ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. А. Пушкарь

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МГИУ
Москва 2007

ББК 22.161.6
УДК 517.9
П91

Рецензенты:

В.Б. Миносцев, заслуженный работник ВШ РФ, доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного индустриального университета;

Д.Л. Ревизников, доктор физико-математических наук, профессор Московского авиационного института (Технический Университет).

Пушкарь Е.А.

П91 **Дифференциальные уравнения:** Учебное пособие. – М.: МГИУ, 2007. – 254 с.

ISBN 978-5-2760-1098-4

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений направления «Прикладная математика и информатика» (010500) и специальности «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» (010503) и соответствует программе дисциплины «Дифференциальные уравнения»

ББК 22.161.6
УДК 517.9

Автор благодарит А. Герасева, Ю. Косарева, Е. Смирнова и Д.О. Платонова за оказанную помощь при создании компьютерного набора книги.

ISBN 978-5-2760-1098-4

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Введение

Дифференциальные уравнения были введены в научную практику Ньютоном (1642 – 1727). Ньютон считал это свое открытие настолько важным, что зашифровал его, как было принято в ту эпоху, в виде анаграммы, смысл которой в современных терминах можно передать так: "Законы природы выражаются дифференциальными уравнениями".

Вторым своим основным аналитическим достижением Ньютон считал разложение всевозможных функций в степенные ряды (смысл второй, длинной анаграммы Ньютона в том, что для решения любого уравнения нужно подставить в уравнение ряд и приравнять члены одинаковой степени). Ньютон разложил в "ряды Тейлора" все основные элементарные функции (рациональные, радикалы, тригонометрические, экспоненту и логарифм).

Из огромного числа работ XVIII века по дифференциальным уравнениям выделяются работы Эйлера (1707 – 1783) и Лагранжа (1736 – 1813). В этих работах была прежде всего развита теория малых колебаний, а следовательно – теория линейных систем дифференциальных уравнений; попутно возникли основные понятия линейной алгебры (собственные числа и векторы в n-мерном случае).

Характеристическое уравнение линейного оператора долго называли секулярным, так как именно из такого уравнения определяются секулярные (вековые, т.е. медленные по сравнению с годовым движением) возмущения планетных орбит согласно теории малых колебаний Лагранжа. Вслед за Ньютоном Лаплас (1749 – 1827) и Лагранж, а позже Гаусс (1777 – 1855) также развивают методы теории возмущений.

Когда была доказана неразрешимость алгебраических уравнений в радикалах, Лиувилль (1809 – 1882) построил аналогичную теорию для дифференциальных уравнений, установив невозможность решения ряда уравнений (в том числе таких классических, как линейные уравнения второго порядка) в элементарных функциях и квадратурах. Позже Софус Ли (1842 – 1899), анализируя вопрос об интегрировании уравнений в квадратурах, пришел к необходимости подробно исследовать группы диффеоморфизмов (позже названных группами Ли).

Новый этап развития теории дифференциальных уравнений начинается с работ Анри Пуанкаре (1854 – 1912). Созданная им "качественная теория дифференциальных уравнений" вместе с теорией функций комплексного переменного привела к основанию современной топологии. Качественная теория дифференциальных уравнений, или, как ее теперь чаще называют, теория динамических систем, является сейчас наиболее активно развивающейся областью, которая имеет наиболее важные для естествознания приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Начиная с классических работ А. М. Ляпунова (1857 – 1918) по теории устойчивости движения в развитии этой области большое участие принимают русские математики. Упомянем лишь работы А. А. Андронова (1901 – 1952) по теории бифуркаций, А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина по структурной устойчивости, Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по теории усреднения, А. Н. Колмогорова по теории возмущений условно-периодических движений.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Общие понятия

2.1. Эволюционные процессы

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений — одно из основных орудий математического естествознания. Эта теория позволяет изучать всевозможные эволюционные процессы, обладающие свойствами *детерминированности, конечномерности* и *дифференцируемости.*

Прежде чем дать точные математические определения, рассмотрим несколько примеров эволюционных процессов.

Процесс называется *детерминированным*, если весь его будущий ход и все его прошлое однозначно определяются состоянием в настоящее время. Множество всевозможных состояний процесса называется *фазовым пространством.*

Например, классическая механика рассматривает движение систем, будущее и прошлое которых однозначно определяются начальными положениями и начальными скоростями всех точек системы. Фазовое пространство такой системы — множество, элементом которого является набор положений и скоростей всех точек данной системы.

Примером недетерминированного процесса может служить движение частиц в квантовой механике, которое не описывается однозначно начальными положениями и начальными скоростями частиц. В качестве другого примера недетерминированного процесса можно упомянуть распространение тепла, который является “полудетерминированным” процессом: будущее (распространение тепла с ростом времени) определяется настоящим состоянием рассматриваемой системы, тогда как прошлое (“предыстория” состояния в настоящий момент времени) не может быть однозначно восстановлено по состоянию, известному на настоящий момент.

Процесс называется *конечномерным*, если его фазовое пространство конечномерно, т.е. число параметров, нужных для описания его состояния, конечно. Например, ньютоновская механика движения систем из конечного числа материальных точек или абсолютно твердых тел относится к этому классу. Размерность фазового пространства системы из n материальных точек равна $6n$, а системы из n твердых тел — $12n$.

Движение жидкости, изучаемое в гидродинамике, процессы колебаний струны и мембраны, распространение волн в оптике и акустике — примеры процессов, которые нельзя описать с помощью конечномерного фазового пространства.

Процесс называется *дифференцируемым*, если изменение его состояния со временем описывается дифференцируемыми функциями.

Например, координаты и скорости точек механической системы меняются со временем дифференцируемым образом.

Свойством дифференцируемости не обладают движения, изучаемые в теории удара, или гидродинамические течения с ударными волнами.

Таким образом, движение системы в классической механике может быть описано при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, тогда как квантовая механика, теория теплопроводности, гидродинамика, теория упругости, оптика, акустика и теория удара требуют иных средств.

Еще два примера детерминированных конечномерных и дифференцируемых процессов: процесс радиоактивного распада вещества и процесс размножения бактерий при достаточном количестве питательного вещества. В обоих случаях фазовое пространство одномерно: состояние процесса определяется количеством вещества или количеством бактерий. В обоих случаях процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением.

Заметим, что вид дифференциального уравнения процесса, а также самый факт детерминированности, конечномерности и дифференцируемости того или иного процесса можно установить лишь экспериментально, следовательно — только с некоторой степенью точности. В дальнейшем мы не будем всякий раз подчеркивать это обстоятельство и будем говорить о реальных процессах так, как если бы они точно совпадали с нашими идеализированными моделями.

2.2. Определения, примеры

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение между аргументом x, его функцией y и производными этой функции $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

Предполагается, что уравнение (2.1) содержит явно по крайней мере одну из производных искомой функции y.

Определение. *Порядком* дифференциального уравнения называется высший из порядков производных искомой функции, входящих в это уравнение.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* дифференциального уравнения (2.1), если после замены y на $\varphi(x)$, $y'(x)$ на $\varphi'(x), \ldots, y^{(n)}$ на $\varphi^{(n)}(x)$ уравнение (2.1) становится тождеством.

Будем предполагать что рассматриваемые величины принимают только конечные значения, а рассматриваемые функции являются однозначными функциями своих аргументов.

Таким образом, в обыкновенных дифференциальных уравнениях неизвестная функция зависит только от одного аргумента. В противоположность этому в уравнениях с частными производными неизвестные функции зависят от нескольких независимых переменных. В дальнейшем, говоря о дифференциальных уравнениях, мы будем иметь в виду только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Примеры.

(1) Пусть известна скорость тела, движущегося по оси OX. Это непрерывная функция $f(t)$. Кроме того, будем считать, что известна абсцисса $x = x_0$ рассматриваемой точки в некоторый момент времени $t = t_0$. Требуется найти закон движения точки, т.е. зависимость абсциссы движущейся точки от времени $x = x(t)$.

Решение. Для $x = x(t)$ получаем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

причем $x|_{t=t_0} = x_0$. Из интегрального исчисления известно, что решение задачи о нахождении функции, если известна ее производная, задается формулой

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau.$$

(2) Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству. Допустим, при $t = t_0$ имелось m_0 граммов радия. Как масса образца зависит от времени?

Решение. Обозначим коэффициент пропорциональности между массой радия m и скоростью его распада буквой c ($c > 0$). Тогда для массы радия имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -cm$$

и начальное условие: $m|_{t=t_0} = m_0$.

Решение этой задачи имеет вид

$$m = m_0 \cdot e^{-c(t-t_0)}.$$

Из этих двух примеров видно, что одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению могут удовлетворять многие функции. Поэтому для определения искомой функции нужно задавать не только дифференциальное уравнение, но и *начальное значение*, которому она должна удовлетворять при каком-то определенном значении аргумента.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является нахождение всех решений дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений. Нахождение решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

2.3. Геометрическая интерпретация. Обобщение задачи

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной искомой функции y:

$$y' = f(x, y), \tag{2.2}$$

где правая часть уравнения — известная функция $f(x, y)$, — определена в некоторой области G плоскости (x, y), такой что:

(1) любая точка G — внутренняя;

(2) множество G - *связно*, т.е. любые две его точки можно соединить ломаной, целиком лежащей внутри G.

Напомним, что *граничные точки* области — это предельные точки тех точек области, которые не принадлежат (открытой) области G. Совокупность всех граничных точек называется *границей* области.

Замкнутой областью $\bar{G}$ (*замыканием* области G) называется область G вместе с ее границей.

Выясним прежде всего, каков геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка (2.2).

Будем рассматривать в уравнении (2.2) переменные x и y как декартовы координаты точек на плоскости. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (2.2). Значит, после подстановки функции $y = \varphi(x)$ в это уравнение оно превращается в тождество:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)). \tag{2.3}$$

Рассмотрим на графике функции $y = \varphi(x)$ произвольную точку $M(x, y)$ и проведем в этой точке касательную. Из геометрического смысла производной следует, что

$$\varphi'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \tag{2.4}$$

где α — угол наклона касательной к оси абсцисс. Из соотношений (2.4), (2.3) и (2.2) получаем, что $\operatorname{tg} \alpha = f(x, \varphi(x)) = f(x, y)$, где (x, y) — координаты точки M. Таким образом, угловой коэффициент касательной к графику решения уравнения (2.2) в каждой его точке равен значению в этой точке правой части дифференциального уравнения первого порядка (2.2), то есть дифференциальное уравнение (2.2) задает в любой точке (x, y) области G значение углового коэффициента касательной к графику решения уравнения (2.2), проходящему через эту точку: $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$.

Можно сказать, что уравнение (2.2) в области G задает *поле направлений*, которое в каждой точке G изображается с помощью отрезков касательных, чьи угловые коэффициенты определяются значениями правой части $f(x, y)$ дифференциального уравнения (2.2) в этой точке.

В этом состоит геометрический смысл дифференциального уравнения (2.2). Построив отрезки касательных для достаточно большого числа точек, мы получим достаточно наглядное изображение поля направлений. Так как касательная в точке графика решения имеет то же направление, что и отрезок в этой точке, то задачу нахождения решения (интегрирования) дифференциального уравнения (2.2) геометрически можно сформулировать так: найти кривую $y = \varphi(x)$, которая в каждой точке имеет касательную, заданную уравнением (2.2), или, что тоже самое, в каждой точке касается поля направлений, заданного уравнением (2.2).

С геометрической точки зрения в такой постановке задачи не очень естественными представляются следующие ограничения:

(1) исключены направления, параллельные оси OY;

(2) исключены те линии, которые перпендикулярны к оси OX и пересекаются вертикальными прямыми более одного раза.

Поэтому, наряду с уравнением (2.2), естественно также рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x, y), \tag{2.5}$$

где $f_1(x, y) = \dfrac{1}{f(x, y)}$ всюду, где эти функции имеют смысл, и использовать уравнение (2.5) там, где уравнение (2.2) не имеет смысла. При этом считается, что в любой точке, принадлежащей G, хотя бы одна из функций $f(x, y)$ или $f_1(x, y)$ имеет смысл, т.е. считается, что $f_1(x, y) = 0$ там, где $f(x, y)$ не имеет смысла (стремится к бесконечности).

Тогда задачу интегрирования дифференциальных уравнений (2.2), (2.5) можно поставить так: *в области G найти все линии, касающиеся в любой точке поля направлений, заданного уравнениями (2.2) или (2.5)*. Эти линии называются *интегральными кривыми* (или *интегральными линиями*) уравнений (2.2) или (2.5).

Если

$$f(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

то вместе с уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \tag{2.6}$$

будем рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{N(x, y)}{M(x, y)}\ . \tag{2.7}$$

Можно также записать уравнение в симметричной форме

$$M(x, y)dx - N(x, y)dy = 0. \tag{2.8}$$

При этом поле направлений определено всюду, где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ имеют смысл и

$$M^2 + N^2 \neq 0. \tag{2.9}$$

Пример. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{2.10}$$

определяет поле направлений всюду, кроме начала координат. Схематически это поле направлений изображено на рис. 2.1.

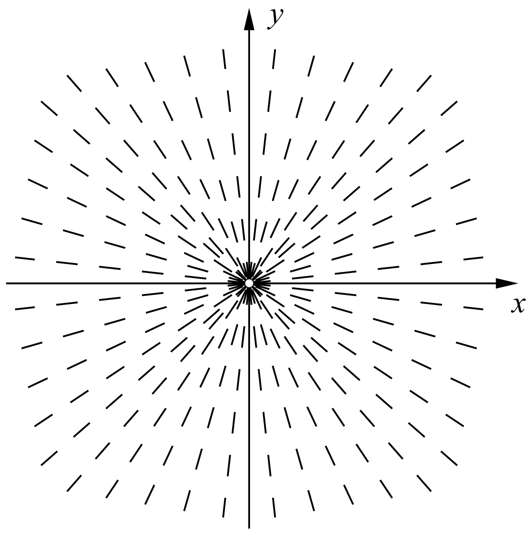

Рис. 2.1. *Поле направлений уравнения (2.10)*

Все определяемые им направления проходят через начало координат. Ясно, что при любом k функции $y = kx, x > 0$ и $y = kx, x < 0$ являются решениями уравнения (2.10). Интегральные кривые представляют собой полупрямые, исходящие из начала координат. Принципиальным является то, что при движении точки по интегральной кривой переход через начало координат невозможен, так как в начале координат поле направлений не определено, поскольку в точке $O\,(0, 0)$ условие (2.9) не выполняется.

Было бы неправильным утверждать, что интегральные кривые уравнения (2.10) являются прямыми $y = kx$, поскольку после попадания в начало координат при движении вдоль какой-либо интегральной кривой выход из точки $O\,(0, 0)$ возможен по любой из интегральных кривых в силу неопределенности в ней поля направлений, однако интегральная кривая не может иметь изломов.

Переходя от уравнения (2.10) к уравнению

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}\ , \tag{2.11}$$

найдем, что полуоси оси абсцисс $x = 0, y > 0$ и $x = 0, y < 0$ также являются интегральными кривыми.

Совокупность же всех интегральных кривых можно было бы задать уравнением $ax + by = 0$, где a и b – некоторые постоянные, одновременно не равные нулю, которое тем самым является *общим интегралом* уравнений (2.10) и (2.11), однако нужно понимать, что интегральные кривые не являются прямыми линиями, задаваемые этим соотношением, а представляют собой полупрямые, выходящие из начала координат.

Если записать решение уравнения (2.10) (или (2.11)) в параметрической форме, но наиболее адекватным представлением является

$$\begin{cases} x = ae^{\alpha t}, \\ y = be^{\alpha t}, \end{cases}$$

где $\alpha \neq 0$ – свободный параметр, а a и b – некоторые постоянные, одновременно не равные нулю.

Представленные так интегральные кривые уравнения (2.10) как раз и являются полупрямыми, асимптотически входящими в начало координат при $t \to -\infty$ (когда $\alpha > 0$) или $t \to +\infty$ (когда $\alpha < 0$).

Это уравнение встретится нам в конце курса при классификации особых точек на плоскости (глава 16). В исходном дифференциальном уравнении (2.10) начало координат является *особой точкой*, в ней решение неединственно. Данная особая точка называется *дикритическим узлом*.

Пример. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{2.12}$$

задает поле направлений всюду, за исключением начала координат. Схематически это поле направлений изображено на рис. 2.2. Направления, задаваемые в точке (x, y) уравнениями

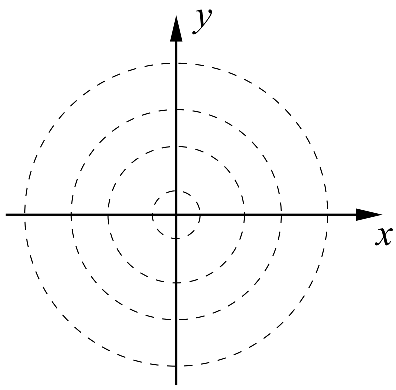

Рис. 2.2. *Поле направлений уравнения (2.12)*

(2.10) и (2.12), взаимно перпендикулярны. Ясно, что все окружности $x^2 + y^2 = R^2$, имеющие центр в начале координат, будут интегральными кривыми уравнения (2.12). Решениями этого уравнения будут функции $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R < x < R)$, графическим представлением которых являются полуокружности в верхней и нижней полуплоскостях.

2.4. Метод изоклин

Для упрощения построения поля направлений найдем все те точки плоскости (x, y), в которых отрезки, изображающие наклон интегральных кривых, имеют одно и то же направление.

Определение. *Изоклиной* дифференциального уравнения называется множество всех точек плоскости, в которых отрезки поля направлений имеют один и тот же наклон.

Уравнение изоклины (кривой равных наклонов интегральных кривых) найти очень просто. Действительно, в каждой точке изоклины тангенс угла наклона отрезков поля направлений имеет одно и то же значение $\operatorname{tg}\alpha = k$, где k — параметр.

Так как, с другой стороны, $\operatorname{tg}\alpha = y' = f(x, y)$, то координаты каждой точки изоклины удовлетворяют уравнению

$$f(x, y) = k. \tag{2.13}$$

Соотношение (2.13) служит уравнением изоклины дифференциального уравнения (2.2). Так как k в уравнении (2.13) может принимать различные значения, то это уравнение можно рассматривать как уравнение семейства изоклин.

Пример. Построим поле направлений дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$.

Уравнение изоклин этого дифференциального уравнения имеет вид $x^2 + y^2 = k$, т.е. изоклинами служат концентрические окружности радиусом $\sqrt{k}$ с центром в начале координат (рис. 2.3).

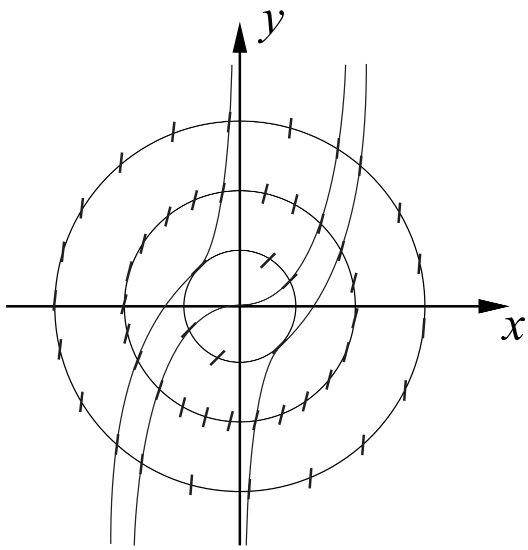

Рис. 2.3. *Изоклины и интегральные кривые уравнения* $y' = x^2 + y^2$

В точках каждой из окружностей нужно провести отрезки, образующие с осью OX один и тот же угол α, тангенс которого равен k. Так, при $k = 1$ изоклиной является единичная окружность $x^2 + y^2 = 1$, при $k = 4$ — окружность $x^2 + y^2 = 2^2$ радиуса 2, при $k = 9$ — окружность $x^2 + y^2 = 3^2$ радиуса 3 и т.д. Этим изоклинам соответствуют направления отрезков, образующих с осью OX углы $\alpha_1 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 4$ и $\alpha_3 = \operatorname{arctg} 9$.

При $k = 0$ получаем $x^2 + y^2 = 0$. Этому уравнению удовлетворяет единственная точка $(0, 0)$. В этом случае изоклина состоит из одной точки, для которой $\operatorname{tg}\alpha = 0$. На рис. 2.3 построены вышеперечисленные изоклины и изображено поле поле направлений данного дифференциального уравнения. Для того чтобы построить интегральную кривую, возьмем на плоскости произвольную точку (x_0, y_0). Проведем через эту точку кривую так, чтобы она в каждой точке касалась поля направлений. Это и будем искомой интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0). В качестве примера, на рис. 2.3 построены интегральные кривые, проходящие через точки $(0,\ 0)$, $(-1,\ 1)$ и $(1,\ -1)$.

Будем пользоваться следующей *терминологией*:

(1) Если график решения проходит через точку (x_0, y_0), то это равносильно тому, что решение проходит через точку (x_0, y_0).
(2) Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ называется *общим решением* в области G, если любое решение этого уравнения может быть получено из $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ соответствующим выбором постоянных $C_1, \ldots, C_n$.
(3) Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее интегральные линии, будем называть *интегралом дифференциального уравнения.*
(4) Уравнение $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ будем называть *общим интегралом*, если при соответствующем выборе постоянных $C_1, \ldots, C_n$ это уравнение определяет любую интегральную кривую нашего уравнения в области G.

Например, для уравнения (2.10): $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ функции $y = kx$, $x > 0$ и $y = kx, x < 0$ являются общими решения всюду, кроме оси OX, а $ax + by = 0$ является общим интегралом этого уравнения во всей плоскости XY, за исключением начала координат. Для уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$ мы имеем общее решение в верхней полуплоскости $y > 0$: $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ и общее решение в нижней полуплоскости $y < 0$: $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, а $x^2 + y^2 = R^2$ — общий интеграл.

Сформулируем теперь теорему существования и единственности, принадлежащую Коши. В дальнейшем мы докажем такую теорему в более общем виде.

Теорема существования и единственности

Теорема 2.1 (Теорема Коши)**.** *Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, правая часть которого $f(x, y)$ определена в области $G(x, y)$, причем $f(x, y)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по y в $G(x, y)$: $f(x, y) \in C$ и $f'_y(x, y) \in C$ в G. Тогда:*

(1) *для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ существует непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая условию $\varphi(x_0) = y_0$;*

(2) *если два решения $y = \psi(x)$ и $y = \chi(x)$ совпадают хотя бы для одного значения $x = x_0$, т.е. $\psi(x_0) = \chi(x_0)$, то они совпадают тождественно в области G, т.е. $\psi(x) \equiv \chi(x)$ для любого $x \in G$.*

Значения (x_0, y_0) называются начальными условиями.

3. Простейшие дифференциальные уравнения

3.1. Уравнения вида $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Случай 1. Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную при $a < x < b$: $f(x) \in C(a, b)$. Как известно из курса анализа, одним из решений этого дифференциального уравнения будет функция

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi) d\xi,$$

где $x_0, x \in (a, b)$. Все другие решения отличаются от него только на аддитивную постоянную и общее решение имеет вид

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi + C,$$

то есть все интегральные кривые получаются из какой-либо интегральной кривой сдвигом, параллельным оси OY.

Если задать точку (x_0, y_0), принадлежащую интегральной кривой, то постоянная C определится единственным образом: $C = y_0$, тогда через любую точку (x_0, y_0) полосы $x \in (a, b)$ проходит одна и только одна интегральная кривая

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi. \tag{3.1}$$

Случай 2. Пусть теперь функция $f(x) \to \infty$ при $x \to c$, $c \in (a, b)$ и $f(x)$ непрерывна в остальных точках. В точке $x = c$ поле направлений зададим так: $\dfrac{dx}{dy} = 0$. При приближении к прямой $x = c$ поле направлений становится все круче и круче, однако на полосах $x \in (a, c)$ и $x \in (c, b)$, так же как и в предыдущем случае, через любую точку проходит одна интегральная кривая, определяемая уравнением $y(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$.

Если при $x \to c - 0$ несобственный интеграл $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$ сходится, то интегральная кривая приближается к некоторой конечной точке на прямой $x = c$ (рис. 3.1). Легко видеть, что прямая $x = c$ является интегральной кривой.

Если рассматривать интегральные кривые в полосе (a, b), то если функция $f(x)$ имеет одинаковые знаки слева и справа от

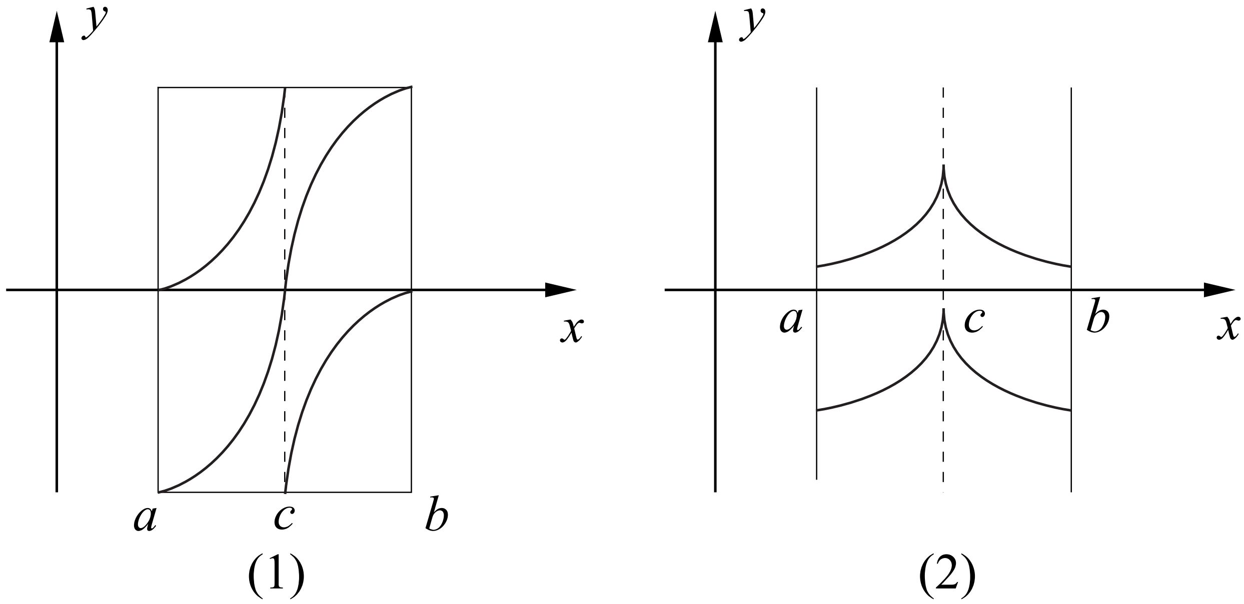

Рис. 3.1. *Интегральные кривые уравнения $y' = f(x)$ (сходящийся интеграл): слева и справа от $x = c$ функция $f(x)$ имеет одинаковые знаки (1), тогда как (2) соответствует разным знакам $f(x)$*

прямой $x = c$, т.е. $f(x) \to +\infty$ при $x \to c \pm 0$ (или $f(x) \to -\infty$ при $x \to c \pm 0$), тогда через любую точку (x_0, y_0) полосы (a, b) проходит бесконечно много интегральных кривых: это составные интегральные кривые, а именно слева от прямой $x = c$ в виде кривой $y = y(x)$, описываемой (3.1), затем произвольный отрезок прямой $x = c$ и продолжение справа от $x = c$ в виде кривой $y = y(x)$, также описываемой (3.1) (рис. 3.1(1)).

Если слева и справа от прямой $x = c$ знаки функции $f(x)$ разные, например, $f(x) \to +\infty$ при $x \to c-0$ и $f(x) \to -\infty$ при $x \to c + 0$, то в этом случае поведение интегральных кривых изображено на рис. 3.1(2). Через любую точку прямой $x = c$ проходит бесконечно много интегральных кривых, однако в любой из полос $x \in (a, c)$ и $x \in (c, b)$ через каждую точку проходит одна интегральная кривая, поскольку “составные” кривые, подобные кривой изображенной рис. 3.1(2), не могут рассматриваться как интегральные кривые ввиду отсутствия у них гладкости на прямой $x = c$, то есть всюду, за исключением прямой $x = c$, решение единственно.

Если интеграл $\int\limits_{x_0}^{c-0} f(\xi)d\xi$ расходится, то интегральная кривая асимптотически приближается к прямой $x = c$ (рис. 3.2): при $x \to c - 0$ решение $y(x) \to +\infty$ (или $-\infty$). В этом случае прямая $x = c$ также является интегральной кривой. Таким образом, в случае расходящегося несобственного интеграла $\int\limits_{x_0}^{c-0} f(\xi)d\xi$ решение единственно во всех точках полосы $x \in (a, b)$. Аналогично можно исследовать поведение интегральных кривых и при $x \to c + 0$ $(x \in (c, b))$.

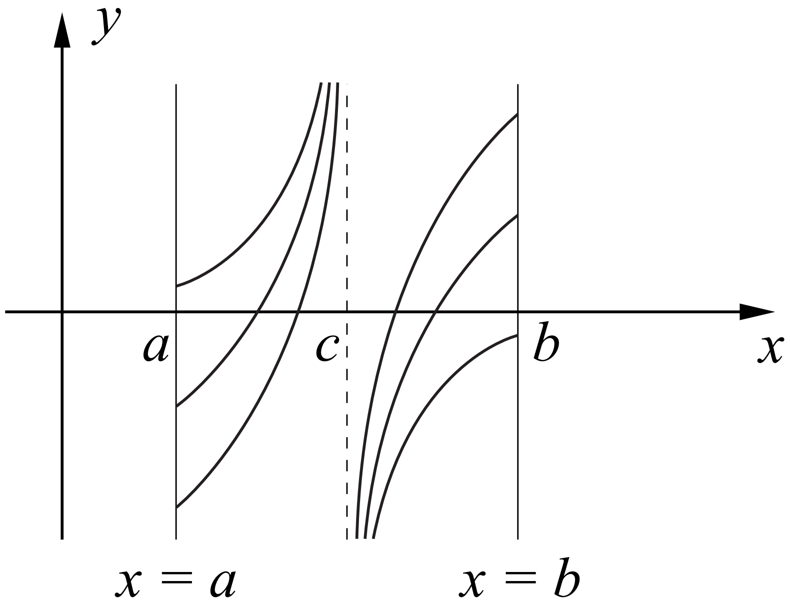

Рис. 3.2. *Интегральные кривые уравнения $y' = f(x)$ (расходящийся интеграл)*

3.2. Уравнения вида $\frac{dy}{dx} = f(y)$

В этом случае x и y "поменялись ролями". Если правая часть уравнения непрерывна на интервале (a, b) и не обращается в нуль ни в одной его точке: $f(y) \in C(a, b)$ и $f(y) \neq 0$, то уравнение можно переписать в виде $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(y)}$. Тогда через любую точку (x_0, y_0) полосы $y \in (a, b)$ проходит одна интегральная кривая

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)} \tag{3.2}$$

и все интегральные кривые получаются сдвигом параллельно оси OX какой-нибудь одной интегральной кривой.

Рассмотрим случай непрерывной функции $f(y)$, у которой $f(c) = 0$, причем c — единственное значение на (a, b). Тогда:

(1) если несобственный интеграл $\int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{d\eta}{f(\eta)}$ *расходится* при $y \to c \pm 0$, то через любую точку полосы $y \in (a, b)$ проходит одна и только одна интегральная кривая. Прямая $y = c$ есть интегральная кривая, являющаяся асимптотой.

(2) если несобственный интеграл $\int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{d\eta}{f(\eta)}$ *сходится* при $y \to c \pm 0$ и функция $f(y)$ не меняет знака при переходе через $y = c$, то через любую точку этой полосы проходит бесконечно много интегральных кривых.

(3) если несобственный интеграл $\int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{d\eta}{f(\eta)}$ *сходится* при $y \to c \pm 0$ и функция $f(y)$ меняет знак при переходе через $y = c$, то через каждую точку прямой $y = c$ проходит бесконечно много интегральных кривых, а через каждую точку полос $y \in (a, c)$ и $y \in (c, b)$ проходит по одной интегральной кривой.

3.3. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальными уравнениями *с разделяющимися переменными* называются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y), \tag{3.3}$$

у которых правая часть есть произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Теорема 3.1. *Если в прямоугольнике* $Q : \{(x, y),\ x \in (a, b),\ y \in (c, d)\}$ *функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(y)$ *непрерывны, причем* $f_2(y) \neq 0$ *ни в одной точке интервала* (c, d)*, тогда через любую точку* (x_0, y_0) *прямоугольника* Q *проходит одно и только одно решение уравнения (3.3).*

Доказательство. Допустим, что существует дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая уравнению (3.3), причем $\varphi(x_0) = y_0$. Тогда имеем тождество

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f_1(x)f_2(\varphi(x)),$$

которое, поскольку $f_2(y) \neq 0$, равносильно следующему:

$$\frac{d\varphi(x)}{f_2(\varphi(x))} \equiv f_1(x)dx.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по x в пределах от x_0 до x. Получим

$$\int\limits_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi(\xi)}{f_2(\varphi(\xi))} \equiv \int\limits_{x_0}^{x} f_1(\xi)d\xi. \tag{3.4}$$

Пределы в левой части равенства (3.4) имеют указанный вид, поскольку при интегрировании по x в левой части используется обратная подстановка $\varphi(x) = y$ и соответствующая формула замены переменной в определенном интеграле.

Пусть $F_2(y)$ — некоторая первообразная от $\dfrac{1}{f_2(y)}$ и $F_1(x)$ — некоторая первообразная от $f_1(x)$. Тогда равенство (3.4) можно переписать в виде

$$F_2(\varphi(x)) - F_2(y_0) = F_1(x) - F_2(x_0). \tag{3.5}$$

Так как $F_2(y)$ — монотонная функция (поскольку ее производная $F_2'(y) = \dfrac{1}{f_2(y)} \neq 0$), то уравнение (3.5) можно однозначно разрешить относительно $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = F_2^{-1}[F_2(y_0) + F_1(x) - F_1(x_0)]. \tag{3.6}$$

Таким образом, допустив существование решения уравнения (3.3), у которого $\varphi(x_0) = y_0$, мы его представили в форме (3.6) и установили, что решение единственно: все функции определены с помощью уравнения (3.3) и начального условия. Проверим, что $\varphi(x)$, определенное из (3.6), дает решение, проходящее через точку (x_0, y_0). Продифференцируем равенство (3.5) по x. Получим:

$$\frac{dF_2(\varphi(x))}{d\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) \equiv F_1'(x)$$

отсюда

$$\frac{1}{f_2(\varphi(x))} \cdot \varphi'(x) \equiv f_1(x).$$

Значит, уравнение (3.3) удовлетворяется:

$$\varphi'(x) \equiv f_1(x) \cdot f_2(\varphi(x)).$$

Подставим начальные условия в (3.6). Получим при $x = x_0$: $\varphi(x_0) = F_2^{-1}[F_2(y_0)] = y_0$. Значит, начальные условия выполнены.

Отметим, что если $f_2(y)$ обращается в нуль в какой-то точке $y = y_1$, то это может привести к нарушению единственности.

Это зависит от сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f_2(\eta)} \tag{3.7}$$

при $y \to y_1$ и того, меняется ли знак функции $f_2(y)$ при переходе через $y = y_1$. Если несобственный интеграл (3.7) сходится и функция $f_2(y)$ не меняет знака при $y = y_1$, то через любую точку (x_0, y_0) прямоугольника $Q : \{(x, y), x \in (a, b), y \in (c, d)\}$ проходит бесконечно много интегральных кривых, касающихся прямой $y = y_1$. Если несобственный интеграл (3.7) сходится и функция $f_2(y)$ меняет знак при переходе через $y = y_1$, то через любую точку прямой $y = y_1$ проходит бесконечно много интегральных кривых, однако в любой из полос $y \in (c, y_1)$ и $y \in (y_1, d)$ через каждую точку проходит одна интегральная кривая, то есть всюду, за исключением прямой $y = y_1$, решение единственно. Если несобственный интеграл (3.7) при $y \to y_1 \pm 0$ расходится, то решение всегда единственно.

3.4. Однородные уравнения

Уравнение называется однородным, если его правая часть зависит от отношения $\dfrac{y}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.8}$$

Если функция $f(u)$ определена при $u \in (a, b)$, то функция $f(\frac{y}{x})$ определена в углах, состоящих из точек (x, y), для которых $a < \dfrac{y}{x} < b$. Области, образованные этими двумя углами, будем обозначать G.

Теорема 3.2. *Если функция $f(u)$ непрерывна на интервале $a < u < b$: $f(u) \in C(a, b)$ и $f(u) \neq u$ для любого $u \in (a, b)$, то через любую точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит одна и только одна интегральная кривая.*

Доказательство. Положим $y = ux$, где $u = u(x)$, тогда из уравнения (3.8) следует: $xu' + u = f(u)$ и мы получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}, \tag{3.9}$$

к которому можно применить предыдущую теорему, что и доказывает наше утверждение.

Из уравнения (3.9) получаем

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u}\,.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|x| = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) + C, \tag{3.10}$$

где $\Phi(u) = \displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u}\,.$

Из уравнения (3.10) следует, что все интегральные кривые уравнения (3.8) подобны, центром подобия служит начало координат. Действительно, при подходящем выборе C_1 замена x и y на $C_1 x$ и $C_1 y$ переводит кривую

$$\ln|x| = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

в любую кривую семейства (3.10). Если $f(u) = u$ в отдельных точках $u_1, \ldots, u_n$, то через некоторые точки $(x_0, y_0) \in G$ может проходить бесконечно много интегральных кривых. Это зависит от сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_c^u \frac{d\xi}{f(\xi) - \xi}, \tag{3.11}$$

когда u стремится к одному из значений $u_1, \ldots, u_n$, например к u_1.

На рис. 3.3 схематически изображено поведение интегральных кривых в случае сходимости интеграла (3.11). Через

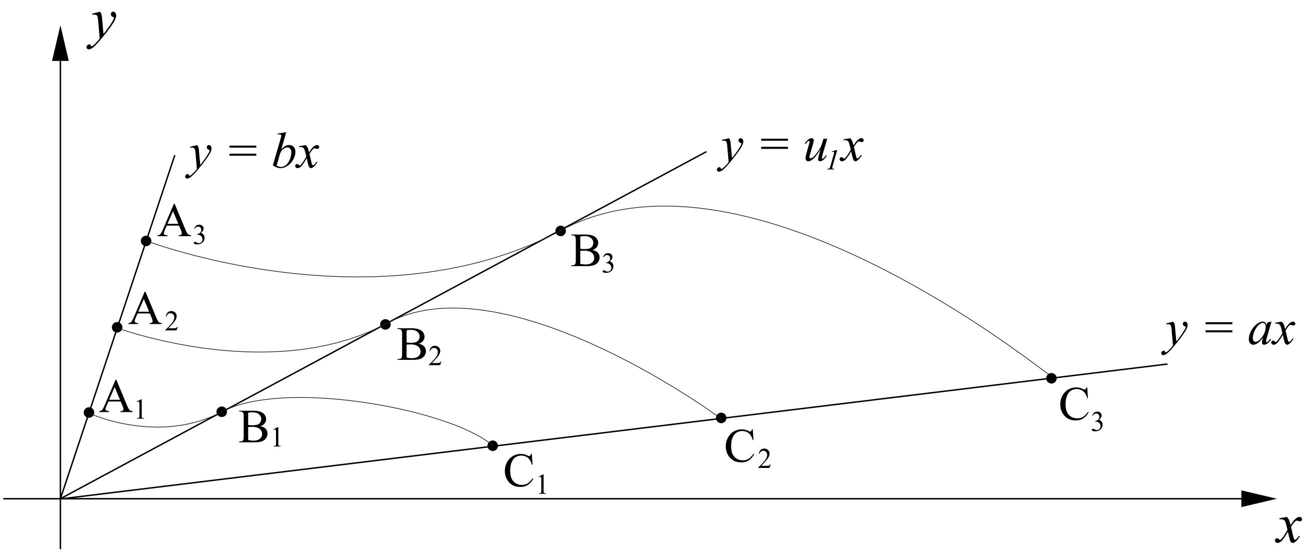

Рис. 3.3. *Интегральные кривые уравнения $y' = f(y/x)$ (сходящийся интеграл (3.11)).*

точку A_1 будут, например, проходить интегральные кривые $A_1B_1B_2C_2$, $A_1B_1B_3C_3$, $\ldots$ Все они касаются прямой $y = u_1x$.

3.5. Линейные уравнения

Линейные уравнения содержат неизвестную функцию и ее производную в первой степени:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x). \tag{3.12}$$

Теорема 3.3. *Пусть функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны в интервале (a, b). Тогда через любую точку (x_0, y_0) полосы $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ проходит одна и только одна интегральная кривая этого уравнения, определенная для любого $x \in (a, b)$.*

Доказательство. Рассмотрим вначале соответствующее *линейное однородное* уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y. \tag{3.13}$$

Оно получается из уравнения (3.12) при $b(x) \equiv 0$ и является уравнением с разделяющимися переменными. Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_c^y \frac{d\eta}{\eta}$ расходится при $y \to 0$, то уравнение (3.13) имеет единственное решение, проходящее через точку (x_0, y_0). Это решение дается формулой

$$y(x) = y_0 \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}.$$

Вернемся к первоначальному неоднородному уравнению (3.12). Применим так называемый *метод вариации произвольных постоянных*. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y(x) = z(x) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}, \tag{3.14}$$

считая константу в решении однородного уравнения неизвестной дифференцируемой функцией x. Продифференцировав (3.14) по правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, получим

$$y'(x) = z'(x) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} + z(x) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} \cdot a(x).$$

Подставим полученное выражение в (3.12):

$$z'(x) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} + z(x) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} \cdot a(x) = a(x) \cdot z(x) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} + b(x).$$

После приведения подобных членов получаем дифференциальное уравнение для функции $z(x)$:

$$\frac{dz}{dx} = b(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}.$$

Очевидно, что для выполнения условия $y(x_0) = y_0$ необходимо и достаточно, чтобы $z(x_0)$ также равнялось y_0. Из последнего уравнения находим

$$z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} b(s) e^{-\int\limits_{x_0}^{s} a(\xi) d\xi} ds. \tag{3.15}$$

Следовательно, функция

$$y(x) = z(x) e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi} \equiv y_0 e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} b(s) e^{\int\limits_{s}^{x_0} a(\xi) d\xi} ds \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi}$$

является единственным решением уравнения (3.12), удовлетворяющим начальному условию $y(x_0) = y_0$.

3.6. Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли — это нелинейное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = a(x) y + b(x) y^n,$$

которое сводится к линейному подстановкой $z = y^k$, где $k = 1 - n$. Рассмотрите уравнение Бернулли самостоятельно.

3.7. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

3.7.1. Уравнение в полных дифференциалах

Всякое дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3.16}$$

может быть переписано в виде

$$dy = f(x, y) dx,$$

или, в более общей форме

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \tag{3.17}$$

Определение. Если левая часть уравнения (3.17) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

то это уравнение называется *уравнением в полных дифференциалах.*

Для того, чтобы уравнение (3.17) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{3.18}$$

Если в (3.17) подставить $y = y(x)$, — решение уравнения (3.16) или (3.17), — то получим

$$dU(x, y(x)) \equiv 0, \tag{3.19}$$

что равносильно тому, что

$$U(x, y) = C. \tag{3.20}$$

Наоборот, для любой функции $y(x)$, определяемой уравнением (3.20), имеем $U(x, y(x)) \equiv C$, следовательно, $dU = 0$. Поэтому соотношение (3.20), которое содержит произвольную постоянную, является общим интегралом уравнения (3.17), если это уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Для существования решения $y(x)$ уравнения (3.17), удовлетворяющего условию $y(x = x_0) = y_0$, необходимо, чтобы соотношение (3.20) определяло неявную функцию $y = y(x)$. Для этого нужно, чтобы выполнялись условия теоремы о неявной функции, а именно, условие

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = Q(x_0, y_0) \neq 0$$

и существовало бы такое C, при котором было выполнено соотношение $U(x_0, y_0) = C$. В этом случае решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$, определится из уравнения

$$U(x, y) = U(x_0, y_0).$$

Если же $Q(x_0, y_0) = 0$, но $P(x_0, y_0) \neq 0$, то можно найти решение в виде зависимости $x = x(y)$, при этом начальные условия имеют вид $x_0 = x(y_0)$. Решение нельзя найти, если одновременно $P(x_0, y_0) = 0$ и $Q(x_0, y_0) = 0$. Одновременное выполнение двух последних равенств определяет особые точки уравнения (3.17).

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3.4 (Необходимые и достаточные условия уравнения в полных дифференциалах)**.** *Чтобы уравнение* $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ *было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в односвязной области* $G(x, y)$ *(в частности, в прямоугольнике* $R : a < x < b$, $c < y < d$*) функции* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *были непрерывны вместе с их частными производными* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$*, причем всюду в* G *было выполнено условие* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *и* $Q(x, y) \neq 0$*. Тогда через любую точку* $(x_0, y_0) \in G$ *проходит одна и только одна интегральная кривая.*

Доказательство. Необходимость.

По условию теоремы имеем

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

то есть равенства (3.18) выполнены:

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}\ .$$

Продифференцируем первое из этих равенств по y, а второе — по x. В левой части получим: в первом случае $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, во втором $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. Поскольку по условию теоремы P'_y и Q'_x непрерывны, то по теореме Шварца о независимости частных производных от порядка дифференцирования

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

и, следовательно

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ .$$

Достаточность.

Доказательство проведем для прямоугольника R. Рассмотрим функцию

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\eta)d\eta.$$

Покажем, что полный дифференциал этой функции равен $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Действительно, используя правила дифференцирования интегралов, зависящих от параметров, вычислим частные производные от функции $U(x,y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x} dy =$$

$$= P(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x,y_0) + P(x,y) - P(x,y_0) = P(x,y).$$

Аналогично найдем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y).$$

Таким образом, на решении дифференциального уравнения (3.17) $dU = 0$ и, следовательно, его общий интеграл имеет вид:

$$U(x,y) \equiv \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C.$$

На практике для нахождения решения поступают несколько иначе. Это можно продемонстрировать на следующем примере. Рассмотрим уравнение

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 + 4y^3)dy = 0.$$

Легко видеть, что условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено.

Из условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$$

после интегрирования находим

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируя это выражение по y и приравнивая его

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3,$$

получаем уравнение для $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = 4y^3.$$

Интегрируя это уравнение, получим $\varphi(y) = y^4$ и, следовательно, общий интеграл имеет вид:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

3.7.2. Интегрирующий множитель

Если левая часть уравнения (3.17) не является полным дифференциалом, то возникает вопрос: нельзя ли найти такую функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую левая часть уравнения (3.17) станет полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$. Такая функция называется *интегрирующим множителем.*

Таким образом, если μ — интегрирующий множитель, то имеем

$$\mu(P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = dU; \qquad \mu P = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad \mu Q = \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \tag{3.21}$$

Возникает вопрос: для всякого ли уравнения первого порядка существует интегрирующий множитель? Оказывается, как легко можно показать, всякое дифференциальное уравнение первого порядка, удовлетворяющее некоторым условиям, имеет интегрирующий множитель. Более того, число интегрирующих множителей данного уравнения бесконечно. В самом деле, пусть μ есть какой-либо интегрирующий множитель уравнения (3.17), а $U(x, y) = C$ есть интеграл этого уравнения. Тогда $\mu_1 = \varphi(U)\mu$, где φ — произвольная дифференцируемая функция, также являющаяся интегрирующим множителем. Действительно, выражение

$$\mu_1(Pdx + Qdy) = \varphi(U)\mu(Pdx + Qdy) = \varphi(U)dU$$

является полным дифференциалом функции

$$\Phi(U) = \int \varphi(U)dU.$$

Следовательно, $\mu_1 = \varphi(U)\mu$ есть интегрирующий множитель уравнения (3.17).

Второй вопрос: как найти интегрирующий множитель? Из определения интегрирующего множителя, используя уравнение (3.21) и теорему о необходимых и достаточных условиях для уравнения в полных дифференциалах, имеем:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

или

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu \tag{3.22}$$

или же, деля обе части равенства (3.22) на μ,

$$Q\frac{\partial\ln\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{3.23}$$

Таким образом, мы получили в виде (3.22) или (3.23) *уравнение в частных производных* для определения неизвестной функции μ. Задача интегрирования такого уравнения в общем случае не проще (а на самом деле сложнее), чем задача решения уравнения (3.17). Конечно, нам достаточно знать только одно частное решение уравнения (3.22); иногда, по каким-нибудь особенностям уравнения (3.22), удается найти такое частное решение, и тогда интегрирование уравнения (3.17) сводится к квадратурам.

Рассмотрим, например, ситуацию, когда существует интегрирующий множитель, являющийся функцией только x: $\mu = \mu(x)$. В этом случае $\dfrac{\partial\mu}{\partial y} = 0$, и уравнение (3.23) превращается в следующее *обыкновенное* дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,. \tag{3.24}$$

Для существования $\mu = \mu(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x)$$

являлось функцией только x, тогда $\ln\mu$ находится квадратурой.

Пример. Решить уравнение

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$$

Здесь

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = 1, \qquad \mu = e^x.$$

Уравнение

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0.$$

есть уравнение в полных дифференциалах. Проинтегрируем это уравнение:

$$U(x, y) = \int e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \varphi(y) =$$

$$y\int e^x(2x + x^2)dx + \frac{y^3}{3}e^x + \varphi(y) = ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) + \varphi(y).$$

Для нахождения $\varphi(y)$ вычисляем $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ и приравниваем его μQ:

$$e^x(x^2 + y^2) + \varphi'(y) = e^x(x^2 + y^2),$$

откуда

$$\varphi'(y) = 0$$

и общий интеграл нашего уравнения есть

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$

Рассмотрим частный случай интегрирующего множителя, зависящего только от x, когда $Q(x,y)=1$. В этом случае уравнение имеет вид

$$dy - f(x,y)dx = 0, \tag{3.25}$$

и после деления на dx по форме практически совпадает с уравнением (3.16), разрешенным относительно производной.

