения задачи синтеза локального формообразования.

Пример 8.13. В способе[1] обработки сложных поверхностей деталей параметры кинематики формообразования установлены исходя из использования в качестве критерия эффективности обработки непосредственно производительности формообразования, а не ее геометрического аналога – индикатрисы конформности. По этому способу обработка детали производится лезвийным инструментом, которому сообщают движение построчного огибания.

Сущность этого способа удобно рассмотреть, используя схему (рис. 8.21), на которой показаны расположенные в общей для поверхности детали и исходной инструментальной поверхности кательной плоскости характерные направления, ориентированные относительно следов главных сечений $C_{1.\partial}$ и $C_{21.\partial}$ поверхности детали.

Прямая 1 проходит под углом $\varphi_{эфф}$ к следу $C_{1.\partial}$ первого главного сечения поверхности $Д$ и является следом проходящего через точку K касания поверхностей $Д$ и $И$ плоского нормального сечения, в котором измеряется минимальный диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$. Прямая 2 – это след плоского нормального сечения поверхностей $Д$ и $И$, расположеного перпендикулярно следу 1. Направление измерения наибольшего диаметра $d_{conf}^{(\max)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ совпадает с прямой 3. Движение формообразования $\mathbf{S}_B$ направлено под углом $\xi_{эфф}$ к следу первого главного сечения $C_{1.\partial}$ поверхности $Д$. Наивыгоднейшую величину этого угла требуется определить.

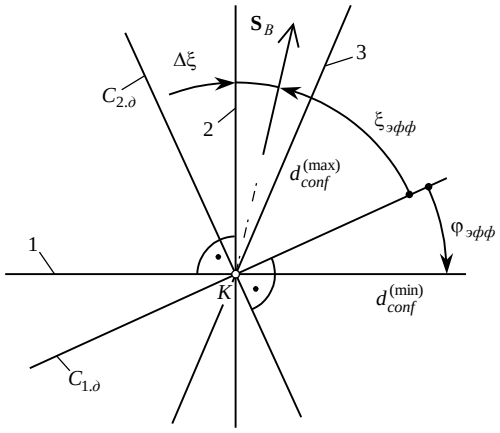


Рис. 8.21. К способу обработки сложных поверхностей деталей (а.с. №1367300).

Мгновенная производительность формообразования P_{ϕ} зависит от текущих значений подач инструмента вдоль $S_B = |\mathbf{S}_B|$ и поперек $S_{П} = |\mathbf{S}_{П}|$ строки формообразовани и от величины угла θ между направлениями этих подач. Рассматривается случай обработки, когда величины подач S_B и $S_{П}$ соизмеримы между собой.

Текущее значение S_B подачи вдоль строки формообразования является функцией величины угла μ относительной локальной ориентации детали и инструмента, значений нормальных радиусов кривизны $R_{\partial.B}$ и $R_{и.B}$ поверхностей $Д$ и $И$, измеренных в одном и том же плоском нормальном сечении, касательном к траектории формообразования, и от направления движения формообразования $\mathbf{S}_B$, осуществляемого под некоторым углом ξ, т.е.: $S_B = S_B(\mu; R_{\partial.B}; R_{и.B}; \xi)$.

Аналогичное справедливо относительно текущего значение $S_{П}$ ширины строки формообразования, которое является функцией величины угла μ относительной локальной ориентации, значений нормальных радиусов кривизны $R_{\partial.П}$ и $R_{и.П}$ поверхностей $Д$ и $И$, измеренных в плоском нормальном сечении, ортогональном траектории формообразования, и от направления движения формообразования $\mathbf{S}_B$, т.е.: $S_{П} = S_{П}(\mu; R_{\partial.П}; R_{и.П}; \xi)$.

В общем случае направление, в котором измеряется минимальный диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$, и направление наибольшей предельно допустимой точностью формообразования подачи на зуб S_B вдоль строки формообразования взаимно не ортогональны. Поэтому мгновенная производительность формообразования в общем случае аналитически описывается функцией вида: $P_{\phi} = S_B \cdot S_{П} \sin\theta = P_{\phi}(\mu; R_{\partial.П}; R_{и.П}; R_{\partial.B}; R_{и.B}; \xi; \theta)$.

Если обработку детали производить так, чтобы движение формообразования $\mathbf{S}_B$ было направлено ортогонально направлению измерения наименьшего диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ и тем самым обеспечить наибольшее текущее значение ширины $S_{П}$ строки формообразования, то вследствие уменьшения при этом допустимого значения подачи S_B на зуб инструмента, производительность формообразования P_{ϕ} будет меньше ее предельно достижимого максимального значения.

Если производить обработку поверхности $Д$ так, чтобы движение формообразования $\mathbf{S}_B$ было направлено вдоль направления измерения наибольшего диаметра $d_{conf}^{(\max)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ и тем самым обеспечить наибольшее текущее значение подачи S_B на зуб, то вследствие уменьшения при этом допустимого значения ширины $S_{П}$ строки формообразования, производительность формообразования P_{ϕ} также будет меньше ее предельно достижимого максимального значения.

В общем случае не существует такого направления движения формообразования $\mathbf{S}_B$, при движении в котором параметры S_B и $S_{П}$ одновременно достигают своего максимального значения. Кинематика обработки сложной поверхности детали, при которой достигается максимальное значение одного из параметров S_B или $S_{П}$, не обеспечивает достижения наибольшей производительности формообразования P_{ϕ}.

---

[1] А.с. №1367300 (СССР). *Способ обработки сложных поверхностей деталей*./С.П.Радзевич. – Заявлено 30 января 1986 г. - МКИ[4] В 23 С 3/16.

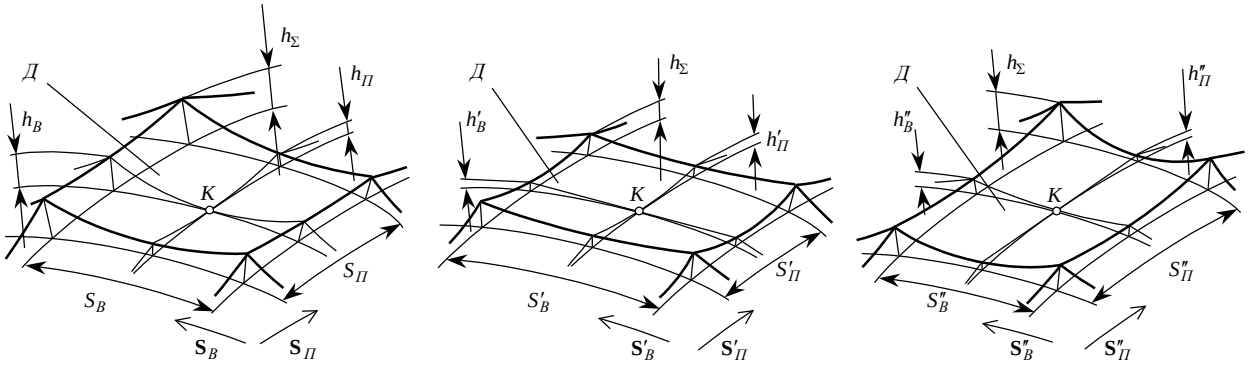


Рис. 8.22. К способу обработки сложных поверхностей деталей (пат. №2050228).

Чтобы достичь максимума производительности формообразования P_ϕ , необходимо, чтобы движение формообразования $\mathbf{S}_B$ было направлено под таким углом $\xi_{эфф}$ к первому главному сечению $C_{1.д}$ поверхности $Д$, при котором выполняется условие $\frac{\partial P_\phi}{\partial \xi} = 0$. Чтобы найденное из этого уравнения значение угла ξ соответствовало именно наибольшему, а не иному экстремальному значению производительности формообразования P_ϕ , необходимо из всех стационарных значений угла ξ выбрать то, при котором выполняется соотношение $\frac{\partial^2 P_\phi}{\partial \xi^2} < 0$. При этом безразлично, острым или тупым окажется найденный угол $\xi_{эфф}$. Направление движения формообразования $\mathbf{S}_B$ в рассматриваемом случае составляет некоторый угол $\Delta\xi$ с направлением, перпендикулярным направлению измерения наименьшего диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

При обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ в соответствие с рассматриваемым способом при прочих одинаковых условиях достигается наиболее высокая производительность обработки.

Пример 8.14. Эффективность обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ может быть повышена за счет согласования между собой величин подач инструмента вдоль и поперек строк формообразования. Для этого разработан способ[1] обработки сложных поверхностей деталей лезвийным инструментом.

Для обработки детали по этому способу инструмент, совершающий главное движение, подводят к заготовке, вводят в контакт с ней и движением формообразования $\mathbf{S}_B$ перемещают строками по номинальной поверхности детали. После окончания обработки очередной строки на поверхности $Д$ осуществляют движение подачи поперек строки формообразования на величину шага $S_П = |\mathbf{S}_П|$ между соседними строками для осуществления обработки очередной строки на поверхности детали. Необходимая для этого кинематика формообразования воспроизводится на станках, имеющих не менее трех одновременно управляемых от системы ЧПУ координат.

На точность обработки поверхности детали задается допуск $[h]$. Результирующая погрешность формообразования h_Σ не должна превышать допуск на точность поверхности $Д$, т.е. всегда должно выполняться соотношение $h_\Sigma \le [h]$.

В результате точечного касания исходной инструментальной поверхности $И$ с номинальной поверхностью $Д$ при обработке детали лезвийным инструментом имеет место дискретное формообразование поверхности $Д$ с результирующей погрешностью h_Σ . В некотором приближении величина погрешности h_Σ определяется суммой двух составляющих: погрешностью h_B , образованной вдоль, и погрешностью $h_П$, образованной поперек строки формообразования, т.е. (рис. 8.22.1): $h_\Sigma \cong h_B + h_П$.

Мгновенное значение производительности P_ϕ формообразования сложной поверхности детали определяется текущими значениями подач S_B и $S_П$ и величиной угла θ между направлениями этих подач: $P_\phi = S_B \cdot S_П \sin\theta$.

Величина подачи на зуб S_B вдоль строки формообразования расчитывается по формуле (32):

$$S_B = 2R_{д.B} \arccos \frac{(R_{д.B} + R_{и.B})^2 + (R_{д.B} + [h_B]\operatorname{sgn} R_{д.B})^2 - R_{и.B}^2}{2(R_{д.B} + R_{и.B})(R_{д.B} + [h_B]\operatorname{sgn} R_{д.B})} .$$

[1]Пат. №2050228 (Россия). *Способ обработки сложных поверхностей деталей*./С.П.Радзевич. – Опубл. 20.12.95 в БИ, №35, 1995. - МКИ[4] В 23 С 3/16. Заявлено 25.12.1990.

Величина подачи S_{Π} инструмента поперек строки формообразования расчитывается по аналогичной формуле (25):

$$S_{\Pi} = 2R_{\partial.\Pi}\arccos\frac{(R_{\partial.\Pi}+R_{u.\Pi})^2+(R_{\partial.\Pi}+[h_{\Pi}]\operatorname{sgn}R_{\partial.\Pi})^2-R_{u.\Pi}^2}{2(R_{\partial.\Pi}+R_{u.\Pi})(R_{\partial.\Pi}+[h_{\Pi}]\operatorname{sgn}R_{\partial.\Pi})}.$$

Из $P_{\phi} = S_B \cdot S_{\Pi}\sin\theta$ следует, что для увеличения производительности формообразования следует увеличивать подачи S_B и S_{Π}.

Увеличение подачи S_B до значения S'_B (рис. 8.22.2) неизбежно ведет к увеличению составляющей h_B до значения h'_B и при заданном допуске $[h]$ (в соответствие с $h_{\Sigma} \cong h_B + h_{\Pi}$) к уменьшению h_{Π} до h'_{Π} и, как следствие, к уменьшению S_{Π} до значения S'_{Π}. Справедливо и обратное: увеличение подачи S_{Π} до значения S''_{Π} (рис. 8.22.3) ведет к увеличению составляющей h_{Π} до h''_{Π} и при заданном допуске $[h]$ к уменьшению h_B до значения h''_B и, как следствие, к уменьшению S_B до значения S''_B.

В первом случае величина подачи S_{Π} на строку формообразования уменьшается до значения S'_{Π}, а во втором – увеличивается до S''_{Π}. Одновременно с этим длина S_B формообразованной одной режущей кромкой участка строки формообразования в первом случае увеличивается до значения S'_B, а во втором – уменьшается до значения S''_B.

Поскольку увеличение подач должно быть направлено, в первую очередь, на увеличение производительности формообразования, то требуется, во-первых, величины подач S_B и S_{Π} согласовать между собой и, во-вторых, согласовать их так, чтобы наилучшим образом распределить допуск $[h]$ между составляющими $[h_B]$ и $[h_{\Pi}]$, т.е. чтобы производительность формообразования при этом достигала своего максимального значения (помним, что $[h]=[h_B]+[h_{\Pi}]$).

Чтобы распределить допуск $[h]$ наилучшим образом, выразим составляющие $[h_B]$ и $[h_{\Pi}]$ через допуск $[h]$ на результирующую погрешность формообразования h_{Σ}. Получим: $[h_{\Pi}]=c[h]$ и $[h_B]=(1-c)[h]$, где c – текущеее значение параметра распределения допуска на точность формообразования ($0 \le c \le 1$ – безразмерная величина).

Выполнив очевидные подстановки и необходимые преобразования, находим, что производительность формообразования P_{ϕ} в функции параметра "c" может быть представлена так:

$$P_{\phi}(c) = 2R_{\partial.B}R_{\partial.\Pi}\arccos\left(\frac{c^2[h]^2+cA_1[h]+A_2}{2cA_3[h]+A_4}\right)\arccos\left(\frac{c^2[h]^2-cA_5[h]+A_6}{2cA_7[h]+A_8}\right)\sin\theta .$$

Коэффициенты A_1, A_2, ..., A_8 зависят от параметров процесса формообразования, но не зависят от текущего значения параметра распределения допуска на точность формообразования.

Таким образом, мгновенная производительность формообразования P_{ϕ} является функцией подач S_B и S_{Π}; критические значения этих подач в текущей точке траектории формообразования ограничены величинами составляющих $[h_B]$ и $[h_{\Pi}]$ допуска $[h]$, которые в свою очередь могут быть представлены в функции параметра "c" распределения допуска на точность формообразования.

Величину подачи на зуб S_B согласовывают с подачей S_{Π} на очередную строку формообразования таким образом, чтобы текущее значение параметра "c" равнялось тому из корней уравнения $\frac{\partial P_{\phi}(c)}{\partial c} = 0$, при котором выполняется соотношение $\frac{\partial P_{\phi}^2(c)}{\partial c^2} < 0$. Такое согласование подач S_B и S_{Π} гарантированно приводит к увеличению производительности формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

Если ставится задача при неизменной производительности увеличить точность формообразования, это также достигается согласованием между собой величин подач S_B и S_{Π} в соответствие с рассматриваемым способом.

Пусть допуск на точность обработки локального участка поверхности некоторой детали с нормальными радиусами кривизнами $R_{\partial.B} = 100\ мм$ и $R_{\partial.\Pi} = 20\ мм$ составляет $[h]=0{,}01\ мм$. Обработка производится инструментом, нормальные радиусы кривизны локального участка исходной инструментальной поверхности которого равны $R_{u.B} = 10\ мм$ и $R_{u.\Pi} = 50\ мм$. В процессе обработки направления подач $\mathbf{S}_B$ и $\mathbf{S}_{\Pi}$ взаимно перпендикулярны (т.е. $\theta = 90^{\circ}$). Переменные A_1, A_2, ..., A_8 равны: $A_1 = 20$, $A_2 = 2800$, $A_3 = 70$, $A_4 = A_2 = 2800$, $A_5 = 100{,}01$, $A_6 = 2202{,}0001$, $A_7 = 110$, $A_8 = 1400{,}14$. С учетом этого находим, что $c = 0{,}65$, т.е. величины подач S_B и S_{Π} должны быть согласованы одна с другой исходя из того, что $[h_B]=(1-c)[h]=0{,}35[h]$ и $[h_{\Pi}]=0{,}65[h]$. Эти значения $[h_B]$ и $[h_{\Pi}]$ используются для расчета критических величин подач S_B и S_{Π} инструмента.

Значение параметра $c = 0{,}65$ позволяет расчитать соответствующую ему мгновенную производительность формообразования.

Если подачи S_B и S_{Π} не согласовывать между собой, то допуск $[h]$ между его составляющими $[h_B]$ и $[h_{\Pi}]$ распределяется произвольно и параметр "c" может принимать любое значение, например, $c = 0{,}45$. Для этого значения параметра "c" также можно расчитать мгновенную производительность формообразования. Несложный подсчеты показывают, что в рассматриваемом случае только за счет согласования подач S_B и S_{Π} в соответствие с $c = 0{,}65$ (вместо $c = 0{,}45$) производительность обработки увеличивается более, чем на 20% .

При съеме больших припусков, когда мощность, затрачиваемая на резание, может стать соизмеримой с мощностью привода главного движения (а для максимально полного использования потенциальных возможностей станка с ЧПУ к этому следует стремиться), потребуется учесть влияние на наивыгоднейшее направление движения формообразования элементов режима резания (скорости резания, величин подач, параметров срезаемого слоя, свойств обрабатываемого и инструментального материалов, жесткости технологической системы и пр.). С целью достижения возможно более высокой производительности обработки может оказаться более выгодным направить движение формообразования не перпендикулярно плоскому нормальному сечению поверхности детали и исходной инструментальной поверхности, в котором эти поверхности наиболее конформны одна к другой, а под некоторым углом к нему, но так, чтобы при полностью (или практически полностью) используемой мощности привода главного движения станка (она выступает как ограничение) достичь максимальной производительности формообразования. Гипотетически может оказаться, что для того, чтобы направить движение формообразования ортогонально направлению измерения минимального диаметра индикатрисы конформности мощность привода главного движения станка окажется недостаточной.

Пример 8.15. В соответствие со способом[1] точения фасонных поверхностей вращения текущее значение контурной подачи инструмента согласуют с кривизной образующей обрабатываемой поверхности детали и кривизной режущей кромки в текущей точке их касания. По этому способу (рис. 8.23) обрабатываемую деталь 1 вращают вокруг своей $O_д - O_д$ с некоторой постоянной угловой скоростью $\omega_д$. Инструмент 2 перемещают вдоль фасонной образующей 3 детали с переменной контурной подачей $S_{конт}$. Текущее значение подачи $S_{конт}$ устанавливают в зависимости от текущих значений радиусов кривизны $R_д$ фасонного профиля детали и радиуса R_u режущей кромки 4 инструмента исходя из соотношения:

$$S_{конт} = R_д \left\langle \arccos\left\{ \frac{(R_д + R_{u.1})^2 + (R_д + [h])^2 - R_{u.1}^2}{2(R_д + R_{u.1})(R_д + [h])} \right\} + \arccos\left\{ \frac{(R_д + R_{u.2})^2 + (R_д + [h])^2 - R_{u.2}^2}{2(R_д + R_{u.2})(R_д + [h])} \right\} \right\rangle ,$$

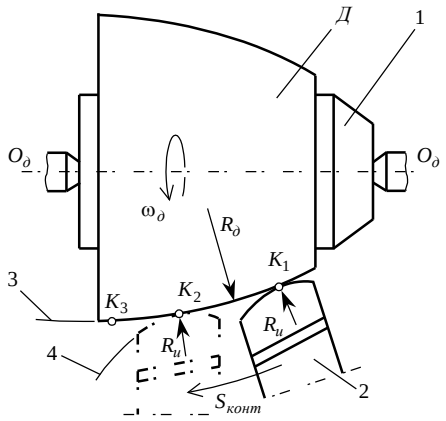


Рис. 8.23. Схема способа точения фасонных поверхностей вращения (а.с. №1708522).

где $R_д$ – радиус кривизны фасонной образующей поверхности обрабатываемой детали в текущей точке ее касания с режущей кромкой инструмента (значение $R_д$ находится в интервале от $R_д^{(K_1)}$ в точке K_1 до $R_д^{(K_2)}$ в точке K_2 и некоторым образом выбирается из этого интервала его значений);

$R_{u.1}$ и $R_{u.2}$ – радиусы кривизны режущей кромки инструмента в двух соседних точках K_1 и K_2 ее касания с образующей поверхности детали;

$[h]$ – допуск на точность формообразования фасонной поверхности детали.

При обработке поверхности детали инструментом с круговой режущей кромкой, радиус R_u которой во всех точках одинаков, текущее значение контурной подачи расчитывается по упрощенной формуле:

$$S_{конт} = 2R_д \arccos\left\{ \frac{(R_д + R_u)^2 + (R_д + [h])^2 - R_u^2}{2(R_д + R_u)(R_д + [h])} \right\} .$$

Приведенные формулы получены исходя из допущения, что в пределах дуги K_iK_{i+1} между двумя соседними точками касания образующей поверхности $Д$ детали и режущей кромки инструмента (в пределах дуг K_1K_2, K_2K_3 и т.д.) ради-ус кривизны образующей поверхности детали постоянен, а радиус кривизны режущей кромки равен его значению в текущей точке K_i (здесь i – порядковый номер точки касания образующей поверхности $Д$ и режущей кромки).

Поддержание текущего значения контурной подачи согласованным с текущими значениями параметров кривизны поверхности детали и режущей кромки инструмента позволяет увеличить производительность обработки фасонных поверхностей вращения на токарных станках с ЧПУ.

Пример 8.16. По результатам решения задачи синтеза локального формообразования поверхностей деталей может быть решена задача синтеза наивыгоднейшего процесса чистовой обработки дисковыми обкаточными инструментами (дисковыми и абразивными шеаерами) цилиндрических зубчатых колес с прямыми и винтовыми зубьями.

---

[1] А.с. №1708522 (СССР). *Способ точения фасонных поверхностей*./С.П.Радзевич и Л.В.Бондаренко. – Опубл. в Б.И. №4, 1992. МКИ^4 В 23 В 1/00. Заявлено 13 декабря 1988 г.

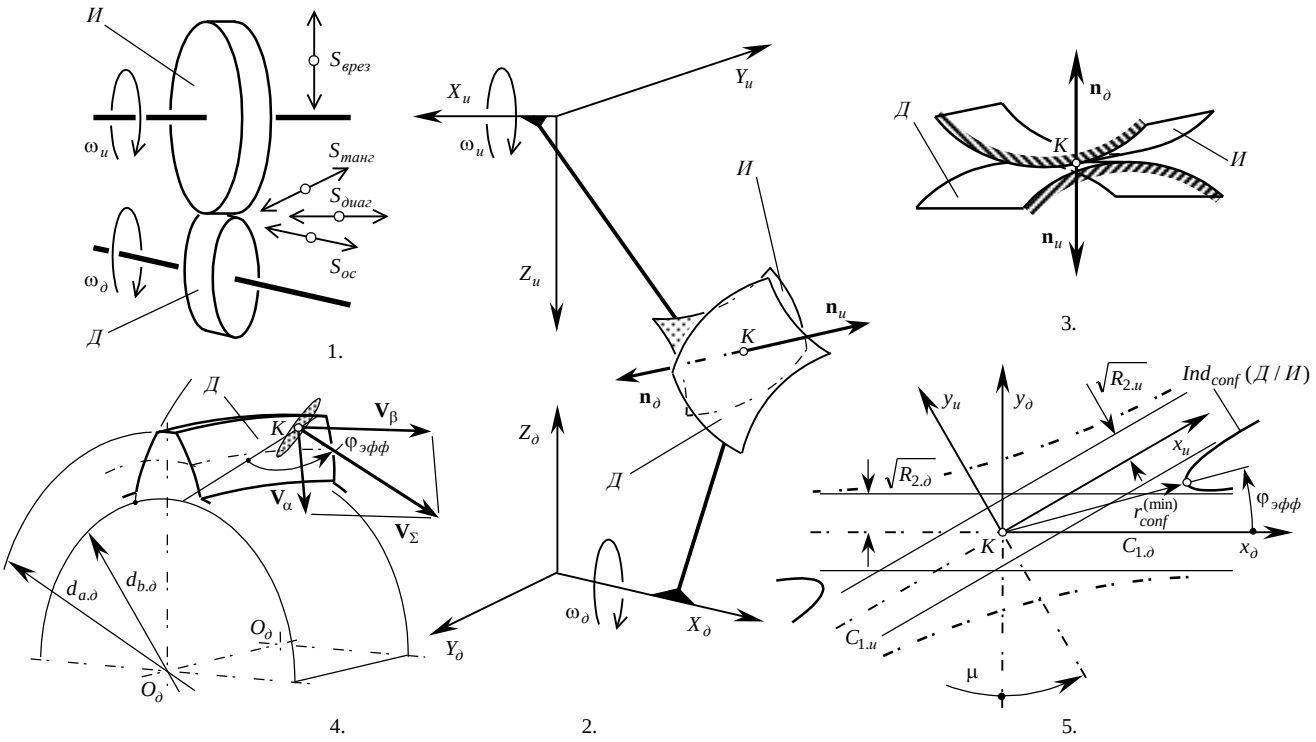


Рис. 8.24. Синтез наивыгоднейшего шевингования цилиндрических зубчатых колес.

При шевинговании обрабатываемое зубчатое колесо вращается вокруг своей оси с некоторой постоянной угловой скоростью $\omega_д$ (рис. 8.24.1). Дисковый шевер вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\omega_и$, величина которой согласована с угловой скоростью $\omega_д$. Оси вращения детали и инструмента перекрещиваютя под некоторым углом, величина которого определяется величинами и знаком углов наклона зубьев колеса и инструмента. Кроме того, инструменту сообщают движение подачи относительно детали.

В зависимости от направления возвратно-поступательного движения подачи различают четыре основных метода шевингования:

- освевое шевингование, при котором движение подачи $S_{ос}$ направлено вдоль оси обрабатываемого колеса;

- диагональное шевингование, при котором движение подачи $S_{диаг}$ направлено под углом к оси вращения детали;

- тангенциальное шевингование, при котором движение подачи $S_{танг}$ направлено под прямым углом к оси вращения детали;

- врезное шевингование, при котором движение подачи $S_{врез}$ направлено вдоль межосевого перпендикуляра “деталь-инструмент”.

Решение задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования рассмотрим на примере диагонального метода шевингования цилиндрических зубчатых колес. Полученнные результаты могут быть затем распространены на другие методы шевингования.

Задача синтеза наивыгоднейшего шевингования решается на основе общего подхода – как задача синтеза наивыгоднейшего формообразования сложной поверхности детали. Разница заключается в том, что при шевинговании движения ориентирования инструмента вырождаются в конструктивные движения, а сложное многопараметрическое относительное движение детали и инструмента воспроизводится с ограничениями – вращениями зубчатого колеса и инструмента вокруг перекрещивающихся осей и диагональной подачей.

Структуру решения задачи синтеза удобно представить так. Поверхность, отстоящую от номинальной обрабабываемой поверхности зуба колеса на величину припуска на обработку, назовем *поверхностью припуска*. Если номинальную (заданную чертежом) поверхность зуба колеса ввести в касание с исходной инструментальной поверхностью зуба дискового шевера, последняя пересечет поверхность припуска по некоторой замкнутой кривой, близкой к эллипсу. Для уменьшения сил резания при зубошевинговании площадь указанного “эллипса” должна быть по возможности меньшей. Тогда для достижения требуемого давления в зоне обработки потребуются меньшие усилия, всегда приводящие к большему или к меньшему деформированию технологической системы. Это во-первых. Во-вторых, при зубошевинговании имеет место точечное касание номинальной поверхности зуба колеса и исходной инструментальной поверхности дискового шевера, следствием чего является дискретное (частичное) формообразование поверхностей зубьев детали – строками. Для увеличения ширины строки формообразования (и таким путем увеличения производительности обработки) требуется, чтобы большая ось “эллипса” была по возможности длиннее. Если стремиться одновременно обеспечить выполнение обеих конкурирующих требований, а именно: возможно меньшую площадь “эллипса” и возможно большую длину его большей оси, то очевидно, что при таком подходе “эллипс” должен быть по возможности уже и длиннее, а относительное движение детали и инструмента в процессе обработки должно быть направлено ортогонально большей оси “эллипса”.

Управлять параметрами “эллипса” можно путем изменения конструктивных параметров дискового шевера (рис. 8.24.4, где “эллипс” намеренно показан непропорционально увеличенным). Управлять направлением относительного движения детали и инструмента в

процессе обработки можно как путем изменения конструктивных параметров дискового шевера, так и путем согласования величины и направления движения подачи с частотой вращения детали и инструмента.

В рассматриваемой постановке решением задачи синтеза являются две группы параметров:

- конструктивные параметры наивыгоднейшего инструмента (число зубьев, угол профиля, угол наклона зубьев, ширина зубчатого венца, коэффициента смещения исходного контура и др.);
- кинематические параметры станочного зацепленинния (направление и величина скорости движения подачи, согласованной с частотой вращения детали и инструмента).

Для решения задачи синтеза необходима точная и однозначная информация о геометрии обрабатываемой поверхности $Д$ зубьев цилиндрического зубчатого колеса (см. выше, Пример 1.3, с. 62-64).

Чтобы решить задачу синтеза локального формообразования, достаточно рассмотреть геометрию касания и кинематику формообразования в окрестности текущей точки K касания поверхности $Д$ зуба колеса и исходной инструментальной поверхности $И$ дискового шевера (рис. 8.24.2).

Следствием того, что поверхности $Д$ и $И$ являются эвольвентными винтовыми поверхностями, их локальные участки в дифференциальной окрестности точки K представляют собой параболические локальные участки.

Геометрия касания поверхностей $Д$ и $И$ описывается индикатрисой конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ поверхностей $Д$ и $И$ (4.83).

Из установленных выше свойств индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ следует, что в дифференциальной окрестности точки K направление измерения минимального диаметра действительных ветвей этой характеристической кривой показывает направление наиболее полного прилегания поверхностей $Д$ и $И$ одна к другой. Производительность формообразования рабочих поверхностей зубьев детали в процессе шевингования достигает своего максимального значения только в случае, когда ширина каждой строки формообразования максимальна. Это возможно, когда в станочном зацеплении “деталь-инструмент” направление относительного перемещения поверхностей $Д$ и $И$ перпендикулярно направлению измерения минимального диаметра действительных ветвей индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$.

Исходя из того, что при шевинговании направление вектора скорости относительного движения детали и инструмента должно быть ортогональным направлению измерения минимального диаметра $d_{conf}^{(\min)} = 2r_{conf}^{(\min)}$ действительных ветвей индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$, можно расчитать наивыгоднейшие значения конструктивных параметров дискового шевера. Для этого необходимо установить относительную ориентацию поверхностей $Д$ и $И$ в точке K их касания, которая определяется углом μ между прямолинейными образующими (между $U_д$ – и $U_и$ – линиями) эвольвентных винтовых боковых поверхностей зубьев детали и инструмента. Величина угла μ относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$ расчитывается по формуле (Палагута В.П., 1987, 1995):

$$\sin\mu = \frac{\sin\alpha\,\sin\Sigma}{\sqrt{(1-\cos^2\alpha\,\sin^2\beta_д)(1-\cos^2\alpha\,\sin^2\beta_и)}}\,.$$

Это уравнение в сжатой форме содержит всю информацию, необходимую для расчета наивыгоднейших значений конструктивных параметров дискового шевера, который следует использовать для обработки заданной детали. Совокупность этих параметров составляет первую группу параметров, получаемых как результат решения задачи синтеза локального формообразования.

После подстановки в уравнение (4.83) индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ полученного наивыгоднейшего значения угла $\mu_{эфф}$ относительной локальной ориентации и значений гауссовых коэффициентов $E_д$, $F_д$, $G_д$, $L_д$, $M_д$, $N_д$ и $E_и$, $F_и$, $G_и$, $L_и$, $M_и$, $N_и$ для эвольвентных винтовых поверхностей $Д$ и $И$ (см. выше, пример 1.3, с. 62-64) в локальной системе координат получим:

$$r_{conf} = \frac{\sqrt{R_{2.д}}}{\sin\varphi} + \frac{\sqrt{R_{2.и}}}{\sin(\mu-\varphi)}\,.$$

Это уравнение в сжатой форме содержит всю информацию, необходимую для расчета наивыгоднейших значений параметров кинематики формообразования. Совокупность этих параметров составляет вторую группу параметров, получаемых как результат решения задачи синтеза локального формообразования.

На рис. 8.24.5 показана индикатриса конформности $Ind_{conf}\left(Д/И\right)$ для случая касания двух эвольвентных винтовых поверхностей $Д$ и $И$, что имеет место при диагональном зубошевинговании.

Вектор скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ скольжения зубьев в станочном зацеплении расположен в общей для поверхностей $Д$ и $И$ касательной плоскости, которая совпадает с боковой плоскостью зубьев вспомогательной производящей рейки $T_д$, а его величина и направление зависят от угла перекрещивания осей вращения детали инструмента, величины передаточного отношения в станочном зацеплении и от положения текущей точки по высоте зуба детали. Результирующую скорость $\mathbf{V}_\Sigma$ скольжения зубьев детали и инструмента в текущей точке K удобно разложить на две составляющие $\mathbf{V}_\Sigma = \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{V}_\beta$, одна из которых представляет собой скорость профильного скольжения $\mathbf{V}_\alpha$, а другая – скорость скольжения $\mathbf{V}_\beta$ в направлении зубьев колеса. Варьируя параметры процесса формообразования, можно изменять направление скорости скольжения $\mathbf{V}_\Sigma$ поверхностей зубьев детали и инструмента в процессе обработки.

В процессе формообразования кроме скорости скольжения $\mathbf{V}_\Sigma$ в воспроизводимой в станочном зацеплении винтовой зубчатой передаче “деталь-инструмент” на величину и направление вектора скорости резания оказывает влияние вектор скорости подачи $\mathbf{V}_s$, направленный параллельно плоскости, касательной к начальным цилиндрам зубчатого колеса и дискового шевера, и составляющий некоторый угол с осью вращения зубчатого колеса.

Наивыгоднейшее направление вектора скорости резания $\mathbf{V}_{рез}$ определяется с учетом того, что $\mathbf{V}_{рез} = \mathbf{V}_\Sigma + \mathbf{V}_s$. Этот вектор должен быть перпендикулярным направлению измерения минимальнго диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ действительных ветвей индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ поверхностей $Д$ и $И$. Исходя из этого устанавливается характер согласования частоты вращения дискового шевера с величиной и направлением скорости движения подачи стола станка.

Анализ полученных результатов показывает, что несмотря на то, что обе поверхности $Д$ и $И$ выпуклы, направления строк формообразования не совпадают с направлениями линий кривизны на $Д$.

На основе изложенного разработан алгоритм САПР технологического процесса чистовой обработки цилиндрических зубчатых колес дисковыми обкаточными инструментами (Радзевич С.П., Палагута В.А., 1988).

8.5. Синтез регионального формообразования поверхностей деталей

Совокупность наивыгоднейших направлений движения формообразования определяет наивыгоднейшую траекторию движения инструмента по поверхности детали. Расчет параметров наивыгоденейшей траектории формообразования составляет сущность решения задачи синтеза регионального формообразования.

Аналогично траектории перемещения программируемой точки, параметры траектории формообразования могут быть установлены исходя из выполнения условия: Булево отсечение от заготовки обрабатываемой детали объема, занимаемого последовательными положениями инструмента при отработке станком с ЧПУ управляющей программы, формирует поверхность, отклоняющуюся от номинальной поверхности детали не более, чем на величину допуска на точность обработки.

Как и при решении задачи синтеза локального формообразования, при решении задачи синтеза регионального формообразования обрабатываемый участок сложной поверхности $Д$ детали рассматривается как неограниченный – при региональном формообразовании влияние “краевого эффекта” на эффективность процесса обработки не учитывается.

8.5.1. Наивыгоднейшие траектории формообразования. Под наивыгоднейшей траекторией формообразования понимается такая траектория, при движении инструмента вдоль которой текущее значение ширины строки формообразования максимально, а формообразованная при этом площадь строки на поверхности детали при прочих одинаковых условиях наибольшая.

Чтобы расчитать параметры наивыгоднейшей траектории формообразования при обработке сложной поверхности детали на многокоординатном станке с ЧПУ, исходим из условия достижения максимальной производительности регионального формообразования. В такой постановке необходимым условием решения задачи синтеза регионального формообразования является поддержание наибольшей ширины строки формообразования в текущей точке $К$ касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности.

Одним из результатов решения задачи синтеза локального формообразования (см. выше, раздел 8.4) является установленое наивыгоднейшее направление движения формообразования и соответствующее ему текущее значение ширины строки формообразования. Для решения этой задачи использована индикатриса конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$ применяемого инструмента (4.83).

Текущее значение мгновенной производительности формообразования вдоль строки формообразования переменно. Для увеличения региональной производительности формообразования значение локальной производительности (в текущей точке на поверхности $Д$ детали) должно поддерживаться возможно большим, в пределе – равном своему экстремальному значению.

Текущее значение ширины строки формообразования максимально, если траектория формообразования в каждой своей точке направлена ортогонально направлению измерения наименьшего диаметра $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$.

Из этого следуют принципиально важный вывод: в общем случае задачу синтеза регионального формообразования нельзя рассматривать вне связи с формой и параметрами поверхности $И$ применяемого инструмента. Поэтому для достижения максимума производительности формообразования обработка заданной

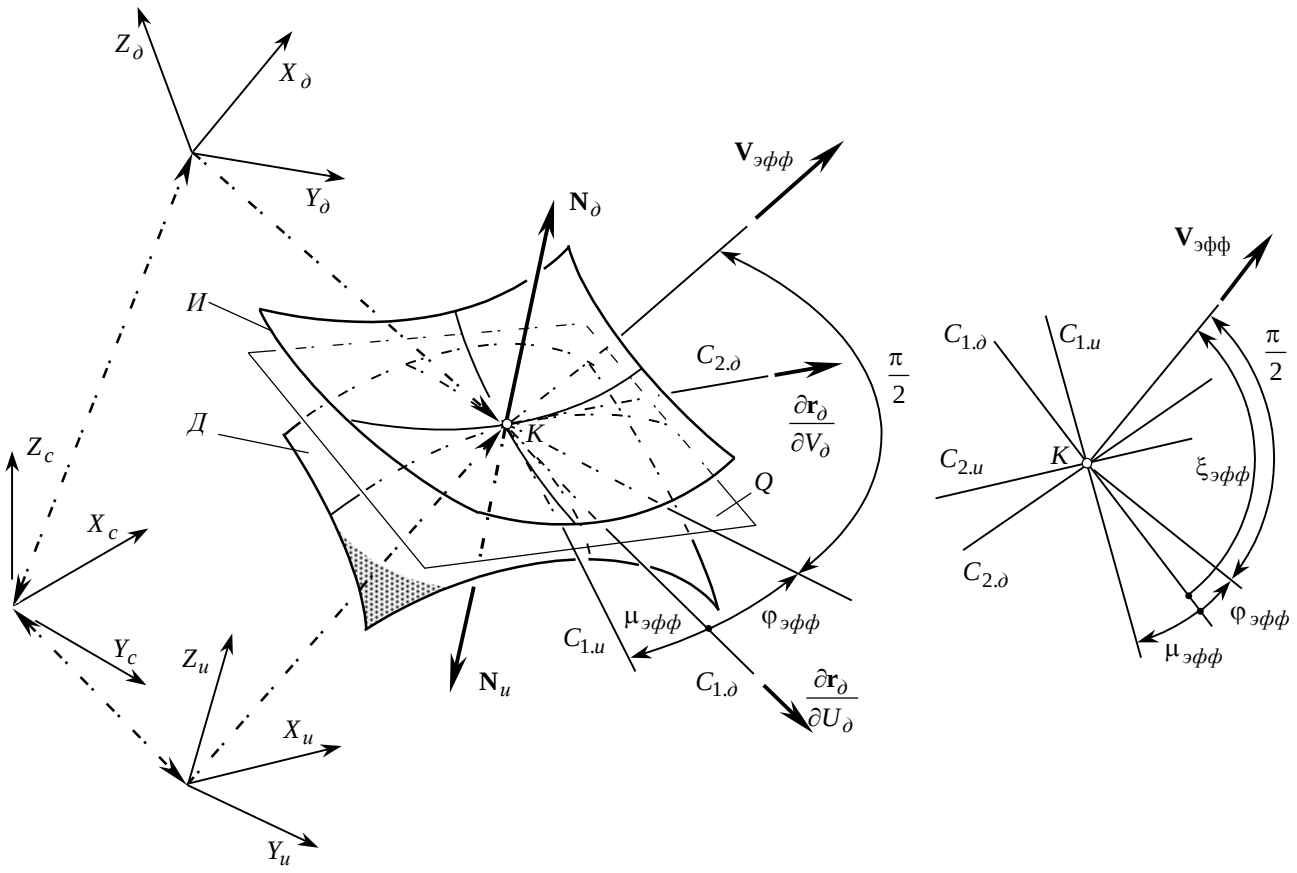


Рис. 8.25. К расчету параметров наивыгоднейшей траектории формообразования сложной поверхности детали на многокоординатном станке с ЧПУ.

сложной поверхности детали должна производиться своим фасонным инструментом: в противном случае увеличение производительности формообразования не достигнет своего предельного значения.

В системе координат $X_cY_cZ_c$ многокоординатного станка с ЧПУ рассмотрим относительное расположение поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$ и элементы кинематики их относительного движения в процессе формообразования. В обшей для поверхностей $Д$ и $И$ касательной плоскости наивыгоднейшее направление движения формообразования определяется величиной угла $\xi_{эфф}$, который оно составляет с первым главным сечением $C_{1.\partial}$ поверхности $Д$ детали (см. выше).

В процессе формообразования поверхность $И$ инструмента постоянно касается поверхности $Д$ обрабатываемой детали. В относительном движении эти поверхности являются взаимоогибаемыми и перекатываются одна по другой со скольжением. Как взаимоогибаемые поверхности они имеют в точке (в точках) касания общую касательную плоскость и контактную нормаль. Взаимодействие поверхностей $Д$ и $И$ в процессе формообразования можно рассматривать как вырожденный случай зацепления: в реальном зацеплении имеются две сопрягаемые поверхности и поверхность зацепления – в процессе формообразования поверхность зацепления совпадает с поверхностью $Д$ детали, а в процессе профилирования инструмента она совпадает с исходной инструментальной поверхностью $И$.

В момент формообразования в обязательном порядке выполняется условие касания поверхностей $Д$ и $И$, которое обычно записывается в форме: $\mathbf{N}_{\partial-u} \cdot \mathbf{V}_\Sigma = 0$. Поэтому вектор $\mathbf{V}_\Sigma$ результирующей скорости движения формообразования расположен в общей для поверхностей $Д$ и $И$ касательной плоскости. Если исходить из того, что поверхность детали задана векторным уравнением вида $\mathbf{r}_\partial = \mathbf{r}_\partial(U_\partial, V_\partial)$, (здесь

$(U_\partial, V_\partial) \in G$), положение касательной плоскости Q, в которой расположен вектор скорости $\mathbf{V}_{эфф}$ (рис. 8.25), определяется двумя проходящими через точку K пересекающимися прямыми. Одна из них расположена касательно к координатной U_∂ – линии, а другая – касательно к координатной V_∂ – линии. Направления этих касательных задаются ортами

$$\mathbf{i}_\partial^{(K)} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right|} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{j}_\partial^{(K)} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|}, \tag{8.56}$$

которые служат ортами подвижной локальной системы координат $x_\partial^{(K)} y_\partial^{(K)} z_\partial^{(K)}$ с началом в точке K.

В точке K нормаль $\mathbf{N}_\partial$ к поверхности $Д$ определяет направление третьей оси – оси аппликат $z_\partial^{(K)}$ системы координат $x_\partial^{(K)} y_\partial^{(K)} z_\partial^{(K)}$.

Нормаль к поверхности ортогональна любой паре проходящих через точку K неколлинеарных касательных прямых, в частности, она ортогональна касательным прямым с ортами (56). Следовательно, орт оси аппликат равен

$$\mathbf{k}_\partial^{(K)} \equiv \mathbf{n}_\partial^{(K)} = \frac{\mathbf{N}_\partial}{|\mathbf{N}_\partial|} = \left.\frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|}\right|^{(K)} = \left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right|^{(K)} \times \left.\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right|^{(K)} = \mathbf{i}_\partial^{(K)} \times \mathbf{j}_\partial^{(K)}. \tag{8.57}$$

Соответствующие производные в (57) записываются так

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial} = \left[\frac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} \quad \frac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} \quad \frac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \quad 1\right]^T; \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial} = \left[\frac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} \quad \frac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} \quad \frac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} \quad 1\right]^T. \tag{8.58}$$

С учетом (58) зависимость (57) преобразуется к виду

$$\mathbf{k}_\partial^{(K)} = \frac{\left(\dfrac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} - \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial}\right)\mathbf{i}_c + \left(\dfrac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} - \dfrac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial}\right)\mathbf{j}_c + \left(\dfrac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} - \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial}\right)\mathbf{k}_c}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial} - \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial Z_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial} - \dfrac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial Z_\partial}{\partial V_\partial}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial X_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial V_\partial} - \dfrac{\partial Y_\partial}{\partial U_\partial} \cdot \dfrac{\partial X_\partial}{\partial V_\partial}\right)}}.$$

В построенной локальной системе координат $x_\partial^{(K)} y_\partial^{(K)} z_\partial^{(K)}$ вектор скорости $\mathbf{V}_{эфф}$ может быть представлен так:

$$\mathbf{V}_{эфф} = \mathbf{i}_\partial^{(K)} \sin\xi_{эфф} + \mathbf{j}_\partial^{(K)} \cos\xi_{эфф} \qquad \text{или так:} \qquad \mathbf{V}_{эфф} = \left[\sin\xi_{эфф} \quad \cos\xi_{эфф} \quad 0 \quad 1\right]^T.$$

Косинусы углов между ортами $\mathbf{i}_\partial^{(K)}$, $\mathbf{j}_\partial^{(K)}$ и $\mathbf{k}_\partial^{(K)}$ и каждой из осей системы координат $X_c Y_c Z_c$ станка с ЧПУ равны коэффициентам при соответствующих ортах:

$$\cos\angle\left(X_\partial;\frac{\partial\mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right)=\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial};\qquad \cos\angle\left(X_\partial;\frac{\partial\mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right)=\frac{\partial x_\partial}{\partial V_\partial};\qquad \cos\angle\left(X_\partial;\mathbf{n}_\partial\right)=\frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial}-\frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial};$$

$$\cos\angle\left(Y_\partial;\frac{\partial\mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right)=\frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial};\qquad \cos\angle\left(Y_\partial;\frac{\partial\mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right)=\frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial};\qquad \cos\angle\left(Y_\partial;\mathbf{n}_\partial\right)=\frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial x_\partial}{\partial V_\partial}-\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial};$$

$$\cos\angle\left(Z_\partial;\frac{\partial\mathbf{r}_\partial}{\partial U_\partial}\right)=\frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial};\qquad \cos\angle\left(Z_\partial;\frac{\partial\mathbf{r}_\partial}{\partial V_\partial}\right)=\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial};\qquad \cos\angle\left(Z_\partial;\mathbf{n}_\partial\right)=\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial}-\frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial x_\partial}{\partial V_\partial}.$$

Поэтому оператор $\mathbf{Rs}(K\to c)$ перехода от локальной системы координат $x_\partial^{(K)}y_\partial^{(K)}z_\partial^{(K)}$ к системе координат $X_cY_cZ_c$ станка с ЧПУ записывается так:

$$\mathbf{Rs}(K\to c)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial x_\partial}{\partial V_\partial} & \left(\frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial}-\frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial}\right) & X_c^{(K)}\\ \frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial} & \left(\frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial}-\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial}\right) & Y_c^{(K)}\\ \frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial} & \left(\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial}-\frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial x_\partial}{\partial V_\partial}\right) & Z_c^{(K)}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

где $X_c^{(K)}$, $Y_c^{(K)}$, $Z_c^{(K)}$ – текущие значения координат начала подвижной локальной системы координат $x_\partial^{(K)}y_\partial^{(K)}z_\partial^{(K)}$ в системе координат $X_cY_cZ_c$ станка с ЧПУ.

Следовательно, в системе координат $X_cY_cZ_c$ вектор $V_{эфф}$ скорости наивыгоднешего движения формообразования может быть записан так:

$$\mathbf{V}_{эфф}^{(c)}=\mathbf{Rs}(K\to c)\cdot\mathbf{V}_{эфф}=$$

(8.59)

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial x_\partial}{\partial V_\partial} & \left(\frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial}-\frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial}\right) & X_c^{(K)}\\ \frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial} & \left(\frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial}-\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial}\right) & Y_c^{(K)}\\ \frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial} & \frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial} & \left(\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial}-\frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial}\cdot\frac{\partial x_\partial}{\partial V_\partial}\right) & Z_c^{(K)}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sin\xi_{эфф}\\ \cos\xi_{эфф}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial}\sin\xi_{эфф}+\frac{\partial x_\partial}{\partial V_\partial}\cos\xi_{эфф}\right)\\ \left(\frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial}\sin\xi_{эфф}+\frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial}\cos\xi_{эфф}\right)\\ \left(\frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial}\sin\xi_{эфф}+\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial}\cos\xi_{эфф}\right)\\ 1\end{bmatrix}.$$

Результат (59) позволяет в таком виде записать выражение для вектора $\mathbf{V}_{эфф}^{(c)}$ скорости наивыгоднешего движения формообразования

$$\mathbf{V}_{эфф}^{(c)}=\left(\frac{\partial x_\partial}{\partial U_\partial}\sin\xi_{эфф}+\frac{\partial x_\partial}{\partial V_\partial}\cos\xi_{эфф}\right)\mathbf{i}_c+\left(\frac{\partial y_\partial}{\partial U_\partial}\sin\xi_{эфф}+\frac{\partial y_\partial}{\partial V_\partial}\cos\xi_{эфф}\right)\mathbf{j}_c+\left(\frac{\partial z_\partial}{\partial U_\partial}\sin\xi_{эфф}+\frac{\partial z_\partial}{\partial V_\partial}\cos\xi_{эфф}\right)\mathbf{k}_c.$$

Проекции вектора $\mathbf{V}_{эфф}^{(c)}$ на оси системы координат $X_cY_cZ_c$ определяют интенсивность изменения во времени соответствующей координаты траектории формообразования:

$$\text{пр.}_x V_{эфф}^{(c)} = \frac{dX_{д}^{(c)}}{dt}; \qquad \text{пр.}_y V_{эфф}^{(c)} = \frac{dY_{д}^{(c)}}{dt}; \qquad \text{пр.}_z V_{эфф}^{(c)} = \frac{dZ_{д}^{(c)}}{dt},$$

поэтому наивыгоднейшая траектория формообразования сложной поверхности $Д$ детали на многокоординатном станке с ЧПУ описывается уравнениями

$$X_{д}^{(c)} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial x_д \partial U_д \cos\xi_{эфф} + \partial x_д \partial V_д \sin\xi_{эфф}}{A} dt; \tag{8.60}$$

$$Y_{д}^{(c)} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial y_д \partial U_д \cos\xi_{эфф} + \partial y_д \partial V_д \sin\xi_{эфф}}{A} dt; \tag{8.61}$$

$$Z_{д}^{(c)} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial z_д \partial U_д \cos\xi_{эфф} + \partial z_д \partial V_д \sin\xi_{эфф}}{A} dt, \tag{8.62}$$

где $A = \left|\mathbf{V}_{\Sigma.эфф}^{(c)}\right| dU_д dV_д = \sqrt{(\partial x_д \partial U_д \cos\xi_{эфф} + \partial x_д \partial V_д \sin\xi_{эфф})^2 + (\partial y_д \partial U_д \cos\xi_{эфф} + \partial y_д \partial V_д \sin\xi_{эфф})^2 + (\partial z_д \partial U_д \cos\xi_{эфф} + \partial z_д \partial V_д \sin\xi_{эфф})^2}$.

Для поверхностей $Д$ и $И$ некоторых классов уравнения (60), (61) и (62) могут быть проинтегрированы в общем виде.

Интегрируя (60), (61) и (62), и исключая из них параметр t, уравнение наивыгоднейшей траектории формообразования сложной поверхности детали представимо в виде

$$\begin{cases} F_1(X^{(c)}, Y^{(c)}, Z^{(c)}) = 0; \\ F_2(X^{(c)}, Y^{(c)}, Z^{(c)}) = 0. \end{cases}$$

В криволинейных координатах на поверхности $Д$ уравнения (60), (61) и (62) могут быть преобразованы к виду:

$$U_д = \int_{V_1}^{V_2} \tan\xi_{эфф}\, dV_д. \tag{8.63}$$

По уравнению (63) на поверхности детали можно построить семейство линий – семейство наивыгоднейших траекторий формообразования, которые целесообразно использовать в качестве новой системы гауссовых координат на $Д$. Переход от исходной системы криволинейных координат к новой производится известными (Радзевич С.П., 1987, 1988; Галимов К.З., Паймушин В.Н., 1985; и др.) методами репараметризации поверхностей.

Если направление движения формообразования постоянно совпадает с одним из главных направлений на поверхности детали, наивыгоднейшие траектории формообразования вырождаются в линии кривизны на $Д$.

Линии кривизны на поверхности $Д$ детали в общем случае могут быть найдены как результат интегрирования уравнения, которое в обозначениях Гаусса для коэффициентов $E_д$, $F_д$, $G_д$ первой $\Phi_{1.д}$ и $L_д$, $M_д$, $N_д$ второй $\Phi_{2.д}$ основных квадратичных форм имеет вид:

$$\begin{vmatrix} E_д dU_д + F_д dV_д & F_д dU_д + G_д dV_д \\ L_д dU_д + M_д dV_д & M_д dU_д + N_д dV_д \end{vmatrix} = 0.$$

Если деталь обрабатывается инструментом со сферической исходной инструментальной поверхностью (это распространенный вид обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ), наивыгоднейшие траектории формообразования всегда вырождаются и совпадают с линиями кривизны на поверхности $Д$. В этом случае наивыгоднейшее значение угла μ относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$ становится неопределенным.

