МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

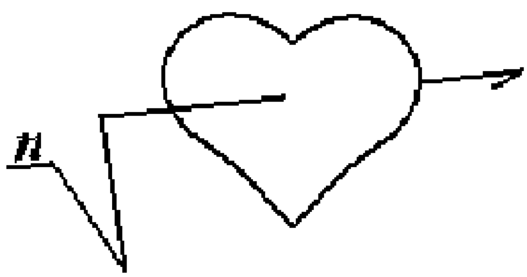
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

И.Ю. Попов

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2008

Попов И.Ю. Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики / Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. 214 с.

Пособие предназначено для подготовки к студенческим математическим олимпиадам. Оно охватывает основные разделы курса высшей математики, содержит краткие теоретические сведения и набор задач с решениями. Предназначено студентам всех специальностей и преподавателям.

Рекомендовано к печати Советом естественнонаучного факультета (протокол N 5 от 24 декабря 2008 г.)

Введение

Данное пособие является переработанным и дополненным вариантом ранее изданной методички, поэтому я позволил себе повторить с небольшими изменениями вступительные слова из прежнего издания. Пособие не совсем обычно, поэтому я осмелюсь предпослать формальному изложению не столь формальное введение, да простят меня за это члены мудрых методических комиссий. Предполагаемые “Методические указания” предназначены не для всех студентов. Они никому не помогут написать контрольную работу или выполнить типовой расчёт, не будут полезны при подготовки к экзамену. Это пособие написано для студентов влюбленных, а точнее влюбленных в математику. Оно посвящено студенческим олимпиадам. И хотя подобные олимпиады проводятся уже около тридцати лет, соответствующие задачники можно пересчитать по пальцам, в то время как книг, посвященным школьным олимпиадам, существует огромное количество. Известно, что задачники делятся на “Собственно задачники” и “решебники” (к которым, в частности относятся все методички). Данное пособие относится к “решебникам”. Прошедшее тридцатилетие студенческих олимпиад позволило накопить определённый опыт решения олимпиадных задач. Поэтому и возникла мысль систематизировать эту информацию, выделить типовые приемы. Сначала эта идея вызвала у автора бурный протест. Ведь олимпиадные задачи тем и хороши, что они нестандартные, и их решение – это не перебор типовых приемов, а создание чего-то нового, своего, и в этом олимпиадные задачи сродни искусству, а как можно подходить с циркулем и линейкой к “Мадонне” Рафаэля?!

Однако затем автор переменил свое мнение. Действительно, любой достаточно большой массив нестандартных задач можно проклассифицировать, выделив в нем типичные черты. Попытка сделать это и предпринята в данных методических указаниях.

Автор относится к олимпиадам с искренним уважением и любовью и поэтому ни в коей мере не стремится систематизировать решение олимпиадных задач и тем самым, лишить читателя удовольствия найти своё красивое решение трудной задачи.

К этому пособию надо относиться, как к дебютам в шахматах. Действительно, разработка теории дебютов вовсе не убила искусство шахматной игры, а просто позволила быстро, “не изобретая велосипед”, проходить начальную стадию партии. И это пособие – попытка заложить камень в основание здания “теории дебютов в решении олимпиадных задач”. Поэтому и разбиение задачника на разделы осуществлено не по стандартным программным темам, а по идеям в решении задач.

Автор просто попытался понять, как он сам находит решение, и отобразить это на бумаге. Когда математик сталкивается с какой-то задачей, скажем, доказать неравенство, у него сразу возникает мысль: “Надо попробовать то-то, вон то, и, пожалуй, еще это”. И только если этот набор дебютных идей не помогает, он начинает изобретать что-то новое. Вот эти-то группы идей (т.е. что надо испробовать в первую очередь) и приведены в начальных разделах задачника. Но, конечно же, далеко не во всех приведенных задачах эти идеи срабатывают, ибо хорошая олимпиадная задача не укладывается в эти каноны, и в этом-то и состоит её прелесть. В началах разделов приведены также некоторые теоретические сведения. Это совсем не обязательно самые важные теоремы или формулы, а просто те, которые чаще всего встречаются в олимпиадных задачах.