В этом случае уравнение (3.24) для интегрирующего множителя принимает вид

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{3.26}$$

с условием, что $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ зависит только от x:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi(x);$$

тогда $f(x,y)$ имеет вид:

$$f(x,y) = \varphi(x)y + \psi(x),$$

т.е. *уравнение*, записанное в виде (3.25) и *допускающее интегрирующий множитель, зависящий только от* x, *есть линейное дифференциальное уравнение.*

Из уравнения (3.24) имеем

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\varphi(x), \qquad \mu = e^{-\int \varphi(x)\,dx}.$$

Переходя к обозначениям для линейного уравнения (3.12), приходим к заключению:

Линейное уравнение $\dfrac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$ *имеет интегрирующий множитель* $\mu = e^{-\int a(x)\,dx}$.

Таким образом, мы получили еще один способ интегрирования линейных уравнений.

Аналогично можно получить условие того, что дифференциальное уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y, и само выражение этого множителя.

Пример. Уравнение $\dfrac{dy}{dx} = y \operatorname{tg} x + \cos x$ имеет интегрирующий множитель $e^{-\int \operatorname{tg}(x)\, dx} = \cos x$; умножая на $\cos x\, dx$ обе части уравнения, имеем

$$\cos x\, dy - y \sin x\, dx - \cos^2 x\, dx = 0,$$

где левая часть есть полный дифференциал, так как условие $P'_y = Q'_x$ выполнено; интегрируя, находим

$$y \cos x - \int \cos^2 x\, dx = C,$$

или

$$y \cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x = C$$

– общий интеграл данного уравнения.

Заметим, что *разделение переменных свидится к умножению на некоторый интегрирующий множитель*.

В самом деле, если дано уравнение с разделяющимися переменными

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0,$$

то для разделения переменных достаточно умножить обе части на $\mu = \dfrac{1}{N(y)P(x)}$; ясно, что после умножения левая часть становится полным дифференциалом, т.е. μ есть интегрирующий множитель.

Пользуясь этим замечанием, можно найти интегрирующий множитель *однородного уравнения*:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

где M и N – однородные функции одной и той же степени m. Можно показать, что в этом случае однородное уравнение имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}\ . \tag{3.27}$$

Он не существует, если $M(x, y)x + N(x, y)y \equiv 0$, или если $\dfrac{M}{N} = -\dfrac{y}{x}$, т.е. для уравнения $y\,dx - x\,dy = 0$.

Пример. Решить уравнение

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0. \tag{3.28}$$

Данное уравнение – однородное и в соответствии с формулой (3.27) оно имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{x(x-y) + y(x+y)} = \frac{1}{x^2 + y^2}\,.$$

Умножая обе части уравнения на этот множитель и группируя члены, получаем

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\,d\,\ln(x^2 + y^2) + d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = 0,$$

откуда имеем общий интеграл данного уравнения

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}.$$

На практике для нахождения интегрирующего множителя часто применяется такой прием: все члены уравнения разбиваются на две группы, для каждой из которых было бы легко найти интегрирующий множитель; затем выписывают выражения наиболее общего интегрирующего множителя для каждой группы и определяют, нельзя ли выбрать входящие в эти выражения произвольные функции так, чтобы оба интегрирующих множителя оказались равными; если это возможно, то интегрирующий множитель найден.

Пример. Решить уравнение

$$(x - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Разбиваем уравнение на две группы:

$$(x\,dx) + (-y^2dx + 2xy\,dy) = 0.$$

Интегрирующий множитель первой скобки очевиден: он равен единице, а общее выражение интегрирующего множителя $\mu_1 = \varphi(x)$; у второй скобки очевиден интегрирующий множитель $\dfrac{1}{xy^2}$ (переменные разделяются); после умножения на него вторая скобка принимает вид $-\dfrac{dx}{x} + \dfrac{2y\,dy}{y^2}$ и может быть проинтегрирована. Получаем ее общий интеграл:

$$U_2 \equiv \frac{y^2}{x} = C.$$

Общее выражение для интегрирующего множителя второй скобки есть

$$\mu_2 = \frac{1}{xy^2}\psi\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

Теперь подбираем ψ так, чтобы μ_2 имело тот же вид, что μ_1, т.е. было функцией только от x; очевидно, для этого достаточно положить $\psi(U_2) = U_2$; окончательно получим $\mu = \frac{1}{x^2}$. Умножим данное уравнение на μ:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2xy\,dy - y^2dy}{x^2} = 0,$$

и проинтегрировав это уравнение, получим общий интеграл исходного уравнения

$$\ln x + \frac{y^2}{x} = C.$$

4. Общая теория. Численные методы

Дифференциальных уравнений, интегралы которых находятся элементарными приемами, немного. Как показал в 1841 г. Лиувилль, уже интегрирование уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x)$$

не сводится к квадратурам, т.е. к конечной последовательности элементарных действий над известными функциями и интегрированию этих функций (как это делалось выше). Поэтому большое значение приобретают приемы приближенного решения дифференциальных уравнений, применимые к очень широким классам дифференциальных уравнений. Но прежде чем приступать к приближенному решению дифференциальных уравнений, надо быть уверенным, что решения существуют. Поэтому вначале нужно рассмотреть теоремы существования решений дифференциальных уравнений. К тому же доказательства этих теорем часто указывают и методы приближенного нахождения решений.

4.1. Ломаные Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{4.1}$$

определенное в области $G(x, y)$. Как известно, уравнение (4.1) определяет в G поле направлений, по которому можно построить интегральные кривые.

Возьмем в области G некоторую точку (x_0, y_0). Ей будет соответствовать поле направления с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\alpha_0 = f(x_0, y_0)$, которое определяет некоторую прямую, проходящую через эту точку. Выберем на этой прямой в области G некоторую точку (x_1, y_1) (расположенную недалеко от (x_0, y_0)). Через точку (x_1, y_1) проведем прямую с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\alpha_1 = f(x_1, y_1)$, на которой выберем точку (x_2, y_2) из области G. Затем на прямой, соответствующей точке (x_2, y_2), выберем точку (x_3, y_3) и т.д. Пусть при этом $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ (такое же построение можно выполнять и в сторону убывающих значений x). Получим ломаные линии, которые называют *ломаными Эйлера.*

Естественно предполагать, что каждая из ломаных Эйлера с достаточно короткими звеньями дает некоторое представление об интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0), и что при уменьшении длин звеньев ломаные Эйлера будут приближаться к этой интегральной кривой. При этом, конечно, предполагается, что такая интегральная кривая существует. В самом деле, в дальнейшем мы покажем, что в случае непрерывности $f(x, y)$ можно построить такую последовательность ломаных Эйлера, которая будет сходиться к интегральной кривой. Однако при этом, вообще говоря, не будет единственности, т.е. могут существовать различные интегральные кривые, проходящие через одну и ту же точку (x_0, y_0).

В 1925 г. М. А. Лаврентьев показал, что в случае $f(x, y) \in C$ существуют такие дифференциальные уравнения, что в любой окрестности любой точки, принадлежащей G, через точку (x_0, y_0) проходит не одна, а по крайней мере две интегральные кривые, т.е. для единственности необходимы дополнительные требования к функции $f(x, y)$. Доказательство существования решения дифференциального уравнения (4.1) следует из леммы Арцела и принадлежит Пеано.

Теорема 4.1 (Теорема Арцела)**.** *Пусть на конечном интервале (a, b) дано семейство $\{f(x)\}$, состоящее из бесконечного множества функций $f(x)$, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных. Тогда из $f(x)$ можно выбрать равномерно сходящуюся бесконечную последовательность функций.*

Здесь равномерная ограниченность означает, что для любой функции $f(x)$ существует такая постоянная $M > 0$, что для любого $x : \; |f(x)| \; < \; M$. Тогда $f(x)$ равномерно ограничена: для любого $\varepsilon \; > \; 0$ существует такое η $(\eta \; = \; \eta(\varepsilon))$, что для всякой функции $f(x)$ рассматриваемого семейства будет выполнено неравенство

$$|f(x'') - f(x')| \; < \; \varepsilon$$

для любых $x'', x' \in (a, b)$ при $|x'' - x'| < \eta$.

Теорема 4.2 (Теорема Коши). *Если правая часть $f(x,y)$ уравнения $y' = f(x,y)$ ограничена и непрерывна в области G, то через любую внутреннюю точку G проходит по крайней мере одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x,y)$.*

Теорема 4.3 (Теорема Осгуда о единственности). *Если правая часть $f(x,y)$ дифференциального уравнения (4.1) для любой пары точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) области G удовлетворяет условию*

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| < \varphi(|y_2 - y_1|), \tag{4.2}$$

где функция $\varphi(u) > 0$ при $0 < u \leqslant a$ непрерывна и такова, что интеграл $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{a} \frac{du}{\varphi(u)} \to \infty$, когда $\varepsilon \to 0$, то через любую точку (x_0, y_0) области G проходит не больше одной интегральной кривой дифференциального уравнения (4.1).

В качестве примеров функции $\varphi(u)$ приведем следующие: Ku, $Ku|\ln u|$, $Ku|\ln u| \cdot \ln|\ln u|$ и т.д. Здесь K означает некоторую положительную постоянную.

Наиболее часто доказывают теорему о единственности решения, полагая $\varphi(u) \equiv Ku$. В этом случае условие (4.2) перепишется следующим образом:

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leqslant K|y_2 - y_1|. \tag{4.3}$$

Условие (4.3) называется *условием Липшица* по y. В частности, если область G выпукла по y, то этому условию, например, удовлетворяет любая $f(x,y)$, имеющая ограниченную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Действительно, применяя теорему Лагранжа, мы получим:

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \equiv |f'_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1))||y_2 - y_1| \leqslant K|y_2 - y_1|,$$

где $K = \sup\limits_{y} |f'_y|$ и $0 < \theta \leqslant 1$.

Доказательство теоремы. Пусть существуют два таких решения y_1 и y_1, что

$$y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0.$$

Будем считать $x_0 = 0$. Это всегда можно сделать заменой x на $x + x_0$. Положим

$$y_2(x) - y_1(x) = z(x),$$

так что $z(0) = 0$.

Так как $y_2(x)$ не равно тождественно $y_1(x)$, то существует x_1 такое, что $z(x_1) \neq 0$. Можно считать, что $z(x) > 0$, так как в противном случае вместо разности $y_2(x) - y_1(x)$ достаточно будет взять в качестве $z(x)$ разность $y_1(x) - y_2(x)$. Точно так же, без ограничения общности, можно предполагать, что $x_1 > 0$, так как в противном случае x можно заменить на $-x$.

Заметим, что

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqslant \varphi(|y_2 - y_1|) < 2\varphi(|y_2 - y_1|), \tag{4.4}$$

если

$$|y_2 - y_1| > 0.$$

Построим теперь решение $y(x)$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 2\varphi(y),$$

которое при $x = x_1$ обращается в $z(x_1) = z_1$. Такое решение существует и единственно (см. п. 3.2). График этого решения асимптотически приближается к отрицательной части оси Ox и никогда ее не пересекает. В точке (x_1, z_1) кривые $z(x)$ и $y(x)$ пересекутся. Из неравенства

$$z'(x_1) < 2\varphi(z_1) = 2\varphi(y(x_1)) = y'(x_1)$$

непосредственно следует существование интервала $(x_1 - \varepsilon,\ x_1)$, $\varepsilon > 0$, на котором $z(x) > y(x)$.

Но это неравенство справедливо при любом ε, $0 < \varepsilon \leqslant x_1$, так как в противном случае, выбирая в качестве ε его наибольшее значение, мы сразу же придем к противоречию. Действительно, тогда при $x = x_1 - \varepsilon = x_2$ мы бы имели

$$z'(x_2) \geqslant y'(x_2) = 2\varphi(y(x_2)) = 2\varphi(z(x_2)), \tag{4.5}$$

так как правее x_2

$$z(x) > y(x).$$

С другой стороны, проводя рассуждения, аналогичные тем, которые привели нас к неравенству (4.4), мы получим

$$z'(x_2) < 2\varphi(z(x_2)),$$

что противоречит неравенству (4.5).

Значит, при любом x из интервала $0 \leqslant x \leqslant x_1$ выполнена система неравенств

$$z(x) \geqslant y(x) > 0,$$

и, в частности, $z(0) > 0$, а это противоречит первоначальному предположению. Теорема доказана.

4.2. Метод последовательных приближений (метод Пикара)

Теорема 4.4 (существования и единственности)**.** *Пусть в области G на плоскости (x, y) функция $f(x, y)$ непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по y:*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant L|y_2 - y_1|,$$

в любой замкнутой ограниченной области $\bar{G}' \subset G$ (постоянная L может зависеть от выбора $\bar{G}'$).

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ существует такой отрезок $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, на котором существует единственное решение задачи Коши для дифференциального уравнения

(4.1):

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Замечание. Из непрерывности по x и условия Липшица по y следует непрерывность $f(x,y)$ по совокупности x, y (докажите этот факт самостоятельно).

Доказательство теоремы. Существование.

Докажем равносильность уравнения

$$y' = f(x,y) \tag{4.7}$$

некоторому интегральному уравнению.

Пусть решение $y = y(x)$ существует, тогда подстановка этого решения в уравнение (4.7) дает тождество $y'(\xi) \equiv f(\xi, y(\xi))$. Проинтегрировав это тождество по x, получим:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi. \tag{4.8}$$

Здесь $f(\xi, y(\xi))$ — непрерывная функция от ξ, так как $y(\xi)$ — дифференцируемая функция и, следовательно, $y(\xi)$ непрерывна. Таким образом, всякое решение уравнения (4.7), обращающееся в y_0 при x_0, удовлетворяет интегральному уравнению (4.8).

Наоборот, пусть $y(x)$ — непрерывное решение (4.8). Оно удовлетворяет задаче Коши, поскольку

(1) выполняется начальное условие $y(x_0) = y_0$,

(2) его можно дифференцировать, так как если под знак интеграла в (4.8) подставить непрерывную функцию $y(x)$, то правая часть (4.8) будет дифференцируемой функцией, следовательно, левая часть также является дифференцируемой функцией. Тот факт, что решение (4.8) удовлетворяет уравнению (4.7), легко проверяется непосредственным дифференцированием интегрального уравнения (4.8).

Таким образом, вместо доказательства существования на некотором замкнутом отрезке $[a, b]$ единственного решения задачи Коши (4.6) достаточно доказать, что на этом отрезке существует единственное решение интегрального уравнения (4.8).

Возьмем какую-нибудь замкнутую ограниченную область $\bar{G}'$, содержащую точку $A(x_0, y_0)$ в качестве внутренней точки, и пусть

$$M = \sup_{\overline{G}'} |f(x, y)| \,.$$

Проведем через точку $A(x_0, y_0)$ две прямые DC и BE с угловыми коэффициентами $+M$ и $-M$ соответственно. Далее, проведем вертикальные прямые так, чтобы они образовали вместе с прямыми DC и BE два равнобедренных треугольника, лежащих в $\bar{G}'$ (рис. 4.1). Пусть уравнение прямой ED будет $x = a$, а уравнение прямой CB будет $x = b$. Несколько позже мы наложим дополнительные ограничения на числа a и b, так как они должны быть достаточно близки к x_0.

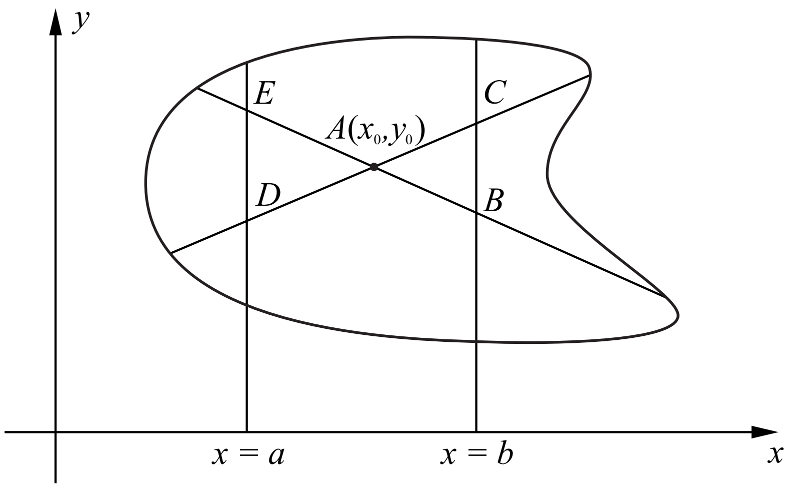

Рис. 4.1. *Отрезок, на котором существует решение уравнения $y' = f(x, y)$*

Выберем произвольно на отрезке $[a, b]$ непрерывную функцию $\varphi_0(x)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$|\varphi_0(x) - y_0| \leqslant M \, |x - x_0| \,,$$

то есть, чтобы график $\varphi_0(x)$ не выходил из $\bar{G}'$ и лежал между прямыми DC и BE (рис. 4.1). Подставив $\varphi_0(x)$ в правую часть уравнения (4.8), определим $\varphi_1(x)$ следующим образом:

$$\varphi_1(x) \rightleftharpoons y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi))d\xi. \tag{4.9}$$

Функция $\varphi_1(x)$ определена при $a \leqslant x \leqslant b$, непрерывна, и удовлетворяет условию $\varphi_1(x_0) = y_0$, ее график принадлежит $\triangle EAD$ или $\triangle ABC$, так как $|f(\xi, \varphi_0(\xi))| \leqslant M$.

Из уравнения (4.9) следует, что

$$|\varphi_1(x) - y_0| \leq \int\limits_{x_0}^{x} |M| d\xi,$$

следовательно

$$|\varphi_1(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0|.$$

Отсюда следует, что $\varphi_1(x)$ из того же класса функций, что и $\varphi_0(x)$.

Далее, положим

$$\begin{gathered}
\varphi_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi))d\xi, \\
\varphi_3(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_2(\xi))d\xi, \\
\dots \\
\varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi.
\end{gathered} \tag{4.10}$$

Этот процесс построения функций $\varphi_n(x)$, которые называются *последовательными приближениями решения*, можно продолжать бесконечно. Таким образом, мы получаем бесконечную последовательность функций:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots. \tag{4.11}$$

Докажем теперь, что на отрезке $[a,b]$ эта последовательность сходится равномерно к непрерывному решению уравнения (4.8). Запишем $\varphi_n(x)$ в виде:

$$\varphi_n(x) = \varphi_1(x) + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + [\varphi_3(x) - \varphi_2(x)] + \ldots$$
$$\ldots + [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)]. \quad (4.12)$$

Следовательно, чтобы доказать равномерную сходимость последовательности (4.10), достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\varphi_1(x) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + (\varphi_3(x) - \varphi_2(x)) + \ldots$$
$$\ldots + (\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)) + (\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)) + \ldots \quad (4.13)$$

Для этого оценим разность $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$. Используя условие Липшица, получим

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| = \int\limits_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi_n(\xi)) - f(\xi, \varphi_{n-1}(x))]\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant L \left| \int\limits_{x_0}^{x} |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| d\xi \right| \leqslant L \max_{a<\xi<b} |\varphi_n(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)|(b-a). \quad (4.14)$$

Если взять C такое, чтобы $|\varphi_0(x)| \leqslant C$ и $|\varphi_1(x)| \leqslant C$ и положить $L(b-a) = m$, то для ряда (4.13) получим мажорирующий числовой ряд:

$$C + 2C + 2Cm + 2Cm^2 + 2Cm^3 + \ldots. \quad (4.15)$$

Этот ряд сходится, если $m < 1$, поэтому выберем интервал (a,b) так, чтобы $L(a-b) = m < 1$, тогда по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (4.13) сходится равномерно. Следовательно его сумма $\varphi(x)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[a,b]$, ее график принадлежит треугольникам EAD и

ABC и интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))d\xi$ имеет смысл. Так как

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))]d\xi\right| \leqslant L \left|\int\limits_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)|d\xi\right|,$$

то в последовательности (4.10) можно переходить к пределу при $n \to \infty$ не только слева, но и справа, а поэтому функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (4.8).

Единственность. Чтобы доказать, что интегральное уравнение (4.8) имеет единственное решение, непрерывное на замкнутом отрезке $[a, b]$ и поэтому ограниченное, будем рассуждать от противного. Пусть есть два решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющие уравнению (4.8):

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))\, d\xi, \qquad \psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))\, d\xi.$$

Оценим их разность по модулю:

$$|\psi(x) - \varphi(x)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} [f(\xi, \psi(\xi)) - f(\xi, \varphi(\xi))]d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant L(b-a) \max_{x\in[a,b]} |\psi(x) - \varphi(x)|.$$

Отсюда получим

$$\max_{x\in[a,b]} |\psi(x) - \varphi(x)| \leqslant L(b-a) \max_{x\in[a,b]} |\psi(x) - \varphi(x)|.$$

Так как всегда можно выбрать $L(b-a) < 1$, то получим неравенство $0 \leqslant \xi \leqslant k\xi,\ k < 1$, которое верно только при $\xi = 0$. Следовательно $\max\limits_{x\in[a,b]} |\psi(x) - \varphi(x)| = 0$ и, значит, $\psi(x)$ тождественно совпадает с $\varphi(x)$.

Замечание 1. Для любой функции $\varphi_0(x)$ последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к одной и той же функции $\varphi(x)$ (по теореме единственности).

Замечание 2. Решение можно продолжать вправо (влево) вплоть (как угодно близко!) до границы области G, если область G ограничена.

Замечание 3. Оценим точнее $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$ и докажем, что ряд (4.13) сходится не только на отрезке $[a, b]$. Пусть последовательность $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ существует на некотором конечном интервале $[c, d]$ (в частности, если область G содержит полосу $c \leqslant x \leqslant d,\ -\infty < y < +\infty$) и $f(x, y)$ удовлетворяет в пересечении области G с полосой $c \leqslant x \leqslant d, -\infty < y < +\infty$ условию Липшица по y с единой константой L. *Тогда последовательные приближения равномерно сходятся на отрезке* $[c, d]$ *к решению задачи.* При этом условие ограниченности функции $f(x, y)$ и указанное выше ограничение на длину отрезка $[a, b]$, на котором строится решение, оказываются несущественными.

Действительно, положим $N = \max\limits_{[c,\ d]} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)|$. Тогда аналогично неравенствам (4.14) получаем

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))] d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant L \left| \int\limits_{x_0}^{x} |\varphi_1(\xi) - \varphi_0(\xi)| d\xi \right| \leqslant L \left| \int\limits_{x_0}^{x} N d\xi \right| = \frac{|x - x_0|}{1!} NL;$$

$$|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \leqslant L \left| \int\limits_{x_0}^{x} |\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)| d\xi \right| \leqslant \frac{|x - x_0|^2}{2!} NL^2.$$

Вообще

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \frac{(x - x_0)^n}{n!} NL^n, \forall x \in [c, d]. \qquad (4.16)$$

Следовательно, ряд

$$\frac{|x-x_0|}{1!}NL+\frac{|x-x_0|^2}{2!}NL^2+\ldots+\frac{|x-x_0|^n}{n!}NL^n+\ldots$$

сходится равномерно для любых $|x-x_0|$. Значит ряд (4.13) сходится равномерно.

Пользуясь соотношением

$$\varphi(x)=\varphi_m(x)+[\varphi_{m+1}(x)-\varphi_m(x)]+[\varphi_{m+2}(x)-\varphi_{m+1}(x)]+\ldots$$

и применяя оценки (4.16), получим:

$$|\varphi(x)-\varphi_m(x)|\leqslant$$

$$\leqslant NL^m(x-x_0)^m\left[\frac{1}{m!}+L\frac{|x-x_0|}{(m+1)!}+L^2\frac{|x-x_0|^2}{(m+2)!}+\ldots\right].$$

Эта формула позволяет оценить отклонение m-го приближения от точного, еще неизвестного решения.

Пример. Решить методом Пикара уравнение, решение которого не выражается через элементарные функции:

$$\begin{cases} y'(x)=x^2+y^2,\\ y(0)=0.\end{cases}$$

Пусть

$$y_0(x)=0.$$

Тогда по формулам (4.10) последовательно получим

$$y_1(x)=\tfrac{1}{3}x^3;$$

$$y_2(x)=\int\limits_0^x(x^2+\tfrac{1}{9}x^6)dx=\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{63}x^7;$$

$$y_3(x)=\tfrac{1}{3}x^3(1+\tfrac{1}{21}x^4+\tfrac{2}{693}x^8+\tfrac{1}{19845}x^{12}).$$

При $|x|\leqslant 1$ эти приближения быстро сходятся. Метод Пикара выгодно применять, когда интегралы в правой части можно вычислить через элементарные функции. В противном случае (если интегралы надо находить численно) метод Пикара неудобен.

4.3. Сеточные методы решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{4.17}$$

где $x \in [x_0, X]$, x_0 — начальная точка отрезка.

По теореме существования и единственности, если правая часть $f(x, y)$ дифференциального уравнения (4.17) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y, то решение существует и единственно.

Основные методы решения следующие:

(1) *точные методы,* когда решение получается в элементарных функциях или квадратурах от них. Недостатки точных методов:

(a) только очень ограниченные классы уравнений допускают точные решения;

(b) бывает, что понять структуру и качественный вид общего решения достаточно сложно, даже при наличии точного решение.

Пример. Уравнение $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$ (см. выше уравнение (3.27)) имеет общий интеграл

$$\frac{1}{2} \ln(y^2 + x^2) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C. \tag{4.18}$$

Однако для того, чтобы составить таблицу значений $y(x)$, надо численно решить трансцендентное уравнение (4.18), что нисколько не проще, чем непосредственно численно проинтегрировать исходное дифференциальное уравнение. Понять структуру решения этого уравнения можно также методом изоклин.

(2) *приближенные методы,* в которых решение получается как предел $y(x)$ некоторой последовательности $u_n(x)$

при $n \to \infty$, причем $u_n(x)$ выражаются через элементарные функции или через квадратуры от них. Если ограничиться конечным числом n, то получим приближенное аналитическое выражение для искомого решения $y(x)$. Примером приближенного метода является метод Пикара, рассмотренный выше при доказательстве теоремы существования. Примером может также служить метод разложения решения в обобщенный степенной ряд, который будет рассмотрен в дальнейшем. Однако эти методы удобны, только когда большую часть промежуточных выкладок удается сделать точно (например, найти явные выражения для коэффициентов ряда). Это выполнимо лишь в случае сравнительно простых задач (таких, как линейные), что сильно сужает область применения приближенных методов.

(3) *численные методы*: алгоритм вычисления приближенных значений (иногда — точных) искомого решения $y(x)$ на некотором дискретном множестве $D_h : \{x_n\}$ выбранных значений аргумента (так называемая "сетка"). Решение имеет вид таблицы (то есть дискретно!).

Недостаток численных методов состоит в том, что общее решение не может быть найдено — решаются только задача Коши или другие задачи (например, краевые задачи).

Достоинства численных методов заключаются в том, что они применимы к очень широким классам уравнений и всем типам задач для них. После появления ЭВМ они стали одним из основных методов решения.

Численные методы можно применять к корректно поставленным (регулязированным) задачам. Более того, требуется *хорошая обусловленность* задачи, то есть малое изменение начальных условий должно приводить к достаточно малому изменению интегральных кривых. Если это условие не выполнено, т.е. задача *плохо обусловлена*, то небольшие изменения начальных условий или небольшие погрешности численного метода могут сильно исказить решение.

В качестве примера плохой обусловленности рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} y' = y - x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 100, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Общее решение содержит одну произвольную постоянную:

$$y_{\text{общ}} = 1 + x + Ce^x.$$

Из начального условия $y(0) = 1$ следует, что $C = 0$, так что получаем $y(100) = 101$. Однако даже небольшая погрешность в начальном условии $\tilde{y}(0) = 1{,}000001$ дает значение $C = 10^{-6}$, откуда находим $\tilde{y}(100) = 2{,}7 \cdot 10^{37}$, т.е. решение изменилось очень сильно.

4.4. Метод ломаных (Метод Эйлера)

Это простейший численный метод. В практических вычислениях он применяется очень редко из-за невысокой точности. Однако на его примере удобно пояснить способы построения и исследования численных методов.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \; x \in [x_0, X]. \end{cases} \tag{4.19}$$

Проведем дискретизацию задачи:

(1) Зададим сетку $D_h\{x_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant N\}$, такую что $x_0 < x_1 < \ldots < x_N = X$, $h_n = x_{n+1} - x_n$. Наряду с (дифференцируемой) функцией $y(x)$, в дальнейшем будем рассматривать сеточную (дискретную) функцию $u^{(h)}$, определенную только в узлах сетки $D_h: \quad u_n = u(x_n)$.

(2) Разложим $y(x)$ по формуле Тейлора на интервале $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}$, обозначив $y(x_n) = y_n$; $y_{n+1} = y(x_{n+1})$. Получим

$$y_{n+1} = y_n + h_n y_n' + \frac{1}{2} h_n^2 y_n'' + \ldots; \quad h_n = x_{n+1} - x_n. \tag{4.20}$$

Дифференцируя уравнение (4.19) нужное число раз, можно найти производные y', y'' и т.д., входящие в (4.20)

$$y' = f(x,y); \quad y'' = \frac{d}{dx} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = f_x' + f f_y' \tag{4.21}$$

и т.д.

Однако использовать для расчетов формулу (4.20) с большим числом членов невыгодно. Во-первых, даже при сравнительно простой правой части выражения для производных могут оказаться громоздкими. Во-вторых, если правая часть известна лишь приближенно, то находить ее производные нежелательно, поскольку это может привести к большим погрешностям.

Подставляя (4.21) в (4.20) и ограничиваясь только первым членом разложения, получим:

$$u_{n+1} = u_n + h_n f(x_n, u_n), \qquad h_n = x_{n+1} - x_n. \tag{4.22}$$

Поскольку при такой замене можно найти только приближенные значения искомой функции в узлах сетки, то эти значения обозначены u_n в отличие от точных значений $y_n = y(x_n)$. Заметим, что при отбрасывании членов высшего порядка в (4.20) была допущена погрешность $O(h^2)$.

Для численного расчета по схеме ломаных (4.22) необходимо задать начальное значение $u_0 = y_0$, тогда по формуле (4.22) можно вычислить $u_1, u_2, \ldots, u_N$.

Геометрическая интерпретация этой схемы дана на рис. 4.2, где изображено поле интегральных кривых уравнения (4.19). Использование только первого члена в формуле Тейлора означает движение не по интегральной кривой, а по касательной

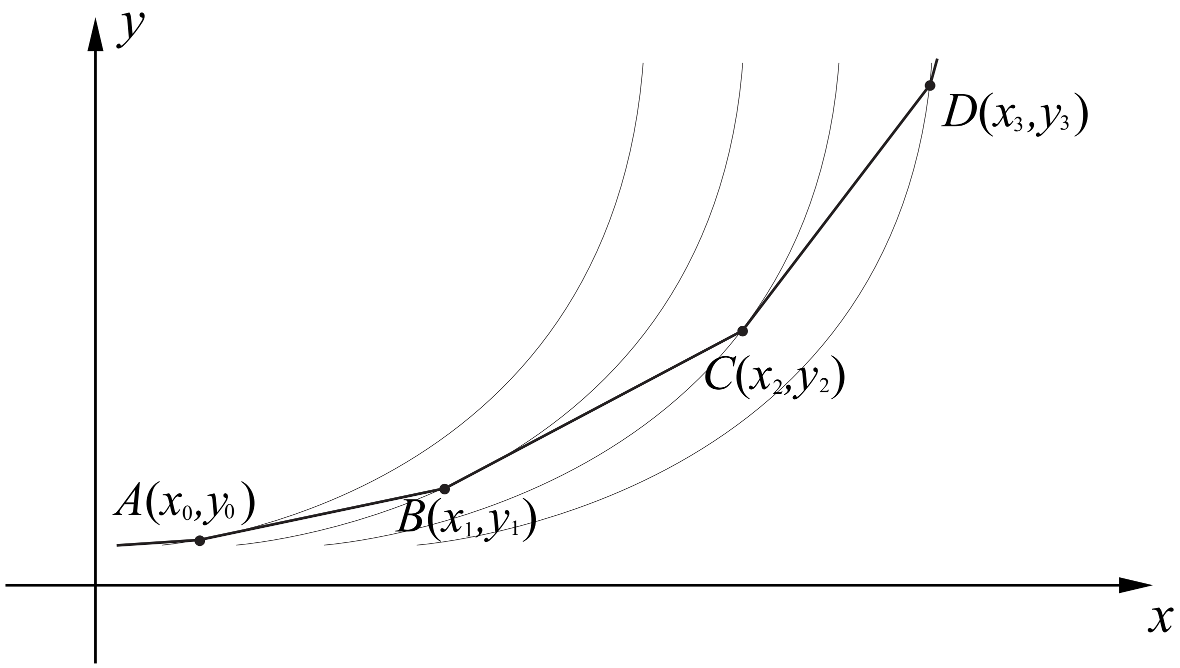

Рис. 4.2. *Геометрическая интерпретация метода Эйлера*

к ней. На каждом шаге мы заново находим наклон касательной, т.е. касательную проводим каждый раз не к исходной интегральной кривой, а к той, которая проходит через точку, полученную на текущем шаге. Следовательно, траектория движения будет ломаной линией, образованной из касательных к полю интегральных кривых (рис. 4.2).

4.4.1. Сходимость метода ломаных

Пусть $f(x, y)$ непрерывна и ограничена вместе с первыми производными

$$|f| \leqslant M_1, \quad |f_x| \leqslant M_2, \quad |f_y| \leqslant M_3,$$

откуда следует, что (см. (4.21))

$$|y''| \leqslant M_4 = M_2 + M_1 M_2.$$

Будем рассматривать погрешность приближенного решения $z_n = u_n - y_n$. Вычитая (4.20) из (4.22), получим соотношение, связывающее погрешности в соседних узлах сетки:

$$z_{n+1} = u_n + h_n f(x_n, u_n) - y_n - h_n f(x_n, y_n) - \frac{1}{2}h_n^2 y_n'' + O(h_n^3) =$$
$$= z_n(1 + hf_y')_n - \frac{1}{2}h_n^2 y_n'' + O(h_n^3),$$

где мы использовали следующие преобразования

$$f(x_n, u_n) - f(x_n, y_n) = f(x_n, y_n + (u_n - y_n)) - f(x_n, y_n) =$$
$$= f(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(u_n - y_n) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u_n - y_n)^2 + \ldots - f(x_n, y_n) \approx$$
$$\approx (f_y)_n z_n$$

и ограничились линейным членом, то есть окончательно мы имеем

$$z_{n+1} = z_n(1 + hf_y)_n - \frac{1}{2}h_n^2 y_n''. \qquad (4.23)$$

Применяя рекуррентную формулу (4.23) m раз, выразим погрешность на произвольном шаге через погрешность начальных данных:

$$z_m = z_0 \prod_{n=0}^{m-1}(1 + hf_y')_n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m-1} h_n^2 y_n'' \prod_{k=n+1}^{m-2}(1 + hf_y')_k. \qquad (4.24)$$

Дадим асимптотическую оценку погрешности. Заметим, что при достаточно малых шагах сетки справедлива следующая цепочка приближенных равенств:

$$\prod_{n=0}^{m-1}(1 + hf_y')_n \approx \prod_{n=0}^{m-1}\exp(hf_y')_n + O(h_n^2) =$$
$$= \exp\sum_{n=0}^{m-1}(hf_y')_n + O(h_n^2) \approx \exp\left(\int_{x_0}^{x_{m-1}} f_y'(\tau, y(\tau))d\tau\right) \approx$$
$$\approx \exp\left(\int_{x_0}^{x_m} f_y'(\tau, y(\tau))d\tau\right),$$

причем в качестве верхнего предела интеграла можно взять x_m, ибо ошибка при этом остается в пределах общей точности преобразований.

Аналогично, преобразуя второй член в (4.24), получим

$$z_m = z_0 \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x_m} f'_y d\tau\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_m} d\tau h(\tau) y''(\tau) \exp\left(\int\limits_{\tau}^{x_m} f'_y d\mu\right), \tag{4.25}$$

где $h(x)$ — некоторая непрерывная функция, которая в каждом узле x_n равна $h_n : h(x_n) = h_n$; в качестве такой функции можно взять, например, кусочно-линейную функцию.

Рассмотрим структуру погрешности в (4.24). Первое слагаемое связано с погрешностью начального значения $z_0 = u_0 - y_0$, которая умножается на ограниченную (благодаря ограниченности производных) величину. Начальное значение можно задать точно и считать, что $z_0 = 0$. Второе слагаемое обусловлено отброшенными членами в формуле Тейлора (4.20) при выводе схемы ломаных (4.22). Оценим это слагаемое сверху; заменяя все функции под интегралами их модулями и вынося $\max h(x)$ за знак интеграла, получим

$$|z_m| \leqslant M(x_n) \max_{0\leqslant n\leqslant m} h_n = O(\max h_n), \tag{4.26}$$

где

$$M(x_m) = \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_m} d\tau\, |y''(\tau)| \exp\left(\int\limits_{\tau}^{x_m} |f'_y| d\mu\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M_4}{2M_3} e^{M_3|x_m - x_0|} \cdot |x_m - x_0|. \tag{4.27}$$

так как $|y''(\tau)| \leqslant M_4$ и экспонента не превышает $e^{M_3(x_m-\tau)}$.

Следовательно, при $h \to 0$ *приближенное решение сходится к точному равномерно (на ограниченном интервале $|x - x_0| \leqslant a$) с первым порядком точности.*

Замечание 1. Оценка погрешности (4.26) — мажорантная. Для функций со знакопеременными производными она может быть сильно завышена по сравнению с асимптотической оценкой (4.25).

Замечание 2. Первый (экспоненциальный) член в оценке (4.25) характеризует расхождение интегральных кривых (см. рис. 4.1); если он очень велик, то исходная задача Коши плохо обусловлена.

4.5. Метод Рунге-Кутта

Этот метод позволяет строить схемы различного порядка точности. Построим семейство схем второго порядка и на его примере разберем основные особенности метода.

В качестве исходного выражения возьмем ряд Тейлора (4.20), оставив в нем член второго порядка точности, порядок которого равен предполагаемому порядку точности схемы

$$y_{n+1} = y_n + h_n y'_n + \frac{1}{2} h_n^2 y''_n. \tag{4.28}$$

Чтобы избежать дифференцирования, запишем вторую производную в виде:

$$y'' = \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x, y)}{\Delta x}, \tag{4.29}$$

где нужно подобрать $\tilde{x}, \tilde{y}$ и Δx так, чтобы обеспечить максимально возможную точность. Возьмем, например, $\tilde{x} = x_n + \gamma h$, $\tilde{y} = u_n + \delta h$.

После такой замены, объединив второй и третий члены в (4.28) и заменяя y_n сеточной функцией u_n, приведем это выражение к виду

$$u_{n+1} = u_n + h \left[\beta f(x_n, u_n) + \alpha f(x_n + \gamma h, u_n + \delta h) \right], \tag{4.30}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — параметры, которые нужно определить.

Рассматривая правую часть (4.30) как функцию h, разложим ее в ряд по степеням h. Получим:

$$f(x_n + \gamma h, u_n + \delta h) = f(x_n, u_n) + (\gamma f_x + \delta f_y)_n h + \ldots$$

$$u_{n+1} = u_n + h(\alpha + \beta)\underbrace{f(x_n, u_n)}_{y'} + \alpha h^2 \underbrace{(\gamma f_x + \delta f_y)_n}_{1/2[f_x + f f_y{}']} + \ldots$$

Выберем $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ так, чтобы это разложение было наиболее близко к ряду (4.28). Чтобы правильно передать два первых члена формулы Тейлора, необходимо положить

$$\alpha + \beta = 1; \quad \alpha\gamma = \frac{1}{2}; \quad \alpha\delta = \frac{1}{2} f(x_n, u_n).$$

Для определения четырех параметров мы получили только три уравнения, так что один параметр остается свободным. Выразим через α все остальные параметры

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha, \\ \gamma = \dfrac{1}{2\alpha}, \\ \delta = \dfrac{f_n}{2\alpha}, \end{cases}$$

и подставим их в (4.30). Получим однопараметрическое семейство двучленных схем Рунге-Кутта

$$u_{n+1} = u_n + h\left[(1 - \alpha) f(x_n, u_n) + \alpha f(x_n + \frac{h}{2\alpha}, u_n + \frac{h}{2\alpha} f_n)\right], \tag{4.31}$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$. Выбрать параметр α так, чтобы схема (4.31) правильно передавала третий член формулы Тейлора (4.20), невозможно.

Погрешность можно исследовать аналогично методу ломаных. При этом доказывается следующий результат.

Теорема 4.5. *Если $f(x, y)$ непрерывна и ограничена вместе со своими вторыми производными, то решение, полученное по схеме Рунге-Кутта (4.31), равномерно сходится к точному* *решению с погрешностью $O(\max\limits_n h_n^2)$, т.е. двучленная схема Рунге-Кутта имеет второй порядок точности.*

Формула (4.31) имеет неплохую точность и нередко используется в численных расчетах. При вычислениях обычно полагают либо $\alpha = 1$, либо $\alpha = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим случай $\alpha = 1$ (модифицированный метод Эйлера):

$$u_{n+1} = u_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} f_n).$$

Ее смысл поясняет рис. 4.3.

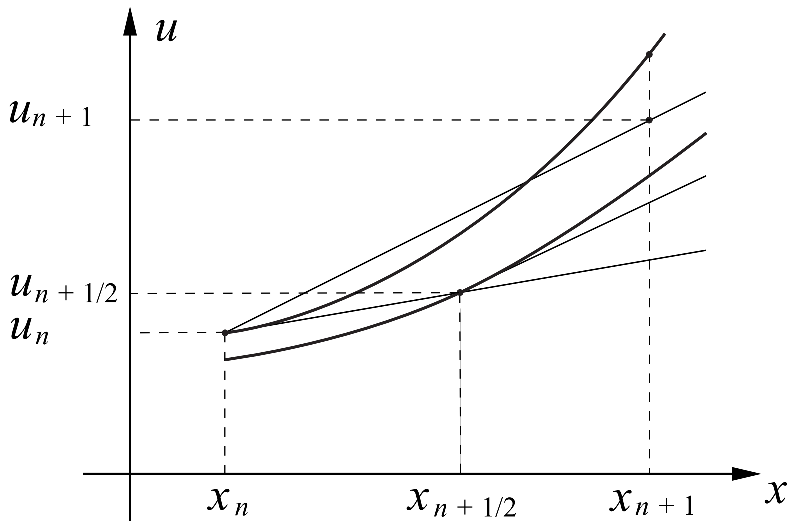

Рис. 4.3. *Модифицированный метод Эйлера*

Вычисления соответствуют следующим геометрическим движениям:

(1) Совершаем полушаг $h/2$ по методу Эйлера, находим координаты "полуцелой" точки $x_n + \dfrac{h}{2}, u_n + \dfrac{h}{2} f_n$. В найденной точке определяем наклон интегральной кривой $f(x_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = u'_{n+1/2}$;

(2) По найденному значению $u'_{n+1/2}$ вычисляем u_{n+1}, используя модифицированное значение наклона u': $u_{n+1} = u_n + hu'_{n+1/2}$.

Каждое из этих движений происходит по методу Эйлера.
Геометрическая интерпретация второго случая ($\alpha = 1/2$):

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, u_n) + f(x_n + h, u_n + hf_n)\right]$$

следующая (рис. 4.4):

(1) Производится шаг по схеме Эйлера и грубо приближенно находится значение функции $\bar{u}_{n+1} = u_n + hf_n$ и наклон интегральной кривой $\bar{u}'_{n+1} = f(x_{n+1}, \bar{u}_{n+1})$ в новой точке.

(2) Определяется средний наклон на шаге как полусумма начального и предсказанного конечного значений наклона $u'_{n+1/2} = \frac{1}{2}(u'_n + \bar{u}'_{n+1})$ и по нему уточняется u_{n+1}.

Схемы подобного типа нередко называют “предиктор-корректор”.

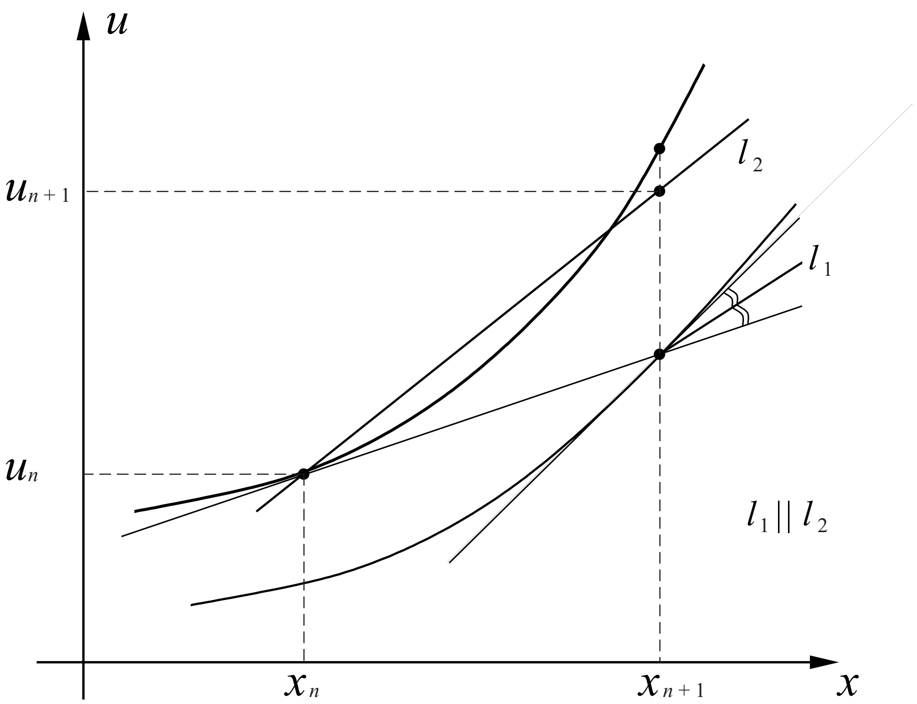

Рис. 4.4. *Геометрическая интерпретация схемы предиктор-корректор*

Методом Рунге-Кутта можно построить схемы различного порядка точности. Например, схема ломаных есть схема

Рунге-Кутта первого порядка точности. Наиболее употребительны схемы четвертого порядка, образующие семейство четырехчленных схем. Приведем без вывода ту из них, которая записана в большинстве стандартных программ ЭВМ:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$
$$k_1 = f(x_n, u_n); \quad k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_1);$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_2); \quad k_4 = f(x_n + h, u_n + hk_3).$$

Схемы Рунге-Кутта имеют ряд важных достоинств:

(1) Все они (кроме схемы ломаных) имеют хорошую точность.
(2) Они являются явными, т.е. значение u_{n+1} вычисляются по ранее найденным значениям по определенным (явным) формулам.
(3) Допускают переменный шаг, поэтому можно уменьшать шаг там, где функция быстро меняется и увеличивать его в обратном случае.
(4) Не нужны предварительные расчеты. Все вычисления проводятся по одним и тем же формулам.

В практических расчетах для оценки точности используют повторный расчет. Сначала проводят расчет с шагом h, затем с шагом $h/2$ и погрешность решения с шагом $h/2$ оценивают по формуле:

$$\left|[y]_n - u^{(h/2)}\right| \approx \left|u^{(h)} - u^{(h/2)}\right| \cdot \frac{1}{2^p - 1},$$

где p есть порядок аппроксимации. Эта формула может быть получена из принципа Рунге.

5. Уравнения, не разрешенные относительно производной

5.1. Основная теорема о решении уравнения, не разрешенного относительно производной

Рассмотрим вначале следующий простой пример.

Пример. Пусть уравнение имеет вид:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0. \tag{5.1}$$

Очевидно, оно равносильно совокупности двух независимых уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = +1, \\ \frac{dy}{dx} = -1. \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Первое из этих уравнений задает поле направлений, наклоненное к оси OX под углом $45°$, а второе — поле направлений, наклоненное к оси OX под углом $135°$. Уравнению же (5.1) соответствует поле направлений, полученное наложением полей уравнений (5.2). Через каждую точку плоскости (x, y) проходит одна и только одна интегральная линия первого из уравнений (5.2) — прямая, наклоненная к оси OX под углом $45°$,

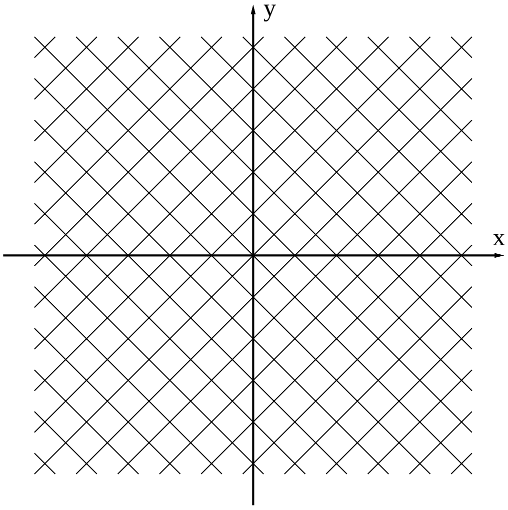

Рис. 5.1. *Интегральные линии уравнения (5.1)*

одна и только одна интегральная линия второго из уравнений (5.2) — прямая, наклоненная к оси OX под углом $135°$. Значит, через каждую точку плоскости (x, y) проходят ровно две интегральных линии уравнения (5.1) (рис. 5.1).

Имеет место следующая общая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть дано уравнение*

$$F(x, y, y') = 0, \tag{5.3}$$

где функция $F(x, y, y')$ обладает тремя свойствами:

(1) *$F(x, y, y')$ определена в замкнутой и ограниченной области $\bar{G}$ пространства (x, y, y'), где она непрерывна.*

(2) *Для некоторой точки (x_0, y_0) в плоскости (x, y) число различных решений уравнения (5.3) относительно y' конечно и равно m. Пусть этими решениями являются числа*

$$b_1, b_2, ..., b_m \qquad (m > 0).$$

(3) *Каждая из точек $(x_0, y_0, b_i), (i = 1, ..., m)$ лежит внутри области G и в некоторой окрестности R_i каждой из этих точек функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывную производную по y и непрерывную производную по y', которая в R_i превосходит по абсолютной величине некоторое положительное число $C > 0$.*

Тогда существует окрестность U точки (x_0, y_0), расположенная в плоскости (x, y), причем через любую точку U проходит m и только m решений уравнения (5.3).

Доказательство теоремы.

Рассмотрим случай $m = 1$.