Аналогичное имеет место при формообразовании:

- выпуклых локальных участков поверхностей $Д$ выпуклыми локальными участками поверхностей $И$, когда минимальный диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ поверхностей $Д$ и $И$ не равен нулю ($d_{conf}^{(\min)} > 0$), а также в случае точечного касания поверхностей $Д$ и $И$:

- при обработке выпуклых локальных участков поверхностей $Д$ вогнутыми локальными участками поверхностей $И$ и наоборот:

- при обработке вогнутых локальных участков поверхностей $Д$ выпуклыми локальными участками поверхностей $И$.

В последних двух случаях наивыгоднейший угол относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$ в точке K их касания равен $\mu_{эфф} = 0^\circ$ или $\mu_{эфф} = 90^\circ$.

Вместе с тем возможны исключения: например, при обработке дисковым шевером косозубого цилиндрического колеса с эвольвентным профилем зубьев (см. выше, пример 8.16, рис. 8.24) поверхности $Д$ и $И$ выпуклы, но траектории формообразования не вырождаются и не совпадают с линиями кривизны поверхности $Д$ зубьев обрабатываемого колеса. Это следствие того, что в рассматриваемом случае кинематика формообразования воспроизводится с ограничениями, препятствующими воспроизведению траекторий формообразования в виде линий кривизны на поверхности $Д$ зубчатого колеса.

Для увеличения эффективности обработки поверхностей деталей на металлорежущих станках следует стремиться поддерживать не собственно точечное касание поверхностей $Д$ и $И$, а локально-линейное или локально-поверхностное их касание первого и второго рода (см. гл. 4), когда значение угла относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$ не равно нулю ($\mu_{эфф} \neq 0^\circ$) и $\mu_{эфф}$ не кратно $\frac{\pi}{2}$. В этих более общих случаях траектории формообразования не вырождаются и не совпадают с линиями кривизны на поверхности $Д$ детали.

Скорость $\mathbf{V}_{эфф}$ движения инструмента вдоль строки формообразования в общем случае переменна. Подача инструмента вдоль строки формообразования осуществляется со скоростью, согласованой с нормальной кривизной поверхностей $Д$ и $И$ в направлении движения формообразования. При гарантированном достижении заданной точности для увеличения производительности формообразования на выпуклых участках поверхности $Д$ подачу следует уменьшать, а на вогнутых – ее можно увеличивать.

В качестве примера рассмотрим обработку сложной поверхности детали 1 (рис. 8.26). Инструмент 2 вращается вокруг своей оси $O_u - O_u$ с постоянной угловой скоростью ω_u и перемещается вдоль строки формообразования с подачей $\mathbf{S}_B$. Скорость подачи $\mathbf{S}_B$ инструмента вдоль строки формообразования переменна – ее величина зависит от нормальной кривизны поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$, измеренных в направлении $\mathbf{S}_B$. Исходя из условия $h_B \le [h_B]$ находим, что текущее значение подачи на зуб $S_B = |\mathbf{S}_B|$ не должно превышать значения

$$S_B \le 2R_{д.B} \arccos\left\{\frac{(R_{д.B} + R_{u.B})^2 + (R_{д.B} + [h])^2 - R_{u.B}^2}{2(R_{д.B} + R_{u.B})(R_{д.B} + [h])}\right\}.$$

При выводе этой формулы принято допущение, в соответствие с которым в каждом торцовом сечении инструмента радиус кривизны $R_{u.B}$ его поверхности $И$ постоянный и равен, например, соответствующему радиусу фасонной фрезы или фасонного шлифовального круга.

Если по мере перемещения инструмента вдоль строки формообразования от $i-$й к $(i+1)-$й точке на ней величина радиуса кривизны $R_{u.B}$ исходной инструментальной поверхности изменяется от значения $R_{u.B}^{i}$ до $R_{u.B}^{(i+1)}$ (необходимость в этом может быть вызвана стремлением увеличить эффективность отбработки за счет применения инструментов с фасонной образующей исходной инструментальной поверхности, например, в виде логарифмической спирали, когда измение нормального радиуса кривизны $R_{u.B}$ может быть весьма существенным), т.е. является функцией криволинейных координат на поверхности $И$ инструмента $R_{u.B}=R_{u.B}(U_u;V_u)$, текущее значение подачи на зуб $S_B=|\mathbf{S}_B|$ не должно превышать значения

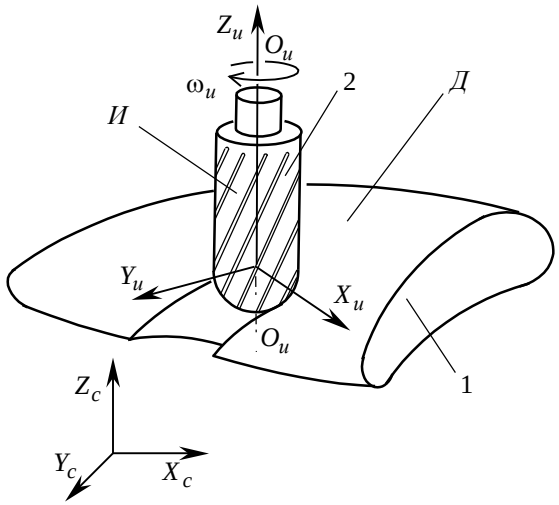


Рис. 8.26. Схема способа обработки сложной поверхности детали с переменной подачей инструмента вдоль строки формообразования

$$S_B \le R_{\partial.B}^{i}\arccos\left\{\frac{(R_{\partial.B}^{i}+R_{u.B}^{i})^2+(R_{\partial.B}^{i}+[h_B])^2-(R_{u.B}^{i})^2}{2(R_{\partial.B}^{i}+R_{u.B}^{i})(R_{\partial.B}^{i}+[h_B])}\right\}+ \tag{8.64}$$

$$+R_{\partial.B}^{(i+1)}\arccos\left\{\frac{(R_{\partial.B}^{(i+1)}+R_{u.B}^{(i+1)})^2+(R_{\partial.B}^{(i+1)}+[h_B])^2-(R_{u.B}^{(i+1)})^2}{2(R_{\partial.B}^{(i+1)}+R_{u.B}^{(i+1)})(R_{\partial.B}^{(i+1)}+[h_B])}\right\}.$$

Величина нормального радиуса кривизны $R_{\partial.B}$ вдоль строки формообразования измяется в функции координат текущей точки на поверхности $Д$ детали: $R_{\partial.B}=R_{\partial.B}(U_\partial;V_\partial)$.

Однако величины радиусов кривизны $R_{\partial.B}^{i}$ в $i-$й и $R_{\partial.B}^{(i+1)}$ в $(i+1)-$й точках обычно мало отличаются один от другого. Поэтому можно допустить, что $R_{\partial.B}^{i}\cong R_{\partial.B}^{(i+1)}\cong R_{\partial.B}$. Тогда формула (64) упростится и примет вид:

$$S_B \le R_{\partial.B}\left\langle \arccos\left\{\frac{(R_{\partial.B}+R_{u.B}^{i})^2+(R_{\partial.B}+[h_B])^2-(R_{u.B}^{i})^2}{2(R_{\partial.B}+R_{u.B}^{i})(R_{\partial.B}+[h_B])}\right\}+\arccos\left\{\frac{(R_{\partial.B}+R_{u.B}^{(i+1)})^2+(R_{\partial.B}+[h_B])^2-(R_{u.B}^{(i+1)})^2}{2(R_{\partial.B}+R_{u.B}^{(i+1)})(R_{\partial.B}+[h_B])}\right\}\right\rangle.$$

Если дополнительно уместно допустить, что $R_{u.B}^{i}\cong R_{u.B}^{(i+1)}\cong R_{u.B}$ (такое допущение справедливо, когда интенсивность изменения кривизны образующей исходной инструментальной поверхности незначительна или когда в качестве образующей поверхности $И$ инструмента используется дуга окружности), возможно дальнейшее упрощение формулы (64) и приведение ее к виду:

$$S_B \le 2R_{\partial.B}\arccos\left\{\frac{(R_{\partial.B}+R_{u.B})^2+(R_{\partial.B}+[h_B])^2-(R_{u.B})^2}{2(R_{\partial.B}+R_{u.B})(R_{\partial.B}+[h_B])}\right\}.$$

Следует иметь ввиду, что при обработке вогнутых участков поверхности детали объем срезаемого припуска увеличивается. Это приводит к соответствующему увеличению сил резания, вызывающих упругие деформации технологической системы, и накладывает ограничения на предельно допустимую величину подачи на зуб S_B. На выпуклых участках поверхности детали объем срезаемого припуска уменьшается, что позволяет подачу на зуб S_B увеличить. Дополнительные ограничения на текущее значение подачи S_B вдоль строки формообразования могут быть наложены жесткостью технологической системы, если она недостаточно высока.

Рассмотренный подход к определению текущего значения подачи на зуб S_B оказывается эффективным не только применительно к обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ,

но и при разработке технологии обработки на металлорежущих станках поверхностей деталей общемашиностроительного назначения. Чтобы проиллюстрировать это, достаточно вернуться к рассмотеренному выше (см. с. 482) примеру 8.15[1]. Вследствие того, что при "*жесткой*" кинематике ряд параметров процесса формообразования вырождается, этот пример может быть использован для иллюстрации решения задачи синтеза как локального, так и глобального формообразования.

Использование рассмотренного подхода (см. выше, формула (64) и ее упрощенные варианты) позволило разработать способ точения фасонных поверхностей вращения (см. рис. 8.23), эффективнее известных способов фасонного точения на токарных станках с ЧПУ.

Например, в способе[2] фасонного течения предусмотрено изменение осевой подачи на оборот детали согласованно с допуском $[h]$ на точность обработки и со значением радиуса кривизны режущей кромки инструмента в текущей точке ее касания с поверхностью детали. При этом учитывается шероховатость обработанной поверхности, образованная только регулярным микрорельефом – гребешками между соседними проходами округленной вершины резца за один оборот детали. Стохастическая составляющая результирующей шероховатости – т.е. шероховатость поверхности, создаваемая микронеровностями режущей кромки, вибрациями станка и другими факторами, при этом не учитывается.

По способу[3] обработки фасонных поверхностей вращения на токарном станке с ЧПУ поддерживают постоянной подачу инструмента вдоль образующей фасонной поверхности детали, т.е. стабилизируют так называемую *контурную подачу* инструмента. Перед подводом на быстром ходу резца к обрабатываемой фасонной поверхности детали в системе ЧПУ станком производится расчет текущего значения частоты вращения шпинделя станка и соответствующего значения контурной подачи инструмента. Частота вращения шпинделя определяется как отношение заданной величины контурной подачи инструмента к текущему значению диаметра обрабатываемой детали. К моменту врезания резца в заготовку частота вращения шпинделя станка устанавливается равной требуемому ее значению.

Несложный анализ показывает, что способ обработки фасонных поверхностей вращения, разработанный на основе результатов решения задачи синтеза регионального (локального) формообразования поверхностей деталей (см. выше, пример 8.15 и рис. 8.23 на с. 482) эффективнее рассмотренных аналогов. Его применение позволяет увеличить производительность точения на станках с ЧПУ фасонных поверхностей вращения и улучшить качество обработанных поверхностей деталей.

При обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ движение поверхности $И$ инструмента относительно поверхности $Д$ детали вдоль траектории формообразования в общем случае является мгновенновинтовым: инструмент совершает мгновенное поступательное движение со скоростью $\mathbf{V}_\Sigma$ и поворотное движение с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Линейная скорость $\mathbf{V}_\omega$ точек поверхности $И$ инструмента от его поворотного движения равна:

$$\mathbf{V}_\omega = \boldsymbol{\omega}_\Sigma \times \mathbf{r}^{(u)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{\Sigma.x} & \omega_{\Sigma.y} & \omega_{\Sigma.z} \\ r_x^{(u)} & r_y^{(u)} & r_z^{(u)} \end{vmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{r}^{(u)}$ – вектор, определяющий расстояние текущей точки поверхности $И$ инструмента от оси его мгновенновинтового движения.

При мгновенновинтовом движении вектор скорости $\mathbf{V}_\Sigma$ поступательного движения направлен вдоль оси вращательного движения. Результирующая скорость текущей точки инструмента относительно детали равна: $\mathbf{V}^{(\Sigma)} = \mathbf{V}_\Sigma + \mathbf{V}\omega = \mathbf{V}_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \mathbf{r}^{(u)}$. Направление оси мгновенновинтового движения инструмента определяется *вектором Дарбу*.

---

[1] А.с. №1708522 (СССР). *Способ точения фасонных поверхностей*./С.П.Радзевич и Л.В.Бондаренко. – Опубл. в Б.И. №4, 1992. МКИ[4] В 23 В 1/00. Заявлено 13 декабря 1988 г.

[2] Заявка №58-126039 (Япония). *Способ программирования шероховатости токарной обработки на станках с ЧПУ*./Камада Дзюнъити; Мицубиси дэнки к.к. Заявл.20.01.82, №57-7233, опубл.27.07.83. *МКИ* В 23 Q 15/00, G 05B 19/18.

[3] Пат. №4415977 (США). *Method of constant peripheral speed control*. (Способ управленя контурной обработкой на токарном станке). – Заявл. 30.06.80, №243928, опубл. 15.11.83. Приор. 30.06.79, №54-82779 (Япония). *МКИ* B23 B 15/10, 05B 19/18. НКИ 364/474.

В процессе обработки система координат $X_u Y_u Z_u$, связанная с инструментом, вращается как твердое тело с положительной угловой скоростью $|\boldsymbol{\Omega}| = \sqrt{k^2 + \tau^2}$ вокруг мгновенной оси, направление которой определяется вектором Дарбу $\boldsymbol{\Omega} = k\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}$ (здесь обозначено: k и τ – кручение и кривизна траектории формообразования, а $\mathbf{t}$ и $\mathbf{b}$ – единичные векторы касательной и бинормали к траектории формообразования в текущей точке K касания поверхностей $Д$ и $И$). Вектор Дарбу располагается в спрямляющей плоскости траектории формообразования и может быть также выражен через вектор главной нормали $\mathbf{n}$ и вектор касательной $\mathbf{t}$ к траектории формообразования: $\boldsymbol{\Omega} = \sqrt{k^2 + \tau^2}\,(\mathbf{t}\cos\theta + \mathbf{n}\sin\theta)$, где θ – угол между вектором Дарбу $\boldsymbol{\Omega}$ и касательной $\mathbf{t}$ к траектории формообразования.

Скорость $|\boldsymbol{\Omega}|$ зависит от полной кривизны траектории формообразования.

Встречаются случаи обработки сложных поверхностей деталей, когда требуется поддерживать требуемое по величине, например, постоянное, значение угла между осью вращения инструмента и контактной нормалью. Такое требование вызывается специфическими условиями резания, стремлением избежать нарушения условий формообразования поверхностей деталей или увеличить производительность обработки.

Например, при съеме больших припусков путем назначения рациональной величины угла наклона оси вращения инструмента (рис. 8.27) можно совместить предварительную и окончательную (или получистовую под последующую отделочную) обработку сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ (Bliko, I., Kowerich, S., and Paulik, P., 1998). При этом проекция оси вращения инструмента на общую для поверхностей $Д$ и $И$ касательную плоскость, как правило, совпадает с направлением движения формообразования, хотя выполнение этого требования не является обязательным.

Необходимость поддержания требуемого по величине угла наклона инструмента к обрабатываемой поверхности детали может быть вызвана и другими причинами.

Найденные в результате решения задачи синтеза локального формообразования наивыгоднейшие траектории формообразования (как и траектории перемещения программируемой точки) в процессе разработки управляющей программы аппроксимируются отрезками прямых или дугами кривых. Линейная аппроксимация траекторий формообразования проще в реализации. Вместе с тем, в случае ее применение приходится часто сталкиваться с проблемой так называемых коротких кадров, когда система ЧПУ за время отработки текущего кадра не успевает подготовиться к отработке следующего. Такой недостаток в меньшей мере свойственен аппроксимации траектории формообразования по-разному расположенными в пространстве дугами окружностей соответствующего радиуса. Положение расчетных точек на дуге аппроксимирующей окружности определяется периодом квантования (временем цикла интерполяции) и величиной подачи инструмента вдоль строки формообразовани.

По мере изнашивания и перетачивания размеры инструмента изменяются. Это может привести к соответствующему изменению размеров обрабатываемой детали, что недопустимо. Поэтому при использовании переточенного инструмента требуется вводить соответствующую коррекцию в управляющую программу – с учетом парметров исходной инструментальной поверхности $И$ переточенного инструмента.

Выше решение задачи синтеза регионального формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ рассмотрено для случая аналитического описания поверхности детали. Этот подход к решению задачи синтеза регионального формообразования также применим для составных поверхностей деталей и при дискретном задании геометрической информации о поверхностях $Д$ и $И$.

При дискретном задании геометрической информации об обрабатываемой поверхности детали

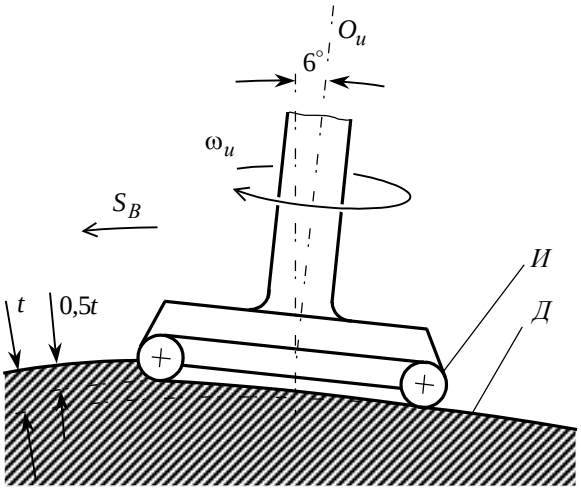


Рис. 8.27. Совмещение черновой и получистовой обработки сложных поверхностей деталей при съеме больших припусков.

можно воспользоваться методами преобразования геометрической информации о поверхностях *Д* и *И* из исходной дискретной в натуральную (см. гл. 1).

Вместе с тем для дискретно заданных поверхностей деталей известны подходы, позволяющие решать траекторные задачи непосредственно в дискретной форме. Например, в соответствие со способом[1] обработки сложных поверхностей деталей по горизонтальным проекциям точек обрабатываемой поверхности *Д* строятся элементарные четырехугольники достаточно малых размеров, абсциссы и ординаты вершин которых известны. Вершинам четырехугольников ставятся в соответствие вертикальные координаты точек поверхности детали. Затем некоторым образом выбирается горизонтальная проекция траектории формообразования. Вертикальные координаты ее точек определяются так.

В горизонтальной плоскости вычисляются координаты точек пересечения проекции траектории формообразования со сторонами элементарных четырехугольников. Затем устанавливаются соотношения длин отрезков, на которые делятся стороны четырехугольников точками их пересечения с горизонтальной проекцией траектории формообразования. Разности высот, соответствующие вершинам элементарных четырехугольников, делятся в той же пропорции и таким путем вычисляются аппликаты точек поверхности *Д* для соответствующей точки пересечения горизонтальной проекции траектории формообразования и стороны элементарного четырехугольника – эти точки определяют траекторию формообразования.

Траектория формообразования, вычисленная таким способом, представлена набором точек, соответствующих пересечениям горизонтальной проекции траектории формообразования со сторонами элементарных четырехугольников.

Широко используемому на практике зигзагообразному методу фрезерования сложных поверхностей деталей свойственны недостатки, основным из которых является переменный характер резания: если, перемещаясь вдоль одной строки, инструмент работает по подаче, то при перемещении вдоль следующей он работает против подачи. Аналогичное наблюдается и при переходе от одной к другой строке формообразования вдоль контура обрабатываемой поверхности детали. Указанное приводит к изменению величин и направлений сил резания и отрицательно сказывается на точности, шероховатости и других показателях качества обработки сложных поверхностей деталей (Евгеньев Г.Б., 1983).

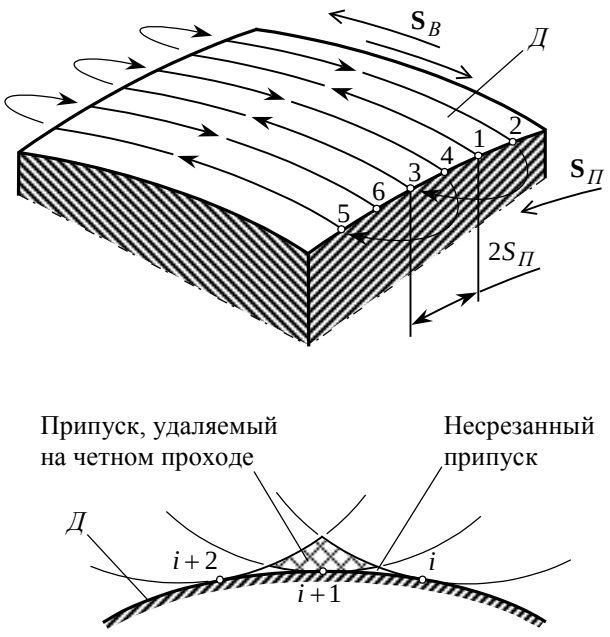


Рис. 8.28. Черезстрочный метод обработки сложных поверхностей деталей.

Другим существенным недостатком зигзагообразного метода фрезерования является повышенное число изломов траектории движения инструмента, что отрицательно влияет на динамические показатели процесса резания, в частности, приводит к увеличению времени обработки в связи с необходимостью частого выполнения разгонов-торможений подвижных узлов станка с ЧПУ.

Кроме того, условия срезания припуска существенно разнятся при движении вдоль строки формообразования во взаимно противоположных направлениях. Это связано с переходом от более благоприятного попутного фрезерования к менее благоприятному встречному и от более благоприятых условий резания при движении фрезы с подъмом по сравнению с ее движением с опусканием. Поэтому наибольший съем припуска желательно производить через строку в благоприятном направлении фрезерования с последующим снятием “лишнего” гребешка при возврате инструмента, когда условия резания менее благоприятны.

Если при фрезеровании сложной поверхности детали на многокоординатном станке с ЧПУ при движении инструмента вдоль строки формообразования условия срезания припуска по подаче и против подачи

[1]Заявка №60-48244 (Япония). *Способ задания траектории обработки сложных поверхностей.*/Киси Хадзимэ, Сэки Маки; Маки Фанакку. МКИ В 23 Q 15/00, G 05 B 19/403. Заявлено 29.08.83б №58-157431, опубл. 15.03.85. [РЖ 14Б, №8/1986, реф. 8Б426П, с. 50].

существенно различаются между собой, рационально перейти к использованию черезстрочечного метода обработки (Радзевич С.П., 1987).

В соответствие с черезстрочечным методом (рис. 8.28) фрезерование поверхности $Д$ детали производится строками. Обработка начинается в некоторой исходной точке 1 поверхности детали. После обработки первой строки инструмент перемещают по другой траектории формообразования, которая отстоит от первой на величину подачи $S_П$ и заканчивается в точке 2. Затем движением подачи $\mathbf{S}_П$ поперек строки формообразования инструмент перемещают на удвоенную величину подачи $S_П$ до точки 3 и т.д. до окончания обработки всех строк формообразования 4, 5, 6, …, i, $(i+1)$, $(i+2)$, … .

Применение черезстрочечного метода фрезерования сложных поверхностей деталей позволяет уменьшить отрицательное влияние на стройкость инструмента и качество обработанной поверхности неблагоприятных условий резания, имеющих место при встречном фрезеровании и при фрезеровании с опусканием инструмента.

8.6. Синтез глобального формообразования поверхностей деталей

Задача синтеза глобального формообразования решается на основании результата, полученного при решении задачи синтеза регионального формообразования поверхностей деталей. Этим результатом является бесконечное множество линий на поверхности детали, использование любой из которых в качестве траектории формообразования обеспечивает достижение максимальной эффективности регионального формообразования. Из найденного множества кривых на $Д$ необходимо некоторым образом выбрать конечное число линий, которые впоследствие следует использовать в качестве траекторий формообразования заданной поверхности детали.

Задачей синтеза глобального формообразования является:

- отбор из найденного в результате решения задачи синтеза регионального формообразования семейства линий на поверхности детали таких из них, использование совокупности которых в качестве траекторий формообразования обеспечивает достижение максимума глобальной эффективности формообразования;
- учет влияния на эффективность обработки детали т.н. “*краевого эффекта*”, в пределах области проявления влияния которого характер формообразования поверхности $Д$ имеет существенные особенности, и решение задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали в области проявления влияния краевого эффекта;
- установление координат наивыгоднейшей точки начала обработки детали.

Чтобы решить задачу синтеза глобального формообразования поверхностей деталей, необходим критерий эффективности обработки, в качестве которого, как и выше (для примера), используем производительность формообразования.

Производительность глобального формообразования поверхностей деталей зависит не только от условий локального и регионального формообразования, но и от частичной интерференции соседних строк формообразования, от формы и параметров контура, ограничивающего обрабатываемый участок сложной поверхности детали, от положения точки начала обработки.

При решении задачи синтеза глобального формообразования преследуется цель предельно уменьшить частичную интерференцию соседних строк формообразования, минимизировать отрицательное влияние краевого эффекта на эффективность многокоординатной обработки (влияние параметров траекторий врезания инструмента в заготовку и вывода его из контакта с ней) и определить координаты наивыгоднейшей точки начала обработки.

8.6.1. Частичная интерференция соседних строк формообразования. Текущее значение ширины строки формообразования переменно и является функцией положения точки K на траектории формообразования (см. выше, с. 491). Это одна из причин того, что соседние строки формообразования частично взаимно интерферируют, в результате чего некоторая часть поверхности детали перекрывается строками формообразования дважды. Это снижает эффективность обработки, в связи с чем площадь перекрытия соседних строк следует минимизирована.

Текущее значение ширины строки формообразования является функцией положения точки K на $i-$й траектории формообразования:

$$S_П = S_П(L^{(i)}),$$

где $L^{(i)}$ – расстояние, определяющая положение текущей точки на i – й строке формообразования.

В течение времени dt инструмент перемещается вдоль строки формообразования на некоторое расстояние $dL^{(i)}$, в результате чего на детали формообразуется элемент поверхности площадью

$$dQ_д^{(i)} = S_П(L^{(i)})\,dt.$$

Площадь одной формообразованной строки на $Д$ равна интегралу

$$Q_д^{(i)} = \int_0^{L_i} S_П(L^{(i)})\,dt,$$

где L_i – длина i – й строки формообразования.

Суммарная площадь всех строк формообразования на поверхности детали расчитывается по формуле:

(8.65) $$Q_д = \sum_{i=1}^{N} Q_д^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{L_i} S_П(L^{(i)})\,dt,$$

где N – общее количество строк формообразования на обработанном участке поверхности $Д$.

Вследствие интерференции соседних строк формообразования расчетное значение $Q_д$ площади формообразованной поверхности детали (65) больше номинальной ее площади $Q_н$, расчитанной без учета площади остаточного детерминированного регулярного микрорельефа. Степень интерференции соседних строк формообразования определяется коэффициентом интерференции $K_{ин}$, равным

$$K_{ин} = \frac{Q_д - Q_н}{Q_н} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \int_0^{L_i} S_П(L^{(i)})\,dL^{(i)} - Q_н}{Q_н} \le 1.$$

Коэффициент интерференции $K_{ин}$ является функцией параметров формы поверхностей $Д$ и $И$, их взаимного расположения, относительной локальной ориентации, параметров кинематики формообразования и др. По аналогии с функцией производительности формообразования (см. выше, с. 437) можно записать, что $K_{ин} = K_{ин}\{[h]; S_B; S_П; R_{д.B}(U_д; V_д); R_{u.B}(U_u; V_u); R_{д.П}(U_д; V_д); R_{u.П}(U_u; V_u); \varphi; \mu; \theta\}$. Для всех аргументов Γ_i этой функции: $[h]$, S_B, $S_П$, $R_{д.B}(U_д; V_д)$, $R_{u.B}(U_u; V_u)$, $R_{д.П}(U_д; V_д)$, $R_{u.П}(U_u; V_u)$, φ, μ и θ, которые можно варировать при обработке заданной поверхности детали, следует установить те их значения, при которых коэффициента интерференции минимален. Для этого достаточно установить минимум функции $K_{ин}(\Gamma_i)$ по всем переменным, необходимым условием чего является выполненение условий:

$$\frac{\partial K_{ин}(\Gamma_i)}{\partial \Gamma_i} = 0; \qquad \frac{\partial^2 K_{ин}(\Gamma_i)}{\partial \Gamma_i^2} < 0.$$

Из найденных значений аргутентов Γ_i отбираются те, которые удовлетворяют условиям достаточности.

В текущей точке $K_д^{(i)}$ траектории формообразования для заданных значений нормальных радиусов кривизны $R_д^{(i)}$ и $R_u^{(i)}$ (рис. 8.29) при известном $[h]$ по формуле (25) находим критическую ширину строки формообразования $S_П^{(i)} = AB$:

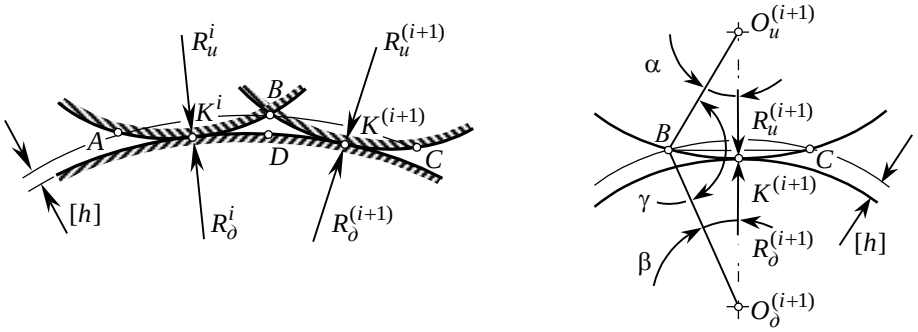


Рис. 8.29. К определению критической величины подачи инструмента на очередную строку формообразования.

$$S_{\Pi}^{(i)} = 2R_{\partial.\Pi}\arccos\frac{(R_{\partial.\Pi}+R_{u.\Pi})^2+(R_{\partial.\Pi}+[h_{\Pi}]\operatorname{sgn}R_{\partial.\Pi})^2-R_{u.\Pi}^2}{2(R_{\partial.\Pi}+R_{u.\Pi})(R_{\partial.\Pi}+[h_{\Pi}]\operatorname{sgn}R_{\partial.\Pi})}.$$

Зная допуск $[h]$ и нормальные радиусы кривизны $R_\partial^{(i+1)}$ и $R_u^{(i+1)}$ поверхности детали и исходной инструментальной поверности, по найденному положению точки B требуется расчитать ширину строки формообразования $S_{\Pi}^{(i+1)} = BC$ и предельное положение очередной точки касания $K_\partial^{(i+1)}$ поверхностей $Д$ и $И$. Положение точки $K_\partial^{(i+1)}$ определяет текущее значение ширины соседней строки формообразовани и величину подачи инструмента на очередную строку формообразования при обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ, расчитанную без учета интерференции соседних строк формообразования.

Ширина $S_{\Pi}^{(i+1)}$ соседней строки формообразования может быть расчитана таким путем.

В $\Delta BO_u^{(i+1)}O_\partial^{(i+1)}$ известны длины всех трех его сторон: $BO_u^{(i+1)} = R_u^{(i+1)}$, $BO_\partial^{(i+1)} = (R_\partial^{(i+1)}+[h])$, $O_\partial^{(i+1)}O_u^{(i+1)} = (R_\partial^{(i+1)}+R_u^{(i+1)})$. По теореме косинусов из этого треугольника находим угол α:

$$\alpha = \arccos\frac{(BO_u^{(i+1)})^2+(O_\partial^{(i+1)}O_u^{(i+1)})^2-(BO_\partial^{(i+1)})^2}{2\cdot BO_u^{(i+1)}\cdot O_\partial^{(i+1)}O_u^{(i+1)}}.$$

Тогда $BC = 2BO_u^{(i+1)}\sin\alpha$ или $\cup BC = 2BO_u^{(i+1)}\sin\alpha$ (здесь α измеряется в радианах). Зная угол α, находим величину смещения точки $K_\partial^{(i+1)}$ относительно точки K_∂^i: ($\cup K^iD + \cup K^{(i+1)}D = \cup K^iK^{(i+1)}$), равную величине подачи $S_{\Pi}^{(i+1)}$ на очередную строку формообразования.

Величину подачи инструмента на очередную строку формообразования можно существенно увеличить, если согласовать между собой скорости подач $\mathbf{S}_B$ и $\mathbf{S}_{\Pi}$ и таким путем изменить схему расположения элементарных ячеек на обработанной поверхности детали. При соответствующем согласовании величин подач вместо элементарных ячеек четырехугольной формы (см. выше, рис. 7.12, с. 385) в этом случае образуются элементарные ячейки шестиугольной формы (рис. 8.30). При прочих одинаковых условиях это приводит к увеличению эффективности обработки.

Характер согласования между собой подач $\mathbf{S}_B$ и $\mathbf{S}_{\Pi}$ устанавливается исходя из условия достижения при этом наибольшей производительности глобального формообразования. Для этого допуск $[h]$ на точность формообразования следует разделить на две составляющие $[h_B]$ и $[h_{\Pi}]$ в соответствие с

$$[h] = d[h_B] + e[h_П] = d^*[h] + e^*[h] = (d^* + e^*)\cdot[h].$$

Здесь d, e и d^*, e^* – безразмерные параметры распределения допуска $[h]$ для случая обработки сложных поверхностей деталей с подачами $\mathbf{S}_B$ и $\mathbf{S}_П$, согласованными в соответствие с (рис. 8.30);

Параметры d^* и e^* увязаны между собой и могут быть выражены один через другой исходя из принятого допущения (см. выше, с. 446, допущение 8.1), согласно которому в пределах элементарной ячейки на $Д$ дуга траектории формообразования и дуга, по которой производится подача инструмента на очередную строку формообразования, рассматриваются как плоские кривые (следовательно, их кручение равно нулю) постоянного радиуса (поэтому это дуги окружностей). За счет этого можно уменьшить необходимое количество параметров и перейти от двух переменных параметров d^* и e^* к одному – к результирующему параметру f^* распределения допуска $[h]$, который также является безразмерной величиной.

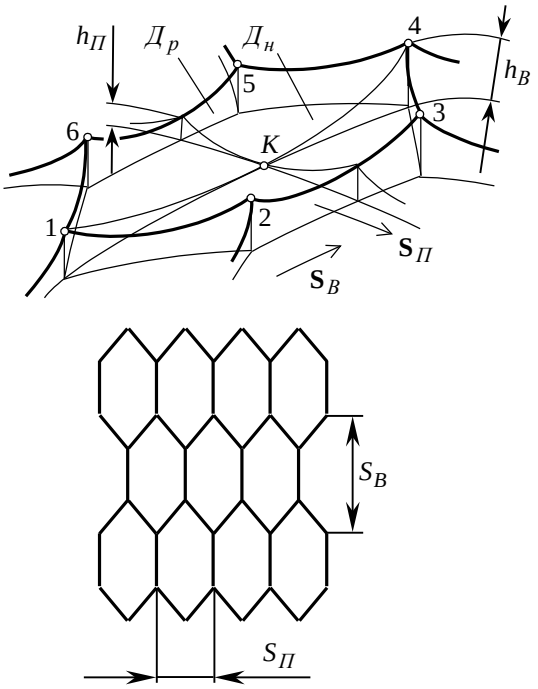


Рис. 8.30. Модификация формы элементарных ячеек формообразования.

Наивыгоднейшее значение параметра f^* в текущей точке K траектории формообразования находится как корень уравнения $\dfrac{\partial P_ф}{\partial f^*} = 0$, удовлетворяющий условию $\dfrac{\partial^2 P_ф}{\partial (f^*)^2} < 0$.

В случае правильного согласования между собой подач $\mathbf{S}_B$ и $\mathbf{S}_П$ отклонение реальной поверхности $Д_р$ от номинальной $Д_н$, заданной чертежом детали, во всех вершинах 1, 2, …, 6 элементарной ячейки одинаковы по величине ($h_1 = h_2 = \ldots = h_6$) и равны результирующей погрешности формообразования h_Σ.

Элементарные ячейки на обработанной поверхности детали приобретают форму неправильных шестиугольников – правильными они будут только в случае формообразования сферического (выпуклого или вогнутого) или плоского участка поверхности $Д$ детали сферическим или плоским участком поверхности $И$ инструмента.

Решение задачи наивыгоднейшего расположения на поверхности детали элементарных ячеек формообразования шестиугольной формы приведено в (Ligun, A.A., Shumeiko, A.A., Radzevich, S.P., Goodman, E.D., 1997).

8.6.2. Траектории врезаний-выводов инструмента. Влияние на эффективность обработки детали формы и параметров контура сложной поверхности $Д$ исследовано недостаточно. Известны рекомендации (Евгеньев Г.Б., 1985) использовать для этого метод анализа границ. Более эффективным является следующий подход к решению задачи установления наивыгоднейших траекторий врезания инструмента в заготовку и вывода его из контакта с обработанной деталью: т.н. "*траекторий врезаний-выводов*".

Чтобы установить наивыгоднейшие траектории врезаний-выводов инструмента, сначала требуется установить область, в которой проявляется влияние краевого эффекта.

Обрабатываемые поверхности деталей конечны и имеют вполне определенные размеры. Наличие контура, ограничивающего поверхность $Д$, приводит к проявлению влияния краевого эффекта, в результате чего формообразование поверхности детали у границы имеет особенности. Область проявления влияния краевого эффекта определяется исходя из следующего.

На расстоянии $[h]$ допуска на точность формообразования поверхности детали расположим поверхность допуска $Д_h$, в зазоре между которой и номинальной поверхностью $Д_н$ размещается реальная поверхность $Д_p$, рассматриваемая с учетом остаточного детерминированного микрорельефа на $Д$.

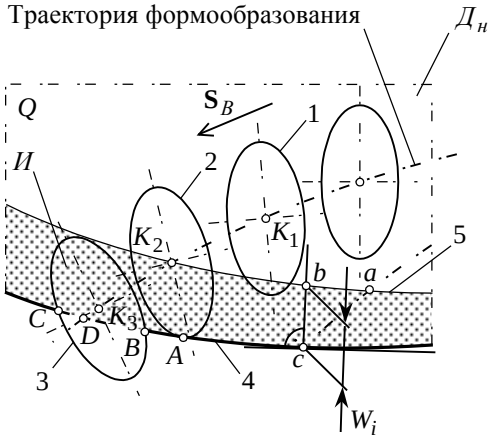


Рис. 8.31. Область проявления влияния "*краевого эффекта*".

В процессе обработки инструмент перемещается вдоль траектории формообразования с подачей $\mathbf{S}_B$, занимая при этом ряд последовательных положений.

Если в некоторой точке K_1 (рис. 8.31) исходную инструментальную поверхность $И$ ввести в касание с номинальной поверхностью $Д_н$, она пересечет поверхность допуска $Д_h$ по некоторой замкнутой эллипсообразной кривой 1. В точке K_1 траектории формообразования кривая 1 не имеет общих точек с контуром 4 детали, поэтому влияние краевого эффекта здесь не проявляется.

В точке K_2 траектории формообразования кривая 2, аналогичная кривой 1, касается контура 4 поверхности детали в точке A. Начиная с точки K_2 по мере приближения к контуру детали влияние краевого эффекта проявляется сильнее.

В точке K_3 кривая 3, аналогичая кривым 1 и 2, пересекает контур детали в точках B и C. Вывод инструмента из контакта с обработанной деталью заканчивается в точке траектории, в которой кривая 3 касается контура 4 с противоположной строны – когда инструмент находится вне пределов детали: за пределами точки D траектории формообразования.

Для каждой точки контура детали можно определить точку K_i, аналогичную точке K_2 для точки A контура 4. Совокупность построенных таким образом точек K_i определяет линию 5, ограничивающую область проявления влияния краевого эффекта. Ширина bc этой области в общем случае переменна. Текущее ее значение W_i в некоторой точке c участка ac траектории формообразования измеряется ортогонально контуру 4.

В пределах области проявляения влияния краевого эффекта задачу определения наивыгоднейших траекторий формообразования (т.е. траекторий врезаний-выводов инструмента) в общем случае нельзя рассматривать вне связи с параметрами контура детали.

При прочих одинаковых условиях увеличение толщины срезаемого припуска ведет к увеличению длины траектории врезания инструмента в заготовку. По мере увеличения допуска $[h]$ увеличивается длина траектории вывода инструмента из контакта с обработанной деталью. Уменьшение площади номинальной поверхности $Д_н$ детали приводит к тому, что в процентном измерении доля области проявления влияния краевого эффекта увеличивается. Кроме того, влияние краевого эффекта особенно существенно проявляется при обработке деталей с большим отношением длины к ширине (ярко выраженных "*длинных*" деталей).

Если при обработке длинных деталей строки формообразования направлять примерно поперек поверхности $Д_н$, то вследствие большого количества врезаний инструмента в заготовку и вывода его из контакта с ней, производительность обработки уменьшается. В подобных случаях обработку целесообразно производить строками возможно большей длины с тем, чтобы результирующее их количество, а вместе с тем и количество врезаний-выводов инструмента, было минимальным. Может оказаться целесообразным производить обработку строками формообразования возможно большей длинны, а не строками максимальной ширины, когда результирующая скорость $\mathbf{V}_\Sigma$ движения инструмента относительно детали в точке K касания поверхностей $Д$ и $И$ ортогональна минимальному диаметру $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\left(Д / И\right)$. Для заданной поверхности детали к этому результату можно прийти путем решения задачи синтеза глобального формообразования поверхностей деталей.

Пример 8.17. Длинные детали могут быть обработаны по способу[1], в соответствие с которым обработка поверхности $Д$ производится инструментом 1 (рис. 8.32). Инструменту сообщают главное движение резания. Для инструментов с исходной инструментальной поверхностью в виде поверхности вращения главным движением является его вращение вокруг своей оси с угловой скоростью ω_u. Инструмент подводят к заготовке 4 и движением подачи $\mathbf{S}_B$ перемещают относительно поверхности $Д$ вдоль строк формообразования 7 с периодическим смещением от строки к строке на величину $S_П$ шага между ними. Движение формообразования $\mathbf{S}_B$ направлено вдоль линий на $Д$, отстоящих от геодезической линии 6 наибольшей длины на ней на величину, кратную ширине $S_П$ строки формообразования.

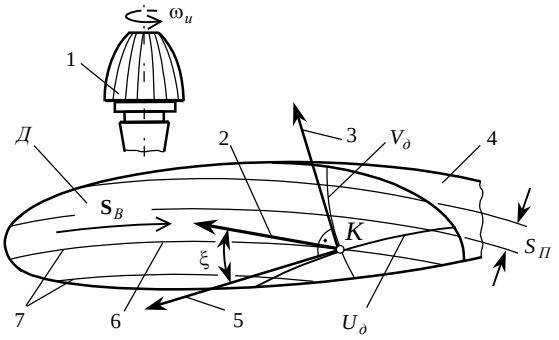


Рис. 8.32. Схема способа обработки сложных поверхностей деталей (а.с. №1255304).

Кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности детали измеряется вдоль геодезической линии на ней – аналогично тому, как на плоскости кратчайшее расстояние между двумя точками измеряется вдоль проходящей через нее прямой линии.

Геодезическая линия наибольшей длины на поверхности $Д$ детали находится путем решения системы дифференциальных уравнений (Корн Г., Корн Т., 1974):

$$\frac{\partial V_д}{\partial U_д} = \sqrt{\frac{E_д}{G_д}}\,\tan\xi\ ; \qquad \frac{\partial \xi}{\partial U_д} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_д}{G_д}}\,\frac{\partial \ln E_д}{\partial U_д} - \frac{\partial G_д}{\partial U_д}\tan\xi\ ,$$

где ξ – угол между касательной 2 к геодезической линии наибольшей длины на обрабатываемой поверхности детали и касательной 5 к $U_д$ – линии на ней (3 – касательная к $V_д$ – линии на обрабатываемой поверхности детали).

Использование в качестве траекторий формообразования линий, отстоящих от геодезической линии наибольшей длины на поверхности детали на величину, кратную $S_П$, позволяет уменьшить количество врезаний-выводов инструмента и за счет этого увеличить производительность обработки.

Пример 8.18. Длинные детали могут быть обработаны по способу,[2] который предусматривает воспроизведение в процессе обработки наивыгоднейших траекторий врезания инструмента в заготовку и вывода его из контакта с обработанной деталью. Этот способ повторяет способ обработки сложных поверхностей деталей (см. выше, рис. 8.32), однако имеет свои особенности.

В соответствие с рассматриваемым способом обработки сложных поверхностей деталей (рис. 8.33) обработка поверхности $Д$ производится инструментом 1. Инструменту сообщают главное движение резания. Для инструментов с исходной инструментальной поверхностью в виде поверхности вращения главным движением является его вращение вокруг своей оси с угловой скоростью ω_u. Инструмент подводят к заготовке 4 и движением подачи $\mathbf{S}_B$ перемещают относительно поверхности $Д$ вдоль строк формообразования 7 с периодическим смещением от строки к строке на величину, кратную шагу $S_П$ между ними. Движение формообразования $\mathbf{S}_B$ направлено вдоль линий на $Д$, отстоящих от геодезической линии 6 наибольшей длины на ней на величину $S_П$ ширины строки формообразования.

Геодезическая линия наибольшей длины на поверхности $Д$ детали находится путем решения системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial V_д}{\partial U_д} = \sqrt{\frac{E_д}{G_д}}\,\tan\xi\ ; \qquad \frac{\partial \xi}{\partial U_д} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_д}{G_д}}\,\frac{\partial \ln E_д}{\partial U_д} - \frac{\partial G_д}{\partial U_д}\tan\xi\ ,$$

где ξ – угол между касательной 2 к геодезической линии наибольшей длины на обрабатываемой поверхности детали и касательной 5 к $U_д$ – линии на ней (3 – касательная к $V_д$ – линии на обрабатываемой поверхности детали).

Использование в качестве траекторий формообразования линий, отстоящих от геодезической линии наибольшей длины на поверхности детали на величину, кратную $S_П$, позволяет уменьшить количество врезаний-выводов инструмента и за счет этого увеличить производительность обработки.

Траекториями врезаний-выводов инструмента являются наивыгоднейшие траектории формообразования поверхности $Д$ детали, построенные в пределах области проявления влияния краевого эффекта.

Кратчайшее расстояние от линии контура обрабатываемого участка поверхности детали до основной траектории формообразования совпадает с геодезической линией на $Д$, проходящей перпендикулярно контуру, ограничивающему участок обрабатываемой поверхности.

---

[1] А.с. №1255304 (СССР). *Способ обработки сложных поверхностей*./С.П.Радзевич. – Опубл. 07 сентября 1986 г. в Б.И., №33, 1986. – МКИ[4] В 23 С 3/16. Заявлено 30 октября 1984 г.

[2] А.с. №1331617 (СССР). *Способ обработки сложных поверхностей*./С.П.Радзевич. – Опубл. 23 августа 1987 г. в Б.И., №31, 1987. – МКИ[4] В 23 С 3/16. Заявлено 07 августа 1985 г.

Врезание инструмента в заготовку и вывод его из контакта с обработанной деталью производится по траекториям 8, 13 и др., в качестве которых воспроизводятся геодезические линии на $Д$, направленные перпендикулярно к линии контура 9, ограничивающей обрабатываемый участок поверхности детали.

Использование в качестве траекторий врезаний-выводов инструмента геодезических кривых на $Д$ приводит к тому, что вместо воспроизводимой в рассмотренном выше способе (см. рис. 8.32)) таректории врезания 12-14 воспроизводится более короткая траектория 10-14.

Аналогичное имеет место и при выводе инструмента из контакта с обработанной деталью.

Чтобы установить уравнение траекторий врезаний-выводов инструмента, рассмотрим дифференциальную окрестность точки 10 на контуре 9. Направление 11 траектории врезания составляет с положительным направлением координатной U_∂ – линии некоторый угол ν_∂. Если касательная 15 к линии контура 9 в точке 10 составляет с проходящей через точку 10 координатной U_∂ – линией угол κ_∂, то $\nu_\partial = 0^\circ + \kappa_\partial$. Из этого следует, что траектория 10-14 врезания инструмента в заготовку и аналогичная ему траектория его вывода из контакта с обработанной деталью удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

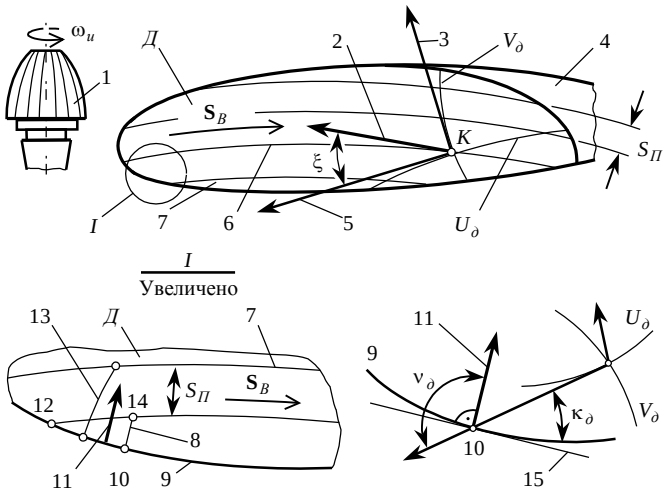


Рис. 8.33. Схема способа обработки сложных поверхностей деталей (а.с. №1331617).

$$\frac{dU_\partial}{dS_\partial} = -\frac{\sin\kappa_\partial}{\sqrt{E_\partial}}; \qquad \frac{d\nu_\partial}{dS_\partial} = \frac{\cos\kappa_\partial}{\sqrt{G_\partial}} \qquad \frac{d\kappa_\partial}{dS_\partial} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{G_\partial}}\frac{\partial \ln E_\partial}{\partial V_\partial}\sin\kappa_\partial + \frac{1}{\sqrt{E_\partial}}\frac{\partial \ln G_\partial}{\partial U_\partial}\cos\kappa_\partial\right).$$

Если $\cos\kappa_\partial = 0$, траектории врезаний-выводов инструмента находятся в результате решение более простой системы уравнений

$$\frac{\partial V_\partial}{\partial U_\partial} = -\sqrt{\frac{E_\partial}{G_\partial}}\cot\kappa_\partial; \qquad \frac{\partial \kappa_\partial}{\partial U_\partial} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{E_\partial}{G_\partial}}\frac{\partial \ln E_\partial}{\partial V_\partial} + \frac{\partial \ln G_\partial}{\partial U_\partial}\cot\kappa_\partial\right).$$

Этими системами дифференциальных уравнений описываются все наивыгоднейшие траектории врезаний-выводов инструмента.

Уменьшение суммарной длины траекторий врезаний-выводов инструмента обеспечивает соответствующее увеличение производительности обработки сложной поверхности детали на многокоординатном станке с ЧПУ.

В пределах области проявления влияния краевого эффекта скорость подачи $\mathbf{S}_B$ может быть постоянной или переменной, в том числе изменяться ступенчато, согласованно с изменением нагрузки на инструмент при его движении вдоль траекторий врезаний-выводов.

8.6.3. Положение исходной точки начала обработки. Третьим этапом решения задачи синтеза собственно глобального формообразования является установление координат наивыгоднейшей точки начала обработки сложной поверхности детали. Эта задача решается так.

Обрабатываемая поверхность детали имеет контур сложной формы (рис. 8.34). Чтобы решить задачу установления координат наивыгоднейшей точки начала обработки, для заданной поверхности $Д$ требуется установить область проявления влияния краевого эффекта (см. выше, рис. 8.31).

Затем обрабатываемый участок поверхности $Д$ покрывается семейством наивыгоднейших траекторий формообразования, найденных в результате решения задачи синтеза регионального формообразования. Из этого семейства выбираются две траектории, проходящие с противоположных сторон поверхности $Д$ касательно к ее контуру в точках c_1 и c_2 (см. рис. 8.34). На расстоянии $0{,}5\,S_П$ от каждой из точек c_1 и c_2 проходят две наивыгоднейшие исходные траектории формообразования, пересекающие контур поверхности $Д$ в точках a_1, a_2 и a_3, a_4. Соседние траектории формообразования отстоят от исходных на расстояние, кратное величине подачи $S_П$ на очередную строку формообразования. Следует обратить внимание на то, что длина дуги $s_П$, вдоль которой осуществляестя движение подачи $\mathbf{S}_П$ на очередную строку формообразования, кратна величине подачи $S_П$ только в исключительных случаях.