Источники предполагаемых задач различны. Приведены практически все задачи студенческих олимпиад Ленинграда за 1978-2008 г.г., ряд задач Международных, Всесоюзных и Всероссийских олимпиад, олимпиад различных вузов (ЛИТМО, ЛПИ, ЛЭТИ, ЛГУ, МГУ), часть задач взята из труднодоступных задачников, некоторые из математического фольклора, наконец, есть задачи, принадлежащие автору (такое тоже иногда бывает). Большинство задач дано с решениями или указаниями. Отсутствие решений у ряда задач объясняется несколькими причинами. Основная – это ограниченность объёма рукописи. Возможно, решение не приводится, потому что задача слишком проста (для олимпиады, конечно), а возможно, наоборот, автор не смог придумать достаточно симпатичного решения задачи, достойного демонстрации в “приличном математическом обществе”, к которому, несомненно, принадлежат читатели этого пособия. Поэтому автор будет признателен читателям, которые предложат свои решения.

За помощь в создании этого пособия автор благодарен сотрудникам кафедры высшей математики ЛИТМО – СПбГУ ИТМО, председателям жюри городских студенческих олимпиад Натансону Г.И. и Широкову Н.А., студентам (большинство из которых уже перешло в категорию ученых): А.Киселеву, В.Баренбауму, Д.Шкловскому, Ю.Гугелю, В.Мызникову, А.Солунину, С.Устинову, С.Перковской, А.Марцинковскому, И.Певзнеру, А.Попову, С.Попову, А.Кулявику (Польша), И.Тодорову (Болгария), К.Плюснину, М.Дубиновскому, А.Станкевичу, А Курасову, Е.Тесовской, Л.Гортинской, Р.Сатюкову, Д.Павлову и многим другим, предложившим автору интересные задачи или красивые решения. Следует также отметить великолепный и чрезвычайно полезный ежегодный семинар по подготовке к студенческим олимпиадам, организованный в ВИТУ В.Д.Лукьяновым. Интересные идеи по использованию функциональных и геометрических методов при решении уравнений развивает И.И.Чучаев в Саранске (некоторые из них отражены в последнем параграфе данного пособия). Огромную помощь в подготовке последнего издания оказал А.Б.Плаченов.

§ 1. Пределы.

Перечислим основные приемы, используемые при вычислении пределов. Если имеется неопределенность типа $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$ *(неопределенность* $0\bullet\infty$ *сводится к перечисленным:* $0\bullet\infty = 0\bullet\frac{1}{0} = \infty\bullet\frac{1}{\infty}$*):*

а) вынести в числителе и знаменателе множители, порождающие неопределенность, и сократить их;

б) применить правило Лопиталя (возможно, несколько раз):
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *при этом из существования предела отношения производных следует существование предела отношения функций, но не наоборот;*

в) использовать формулу Тейлора до первого несокращающегося слагаемого:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_N,$$

$$r_N = \frac{f^{(N+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1} = o((x-x_0)^N),\ 0<\theta<1.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!} + r_N,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2N+1},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2N},$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n} + r_N,$$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{N}\frac{a(a-1)(a-2)...(a-n+1)x^n}{n!} + r_N,$$

г) использовать замену бесконечно малых (и бесконечно больших) на эквивалентные:

$$\alpha\sim\gamma,\ \beta\sim\delta : \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0}\frac{\gamma}{\delta},$$

$$\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \ln\alpha = \ln\beta + o(1), \quad \alpha = \beta + o(\beta),$$

$$\alpha \sim \sin\alpha \sim tg\alpha \sim arctg\alpha \sim \arcsin\alpha \sim e^{\alpha}-1 \sim \ln(1+\alpha) \sim \frac{1}{\mu}((1+\alpha)^{\mu}-1).$$

$$1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2},\ \log_b(1+\alpha) \sim \alpha\log_b e,\ b^{\alpha}-1 \sim \alpha\ln b.$$

Для непрерывной функции: $f(x+o(1)) = f(x)+o(1)$, *однако, если имеется последовательность* x_n, *и нет равномерной непрерывности функции на множестве, где принимает значения последовательность, подобное равенство для всех точек написать нельзя:* $f(x_n+o(1)) \neq f(x_n)+o(1)$.

Иногда проще найти не $\lim x_n$, *а* $\lim f(x_n)$ *для некоторой непрерывной* f.

Для неопределенности типа 1^{∞}: $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)(f(x)-1)}$.

Для неопределенности типа $1^{\infty}, 0^{\infty}$ *или* ∞^0: $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$.