Из сделанных предположений следует, что для уравнения $F(x, y, y') = 0$ существует точка (x_0, y_0, y_0') такая, что

$$F(x_0, y_0, y_0') = 0, \qquad F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0,$$

тогда по теореме о неявной функции существует окрестность этой точки $U(x_0, y_0, y'_0)$, в которой уравнение (5.3) можно разрешить относительно y' : $y' = f_1(x, y)$, где функция f_1 — непрерывная и дифференцируемая по y, следовательно эта функция удовлетворяет условию Липшица.

Действительно, производная

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$$

непрерывна и ограничена в ограниченной замкнутой области. Следовательно, условие Липшица для функции $f_1(x, y)$ выполнено, значит выполнено условие теоремы существования и единственности и существует единственная функция $y(x)$: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = f_1(x_0, y_0)$, такая что $F(x_0, y_0, f_1(x_0, y_0)) = 0$.

5.2. Решение дифференциальных уравнений в параметрической форме

Рассмотрим в качестве примера решения дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, уравнение вида

$$y = f(y'). \tag{5.4}$$

Если $f(y'_0) \neq 0$, то уравнение можно разрешить относительно y'. Однако это не всегда возможно сделать аналитически, и имеется ряд существенных трудностей при приведении уравнения (5.4) к виду $y' = f^{-1}(y)$.

Тем не менее, покажем, что уравнение (5.4) всегда можно проинтегрировать (точнее, свести к квадратурам). Для этого ищем решение в виде:

$$\begin{cases} y = f(p), \\ x = \varphi(p), \end{cases} \tag{5.5}$$

то есть в параметрической форме. Так как $f(p)$ известно, то для нахождения решения нужно найти функцию $\varphi(p)$, где $\dfrac{dy}{dx} = p$.

С другой стороны, найдем производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y(x)$, заданной параметрически соотношениями (5.5)

$$\frac{dy}{dx} \equiv \frac{f'_p(p)dp}{\varphi'_p(p)dp},$$

и приравняем ее параметру p:

$$\frac{f'_p(p)}{\varphi'_p(p)} = p. \tag{5.6}$$

Разрешив (5.6) относительно $\varphi'(p)$, находим

$$\varphi'(p) = \frac{f'(p)}{p},$$

значит

$$\varphi(p) = \int \frac{f'(p)}{p} dp,$$

и окончательно получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(p), \\ x = \displaystyle\int \frac{f'(p)}{p} dp \ + C \end{array} \right.$$

решение уравнения $y = f(y')$ в параметрической форме в виде квадратур.

Пример.

Рассмотрим уравнение $y = y' + \ln(y')$.

Будем искать решение в параметрической форме:

$$y = p + \ln(p).$$

С учетом того, что $\dfrac{dy}{dx} = p$ и дифференцируя предыдущее равенства, получим дифференциальное уравнение для нахождения $x(p)$:

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right) dp = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{p^2},$$

следовательно, $x = \ln(p) - \dfrac{1}{p} + C$.

Таким образом, решение данного уравнения имеет вид

$$\begin{cases} x = \ln(p) - \dfrac{1}{p} + C, \\ y = p + \ln(p). \end{cases}$$

5.3. Особые точки и особые линии

Определение. Точку области G, в которой рассматривается дифференциальное уравнение (2.2) (или (2.5)), будем называть *обыкновенной точкой* уравнения (2.2) или (2.5), если существует такая окрестность этой точки, что через каждую точку этой окрестности проходит ровно одна интегральная кривая и, кроме того, по крайней мере одна из правых частей уравнений (2.2) или (2.5) непрерывна в этой окрестности.

Определение. *Особой точкой* дифференциального уравнения называется точка, не являющаяся обыкновенной точкой.

Определение. Линия, любая точка которой — особая, называется *особой линией.*

Если особая линия есть интегральная кривая, она называется *особой интегральной кривой.*

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} y \cdot \ln^2 |y|, & \text{если } y \neq 0; \\ 0, & \text{если } y = 0; \end{cases}$$

– это интегральная кривая неединственности.

В конкретных примерах обычно наибольший интерес представляет разыскание интегральных линий неединственности, так как их знание помогает представить картину интегральных кривых в целом.

5.4. Особое решение

Точками неединственности для уравнения $F(x, y, y') = 0$ называются те точки, через которые проходит более одного решения по *одному и тому же* направлению, т.е. эти решения имеют в точке неединственности общую касательную.

Определение. *Особое решение* — это такое решение дифференциального уравнения, каждая точка которого есть точка неединственности.

Условия теоремы существования и единственности являются достаточными для того, чтобы в некоторой области G не существовало особого решения. Поэтому для существования особого решения необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы существования и единственности, например, в виде теоремы Коши. Следовательно, *для того чтобы найти особое решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, необходимо найти линию $y = \varphi(x)$, в каждой точке которой терпит разрыв $f(x, y)$ или $f'_y(x, y)$, и проверить, является ли $y = \varphi(x)$ решением данного уравнения.* Если функция $y = \varphi(x)$ окажется решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, то она и будет особым решением.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$(y')^3 = y^2.$$

Это уравнение легко разрешить относительно производной:

$$y' = y^{2/3}.$$

Правая часть этого уравнения $f(x, y) = y^{2/3}$ непрерывна при всех значениях y, однако производная $f'_y(x, y) = 2/(3\sqrt[3]{y})$ терпит бесконечный разрыв при $y = 0$ и неограничена в окрестности оси OX, т.е. условие Липшица в окрестности оси OX не выполнено. Таким образом, каждая точка прямой $y = 0$ является особой. Очевидно, что функция $y = 0$ служит особым решением данного уравнения. Следовательно, решение $y = 0$ является *особым решением.*

Найдем теперь общее решение данного уравнения. Разделяя переменные, находим $\dfrac{dy}{y^{2/3}} = dx$. Интегрируя, получаем общее решение

$$3y^{1/3} = x + C, \text{ или } y = \frac{(x+C)^3}{27} \cdot$$

Семейство интегральных кривых, соответствующих найденному общему решению, состоит из кубических парабол, получающихся одна из другой сдвигом параллельно оси OX. Так как через каждую точку особого решения $y = 0$ проходит еще одна интегральная кривая данного уравнения (кубическая парабола), то в каждой точке оси OX нарушается свойство единственности (рис. 5.2).

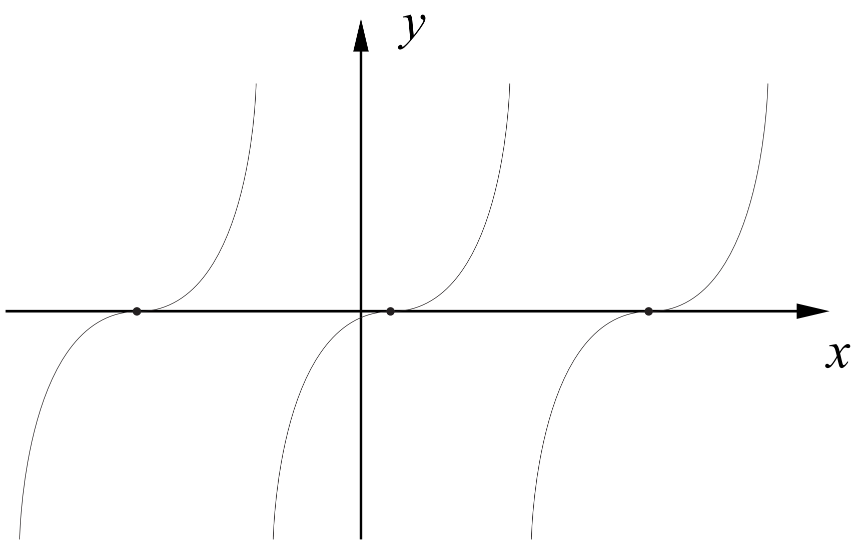

Рис. 5.2. *Интегральные линии уравнения* $(y')^3 = y^2$

Заметим, что *особое решение, вообще говоря, не содержится в общем решении и не может быть выделено из него ни при каком конкретном значении постоянной* C.

Пример. Рассмотрим уравнение $y' = \sqrt[3]{y^2} + 1$. Как и в предыдущем примере, в каждой точке оси OX нарушены условия теоремы существования и единственности. Однако функция $y = 0$, как легко проверить, не является решением уравнения. Поэтому данное уравнение особых решений не имеет.

5.4.1. Нахождение особого решения

Итак, предположим, что нарушено условие теоремы (5.1), а именно гладкая функция $F'_{y'}(x, y, y')$ обращается в нуль на некотором множестве. Составим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Решение системы (5.7) в плоскости (x, y) называется *дискриминантной кривой*. Это не обязательно особое решение. Верно лишь обратное: если решение особое, то оно принадлежит дискриминантной кривой. Таким образом, для нахождения особого решения следует:

(1) Найти дискриминантную кривую для системы (5.7), для чего необходимо исключить из нее y'. Запишем дискриминантную кривую в виде $\varphi(x, y) = 0$.

(2) Проверить, является ли функция, определяемая уравнением

$$\varphi(x, y) = 0,$$

решением дифференциального уравнения или нет. Если такая функция задает решение дифференциального уравнения, то это решение особое, если в его окрестности не выполнено условие Липшица, в частности, не ограничена производная $\dfrac{\partial y'}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_{y'}}$.

Пример. Рассмотрим уравнение $y - (y')^2 - x = 0$.

Дискриминантная кривая этого уравнения определяется системой

$$\begin{cases} y - (y')^2 - x = 0, \\ -2y' = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = x,$$

но подстановка $y = x$ в исходное уравнение дает: $x - 1 - x \neq 0$. Следовательно, $y = x$ не решение и данное уравнение не имеет особых решений.

Заметим, что решение, удовлетворяющее дискриминантной кривой, может не быть особым. Покажем это на следующем примере.

Пример. Рассмотрим уравнение $(y')^3 = y^4$.

Его дискриминантная кривая определяется системой

$$\begin{cases} (y')^3 - y^4 = 0, \\ 3(y')^2 = 0, \end{cases}$$

из которой находим $y = 0$. Легко проверить, что $y = 0$ является решением исходного уравнения. Однако на этом решении производная $\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial y^{4/3}}{\partial y} = 0$, то есть условие Липшица не нарушено, и $y = 0$ не является особым решением данного уравнения.

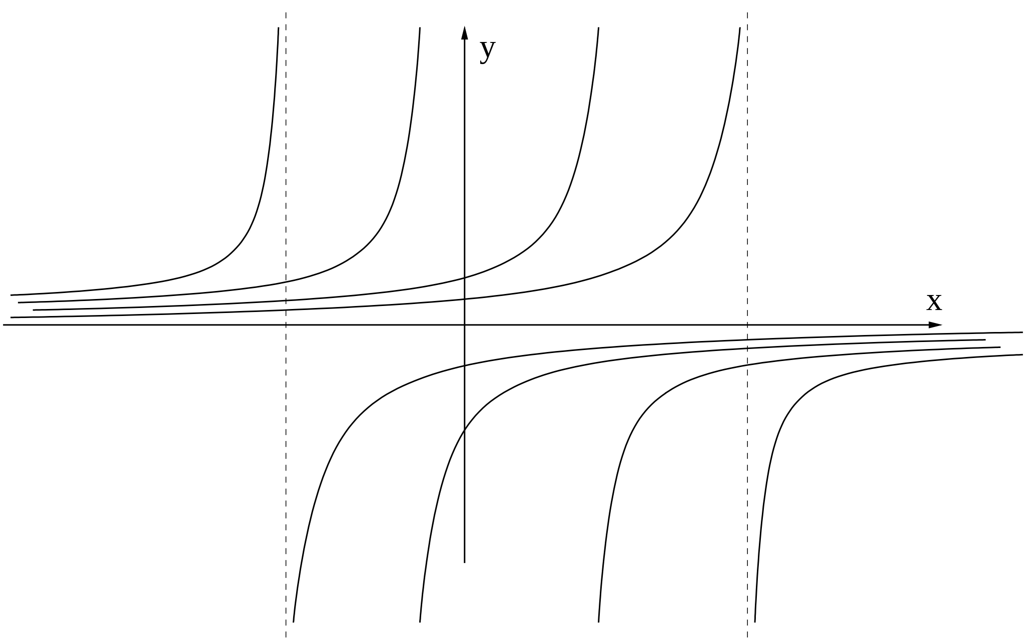

Рис. 5.3. *Интегральные линии уравнения* $(y')^3 = y^4$

Действительно, общее решение имеет вид

$$\frac{dy}{y^{4/3}} = dx; \qquad -3y^{-1/3} = x + C; \qquad y = -\frac{27}{(x+C)^3},$$

и все точки прямой $y = 0$ являются точками единственности (рис. 5.3).

Таким образом, следует обязательно проверить, выполнены или нет на полученной дикриминантной кривой условия теоремы существования и единственности, и, если они выполняются, то дискриминантная кривая не будет особым решением.

Разберем еще один пример.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$(y')^2(1 - x^2) - x^2 = 0 \tag{5.8}$$

или равносильное ему уравнение

$$(1 - x^2) - x^2(x')^2 = 0, \tag{5.9}$$

или в симметричном виде

$$(1 - x^2)dy^2 - x^2dx^2 = 0. \tag{5.10}$$

Заметим, что уравнение (5.10) определяет поле направлений только при $|x| \leqslant 1$. Левая часть уравнения (5.8) непрерывна всюду в полосе $|x| \leqslant 1$ и имеет непрерывные производные по y и y': существуют F'_y и $F'_{y'} \in C[-1, 1]$. Легко вычислить, что

$$F'_{y'} = 2y'(1 - x^2).$$

Отсюда видно, что $F'_{y'} = 0$, если

(1) $x = \pm 1$;

(2) $y' = 0$. В силу уравнения (5.8) отсюда следует, что это происходит при $x = 0$. Производная по x' от левой части (5.9) обращается в нуль на этих же прямых.

Значит, для уравнения (5.8) особыми могут быть только точки трех линий

$$x = +1, \qquad x = -1, \qquad x = 0.$$

Так как прямые $x \pm 1 = 0$ являются границей той области, где уравнения задают поле направлений, то они являются особыми линиями. Из уравнения (5.9) видно, что они являются интегральными линиями.

Прямая $x = 0$ — особая линия, но не интегральная линия. Действительно, из уравнения (5.10) найдем, что

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, .$$

Отсюда следует, что интегральными линиями уравнения (5.10) являются окружности единичного радиуса, центры которых лежат на оси OY. Все они касаются прямых $x = \pm 1$.

Теперь уже очевидно, что прямая $x = 0$ — особая линия. Действительно, на этой прямой из уравнения (5.8) можно найти только *одно* значение y', а именно, равное нулю, из уравнения же (5.9) никакого значения x' при $x = 0$ найти нельзя. Но ни у какой точки B, лежащей на оси OY, нельзя указать такой окрестности, через каждую точку которой проходила бы одна и только одна интегральная кривая; действительно, через точку B саму по себе, очевидно, в любой окрестности проходят четыре интегральных кривых: A_1BA_4, A_2BA_3, A_2BA_4, и A_1BA_3 (рис. 5.4). Все эти интегральные кривые имеют горизонтальную касательную в точке B.

Значит, ось OY будет особой, но не интегральной линией. У каждой же точки полосы $-1 < x < 1$, не лежащей на оси OY, существует окрестность, через каждую точку которой в этой окрестности проходят ровно две интегральные кривые, однако углы наклона этих интегральных кривых различные, поэтому все эти точки будут обыкновенными.

Заметим, что кроме указанных выше интегральных кривых, у нашего уравнения будут еще интегральные кривые вида

$$P_1B_1P_4P_5B_2P_2P_1, \qquad P_1B_1P_4BP_3OP_6BP_1,$$

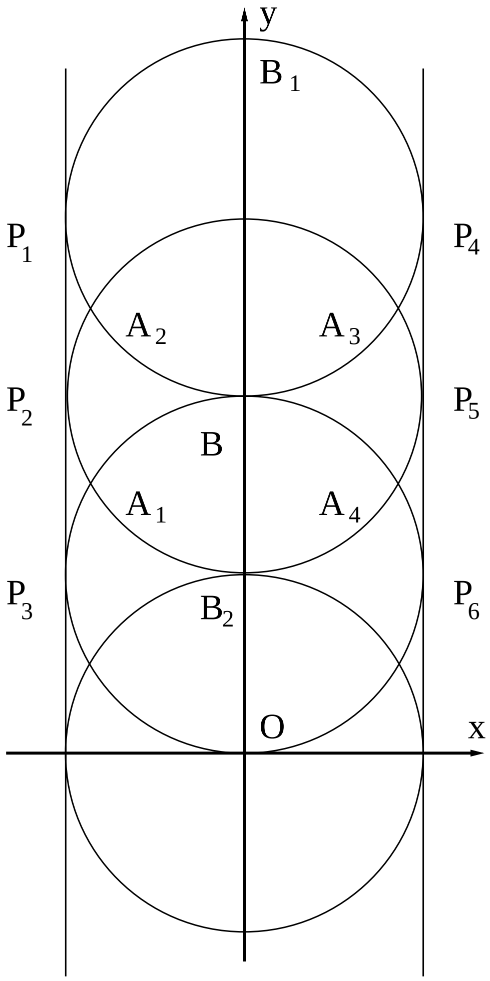

Рис. 5.4. *Интегральные кривые уравнения (5.10)*

и др. Отсюда видно, что в любой окрестности любой точки прямых $x = \pm 1$ через эту точку проходит бесконечное число интегральных кривых, то есть эти прямые являются граничными интегральными линиями неединственности (особыми решениями).

5.5. Огибающая

Рассмотрим на плоскости XY множество, заданное уравнением

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Определение. Линия $y = \varphi(x)$ называется *огибающей* семейства $\Phi(x, y, C) = 0$, если в любой точке она касается некоторой кривой семейства $\Phi(x, y, C) = 0$ и любого фрагмента которой касается бесконечно много линий данного семейства.

Теорема 5.2. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$F(x, y, y') = 0,$$

уравнение семейства его решений $\Phi(x, y, C) = 0$. *Тогда любое особое решение является огибающей семейства* $\Phi(x, y, C) = 0$ *и наоборот, огибающая есть особое решение данного дифференциального уравнения.*

Нахождение огибающей производится следующим образом. Допустим, что огибающая L существует, тогда координаты ее точек удовлетворяют уравнению $F(x, y, C(x, y)) = 0$, где теперь C не постоянно, но в каждой точке огибающей C принимает свое значение: $C = C(x, y)$, так как разных точек огибающей касаются разные кривые семейства $\Phi(x, y, C) = 0$. Рассмотрим такой фрагмент огибающей L, на котором y является дифференцируемая функция от x: $y = y(x)$. Тогда в уравнении $F(x, y, C(x, y)) = 0$ можно считать, что $C = C(x)$ и переписать это уравнение в виде

$$F(x, y(x), C(x)) = 0,$$

где $C'_x \neq 0$ (в предположении дифференцируемости функции $C(x)$). Продифференцируем это уравнение по x, считая y функцией от x. Получим, что на огибающей

$$F'_x + F'_y y' + F'_C C'_x = 0.$$

Однако, y' в рассматриваемой точке на огибающей может быть найдена для семейства исходных линий, так как эта точка одновременно лежит и на огибающей, и на одной из кривых рассматриваемого семейства. На этих кривых $C = \text{const}$, следовательно, справедливо соотношение

$$F'_x + F'_y y' = 0.$$

Чтобы определяемые из обоих уравнений значения y' были одинаковы (определить y' из этих уравнений можно, если $F'_y \neq 0$), т.е. чтобы огибающая и линия семейства $\Phi(x, y, C) = 0$

имели общую касательную, необходимо $F'_C C'_x = 0$, а так как $C'_x \neq 0$, то на огибающей должно выполняться соотношение

$$F'_C = 0.$$

Таким образом, огибающая определяется уравнением, получающимся после исключения C из системы

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0, \\ F'_C(x, y, C) = 0. \end{cases}$$

Можно показать, что эти условия являются также достаточными.

Замечание. Огибающая семейства интегральных кривых некоторого дифференциального уравнения первого порядка всегда является особой интегральной кривой этого уравнения, так как она является интегральной кривой и все ее точки особые; более того, на любом ее участке найдутся точки, через которые в сколь угодно малой окрестности огибающей проходит бесконечное количество интегральных кривых.

Примеры.

(1) *Уравнение Клеро́.* Уравнением Клеро называется уравнение вида

$$y = xy' + f(y').$$

Его общее решение имеет вид $y = Cx + f(C)$, т.е. представляет собой уравнение семейства прямых.

Огибающая находится из системы уравнений

$$\begin{cases} y = Cx + f(C), \\ \ \ 0 = x + f'(C). \end{cases}$$

(2) На всей плоскости (x, y) дано семейство кривых

$$F(x, y, C) \equiv y - (x + C)^3 = 0.$$

Оно состоит из кубических парабол, полученных из одной $y = x^3$ сдвигом, параллельным оси OX.

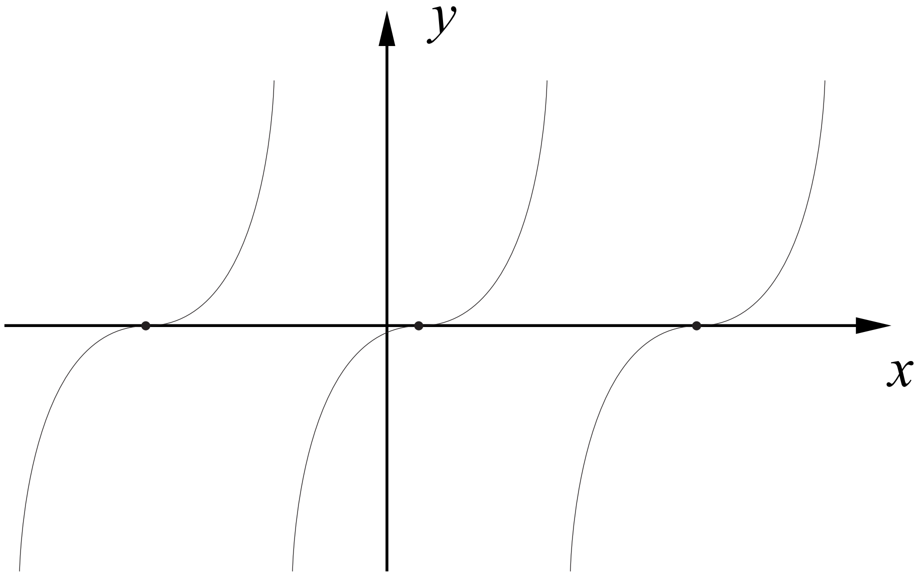

Рис. 5.5. *Ось Ox – огибающая семейства* $y-(x+C)^3=0$

Из уравнения $F'_C = 0$ получаем $-3(x+C)^2 = 0$, откуда находим $C = -x$. Подставляя это равенство в исходное уравнение семейства кривых, получим линию $y = 0$, которая, очевидно, является огибающей семейства $y-(x+C)^3=0$ (рис. 5.5).

(3) На всей плоскости (x, y) дано семейство кривых

$$F(x,y,C) \equiv y^5 - (x+C)^3 = 0.$$

Из уравнения $F'_C = 0$ получаем $-3(x+C)^2 = 0$, отсюда находим $C = -x$. Подставляя это равенство в исходное уравнение семейства, получим $y = 0$, однако ось OX не является огибающей данного семейства, т.к. при $y = 0$ мы имеем $F'_y = 5y^4 = 0$.

(4) Семейство кругов

$$F(x,y,C) \equiv x^2 + (y+C)^2 - 1 = 0$$

покрывает полосу между прямыми $x = \pm 1$. Из уравнения $F'_C = 0$ получим $C = -y$. Подставляя это соотношение вместо C в уравнение семейства, получаем $x = \pm 1$. Каждая из этих прямых является огибающей данного семейства (см. рис. 5.4).

(5) Уравнение

$$y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0,$$

которое при $C \neq 0$ можно переписать в виде

$$y - C^3\left(x - \frac{1}{C}\right)^2 = 0,$$

определяет семейство парабол, вершины которых находятся на оси OX. Очевидно, что для них ось OX является огибающей, хотя в то же время она принадлежит самому семейству: она получается из уравнения этого семейства при $C = 0$.

5.6. О поведении интегральных кривых в целом и предельных циклах

Одной из фундаментальных задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений является задача о построении схемы поведения семейства интегральных кривых заданного дифференциального уравнения во всей области его определения, т.е. изучения поведения интегральных кривых этого уравнения "в целом". Эта задача еще очень далека от своего решения даже для уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

где $M(x,y), N(x,y)$ — многочлены степени выше второй. В связи с такой задачей скажем несколько слов о так называемых "предельных циклах".

Определение. Замкнутая интегральная кривая L называется *предельным циклом*, если все ее точки обыкновенные и к ней асимптотически приближается некоторая другая интегральная кривая.

Рассмотрим для примера дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho - 1, \tag{5.11}$$

где ρ, φ — полярные координаты в плоскости (x, y).

В переменных x, y (декартовы координаты) это уравнение равносильно следующему:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2} - y}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2} - x}, \tag{5.12}$$

его можно получить после замены переменных

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi), \\ y = \rho\sin(\varphi). \end{cases}$$

Общий интеграл уравнения (5.11) имеет вид

$$\rho = 1 + Ce^{\varphi},$$

где C — произвольная постоянная.

Чтобы ρ было неотрицательным, необходимо, чтобы φ принимало значения, не большие чем $-\ln|C|$, если $C < 0$.

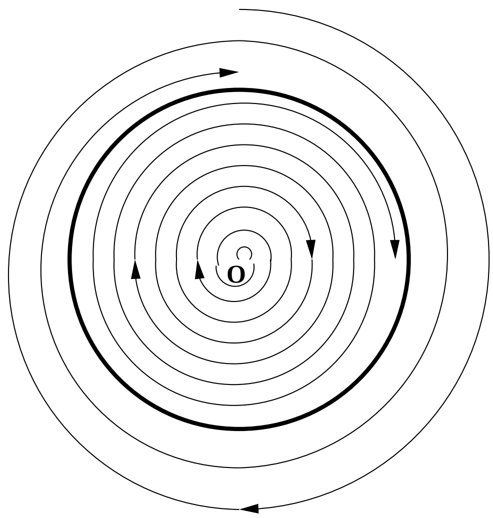

Рис. 5.6. *Интегральные линии уравнения (5.11)*

Семейство интегральных кривых (рис. 5.6) состоит из:

(1) окружности $\rho = 1$ $(C = 0)$;

(2) спиралей, выходящих из центра окружности $\rho = 0$ под углами, определяемыми уравнением $Ce^{\varphi} + 1 = 0$. Эти спирали приближаются к окружности $\rho = 1$ изнутри, когда $\varphi \to -\infty$ $(C < 0)$;

(3) бесконечных спиралей, которые приближаются к окружности $\rho = 1$ снаружи, когда $\varphi \to -\infty$ $(C > 0)$.

Таким образом, окружность $\rho = 1$ является предельным циклом для уравнения (5.11). Разыскание предельных циклов представляет большой интерес для приложений.

Заметим, что все точки окружности $\rho = 1$ не являются особыми для уравнения (5.11). Это можно проверить, если перейти от полярных координат к декартовым (см. уравнение (5.12)). Значит, малая окрестность любой точки предельного цикла ничем не отличается от малой окрестности всякой другой неособой точки.

К подобным картинам интегральных кривых приводят, например, некоторые модели, описывающие систему, состоящую из двух популяций, одна из которых служит пищей для другой популяции, так называемая система жертва — хищник (их численности равны x и y соответственно и являются функциями времени: $x = x(t)$ и $y = y(t)$). Скорость изменения во времени популяции жертв $\dot{x}$, служащих пищей для хищников, растет пропорционально величине популяции жертв x (с положительным коэффициентом k, который можно считать постоянным, если пищи для жертв достаточно) и убывает пропорционально (отрицательный коэффициент $-a$) произведению количества хищников y и жертв x, тогда для скорости изменения популяции жертв получим уравнение $\dot{x} = kx - axy$.

Скорость изменения количества хищников пропорциональна их численности (но с отрицательным коэффициентом $-l$ — чем больше хищников, тем сильнее они конкурируют друг с другом, что приводит к уменьшению их популяции) и также пропорциональна произведению численности хищников и жертв, но с другим по абсолютной величине положительным коэффициентом b: $\dot{y} = -ly + bxy$.

Таким образом, мы приходим к системе дифференциальных уравнений простейшей модели жертва — хищник:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases}$$

Эта модель называется *моделью Лотка-Вольтерра* по имени ученых, предложивших ее в начале XX века.

В такой системе наблюдаются периодические колебания численности жертв и хищников вокруг равновесного состояния; амплитуда колебаний определяется начальными условиями.

Если уточнить эту модель за счет учета некоторых других факторов, влияющих на численность популяций, по можно получить фазовую картину, изображенную на рис. 5.6, в которой интегральная кривая, каждая точка которой изображает численность популяций жертв и хищников в некоторый момент времени, наматывается (снаружи или изнутри) на предельный цикл.

6. Дифференциальные уравнения высших порядков

6.1. Основные понятия дифференциальных уравнений высших порядков

Дифференциальные уравнения высших порядков — это уравнения вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{6.1}$$

где функция F непрерывна по всем аргументам и зависит явно от $y^{(n)}$.

Вблизи начальных значений $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}$ уравнение (6.1) должно удовлетворять условиям:

$$F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) = 0, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|_{x=x_0, y=y_0, \ldots, y^{(n)}=y_0^{(n)}} \neq 0,$$

тогда по теореме о неявной функции уравнение (6.1) можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{6.2}$$

Теорема 6.1 (существования и единственности)**.** *Уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, правая часть которого непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет условию Липшица по аргументам*

$$y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}},$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям при $x = x_0$*:*

$$\frac{dy}{dx} = y_0', \quad \ldots, \quad \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} = y_0^{(n-1)}. \tag{6.3}$$

Условие Липшица: Функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ удовлетворяет условию Липшица по аргументам $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, если существует постоянная K такая, что для любого x из множества $D(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ и любых значений $(y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ и $(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)})$ из D выполнено неравенство

$$\left|f(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})\right| \leqslant \tag{6.4}$$

$$\leqslant K\left(|y_1 - y_0| + |y_1' - y_0'| + \ldots + |y_1^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}|\right).$$

Далее будет показано, что уравнение (6.2) равносильно некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако пока мы рассмотрим основные свойства уравнения (6.2).

Определение. *Общее решение* — это такая n раз непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, которая содержит n произвольных постоянных и позволяет выделить любое частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (6.3) при $x = x_0$.

Определение. Соотношение $\varphi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$, $\varphi \in C^n(D)$ называется *общим интегралом*, если любое частное решение может быть получено из этого соотношения.

Соотношение

$$\psi(x, y, y', \ldots, y^{(k)}, C_{k+1}, C_{k+2}, \ldots, C_n) = 0 \qquad (6.5)$$

называется *промежуточным интегралом* уравнения (6.2), если после $(n - k)$-кратного дифференцирования по x, с учетом того, что $y = y(x)$, и исключения из $n - k + 1$ уравнений $n - k$ постоянных $C_{k+1}, C_{k+2}, \ldots, C_n$ из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y} y' + \ldots + \dfrac{\partial\psi}{\partial y^{(n)}} y^{(k+1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^{(n-k)}\psi}{\partial x^{(n-1)}} + \ldots + \dfrac{\partial\psi}{\partial y^{(k)}} y^{(n)} = 0 \end{cases}$$

мы получим уравнение (6.1).

В частности, соотношение $\psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C) = 0$, содержащее одну произвольную постоянную, называется *первым интегралом*.

Пример. Уравнение $2yy'' = {y'}^2 + 1$ имеет первый интеграл вида ${y'}^2 = Cy - 1$.

Действительно, дифференцируя полученный первый интеграл по x, после сокращения на y' получим $C = 2y''$, что после подстановки в первый интеграл ${y'}^2 = Cy - 1$ дает исходное уравнение.

6.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим последовательно, в каких случаях возможно и как осуществляется понижение порядка дифференциального уравнения.

1. Если уравнение имеет вид

$$y^{(k)} = f(x), \tag{6.6}$$

то оно сводится к квадратурам с помощью подстановки $y^{(k-1)} = u(x)$, тогда $y^{(k)} = u'$ и уравнение (6.6) приводится к простейшему уравнению первого порядка $u' = f(x)$, которое имеет решение

$$u(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C_1,$$

где функция $F(x)$ – одна из первообразных от $f(x)$. Так как $u(x) = y^{(k-1)}$, то получаем уравнение

$$y^{(k-1)} = F(x) + C_1,$$

которое интегрируется так же, как уравнение (6.6).

Таким образом, в результате k-кратного последовательного интегрирования уравнения (6.6) получим

$$y = \underbrace{\int\int \ldots \int}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx\,dx \ldots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

2. Если в уравнение не входит искомая функция y и, возможно, несколько ее производных низшего порядка, то есть уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию $z(x)$, низшую из производных, входящих в уравнение, то есть сделав замену переменных $y^{(k)} = z(x)$. В результате получим уравнение $(n-k)$-го порядка:

$$F(x, z, z', \ \ldots, \ z^{(n-k)}) = 0.$$

Если это уравнение интегрируется в квадратурах, так что

$$z = \varphi(x, \ C_1, \ \ldots, \ C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x, \ z, \ C_1, \ \ldots, \ C_{n-k}) = 0,$$

то, возвращаясь к переменной y, получим соответственно:

$$y^{(k)} = \varphi(x, \ C_1, \ \ldots, \ C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x, \ y^{(k)}, \ C_1, \ \ldots, \ C_{n-k}) = 0.$$

Это – уравнение вида (6.6), рассмотренного выше.

3. Если в уравнение не входит независимая переменная x, то есть уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \ \ldots, \ y^{(n)}) = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую независимую переменную y, а за новую неизвестную функцию

$$y' = p(y). \tag{6.7}$$

Тогда по формуле для производной сложной функции имеем

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}\,; \tag{6.8}$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}\,. \tag{6.9}$$

Аналогично можно найти и производные более высоких порядков.

После подстановки выражений (6.7), (6.8) и (6.9) для y', y'', y''' и т.д. в данное дифференциальное уравнение получаем уравнение, порядок которого на единицу меньше порядка исходного уравнения.

4. Порядок уравнения легко понижается, если удается преобразовать уравнение к такому виду, в котором обе его части являются полными производными по x от каких-нибудь функций.

Например, пусть дано уравнение $yy'' = y'^2$. Разделив обе части на yy', получим $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{y'}{y}$, откуда $(\ln y')' = (\ln y)'$. Это уравнение легко интегрируется: $\ln y' = \ln y + \ln C$, и после потенцирования получаем $y' = yC$. Порядок уравнения понижен.

5. Если уравнение однородно относительно искомой функции y и ее производных, т. е. не меняется при одновременной замене $y,\ y',\ y'', \ldots$ на $ky,\ ky',\ ky'', \ldots$, то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Действительно, найдем выражения для y'', y''' и т.д. Дифференцируя последовательно $y' = yz$ по x и заменяя каждый раз y' на yz, будем иметь:

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$
$$y''' = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

и т.д., то есть все выражения для производных содержат y как множитель. В силу предположенной однородности при одновременной замене $y,\ y',\ y'', \ldots$ на $ky,\ ky',\ ky'', \ldots$ уравнение не изменяется, поэтому, взяв $k = 1/y$, можно исключить y и понизить порядок уравнения на единицу.

6. Порядок уравнения понижается, если оно является однородным относительно x и y в обобщенном смысле, т. е. не меняется от замены x на kx, y на $k^m y$ (при этом y' заменяется на $k^{m-1}y'$, y'' на $k^{m-2}y''$ и т. д.). Чтобы узнать, будет ли уравнение однородным в обобщенном смысле, и найти число m, надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых число k будет входить в *каждый* член уравнения после указанной замены.

Например, в первый член уравнения $2x^4y'' - 3y^2 = x^4$ после этой замены число k будет входить в степени $4 + (m - 2)$, во второй – в степени $2m$, в третий – в степени 4. Следовательно, m должно удовлетворять уравнениям $4 + (m - 2) = 2m = 4$, откуда $m = 2$.

Если же полученные уравнения для m будут несовместными, то дифференциальное уравнение не является однородным в указанном смысле. После того, как число m найдено, необходимо сделать замену переменных

$$x = e^t,\ y = ze^{mt}, \tag{6.10}$$

где $z = z(t)$ – новая неизвестная функция, а t – новая независимая переменная. В результате подстановки (6.10) получим уравнение, в которое не входит независимая переменная t. Порядок такого уравнения понижается одним из рассмотренных ранее способов.

6.3. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

6.3.1. Определения и общие свойства

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно первой степени относительно искомой функции y и всех ее производных $\dfrac{dy}{dx}, \ldots, \dfrac{d^n y}{dx^n}$:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-1)}(x)y' + a_n(x)y = F(x). \tag{6.11}$$

В этом случае, если $a_0(x) \neq 0$ при любом $x \in (a, b)$ и функции $a_0(x), \ldots, a_n(x)$, $F(x)$ непрерывны на (a, b), то для равносильного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{6.12}$$

полученного из уравнения (6.11) почленным делением на $a_0(x)$, верна следующая

Теорема 6.2 (существования и единственности). *Если коэффициенты уравнения (6.12) $p_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ и правая часть $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то решение уравнения (6.12) существует во всех внутренних точках отрезка $[a, b]$ и единственно.*

Если правая часть $f(x)$ линейного дифференциального уравнения (6.12) не равна тождественно нулю, то такое уравнение называется неоднородным линейным уравнением.

Если же правая часть уравнения $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным линейным уравнением.

Свойства линейного уравнения:

(1) Уравнение остается линейным при любой замене независимой переменной $x = \varphi(\xi)$, где $\varphi(\xi)$ — n-кратно непрерывно дифференцируемая функция и $\varphi(\xi) \neq 0$. Это свойство вытекает из линейности производных:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{d\,y}{d\,\xi},$$

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{d}{d\,\xi}\left(\frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{d\,y}{d\,\xi}\right) = \frac{1}{\varphi'(\xi)^2}\frac{d^2\,y}{d\,\xi^2} - \frac{\varphi''}{\varphi'^3}\frac{d\,y}{d\,\xi}, \ldots$$

(2) Уравнение остается линейным при линейном преобразовании зависимых переменных

$$y = \beta(x)\eta + \gamma(x).$$

Действительно:

$$y' = \beta\frac{d\,\eta}{d\,x} + \beta'\eta + \gamma'$$

и формулы для производных высших порядков также линейны.

6.4. Общая теория линейных однородных уравнений

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{6.13}$$

левую часть которого с помощью операторов взятия производных $\dfrac{d^k}{d\,x^k}$ можно переписать в виде

$$L[\,y\,] \equiv \left(\frac{d^n}{d\,x^n} + p_1(x)\frac{d^{(n-1)}}{d\,x^{(n-1)}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{d\,x} + p_n(x)\right)[\,y\,].$$

Через $L[\,y\,]$ мы будем сокращенно обозначать результат применения к функции y совокупности операций дифференцирования, умножения на коэффициенты $p_i(x)$ и сложения, указанных в (6.13). Будем называть $L[\,y\,]$ *линейным дифференциальным оператором.* Тогда дифференциальное уравнение (6.13) запишется в операторном виде

$$L[\,y\,] = 0. \tag{6.14}$$

Свойства линейного оператора:

(1) $L[\,y_1 + y_2\,] = L[\,y_1\,] + L[\,y_2\,]$ — оператор от суммы равен сумме операторов слагаемых.

(2) $L[\,Cy_1\,] = C\,L[\,y_1\,]$ — постоянный множитель можно выносить за знак линейного оператора.

Теорема 6.3. *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два (частных) решения линейного однородного уравнения (6.13), то их сумма $y_1(x) + y_2(x)$ — также решение этого уравнения.*

Доказательство. Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ есть решения (6.13), то имеем тождества: $L[\,y_1(x)\,] \equiv 0$ и $L[\,y_2(x)\,] \equiv 0$. В силу первого свойства линейного оператора

$$L[\,y_1(x) + y_2(x)\,] = L[\,y_1(x)\,] + L[\,y_2(x)\,],$$

что по условию теоремы тождественно равно нулю. Теорема доказана.

Теорема 6.4. *Если $y(x)$ — решение уравнения (6.13), то $Cy(x)$ — также решение этого уравнения ($C = \mathrm{const}$).*

Доказательство. Доказательство следует из второго свойства линейного оператора

$$L[\,C\,y(x)\,] = C\,L[\,y(x)\,] \equiv 0.$$

Следствие 1. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — частные решения уравнения (6.13), то $C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ — также есть решение этого уравнения.

Видно, что множество решений образует линейное пространство.

Поскольку последнее выражение содержит n произвольных постоянных, возникает естественный вопрос: будет ли функция $y = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ общим решением? Ответ дает понятие *линейной зависимости функций* и линейной независимости.

Определение. Выражение $\alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x)$, в котором $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ есть некоторые постоянные, называется линейной комбинацией функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Определение. Если существует $\{\alpha_i\} \not\equiv 0$ такие, что для любого $x \in (a, b)$ верно тождество:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i(x) \equiv 0,$$

то функции $\{\varphi_i(x)\}$ линейно зависимы.

Если же не существуют такие $\{\alpha_i\} \neq 0$, или, точнее, последнее тождество верно только когда все $\{\alpha_i\} = 0$, — то $\{\varphi_i(x)\}$ линейно независимы.

Примеры.

(1) Если хотя бы одна из функций $\varphi_i(x) \equiv 0$ в рассматриваемом интервале, то функции $\{\varphi_i(x)\}$ линейно зависимы.

(2) Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы на интервале
$(-\infty, +\infty)$.

Докажем это от противного. Пусть

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n \equiv 0.$$

Тогда мы получаем противоречие основной теореме алгебры, ведь $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$ есть многочлен n-ной степени, а он имеет не более n корней.

(3) Функции x^2 и $x|x|$, где $x \in [-1, 1]$ — линейно независимы на отрезке $[-1, 1]$.

Доказать этот факт можно от противного. Предположим, что

$$C_1 x^2 + C_2 x|x| \equiv 0.$$

Тогда, подставляя в это тождество значения $x = 1$ и $x = -1$, получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $C_1 = C_2 = 0$.

(4) На любом интервале линейно зависимой системой функций являются функции $\{\sin^2 x, \cos^2 x, 1\}$.

Докажите это утверждение самостоятельно.

6.4.1. Определитель Вронского

Пусть имеются n функций, зависящих от x:

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x),$$

имеющих непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно.

Определителем Вронского называется функциональный определитель вида

$$W[\,y_1(x),\ldots,y_n(x)\,] \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{6.15}$$

Теорема 6.5. *Если функции $\{y_i(x)\}$ линейно зависимы, то их определитель Вронского тождественно равен нулю $W(x) \equiv 0$.*

Доказательство. Поскольку функции $\{y_i(x)\}$ линейно зависимы, то существуют $\{\alpha_i\} \not\equiv 0$, такие что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0. \tag{6.16}$$

Без ограничения общности можно допустить, что $\alpha_n \neq 0$ (иначе можно изменить нумерацию функций). Разрешая соотношение (6.16) относительно $y_n(x)$, получим тождество:

$$y_n(x) \equiv \beta_1 y_1(x) + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}(x), \tag{6.17}$$

где $\beta_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_n},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Продифференцировав тождество (6.17) по x, получим:

$$y_n'(x) = \beta_1 y_1'(x) + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}'(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n^{(n-1)}(x) = \beta_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x).$$

Следовательно, последний столбец в определителе Вронского (6.15) есть линейная комбинация остальных столбцов и значит $W(x) \equiv 0$.

Правило. Либо $W(x) \not\equiv 0$, тогда функции линейно независимы (это легко доказывается от противного), либо $W(x)$ тождественно равен нулю, тогда ничего определенного сказать нельзя.

Утверждение, что если $W(x) \equiv 0$, то функции линейно зависимы – неверно. Покажем это на следующем примере. Рассмотрим систему функций $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x|x|$, линейно независимых на интервале $[-1, 1]$. Вычислим ее определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x\,|x| \\ 2x & |\,x\,| + x \operatorname{sgn} x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2|x| + x^3 \operatorname{sgn} x - 2x^2|x| = x^3 \operatorname{sgn} x - x^2|x| \equiv 0.$$

Теорема 6.6. *Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимые (на интервале (a, b)) решения уравнения (6.13), то определитель Вронского $W[\,y_1(x), \ldots, y_n(x)\,]$ не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Доказательство от противного. Предположим, что существует значение $x_0 \in (a, b)$, такое что $W(x_0) = 0$. Обозначим $y_i(x_0) = y_{i0}$, $y_i'(x_0) = y_{i0}'$, …, $y_i^{(k)}(x_0) = y_{i0}^{(k)}$, …, $y_i^{(n-1)}(x_0) = y_{i0}^{(n-1)}$ и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} = 0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \ldots + C_n y_{n0}' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = 0. \end{cases} \tag{6.18}$$

В системе (6.18) величины C_1, …, C_n неизвестны. Так как $W(x_0) = 0$, то определитель этой системы равен нулю. Поэтому существует ненулевое решение однородной системы $C_1, \ldots, C_n$, такое что не все C_i равны нулю.

Составим функцию $\widetilde{y}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$; по теоремам (6.3) и (6.4) она является решением уравнения (6.13).

При $x = x_0$ получаем:

$$\widetilde{y}(x_0) = 0, \qquad \widetilde{y}'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad \widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{6.19}$$

Но по теореме существования и единственности (6.2) начальные условия (6.19) определяют единственное решение уравнения (6.13). Но таким решением, очевидно, является тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, которое, очевидно, удовлетворяет начальным условиям (6.19). Следовательно,

$$C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x) \equiv 0,$$

и, значит, функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы. Полученное противоречие доказывает теорему.

Вывод из теорем (6.5) и (6.6): Определитель Вронского, составленный для системы n функций, представляющих собой n решений линейных однородных уравнений, либо тождественно равен нулю, либо не равен нулю ни при каком $x \in (a, b)$, на котором $p_i(x) \in C$.

Определение. *Фундаментальной системой* называют любую систему n линейно независимых частных решений.

Следствие теоремы (6.6). Функции, образующие фундаментальную систему, линейно независимы в всяком частичном интервале (α, β), содержащемся в (a, b). Это следует из необращения в нуль определителя Вронского.

Теорема 6.7. *Для любого линейного однородного дифференциального уравнения существует фундаментальная система.*

Доказательство. Возьмем n^2 чисел a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих условию:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta \neq 0. \tag{6.20}$$

Определим n частных решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ по начальным условиям при $x = x_0$:

$$y_i(x_0) = a_{i1},\ y_i'(x_0) = a_{i2},\ \ldots,\ y_i^{(n-1)}(x_0) = a_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Определитель (6.20) равен значению определителя Вронского при $x = x_0$: $\Delta = W(x)|_{x=x_0}$, следовательно $W(x) \neq 0$, поэтому $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы.

Замечание. Матрицу удобно взять такую, что $a_{ij} = \delta_{ij}$, то есть $(a_{ij}) = E$, тогда получим *нормальную фундаментальную систему.*

Теорема 6.8. *(Теорема о структуре общего решения линейного уравнения.) Если функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L[\,y\,] = 0$, то общее решение имеет вид:*

$$y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x). \tag{6.21}$$

Доказательство. Так как в силу теорем (6.3) и (6.4) функция $y(x)$, заданная формулой (6.21), является решением, то достаточно показать, как определить частные решения по начальным условиям, то есть как в формуле (6.21) определить постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, так чтобы удовлетворялись начальные условия

$$y(x)|_{x=x_0} = y_0,\ y'(x)|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{6.22}$$

Для определения постоянных C_i составим линейную систему

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} = y_0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \ldots + C_n y_{n0}' = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{6.23}$$

правая часть которой представляет собой начальные условия (6.22) в точке $x = x_0$, а в качестве коэффициентов при C_i использованы значения функций $y_i(x)$ при $x = x_0$: $y_{i0} = y_i(x_0)$, $y_{i0}' = y_i'(x_0)$, …, $y_{i0}^{(k)} = y_i^{(k)}(x_0)$, …, $y_{i0}^{(n-1)} = y_i^{(n-1)}(x_0)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Так как определитель системы (6.23) есть определитель Вронского, вычисленный в точке $x = x_0$, т.е. $\Delta = W(x)|_{x=x_0}$, и в силу теоремы (6.6) $W(x_0) \neq 0$, то существует единственное решение для постоянных C_i и, следовательно, система (6.23) имеет единственное решение при любых начальных условиях (6.22); $y(x)$ содержит все частные решения.

Теорема 6.9. *Если существует $(n+1)$ частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_{n+1}(x)$ уравнения (6.13), то между ними существует линейная зависимость.*

Доказательство. Возможны два случая:

(1) Решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы. Тогда $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, $y_{n+1}(x)$ также линейно зависимы.

(2) Решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы. Значит они образуют фундаментальную систему и $y_{n+1}(x)$ выражается через $y_1(x), \ldots, y_n(x)$:

$$y_{n+1}(x) = A_1 y_1(x) + \ldots + A_n y_n(x)$$

(по теореме (6.8)).

Отсюда следует, что решения $y_1(x), \ldots, y_{n+1}(x)$ линейно зависимы.

Теорема 6.10. *Если два линейных однородных уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0, \tag{6.24}$$

$$y^{(n)} + \widetilde{p}_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + \widetilde{p}_n(x) y = 0.$$

имеют общую фундаментальную систему решений, то они тождественны между собой, т.е. $p_i(x) = \widetilde{p}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Вычтем почленно из первого уравнения второе, получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$(p_1(x) - \widetilde{p}_1(x)) y^{(n-1)} + (p_2(x) - \widetilde{p}_2(x)) y^{(n-2)} + \ldots$$

$$\ldots + (p_n(x) - \widetilde{p}_n(x)) y = 0. \tag{6.25}$$

Если $p_1(x) \not\equiv \widetilde{p}_1(x)$, то найдется по крайней мере одна точка, а в силу непрерывности коэффициентов уравнения и некоторый интервал (α, β), в каждой точке которого $p_1(x)-\widetilde{p}_1(x) \neq 0$. Поделив обе части уравнения (6.25) на $p_1(x) - \widetilde{p}_1(x)$, получим уравнение с коэффициентом при старшей степени, равным единице. Оно допускает те же решения, что и уравнения (6.24), т.е. уравнение $(n-1)$-го порядка со старшим коэффициентом равным единице допускает n независимых интегралов. Это противоречит предыдущей теореме. Следовательно, $p_1(x) \equiv \widetilde{p}_1(x)$. Аналогично показывается, что $p_2(x) \equiv \widetilde{p}_2(x), \ldots$ $\ldots, p_n(x) \equiv \widetilde{p}_n(x)$.