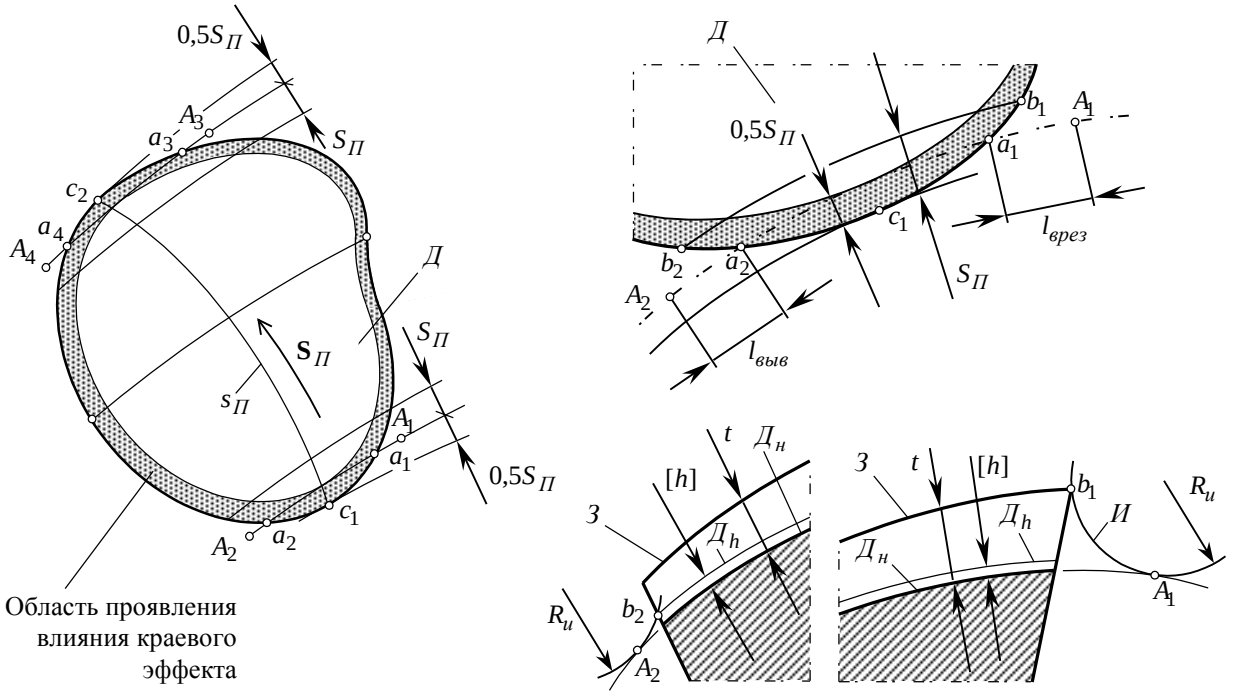


Рис. 8.34. К определению положения точки начала обработки сложной поверхности детали на многокоординатном станке с ЧПУ.

Вне пределов обрабатываемого участка поверхности $Д$ от точек a_1, a_2, a_3 и a_4 вдоль наивыгоднейших траекторий формообразования откладываются дуги $l_{врез}$ и $l_{выв}$, длина которых достаточна для врезания инструмента в заготовку и вывода его из контакта с обработанной деталью. Таким путем определяется два семейства точек: A_1, A_2, A_3, A_4 и A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*. Для первого семейства этих точек врезание инструмента в заготовку начинается в точке A_1 (см. рис. 8.34), тогда как для другого семейства (на рис. 8.34 не показано) – с противоположного конца траектории формообразования a_1a_2.

В точке A_1 траектории формообразования a_1a_2 инструмент касается поверхности $З$ заготовки в некоторой точке b_1; в точке A_2 он касается поверхности допуска $Д_h$ в точке b_2. Поверхность $З$ заготовки отстоит от номинальной поверхности $Д_н$ детали на толщину припуска t на обработку. Поверхность допуска $Д_h$ отстоит от номинальной поверхности $Д_н$ детали на величину допуска [h] на точность формообразования.

Расстояние $l_{врез}$ от границы контура детали до точки A_1 определяется толщиной t срезаемого припуска (которая может быть переменной как вдоль траектории формообразования, так и в пределах всего обрабатываемого участка поверхности детали), радиусом R_u исходной инструментальной поверхности $И$ применяемого инструмента и кривизной траектории врезания инструмента в заготовку. При выполнении точных расчетов следует также принимать во внимание положение (наклон относительно поверхности $Д_н$) и формы торцовой поверхности заготовки.

Необходимое для вывода инструмента из контакти с обработанной деталью расстояние $l_{выв}$ от границы контура до точки A_2 определяется величиной допуска [h] на точность формообразования поверхности детали, радиусом R_u исходной инструментальной поверхности $И$ применяемого инструмента и кривизной траектории вывода инструмента из контакта с обработанной деталью. Влияние положения и формы торцовой поверхности заготовки в этом случае можно не учитывать.

Из семейства точек[1] A_1, A_2, A_3, A_4 и A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^* выбирается та из них, начиная обработку с которой достигается наиболее высокая эффективность глобального формообразования – суммарные затраты времени на врезания-выводы инструмента при этом минимальны.

Решение задачи установления положения наивыгоднейшей точки начала обработки поверхности детали в более общей постановке усложняется, если требуется синтезировать наивыгоднейшее формообразование сложной поверхности детали с учетом формы и параметров наивыгоднейших траекторий врезаний-выводов инструмента, которые не совпадают с основными траекториями формообразования.

Перед началом обработки некоторая точка поверхности $И$ фасонного инструмента совмещается с наивыгоднейшей точкой начала обработки. Для этого в исходной точке (см. выше, рис. 3.2, с. 152) инструмент предварительно разворачивают относительно детали так, чтобы при касании поверхностей $Д$ и $И$ гарантированно выполнялись условия формобразования поверхностей деталей (см. выше, гл. 7). Если в некотором начальном относительном положении детали и инструмента их локальные системы координат $x_д^{(K)}y_д^{(K)}z_д^{(K)}$ и $x_и^{(K)}y_и^{(K)}z_и^{(K)}$ развернуты одна относительно другой так, что угол между нормалями $\mathbf{n}_д$ и $\mathbf{n}_и$ (т.е. угол между осями $z_д^{(K)}$ и $z_и^{(K)}$) равен θ (это угол нутации); угол между осью $x_д^{(K)}$ и линией пересечения плоскостей $x_д^{(K)}y_д^{(K)}$ и $x_и^{(K)}y_и^{(K)}$, которая является линией узлов – равен ψ (это угол прецессии), а угол между линией узлов и осью $x_и^{(K)}$ – равен ν (это угол чистого вращения), относительное положение систем координат $x_д^{(K)}y_д^{(K)}z_д^{(K)}$ и $x_и^{(K)}y_и^{(K)}z_и^{(K)}$ в этом случае описывается формулами Эйлера:

$$\begin{cases} l_1 = \cos\psi\cos\nu - \cos\theta\sin\psi\sin\nu; \\ m_1 = \sin\psi\sin\nu + \cos\theta\cos\psi\cos\nu; \\ n_1 = \sin\theta\sin\nu; \end{cases} \quad \begin{cases} l_2 = -\cos\psi\sin\nu - \cos\theta\sin\psi\cos\nu; \\ m_2 = -\sin\psi\sin\nu + \cos\theta\cos\psi\cos\nu; \\ n_2 = \sin\theta\cos\nu; \end{cases} \quad \begin{cases} l_3 = \sin\theta\sin\nu; \\ m_3 = -\sin\theta\cos\psi; \\ n_3 = \cos\theta, \end{cases}$$

где l_1 m_1 n_1 – направляющие косинусы оси $x_и^{(K)}$ в системе координат $x_д^{(K)}y_д^{(K)}z_д^{(K)}$; l_2, m_2, n_2 – то же самое для оси $y_и^{(K)}$ и l_3, m_3, n_3 – для оси $z_и^{(K)}$.

Требуемая ориентация инструмента относительно детали аналитически описывается оператором результирующего преобразования координат $\mathbf{Eu}(\phi,\theta,\psi)$ (см. выше, с. 416-417).

Последовательный разворот инструмента относительно детали на углы нутации θ, прецессии ψ и угол чистого вращения ν обеспечивает его правильную ориентацию относительно детали. После этого инструмент перемещается из исходной точки в точку начала обработки – это производится параллельным его переносом вдоль осей системы координат станка с ЧПУ. В результате начало системы координат $x_и^{(K)}y_и^{(K)}z_и^{(K)}$ инструмента совмещается с началом системы координат $x_д^{(K)}y_д^{(K)}z_д^{(K)}$ детали.

Для перемещения инструмента из исходной точки в точку начала формообразования может быть использован способ[2] расчета пространственной траектории перемещения инструмента.

---

[1] При построении точек A_1, A_2, …, A_4^* следует помнить, что длина дуги $s_П$, вдоль которой осуществляестя движение подачи $\mathbf{S}_П$ на очередную строку формообразования, обычно не кратна величине подачи $S_П$ (см. выше, с. 501). Поэтому одна из исходных траекторий не касается контура детали: либо траектория a_1a_2 касается контура поверхности $Д$ в точке c_1, а траектория a_3a_4 располагается за пределами детали и отстоит от точки c_2 на некоторое расстояние l, которое $0 < l < 0{,}5S_П$, либо траектория a_3a_4 касается контура на $Д$ в точке c_2, а траектория a_1a_2 отстоит от точке c_1 на расстояние $0 < l < 0{,}5S_П$. Это приводит к тому, что количество рассматриваемых точек удваивается и становится равным шестнадцати: восемь точек A_1, A_2, …, A_4^* для первого случая (когда траектория a_1a_2 касается контура поверхности $Д$ в точке c_1) и восемь аналогичных точек для второго случая (когда траектория a_3a_4 касается контура на $Д$ в точке c_2).

[2] Заявка №59-152043 (Япония). *Способ расчета пространственной траектории перемещения инструмента.*/Киси Хадзимэ, Сэки Санэки; Фанакку к.к. – Заявл. 17.02.1983, №58-25187, опубл. 30.08.1984. МКИ B 23 Q 15/00, B 23 Q 21/00. [РЖ 14Б, 1985, №10, реф. 10Б22П].

8.7. Репараметризация поверхности детали

Необходимость выполнения репараметризации сложных поверхностей деталей вызывается разными причинами. При решении задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования заданной поверхности детали интерес, в первую очередь, представляет возможность репараметризации поверхности $Д$ в связи с разметкой на ней сети кривых, с которыми совпадают наивыгоднейшие траектории формообразования.

В результате решения задачи синтеза глобального формообразования известны наивыгоднейшие траектории формообразования сложной поверхности детали и наивыгоднейшие траектории врезаний-выводов инструмента. Для упрощения последующей разработки управляющих программ для системы ЧПУ металлорежущим станком удобно так изменить исходную параметризацию поверхности детали, чтобы найденные траектории формообразования (и траектории врезаний-выводов инструмента) служили одним семейством новых координатных линий на поверхности детали, а ортогональные ему кривые – вторым семейством криволинейных (гауссовых) координат на $Д$. Выполнение такой репараметризации позволяет совместить координатные линии со строками формообразования, что способствует уменьшению объема вычислений при воспроизведении траекторий формообразования системой ЧПУ металлорежущим станком. Это одна из причин, подтверждающая целесообразность изменения исходной параметризации поверности детали.

Вторая причина вызвана стремлением размещать траектории формообразования в соответствие с формой и параметрами контура, ограничивающего обрабатываемый отсек поверхности детали, т.е. со стремлением использовать в качестве траекторий формообразования линии, направленные вдоль и эквидистантно контуру поверхности $Д$.

Причины, по которым необходимо или целесообразно изменять исходную параметризацию поверхности детали, изложенным не исчерпываются.

8.7.1. Виды исходной параметризации поверхностей деталей. Исходная параметризация поверхности детали может быть:

- произвольной (в этом случае в текущей точке поверхности $Д$ имеется свое значение угла $\omega_д$ между координатными $U_д -$ и $V_д -$линиями);
- изогональной (в этом случае угол $\omega_д$ между координатными $U_д -$ и $V_д -$линиями постоянен в пределах всего обрабатываемого отсека поверхности $Д$);
- ортогональной – это частный случай изогональной параметризации, когда во всех точках поверхности $Д$ угол $\omega_д$ не только постоянен, но и $\omega_д = \frac{\pi}{2}$. При этом координатные $U_д -$ и $V_д -$линии могут совпадать с линиями кривизны на $Д$ – в таком случае подвижная локальная система координат $x_д^{(K)} y_д^{(K)} z_д^{(K)}$ является трехгранником Дарбу.

Важным преимуществом ортогональной параметризации является то, что в результате применения таким образом параметризованных поверхностей деталей существенно упрощается аналитическое представление первой $Ф_{1.д}$ и второй $Ф_{2.д}$ основных дифференциальных форм Гаусса поверхности $Д$, что в свою очередь существенно упрощает аналитическое описание процесса формообразования и решение задачи синтеза наивыгоднейшего его варианта.

Кроме перечисленных, встречаются другие виды исходной параметризации поверхностей деталей.

8.7.2. Преобразование параметров. В случаях, когда исходная форма аналитического описания поверхности детали не удобна для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования, можно соответствующим образом изменить вид параметризации поверхности $Д$. Например, от произвольной перейти к ортогональной параметризации, в том числе и к такой, при которой координатные линии совпадают с линиями кривизны на $Д$. Использование ортогонально параметризованных поверхностей $Д(И)$ упрощает аналитическое описание прямого и обратного преобразований координат: переход от подвижной локальной системы координат $x_д^{(K)} y_д^{(K)} z_д^{(K)}$ к системе координат станка с ЧПУ $X_c Y_c Z_c$ и обратно; образование прямого и обратного циклов последовательных преобразований координат и т.п.

Потребность в этом часто возникает при использовании для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования заданной поверхности дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей при механической обработке деталей.

Если требуется ввести новую параметризацию регулярной[1] поверхности $Д$, а именно, от исходного ее уравнения $\mathbf{r}_д = \mathbf{r}_д(U_д; V_д)$ перейти к уравнению $\mathbf{r}_д = \mathbf{r}_д(U^*_д; V^*_д)$, где $U_д = U_д(U^*_д; V^*_д)$ и $V_д = V_д(U^*_д; V^*_д)$, исходя из

$$U^*_д = U^*_д[U_д; V_д]; \qquad V^*_д = V^*_д[U_д; V_д], \tag{8.66}$$

где $U^*_д$ и $V^*_д$ – новые криволинейные координаты на поверхности $Д$, можно найти производные для репараметризованной поверхности детали:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U^*_д} = \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д} \cdot \frac{\partial U_д}{\partial U^*_д} + \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д} \cdot \frac{\partial V_д}{\partial U^*_д};$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V^*_д} = \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д} \cdot \frac{\partial U_д}{\partial V^*_д} + \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д} \cdot \frac{\partial V_д}{\partial V^*_д}. \tag{8.67}$$

Тогда векторное произведение касательных равно:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U^*_д} \times \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V^*_д} = \begin{bmatrix} U_д & V_д \\ U^*_д & V^*_д \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д} \times \frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д} \right).$$

Необходимость выполнения условия $\frac{\partial \mathbf{r}_{д(u)}}{\partial U^*_{д(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{д(u)}}{\partial V^*_{д(u)}} \neq 0$ для репараметризованной поверхности детали требует введения в рассмотрение функционального определителя

$$\begin{bmatrix} U_д & V_д \\ U^*_д & V^*_д \end{bmatrix} = \frac{\partial(U_д; V_д)}{\partial(U^*_д; V^*_д)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U_д}{\partial U^*_д} & \frac{\partial V_д}{\partial U^*_д} \\ \frac{\partial U_д}{\partial V^*_д} & \frac{\partial V_д}{\partial V^*_д} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8.68}$$

Здесь и далее рассматриваются только такие преобразования параметров поверхности детали, которые преобразуют по-разному направленные векторы $\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U_д}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V_д}$ в исходной параметризации в также по-разному направленные векторы $\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial U^*_д}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}_д}{\partial V^*_д}$ после репараметризации. Иными словами, рассматриваются только преобразования, в результате которых одни независимые параметры поверхности $Д$ переходят в другие также независимые ее параметры.

Уравнения (66) составляются исходя из условия получения требуемой (удобной для решения задачи синтеза) параметризации поверхности $Д$.

В исходной параметризации матрица $[A_д]$ производных поверхности $Д$ детали имет вид:

---

[1]Замена параметров (репараметризация поверхности) допускается только на регулярных поверхностях $Д$ и только в случаях, когда якобиан преобразования отличен от нуля.

$$[A_{\partial}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_{\partial}}{\partial U_{\partial}} & \dfrac{\partial Y_{\partial}}{\partial U_{\partial}} & \dfrac{\partial Z_{\partial}}{\partial U_{\partial}} \\ \dfrac{\partial X_{\partial}}{\partial V_{\partial}} & \dfrac{\partial Y_{\partial}}{\partial V_{\partial}} & \dfrac{\partial Z_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial U_{\partial}} & \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial V_{\partial}} \end{bmatrix}. \tag{8.69}$$

Эта матрица позволяет просто расчитать сначала первую $\Phi^{*}_{1.\partial}$, а затем вторую $\Phi^{*}_{1.\partial}$ основные квадратичные формы поверхности детали, что впоследствие определяет репараметризованную поверхность $Д$ с точностью до ее расположения в пространстве.

Матрицу производных $[A^{*}_{\partial}]$ для репараметризованной поверхности детали, аналогичную матрице (69), можно получить, если $[A_{\partial}]$ умножить справа на якобиан преобразования $[J]$:

$$[A^{*}_{\partial}] = [A_{\partial}] \cdot [J], \tag{8.70}$$

где якобиан преобразования равен

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U_{\partial}}{\partial U^{*}_{\partial}} & \dfrac{\partial U_{\partial}}{\partial V^{*}_{\partial}} \\ \dfrac{\partial V_{\partial}}{\partial U^{*}_{\partial}} & \dfrac{\partial V_{\partial}}{\partial V^{*}_{\partial}} \end{bmatrix}.$$

Формула (70) очевидно следует из (68), поскольку

$$[A^{*}_{\partial}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial U^{*}_{\partial}} & \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial}}{\partial V^{*}_{\partial}} \end{bmatrix} = [A_{\partial}] \cdot [J].$$

Использование формулы (70) дает возможность, в частности, с точкой K касания поверхностей $Д$ и $И$ связать канонический репер. Обычно это позволяет избежать громоздких преобразований.

Дискриминант первого порядка репараметризованной поверхности детали расчитывается по формуле:

$$E^{*}_{\partial} G^{*}_{\partial} - (F^{*}_{\partial})^{2} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial U_{\partial}}{\partial U^{*}_{\partial}} & \dfrac{\partial V_{\partial}}{\partial U^{*}_{\partial}} \\ \dfrac{\partial U_{\partial}}{\partial V^{*}_{\partial}} & \dfrac{\partial V_{\partial}}{\partial V^{*}_{\partial}} \end{vmatrix} (E_{\partial} G_{\partial} - F^{2}_{\partial}).$$

Открытым остается вопрос определения зависимостей вида (66). Эти зависимости могут быть заданы. Если они не известны, то при их выводе или составлении можно потребовать, чтобы угол ω_{∂}, во-первых, был постоянным и, во-вторых, чтобы $\omega_{\partial} \equiv \dfrac{\pi}{2}$ в пределах всего обрабатываемого участка поверхности $Д$. Возможна постановка других требований, выполнение которых оказывается целесообразным при решении задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей.

Очевидно, что в рассматриваемой постановке задача репараметризации поверхности детали имеет бесконечное множество решений. Эту неопределенность можно устранить, допустив, например, что $U^{*}_{\partial} = U_{\partial}$. Тогда вместо (66) требуется найти только одно уравнение вида $V^{*}_{\partial} = V^{*}_{\partial}(U_{\partial}; V_{\partial})$.

Параметризация и репараметризаци аналитически описаных регулярных поверхностей деталей общемашиностроительного назначения производится аналогично.

8.7.3. Рациональная параметризация поверхности детали, имеющей сложный в плане контур. Обрабатываемый участок поверхности $Д$ детали имеет сложный контур C, состоящий из гладких дуг C_{11}, C_{12}, C_{21} и C_{22}. Проекцией области $\Omega \in Д$ на некоторую плоскость $Д_0$, принятую в качестве координатной, является область Ω_0. Однозначная функция H преставляет собой расстояние от $Д$ до $Д_0$ в направлении нормали $\mathbf{n}_0$ к $Д_0$.

Предположим, что область Ω_0 на плоскости $Д_0$, отнесенной к некоторой параметризации

$$\mathbf{r}^{\phi} = \mathbf{r}^{\phi}(\alpha^i), \tag{8.71}$$

неканоническая, т.е. ее контурные линии C^0_{ij} не совпадают с координатными линиями $\alpha^i = Const \in Д_0$.

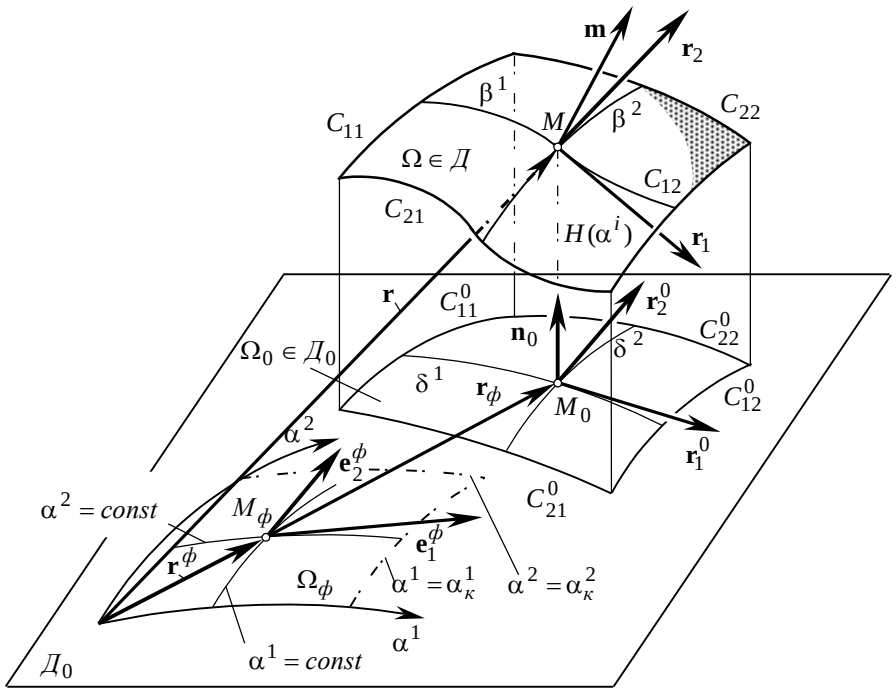


Рис. 8.35. Параметризация поверхности $Д$, имеющей сложный контур в плане.

Решение задачи рациональной параметризации поверхности $Д$ такого типа можно выполнить в два этапа, построив суперпозицию двух последовательных отображений.

На первом этапе на плоскости отсчета $Д_0$ выбирается соответствующая каноническая в параметризации (71) область Ω_{ϕ}, ограниченная координатными линиями $\alpha^i = \alpha^i_н$ (рис. 8.35) и с помощью равенства вида

$$\mathbf{r}(\alpha^i) = \mathbf{r}^{\phi}(\alpha^i) + F_{\kappa}(\alpha^i)\mathbf{r}^{\kappa}_{\phi} = \mathbf{r}^{\phi}(\alpha^i) + F^{\kappa}(\alpha^i)\mathbf{r}^{\phi}_{\kappa},$$

где $\mathbf{r}^{\phi}_{\kappa}$ и $\mathbf{r}^{\kappa}_{\phi}$ – ковариантные и контравариантные базисные векторы на поверхности $Д$, соответствующие ее параметризации уравнением вида (71);

F_κ и F^κ – ковариантные и контрвариантные компоненты вектора фиктивных перемещений, которые следует построить исходя из условия обеспечения взаимно-однозначного соответствия контурных линий;

отобразим ее на область $\Omega_0 \in Д_0$:

$$\mathbf{r}^0(\alpha^1,\alpha^2) = \mathbf{r}^\phi(\alpha^1,\alpha^2) + F_i(\alpha^1,\alpha^2)\,\mathbf{r}^i_\phi, \tag{8.72}$$

где $\mathbf{r}^\phi(\alpha^i)$ – радиус-вектор некоторой точки $M_\phi \in \Omega_\phi$, которая отображается в точку $M_0 \in \Omega_0$ с радиус-вектором $\mathbf{r}^0$;

$\mathbf{r}^i_\phi$ – взаимные базисные векторы в точке $M_\phi \in \Omega_\phi$;

F_1, F_2 – компоненты вектора фиктивных перемещений точки $M_\phi \in \Omega_\phi$, которые в зависимости от формы области Ω_ϕ могут быть построены одним из известным методов (Галимов К.З., Паймушин В.Н., 1985).

По заданному уравнению (71) плоскости $Д_0$ и построенных функциях F_i в каждой точке области $\Omega_0 \in Д_0$ определяется:

- радиус-вектор $\mathbf{r}_i$

$$\mathbf{r}_i = (\delta_i^\kappa + e_i^{\phi\kappa})\,\mathbf{r}^\phi_\kappa = (a_{i\kappa} + e^\phi_{i\kappa})\,\mathbf{r}^\kappa_\phi;$$

- основные базисные векторы $\mathbf{r}_i^0$ в точке $M_0 \in \Omega_0$, направленные по касательным к координатным линиям, соответствующим отображению (72) и обозначенным на рис. 8.35 линиями $\delta^i = const \in \Omega_0$

$$\mathbf{r}_i^0 = (\delta_i^\kappa + e_i^{\phi\kappa})\,\mathbf{r}^\phi_\kappa = (a^\phi_{i\kappa} + e^\phi_{i\kappa})\,\mathbf{r}^\kappa_\phi; \tag{8.73}$$

- ковариантные компоненты первого метрического тензора

$$a^0_{i\kappa} = a^\phi_{i\kappa} + 2\varepsilon^\phi_{i\kappa} \tag{8.74}$$

и символы Кристоффеля второго рода

$$\Gamma^{0\kappa}_{ij} = \Gamma^{\phi\kappa}_{ij} + A^{\phi\kappa}_{ij} \tag{8.75}$$

в точке $M_0 \in \Omega_0$. Входящие в (73) величины $e_i^{\phi\kappa}$ и $e^\phi_{i\kappa}$ определяются по формулам $e_i^{\phi\kappa} = \nabla^\phi_i F^\kappa$; $e^\phi_{i\kappa} = \nabla^\phi_i F_\kappa$; величины $2\varepsilon^\phi_{i\kappa}$ – по формулам $2\varepsilon^\phi_{i\kappa} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_\kappa - \mathbf{r}^\phi_i \cdot \mathbf{r}^\phi_\kappa = e^\phi_{i\kappa} + e^\phi_{\kappa i} + a^{js}_\phi e^\phi_{ij} e^\phi_{\kappa s}$, а величины $A^{0j}_{i\kappa}$ – по формулам

$$A^{0j}_{i\kappa} = a_0^{jn} P^\phi_{n,i\kappa}, \tag{8.76}$$

где в рассматриваемом случае $a_0^{11} = \dfrac{a^0_{22}}{a_0}$; $a_0^{22} = \dfrac{a^0_{11}}{a_0}$; $a_0^{12} = -\dfrac{a^0_{12}}{a_0}$; $a_0 = a^0_{11}a^0_{22} - (a^0_{12})^2$ и

$$P^\phi_{j,i\kappa} = \nabla^\phi_i \varepsilon^\phi_{j\kappa} + \nabla^\phi_\kappa \varepsilon^\phi_{ij} - \nabla^\phi_j \varepsilon^\phi_{i\kappa}. \tag{8.77}$$

На втором этапе решения рассматриваемой задачи параметризованная уравнением (72) область $\Omega_0 \in Д_0$ отображается на сложную поверхность $Д$ детали при помощи векторного равенства

$$\mathbf{r}(\alpha^i) = \mathbf{r}^0(\alpha^i) + H(\alpha^i)\mathbf{n}_0, \tag{8.78}$$

которое с учетом (72) принимает вид

$$\mathbf{r}(\alpha^i) = \mathbf{r}^{\phi}(\alpha^i) + F_{\kappa}(\alpha^i)\mathbf{r}_{\phi}^{\kappa} + H(\alpha^i)\mathbf{n}_0. \tag{8.79}$$

Отсюда следует, что в качестве гауссовых координат некоторой точки $M \in \Omega$, проекцией которой на $Д_0$ является точка $M_0 \in \Omega_0$, принимаются координаты точки $M_{\phi} \in \Omega_{\phi}$ в параметризации плоскости $Д_0$ уравнением (71).

Для базисных векторов (73) и $\mathbf{r}_0^i = a_0^{i\kappa}\mathbf{r}_{\kappa}^0$ в точках области $M_0 \in \Omega_0$ справедливы формулы

$$\mathbf{r}_{i\kappa}^0 = \Gamma_{i\kappa}^{0j}\mathbf{r}_j^0; \qquad \mathbf{r}_{\kappa}^{0i} = -\Gamma_{\kappa j}^{0i}\mathbf{r}_0^j, \tag{8.80}$$

в которых символы Кристоффеля $\Gamma_{i\kappa}^{0j}$ определены выше (75).

Если в уравнении (71) параметры α^1 и α^2 определяют на плоскости $Д_0$ два семейства ортогональных координатных линий, то при решении рассматриваемой задачи вместо (72) следует пользоваться равенством

$$\mathbf{r}^0(\alpha^i) = \mathbf{r}^{\phi}(V) + F_1(\alpha^i)\mathbf{e}_1^{\phi} + F_2(\alpha^i)\mathbf{e}_2^{\phi},$$

где $\mathbf{r}_1^{\phi}$ и $\mathbf{r}_2^{\phi}$ – единичные векторы координатных линий $\alpha^1 = Const$ и $\alpha^2 = Const$ в точке $M_{\phi} \in \Omega_{\phi}$.

При этом имеют место используемые вместо (73)-(77) соотношения

$$\mathbf{r}_i^0 = A_i^{\phi}(\delta_{is} + e_{is}^{\phi})\mathbf{e}_s^{\phi}; \qquad a_{i\kappa}^0 = A_i^{\phi}A_{\kappa}^{\phi}(\delta_{\kappa i} + 2\varepsilon_{\kappa i}^{\phi}); \qquad 2\varepsilon_{i\kappa}^{\phi} = e_{i\kappa}^{\phi} + e_{\kappa i}^{\phi} + e_{is}^{\phi}e_{\kappa s}^{\phi};$$

$$\mathbf{r}_0^1 = \frac{[(1+2\varepsilon_{22}^{\phi})(1+e_{11}^{\phi}) - 2\varepsilon_{12}^{\phi}e_{21}^{\phi}]\mathbf{e}_1^{\phi} + [(1+2\varepsilon_{12}^{\phi})e_{12}^{\phi} - 2\varepsilon_{12}^{\phi}(1+e_{22}^{\phi})]\mathbf{e}_2^{\phi}}{A_1^{\phi}[(1+e_{11}^{\phi}) - e_{12}^{\phi}e_{21}^{\phi}]^2}, \qquad \overrightarrow{1,2},$$

в которых по-прежнему

$$e_{11}^{\phi} = \frac{F_{1,1}}{A_1^{\phi}} + \frac{F_2}{A_1^{\phi}A_2^{\phi}}A_{1,2}^{\phi}; \qquad e_{12}^{\phi} = \frac{F_{2,1}}{A_1^{\phi}} - \frac{F_1}{A_1^{\phi}A_2^{\phi}}A_{1,2}^{\phi}; \qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}};$$

$$a_0 = [(1+e_{11}^{\phi}) - e_{12}^{\phi}e_{21}^{\phi}]^2(A_1^{\phi}A_2^{\phi})^2,$$

а входящие в (80) символы Кристоффеля вычисляются по развернутым формулам

$$a\Gamma_{11}^1 = \frac{a_{22}a_{11,1}}{2} - a_{12}\left(a_{12,1} - \frac{a_{11,2}}{2}\right); \qquad a\Gamma_{12}^1 = \frac{a_{22}a_{11,2} - a_{12}a_{22,1}}{2};$$

$$a\Gamma_{22}^1 = a_{22}\left(a_{12,2} - \frac{a_{22,1}}{2}\right) - \frac{a_{12}a_{22,2}}{2}; \qquad \overrightarrow{1,2}$$

подстановкой в них выражений (81).

Пример 8.19. Рассмотрим задачу параметризации сферического участка поверхности $Д$ детали некоторого радиуса R, имеющей эксцентрично (с эксцентриситетом c) расположенное отверстие, проекция области $\Omega \in Д$ которой на плоскость координат O_1xy имеет вид (рис. 8.36).

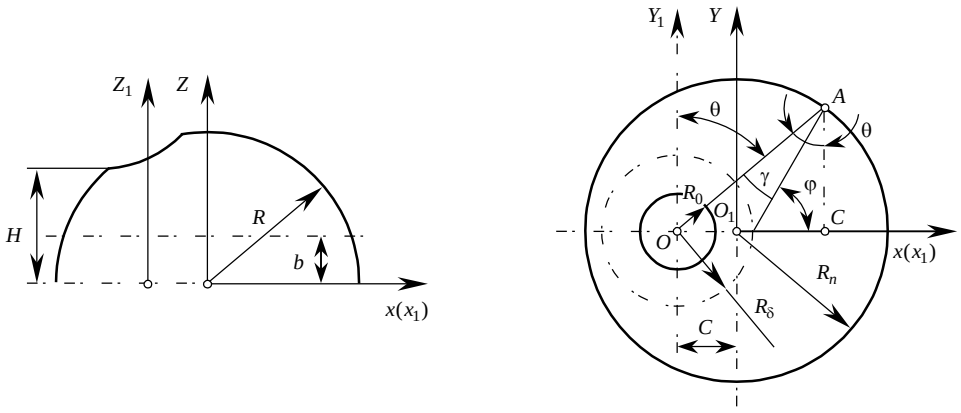


Рис. 8.36. Параметризация поверхности детали в виде полусферы с эксцентрично расположенным отверстием.

Обозначим через b расстояние между плоскостью граничного среза поверхности $Д$ и плоскостью координат O_1xy. Используем последнюю в качестве координатной плоскости. Область $\Omega_0 \in Д_0$ в рассматриваемом случае является двусвязной. Полюс полярной системы координат целесообразно совместить с точкой O (см. рис. 8.36). Если принять $\alpha_н^1 = r_н = R_0$, это позволяет считать $F_1^н(\theta) = 0$.

Чтобы найти длину отрезка AB, рассмотрим треугольники ΔOAO_1 и ΔOAC, из анализа которых запишем

(8.82) $$OC = c + R_П \cos\varphi = OA\sin\theta \ ;$$

(8.83) $$\frac{OA}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{R_П}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{R_П}{\cos\theta} \ .$$

Из равенства (83) находим, что

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - OA^2 \frac{\cos^2\varphi}{R_П^2}} \ ,$$

подставляя которое в (82), получим

(8.84) $$OA^2 - 2 \cdot OA \cdot c \cdot \sin\theta + c^2 - R_П^2 = 0 \ .$$

Принимая во внимание равенство $F_1^к(\theta) = OA - R_\delta$ (см. рис. 8.36), из (84) найдем

$$F_1^к(\theta) = c \cdot \sin\theta - R_\delta + \sqrt{R_П^2 - c^2\cos^2\theta}$$

Функция $F_1(r, \theta)$ определяется формулой

(8.85) $$F_1(r, \theta) = A(\theta) + r\,B(\theta) \ ,$$

где в силу $F_1^н(\theta) = 0$

$$A(\theta) = \frac{R_0 \cdot H_1^{\kappa}(\theta)}{R_0 - R_\delta}; \qquad B(\theta) = \frac{H_1^{\kappa}(\theta)}{R_0 - R_\delta}. \tag{8.86}$$

Построим теперь функцию $H(r,\theta)$, входящую в уравнение (78) и определяющую отображение области $Д_0$ на область $\Omega \in Д$. Из уравнения поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ для точек верхней полусферы $Д$ запишем $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Перенося начало координат в точку O и имея в виду, что $H = Z$, получим

$$H = \sqrt{R^2 - (x_1 - c)^2 - y_1^2} \tag{8.87}$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}^0$ определяет точку с координатами $r^* = r + F_1$ и θ, поэтому

$$\begin{cases} x_1 = r^* \sin\theta = (r + F_1)\sin\theta; \\ y_1 = r^* \cos\theta = (r + F_1)\cos\theta, \end{cases} \tag{8.88}$$

где функция F_1 определяется формулой (85). Внося (87) и (88), для функции $H(r,\theta)$ окончательно получим

$$H(r,\theta) = \sqrt{R^2 - c^2 - (r + H_1)^2 + 2(r + H_1)c\sin\theta}. \tag{8.89}$$

Далее для поверхности $Д$ могут быть найдены компоненты первого и второго метрических тензоров, а также символы Кристоффеля второго рода.

Приведенное решение справедливо лишь для случая, когда $b > 0$. При $b = 0$ во всех точках, соответствующих $r = R_\delta$, угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_1^0$ становится равным $\frac{\pi}{2}$, что приводит отображение (78) к вырождению.

8.7.4. Приведение квадратичных форм к главным осям. Под *квадратичной формой* относительно переменных u_1, u_2, …, u_n понимается выражение вида $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ и $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ – симметричная матрица, a_{ik} – действительные числа. Матрицу $\mathbf{A}$ принято называть *матрицей квадратичной формы*. Для решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей интерес, в первую очередь, представляют случаи, когда $u_1 = U_\partial$ и $u_2 = V_\partial$.

Например, выражение $\Phi_{1.\partial} = dU_\partial^2 - 6\,dU_\partial dV_\partial + 4dV_\partial^2$ является квадратичной формой, так как

$$\Phi_{1.\partial} = [dU_\partial, dV_\partial] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dU_\partial \\ dV_\partial \end{bmatrix} = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}.$$

Задача репараметризации поверхности детали в рассматриваемом случае сводится к нахождению такой ортогональной матрицы $\mathbf{C}$, которая после введения новых переменных v_1, v_2, …, v_n при помощи уравнения вида $\mathbf{u} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}$ преобразует заданную квадратичную форму к виду:

$$\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \xrightarrow[\mathbf{u}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{v}]{} \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \ldots + \lambda_n v_n^2,$$

который содержит только слагаемые с квадратами текущих координат. Такой вид квадратичной формы является *каноническим*.

После замены переменных $\mathbf{u} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}$ форма $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$ преобразуется к виду $\mathbf{v}^T \cdot \left| \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \right| \cdot \mathbf{v}$ и содержит слагаемые только с квадратами переменных. Таким образом, задача репараметризации поверхности детали сводится к нахождению такой ортогональной матрицы $\mathbf{C}$, которая приводит матрицу $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ к диагональному виду. Это всегда можно выполнить для симметричной матрицы $\mathbf{A}$, если в качестве столбцов искомой матрицы $\mathbf{C}$ выбрать ортонормированную систему собственных векторов матрицы формы $\mathbf{A}$. Тогда по-

средством замены $\mathbf{u} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}$ квадратичная форма приводится к виду $\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \ldots + \lambda_n v_n^2$, где λ_i – собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ с учетом кратности. Собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, стоящие в столбцах $\mathbf{C}$, называются *главными осями* квадратичной формы, а процесс преобразования квадратичной формы в ее каноническую форму – *приведением к главным осям* или *приведением к каноническому виду*.

8.8. Обобщенная структура системы автоматизации программирования обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ

Разработка высокоэффективного процесса формообразования сложной поверхности детали на многокоординатном станке с ЧПУ включает ряд основных задач:

- определение наивыгоднейшей ориентации детали на столе многокоординатного станка с ЧПУ;
- установление формы и параметров исходной инструментальной поверхности *И* применяемого инструмента в функции обрабатываемой поверхности *Д* детали;
- решение траекторных задач – расчет параметров наивыгоднейших траекторий формообразования сложной поверхности детали;
- нахождение положения и вычисление координат наивыгоднейшей точки начала формообразования поверхности *Д* на многокоординатном станке с ЧПУ и др.

Решение перечисленных задач и проблемы синтеза наивыгоднейшего формообразования вцелом может быть получено на основе применения дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей при механической обработке деталей. Этот метод позволяет синтезировать процесс формообразования исходя из достижения максимальной его эффективности при гарантированном обеспечении заданной точности обработки.

Практическое решение этой проблемы требует разработки *САП* – системы автоматизации программирования обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ (Радзевич С.П., 1988).

В качестве входной в *САП* используется информация (I) о форме, параметрах и требованиях к точности формообразования поверхности *Д* детали (рис. 8.37). Исходя из этого для обрабатываемого участка поверхности *Д* определяется (II) наивыгоднейшая его ориентация на столе станка с ЧПУ. Затем профилируется (III) специальный режущий инструмент для обработки заданной детали. После этого решаются (IV) траекторные задачи и устанавливается (V) положение наивыгоднейшей точки начала обработки.

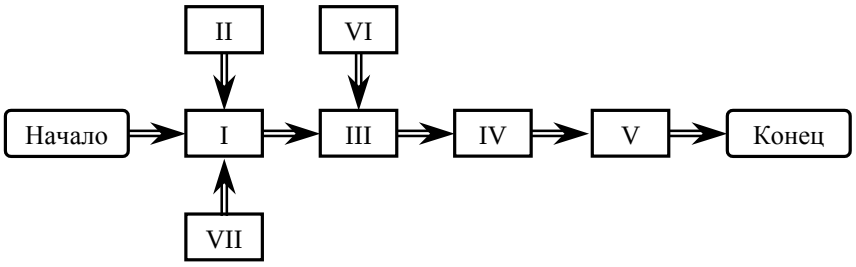
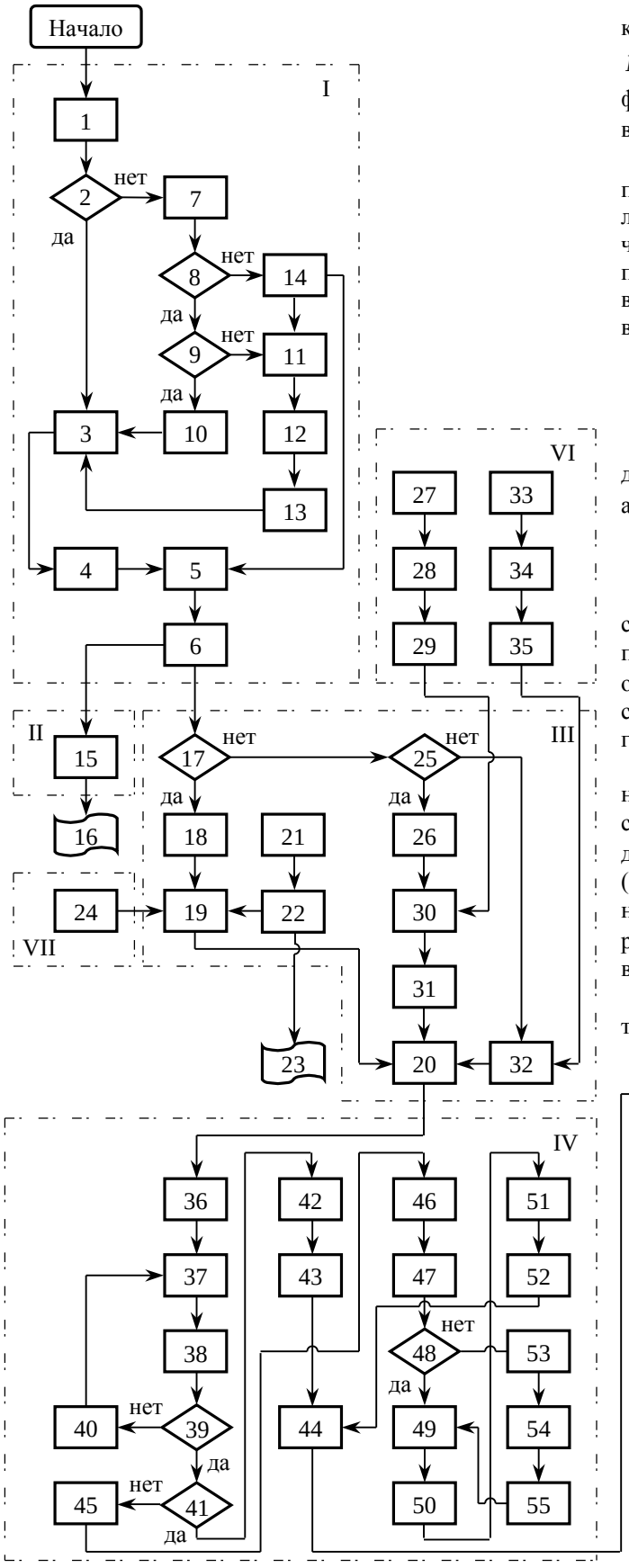


Рис 8.37. Основные этапы решения задачи синтеза наивыгоднейшего формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ

Если имеется возможность выбора готового инструмента из имеющейся его номенклатуры, по требуемому критерию эффективности формообразования выбирается наивыгоднейший инструмент из имеющегося в наличии (VI). Дополнительно могут быть учтены (VII) требования по поддержанию в процессе обработки заданных (не обязательно экстремальных) параметров геометрии касания поверхностей *Д* и *И*.

На базе дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей может быть разработано реализуемое на ЭВМ полное математическое обеспечение *САП* обработки на многокоординатных станках с ЧПУ сложных поверхностей деталей (рис. 8.38).

На первом этапе *САП* определяются основные геометрические параметры формы поверхности *Д*, заданной (1) известным методом. В случае аналитического задания поверхности *Д* детали (2) вводится (3) ее уравнение, затем расчитываются (4) первые и вторые производные. После этого определяются (5) гауссовы



коэффициенты E_∂, F_∂, G_∂ первой $\Phi_{1.\partial}$ и L_∂, M_∂, N_∂ второй $\Phi_{2.\partial}$ основных квадратичных форм поверхности $Д$, которые подаются (6) на выход подсистемы (I).

При дискретном задании поверхности $Д$ (7) принимается (8) решение о ее аппроксимации целиком (9) одной аналитической функцией, после чего с заданной точностью производится (10) аппроксимация. Последующие этапы программирования обработки сложной поврехности детали повторяются:

$$\ldots \to (10) \to (3) \to (4) \to (5) \to (6) \to \ldots$$

Если принято (9) решение аппроксимировать дискретно заданную поверхность $Д$ несколькими аналитическими функциями, то на этапах:

$$\ldots \to (11) \to (12) \to (13) \to \ldots$$

с заданной точностью производится кусочная аппроксимация поверхности $Д$ с гарантированным обеспечением стыковки смежных отсеков аппроксимирующих функций по требуемому порядку гладкости.

Если принято (8) решение об обработке входной информации о дискретно заданной поверхности $Д$ в неаппроксимированном виде, методами дифференцирования дискретно заданных функций (см. гл. 1) определяются (14) необходимые частные производные поверхности $Д$ по всем ее параметрам, а полученные значения частных производных подаются в блок (5).

По расчитанным (6) значениям коэффициентов первых двух $\Phi_{1.\partial}$ и $\Phi_{2.\partial}$ основных квадра-

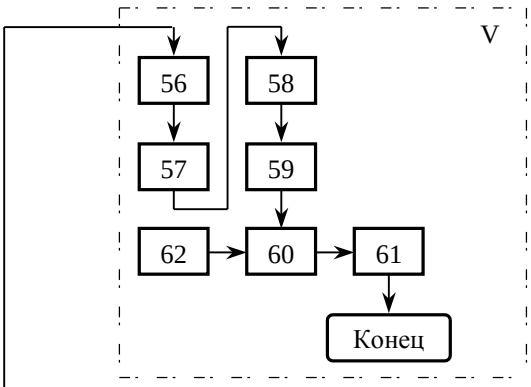


Рис. 8.38. Укрупненная структура *САП* обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

тичных форм поверхности $Д$ в подсистеме (II) расчитываются (15) параметры наивыгоднейшей ориентации поверхности $Д$ на столе станка с ЧПУ, которые подаются (16) на выход этой подсистемы.

Подсистема (III) профилирования фасонного режущего инструмента для обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ функционирует по результатам расчетов, произведенных в подсистеме (I): по значениям гауссовых коэффициентов $E_д$, $F_д$, $G_д$ и $L_д$, $M_д$, $N_д$ поверхности $Д$. В случаях, когда имеется возможность для заданной детали спроектировать, изготовить, перетачивать и контролировать специальный фасонный режущий инструмент, принимается (17) решение о его профилировании и изготовлении. Для этого на основе $\mathbb{R}$-отображения поверхностей (см. гл. 5) расчитываются (18)-(19) гауссовы коэффициенты E_u, F_u, G_u и L_u, M_u, N_u первых двух основных квадратичных форм $Ф_{1.u}$ и $Ф_{2.u}$ исходной инструментальной поверхности $И$, которые подаются (20) на выход подсистемы (III). По начальным условиям (21), определяющим положение инструмента в системе координат станка с ЧПУ, и гауссовым коэффициентам первых двух основных квадратичных форм (19) определяются (22) параметры формы и геометрии наивыгоднейшей поверхности $И$ инструмента, которые затем выводятся (23) на печать. Подсистема (VII) $САП$ допускает возможность профилирования такого специального фасонного режущего инструмента, при использовании которого в процессе формообразования обеспечиваются (24) наивыгоднейшие значения параметров геометрии касания поверхностей $Д$ и $И$ и тем самым достигается максимум его эффективности.

Если нет возможности для заданной детали спроектировать и изготовить специальный фасонный режущий инструмент, принимается (17) решение о выборе (25) наилучшего инструмента из имеющейся его номенклатуры либо о программировании обработки для заданного инструмента.

В первом случае производится:

$$\ldots \to (27) \to (28) \to (29) \to \ldots$$

определение параметров формы поверхности $И_i$ всех инструментов из его номенклатуры, на основании чего имеющиеся в наличии инструменты сопоставляются (30) между собой по эффективности их использования для формообразования заданной поверхности $Д$ детали и производитсся (31) выбор наилучшего инструмента. Гауссовы коэффициенты E_u, F_u, G_u и L_u, M_u, N_u первых двух основных квадратичных форм $Ф_{1.u}$ и $Ф_{2.u}$ поверхности $И$ выбранного инструмента подаются (20) на выход подсистемы (III).

Во втором случае, когда инструмент задан, по уравнению его исходной инструментальной поверхности $И$ расчитываются

$$\ldots \to (33) \to (34) \to (35) \to (32) \to \ldots$$

гауссовы коэффициенты E_u, F_u, G_u и L_u, M_u, N_u, которые затем подаются (20) на выход подсистемы (III).

Результатом работы подсистемы (III) является полная информация об исходной инструментальной поверхности наивыгоднейшего в конкретных условиях обработки инструмента.

Синтез наивыгоднейших траекторий формообразования производится в подсистеме (IV). Для этого расчитываются (36) параметры ортов $\mathbf{n}_д$ и $\mathbf{n}_u$ нормалей к поверхностям $Д$ и $И$, после чего поверхность $И$ вводится (37) в касание с поверхностью $Д$ путем совмещения орта $\mathbf{n}_u$ с противоположным направлением орта $\mathbf{n}_д$ в точке $К$ касания поверхностей $Д$ и $И$. Затем проверяется (38) выполнение условий формообразования поверхностей деталей, в случае возможного нарушения которых (39) вводится (40) коррекция на положение инструмента относительно детали. Если условия формообразования поверхностей деталей выполняются (39) и формообразование поверхности $Д$ производится (41) при постоянной ширине строки формообразования, то наивыгоднейшие траектории формообразования расчитываются (42) как линии, эквидистантные к геодезической линии наибольшей длины на обрабатываемом участке поверхности $Д$ с учетом (43), при необходимости, влияния на параметры траекторий формообразования формы и параметров границ контура участка поверхности $Д$ (с учетом краевого эффекта), после чего параметры наивыгоднейших для данного случая обработки траекторий формообразования подаются (44) на выход подсистемы (IV).

Если обработка детали производится (41) инструментом, исходная инструментальная поверхность $И$ которого касается поверхности $Д$ в точке (это наиболее распространенный случай касания поверхностей $Д$ и $И$ при обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ), расчитываются (45) параметры индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ поверхностей $Д$ и $И$, затем движениями ориентирования второго рода с заданной точкой на поверхности $Д$ вводится (46) в касание наивыгоднейшая точка поверхности $И$ и движениями ориентирования первого рода инструмент наивыгоднейшим образом ориентируется (47) относительно детали.

Далее, если для обработки используется (48) инструмент, полностью воспроизводящий поверхность $И$ (а это практически все абразивные инструменты, инструменты типа шеверов и пр.), устанавливается (49) наивыгоднейшее направление мгновенного относительного движения формообразования, совокупность которых определяет (50) наивыгоднейшие траектории формообразования. После учета (51), при необходимости, влияния краевого эффекта и степени интерференции (52) соседних строк формообразования параметры наивыгоднейших траекторий формообразования подаются (44) на выход подсистемы (IV).

Если обработка детали производится (48) инструментом, дискретно воспроизводящим исходную инструментальную поверхность $И$ в виде конечного числа отдельных редущих кромок (это практически все виды фасонного лезвийного режущего инструмента), предварительно учитываются (53) ограничения на параметры наивыгоднейших траекторий формообразования дискретности воспроизведения в реальном инструменте его поверхности $И$, производится (54) распределение допуска на точность между элементарными составляющими результирующей погрешности формообразования и учитываются (55) ограничения на параметры траекторий формообразования, накладываемые критическими значениями кинематических геометрических параметров режущих кромок лезвийного инструмента. Далее обработка информации в $САП$ производится в такой последовательности:

$$\ldots \rightarrow (55) \rightarrow (49) \rightarrow (50) \rightarrow (51) \rightarrow (52) \rightarrow (44) \rightarrow \ldots$$

Результатом функционирования этапа (IV) в $САП$ (см. рис. 8.38) являются параметры наивыгоднейших траекторий формообразования сложной поверхности детали на многокоординатном станке с ЧПУ.

Последняя (V) подсистема позволяет расчитать координаты наивыгоднейшей точки начала обработки сложной поверхности детали – точки, в которую в начале обработки перемещается инструмент из стартовой точки. Для этого устанавливается (56) непересекающаяся сеть линий на поверхности $Д$, из которой выше были выбраны наивыгоднейшие траектории формообразования. При необходимости учитывается влияния краевого эффекта и других ограничений на наивыгоднейшие направления движений формообразования. Из полученного семейства линий отбираются (57) две линии, касательные с проитивоположных сторон к контуру, ограничивающему обрабатываемый участок поверхности $Д$ или совпадающие с ним. После этого из точек касания крайних линий построенной указанным путем сети линий на $Д$ производится (58) смещение от ограничивающего контура в сторону детали на полшага между соседними строками формообразования. Вдоль полученных таким образом наивыгоднейших крайних траекторий отсчитываются (59) расстояния от контура, необходимые для врезания инструмента в заготовку и вывода его из контакта с ней. Из полученных точек выбирается (60) одна, при обработке начиная с которой при прочих одинаковых условиях обеспечивается наивысшая эффективность формообразования. Координаты выбранной точки начала обработки подаются (61) на выход подсистемы (V).

Процедура выбора одной точки из найденных может быть дополнена (62) информацией об особенностях врезания инструмента в заготовку и вывода его из контакта с ней (попутное или встречное фрезерование, тип применяемого режущего инструмента и др.), выбором такой точки, при движении из которой суммарная длина траекторий врезаний-выходов инструмента минимальна, а также другими дополнительными требованиями.

Система автоматизации программирования (см. рис. 8.38) является потенциально полной. Она допускает возможность учета информации не только о форме, параметрах и требованиях к точности формообразования сложной поверхности детали, но и информации о физических процессах, всегда протекающих в реальном процессе обработки деталей на металлорежущих станках. Это позволит на более высоком уровне синтезировать технологии наивыгоднейшей обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

Глава 9. Топология формообразованных поверхностей деталей

К важнейшим показателям качества деталей относится их точность. Требования к точности изготовления изделий непрерывно растут, а темпы этого роста более высокие, чем темпы роста возможностей технологии и оборудования для обеспечения требуемого ее уровня.

Одним из аспектов точности является топология обработанных поверхностей деталей.

Топология поверхностей деталей изучает некоторые из составляющих результирующей погрешности – те из них, которые определяются геометрией поверхности детали и исходной инструментальной поверхности, их относительной ориентацией и параметрами кинематики формообразования.

Как это принято (Исаев А.И., 1950; и др.), ниже топология обработанных поверхностей рассматривается только с учетом погрешностей, вносимых собственно процессом формообразования – с учетом остаточного детерминированного регулярного микрорельефа на обработанной поверхности детали. Величины возникающих при этом погрешностей всегда могут быть расчитаны аналитически. Для этого достаточно сведений о геометрии поверхностей $Д$ и $И$, их относительной ориентации и параметрах кинематики формообразования. Погрешности оборудования и оснастки, погрешности ориентирования, базирования и крепления детали и инструмента и др. при этом во внимание не принимаются. Не рассматриваются также погрешности, для расчета величин которых дополнительно требуется информация о физических процессах, протекающих при обработке деталей на металлорежущих станках.

Принятый подход правомерен и согласуется с основным допущением в теории формообразования поверхностей деталей (см.выше, с. 22, допущение 1.1).

9.1. Дополнительные допущения

Для обработки многих деталей характерно точечное касание поверхности $Д$ детали и исходной инструментальной поверхности $И$. Например, точечное касание поверхностей $Д$ и $И$ имеет место при нарезании зубчатых колес, шлицевых валов и других зубчатых деталей червячными фрезами и др. При обработке сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ точечное касание поверхностей $Д$ и $И$ имеет место практически всегда – такой вид их касания является превалирующим. В связи с тем, что при точечном касании потренциальные возможности кинематики формообразования наибольшие, с этой точки зрения точечный вид касания поверхностей $Д$ и $И$ следует рассматривать как наиболее общий.

При точечном касании сопряженных поверхностей в течение конечного промежутка времени нельзя геометрически точно формообразовать поверхность детали движением одной точки $К$ касания поверхностей $Д$ и $И$. Аналогичное наблюдается при линейном касании этих поверхностей, но дискретном воспроизведении в реальном инструменте его поверхности $И$. Обобщая, можно утверждать, что точечное касание поверхностей $Д$ и $И$ и дискретное воспроизведение в реальном инстременте исходной инструментальной поверхности $И$ как по отдельности, так и в совокупности, исключают возможность геометрически точного формообразования номинальной поверхности $Д_н$ детали. В этом случае имеет место *дискретное формообразование*, при котором неизбежно образуются принципиально неустранимые без последующей обработки детали погрешности в виде остаточного детерминированного регулярного микрорельефа. В соответствие с шестым условием формообразования поверхностей деталей (см. выше, с. 382-383, раздел 7.1.6) величины этих погрешностей не должны превышать допуск на точность обработки.

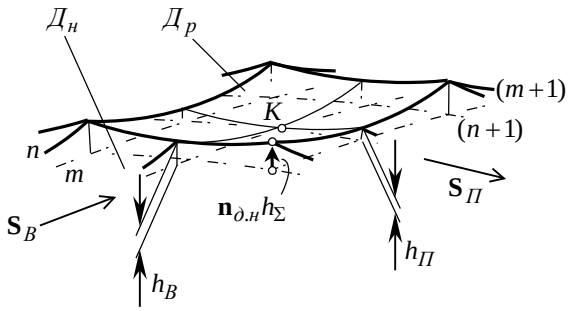


Рис. 9.1 Элементарная ячейка на обработанной поверхности детали.

Определение 9.1. *Дискретное формообразование поверхностей деталей – это формообразование, которое имеет место при точечном касании поверхности детали и исходной инструментальной поверхности, при дискретном воспроизведении в реальном инструменте его исходной инструментальной поверхности или при точечном касании поверхностей Д и И и дискретном вопроизведении поверхности И одновременно.*

Дискретное формообразование не только допускается, но и находит широкое применение в машиностроении. Это объясняется тем, что на размеры, форму и шероховатость обработанных поверхностей деталей задаются предельные отклонения. Поэтому допустимо, чтобы заданная чертежом номинальная поверхность совпадала с обработанной поверхностью детали лишь частично, но с требуемой точностью.

При дискретном формообразовании остаточный детерминированный регулярный микрорельеф на обработанной поверхности детали образуется неизбежно, а причины этого явления достаточно очевидны. В процессе обработки режущие кромки зубьев инструмента, совершая сложное многопараметрическое движение относительно заготовки, описывают дискретное семейство поверхностей резания, которые разделяют операционный припуск на срезанные и несрезанные (остаточные) части. В результате интерференции соседних поверхностей резания, образованных не обязательно смежными режущими кромками многолезвийного инструмента или единственной режущей кромкой однолезвийного инструмента, образуются остаточные гребешки, что является причиной появления органических погрешностей обработанных поверхностей деталей.

Результирующая погрешность формообразования h_Σ определяется высотой гребешков h_B волнистости, образованной вдоль строк формообразования, и высотой гребешков $h_П$ огранки, образованной поперек строк формообразования. Обе составляющие h_B и $h_П$, как и сама результирующая погрешность h_Σ, отсчитываются вдоль нормали $\mathbf{n}_{д.н}$ к номинальной поверхности детали $Д_н$.

Из-за трудностей измерения и дефицита измерительных средств величины элементарных погрешностей h_B и $h_П$ обычно расчитывают. Во многих случаях расчетные значения этих элементарных составляющих являются единственным источником достоверной информации о величине результирующей погрешности h_Σ формообразования.

Участок реальной поверхности $Д_р$ детали, заключенный между двумя соседними дугами m и $(m+1)$ подачи вдоль строки формообразования, и двумя соседними дугами n и $(n+1)$ подачи поперек строки формообразования условимся называть *элементарной ячейкой* регулярного микрорельефа на обработанной поверхности $Д_р$ детали (рис. 9.1). Длина дуги $\breve{S}_B$ элементарной ячейки вдоль траектории формообразования численно равна подаче на зуб инструмента, а длина дуги $\breve{S}_П$ поперек строк – подаче на строку формообразования. Параметры h_B, S_B, $h_П$ и $S_П$ элементарной ячейки в общем случае переменны в пределах обрабатываемого участка поверхности $Д$, а их текущие значения зависят от параметров кривизны поверхностей $Д$ и $И$ в точке K, их относительной локальной ориентации, допуска $[h]$ на точность формообразования и параметров кинематики формообразования. Поэтому величина $h_{\Sigma,i}$ результирующей погрешности формообразования в текущей i – й точке на поверхности $Д$ детали равна

$$h_{\Sigma,i} = h_{\Sigma,i}(h_{B,i}, h_{П,i}), \tag{9.1}$$

где $h_{B,i}$ и $h_{П,i}$ – значения составляющих h_B и $h_П$ в текущей точке поверхности $Д$ детали (очевидно, что

$$h_{B,i} = h_{B,i}(U_д, V_д),\ h_{П,i} = h_{П,i}(U_д, V_д)).$$

Количественно требования, предъявляемые к точности формообразования, можно оценить по величине наибольшей погрешности, возникающей при обработке. Результирующая погрешность h_Σ формообразования будет тем меньше, чем меньше ее максимальное значение в пределах всего обрабатываемого участка сложной поверхности детали. Поэтому оценивать точность формообразования величиной наибольшей результирующей погрешности формообразования $h_\Sigma^{(\max)}$ правомерно, тем более, что ее значение может быть расчитано с требуемой точностью. Возможности более полного использования потенциальных возможностей технологии обработки сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ в этом случае расширяются за счет того, что появляется возможность разрабатывать в некотором смысле *предельные* способы обработки, применение которых обеспечивает равенство максимальной погрешности $h_\Sigma^{(\max)}$ допуску $[h]$ на точность формообразования ($h_\Sigma^{(\max)} = [h]$) в пределах всего обрабатываемого участка поверхности детали. Производительность обработки в этом случае увеличится и достигает своего предельного значения.

Принято считать, что при многокоординатном формообразовании сложных поверхностей $Д$ деталей с большой степенью точности справедлив принцип суперпозиции элементарных составляющих результирующей погрешности формообразования. Исходя из допустимости его применения результирующая погрешность формообразования в текущей точке номинальной поверхности $Д_н$ равна $h_\Sigma = ah_B + bh_П$, где a и b – некоторые константы для текущей точки K на поверхности $Д_н$ ($0 \le a \le 1$; $0 \le b \le 1$).

Результирующая погрешность фомообразования максимальна, когда $a = b = 1$ – для такого случая

$$h_\Sigma^{(\max)} = h_B^{(\max)} + h_П^{(\max)}. \tag{9.2}$$

В общем случае зависимость $h_\Sigma = h_\Sigma(h_B, h_П)$ имеет более сложный нелинейный характер (об этом см. ниже, раздел 9.7).

Если поверхности $Д$ и $И$ касаются одна другой по линии, то в плоском нормальном сечении, касательном к этой линии, исходная инструментальная поверхность $И$ предельно конформна номинальной поверхности детали $Д_н$. В этом случае одна из составляющих погрешности h_Σ равна нулю. Как правило, $h_B = 0$ и в этом случае $h_\Sigma = h_П$. Принципиально возможны способы обработки[1], когда $h_П = 0$, тогда $h_\Sigma = h_B$.

Если обработка производится инструментом, полностью воспроизводящим исходную инструментальную поверхность $И$, как это имеет место при шлифовании, то $h_B = 0$ и, как следствие, $h_\Sigma = h_П$. Если же при полном воспроизведении в реальном инструменте его поверхности $И$ она линейно касается поверхности $Д_н$, формообразование номинальной поверхности детали перестает быть дискретным и лишено органических погрешностей. В этом случае $h_B = 0$, $h_П = 0$ и в результате $h_\Sigma = 0$.

9.2. Образование волнистости и огранки

Простым примером дискретного формообразования поверхностей при обработке деталей на металлорежущих станках служит точение круглого валика резцами разной конструкции (рис. 9.2). В процессе обработки деталь вращается вокруг своей оси $O_д - O_д$ с постоянной угловой скоростью $\omega_д$. Обработка производится резцом с главным φ и вспомогательным φ_1 углами в плане (рис. 9.2.1). В процессе обработки инструмент перемещается вдоль оси детали на величину S_u на каждый ее оборот. Очевидно, что при этом на обработанной поверхности $Д$ образуются остаточные грабешки, высота h_Σ которых равна

$$h_\Sigma = \frac{S_u \sin\varphi \sin\varphi_1}{\sin(\varphi + \varphi_1)}. \tag{9.3}$$

[1]Такие способы обработки обладают интересными потенциальными возможностями, однако в настоящее время в промышленности не используются.

Из формулы (9.3) следует, что высота h_Σ остаточного регулярного микрорельефа зависит от величины подачи S_u на оборот детали и от значений углов в плане φ и φ_1. Если уменьшить углы в плане φ и φ_1, то при неизменной подаче S_u высота остаточных гребешков уменьшится (рис. 9.2.2). Полное исключение возможности образования остаточных гребешков, когда $h_\Sigma = 0$, наблюдается в случае использования инструментов с углами в плане, равными $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi_1 = 0^\circ$. Реально это может быть осуществлено лишь на достаточно короткой (длиной порядка $(1{,}1 \div 1{,}2)\, S_u$) вспомогательной режущей кромке инструмента (рис. 9.2.3). В рассматриваемом случае остаточный регулярный микрорельеф не образуется и поэтому $h_\Sigma = 0$.

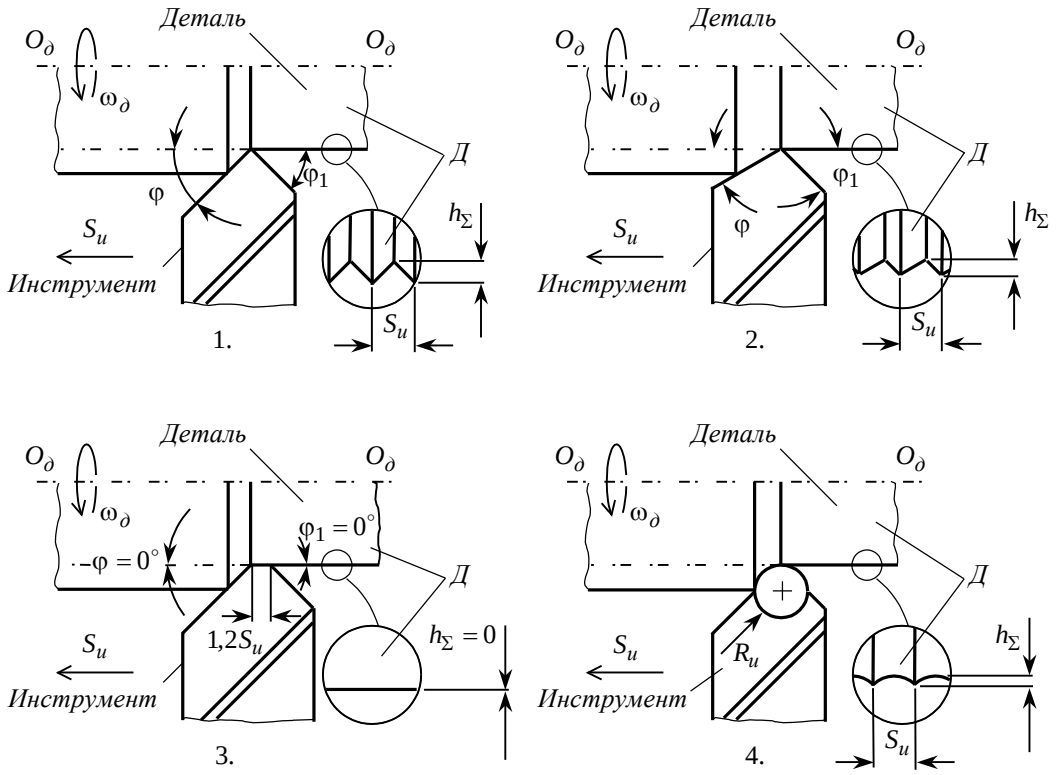


Рис. 9.2. Примеры дискретного формообразования при точении.

Обработка круглого валика на токарном станке может производиться резцом, оснащенным круглой режущей пластиной радиуса R_u (рис. 9.2.4). Применение такого инструмента также приводит к образованию остаточного регулярного микрорельефа на обработанной поверхности $Д$ детали. Высота h_Σ остаточных гребешков в этом случае равна $h_\Sigma = R_u - \sqrt{R_u^2 - 0{,}25\, S_u^2}$.

Для уменьшения высоты h_Σ остаточных гребешков необходимо использовать инструмент с возможно большим радиусом R_u кривизны режущей кромки или производить обработку с возможно меньшей подачей S_u на оборот детали.

Рассмотреные примеры образования остаточных гребешков на обработанной поверхности детали при точении (см. рис. 9.2) тривиальны. В общем случае задача расчета параметров остаточного регулярного микрорельефа при формообразовании сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ сложнее.

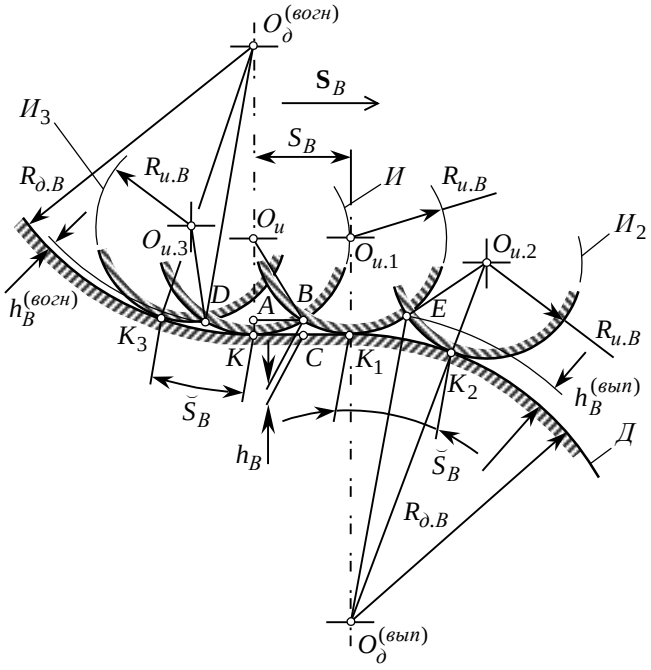


Рис. 9.3. Схема образования волнистости.

В сечении сложной поверхности детали плоскостью, проходящей через контактную нормаль в направлении подачи $\mathbf{S}_B$, профиль поверхности $Д_p$ касается соответствующего плоского нормального сечения исходной инструментальной поверхности $И$ в некоторой их общей точке K (рис. 9.3)[1].

На прямолинейных участках профиля сечения поверхности $Д_p$ высота остаточных гребешков равна:

$$h_B = \hat{R}_{u.B} - \sqrt{\hat{R}_{u.B}^2 - 0{,}25\,S_B^2}\ . \tag{9.4}$$

Здесь $\hat{R}_{u.B}$ есть радиус кривизны траектории движения расположенной в плоскости чертежа рис. 9.3 точки режущей кромки, которая формирует поверхность $Д_p$ в соответствующем плоском сечении. Эта кривая является удлиненной циклоидой. Приближенно можно считать, что радиус ее кривизны в вершине равен радиусу кривизны $R_{u.B}$ исходной инструментальной поверхности $И$, который расчитывается по формуле (8.41):

$$R_{u.B} = \frac{E_u G_u}{G_u L_u \sin^2(\xi+\mu) + M_u \sqrt{E_u G_u}\,\sin 2(\xi+\mu) + E_u N_u \cos^2(\xi+\mu)}\ . \tag{9.5}$$

В случае ортогональной (U_u, V_u) – параметризации исходной инструментальной поверхности $И$ формула (5) упрощается и может быть представлена в виде:

$$R_{u.B} = [L_u \sin^2(\xi+\mu) + M_u \sin 2(\xi+\mu) + N_u \cos^2(\xi+\mu)]^{-1}. \tag{9.6}$$

Входящие в (5) и (6) значения гауссовых коэффициентов E_u, F_u, G_u первой $\Phi_{1.u}$ и L_u, M_u, N_u второй $\Phi_{2.u}$ основных квадратичных форм исходной инструментальной поверхности $И$ могут быть расчитаны исходя из уравнения как непосредственно самой поверхности $И$ инструмента, так и исходя из уравнения поверхности локально заменяющего ее тора T_u (см. ниже, раздел 9.6).

При обработке участков сложных поверхностей деталей с криволинейным плоским нормальным сечением величина погрешности h_B связана с радиусами кривизны этих сечений поверхностей $Д$ и $И$ соотношением (см. рис. 9.3):

[1]Здесь следует обратить внимание на то, что рис. 9.3 наглядно подтверждает положительное влияние увеличения степени конформности поверхностей $Д$ и $И$ на уменьшение (при прочих одинаковых условиях) высоты остаточного детерминированного регулярного микрорельефа на формообразованной поверхности детали. Это однозначно следует из сопоставления значений параметра h_B в случаях формообразования одним и тем же инструментом выпуклого, прямолинейного и вогнутого участков поверхности детали. При переходе от формообразования выпуклого участка поверхности $Д$ к формообразованию прямолинейного, а затем вогнутого ее участков (см. рис. 9.3) степень конформности поверхностей $Д$ и $И$ увеличивается, а высота h_B – уменьшается, что очевидно. Это еще раз подтверждает целесообразность управления в процессе многокоординатной обработки параметрами процесса таким образом, чтобы постоянно поддерживать возможно более высокую степень конформности поверхностей $Д$ и $И$ в каждой точке K их касания и таким путем повысить эффективность обработки.

$$(R_{\partial.B}+R_{u.B})^2+(R_{\partial.B}+h_B\operatorname{sgn}R_{\partial.B})^2-2(R_{\partial.B}+R_{u.B})(R_{\partial.B}+h_B\operatorname{sgn}R_{\partial.B})\cos\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}-R_{u.B}^2=0\,, \qquad (9.7)$$

где значение нормального радиуса кривизны $R_{\partial.B}$ расчитывается по формуле:

$$R_{\partial.B}=\frac{E_\partial G_\partial}{G_\partial L_\partial\sin^2\xi+M_\partial\sqrt{E_\partial G_\partial}\sin 2\xi+E_\partial N_\partial\cos^2\xi}\,. \qquad (9.8)$$

В случае ортогональной (U_∂,V_∂) – параметризации поверхности $Д$ детали формула (8) упрощается и может быть представлена в виде:

$$R_{\partial.B}=(G_\partial L_\partial\sin^2\xi+M_\partial\sqrt{E_\partial G_\partial}\sin 2\xi+E_\partial N_\partial\cos^2\xi)^{-1}\,. \qquad (9.9)$$

Входящие в (8) и (9) гауссовы коэффициенты E_∂, F_∂, G_∂ первой $\Phi_{1.\partial}$ и L_∂, M_∂, N_∂ второй $\Phi_{2.\partial}$ основных квадратичных форм поверхности $Д$ детали могут быть получены как непосредственно из ее уравнения, так и из уравнения поверхности заменяющего тора T_∂ (см. ниже, раздел 9.6).

Преобразовав (7), приходим к квадратному уравнению относительно h_B, решая которое найдем формулу для расчета значения элементарной составляющей h_B:

$$h_B=R_{\partial.B}-(R_{\partial.B}+R_{u.B})\cos\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}+\sqrt{R_{u.B}^2-(R_{\partial.B}+R_{u.B})^2\sin^2\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}}\,. \qquad (9.10)$$

Длина дуги $\breve{S}_B$ всегда во много раз меньше нормального радиуса кривизны $R_{\partial.B}$. Поэтому выраженный в радианах угол, величина которого в (10) определяется соотношением $\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}$, достаточно мал, вследствие чего для него выполняются соотношения $\sin\alpha\cong\tan\alpha\cong\alpha$. Это свойство малых углов удобно использовать при вычислениях по формуле (10).

Учитывая, что h_B^2 является несоизмеримо малой величиной по сравнению со слагаемыми $R_{\partial.B}^2$, $R_{u.B}^2$ и $R_{\partial.B}$, $R_{u.B}$, слагаемым h_B^2 можно пренебречь. Тогда из (10) получим приближенную формулу:

$$h_B\cong\frac{R_{\partial.B}(R_{\partial.B}+R_{u.B})\left(1-\cos\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}\right)}{R_{\partial.B}-(R_{\partial.B}+R_{u.B})\cos\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}}\,. \qquad (9.11)$$

Продольный профиль сечения каждого построчного гребешка образован как траектория движения одной точки режущей кромки зуба вращающегося инструмента. При формообразовании прямолинейного участка поверхности $Д$ остаточные гребешки ограничены семейством удлиненных циклоид (семейством трохоид). Кривизна этих кривых в вершине зависит от величины радиуса $R_{u.B}$, числа зубьев N инструмента, подачи на зуб $S_B=|\mathbf{S}_B|$ и частоты вращения ω_u, а погрешность h_B расчитывается по формуле:

$$h_B=\frac{(S_B+\omega_u R_{u.B}N)^2-\sqrt{(S_B+\omega_u R_{u.B}N)^4-\pi^2S_B^2\omega_u^2N^2R_{u.B}^2}}{\omega_u^2N^2R_{u.B}^2}\,.$$

Криволинейный профиль плоского нормального сечения поверхности $Д_P$ детали вдоль строки формообразования в пределах одной элементарной ячейки очерчен семейством удлиненных эпи- и гипоциклоид (семейством эпи- и гипотрохоид).

При высоких требованиях к точности расчета величины элементарной составляющей h_B вместо нормального радиуса кривизны $R_{u.B}$ следует подставлять значение радиуса кривизны $\hat{R}_{u.B}$ соответствующей циклоидальной кривой волнистости, взятое в ее вершине:

$$\hat{R}_{u.B} = \frac{\left(R_{\partial.B}\omega_u N + S_B\right)\left(R_{u.B}^2\omega_u^2 N^2 + S_B^2 - 2R_{u.B}\omega_u N S_B \cos\dfrac{R_{\partial.B}\omega_u N}{S_B}\right)^{\frac{3}{2}}}{\omega_u N\left|S_B^3 + R_{u.B}^2\omega_u^2 N^2\left(R_{\partial.B}\omega_u N + S_B\right) - R_{u.B}\omega_u N S_B\left(R_{\partial.B}\omega_u N + 2S_B\right)\cos\dfrac{R_{\partial.B}\omega_u N}{S_B}\right|}, \tag{9.12}$$

где φ – угловой шаг расположения зубьев инструмента.

Точная зависимость (12) необходима при расчете элементарных составляющих результирующей погрешности формообразования высокоточных поверхностей деталей, а также для оценки точности и определения области допустимого применения приближенных инженерных формул.

При $R_{\partial.B} \to \infty$ формула (10) преобразуется к виду (4).

В сечении сложной поверхности детали плоскостью, проходящей через контактную нормаль перпендикулярно направлению строки формообразования, профиль номинальной поверхности $Д_н$ касается соответствующего сечения исходной инструментальной поверхности $И$ инструмента (аналогично рис. 9.3).

По аналогии с (10) запишем формулу для расчета элементарной составляющей $h_П$ результирующей погрешности формообразования:

$$h_П = R_{\partial.П} - \left(R_{\partial.П} - R_{u.П}\right)\cos\frac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}} + \sqrt{R_{u.П}^2 - \left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right)^2}\sin\frac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}. \tag{9.13}$$

Значения нормальных радиусов кривизны $R_{\partial.П}$ и $R_{u.П}$ расчитываются по формулам:

$$R_{\partial.П} = \frac{E_\partial G_\partial}{G_\partial L_\partial \cos^2\xi + M_\partial\sqrt{E_\partial G_\partial}\sin 2\xi + E_\partial N_\partial \sin^2\xi}; \tag{9.14}$$

$$R_{u.П} = \frac{E_u G_u}{G_u L_u \cos^2(\xi+\mu) + M_u\sqrt{E_u G_u}\sin 2(\xi+\mu) + E_u N_u \sin^2(\xi+\mu)}. \tag{9.15}$$

При ортогональной $(U_{\partial(u)}; V_{\partial(u)})$ – параметризации поверхностей $Д$ и $И$ формулы (14) и (15) упрощаются:

$$R_{\partial.П} = (L_\partial \cos^2\xi + M_\partial \sin 2\xi + N_\partial \sin^2\xi)^{-1}; \tag{9.16}$$

$$R_{u.П} = [L_u \cos^2(\xi+\mu) + M_u \sin 2(\xi+\mu) + N_u \sin^2(\xi+\mu)]^{-1}. \tag{9.17}$$

Как и выше (см. (11)) справедлива приближенная формула:

$$h_П \cong \frac{R_{\partial.П}\left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right)\left(1 - \cos\dfrac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}\right)}{R_{\partial.П} - \left(R_{\partial.П} + R_{u.П}\right)\cos\dfrac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}}. \tag{9.18}$$

Приведенные выше обобщенные зависимости (10) и (13) достаточно громоздки. Применять их в инженерной практике без использования соответствующей вычислительной техники неудобно. Поэтому находят применение упрощенные формулы для расчета величин элементарных составляющих h_B и $h_П$ результирующей погрешности h_Σ формообразования.

В качестве примера рассмотрим один из приближенных подходов к расчету высоты огранки $h_П$ для случая формообразования вогнутого участка поверхности детали (рис. 9.4). Полученные таким путем результаты будут справедливы также для расчета $h_П$ при обработке выпуклых участков сложной поверхности детали и при расчете высоты волнистости h_B.

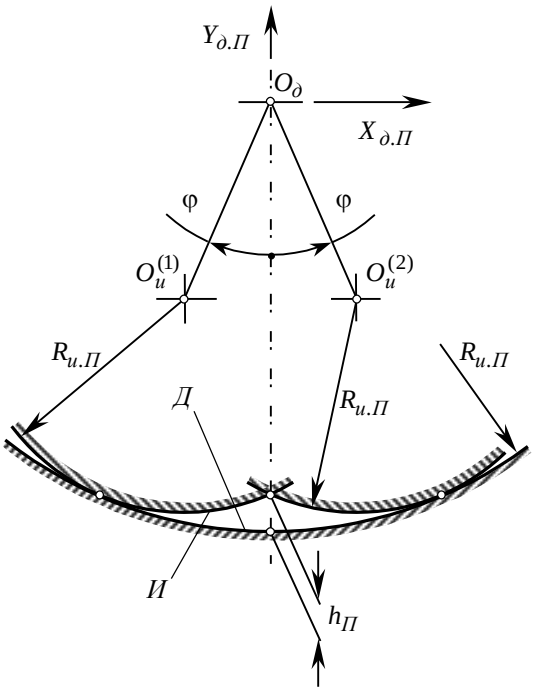


Рис. 9.4. Схема для расчета высоты огранки.

При формообразовании двух соседних строк на поверхности $Д$ детали инструмент $И$ занимает последовательные положения. Заменяя профиль плоского нормального сечения поверхности детали дугой окружности радиуса $R_{д.П}$, запишем чему равны координаты текущей точки профиля $Д$:

$$X_{д.П} = R_{д.П}\sin\theta_{д.П}; \qquad Y_{д.П} = R_{д.П}\cos\theta_{д.П},$$

где θ – угловой параметр текущей точки профиля (отсчитывается от оси $X_{д.П}$).

Координаты центров кривизны $O_u^{(1)}$ и $O_u^{(2)}$ профиля сечения исходной инструментальной поверхности равны:

$$X_{O.u} = (R_{д.П} - R_{u.П})\sin\varphi; \qquad Y_{O.u} = (R_{д.П} - R_{u.П})\cos\varphi,$$

где φ – половина угла между радиус-векторами, проходящими из центра $O_д$ кривизны профиля поверхности $Д_н$ детали и центрами кривизны $O_u^{(1)}$ и $O_u^{(2)}$ исходной инструментальной поверхности $И$ в двух ее последовательных положениях относительно детали.

Координаты точки пересечения профиля нормального сечения инструмента с осью ортинат и, следовательно, с аналогичным соседним профилем находится из

$$[X_{д.П} - (R_{д.П} - R_{u.П})\sin\varphi]^2 + [Y_{д.П} - (R_{д.П} - R_{u.П})\cos\varphi]^2 = R_{u.П}^2.$$

Отсюда следует, что координаты вершиной точки огранки равны

$$X_{д.П} = 0; \qquad Y_{д.П} = (R_{д.П} - R_{u.П})\cos\varphi + \sqrt{R_{u.П}^2 - (R_{д.П} - R_{u.П})^2\sin^2\varphi}.$$

Так как угол φ мал, удобно использовать разложение в ряд Тэйлора тригонометрических функций с точностью до $0(\varphi^3)$. Получим:

$$X_{д.П} = (R_{д.П} - R_{u.П})\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + R_{u.П}\left[1 - \frac{\varphi^2}{2}\left(\frac{R_{д.П} - R_{u.П}}{R_{u.П}}\right)^2\right] = R_{д.П} - \frac{\varphi^2}{2R_{u.П}}R_{д.П}(R_{д.П} - R_{u.П}).$$

Отсюда следует, что составляющая $h_П$ равна

(9.19) $$h_{\Pi} \cong \frac{\varphi^2}{2R_{u.\Pi}} R_{\partial.\Pi}(R_{\partial.\Pi} - R_{u.\Pi}).$$

Очевидно, что эта формула является приближенной.

Из последнего результата (19) следует, что по мере уменьшения h_{Π}, т.е. по мере увеличения точности обработки, величина угла φ, соответствующая этому значению h_{Π}, асимптотически стремится к

$$\varphi = \sqrt{\frac{2R_{u.\Pi}h_{\Pi}}{R_{\partial.\Pi}(R_{\partial.\Pi} - R_{u.\Pi})}}.$$

При определенных допущениях приближенные зависимости могут быть получены из обобщенных зависимостей (10) и (13), а отклонение приближенных результатов от точных определяется тем, насколько существенные упрощения допущенны при выводе приближенных формул.

Рассмотренный подход может быть развит на случай, когда радиусы кривизны профиля нормального сечения исходной инструментальной поверхности $И$ на двух соседиих проходах существенно отличаются один от другого и принимают значения $R^{(1)}_{u.\Pi}$ и $R^{(2)}_{u.\Pi}$.

Параметры процесса формообразования сложной поверхности детали в общем случае изменяются в пределах:

$$0 \le \bmod S_B \le \infty; \qquad 0 \le \bmod \omega_u < \infty; \qquad 1 \le N \le \infty,$$

причем нулевые значения параметры S_B и ω_u могут принимать только порознь, но не одновременно.

С учетом третьего условия формообразования поверхностей деталей (см. выше, раздел 7.1.3, с. 369-377) нормальный радиус $R_{u.B}$ кривизны исходной инструментальной поверхности $И$ применяемого инструмента может изменяться в пределах:

– $0 \le R_{u.B} \le \infty$, (для инструментов охватывающего типа – $0 < \bmod R_{u.B} \le R_{\partial.B}$) – при формообразовании невогнутых: выпуклых (средняя кривизна $\tilde{M}_{\partial} > 0$, полная кривизна $\tilde{G}_{\partial} > 0$) и выпукло-вогнутых (средняя кривизна $\tilde{M}_{\partial}$ – любая, полная кривизна $\tilde{G}_{\partial} < 0$) локальных участков сложной поверхности детали, для которых $R_{\partial.B} \ge 0$;

– $0 \le R_{u.B} \le \infty$ (для инструментов охватывающего типа $0 < R_{u.B} \le \bmod R_{\partial.B}$) – при формообразовании вогнутых (средняя кривизна $\tilde{M}_{\partial} < 0$, полная кривизна $\tilde{G}_{\partial} > 0$) локальных участков сложной поверхности детали, для которых $R_{\partial.B} < 0$.

Элементарная составляющая h_B результирующей погрешности h_{Σ} формообразования стремится к нулю при выполнении по крайней мере одного из следующих условий:

(9.20) $$\lim_{R_{u.B} \to R_{\partial.B}} h_B = 0; \qquad \lim_{S_B \to \infty} h_B = 0; \qquad \lim_{\omega_u \to \infty} h_B = 0; \qquad \lim_{N \to \infty} h_B = 0.$$

Установленные пределы (20) показывают, что для увеличения точности формообразования следует:

– увеличивать степень конформности исходной инструментальной поверхности $И$ к поверхности $Д$ обрабатываемой детали в направлении строки формообразования ($\lim_{R_{u.B} \to R_{\partial.в}} h_B = 0$);

– управлением параметрами кинематики формообразования возможно больше приблизить параметры кривизны поверхности каждого элементарного реза к соответствующим параметрам номинальной поверхности детали $Д_н$ ($\lim_{S_B \to \infty} h_B = 0$, $\lim_{\omega_u \to \infty} h_B = 0$);

– полнее воспроизводить в реальном инструменте его исходную инструментальную поверхность $И$ ($\lim_{N \to \infty} h_B = 0$), т.е. увеличивать количество профилирующих режущих кромок инструмента.

В направлении подачи $\mathbf{S}_B$ поверхность элементарного реза в большей степени конформна номинальной поверхности $Д_н$, чем собственно исходная инструментальная поверхность $И$. Это открывает возможность управлять (варьируя параметры кинематики формообразования) высотой остаточного микрорельефа и повысить точность обработки путем установления такого сочетания параметров, при котором поверхность каждого элементарного реза в наибольшей степени конформна поверхности $Д$ детали.

Дополнительно к рассмотренным факторам для повышения точности обработки следует учитывать погрешности инструмента: органические (возникающие при его профилировании), технологические (возникающие при его изготовлении и затачивании) и т.п. Вследствие погрешностей такого рода производящая поверхность $П_и$ (см. выше, с. 306) отклоняется от исходной инструментальной поверхности $И$. Отклонение взаимоогибаемых поверхностей $Д$ и $П_и$ в сопряженных точках одинаковы для каждой из поверхностей, отсчитываются вдоль контактной нормали к номинальной поверхности $И$ инструмента, равны расстоянию, на которое поверхность $П_и$ отстоит от поверхности $И$ и всегда могут быть расчитаны. Величины таких погрешностей алгебраически складываются с погрешностями формообразования, для расчета величин которых выше приведены соответствующие формулы.

Если допустить возможность превышения результирующей погрешности формообразования h_Σ по отношению к допуску $[h]$ (т.е., если допустить, что $h_\Sigma > [h]$ или, что $h_\Sigma = [h] + \Delta h$, где Δh – превышение допускаемой погрешности по отношению к допуску $[h]$), то может оказаться, что после легкой последующей доработки вершин остаточного детерминированного регулярного микрорельефа на детали (чем они острее, тем легче удаляются) можно без существенных затрат вписаться в регламентированное поле допуска. Поскольку угол излома волнистости и огранки близок к 180°, даже небольшое превышение Δh позволит заметно увеличить подачи S_B и $S_{П}$ и за счет этого повысить эффективность обработки.

При решении задач, связанных с расчетом погрешностей формообразования, предпочтение (где это допустимо) следует отдавать подходам, позволяющим рассматривать не поверхности $Д$ и $И$ вцелом, аналитически точно описанные уравнениями, а исследовать *относительные* отклонения элементов поверхностей $Д$ и $И$ от их требуемого положения без использования точного определения формы самих поверхностей целиком.

Перспективные пути развития исследований в области точности обработки должны предусматривать возможность учета погрешностей относительного положения детали и инструмента в процессе обработки, влияние податливости технологической системы, элементы физики процесса резания, непосредственно влияющие на точность обработки и др.

9.3. Пути уменьшения погрешностей формообразования

Для более интенсивного уменьшения результирующей погрешности формообразования обычно достаточно целенаправленно изменять, в первую очередь, какой-либо один из входных параметров, влияние которого на точность в конкретной ситуации оказывается превалирующим. Фактор, влияние которого оказывается превалирующим, можно определить так.

9.3.1. Сопоставление интенсивностей влияния факторов. Интенсивность влияния каждого из факторов (13) на величину элементарной составляющей h_B результирующей погрешности h_Σ формообразования определяется производными:

$$\frac{\partial h_B}{\partial R_{\partial.B}} = 1 - \cos\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}} - (R_{\partial.B} + R_{u.B})\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}\sin\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}} - \\ - \frac{2(R_{\partial.B} + R_{u.B})\sin^2\dfrac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}} - (R_{\partial.B} + R_{u.B})^2\dfrac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}\sin\dfrac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}}{2\sqrt{R_{u.B}^2 - (R_{\partial.B} + R_{u.B})^2\sin^2\dfrac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}}}; \tag{9.21}$$

(9.22)
$$\frac{\partial h_B}{\partial R_{u.B}} = -\cos\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}} + \frac{R_{u.B} - (R_{\partial.B} + R_{u.B})\sin^2\dfrac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}}{\sqrt{R_{u.B}^2 - (R_{\partial.B} + R_{u.B})^2\sin^2\dfrac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}}};$$

(9.23)
$$\frac{\partial h_B}{\partial S_B} = \frac{R_{\partial.B} + R_{u.B}}{2R_{\partial.B}}\sin\frac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}} - \frac{(R_{\partial.B} + R_{u.B})^2\sin\dfrac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}}{4\sqrt{R_{u.B}^2 - (R_{\partial.B} + R_{u.B})^2 R_{\partial.B}\sin^2\dfrac{\breve{S}_B}{2R_{\partial.B}}}}.$$

В текущей точке на поверхности $Д$ детали по зависимостям (21)-(23) можно установить параметр, интенсивность влияния которого на величину составляющей h_B результирующей погрешности h_Σ максимальна. Целенаправлено изменяя в первую очередь именно этот параметр, достигаем наиболее быстрого (при прочих одинаковых условиях) увеличения точности формообразования поверхности детали.

Из сопоставления формул (10) и (13) видно, что характер зависимости элементарной составляющей $h_П$ результирующей погрешности от входных параметров процесса формообразования аналогичен зависимостям (21)-(23):

(9.24)
$$\frac{\partial h_П}{\partial R_{\partial.П}} = 1 - \cos\frac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}} - (R_{\partial.П} + R_{u.П})\frac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}\sin\frac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}} - \frac{2(R_{\partial.П} + R_{u.П})\sin^2\dfrac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}} - (R_{\partial.П} + R_{u.П})^2\dfrac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}\sin\dfrac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}}{2\sqrt{R_{u.П}^2 - (R_{\partial.П} + R_{u.П})^2\sin^2\dfrac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}}};$$

(9.25)
$$\frac{\partial h_П}{\partial R_{u.П}} = -\cos\frac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}} + \frac{R_{u.П} - (R_{\partial.П} + R_{u.П})\sin^2\dfrac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}}{\sqrt{R_{u.П}^2 - (R_{\partial.П} + R_{u.П})^2\sin^2\dfrac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}}};$$

(9.26)
$$\frac{\partial h_П}{\partial S_П} = \frac{R_{\partial.П} + R_{u.П}}{2R_{\partial.П}}\sin\frac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}} - \frac{(R_{\partial.П} + R_{u.П})^2\sin\dfrac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}}{4\sqrt{R_{u.П}^2 - (R_{\partial.П} + R_{u.П})^2 R_{\partial.П}\sin^2\dfrac{\breve{S}_П}{2R_{\partial.П}}}}.$$

Использование зависимостей (24)-(26) позволяет обеспечить наиболее интенсивное изменение элементарной составляющей $h_П$ результирующей погрешности h_Σ и тем самым увеличить точность обработки деталей на многокоординатных станках с ЧПУ.

В представленном виде (21)-(23) и (24)-(26) сопоставление интенсивностей изменения элементарных составляющих h_B и $h_П$ результирующей погрешности формообразования h_Σ, вызванные изменением соответствующего входного параметра, не формализовано. Поэтому чтобы воспользоваться приведенными результатами требуется определенный опыт. Принципиальная причина этого – каждая из интенсивностей имеет размерность, причем у каждой из них размерность своя.

Чтобы устранить этот недостаток и формализовать процедуру сопоставления интенсивностей изменения составляющих h_B и $h_П$, следует перейти к ее оценке при помощи безразмерных критериев.

Интенсивность изменения величины $\hat{h}$ (здесь и ниже $\hat{h} = h_B$ или $\hat{h} = h_П$) от параметра $\hat{P}$ (здесь и ниже $\hat{P} = R_{д.В}$, $R_{и.В}$, S_B, $R_{д.П}$, $R_{и.П}$ или $S_П$) оценивается величиной производной $\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{P}}$. Эффективность уменьшения высоты остаточных гребешков зависит от:

- интенсивности $\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{P}}$ (чем выше интенсивность, тем управление соответствующим параметром $\hat{P}$ эффективнее);

- диапазона $\Delta\hat{P}$ изменения параметра $\hat{P}$ от некоторого значения $\hat{P}_1$ до другого его значения $\hat{P}_2$ и простоты управления этим параметром в диапазоне $\Delta\hat{P} = \hat{P}_1 - \hat{P}_2$.

Исходя из изложенного, более общей оценкой интенсивности изменения параметра $\hat{P}$ является критерий $\hat{I}^* = \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{P}}(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) = \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{P}}\Delta\hat{P}$, который учитывает как собственно интенсивность влияния параметра $\hat{P}$, так и диапазон его изменения.

В связи с тем, что условия управления фактором $\hat{P}$ в интервале $(\hat{P}_1 - \hat{P}_2)$ могут быть переменны, в критерий $\hat{I}^*$ следует дополнительно ввести учитывающую это некоторую безразмерную функцию $f(\hat{P})$. Тогда

$$\hat{I}^* = f(\hat{P})\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{P}}\Delta\hat{P}.$$

Функция $f(\hat{P})$ определяется для каждого конкретного случая обработки индивидуально. По этой причине ее структура и свойства здесь не рассматриваются. В простейшем случае $f(\hat{P}) = 1$ или равна другой константе. Вместе с тем функция $f(\hat{P}) = 1$ может быть непосредственно использована и в сложных случаях, но только в относительно узком диапазоне $\Delta\hat{P}$ изменения параметра $\hat{P}$.

Критерий $\hat{I}^*$ учитывает как интенсивность влияния фактора $\hat{P}$, так и диапазон его изменения и условия управления ним в интервале $\Delta\hat{P}$. Однако этот критерий по-прежнему имеет некоторую размерность $\hat{i}^*$, равную $\hat{i}^* = \hat{I}^* \cdot (\hat{I}^*)^{-1}$. Если разделить $\hat{I}^*$ на $\hat{i}^*$, получим безразмерный критерий $\hat{I} = \frac{\hat{I}^*}{\hat{i}^*}$ для оценки интенсивности влияния параметра $\hat{P}$:

$$\hat{I} = \frac{f(\hat{P})}{\hat{i}^*} \cdot \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{P}}\Delta\hat{P}.$$

Тот параметр следует соответствующим образом изменять в первую очередь, для которого критерий $\hat{I}$ максимален.

9.3.2. Градиентный подход. Если влияние различных входных параметров на точность формообразования сложной поверхности детали сопоставимо между собой, то результирующая погрешность формообразования уменьшается наиболее интенсивно при согласованном изменении параметров в направлении градиента функции, описывающей зависимость результирующей погрешности h_Σ от всех учитываемых параметров процесса формообразования.

Направление, в котором следует целенаправленно изменять параметры процесса формообразования сложных поверхностей деталей с тем, чтобы при возможно большей эффективности обеспечить требуемую его точность, можно установить так.

Чтобы определить вид согласованного изменения параметров $R_{u.B}$ и S_B, при котором составляющая h_B уменьшается наиболее интенсивно, достаточно найти проекцию линии кратчайшего спуска поверхности $h_B = h_B(R_{u.B}, S_B)$ на координатную плоскость $R_{u.B}S_B$. В качестве примера рассмотрим решение этой задачи для случая формообразования локального участка уплощения на поверхности детали (рис. 9.3).

Направление линий кратчайшего спуска в некоторой точке поверхности совпадает с направлением градиента поверхности в этой же ее точке:

$$\mathbf{grad}\ (h_B) = \frac{\partial h_B}{\partial R_{u.B}}\mathbf{i} + \frac{\partial h_B}{\partial S_B}\mathbf{j}.$$

Для рассматриваемого случая $\mathbf{grad}\ (h_B)$ получим после дифференцирования уравнения (4):

$$\mathbf{grad}\ (h_B) = \left(1 - \frac{R_{u.B}}{\sqrt{R_{u.B}^2 - 0{,}25S_B^2}}\right)\mathbf{i} + \frac{R_{u.B}}{\sqrt{R_{u.B}^2 - 0{,}25S_B^2}}\mathbf{j}. \tag{9.27}$$

Чтобы найти проекции линий кратчайшего спуска на координатную плоскость $R_{u.B}S_B$, запишем чему равен тангенс угла φ наклона касательной к проекции линии кратчайшего спуска:

$$\tan\varphi = \frac{\partial S_B}{\partial R_{u.B}} = \frac{\partial S_B}{\partial h_B}\frac{\partial h_B}{\partial R_{u.B}} = \frac{\partial S_B}{\partial h_B}\left(\frac{\partial R_{u.B}}{\partial h_B}\right)^{-1}.$$

Исходя из этого и с учетом (27) находим, что

$$\frac{\partial S_B}{\partial R_{u.B}} = 4\frac{\sqrt{R_{u.B}^2 - 0{,}25S_B^2} - R_{u.B}}{S_B}.$$

Это уравнение сводится к дифференциальному уравнению

$$S_B S_B'^2 + 8R_{u.B}S_B' + 4S_B = 0, \tag{9.28}$$

которое является частным случаем дифференциального уравнения вида:

$$(a_2x + b_2y + c_2)y'^2 + (a_1x + b_1y + c)y' + (a_0x + b_0y + c) = 0. \tag{9.29}$$

Обратным преобразованием Лежандра

$$x = Y'(X); \qquad y(x) = XY'(X) - Y(X); \qquad y'(x) = X,$$

переводим (29) в линейное

$$\left[A(X) + XB(X)\right]Y' - B(X)Y + C(X) = 0,$$

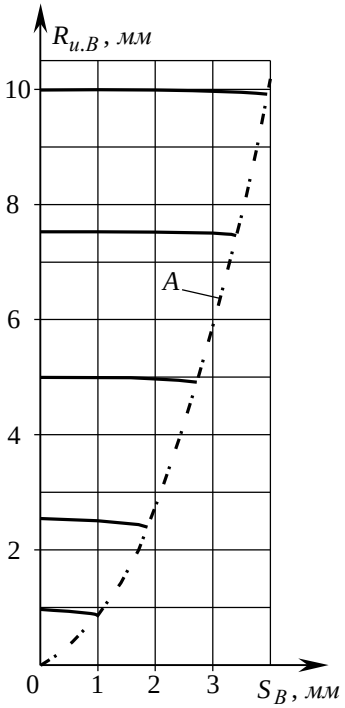
где

$$A(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0; \qquad B(X) = b_2X^2 + b_1X + b_0; \qquad C(X) = c_2X^2 + c_1X + c_0.$$

Поскольку $a \neq b$, то допустима подстановка вида $U(x) = y^2$, которая приводит (28) к уравнению Лагранжа-Даламбера $U'^2 + 2axU' = 4bU = 0$. Интегрируя это уравнение, находим решение (28) в параметрической форме

$$R_{u.B}^{-24} = Ct^{16}(t^2+4)^{-24}(t^2+12)^{16}; \qquad (t^2+4)S_B = -8R_{u.B}t, \tag{9.30}$$

где C – константа, определяющая проекцию конкретной кривой из семейства, а t – параметр.



Графическая интерпретация решения (30) дифференциального уравнения (28) представлена на рис. 9.5. Здесь показаны проекции линий кратчайшего спуска на поверхности $h_B = h_B(R_{u.B}, S_B)$ для исследуемой области изменения параметров $R_{u.B}$ и S_B. Ограничивающая кривая A является проекцией на координатную плоскость $R_{u.B}S_B$ линии $h_B = 0{,}020$ *мм*. Для функции (4) уравнения семейства линий кратчайшего спуска имеют вид:

$$R_{u.B} = \frac{(t^2+4)}{\sqrt[3]{t^2(t^2+12)^2}}C_1; \quad S_B = -\frac{8R_{u.B}t}{t^2+4}; \quad h_B = R_{u.B} - \sqrt{R_{u.B}^2 - 0{,}25S_B^2}, \tag{9.31}$$

где C_1 – константа, определяющая конкретную кривую из семейства.

Рис. 9.5. Графическая интерпретация решения дифференциального уравнения (28).

Характер согласованного изменения параметров процесса формообразования, при котором результирующая погрешность h_Σ уменьшается наиболее быстро, соответствует направлению градиента **grad** (h_B). Для функции $h_B = h_B(R_u, \boldsymbol{\omega}_u, N, |\mathbf{V}|)$ проекция градиента **grad** $[h_B(R_u, \boldsymbol{\omega}_u, N, |\mathbf{V}|)]$ на гиперплоскость $R_u \boldsymbol{\omega}_u N |\mathbf{V}|$ (эту гиперплоскость можно рассматривать как четырехмерную плоскость пятимерного пространства):

$$\text{mod}\{\textbf{grad}\,[h_B(R_u, \boldsymbol{\omega}_u, N, \mathbf{V})]\} = \sqrt{\left(\frac{\partial h_B}{\partial R_u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_B}{\partial \omega_u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_B}{\partial N}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_B}{\partial |\mathbf{V}|}\right)^2},$$

определяет искомый характер согласованного изменения параметров R_u, $\boldsymbol{\omega}_u$, N и $|\mathbf{V}|$.

Скорость изменения функции $h_B = h_B(R_u, \boldsymbol{\omega}_u, N, |\mathbf{V}|)$ максимальна, если максимума одновременно достигают скорости изменения всех составляющих (по каждому из ее параметров). Изложенное позволяет в такой форме записать достаточное условие скорейшего изменения функции $h_B = h_B(R_u, \boldsymbol{\omega}_u, N, |\mathbf{V}|)$:

$$\frac{\partial}{\partial R_u}\text{mod}\,[\textbf{grad}\,(h_B)] = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \omega_u}\text{mod}\,[\textbf{grad}\,(h_B)] = 0; \quad \frac{\partial}{\partial N}\text{mod}\,[\textbf{grad}\,(h_B)] = 0; \quad \frac{\partial}{\partial |\mathbf{V}|}\text{mod}\,[\textbf{grad}\,(h_B)] = 0.$$

Учитывая, что из физических соображений $\text{mod}\,[\textbf{grad}\,(h_B)]$ является конечной величиной и что $\text{mod}\,[\textbf{grad}\,(h_B)] \neq 0$, это условие приводимо к виду:

$$\frac{\partial^2 h_B}{\partial R_u^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 h_B}{\partial \omega_u^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 h_B}{\partial N^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 h_B}{\partial |\mathbf{V}|^2} = 0. \tag{9.32}$$

Уравнения (32) определяют соотношения между параметрами процесса формообразования, при которых достигается наибольшая скорость уменьшения высоты остаточного микрорельефа на обработанной поверхности детали.

Направление, в котором следует изменять параметры процесса формообразования, чтобы достичь наибольшей точности поверхности детали, определяется условиями (20). Следовательно, для наискорейшего увеличения точности формообразования параметры процесса следует изменять согласованно один с другим в соответствие с (32) и производить это изменение в направлении (20).