Следствие. Фундаментальная система вполне определяет линейное однородное уравнение со старшим коэффициентом, равным единице.

Задача. Пусть дана фундаментальная система решений $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ на интервале (a, b). Требуется построить соответствующее дифференциальное уравнение, имеющее решения совпадающие с данной системой функций.

Решение. Приравняем к нулю определитель Вронского $(n+1)$-го порядка, в котором y обозначает искомую функцию:

$$W[\,y_1(x), \ldots, y_n(x), y\,] \equiv \tag{6.26}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель $W[\,y_1(x), \ldots, y_n(x), y\,]$ по элементам n-го столбца, найдем, что уравнение (6.26) представляет собой однородное дифференциальное уравнение n-го порядка для функции y. Легко видеть, что при подстановке вместо y функций $y_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ получается определитель с двумя равными столбцами, следовательно он равен нулю, следовательно уравнение (6.26) имеет частные решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$.

Коэффициент при $y^{(n)}$ равен $W[\, y_1(x), \ldots, y_n(x)\,]$, который, как известно, не равен нулю на интервале (a, b). Если разделить обе части уравнения (6.26) на W, то мы получим линейное однородное уравнение со старшим коэффициентом, равным единице. По доказанному выше, такое уравнение однозначно определяется фундаментальной системой.

6.4.2. Формула Остроградского-Лиувилля

Запишем уравнение (6.26) в развернутом виде, начиная разложение определителя $W[\, y_1(x), \ldots, y_n(x), y\,]$ с элемента в нижнем правом углу:

$$y^{(n)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} - \tag{6.27}$$

$$-y^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n y \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Если исходное уравнение имело вид:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0,$$

то после деления (6.27) на $W[\,y_1(x),\ldots,y_n(x)\,]$ (коэффициент при $y^{(n)}$) и сравнения коэффициентов получаем:

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}}{W[\,y_1(x),\ldots,y_n(x)\,]}\,. \tag{6.28}$$

Используя правило дифференцирования определителей: производная определителя равна сумме определителей, полученных дифференцированием строк (или столбцов):

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i', \tag{6.29}$$

найдем, что определитель в числителе в правой части равенства (6.28) есть производная от определителя Вронского W, стоящего в знаменателе. Действительно, при дифференцировании $W[y_1(x),\ldots,y_n(x)]$ по формуле (6.29) получаем $(n-1)$ нулевых слагаемых-определителей с равными строками (с номерами $i = 1,2,\ldots,n-1$) и только последняя, n-ая, строка после дифференцирования дает ненулевой определитель, стоящий в числителе в правой части равенства (6.28).

Таким образом, уравнение (6.28) следует понимать как дифференциальное уравнение для W, в котором функция $p_1(x)$ известна:

$$p_1(x) = -\frac{W'}{W},$$

из которого, разделяя переменные, последовательно получим

$$\int p_1(x)dx = -\int \frac{dW}{W}; \quad \Rightarrow \quad -\int p_1(x)dx + \ln|C| = \ln|W|,$$

откуда после потенцирования и определения постоянной $C = W(x_0)$ имеем

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)dx}. \tag{6.30}$$

Формула (6.30) называется формулой Остроградского-Лиувилля.

Применим Формулу Остроградского-Лиувилля к нахождению общего решения уравнения 2-го порядка:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

у которого известно одно частное решение $y_1(x)$.

Пусть $y(x)$ — любое решение, отличное от $y_1(x)$. Составляем $W(x)$ и используем формулу Остроградского-Лиувилля:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Получаем для $y(x)$ линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Раскрывая определитель, получим:

$$y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx};$$

деля обе части на $y_1^2(x)$ и используя тот факт, что

$$\frac{y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x)}{y_1^2(x)} = \Big(\frac{y(x)}{y_1(x)}\Big)',$$

находим:

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{y(x)}{y_1(x)}\Big) = \frac{1}{y_1^2(x)}C_1 e^{-\int p_1(x)dx},$$

откуда $y(x)$ находится квадратурой

$$y(x) = y_1(x)\left(\int \frac{C_1 e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2(x)}\,dx + C_1\right). \tag{6.31}$$

Таким образом, если известно одно частное решение уравнения второго порядка, общее решение находится квадратурами.

Пример. Легко проверить, что уравнение

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

имеет частное решение $y_1 = x$. В нашем случае $p_1 = \dfrac{-2x}{1-x^2}$ и формула (6.31) дает:

$$y = x\Big\{\int \frac{Ce^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx + C_1\Big\} =$$

$$= x\Big\{C\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_1\Big\} =$$

$$= x\Big\{C\int \Big[\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{dx}{1+x}\Big] + C_1\Big\} =$$

$$= x\Big\{C\Big[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big] + C_1\Big\} = C_1x + C\Big(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1\Big).$$

Это общее решение данного уравнения.

Замечание. Множество фундаментальных систем бесконечно.

7. Неоднородные линейные уравнения

7.1. Общие свойства

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение n-го порядка

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \qquad (7.1)$$

где $f(x) \not\equiv 0$, уравнение $L[y] = 0$ является соответствующим однородным уравнением.

Теорема 7.1. *Если $\bar{y}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения и $Y(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения есть сумма частного решения неоднородного уравнения $\bar{y}(x)$*

и общего решения соответствующего однородного уравнения $Y(x)$*:* $y(x) = \bar{y}(x) + Y(x)$.

Доказательство. Функция $\bar{y}(x)$ — решение (7.1), следовательно $L[\bar{y}(x)] \equiv f(x)$. С другой стороны $L[Y(x)] = 0$, так как $Y(x)$ — общее решение однородного уравнения. Пусть $y(x) = \bar{y}(x) + Y(x)$, тогда в силу линейности исходного уравнения

$$L[\,\bar{y}(x) + Y(x)\,] \equiv L[\,\bar{y}(x)\,] + L[\,Y(x)\,] \equiv f(x). \tag{7.2}$$

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система однородного уравнения, тогда из теоремы (6.8) следует, что общее решение имеет вид $Y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.

Подставив это выражение в формулу для решения неоднородного уравнения, получим

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + \bar{y}(x). \tag{7.3}$$

Докажем, что из этого уравнения всегда можно получить решение, удовлетворяющее любым начальным условиям задачи Коши:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Продифференцируем (7.3) $(n-1)$ раз:

$$\begin{cases} y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n'(x) + \bar{y}'(x), \\ y''(x) = C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + \ldots + C_n y_n''(x) + \bar{y}''(x), \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x) = C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x) + \bar{y}^{(n-1)}(x). \end{cases} \tag{7.4}$$

Отсюда, подставив значения $y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ в левую часть (7.4) и задав $x = x_0$ в правой части, получим систему из n уравнений с n неизвестными $C_1, \ldots, C_n$. Ее определитель равен определителю Вронского $W(x_0) \neq 0$, так как система

$y_1(x), \dots, y_n(x)$ — фундаментальная, следовательно, существует единственное решение для $C_1, \dots, C_n$ и, следовательно, решение (7.3) – общее.

Пример. Рассмотрим уравнение $y'' + y = 3x$. Легко видеть, что его частное решение $\bar{y} = 3x$. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' + y = 0.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что однородное уравнение имеет решения $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$. Их определитель Вронского тождественно равен единице (проверьте!), поэтому они образуют фундаментальную систему. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3x.$$

7.2. Метод вариации произвольных постоянных

Теорема 7.2. *Если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения может быть найдено при помощи квадратур.*

Доказательство.

Пусть дано неоднородное линейное уравнение (7.1), которое более кратко можно записать в виде:

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y^{(n-i)} = f(x),$$

или в операторной форме $L[y] = f(x)$. Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения $L[y] = 0$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x). \tag{7.5}$$

Будем искать общее решение неоднородного уравнения (7.1) в виде (7.5), полагая, что $C_i = C_i(x)$ — функции аргумента x, то есть решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x). \tag{7.6}$$

Этот метод называется методом вариации произвольных постоянных, он был предложен Лагранжем. Нам нужно найти n новых неизвестных функций $C_i(x)$. Для их определения нужно иметь n уравнений, — одно из них получится из условия, что выражение (7.6) удовлетворяет уравнению (7.1), остальные $n-1$ уравнений можно задать произвольно. Будем задавать их так, чтобы выражения для производных имели наиболее простой вид.

Дифференцируя равенство (7.6) по x, получим

$$\bar{y}'(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'(x).$$

Выберем $C_i(x)$ так, чтобы $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) \equiv 0$, тогда после еще одного дифференцирования имеем

$$\bar{y}''(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i''(x).$$

Вновь выбираем $C_i(x)$ так, чтобы первая сумма равнялась нулю: $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) \equiv 0$. Последовательно повторяя процедуру дифференцирования и на каждом шаге приравнивая к нулю сумму слагаемых, содержащих $C_i'(x)$, получаем:

$$\bar{y}^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)}(x).$$

Положим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) \equiv 0.$$

Тогда после дифференцирования получим

$$\bar{y}^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}(x).$$

Подставим все выражения для функции $\bar{y}(x)$ и ее производных $\bar{y}'(x)$, …, $\bar{y}^{(n)}(x)$ в уравнение (7.1) и перегруппируем слагаемые, собрав члены с коэффициентами C_i. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} C_i \underbrace{\left[y_i^{(n)}(x) + p_1 y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1} y_i'(x) + p_n y_i(x) \right]}_{=0} = f(x).$$

С учетом вышеналоженных ограничений на $C_i'(x)$ получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(k)}(x) = 0, \qquad k = 0, \ldots, n-2, \\ &\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Это алгебраическая система относительно $C_i'(x)$, состоящая из n линейных уравнений с n неизвестными функциями $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ее определитель есть определитель Вронского

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \dots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0,$$

так как $\{y_i(x)\}$ — фундаментальная система.

Следовательно, систему уравнений (7.7) можно разрешить в явном виде относительно C_i':

$$\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x), \tag{7.8}$$

где $\varphi_i(x) \in C(a,b)$, откуда квадратурами находим

$$C_i = \int \varphi_i(x)dx + \widetilde{C}_i$$

где $\widetilde{C}_i$ — новые произвольные постоянные. Окончательно имеем общее решение неоднородного линейного уравнения (7.1)

$$y = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{C}_i y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \varphi_i(x)dx. \tag{7.9}$$

Пример. Рассмотрим уравнение $xy'' - y' = x^2$. Предполагая, что $x \neq 0$, запишем его в равносильном виде $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$. Соответствующее однородное уравнение $xy'' - y' = 0$ легко интегрируется:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Rightarrow \quad (\ln y')' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y' = \ln x + \ln A \quad \Rightarrow$$

$$y' = A_1 x, \quad y = \frac{A}{2}x^2 + B.$$

Таким образом, фундаментальная система состоит из функций $\{1; x^2\}$.

Полагаем в неоднородном уравнении $y = C_1 + C_2 x^2$.

Для определения C_1 и C_2 имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 \cdot \dfrac{dC_1}{dx} + x^2 \dfrac{dC_2}{dx} = 0, \\ 0 \cdot \dfrac{dC_1}{dx} + 2x \dfrac{dC_2}{dx} = x, \end{cases}$$

откуда последовательно получаем

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{x}{2} + \widetilde{C}_2 \Rightarrow \frac{dC_1}{dx} = -\frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow C_1 = -\frac{x^3}{6} + \widetilde{C}_1.$$

Подставляя в выражение для y, находим общее решение

$$y = \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2 x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

8. Сопряженное уравнение

8.1. Множитель дифференциального выражения

Пусть имеется линейное дифференциальное выражение:

$$L[y] \equiv a_n(x)y + a_{(n-1)}(x)y' + \ldots + a_0(x)y^{(n)}. \qquad (8.1)$$

Требуется найти такую функцию $z(x)$, чтобы после умножения на нее выражение (8.1) стало точной производной по x для любой функции $y(x) \in C^n(a,b)$. Такая функция $z(x)$ называется *множителем* дифференциального выражения $L[y]$; $a_i(x) \in C^{(n)}(a,b)$.

Умножим выражение (8.1) на $z(x)$ и вычислим неопределенный интеграл $\displaystyle\int zL[y]dx$, интегрируя всякий его член по частям, понижая порядок производной до тех пор, пока под интегралом не останется множитель y:

$$\int a_n yzdx = \int a_n yzdx,$$

$$\int a_{n-1}y'zdx = a_{n-1}zy - \int y(a_{n-1}z)'dx,$$

$$\int a_{n-2}y''zdx = a_{n-2}zy' - \int (a_{n-2}z)'y'dx =$$

$$= a_{n-2}zy' - (a_{n-2}z)'y + \int y(a_{n-2}z)''dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int a_1 y^{(n-1)}zdx = a_1 zy^{(n-2)} - (a_1 z)'y^{(n-3)} + (a_1 z)''y^{(n-4)} - \ldots$$

$$+(-1)^{(n-2)}(a_1 z)^{(n-2)}y + (-1)^{n-1}\int y(a_1 z)^{(n-1)}dx,$$

$$\int a_0 y^{(n)}zdx = a_0 zy^{(n-1)} - (a_0 z)'y^{(n-2)} + (a_0 z)''y^{(n-2)} - \ldots$$

$$+(-1)^{(n-1)}(a_0 z)^{(n-1)}y + (-1)^n\int y(a_0 z)^{(n)}dx.$$

Тогда $\int zL[y]dx$ запишется в виде:

$$\int zL[y]dx = \Psi[y,z] + \int yM[z]dx, \tag{8.2}$$

где

$$M[z] = a_n z - (a_{n-1}z)' + (a_{n-2}z)'' - \ldots + (-1)^{n-1}(a_1 z)^{(n-1)} +$$
$$+(-1)^n(a_0 z)^{(n)}.$$

Выражение $M[z]$ называется *сопряженным* с $L[y]$ дифференциальным выражением (или оператором), а $\Psi[y,z]$ есть *билинейная форма* относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ и $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$, а именно

$$\Psi[y,z] = y\left\{a_{n-1}z - (a_{n-2}z)' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_0z)^{(n-1)}\right\} +$$
$$+ y'\left\{a_{n-2}z - (a_{n-3}z)' + \ldots + (-1)^{n-2}(a_0z)^{(n-2)}\right\} +$$
$$+ y^{(n-2)}\left\{a_1z - (a_0z)'\right\} + y^{(n-1)}a_0z. \tag{8.3}$$

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$M[z] = 0 \tag{8.4}$$

называется *уравнением, сопряженным с уравнением*

$$L[y] = 0. \tag{8.5}$$

Если мы возьмем в качестве z решение уравнения (8.4), $z = \bar{z}$, то из формулы (8.2) следует, что

$$\int \bar{z}L[y]dx = \Psi[y,\bar{z}]$$

или, после дифференцирования,

$$\bar{z}L[y] = \frac{d}{dx}\Psi[y,\bar{z}].$$

Таким образом, задача решена.

Если умножить данное дифференциальное выражение (8.1) на любое решение $\bar{z}$ сопряженного уравнения (8.4), то оно становится полной производной от дифференциального выражения $(n-1)$-го порядка $\Psi[y,\bar{z}]$. Обратно, для того, чтобы $\bar{z}$ обращала $L[y]$ в полную производную при умножении его на $\bar{z}$, как можно доказать, необходимо, чтобы $M[\bar{z}] \equiv 0$.

Таким образом, для того чтобы функция $z(x)$ при любом y обращала произведение $\bar{z}L[y]$ в полную производную, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{z}$ являлась решением сопряженного уравнения $M[z] = 0$.

Но если $zL[y] = \dfrac{d}{dx}\Psi[y,\bar{z}]$, то уравнение $L[y] = 0$ допускает первый интеграл.

$$\Psi[y,\bar{z}] = C, \tag{8.6}$$

который сам по себе является, вообще говоря, неоднородным уравнением $(n-1)$ порядка.

Если же дано неоднородное уравнение $L[y] = f(x)$, то та же функция $\bar{z}$ является его множителем и его первый интеграл

$$\Psi[y, \bar{z}] = \int f(x)\bar{z}dx + C.$$

9. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

9.1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим *линейное однородное дифференциальное уравнение* n-го порядка:

$$L[y] \equiv a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0, \tag{9.1}$$

где $a_i = \text{const},\ a_n \neq 0$.

Оказывается, как будет показано далее, если коэффициенты уравнения (9.1) являются действительными числами, то это уравнение всегда можно проинтегрировать в элементарных функциях, более того, интегрирование уравнения (9.1) сводится даже не к квадратурам, а к алгебраическим операциям.

В силу общих свойств линейных уравнений нам достаточно найти n частных решений, образующих фундаментальную систему. Выясним, какие элементарные функции могли бы обратить уравнение (9.1) в тождество.

С этой целью рассмотрим *характеристический многочлен*

$$L(\lambda) \equiv a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0, \tag{9.2}$$

который однозначно определяется уравнением (9.1). Его корни называются *собственными значениями.*

Введем оператор дифференцирования p:

$$p \cdot y = \frac{d}{dx} y = y',$$
$$p^2 \cdot y = \frac{d^2}{dx^2} y = y'',$$
$$p^k \cdot y = \frac{d^k}{dx^k} y = y^k.$$

Тогда любое дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами может быть записано в виде

$$\alpha_m y^{(m)} + \alpha_{m-1} y^{(m-1)} + \ldots + \alpha_0 y \equiv$$
$$\equiv \alpha_m p^m y + \alpha_{m-1} p^{m-1} y + \ldots + \alpha_0 y \equiv$$
$$\equiv \left(\alpha_m p^m + \alpha_{m-1} p^{m-1} + \ldots + \alpha_0\right) y.$$

Таким образом, любому алгебраическому многочлену

$$M(\lambda) = \sum_{i=m}^{i=0} \alpha_i \lambda^i$$

соответствует дифференциальный оператор $M(p)y$. Уравнение n-го порядка (9.1) записывается в виде:

$$L(p)\ y = 0,$$

где

$$L(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i.$$

Между алгебраическими многочленами и дифференциальными операторами существует взаимно-однозначное соответствие.

Это соответствие (оператору соответствует многочлен) имеет следующие свойства:

(1) $M_1(\lambda) + M_2(\lambda) \longleftrightarrow M_1(p) + M_2(p)$;
или $M_1(p)\ y + M_2(p)\ y \longleftrightarrow [M_1(p) + M_2(p)]\ y$;

(2) $M_1(p)\ [y_1 + y_2] = M_1(p)\ y_1 + M_1(p)\ y_2$;

(3) $M_1(\lambda) \cdot M_2(\lambda) = M_1(p) \cdot M_2(p)$;
$M_1[M_2 \cdot y] = [M_1(p) M_2(p)]\, y$.

Рассмотрим возможные ситуации с корнями характеристического многочлена.

1) *Случай, когда характеристический многочлен* $L(\lambda) = 0$ *имеет вещественные простые корни.*

Рассмотрим уравнение $L(p)\, y = 0$. Будем искать решение в виде $e^{\lambda x}$. Тогда

$$L(p)e^{\lambda x} = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i e^{\lambda x} = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \right) = e^{\lambda x} L(\lambda),$$

следовательно, $L(p)e^{\lambda x} = 0$ тогда и только тогда, когда $e^{\lambda x} L(\lambda) = 0$, но так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то $e^{\lambda x}$ будет решением тогда и только тогда, когда $L(\lambda) = 0$, то есть λ должно быть корнем *характеристического уравнения*

$$L(\lambda) \equiv a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \qquad (9.3)$$

Теорема 9.1. *Если* $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n$ *— вещественные корни характеристического уравнения* $L(\lambda) = 0$*, причем*

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

то функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ \ldots, \ y_n = e^{\lambda_n x}$ *образуют фундаментальную систему решений.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим для этих решений определитель Вронского:

$$W(e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)x} \cdot \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

(этот определитель есть известный определитель Вандермонда, который не равен нулю, если корни уравнения (9.3) различные).

Следовательно, система $\{e^{\lambda_i x}\}_{i=1}^{n}$ — линейно независима и общее решение уравнения (9.1) имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{\lambda_i x},$$

где λ_i — корни характеристического уравнения (9.3).

2) *Случай, когда характеристический многочлен $L(\lambda) = 0$ имеет произвольные корни (кратные и комплексные).*

Пусть множество корней имеет вид :

$$\underbrace{\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_1}_{k_1}, \ \underbrace{\lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_2}_{k_2}, \ \ldots \ , \ \underbrace{\lambda_r, \ \ldots, \ \lambda_r}_{k_r} \ : \quad \sum_{i=1}^{r} k_i = n.$$

В этом случае среди функций $e^{\lambda_i x}$ нельзя найти n линейно независимых решений уравнения (9.1). Однако в этом случае можно воспользоваться следующим наводящим соображением.

Пусть λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) — корни характеристического уравнения. Тогда линейная комбинация решений

$$\frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

является решением уравнения (9.1).

Устремим $\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1$, тогда $\lim\limits_{\lambda_2 \to \lambda_1} \dfrac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} = xe^{\lambda_1 x}$ — функция, о которой естественно предположить, что она также решением уравнения $L(p)\, y = 0$, если λ — двукратный корень характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$. Аналогично, если λ — корень кратности k характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$, то функции $e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots\ ,\ x^{k-1}e^{\lambda x}$ будут решениями уравнения $L(p)\, y = 0$.

Доказательству этой теоремы предпошлем доказательство леммы.

Лемма 9.1 (Формула сдвига).

$$L(p)\ [f(x)\ \cdot\ e^{\lambda x}] =\ e^{\lambda x}\ [L(p + \lambda)\ f(x)].$$

Доказательство (по индукции). Понятно, что для доказательства достаточно рассмотреть простейшие дифференциальные операторы вида p^k, тогда в силу линейности оператора $L(p)$ доказанное для операторов вида p^k справедливо и для произвольного дифференциального оператора $L(p)$.

Рассмотрим случай дифференциального оператора p^k со степенью $k = 1$:

$$p[f(x)e^{\lambda x}] = f'(x)e^{\lambda x} + \lambda f(x)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}[f'(x) + \lambda \cdot f(x)] = \\ = e^{\lambda x}[(p + \lambda)f(x)].$$

Докажем по индукции, что $p^k\ [f(x) \cdot e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}\ [(p+\lambda)^k f(x)]$.

Пусть это равенство справедливо для дифференциального оператора p^{k-1} со степенью $k-1$. Докажем для его для оператора p^k. Имеем

$$p^k\ [f(x)\cdot e^{\lambda x}] = p\cdot p^{k-1}[f(x)\cdot e^{\lambda x}] = p\ [e^{\lambda x}(p+\lambda)^{k-1}f(x)] =$$
$$= e^{\lambda x}\ [(p+\lambda)(p+\lambda)^{k-1}f(x)] = e^{\lambda x}\ [(p+\lambda)^k f(x)]$$

следовательно

$$L(p)\ [f(x)\cdot e^{\lambda x}\ ] = e^{\lambda x}\ \sum_{i=0}^{n} a_i p^i f(x) = e^{\lambda x}[L(p+\lambda)\cdot f(x)].$$

Теорема 9.2 (кратные корни характеристического уравнения)**.** *Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r$ — совокупность попарно различных корней характеристического уравнения $L(\lambda)=0$, соответствующего линейному однородному дифференциальному уравнению $L(p)y=0$, каждый из которых имеет кратность $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r$ (то есть $L(\lambda_i)=L'(\lambda_i)=\ldots=L^{(k_i-1)}(\lambda_i)=0$, $L^{(k_i)}(\lambda_i)\neq 0$).*

В этом случае функции $y_1(x)=e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x)=xe^{\lambda_1 x},\ldots$, $y_{k_1}(x)=x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$, $y_{k_1+1}(x)=e^{\lambda_2 x}$, $\ldots$, $y_{k_1+k_2}(x)=x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}$, $\ldots$, $y_r(x)=x^{k_r-1}e^{\lambda_{k_r} x}$ представляют собой решения уравнения $L(p)\ y=0$ и образуют фундаментальную систему.

Доказательство.

Покажем справедливость этой теоремы для первого корня. По формуле сдвига имеем

$$L(p)\ [x^q e^{\lambda_1 x}] = e^{\lambda_1 x}\ [L(p+\lambda_1)\ x^q].$$

Однако

$$L(p+\lambda_1) = \sum_{i=0}^{n} a_i (p+\lambda_1)^i = \sum_{i=0}^{n} b_i p^i. \tag{9.4}$$

Поскольку $L(\lambda_1)=0$ и, следовательно, $L(p+\lambda_1)\big|_{p=0}=0$, то свободный член b_0 в последней сумме в (9.4) равен нулю.

Аналогичное равенство справедливо, согласно условиям теоремы, для производной $L'(\lambda_1) = 0$: $\dfrac{d}{dp}\ [L(p+\lambda_1)]\Big|_{p=0} = 0$ и поэтому $b_1 = 0$. Из аналогичных условий для производных $\dfrac{d^s}{d\lambda^s}L(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_1} = 0$ при $s = 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ k_1 - 1$, которые чисто формально могут быть записаны в равносильной форме как $\dfrac{d^s}{dp^s}\ L(p+\lambda_1)\Big|_{p=0} = 0$, получаем

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{k_1-1} = 0.$$

Можно рассуждать иначе. Поскольку λ_1 — корень кратности k_1 уравнения $L(\lambda) = 0$, значит $L(\lambda) = M(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{k_1}$, где $M(\lambda_1) \neq 0$, то $L(p) = M(p)\cdot(p-\lambda_1)^{k_1}$, и, значит,

$$L(p+\lambda_1) = M(p+\lambda_1)\cdot p^{k_1} = b_{k_1}p^{k_1} + b_{k_1+1}p^{k_1+1} + \ldots + b_n p^n,$$

причем $b_{k_1} \neq 0$, следовательно, $L(p+\lambda_1)\ x^q = 0$ при $q < k_1$, а $L(p+\lambda_1)\ x^q \neq 0$ при $q \geqslant k_1$.

Следовательно, $L(p)[x^q e^{\lambda_1 x}] = e^{\lambda_1 x}L(p+\lambda_1)x^q = 0$ при $q < k_1$, что и требовалось доказать.

Таким образом, функции $\left\{x^q e^{\lambda_1 x}\right\}_{q=0}^{k_1-1}$ есть решения уравнения (9.1).

Аналогичное доказательство можно провести и для второго корня и т.д. В результате получим r наборов решений.

Покажем, что они линейно независимы. Доказательство проведем от противного.

Допустим, что существуют C_i, не все $C_i \neq 0$, такие что

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \equiv 0. \tag{9.5}$$

Из уравнения (9.5) следует, что результатом подстановки в (9.5) функций $y_i(x)$, образующих фундаментальную систему решений, является тождество

$$\sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i(x)\ e^{\lambda_i x} \equiv 0,$$

где r есть число различных корней характеристического уравнения, а $\mathcal{P}_i(x)$ — некоторые многочлены, возникающие при этой подстановке. Очевидно, что так как не все $C_i = 0$, существует $\mathcal{P}_i(x) \not\equiv 0$.

Например, пусть $\mathcal{P}_r(x) \not\equiv 0$. Умножим соотношение (9.5) на $e^{-\lambda_1 x}$. Получим

$$\mathcal{P}_1(x) + \mathcal{P}_2(x)\ e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \ldots + \mathcal{P}_r(x)\ e^{(\lambda_r-\lambda_1)x} \equiv 0. \qquad (9.6)$$

Если уравнение (9.6) продифференцировать достаточное число раз, то многочлен $\mathcal{P}_1(x)$ исчезнет. Что при этом происходит с $\mathcal{P}_r(x)\ e^{(\lambda_r-\lambda_1)x}$? Заметим, что

$$\underbrace{(\mathcal{P}(x)\ e^{\lambda x})'}_{\deg \mathcal{P}=n} = \underbrace{(\mathcal{P}'(x) + \mathcal{P}(x)\cdot\lambda)}_{\deg(\mathcal{P}'+\lambda\mathcal{P})=n \text{ при } \lambda\neq 0}\ e^{\lambda x}.$$

Следовательно, степень многочлена в последнем слагаемом $\widetilde{\mathcal{P}_r(x)}\ e^{(\lambda_r-\lambda_1)x}$, возникшем в тождестве (9.6) после дифференцирования, остается такой же, какой она была у слагаемого $\mathcal{P}_r(x)\ e^{(\lambda_r-\lambda_1)x}$ в (9.6) до дифференцирования. Проделывая ту же операцию (умножение на нужную степень показательной функции для выделения многочлена и последующее дифференцирование для его “уничтожения”) достаточное число раз, получим, после уничтожения всех слагаемых в тождестве (9.6), кроме последнего:

$$\widetilde{\mathcal{P}_r^{(r-1)}}(x)\ e^{(\lambda_r-\lambda_{r-1})x} \equiv 0,$$

где показатель $(r-1)$ в $\widetilde{\mathcal{P}_r^{(r-1)}}(x)$ обозначает число применений операций умножения на некоторую показательную функцию для выделения очередного многочлена и последующего дифференцирования до уничтожения этого многочлена.

Так как $e^{(\lambda_r-\lambda_{r-1})x} \neq 0$, значит $\widetilde{\mathcal{P}_r^{(r-1)}(x)} \equiv 0$.

Мы пришли к противоречию, поскольку степени этих многочленов не меняются при умножении на показательную функцию и дифференцировании: $\deg \mathcal{P}_r(x) = \deg \widetilde{\mathcal{P}_r(x)} = \ldots$ $\ldots = \deg \widetilde{\mathcal{P}_r^{(r-1)}(x)}$ и, следовательно, в $\widetilde{\mathcal{P}_r^{(r-1)}(x)}$ есть, как и исходном многочлене $\mathcal{P}_r(x)$, хотя бы один коэффициент, не равный нулю.

Таким образом, функции

$$\{e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_2 x},\ \ldots\ ,\ x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \ldots x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{k_r-1}e^{\lambda_r x}\}$$

линейно независимы.

9.2. Переход к вещественным функциям

Мы предполагали, что и коэффициенты (и функции) в уравнении $L(p)\,y = 0$ вещественны. Для овеществления комплекснозначных функций, которые получаются в случае комплексных собственных значений, используем формулу Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

и тот факт, что если λ_1 — комплексный корень алгебраического уравнения с действительными коэффициентами, то сопряженное значение $\bar{\lambda}_1$ также является его корнем.

Рассмотрим любое решение из полученной системы вида $x^k e^{\lambda x}$. Пусть собственное значение $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ — комплексное, тогда $\bar{\lambda}_1 = \alpha_1 - i\beta_1$ также является собственным значением и, следовательно, наряду с решением $y_1(x) = x^k e^{\lambda x}$ функция $y_2(x) = x^k e^{\bar{\lambda} x}$ также является решением.

Используя формулу Эйлера, получим:

$$y_1(x) = x^k e^{\lambda_1 x}(\cos \beta_1 x + i \sin \beta_1 x),$$
$$y_2(x) = x^k e^{\lambda_1 x}(\cos \beta_1 x - i \sin \beta_1 x).$$

Складывая и вычитая эти два выражения, найдем:

$$y_1^*(x) = \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2} = x^k e^{\lambda_1 x} \cos\beta_1 x, \qquad (9.7)$$

$$y_2^*(x) = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2i} = x^k e^{\lambda_1 x} \sin\beta_1 x. \qquad (9.8)$$

Так как линейная комбинация решений линейного однородного уравнения есть решение, функции $y_1^*(x)$ и $y_2^*(x)$ — тоже решения, причем вещественные.

Рассмотрим набор решений $y_1^*(x),\ y_2^*(x),\ y_3(x), \ldots,\ y_n(x)$. Докажем, что они образуют фундаментальную систему решений.

Рассуждаем от противного. Пусть существуют $C_i \neq 0$ такие, что

$$C_1\ y_1^*(x) + C_2\ y_2^*(x) + C_3\ y_3(x) + \ldots + C_n\ y_n(x) \equiv 0.$$

Используя формулы (9.7) и (9.8), получим

$$y_1(x)\left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2i}\right) + y_2(x)\left(\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2i}\right) + C_3 y_3(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0,$$

где $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений. Следовательно,

$$\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2i} = 0, \quad \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2i} = 0, \quad C_3 = 0,\ \ldots\ ,\ C_n = 0,$$

откуда $C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ C_3 = 0,\ \ldots\ ,\ C_n = 0$. Получили противоречие, которое доказывает, что $y_1^*(x),\ y_2^*(x),\ y_3(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ — фундаментальная система.

Действуя таким образом, можно перейти к вещественной системе решений:

$$e^{\lambda_1 x}\cos\beta_1 x,\ x e^{\lambda_1 x}\cos\beta_1 x,\ \ldots\ ,\ x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}\cos\beta_1 x,\ \ldots$$

$$e^{\lambda_1 x}\sin\beta_1 x,\ x e^{\lambda_1 x}\sin\beta_1 x,\ \ldots\ ,\ x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}\sin\beta_1 x,\ \ldots.$$

Эти $2k_1$ решений соответствуют комплексно-сопряженным собственным значениям $\lambda_1 \pm i\beta_1$ кратности k_1. Аналогичные рассуждения справедливы для остальных собственных значений.

9.3. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

При решении неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(x) \tag{9.9}$$

часто используется следующая теорема.

Теорема 9.3. *Если $\bar{y}_1(x)$ — частное решение уравнения*

$$L(p)y \equiv a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f_1(x), \tag{9.10}$$

а $\bar{y}_2(x)$ — частное решение уравнения

$$L(p)y \equiv a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f_2(x), \tag{9.11}$$

с той же самой левой частью, то сумма $\bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$ является частным решением уравнения

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f_1(x) + f_2(x). \tag{9.12}$$

Доказательство. Подставив в левую часть уравнения (9.12) сумму функций $\bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$, на основании равенств (9.10) и (9.11) получим

$$L(p)(\bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)) = L(p)(\bar{y}_1(x)) + L(p)(\bar{y}_2(x)) = f_1(x) + f_2(x),$$

что и требовалось доказать.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения (9.9) можно применить метод вариации произвольных постоянных, изложенный выше. Этот метод применим, вообще говоря, к уравнениям с любой правой частью. Однако для уравнений с постоянными коэффициентами, правые части которых имеют специальный вид, существует более простой способ нахождения частного решения, который называется *методом подбора частного решения.*

Опишем этот способ нахождения частных решений линейного уравнения (9.9) с постоянными коэффициентами, в котором правая часть $f(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x)$ — многочлен, а γ — комплексное число, с помощью рациональных операций, без квадратур.

Пусть γ — корень кратности r характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ (если γ не является корнем характеристического уравнения: $L(\gamma) \neq 0$, то $r = 0$).

Докажем, что частное решение имеет вид $\bar{y}(x) = x^r Q_m(x)\, e^{\gamma x}$, где $Q_m(x)$ — многочлен, степень которого $\deg Q_m(x) = m$.

Проведем индукцию по степени m многочлена $P_m(x)$.

1) Пусть $m = 0$, то есть $f(x) = Ae^{\gamma x}$. Ищем частное решение в виде $\bar{y}_1(x) = Cx^r e^{\gamma x}$. Имеем

$$L(p)\bar{y}_1(x) = L(p)\ [Cx^r \cdot e^{\gamma x}] = Ce^{\gamma x}[L(p+\gamma)x^r].$$

Поскольку

$$L(p+\gamma) = a_n^* p^n + \ldots + a_r^* p^r,$$

так как γ — корень кратности r (см. выше) и $a_r^* \neq 0$, то

$$L(p+\gamma)\ x^r = r! a_r^*,$$

следовательно,

$$L(p)\ y_1(x) \equiv C\, r!\, a_r^*\, e^{\gamma x} = A\, e^{\gamma x} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{A}{r!\, a_r^*}\ \cdot$$

2) Пусть теперь $m > 0$ — произвольное, и предположим, что для $m-1$ доказываемое утверждение верно. Имеем уравнение

$$L(p)y = \underbrace{(b_m x^m + \ldots + b_0)}_{P_m(x)} e^{\gamma x}, \quad b_m \neq 0. \tag{9.13}$$

Докажем, что частное решение имеет вид $\bar{y}(x) = x^r Q_m(x) e^{\gamma x}$. Найдем последовательно коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, начиная со старшего члена. Для этого рассмотрим функцию $y_1(x) = Cx^{r+m}e^{\gamma x}$ и найдем значение постоянной C, при котором коэффициент при старшей степени в $P_m(x)$ совпадает с соответствующим коэффициентом в выражении в левой части уравнения в результате подстановки туда функции $y_1(x)$.

Используя формулу сдвига, находим

$$L(p)y_1(x) = e^{\gamma x}[L(p+\gamma)\ Cx^{r+m}] =$$

$$= e^{\gamma x}[(a_r^* p^r + \ldots + a_n^* p^n)\ Cx^{r+m}]. \qquad (9.14)$$

Выполним дифференцирование в квадратных скобках и приравняем полученное выражение правой части уравнения (9.13)

$$[Ca_r^*\ (m+r)\ (m+r-1)\ \ldots\ (m+1)\ x^m + Q_{m-1}(x)]e^{\gamma x} =$$

$$= f(x) \equiv P_m(x)e^{\gamma x} \equiv (b_m x^m + \ldots + b_0)e^{\gamma x}, \qquad (9.15)$$

где первое слагаемое в квадратных скобках есть результат r-кратного дифференцирования Cx^{r+m} и умножения на a_r^* в соответствии с (9.14), а $Q_{m-1}(x)$ — некоторый многочлен, $\deg Q_{m-1}(x) \leqslant m-1$, в котором собраны все члены меньшей степени, возникшие при взятии производных более высокого порядка, чем r, в (9.14). Конечно, $Q_{m-1}(x)$ зависит от C.

Из условия совпадения коэффициентов при старших степенях в многочленах в левой и правой частях равенства (9.15) находим

$$C = \frac{b_m}{a_r^*\ (m+r)(m+r-1)\ \ldots (m+1)}\ .$$

Таким образом, постоянная C однозначно определена, тем самым определено $Q_{m-1}(x)$ и функция $y_1(x)$ найдена.

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$L(p)y_1(x) = (b_m x^m + Q_{m-1}(x))\ e^{\gamma x}.$$

Представим правую часть уравнения (9.13) в виде

$$f(x) \equiv f(x) - (b_m x^m + Q_{m-1}(x))\ e^{\gamma x} + (b_m x^m + Q_{m-1}(x))\ e^{\gamma x} \equiv$$
$$\equiv q_{m-1}(x)\ e^{\gamma x} + (b_m x^m + Q_{m-1}(x))\ e^{\gamma x} \equiv f_2(x) + f_1(x),$$

где $q_{m-1}(x) = P_m(x) - b_m x^m - Q_{m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$.

По предположению индукции существует функция $y_2(x)$ такая, что $L(p)y_2(x) = q_{m-1}(x)e^{\gamma x}$, причем $y_2(x) = x^r P_{m-1}(x)e^{\gamma x}$.

Таким образом, уравнение (9.13) представлено в виде

$$L(p)y = f_1(x) + f_2(x),$$

и функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют соответственно уравнениям $L(p)y = f_1(x)$ и $L(p)y = f_2(x)$, то в силу теоремы (9.3) функция

$$\bar{y}(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

является решением данного уравнения и найденная функция $\bar{y}(x)$ — искомая.

Действительно

$$\begin{gathered} L(p)\ \bar{y}(x) = L(p)\ y_1(x) + L(p)\ y_2(x) \equiv \\ \equiv (b_m x^m + Q_{m-1}(x))\ e^{\gamma x} + q_{m-1}(x)\ e^{\gamma x} \equiv \\ \equiv (b_m x^m + Q_{m-1}(x))\ e^{\gamma x} + (f(x) - b_m x^m - Q_{m-1}(x))\ e^{\gamma x} \equiv f(x), \end{gathered}$$

и частное решение имеет вид $\bar{y}(x) = x^r Q_m(x) \cdot e^{\gamma x}$.

Подведем итоги для метода подбора формы частного решения. Рассмотрим несколько простейших ситуаций.

1) *Правая часть уравнения (9.9) — многочлен степени m:*

$$f(x) = P_m(x).$$

В этом случае частное решение $\bar{y}(x)$ следует искать в виде

$$\bar{y}(x) = Q_m(x)x^r,$$

где $Q_m(x)$ — многочлен той же степени, что и многочлен $P_m(x)$, но с неизвестными коэффициентами, а r — число собственных значений, равных нулю.

2) *Правая часть уравнения (9.9) — квазимногочлен (произведение многочлена на показательную функцию)*:

$$f(x) = P_m(x)e^{ax},$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а коэффициент a в показателе экспоненты — действительное число.

В этом случае частное решение $\bar{y}(x)$ следует искать в виде

$$\bar{y}(x) = Q_m(x)x^r e^{ax},$$

где $Q_m(x)$ — многочлен той же степени, что и многочлен $P_m(x)$, но с неизвестными коэффициентами, а r — число собственных значений, равных a.

Замечание. При $a = 0$ имеем случай 1), так как функция $f(x) = e^{0x}P_m(x) \equiv P_m(x)$.

3) *Правая часть уравнения (9.9) — сумма тригонометрических функций*

$$f(x) = M\cos bx + N\sin bx,$$

где M, N и b — заданные числа.

В этом случае частное решение $\bar{y}(x)$ следует искать в виде

$$\bar{y}(x) = (A\cos bx + B\sin bx)x^r,$$

где A и B — неизвестные коэффициенты, а r — число собственных значений, равных bi.

4) *Правая часть уравнения (9.9) — функция вида*

$$f(x) = e^{ax}(P(x)\sin bx + Q(x)\cos bx),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, а коэффициенты a и b — действительные числа.

В этом случае частное решение $\bar{y}(x)$ следует искать в виде

$$\bar{y}(x) = e^{ax}(S_m(x)\sin bx + T_m(x)\cos bx)x^r,$$

где $S_m(x)$ и $T_m(x)$ — многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, но с неизвестными коэффициентами, а $r = 0$, если $a + bi$ не является корнем характеристического уравнения, и r равно кратности корня в противном случае.

В последнем случае есть еще один метод отыскания частного решения. Сначала решают уравнение с правой частью

$P(x)e^{(a+bi)x}$. Тогда вещественная часть этого решения будет решением уравнения с правой частью вида $P(x)e^{ax}\cos bx$, а мнимая — решением уравнения с правой частью вида $P(x)e^{ax}\sin bx$.

9.4. Приложение линейных дифференциальных уравнений второго порядка к изучению механических и электрических колебаний

Рассмотрим следующую задачу. Пусть материальная точка (груз) массы m, находящаяся на конце пружины, движется по вертикальной прямой. Требуется определить закон движения груза.

Предположим, что в положении равновесия вес груза уравновешивается упругой силой пружины. Совместим начало координат с положением равновесия груза, а ось Oy направим вертикально вниз по прямой, вдоль которой движется груз (рис. 9.1).

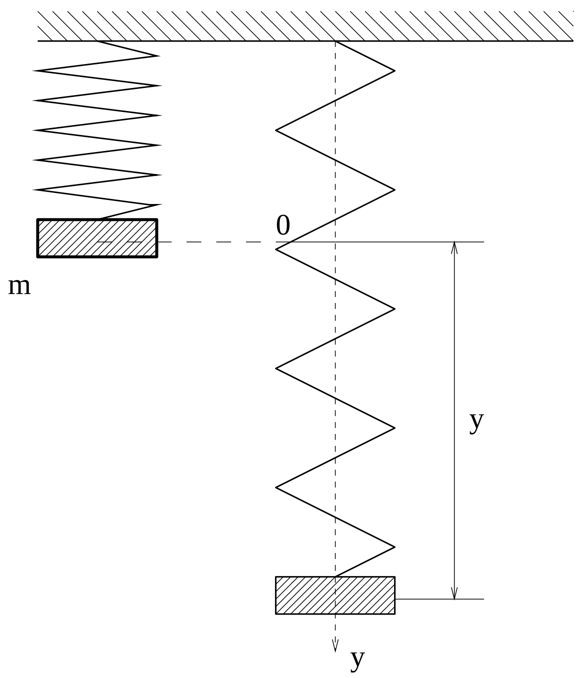

Рис. 9.1. *Колебания груза, подвешенного на пружине*

Положение груза в произвольный момент времени t определяется отклонением y груза от начала координат (см. рис. 9.1).

Для нахождения закона движения груза надо определить отклонение груза y от положения равновесия как функцию времени t.

На тело действуют следующие силы:

1) Восстанавливающая сила $\mathbf{F}_1$, стремящаяся вернуть груз в положение равновесия. Сила $\mathbf{F}_1$ направлена вдоль оси Oy, ее проекция на эту ось пропорциональна отклонению груза от положения равновесия: $F_{1y} = -ky$. Число k, $k > 0$ связано с упругостью пружины. Знак "минус" в выражении проекции силы F_{1y} указывает на то, что восстанавливающая сила направлена в сторону, противоположную деформации пружины.

2) Сила сопротивления среды $\mathbf{F}_2$, в которой находится пружина с грузом, направлена противоположно вектору скорости движения груза. Величина силы $\mathbf{F}_2$, как показывает опыт, пропорциональна скорости v груза. Поэтому проекция силы $\mathbf{F}_2$ на ось Oy запишется в виде $F_{2y} = -\lambda v = -\lambda$, где $\lambda > 0$, или $F_{2y} = -\lambda \dfrac{dy}{dt}$.

Силой веса груза пренебрегаем, так как она уравновешена упругой силой пружины, что учтено выбором системы координат (начальное положение $y = 0$). Весом пружины и ее энергией движения также пренебрегаем.

Для составления дифференциального уравнения движения груза воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}. \tag{9.16}$$

Здесь $\mathbf{a}$ — вектор ускорения и $\sum \mathbf{F}$ — сумма сил, действующих на материальную точку.

В нашем случае на материальную точку (груз) действуют две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, направленные вдоль оси Oy. Проецируя векторы, стоящие в обеих частях равенства (9.16), на ось Oy и замечая, что проекция вектора ускорения $\mathbf{a}$ на ось Oy равна

$\dfrac{d^2y}{dt^2}$, получаем искомое дифференциальное уравнение

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt}$$

или

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dy}{dt} + ky = 0. \tag{9.17}$$

Уравнение (9.17) является уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и называется *уравнением свободных колебаний.*

Если на груз, помимо сил упомянутых выше, действует внешняя “возмущающая” сила, направленная вдоль оси Oy, величина которой $F(t)$ есть заданная функция времени t, то уравнение (9.17) принимает вид

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dy}{dt} + ky = F(t) \tag{9.18}$$

и называется *уравнением вынужденных колебаний.*

Разделив обе части уравнения (9.18) на m и введя обозначения

$$\frac{\lambda}{m} = 2b,\ \frac{k}{m} = \omega^2,\ \frac{F(t)}{m} = f(t),$$

получим уравнение вынужденных колебаний в следующей окончательной форме:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t). \tag{9.19}$$

Уравнение (9.19) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим некоторые частные случаи этого уравнения.

1. Пусть отсутствуют сопротивление среды ($b = 0$) и внешняя возмущающая сила ($f(t) \equiv 0$). В этом случае уравнение

(9.19) принимает вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \tag{9.20}$$

Уравнение (9.20) является уравнением свободных колебаний груза при отсутствии сопротивления среды. Его характеристическое уравнение $k^2 + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\omega i$ и общее решение уравнения (9.20) запишется в виде

$$Y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \tag{9.21}$$

Вместо произвольных постоянных C_1 и C_2 введем новые произвольные постоянные $N > 0$ и φ (амплитуда и фаза колебаний), связанные с C_1 и C_2 соотношениями

$$C_1 = N \sin \varphi, \qquad C_2 = N \cos \varphi.$$

Тогда амплитуда колебаний N и фаза φ выражаются через C_1 и C_2 по формулам:

$$N = C_1^2 + C_2^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2} \cdot$$

Подставляя выражения для C_1 и C_2 в равенство (9.21), получим

$$Y(t) = N \sin \varphi \cos \omega t + N \cos \varphi \sin \omega t = N \sin(\omega t + \varphi).$$

Итак, общее решение уравнения (9.20) можно представить в виде

$$Y(t) = N \sin(\omega t + \varphi).$$

Эта формула показывает, что груз совершает периодические движения, которые называются *гармоническими колебаниями*. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, N — амплитуда колебаний, φ — начальная фаза колебаний, величина ω называется *собственной частотой колебаний.*

2. Пусть теперь имеет место сопротивление среды ($b \neq 0$), но по-прежнему $f(t) \equiv 0$, т.е. внешняя сила равна нулю. В этом случае уравнение (9.19) примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \qquad (9.22)$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + 2bk + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$.

Рассмотрим практически наиболее интересный случай малого сопротивления, когда $b < \omega$. В этом случае корни являются комплексными: $k_{1,2} = -b + \tilde{\omega} i$, где $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - b^2}$. Общее решение уравнения (9.22) имеет вид

$$Y(t) = e^{-bt}(C_1 \cos\tilde{\omega}t + C_2 \sin\tilde{\omega}t) = Ne^{-bt}\sin(\tilde{\omega}t + \varphi),$$

где $C_1 = N\sin\varphi$, $C_2 = N\cos\varphi$. Отсюда видно, что груз совершает *затухающие* колебания с амплитудой $Ne^{-bt} \to 0$ при $t \to \infty$ (рис. 9.2).