9.3.3. Рациональное согласование подач. Задача рационального согласования величин подач инструмента вдоль S_B (подача на зуб) и поперек $S_П$ строки формообразования может быть решена как частная задача рассмотренной выше более общей, решаемой на основе использования градиентного подхода, задачи рационального согласования всех переменных параметров процесса формообразования поверхности детали. Вместе с тем в рассматриваемом случае возможны существенные упрощения, позволяющие получить интересующий результат более простыми путем.

Результирующая погрешность h_Σ формообразования поверхности детали определяется величинами двух элементарных составляющих h_B и $h_П$ (1). Логично предположить, что существует вариант согласования текущих значений подач S_B и $S_П$, который при неизменной эффективности обработки приводит к образованию таких составляющих h_B и $h_П$, при которых результирующая погрешность формообразования h_Σ минимальна. Такой вариант согласования подач является наивыгднейшим[1].

При фиксированной производительности формообразования незначительное увеличение подачи S_B до значения S'_B и уменьшение подачи $S_П$ до значения $S'_П$ может привести к существенному увеличению элементарной составляющей h_B – до значения h'_B, при незначительном уменьшении составляющей $h_П$ (до значения $h'_П$). Как следствие, существенно увеличивается результирующая погрешность формообразования h_Σ (см. выше, рис. 8.22 на с. 480). Справедливо и обратное: уменьшение подачи S_B до значения S''_B и увеличение подачи $S_П$ до значения $S''_П$ может привести к незначительному уменьшению составляющей h_B (до значения h''_B), но к заметному увеличению составляющей $h_П$ (до значения $h''_П$). Как следствие, результирующая погрешность формообразования h_Σ может при этом увеличиться также существенно.

Рациональное согласование величин подач S_B и $S_П$ сводится к установлению таких их текущих значений, при которых эффективность формообразования неизменна, а результирующая погрешность формообразования h_Σ минимальна.

Максимальное значение составляющей $h_П$ равно некоторой части допуска $[h]$ на результирующую погрешность h_Σ, т.е. $h_П = c[h]$. Здесь c – локальный параметр распределения допуска на точность формообразования, представляющий собой безразмерную величину, которая изменяется в пределах $0 \le c \le 1$. Для текущей точки поверхности $Д$ детали имеется свое наивыгоднейшее значение параметра "c"[2], т.е. $c = c(U_д, V_д)$.

В соответствие с (2) максимальное значение составляющей h_B равно $h_B = (1-c)[h]$. Подставив эти значения h_B и $h_П$ в (8.25) и в (8.32), получим:

$$S_B = A_1 \arccos \frac{c^2[h]^2 - 2A_2 c[h] + A_3}{-2A_4 c[h] + A_5}; \tag{9.33}$$

$$S_П = A_6 \arccos \frac{c^2[h]^2 + 2A_7 c[h] + A_8}{2A_9 c[h] + A_{10}}, \tag{9.34}$$

где A_1, A_2, …, A_{10} – инвариантные относительно "c" параметры процесса формообразования.

---

[1] В некотором смысле формулируемая задача обратна рассмотренной выше задаче рационального распределения допуска на точность формообразования сложных поверхностей деталей (см. выше, пример 8.13, с. 479-482), рис. 8.22 из решения которой используем для иллюстрации решения рассматриваемой задачи.

[2] При необходимости значение параметра "c" может быть некоторым образом усреднено в пределах всего участка обрабатываемой поверхности детали или в пределах отдельных его частей.

В соответствие с изложенным выше $h_\Sigma = h_\Sigma(h_B; h_\Pi) = h_\Sigma\{(1-c)[h]; c[h]\} = h_\Sigma(c)$. Поэтому наивыгоднейшим будет такой вариант согласования подач S_B и S_Π, т.е. такое значение параметра "c", при котором выполняется условие

$$\frac{\partial h_\Sigma(c)}{\partial c} = 0 . \tag{9.35}$$

В соответствие с правилом высших производных из всех полученных из уравнения (35) экстремальных значений параметра "c" следует выбрать то его значение, которое удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 h_\Sigma(c)}{\partial c^2} < 0 .$$

Искомое значение параметра "c" соответствует его значению, получаемому при решении рассмотренной выше (см. пример 8.13, с. 479-482) прямой задачи. Это позволяет использовать для его нахождения вместо уравнения $h_\Sigma = h_\Sigma(c)$ эквивалентное ему в данном случае уравнение

$$P_\Phi(c) = A_1 A_6 \arccos\frac{c^2[h]^2 + 2A_2 c[h] + A_3}{2A_4 c[h] + A_5} \arccos\frac{c^2[h]^2 - 2A_7 c[h] + A_8}{-2A_9 c[h] + A_{10}} \sin\varepsilon . \tag{9.36}$$

Дифференцирование (36) по параметру "c" дает:

$$\frac{\partial P_\Phi(c)}{\partial c} = A_1 A_6 \left[\frac{2A_4[h](c^2[h]^2 + 2A_2 c[h] + A_3) - (2c[h]^2 + A_2[h])(2A_4 c[h] + A_5)}{(2A_4 c[h] + A_5)\sqrt{(2A_4 c[h] + A_5)^2 - (c^2[h]^2 + 2A_2 c[h] + A_3)^2}} \arccos\frac{c^2[h]^2 - 2A_7 c[h] + A_8}{-2A_9 c[h] + A_{10}} - \right. \tag{9.37}$$

$$\left. - \frac{2A_9[h](c^2[h]^2 - 2A_7 c[h] + A_8) - (2c[h]^2 - A_7[h])(-2A_9 c[h] + A_{10})}{(-2A_9 c[h] + A_{10})\sqrt{(-2A_9 c[h] + A_{10})^2 - (c^2[h]^2 - 2A_7 c[h] + A_8)^2}} \arccos\frac{c^2[h]^2 - 2A_7 c[h] + A_8}{-2A_9 c[h] + A_{10}} \right] \sin\varepsilon = 0 .$$

Характер функции $P_\Phi = P_\Phi(c)$ таков, что имеется лишь единственное действительное решение уравнения (37), в связи с чем дальнейшая проверка условия $\frac{\partial^2 P_\Phi(c)}{\partial c^2} < 0$ не требуется. Это вытекает из следующего.

Зависимости (8.25) и (8.32) могут быть представлены в виде:

$$S_B(c) = 2Q \arccos\frac{G^2(c) + H^2 - L^2}{2\,H\,G(c)}; \qquad S_\Pi(c) = 2A \arccos\frac{B^2(c) + D^2 - R^2}{2\,D\,B(c)},$$

где D, H, L и R – функционально не связанные с "c" параметры процесса (константы), а $B(c)$ и $G(c)$ – функции параметра "c".

Несложные вычисления показывают, что $\frac{G^2(c) + H^2 - L^2}{2HG(c)} = 1$ только при $c = 1$, а $\frac{B^2(c) + D^2 - R^2}{2DB(c)} = 1$ только при $c = 0$. Следовательно, функция $P_\Phi = P_\Phi(c)$ внутри отрезка $[0;1]$ отлична от нуля. Поэтому в соответствие с теоремой Ролля производная $\frac{\partial P_\Phi(c)}{\partial c}$ внутри отрезка $[0;1]$ имеет единственный действительный корень.

Определим производные

$$\frac{\partial P_{\Phi}(c)}{\partial c} = 4AQ\left[\frac{-B^2(c)+D^2-R^2}{B(c)\sqrt{S_1(c)}}\arccos\frac{G^2(c)+H^2-L^2}{2HG(c)} + \frac{G^2(c)-H^2+L^2}{G(c)\sqrt{S_2(c)}}\arccos\frac{B^2(c)+D^2-R^2}{2DB(c)}\right]$$

(9.38)

$$\frac{\partial^2 P_{\Phi}(c)}{\partial c^2} = \frac{8AQ}{2G(c)B(c)\sqrt{S_1(c)S_2(c)}}[G^2(c)-H^2+L^2][-B^2(c)+D^2-R^2]-$$

$$-\frac{2B^2(c)S_1(c)+[B^2(c)+D^2-R^2][S_1(c)+2B^2(c)(-B^2(c)+D^2+R^2)]}{B(c)S_1(c)}\arccos\frac{G^2(c)+H^2-L^2}{2HG(c)}-$$

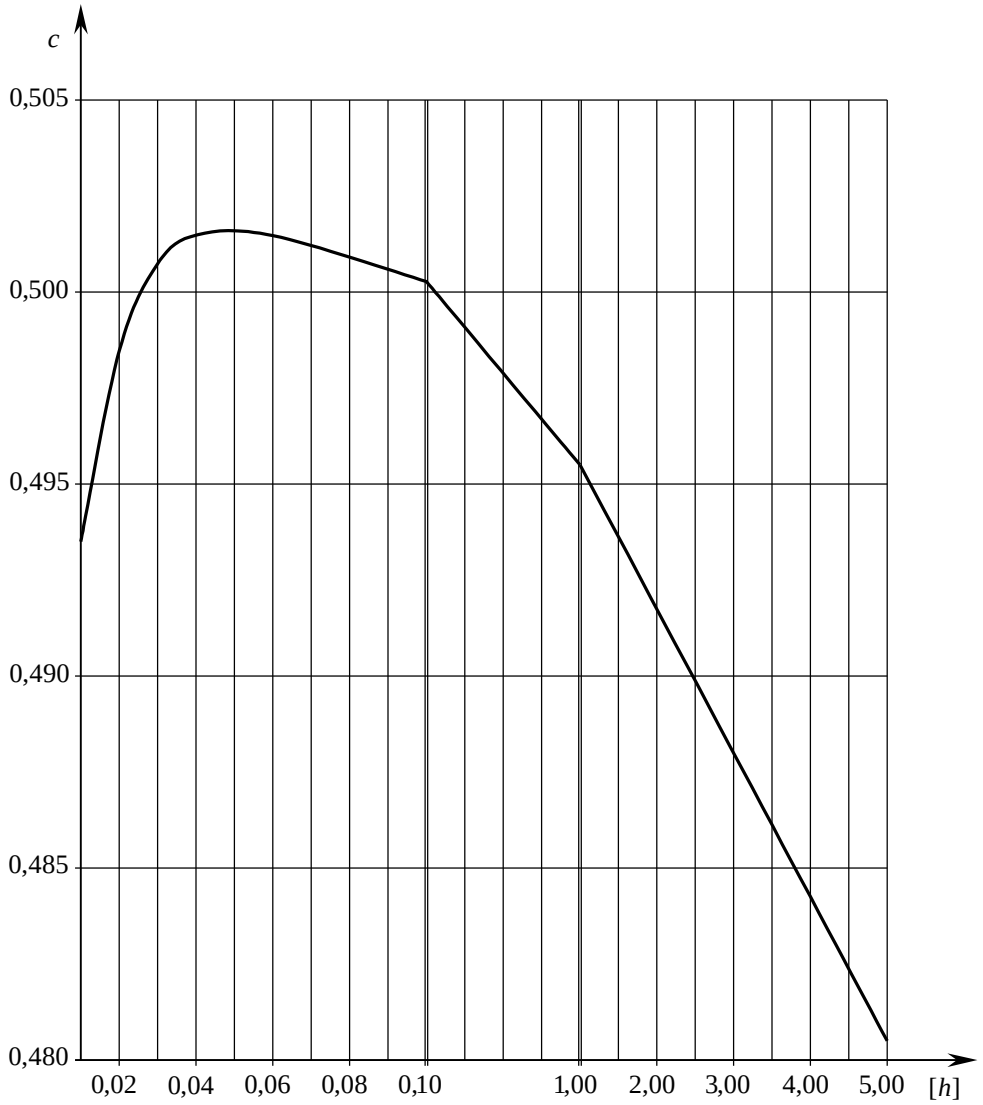


Рис. 9.6. Зависимость величины параметра “ c ” от допуска на точность формообразования ($R_{\partial.B} = 100мм$, $R_{\partial.П} = 20мм$, $R_{и.B} = 50мм$ и $R_{\partial.П} = 50мм$).

$$-\frac{2G^2(c)S_2(c)+[G^2(c)-H^2+L^2][2G^2(c)(G^2(c)-H^2-L^2)-S_2(c)]}{2G(c)S_2(c)}\arccos\frac{B^2(c)+D^2-R^2}{2DB(c)},$$

где $S_1(c)=4D^2B^2(c)-[B^2(c)+D^2-R^2]$ и $S_2(c)=4H^2G^2(c)-[G^2(c)+H^2-L^2]$.

Легко проверить, что $-B^2(c)+D^2-R^2>0$, $G^2(c)-H^2+L^2<0$, $S_1(c)>0$ и $S_2(c)>0$.

Из этих неравенств следует, что в интервале $[0;1]$ для всех значений параметра "c" вторая производная отрицательна: $\frac{\partial^2 P_\Phi(c)}{\partial c^2}<0$. Это значит, что функция $P_\Phi=P_\Phi(c)$ в точке, являющейся корнем уравнения (38), имеет именно максимум, а не иной экстремум (рис. 9.6).

Наличие экстремума свидетельствует о том, что рассматриваемая функция не является монотонно убывающей. Из рис. 9.6 следует, что чем меньше допуск на точность обработки (т.е. чем более точные детали обрабатываются) тем параметр "c" больше по величине. Такой характер рассматриваемой зависимости сохраняется до некоторого значения $[h]$, после чего величина параметра "c" уменьшается.

Очевидно также, что параметр "c" всегда неотрицателен.

Для решения уравнения (37) численными методами разработан (Радзевич С.П., Олейник Л.А., Радченко С.В., 1989) алгоритм, основанный на комбинации метода половинного деления и метода Ньютона. Сходимость метода Ньютона обеспечена тем, что выполнено условие: $\frac{\partial^2 P_\Phi(c)}{\partial c^2}\neq 0$ и при $0\le c\le 1$ третья производная $\frac{\partial^3 P_\Phi(c)}{\partial c^3}$ является непрерывной функцией параметра "c".

9.4. Точность формообразования при локально-экстремальных видах касания

При локально-экстремальных видах касания поверхностей $Д$ и $И$ через точку K проходит не менее одного направления, в котором минимальный диаметр $d_{conf}^{(\min)}$ индикатрисы конформности $Ind_{conf}\,(Д/И)$ равен нулю либо эта характеристическая кривая целиком вырождается в точку.

Во всех случаях локально-эстремального касания на поверхности детали неизбежно образуется остаточный детермированный регулярный микрорельеф, который уместнее назвать *субмикрорельефом*. Результирующую высоту субмикрорельефа удобно разделить на две составляющие. Образование составляющей $h_B^{(s)}$ вызвано дискретностью воспроизведения реальным инструментом его исходной инструментальной поверхности, а составляющей $h_{\Pi}^{(s)}$ – точечным характером касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности в процессе обработки.

Равенство модулей радиусов кривизны плоских нормальных сечений поверхностей $Д$ и $И$ в точке K исключает возможность использования зависимостей (10), (11), (13) и (18) для определения элементарных составляющих h_B и h_{Π} результирующей погрешности h_Σ формообразования и расчета по зависимостям (8.23)-(8.26) и (8.30)-(8.33) критических значений подач S_B и S_{Π} инструмента.

Достаточную для применения в инженерной практике точность могут дать аналитические зависимости, представляющие собой конечный отрезок степенного ряда Тейлора, в который раскладываются составляющие $h_B^{(s)}$ и $h_{\Pi}^{(s)}$ результирующей погрешности формообразования.

По крайней мере в одном из проходящих через точку K плоских нормальных сечений поверхностей $Д$ и $И$, касание которых локально-экстремальное, выполняется условие $R_u=-R_o$ (рис. 9.7). При задании в локальной системе координат xy профиля нормального сечения поверхности $Д$ детали уравнением вида

$Д(x,\ y)=0$ и профиля сечения поверхности $И$ инструмента той же нормальной плоскостью уравнением вида $И(x,\ y)=0$ должно выполняться условие:

$$(9.39)\qquad \frac{\left(\frac{\partial Д}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Д}{\partial y}\right)^2}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Д}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Д}{\partial x\partial y} & \frac{\partial Д}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 Д}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 Д}{\partial y^2} & \frac{\partial Д}{\partial y} \\ \frac{\partial Д}{\partial x} & \frac{\partial Д}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}}+\frac{\left(\frac{\partial И}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial И}{\partial y}\right)^2}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 И}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 И}{\partial x\partial y} & \frac{\partial И}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 И}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 И}{\partial y^2} & \frac{\partial И}{\partial y} \\ \frac{\partial И}{\partial x} & \frac{\partial И}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}}=0\,.$$

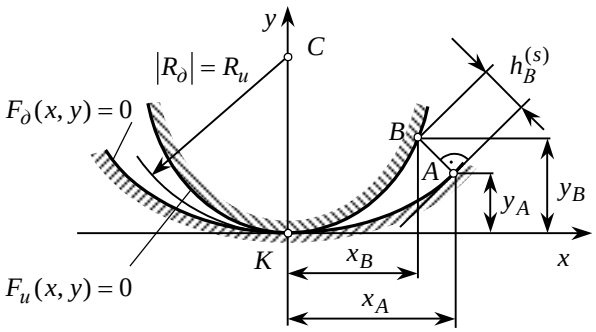


Рис. 9.7. Образование *субмикрорельефа* на поверхности детали.

С учетом (39) при выбранном расположении локальной системы координат выполняется условие:

$$\frac{\partial Д(И)}{\partial x}\left\{\left[\frac{\partial Д(И)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial Д(И)}{\partial y}\right]^2\right\}=0\,,$$

а ордината y_C общего центра кривизны C профилей сечения поверхностей $Д$ и $И$ равна:

$$y_C=\frac{\left\{\left[\frac{\partial Д(И)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial Д(И)}{\partial y}\right]^2\right\}\frac{\partial Д(И)}{\partial y}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Д(И)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Д(И)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial Д(И)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 Д(И)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 Д(И)}{\partial y^2} & \frac{\partial Д(И)}{\partial y} \\ \frac{\partial Д(И)}{\partial x} & \frac{\partial Д(И)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}}\,.$$

На профиле сечения поверхности $Д$ выбрана некоторая точка $A(x_A;\ y_A)$, через которую проведена нормаль к профилю $Д(x,\ y)=0$:

$$(9.40)\qquad Y=Y_A+(x-X_A)\frac{\partial Д}{\partial y}\left(\frac{\partial Д}{\partial x}\right)^{-1}\,.$$

Использованные в этой формуле значения производных вычислены в точке $A(x_A;\ y_A)$.

Решая уравнение (40) совместно с уравнением $И(x,\ y)=0$, определим положение соответствующей точки $B(x_B;\ y_B)$ на профиле сечения поверхности $И$ инструмента. Если точка A отстоит от точки K на расстояние, равное половине подачи на зуб, то расстояние между точками $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$ равно высоте составляющей $h_B^{(s)}$ остаточного субмикрорельефа, которая не должна превышать допуск $[h_B]$ на точность формообразования. Поэтому

$$(9.41)\qquad h_B^{(s)}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}\le[h_B]\,.$$

Величина подачи $\breve{S}_B$ на зуб равна длине дуги $\cup AK$, поэтому

$$\breve{S}_B = \cup AK = \int_0^{x_A} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial Д}{\partial x} \left(\frac{\partial Д}{\partial y} \right)^{-1} \right]^2} \, dx . \tag{9.42}$$

Если a) в текущей точке K, b) на некотором фрагменте траектории формообразования или c) в пределах некоторого участка поверхности $Д$ расчеты величин погрешностей формообразования (и критических значений подач S_B и $S_П$), выполненные по формулам (10), (11), (13) и (18), приводят к значениям, равным соответственно 0 и ∞, то такую точку, фрагмент траектории формообразования или участок поверхности $Д$ необходимо исследовать на наличие в ней локально-экстремального вида касания поверхностей $Д$ и $И$. Если выполняются соответствующие условия, то зная величину подачи S_B, по уравнению (42) определяем абсциссу x_A точки $A(x_A; y_A)$, подставив значение которой в уравнение $Д(x, y) = 0$, найдем ординату y_A этой же точки $A(x_A; y_A)$. Подставив далее найденные координат x_A и y_A в уравнение (40) и решив его совместно с уравнением $И(x, y) = 0$, определим координаты x_B и y_B точки $B(x_B; y_B)$. Координаты точек $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ позволяют по формуле (41) вычислить значение $h_B^{(s)}$ погрешности формообразования.

Высота другой составляющей $h_П^{(s)}$ остаточного детерминированного регулярного субмикрорельефа находится аналогичным путем.

В случае, если задан допуск $[h_B]$ на точность формообразования и требуется решить обратную задачу, критическая величина подачи S_B находится так.

Решая систему уравнений

$$Д(x, y) = 0 ; \qquad И(x, y) = 0 ; \qquad Y = y_A - (x - x_A) \frac{\partial Д}{\partial y} \left(\frac{\partial Д}{\partial x} \right)^{-1} ; \qquad [h_П] = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} ,$$

находим абсциссу x_A точки $A(x_A; y_A)$. Подставив найденное значение в уравнение (42) и проинтегрировав его, получим искомое критическое значение подачи S_B.

Как при определении погрешности формообразования h_B, так и при расчете величины критической подачи S_B, обычно приходится оперировать с неявно заданными аналитическими функциями вида $Д(x, y) = 0$ и $И(x, y) = 0$. Это усложняет вычисление величин h_B и S_B. Для упрощения вычислений непрерывные функции вида $Д(x, y) = 0$ и $И(x, y) = 0$, имеющие при $x = x_A$ все необходимые частные производные, можно представить в виде бесконечной суммы членов степенного ряда Тэйлора:

$$y(x) = y(x_A) + \frac{x - x_A}{1!} y'(x_A) + \frac{(x - x_A)^2}{2!} y''(x_A) + \ldots + \frac{(x - x_A)^n}{n!} y^{(n)}(x_A) + \ldots . \tag{9.43}$$

Использование формулы (43) осложнено необходимостью вычисления в точке $A(x_A; y_A)$ производных вида $y^{(n)}(x)$ функции $y = y(x)$ одной переменной, заданной в явной форме, тогда как кривые сечения

$$Д(x, y) = 0 ; \qquad И(x, y) = 0$$

заданы в неявной форме. Дифференцирование этих двух уравнений по x на основании формулы (Корн, Г., Корн, Т., 1974)

(9.44) $$\frac{dU}{d\xi}=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}+\ldots\frac{\partial U}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \xi}$$

дает

(9.45) $$\frac{\partial Д(И)}{\partial x}+y'\frac{\partial Д(И)}{\partial y}=0\,,$$

откуда

(9.46) $$y'=\frac{\partial Д(И)}{\partial x}\left(\frac{\partial Д(И)}{\partial y}\right)^{-1}$$

Дифференцирование уравнения (46) по x на основании той же формулы (44) дает

$$\frac{\partial^2 Д(И)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 Д(И)}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 Д}{\partial y^2}(y')^2+\frac{\partial Д(И)}{\partial y}y''=0\,,$$

откуда с учетом (45) получим:

(9.47) $$y''=\frac{2\dfrac{\partial Д(И)}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial Д(И)}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 Д(И)}{\partial x\partial y}-\left[\dfrac{\partial Д(И)}{\partial y}\right]^2\dfrac{\partial^2 Д(И)}{\partial x^2}-\left[\dfrac{\partial Д(И)}{\partial x}\right]^2\dfrac{\partial^2 Д(И)}{\partial y^2}}{\left[\dfrac{\partial Д(И)}{\partial y}\right]^3}.$$

Таким же образом находим

$$\frac{\partial^3 Д(И)}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 Д(И)}{\partial x^2\partial y}y'+3\frac{\partial^3 Д(И)}{\partial x\partial y^2}(y')^2+\frac{\partial^3 Д(И)}{\partial y^3}(y')^3+3\frac{\partial^2 Д(И)}{\partial x\partial y}y''+3\frac{\partial^2 Д(И)}{\partial y^2}y'y''+\frac{\partial Д(И)}{\partial y}y'''=0\,,$$

из чего следует

(9.48) $$y'''=-\frac{\dfrac{\partial^3 Д(И)}{\partial x^3}+3\dfrac{\partial^3 Д(И)}{\partial x^2\partial y}+3\dfrac{\partial^3 Д(И)}{\partial x\partial y^2}(y')^2+\dfrac{\partial^3 Д(И)}{\partial y^3}(y')^3+3\dfrac{\partial^2 Д(И)}{\partial x\partial y}y''+3\dfrac{\partial^2 Д(И)}{\partial y^2}y'y''}{\dfrac{\partial Д(И)}{\partial y}}.$$

Процедура определения производных неявно заданных функций $Д(x,y)=0$ и $И(x,y)=0$ одной переменной можно продолжить и найти таким путем производные любого требуемого порядка.

Выражения (46)-(48) для производных y', y'', y''' и аналогичные вводимые рассмотренным выше рекуррентным способом формулы для производных более высоких порядков позволяют воспользоваться формулой (43), которая верна только при значениях аргумента x, при которых остаточный член $y(x)-S_n=R_n$ при $n\to\infty$ стремится к нулю.

Остаточный член ряда Тэйлора равен:

$$R_n=\frac{(x-X_A)^{(n+1)}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi)\,,$$

(где ξ находится между x_A и x) или в интегральной форме

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_{X_A}^{x}(x-t)y^{(n+1)}(t)dt\,.$$

Рассмотренный подход применим для расчета элементарных составляющих h_B и $h_П$ результирующей погрешности h_Σ поверхности детали при локально-экстремальных видах касания поверхностей $Д$ и $И$.

Аналогично можно расчитать величины элементарных составляющих h_B и $h_П$ результирующей погрешности h_Σ формообразования сложных поверхностей деталей при квази-экстремальных видах касания поверхностей $Д$ и $И$ (см. выше, гл. 4).

9.5. Локальная аппроксимация поверхностей *Д* и *И* торами

При расчете величины результирующей погрешности формообразования h_Σ по значениям ее элементарных составляющих h_B и $h_П$ принятое допущение 8.1 (см. выше, с. 446) позволяет пренебречь изменением нормального радиуса кривизны поверхностей $Д(И)$ в пределах длины дуги, соизмеримой со значениями подач S_B вдоль и $S_П$ поперек строки формообразования, а также считать, что нормали в точке касания поверхностей $Д$ и $И$ и в соответствующих точках как вдоль, так и на соседних строках формообразования, взаимно компланарны. Таким образом из рассмотрения исключается обычно слабое влияние на расчетные значения составляющих h_B и $h_П$ кручения семейства кривых, которыми могут быть представлены волнистость и огранка. Следовательно предполагается, что в пределах одной элементарной ячейки на $Д$ волнистость и огранка могут быть представлены семействами плоских кривых – дугами окружностей. Таким путем рассматриваемая задача сводится к плоской.

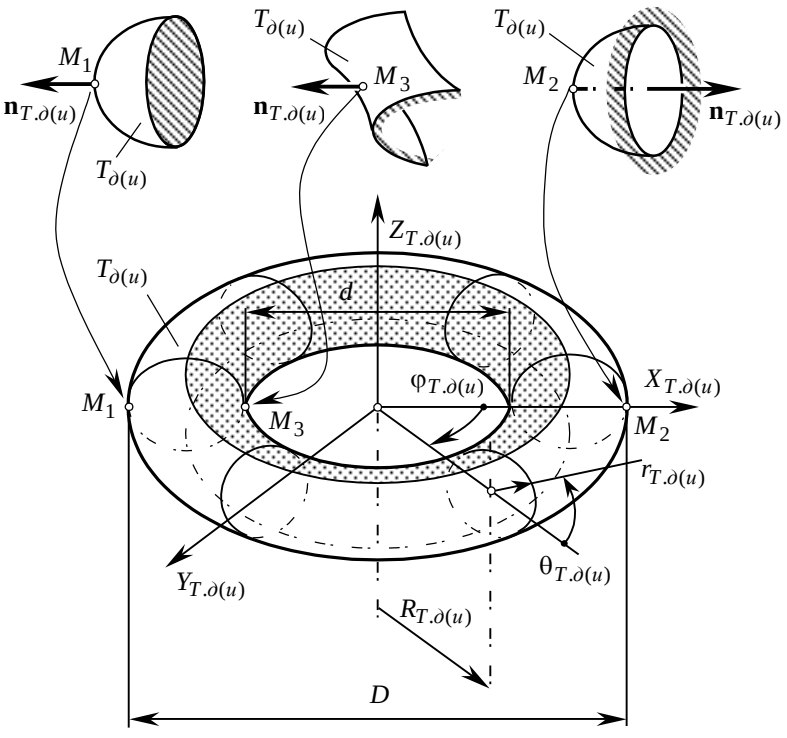


Рис. 9.8. Элементы локальной геометрии поверхности заменяющего тора $T_{\partial(u)}$.

Очевидно, что при таком допущении поверхности $Д(И)$ локально (в пределах одной элементарной ячейки на $Д$) заменяются участками поверхности тора $T_{\partial(u)}$, у которого радиусы направляющей $R_{T.\partial(u)}$ и образующей $r_{T.\partial(u)}$ окружностей (рис. 9.8.) однозначно связаны с соответствующими главными радиусами кривизны $R_{1.\partial(u)}$ и $R_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$.

Локальные участки поверхности $Д(И)$ с различными по знаку полной (гауссовой) $\tilde{G}_{\partial(u)}$ и средней $\tilde{M}_{\partial(u)}$ кривизной располагаются в дифференциальной окрестности точек M_1, M_2 и M_3 на окружности наибольшего $D = 2(R_{T.\partial(u)} + r_{T.\partial(u)})$ и наименьшего $d = 2(R_{T.\partial(u)} - r_{T.\partial(u)})$ диаметров тора $T_{\partial(u)}$ с открытой стороны его поверхности.

Если гауссова кривизна локального участка поверхности $Д(И)$ поло-

жительна ($\tilde{G}_{\partial(u)} > 0$), участок является выпуклым (при $\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$) или вогнутым (при $\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$) локальным участком эллиптического типа. Заменяющий его участок тора $T_{\partial(u)}$ расположен в окрестности произвольной точки своей окружности наибольшего диаметра D (см. рис. 9.8). При $\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$ (точка M_1) тело детали или инструмента находится внутри поверхности тора, а при $\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$ (точка M_2) – вне его поверхности. Очевидно, что изложенное справедливо и для вырожденных локальных участков эллиптического типа: i) омбилических, когда главные кривизны поверхности $Д(И)$ равны одна другой по величине и одинаковы по знаку, и ii) локальных участков уплощения, когда главные кривизны поверхности $Д(И)$ одновременно равны нулю.

Если гауссова кривизна локального участка поверхности $Д(И)$ отрицательная ($\tilde{G}_{\partial(u)} < 0$), то при любом значении средней кривизны $\tilde{M}_{\partial(u)}$ (когда $\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$, $\tilde{M}_{\partial(u)} = 0$ или $\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$) такой локальный участок поверхности является выпукловогнутым локальным участком гиперболического типа, а заменяющий его участок тора расположен в окрестности произвольной точки на его окружности наименьшего диаметра d (точка M_3). Величина и знак средней кривизны $\tilde{M}_{\partial(u)}$ определяются знаками и соотношением модулей радиусов $R_{T.\partial(u)}$ направляющей и $r_{T.\partial(u)}$ образующей окружностей тора $T_{\partial(u)}$, а также тем, с какой стороны расположено тело детали или инструмента: внутри или вне поверхности тора.

Если гауссова кривизна локального участка поверхности $Д(И)$ равна нулю ($\tilde{G}_{\partial(u)} = 0$), такой локальный участок является выпуклым (при $\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$) или вогнутым (при $\tilde{M}_{\partial(u)} < 0$) локальным участком параболического типа, а заменяющий его участок тора $T_{\partial(u)}$ расположен в окрестности произвольной точки на бесконечно большого диаметра D окружности наибольшего диаметра. При $\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$ тело детали или инструмента находится внутри, а при $\tilde{M}_{\partial(u)} > 0$ – вне поверхности вырожденного в цилиндр тора $T_{\partial(u)}$. Аналогичное справедливо и применительно к бесконечно большого диаметра d окружности наименьшего диаметра тора $T_{\partial(u)}$.

В приведенных случаях поверхность $Д(И)$ локально аппроксимируется отсеками тора, расположенными только либо на окружности наибольшего D, либо на окружности наименьшего d диаметров. Это следствие того, что нормаль $\mathbf{n}_{\partial(u)}$ к поверхности $Д(И)$ должна совпадать: во-первых, с нормалью $\mathbf{n}_{T.\partial(u)}$ к поверхности $T_{\partial(u)}$ заменяющего тора и, во-вторых, с линией пересечения плоскостей, в которых расположены направляющая и образующая окружности радиусов $R_{T.\partial(u)}$ и $r_{T.\partial(u)}$.

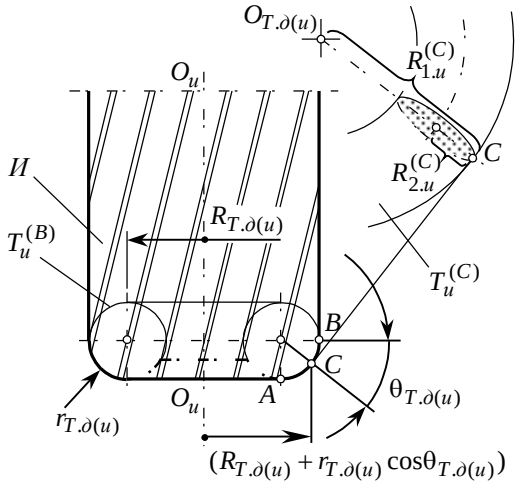


Рис. 9.9. Заменяющие торы исходной инструментальной поверхности.

Идея локальной аппроксимации поверхности $Д(И)$ тором $T_{\partial(u)}$ тесно примыкает к постулированному выше положению (см. выше, с. 88, постулат, 1.1), согласно которому если условия формообразования поверхности детали выполняются в каждой точке поверхности $Д$, то они могут быть выполнены и для всей поверхности детали. Следовательно, не всегда следует аппроксимировать целиком всю поверхность $Д(И)$ или большие ее отсеки – обычно это трудоемко и технически сложно. Во многих случаях достаточно ограничиться локальной аппроксимацией поверхностей $Д(И)$ заменяющим тором.

В качестве примера рассмотрим локальную аппроксимацию тором T_u исходной инструментальной поверхности $И$ (рис. 9.9).

Исходная инструментальная поверхность применяемого инструмента имеет форму тора $И$. В различных точках A, B, C образующей поверхность $И$ можно локально аппроксимировать различными заменяющими торами $T_u^{(A)}$, $T_u^{(B)}$ и $T_u^{(C)}$. В рассматриваемом примере поверхность $T_u^{(B)}$ заменяющего тора совпадает с поверхностью $И$ инструмента. Очевидно, что торы $T_u^{(A)}$, $T_u^{(B)}$ и $T_u^{(C)}$ не только разные, но и по-разному ориентированы как один относительно другого, так и относительно самой поверхности $И$ инструмента.

Локальная аппроксимация может быть построена i) тором T_u для исходных инструментальных поверхностей любого типа – для поверхностей $И$ в виде: цилиндра общего вида, винтовой поверхности постоянного шага или поверхности сложной формы, а также ii) тором T_∂ для любого типа сложной поверхности $Д$ детали.

Решая задачу локальной аппроксимации поверхности $Д(И)$ фрагментом тора $T_{\partial(u)}$, исходим из того, что поверхность детали и исходная инструментальная поверхность применяемого режущего инструмента каждая в своей системе координат заданы векторными уравнениями вида $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$.

Рассматриваемая задача может быть решена в разных системах координат, например, в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, связанной с деталью. Переход от системы координат $X_u Y_u Z_u$, связанной с инструментом, к однонаправленной с ней системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$, связанной с деталью, аналитически опсывается опратором $\mathbf{Rs}(И \to Д)$ результирующего прямого преобразования кординат

$$\mathbf{Rs}(И \to Д) = \begin{bmatrix} \cos\angle(X_\partial, X_u) & \cos\angle(X_\partial, Y_u) & \cos\angle(X_\partial, Z_u) & a \\ \cos\angle(Y_\partial, X_u) & \cos\angle(Y_\partial, Y_u) & \cos\angle(Y_\partial, Z_u) & b \\ \cos\angle(Z_\partial, X_u) & \cos\angle(Z_\partial, Y_u) & \cos\angle(Z_\partial, Z_u) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9.49}$$

где a, b, c – величины, определяющие положение начала системы координат $X_u Y_u Z_u$ инструмента в системе координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ детали, а остальные элементы оператора $\mathbf{Rs}(И \to Д)$ – это (в общепринятых обозначениях) косинусы углов между соответствующими осями систем координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ и $X_u Y_u Z_u$.

Обратный переход – от системы координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ детали к системе координат $X_u Y_u Z_u$ инструмента аналитически описывается оператором обратного преобразования координат $\mathbf{Rs}(Д \to И) = \mathbf{Rs}^{-1}(И \to Д)$:

$$\mathbf{Rs}(Д \to И) = \mathbf{Rs}^{-1}(И \to Д) = \begin{bmatrix} \cos\angle(X_\partial, X_u) & \cos\angle(Y_\partial, X_u) & \cos\angle(Z_\partial, X_u) & A \\ \cos\angle(X_\partial, Y_u) & \cos\angle(Y_\partial, Y_u) & \cos\angle(Z_\partial, Y_u) & B \\ \cos\angle(X_\partial, Z_u) & \cos\angle(Y_\partial, Z_u) & \cos\angle(Z_\partial, Z_u) & C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9.50}$$

где A, B, C – величины, определяющие положение начала системы координат $X_\partial Y_\partial Z_\partial$ детали в системе координат $X_u Y_u Z_u$ инструмента.

Элементы A, B и C оператора $\mathbf{Rs}(Д \to И)$ обратного преобразования координат (50) выражаются через элементы a, b и c и др. оператора $\mathbf{Rs}(И \to Д)$ прямого преобразования координат:

$$A = -\left[a\cos\angle(X_\partial, X_u) + b\cos\angle(Y_\partial, X_u) + c\cos\angle(Z_\partial, X_u)\right];$$

$$B = -\left[a\cos\angle(X_\partial, Y_u) + b\cos\angle(Y_\partial, Y_u) + c\cos\angle(Z_\partial, Y_u)\right];$$

$$C = -\left[a\cos\angle(X_\partial, Z_u) + b\cos\angle(Y_\partial, Z_u) + c\cos\angle(Z_\partial, Z_u)\right].$$

Минор размером 3×3 оператора $\mathbf{Rs}\,(Д \to И)$ обратного преобразования координат (50) является транспонированным к соответствующему минору оператора $\mathbf{Rs}\,(И \to Д)$ прямого преобразования коорди-нат (49). Справедливо и обратное утверждение.

Поверхность заменяющего тора $T_{\partial(u)}$ удобно аналитически описать таким образом, чтобы в текущей ее точке гауссовы координатные кривые были касательны к главным направлениям на поверхности $T_{\partial(u)}$ – такая форма ортогональной параметризации существенно упрощает преобразования, поскольку в этом случае локальная подвижная система координат $x^{(K)}_{\partial(u)} y^{(K)}_{\partial(u)} z^{(K)}_{\partial(u)}$ на поверхности $T_{\partial(u)}$ заменяющего тора вырождается в естественным образом связанный с ней трехгранник Дарбу.

Чтобы получить удобно параметризованное уравнение поверхности тора $T_{\partial(u)}$, запишем в системе координат $X_{T.\partial(u)} Y_{T.\partial(u)} Z_{T.\partial(u)}$ уравнение образующей этот тор окружности.

Центр образующей окружности радиуса $r_{T.\partial(u)}$ расположен в точке O, связанной с поверхностью $T_{\partial(u)}$ (рис. 9.10):

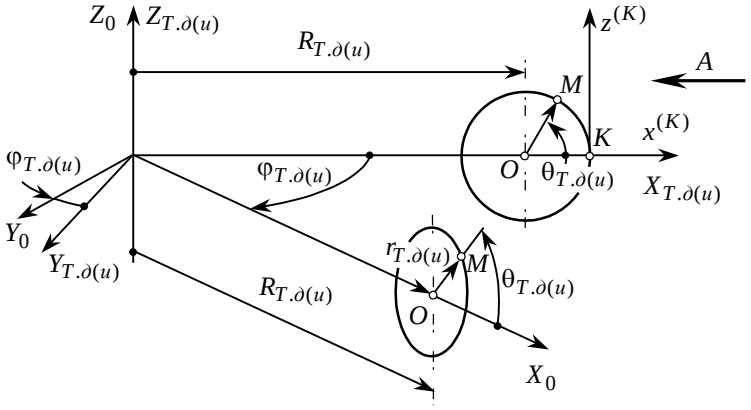


Рис. 9.10. К рациональной параметризации поверхности заменяющего тора $T_{\partial(u)}$.

$$[T_{\partial(u)}]^* = [(r_{\partial(u)} \cos\theta_{\partial(u)} + R_{\partial(u)}) \quad 0 \quad r_{\partial(u)} \sin\theta_{\partial(u)} \quad 1]^T, \tag{9.51}$$

где $R_{T.\partial(u)}$ – радиус направляющей окружности тора $T_{\partial(u)}$;

$\theta_{T.\partial(u)}$ – первый угловой параметр поверхности $T_{\partial(u)}$ заменяющего тора (см. рис. 9.10).

Введем в рассмотрение другую систему координат $X_0 Y_0 Z_0$, имеющую общее начало и общую ось аппликат с исходной системой координат $X_{T.\partial(u)} Y_{T.\partial(u)} Z_{T.\partial(u)}$ и развернутую относительно нее вокруг оси $Z_{T.\partial(u)}$ на некоторый угол $\varphi_{T.\partial(u)}$ – это второй угловой параметр поверхности $T_{\partial(u)}$ заменяющего тора. Переход от второй системы координат к первой описывается оператором $\mathbf{Rs}\ (0 \to T_{\partial(u)})$ результирующего прямого преобразования координат, который в рассматриваемом случае представляет собой оператор $\mathbf{Rt}\,(Z_{T.\partial(u)}, \varphi_{T.\partial(u)})$ поворота вокруг оси $Z_{T.\partial(u)}$ на угол $\varphi_{T.\partial(u)}$:

$$\mathbf{Rs}\ (0 \to T_{\partial(u)}) = \mathbf{Rt}\,(Z_{T.\partial(u)}, \varphi_{T.\partial(u)}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{T.\partial(u)} & -\sin\varphi_{T.\partial(u)} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{T.\partial(u)} & \cos\varphi_{T.\partial(u)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножая (51) слева на оператор $\mathbf{Rs}\ (0 \to T_{\partial(u)})$, получим уравнение, определяющее в системе координат $X_{T.\partial(u)} Y_{T.\partial(u)} Z_{T.\partial(u)}$ положение текущей точки M на образующей окружности радиуса $r_{T.\partial(u)}$ в текущем положении этой окружности при ее вращении вокруг оси аппликат $Z_{T.\partial(u)}$. Это приводит к матричному уравнению поверхности $T_{\partial(u)}$ заменяющего тора:

$$\left[T_{\partial(u)}\right] = \mathbf{Rs}\,(0 \to T_{\partial(u)}) \cdot \left[T_{\partial(u)}\right]^{*} = \begin{bmatrix} (r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)}) \cos\varphi_{T.\partial(u)} \\ (r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)}) \sin\varphi_{T.\partial(u)} \\ r_{T.\partial(u)} \sin\theta_{T.\partial(u)} \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (9.52)$$

Рассмотренный подход к получению удобно параметризованного уравнения поверхности заменяющего тора $T_{\partial(u)}$ полезен тем, что в определенном смысле обладает некоторой общностью – он может быть использован не только в случае, когда ось вращения окружности лежит в плоскости этой окружности, но и когда ось пересекает плоскость расположения окружности, когда вращательное или иное движение совершает пространственная кривая и т.п.

Исходя из уравнений (52) запишем первые производные:

$$\frac{\partial X_{T.\partial(u)}}{\partial \varphi_{T.\partial(u)}} = -(r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)}) \sin\varphi_{T.\partial(u)}; \qquad \frac{\partial X_{T.\partial(u)}}{\partial \theta_{T.\partial(u)}} = (-r_{T.\partial(u)} \sin\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)}) \cos\varphi_{T.\partial(u)};$$

$$\frac{\partial Y_{T.\partial(u)}}{\partial \varphi_{T.\partial(u)}} = (r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)}) \cos\varphi_{T.\partial(u)}; \qquad \frac{\partial Y_{T.\partial(u)}}{\partial \theta_{T.\partial(u)}} = (-r_{T.\partial(u)} \sin\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)}) \sin\varphi_{T.\partial(u)};$$

$$\frac{\partial Z_{T.\partial(u)}}{\partial \varphi_{T.\partial(u)}} = 0; \qquad \frac{\partial Z_{T.\partial(u)}}{\partial \theta_{T.\partial(u)}} = r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)}. \qquad (9.53)$$

Тогда коэффициенты $E_{T.\partial(u)}$, $F_{T.\partial(u)}$ и $G_{T.\partial(u)}$ первой основной квадратичной формы $\Phi_{1.T.\partial(u)}$ равны:

$$E_{T.\partial(u)} = (r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)})^2;$$

$$F_{T.\partial(u)} = 0;$$

$$G_{T.\partial(u)} = (-r_{T.\partial(u)} \sin\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)})^2 + r^2_{T.\partial(u)} \cos^2_{T.\partial(u)}\theta.$$

Первая основная квадратичная форма $\Phi_{1.T.\partial(u)}$ поверхности $T_{\partial(u)}$ заменяющего тора приобретает вид:

$$\Phi_{1.T.\partial(u)} = (r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)})^2 dU^2_{T.\partial(u)} + (-r_{T.\partial(u)} \sin\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)})^2 + r^2_{T.\partial(u)} \cos\theta^2_{T.\partial(u)} dV^2_{T.\partial(u)}.$$

Как видно из этого уравнения, первая основная квадратичная форма $\Phi_{1.T.\partial}$ не содержит слагаемое с произведением дифференциалов $dU_{T.\partial(u)} dV_{T.\partial(u)}$. Это естественно, поскольку $F_{T.\partial(u)} = 0$, что логично следует из того, что в рассматриваемом случае поверхность тора $T_{\partial(u)}$ параметризована ортогонально. Помним (см. выше, гл. 1), что при ортогональной параметризации любой поверхности $Д(И)$ всегда справедливо тождество: $F_{\partial(u)} \equiv 0$.

Дифференцирование уравнений (53) дает:

$$\frac{\partial^2 X_{T.\partial(u)}}{\partial \varphi^2_{T.\partial(u)}} = -(r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)}) \cos\varphi_{T.\partial(u)}; \qquad \frac{\partial^2 X_{T.\partial(u)}}{\partial \theta^2_{T.\partial(u)}} = (-r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)}) \cos\varphi_{T.\partial(u)};$$

$$\frac{\partial^2 Y_{T.\partial(u)}}{\partial \varphi^2_{T.\partial(u)}} = -(r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)}) \sin\varphi_{T.\partial(u)}; \qquad \frac{\partial^2 Y_{T.\partial(u)}}{\partial \theta^2_{T.\partial(u)}} = (-r_{T.\partial(u)} \cos\theta_{T.\partial(u)} + R_{T.\partial(u)}) \sin\varphi_{T.\partial(u)};$$

$$\frac{\partial^2 Z_{T.\partial(u)}}{\partial \varphi^2_{T.\partial(u)}} = 0; \qquad \frac{\partial^2 Z_{T.\partial(u)}}{\partial \theta^2_{T.\partial(u)}} = -r_{T.\partial(u)} \sin\theta_{T.\partial(u)}.$$

Если эти производные подставить в приведенные выше (см. с. 46) уравнения, получим формулы для коэффициентов $L_{T.\partial(u)}$, $M_{T.\partial(u)}$ и $N_{T.\partial(u)}$ второй основной квадратичной формы $\Phi_{2.T.\partial(u)}$ поверхности заменяющего тора $T_{\partial(u)}$.

Принимая во внимание, что в (52) радиус $r_{T.\partial(u)}$ образующей окружности равен второму главному радиусу кривизны $R_{2.\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$, т.е. $r_{T.\partial(u)} = R_{2.\partial(u)}$, радиус $R_{T.\partial(u)}$ направляющей окружности меньше первого главного радиуса кривизны $R_{1.\partial(u)}$ на величину $R_{2.\partial(u)}$, т.е. $R_{T.\partial(u)} = R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)}$, а параметры $\theta_{T.\partial(u)}$ и $\varphi_{T.\partial(u)}$ аналогичны параметрам $U_{\partial(u)}$ и $V_{\partial(u)}$ в уравнении вида $\mathbf{r}_{\partial(u)} = \mathbf{r}_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}, V_{\partial(u)})$, поверхность тора $T_{\partial(u)}$ аналитически представима в виде:

$$X_{T.\partial(u)} = [R_{2.\partial(u)} \cos U_{\partial(u)} + R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)}] \cos V_{\partial(u)};$$

$$Y_{T.\partial(u)} = [R_{2.\partial(u)} \cos U_{\partial(u)} + R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)}] \sin V_{\partial(u)};$$

$$Z_{T.\partial(u)} = R_{2.\partial(u)} \sin U_{\partial(u)}$$

или в виде матрицы-столбца:

$$\left[T_{\partial(u)}\right] = \begin{bmatrix} [R_{2.\partial(u)} \cos U_{\partial(u)} + R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)}] \cos V_{\partial(u)} \\ [R_{2.\partial(u)} \cos U_{\partial(u)} + R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)}] \sin V_{\partial(u)} \\ R_{2.\partial(u)} \sin U_{\partial(u)} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Первый $R_{1.\partial(u)}$ и второй $R_{2.\partial(u)}$ главные радиусы кривизны поверхности $Д(И)$ равны:

$$R_{1,\,2.\partial(u)} = \frac{-[E_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)} M_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} L_{\partial(u)}] \pm \sqrt{[E_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)} M_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} L_{\partial(u)}]^2 - \ldots}}{2[L_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)}]}$$

$$\ldots \sqrt{-4[L_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)}] \cdot [E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}]}.$$

Существенная особенность локальной аппроксимации поверхности $Д(И)$ фрагментом тора $T_{\partial(u)}$ заключается в том, что поверхность детали аппроксимируется не целиком, а i) локально и ii) фрагментами поверхности одного вида – фрагментами поверхности тора.

При локальной аппроксимации дискретно заданной поверхности детали тором T_∂ его уравенение может быть получено, например, на основе применения метода наименьших квадратов[1]. Точки на поверхности $Д$,

[1]Для этого следует разработать методику локальной аппроксимации дискретно заданной поверхности $Д(И)$ участком поверхности тора $T_{\partial(u)}$ – тем участком его поверхности, который расположен в окрестности точек на наибольшем, либо на наименьшем диаметре

по координатам которых производится аппроксимация, следует брать ближе к границам элементарной ячейки – в противном случае решение будет принципиально более точным, но менее устойчивым к всегда имеющих место погрешностям вычислений. С этих позиций можно определить оптимальную дистанцию между точкой K и периферийными точками (в пределах одной элементарной ячейки, на ее границах или далее) в зависимости от параметров поверхностей $Д(И)$, их относительной локальной ориентации и точности вычислений.

Локально поверхности $Д(И)$ можно также аппроксимировать соприкасающимися параболоидами (параболоидами кривизны):

$$Z_{\partial(u)} = \frac{1}{2}[L_{\partial(u)} x^2_{\partial(u)} + M_{\partial(u)} x_{\partial(u)} y_{\partial(u)} + N_{\partial(u)} y^2_{\partial(u)}] .$$

В локальной системе координат, оси которой ориентированы вдоль главных направлений на $Д(И)$, это уравнение упрощается и преобразуется к виду:

$$2Z_{\partial(u)} = k_{1.\partial(u)} x^2_{\partial(u)} + k_{2.\partial(u)} y^2_{\partial(u)} ,$$

где

$$k_{1,\,2.\partial(u)} = \frac{L_{\partial(u)} + N_{\partial(u)}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{L_{\partial(u)} + N_{\partial(u)}}{2}\right)^2 + M^2_{\partial(u)}} .$$

Такого типа локальная аппроксимация применима только к дифференциальной окрестности текущей точки на поверхности $Д(И)$, за пределами которой погрешности аппроксимации могут резко увеличиться. В то же время локальная аппроксимация заменяющими торами $T_{\partial(u)}$ относится не только к дифференциальной окрестности точки на поверхности $Д(И)$, но справедлива и за ее пределами – в пределах всей элементарной ячейки на $Д$. Таким образом параболоид кривизны отражает только дифференциальные свойства поверхности $Д(И)$, а заменяющий тор $T_{\partial(u)}$ – ее локальные (а не только дифференциальные) свойства, что предпочтительнее. Это следствие более высокой степени уравнения поверхности заменяющего тора $T_{\partial(u)}$ (4-я степень) по сравнению с уравнением поверхности параболоида кривизны (2-я степень).

Заменив локально поверхности $Д$ и $И$ торами T_∂ и T_u, записываем последние в их собственных системах координат. Далее при решении задачи локального формообразования вместо уравнений собственно поверхностей $Д$ и $И$ можно использовать уравнения торов $T_{\partial(u)}$, если они проще уравнений поверхностей $Д(И)$.

Исходя из уравнений поверхностей торов T_∂ и T_u, касающихся одна другой в некоторой точке K, находим основные элементы процесса локального формообразования поверхности детали, в том числе необходимые параметры элементарной ячейки на $Д$. Последнее используется при выборе следующей точки K_{i+1} на $Д$, которая рассматривается как новая точка касания поверхностей $Д$ и $И$ (точнее, поверхностей торов T_∂ и T_u) и т.д. Для этого в некоторой исходной точке K_i расчитываются критические значения подач S_B и $S_П$ соответственно вдоль и поперек строки формообразования. Затем в наивыгоднейшем направлении движения формообразования от точки K_i на расстоянии дуги длиной $\breve{S}_B$ откладывается очередная точка K_{i+1}. Расстояние между исходной K_i и последующей K_{i+1} точками касания (т.е. между точками K_i и K_{i+1}, K_{i+1} и K_{i+2}, … , и т.д.) не должно превышать критического значения подачи S_B. В случае наличия ограничений на

заменяющего тора $T_{\partial(u)}$. В результате решения этой задачи находятся координаты центра тора (три координаты X_C, Y_C, Z_C), два угла наклона его оси ($\sigma_{T.\partial(u)}$ и $\tau_{T.\partial(u)}$), радиусы $R_{\partial(u)}$ направляющей и $r_{\partial(u)}$ образующей окружностей. Желательно также установить оптимальное количество задающих тор $T_{\partial(u)}$ элементов – точек или др.

параметры кинематики формообразования необходимо, чтобы направление движения инструмента от точки K_i к точке K_{i+1} возможно меньше отклонялось от $\mathbf{S}_B$ в каждой точке касания поверхностей $Д(И)$.

В рельном процессе обработки поверхность заменяющего тора T_u всегда больше или меньше смещена относительно поверхности заменяющего тора $T_д$. Результирующее смещение тора T_u относительно тора $T_д$ может быть разложено на шесть элементарных составляющих – три относительных смещения δ_x, δ_y, δ_z вдоль осей системы координат заменяющего тора T_u и три угловых погрешности ε_x, ε_y, ε_z – повороты вокруг осей этой системы координат. Рациональным выбором используемых систем координат количество этих составляющих может быть уменьшено. Погрешность формообразования отсчитывается вдоль нормали к $T_д$ – она равна расстоянию между *ближайшими* точками пересечения нормали $\mathbf{n}_{T.д}$ к поверхности $T_д$ торами $T_д$ и T_u. Используя такой подход, можно расчитать величину результирующей погрешности формообразования, рассматривая при этом поверхности $Д$ и $И$ локально – в пределах одной формообразованной ячейки на $Д$ (как торы $T_д$ и T_u) и на этом основании оценить насколько допустимо применение принципа суперпозиции элементарных составляющих h_B и $h_П$ для расчета результирующей погрешности формообразования h_Σ.

9.6. Связь между системами координат заменяющих торов

Решение задачи локального формообразования поверхностей деталей связано с многократными переходами от системы координат детали $X_д Y_д Z_д$ и от системы координат инструмента $X_u Y_u Z_u$ (далее – от систем координат $X_{д(u)} Y_{д(u)} Z_{д(u)}$) к системам координат $X_{T.д(u)} Y_{T.д(u)} Z_{T.д(u)}$ поверхностей заменяющих торов $T_{д(u)}$ и к подвижным локальным системам координат $x^{(K)}_{д(u)} y^{(K)}_{д(u)} z^{(K)}_{д(u)}$ с началом в точке K касания поверхностей $Д$ и $И$. Такие и другие переходы требуется осуществлять как в прямом, так и в обратном направлении. Если дополнительно описать аналитически прямое и обратное преобразование систем координат с общим началом в точке K, но связанных с поверхностями заменяющих поверхность $Д(И)$ торов $T_{д(u)}$ (т.е. от локальной подвижной системы координат $x^{(K)}_д y^{(K)}_д z^{(K)}_д$ к подобной ей системе координат $x^{(K)}_u y^{(K)}_u z^{(K)}_u$ и обратно), таким путем завершается образование замкнутого цикла последовательных прямых и обратных преобразований координат. Использование замкнутого цикла последовательных прямых и обратных преобразований координат существенно упрощает решение задач формообразования поверхностей деталей на металлорежущих станках.

Переход от системы координат $X_{д(u)} Y_{д(u)} Z_{д(u)}$ поверхности $Д(И)$ к системе координат $X_{T.д(u)} Y_{T.д(u)} Z_{T.д(u)}$ заменяющего тора $T_{д(u)}$ необходим для того, чтобы впоследствие использовать относительно простое уравнение заменяющего тора, а не зачастую громоздкое уравнение собственно поверхности $Д(И)$. Если уравнение поверхности $Д(И)$ проще, чем уравнение поверхности заменяющего тора $T_{д(u)}$, и имеет при этом менее громоздкие первые и вторые производные по каждому из независимых параметров $U_{д(u)}$ и $V_{д(u)}$, то переход от системы координат детали к системе координат поверхности заменяющего тора можно исключить и осуществлять непосредственный переход к локальной системе координат с началом в точке K.

Как и выше, для аналитического описания многократных переходов от одной системы координат к другой системе используем операторы преобразования координат. В рассматриваемом случае эти операторы составляются так.

Оператор $\mathbf{Res}\,(Д(И) \to T_{д(u)})$ перехода от системы координат $X_{д(u)} Y_{д(u)} Z_{д(u)}$ к системе координат $X_{T.д(u)} Y_{T.д(u)} Z_{T.д(u)}$ поверхности заменяющего тора $T_{д(u)}$ удобно составить при помощи оператора перехода от системы координат $X_{д(u)} Y_{д(u)} Z_{д(u)}$ к системе координат $x^{(K)}_{д(u)} y^{(K)}_{д(u)} z^{(K)}_{д(u)}$, а также оператора перехода от ло-

кальной системы координат $x^{(K)}_{\partial(u)} y^{(K)}_{\partial(u)} z^{(K)}_{\partial(u)}$ к системе координат $X_{T.\partial(u)} Y_{T.\partial(u)} Z_{T.\partial(u)}$ заменяющего тора $T_{\partial(u)}$. В этом случае уравнения поверхности заменяющего тора $T_{\partial(u)}$

$$[T_{\partial(u)}] = \begin{bmatrix} [R_{2.\partial(u)} \cos U_{\partial(u)} + R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)}] \cos V_{\partial(u)} \\ [R_{2.\partial(u)} \cos U_{\partial(u)} + R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)}] \sin V_{\partial(u)} \\ R_{2.\partial(u)} \sin U_{\partial(u)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

могут быть использованы для исследования формы элементарной формообразованной ячейки на поверхности $Д$ детали (нормальных и др. кривизн поверхности регулярного микрорельефа в текущей точке его поверхности; текущего значения угла излома регулярного микрорельефа и др.), поскольку поверхность заменяющего тора T_u локально аппроксимирует исходную инструментальную поверхность $И$ в точке K с точностью, не ниже, чем до членов второго порядка.

Считаем, что поверхность $Д(И)$ параметризована ортогонально, причем так, что направления координатных линий совпадают с главными направлениями поверхности. При такой параметризации поверхностей $Д(И)$ преобразования координат существенно упрощаются.

Чтобы составить оператор результирующего преобразования координат, следует определить косинусы углов между осями системы координат детали и осями локальной системы координат. В качестве осей локальной системы координат могут быть использованы касательные к координатным линиям на поверхности $Д(И)$ и нормаль к этой поверхности в точке K. Направление касательной к $U_{\partial(u)}$ − линии определится вектором:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} = \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \mathbf{i}_{\partial(u)} + \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \mathbf{j}_{\partial(u)} + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \mathbf{k}_{\partial(u)}. \tag{9.54}$$

Если направление (54) использовать в качестве направления оси $x^{(K)}_{\partial(u)}$ локальной системы координат $x^{(K)}_{\partial(u)} y^{(K)}_{\partial(u)} z^{(K)}_{\partial(u)}$, орт $\mathbf{i}^{(K)}_{\partial(u)}$ этой оси будет:

$$\mathbf{i}^{(K)}_{\partial(u)} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right|} = \frac{\dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \mathbf{i}_{\partial(u)} + \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \mathbf{j}_{\partial(u)} + \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \mathbf{k}_{\partial(u)}}{\Delta^*},$$

где дискриминант $\Delta^* = \sqrt{\left[\dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\right]^2}$, а косинусы углов, которые он составляет с осями системы координат $X_{\partial(u)} Y_{\partial(u)} Z_{\partial(u)}$ детали, соответсвенно равны:

$$\cos \angle(x^{(K)}_{\partial(u)}, X_{\partial(u)}) = \frac{1}{\Delta^*} \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}; \qquad \cos \angle(x^{(K)}_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}) = \frac{1}{\Delta^*} \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}; \qquad \cos \angle(x^{(K)}_{\partial(u)}, Z_{\partial(u)}) = \frac{1}{\Delta^*} \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \tag{9.55}$$

Аналогично направление касательной к $V_{\partial(u)}$ − линии определяется вектором:

(9.56) $$\frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\mathbf{i}_{\partial(u)} + \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\mathbf{j}_{\partial(u)} + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\mathbf{k}_{\partial(u)}.$$

Если направление (56) использовать в качестве направления оси $y^{(K)}_{\partial(u)}$ локальной системы координат $x^{(K)}_{\partial(u)}y^{(K)}_{\partial(u)}z^{(K)}_{\partial(u)}$, орт $\mathbf{j}^{(K)}_{\partial(u)}$ этой оси равен:

$$\mathbf{j}^{(K)}_{\partial(u)} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right|} = \frac{1}{\Delta^*}\left(\frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\mathbf{i}_{\partial(u)} + \frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\mathbf{j}_{\partial(u)} + \frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\mathbf{k}_{\partial(u)}\right),$$

а косинусы углов, которые он составляет с осями системы координат $X_{\partial(u)}Y_{\partial(u)}Z_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$, соответственно равны:

(9.57) $$\cos\angle(y^{(K)}_{\partial(u)}, X_{\partial(u)}) = \frac{1}{\Delta^*}\frac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}};\ \cos\angle(y^{(K)}_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}) = \frac{1}{\Delta^*}\frac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}};\ \cos\angle(y^{(K)}_{\partial(u)}, Z_{\partial(u)}) = \frac{1}{\Delta^*}\frac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}};$$

Третья ось $z^{(K)}_{\partial(u)}$ локальной системы координат $x^{(K)}_{\partial(u)}y^{(K)}_{\partial(u)}z^{(K)}_{\partial(u)}$ направлена вдоль контактной нормали $\mathbf{N}_{\partial(u)}$. На основании свойства векторного произведения двух векторов направление нормали $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ к поверхности $Д(И)$ определяется из

$$\mathbf{N}_{\partial(u)} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_{\partial(u)} & \mathbf{j}_{\partial(u)} & \mathbf{k}_{\partial(u)} \\ \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix}.$$

Поскольку направление вектора $\mathbf{N}_{\partial(u)}$ используется в качестве направления оси $z^{(K)}_{\partial(u)}$ локальной подвижной системы координат $x^{(K)}_{\partial(u)}y^{(K)}_{\partial(u)}z^{(K)}_{\partial(u)}$, орт $\mathbf{k}^{(K)}_{\partial(u)}$ этой системы координат равен:

$$\mathbf{k}_{\partial(u)} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\right|} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \mathbf{i}_{\partial(u)} & \mathbf{j}_{\partial(u)} & \mathbf{k}_{\partial(u)} \\ \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} \\ \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} \end{vmatrix}.$$

где:

$$\Delta=\sqrt{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\\ \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\\ \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\\ \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\end{vmatrix}^2}\ .$$

Косинусы углов, которые ось $z^{(K)}_{\partial(u)}$ составляет с осями системы координат $X_{\partial(u)}Y_{\partial(u)}Z_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$, равны

$$\cos\angle(Z^{(K)}_{\partial(u)},X_{\partial(u)})=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\\ \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\end{vmatrix};$$

$$\cos\angle(Z^{(K)}_{\partial(u)},Y_{\partial(u)})=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\\ \dfrac{\partial Z_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\end{vmatrix};\qquad(9.58)$$

$$\cos\angle(Z^{(K)}_{\partial(u)},Z_{\partial(u)})=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial U_{\partial(u)}}\\ \dfrac{\partial X_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}} & \dfrac{\partial Y_{\partial(u)}}{\partial V_{\partial(u)}}\end{vmatrix}.$$

Приведенные результаты позволяют записать оператор $\mathbf{Rs}[Д(И)\to K]$ прямого

$$\mathbf{Rs}[Д(И)\to K]=\begin{bmatrix}\cos\angle(X_{\partial(u)},x^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(X_{\partial(u)},y^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(X_{\partial(u)},z^{(K)}_{\partial(u)}) & x^{(K)}_{\partial(u)}\\ \cos\angle(Y_{\partial(u)},x^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(Y_{\partial(u)},y^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(Y_{\partial(u)},z^{(K)}_{\partial(u)}) & y^{(K)}_{\partial(u)}\\ \cos\angle(Z_{\partial(u)},x^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(Z_{\partial(u)},y^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(Z_{\partial(u)},z^{(K)}_{\partial(u)}) & z^{(K)}_{\partial(u)}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad(9.59)$$

и $\mathbf{Rs}[K\to Д(И)]=\mathbf{Rs}^{-1}[Д(И)\to K]$ обратного

$$\mathbf{Rs}[K\to Д(И)]=\begin{bmatrix}\cos\angle(X_{\partial(u)},x^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(Y_{\partial(u)},x^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(Z_{\partial(u)},x^{(K)}_{\partial(u)}) & \tilde{x}^{(K)}_{\partial(u)}\\ \cos\angle(X_{\partial(u)},y^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(Y_{\partial(u)},y^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(Z_{\partial(u)},y^{(K)}_{\partial(u)}) & \tilde{y}^{(K)}_{\partial(u)}\\ \cos\angle(X_{\partial(u)},z^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(Y_{\partial(u)},z^{(K)}_{\partial(u)}) & \cos\angle(Z_{\partial(u)},z^{(K)}_{\partial(u)}) & \tilde{z}^{(K)}_{\partial(u)}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

преобразований координат.

Здесь обозначено: $\tilde{x}^{(K)}_{\partial(u)}$, $\tilde{y}^{(K)}_{\partial(u)}$, $\tilde{z}^{(K)}_{\partial(u)}$ – координаты начала системы координат $X_{\partial(u)}Y_{\partial(u)}Z_{\partial(u)}$ поверхности $Д(И)$ в локальной системе координат $x^{(K)}_{\partial(u)}y^{(K)}_{\partial(u)}z^{(K)}_{\partial(u)}$. Они расчитываются по формулам:

$$\tilde{x}^{(K)}_{\partial(u)} = -\left\{ x^{(K)}_{\partial(u)} \cos\angle(X_{\partial(u)}, x^{(K)}_{\partial(u)}) + y^{(K)}_{\partial(u)} \cos\angle(Y_{\partial(u)}, x^{(K)}_{\partial(u)}) + z^{(K)}_{\partial(u)} \cos\angle(Z_{\partial(u)}, x^{(K)}_{\partial(u)}) \right\};$$

$$\tilde{y}^{(K)}_{\partial(u)} = -\left\{ x^{(K)}_{\partial(u)} \cos\angle(X_{\partial(u)}, y^{(K)}_{\partial(u)}) + y^{(K)}_{\partial(u)} \cos\angle(Y_{\partial(u)}, y^{(K)}_{\partial(u)}) + z^{(K)}_{\partial(u)} \cos\angle(Z_{\partial(u)}, y^{(K)}_{\partial(u)}) \right\};$$

$$\tilde{z}^{(K)}_{\partial(u)} = -\left\{ x^{(K)}_{\partial(u)} \cos\angle(X_{\partial(u)}, z^{(K)}_{\partial(u)}) + y^{(K)}_{\partial(u)} \cos\angle(Y_{\partial(u)}, z^{(K)}_{\partial(u)}) + z^{(K)}_{\partial(u)} \cos\angle(Z_{\partial(u)}, z^{(K)}_{\partial(u)}) \right\}.$$

Здесь принято, что:

$$\cos\angle(X_{\partial(u)}, x^{(K)}_{\partial(u)}) = \cos\angle(x^{(K)}_{\partial(u)}, X_{\partial(u)}),$$

$$\cos\angle(Y_{\partial(u)}, x^{(K)}_{\partial(u)}) = \cos\angle(x^{(K)}_{\partial(u)}, Y_{\partial(u)}),$$

$$\cos\angle(Z_{\partial(u)}, x^{(K)}_{\partial(u)}) = \cos\angle(x^{(K)}_{\partial(u)}, Z_{\partial(u)}) \ \ldots .$$

Представив исходное уравнение поверхности $Д(И)$ в матричной форме:

(9.60)
$$[Д(И)] = \begin{bmatrix} X_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}; V_{\partial(u)}) \\ Y_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}; V_{\partial(u)}) \\ Z_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}; V_{\partial(u)}) \\ 1 \end{bmatrix},$$

можно используя оператор $\mathbf{Rs}\,[Д(И) \to K]$ (59) прямого преобразования координат записать уравнения поверхности $Д(И)$ в локальной системе координат $x^{(K)}_{\partial(u)} y^{(K)}_{\partial(u)} z^{(K)}_{\partial(u)}$. Для этого достаточно столбцовую матрицу (60) умножить слева на оператор $\mathbf{Rs}\,[Д(И) \to K]$ прямого преобразования координат:

(9.61)
$$[Д(И)]^{(K)} = \mathbf{Rs}\,[Д(И) \to K] \cdot [Д(И)] = \mathbf{Rs}\,[Д(И) \to K] \cdot \begin{bmatrix} X_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}; V_{\partial(u)}) \\ Y_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}; V_{\partial(u)}) \\ Z_{\partial(u)}(U_{\partial(u)}; V_{\partial(u)}) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

По уравнению (4.27)

$$[L_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - M^2_{\partial(u)}] R^2_{\partial(u)} + [E_{\partial(u)} N_{\partial(u)} - 2F_{\partial(u)} M_{\partial(u)} + G_{\partial(u)} L_{\partial(u)}] R_{\partial(u)} + [E_{\partial(u)} G_{\partial(u)} - F^2_{\partial(u)}] = 0$$

для поверхности $Д(И)$, записанной в локальной системе координат $x^{(K)}_{\partial(u)} y^{(K)}_{\partial(u)} z^{(K)}_{\partial(u)}$, находятся главные радиусы кривизны $R_{1.\partial(u)}$ и $R_{2.\partial(u)}$, численные значения которых инвариантны относительно выбранной системы отсчета.

Вернемся к рассмотрению элементов локальной геометрии поверхности заменяющего тора $T_{\partial(u)}$ и составим операторы $\mathbf{Rs}\,(K \to T_{\partial(u)})$ и $\mathbf{Rs}\,(T_{\partial(u)} \to K)$ перехода от локальной системы координат $x^{(K)}_{\partial(u)} y^{(K)}_{\partial(u)} z^{(K)}_{\partial(u)}$ к системе координат $X_{T.\partial(u)} Y_{T.\partial(u)} Z_{T.\partial(u)}$ заменяющего тора и обратно. При этом будем исходить из полученного выше уравнения поверхности $T_{\partial(u)}$ в виде матрицы-столбца:

$$\left[T_{\partial(u)}\right]=\begin{bmatrix}[r_{T.\partial(u)}\cos\theta_{T.\partial(u)}+R_{T.\partial(u)}]\cos\varphi_{T.\partial(u)}\\ [r_{T.\partial(u)}\cos\theta_{T.\partial(u)}+R_{T.\partial(u)}]\sin\varphi_{T.\partial(u)}\\ r_{T.\partial(u)}\sin\theta_{T.\partial(u)}\\ 1\end{bmatrix}. \tag{9.62}$$

Поверхность тора $T_{\partial(u)}$ (62) параметризована не только ортогонально, но и так, что направления гауссовых координатных линий на ней совпадают с главными направлениями на поверхности $T_{\partial(u)}$.

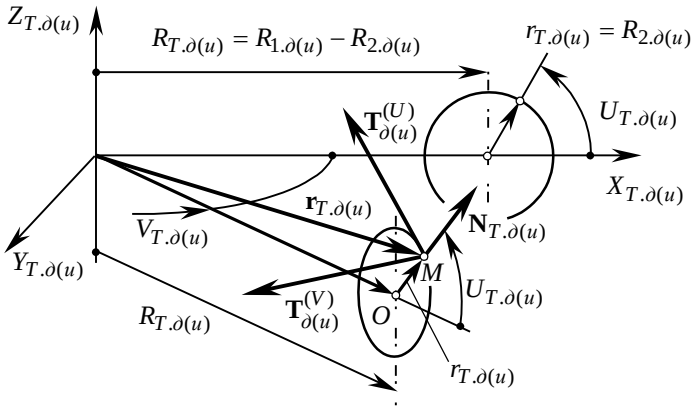


Рис. 9.11. К определению положения локальной системы координат поверхности $T_{\partial(u)}$ заменяющего тора.

В текущей точке M на поверхности тора $T_{\partial(u)}$ (62) положение начала локальной системы координат $x^{(K)}_{\partial(u)}y^{(K)}_{\partial(u)}z^{(K)}_{\partial(u)}$ определяется координатами точки M (рис. 9.11). Чтобы составить оператор $\mathbf{Rs}\,(K\to T_{\partial(u)})$ результирующего преобразования координат, определим косинусы углов между осями системы координат $X_{T.\partial(u)}Y_{T.\partial(u)}Z_{T.\partial(u)}$ заменяющего тора $T_{\partial(u)}$ и осями локальной системы координат $x^{(K)}_{\partial(u)}y^{(K)}_{\partial(u)}z^{(K)}_{\partial(u)}$. В качестве направлений осей локальной системы координат $x^{(K)}_{\partial(u)}y^{(K)}_{\partial(u)}z^{(K)}_{\partial(u)}$ используем направления касательных к координатным линиям на поверхности $T_{\partial(u)}$ заменяющего тора и нормаль к этой поверхности в точке M – получим ортонормированный репер, естественным образом связанный с поверхностью тора $T_{\partial(u)}$ (трехгранник Дарбу). В этом случае локальная система координат, связанная с тором $T_{\partial(u)}$, и локальная система координат, связанная с поверхностью $Д(И)$, совпадают одна с другой.

Направление касательной $\mathbf{T}^{(U)}_{\partial(u)}$ к $U_{T.\partial(u)}$ – линии на поверхности $T_{\partial(u)}$ тора (62) с учетом выбранного направления отсчета $U_{T.\partial(u)}$ – параметра определим матрицей-столбцом:

$$\mathbf{T}^{(U)}_{\partial(u)}=\left[\frac{\partial\,\mathbf{r}_{T.\partial(u)}}{\partial U_{T.\partial(u)}}\right]=\begin{bmatrix}-R_{2.\partial(u)}\sin U_{T.\partial(u)}\cos V_{T.\partial(u)}\\ -R_{2.\partial(u)}\sin U_{T.\partial(u)}\sin V_{T.\partial(u)}\\ R_{2.\partial(u)}\cos U_{T.\partial(u)}\\ 1\end{bmatrix}. \tag{9.63}$$

Как и в рассмотренном выше случае (55), косинусы углов, которые направление $\mathbf{T}^{(U)}_{\partial(u)}$ (63) составляет с осями системы координат $X_{T.\partial(u)}Y_{T.\partial(u)}Z_{T.\partial(u)}$, соответсвенно равны:

$$\cos\angle(x^{(K)}_{\partial(u)},X_{T.\partial(u)})=-\sin U_{T.\partial(u)}\cos V_{T.\partial(u)};$$

$$\cos\angle(x^{(K)}_{\partial(u)},Y_{T.\partial(u)})=-\sin U_{T.\partial(u)}\sin V_{T.\partial(u)};$$

$$\cos\angle(X^{(K)}_{\partial(u)}, Z_{T.\partial(u)}) = \cos U_{T.\partial(u)}.$$

Аналогично направление касательной к $V_{T.\partial(u)}$ – линии с учетом выбранного направления отсчета $V_{T.\partial(u)}$ – параметра определим столбцовой матрицей

$$\mathbf{T}^{(V)}_{\partial(u)} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{T.\partial(u)}}{\partial V_{T.\partial(u)}}\right] = \begin{bmatrix} -[R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)} + R_{2.\partial(u)}\cos U_{T.\partial(u)}]\sin V_{T.\partial(u)} \\ [R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)} + R_{2.\partial(u)}\cos U_{T.\partial(u)}]\cos V_{T.\partial(u)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Косинусы углов, которые направление $\mathbf{T}^{(V)}_{\partial(u)}$ составляет с осями системы координат $X_{T.\partial(u)}Y_{T.\partial(u)}Z_{T.\partial(u)}$ поверхности заменяющего тора $T_{\partial(u)}$, соответственно равны:

$$\cos\angle(y^{(K)}_{\partial(u)}, X_{T.\partial(u)}) = -\sin V_{T.\partial(u)}; \qquad \cos\angle(y^{(K)}_{\partial(u)}, Y_{T.\partial(u)}) = \cos V_{T.\partial(u)}; \qquad \cos\angle(y^{(K)}_{\partial(u)}, Z_{T.\partial(u)}) = 0.$$

Третья ось $z^{(K)}_{\partial(u)}$ локальной системы координат $x^{(K)}_{\partial(u)}y^{(K)}_{\partial(u)}z^{(K)}_{\partial(u)}$ направлена вдоль нормали $\mathbf{N}_{T.\partial(u)}$ к поверхности заменяющего тора $T_{\partial(u)}$. Направление нормали $\mathbf{N}_{T.\partial(u)}$ к поверхности тора $T_{\partial(u)}$ определяется вектором:

$$\mathbf{N}_{T.\partial(u)} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{T.\partial(u)}}{\partial U_{T.\partial(u)}}\right] \times \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{T.\partial(u)}}{\partial V_{T.\partial(u)}}\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_{T.\partial(u)} & \mathbf{j}_{T.\partial(u)} & \mathbf{k}_{T.\partial(u)} \\ -R_{2.\partial(u)}\sin U_{T.\partial(u)}\cos V_{T.\partial(u)} & -R_{2.\partial(u)}\sin U_{T.\partial(u)}\sin V_{T.\partial(u)} & -R_{2.\partial(u)}\cos U_{T.\partial(u)} \\ -[R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)} + R_{2.\partial(u)}\cos U_{T.\partial(u)}]\sin V_{T.\partial(u)} & [R_{1.\partial(u)} - R_{2.\partial(u)} + R_{2.\partial(u)}\cos U_{T.\partial(u)}]\cos V_{T.\partial(u)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Нормаль $\mathbf{N}_{T.\partial(u)}$ направлена от тела материального носителя формы поверхности $T_{\partial(u)}$ тора.

Косинусы углов, которые направление нормали $\mathbf{N}_{T.\partial(u)}$ составляет с осями системы координат $X_{T.\partial(u)}Y_{T.\partial(u)}Z_{T.\partial(u)}$, соответственно равны:

$$\cos\angle(z^{(K)}_{\partial(u)}, X_{T.\partial(u)}) = -\frac{\cos U_{T.\partial(u)}\cos V_{T.\partial(u)}}{\sqrt{\cos^2 U_{T.\partial(u)} + \sin^2 U_{T.\partial(u)}\cos^2 2V_{T.\partial(u)}}};$$

$$\cos\angle(z^{(K)}_{\partial(u)}, Y_{T.\partial(u)}) = -\frac{\cos U_{T.\partial(u)}\sin V_{T.\partial(u)}}{\sqrt{\cos^2 U_{T.\partial(u)} + \sin^2 U_{T.\partial(u)}\cos^2 2V_{T.\partial(u)}}};$$

$$\cos\angle(z^{(K)}_{\partial(u)}, Z_{T.\partial(u)}) = \frac{\sin U_{T.\partial(u)}\cos 2V_{T.\partial(u)}}{\sqrt{\cos^2 U_{T.\partial(u)} + \sin^2 U_{T.\partial(u)}\cos^2 2V_{T.\partial(u)}}}.$$

Приведенные результаты позволяют составить оператор $\mathbf{Rs}\ (T_{\partial(u)} \to K)$ результирующего прямого

$$\mathbf{Rs}\ (T_{\partial(u)} \to K) = \frac{\begin{bmatrix} -\sin U_{T.\partial(u)} \cos V_{T.\partial(u)} & -\sin U_{T.\partial(u)} \sin V_{T.\partial(u)} & \cos U_{T.\partial(u)} & 0 \\ -\sin V_{T.\partial(u)} & \cos V_{T.\partial(u)} & 0 & 0 \\ -\cos U_{T.\partial(u)} \cos V_{T.\partial(u)} & -\sin V_{T.\partial(u)} & \sin U_{T.\partial(u)} \cos^2 2V_{T.\partial(u)} & R_{T.\partial(u)} + r_{T.\partial(u)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\cos^2 U_{T.\partial(u)} + \sin^2 U_{T.\partial(u)} \cos^2 V_{T.\partial(u)}}}$$

и $\mathbf{Rs}\ (K \to T_{\partial(u)}) = \mathbf{Rs}^{-1}\ (T_{\partial(u)} \to K)$ обратного

$$\mathbf{Rs}\ (K \to T_{\partial(u)}) = \frac{\begin{bmatrix} -\sin U_{T.\partial(u)} \cos V_{T.\partial(u)} & -\sin V_{T.\partial(u)} & -\cos U_{T.\partial(u)} \cos V_{T.\partial(u)} & 0 \\ -\sin U_{T.\partial(u)} \sin V_{T.\partial(u)} & \cos V_{T.\partial(u)} & -\sin V_{T.\partial(u)} & 0 \\ \cos U_{T.\partial(u)} & 0 & \sin U_{T.\partial(u)} \cos^2 2V_{T.\partial(u)} & R_{T.\partial(u)} + r_{T.\partial(u)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\cos^2 U_{T.\partial(u)} + \sin^2 U_{T.\partial(u)} \cos^2 V_{T.\partial(u)}}}$$

преобразования координат.

Локальные системы координат $x_{\partial}^{(K)} y_{\partial}^{(K)} z_{\partial}^{(K)}$ и $x_{u}^{(K)} y_{u}^{(K)} z_{u}^{(K)}$ имеют противоположно направленные оси аппликат, вокруг которых они развернуты на угол μ относительной локальной ориентации.

Вектор скорости движения формообразования расположен в общей касательной плоскости и направлен под некоторым углом к первому главному направлению поверхности тора T_{∂}. В сечениях для расчета высоты и других параметров остаточного детерминированного регулярного микрорельефа нормальные кривизны $R_{\partial(u)}$ поверхностей торов $T_{\partial(u)}$ не равны главным их кривизнам и могут быть найдены по формуле Эйлера исходя из значений $R_{1.\partial(u)}$ и $R_{2.\partial(u)}$.

9.7. О допустимости применения принципа суперпозиции при расчете результирующей погрешности формообразования

На многокоординатных станках с ЧПУ применяют относительно простой режущий инструмент, которому придают сложное многопараметрическое движение относительно детали. В процессе обработки в результате точечного касания сложной поверхности детали и исходной инструментальной поверхности имеет место дискретное формообразование поверхности $Д$ (см. выше, раздел 9.1).

Расчет величин элементарных составляющих h_B и $h_{П}$ результирующей погрешности формообразования h_{Σ} производится по зависимостям (10) и (13) (см. выше, раздел 9.1). Обычно полагают, что результирующая погрешность формообразования h_{Σ} равна сумме ее элементарных составляющих, т.е. допускают справедливость соотношения[1]:

$$h_{\Sigma} = h_B + h_{П}, \tag{9.64}$$

а при грубых расчетах, более того, пренебрегают и величиной составляющей h_B, образованной вдоль строки формообразования.

[1]Помним, что в общем случае справедливо соотношение $h_{\Sigma} = ah_B + bh_{П}$ (см. с. 518).

Формула (64) позволяет расчитать величину результирующей погрешности формообразования в текущей точке на поверхности $Д$ детали[1], в том числе и в вершинах элементарной формообразованной ячейки на $Д$, когда справедливы соотношения $h_B = h_B^{(\max)}$, $h_П = h_П^{(\max)}$ и $h_\Sigma = h_\Sigma^{(\max)}$ и, следовательно, уместна формула $h_\Sigma^{(\max)} = h_B^{(\max)} + h_П^{(\max)}$.

Зависимость (64) является приближенной, поскольку основана на предположении о допустимости применения принципа суперпозиции существенно нелинейно коррелируемых между собой элементарных составляющих результирующей погрешности формообразования.

Использование принципа суперпозиции (принципа наложения) предполагает, что результатом сложного эффекта является сумма результатов от всех составляющих его элементарных эффектов при условии, что последние взаимно не влияют один на другой. Поэтому принцип алгебраической суперпозиции *строго* справедлив лишь к эффектам, описываемым линейными соотношениями. Из формул (10) и (13) очевидно следует, что составляющие h_B и $h_П$ в пределах элементарной ячейки на $Д$ изменяются существенно нелинейно. В этой связи правомерна постановка вопроса об определении области допустимого применения принципа суперпозиции при расчете результирующе погрешности формообразования поверхностей деталей. Допустимость или недопустимость применения принципа суперпозиции существенно изменяет подходы к расчету точности и определению эффективности формообразования.

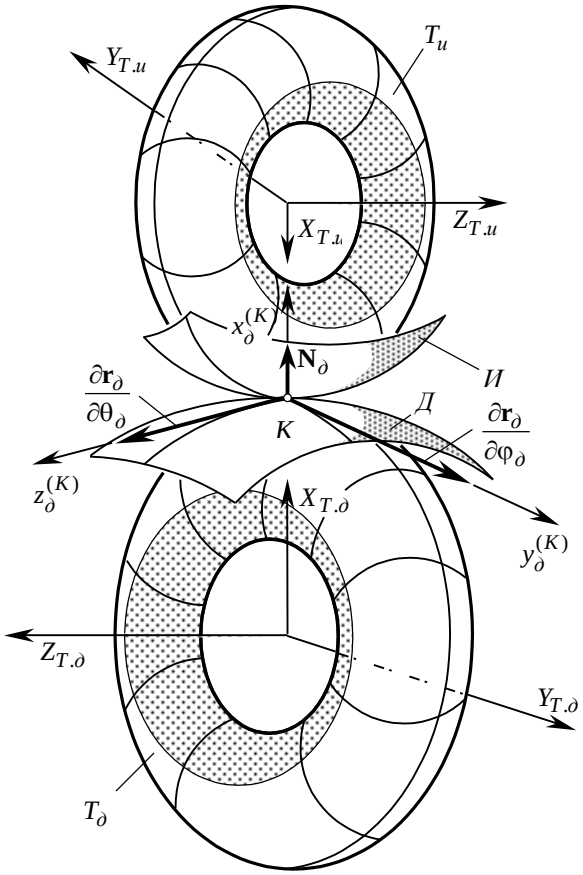


Рис. 9.12. Относительное положение поверхностей заменяющих торов T_∂ и T_u.

Чтобы воспользоваться зависимостью (64), необходимо определить условия, при которых результирующая погрешность формообразования h_Σ с приемлемой точностью подчиняется принципу суперпозиции элементарных составляющих h_B и $h_П$. Для этого достаточно сопоставить значения результирующей погрешности формообразования h_Σ, определенной по формуле (64) с учетом (10) и (13), с ее значением $\tilde{h}_\Sigma$, полученным более точным методом, не требующим использования принципа суперпозиции элементарных составляющих результирующей погрешности формообразования.

Точное значение результирующей погрешности формообразования $\tilde{h}_\Sigma$ может быть расчитано исходя из локальной аппроксимации поверхностей $Д(И)$ поверхностями заменяющих торов $T_{\partial(u)}$.

Процесс формообразования поверхности детали рассмотрим в течение промежутка времени, когда формируется одна элементарная ячейка на $Д$. В точке K касания обе поверхности $Д(И)$ локально аппроксимируются поверхностями торов $T_{\partial(u)}$. Поэтому образование результирующей погрешности формообразования $\tilde{h}_\Sigma$ можно проанализировать по схеме (рис.9.12).

С локальным участком поверхности заменяющего тора удобно связать поверхность $T_{[h]}$, отстоящую от поверхности T_∂ на расстояние $[h] \geq h_\Sigma$, равное допуску на точность формообразования поверхности $Д$ (рис. 9.13). Тогда "погружая" поверхность T_u в пространство между поверхностями T_∂ и $T_{[h]}$ (в пространство допуска) и вводя

[1]Если элементарные ячейки на обработанной поверхности детали имеют форму шестиугольников (см. выше. рис. 8.30 на с. 498), используются другие зависимости для расчета величины результирующей погрешности формообразования h_Σ

ее в касание в точке K с поверхностью T_∂, полу-чим формообразованную элементарную ячейку на поверхности $Д$ детали. Проекция границ элементарной ячейки на общую к поверхностям заменяющих торов касательную плоскость является вписанной в замкнутую линию пересечения поверхностей $T_{[h]}$ и T_u.

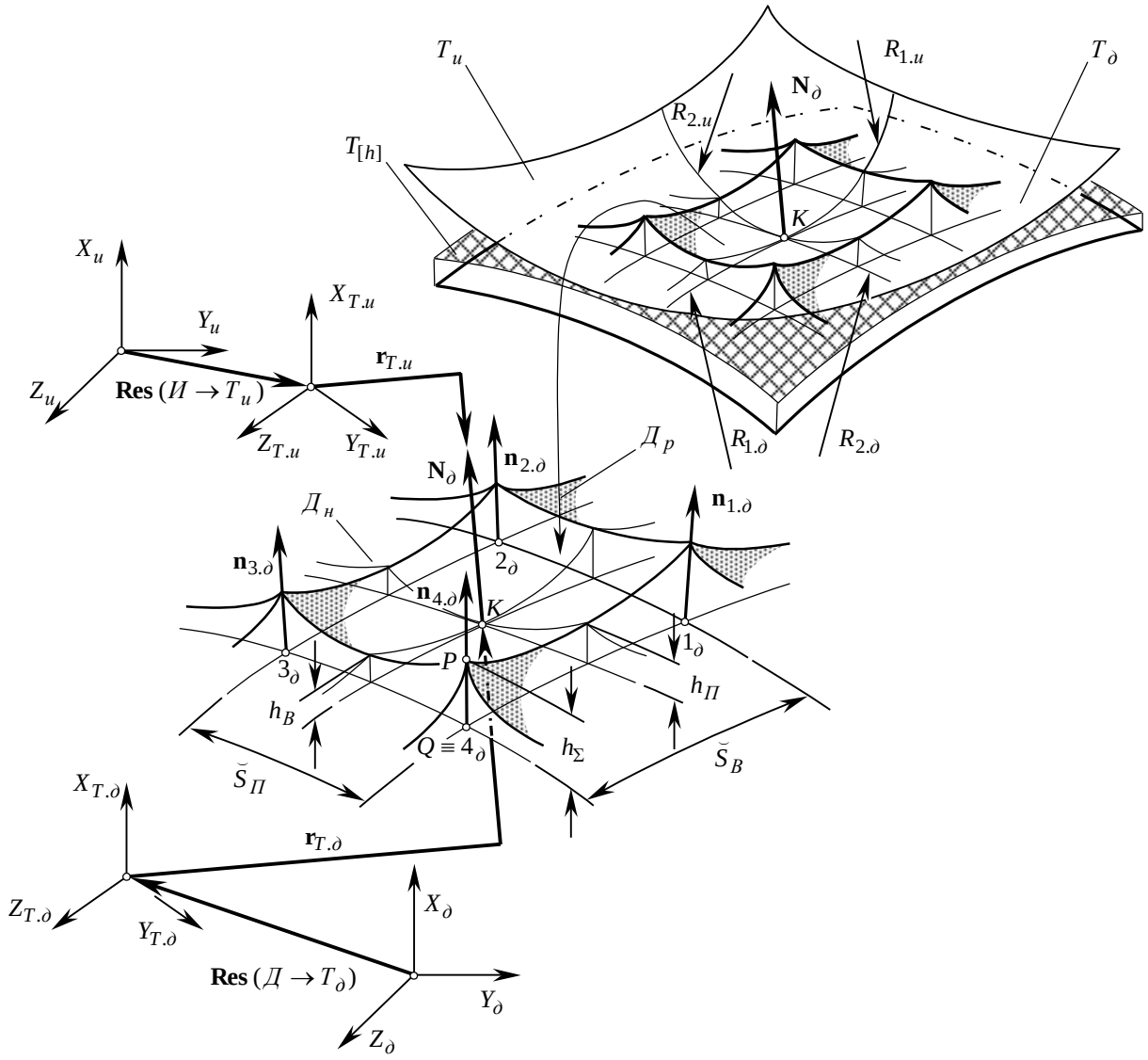


Рис. 9.13. Элементарная ячейка на формообразованной поверхности $Д$ детали.

Погрешность $\tilde{h}_\Sigma$ измеряется вдоль нормали к тору T_∂, проходящей через вершину P элементарной ячейки и пересекающей поверхность T_∂ в точке Q: $PQ = h_\Sigma$. Очевидно, что точка P лежит на поверхности заменяющего тора T_u, а в пределах дуг $\breve{S}_B$ и $\breve{S}_П$ соответствующие радиусы кривизны поверхностей $T_{\partial(u)}$ постоянны. С учетом принятых допущений (см. выше), проведенные через основания 1_∂, 2_∂, 3_∂ и 4_∂ вершин элементарной ячейки нормали $\mathbf{n}_{1.\partial}$, $\mathbf{n}_{2.\partial}$, $\mathbf{n}_{3.\partial}$ и $\mathbf{n}_{4.\partial}$ будут попарно: $\mathbf{n}_{1.\partial}$ и $\mathbf{n}_{2.\partial}$; $\mathbf{n}_{1.\partial}$ и $\mathbf{n}_{3.\partial}$; $\mathbf{n}_{1.\partial}$ и $\mathbf{n}_{4.\partial}$; $\mathbf{n}_{2.\partial}$ и $\mathbf{n}_{3.\partial}$; $\mathbf{n}_{2.\partial}$ и $\mathbf{n}_{4.\partial}$; $\mathbf{n}_{3.\partial}$ и $\mathbf{n}_{4.\partial}$ компланарны.

Если вести речь о наивыгоднейшем формообразовании поверхности детали, величина погрешности $\tilde{h}_\Sigma$ во всех вершинах элементарной ячейки одинакова, а точка K отстоит от границ элементарной ячейки на расстояния $0{,}5S_B$ и $0{,}5S_П$. Это следствие того, что при наивыгоднейшем формообразовании используются все резервы и потенциальные возможности процесса формообразования заданной поверхности детали.

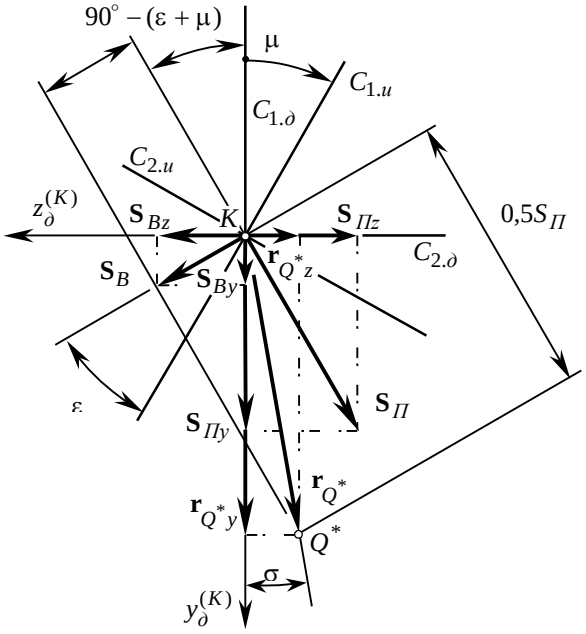


Рис. 9.14. Локальная подвижная система координат.

Чтобы получить точное значение погрешности формообразования $\tilde{h}_\Sigma$, необходимо определить координаты точки Q, провести через нее нормаль к тору T_∂, рассчитать координаты точки P как точки пересечения проведенной нормали с тором T_u. После этого можно определить погрешность $\tilde{h}_\Sigma$ как расстояние между точками P и Q.

С общей для поверхностей $Д$ и $И$ точкой K (см. рис. 9.12) свяжем начало локальной системы координат $x_\partial^{(K)} y_\partial^{(K)} z_\partial^{(K)}$, оси которой направим параллельно соответствующим осям системы координат $X_{T.\partial} Y_{T.\partial} Z_{T.\partial}$ поверхности заменяющего тора T_∂. Тогда в координатной плоскости $y^{(K)} z^{(K)}$ следы главных секущих плоскостей $C_{1.\partial}$ и $C_{2.\partial}$ поверхности $Д$ детали совпадут с осями координат $y_\partial^{(K)}$ и $z_\partial^{(K)}$, а следы главных секущих плоскостей $C_{1.u}$ и $C_{2.u}$ поверхности $И$ будут развернуты относительно этих же координатных осей на угол μ относительной локальной ориентации поверхностей $Д$ и $И$ (рис. 9.14). Направление подачи $\mathbf{S}_B$ составляет угол ε с первым главным сечением $C_{1.u}$ поверхности $И$, а направление подачи $\mathbf{S}_П$ ортогонально направлению подачи $\mathbf{S}_B$. Точка Q^* лежит в общей касательной плоскости (см. рис. 9.14), где ее положение определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_{Q^*} = \mathbf{S}_B + \mathbf{S}_П$.

В проекциях на координатные оси направления подач $\mathbf{S}_B$ и $\mathbf{S}_П$ можно представить так:

$$\mathbf{S}_B = \mathbf{j}_K \frac{S_B}{2}\cos(\varepsilon+\mu) + \mathbf{k}_K \frac{S_B}{2}\sin(\varepsilon+\mu); \tag{9.65}$$

$$\mathbf{S}_П = \mathbf{j}_K \frac{S_П}{2}\sin(\varepsilon+\mu) - \mathbf{k}_K \frac{S_П}{2}\cos(\varepsilon+\mu). \tag{9.66}$$

С учетом (65) и (66) справедливо равенство

$$\mathbf{r}_{Q^*} = \frac{S_B\cos(\varepsilon+\mu) + S_П\sin(\varepsilon+\mu)}{2}\mathbf{j}_K + \frac{S_B\sin(\varepsilon+\mu) + S_П\cos(\varepsilon+\mu)}{2}\mathbf{k}_K.$$

Считаем, что “в малом” поверхность тора T_∂ допускает разворачиваемость на плоскость. Для этого достаточно, чтобы локально выполнялось условие $\Phi_{1.\partial} \cong 0$. Такое допущение правомерно, поскольку локально любая поверхность может рассматриваться как разворачивающаяся на плоскость. Тогда положение точки Q на поверхности тора T_∂ определится положением точки Q^* в общей касательной плоскости.

Найдем проекции $\mathbf{r}_{Q^*Y}$ и $\mathbf{r}_{Q^*Z}$ радиус-вектора $\mathbf{r}_{Q^*}$ на оси координат $y_{\partial}^{(K)}$ и $z_{\partial}^{(K)}$:

$$\mathbf{r}_{Q^*Y} = \mathbf{r}_{Q^*}\cos\sigma\ ; \qquad \mathbf{r}_{Q^*Z} = \mathbf{r}_{Q^*}\sin\sigma\ ,$$

где σ – угол между радиус-вектором $\mathbf{r}_{Q^*}$ и осью $y_{\partial}^{(K)}$ (см. рис. 9.14).

Из рис. 9.14 следует, что

$$\sigma = [90^\circ - (\varepsilon + \mu)] - \arctan\frac{S_B}{S_{\Pi}}\,.$$

Считаем, что при локальном наложении общей касательной плоскости на поверхность заменяющего тора $\mathbf{r}_{Q^*}$ точка Q^* наложится на точку Q. Тогда в системе координат $X_{T.\partial}Y_{T.\partial}Z_{T.\partial}$ для точки Q имеем следующие параметры:

$$\theta_Q = \frac{\left|\mathbf{r}_{Q^*Z}\right|}{r_{T.\partial}} = \frac{\left|\mathbf{r}_{Q^*}\sin\sigma\right|}{r_{T.\partial}}; \qquad \varphi_Q = \frac{\left|\mathbf{r}_{Q^*Y}\right|}{r_{T.\partial}} = \frac{\left|\mathbf{r}_{Q^*}\cos\sigma\right|}{r_{T.\partial}}, \tag{9.67}$$

где $r_{T.\partial}$ – радиус образующей окружности тора T_{∂}.

Подставив расчитанные по (67) параметры θ_Q и φ_Q точки Q в уравнение поверхности заменяющего тора T_{∂}, получим значения декартовых координат X_Q, Y_Q и Z_Q точки Q в системе координат $X_{T.\partial}Y_{T.\partial}Z_{T.\partial}$.

Зная координаты точки Q, через нее проводим нормаль $\mathbf{N}_{\partial}$ к поверхности T_{∂} заменяющего тора. Уравнение нормали удобно получить, используя свойство векторного произведения двух векторов, а именно векторов, касательных к координатным линиям на поверхности T_{∂}. Для этого уравнения поверхности T_{∂} запишем в виде:

$$\mathbf{r}_{T.\partial} = \begin{bmatrix} (r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial} + R_{T.\partial})\cos\varphi_{T.\partial} \\ (r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial} + R_{T.\partial})\sin\varphi_{T.\partial} \\ r_{T.\partial}\sin\theta_{T.\partial} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{9.68}$$

Продифференцировав это уравнение по параметрам $\theta_{T.\partial}$ и $\varphi_{T.\partial}$, получим:

$$\frac{\partial\mathbf{r}_{T.\partial}}{\partial\theta_{T.\partial}} = \begin{bmatrix} -r_{T.\partial}\sin\theta_{T.\partial}\cos\varphi_{T.\partial} \\ -r_{T.\partial}\sin\theta_{T.\partial}\sin\varphi_{T.\partial} \\ r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial\mathbf{r}_{T.\partial}}{\partial\varphi_{T.\partial}} = \begin{bmatrix} -(r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial} + R_{T.\partial})\sin\varphi_{T.\partial} \\ (r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial} + R_{T.\partial})\cos\varphi_{T.\partial} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

На основании приведенных производных уравнения касательных $\dfrac{\partial\mathbf{r}_{T.\partial}}{\partial\theta_{T.\partial}}$ и $\dfrac{\partial\mathbf{r}_{T.\partial}}{\partial\varphi_{T.\partial}}$ к координатным линиям на поверхности T_{∂} можно записать так:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{T.\partial}}{\partial \theta_{T.\partial}} = [-r_{T.\partial}\sin\theta_{T.\partial}\cos\varphi_{T.\partial} \quad -r_{T.\partial}\sin\theta_{T.\partial}\sin\varphi_{T.\partial} \quad r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial} \quad 1]^T;$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{T.\partial}}{\partial \varphi_{T.\partial}} = [-(r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial}+R_{T.\partial})\sin\varphi_{T.\partial} \quad (r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial}+R_{T.\partial}) \quad \cos\varphi_{T.\partial} \quad 1]^T,$$

где $\mathbf{i}_{T.\partial}$, $\mathbf{j}_{T.\partial}$, $\mathbf{k}_{T.\partial}$ – орты системы координат $X_{T.\partial}Y_{T.\partial}Z_{T.\partial}$

С учетом рис. 9.12 приведенные зависимости приводят к

$$\mathbf{N}_{\partial} = \frac{\partial \mathbf{r}_{T.\partial}}{\partial \theta_{T.\partial}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{T.\partial}}{\partial \varphi_{T.\partial}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_{T.\partial} & \mathbf{j}_{T.\partial} & \mathbf{k}_{T.\partial} \\ -r_{T.\partial}\sin\theta_{T.\partial}\cos\varphi_{T.\partial} & -r_{T.\partial}\sin\theta_{T.\partial}\sin\varphi_{T.\partial} & r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial} \\ -(r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial}+R_{T.\partial})\sin\varphi_{T.\partial} & (r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial}+R_{T.\partial})\cos\varphi_{T.\partial} & 0 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель, имеем в виду, что в рассматриваемом случае интерес представляет только направление контактной нормали $\mathbf{N}_{\partial-u}$, а не ее длина; поэтому во второй строке определителя можно принять радиус $r_{T.\partial}$ равным единице (т.е. допустимо считать, что $r_{T.\partial}=1$). Это соответствует единичной касательной к координатной линии $\theta_{T.\partial}$ на поверхности заменяющего тора T_∂. По тем же соображениям третью строку можно сократить на $(r_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial}+R_{T.\partial}) \neq 0$. В результате получаем, что:

$$\mathbf{N}_{\partial-u} = -\mathbf{i}_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial}\cos\varphi_{T.\partial} - \mathbf{j}_{T.\partial}\cos\theta_{T.\partial}\sin\varphi_{T.\partial} - \mathbf{k}_{T.\partial}\sin\theta_{T.\partial}. \tag{9.69}$$

По значениям координат X_Q, Y_Q и Z_Q точки Q (они расчитываются по формулам (67)) и по направлению (69) контактной нормали $\mathbf{N}_{\partial-u}$, записываем уравнение прямой линии $\mathbf{r}_h$, вдоль которой измеряется результирующая погрешность формообразования $\tilde{h}_\Sigma$.

Уравнение проходящей через точку $Q(X_Q, Y_Q, Z_Q)$ прямой $\mathbf{r}_h$ имеет вид

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{i}_{T.\partial}X_Q + \mathbf{j}_{T.\partial}Y_Q + \mathbf{k}_{T.\partial}Z_Q. \tag{9.70}$$

Уравнение прямой, проходящей параллельно направляющему вектору $\mathbf{N}_{\partial-u}$ (69), в векторной форме записывается так:

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{r}_Q + \mathbf{N}_{\partial-u}t_h, \tag{9.71}$$

где t_h – параметр текущей точки на прямой $\mathbf{r}_h$.

Исходя из (70) и (71) имеем

$$\mathbf{r}_h = (X_Q - t_h\cos\theta_{T.\partial}\cos\varphi_{T.\partial})\mathbf{i}_{T.\partial} + (Y_Q - t_h\cos\theta_{T.\partial}\sin\varphi_{T.\partial})\mathbf{j}_{T.\partial} + (Z_Q - t_h\sin\theta_{T.\partial})\mathbf{k}_{T.\partial}. \tag{9.72}$$

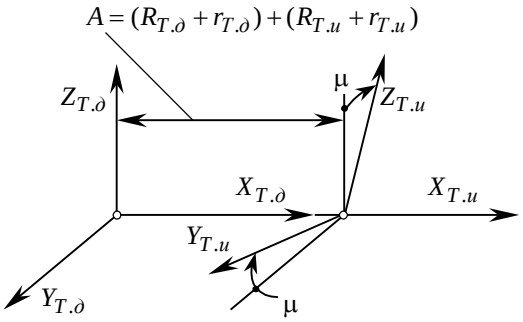


Рис. 9.15. Относительное расположение систем координат заменяющих торов T_∂ и T_u

Чтобы установить координаты точки P (см. рис. 9.13) пересечения прямой $\mathbf{r}_h$ с поверхностью тора достаточно рассмотреть уравнение (72) совместно с уравнением поверхности T_u, записанным в системе координат $X_{T.\partial}Y_{T.\partial}Z_{T.\partial}$.