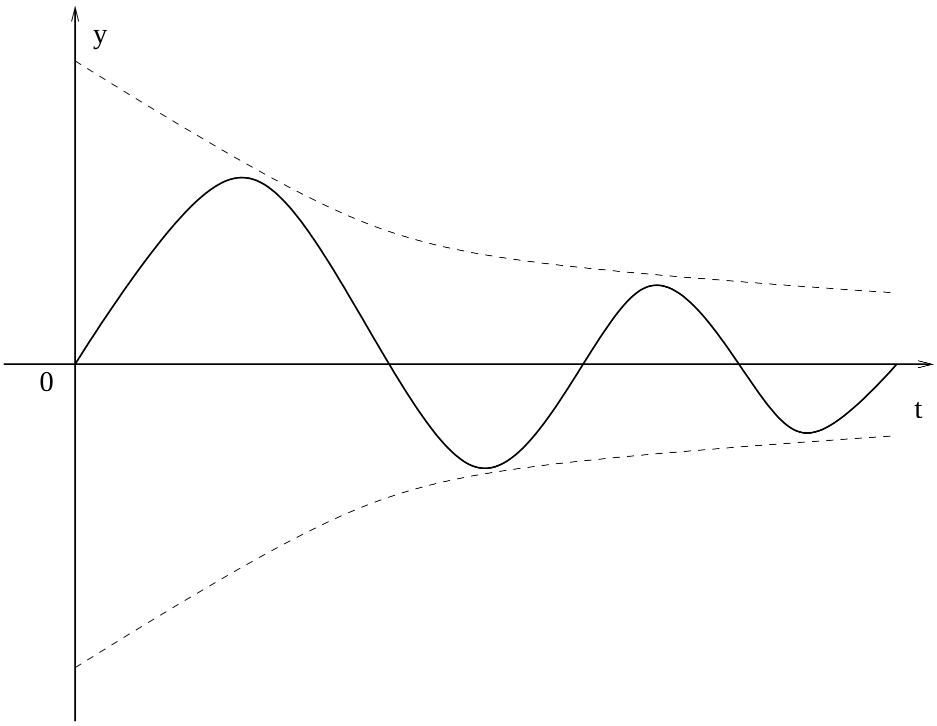

Рис. 9.2. *График затухающих колебаний*

Заметим, что при $b > \omega$ корни характеристические действительные и различные. Тогда решение уравнения (9.22) имеет вид

$$Y(t) = C_1 e^{(-b+\sqrt{b-\omega^2})t} + C_2 e^{(-b-\sqrt{b-\omega^2})t}.$$

В этом случае груз, не совершая колебаний, приближается к положению равновесия ($Y(t) \to 0$ при $t \to \infty$). Такое же движение происходит в частном случае $b = \omega$, когда

$$Y(t) = C_1 e^{-bt} + C_2 t e^{-bt}.$$

3. Рассмотрим теперь случай, когда сопротивление среды отсутствует ($b = 0$), но на груз действует внешняя периодическая сила $f(t) = a \sin \mu t$. Уравнение движения (9.19) примет вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = a \sin \mu t. \tag{9.23}$$

Общее решение этого уравнения, как известно, есть сумма частного решения $\bar{y}(t)$ неоднородного уравнения (9.23) и общего решения $Y(t)$ соответствующего однородного уравнения (9.20)

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Общее решение уравнения (9.20) было найдено раньше; оно имеет вид

$$Y(t) = N \sin(\omega t + \varphi).$$

Найдем теперь частное решение уравнения (9.23).

Допустим сначала, что частота μ внешней периодической силы отлична от собственной частоты колебаний ω. Так как в этом случае μi не является корнем характеристического уравнения $k^2 + \omega^2 = 0$, то частное решение $\bar{y}$ следует искать в виде

$$\bar{y}(t) = A \sin \mu t + B \cos \mu t.$$

Дифференцируя $\bar{y}$ дважды, найдем $\bar{y}''(t) = -\mu^2(A \sin \mu t + B \cos \mu t)$ и после подстановки выражений для $\bar{y}(t)$ и $\bar{y}''(t)$ в уравнение (9.23) получим уравнение для коэффициентов A и B:

$$-\mu^2(A \sin \mu t + B \cos \mu t) + \omega^2 A \sin \mu t + \omega^2 B \cos \mu t = a \sin \mu t,$$

откуда найдем $A = \dfrac{a}{\omega^2 - \mu^2}$, $B = 0$. Таким образом, частное решение уравнения (9.23) имеет вид

$$\bar{y}(t) = \frac{a}{\omega^2 - \mu^2} \sin \mu t,$$

а общее решение этого уравнения

$$y(t) = \bar{y}(t) + Y(t) = \frac{a}{\omega^2 - \mu^2} \sin \mu t + N \sin(\omega t + \varphi). \qquad (9.24)$$

Из соотношения (9.24) видно, что если частота μ внешней возмущающей силы близка к собственной частоте колебаний пружины ω, то разность $\omega^2 - \mu^2$ близка к нулю и амплитуда колебаний $\dfrac{a}{\omega^2 - \mu^2}$ резко возрастает. При $\omega = \mu$ пользоваться формулой (9.24) нельзя.

Так как при этом $\mu i = \omega i$ является корнем характеристического уравнения $k^2 + \omega^2 = 0$, то частное решение уравнения (9.23) следует искать в виде

$$\bar{y}(t) = (A \sin \mu t + B \cos \mu t)t.$$

Подставляя $\bar{y}(t)$ и

$$\bar{y}''(t) = 2(\mu A \cos \mu t - \mu B \sin \mu t) + \mu t(-A \sin \mu t - B \cos \mu t)$$

в уравнение (9.23) и учитывая, что $\mu = \omega$, получим уравнение для коэффициентов A и B:

$$2\mu A \cos \mu t - 2\mu B \sin + \mu^2 t(-A \sin \mu t - B \cos \mu t) +$$

$$+ \mu^2 t(A \sin \mu t + B \cos \mu t) = a \sin \mu t,$$

откуда получим $A = 0$, $B = -\dfrac{a}{2\omega}$. Поэтому частное решение $\bar{y}(t)$ имеет вид

$$\bar{y} = -\frac{at}{2\omega} \cos \omega t,$$

а общее решение уравнения (9.23) запишется следующим образом:

$$y(t) = Y(t) + \bar{y}(t) = N\sin(\omega t + \varphi) - \frac{at}{2\omega}\cos\omega t.$$

Наличие множителя t во втором члене указывает на то, что амплитуда колебания линейно (неограниченно) растет со временем. График функции $-\dfrac{at}{2\omega}\cos\omega t$ изображен на рис. 9.3. Говорят, что в этом случае имеет место *резонанс*. Итак, резонанс при колебательном движении наступает, если частота собственных колебаний совпадает с частотой внешней вынуждающей силы.

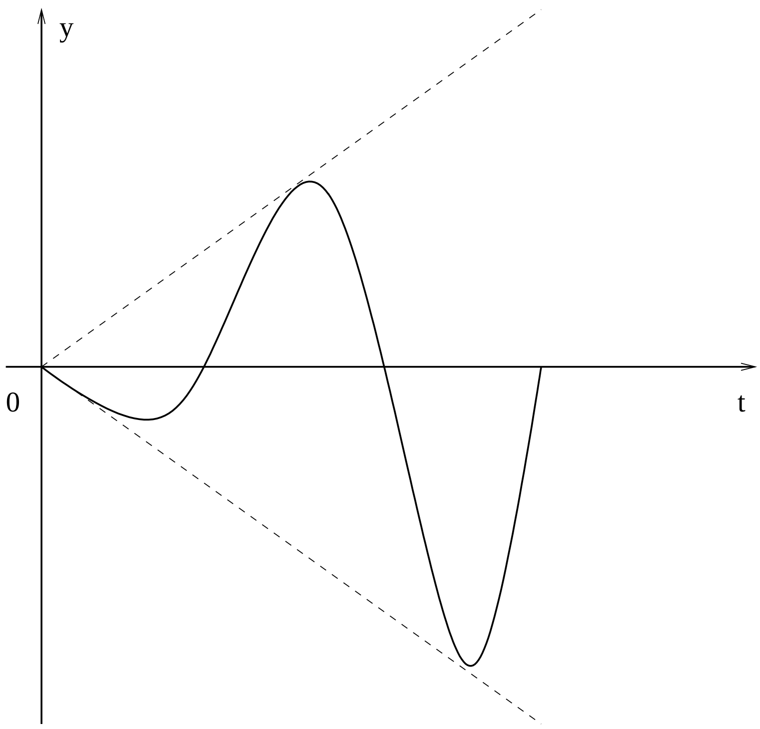

Рис. 9.3. *Резонансные колебания*

К линейным дифференциальным уравнениям второго порядка приводят также явления, связанные с изменением силы тока в электрической цепи.

Рассмотрим теперь простейшую электрическую цепь, состоящую из омического сопротивления R, индуктивности L, емкости C, к которой подключен источник электродвижущей силы, изменяющейся с течением времени по заданному закону $U = U(t)$ (см. рис. 9.4).

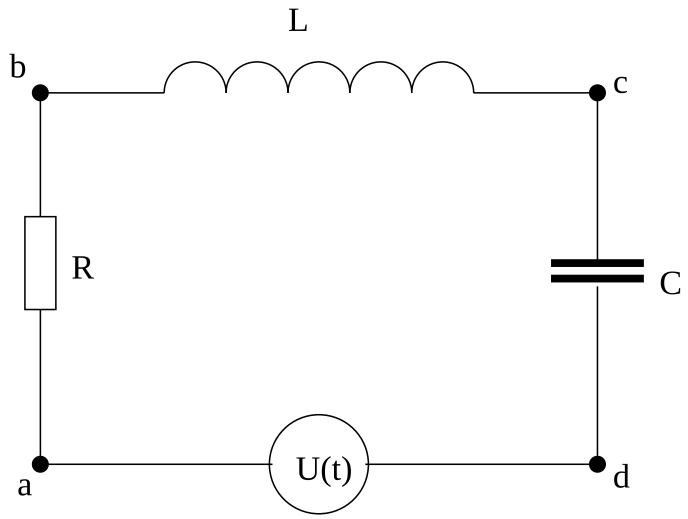

Рис. 9.4. *Простейшая электрическая цепь*

Найдем зависимость электрического тока в цепи от времени $I = I(t)$. Пусть U — падение напряжения на некотором участке цепи. Тогда из первого закона Кирхгофа следует, что в замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений равна электродвижущей силе:

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} = U(t).$$

Из физики известно, что

$$U_{ab} = RI(t) \quad \text{(закон Ома)},$$

$$U_{bc} = L\frac{dI}{dt}, \quad U_{cd} = \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt.$$

Поэтому

$$RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt = U(t).$$

Дифференцируя по t обе части последнего равенства, получим

$$R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I = U'(t)$$

или

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = U'(t).$$

Таким образом, искомая сила тока I в цепи является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если внешняя электродвижущая сила U постоянна (в частности, равна нулю), то $U' = 0$ и мы приходим к линейному дифференциальному однородному уравнению

$$I'' + \frac{R}{L} I' + \frac{I}{LC} = 0.$$

10. Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

10.1. Общие свойства решения линейных уравнений второго порядка

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + p(x)\ y' + q(x)\ y = 0. \qquad (10.1)$$

Коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ будем предполагать непрерывными функциями от x.

С помощью замены искомой функции вида

$$y(x) = z \cdot e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx},$$

где $z = z(x)$, член с первой производной в уравнении (10.1) может быть исключен.

Действительно, имеем:

$$y'(x) = z'\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} - \frac{1}{2}\, p(x) z\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx},$$

$$y''(x) = z''\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} - \frac{1}{2}\, p(x) z'\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} -$$

$$-\frac{1}{2}\, p'(x) z\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} - \frac{1}{2}\, p(x) z'\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} + \frac{1}{4}\, p^2(x) z\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx}.$$

Подставив $y(x)$ и ее производные в уравнение, получим:

$$z''\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} - p(x) z'\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} + \frac{1}{4}\, p^2(x) z\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} -$$

$$-\frac{1}{2}\, p'(x) z\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} + p(x) z'\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} -$$

$$-\frac{1}{2}\, p^2(x) z\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} + q(x) z\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} = 0.$$

После приведения подобных членов имеем

$$\left\{ z'' + z \left[-\frac{1}{2} p'(x) + \frac{1}{4} p^2(x) - \frac{1}{2} p^2(x) + q(x) \right] \right\} e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\ dx} = 0$$

и после сокращения на экспоненту окончательно получим

$$z'' + \left[-\frac{1}{2} p'(x) - \frac{1}{4} p^2(x) + q(x) \right] z = 0.$$

Итак, достаточно рассмотреть уравнение вида

$$z'' + Q(x)\ z = 0, \tag{10.2}$$

в котором $Q(x) = q(x) - \frac{1}{2}\, p'(x) - \frac{1}{4}\, p^2(x)$.

Заметим, что если $y_1(x),\ y_2(x)$ — линейно независимая система решений, то по формуле Лиувилля $W[\ y_1(x),\ y_2(x)\ ] = C = \text{const}$.

Теорема 10.1. *Если в уравнении (10.2) $Q(x) \in C[\, a,\ b\,]$, то его решение обращается в нуль конечное число раз на любом конечном отрезке $(-\infty < a < b < \infty)$.*

Доказательство от противного. Пусть число нулей бесконечно. Тогда существует предельная точка множества нулей $\bar{x} \in [\ a, b\ ]$ и существует последовательность $x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Поскольку $y(x_i) = 0$, то $y(x) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} y(\bar{x}) = 0$ (по непрерывности). Найдем $y'(x)$. Заметим, что $y'(x) \in C\ [a, b]$. По теореме Ролля: так как $y(x_i) = y(x_{i+1}) = 0$, то существует $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$, такое, что $y'(\alpha_i) = 0$. По теореме о пределе последовательности, заключенной между двумя последовательностями с общим пределом (“теорема о двух милиционерах”) $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = \bar{x}$. Следовательно $y'(\bar{x}) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} y'(x) = \lim\limits_{i\to\infty} y'(\alpha_i) = 0$. Таким образом, $y'(\bar{x}) = y(\bar{x}) = 0$.

Тогда по теореме единственности решения дифференциального уравнения $y(x) \equiv 0$. Следовательно, любое нетривиальное решение имеет конечное число корней на конечном интервале.

Теорема 10.2 (Теорема Штурма о чередовании нулей)**.** *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения, то их нули чередуются, т.е. между двумя нулями одного решения лежит ровно один нуль другого.*

Доказательство.

Пусть $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$ и $y_1(x) \neq 0$ при любом $x \in (x_1, x_2)$ (такой интервал существует, так как число нулей конечное).

Для определенности предположим, что $y_1(x) > 0$ при любом значении $x \in (x_1, x_2)$ (в противном случае возьмем $-y_1(x)$). Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $y_2(x)$ обращается в нуль хотя бы один раз при $x \in (a, b)$. Не нужно доказывать, что $y_2(x)$ обращается в нуль ровно один раз, т.к. если нулей два, то в силу равноправности $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно применить теорему к $y_2(x)$ и тогда получим, что $y_1(x)$ обращается в нуль на интервале (x_1, x_2), а это противоречит тому, что $y_1(x) > 0$.

Рассуждаем от противного: пусть $y_2(x) \neq 0,\ x \in (x_1, x_2)$. Можно считать, что $y_2(x) > 0$.

1) Покажем, что $y_2(x_1) \neq 0,\ y_2(x_2) \neq 0$.

Рассмотрим $W(x) = \begin{vmatrix} y_2(x) & y_1(x) \\ y_2'(x) & y_x'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$

В точке x_1 имеем

$$W(x_1) = y_2(x_1)y_1'(x_1) - y_1(x_1)y_2'(x_1) = y_2(x_1)y_1'(x) \neq 0,$$

а так как $y_1'(x) \neq 0$ (иначе $y_1(x) \equiv 0$), то $y_2(x_1) \neq 0$.

Аналогично $y_2(x_2) \neq 0$ следует из того, что $W(x_2) \neq 0$.

2) Рассмотрим теперь $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = v(x)$. Дифференцируя это выражение, получим

$$\frac{dv}{dx} = \frac{y_1'(x)\ y_2(x) - y_1(x)\ y_2'(x)}{y_2^2(x)} \equiv \frac{-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}{y_2^2(x)} = -\frac{W(x)}{y_2^2(x)} \neq 0,$$

при любом $x \in (x_1, x_2)$.

Однако $v(x_1) = 0,\ v(x_2) = 0$, следовательно по теореме Ролля существует $\xi \in (x_1, x_2)$, такое что $v(\xi) = 0$. Получили противоречие. Следовательно, $v(x)$ не может быть непрерывной функцией и существует η, такое, что $y_2(\eta) = 0,\ \eta \in (x_1, x_2)$.

Теорема 10.3 (Теорема сравнения)**.** *Пусть даны два уравнения*

$$y'' + Q(x)y = 0,$$
$$z'' + P(x)z = 0,$$

где функции $Q(x)$ и $P(x)$ непрерывны и $P(x) \geqslant Q(x)$.

Известно, что $y(x_1) = y(x_2) = 0,\ y(x) \neq 0$ на (x_1, x_2) и $P(x) \geqslant Q(x), x \in (x_1, x_2),\ P(x) \not\equiv Q(x)$.

Тогда любое решение второго уравнения имеет хотя бы один нуль на интервале (x_1, x_2).

Доказательство (от противного).

Пусть $z(x) \neq 0$ на (x_1, x_2). Для определенности предположим, что $y(x) > 0$; $z(x) > 0$ на (x_1, x_2).

Умножим $z'' + P(x)\, z = 0$ на $y(x)$, а $y'' + Q(x)\, y = 0$ на $z(x)$. По теореме единственности $y'(x_1) \neq 0$, $y'(x_2) \neq 0$, но так как $y(x) > 0$, $x \in (x_1, x_2)$, то $y'(x_1) > 0$, $y'(x_2) < 0$.

Сложим равенства, полученные после умножения

$$(yz'' - zy'') + (Pyz - Qyz) = 0$$

и проинтегрируем последнее равенство в пределах от x_1 до x_2. Получим

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (yz'' - zy'')\, dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} yz\, (P - Q)\, dx = 0.$$

Применяя формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} yz''\, dx = yz' - \int\limits_{x_1}^{x_2} y'z'\, dx,$$

получим

$$yz'\Big|_{x_1}^{x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2} y'z'\, dx - zy'\Big|_{x_1}^{x_2} + \int\limits_{x_1}^{x_2} y'z'\, dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} (P - Q)\, yz\, dx = 0.$$

Выполняя подстановку, окончательно имеем

$$\underbrace{-z(x_2)y'(x_2)}_{\geqslant 0} + \underbrace{z(x_1)\cdot y'(x_1)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int\limits_{x_1}^{x_2} (P - Q)\, yz\, dx}_{\geqslant 0} = 0.$$

Последние оценки справедливы, так как $z(x_2) \geqslant 0$, $y'(x_2) < 0$, $z(x_1) \geqslant 0$ и $y'(x_1) > 0$. Следовательно, для выполнения равенства все слагаемые должны быть равны нулю.

Отсюда

$$\int_{x_1}^{x_2} (P - Q)\, yz\, dx = 0 \Rightarrow (P - Q)\, yz \equiv 0 \Rightarrow P - Q \equiv 0?!$$

Полученное противоречие (так как $P - Q \not\equiv 0$) говорит о том, что $z(x)$ должно быть знакопеременным и, значит, $z(x)$ обращается в нуль на интервале (x_1, x_2).

Следствие 1. Если функция $y(x)$ есть решение уравнения

$$y'' + Q(x)y = 0,$$

причем $Q(x) \leqslant 0$ на интервале (a, b), таком что $-\infty < a \leqslant \leqslant b < +\infty$, то $y(x)$ имеет не более одного нуля (решение неколебательного типа).

Доказательство от противного. Предположим, что решение имеет больше одного нуля. Возьмем x_1, x_2 — соседние два нуля. Рассмотрим уравнение $z'' + \rho z = 0$, где $\rho \equiv 0$. Общее решение уравнения $z'' = 0$ имеет вид $z = C_1 x + C_2$. На интервале (a, b) справедливо неравенство $Q \leqslant \rho,\ Q \not\equiv \rho$. Тогда по теореме сравнения *всякое* решение $z(x)$ имеет нуль на интервале (x_1, x_2). Однако при $\rho = 0$ уравнение $z'' + \rho z = 0$ имеет решение $z = 1$, которое вообще не имеет нулей. Противоречие доказывает следствие.

Следствие 2. Если $y(x)$ есть решение уравнения

$$y'' + Q(x)y = 0$$

на полубесконечном интервале $[x_0, +\infty)$ и $Q(x) > a^2 > 0$, то решение имеет бесконечно много нулей (решение колебательного типа).

Доказательство.

Рассмотрим уравнение $z'' + a^2 z = 0$. Это уравнение имеет решение $z(x) = \sin ax$, такое что $z\left(\dfrac{\pi k}{a}\right) = 0$ и $z\left(\dfrac{\pi(k+1)}{a}\right) = 0$.

На интервале $\left(\dfrac{\pi k}{a}, \dfrac{\pi(k+1)}{a}\right)$ между этими двумя нулями выполнены условия теоремы сравнения: $a^2 < Q(x)$, следовательно $y(x)$ имеет нуль на интервале $\left(\dfrac{\pi k}{a}, \dfrac{\pi(k+1)}{a}\right)$, и, следовательно, $y(x)$ имеет бесконечно много нулей на числовой оси.

Теорема 10.4 (Критерий Кнезера).

Если в уравнении $y'' + Q(x)y = 0$ коэффициент $Q(x) < \dfrac{1}{4x^2}$ на $[x_0, +\infty)$, $x_0 > 0$, то его решение $y(x)$ имеет не более одного нуля (не колеблется). Если $Q(x) > \dfrac{1+\varepsilon}{4x^2}$, где $\varepsilon > 0$, то у решения бесконечно много нулей (решение колеблется).

Доказательство (от противного).

а) Пусть $Q(x) < \dfrac{1}{4x^2}$ и $y(x)$ имеет больше одного нуля, а именно

$$y(x_1) = y(x_2) = 0.$$

Рассмотрим два уравнения

$$\begin{cases} y'' + Q(x)y = 0, \\ z'' + \dfrac{1}{4x^2}z = 0. \end{cases}$$

Так как $Q < \dfrac{1}{4x^2}$, то по теореме сравнения любое решение второго уравнения $z(x)$ имеет нуль на интервале (x_1, x_2).

Очевидно, что $z = x^{\frac{1}{2}}$ — решение второго уравнения, так как $z'' = -(1/4)x^{-\frac{3}{2}}$. Однако функция $z = x^{\frac{1}{2}}$ не имеет нулей при $x > 0$. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

б) Рассмотрим теперь случай $Q(x) > \dfrac{1+\varepsilon}{4x^2}$, $\varepsilon > 0$.

Докажем, что у $y(x)$ бесконечно много нулей. Рассмотрим два уравнения

$$\begin{cases} y'' + Q(x)y = 0, \\ z'' + \dfrac{1+\varepsilon}{4x^2}z = 0. \end{cases}$$

Найдем $z(x)$. Сделаем замену $t = \ln x$. Получим

$$z'_x = z'_t \cdot e^{-t}; \quad z''_{xx} = (z''_{tt} - z'_t) \cdot e^{-2t};$$

$$z''_{tt} - z'_t + \frac{1+\varepsilon}{4(e^t)^2} z e^{2t} = 0.$$

В результате приходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$z'' - z' + \frac{1+\varepsilon}{4}z = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1+\varepsilon}{4} = 0,$$

корни которого $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{-\dfrac{\varepsilon}{4}} = \alpha \pm i\beta$.

Рассмотрим решение $z(t) = e^{\alpha t}\sin \beta t$. Возвращаясь к переменной x, получим решение исходного уравнения

$$z(x) = \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}\ln x\right),$$

которое имеет бесконечно много нулей. По теореме сравнения $y(x)$ также имеет бесконечно много нулей. Теорема доказана.

10.2. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка методом прогонки

Рассмотрим следующую задачу. Требуется найти функцию $y = y(x)$, которая на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x) \tag{10.3}$$

и граничным условиям $y(a) = \varphi; \quad y(b) = \psi$.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_{N-1}$ — точки деления сегмента $[a, b]$ на равные отрезки длиной $h = \frac{b-a}{N}$. Положим $a = x_0$, $b = x_N$ и обозначим $\alpha_n = \alpha(x_n)$, $\beta_n = \beta(x_n)$, $\gamma_n = \gamma(x_n)$.

В каждой из точек деления x_i заменим значения производных $y'(x)$ и $y''(x)$ искомой функции $y(x)$ конечно-разностными отношениями:

$$y'(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}, \qquad y''(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}, \tag{10.4}$$

$$(n = 1, 2, ..., N-1),$$

где $y_1, y_2, ..., y_{N-1}$ — приближенные значения искомой функции, полученные в результате расчета, $y_0 = \varphi$ и $y_N = \psi$ согласно граничным условиям. Отметим, что аппроксимация производных по формулам (10.4) имеют точность порядка $O(h^2)$. Это можно доказать, разложив y_{n-1} и y_{n+1} в ряды Тейлора.

Подставляя в дифференциальное уравнение (10.3) приближенные значения $y'(x_n)$, $y''(x_n)$ по формулам (10.4), получим систему уравнений относительно неизвестных $y_1, y_2, ..., y_{N-1}$:

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \alpha_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + \beta_n y_n = \gamma_n, \tag{10.5}$$

$$(n = 1, 2, ..., N-1).$$

Умножая обе части равенства (10.5) на $2h^2$, получим:

$$y_{n-1}(2 - \alpha_n h) + y_n(2h^2\beta_n - 4) + y_{n+1}(2 + \alpha_n h) = 2h^2\gamma_n. \tag{10.6}$$

Полагая:

$$a_n = 2 - \alpha_n h, \quad b_n = 2h^2\beta_n - 4, \quad c_n = 2 + \alpha_n h, \quad f_n = 2h^2\gamma_n, \tag{10.7}$$

запишем уравнение (10.6) в виде:

$$a_n y_{n-1} + b_n y_n + c_n y_{n+1} = f_n \qquad (n = 1, 2, ..., N-1), \tag{10.8}$$

в котором коэффициенты a_n, b_n, c_n находятся по формулам (10.7).

Таким образом, получаем систему:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi, \\ a_n y_{n-1} + b_n y_n + c_n y_{n+1} = f_n, \qquad n = 1, 2, ..., N-1 \\ y_N = \psi. \end{cases} \tag{10.9}$$

Можно доказать, что решение этой системы существует и единственно при произвольных φ, ψ и f_n, если коэффициенты a_n, b_n, c_n удовлетворяют условию

$$|b_n| > |a_n| + |c_n|.$$

10.2.1. Метод прогонки

Для решения полученной системы (10.9) обычно используется так называемый метод прогонки, предложенный И.М. Гельфандом и О.В. Локуциевским в 1952 г. на одном из семинаров в Математическом Институте им. В.А. Стеклова. Этот метод является одним из вариантов метода исключения Гаусса для систем, в каждое уравнение которых входят лишь три неизвестных значения y в соседних узлах сетки (см. уравнение (10.8)). Говорят, что у таких систем уравнений матрица трехдиагональная, подразумевая, что ненулевые коэффициенты стоят на главной диагонали и по соседству слева и справа. Матрица этой системы очень разреженная, и в методе прогонки остроумно используется структура системы уравнений (10.9).

Будем искать связь между двумя соседними значениями неизвестных, предполагая, что y_n линейно выражается через последующее значение y_{n+1} в виде:

$$y_n = L_n y_{n+1} + K_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, N-1. \tag{10.10}$$

Будем предполагать, что формула (10.10) верна также и для граничных точек. Для того, чтобы выполнялось граничное условие $y_0 = \varphi$, в соответствующей формуле

$$y_0 = L_0 y_1 + K_0 \tag{10.11}$$

достаточно положить

$$L_0 = 0, \qquad K_0 = \varphi, \tag{10.12}$$

так что значения L_0 и K_0 определяются граничными условиями.

Отметим, что в случае граничных условий другого вида, например, когда на границе задана производная искомой функции или задано линейное соотношение между искомой функцией и производной, как это бывает в краевых задачах для уравнений в частных производных, значения L_0 и K_0 также определяются из граничных условий, возможно, по формулам, отличным от (10.12).

Подстановка (10.11) в уравнение $a_1 y_0 + b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1$, соответствующее номеру $n = 1$ в системе (10.9), приводит к уравнению

$$a_1(L_0 y_1 + K_0) + b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1,$$

которое позволяет выразить y_1 через y_2:

$$y_1 = \frac{-c_1}{b_1 + a_1 L_0} \cdot y_2 + \frac{f_1 - a_1 K_0}{b_1 + a_1 L_0}\,.$$

Запишем это соотношение в виде:

$$y_1 = L_1 y_2 + K_1, \tag{10.13}$$

где L_1 и K_1 могут быть вычислены по известным значениям по формулам

$$L_1 = \frac{-c_1}{b_1 + a_1 L_0}, \qquad K_1 = \frac{f_1 - a_1 K_0}{b_1 + a_1 L_0}\,.$$

Аналогично, подставив соотношение (10.13) в следующее уравнение $a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3 = f_2$, соответствующее номеру $n = 2$ в системе (10.9), получим

$$a_2(L_1y_2 + K_1) + b_2y_2 + c_2y_3 = f_2,$$

что позволяет выразить y_2 через y_3:

$$y_2 = L_2y_3 + K_2,$$

где

$$L_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2L_1}, \qquad K_2 = \frac{f_2 - a_2K_1}{b_2 + a_2L_1}\ .$$

Подобным образом, исключая y_2 из последующего уравнения, выразим y_3 через y_4 и т.д.

Сравнивая полученные формулы, найдем, что y_n и y_{n+1} связаны между собой соотношением (10.10)

$$y_n = L_ny_{n+1} + K_n,$$

в котором коэффициенты L_n и K_n выражаются через известные значения коэффициентов a_n, b_n, c_n, f_n и L_{n-1}, K_{n-1} по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} L_n = \dfrac{-c_n}{b_n + a_nL_{n-1}}, \\ K_n = \dfrac{f_n - a_nK_{n-1}}{b_n + a_nL_{n-1}}, \end{cases} \qquad n = 1, 2, ..., N-1, \tag{10.14}$$

причем L_0 и K_0 известны. Коэффициенты L_n и K_n называются прогоночными коэффициентами.

Заметим, что граничное условие $y_N = \psi$ на правом конце сегмента $[a, b]$ позволяет, если вычислены прогоночные коэффициенты L_{N-1} и K_{N-1}, найти y_{N-1} из формулы (10.10)

$$y_{N-1} = L_{N-1}y_N + K_{N-1} \quad \Rightarrow \quad y_{N-1} = L_{N-1}\psi + K_{N-1}.$$

Зная y_{N-1} и прогоночные коэффициенты L_n, K_n (формулы (10.14)), последовательно найдем все значения y_n в убывающей последовательности номеров n

$$\begin{cases} y_{N-2} = L_{N-2}y_{N-1} + K_{N-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1 = L_1 y_2 + K_1. \end{cases}$$

Таким образом, вычисления в методе прогонки проводятся в два этапа:

(1) **Прямая прогонка:** Вычисление прогоночных коэффициентов по формулам

$$L_0 = 0; \quad K_1 = \varphi;$$
$$L_n = \frac{-c_n}{b_n + a_n L_{n-1}},$$
$$K_n = \frac{f_n - a_n K_{n-1}}{b_n + a_n L_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

причем $a_n,\ b_n,\ c_n,\ f_n$ находятся по формулам (10.7).

(2) **Обратная прогонка:**

$$\begin{cases} y_N = \psi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = L_n y_{n+1} + K_n, \qquad n = N-1, ..., 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0 = \varphi. \end{cases}$$

Метод прогонки очень выгоден, так как число операций в нем имеет порядок N (в общем случае в методе Гаусса порядок числа операций N^3). Кроме того, метод прогонки имеет очень простой алгоритм вычислений и может быть легко организован на компьютере.

Пример 1. *Найти методом прогонки приближенное решение уравнения $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x$, удовлетворяющее граничным условиям $y(1) = 2{,}5$, $y(2) = 4$.*

Решение: Здесь $\alpha(x) = -\frac{2}{x}$, $\beta(x) = \frac{2}{x^2}$, $\gamma(x) = x$, $\varphi = 2{,}5$, $\psi = 4$.

Положим $n = 10$. Тогда $h = \frac{1-0}{10} = 0,1$. Записываем в приведенную ниже таблицу (столбец 2) числа: $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 0,1 = 1,1$, $x_2 = 1,2$,..., $x_{10} = 2$.

Прямой ход: Вычисляем α_i, β_i, γ_i при $i = 1, 2, ..., 9$ и заполняем столбцы 3, 4, 5.

Затем по формулам (5) вычисляем a_i, b_i, c_i, f_i, $(i = 1, 2, ..., 9)$ и заполняем столбцы 7, 8, 9.

Так например, при $i = 2$, $a_2 = 2 - h\alpha_2 = 2 - 0{,}1(-1,667) =$ 2,167.

Наконец, по формуле (8) вычисляем L_i, K_i и заполняем столбцы 10 и 11.

Обратный ход: По формуле (7) вычисляем y_9, принимая во внимание, что: $y_{10} = \psi = 4$, $L_9 = 0,855$, $K_9 = 0,388$,

$$y_9 = L_9 \cdot y_10 + K_9 = 0,855 \cdot 4 + 0,388 = 3,808.$$

Записываем это значение в предпоследнюю строку 12 столбца. Затем вычисляем $y_8 = L_8 \cdot y_9 + K_8$ и так далее, пока не дойдем до

$$y_1 = L_1 \cdot y_2 + K_1 = 0,458 \cdot 2,769 + 1,370 = 2,638.$$

Таблица

i	x_i	α_i	β_i	γ_i	a_i	b_i	c_i	f_i	L_i	K_i	y_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1,0	-	-	-	-	-	-	-	0	2,500	2,500
1	1,1	-1,818	1,653	1,1	2,182	-3,967	1,818	0,022	0,458	1,370	2,638
2	1,2	-1,667	1,389	1,2	2,167	-3,972	1,833	0,024	0,615	0,988	2,769
3	1,3	-1,538	1,183	1,3	2,154	-3,976	1,846	0,026	0,696	0,793	2,896
4	1,4	-1,429	1,020	1,4	2,143	-3,980	1,857	0,028	0,745	0,672	3,022
5	1,5	-1,333	0,889	1,5	2,133	-3,982	1,867	0,030	0,780	0,586	3,155
6	1,6	-1,250	0,781	1,6	2,125	-3,984	1,875	0,032	0,806	0,521	3,294
7	1,7	-1,176	0,692	1,7	2,118	-3,986	1,882	0,034	0,826	0,469	3,470
8	1,8	-1,111	0,617	1,8	2,111	-3,988	1,889	0,036	0,842	0,427	3,633
9	1,9	-1,053	0,554	1,9	2,105	-3,989	1,894	0,038	0,855	0.388	3,808
10	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4,000

11. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

11.1. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений

Задача интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем виде ставится так: дано k дифференциальных уравнений

$$F_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(s_1^i)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(s_2^i)}, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(s_k^i)}) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, k, \qquad (11.1)$$

связывающих аргумент x и k искомых функций $y_1, \ldots, y_k$ и их производные до порядков $s_1 = \max\limits_i(s_1^i)$, $s_2 = \max\limits_i(s_2^i)$, $\ldots$, $s_k = \max\limits_i(s_k^i)$ включительно. Предполагается,что число уравнений равно числу неизвестных функций.

Предположим, что система (11.1) разрешена относительно старших производных всех входящих в нее функций, т.е. относительно $y_1^{(s_1)}, y_2^{(s_2)}, \ldots, y_k^{(s_k)}$:

$$\begin{aligned}
y_1^{(s_1)} &= f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(s_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(s_2-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(s_k-1)}),\\
y_2^{(s_2)} &= f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(s_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(s_2-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(s_k-1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_k^{(s_k)} &= f_k(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(s_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(s_2-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(s_k-1)}).
\end{aligned} \qquad (11.2)$$

Система вида (11.2) называется *канонической.*

Каноническую систему из k уравнений высших порядков можно заменить эквивалентной системой $n = s_1 + s_2 + \ldots + s_k$ уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных всех искомых функций.

Для этого введем новую систему искомых функций, числом $n - k$, следующим образом: обозначим для симметрии $y_1 = y_{10}$

и введем новые функции

$$y_1' = y_{11}; \quad y_1'' = y_{12}, \quad \ldots, \quad y_1^{(s_1-1)} = y_{1,s_1-1}.$$

Аналогично

$$y_2 = y_{20}; \quad y_2' = y_{21}; \quad y_2'' = y_{22}, \quad \ldots, \quad y_2^{(s_2-1)} = y_{2,s_2-1};$$
$$y_k = y_{k0}; \quad y_k' = y_{k1}, \quad \ldots, \quad y_k^{(s_k-1)} = y_{k,s_k-1}.$$

Всего имеем $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n$ функций y_{ij} ($i = 1, \ldots, k; j = 0, \ldots, s_i - 1$), для которых система (11.2) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{10}}{dx} = y_{11}; \ \dfrac{dy_{11}}{dx} = y_{12}, \ \ldots, \ \dfrac{dy_{1,s_1-2}}{dx} = y_{1,s_1-1}, \\ \dfrac{dy_{1,s_1-1}}{dx} = f_1(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,s_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,s_k-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_{k0}}{dx} = y_{k1}; \ \dfrac{dy_{k1}}{dx} = y_{k2}, \ \ldots, \ \dfrac{dy_{k,s_k-2}}{dx} = y_{k,s_k-1}, \\ \dfrac{dy_{k,s_k-1}}{dx} = f_k(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,s_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,s_k-1}). \end{cases} \tag{11.3}$$

Если отвлечься от частного вида первых уравнений в каждой из k групп системы (11.3) и от разделения на группы, то после перенумерации искомых функций в виде $y_1, y_2, \ldots, y_n$, получим вместо (11.3) систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{11.4}$$

Система n уравнений первого порядка, разрешенных относительно входящих в систему производных от искомых функций, называется системой, имеющей *нормальную форму* или просто нормальной системой. Система (11.3) является частным случаем системы (11.4). В дальнейшем будем рассматривать именно нормальные системы.

Замечание. Уравнение $n-$го порядка, разрешенное относительно $y^{(n)}$, является частным случаем канонической системы:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

После введения новых функций $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, $\dots$, $y_{n-1} = y^{(n-1)}$ оно заменится системой, состоящей из n уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1; \ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \ \dots, \ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{cases} \tag{11.5}$$

Обратно, нормальная система n уравнений первого порядка (11.4), *вообще говоря*, эквивалентна одному уравнению порядка n. Для доказательства продифференцируем первое из уравнений (11.4) по x :

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} \ .$$

Заменив $\dfrac{dy_i}{dx}$ через их выражения $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n,$$

т.е. выражение вида:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Это уравнение вновь продифференцируем по x и подставим вместо $y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ и т.д. Получим

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \dots, y_n).$$

Из системы, состоящей из $n-1$ промежуточных уравнений, т.е. из исходного первого уравнения $\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,\ldots,y_n)$ и уравнений, полученных в результате его дифференцирования по x до $(n-1)$-го порядка включительно, вообще говоря, можно выразить $(n-1)$ функций $y_2,\ldots,y_n$ через $x, y_1, \dfrac{dy_1}{dx},\ldots,\dfrac{d^{(n-1)}y_1}{dx^{n-1}}$. После исключения $y_2,\ldots,y_n$ окончательно получим:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n}=\Phi\left(x,y_1,\frac{dy_1}{dx},\ldots,\frac{d^{(n-1)}y_1}{dx^{n-1}}\right).$$

Замечание. Разрешить систему вспомогательных уравнений относительно $y_2,\ldots,y_n$ не всегда возможно. Например, в случае системы

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1),\\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_2),\end{cases}$$

это не так.

Определение.

Решением системы (11.4) будем называть систему функций

$$y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x), \tag{11.6}$$

которая обращает все уравнения системы в тождества.

Уравнения

$$y_i=y_i(x),\quad i=1,\ldots,n, \tag{11.7}$$

определяют в пространстве $(x,y_1,\ldots,y_n)$ линию, которая называется *интегральной линией системы.* Вместо того, чтобы говорить, что $y_i(x_0)=y_1^\circ$, $i=1,\ldots,n$, будем говорить, что линия (11.7) или решение (11.6) проходит через точку $(x_0,y_1^\circ,y_2^\circ,\ldots,y_n^\circ)$.

Геометрически решение системы можно истолковать так же, как решение одного дифференциального уравнения: интегральная линия в каждой точке касается поля направлений, которое задает система (11.4).

Система функций $y_i = y_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_m)$, $i = 1, \ldots, n$, называется *общим решением* системы (11.4) в области G, если, выбирая надлежащим образом постоянные $C_1, \ldots, C_m$, мы можем получить любое решение, принадлежащее этой области. Обычно $m = n$.

Система соотношений $\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, называется *интегралом системы* (11.4), если определяемая ими линия является интегральной линией для этой системы.

Система соотношений $\Phi_i(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ C_1, \ldots,\ C_m) = 0$, где $i = 1, \ldots, n$, называется *общим интегралом системы* (11.4), если выбором $C_1, \ldots, C_m$ можно получить любую интегральную кривую системы (11.4).

11.2. Векторная запись системы

Введем $n-$мерный вектор $\vec{y}(x)$ и обозначим:

$$\vec{y}(x) \rightleftharpoons \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

Аналогично введем производную и интеграл вектор-функции $\vec{y}(x)$:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1(x)}{dx} \\ \ldots\ldots \\ \frac{dy_n(x)}{dx} \end{pmatrix}, \qquad \int_a^b \vec{y}(x)dx = \begin{pmatrix} \int_a^b \vec{y}_1(x)dx \\ \ldots\ldots \\ \int_a^b \vec{y}_n(x)dx \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем использовать стандартные обозначения:

$$\vec{y} + \vec{z} = \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ \ldots\ldots \\ y_n + z_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda\vec{y} = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \ldots\ldots \\ \lambda y_n \end{pmatrix},$$

тогда система (11.4) записывается в векторном виде:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}). \tag{11.8}$$

Решением системы (11.8) называется вектор-функция $\vec{y}(x)$, которая при подстановке в систему обращает все уравнения в тождества:

$$\frac{\vec{y}(x)}{dx} \equiv \vec{f}(x, \vec{y}(x)).$$

В дальнейшем нам понадобится некоторая норма вектора. Можно использовать любую норму, например

$$\|\vec{a}\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|, \qquad (\text{или } \|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_i a_i^2}, \quad \text{или } \|\vec{a}\| = \max_i |a_i|).$$

С помощью этих норм легко получаются следующие стандартные оценки:

$$\left\|\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt\right\| = \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{t_1}^{t_2} a_i(t)dt\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} |a_i|dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} |a_i|dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{a}\|dt \Rightarrow \left\|\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt\right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{a}\|dt.$$

Замечание. Теорема о среднем значении неверна

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt \neq \vec{a}(\xi)(t_2 - t_1).$$

(так как для каждой компоненты свое значение ξ).

Условие Липшица для функции $\vec{f}(x, \vec{y})$ имеет вид: существует такое $K > 0$, что при любых $\vec{y}^1, \vec{y}^2$ и любом x из области $G(x, y_1, \ldots, y_n)$ выполняется неравенство

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}^1) - \vec{f}(x, \vec{y}^2)\| \leqslant K\|\vec{y}^1 - \vec{y}^2\|.$$

Здесь и далее верхний индекс обозначает вектор-функции, а нижний — компоненты этих вектор-функций.

Можно считать, что условие Липшица справедливо для каждой функции:

$$|f_i(x,\vec{y}^1) - f_i(x,\vec{y}^2)| \leqslant K\|\vec{y}^1 - \vec{y}^2\|.$$

Для систем (11.8) справедлива следующая *теорема существования и единственности*:

Теорема 11.1. *Если правая часть системы (11.8) $\vec{f}(x,\vec{y})$ непрерывна в области $G : \{|x-x_0| \leqslant a, \|\vec{y}-\vec{y}_0\| \leqslant b\}$ и удовлетворяет условию Липшица в этой области, то существует решение $\vec{y}(x)$, такое, что $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$, причем это решение единственно и определено при $|x - x_0| \leqslant h$, $h = \min[a, \frac{b}{M}]$, $M = \max\|\vec{f}(x,\vec{y})\|$ в рассматриваемой области G.*

Эта теорема доказывается аналогично теореме существования и единственности для одного уравнения с некоторым отличием в части единственности.

11.3. Системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x); \quad \text{где } a_{ij}(x),\ f_i(x) \in C[a,b], \quad (11.9)$$

$$i = 1,\ldots,n, \qquad -\infty < a \leqslant x \leqslant b < +\infty.$$

Для системы (11.9) применима теорема существования и единственности. Если $f_i(x) \equiv 0$, то система называется однородной. В случае однородной системы очевидно существование тривиального решения $y_i(x) \equiv 0$.

Векторная форма записи следует из обозначений:

$$(a_{ij}(x)) \rightleftharpoons A(x); \qquad \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему уравнений (11.9) в векторной форме:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x). \tag{11.10}$$

В дальнейшем будем использовать обозначения:

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ \dots \\ y_n^{(1)} \end{pmatrix}; \dots;\ \vec{y}_n = \begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ \dots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix};\ \vec{y}_{n+1} = \begin{pmatrix} y_1^{(n+1)} \\ \dots \\ y_n^{(n+1)} \end{pmatrix}.$$

11.4. Свойства линейных однородных систем.

В случае однородной системы имеем $\vec{f}(x) \equiv 0$ и система (11.10) запишется в виде:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y}. \tag{11.11}$$

Для однородной системы (11.11) справедливы следующие теоремы:

Теорема 11.2. *Если $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ — решения однородной системы, то их сумма $\vec{y}_1(x) + \vec{y}_2(x)$ также является решением.*

Теорема 11.3. *Если $\lambda = const$, а $\vec{y}_1(x)$ — решение однородной системы, то $\lambda\vec{y}_1(x)$ также является решением.*

Эти две теоремы доказываются подстановкой соответствующих выражений в систему (11.11), как это делалось для линейного однородного уравнения. Из теорем (11.2) и (11.3) следует, что множество решений образует линейное пространство.

Теорема 11.4. *Множество из $(n+1)$ решений линейной однородной системы линейно зависимо, то есть если $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_{n+1}(x)$ — решения системы (11.11), то существуют постоянные $C_1, \dots, C_{n+1}$, причем среди них имеются $C_i \neq 0$, такие что для любого $x \in (a, b)$ справедливо тождество*

$$C_1\vec{y}_1(x) + C_2\vec{y}_2(x) + \ldots + C_{n+1}\vec{y}_{n+1}(x) \equiv 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку x_0 на отрезке $[a,b]$ и составим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1^{(1)}(x_0) + C_2 y_1^{(2)}(x_0) + \ldots + C_{n+1} y_1^{(n+1)}(x_0) = 0, \\ C_1 y_2^{(1)}(x_0) + C_2 y_2^{(2)}(x_0) + \ldots + C_{n+1} y_2^{(n+1)}(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_n^{(1)}(x_0) + C_2 y_n^{(2)}(x_0) + \ldots + C_{n+1} y_n^{(n+1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{11.12}$$

В линейном алгебре доказывается, что у однородной системы из n уравнений с $(n+1)$ неизвестными $C_1, \ldots, C_{n+1}$ всегда существует ненулевое решение $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_{n+1}$.

Рассмотрим функцию $\vec{y}(x) = \tilde{C}_1 \vec{y}_1(x) + \ldots + \tilde{C}_{n+1} \vec{y}_{n+1}(x)$, которая согласно теоремам (11.2) и (11.3) является решением однородной линейной системы (11.11) и в силу системы (11.12) удовлетворяет нулевым начальным условиям: $\vec{y}(x_0) = 0$. Тогда эта функция тождественно равна нулю $\vec{y}(x) \equiv 0$, поскольку, согласно теореме существования и единственности, у системы (11.12) есть только одно решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям — это тривиальное (нулевое) решение. Следовательно, функции $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_{n+1}(x)$ линейно зависимы, так как тождество $\vec{y}(x) \equiv 0$ означает, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{C}_i \vec{y}_i(x) \equiv 0.$$

Теорема 11.5. *У однородной линейной системы всегда существует n линейно независимых решений.*

Замечание. Из теоремы (11.5) следует, что множество решений образует n-мерное линейное пространство.

Доказательство теоремы (11.5). Возьмем произвольную точку x_0 на отрезке $[a,b]$.

Построим нормальную фундаментальную систему решений следующего вида:

$$y_j^{(i)}(x_0) = \delta_{ij}, \quad \text{т.е.} \quad \vec{y}_1(x_0) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ \dots \\ y_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{11.13}$$

$$\vec{y}_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \; \dots \; \vec{y}_k(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \; \dots \; \vec{y}_n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

так что для $\vec{y}_k(x_0)$ единица находится в k-й строке.

Такая система функций линейно независима. Действительно, рассуждаем от противного: допустим, существует такие C_i, не все равные нулю, что

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \vec{y}_i(x) \equiv 0.$$

Это равенство верно в точке x_0, следовательно

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + C_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} = 0.$$

Это означает, что *все* значения $C_i = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 11.6. *Если $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ – система из n линейно независимых решений (фундаментальная система), то общее решение однородной линейной системы имеет вид:*

$$\vec{y}(x) = C_1 \vec{y}_1(x) + \dots + C_n \vec{y}_n(x),$$

где $C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Доказательство.

Линейная комбинация решений

$$\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{y}_i(x)$$

является решением однородной линейной системы (следствие теорем (11.2) и (11.3)).

Всякое ли решение содержится в этой комбинации?

Рассмотрим следующее множество, состоящее из $n+1$ вектор-функции: $\{\widetilde{\vec{y}}(x), \vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)\}$, где $\widetilde{\vec{y}}(x)$ — некоторое произвольное решение системы, а $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ — вышеупомянутая фундаментальная система. Такое множество вектор-функций образует линейно зависимую систему (по теореме (11.4)), т.е. существуют $a_0, a_1, \ldots, a_n$, причем не все a_i равны нулю и $a_0 \neq 0$ (от противного: если $a_0 = 0$, то система функций $\{\vec{y}_i(x)\}_{i=1}^n$ — линейно зависимая), такие что

$$a_0 \widetilde{\vec{y}}(x) + a_1 \vec{y}_1(x) + \ldots + a_n \vec{y}_n(x) = 0, \qquad \text{где } a_0 \neq 0;$$

отсюда

$$\widetilde{\vec{y}}(x) = -\frac{a_1}{a_0}\vec{y}_1(x) - \ldots - \frac{a_n}{a_0}\vec{y}_n(x),$$

то есть произвольное решение $\widetilde{\vec{y}}(x)$ однозначно выражается через фундаментальную систему решений.

Определение. Определителем Вронского некоторой системы из n вектор-функций $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ называется функциональный определитель вида

$$W(\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Теорема 11.7. *Если определитель Вронского для некоторых n решений $\vec{y}_1(x)$, …, $\vec{y}_n(x)$ однородной линейной системы, состоящей из n уравнений, равен нулю в некоторой* *точке* x_0*:* $W(\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_n(x))|_{x=x_0} = 0$*, то* $W(x)\equiv 0$ *и система решений линейно зависима.*

Доказательство.