Как следует из рис. 9.12, система координат $X_{T.u}Y_{T.u}Z_{T.u}$ заменяющего тора T_u смещена вдоль

оси $X_{T.\partial}$ системы координат $X_{T.\partial}Y_{T.\partial}Z_{T.\partial}$ заменяющего тора T_∂ на величину

$$A = (R_{T.\partial} + r_{T.\partial}) + (R_{T.u} + r_{T.u})$$

и развернута вокруг этой оси на угол относительной локальной ориентации μ поверхностей *Д* и *И* (рис. 9.15). Поэтому опе-ратор результирующего перехода от системы координат $X_{T.u}Y_{T.u}Z_{T.u}$ к системе координат $X_{T.\partial}Y_{T.\partial}Z_{T.\partial}$ может быть представлен так $\mathbf{Rs}\,(T_u \to T_\partial) = \mathbf{Rt}\,(X_{T.\partial}, \mu)\cdot \mathbf{Tr}\,(-A, 0, 0)$ или:

$$\mathbf{Rs}(T_u \to T_\partial) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & \cos\mu & \sin\mu & 0 \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножим столбцовую матрицу (68) слева на оператор $\mathbf{Rs}\,(T_u \to T_\partial)$ преобразования координат – получим матрицу $[\mathbf{r}_{T.\partial}]_{(\partial)}$ поверхности заменяющего тора $\mathbf{r}_{T.\partial}$, записанную в системе координат $X_{T.\partial}Y_{T.\partial}Z_{T.\partial}$:

$$[\mathbf{r}_{T.\partial}]_{(\partial)} = \mathbf{Rs}\,(T_u \to T_\partial)\cdot [T_u] = \begin{bmatrix} (r_{T.u}\cos\theta_{T.u} + R_{T.u})\cos\varphi_{T.u} - A \\ (r_{T.u}\cos\theta_{T.u} + R_{T.u})\sin\varphi_{T.u}\cos\mu + r_{T.u}\sin\theta_{T.u}\sin\mu \\ -(r_{T.u}\cos\theta_{T.u} + R_{T.u})\sin\varphi_{T.u}\sin\mu + r_{T.u}\sin\theta_{T.u}\cos\mu \\ 1 \end{bmatrix}$$

или в векторной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{T.u}^{(\partial)} = {} & \mathbf{i}_{T.\partial}\left[(r_{T.u}\cos\theta_{T.u} + R_{T.u})\cos\varphi_{T.u} - A\right] + \\ & + \mathbf{j}_{T.\partial}\left[(r_{T.u}\cos\theta_{T.u} + R_{T.u})\sin\varphi_{T.u}\cos\mu + r_{T.u}\sin\theta_{T.u}\sin\mu\right] + \\ & + \mathbf{k}_{T.\partial}\left[-(r_{T.u}\cos\theta_{T.u} + R_{T.u})\sin\varphi_{T.u}\sin\mu + r_{T.u}\sin\theta_{T.u}\cos\mu\right]. \end{aligned} \tag{9.73}$$

В точке пересечения прямой $\mathbf{r}_h$ (72) и поверхности $\mathbf{r}_{T.u}^{(\partial)}$ (73) координаты их общей точки одни и те же, поэтому должны выполняться очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} & X_Q - t_h\cos\theta_{T.\partial}\cos\varphi_{T.\partial} = (r_{T.u}\cos\theta_{T.u} + R_{T.u})\cos\varphi_{T.u} - A; \\ & Y_Q - t_h\cos\theta_{T.\partial}\sin\varphi_{T.\partial} = (r_{T.u}\cos\theta_{T.u} + R_{T.u})\sin\varphi_{T.u}\cos\mu + r_{T.u}\sin\theta_{T.u}\sin\mu; \\ & Z_Q - t_h\sin\theta_{T.\partial} = -(r_{T.u}\cos\theta_{T.u} + R_{T.u})\sin\varphi_{T.u}\sin\mu + r_{T.u}\sin\theta_{T.u}\cos\mu\ . \end{aligned} \tag{9.74}$$

Таким образом по трем уравнениям (74) определяются три неизвестных параметра θ_u, φ_u и t_h, которые задают положение точки P пересечения поверхности заменяющего тора T_u с прямой (71).

При этом возможны следующие два варианта.

1-й вариант: если простыми средствами удается определить параметр t_h для точки P, то подставляя найденное значение этого параметра в (72), сразу находим координаты X_P, Y_P и Z_P точки P. Если параметр t_h определить сложно, то для нахождения координат точки P следует использавать

2-й вариант: из уравнений (74) для точки P находятся значения параметров θ_u и φ_u, которые затем подставляются в уравнение (73). Таким путем в системе координат тора T_∂ записывается радиус-вектор точки P, чем и определяются ее координаты.

С учетом найденных значений координат точек $Q(X_Q, Y_Q, Z_Q)$ и $P(X_P, Y_P, Z_P)$, уточненное значение результирующей погрешности $\tilde{h}_\Sigma$ формообразования поверхности детали, расчитанное без использования принципа суперпозиции, равно:

$$\tilde{h}_\Sigma = \sqrt{(X_P - X_Q)^2 + (Y_P + Y_Q)^2 + (Z_P + Z_Q)^2}\ .$$

С учетом последнего результата можно утверждать, что принцип суперпозиции элементарных составляющих при расчете результирующей погрешности формообразования поверхностей деталей может быть использован, если выполняется условие:

$$\tilde{h}_\Sigma - h_\Sigma \le [\Delta h_\Sigma],$$

где $[\Delta h_\Sigma]$ – допуск на точность определения погрешности $\tilde{h}_\Sigma$.

Наиболее точный результат будет получен, если вместо заменяющих торов использовать собственно поверхности *Д* и *И*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии изложены основы дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей деталей – нового направления в теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей. Этот метод развит исходя из постулированной концепции, в соответствие с которой при разработке технологии механической обработки первичной является обрабатываемая поверхность детали, а вся необходимая дополнительная информация может быть *вычислена* по данным о геометрии обрабатываемой поверхности с учетом требований к точности ее формообразования.

Однозначное аналитическое описание (синтез) наивыгоднейшей исходной инструментальной поверхности в функции обрабатываемой поверхности детали (как ее $\mathbb{R}$-отображение) и аналитическое описание (синтез) наивыгоднейшей кинематики формообразования в функции поверхности детали и исходной инструментальной поверхности дает основание утверждать, что в соответствие с разработанным методом весь процесс наивыгоднейшего формообразования может быть полностью описан (синтезирован) в функции только формообразуемой поверхности детали. Этим подтверждена правильность исходной концепции выполненного исследования и принципиально решена задача синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхностей деталей.

Дифференциально-геометрический метод формообразования обладает рядом принципиально важных преимуществ. В частности, его применение позволяет отказаться от повсеместного использования консервативного подхода, сводящегося к *назначению* большинства параметров процесса обработки исходя только из накопленного практического опыта и использовать вместо этого результаты аналитического решения задачи синтеза[1] наивыгоднейшего формообразования поверхности детали. Вместе с тем полностью игнорировать имеющийся практический опыт не следует.

Разработанный метод эффективен при комплексном подходе к решению задач синтеза наивыгоднейшего формообразования сложных поверхностей деталей на многокоординатных станках с ЧПУ и деталей общемашиностроительного назначения на соответствующем оборудовании. В теории этого метода многое удалось достичь путем применения метода подвижного трехгранника (подвижного репера), внутренним образом связанного с поверхностью $Д$ детали и с исходной инструментальной поверхностью $И$. Если задаться вопросом о внутренних причинах плодотворности разработанного метода формообразования поверхностей деталей, нужно прежде всего обратить внимание на то, что он предполагает широкое использование методов дифференциальной геометрии двумерного E_2 и трехмерного E_3 евклидова пространства, представляющей собой обширную область приложения анализа бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчисления, а также элементов теории дифференциальных уравнений) к исследованию геометрических образов деталей и инструментов. Использованный аппарат дифференциальной геометрии можно рассматривать как приложение анализа к теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей, а сама теория формообразования в значительной мере может быть представлена как геометрическая интерпретация элементов теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Предметом разработанного метода является процесс формообразования заданной поверхности детали. Этот процесс рассматривается сначала в малом – вблизи (в дифференциальной окрестности) текущей точки касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности. Аналитически описав таким образом

---

[1]Здесь полезно еще раз остановиться на принципиальном различии задач *синтеза* и задач *оптимизации* в том смысле, как это понимается в настоящей монографии. В результате решения задачи синтеза создается *новое* техническое решение, являющееся наивыгоднейшим для конкретных условий обработки. Это решение может быть синтезировано с учетом ограничений на величины параметров синтезируемого технического решения. Результатом же решения задачи оптимизации является оптимальное сочетание параметров исходного технического решения, структура которого заранее известна. При этом исходное решение может иметь принципиальные недостатки, неустранимые в результате решения задачи оптимизации. Именно такая принципиальная разница усматривается между задачами синтеза и оптимизации в данной монографии. Детально со спецификой задач оптимизации в машиностроениии можно познакомиться по книге Seireg, A.A., Rodriguez, J., (1997).

процесс локально, переходим затем к его аналитическому описанию регионально, а после этого – и вцелом (глобально).

Эффективность дифференциально-геометрического метода формообразования поверхностей деталей в значительной мере является следствием двух факторов:

- подвижный репер с началом в текущей точке на поверхности детали или инструмента представляет собой наиболее простую систему отнесения при аналитическом описании a) свойств локальных участков этих поверхностей, b) геометрии их касания и c) локальной кинематики формообразования;

- поверхности $Д$ и $И$ вполне определены с точностью до расположения в пространстве, если известны составляющие по осям подвижного трехгранника бесконечно малого его перемещения при переходе из одной точки поверхности в другую бесконечно близкую к ней точку.

Несмотря на достигнутый уровень развития теории формообразования, в инженерной практике на основе эвристических подходов разрабатываются методы и средства обработки деталей, которые существенно проще могли бы быть получены на основании изложенного в монографии подхода.

Необходимо также акцентировать внимание на следущем аспекте. Обычно следует сначала спроектировать деталь, наилучшим образом соответствующую своему функциональному назначению, после чего такую деталь следует изготовить с минимальными затратами времени и средств. Это стратегия. Вместе с тем прямой принцип: от детали к инструменту (т.е. от $Д$ к $И$) и далее к кинематике формообразования, соблюдается не всегда. Другую важную (однако не так широко встречающуюся в инженерной практике) группу задач теории формообразования поверхностей деталей составляют задачи, когда задаются инструментом (точнее, его исходной инструментальной поверхностью), после чего требуется установить какая поверхность детали в этом случае может быть обработана заданным инструментом. Например, при нарезании конических зубчатых колес с круговыми зубьями задаются инструментом (зуборезной головкой), которым стремятся обработать деталь, обладающую наиболее высокими эксплуатационными показателями. Зацепление обработанных таким инструментом зубчатых колес всегда является приближенным. Вместе с тем зубчатые колеса с круговыми зубьями обладают важными технологическими преимуществами, что делает их производство и применение в технике экономически целесообразным. Аналогичное наблюдается при нарезании колес цилиндро-конических передач и зубчатых колес других видов передач неэвольвентного зацепления первого и второго рода (Давыдов Я.С., 1950), при радиальном затыловании модульных, шлицевых, фасонных червячных фрез и др. Упрощенно говоря, в перечисленных и в других подобных случаях используется обратный принцип: от $И$ к $Д$, когда изначально имеется инструмент, но нет детали.

Разработанные на основе применения обратного принципа удачные инженерные решения достаточно широко распространены в технике. Эффективность их применения определяется тем, насколько деталь, обработанная заданным инструментом либо в соответствие с заданным способом, “близка” к той, которая наилучшим образом соответствует своему функциональному назначению и насколько ее изготовление оправдано экономически.

Очевидно, что при таком подходе обработать деталь с наилучшими конструктивными параметрами невозможно в принципе, а полученный результат не может быть идеальным. Он всегда будет более или менее приближенным, но может быть при этом существенно дешевле идеального. Инженерные решения не должны быть абсолютно точными. Точными должны быть научные решения – инженерные практически всегда приближенные (с приемлемой точностью). Поэтому обратный принцип (от $И$ к $Д$) в смысле инженерного применения не только допустим, но и правомерен – это укладывается в идеологию инженерного творчества.

Задача определения параметров поверхностей деталей, которые можно обработать заданным инструментом, известна давно. Длительное время превалировала точка зрения, что ее решение потребует разработки специальных подходов. Однако это не так. Эта задача принципиально решена. Достаточно задаться видом инструмента и определить все возможные виды поверхностей деталей, которые могут быть формообразованы ним в соответствие с каждой из принципиальных кинематических схем формообразования (см. гл. 2, рис. 2.14 на с. 141 и рис. 2.15 на с. 142), если каждое из входящих в кинематическую схему формообразования элементарное движение осуществлять с той же скоростью, но в противоположном направлении, что и при нахождении поверхности $И$ инструмента по известной поверхности $Д$ детали. Формообразованные таким путем поверхности $Д$ следует проанализировать с точки зрения степени их пригодности для конкретных условий эксплуатации детали, после чего принять окончательное решение об эффективности того или иного инструмента и способа обработки ним.

Следует ожидать, что совершенствование методов математического моделирования и дальнейшее развитие теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей будет связано с применением тензорного исчисления и элементов теории групп. Используя обобщенные математические модели более высокого порядка, чем модели, основанные на методах классической дифференциальной геометрии, тензорный анализ даст возможность в обобщенной форме аналитически описывать различные варианты кинематики формообразования, а с применением элементов теории групп Ли разработать классификацию возможных видов технологических процессов обработки в машиностроении. В рамках развитого в математическом отношении аппарата тензорного анализа могут быть получены все основные результаты, известные в теории формообразования поверхностей при механической обработке деталей.

Крайне недостаточно исследована проблема *конструирования* режущего инструмента. Применение методов теории формообразования поверхностей деталей позволяет определить исходную инструментальную поверхность, переднюю и заднюю поверхности зубьев инструмента, его режущую кромку. Однако она не дает ответ на вопрос о *конструкции* режущего инструмента с учетом обеспечения наивыгоднейших условий:

- подвода и отвода смазочно-охлаждающих технологических сред;
- дробления (завивания), отвода и транспортирования срезанной стружки из зоны обработки;
- крепления инструмента на станке;
- и др. вопросов конструирования *наивыгоднейшего* инструмента.

Для решения этой проблемы полезным окажется привлечение эвристических подходов, разработанных (Альтшуллер Г.С., 1979, 1986; и др.) в теории решения изобретательских задач (ТРИЗ), чтобы в конечном итоге прийти к наивыгоднейшей конструкции инструмента вцелом[1].

Изложенный в монографии материал дает достаточные представления о месте, которое занимает теория формообразования поверхностей при механической обработке деталей – в основании теоретической технологии машиностроения, над разработкой которой исследователи работают уже много лет.

[1]Задачу конструирования наивыгоднейшего режущего инструмента с использованием элементов ТРИЗ следует рассматривать как еще один “мостик”, связывающий теорию формообразования поверхностей деталей с реальным процессом ее обработки.

Литература

Альтшуллер Г.С., (1986), *Найти идею. Введение в теорию решения изобретательских задач*. – Новосибирск: Наука. –209с.

Альтшуллер Г.С., (1979), *Творчество как точная наука. Теория решения изобретательских задач*. – М.: Советское радио. –176с.

Антонова М.П., (1969), "Применение принципов обкатки для обработки поверхностей двойной кривизны". – В кн.: *Усовершенствование зубообрабатывающего инстирумента. Материалы конференции*. – М.: НИИМАШ, с.425-437.

Арманский Е.Я., Конников М.Н., Рабинович А.М., (1986), "Формообразование зубьев группового расположения на сферических борфрезах". – *Станки и инструмент*, №10, с.23.

А.с. №1009615 (СССР). *Устройство для затылования*./С.П. Радзевич. – Опубл. в Б.И. №13, 1983.

А.с. №1077706 (СССР). *Устройство для затылования*./С.П. Радзевич. – Опубл. в Б.И. №9, 1984.

А.с. №1085778 (СССР). *Способ шлифования криволинейных поверхностей*./В.И. Кальченко, А.М. Пиастро, И.А. Шойхер и Е.И. Власов. – Опубл. в Б.И. №14, 1984. *МКИ*^{4} В 24 b 21/00.

А.с. №1106977 (СССР). *Способ контроля сложных профилей зубьев*./С.П. Радзевич. – Опубл. 07.08.84 в Б.И. №29, 1984.

А.с. №1117127 (СССР). *Устройство для затылования*./С.П. Радзевич. – Опубл. 07.10.84 в Б.И. №37, 1984.

А.с. №1146134 (СССР). *Устройство для затылования*. /С.П. Радзевич. – Опубл. 23.03.85 в Б.И. №11, 1985.

А.с. №1171210 (СССР). *Способ точения*./С.П. Радзевич. – Опубл. в Б.И., №29. 1985. *МКИ*^{4} В 23 b 1/00. Заявлено 11.03.84.

А.с. №1185749 (СССР). *Способ обработки деталей, ограниченных поверхностями сложной формы*. /С.П. Радзевич. – Заявлено 24.10.83. *МКИ*^{4} В 23 с 3/16.

А.с. №1199458 (СССР). *Устройство для затылования*./С.П. Радзевич. – Опубл. 23.12.85 в Б.И. №47, 1985.

А.с. №1232375 (СССР). *Способ точения*./С.П. Радзевич. – Опубл. в Б.И., №19, 1986. *МКИ*^{4} В 23 В 1/00. Заявлено 13.09.84.

А.с. №1249787 (СССР). *Способ обработки деталей, ограниченных поверхностями сложной формы*./С.П. Радзевич, приоритет от 27.11.1984г. (Не публикуется).

А.с. №1255304 (СССР). *Способ обработки сложных поверхностей*. /С.П. Радзевич. – Опубл. 07.09.86 в Б.И., №33, 1986. – *МКИ*^{4} В 23 с 3/16. Заявлено 30.10.84.

А.с. №1331617 (СССР). *Способ обработки сложных поверхностей*./С.П. Радзевич. – Опубл. 23.08.87 в Б.И., №31, 1987. – *МКИ*^{4} В 23 с 3/16. Заявлено 07.08.85.

А.с. №1335426 (СССР). *Устройство для обработки фасонных поверхностей инструментов*. /С.П. Радзевич и И.В. Винокуров. – Опубл. 07.09.87 в Б.И. №33, 1987.

А.с. №1336366 (СССР). *Способ обработки деталей, ограниченных поверхностями сложной формы*. /С.П. Радзевич. – Заявлено 21.10.85. *МКИ*^{4} В 23 с 3/16.

А.с. №1367300 (СССР). *Способ обработки сложных поверхностей деталей*. /С.П. Радзевич, приоритет от 30.01.1986. (Не публикуется).

А.с. №1371875 (СССР). *Устройство к металлорежущему станку для обработки фасонных поверхностей инструментов*. /С.П. Радзевич и М.В. Чернышов. – Опубл. 07.02.88 в Б.И. №5, 1988.

А.с. №1393527 (СССР). *Устройство для шлифования рабочих поверхностей зубьев сложного инструмента*. /С.П. Радзевич и И.В. Винокуров. – Опубл. 07.05.88 в Б.И. №17, 1988.

А.с. №1433769 (СССР). *Устройство для обработки фасонных поверхностей инструментов*. /С.П. Радзевич, Л.И. Бондаренко, Л.Р. Тисновский и др. – Опубл.30.10.88 в Б.И. №40, 1988.

А.с. №1442371 (СССР). *Способ ориентирования сложной поверхности детали на столе станка с ЧПУ*. /С.П. Радзевич. – Опубл. в Б.И., №45, 1988. (Заявка №4218128/30-08 от 17 февраля 1987г.; положительное решение от 23 ноября 1987г.).

А.с. №1449246 (СССР). *Способ моделирования обработки пространственных поверхностей деталей*. /С.П. Радзевич. – Опубл. 07.01.89 в Б.И. №1, 1989.

А.с. №1463454 (СССР). *Способ выглаживания*./С.П. Радзевич. – Опубл. 07.03.89 в Б.И., №9, 1989. *МКИ*^{4} В 24 b 39/00, 39/04. Заявлено 05.05.87.

А.с. №1516738 (СССР). *Устройство для контроля профиля фасонных фрез*./С.П. Радзевич и А.Н. Дашевский. – Опубл. 23.10.89 в Б.И. №39, 1989.

А.с. №1533174 (СССР). *Способ упрочнения деталей сложной формы*./С.П. Радзевич. – *МКИ*^{4} В 24 b 39/00. Заявлено 02.12.87.

А.с. №1629741 (СССР). *Устройство для контроля профиля фасонных фрез*. /С.П. Радзевич, А.Н. Дашевский, А.П. Радзевич и Г.А. Андрощук. – Опубл. 23.02.91 в Б.И. №7, 1991.

А.с. №1636196 (СССР). *Способ многопереходной обработки и инструмент для его осуществления*. /С.П. Радзевич, В.А. Палагута, В.В. Новодон и А.П. Радзевич. – Опубл. в Б.И., №11, 1991. *МКИ*^{5} В 24 b 39/00. Заявлено 30.01.89.

А.с. №1664517 (СССР). *Устройство для обработки фасонных шлифовальных кругов*. /С.П. Радзевич, В.А. Палагута, И.В. Винокуров и др. – Опубл. 23.07.91. в Б.И. №27, 1991.

А.с. №1703291 (СССР). *Способ обработки фасонных поверхностей*./С.И. Чухно и С.П. Радзевич. – Опубл. в Б.И., №1, 1992. – *МКИ*^{5} В 23 с 3/16. Заявлено 02.08.89.

А.с. №1708522 (СССР). *Способ точения фасонных поверхностей*./С.П. Радзевич и Л.В. Бондаренко. – Опубл. в Б.И., №4. 1992. *МКИ* [4] В 23 b 1/00. Заявлено 13.12.88.

А.с. №1754352 (СССР). *Устройство для контроля профиля зубьев фрезы*./С.П. Радзевич, И.В. Винокуров, А.П. Радзевич и О.В. Кочнев. – Опубл. 15.08.92. в Б.И. №30, 1992.

А.с. №1771937 (СССР). *Устройство для обработки фасонных шлифовальных кругов*./С.П. Радзевич, В.А. Палагута, И.В. Винокуров, А.П. Радзевич и С.Б. Пелых. – Опубл. 30.10.92 в Б.И. №40, 1992.

Асатиани М.Д., Таварткиладзе З.С., Церетели Р.И., (1978), "Возможности оптимизации режимов резания на фрезерных станках с числовым программным управлением". – *Сообщения АН ГрССР*, Том 91, №3, с.669-672.

Бабак В.Ф., (1969), "Ориентация мгновенной зоны резания при шевинговании". – *Известия ВУЗов. Машиностроение*, №4, с.141-145.

Бажин А.А., (1935), *Зуборезные инструменты*. – М.-Л.: ОНТИ НКТП. –112с.

Балакшин Б.С., (1969), *Основы технологии машиностроения*, – М.: Машиностроение. –559с.

Беклемишев Д.В., (1974), *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. Изд. 2-е, испр. – М.: Наука. – 320с.

Бляшке В., (1957), *Введение в дифференциальную геометрию*. – М.: ГИТТЛ. –224с.

Бобров В.Ф., (1962), *Влияние угла наклона главной режущей кромки инструмента на процесс резания металлов*. – М.: Машгиз. –152с.

Бобров В.Ф., (1975), *Основы теории резания металлов*. – М.: Машиностроение. –344с.

Борисов А.Н., (1993), *Геометрическая теория автоматизированного проектирования металлорежущих инструментов*. – Автореф. дисс. … д-ра техн. наук. – Тула: ТулПИ. –34с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А., (1986), *Справочник по математике. Для инженеров и учащихся ВТУЗов*. – Совместное издание Лейпциг: Тойбнер, М.: Наука. –719с.

Бруевич Н.Г., Сергеев В.И., (1976), *Основы нелинейной теории точности и надежности устройств*. – М.: Наука. –136с.

Бюшгенс С.С., (1940), *Дифференциальная геометрия*. – М.: ГТТИ. –300с.

Векуа И.Н., (1978), *Основы тензорного анализа и теории ковариантов*. – М.: Наука. – 296с.

Вильдгабер Э., (1948), *Основы зацепления конических и гипоидных передач*. Пер. с англ. и коментарии А.В.Слепака. – М.: Машгиз. –176с.

Воронов В.Н., (1993), *Теоретические основы технологии обработки резьбы винтовым инструментом с радиальной подачей*. – Автореф. дисс. … д-ра техн. наук. – Тула: ТулГТУ. –40с.

Галимов К.З., Паймушин В. Н., (1985), *Теория оболочек сложной геометрии (геометрические вопросы теории оболочек)*. – Казань: Изд. Казанск. гос. ун-та. –164с.

Гантмахер Ф., (1967), *Теория матриц*. – М.: Наука. –575с.

Гильберт Д., Кон-Фоссен С., (1981), *Наглядная геометрия*. Пер. с нем., изд. 3-е. – М.: Наука. –344с.

Голембиевский А.И., (1986), *Основы системологии способов формообразующей обработки в машиностроении*. – Минск: Наука и техника. – 168с.

Грановский Г.И., (1948), *Кинематика резания*. – М.: Машгиз. –200с.

Грановский Г.И., Грановский В.Г., (1985), *Резание металлов*. – М.: Высшая школа. –304с.

Громов Г.Н., (1986), *Дифференциально-геометрический метод навигации*. – М.: Радио и связь. –384с.

Давыдов Я.С., (1950), *Неэвольвентное зацепление*. – М.: Машгиз. –179с.

Дерябин А.Л., (1984), *Программирование технологических процессов для станков с ЧПУ*. – М.: Машиностроение. –224с.

Дикушин В.И., (1950), "Основные данные для проектирования металлорежущих станков". – В кн.: *Машиностроение. Энциклопедический справочник*. Том 9. – М.: Машгиз, 1950, с.7-21.

Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. (1989), /Кованцов Н.И., Зражевская Г.М., Кочаровский В.Г., Михайловский В.И. – Киев: Вища школа, 398с.

Доценко И.С., Невский П.М., (1975), *Матричная форма расчета и программирование задач строительной механики на ЭВМ*. – Киев: Вища школа. –240с.

Дружинский И.А., (1965), *Методы обработки сложных поверхностей на металлорежущих станках*. Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.-Л.: Машиностроение. –600с.

Дружинский И.А., (1985), *Сложные поверхности: математическое описание и технологическое обеспечение*. – Л.: Машиностроение. –263с.

Дусев И.И., (1970), *Аналитическая теория пространственных зацеплений и ее применение к исследованию гипоидных передач*. – Автореф. дисс. … д-ра техн. наук. – Новочеркасск.

Дусев И.И. и Васильев В.М., (1968), *Аналитическая теория пространственных зацеплений и ее применение к исследованию гипоидных передач*. – Ростов-на-Дону: Кн. изд.-во. –148с.

Евгеньев Г.Б., (1983), *Основы программирования обработки на станках с ЧПУ*. – М.: Машиностроение. – 304с.

Ермаков Ю.М., (1983), *Современные тенденции в развитии лезвийной обработки*. – М.: НИИМАШ. –31с.

Ефимов Н.В., (1978), *Высшая геометрия*. М.: Наука. –576с.

Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А., (1985), *Сплайны в инженерной геометрии*. – М.: Машиностроение. –224с.

Залгаллер В.А., (1975), *Теория огибающих*. – М.: Наука. –104с.

Заявка №0450113, ЕПВ, *Digitalisier-Verfahren mit Kollisionsprufung*: $МКИ^5$ G05 B 19/42/Schwefel Ernst; Johannes Heidenhain GmbH. – №90106287.7; Заявл. 02.04.90; Опубл. 09.10.91. *Способ обработки по копиру сложной формы на станке с ЧПУ*. (РЖ 14Б, №9/1992, реф. 9Б107П).

Заявка №59-152043 (Япония). *Способ расчета пространственной траектории перемещения инструмента*. /Киси Хадзимото, Сэки Санэки; Фанакку к.к. – Заявл. 17.02.1983, №58-25187, опубл. 30.08.1984. *МКИ* B 23 Q 15/00, B 23 Q 21/00. [РЖ 14Б, 1985, №10, реф. 10Б22П].

Заявка №60-48244 (Япония). *Способ задания траектории обработки сложных поверхностей*. /Киси Хадзимэ, Сэки Маки; Маки Фанакку. *МКИ* B 23Q 15/00, G 05 B 19/403. Заявлено 29.08.83, №58-157431, опубл. 15.03.85. [РЖ 14Б, №8/1986, реф. 8Б426П, с.50].

Зорев Н.Н., (1956), *Вопросы механики процесса резания металлов*. – М.: ЦНИИТМАШ. –367с.

Иноземцев Г.Г., (1984), *Проектирование металлорежущих инструментов*. – М.: Машиностроение. –272с.

Инструментальные системы автоматизированного производства. (1993)/Р.И. Гжиров, В.А. Гречишников, В.Г. Логашев и др. – СПб.: Политехника. –399с.

Исаев А.И., (1950), *Процесс образования поверхностного слоя при обработке металлов резанием*. – М.: Машгиз. –358с.

Каган В.Ф., (1947), *Основы теории поверхностей*. Том 1. – М.-Л.: ГИТТЛ. –512с.

Каган В.Ф., (1948), *Основы теории поверхностей*. Том 2. – М.-Л.: ГИТТЛ. –407с.

Каменев А.Ф., (1985), *Технические системы: закономерности развития*. – Л.: Машиностроение. –216с.

Капустин Н.М., (1976), *Разработка технологических процессов обработки деталей на станках (с помощью ЭВМ)*. – М.: Машиностроение. –288с.

Карелин Н.М., (1966), *Бескопирная обработка цилиндрических деталей*. – М.: Машиностроение. –187с.

Картан Э., (1962), *Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения*. Перевод с французского проф. С.П. Финикова. – М.: Изд-во МГУ. –238с.

Картан Э., (1963), *Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера*. – М.: Изд. при Московском ун-те. –368с.

Каштальян И.А., Клевзович В.И., (1989), *Обработка на станках с числовым программным управлением*. – Минск: Вышейшая школа. –271с.

Кирсанов Г.Н., (1983), “Основы винтовой теории профилирования зубообрабатывающих инструментов”. – В сб.: *Механика машин*. Вып.61. – М.: Наука, с.10-16.

Кирсанов Г.Н., (1977), “Профилирование инструментов с винтовой исходной инструментальной поверхностью для обработки винтовых поверхностей”. – *Вестник машиностроения*, №7, с.54-57.

Кирсанов Г.Н., (1978), “Развитие некоторых вопросов теории инструмента”. – *Вестник машиностроения*, №9, с.53-58.

Клиот-Дашинский М.И., (1974), *Алгебра матриц и векторов*. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. –160с.

Кованцов М.І., (1973), *Диференціальна геометрія*. – Київ: Вища школа. –276с.

Коганов И.А., (1968), *Разработка и исследование новых методов формообразования зубчатых профилей и фасонных поверхностей*. – Дисс. … д-ра техн. наук. – Тула: ТулПИ. –304с.

Коновалов Е.Г., (1961), *Основы новых способов металлообработки*. – Минск: изд. АН БССР. – 298с.

Константинов М.Т., (1985), *Расчет программ фрезерования на станках с ЧПУ*. – М.: Машиностроение. – 160с.

Корн Г., Корн Т., (1974), *Справочник по математике. Для научных работников и инженеров*. – М.: Наука. – 831с.

Корнейчук Н.П., (1984), *Сплайны в теории приближения*. – М.: Наука. –352с.

Костецкий Б.И., (1984), "Классификация видов поверхностного разрушения и общая закономерность трения и изнашивания". – *Вестник машиностроения*, №11, с.10-13.

Котов И.И., (1961), *Графические способы задания и построения технических форм поверхностей*. Автореф. дисс. … д-ра техн. наук. – Тбилиси: ТБНИ. –48с.

Крылов Н.Н., (1963), "Кривизна поверхностей, имеющих линейный контакт". В сб.: *Теория машин и механизмов*. Вып. 94-95. – М.: Изд-во АН СССР, с.119-126.

Кудевицкий Я.В., (1978), *Фасонные фрезы*. – Л.: Машиностроение. –176с.

Куцер В.М., (1990), "Определение угла схода стружки при косоугольном резании". – В сб.: *Машиностроение*. Вып. 15. - Минск: Вышейшая школа, с.9-12.

Лашнев С.И., (1968), *Основы теории формообразования поверхностей дисковыми, реечными и червячными инструментами*. – Дисс. … д-ра техн. наук. – Тула: ТулПИ. –268с.

Лашнев С.И., (1971), *Формообразование зубчатых деталей реечными и червячными инструментами*. – М.: Машиностроение. –216с.

Лашнев С.И., Борисов А.Н., Емельянов С.Г., (1997), *Геометрическая теория формирования поверхностей режущими инструментами*. – Курск: Изд-во Курск. гос. техн. ун-та –391с.

Лашнев С.И., Юликов М.И., (1980), *Проектирование режущей части инструмента с применением ЭВМ*. – М.: Машиностроение. –208с.

Лашнев С.И., Юликов М.И., (1975), *Расчет и конструирование металлорежущих инструментов с применением ЭВМ*. – М.: Машиностроение. –392с.

Левитский Н.И., (1990), *Теория механизмов и машин*. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука. –592с.

Лившиц А.Л., (1967), "Методика поиска новых процессов формообразования". – *Вестник машиностроения*, №9, с.60-64.

Литвин Ф.Л., (1968), *Теория зубчатых зацеплений*. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука. –584с.

Лопато Г.А., Кабатов Н.Ф., Сегаль М.Г., (1977), *Конические и гипоидные передачи с круговыми зубьями.* Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Машиностроение. –423с.

Люкшин В.С., (1968), *Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов*. – М.: Машиностроение. –372с.

Маргулис Д.К., (1962), *Протяжки переменного резания*. – М.: Машгиз. –270с.

Матюшин В.М., (1957), *Основные вопросы конструирования зуборезных инструментов для цилиндрических колес*. – Автореф. дисс. … д-ра техн. наук. – М. –48с.

Медведицков С.Н., (1981), *Высокопроизводительное зубонарезание фрезами*. – М.: Машиностроение. –104с.

Метьюз Д., Уокер Р., (1972), *Математические методы физики*. – М.: Атомиздат. –392с.

Милинский В.И., (1934), *Дифференциальная геометрия*. – Л.: Кубуч. –332с.

Михайлов А.Н., (1992), *Разработка методов проектирования высокоэффективных поточно-пространственных технологических систем*. – Автореф. дисс. … д-ра техн. наук. – Киев: НТУ Украины "Киевский политехнический институт". –34с.

Можаев С.С., (1948), *Аналитическая теория спиральных сверл*. – М.-Л.: Машгиз. –136с.

Можаев С.С., (1953), *Общая теория режущих инструментов*. – Дисс. … д-ра техн. наук. – Л.: ЛПИ. –295с.

Молчанов Г.Н., (1979), *Повышение эффективности обработки на станках с ЧПУ*. – М.: Машиностроение. – 204с.

Несмелов И.П., Гольдфарб В.И., (1983), "Недифференциальный подход к решению задачи огибания". – *Механика машин*. – 1983. –Вып.61, с.3-10.

Николаев А.Ф., (1953), *Кинематические основы теории пространственных зацеплений*. – Автореф. дисс. … д-ра техн. наук. – М.: Мосстанкин.

Норден А.П., (1948), *Дифференциальная геометрия*. – М.: Учпедгиз. –216с.

Норден А.П., (1956), *Теория поверхностей*. – М.: ГТТИ. –259с.

Палагута В.А. (1995) *Разработка и исследование методов повышения производительности чистовой обработки цилиндрических зубчатых колес дисковыми обкаточными инструментами*, Дисс. … канд. техн. наук, Днепродзержинск, ДГТУ, 220с.

Панкин А.В., (1936), "Кинематическое заострение режущих лезвий". – *Станки и инструмент*, №1.

Панкин А.В., (1940), "Трансформация геометрии резцов". – *Станки и инструмент*, №8-9.

Парлс Л.А., (1971), *Аналитическая динамика*. – М.: Наука.

Пат. №2009762 (Россия). *Устройство для затылования*./И.В. Винокуров и С.П. Радзевич. Опубл. 30.03.94 в Б.И. №6, 1994.

Пат. №2050228 (Россия). *Способ обработки сложных поверхностей деталей*./С.П. Радзевич. – Опубл. в Б.И., №35, 1995. – *МКИ* ^{4} В 23 С 3/16. Заявлено 25.12.1990.

Перепелица Б.А., (1981), *Отображения аффинного пространства в теории формообразования поверхностей резанием*. – Харьков: Вища школа. –152с.

Петрухин С.С., (1960), *Основы проектирования режущей части металлорежущих инструментов. Кинематическая теория*. – М.: Машгиз. –163с.

Подураев В.Н., Камалов В.С., (1973), *Физико-химические методы обработки*. – М.: Машиностроение. –346с.

Постников М.М., (1987), *Лекции по геометрии. Семестр 111. Гладкие многообразия*. – М.: Наука. –480с.

Радзевич С.П., (1987a), *Методы исследования условий касания сложной поверхности детали и исходной инструментальной поверхности*. – Днепродзержинск: Днепродзержинск. индустриальн. ин-т. –104с. Рукопись депонирована в УкрНИИНТИ 30.03.88, №759-Ук-88.

Радзевич С.П., (1987b), *Новые достижения в области обработки деталей сложной формы на станках с ЧПУ*. – М.: ВНИИТЭМР. –48с.

Радзевич С.П., (1987c), "Основное допущение в теории формообразования поверхностей резанием". В кн.: *Прогрессивные методы обработки деталей летательных аппаратов и двигателей.* Межвузовский сб. – Казань: Казанский авиационный институт, с.67-73.

Радзевич С.П., (1987d), "Применение индикатрис конформности первого рода для оценки характера касания поверхности детали и исходной инструментальной поверхности". – В кн.: *Физические процессы при резании металлов*. – Волгоград: ВолгПИ, с.34-46.

Радзевич С.П., (1987e), "Профилирование фасонных режущих инструментов для многокоординатной обработки сложных поверхностей на станках с ЧПУ". – В кн.: *Прогрессивные конструкции режущего инструмента для ГПС и роботизированных комплексов*. Материалы семинара. – М.: МДНТП, с.53-57.

Радзевич С.П., (1987f), *Способ профилирования инструмента*. – Заявка на изобретение №4242296/08, приоритет от 31.03.1987г.

Радзевич С.П., (1987g), *Технологическая оснастка и инструмент для станков с ЧПУ*. – М.: ВНИИТЭМР. – 52с.

Радзевич С.П., (1988a), *Классификация рабочих поверхностей деталей и исходных инструментальных поверхностей.* – Днепродзержинск: Днепродзержинск. индустриальн. ин-т. -185с.(Рукопись депонирована в УкрНИИНТИ 08.06.88 №1440-Ук88).

Радзевич С.П., (1988b), "Мера степени конформности поверхности детали и исходной инструментальной поверхности". – В кн.: *Исследования в области инструментального производства и обработки металлов резанием*. – Тула: ТулПИ, с.19-29.

Радзевич С.П., (1988c), "Поверхности деталей и инструментов, допускающие скольжение "самих по себе"". – В сб.: *Исследования в области формообразования поверхностей при механической обработке деталей*. – Днепродзержинск: Днепродзержинск. индустриальн. ин-т, с.29-53. Рукопись депонирована в УкрНИИНТИ 02.01.89, №65-Ук89.

Радзевич С.П., (1988d), *Прогрессивные технологические процессы обработки деталей сложной формы*. – М.: ВНИИТЭМР. –56с.

Радзевич С.П., (1988e), *САП многокоординатной обработки на станках с ЧПУ: достижения и актуальные задачи*. – М.: ВНИИТЭМР. –48с.

Радзевич С.П., (1989a), "Многокоординатное формообразование поверхностей на станках с ЧПУ". – В кн.: *Моделирование систем, расчет элементов, формообразование поверхностей, защитные покрытия и новое оборудование в машиностроении*. – Киев: Вища школа, 1989, с.200-254.

Радзевич С.П., (1989b), *Многокоординатное формообразование поверхностей на станках с ЧПУ*. В кн: *Моделирование систем, расчет элементов, формообразование поверхностей, защитные покрытия и новое оборудование в машиностроении*. Учебное пособие для ВУЗов./Э.И.Жуковский, П.П.Лизунов, А.П.Жуковец, Р.Д.Ицкович-Лотоцкий, С.П.Радзевич, А.В.Мальцев, Ю.А.Харламов. – К.: Вища школа, 1989, с.200-254.

Радзевич С.П., (1989c), “Профилирование фасонных инструментов для обработки сложных поверхностей на многокоординатных станках с ЧПУ”. – *Станки и инструмент*, №7, с.10-12.

Радзевич С.П., (1989d), *Повышение эффективности эксплуатации многокоординатных станков с ЧПУ*. – М.: ВНИИТЭИМР. –56с.

Радзевич С.П., (1989e), *Способы фрезерования фасонных поверхностей деталей*. – М.: ВНИИТЭМР. –72с.

Радзевич С.П., (1990), “Рациональное ориентирование сложной поверхности детали на столе многокоординатного станка с ЧПУ”. – *Известия ВУЗов. Машиностроение*, №2, с.140-145.

Радзевич С.П., (1991a), *Дифференциально-геометрический метод формообразования поверхностей при механической обработке деталей*. – Автореф. дисс. … д-ра техн. наук. – Тула, ТулПИ. –48с.

Радзевич С.П., (1991b), *Дифференциально-геометрический метод формообразования поверхностей при механической обработке деталей*. – Дисс. … д-ра техн. наук. – Днепродзержинск: ДГТУ. –300с.

Радзевич С.П., (1991c), *Формообразование сложных поверхностей на станках с ЧПУ*. – Киев: Вища школа. – 192с.

Радзевич С.П., (1998), “К-отображение поверхностей деталей и исходных инструментальных поверхностей”. – В сб.: *Вестник НТУУ “Киевский политехнический институт”*. Серия: *Машиностроение*, вып.33, с.232-240.

Радзевич С.П., Дмитренко Г.В., (1987) “Обработка фасонных поверхностей вращения на станках с ЧПУ”, *Машиностроитель*, №5, с. 17-19.

Радзевич С.П., Олейник Л.А., Радченко С.В., (1988), “Об оптимизации параметров процесса многокоординатного формообразования сложных поверхностей деталей на станках с ЧПУ”. – В сб.: *Исследования в области формообразования поверхностей при механической обработке деталей*. – Днепродзержинск: Днепродзержинск. индустриальн. ин-т, с.57-72. Рукопись депонирована в УкрНИИНТИ 02.01.89, №65-Ук89.

Радзевич С.П., Палагута В.А., (1988a), *Новые достижения в области чистовой обработки цилиндрических зубчатых колес*. – М.: ВНИИТЭМР. – 52с.

Радзевич С.П., Палагута В.А., (1988b), “САПР чистовой обработки цилиндрических зубчатых колес”, *Механизация и автоматизация производства*, №10, с. 13-15.

Радзевич С.П., Палагута В.А., (1997), “Синтез наивыгоднейшего процесса шевингования цилиндрических зубчатых колес”. – *Вестник машиностроения*, 1997, №8, с.36-41.

Радзевич С.П., Петренко, Т.Ю., (1999), “Поверхности деталей и инструментов, допускающие движение *“самих по себе”*”, *Механіка та машинобудування*, №1, с. 231–240.

Развитие науки о резании металлов. (1967) – /Под ред. Н.Н. Зорева, Г.И. Грановского, М.Н. Ларина, Т.Н. Лоладзе, И.П. Третьякова. – М.: Машиностроение. –416с.

Рашевский П.К., (1939), *Курс дифференциальной геометрии*. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.-Л.: ГОНТИ. –360с.

Рвачев В.Л., (1982), *Теория* $R-$ *функций и некоторые ее приложения*. – Киев: Наукова думка. –551с.

Решетов Д.Н., Портман В.Т., (1986), *Точность металлорежущих станков*. – М.: Машиностроение. –336с.

Родин П.Р., (1960), *Основы теории проектирования режущих инструментов*. – М.-Киев: Машгиз. –160с.

Родин П.Р., (1961), *Вопросы теории проектирования режущих инструментов*. – Дисс. … д-ра техн. наук. – Одесса: ОПИ. –373с.

Родин П.Р., (1977), *Основы формообразования поверхностей резанием*. – Киев: Вища школа. –192с.

Родин П.Р., Линкин Г.А., Татаренко В.Н., (1976), *Обработка фасонных поверхностей на станках с числовым программным управлением*. – Киев: Техніка. –200с.

Розенберг А.М., Халфен Р.В., (1976), "К вопросу о действительном направлении схода стружки при косоугольном резании". – В сб.: *Резание и инструмент*. Вып.16. – Харьков: Вища школа, с.3-5.

Сахаров Г.Н., (1974), *Вопросы теории обкаточных инструментов*. – Дисс. … д-ра техн. наук. – М.: Мосстанкин. –320с.

Сахаров Г.Н., (1989), *Металлорежущие инструменты*. – М.: Машиностроение. –328с.

Сахаров Г.Н., (1983), *Обкаточные инструменты*. – М.: Машиностроение. –232с.

Семенченко И.И., Матюшин В.М., Сахаров Г.Н., (1962), *Проектирование металлорежущих инструментов*. – М.: Машгиз. –952с.

Семенченко И.И., (1936), *Режущий инструмент. Конструирование и производство*. Том 1. – Л.: ОНТИ.

Семенченко И.И., (1938), *Режущий инструмент. Конструирование и производство*. Том 2. – Л.: ОНТИ. – 676с.

Семенченко И.И., (1944), *Режущий инструмент*. Том 3. – М.-Свердловск: Машгиз. –559с.

Семенченко И.И., (1944), *Режущий инструмент*. Том 4. – М.-Свердловск: Машгиз. –440с.

Скоутен Я., (1965), *Тензорный анализ для физиков*. – М.: Наука. –456с.

Смирнов А.И., (1982), *Анализ перспектив развития методов формообразования в машиностроении.* – М.: НИИМАШ. –49с.

Смирнов В.И., (1958), *Курс высшей математики.* Том 2. Изд-е 16-е. – М.: Физматгиз. –628с.

Станки с числовым программным управлением (специализированные), (1988)/В.А. Лещенко, Н.А. Богданов, И.В. Вайнштейн и др.; Под общ. ред. В.А. Лещенко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1988. –568с.

Степанов Н.Н., (1948), *Сферическая тригонометрия*. Изд. 2-е. – М.-Л.: ОГИЗ. –154с.

Степанов Ю.С., Белкин Е.А., (1990), "Расчет тензора Римана-Кристоффеля общей винтовой поверхности по заданному метрическому тензору". – в кн.: *Современные методы повышения качества и надежности продукции на предприятиях машиностроения*. Материалы межрегионального научно-технического семинара. – Орел: ВНТО машиностроения, с.4-8.

Стечкин С.В., Субботин Ю.Н., (1976), *Сплайны в вычислительной математике*. – М.: Наука. –248с.

Талантов Н.В., (1992), *Физические основы процесса резания, изнашивания и разрушения инструмента*. – М.: Машиностроение. –240с.

Фавар Ж., (1960), *Курс локальной дифференциальной геометрии*. – М.: Изд. иностр. лит. –560с.

Федотенок А.А., (1970), *Кинематическая структура металлорежущих станков*. – М.: Машиностроение. – 403с.

Фиников С.П., (1961), *Дифференциальная геометрия*. – М.: Изд. Моск. ун-та. –158с.

Фиников С.П., (1952), *Курс дифференциальной геометрии*. – М.: ГТТИ. –343с.

Фиников С.П., (1934), *Теория поверхностей*. – М.: ГТТИ. –200с.

Фокс А., Пратт М., (1982), *Вычислительная геометрия: применение в проектировании и на производстве*. М.: Мир. –304с.

Фрайфельд И.А., (1948), *Инструменты, работающие методом обкатки*. – М.: Машгиз. –252с.

Фролов С.А., (1983), *Начертательная геометрия*. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Машиностроение. –240с.

Цвис Ю.В., (1961), *Профилирование режущего обкатного инструмента*. – М.: Машгиз. –156с.

Цепков А.В., (1979), *Профилирование затылованных инструментов*. – М.: Машиностроение. –150с.

Чарнко Д.В., (1963), *Основы выбора технологического процесса механической обработки*. М.: Машгиз.

Шевелева Г.И., (1973), "Квазилинейный контакт в зубчатых зацеплениях". – *Машиноведение*. 1973, №3, с.54-62.

Шевченко Н.А., (1957), *Геометрические параметры режущей кромки и сечения срезов*. – М.: Машгиз. –140с.

Шишков В.А., (1951), *Образование поверхностей резанием по методу обкатки*. – М.: Машгиз. –152с.

Этин А.О., (1964), *Кинематический анализ методов обработки металлов резанием*. – М.: Машиностроение. –322с.

Юликов М.И., Горбунов Б.И., Колесов Н.В., (1987), *Проектирование и производство режущего инструмента*. – М.: Машиностроение. –296с.

Юликов М.И., (1979), *Теоретические основы системы проектирования режущих инструментов*. – Дисс. … д-ра техн. наук. – Тула: ТулПИ. –300с.

Юнусов Ф.С., (1968), *Исследование строчечного метода обработки лопаток авиационных газотурбинных двигателей*. – Дисс. … д-ра техн. наук. – Казань: КАИ. –167с.

Юнусов Ф.С., (1987), *Формообразование сложнопрофильных поверхностей шлифованием*. – М.: Машиностроение. –248с.

Якимов А.В., (1984), *Абразивно-алмазная обработка фасонных поверхностей*. – М.: Машиностроение. –312с.

Якимов А.В., Ларшин В.П., Скляр А.М., (1986), "Влияние формы поверхности обрабатываемой детали на температуру при шлифовании". – *Сверхтвердые материалы*, №4, с.38-43.

Abrams, S.L., Bardis, L., Chryssostomidis, C., Patrikalakis, N.M., Tuohy, S.T., Wolter, F.-E., and Zhou, J., (1995), "The Geometric Modeling and Interrogation System Praxiteles", *Journal of Ship Production*, Vol. 11, No. 2, May 1995, pp. 117-132.

Akivis, M.A., and Goldberg, V.V., (1972), *An Introduction to Linear Algebre and Tensors*, New York, Dover.

Amirouche, F.M.L., (1993), *Computer-Aided Design and Manufacturing*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 538p.

Anderson, R.K.E., (1993), "Surfaces with Prescribed Curvature. 1", *Computer-Aided Geometric Design*, Vol.10, pp.431-452.

Astakhov, V.P., (1999) *Metal Cutting Mechanics*, CRC Press, Inc., 297p.

Banchoff, T., Gaffney, T, & McCrory, C., (1982), *Cusps of Gauss Mapping*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melburne, 89p.

Barnhill, R.E., and Riesenfeld, R.F., (1974), *Computer-Aided Geometric Design*, Academic Press, NY.

Beckenbach, E.F., (1967), "Inequalities in the Differential Geometry of Surfaces", in Shisha, O. (ed.) *Inequalities*, New York: Academic Press.

Bertoline, G.R., Wiebe, E.N., Miller, C.L., Nasman, L.O., (1996), "Fundamentals of Graphics Communication", *IRWIN*, 628p.

Besant, C.B., and Lui, C.W., (1986), *Computer-Aided Design and Manufacture*, Ellis Horwood, Chichester.

Bezier, P.E., (1970), *Emploi les Machines a Commande Numirique.* – Paris, Massonet Cie., p.456.

Bezier, P., (1972), *Numerical Control: Mathematics and Applications*, trans. by A.R. Forrest and Anne F. Pankhurst. London: John Wiley & Sons, London, 240p.

Bezier, P., (1986), *The Mathematical Basis of the UNISURF CAD System*, London, Butterworths.

Bezier, P.E., (1973), *Uniserf System.* – Proc. of IFIP-IFAC Conf. PROLOMAT-73, pp.417-42.

Bliko, I., Kowerich, S., and Paulik, P., (1998), "Experience from a Quantum Improvement in Turbine Manufacturing", in *Machining Impossible Shapes*, IFIP TC5 International Conference on Sculptured Surface Machining (SSM'98), November 9-11, 1998, Chrysler Technology Center, Michigan, USA, Edited by G.J. Olling, B.K. Choi, R.B. Jerard, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1998, pp.8-23.

Boltyanskii, V.G., (1964), *Envelopes*, McMillan Co., NY, 76p.

Boogert, R.M., Kals, H.J.J. and van Houten, F.J.A.M., (1996), "Tool Path and Cutting Technology in Computer-Aided Process Planning", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 11, No. 3, pp.186-197.

Boothroyd, G., and Knight, W.A., (1989) *Fundamentals of Machining and Machine Tools*, 2nd ed., Marcel Dekker, NY.

Bronshtein, I.N., Semendyayev, K.A., (1985), *Handbook of Mathemetics*, English translation edited by K.A.Hirsch, Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, Toronto, London, Melburne, 973p.

Bruce, J.W., and Giblin, P.J., (1984), *Curves and Singularities*, Cambridge University Press, Cambridge.

Burke, W.L., (1985), *Applied Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge.

Calladine, C.R., (1983), *Theory of Shell Structure*, Cambridge University Press.

Chao-Hwa Chang, Melkanoff, M.M., (1989), *NC Machine Programming and Software Design*, Prentice Hall, 589p.

Chen, C.-H., (1997), "Conjugation Form of Motion Representation and its Conversation Formulas", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 32, No 6, pp.765-774.

Chen, H.H., and Marshek, K.M., (1988), "Effect of Clearance and Material Property of Contact Pressure in Two-Dimensional Conforming Cylinders", *Mechanisms and Machine Theory*, Vol.23, №1, pp.55-62.

Chen, L.L, Chou, S.Y., Woo, T.C., (1993), "Separating and Intersecting Spherical Polygons: Computing Machinability on Three-, Four-, and Five-Axis Numerically Controlled Machines", *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 12, No. 4, October, pp.305-326.

Chen, L.L., Chou, S.Y., and Woo, T.C., (1995), "Partial Visibility for Selecting a Parting Direction in Mold and Die Design", *J. Manuf. Syst.*, Vol. 14, No 5, pp.319-330.

Chen, L.L., and Woo, T.C., (1992), "Computational Geometry on the Sphere with Application to Automated Machining", *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 114, pp.288-295.

Choi, B.K., (1991), *Surface Modeling for CAD/CAM*, Elsevier, 389p.

Choi, B.K., (1992), *ARMA Model Identification*, Springer-Verlag, NY, 200p.

Choi, B.K., Jerard, R.B. (1998), *Sculptured Surface Machining. Theory and Application*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 368p.

Chou, J.-J., Yang, D.C.H., (1991), "Command Generation for Three-Axis CNC Machining", *ASME Journal of Engineering for Industry*, August, Vol.113, pp.305-310.

Chou, J.-J., Yang, D.C.H., (1992), "On the Generation of Coordinated Motion of Five-Axis CNC/CMM Machines", *ASME Journal of Engineering for Industry*, February, Vol.114, pp.15-22.

Clar, L., and Hart, J.A., (1980), *Calculus with Analytic Geometry for the Technologies*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Denavit, J. and Hartenberg, R.S., (1955), "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 77, pp. 215-221. (Manuscript received by ASME Applied Mechanics Division, December 14, 1953, paper №54-A-34).

Dhande, S.G., Karunakaran, K.P., Misra, B.K., (1995), "Geometric Modeling of Manufacturing Processes Using Symbolic and Computational Conjugate Geometry", *ASME Journal of Engineering for Industry*, August, Vol. 117, pp.288-296.

Dinauer, W.R., Duffie, N.A., Philpott, M.L., (1994), "Error Compensation Algorithm for Sculptured Surfaces Production", *ASME Journal of Engineering for Industry*, May, Vol.116, pp.144-152.

doCarmo, M.P., (1976), *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 503p.

Dooner, D.B., Seireg, A.A., (1995), *The Kinematic Geometry of Gearing. A Concurrent Engineering Approach*, John Wiley & Sons, Inc., NY, 450p.

Dong, Z., Li, H., Vickers, G.W., (1993), "Optimal Rough Machining of Sculptured Parts on a CNC Milling Machine", *ASME Journal of Engineering for Industry*, November, Vol.115, pp.424-431.

Eisenhart, L.P., (1909), *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, London, Dover Publications, Inc., New York, reprint 1960, 474p.

Elber, G., Cohen, E., (1993), "Second-Order Surface Analysis Using Hybrid Symbolic and Numeric Operators", *ACM Transactions on Graphics* , Vol. 12, No. 2, April, pp. 160-178.

Farin, G., (1990), *Curves and Surfaces for Computer Aided Design. A Practical Guide*, Academic Press, 444p.

Faux, L.D., Pratt, M.J., (1987), *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood Limited Publishers, Chichester, John Wiley & Sons, NY, 331p.

Fisher, G. (Ed.), (1986): *Mathematical Models*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunachweig/Wiesbaden.

Flanders, H., (1963), *Differential Forms*, Academic Press, New York.

Flaquer, J., Garate, G., Pargade, M., (1992), "Envelopes of Moving Quadric Surface", *Computer-Aided Geometric Design*, Vol.9, pp.299-312.

Foley, J.D., Van Dam, A., (1982), *Foundations of Interactive Computer Graphics* , Addison-Wesley Publiching Company, 664p.

Forrest, A.R., (1971), *Computational Geometry*, Proc. Roy. Soc., London, Vol. A321, pp.187-195.

Forsyth, A.R., (1912), *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Cambridge: at the University Press, 525p.

Fuller, L.E., (1962), *Basic Matrix Theory*, Englewood Cliffs, NJ, 245p.

Fundamental Issues in Machining, (1990) PED-Vol.43, Edited by B.E. Klamecki and K.J. Weinmann, ASME, United Engineering Center, N.Y., 346p.

Fussel, B.K., Shrinivasan, K., (1989), "An Investigation of the End Milling Process Under Varying Machining Conditions", *ASME Journal of Engineering for Industry*, February, Vol.111, pp.27-36.

Fussel, B.K., Shrinivasan, K., (1989), "On-Line Identefication of End Milling Process Parameters", *ASME Journal of Engineering for Industry*, November, Vol.111, pp.322-330.

Gan, J.G., Woo, T.C., and Tang, K., (1994), "Spherical Maps: their Construction, Properties, and Approximation", *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 116, pp.357-363.

Gasson, P.C., (1983), *Geometry of Spatial Forms*, Ellis Horwood, Chichester, 601p.

Gauss, K.-F., (1828), *Disquisitions Generales Circa Superficies Curvas*, Gottingen, 1828. (English translation: *General Investigation of Curved Surfaces*, by J.C.Morehead & A.M.Hiltebeitel, Princeton, 1902; reprinted with introduction by Courant, Raven Press, Hewlett, New York, 1965, 119p.).

Geometry of Active Parts of Cutting Tools – General Terms, Reference Systems, Tool and Working Angles ISO/DIS 3002, 1997.

Geotz, A., (1970), *Introduction to Differential Geometry*, Addison-Wesley, Reading.

Giutsi E., (1978), "On the Equation of Surfaces of Prescribed Mean Curvature", *Inventiones Mathematicae*, Vol.46, pp.111-137.

Graphic Gems, (1990) Edited by Glassner A.S., Xerox Palo Alto Research Center, Palo Alto, California, Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, Boston, 834p.

Guggenheimer, H.W., (1963), *Differential Geometry*, McGraw-Hill, New York.

Gupta, P., Janardan, R., Majhi, J., and Woo, T.C., (1996), "Efficient Geometric Algorithm for Workpiece Orien-tation in 4- and 5-Axis Machining", *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No 8, pp.577-587.

Gupta, S.K.,Tian, Q., Weiss, L., (1998), "Finding Near-Optimal Build Orientations for Shape Deposition Manufacturing", in *Machining Impossible Shapes*, IFIP TC5 International Conference on Sculptured Surface Machining (SSM'98), November 9-11, Chrysler Technology Center, Michigan, USA, Edited by G.J. Olling, B.K. Choi, R.B. Jerard, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1998, pp.208-216.

Gutkowski, L.J., Kinzel, G.L., (1995), "Kinematic Transformation Matrices for 3D Surface Contact Joints", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 117, June, pp.278-285.

Habib, A.W., and Goldman, R.N., (1996), "Theories of Contact Specified by Connection Matrices", *Computer-Aided Geometric Design*, Vol. 13, pp.905-929.

Haigh, M.J., (1985), *An Introduction to Computer-Aided Design and Manufacture*, Blackwell Scientific Publications, Oxford.

Han, Z., Yang, D., (1998), "Optimal Tool Selection for Interference-Free Sculptured Surface Machining", in *Machining Impossible Shapes*, IFIP TC5 International Conference on Sculptured Surface Machining (SSM'98), November 9-11, 1998, Chrysler Technology Center, Michigan, USA, Edited by G.J. Olling, B.K. Choi, R.B. Jerard, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, pp.247-262.

Held, M., (1991), *On the Computational Geometry of Pocket Machining*, Springer-Verlag.

Hohn, F.E., (1973), *Elementary Matrix Algebra*, 3rd ed., McMillan, NY.

Hopf, H., (1955 -?), *Lectures on Differential Geometry in the Large*, 155p. (Typewritten, Copy: The Library of Brown Universirty, USA).

Hu, Y.N., Tse, W.C., Chen, Y.H., Zhou, Z.D., (1998), "Tool-Path Planning for Rough Machining of a Cavity by Layer-Shape Analysis", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 14, No. 5, pp.321-329.

Hui, L., Yong, L., Haiqing, G., Bo, L.,Jiguo, Z., (1998), "A Layered 5-Axis Machining Method", in *Machining Impossible Shapes*, IFIP TC5 International Conference on Sculptured Surface Machining (SSM'98), November 9-11, 1998, Chrysler Technology Center, Michigan, USA, Edited by G.J. Olling, B.K. Choi, R.B. Jerard, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, pp.217-224.

Hunt, K.H., *Kinematic Geometry of Mechanisms*, (1978) Clarendon Press, Oxford, 465p.

Hwang, J.S., (1992), "Interference-Free Tool-Path Generation in NC Machining if Parametric Compound Surfaces", *Computer-Aided Design*, Vol. 24, No. 12, December pp.667-676.

Ip, W.L.R., Loftus, M., (1996), "Adaptive and Compensation Methods in Free-Form Surfaces Assessment", *IMechI Journal of Engineering Manufacture, Proceedings, Part B*, Vol.210, NoB2, pp.135-145.

Ismail, F., Elbestawi, M.A., Du, R., Urbasik, K., (1993), "Generation of Milled Surfaces Including Tool Dynamics and Wear", *ASME Journal of Engineering for Industry*, August, Vol.115, pp.245-252.

Jeffreys, H., (1961), *Cartesian Tensors*, Cambridge, University Press, 93p.

Kedem, G., and Hammond, S.W., (1985), "The Point Classifier: A VLSI Processor for Displaying Complex Two Dimensional Objects", In: *Proceedings of the 1985 Chapel Hill Conference on VLSI"*, Computer Science Press, Rockville, MD., pp.377-392.

Kells, L.M., Kern, W.F., Bland, J.R., (1951), *Plane and Spherical Trigonometry*, 3rd ed., McGrow Hill, NY, 318p.

Koenderink, J.J., (1990), *Solid Shape*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 699p.

Kondo, M., Iwata, K., and Saito, K., (1995), "Generation of Tool Paths for a Die Sinking Based on "Skewed Cube Modeler"", *International Journal of Japan Society of Precision Engineers*, Vol. 29, No. 3 (Sept. 1995), pp.263-268.

Kovacic, I., (1988), "The Chatter Vibrations in Metal Cutting – Theoretical Approach", University of Nis, The scientific journal *Facta Universitatis*, Series: *Mechanical Engineering*, Vol. 1, No.5, pp.581593.

Kreyszig, E., (1959), *Differential Geometry*, University of Toronto Press, Toronto, 352p.

Lee, T.M.P., (1971), "Analysis of an Efficient Homogeneous Tensor Representation of Surfaces for Computer Display", in: *Advance Computer Graphics*, Edited by Parslow, R.D., and Grenn, R.E., Plenum Press, NY, pp.1119-1141.

Lee, Y.-S., (1997), "Five-Axis Toolpath Generation", p.74 in: Hallum, D.L.: *Predicting the Metalcutting Process*, NFMRC XXV Report, Manufacturing Engineering, July, pp.68-74.

Lentz, D.H., Sowerby, R., (1993), "Feature Extraction of Concave and Convex Regions and their Intersection", *Computer-Aided Design*, Vol.25, No. 7, July, pp.421-437.

Ligun, A.A., Shumeiko, A.A., Radzevich, S.P., Goodman, E.D., (1997), "Asymptotically Optimal Disposition of Tangent Points for Approximation of Smooth Convex Surfaces by Polygonal Functions", *Computer-Aided Geometric Design*, Vol. 14, pp. 533-546.

Ling, R.-S., Kren, Y., (1996), "Efficient Tool-Path Planning for Machining Free-Form Surfaces", *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 118, February, pp.20-28.

Litvin, F.L., (1989), *Theory of Gearing*, NASA Reference Publication 1212, AVSCOM Technical Report, 88-C-035, 470p.

Litvin, F.L., (1994), *Gear Geometry and Applied Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 724p.

Lowe, P.G., (1980), *A Note on Surface Geometry with Special Reference to Twist*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.87, pp.481-487.

Lowe, P.G., (1982), *Basic Principles of Plate Theory*, Surrey University.

Machining Impossible Shapes, (1998), IFIP TC5 International Conference on Sculptured Surface Machining (SSM'98), November 9-11, 1998, Chrysler Technology Center, Michigan, USA, Edited by G.J. Olling, B.K. Choi, R.B. Jerard, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1998, 386p.

Maekawa, T., (1996), "Computation of Shortest Paths on Free-Form Parametric Surface", *ASME Journal of Mechanical Design*, December, Vol.118, pp.499-508.

Maekawa, T., Patrikalakis, N., (1994), "Interrogation of Differential Geometry Properties for Design and Manufacture", *Visual Computer*, Vol.10: 216-237.

Marciniak, K., (1987), "Influence of Surface Shape on Admissible Tool Positions in 5-axis Milling", *Computer-Aided Design*, Vol.19, №5, June, pp.233-236.

Marciniak, K., (1991), *Geometric Modeling for Numerically Controlled Machining*, Oxford University Press, N.Y., 245p.

Marciniak, K., (1992), *Geometric Modeling for Numerically Controlled Machining*, Oxford University Press, N.Y., 416p.

Mathematics of Surfaces, (1984), Conference Proceedings, Oxford University Press, Oxford, 1986, 282p.

Merchant, M. E., (1944), "Basic Mechanics of Metal-Cutting Process", *J. Appl. Mech*, Vol. 15, September.

Merchant, M.E., (1945), "Mechanics of the Metal Cutting Process II, Plasticity Conditions in Orthogonal Cutting", *J. Appl. Mech*, Vol. 16, June.

Minyang, Y., and Heeduck, (1991), "The Prediction of Cutting Force in Ball-End Milling", *International Journa l of Machine Tool & Manufacture: Design, Research and Application (formerly: Machine Tool Design & Research)*, Vol.31, №1, pp.45-54.

Miron, R., (1958), *"Observatii a Supra Unor Formule din Geometria Varietatilor Neonolonome* E_3^2 *". – Bulletinul Institutuini Politechnic din Iasi*.

Mirtich, B., (1998), *"V-Clip: Fast and Robust Polyhedral Collision Detection"*, *ACM Transactions on Graphics*, Vol.17, No.3, July, pp.177-208.

Montaldi, J.A., (1986), "Surfaces in 3-Space and their Contact with Circles", *J.Diff.Geom*. Vol.23, pp.109-126.

Mortenson, M., (1990), *Computer Graphics Handbook*, Industrial Press Inc., New York, 259p.
Mortenson, M., (1985), *Geometric Modeling*, John Wiley & Sons, NY, 763p.

Mortenson, M., (1995), *Geometric Transformations*, Industrial Press Inc., New York, 357p.

Mortenson, M., (1999), *Mathematics for Computer Graphics Application*, 2nd edition, Industrial Press Inc., New York, 354p.

Murray, R.M., Zexiang, L., Sastry, S.S., (1994) *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, Boca Raton, 456p.

Nutbourn, A.W., (1986), "A Circle Diagram for Local Differential Geometry". In J.Gregory (ed.) *Mathematics of Surfaces*, Conference Proceedings, Institute of Mathematics and its Application, 1984, Oxford University Press, Oxford.

Nutbourn, A.W., and Martin, R.R., (1988), *Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design*, Volume 1: Foundations, Ellis Horwood Ltd. Publishers, Chichester, 282p.

Olesten, N.O., (1977), *Numerical Control*, Wiley-Interscience, NY, 646p.

Oliver, J.H., (1992), "Efficient Intersection of Surface Normals with Milling Tool Swept Volume for Discrete Three-Axis NC Verification", *ASME Journal of Mechanical Design*, June, Vol.114, pp.283-287.

Oliver, J.H., Wysocki, D.A., Goodman, E.D., (1993), "Gouge Detection Algorithm for Sculptured Surfaces NC Generation", *ASME Journal of Engineering for Industry*, February, Vol.115, pp.139-144.

Olivier, T., (1842), *Theorie Geometrique des Engrenages*, Paris.

O'Neil, B., (1966), *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York and London, 411p.

Oxley, P.L.B., (1989), *Mechanics of Machining. An Analytical Approach to Assessing Machinability*, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 242p.

Paraidammou, S.G., and Kiritsis, D., (1985), "An Application of Bertrand Curves and Surfaces to CAD/CAM", *Computer-Aided Design*, Vol. 17, No.8, pp.348-352.

Paul, P.R., (1981), *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control. The Computer Control of Robot Manipulators*, The M I T Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, (Second Printing, 1982), 279p.

Pegna, J., Wolter, F.-E., (1992), "Geometrical Criteria to Guarantee Curvature Continuity of Blend Surfaces", *ASME Journal Mechanical Design*, March, Vol.114, pp.201-210.

Philpott, M.L., Mitchell, S.E., Tobolsky, J.F., Green, P.A., (1995), "Simultanious In-Process Inspection of Surface Form and Roughness of Machined Sculptured Surfaces", *ASME Journal of Engineering for Industry*, August, Vol.117, pp.430-438.

Plucker, J., (1865), *On a New Geometry of Space*, Phil. Trans. R. Soc. London, Vol. 155, pp.725-791.

Potter, M.C., (1978), *Mathematical Methods in the Physical Science*, Prentice Hall, Inglewood Cliffs, NJ, 466p.

Pottmann, H., Wallner, J., Glaeser, G., Ravani, B., (1998), *Geometric Criteria for Gouge-Free Three-Axis Milling of Sculptured Surfaces*, Technical Report No.47, January 1998, Technische Universitat Wien, Institut fur Geometrie, Wien, Austria, 11p.

Radzevich, S.P., (1998), "Basic Conditions of Proper Part Surface Generating While Machining on Conventional Machine Tool", University of Niš, The scientific journal *Facta Universitatis*, Series: *Mechanical Engineering*, Vol.1, No.6, pp. 637–651.

Radzevich, S.P. (2002), "Conditions of Proper Sculptured Surface Machining", *Computer-Aided Design*, Vol. 34, № 10, September, pp.727-740.

Radzevich, S.P., Goodman, E.D., (1998), "Efficiency of Multi-Axis NC Machining of Sculptured Part Surfaces", in *Machining Impossible Shapes*, IFIP TC5 International Conference on Sculptured Surface Machining (SSM'98), November 9-11, 1998, Chrysler Technology Center, Michigan, USA, Edited by G.J. Olling, B.K. Choi, R.B. Jerard, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, pp.42-58.

Radzevich, S.P., Goodman, E.D., (2002), "Computation of Optimal Workpiece Orientation for Multi-Axis *NC* Machining of Sculptured Part Surfaces", ASME *J. of Mechanical Design*, June, Vol.124, №2, pp.201-202.

Radzevich, S.P., (2000), "The New Approach to Design of the Shaped Cutting Tool for Multi-Axis *NC* Machining of Sculptured Part Surface", In Proceidings of the Third International Symposim: *Tools and Methods of Competitive Engineering. TMCE'2000*, April 18-21, 2000, Delft, The Netherlands, 2000, pp.675-689.

Rao, N., Bedi, S., Buchal, R., (1996), "Implementation of the Principle-Axis Method for Machining of Complex Surfaces", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 11, No. 4, pp.249-257.

Rogers, D.F., Adams, J.A., (1976), *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw-Hill Book Company, NY, 239p.

Sahoo, K.C., Meng, C.-H., (1991), "Location of 3-D Objects Having Complex Sculptured Surfaces Using Tactile Sensing and Surface Description", *ASME Journal of Engineering for Industry*, February, Vol.113, pp.85-92.

Sakamoto, S., and Inasaki, I., (1993), "Analysis of Generating Motion for Five Axis Machining Centers", *Japanese Society of Mechanical Engineers*, Vol. 59 (561), pp.1553-1559.

Sarma, R., Dutta, D., (1997), "The Geometry and Generation of NC Tool Path", *ASME Journal of Mechanical Design*, June, Vol.119, pp.253-258.

Seireg, A.A., Rodriguez, J., (1997) *Optimizing the Shape of Mechanical Elements and Structures*, Marcel Dekker, Inc., NY, 576p.

Shah, J., and Mantyla, M., (1995), *Parametric and Feature -Based CAD/CAM: Concepts, Techniques and Applications*, John Wiley & Sons, NY.

Shaw, M.C., (1984), *Metal Cutting Principles*, Clarendon Press, Oxford, 594p.

Shi Han-min, (1982), "A New Method for Analyzing and Calculating Angles on Cutting Tools", *International Journal of Machine Tool & Manufacture: Design, Research and Application (formerly: Machine Tool Design & Research)*, Vol.22, №3, pp.177-196.

Stabler, G.V., (1951), "The Fundamental Geometry of Cutting Tools", *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 165, p.14-21.

Stoker, J.J., (1969), *Differential Geometry*. – Wiley-Interscience, New York. –404p.

Stout, K.J., (1988), "Engineering Surfaces – a Philosophy of Manufacture (a Proposal for Good Manufacturing Practice)", *Journal of Engineering Manufacture*, Vol. 212, No. B3, pp.169-174.

Strang, G., (1986), *Introduction to Applied Mathematics*, Wellesly-Cambridge Press, Massachusetts, 758p.

Struik, D.J., (1961), *Lectures on Classical Differential Geometry*, 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Massachusetts, 232p.

Suh, Y.-S., Lee, K., (1990), "*NC* Milling Tool Path Generation for Arbitrary Pockets Defined by Sculptured Surfaces", *Computer-Aided Design*, Vol.22, No.5, June, pp.273-283.

Suresh, K., Yang, D.C.H., (1994), "Constant Scallop-Hight Machining of Free-Form Surfaces", *ASME Journal for Engineering for Industry*, May, Vol.116, pp.253-259.

Sutherland, O.E., (1974), "Three Dimensional Data Input by Tablet", *Proc. IEEE*, Vol. 62, 2, April, pp.453-461.

Takahashi, K., Ito, N., (1986), "Third-Order Surface Application to Determine the Tooth Contact Pattern of Hypoid Gears", *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation Design*, June, Vol.108, pp.263-269.

Tang, K., Woo, T.C., and Gan, J.G., (1992), "Maximum Intersection of Spherical Polygons and Workpiece Orientation for 4- and 5-Axis Machining", *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 114, pp.477-485.0

TCA: Tooth Contact Analysis. Formulas and Calculation Procedure . (1964), The Gleason Works, Rochester, NY.

Todd, P.H., McLeod, R..J.Y., (1986), "Numerical Estimation of the Curvature of Surfaces", *Computer-Aided Design*, Vol. 18, No. 1, January/February, pp. 33-37.

Trudinger, N.S., (1990), "A Priory Bounds and Necessary Conditions for Solvability of Prescribed Curvature Equations", *Manuscripta Mathematica,* Vol.67, pp.99-117.

Trudinger, N.S., and Urbas, J.I.E., (1983), "The Dirichlet Problem for the Equation of Prescribed Gauss Curvature", *Bulletin of Australian Mathematical Society*, Vol.28, pp.217-231.

Understanding Tooth Contact Analysis. (1981), The Gleason Works, Rochester, NY.

Urbas, J.I.E., (1984), "The Equation of Prescribed Gauss Curvature without Boundary Conditions", *J. Differential Geometry*, Vol.20, pp.311-327.

Vaisman, I., (195 -?), *Unele Observatii Privind Suprafetele si Varietatile Neonolonome din* S_3 *Euclidian*. – Academia R.P.R., Filila Iasi, Studii si Cercetari Stiintifice, Mathematica, Vol.10, (1).

Waller, J., Glaeser, G., Pottmann, H., (1998), "Geometric Contributions to 3-Axis Milling of Sculptured Surfaces", in *Machining Impossible Shapes*, IFIP TC5 International Conference on Sculptured Surface Machining (SSM'98), November 9-11, 1998, Chrysler Technology Center, Michigan, USA, Edited by G.J. Olling, B.K. Choi, R.B. Jerard, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, pp.33-41.

Willmore, T.J., (1959), *An Introduction to Differential Geometry*, Oxford University Press, Amen House, London E.C.4, 317p.

Woo, T.C., (1994), "Visibility Maps and Spherical Algorithms", *Computer-Aided Design*, Vol. 26, No 1, pp.6-16.

Woodsford, P.A., (1971), "Mathematical Methods in Computer Graphics – A Survey", *Gesselschaft fur Informatike*, Vol.5, Symposium on Computer Graphics, Berlin, Oct. 1971.

Wu, D.R., Luo, J.S., (1992), *A Geometric Theory of Conjugate Tooth Surfaces*, World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 192p.

Wu, D.W., (1986), "Governing Equations of the Shear Angle Oscillation in Dynamic Orthogonal Cutting", *ASME Journal of Engineering for Industry*, November, Vol.108, pp.280-287.

Yamaguchi, F., (1988), *Curves and Surfaces in Computer Aided Design*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 378p.

Ye, X., (1996), "The Gaussian and Mean Curvature Criteria for Curvature Continuity Between Surfaces", *Computer-Aided Geometric Design*, Vol.13, №6, August, pp.549-567.

You, C.-F., Chu, C.-H., (1997), "Tool-Path Verification in Five-Axis Machining of Sculptured Surfaces", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 13, No. 4, pp.248-255.

Алфавитный указатель

А

Аксоид, 135, 137, 140,
- детали, 136, 138.
- инструмента, 136, 138.

Амироуч, Ф. (***Amirouch,*** *F.M.L.*), 13.

APT инструмент, 308.

Б

Безье, П.Е., (***Bezier,*** *P.E.*), 13.

Бонне, Пьер Оссиан (***Bonnet***, *Pierre Ossian*), **60**, 261.

Булиган, Жорж Луи (***Bouligand***, *Georges Louios*), **261**.

В

Вейнгартен, Юлиус (***Weingarten, J.***), **34**, 273.

Вектор
- Дарбу, 492, 493.
- кручения поверхности, 43, 44.
- фиктивных перемещений, 508.
- - ковариантные компоненты, 508.
- - контравариантные компоненты, 508.

Векторный элемент
- - припуска, 439.
- - площади, 439, 441, 442, 444, 445.

Векторы
- компланарные, 341, 358.

Взаимоогибание поверхностей, 268, 290, 295.

Винтовая зубчатая передача, 485.

Виртуальные перемещения, 119, 120.

Г

Гаусс, Карл-Фридрих (***Gauss***, *Karl-Friedrich*), **31**.

Геликоид, 284.

Геометрически точный инструмент, 325.

Геометрические параметры режущей кромки инструмента, 148, 323,
- кинематические, 323, 347, 515.
- статические, 323, 336, 347.

Геометрия касания поверхностей, 191-193, 199, 216, 250, 297, 301, 315, 318-321.

Главные направления на поверхности, 107, 200, 273, 274, 545, 549, 551.

Глубина резания, 360, 364.

Грановский Г.И., 9, 13.

Д

Дарбу, Жан Гастон (***Darboux***, *Jean Gaston*), **68**.

Движение
- главное, 349.
- двухпараметрическое, 319.
- многопараметрическое, 319, 324.
- однопараметрическое, 319.
- ориентирования инструмента, **126**, 127-130, 347, 453, 456, 467, 469, 473, 483.
- - второго рода, **126**, 127, 128, 348, 455, 457, 459, 461, 462, 464, 465, 466, 470, 474.
- - комбинированное, 127.
- - конструктивное, 129.
- - первого рода, **126**, 127, 348, 455, 468, 470, 472.
- - сингулярное, 127.
- подачи, 115, **124**, 133, 347-349.
- резания, 115, 124, 133, 347, 349.
- следящее
- - дискретное, 120, 124.
- - непрерывное, 120, 123.
- транспортное, 115.
- установочное, 115.
- формообразования, 115, 120, **124**, 126, 347, 453, 454, 456, 465, 475, 477, 478, 480, 485, 486, 488, 489, 490, 515, 543, 551.
- холостых ходов, 115, 143.

Двойное векторное произведение, 351.

Деривационные
- дифференциальные уравнения, 280, 281.
- формулы Вейнгартена (или *Гаусса-Вейнгартена*), 78, 278, 408.

Диаграммы
- векторные, локального участка поверхности детали, 89, 91, 92.
- круговые
- - локального участка поверхности детали, 88, 89, 92, 93, 96-98, 100, 103, 104.
- - режущего клина инструмента, 345.
- Эйлера-Венна, 379.
Дискриминант
- второй основной квадратичной формы поверхности, 50.
- линейного элемента поверхности, 41, 47, 50.
- первого порядка, 406.
Дифференциальная форма Гаусса
- вторая основная, (см. *вторая основная квадратичная форма*).
- первая основная (см. *первая основная квадратичная форма*).
Дифференциальное уравнение изогональных траекторий, 309, 311, 329, 460.
Допуск на точность формообразования, 298.
Дюпен, Франсуа Пьер-Шарль (***Dupin, F.P.-C***), **109**.

Ж

Жермен, Софи (***Germain***, *Sophie*), **88**.

З

Задача
- оптимизации, 599.
- проектирования инструмента, 269.
- профилирования инструмента, 269, 314, 315, 321, 322, 325, 331.
- синтеза наивыгоднейшего формообразования поверхности детали, 14, 16, 21, 24, 25, 26, 32, 34, 69, 87, 133, 139, 150, 191, 192, 200, 206, 224, 246, 252, 260, 453, 454, 458, 469, 472, 474, 475, 476, 477, 478, 482, 483, 484, 485, 492, 493, 495, 499, 504, 506, 511, 512, 599.
Закон схода стружки, 361.
Закрытая сторона поверхности детали, 37, 294.
Замечательная теорема (*theorema egregium*) Гаусса, 60, 277.
Замкнутый цикл последовательных преобразований координат, 192, 458, 544.
Запрещенные зоны, 397.
Зацепление
- приближенное, 560.
- станочное, 484, 485.
Зона обработки, 418.

И

Изогональные кривые, 309, 325.
Индекс формы поверхности, 99.
Индикатриса
- антипоидальная, 427.
- зазоров, 248.
- кривизны
- - квадратичная, 220, 221, **222**.
- - поверхности (индикатриса Дюпена), 101, 103, 109, 111, 112, 210, 211, 212, 213, **214**, 215, 216, 217, 224, 226, 250, 252, 253-255, 310, 312.
- конформности, 15, **224**, 225, 226, 227, 228, 245, 246, 247, 249, 250, 252, 253, 254, 255, 257, 258, 259, 260, 264, 315, 373, 374, 399, 401, 452, 454, 455, 456, 462, 463, 466, 467, 469, 471, 472, 474, 475, 478, 480, 484, 485, 533.
- нормального радиуса кривизны, 214, 451, 452, 463.
- обрабатываемости, 424, 425, 426, 427.
- - локальная, 427.
- расширенная антипоидальная сферическая, 422, 429.
- расширенная сферическая, 421.
- собственно кривизны поверхности детали (инструмента), 214.
- сферическая, 403, 410, 414, 421, 424, 427, 429.
Интерференция 374, 375, 403.
- второго рода, 369, 384.
- глобальная, 377, 386.
- локальная, 384.
- первого рода, 367.
- третьего рода, 378, 379.
Искривленность поверхности, 99.
Исходная инструментальная поверхность, 21, **268**, 269, 277, 279, 284-286, 288, 295-297, 305.
Исходное инструментальное тело, 30, 334, 440.

К

Канонический репер, 68.
Касание
- “изнутри”, 294.
- квази-линейное, **264**,265, 266, 450.
- квази-поверхностное, 450,
- - второго рода, **264**, 265, 266.
- - первого рода, **264,** 265, 266.
- линейное, 265.
- локально-линейное, **261**, 265, 266, 376, 377, 450.
- локально-поверхностное, **263**, 265, 266, 376, 377, 450,
- - второго рода 376, 377, 450.
- - первого рода, **262**, 265, 266, 376, 377, 450.

- локально-экстремальное, 264, 265, 376, 377, 397.
- поверхностное, 265.
- собственно линейное, 262, 266.
- собственно поверхностное, 263, 266.
- собственно точечное, 261, 265, 266.

Катеноид, 284.
Качение со скольжением, 456, 457, 463, 466, 470.
Квадратичная форма, 511,
- вторая основная, 33, 44, 47, 53, 56, 59, 60, 77, 108, 176, 310, 315, 409.
- главные оси, 512.
- канонический вид, 511, 512.
- матрица, 511.
- первая основная, 30-32, 39-42, 52, 53, 55, 58, 60, 77, 79, 81, 175, 214, 310, 315, 326, 409.
- третья, 176, 409.
- четвертая, 176.

Квадрики, 273, 275,
- соприкасающиеся, 206.

Кинематика
- резания, 133, 347.
- формообразования, 24, 116, 130, 134, 143, 285, 308, 314, 318, 319, 321, 347, 380, 462, 465, 467, 471, 472, 479, 484, 496, 516, 544,
- - гибкая, 143, 269, 295, 315, 319, 324, 330, 382, 428.
- - жесткая, 129, 133, 140, 143, 144, 148, 257, 275, 285, 295, 319, 320, 330, 350, 414, 434, 469, 478, 492.

Кинематическая схема
- профилирования, **134**, 296.
- резания, 133, 143-149.
- собственно формообразования, **134**.
- формообразования, 116, 133, **134**, 135, 138-140, 149, 267, 295-299, 301, 303, 314, 472, 473,
- - канонического вида, **139**.

Классификация поверхностей, 87, 88,
Кодацци, Дельфино (***Codazzi***, *Delfino*), **60**.
Кодиагонали матрицы, 153.
Коноид Плюккера, 386.
Контингенция поверхности, 29.
Конформные свойства поверхностей, 223.
Координатные линии на поверхности, 225.
Координаты
- на поверхности
- - внутренние (см. *криволинейные координаты на поверхности*).
- - Гауссовы (см. *криволинейные координаты на поверхности*).
- - криволинейные, 51.
- - конформные (изотермические), 199.
- - полугеодезические, 199.
- сферические 187, 188.
- цилиндрические, 186, 187.
- Чебышевские, 199.

Координатный угол, 211.
Коэндеринк, Д.Д., (***Koenderink, J.J.***), 13.
Коэффициент интерференции, 496.
Коэффициенты
- второй основной квадратичной формы
- - поверхности, 34, 46, 49, 53, 280, 310, 315.
- - сферического отображения, 406, 408.
- первой основной квадратичной формы
- - поверхности, 32, 34, 40, 42, 49, 52, 79, 81, 278, 280, 310, 315.
- - сферического отображения, 406-408.
- связности (см. *символы Кристоффеля*).

Краевой эффект, 495, 498, 499, 515.
Кривизна поверхности
- абсолютная, 95, 99, 106.
- главная, 92, 99, 105, 107, 209,
- - вторая, 105.
- - первая, 105,
- Гауссова (см. *полная кривизна поверхности*).
- нормальная, 107.
- кривизна, 34, 95, 96, 97, 99, 103, 106, 256, 258, 276, 284, 400, 406, 408.
- приведенная, 208.
- средняя, 95, 96, 99, 103, 106, 276, 284, 400.

Кривые
- технологически просто воспроизводимые, 308.

Кристоффель, Эльвин Бруно (***Christoffel***, *Elwin Bruno*), **61**.
Критерий
- оптимизации, 324.
- эффективности обработки, 431, 449 451, 454, 477-479.

Критическое значение подачи, 447, 448, 455, 481, 533, 535, 543.
Кручение
- геодезической кривой на поверхности, 262.
- поверхности, 92, 93.
- пространственной кривой, 256.
- режущей кромки инструмента, 344, 345.

Л

Лагранж, Жозеф Луи, **43**.
Лашнев С.И., 13, 365.
Лезвие режущего инструмента, 331.
Линейный элемент поверхности (см. *первая основная квадратичная форма*).
Линия
- геодезическая, 500, 501.
- координатная, 545.
- кратчайшего спуска, 528, 529.
- кривизны на поверхности, 256, 489, 490, 504.
- огибающая

- - однопараметрического семейства кривых на плоскости, 286, 287.
- - характеристик на поверхности, 289, 290.
- узлов, 417.
Логарифмическая спираль, 310, 329-331, 491.
Локальная топология поверхности, 14, 43, 191, 216, 221, 314, 384.
Локальные участки поверхности
- возврата, 113, 114.
- гладкие
- - нерегулярные, 112, 113, 114.
- - регулярные, 114,
- - - гиперболические, 94, 104, 109, 384,
- - - - псевдовогнутые, 104, 109, 385.
- - - - псевдовыпуклые, 104, 109, 385.
- - - минимальные, 94, 104, 109, 385.
- - - округления (*омбилические*), 93, 103, 108, 384.
- - - параболические, 94, 103, 104, 108, 384.
- - - уплощения, 384.
- - эллиптические, 94, 103, 108, 384.
- излома, 113, 114.
- изолированные, 113.
- особые, 114.
- простые, 66.
- сингулярные, 66.
- уплощения, 103, 108, 109.
Локальный подход в теории формообразования по-верхностей деталей, 88.
Локсодрома, 326, 328-331.
Люкшин В.С., 13.

M

Майнарди, Анджело, **61**.
Марциняк, К., (***Marciniak, K.***), 13, 365.
Матрица
- диагональная, 153.
- единичная, 154.
- квадратная, 153.
- квазидиагональная, 155.
- квазиматрица, 155.
- квазитреугольная, 155.
- кодиагональная (ленточная), 154.
- контрградиентная, 181.
- матрица-столбец, 153.
- матрица-строка, 153.
- морфологическая, 265.
- нулевая, 154.
- обратная, 157, 158.
- первая основная фундаментальная, (см. *метрический тензор поверхности*).
- присоединенная (*союзная*), 158.
- симметричная, 153.
- транспонированная, 155.
- треугольная, 154.
- фундаментальная, 161.
- Эрмита, 72.
Мелканов, М.М., (***Melkanoff, M.M.***), 13.
Метод
- Лагранжа, 456.
- наименьших квадратов, 542.
- Ньютона, 533.
- подвижного репера, 15.
- половинного деления, 533.
Метрический тензор поверхности, 31, 42,
- второй, 511.
- первый, 508,
- - ковариантные компоненты, 508.
Мёнье, де ла Плас Жан Батист Мари Шарль (***Mensnier***, *de la Place Jean Baptist Merie Charles*), 261, **344**.
Многосвязная область, 429.
Множества
- дизъюнктивные, 378.
- пустые, 378.
Моделирование процесса обработки, 21.
Модель, 21, 273.
Модуль матрицы, 157.
Можаев С.С., 13.
Монж, Гаспар (***Monge***, *Gaspard*), **55**.
Мор, Христиан Отто (***Mohr***, *Christian Otto*), **88**, 104.
Мортенсон, М., (***Mortenson***, *M.M.*), 13.

H

Наивыгоднейшее решение задачи формообразования, 295, 318, 322.
Направление на поверхности
- первое главное, 221.
Направляющие косинусы, 38, 405, 416.
Недорез, 365.
Нормаль к поверхности, 30, 35, 36, 52, 55, 58, 77.
Нормирующий множитель, 38.

O

Обратная задача теории формообразования по-верхностей деталей, 134, 142, 269, 285, 302, 303, 315.
Оккам, Уильям (***Ockam***, *William*), 14.
Окружность
- задних углов, 346.
- передних углов, 345, 346.
Оливье, Теодор (*Olivier, Theodore*), **295**.
Оператор

- качания, 428.
- линейного преобразования, 295.
- обратного преобразования координат, 205.
- отображения, 196.
- переноса системы координат, **150**, 172.
- поворота системы координат, **150**, 172.
- преобразования Эйлера, 416, 417.
- преобразования Эйлера-Крылова, 416, 417.
- прямого преобразования координат, 205.
- результирующего преобразования координат, **151**, 153, 350, 544, 548, 549, 557.
- формы, 34.

Определитель
- Грама, 34, 255.
- матрицы, 157.
- метрического тензора, 400.

Ориентирующие движения инструмента (см. *движение ориентирования инструмента*).

Орт нормали к поверхности, 43, 58, 77, 86, 121, 122.

Основная теорема теории поверхностей (теорема Бонне), 132, 280.

Основное допущение в теории формообразования поверхностей деталей, **22.**

Особые точки семейства кривых, 287.

Остаточный детерминированный регулярный
- микрорельеф, 24, 125, 130, 270, 311, 332, 438, 440, 464, 496, 517, 520, 525, 545, 551.
- субмикрорельеф, 533, 534.

Открытая сторона поверхности детали, 37.

Относительная локальная ориентация поверхностей, 191.

Отображение
- антипоидальное сферическое, 421, 422, 424, 425, 429.
- Вейнгартена (см. *оператор формы*).
- *K*-отображение
- - локальных участков поверхности, 384, 385, 386, 390.
- - многослойное, 389.
- - поверхности, 387-391.
- линейное, 27.
- расширенное антипоидальное сферическое, 422.
- расширенное сферическое, 421.
- $\mathbb{R}$-отображение, 14.
- сферическое
- - Гаусса, 404, 421.
- - ориентированного участка поверхности, 403, 405, 409, 410, 415, 420, 423, 424, 425, 427,
- - - многослойное, 422.
- - - расширенное, 429.

Отсек поверхности, 26, **69**, 70.
- бикубический, 71-73.

П

Параболические кривые, 389.

Параболоид кривизны, 543.

Параметр
- огибания, 296, 303.
- распределения допуска на точность формообразования, 481, 530.

Параметризация поверхности, 27, 504,
- изогональная, 504.
- ортогональная, 504.
- произвольная, 504.

Параметры поверхности
- внутренние, 60.

Перепелица Б.А., 13, 365.

Петерсен, Карл Михайлович, **60**.

Петрухин С.С., 31.

Плоскость
- касательная, 29, 35, 52, 55, 57, 77, 255.
- нормальная секущая, 335, 336, 338.
- обратная, режущего инструмента (*tool back plane*), 335, 337, 349.
- ортогональная, 335, 337.
- основная, 335, 336, 349, 359.
- предполагаемая рабочая, 335, 337.
- рабочая, 349.
- режущего лезвия, 335, 337.
- стружкообразования, 360.
- схода стружки, 361.

Плюккер, Юлиус (***Plucker***, *Julius*), **386**.

Поверхности
- базовые, режущего инструмента, 332.
- взаимоогибаемые, 486.
- динамические, (см. *поверхность сложной формы*).
- допускающие движение "*самих по себе*", 24, 26, 88, 129, **131**, 132, 133, 134, 135, 138, 139, 142, 149, 267, 275, 280, 286, 288, 295, 296, 297, 298, 301, 305, 307, 325, 330, 331, 337, 348, 472.
- объемные, (см. *поверхность сложной формы*).
- параллельные (эквидистантные), 409.
- технических форм, (см. *поверхность сложной формы*).
- технологически удобные (технологически просто воспроизводимые), 305-306, 315, 320-321, 331.
- установочные, режущего инструмента, 332.

Поверхность
- Вейнгартена, 104, 273.
- верхнего предельного отклонения, 85, 86.
- вспомогательная производящая, 295, 298-300.
- детали
- - номинальная, 24, 383.
- - реальная, 24, 383.
- допуска, 85, 86, 383.

- заготовки, 438, 439.
- зазоров, 248.
- заменяющего тора, 520, 521, 538, 540, 543-545, 548, 550, 552, 553, 555, 557.
- зацепления, 268.
- касательных, разворачивающаяся, 394, 395.
- минимальная, 389.
- нижнего предельного отклонения, 85, 86.
- огибающая
- - нормалей, 392.
- - семейства поверхностей, 289, 293, 294, 296, 299, 301, 304, 319-321, 366.
- переходная, 379, 380, 381.
- приведенного радиуса кривизны, 210.
- приведенной кривизны, 206, 207, 250, 253, 372, 373.
- припуска, 483.
- производящая, 285, 305, **306**, 307, 318, 320, 321, 325, 366.
- разворачивающаяся, 393, 406.
- резания, 323, 440, 445, 446, 517.
- свободной формы, (см. *поверхность сложной формы*).
- скульптурная, (см. *поверхность сложной формы*).
- сложная, (см. *поверхность сложной формы*).
- сложной формы, **22**, 24.
- типа "*обезьянье седло*", 113, 211.
- элементарного реза, 525.

Погрешность
- органическая, 325.
- профилирования инструмента, 306, 325.
- формообразования, 298, 449.
- - результирующая, 449, 480, 498, 517, 518, 523, 524, 525, 527, 530, 533, 537, 544, 551, 552, 558.
- - элементарная составляющая, 517-518.

Подвижный репер (см. *подвижный трехгранник*).
Подвижный трехгранник, 78, 226, 488.
Подрез, 365, 379.
Позитивное решение задачи, 295, 315, 318-322.
Позитивный вариант технологии, 12.
Порядок касания поверхностей, 264.
Предельные отклонения, 86,
- верхние, 85.
- нижние, 85.

Предполагаемое направление движения
- главного, 332, 333, 335, 337.
- подачи, 333, 335.

Преобразование
- Лежандра, обратное, 528.
- координат, 152.
- Эйлера, 418.
- Эйлера-Крылова
- - второго рода, 418.
- - первого рода, 418.
- отображающее, 152.

Принцип
- "*бритвы Оккама*", **14.**
- инверсии, 117, 133, 427, 428.
- образования взаимоогибаемых поверхностей, 295, 302.
- - второй (Оливье), 295, 297.
- - первый (Оливье), 295, 301.
- - третий, 302.
- суперпозиции, 421, 544, 552, 558.

Проблема синтеза наивыгоднейших способов обработки, 14, 402.
Программоноситель
- гибкий, 116.
- жесткий, 116, 143.

Производительность
- обработки, 148.
- формообразования, 87, 267, 433, 436.

Пространственно-сложные поверхности, (см. *поверхность сложной формы*).
Прямая задача теории формообразования поверхностей деталей, 134, 142, 269, 302.
Пучок прямых, 309.

Р

Рабочая система, 349.
Радиус кривизны
- поверхности, главный, 105, 219, 251, 273, 310, 312, 343, 384.
- режущей кромки, 342.

Радиус округления режущей кромки, 339, 340, 344, 358.
Разворачиваемость поверхности, 32, 554.
- на плоскость, 554.

Разрешенная область, 384, 387.
Разрешенные секторы, 387, 388, 389.
Разрешенный прямоугольник, 388, 391.
Ребро
- возврата, 288, 294.
- регрессии, 394, 395.

Режущая кромка
- вспомогательная, 332.
- главная, 332.
- черновая, 331.
- элементарной длины, 347.

Режущий клин, 314, 323.
Резание
- косоугольное, 352, 360, 364.
- ортогональное (прямоугольное), 352.

Родин П.Р., 13, 365.
Родриг (Родригес), Бенджамен Олинде (***Rodrigues, Benjamin Olinde***), **392.**

ℝ-отображение поверхности, 14, 15, 271, 276, 277, 279, 280, 281, 284, 295, 314, 315, 318, 322, 420.
ℝ-поверхность
- второго рода, 398, 399,
- - нормированная, 401.
- первого рода, 398, 399.
Ряд
- Маклорена, 65,
- Тейлора, 65, 207, 523, 533, 535.
- - остаточный член, 536.

C

Сахаров Г.Н., 13.
Свойство конформности, 410.
Связь, 443,
- кинематическая, 443.
- огибания, 443.
- скрытая, 443.
Секущие плоскости
- поверхности, главные, 105, 274, 275, 384, 554.
- режущего клина, 334.
Серре, Жозеф Альфред (***Serret***, *Joseph Alfred*), **278.**
Сеть, ортогональная, 395, 409.
Сечение поверхности
- второе главное, 105.
- первое главное, 105.
Символы Кристоффеля, 277-279, 509,
- второго рода, 61, 81, 283, 508, 511.
- первого рода, 81, 283.
Система координат
- внутренняя (см. *локальная система координат*).
- локальная, 27, 68,
- кинематическая, 323.
- статическая, 323, 332, 333.
Системы класса *CAD/CAM*, 12, 24.
Скобки Кристоффеля (см. *символы Кристоффеля*).
Служебное назначение детали, 315.
Собственное число матрицы, 160.
Собственный вектор матрицы, 160.
Соотношение
- С.Жермен, 89.
- обязательное, 355.
Сплайн-аппроксимация поверхности детали, 69.
Спалай-функция, 69.
Средневзвешенное
- значение площади, 419.
- значение угла, 413.
- положение нормали, 411, 414, 423, 424.
Стационарное значение функции, 455.
Степень конформности поверхностей, 192, 222, 224, 270, 297, 301, 308, 377, 456, 462, 464, 471, 472, 473, 477, 520.
Стохастический микрорельеф на поверхности детали, 24, 270.
Строка формообразования, 402,
- расширенная 429.

T

Тейлор, Брук (***Taylor***, *Brook*), **45.**
Тензор
- второй фундаментальный, 34.
- метрический, 400.
- фундаментальный, 400.
Теорема
- Аполония, 219.
- Бонне (см. *основная теорема теории поверхностей*).
- Бура, 273.
- Виллиса, 121.
- Родрига, 394.
- Ролля, 531.
- Эннепера, 96.
Теоретическая технология машиностроения, 561.
Теория
- групп, 561.
- - Ли, 561.
- огибающих
- - кривых, 286.
- - поверхностей, 286.
- решения изобретательских задач, 561.
- формообразования поверхностей деталей, **12.**
3 - *D* поверхности, (см. *поверхность сложной формы*).
Тензор кривизны поверхности, 34.
Тензорное исчисление, 561.
Технологии, 431,
- интенсивные, 431.
- критические, 431.
- предельные, 431.
- экстремальные, 431.
Технологическое
- деформирование заготовки, 123.
- изменение формы исходной инструментальной поверхности, 437.
- пространство, 418.
- состояние заготовки, 367, 436.
Топологическая модификация зубьев колеса, 307.
Точка
- возврата первого рода, 288.
- начала обработки, 515.
- стартовая, 515.
Точки
- антипоидальные, 421.
- симметричные, 421.
- сингулярные, 67, 68.

- - ложные, 68.
- центрально-симметричные, 421.
Точность
- профилирования, 318.
- формообразования, 307, 449.
Траекторные задачи, 24
Трансверсальные семейства кривых на поверхности детали, 69, 454, 476.
Трехгранник Дарбу, 56, 68, 118, 194, 207, 210, 213, 214, 333, 504, 540, 549.
Трехиндексные символы
- Кристоффеля (см. *символы Кристоффеля*).
- Кристоффеля-Шварца (см. *символы Кристоффеля*).
ТРИЗ (см. *Теория решения изобретательских задач*).

У

Углы
- Эйлера, 416, 503.
- - нутации, 416, 417, 503.
- - прецессии, 416, 417, 503.
- - чистого вращения, 416, 417, 503.
- Эйлера-Крылова, 417.
Угол
- вспомогательный в плане, 336, 359.
- главный в плане, 336, 359, 360.
- действия, 364.
- задний, 337-340, 342, 354, 355, 357.
- заострения режущего клина, 337-340, 355, 357.
- наклона режущей кромки
- - кинематический, 352.
- - статический, 337, 340.
- относительной локальной ориентации, **200**, 204, 208, 224, 251, 257, 265, 274, 372, 397, 399, 427, 462, 463, 467, 469, 471, 474, 475, 478, 479, 490, 551, 554, 557.
- передний, 337-340, 342, 354, 357, 358, 360, 361.
- при вершине, 337, 340, 342, 359.
- резания, 355, 357, 364.
- скалывания, 364.
- схода стружки, 361.
Уравнение
- Лагранжа-Даламбера, 528.
- кинематического баланса, 125.
- контакта, 120-123.
Уравнения
- Вейнгартена, 78, 81, 281, 283, 315.
- Гаусса, 81, 277.
- Гаусса-Вейнгартена (см. *уравнения Вейнгартена*).
- Гаусса-Майнарди-Кодацци, 277, 283, 284.
Условие
- касания, 486.
- контакта, 120, 124, 477.
- разворачиваемости, 393.
Условия
- совместимости Картана, 277.
- формообразования поверхностей деталей, 16.

Ф

Фарин, Г., (***Farin , G.***,), 13.
Фасонные поверхности, (см. *поверхность сложной формы*).
Фокальные
- поверхности, 391, 395-398,
- - обобщенные, 398.
- - производные, 396-398.
- точки, 391, 395.
Форма задания поверхности детали
- естественная (*натуральная*), 26, 60, 62, 269, 308, 315.
- уравнением в форме
- - матричной, 27.
- - параметрической, 51.
- - неявной, 57.
- - явной, 54.
Формообразованная ячейка, 448, 454, 497, 537, 543, 545, 552, 553, 554.
Формообразование поверхностей деталей, 115,
- глобальное, 16.
- дискретное, 298, 382, 383, 480, 551, 516, 517.
- кромочное, 307.
- локальное, 16.
- региональное, 16.
Формообразующая система станка, 442.
Формула
- Ларина, 355.
- Мёнье, 343, 344.
- Родрига, 392, 394.
- Стеблера, 363.
- Эйлера, 213, 221, 226, 247, 250, 257, 258, 259, 272, 273, 343, 551.
Фрагмент поверхности, **27**, 69.
Френе, Фредерик Жан (***Frenet , Frederic Jean***), 68, 69, **278**.
Функции режущего инстумента, 324.
Функция
- конформности, **223**, 315, 451, 452, 455, 456, 477.
- зазоров, 248, 249.
- формообразования, 445.

Х

Характеристическая кривая, 427.

Характеристика касающихся поверхностей, 200, 216, 220-222, 245, 261, 288-290, 292, 296, 298, 303, 304, 307, 382.
Характеристическое уравнение матрицы, 161.

Ц

Центр
- сферического отображения, 410.
- сферической индикатрисы, 415.
Центральная точка детали, 412.
Циклиды Дюпена, 395.
Цилиндро-конические передачи, 560.
- первого рода, 560.
- второго рода, 560.

Ч

Чанг, Ч.-Х., (***Chang*** , *Chao-Hwa*), 13.
Чой, Б. (***Choi, B.K.***), 13.

Ш

Шевингование, 483.
- врезное, 307, 483.
- диагональное, 483, 484.
- осевое, 483.
- тангенциальное, 483.
Шевченко Н.А., 13.
Шишков В.А., 13.

Э

Эвольвентная поверхность, 393.
Эволюта, пространственная, 392, 393.
Эволютная поверхность, 393.
Эвристический подход, 560, 561.
Эйлер, Леонард (***Euler***, *Leonhard*), **88**, 111.
Элементарная ячейка, (см. *Формообразованная ячейка*).
Эннепер, 256.
Эпюры изменения геометрических параметров режущей кромки инструмента, 347.
Эрмит, Шарль (***Hermite***, *Charles*), **72.**

Ю

Юликов М.И., 13, 365.
Юнусов Ф.С., 13.

Я

Якобиан преобразования, 36, 66, 505, 506.