Пусть $W(x_0)=0$. Составим следующую систему n уравнений относительно $C_1,\ldots,C_n$:

$$\begin{cases} C_1y_1^{(1)}(x_0)+C_2y_1^{(2)}(x_0)+\ldots+C_ny_1^{(n)}(x_0)=0,\\ C_1y_2^{(1)}(x_0)+C_2y_2^{(2)}(x_0)+\ldots+C_ny_2^{(n)}(x_0)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1y_n^{(1)}(x_0)+C_2y_n^{(2)}(x_0)+\ldots+C_1y_n^{(n)}(x_0)=0. \end{cases}$$

Определитель этой системы равен нулю, поэтому существует ненулевое решение $\tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_n$. Рассмотрим

$$\vec{y}(x)=C_1\vec{y}_1(x)+\ldots+C_n\vec{y}_n(x),$$

для которого $\vec{y}(x_0)=0$. По теореме существования и единственности $y(x)\equiv 0$, следовательно решения $\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_n(x)$ линейно зависимы, поэтому $W(x)\equiv 0$, так как один из столбцов в определителе Вронского есть линейная комбинация другого.

11.4.1. Формула Лиувилля-Остроградского (1838 г.)

Теорема 11.8. *Если* $\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_n(x)$ *— решения однородной линейной системы, то их определитель Вронского во всякой точке находится по формуле:*

$$W(x)=W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}(\xi)d\xi}.$$

Доказательство. Найдем производную определителя Вронского

$$\frac{dW}{dx}=\begin{vmatrix} \frac{dy_1^{(1)}}{dx} & \frac{dy_1^{(2)}}{dx} & \ldots & \frac{dy_1^{(n)}}{dx}\\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(n)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{dy_n^{(1)}}{dx} & \frac{dy_n^{(2)}}{dx} & \ldots & \frac{dy_n^{(n)}}{dx} \end{vmatrix}.$$

Однако

$$\frac{dy_i^{(k)}(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^{(k)}(x) \tag{11.14}$$

в силу исходной системы уравнений. Подставим выражения (11.14) во все определители, входящие в формулу для $\frac{dW}{dx}$:

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} y_j^{(1)}(x) & \ldots\ldots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} y_j^{(n)}(x) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_n^{(1)}(x) & \ldots\ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & \ldots\ldots & y_1^{(n)}(x) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} y_j^{(1)}(x) & \ldots\ldots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} y_j^{(n)}(x) \end{vmatrix} = \tag{11.15}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \begin{vmatrix} y_j^{(1)}(x) & \ldots & y_j^{(n)}(x) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_n^{(1)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_j^{(1)}(x) & \ldots & y_j^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

В j-той сумме j-тый определитель равен W, а все остальные определители в каждой сумме равны нулю, так как все они имеют совпадающие строки. Поэтому выражение (11.15) равно $a_{11}W + \ldots + a_{nn}W$. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение для W :

$$\frac{dW}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) W.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Его решение имеет вид:

$$W = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(\xi)\, d\xi},$$

откуда следует формула Лиувилля-Остроградского.

Система дифференциальных уравнений однозначно определяется ее решениями. Это следует из следующей теоремы.

Теорема 11.9. *Пусть заданы функции $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$, такие что $W[\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)] \not\equiv 0$. Тогда существует одна и только одна нормальная система дифференциальных уравнений, решения которой есть $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$.*

Доказательство.

Рассмотрим следующие n однородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1^{(1)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2 & y_2^{(1)}(x) & \ldots & y_2^{(n)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & y_n^{(1)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \\ \frac{dy_i}{dx} & \frac{dy_i^{(1)}(x)}{dx} & \ldots & \frac{dy_i^{(n)}(x)}{dx} \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (11.16)$$

которые составлены следующим образом: первый столбец образован из n компонент искомой вектор-функции и производной ее i-той компоненты; последующие столбцы образованы из заданных вектор-функций $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ и производной i-той компоненты соответствующей вектор-функции.

Очевидно следующее:

1) Этим уравнениям удовлетворяют функции $\vec{y}_k(x)$, содержащиеся в столбцах: при подстановке вектор-функции $\vec{y}_k(x)$ вместо искомой вектор-функции в первый столбец получаем определитель с двумя равными столбцами, который равен 0.

2) Поскольку для заданных функций $\{\vec{y}_k(x)\}_{k=1}^n$ определитель Вронского $W(x) \neq 0$, то систему (11.16) можно разрешить относительно $\dfrac{dy_i}{dx}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (определитель Вронского стоит в левом верхнем углу и получается вычеркиванием первого столбца и последней строки).

Единственность следует из того, что все решения системы (11.11) определяются ее фундаментальной системой (теорема

(11.6)), так как задание всех интегральных кривых системы (11.11) полностью определяет соответствующее поле направлений и, значит, однозначно задает правые части системы.

11.5. Линейные неоднородные системы

Рассмотрим неоднородную систему

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x). \tag{11.17}$$

Теорема 11.10. *Общее решение линейной неоднородной системы равно сумме общего решения соответствующей линейной однородной системы и частного решения неоднородной.*

Доказательство.

Пусть $\vec{Y}(x)$— общее решение соответствующей однородной системы (11.11), и $\vec{y}(x)$ — некоторое частное решение неоднородной системы (11.17). Рассмотрим функцию $\vec{Y}(x) + \vec{y}(x)$.

1. Проверим, что эта функция является решением, для этого подставим ее в уравнение (11.17). Получим:

$$\frac{d}{dx}(\vec{Y}(x) + \vec{y}(x)) = \frac{d\vec{Y}(x)}{dx} + \frac{d\vec{y}(x)}{dx} =$$

$$= A(x)\vec{Y}(x) + A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x) = A(x)(\vec{Y}(x) + \vec{y}(x)) + \vec{f}(x).$$

2. Проверим, что произвольное решение содержится в рассматриваемой сумме. Пусть дано $\widetilde{\vec{y}}(x)$ — произвольное решение неоднородной системы. Покажем, что оно содержится в $\vec{Y}(x) + \vec{y}(x)$. Рассмотрим вектор-функцию

$$\hat{\vec{y}}(x) = \widetilde{\vec{y}}(x) - \vec{y}(x).$$

Подставив ее в уравнение (11.17), получим

$$\frac{d\hat{\vec{y}}(x)}{dx} = \frac{d\widetilde{\vec{y}}(x)}{dx} - \frac{d\vec{y}(x)}{dx} = A(x)\widetilde{\vec{y}}(x) + \vec{f}(x) - A(x)\vec{y}(x) - \vec{f}(x) =$$

$$= A(x)(\widetilde{\vec{y}}(x) - \vec{y}(x)) = A(x)\hat{\vec{y}}(x).$$

Отсюда получаем, что $\hat{\vec{y}}(x)$ является решением однородного уравнения, т.е. оно содержится в его общем решении и значит $\widetilde{\vec{y}}(x) = \hat{\vec{y}}(x) + \vec{y}(x)$ содержится в общем решении неоднородного уравнения.

Теорема 11.11. *Если известна фундаментальная система решений однородной системы, то частное решение неоднородной системы можно получить квадратурами.*

Доказательство.

Пусть общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\vec{Y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{y}_i(x),$$

где $\{\vec{y}_i(x)\}_{i=1}^{n}$ — фундаментальная система решений однородной линейной системы (11.11).

Ищем частное решение в виде:

$$\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \vec{y}_i(x).$$

Подставим его в уравнение (11.17). Получим:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\vec{y}_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\frac{d\vec{y}_i(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)A(x)\vec{y}_i(x) + \vec{f}(x).$$

Второе слагаемое слева и первое слагаемое справа равны между собой, так как $\dfrac{d\vec{y}_i(x)}{dx} = A(x)\vec{y}_i(x)$ (решение однородного уравнения), и их можно сократить. Таким образом, для $C_i'(x)$ получена линейная система уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\vec{y}_i(x) = \vec{f}(x),$$

матрица коэффициентов которой образована решениями $\vec{y}_1(x)$, $\ldots, \vec{y}_n(x)$. Эту систему можно разрешить относительно вектора

$\vec{C}\,'(x)$, составленного из компонент $C_i'(x)$:

$$\vec{C}\,' = B^{-1}(x)\vec{f}(x) \equiv \vec{\Psi}(x),$$

поскольку ее определитель равен $W(x)$ для системы решений $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$, а эта система — фундаментальная по условию теоремы, следовательно $W(x) \neq 0$. Поэтому для матрицы коэффициентов существует обратная матрица $B^{-1}(x)$ и

$$C_i(x) = \int \Psi_i(x)dx,$$

где $\Psi_i(x)$ — компоненты вектора $\vec{\Psi}(x)$. Теорема доказана.

11.6. Формула Коши для неоднородной системы

Рассмотрим неоднородную линейную систему (11.17) и соответствующую однородную систему (11.11). Для этой системы возьмем нормальную фундаментальную систему решений $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$, т.е. такую систему решений однородного уравнения, для которой начальные условия имеют вид (11.13), так что $y_j^{(i)}(x_0) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, т.е. для $\vec{y}_i(x)|_{x=x_0}$ все компоненты равны нулю, кроме единицы в $i-$той строке.

Построим матрицу-функцию Коши $K(x, S)$ для однородной системы (11.11).

Для этого строим систему функций $\vec{y}_1(x, S), \ldots, \vec{y}_n(x, S)$, такую что $\vec{y}_i(x, S)$ по x является решением однородной системы, а S — некоторый параметр, причем

$$y_i^{(k)}(S, S) = \delta_{ik}$$

и выполнены условия

$$\frac{d\vec{y}_i}{dx} = A(x)\vec{y}_i$$

($\vec{y}_i$ является решением однородной системы).

Из полученной системы функций составим матрицу

$$K(x,S)=(\vec{y}_1(x,S),\ldots,\vec{y}_n(x,S)),$$

которая обладает свойством $K(S,S)=E$.

Функция $K(x,S)$ удовлетворяет следующему (однородному) матричному уравнению:

$$\frac{d}{dx}K(x,S)=A(x)K(x,S).$$

Тогда решение неоднородной системы (11.17) имеет вид

$$\vec{y}(x)=K(x,x_0)\vec{y}(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}K(x,S)\vec{f}(S)dS \qquad (11.18)$$

где x_0 — некоторая начальная точка. Эта формула называется *формулой Коши.*

Проверим, что (11.18) действительно является решением неоднородной системы (11.17).

(1) Очевидно, что первое слагаемое — общее решение однородной системы (11.11).

(2) Рассмотрим второе слагаемое. Пользуясь формулой для производной по переменному верхнему пределу, найдем

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{x_0}^{x}K(x,S)\vec{f}(S)dS=K(x,x)\vec{f}(x)+\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{d}{dx}K(x,S)\right)\vec{f}(S)dS=$$

$$=\vec{f}(x)+\int\limits_{x_0}^{x}A(x)K(x,S)\vec{f}(S)dS=\vec{f}(x)+A(x)\int\limits_{x_0}^{x}K(x,S)\vec{f}(S)dS,$$

то есть второе слагаемое в формуле (11.18) является частным решением неоднородной системы и, следовательно, формула (11.18) дает общее решение неоднородной системы, что и требовалось доказать.

12. Линейные системы с постоянными коэффициентами

12.1. Преобразование системы уравнений

Рассмотрим вначале линейные однородные системы с постоянными коэффициентами, а затем неоднородные системы. В этом и последующем параграфах будем обозначать векторные величины полужирным шрифтом, то есть вместо обозначения $\vec{y}(x)$ будем использовать обозначение $\mathbf{y}(x)$.

Запишем линейную однородную систему в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y}, \tag{12.1}$$

и соответствующую неоднородную систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \tag{12.2}$$

где матрица A образована постоянными коэффициентами a_{ij}.

Основная идея решения систем (12.1) или (12.2) состоит в том, чтобы с помощью линейного преобразования искомого вектора привести эту систему к наиболее простому виду.

Линейное преобразование

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12.3}$$

можно коротко записать в виде $\mathbf{z} = K\mathbf{y}$, где K — квадратная невырожденная матрица преобразования, $\det K \neq 0$ и $\mathbf{y} = K^{-1}\mathbf{z}$.

После подстановки в (12.2) получим

$$K^{-1}\frac{d\mathbf{z}}{dx} = AK^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{f}(x).$$

Умножим это уравнение слева на K. Получим

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = KAK^{-1}\mathbf{z} + K\mathbf{f}(x).$$

или в других обозначениях

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = B\mathbf{z} + \mathbf{g}(x), \tag{12.4}$$

где

$$B = KAK^{-1}; \qquad \mathbf{g} = K\mathbf{f}. \tag{12.5}$$

Система (12.4) имеет тот же вид, что и (12.2), однако матрица коэффициентов B изменилась по формуле (12.5). Естественно попытаться подобрать матрицу преобразования K так, чтобы B приобрела наиболее простой вид.

В курсе линейной алгебры доказывается, что матрице B всегда можно придать так называемую жорданову нормальную форму: вдоль диагонали стоят жордановы клетки $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, а остальные элементы равны нулю:

$$B = \begin{pmatrix} \Pi_1 & & & 0 \\ & \Pi_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Pi_k \end{pmatrix},$$

где

$$\Pi_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & & \\ & & \lambda_j & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \Pi_j = \lambda_j.$$

Здесь в жордановой клетке Π_j на главной диагонали стоит один из корней характеристического (векового) уравнения матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{12.6}$$

В жордановой клетке Π_j на соседней (сверху) диагонали стоят единицы, а все остальные элементы — нули, причем n_j (порядок Π_j) равно степени элементарного делителя $(\lambda - \lambda_j)^{n_j}$, отвечающего корню λ_j (значение n_j вообще говоря не равно кратности корня λ_j в уравнении (12.6)): одному и тому же корню может отвечать несколько элементарных делителей, тогда в жордановой форме будет несколько клеток, у которых на главной диагонали стоит один и тот же элемент.

Величины λ_j называются *собственными значениями* матрицы A, тогда ее *собственные векторы* $\mathbf{e}_j$ определяются уравнениями

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j.$$

Однородная система (12.1), у которой матрица коэффициентов жорданова, называется системой в жордановой форме.

12.2. Интегрирование однородной системы в жордановой форме

Вначале рассмотрим наиболее простой случай:

1) *Все собственные значения матрицы A вещественны и различны.*

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения, и $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — собственные векторы матрицы A в системе (12.1), которую перепишем в покомпонентном виде:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{12.7}$$

Ищем решение системы (12.7) в виде:

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \\ \ldots \\ \alpha_n e^{\lambda x} \end{pmatrix},$$

где α_i — неизвестные постоянные.

Подставим это соотношение в уравнение (12.7). Получим:

$$\alpha_i \lambda e^{\lambda x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i e^{\lambda x}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

После сокращения на $e^{\lambda x}$ получим:

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad = \quad A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - \lambda E) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Для того, чтобы существовало ненулевое решение этой системы

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{T}} \neq 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $|A - \lambda E| = 0$, то есть λ должно быть собственным значением матрицы A, например λ_i, тогда $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$ — собственный вектор матрицы A. Обозначим его $\mathbf{e}_i$. Здесь и далее верхний индекс Т обозначает транспонирование.

Таким образом имеем n решений:

$$\mathbf{y}_i(x) = \mathbf{e}_i e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12.8}$$

Докажем, что система решений (12.8) — фундаментальная. Для этого доказываем линейную независимость найденных решений.

Доказательство от противного. Пусть существуют постоянные $\{C_i\}$ (не все $C_i = 0$), такие что $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i \mathbf{y}_i(x) \equiv 0$.

Положим в этом тождестве $x = 0$, тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i \mathbf{e}_i = 0$. Следовательно, собственные векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно зависимы.

Но они не могут быть линейно зависимыми, так как являются собственными векторами матрицы A, соответствующими *различным* собственным значениям.

Это можно доказать по индукции.

Для $k = 1$ (один собственный вектор) утверждение о линейной независимости очевидно.

Пусть утверждение о линейной независимости верно для $(k-1)$-го векторов. Докажем его для k векторов.

Предположим противное, а именно что существуют постоянные $\{C_i\}$ (не все $C_i = 0$), такие что

$$C_1\mathbf{e}_1 + \cdots + C_k\mathbf{e}_k = 0 \tag{12.9}$$

Умножим (12.9) на A и воспользуемся тем, что $A\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$, получим:

$$C_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + \cdots + C_k\lambda_k\mathbf{e}_k = 0. \tag{12.10}$$

С другой стороны, умножая (12.9) на λ_k, получим:

$$\lambda_k(C_1\mathbf{e}_1 + \cdots + C_k\mathbf{e}_k) = 0. \tag{12.11}$$

Вычтем из соотношения (12.10) соотношение (12.11):

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{e}_1 + \cdots + C_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{e}_{k-1} = 0.$$

Тогда $C_1 = \cdots = C_{k-1} = 0$ (так как $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}$ — линейно независимы по предположению индукции). Следовательно $C_k\mathbf{e}_k = 0$, откуда $C_k = 0$, значит *все* значения $C_i = 0$ равны нулю. Получили противоречие, которое доказывает исходное утверждение.

Таким образом, если все корни характеристического уравнения различны, то решения вида (12.8) линейно независимы и образуют фундаментальную систему.

2) *Рассмотрим случай произвольных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (кратных и (или) комплексных).*

Итак, как было указано выше, сделаем замену $\mathbf{y} = K\mathbf{z}$, такую что $\det K \neq 0$, тогда

$$K\frac{d\mathbf{z}}{dx} = AK\mathbf{z} \Rightarrow \frac{d\mathbf{z}}{dx} = K^{-1}AK\mathbf{z},$$

и $B = K^{-1}AK$ может быть приведена к жордановой форме.

Определение. Матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица K, $\det K \neq 0$, такая, что $K^{-1}AK = B$,

Жорданову матрицу обозначим J.

В курсе линейной алгебры доказывается, что существует матрица K такая, что $K^{-1}AK = J$. В результате замены $\mathbf{y} = K\mathbf{z}$ получим уравнение

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = J\mathbf{z}, \tag{12.12}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \lambda_3 & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

или в более краткой форме

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & J_p \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad J_j = \begin{pmatrix} \lambda_\mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_\mu & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\mu \end{pmatrix}.$$

Заметим, что корень λ_μ может встречаться в разных жордановых клетках.

Распишем систему (12.12) по жордановым клеткам $J_1, \dots, J_p$.

Имеем m_1 уравнений для первой жордановой клетки J_1

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + z_2, \\ \dfrac{dz_2}{dx} = \lambda_1 z_2 + z_3, \\ \dots \\ \dfrac{dz_{m_1-1}}{dx} = \lambda_1 z_{m_1-1} + z_{m_1}, \\ \dfrac{dz_{m_1}}{dx} = \lambda_1 z_{m_1}. \end{cases}$$

Аналогично, имеем m_2 уравнений для второй жордановой клетки J_2 и т.д. вплоть до m_p уравнений для p-той жордановой клетки J_p, так что

$$m_1 + \dots + m_p = n.$$

Пусть для j-той жордановой клетки порядка m_j (m_j — число строк в этой клетке) строки имеют номера $r, \dots, r + m_j - 1$ и соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{dz_r}{dx} = \lambda_\mu z_r + z_{r+1}, \\ \dfrac{dz_{r+1}}{dx} = \lambda_\mu z_{r+1} + z_{r+2}, \\ \dots \\ \dfrac{dz_{r+m_j-2}}{dx} = \lambda_\mu z_{r+m_j-2} + z_{r+m_j-1}, \\ \dfrac{dz_{r+m_j-1}}{dx} = \lambda_\mu z_{r+m_j-1}. \end{cases}$$

Если порядок клетки $m_j = 1$, то имеем одно уравнение

$$\frac{dz_r}{dx} = \lambda_\mu z_r,$$

общее решение которого $z_r(x) = Ce^{\lambda_\mu x}$.

Построим фундаментальную систему решений для системы уравнений (12.12).

Найдем такие вектор-функции $\mathbf{z}^{(i)}(x), i = 1, \ldots, n$, чтобы выполнялись начальные условия $\mathbf{z}^{(i)}(0) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, где единица стоит в i-той строке. Эти начальные условия соответствуют единичной матрице.

Такие вектор-функции составляют фундаментальную систему, поскольку $W(x) \neq 0$ в точке $x = 0$, и из формулы Лиувилля-Остроградского следует, что $W(x) \neq 0$ всюду.

Найдем вектор-функции $\mathbf{z}^{(i)}(x), i = 1, \ldots, n$ в явном виде.

Обозначим

$$\mathbf{z}^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} z_1^{(i)}(x) \\ \ldots \\ z_n^{(i)}(x) \end{pmatrix},$$

так что каждая вектор-функции $\mathbf{z}^{(i)}(x)$ удовлетворяет системе

$$\frac{d\mathbf{z}^{(i)}}{dx} = J\mathbf{z}^{(i)}.$$

Возьмем i-тую строку. Она пересекается с какой-то клеткой J_j порядка m_j, строки J_j имеют номера $r, r+1, \ldots, r+m_j-1$.

Пусть $i = s + r,\ 0 \leqslant s \leqslant m_j - 1$. Положим

$$z_1^i = z_2^i = \cdots = z_{r-1}^i = 0, \quad z_{r+m_j}^i = z_{r+m_j+1}^i = \cdots = 0,$$

то есть первые $r-1$ компоненты и последние, начиная с $r+m_j$, компоненты положим тождественно равными нулю. Тогда соответствующие уравнения выполнены тождественно. Ненулевыми будут только те компоненты $\mathbf{z}_i$, которые соответствуют клетке J_j, куда попала i-тая строка.

Найдем эти компоненты вектора $\mathbf{z}^i(x)$, опустив временно верхний индекс i.

Начальные условия имеют вид: $z_{r+s}(0) = 1$, остальные $z_j(0) = 0$ (для всех $j \neq r+s$).

Итак, пусть подсистема уравнений системы (12.12), которая соответствуют жордановой клетке J_j, имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dz_r}{dx} = \lambda_\mu z_r + z_{r+1}, \\ \dots \\ \dfrac{dz_{r+s}}{dx} = \lambda_\mu z_{r+s} + z_{r+s+1}, \\ \dots \\ \dfrac{dz_{r+m_j-1}}{dx} = \lambda_\mu z_{r+m_j-1}. \end{cases} \tag{12.13}$$

Положим в системе (12.13), начиная с нижней строки,

$$z_{r+m_j-1} \equiv 0, \qquad z_{z+m_j-2}(x) \equiv 0, \quad \dots, \qquad z_{r+s+1}(x) \equiv 0.$$

Тогда для компоненты с номером $i = r + s$ будем иметь уравнение:

$$\frac{dz_{r+s}}{dx} = \lambda_\mu z_{r+s},$$

из которого найдем $z_{r+s}(x) = e^{\lambda_\mu x}$.

Здесь в общем решение положено $C = 1$, так как $z_{r+s}(0) = 1$. Тогда для z_{r+s-1} имеем уравнение

$$\frac{z_{r+s-1}}{dx} = \lambda_\mu z_{r+s-1} + z_{r+s}(x) \equiv \lambda_\mu z_{r+s-1} + e^{\lambda_\mu x},$$

то есть получили линейное неоднородное уравнение первого порядка. Его общее решение легко находится

$$z_{r+s-1}(x) = Ce^{\lambda_\mu x} + xe^{\lambda_\mu x}.$$

Начальные условия для этой компоненты $z_{r+s-1}(0) = 0$ дают $C = 0$ и мы получаем $z_{r+s-1}(x) = xe^{\lambda_\mu x} \cdot A$. (Решение однородного уравнения можно умножить на коэффициент A, который находится по методу неопределенных коэффициентов (в частности, в нашем случае $A = 1$)).

Для следующей компоненты имеем уравнение

$$\frac{dz_{r+s-2}}{dx} = \lambda_\mu z_{r+s-2} + xe^{\lambda_\mu x} A,$$

из которого находим

$$z_{r+s-2}(x) = Ce^{\lambda_\mu x} + (A_1 x + A_2) x e^{\lambda_\mu x}, \quad (A_1 = \tfrac{1}{2}, A_2 = 0)$$
$$z_{r+s-2}(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Таким образом $z_{r+s-2}(x) = P_2(x)e^{\lambda_\mu x}$, где $P_2(x)$ — известный многочлен второй степени. Аналогично $z_{r+s-3}(x) = P_3(x)e^{\lambda_\mu x}$, $\dots$, $z_r(x) = P_s(x)e^{\lambda_\mu x}$, где $P_s(x)$ — многочлен s-той степени.

Таким образом могут быть найдены все компоненты вектор-функции $\mathbf{z}^{(i)}(x)$:

$$\mathbf{z}^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} P_1^i(x) \\ P_2^i(x) \\ \dots \\ P_n^i \end{pmatrix} e^{\lambda_\mu x},$$

где $P_k^i(x)$ — многочлены, степень которых не превосходит $\max\limits_j (m_j - 1)$.

Если вернуться к переменным $\mathbf{y}$, получим $\mathbf{y} = K\mathbf{z}$, или

$$\mathbf{y}^{(i)}(x) = e^{\lambda_\mu x} \begin{pmatrix} q_1^{(i)}(x) \\ \dots \\ q_n^{(i)}(x) \end{pmatrix},$$

где $q_k^{(i)}(x)$ многочлены, которые есть линейные комбинации $P_k^i(x)$, так что $\deg(q_n^i(x)) \leqslant \max\limits_j (m_j - 1)$.

Замечание. Так как λ_μ — комплексные числа, то и многочлены $q_k^i(x)$ могут быть комплекснозначными.

12.2.1. Случай комплексных корней

Опишем метод получения фундаментальной системы, состоящей из вещественных решений (так называемое *овеществление решения*).

Рассмотрим комплексное решение вида:

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} q_1^1(x) \\ \dots \\ q_n^1(x) \end{pmatrix} e^{\lambda_\mu x} = \mathbf{u}_1(x) + i\mathbf{v}_1(x),$$

где $\mathbf{u}_1(x)$ и $\mathbf{v}_1(x)$ — действительная и мнимая части решения.

Легко показать, что в случае действительных коэффициентов в рассматриваемой однородной системе они сами по себе являются решениями.

Возможны два случая:

(1) Решения $\mathbf{u}_1(x)$ и $\mathbf{v}_1(x)$ линейно зависимы. В этом случае $\mathbf{u}_1(x) = h\mathbf{v}_1(x)$: тогда $\mathbf{y}_1(x) = (h+i)\mathbf{v}_1(x)$. В фундаментальной системе заменим $\mathbf{y}_1(x)$ на $\mathbf{v}_1(x)$ — действительную функцию. Линейная независимость фундаментальной системы при этом сохраняется, так как $\mathbf{y}_1(x)$ и $\mathbf{v}_1(x)$ отличаются только постоянным множителем.

(2) Функции $\mathbf{u}_1(x)$ и $\mathbf{v}_1(x)$ линейно независимы.

Тогда вместо системы с $\mathbf{y}_1(x)$ рассмотрим систему, начинающуюся с $\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{v}_1(x)$, которую дополним до фундаментальной системы некоторыми функциями $\mathbf{w}_k(x)$, $k = 3, \dots, n$:

$$\{\mathbf{u}_1(x),\ \mathbf{v}_1(x),\ \mathbf{w}_3(x), \dots,\ \mathbf{w}_n(x)\}.$$

Если $\mathbf{w}_3(x) = \mathbf{w}_{31}(x) + i\mathbf{w}_{32}(x)$, поступим аналогично.

Например, если $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, то

$$e^{\lambda_j x} = e^{(\alpha_j + i\beta_j)x} = e^{\alpha_j x}(\cos\beta_j x + i\sin\beta_j x).$$

Таким образом, общее решение однородной линейной системы уравнений имеет вид:

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[\begin{pmatrix} q_1^j(x) \\ \dots \\ q_n^j(x) \end{pmatrix} e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x + \begin{pmatrix} r_1^j(x) \\ \dots \\ r_n^j(x) \end{pmatrix} e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x \right],$$

где степени многочленов $q_k^j(x)$ и $r_k^j(x)$ не превосходят кратности соответствующих корней λ_μ минус единица.

Замечание. Если ввести понятие экспоненты от матрицы

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots,$$

то решение системы уравнений $\dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y}$ может быть записано в виде:

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} C_1 \\ \ldots \\ C_n \end{pmatrix} e^{Ax}.$$

При начальном условии $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ решение имеет вид

$$\mathbf{y}(x) = e^{A(x-x_0)}\mathbf{y}_0.$$

12.3. Метод исключения

Основная идея метода исключения состоит в том, что систему из n линейных уравнений первого порядка всегда можно свести к одному уравнению n-го порядка.

Рассмотрим линейную неоднородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i + f_i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{12.14}$$

где $(a_{ij}) = \text{const}$.

Пусть M_{ik} — алгебраические дополнения к элементам a_{ik}, тогда

$$a_{1i}M_{1i} + a_{2i}M_{2i} + \ldots + a_{ni}M_{ni} = D, \qquad D = \det(a_{ij}),$$

или

$$a_{1k}M_{1i} + a_{2k}M_{2i} + \ldots + a_{nk}M_{ni} = 0, \quad \text{если} \quad k \neq i,$$

так как сумма произведений элементов столбцов на их алгебраические дополнения равна определителю системы или нулю, если взять алгебраические дополнения к элементам другого столбца.

Ранее использовались обозначения:

$$y' = py, \qquad y^{(k)} = p^k y.$$

Эти обозначения позволяют установить взаимно-однозначное соответствие между многочленами

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n \equiv g(\lambda)$$

и дифференциальными выражениями

$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = L[y].$$

Система (12.14) может быть переписана в виде:

$$py_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

или после простого преобразования в виде следующей системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{r} (a_{11} - p)y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x) = 0, \\ a_{21}y_1 + (a_{22} - p)y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + (a_{nn} - p)y_n + f_n(x) = 0. \end{array} \right. \tag{12.15}$$

Так как для системы (12.15) выполнена теорема существования и единственности, то существует решение

$$\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^{\mathrm{T}}.$$

Умножим каждое из уравнений в системе (12.15) на алгебраическое дополнение к соответствующим элементам первого столбца: первое уравнение на $M_{11}(p)$, второе на $M_{21}(p)$ и т.д.

Отметим, что такое формальное умножение $M_{ik}(p)$ соответствует сложным дифференциальных преобразованиям, так как умножение на p на самом деле означает взятие производной.

Сложим полученные уравнения по столбцам. Получим:

$$\begin{aligned}&[(a_{11}-p)M_{11}(p)+a_{21}M_{21}(p)+\dots+a_{n1}M_{n1}(p)]\,y_1+\\&+[a_{12}M_{11}(p)+(a_{22}-p)M_{21}(p)+\dots+a_{n2}M_{n1}(p)]\,y_2+\dots\\&\dots+[a_{1n}M_{11}(p)+\dots+(a_{nn}-p)M_{n1}(p)]\,y_n=F_1(x),\end{aligned} \tag{12.16}$$

где $F_1(x)$ — некоторая известная функция. В случае однородной системы $F_1(x)=0$.

Коэффициент при y_1 есть определитель системы (12.15), все остальные коэффициенты нули, поэтому уравнение (12.16) имеет вид:

$$[(a_{11}-p)M_{11}(p)+\dots+a_{n1}M_{n1}(p)]\,y_1=F_1(x), \tag{12.17}$$

где коэффициент при y_1 есть

$$D(p)=\begin{Vmatrix} a_{11}-p & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-p & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-p\end{Vmatrix} \tag{12.18}$$

– многочлен степени n относительно p, следовательно y_1 удовлетворяет дифференциальному уравнению n-го порядка (линейному) с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим две ситуации.

1) *Однородная система*: $f_i(x)\equiv 0$, поэтому $F_1(x)=0$.

Уравнение (12.17) для y_1 принимает вид

$$D(p)y_1=0.$$

Тогда фундаментальная система решений имеет вид

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x},\dots,x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x},\dots,x^{s_2-1}e^{\lambda_2 x},\dots,$$

где числа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ — корни характеристического уравнения $|A-\lambda E|=0$, т.е. собственные значения матрицы A, имеющие кратности $s_1, \ldots, s_m$, так что $s_1 + \ldots + s_m = n$. Решение имеет вид:

$$y_1 = \sum_{k=1}^{m} C_k x^{r_k} e^{\lambda_k x}, \qquad 0 \leqslant r_k \leqslant s_k - 1.$$

Для любых комплексных λ_k решение можно овеществить по формулам Эйлера.

Для нахождения $y_2(x)$ и последующих компонент поступаем аналогично. Вообще для y_k имеем:

$$D(p)y_k = 0, \quad k = 2, \ldots, n,$$

где дифференциальный оператор $D(p)$ один и тот же при любом k и совпадает с дифференциальным оператором в уравнении (12.17), то есть равен определителю (12.18).

Замечание. Предлагаемый метод как будто дает n^2 произвольных постоянных.

Рассуждения проводятся так: если $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ — решения системы, то они должны удовлетворять уравнению $D(p)y_i = 0$.

Однако обратное, вообще говоря, не следует из этого, то есть если мы решим уравнение $D(p)y_i = 0$, то из этого вовсе не следует, что мы найдем решение системы. Поэтому, после нахождения решений уравнений $D(p)y_i = 0$ необходимо проверить, удовлетворяют ли они системе и выбрать те из них, которые действительно ей удовлетворяют.

2) *Неоднородная система*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(x).$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{f}(x)$ представляет собой квазимногочлен:

$$\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \ldots \\ Q_n(x) \end{pmatrix} e^{\lambda_0 x}.$$

В результате применения метода исключения получим:

$$D(p)y_1(x) = R_1(x)e^{\lambda_0 x},$$

тогда

$$y_1(x) = y_{1\text{общ.одн.}}(x) + y_{1\text{част.неодн.}}(x).$$

В этом равенстве $y_{1\text{част.неодн.}}(x) = P_1(x)x^{r_0}e^{\lambda_0 x}$ и $\deg R_1(x) = \deg P_1(x)$, а r_0 — кратность корня λ_0 в характеристическом уравнении $|A - \lambda E| = 0$.

Таким образом, у рассматриваемой системы частное решение есть $S_1(x)e^{\lambda_0 x}, \ldots, S_n(x)e^{\lambda_0 x}$, где $S_k(x)$ есть многочлен, степень которого не превосходит максимальной степени $Q_i(x)+r_0$.

Пример. Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases} (a_{11}y_1 - py_1) + a_{12}y_2 = 0, \\ a_{21}y_1 + (a_{22}y_2 - py_2) = 0. \end{cases}$$

Умножив первое на $a_{22} - p$, а второе на $-a_{12}$ и сложив их, последовательно получим:

$$(a_{22} - p)(a_{11}y_1 - py_1) - a_{12}a_{21}y_1 = 0,$$

$$a_{11}a_{22}y_1 - a_{22}py_1 - a_{11}py_1 + p^2y_1 - a_{12}a_{21}y_1 = 0,$$

$$y_1'' - (a_{11} + a_{22})y_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1 = 0.$$

Получено линейное уравнение с постоянными коэффициентами, которое легко решается.

Вывод: Теорема Жордана дает точную степень множителя перед экспонентой, которая равна числу единиц в жордановой клетке системы, приведенной к жордановой нормальной форме, в то время как метод исключения дает только грубую оценку этой степени сверху.

Подведем некоторые итоги по методу исключения.

Решения нормальной системы уравнений с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$y_j(x) = P_{ij}(x)e^{\lambda_i x}, \quad (j = 1, \dots, n), \tag{12.19}$$

где P_{ij} — многочлен степени не большей, чем $m_i - 1$, m_i — кратность корня λ_i уравнения (12.6).

Практический прием нахождения общего решения: нужно составить для каждого корня выражение вида (12.19) с неопределенными коэффициентами, и подставляя эти выражения в систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y},$$

мы получим для неопределенных коэффициентов систему линейных уравнений. Число неизвестных, остающихся произвольными при решении этой системы, равно кратности корня.

Рассмотрим два очень важных примера, иллюстрирующих различные аспекты применения метода исключения.

Пример.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2. \end{cases} \tag{12.20}$$

Ищем решение в виде

$$\begin{cases} y_1 = k_1 e^{\lambda x}, \\ y_2 = k_2 e^{\lambda x}, \\ y_3 = k_3 e^{\lambda x}. \end{cases}$$

Для определения $k_1,\ k_2,\ k_3$ имеем 3 уравнения

$$\begin{aligned} \lambda k_1 - k_2 - k_3 &= 0, \\ -k_1 + \lambda k_2 - k_3 &= 0, \\ -k_1 - k_2 + \lambda k_3 &= 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{matrix} \right\| = -(\lambda^3 - 3\lambda - 2) = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

Таким образом, получили собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Простому корню $\lambda_1 = 2$ соответствует система двух независимых уравнения для k_1, k_2, k_3:

$$2k_1 - k_2 - k_3 = 0, \qquad -k_1 + 2k_2 - k_3 = 0.$$

Откуда

$$k_1 : k_2 : k_3 = \left\| \begin{matrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{matrix} \right\| : \left\| \begin{matrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{matrix} \right\| : \left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix} \right\| = 1 : 1 : 1.$$

Иначе, выразим $k_3 = -k_1 + 2k_2$ из второго уравнения и подставим в первое уравнение. Получим

$$\begin{gathered} 2k_1 - k_2 + k_1 - 2k_2 = 0, \\ 3k_1 - 3k_2 = 0, \\ k_1 = k_2 = k_3. \end{gathered}$$

Окончательно получаем решение для собственного значения $\lambda_1 = 2$

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x}, \\ y_2 = C_1 e^{2x}, \\ y_3 = C_1 e^{2x}. \end{cases}$$

Если же в матрицу

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

подставить $\lambda = -1$ (кратный корень $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$), то ранг $M(\lambda)$ окажется равным 1 и три уравнения для определения k_1, k_2, k_3 сведутся к одному уравнению

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$

Положив $k_1 = C_2, k_2 = C_3$, найдем $k_3 = -(C_2 + C_3)$ и получим систему решений с двумя произвольными постоянными:

$$\begin{cases} y_1 = C_2 e^{-x}, \\ y_2 = C_3 e^{-x}, \\ y_3 = -(C_2 + C_3) e^{-x}. \end{cases}$$

Общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \\ y_2 = C_1 e^{2x} + C_3 e^{-x}, \\ y_3 = C_1 e^{2x} - (C_2 + C_3) e^{-x}. \end{cases}$$

Найденная система решений — фундаментальная, так как ее определитель

$$\left\| \begin{matrix} e^{2x} & e^{2x} & e^{2x} \\ e^{-x} & 0 & -e^{-x} \\ 0 & e^{-x} & -e^{-x} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \right\| = 3 \neq 0.$$

Пример.

Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_2 + 4y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 - 4y_3. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\left\| \begin{matrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -4-\lambda \end{matrix} \right\| = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2 = 0.$$

Рассмотрим следующие собственные значения:

(1) Простой корень $\lambda = 0$. Ищем решение в виде $y_1 = a$, $y_2 = b$, $y_3 = c$. Подставляя в систему, получим решение

$$\begin{cases} 0 = -a + b, \\ 0 = -b + 4c, \\ 0 = a - 4c, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4C_1, \\ y_2 = 4C_1, \\ y_3 = C_1. \end{cases}$$

(2) Корень $\lambda = -3$ — двукратный, двучлен $\lambda+3$ не является делителем всех миноров второго порядка (ранг матрицы после подстановки $\lambda = -3$ равен 2), поэтому решение ищем в виде

$$\begin{cases} y_1 = e^{-3x}(a_1 + a_2 x), \\ y_2 = e^{-3x}(b_1 + b_2 x), \\ y_3 = e^{-3x}(c_1 + c_2 x). \end{cases}$$

После подстановки в исходную систему и сокращения на e^{-3x} получим:

$$\begin{cases} -3a_1 - 3a_2 x + a_2 + a_1 + a_2 x - b_1 - b_2 x &= 0, \\ -3b_1 - 3b_2 x + b_2 + b_1 + b_2 x - 4c_1 - 4c_2 x &= 0, \\ -3c_1 - 3c_2 x + c_2 + 4c_1 + 4c_2 x - a_1 - a_2 x &= 0. \end{cases}$$

Приравниваем свободные члены и коэффициенты при x, получаем две системы из трех уравнений:

$$\begin{cases} -2a_1 + a_2 - b_1 &= 0, \\ -2b_1 + b_2 - 4c_1 &= 0, \\ c_1 + c_2 - a_1 &= 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -2a_2 - b_2 &= 0, \\ -2b_2 - 4c_2 &= 0, \\ c_2 - a_2 &= 0. \end{cases}$$

Задавая $a_2 = C_2$ (C_2 — произвольная постоянная), получаем: $b_2 = -2C_2$, $c_2 = C_2$.

Из первых трех уравнений: задаем $a_1 = C_3$ (произвольная постоянная), получаем: $b_1 = C_2 - 2C_3$, $c_1 = C_3 - C_2$, и общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 4C_1 + C_2xe^{-3x} + C_3e^{-3x}, \\ y_2 = 4C_1 + C_2(-2x+1)e^{-3x} - 2C_3e^{-3x}, \\ y_3 = C_1 + C_2(x-1)e^{-3x} + C_3e^{-3x}. \end{cases}$$

Получим решение предыдущего примера по этому способу.

После нахождения $y_1 = C_1e^{2x}; y_2 = C_1e^{2x}; y_3 = C_1e^{2x}$ будем искать решения, соответствующие корню $\lambda = -1$ в виде:

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x}(a_1 + a_2x), \\ y_2 = e^{-x}(b_1 + b_2x), \\ y_3 = e^{-x}(c_1 + c_2x), \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = (-a_1 - a_2x + a_2)e^{-x}, \\ y_2' = (-b_1 - b_2x + b_2)e^{-x}, \\ y_3' = (-c_1 - c_2x + c_2)e^{-x}. \end{cases}$$

После подстановки в уравнения и сокращения на e^{-x} получаем

$$\begin{cases} a_1 + a_2x - a_1 + b_1 + b_2x + c_1 + c_2x = 0, \\ b_1 + b_2x - b_2 + a_1 + a_2x + c_1 + c_2x = 0, \\ c_1 + c_2x - c_2 + a_1 + a_2x + b_1 + b_2x = 0, \end{cases}$$

откуда выписываем две системы для неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + b_1 + c_1 = 0, \\ b_1 - b_2 + a_1 + c_1 = 0, \\ c_1 - c_2 + a_1 + b_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = a_2, \\ a_1 + b_1 + c_1 = b_2, \\ a_1 + b_1 + c_1 = c_2. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ и $a_1 = C_2$; $b_2 = C_3$; $c_1 = -(C_2 + C_3)$, откуда получаем решение, совпадающее с тем, что было получено ранее.

12.4. Применение к однородному линейному дифференциальному уравнению n-го порядка

Одно однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = 0 \tag{12.21}$$

эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1, \ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \ \ldots, \ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = -a_n y - a_{n-1} y_1 - \cdots - a_1 y_{n-1}. \end{cases} \tag{12.22}$$

Матрица характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ для этой системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1 - \lambda \end{pmatrix}. \tag{12.23}$$

Определитель этой матрицы легко подсчитывается при разложении по последней строке:

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= (a_1 + \lambda)\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = \\ &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \end{aligned}$$

После приравнивания нулю получаем характеристическое уравнение для исходного уравнения n-го порядка. Определитель матрицы, соответствующей элементу первого столбца и последней строки равен ± 1. Следовательно, если многочлен $D(\lambda)$ имеет корень λ_s кратности p_s, то матрица (12.23) имеет элементарный делитель $(\lambda - \lambda_s)^{p_s}$. Никаких других элементарных делителей, являющихся некоторой степенью $(\lambda - \lambda_s)$, у нее не будет. Из изложенной выше теории следует, что любому корню λ_s будет соответствовать группа решений вида $e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, \ldots, x^{p_s - 1}e^{\lambda_s x}$.

Таким образом, система дифференциальных уравнений, в которой хотя бы одному корню уравнения $D(\lambda) = 0$ соответствует более одного элементарного делителя, не может быть сведена к одному уравнению n-го порядка.

13. Однородные системы с периодическими коэффициентами

Среди линейных уравнений с переменными коэффициентами особенно важную роль играют *уравнения с периодическими коэффициентами*. В излагаемом материале основную роль играет *теорема Ляпунова*. Ее доказательство опирается на *матричное исчисление*.

Итак, пусть

$$\frac{d}{dx}(Y) = A(x)Y \tag{13.1}$$

нормальная линейная однородная система, записанная в матричной форме. Здесь Y — матрица $(n \times n)$, определитель которой $\det Y \neq 0$. Например, Y является фундаментальной матрицей решений однородной линейной системы $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$, если $\det\ Y \neq 0$.

Отметим, что если $Y = \Phi(x)$ и $Y = \hat{\Phi}(x)$ — два решения матричного уравнения (13.1), то существует постоянная матрица P, $(p_{ij}) = \text{const}$, такая что

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(x) \cdot P. \tag{13.2}$$

Это доказывается переходом к покомпонентной записи и означает, что две фундаментальные системы линейно выражаются друг через друга.

Будем предполагать, что коэффициенты системы (13.1) — периодические функции от x с периодом ω, т.е.

$$A(x + \omega) = A(x).$$

Теорема 13.1. (1) *Для всякого (матричного) решения*

$$Y = \Phi(x) \tag{13.3}$$

уравнения (13.1) существует такая постоянная (невырожденная) матрица C, что

$$\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot C.$$

Матрица C называется основной для решения (13.3) или матрицей монодромии.

(2) *Если $Y = \hat{\Phi}(x)$ — некоторое другое решение (13.1), а $\hat{C}$ его матрица монодромии, то*

$$\hat{C} = P^{-1} \cdot C \cdot P, \tag{13.4}$$

где $\det P \neq 0$, $p_{ij} = const$, то есть матрицы монодромии подобны друг другу.

Доказательство. Очевидно, что если $\Phi(x)$ — решение уравнения (13.1), то $\Phi(x+\omega)$ — так же решение. Действительно

$$\frac{d}{dx}\Phi\,(x+\omega) = A(x+\omega)\cdot\Phi(x+\omega) = A(x)\cdot\Phi(x+\omega),$$

так как $\Phi'_x(x) = A(x)\cdot\Phi(x)$ совпадают с точностью до подстановки $\tilde{x} = x + \omega$.

Однако по формуле (13.2) существует постоянная матрица $C : c_{ij} = \mathrm{const}$, такая что

$$\Phi(x+\omega) = \Phi(x)\cdot C.$$

Для доказательства формулы (13.4) воспользуемся формулой (13.2). Так как $\hat{\Phi}(x)$ — решение (13.1), то

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(x)\cdot P \Longleftrightarrow \hat{\Phi}(x)\cdot P^{-1} = \Phi(x) \Rightarrow$$
$$\hat{\Phi}(x+\omega) = \Phi(x+\omega)\cdot P = \Phi(x)\cdot C\cdot P = \hat{\Phi}(x)\cdot P^{-1}\cdot C\cdot P,$$

что и дает формулу (13.4): $\hat{C} = P^{-1}\cdot C\cdot P$.

Определение. Уравнение (13.1) и уравнение

$$\frac{d}{dx}Z = B(x)\cdot Z \tag{13.5}$$

с периодической матрицей $B(x)$ с тем же периодом ω : $B(x+\omega) = B(x)$ называются *эквивалентными*, если существует линейное преобразование

$$Z = S(x)\cdot Y$$

с периодической матрицей $S(x)$ с периодом ω, переводящее уравнение (13.1) в уравнение (13.5).

Теорема 13.2. *Уравнения (13.1) и (13.5) эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют решения* $Y = \Phi(x)$ *и* $Z = \Psi(x)$ *этих уравнений с одной и той же матрицей монодромии.*

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что дифференциальные уравнения (13.1) и (13.5) эквивалентны. Пусть $Y = \Phi(x)$ — произвольное решение уравнения (13.1) с основной матрицей C, тогда

$$Z = \Psi(x) = S(x) \cdot \Phi(x)$$

является решением (13.5).

Для него получим:

$$\Psi(x+\omega) = S(x+\omega) \cdot \Phi(x+\omega) = S(x) \cdot \Phi(x+\omega) =$$
$$= S(x) \cdot \Phi(x) \cdot C = \Psi(x) \cdot C.$$

Следовательно, C — матрица монодромии так же и для $\Psi(x)$.

Достаточность. Пусть существует решения $Y = \Phi(x)$ и $Z = \Psi(x)$ уравнений (13.1) и (13.5) с одной и той же матрицей монодромии C. Тогда, во-первых,

$$\Phi(x+\omega) = \Phi(x) \cdot C \Longleftrightarrow \Phi^{-1}(x+\omega) = C^{-1} \cdot \Phi^{-1}(x),$$

и во-вторых,

$$\Psi(x+\omega) = \Psi(x) \cdot C.$$

Поделим второе соотношение справа на первое. Получим

$$\Psi(x+\omega) \cdot \Phi^{-1}(x+\omega) = \Psi(x) \cdot \Phi^{-1}(x).$$

Введем обозначение

$$\Psi(x) \cdot \Phi^{-1}(x) = S(x).$$

Выполняя элементарные операции и используя введенное обозначение, имеем

$$\Psi(x+\omega) = S(x) \cdot \Phi(x+\omega),$$

откуда

$$\Psi(x) \cdot C = S(x) \cdot \Phi(x) \cdot C,$$

и, умножая справа на C^{-1}, найдем

$$\Psi(x) = S(x) \cdot \Phi(x), \tag{13.6}$$

где $\boxed{S(x) = \Psi(x) \cdot \Phi^{-1}(x)}$ — искомая периодическая матрица преобразования с периодом ω.

Так как каждое из решений $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ однозначно определяет свое уравнение, то из выражения (13.6) следует что уравнение (13.5) получается из уравнения (13.1) путем преобразования с матрицей $S(x)$.

Из теорем (13.1) и (13.2) следует, что любому уравнению (13.1), рассматриваемую с точностью до эквивалентности (теорема (13.2)) соответствует матрица монодромии C, определенная с точностью до трансформации (подобия).

Более того, совокупность всех инвариантов матрицы монодромии C относительно преобразований вида (13.4) составляет *полную систему инвариантов* уравнения (13.1), определенного с точностью до эквивалентности.

Отметим, что теоремы (13.1) и (13.2) справедливы как для действительных, так и для комплексных матриц.

Теорема 13.3 (теорема Ляпунова)**.** *Всякое уравнение*

$$\frac{d}{dx}Y = A(x) \cdot Y$$

с периодическими коэффициентами эквивалентно уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dx}Z = B \cdot Z, \tag{13.7}$$

где B — постоянная матрица $b_{ij} = const$, $b_{ij} \in \mathbb{C}$. Если в уравнении (13.1) матрица $A(x)$ с периодом ω действительна, то это уравнение, рассматриваемое как периодическое с периодом 2ω, эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dx}Z = B_1 \cdot Z,$$

где матрица B_1 постоянна и действительна, причем матрица перехода $S(x)$ от уравнения (13.1) к уравнению $\dot{Z} = B_1 \cdot Z$ также действительна.

Лемма 13.1. *Пусть $\dfrac{d}{dx}Z = B \cdot Z$ — система однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами, записанная в матричной форме ($B = const$). Оказывается, матрица*

$$Z = e^{xB} \tag{13.8}$$

является решением уравнения (13.7).

Доказательство леммы. Для доказательства того, что функция, определенная по формуле (13.8) есть решение уравнения (13.7), выпишем представление экспоненты от матрицы:

$$e^{xB} = E + xB + \frac{x^2}{2!}B^2 + \frac{x^3}{3!}B^3 + \dots + \frac{x^n}{n!}B^n + \dots$$

Возьмем производную:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{xB}\right) = B\left(E + xB + \frac{x^2}{2!}B^2 + \dots\right) = B \cdot e^{xB},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы Ляпунова.

Пусть C — матрица монодромии некоторого решения уравнения (13.1) $Y = \Phi(x)$. Оказывается, для любой невырожденной матрицы $A, \det A \neq 0$ существует перестановочная с A матрица B, такая что $e^B = A$. Матрица B называется логарифмом матрицы A : $B = \ln A$. На основании этого свойства существует матрица B, удовлетворяющая условию

$$e^{\omega B} = C.$$

Здесь B — постоянная матрица, так как матрица C — постоянная.

Докажем, что уравнение (13.1) и уравнение

$$\frac{d}{dx}Z = BZ \tag{13.9}$$

эквивалентны.

Действительно, по лемме матрица $Z = e^{xB}$ — решение уравнения (13.9). Таким образом, если (13.9) рассматривать как уравнение с периодическими коэффициентами с периодом ω, то основная матрица (монодромии) решения $Z = e^{xB}$ есть C, так как

$$e^{(x+\omega)B} = e^{xB} \cdot e^{\omega B} = e^{xB} \cdot C.$$

Так как основные матрицы монодромии рассматриваемых решений уравнения (13.1) и (13.9) совпадают, то эти уравнения эквивалентны по теореме (13.2).

Таким образом, первая часть теоремы Ляпунова доказана.

Пусть теперь $A(x)$ — действительная матрица, $\Phi(x)$ — действительное решение уравнения (13.1) и C — матрица монодромии:

$$\Phi(x+\omega) = \Phi(x) \cdot C. \tag{13.10}$$

Так как $\Phi(x)$ — действительная матрица, значит C — также действительная матрица и из (13.10) следует

$$\Phi(x+2\omega) = \Phi(x+\omega) \cdot C = \Phi(x) \cdot C^2, \tag{13.11}$$

то есть матрица монодромии по периоду 2ω равна квадрату матрицы монодромии по периоду ω. В матричном исчислении доказывается, что если B — вещественная матрица, то B^2 имеет вещественный логарифм, то есть существует вещественная матрица B_1, удовлетворяющая условию:

$$e^{2\omega B_1} = C^2.$$

Докажем, что уравнение (13.1) и уравнение

$$\frac{d}{dx} Z = B_1 Z, \tag{13.12}$$

рассматриваемые как уравнения с периодом 2ω, эквивалентны.

Действительно, матрица e^{xB_1} — решение (13.12). Тогда, если уравнение (13.12) рассматривать как уравнение с периодическими коэффициентами с периодом 2ω, то основная матрица решения $Z = e^{xB_1}$ есть C^2. Так как основные матрицы (матрицы монодромии) рассматриваемых решений уравнений (13.1) (с периодом 2ω) и (13.12) совпадают (см. (13.11)), эти уравнения эквивалентны. Теорема доказана.

14. Зависимость решения дифференциального уравнения от параметров и начальных данных

Рассмотрим произвольную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i\left(x, y_1, .., y_n\right),\ i = 1, \ldots, n,\ \Leftrightarrow\ \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}\right). \tag{14.1}$$

Всегда будем предполагать, что выполнены условия теоремы существования и единственности. Рассмотрим более общую постановку задачи, когда правая часть $\mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}\right)$ системы дифференциальных уравнений (14.1) зависит еще и от некоторого параметра λ:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = f\left(x, \mathbf{y}, \lambda\right), \tag{14.2}$$

причем для любого значения λ выполняются условия теоремы существования и единственности. Тогда решение системы (14.2) $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x, \lambda, x_0, \mathbf{y}_0)$, удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, есть некоторая функция параметра λ.

Наша цель показать, что $\mathbf{y}(x, \lambda, x_0, \mathbf{y}_0)$ есть непрерывная и дифференцируемая функция всех аргументов.

Заметим, что зависимость от начальных данных сводится к зависимости от параметров. Действительно, если имеются начальные условия $y_i(x_0) = y_i^\circ$, то после замены переменных $(x, \mathbf{y}) \to (t, \mathbf{u})$:

$$x = x_0 + t, \qquad y_i = y_i^\circ + u_i,$$

для $\mathbf{u}$ получим систему уравнений:

$$\frac{du_i}{dt} = f_i\left(x_0 + t, y_1^\circ + u_1, \ldots, y_n^\circ + u_n\right), \; i = 1, \ldots, n. \qquad (14.3)$$

Начальные условия $y_i(x_0) = y_i^\circ$ равносильны однородным (нулевым) начальным условиям $u_i(0) = 0$, т.е. в системе (14.3) начальные условия фиксированы, однако правая часть зависит от исходных (ненулевых) начальных данных как от параметров.

Для систем, зависящих от параметров, справедлива следующая теорема.

14.1. Теорема о зависимости решения от параметра

Теорема 14.1. *Пусть правая часть* $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda)$ *системы дифференциальных уравнений (14.2) непрерывна по всем аргументам в области* $\mathbf{R} : \{|x - x_0| \leqslant a; |y_i - y_i^\circ| \leqslant b; |\lambda - \lambda_0| < \Lambda\}$ *и функция* $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda)$ *удовлетворяет условию Липшица по* $\mathbf{y}$, *а* $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x, \lambda)$ *— решение системы (14.2) с начальными условиями* $y_i(x_0) = y_i^\circ$, *определено при* $|x - x_0| \leqslant h \leqslant a$ *и выполнено условие* $|y_i(x) - y_i^\circ| \leqslant b$, *тогда решение* $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x, \lambda)$ *непрерывно зависит от* λ.

14.1.1. Интегральное неравенство.

Докажем предварительно важную лемму.

Лемма 14.1. *(Лемма Гронуолла.)*

Если неотрицательная функция $U(x) \geqslant 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$U(x) \leqslant A + \int\limits_{x_0}^{x} U(t)\, V(t)\, dt, \tag{14.4}$$

где $A \geqslant 0,\ V(t) \geqslant 0$, *то*

$$U(x) \leqslant A e^{\int\limits_{x_0}^{x} V(t) dt}. \tag{14.5}$$

Доказательство леммы.

Рассмотрим вначале случай $A > 0$.

Поделим неравенство (14.4) на правую часть и умножим на $V(x) \geqslant 0$

$$\frac{U(x)\, V(x)}{A + \int\limits_{x_0}^{x} U(t)\, V(t)\, dt} \leqslant 1 \cdot V(x)\,.$$

Полученное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(A + \int\limits_{x_0}^{x} U(t)\, V(t)\, dt\right)\right) \leqslant V(x)\,.$$

Проинтегрируем его в пределах от x_0 до x. Получим

$$\ln\left[A + \int\limits_{x_0}^{x} U(t)\, V(t)\, dt\right] - \ln A \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} V(x)\, dx.$$

Перенося $\ln A$ направо, потенцируя и используя (14.4) получаем

$$U(x) \leqslant A + \int\limits_{x_0}^{x} U(t)\, V(t)\, dt \leqslant A e^{\int\limits_{x_0}^{x} V(x)dx}.$$

Таким образом, интегральное неравенство (14.5)

$$U(x) \leqslant A e^{\int\limits_{x_0}^{x} V(x)dx}$$

доказано.

Случай $A = 0$ получается предельным переходом в неравенстве

$$U(x) \leqslant \varepsilon + \int\limits_{x_0}^{x} U(t)\, V(t)\, dt,$$

которое верно при любом $\varepsilon > 0$, в том числе при $\varepsilon \to 0$. Действительно, из доказанного выше неравенства (14.5)

$$U(x) \leqslant \varepsilon e^{\int\limits_{x_0}^{x} V(x)dx}$$

при $\varepsilon \to 0$ следует, что $U(x) \leqslant 0$, значит $U(x) \equiv 0$.

Доказательство теоремы о зависимости решения от параметра.

Придадим λ два значения λ_1 и λ_2 и рассмотрим два решения $\mathbf{y}_1(x, \lambda_1)$ и $\mathbf{y}_2(x, \lambda_2)$, каждое из которых удовлетворяет своей системе уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}_1}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1, \lambda_1) \qquad \text{и} \qquad \frac{d\mathbf{y}_2}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2, \lambda_2). \tag{14.6}$$

и одинаковым начальным условиям $y_i(x_0) = y_i^\circ$, $i = 1, \ldots, n$. Правые части этих систем зависят от λ и, вообще говоря, не совпадают тождественно.

Оценим разность функций $\mathbf{y}_1(x, \lambda_1) - \mathbf{y}_2(x, \lambda_2)$, используя дифференциальное соотношение, которое получается вычитанием первой и второй системы уравнений (14.6), которые после подстановки $\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)$ и $\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)$ выполнены тождественно:

$$\frac{d}{dx}\left(\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)-\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)\right)\equiv\mathbf{f}(x,\mathbf{y}_1,\lambda_1)-\mathbf{f}(x,\mathbf{y}_2,\lambda_2)\,. \quad (14.7)$$

Для этого распишем (14.7) по компонентам

$$\mathbf{y}_1=\begin{pmatrix}y_1^1\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n^1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{y}_2=\begin{pmatrix}y_1^2\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n^2\end{pmatrix}$$

и к i-той компоненте правой части уравнения (14.7) прибавим и отнимем функцию $f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_2)$. Получим

$$\frac{d}{dx}\left(y_i^1(x,\lambda_1)-y_i^2(x,\lambda_2)\right)\equiv f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_1)-f_i(x,\mathbf{y}_2,\lambda_2)+$$
$$+f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_2)-f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_2)\,.$$

Проинтегрируем последнее тождество, учитывая тот факт, что функции $\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)$ и $\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям, и перегруппируем слагаемые в правой части. Получим

$$y_i^1(x,\lambda_1)-y_i^2(x,\lambda_2)=\int\limits_{x_0}^{x}\left[f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_1)-f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_2)\right]dx+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\left[f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_2)-f_i(x,\mathbf{y}_2,\lambda_2)\right]dx.$$

Оценим правую часть, используя условия теоремы:

$$|y_i^1(x,\lambda_1)-y_i^2(x,\lambda_2)|\leqslant\max_{x,\mathbf{y}_1\in R}|f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_1)-f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_2)|\cdot a+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}K\|\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)-\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)\|dx,$$

где второй интеграл оценен из условия Липшица (K — константа в условии Липшица), а под нормой $\|.\|$ понимается сумма модулей компонент вектор-функции $\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)-\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)$.

Суммируя по всем компонентам (по индексу i), получим

$$\|\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)-\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)\| \leqslant na \max_{x,\mathbf{y}_1\in R} |f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_1)-f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_2)|+ \\ +nK\int\limits_{x_0}^{x}\|\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)-\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)\|dx.$$

Обозначив $\max\limits_{x,\mathbf{y}_1\in R} |f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_1)-f_i(x,\mathbf{y}_1,\lambda_2)| = \delta(\lambda_1,\lambda_2)$, получим

$$\|\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)-\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)\| \leqslant na\cdot\delta(\lambda_1,\lambda_2)+ \\ +\int\limits_{x_0}^{x} nK\|\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)-\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)\|dx.$$

По лемме Гронуолла (из интегрального неравенства) получаем окончательную оценку

$$\|\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)-\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)\| \leqslant n\cdot a\cdot\delta(\lambda_1,\lambda_2)\,e^{nKa}.$$

Из непрерывности функций $f_i(x,\mathbf{y},\lambda)$ по λ следует, что $\delta(\lambda_1,\lambda_2)\to 0$, если $\lambda_1\to\lambda_2$, откуда

$$\|\mathbf{y}_1(x,\lambda_1)-\mathbf{y}_2(x,\lambda_2)\| \to 0 \text{ при } \lambda_1\to\lambda_2,$$

следовательно

$$|y_i^1(x,\lambda_1)-y_i^2(x,\lambda_2)| \to 0 \text{ при } \lambda_1\to\lambda_2,$$

и, следовательно, решение $\mathbf{y}(x,\lambda)$ системы (14.2) непрерывно зависит от параметра λ.

Аналогичная теорема имеет место и при зависимости правой части системы (14.2) от группы параметров.

Если правая часть системы дифференциальных уравнений (14.2) непрерывно дифференцируема по параметру, то справедлива следующая теорема.

14.2. Дифференцируемость решения по параметру

Теорема 14.2. *Если дано дифференциальное уравнение:*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}, \lambda\right),$$

в котором правая часть $\mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}, \lambda\right)$ *определена в области* R

$$R: \ \{|\lambda - \lambda_0| \leqslant \Lambda, |x - x_0| \leqslant a; |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| \leqslant b\}$$

и функции f_i *и их производные* $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ *по* y_j *и* $\dfrac{\partial f_i}{\partial \lambda}, \ldots, \dfrac{\partial^p f_i}{\partial \lambda^p}$ *по* λ *до p-го порядка* $(p \geqslant 1)$ *непрерывны по совокупности* $x, y_1, \ldots, y_n, \lambda$ *и ограничены, то решение* $\mathbf{y}\left(x, \lambda\right)$*, такое, что* $\mathbf{y}\left(x_0\right) = \mathbf{y}_0$ *и* $|\mathbf{y}\left(x, \lambda\right) - \mathbf{y_0}| \leqslant b$ *при* $|x - x_0| \leqslant h \leqslant a, |\lambda - \lambda_0| < \Lambda$*, будет непрерывно дифференцируемо по* λ *до p-го порядка включительно, то есть*

$$\frac{\partial y_i}{\partial \lambda}, \ldots, \frac{\partial^p y_i}{\partial \lambda^p} \in C\left(R\right), \ i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство этой теоремы опирается на лемму Адамара. Мы его опускаем.

Следствие. *Решение дифференциального уравнения непрерывно дифференцируемо по начальным данным.*

15. Теория устойчивости (Устойчивость по Ляпунову)

Рассмотрим общую систему уравнений нормального вида

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.1}$$

Определение. Решение $\mathbf{y}(x)$ системы (15.1), удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^\circ$, т.е. $y_i(x_0) = y_i^\circ$, называется устойчивым по Ляпунову при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при любом $x \geqslant x_0$ для любого решения $\tilde{\mathbf{y}}(x)$, удовлетворяющего условию $\tilde{\mathbf{y}}(x_0) = \tilde{\mathbf{y}}^\circ$, выполняются неравенства

$$|y_i(x) - \tilde{y}_i(x)| < \varepsilon, \text{ если } |y_i^\circ(x_0) - \tilde{y}_i^\circ| < \delta, \; i = 1, \ldots, n.$$

Геометрически это означает, что любое решение, проходящее через δ-окрестность точки $(x_0, \mathbf{y}_0)$, будет находиться внутри ε-трубки (рис. 15.1).

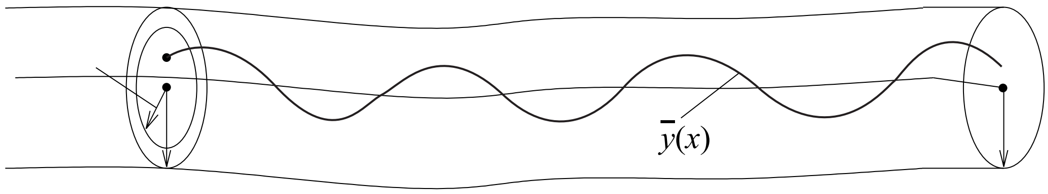

Рис. 15.1. *Геометрическая интерпретация устойчивости по Ляпунову*

Отличие от непрерывной зависимости от начальных параметров состоит в том, что промежуток на котором определяется устойчивость по Ляпунову — полубесконечный.

15.1. Асимптотическая устойчивость

Решение $\mathbf{y}(x)$ системы (15.1) называется асимптотически устойчивым если:

(1) оно устойчиво по Ляпунову;

(2) разность между исходным решением и решением с возмущенными начальными данными стремится к нулю при $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} (y_i(x) - \tilde{y}_i(x)) = 0$.

В случае асимптотически устойчивого решения, при отклонения начальных данных $\tilde{\mathbf{y}}(x_0) = \tilde{\mathbf{y}}^\circ$ на достаточно малую величину δ: $|y_i^\circ - \tilde{y}_i^\circ| \leqslant \delta$, амплитуда отклонения неограничено убывает при $x \to +\infty$ (рис. 15.2).

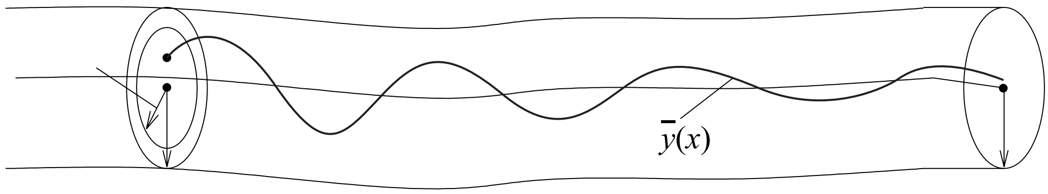

Рис. 15.2. *Асимптотическая устойчивость*

15.2. Сведение к рассмотрению нулевого решения

Пусть $\mathbf{y}(x)$ есть решение системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$

удовлетворяющее начальным условиям: $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^\circ$.

Преобразуем искомые функции y_i, вводя их отклонения z_i от рассматриваемого решения $\mathbf{y}(x)$:

$$y_i = y_i(x) + z_i \Leftrightarrow z_i = y_i - y_i(x). \tag{15.2}$$

Так введенные функции z_i называют *возмущениями* рассматриваемого решения $\mathbf{y}(x)$.

Тогда для возмущений z_i получим следующую систему уравнений

$$\frac{dz_i}{dx} = f_i(x, z_1 + y_1(x), \ldots, z_n + y_n(x)) - y_i'(x) \equiv$$

$$\equiv \varphi_i(x, z_1, \ldots, z_n). \tag{15.3}$$

Легко видеть, что система (15.3) имеет нулевое решение: $z_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, то есть при преобразовании вида (15.2) решение $\mathbf{y}(x)$ с начальными условиями $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^\circ$ переходит в решение $\mathbf{z}(x) \equiv 0$ и всегда изучение любого решения можно свести к изучению нулевого решения, правда, возможно, с измененной правой частью.

15.3. Устойчивость линейных однородных систем

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{15.4}$$

где $a_{ij}(x)$ — функции непрерывные на некотором полубесконечном интервале $x \geqslant x_0$.

Рассмотрим решение системы (15.4)

$$\mathbf{y}(x) = \{y_1(x), \ldots, y_n(x)\},$$

где $y_i(x)$ — известные функции от x. Сделаем замену переменных (15.2)

$$z_i = y_i - y_i(x) \Leftrightarrow y_i = z_i + y_i(x).$$

В результате замены получим систему уравнений

$$\frac{dz_i}{dx} + y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(z_i + y_i(x)\right),$$

однако так как

$$y_i'(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(x),$$

то для введенных выше новых функций z_i получаем систему

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, z_i.$$

Следовательно, в случае линейной однородной системы (15.4) для возмущений z_i получаются такие же уравнения, как и для исходных функций y_i и вопрос об изучения устойчивости произвольного решения сводится к исследованию устойчивости нулевого решения $z_1 \equiv 0$, $z_2 \equiv 0$, $\ldots, z_n \equiv 0$. Таким образом, если у линейной однородной системы нулевое решение устойчиво, то и все решения устойчивы, а если оно неустойчиво, то и все решения неустойчивы.

Теорема 15.1. *Линейная однородная система устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения ограничены, то есть для всех компонент решения $y_i(x)$ существуют постоянные C_i, такие что для всякого $x \geqslant x_0$ выполняются неравенства $|y_i\,(x)\,| < C_i$, $i = 1, \ldots, n$ (для каждой компоненты решения может быть свое ограничение).*

Достаточность.

Пусть $|y_i\,(x)\,| < C_i$ при $x \geqslant x_0$. Рассмотрим фундаментальную систему $\mathbf{y}_1\,(x)\,, \ldots, \mathbf{y}_n\,(x)$, удовлетворяющую начальным условиям

$$\mathbf{y}_i\,(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} - i\text{-тая строка.}$$

Так как любое решение ограничено, выберем $M = \max\limits_i C_i$, тогда $|y_i\,(x)\,| \ < \ M$. Если $\mathbf{y}\,(x)$ — произвольное решение, такое, что

$$\mathbf{y}\,(x_0) = \begin{pmatrix} y_1^\circ \\ y_2^\circ \\ \cdot \\ y_n^\circ \end{pmatrix},$$

то оно выражается через фундаментальную систему $\mathbf{y}_1\,(x)\,, \ldots,$ $\ldots, \mathbf{y}_n\,(x)$:

$$\mathbf{y}\,(x) = y_1^\circ \cdot \mathbf{y}_1\,(x) + \ldots + y_n^\circ \cdot \mathbf{y}_n\,(x)\,.$$

При $x \geqslant x_0$ имеем

$$\|\mathbf{y}\,(x)\,\| < \max_{j=1,\ldots,n} |y_j^\circ| Mn, \tag{15.5}$$

при этом начальные условия для $\mathbf{y}\,(x)$ удовлетворяют оценке

$$\|\mathbf{y}\,(x_0)\,\| < \max_{j=1,\ldots,n} |y_j^\circ| n. \tag{15.6}$$

Тогда устойчивость следует из определения. Действительно, пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Для выполнения условия устойчивости $\|\mathbf{y}\,(x)\,\| < \varepsilon$ в качестве δ выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, тогда с учетом того, что оценка (15.6) выполнена, имеем

$$\|\mathbf{y}\,(x_0)\,\| < \max_{j=1,\ldots,n} |y_j^\circ| n < \delta = \frac{\varepsilon}{M},$$

т.е. $\max\limits_{j=1,\ldots,n} |y_j^\circ| Mn < \varepsilon$, откуда из неравенства (15.5) следует, что $\|\mathbf{y}(x)\| < \varepsilon$ при $\|\mathbf{y}\,(x_0)\,\| < \delta$, следовательно нулевое решение устойчиво и система устойчива.

Необходимость.

Доказательство проведем от противного. Пусть существует неограниченное решение $\widehat{\mathbf{y}}(x)$, в котором некоторые компоненты $\widehat{y}_i\,(x)$ неограничены, тогда существует последовательность $x_m \to \infty$, такая, что $|\widehat{y}_i\,(x_m)\,| \to \infty$.

Нулевое решение $\mathbf{y} \equiv 0$ устойчиво (это следует из необходимости). Выберем $\varepsilon = 1$, тогда существует такое δ, что любое решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\|\mathbf{y}\,(x_0)\,\| < \delta, \tag{15.7}$$

будет также удовлетворять условию $\|\mathbf{y}\,(x)\,\| < 1$ (т.к. выбрано $\varepsilon = 1$) при $x \geqslant x_0$, если выполнено условие (15.7).

Рассмотрим теперь неограниченное решение $\widehat{\mathbf{y}}\,(x)$, существование которого мы предположили в начале доказательства. Конечно, его значения при $x = x_0$ могут не удовлетворять условию (15.7). Однако, из этого неограниченного решения $\widehat{\mathbf{y}}\,(x)$ мы всегда (так как $\|\widehat{\mathbf{y}}\,(x_0)\,\| \neq 0$, в противном случае $\widehat{\mathbf{y}}\,(x) \equiv 0$) можем построить решение вида

$$\mathbf{y}_1\,(x) \equiv \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\widehat{\mathbf{y}}\,(x)}{\|\widehat{\mathbf{y}}\,(x_0)\,\|},$$

для которого условие $\|\mathbf{y}_1(x_0)\| < \delta$ выполнено. Действительно, согласно определению $\|\mathbf{y}_1(x_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, но поскольку это решение было получено из неограниченного решения $\widehat{\mathbf{y}}(x)$ умножением на некоторую постоянную, то для него, как и для решения $\widehat{\mathbf{y}}(x)$, должно выполняться условие $|y_i^1(x_m)| \to \infty$, что противоречит полученному выше ограничению $\|\mathbf{y}_1(x)\| < 1$ при $x \geqslant x_0$, которое верно для *всех* решений, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{y}(x_0)\| < \delta$.

Пример.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = 0, \end{cases}$$

которая имеет решение

$$\begin{cases} y_1 = C_1 x + C_2, \\ y_2 = C_1. \end{cases}$$

Так как при $C_1 \neq 0$ решение неограничено, все решения неустойчивы.

15.4. Лемма Ляпунова

Лемма 15.1. *Пусть для некоторого* $\varepsilon_0 > 0$ *правые части системы*

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{15.8}$$

определены, непрерывны, удовлетворяют условию Липшица при

$$x_0 \leqslant x < \infty, \quad -\varepsilon_0 \leqslant y_i \leqslant \varepsilon_0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$f_i(x, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0.$$

Пусть для тех же значений y_i *существует непрерывно дифференцируемая "функция Ляпунова"* $V(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqslant 0$, *равная нулю лишь в начале координат:* $V(0,0,\ldots,0)=0$, *такая, что*

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_j}\cdot f_j<0. \tag{15.9}$$

Тогда нулевое решение $y_i(x)\equiv 0, i=1,2,\ldots,n$, *системы (15.8) устойчиво по Ляпунову.*

Если, кроме того, при тех же значениях y_i

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_j}\cdot f_j\leqslant -W(y_1,\ldots,y_n)\leqslant 0, \tag{15.10}$$

где $W(y_1,\ldots,y_n)\geqslant 0$ — *некоторая непрерывная функция, равная нулю лишь в начале координат, то нулевое решение асимптотически устойчиво.*

Доказательство леммы.

Пусть $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Обозначим через K_ε поверхность n-мерного куба $-\varepsilon\leqslant y_i\leqslant\varepsilon,\ i=1,2,\ldots,n$, и пусть $V_\varepsilon=\min\limits_{K_\varepsilon}V$. Очевидно, что $V_\varepsilon>0$.

Выберем $\eta>0$, причем $\eta<\varepsilon$, настолько малым, чтобы на K_η и всюду внутри K_η было выполнено условие $V<V_\varepsilon$. Такое η существует, так как $V(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ является непрерывной функцией и $V(0,\ldots,0)=0$.

Отсюда следует, что все интегральные линии, начинающиеся при $x=x_0$ внутри K_η, никогда при увеличении x не могут достичь K_ε, откуда следует устойчивость.

Действительно, вдоль интегральной линии функция Ляпунова V является сложной функцией x, и из (15.8) получаем

$$\frac{dV}{dx}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_j}\cdot\frac{dy_j}{dx}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_j}\cdot f_j,$$

тогда условие (15.9) означает, что вдоль интегральной линии функция $V(x)$ не возрастает. Если же интегральная линия, начавшаяся при $x = x_0$ внутри K_η при увеличении x достигнет первый раз K_ε при некотором $x = x_1$, тогда вдоль этой линии значение функции $V(x)$, которая удовлетворяла условию $V|_{x=x_0} < V_\varepsilon$ внутри K_η, стало превосходить или равняться $V_\varepsilon :\ V|_{x=x_1} \geqslant V_\varepsilon$, так как $V_\varepsilon = \min\limits_{K_\varepsilon} V$. Это противоречит невозрастанию функции $V(x)$ вдоль интегральной линии.

Докажем теперь асимптотическую устойчивость.

Пусть выполнено условие (15.10). Выберем η по ε так же, как это сделано выше. Тогда, как только это было показано, все интегральные линии начинающиеся при $x = x_0$ внутри K_η при увеличении x остаются внутри K_ε. Покажем, что любая интегральная линия l при увеличении x стремится к началу координат.

Было доказано, что вдоль l значение $V(x)$ не возрастает. В силу свойств функции V *достаточно проверить, что вдоль l функция* $V(x) \to 0$ (так как $V\left(0, \ldots, 0\right) = 0$ и нуль — единствен).

Рассуждаем от противного. Пусть $V(x)$ вдоль l не стремится к нулю, оставаясь всегда больше некоторого положительного δ. Следовательно, l целиком расположена вне некоторого куба K_δ и из (15.10) следует, что вдоль l

$$\frac{dV}{dx} \leqslant -W \leqslant -\alpha < 0, \qquad (15.11)$$

так как вне K_δ функция $W \geqslant \alpha > 0$ (такое $\alpha = \mathrm{const} > 0$ существует, так как $W = 0$ только в начале координат).

Проинтегрируем неравенство (15.11):

$$\frac{dV}{dx} \leqslant -\alpha \Leftrightarrow dV \leqslant -\alpha dx \Leftrightarrow V\left(x\right) - V\left(x_0\right) \leqslant -\alpha\left(x - x_0\right),$$

откуда находим

$$V\left(x\right) \leqslant V\left(x_0\right) - \alpha\left(x - x_0\right),$$

так что, очевидно, правая часть стремится к минус бесконечности при $x \to +\infty$ и, следовательно, $V(x) < 0$. Это противоречит определению функции $V(x)$. Лемма доказана.

Геометрический смысл леммы Ляпунова. Рассмотрим частный случай $n = 2$. Пусть линии уровня $V = C$ $(C = \mathrm{const})$ — замкнутые линии, содержащие начало координат, причем линия с меньшим значением C лежит внутри линии с большим значением C (рис. 15.3). Условие (15.9) означает, что интегральные кривые, имеющие общую точку с линией $V = C$, не выходят из области, ограниченной этой линией, откуда и следует устойчивость нулевого решения $y_1 \equiv 0$, $y_2 \equiv 0$ (т.е. начала координат на плоскости y_1, y_2).

Геометрическая интерпретация леммы Ляпунова

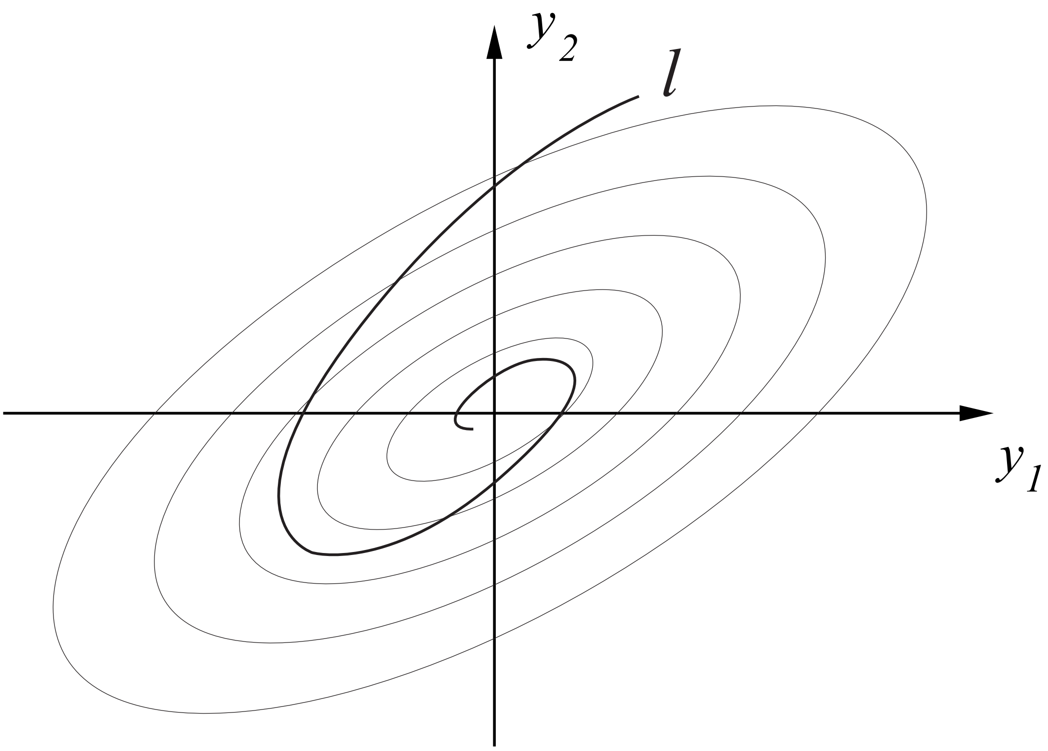

Рис. 15.3. *Геометрическая интерпретация леммы Ляпунова*

При выполнении более сильного условия (15.10) интегральные кривые пересекают линию $V = C$ снаружи внутрь, так как

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{V=C} \leqslant -W|_{V=C} < -\beta \quad (\beta > 0)\,.$$

Это неравенство справедливо, поскольку функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Кроме того, как доказано выше, $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = 0$. Следовательно, любая интегральная кривая стремится к началу координат, а это означает, что нулевое решение асимптотически устойчиво.

Замечание. Левая часть неравенств (15.9) или (15.10) представляет собой производную $\dfrac{dV}{dx}$ от функции V, взятую вдоль интегральных кривых системы (15.8), или, иначе говоря, производную, взятую в силу системы (15.8).

15.5. Нелинейные автономные системы

Определение. Система называется автономной (динамической), если ее правая часть не зависит от аргумента

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i\left(y_1, \ldots, y_n\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.12}$$

Будем предполагать, что у системы (15.12) существует нулевое решение $\mathbf{y}(x) \equiv 0$. Для этого необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$f_i\left(0, \ldots, 0\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Представив правую часть (15.12) по формуле Тейлора в окрестности точки $(0, \ldots, 0)$ и учитывая, что $f_i\left(0, \ldots, 0\right) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получим систему следующего вида

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + \varphi_i\left(y_1, \ldots, y_n\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\left(0, \ldots, 0\right)$, а функции $\varphi_i\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ содержат члены высшего порядка по сравнению с линейными членами.

Для автономных систем такого вида справедливы две следующие теоремы, принадлежащие Ляпунову.

Теорема 15.2. (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости).

Если правая часть системы (15.12) может быть представлена в виде линейной части и нелинейной добавки высшего порядка малости

$$f_i\left(y_1,\ldots,y_n\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+\varphi_i\left(y_1,\ldots,y_n\right),\ \text{где } a_{ij}=const, \tag{15.13}$$

причем вектор-функция $\vec{\varphi}\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам и

$$\lim_{y_1,\ldots,y_n\to 0}\frac{\varphi_i\left(y_1,\ldots,y_n\right)}{|y_1|+\ldots+|y_n|}=0,\quad i=1,\ldots,n\ \Leftrightarrow\ \lim_{\|y\|\to 0}\frac{\|\vec{\varphi}\|}{\|\mathbf{y}\|}=0,$$

и если все собственные значения матрицы A, составленной из коэффициентов a_{ij}, имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\lambda<0$*, где λ — решение характеристического уравнения $|A-\lambda E|=0$), то нулевое решение системы (15.12) будет асимптотически устойчивым при $x\to+\infty$.*

Теорема 15.3 (Теорема Ляпунова о неустойчивости)**.** *Если для системы (15.12) выполнены условия теоремы (15.2) и матрица A имеет по крайней мере одно собственное значение, у которого действительная часть положительна* $\mathrm{Re}\lambda>0$*, то решение $y\equiv 0$ неустойчиво.*

Эту теорему примем без доказательства.

В ситуации, когда некоторые характеристические значения лежат на мнимой оси (действительная часть хотя бы одного собственного значения равна нулю), теорема (15.3) неприменима и однозначного ответа на вопрос о неустойчивости нет, т.е. система может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

Доказательство теоремы Ляпунова (15.2) об асимптотической устойчивости.

Рассмотрим однородную систему, полученную отбрасыванием в правой части системы (15.12), представленной в виде (15.13), нелинейных членов $\varphi_i\,(y_1,\ldots,y_n)$:

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}y_j. \tag{15.14}$$

Как показано ранее, решения системы (15.14) имеют вид:

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}P_{k1}\,(x)\,e^{\lambda_k x}\\ \sum\limits_{k=1}^{n}P_{k2}\,(x)\,e^{\lambda_k x}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим собственное значение λ_k, у которого по условию теоремы $\mathrm{Re}\lambda_k<0$, тогда справедлива оценка

$$|e^{\lambda_k x}|=|e^{(\mathrm{Re}\lambda_k)x}|<e^{-\alpha x}, \tag{15.15}$$

где $\alpha>0$. Так как собственных значений λ_k конечное число, то можно найти такое α, чтобы оценка (15.15) выполнялась для любого k. Умножение функции $e^{\lambda_k x}$ на многочлен любой конечной степени не нарушает этой оценки. Следовательно, существует такое $\gamma>0$, что для всех k выполняется неравенство

$$|P\,(x)\,e^{\lambda_k x}|\leqslant Ce^{-\gamma x},\qquad k=1,\ldots,n;$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{y}\,(x)\,\|\leqslant C_1e^{-\gamma x}.$$

Пусть теперь $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ — фундаментальная система решений системы уравнений (15.14), удовлетворяющая начальным условиям

$$\mathbf{y}_i(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(единица в i-той строке), тогда справедлива оценка

$$\|\mathbf{y}_i(x)\| \leqslant Me^{-\gamma x},$$

где M — единая константа для любого i (будем считать, что $M > 1$).

Составим из фундаментальной системы матрицу $U(x)$, располагая решения $\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)$ по столбцам:

$$U(x) = (\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)). \tag{15.16}$$

Таким образом, имеем задачу Коши, записанную в матричном виде

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU, \qquad A = (a_{ij}) \\ U(0) = E. \end{cases}$$

Рассмотрим матричную функцию $U = U(x - \tau)$, где τ — некоторый параметр. Легко видеть, что для этой функции выполняются соотношения

$$U(x-\tau)|_{x=\tau} = E,$$

$$\frac{d}{dx}U(x-\tau) = \frac{d}{d(x-\tau)}U(x-\tau) = AU(x-\tau).$$

Применим формулу Коши (11.18) для решения неоднородной линейной системы

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \vec{\varphi}. \tag{15.17}$$

Формула Коши, записанная в виде

$$\mathbf{y}(x) = K(x,0)\,\mathbf{y}_0 + \int\limits_0^x K(y,\tau)\,\vec{\varphi}(\tau)\,d\tau, \tag{15.18}$$

задает решение системы (15.17), где функция Коши определяется так: $K(x,x) = E$, а $K(x,\tau)$ — решение соответствующей однородной системы (15.14) по x. Предполагается, что система записана в матричном виде.

В нашем случае можно взять $K(x,\tau) = U(x-\tau)$, где $U(x)$ — фундаментальная система решений (15.16), и по формуле (15.18) имеем:

$$\mathbf{y}(x) = U(x)\,\mathbf{y}_0 + \int\limits_0^x U(x-\tau)\,\vec{\varphi}(\mathbf{y}(\tau))\,d\tau. \tag{15.19}$$

Выше было показано, что для компонент фундаментальной системы выполняются оценки

$$|U_i^j(x-\tau)| \leqslant Me^{-\gamma(x-\tau)};$$

на основании этой оценки из формулы (15.19) получим в покомпонентной записи:

$$|y_i(x)| \leqslant Me^{-\gamma x}\|\mathbf{y}(0)\| + \int\limits_0^x Me^{-\gamma x}e^{\gamma\tau}\|\vec{\varphi}(\mathbf{y}(\tau))\|d\tau. \tag{15.20}$$

Суммируя неравенство (15.20) по всем индексам i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, получим следующую оценку

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leqslant nMe^{-\gamma x}\|\mathbf{y}(0)\| + nMe^{-\gamma x}\int\limits_0^x e^{\gamma\tau}\|\vec{\varphi}\|d\tau. \tag{15.21}$$

Для того, чтобы доказать асимптотическую устойчивость решения, необходимо доказать, что решение $\mathbf{y}(x)$ имеет следующие свойства:

(1) продолжаемо на полубесконечный интервал $(0, \infty)$;
(2) устойчиво по Ляпунову;
(3) стремится к нулю $\mathbf{y}(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Из всего этого будет следовать асимптотическая устойчивость.

1. Докажем неограниченную продолжаемость решения.

По условию теоремы

$$\lim_{\|\mathbf{y}\| \to 0} \frac{\|\vec{\varphi}(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|} = 0.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $\delta_1 > 0$, такое что

$$\|\vec{\varphi}(\mathbf{y})\| < \varepsilon_1 \|\mathbf{y}\|, \tag{15.22}$$

если $\|\mathbf{y}\| < \delta_1$.

В качестве оценки $\|\vec{\varphi}(\mathbf{y})\|$ в неравенстве (15.21) возьмем $\varepsilon_1 = \dfrac{\gamma}{2Mn}$ и по выбранному ε_1 найдем δ_1.

Выберем начальные данные так, чтобы выполнялось неравенство $2Mn\|\mathbf{y}(0)\| < \delta_1$, то есть

$$\|\mathbf{y}(0)\| < \frac{\delta_1}{2Mn}. \tag{15.23}$$

Докажем, что при таком ограничении на начальные данные условие $\|\mathbf{y}(x)\| < \delta_1$ выполнено при любом x.

Действительно, из выбора начальных условий следует, что поскольку мы взяли $M > 1$, то

$$\|\mathbf{y}(0)\| < \delta_1;$$

из соображений непрерывности это неравенство выполняется также при малых $x > 0$. Надо доказать, что оно выполнено при любом x.

Докажем это от противного. Пусть неравенство $\|\mathbf{y}(x)\| < \delta_1$ нарушается в первый раз при $x = x_1$: $\|\mathbf{y}(x_1)\| = \delta_1$. Рассмотрим оценку (15.21) при $x = x_1$. Подставим в правую часть оценку сверху на начальные значения $\|\mathbf{y}(0)\|$ (15.23) и $e^{-\gamma x} \leqslant 1$

(в первое слагаемое) и оценку сверху для $\|\vec{\varphi}\,(\mathbf{y})\,\|$ (15.22) (во второе слагаемое) с учетом того, что $\varepsilon_1 = \dfrac{\gamma}{2nM}$ и $\|\mathbf{y}\| < \delta_1$ при $x < x_1$. Получим

$$\|\mathbf{y}\,(x_1)\,\| < \frac{\delta_1}{2} + nMe^{-\gamma x_1}\int\limits_0^{x_1} e^{\gamma\tau}\frac{\gamma}{2nM}\cdot\delta_1 d\tau =$$

$$= \frac{\delta_1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\gamma x_1}\delta_1\gamma\frac{e^{\gamma x_1}-1}{\gamma}\,.$$

Если в правой части опустить -1, то правая часть только увеличится и мы получим строгое неравенство

$$\|\mathbf{y}\,(x_1)\,\| < \delta_1,$$

а мы предположили, что $\|\mathbf{y}\,(x_1)\,\| = \delta_1$.

Таким образом, получено противоречие и если мы рассматриваем бесконечную по x область $\|\mathbf{y}\,(x)\,\| < \delta_1$ с границей в виде $\|\mathbf{y}\,(x)\,\| = \delta_1$, то решение $\mathbf{y}\,(x)$ не может достичь этой границы и существует для любого x: $0 \leqslant x < \infty$. Следовательно, продолжаемость решения доказана.

2. Докажем устойчивость решения по Ляпунову. Умножим обе части неравенства (15.21) на $e^{\gamma x}$. Получим:

$$e^{\gamma x}\|\mathbf{y}\,(x)\,\| \leqslant nM\|\mathbf{y}\,(0)\,\| + nM\int\limits_0^{x} e^{\gamma\tau}\|\vec{\varphi}\,(\mathbf{y}\,(\tau))\,\|d\tau.$$

Эта оценка усилится, если под знаком интеграла мы заменим $\|\vec{\varphi}\,(\mathbf{y})\,\|$ на бо́льшую величину $\varepsilon_1\|\mathbf{y}\|$, где $\varepsilon_1 = \dfrac{\gamma}{2Mn}$. В результате получим неравенство

$$e^{\gamma x}\|\mathbf{y}\,(x)\,\| \leqslant nM\|\mathbf{y}\,(0)\,\| + nM\int\limits_0^{x} e^{\gamma\tau}\frac{\gamma}{2Mn}\|\mathbf{y}\,(\tau)\,\|d\tau.$$

Введем обозначение: $V(x) = e^{\gamma x}\|\mathbf{y}(x)\|$, тогда предыдущее неравенство запишется в виде

$$V(x) \leqslant nM\|\mathbf{y}(0)\| + \int\limits_0^x \frac{\gamma}{2} V(\tau)\, d\tau.$$

По лемме об интегральном неравенстве (14.5) (лемма Гронуолла) получим

$$V(x) \leqslant nM\|\mathbf{y}(0)\| e^{\frac{\gamma}{2}x}$$

и, подставляя в это неравенство $V(x) = e^{\gamma x}\|\mathbf{y}(x)\|$, получаем

$$\|\mathbf{y}(x)\| e^{\gamma x} \leqslant nM\|\mathbf{y}(0)\| e^{\frac{\gamma}{2}x},$$

откуда

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leqslant nM\|\mathbf{y}(0)\| e^{-\frac{\gamma}{2}x}. \tag{15.24}$$

Из неравенства (15.24) следует устойчивость решения по Ляпунову.

Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем в качестве $\delta = \delta(\varepsilon)$ следующее значение

$$\delta(\varepsilon) = \min\left(\frac{\varepsilon}{nM}, \frac{\delta_1}{2nM}\right),$$

тогда любое решение с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству $\|\mathbf{y}(0)\| \leqslant \delta(\varepsilon)$, в соответствии с (15.24) будет удовлетворять ограничению $\|\mathbf{y}(x)\| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, нулевое решение $\mathbf{y}(x) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову, и, кроме того, $\|\mathbf{y}(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$ (это следует из (15.24)), то есть решение асимптотически устойчиво.

16. Особые точки на плоскости

Система называется автономной (динамической), если ее правая часть не зависит от аргумента. Рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x;y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x;y). \end{cases} \tag{16.1}$$

Будем предполагать,что $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют непрерывные производные по x и y достаточно высоких порядков. Таким образом, условия теоремы существования и единственности для системы (16.1) выполнены. Тогда для любой точки (x_0, y_0) существует решение $(x(t), y(t))$, такое, что $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Переменную t можно рассматривать как параметр. Система (16.1) не изменяется при замене переменной $t = \tilde{t} + \tau$. Тогда, если перейти на фазовую плоскость (x, y), решение $(x(t),\ y(t))$ определяет на фазовой плоскости кривую, заданную параметрически.

Траектории системы (16.1) (проекции интегральных кривых) на фазовой плоскости совпадают с интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\ . \tag{16.2}$$

В любой точке система (16.1) определяет касательный вектор к полю направлений: $(\dot{x}\,(t)\,, \dot{y}\,(t)) = (P, Q)\,$. Если же в какой-то точке $x = a$, $y = b$ выполнены условия $P\,(a, b) = 0$, $Q\,(a, b) = 0$, то касательный вектор к полю направлений не определен и решение системы (16.1) вырождается в точку $x = a$, $y = b$ (так называемую *точку покоя*).

В этом случае правая часть (16.2) не определена. Для упрощения записи предположим, что $a = 0$ и $b = 0$. Это можно сделать, положив $\tilde{x} = x - a$, $\tilde{y} = y - b$.

Разложим $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ по степеням $x,\ y$; в окрестности точки $(0,0)$ получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q'_x(0,0)x+Q'_y(0,0)y+O(x^2+y^2)}{P'_x(0,0)x+P'_y(0,0)y+O(x^2+y^2)}\ . \tag{16.3}$$

Это уравнение не определяет $\dfrac{dy}{dx}$ при $x=0,\ y=0$. Однако, если

$$\begin{vmatrix} Q'_x(0,0) & Q'_y(0,0) \\ P'_x(0,0) & P'_y(0,0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то начало координат будет неустранимой точкой разрыва для $\dfrac{dy}{dx}$, то есть будет особой точкой для дифференциального уравнения (16.2).

Как было показано в 1922 г. Перроном, члены $O(x^2+y^2)$ не оказывают влияния, если действительные части обеих корней уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda-Q'_y(0,0) & -Q'_x(0,0) \\ -P'_y(0,0) & \lambda-P'_x(0,0) \end{vmatrix} = 0$$

отличны от нуля.

16.1. Классификация особых точек на плоскости

Чтобы представить себе поведение интегральных кривых системы (16.1) в окрестности точки покоя, изучим поведение интегральных линий системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{a_{21}x+a_{22}y}{a_{11}x+a_{12}y}, \tag{16.4}$$

для которой

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Эта система получается из (16.1) в результате линеаризации после разложения правых частей системы (16.1) в ряд Тейлора в точке покоя $(0,\ 0)$ и отбрасывания членов высшего порядка малости (см. (16.3)). Коэффициенты a_{ij} равны значениям соответствующих частных производных функций $P(x;y)$ и $Q(x,y)$ в точке покоя.

Из последнего уравнения ($\det A \neq 0$) следует, что точка $(0,0)$ — единственная особая точка системы (16.4). Если же $\det A = 0$, то эти уравнения пропорциональны: $\dfrac{dy}{dx} = \lambda$, следовательно $y = \lambda x + C$ и траектории имеют вид изображенный на рис. 16.1.

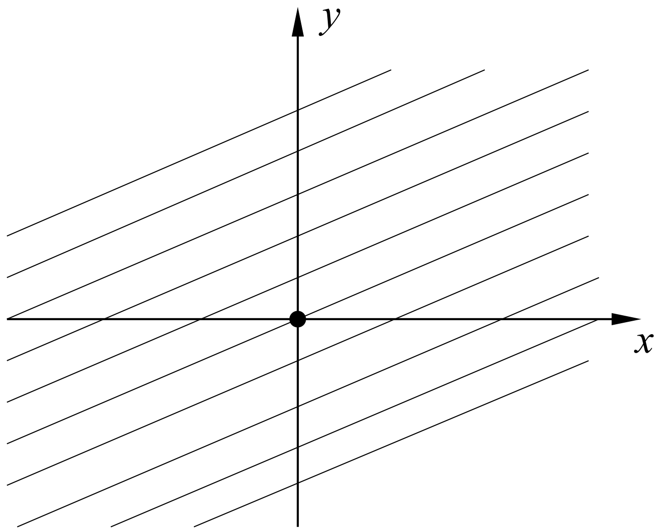

Рис. 16.1. *Траектории решения в случае пропорциональности уравнений в системе (16.4)*

Перепишем систему (16.4) в векторной форме:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Сделаем линейное преобразование, где C — некоторая невырожденная матрица ($\det C \neq 0$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = C^{-1}AC\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \equiv B\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \qquad (16.5)$$

Здесь $B = C^{-1}AC$, следовательно матрицы A и B — подобны, и, следовательно, собственные значения матриц A и B равны.

Если $A\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}$, то $\mathbf{h}$ — собственный вектор. Таким образом, если $\mathbf{h}$ — собственный вектор матрицы A, то $C^{-1}\mathbf{h}$ — собственный вектор матрицы B, так как $BC^{-1}\mathbf{h} = C^{-1}A\mathbf{h} = C^{-1}\lambda\mathbf{h} = \lambda C^{-1}\mathbf{h}$.

Рассмотрим возможные ситуации с собственными значениями матрицы A (решениями уравнения $|A - \lambda E| = 0$).

1) Собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2$ матрицы A – вещественные, различные, одного знака.

Собственные векторы матрицы A — это решения системы

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = \lambda x_0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 = \lambda y_0, \end{cases}$$

где λ равно собственному значению λ_1 или λ_2.

Здесь радиус-вектор (x_0, y_0) определяет координаты точки $M(x_0, y_0)$, лежащей на прямой, проходящей через начало координат O и точку M (рис. 16.2), поле направлений в которой определяется системой дифференциальных уравнений (16.4) и имеет вид $(a_{11}x_0 + a_{12}y_0,\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0)$.

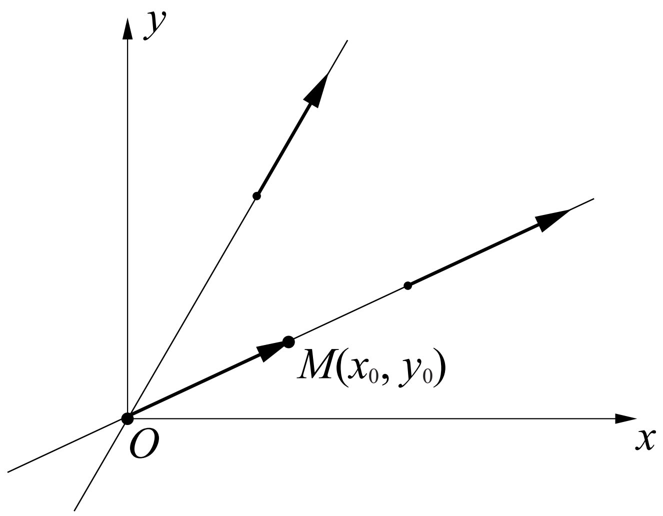

Рис. 16.2. *Собственные векторы в случае вещественных различных собственных значений*

Равенство $A\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}$ означает, что радиус-вектор (x_0, y_0) коллинеарен полю направлений $(a_{11}x_0 + a_{12}y_0,\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0)$, так как его компоненты пропорциональны направляющим векторам поля направлений.

Пусть корню λ_1 соответствует собственный вектор $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, а корню λ_2 соответствует $\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ (рис. 16.2).

Таким образом, имеются две интегральные кривые, которые представляют собой прямые линии, так как на них поле направлений коллинеарно радиус-вектору и, следовательно, радиус-вектор в любой точке (x_0, y_0) касается поля направлений, поэтому такая прямая есть решение.

Геометрически такое рассуждение безупречно, однако, если взять уравнение такой прямой в простейшем виде

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0t\\ y_0t\end{pmatrix}$$

и подставить в систему (16.4), мы не получим тождества, поскольку

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_0t\\ y_0t\end{pmatrix} \neq A\begin{pmatrix}x_0t\\ y_0t\end{pmatrix}.$$

Это связано с тем, что на самом деле, поскольку поле направлений системы (16.4) не определено в начале координат, интегральными кривыми этой системы являются не прямые линии, а полупрямые, исходящие из начала координат:

$L_1 : \left\{\begin{array}{l} x = \alpha e^{\lambda_1 t}, \\ y = \beta e^{\lambda_1 t}, \end{array}\right.$ или, в других обозначениях, $L : \left\{\begin{array}{l} x = x_0 e^{\lambda t}, \\ y = y_0 e^{\lambda t}, \end{array}\right.$

Представленные так решения системы (16.4) как раз и являются полупрямыми, асимптотически входящими в начало координат при $t \to -\infty$ (когда $\lambda > 0$) или $t \to +\infty$ (когда $\lambda < 0$).

Две полупрямые с одним и тем же λ образуют прямую линию, направляющий вектор которой коллинеарен собственному вектору матрицы A. Пусть уравнения этих прямых имеют вид: первая прямая $ax + by = 0$, вторая прямая $cx + dy = 0$.

Сделаем невырожденное преобразование, введя новые переменные ξ, η, связанные с этими прямыми

$$\begin{cases} \xi = ax + by, \\ \eta = cx + dy, \end{cases} \tag{16.6}$$

то есть новые оси координат направлены вдоль этих прямых.

Заметим, что мы не конкретизируем значения постоянных a, b, c, d в преобразовании (16.6) и не вычисляем их как функции коэффициентов матрицы A, а постараемся выписать систему уравнений, получающуюся в результате преобразования, исходя из свойств решения в новых переменных ξ, η.

Сделав преобразование (16.6), получим систему уравнений, которая в векторном виде записывается как

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

В силу (16.5) матрица B подобна матрице A и имеет те же собственные значения λ_1, λ_2, что и матрица A в системе (16.4). В результате преобразования (16.6) уравнение для ξ, η принимает вид:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{b_{11}\xi + b_{12}\eta}{b_{21}\xi + b_{22}\eta}\ . \tag{16.7}$$

Поскольку новые оси координат $\xi = 0$ и $\eta = 0$ являются решениями уравнения (16.7), то $b_{12} = 0$ и $b_{21} = 0$. Таким образом, получаем преобразованное уравнение

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{b_{11}\xi}{b_{22}\eta} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как собственные значения B равны λ_1 и λ_2, то

$$b_{11} = \lambda_1, \qquad b_{22} = \lambda_2.$$

Уравнение в переменных ξ, η имеет вид

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_1 \xi}{\lambda_2 \eta},$$

причем отношение $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$, так как λ_1 и λ_2 одного знака.

Разделяя переменные и интегрируя, найдем решение последнего уравнения:

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{d\eta}{\eta} \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \xi = C|\eta|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \\ \eta = 0. \end{array} \right.$$

Пусть для определенности $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. В этом случае все интегральные кривые проходят через начало координат и все они, кроме интегральной линии $\eta = 0$, касаются в начале координат оси η, так как

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \pm\frac{\lambda_1}{\lambda_2} C|\eta|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1}\Bigg|_{\xi=0} = 0.$$

Это особая точка типа *узел* (рис. 16.3). Через узел проходит бесконечно много интегральных кривых.

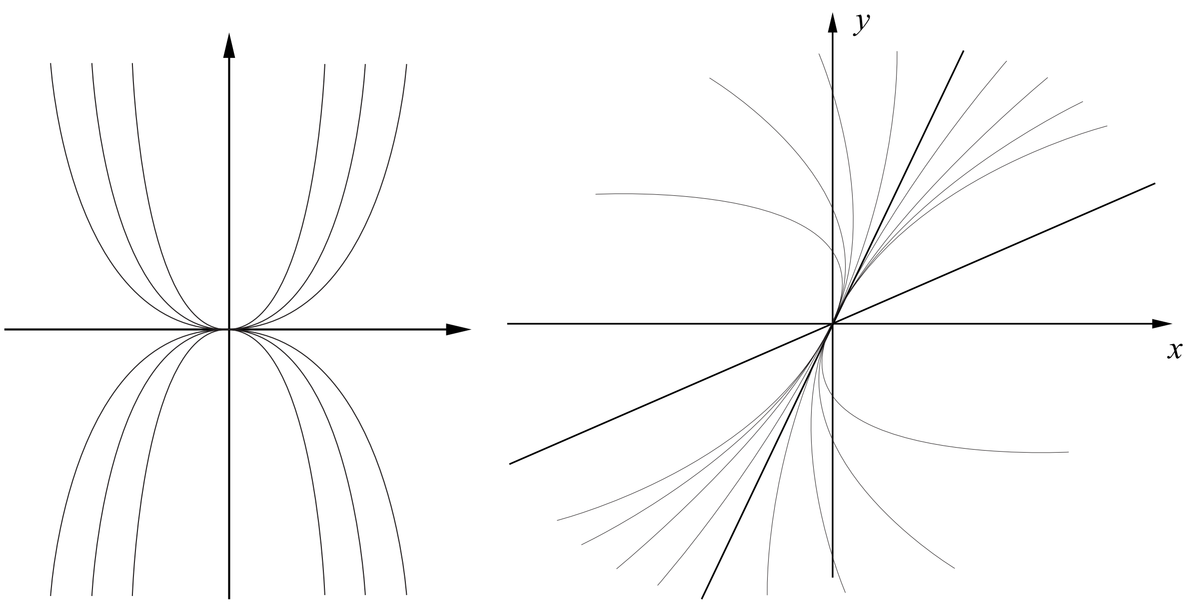

Рис. 16.3. *Особая точка типа узел*

2) Собственные значения λ_1, λ_2 — вещественные, разных знаков. Интегрируя полученное уравнение, получим решение, как и в случае узла

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_1 \xi}{\lambda_2 \eta} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = C|\eta|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \\ \eta = 0, \end{cases}$$

однако в этой ситуации $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = -k < 0$.

Поэтому мы имеем только две интегральных кривых, проходящих через начало координат, а именно $\eta = 0$ и $\xi = 0$ (при $C = 0$). Остальные интегральные кривые не проходят через особую точку, а имеют вид гипербол, у которых в плоскости (ξ, η) оси координат, а в плоскости (x, y) — прямые, заданные собственными векторами, — являются асимптотами (рис. 16.4). Эти прямые называются *сепаратрисами*.

Это особая точка типа *седло* или *седловая особая точка* (рис. 16.4).

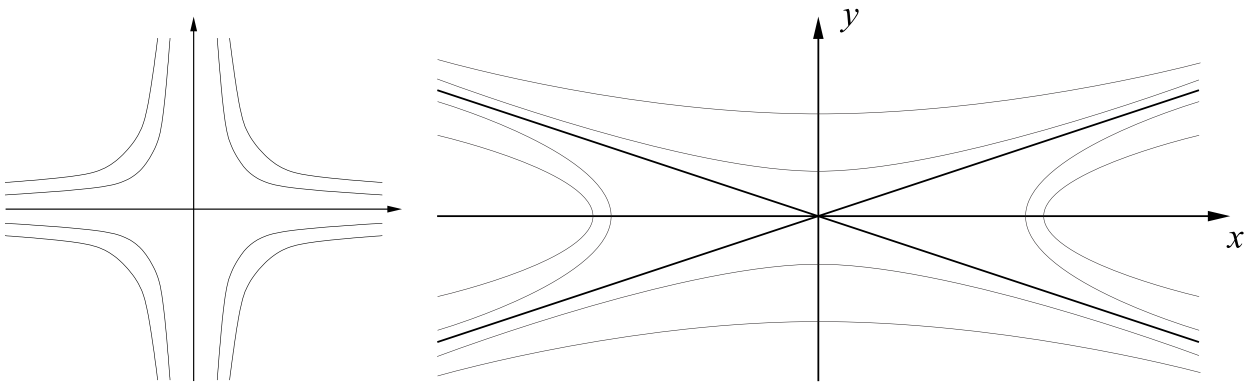

Рис. 16.4. *Особая точка типа седло в плоскостях* (ξ, η) *и* (x, y)

3) Кратные собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае есть только одно направление радиуса-вектора, при котором он коллинеарен векторному полю. Собственный вектор равен (α, β), уравнение прямой, коллинеарной собственному вектору и являющейся интегральной кривой, имеет вид $ax + by = 0$.

Сделаем преобразование B, имеющее вид:

$$\begin{cases} \xi = ax + by, \\ \eta = (\text{любое, такое что } \det(B) \neq 0). \end{cases}$$

В результате преобразования B уравнение (16.4) запишется как

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{b_{11}\xi + b_{12}\eta}{b_{21}\xi + b_{22}\eta}\,.$$

Поскольку $\xi = 0$ — решение, то $b_{12} = 0$ и матрица B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы B равны λ, следовательно $b_{11} = b_{22} = \lambda$, и в результате

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ b_{21} & \lambda \end{pmatrix}.$$

В переменных ξ, η уравнение принимает вид:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda\xi}{\lambda\eta + b_{21}\xi}\,.$$

Разберем возможные ситуации:

a) $b_{21} = 0$; тогда

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\xi}{\eta} \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \xi = C\eta, \\ \eta = 0, \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,. \tag{16.8}$$

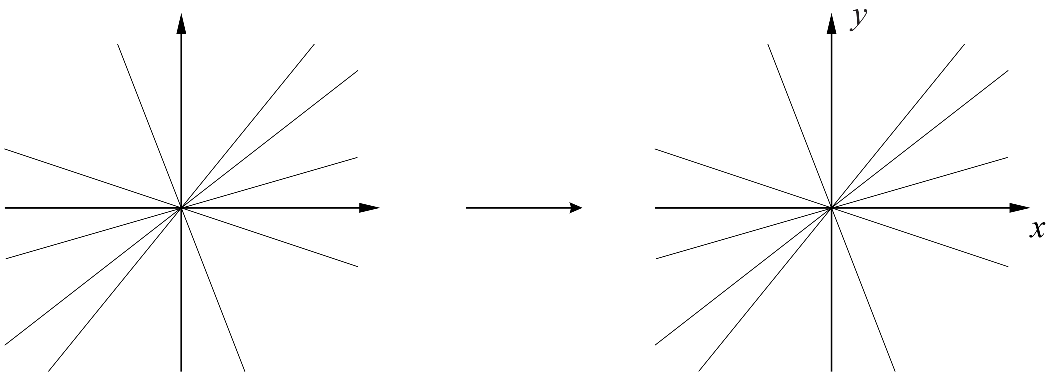

Рис. 16.5. *Дикритический узел*

Это особая точка — *дикритический узел* (или *вырожденный узел*) (рис. 16.5). Все интегральные кривые входят в нее с определенным направлением касательных, по при этом угловые коэффициенты касательных принимают любые значения. Подробно уравнение (16.8) было исследовано в главе 2.

b) $b_{21} \neq 0$; тогда

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda\xi}{\lambda\eta + b_{21}\xi}\ .$$

Проанализируем это дифференциальное уравнение:

(1) Очевидно, что $\xi = 0$ — решение этого уравнения.

(2) Пусть теперь $\xi \neq 0$, тогда можно решить данное дифференциальное уравнение относительно функции $\eta = \eta(\xi)$, переписав его в виде

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} + \frac{b_{21}}{\lambda}\ .$$

Получили линейное неоднородное уравнение для $\eta(\xi)$. Найдем его решение. Для этого вначале решим однородное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi}\ .$$

Интегрируя это уравнения, получим $\eta = C\xi$ — общее решение однородного уравнения. Применяя метод вариации произвольной постоянной, ищем решение в виде $\eta = C(\xi)\xi$.

Получим: $C'\xi = \dfrac{b_{21}}{\lambda}$, значит $C = \dfrac{b_{21}}{\lambda}\ln|\xi| + C_1$ и общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$\eta = C\xi + \frac{b_{21}}{\lambda}\xi\ln|\xi|.$$

Это особая точка называется *особый узел* (рис. 16.6).

У особого узла все интегральные кривые имеют одну и ту же касательную — ось $O\eta$. Особый узел отличается от обычного

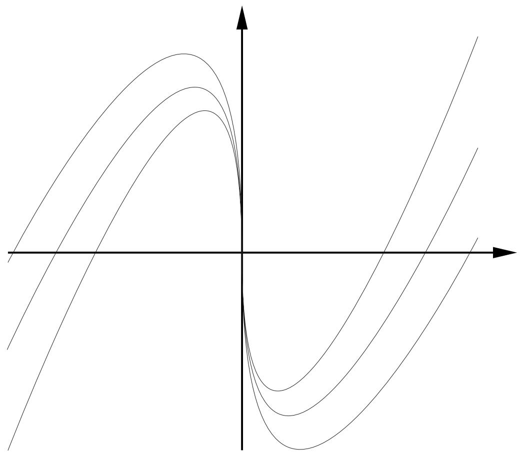

Рис. 16.6. *Особый узел*

узла, исследованного в случае (1) тем, что там одна интегральная кривая имела касательную, отличную от всех остальных и была трансверсальна всем интегральным кривым. В плоскости (x, y) особый узел имеет вид, изображенный на рис. 16.7.

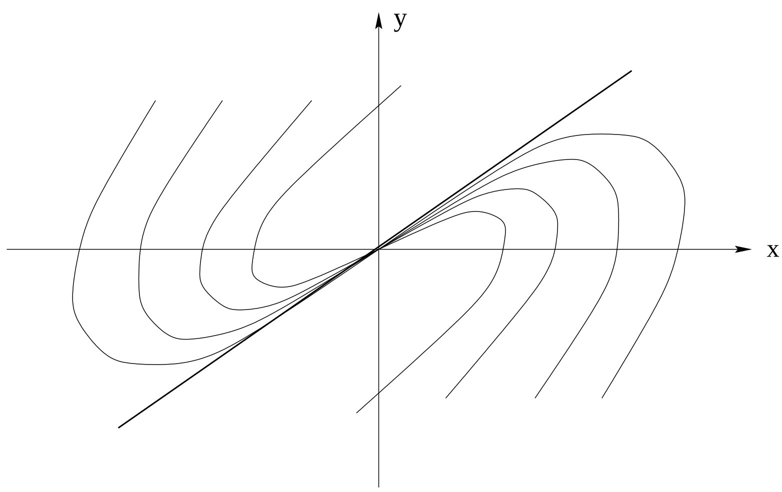

Рис. 16.7. *Особый узел в плоскости (x, y)*

4) <u>Комплексные собственные значения</u> $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$.

Собственному значению λ_1 соответствует собственный вектор $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$, а собственному значению λ_2 — собственный вектор $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$, где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно независимы (можно доказать от противного).

Сделаем замену

$$\begin{cases} x = u_1\xi + v_1\eta, \\ y = u_2\xi + v_2\eta. \end{cases} \tag{16.9}$$

В плоскости (ξ, η) вектору $(1, 0)$ соответствует вектор $\mathbf{u}$ в плоскости (x, y), а, соответственно, вектору $(0, 1)$ соответствует вектор $\mathbf{v}$. Найдем вид уравнения после преобразования (16.9). Пусть преобразованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = b_{11}\xi + b_{12}\eta, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = b_{21}\xi + b_{22}\eta. \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Матрица B имеет такие же собственные числа $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, как и матрица A, а ее собственные векторы имеют вид $(1, 0)$ и $(0, 1)$. По свойству собственных векторов $B\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}$ имеем:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = (\alpha + i\beta) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \tag{16.10}$$

поскольку выражения в квадратных скобках также есть собственные векторы. Можно сказать и иначе: это комплексное уравнение с суммой векторов $(1, 0) + i(0, 1)$ равносильно двум отдельным уравнениям для векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

Запишем (16.10) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} b_{11} + ib_{12} = \alpha + i\beta, \\ b_{21} + ib_{22} = -\beta + i\alpha, \end{cases}$$

отсюда $b_{11} = \alpha,\ b_{12} = \beta,\ b_{21} = -\beta,\ b_{22} = \alpha.$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \alpha\xi + \beta\eta, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\beta\xi + \alpha\eta. \end{cases}$$

Перейдем от этой системы к одному уравнению

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{-\beta\xi + \alpha\eta},$$

которое является однородным уравнением.

Проинтегрируем это уравнение. Преобразуем его по свойству пропорций

$$(-\beta\xi + \alpha\eta)d\xi = (\alpha\xi + \beta\eta)d\eta$$

и соберем слагаемые с коэффициентами α и β

$$\alpha(\eta d\xi - \xi d\eta) = \beta(\xi d\xi + \eta d\eta).$$

Умножим обе части последнего уравнения на интегрирующий множитель $\dfrac{1}{\xi^2 + \eta^2}$. Получим

$$\alpha\frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\beta d(\xi^2 + \eta^2)}{2(\xi^2 + \eta^2)},$$

откуда

$$\alpha d \operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta} = \frac{\beta}{2} d\ln(\xi^2 + \eta^2).$$

Интегрируя это равенство, потенцируя его и меняя правую и левую части местами, получаем

$$\xi^2 + \eta^2 = C^2 e^{\frac{2\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}}. \qquad (16.11)$$

Перейдем к полярным координатам. Для этого сделаем замену переменных $\xi = r\sin\varphi,\ \eta = r\cos\varphi$. В полярных координатах r, φ интеграл (16.11) принимает вид

$$r^2 = C^2 e^{\frac{2\alpha}{\beta}\varphi},$$

или, после извлечения корня, получаем общее решение в случае комплексных собственных значений $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$r = Ce^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}. \qquad (16.12)$$

Полученное общее решение (16.12) имеет качественно различный характер в двух случаях:

(1) Если $\alpha = 0$, то мы имеем общее решение в виде $r = C$, то есть интегральные кривые в плоскости (ξ, η) есть концентрические окружности с центром в начале координат, а в плоскости (x, y) мы имеем семейство эллипсов. Через саму особую точку не проходит ни одной интегральной кривой.

Это особая точка типа *центр* (рис. 16.8).

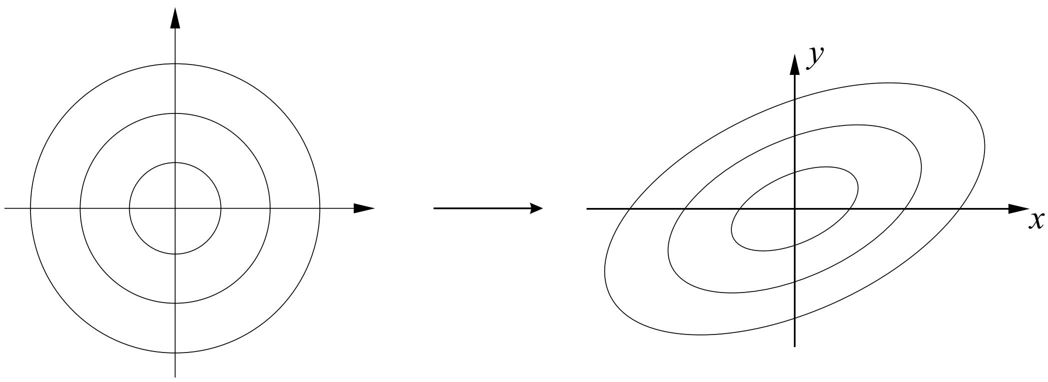

Рис. 16.8. *Особая точка типа центр*

(2) Если $\alpha \neq 0$, то общее решение $r = Ce^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$ представляет собой семейство логарифмических спиралей в плоскости (x, y) с асимптотической точкой в начале координат. Все интегральные кривые приближаются к началу координат, но без определенной предельной касательной. Они делают около точки $(0, 0)$ бесконечное количество оборотов, "наматываясь" на начало координат.

Это особая точка типа *фокус* (рис. 16.9).

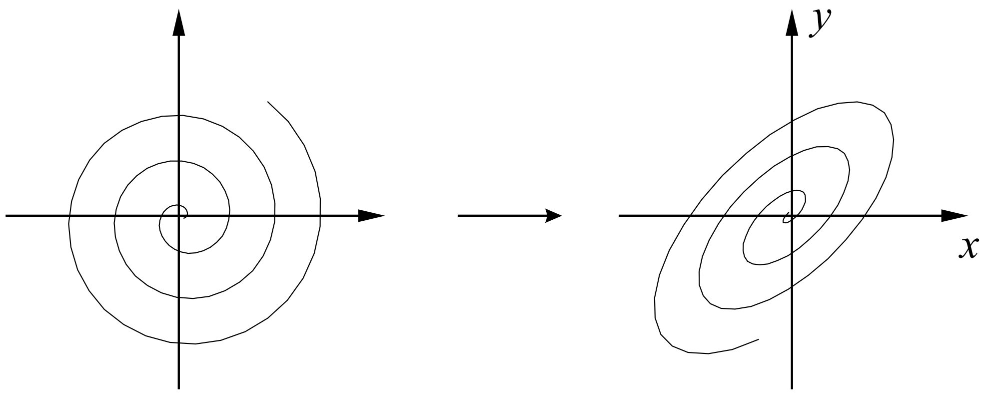

Рис. 16.9. *Особая точка типа фокус*

16.2. Связь типа особой точки с устойчивостью стационарного решения $x = 0, y = 0$.

Рассмотрим возможные типы особых точек и выясним связь типа особой точки с устойчивостью стационарного решения $x = 0$, $y = 0$.

1. Особая точка — *узел*. В этом случае собственные значения матрицы A — λ_1, λ_2 — вещественные, одного знака.

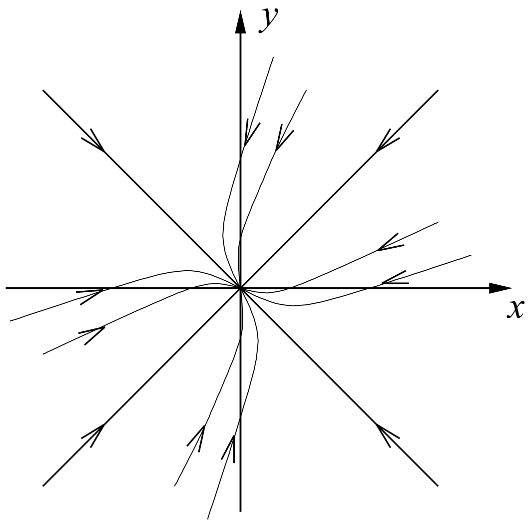

Рис. 16.10. *Особая точка — устойчивый узел*

Возможны две ситуации:

(1) Если собственные значения отрицательные $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, то решение асимптотически устойчиво (по теореме Ляпунова). В плоскости (x, y) интегральные кривые в параметрической форму описываются следующей системой уравнений

$$\begin{cases} x = \gamma_{11}e^{\lambda_1 t} + \gamma_{12}e^{\lambda_2 t} \\ y = \gamma_{21}e^{\lambda_1 t} + \gamma_{22}e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

и имеют вид, изображенный на рис. 16.10. Все интегральные кривые входят в особую точку при $t \to +\infty$.

(2) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то решение неустойчиво (по теореме Ляпунова о неустойчивости).

2. Особая точка — *седло.* В этом случае собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A — вещественные, разных знаков, поэтому по одной из сепаратрис при росте t движение происходит в направлении начала координат, а по другой — из начала координат (рис. 16.11). Движение вдоль остальных кривых при росте t происходит в соответствии со стрелками на рис. 16.11.

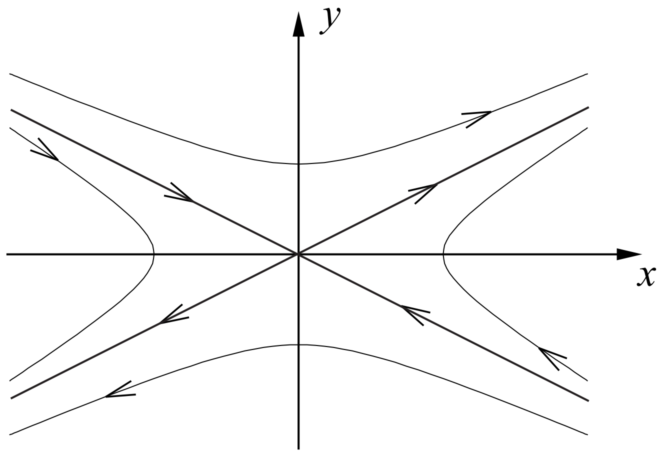

Рис. 16.11. *Особая точка седло — неустойчивое положение равновесия*

Если взять любую ε-окрестность седловой особой точки, то всегда существует решение, которое выходит из нее, так как λ_1, λ_2 — разных знаков. Поэтому положение равновесия в седловой особой точке — неустойчивое.

3. Кратные собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

a) Дикритический узел: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\cdot$

Имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x, \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda y, \end{cases}$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t}, \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Если $\lambda < 0$, то решение асимптотически устойчиво. Если $\lambda > 0$, то решение неустойчиво. Интегральные кривые представляют собой полупрямые, начинающиеся (при $\lambda > 0$) или заканчивающиеся (при $\lambda < 0$) в начале координат, причем эти полупрямые имеют произвольных наклон (рис. 16.5).

b) Особый узел.

Решение в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x = (\gamma_{11}t + \delta_{11})e^{\lambda t}, \\ y = (\gamma_{11}t + \delta_{11})e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Если $\lambda < 0$, то решение асимптотически устойчиво, так что $x \to 0$ и $y \to 0$ при $t \to \infty$, а если $\lambda > 0$ — то решение неустойчиво и $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $t \to \infty$ (рис. 16.12).

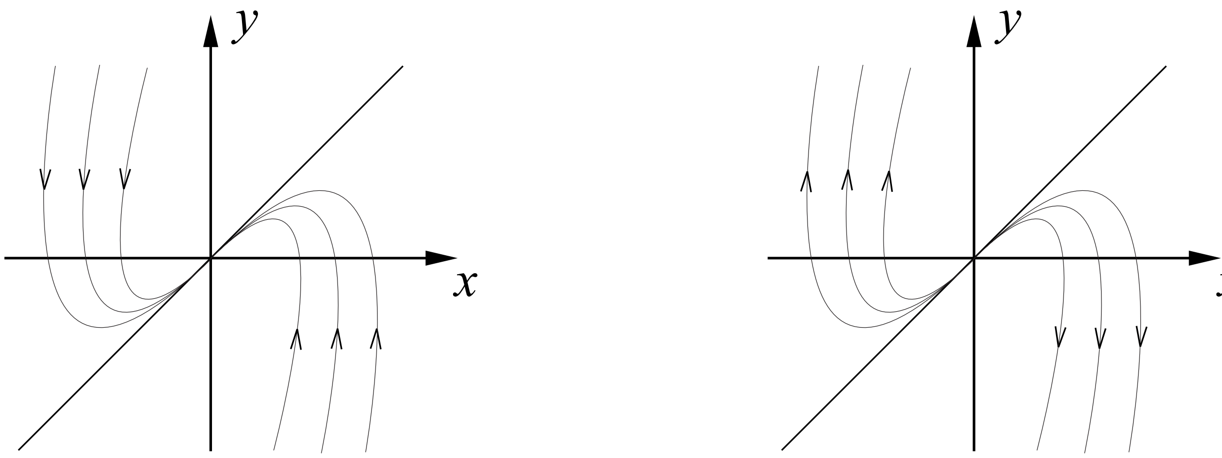

Рис. 16.12. *Особый узел — устойчивое и неустойчивое положения равновесия ($\lambda < 0$ и $\lambda > 0$)*

4. Комплексные собственные значения $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

a) Особая точка — *центр*: $\alpha = 0$.

В этом случае общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = (\gamma_{11}\cos\beta t + \gamma_{12}\sin\beta t), \\ y(t) = (\gamma_{21}\cos\beta t + \gamma_{22}\sin\beta t), \end{cases}$$

и имеет место так называемая нейтральная устойчивость: движение происходит по эллипсам с центром в начале координат (рис. 16.13).

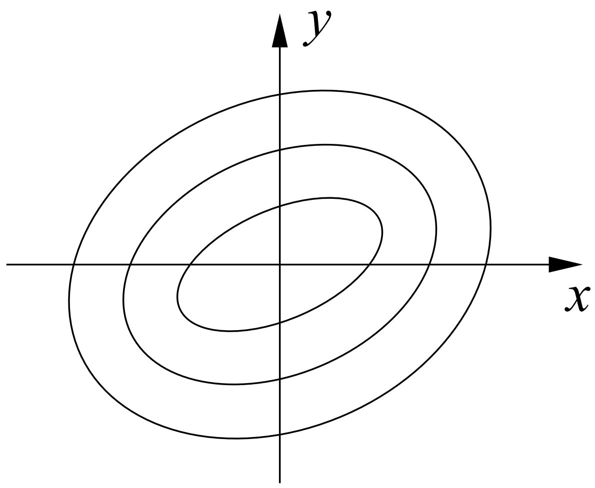

Рис. 16.13. *Особая точка центр: нейтральная устойчивость*

b) Особая точка — *фокус*: $\alpha \neq 0$ (рис. 16.14).
В этом случае общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = (\gamma_{11} \cos \beta t + \gamma_{12} \sin \beta t) e^{\alpha t}, \\ y(t) = (\gamma_{21} \cos \beta t + \gamma_{22} \sin \beta t) e^{\alpha t}. \end{cases}$$

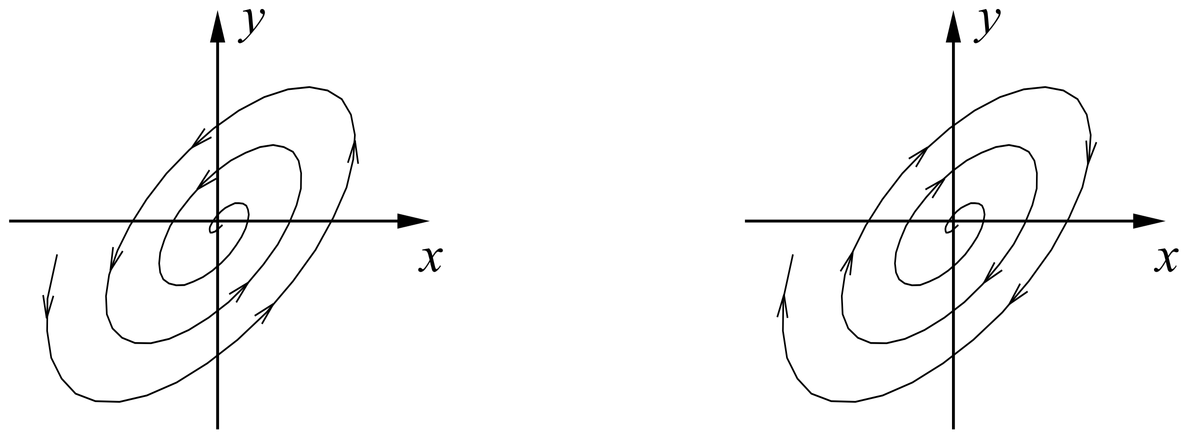

Рис. 16.14. *Фокус: устойчивое и неустойчивое положения равновесия*

Если $\alpha < 0$, то решение асимптотически устойчиво, при $\alpha > 0$ — неустойчиво (левая и правая картинки на рис. 16.14, соответственно).

17. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений

17.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Во многих случаях приближенное решение дифференциального уравнения может быть представлено в виде степенного ряда, сходящегося на некотором интервале. Коэффициенты этого ряда можно найти методом, основанным на применении ряда Тейлора. Этот метод пригоден для приближенного определения частного решения дифференциальных уравнений любого порядка (задача Коши):

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \tag{17.1}$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{17.2}$$

Подставляя заданные начальные условия в дифференциальное уравнение, получим соотношение

$$F(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}) = 0,$$

из которого можно определить значение n-й производной

$$y_0^{(n)} = f(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \tag{17.3}$$

в точке $x = x_0$.

Дифференцируя уравнение (17.1), в котором $y = y(x)$, получим уравнение, которое, помимо $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, будет содержать производную $(n+1)$-го порядка $y^{(n+1)}$:

$$F_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, y^{(n+1)}) = 0. \tag{17.4}$$

Подставляя в (17.4) значения начальных условий (17.2) и значение $y_0^{(n)}$ из (17.3), получим уравнение

$$F_1(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}) = 0,$$

из которого можно найти значение $y_0^{(n+1)}$.

Продолжая этот процесс дальше, можно найти значения всех производных высших порядков в точке $x = x_0$.

Решение $y = y(x)$ исходного дифференциального уравнения (17.1) можно представить в виде ряда (ряда Тейлора):

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\frac{x - x_0}{1!} + y''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots \tag{17.5}$$
$$\ldots + y^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Подставив в уравнение (17.5) значения производных в точке x_0 из начальных условий и полученные из описанных выше преобразований, найдем приближенное частное решение исходного дифференциального уравнения в виде:

$$y(x) = y_0 + y_0'\frac{x - x_0}{1!} + y_0''\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + y_0^{(n)}\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \ldots, \tag{17.6}$$

точность которого зависит от условий сходимости полученного степенного ряда и количества членов ряда, учитываемых при расчетах.

Пример 1. *Решить задачу Коши методом интегрирования с помощью рядов (записать первые семь членов ряда)*

$$\begin{cases} y'' = 2xy' + 4y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{17.7}$$

Решение: Найдем последовательным дифференцированием исходного дифференциального уравнения все производные до седьмого порядка включительно, при этом каждый раз подставляя значения найденных в точке x_0 предыдущих производных.

Из (17.7) следует: $y'' = 2xy' + 4y \to y_0'' = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 0.$

Дифференцируя (17.7), получаем

$$y''' = 2y' + 2xy'' + 4y' = 6y' + 2xy'' \to y_0''' = 6\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 = 6. \quad (17.8)$$

Дифференцируя (17.8), получаем

$$y^{IV} = 6y'' + 2y'' + 2xy''' = 8y'' + 2xy''' \to y_0^{IV} = 8\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 6 = 0. \quad (17.9)$$

Дифференцируя (17.9), получаем

$$y^{V} = 8y''' + 2y''' + 2xy^{IV} = 10y''' + 2xy^{IV} \to y_0^{V} = 10\cdot 6 + 2\cdot 0\cdot 0 = 60. \quad (17.10)$$

Аналогично можно найти: $y_0^{VI} = 0, y_0^{VII} = 840$ и т.д.

Поскольку в рассмотренном случае $x_0 = 0$, получаем разложение решения в ряд Маклорена:

$$y = \frac{1}{1!}x + \frac{6}{3!}x^3 + \frac{60}{5!}x^5 + \frac{840}{7!}x^7 + \ldots$$

или окончательно

$$y = x + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots.$$

В некоторых случаях можно искать решение в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами $C_0, C_1, C_2, \ldots,$ $C_n, \ldots$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n.$$

Неопределенные коэффициенты C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ могут быть найдены путем подстановки ряда в исходное дифференциальное уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях бинома $(x - x_0)$ в левой и правой частях полученного равенства.

Проиллюстрируем нахождение решения в виде степенного ряда методом неопределенных коэффициентов на следующем важном уравнении, которое называется *уравнением Бесселя нулевого порядка.*

Пример 2. *Найти общее решение уравнения Бесселя нулевого порядка:*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0. \tag{17.11}$$

Отметим, что при $x = 0$ уравнение Бесселя имеет особенность и при $x = 0$ теорема существования и единственности неприменима.

Решение будем искать с помощью степенных рядов:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

Продифференцируем этот ряд почленно. Получим следующие выражения для производных:

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots + nc_nx^{n-1} + \ldots$$

$$y'' = 2c_2 + 2\cdot 3c_3x + 3\cdot 4c_4x^2 + \ldots + (n-1)nc_nx^{n-2} + \ldots$$

Подставим эти выражения в дифференциальное уравнение (17.11):

$$\begin{gathered}(2c_2 + 2\cdot 3c_3x + 3\cdot 4c_4x^2 + \ldots + (n-1)nc_nx^{n-2} + \ldots)+\\ +\frac{1}{x}(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots + nc_nx^{n-1} + \ldots)+\\ +(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots) = 0.\end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при всех степенях x, получим систему уравнений для определения $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots$.

Начнем с члена содержащего $\dfrac{1}{x}$. Коэффициентом при нем служит c_1, поэтому $c_1 = 0$, так как в правой части членов с $\dfrac{1}{x}$ нет. Отсюда видно, что решение в виде ряда существует, только если $c_1 = y' \,\big|_{x=0} = 0$ и поэтому задавать y' произвольно при $x = 0$ нельзя.

Выпишем коэффициенты при нечетных степенях: x, x^3, x^5 и т.д.:

$$2 \cdot 3c_3 + 3c_3 + c_1 = 0,$$
$$4 \cdot 5c_5 + 5c_5 + c_3 = 0,$$
$$6 \cdot 7c_7 + 5c_7 + c_5 = 0.$$

Так как $c_1 = 0$, то для всех коэффициентов с нечетными индексами получим

$$c_3 = 0, \quad c_5 = 0, \quad \ldots, \quad c_{2k+1} = 0.$$

Перейдем к нахождению коэффициентов с четными индексами. Для этого рассмотрим коэффициенты при $x^0, x^2, x^4, \ldots$

$$2 \cdot c_2 + 2c_2 + c_0 = 0,$$
$$3 \cdot 4c_4 + 4c_4 + c_2 = 0,$$
$$5 \cdot 6c_6 + 4c_6 + c_4 = 0.$$

Напишем рекуррентную формулу:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_{n+2} + c_n = 0$$

или:

$$(n+2)^2 c_{n+2} + c_n = 0.$$

Выразим все коэффициенты через c_0:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}; \quad c_2 = -\frac{c^2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 4^2}; \quad c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 4^2 6^2};$$
$$c_{2n} = (-1)^n = \frac{c_0}{2^2 4^2 \ldots (2n)^2} = (-1)^n \frac{c_0}{2^n (n!)^2} \cdot$$

Таким образом, решение уравнения Бесселя нулевого порядка имеет вид:

$$y(x) = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \ldots \right. \tag{17.12}$$
$$\left. \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} + \ldots \right) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \cdot$$

Полагая в (17.12) $c_0 = 1$, получим функцию $y_1(x) = J_0(x)$, которая называется *функцией Бесселя первого рода нулевого порядка.* Она представляет собой частное решение уравнения Бесселя нулевого порядка (17.11), удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0$.

При помощи признака Даламбера можно показать, что ряд (17.12) сходится при любом x.

Второе частное решение представляет собой обобщенный степенной ряд и обязательно содержит $\ln(x - x_0)$. Его следует искать в виде

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k + \gamma_{-1} y_1 \ln(x - x_0), \quad (17.13)$$

где $\gamma_{-1} \neq 0$, а ρ_2 находится из так называемого *определяющего уравнения* в особой точке $x = x_0$ (в случае уравнения Бесселя при $x = 0$):

$$\rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0 = 0. \quad (17.14)$$

Коэффициенты p_0 и q_0 этого уравнения можно найти по формулам

$$p_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) p(x), \qquad q_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x), \quad (17.15)$$

которые в случае уравнения Бесселя ($p(x) = \frac{1}{x},\ q(x) = 1$) дают $p_0 = 1$ и $q_0 = 0$, т.е. $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и, согласно формуле (17.13), второе частное решение следует искать в виде

$$y_2(x) = \gamma_{-1} J_0(x) \ln x + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots, \quad (17.16)$$

причем c_0 можно считать равным нулю, так как этого всегда можно добиться, взяв вместо y_2 соответствующую линейную комбинацию $y_2(x)$ и $J_0(x)$.

Будем искать $y_2(x)$ в виде (17.16). Тогда, полагая $c_0 = 0$ и $\gamma_{-1} = 1$, после применения метода неопределенных коэффициентов найдем

$$y_2(x) = K_0(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \tag{17.17}$$

$$+\frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \ldots$$

Функция $K_0(x)$ называется *функцией Бесселя нулевого порядка второго рода.*

Общее решение уравнения (17.11) можно записать в виде

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 K_0(x). \tag{17.18}$$

Функции Бесселя играют важную роль в уравнениях математической физики.

17.2. Численные методы решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений

Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений находится по тем же самым формулам, что и для одного уравнения, если система записана в векторной форме.

17.2.1. Метод Эйлера

Рассмотрим решение методом Эйлера простейшей системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями, заданными при $x = x_0$ (задача

Коши):

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = \psi(x, y, z), \\ \quad y\,\big|_{x=x_0} = y_0, \\ \quad z\,\big|_{x=x_0} = z_0. \end{cases} \tag{17.19}$$

Введем следующие обозначения

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}\,\big|_{x=x_0} = \begin{pmatrix} y\,\big|_{x=x_0} \\ z\,\big|_{x=x_0} \end{pmatrix}, \ \mathbf{y_0} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \tag{17.20}$$

Тогда система и начальные условия запишутся в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}\,\big|_{x=x_0} = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{17.21}$$

который полностью совпадает с задачей Коши (4.19) с заменой скалярных функций на вектор-функции.

В частности, формулы Эйлера (4.22) для одного уравнения сохраняют свой вид для системы (17.21) с заменой скалярных функций на вектор-функции

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n + h, \\ &\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{17.22}$$

Заметим, что уравнения высших порядков всегда могут быть сведены к системе уравнений первого порядка. Например, задача Коши для уравнения второго порядка

$$\begin{cases} y'' = \psi(x, y, y'), \\ \quad y(x_0) = y_0, \\ \quad y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{17.23}$$

сводится к задаче (17.19) с помощью замены переменной $y' = z$:

$$\begin{cases} y' = z \equiv \varphi(x, y, z), \\ z' = \psi(x, y, z), \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = y'_0. \end{cases} \tag{17.24}$$

Система (17.24) является частным случаем системы (17.19) при $\varphi(x, y, z) \equiv z$.

Алгоритм численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений методом Эйлера полностью совпадает с алгоритмом решения для одного уравнения.

Вычисления производят по формулам (17.22), которые в развернутом виде запишутся следующим образом

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h, \\ y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, z_n), \\ z_{n+1} = z_n + h\psi(x_n, y_n, z_n). \end{cases} \tag{17.25}$$

17.2.2. Методы Рунге-Кутта для системы.

Схемы Рунге-Кутта легко распространяются на случай систем дифференциальных уравнений, как и в случае метода Эйлера, при помощи формальной замены y и $f(x, y)$ на $\mathbf{y}$ и $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ соответственно.

Для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (17.19) покомпонентная запись схемы Рунге-Кутта четвертого порядка имеет вид

$$x_{n+1} = x_n + h, \tag{17.26}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\, h\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}\, h\,(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4),$$

где

$$
\begin{aligned}
&k_1 = \varphi(x_n, y_n, z_n), \quad q_1 = \psi(x_n, y_n, z_n),\\
&k_2 = \varphi(x_n + \frac{1}{2}\,h, y_n + \frac{1}{2}\,hk_1, z_n + \frac{1}{2}\,hq_1),\\
&q_2 = \psi(x_n + \frac{1}{2}\,h, y_n + \frac{1}{2}\,hk_1, z_n + \frac{1}{2}\,hq_1),\\
&k_3 = \varphi(x_n + \frac{1}{2}\,h, y_n + \frac{1}{2}\,hk_2, z_n + \frac{1}{2}\,hq_2),\\
&q_3 = \psi(x_n + \frac{1}{2}\,h, y_n + \frac{1}{2}\,hk_2, z_n + \frac{1}{2}\,hq_2),\\
&k_4 = \varphi(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hq_3),\\
&q_4 = \psi(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hq_3)\,.
\end{aligned}
\tag{17.27}
$$

Именно эта схема (разумеется, записанная для системы произвольного числа уравнений) лежит в основе большинства стандартных программ численного решения задачи Коши на ЭВМ.

Вопросы к экзамену по курсу “ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ”

1. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: общее решение, метод изоклин. Простейшие обыкновенные дифференциальные уравнения и методы их интегрирования (уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные).

2. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

3. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особое решение. Огибающая.

4. Теорема существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Метод последовательных приближений (метод Пикара).

5. Сеточные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и нормальных систем. Сходимость метода.

6. Метод Рунге-Кутта решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Численное решение краевой задачи для уравнения второго порядка методом прогонки.

8. Решение линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений n-ого порядка. Теорема о структуре общего решения. Формула Остроградского-Лиувилля.

9. Теорема о структуре неоднородного линейного обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных.

10. Линейные однородные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

11. Применение обыкновенных дифференциальных уравнений для исследования задач о механических и электрических колебаниях.

12. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Теоремы Штурма, критерий Кнезера.

13. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Нормальная форма системы. Векторная запись. Теорема существования и единственности.

14. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Общая теория однородных систем. Теорема о структуре общего решения. Формула Остроградского-Лиувилля.

15. Линейные неоднородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Формула Коши.

16. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Теорема о структуре общего решения.

17. Нормальные однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Эквивалентные системы. Теорема Ляпунова.

18. Теорема о зависимости решения обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров. Лемма Гронуолла. Дифференцируемость решения по параметру.

19. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Лемма Ляпунова.

20. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости линейной автономной системы и о неустойчивости.

21. Особые точки системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений: узел, седло.

22. Особые точки системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений: дикритический узел, особый узел, фокус, центр. Связь между типом особой точки и устойчивостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.

2. Зубков В. Г., Ляховский В. А., Мартыненко А. И., Миносцев В. Б. Под редакцией В. Б. Миносцева. Курс высшей математики. Ч. 2 — М.: МГИУ, 2004.

3. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.

4. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1970.

5. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.

6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.

7. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Интеграл-Пресс, 1998.

8. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Т. 2. — М.: Высшая школа, 1978.

Оглавление

Учебное издание

Евгений Александрович Пушкарь

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор *К.В. Шмат*
Оформление обложки *А.М. Гришиной*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.002624.03.06 от 30.03.2006

Подписано в печать 09.02.2007
Формат бум. 60x84/16. Изд. № 1-01/07
Усл. печ. л. 16,0 Уч.-изд. л. 17,0 Тираж 1000 Заказ № 164

Издательство МГИУ, 115280, Москва, Автозаводская, 16

По вопросам приобретения продукции
издательства МГИУ обращаться по адресу:
115280, Москва, Автозаводская, 16
www.izdat.msiu.ru; e-mail: izdat@msiu.ru; тел.: (495) 677-23-15

Отпечатано в типографии издательства МГИУ

ISBN 978-5-2760-1098-4

9 785276 010984