Задача о пределе рекуррентно заданной последовательности $(a_{n+1}=f(a_n))$ *обычно сводится к доказательству существования предела и его вычислению. Для первого этапа чаще всего используют две теоремы:*

а) если последовательность монотонно убывает (возрастает) и ограничена снизу (сверху), то она имеет предел, ограниченный той же константой;

б) если имеются две последовательности b_n, c_n, *сходящиеся к одному пределу* a, *такие, что* $b_n \le a_n \le c_n$, *то* $a_n \to a$.

Для вычисления предела $a = \lim a_n$ *можно перейти к пределу в рекуррентном соотношении и найти* a *из уравнения* $a = f(a)$.

В рекуррентной последовательности бывает полезна замена $\beta_n = a_n - a$, *где* a *- предполагаемый предел (чтобы потом доказывать стремление к нулю(что технически проще).*

Если предел содержит большие суммы или произведения, то можно расписать и попробовать сокращать (часто помогает разложение рациональной дроби на простейшие). Связь суммы и произведения:

$$\ln\prod_n y_n = \sum_n \ln y_n.$$

Аналог правила Лопиталя для последовательностей – теорема Штольца: пусть $x_n \to \infty$, $x_{n+1} > x_n$, *тогда* $\lim\frac{y_n}{x_n} = \lim\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$, *причем из существования второго предела следует существование первого, но не наоборот.*

Если предел содержит параметр, то надо выяснить, при каких его значениях нет неопределенности (и найти предел), при каких значениях какой тип неопределенности (и найти соответствующие пределы).

Вместо того, чтобы искать предел, иногда легче доказать, что он равен чему-то (если удается догадаться, чему; наиболее часто встречается *ответ* 0*). Чтобы доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$ *можно рассмотреть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и доказать, что он сходится, что приводит к требуемому утверждению. Можно попробовать перейти от последовательности* a_n *к последовательности* $b_n = a_n - a_{n-1}$ *(или* $b_n = f(a_n) - f(a_{n-1})$*).*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (\lim_{n\to\infty} f(a_n)).$$

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right).$

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{r=0}^{n-1}\dfrac{1}{n^2+r^2}.$

1.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{r=0}^{n-1}\sqrt{n^2-r^2}.$

1.4. $y_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\prod\limits_{p=1}^{n}(n+p)};\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ?$

1.5. $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n};\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

1.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+11+111+\ldots+\overbrace{111\ldots1}^{n\ \text{единиц}}}{10^n} = ?$

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = ?$

1.8. К дуге окружности проведены касательные в ее концах и в середине. Пусть Δ - площадь треугольника, образованного хордой дуги и двумя касательными к ее концам, а Δ' - площадь треугольника, образованного тремя касательными. К чему стремится дробь $\dfrac{\Delta}{\Delta'}$, когда длина дуги стремится к 0 ?

1.9. Пусть S - площадь области $D = \{(x;y) : x^2 + y^2 \le R^2; xy \le 1\}$ Найти $\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{S(R)}{R^2}.$

1.10. Обязана ли сходиться неотрицательная последовательность, подчиненная условию: для любого натурального k: $x_{k+1} \le \dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}$?

1.11. Пусть $p_0(x)=x,\ p_k(x)=p_{k-1}\left(x(1-x)\right),\ (k=1,2,\ldots)$. Показать, что при положительных x последовательность $kp_k\left(\frac{x}{k}\right)$ сходится и найти ее предел.

1.12. Даны две последовательности y_n, x_n: $x_{n+1}=ax_n+by_n,\ y_{n+1}=cy_n$, $n=0,1,\ldots$. При каких a, b, c для любых x_0, y_0: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0;\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$.

1.13. Найти предел последовательности

$$a_n=\frac{n^2}{\sqrt[n]{(n^2+1^2)(n^2+2^2)\ldots(n^2+n^2)}}.$$

1.14. Найти предел последовательности

$$u_1=1;\ u_2=\sqrt{2}-1;\ u_3=(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt{2}-1);\ldots;\ u_n=\prod_{\substack{m>k\\ m,k=1}}^{n}(\sqrt[m]{m}-\sqrt[k]{k}).$$

1.15. Верно ли, что $f(x)\underset{x\to\infty}{\to}0\ \Rightarrow\ f'(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$?

1.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{n^2}\cos\frac{k\pi}{n}$.

1.17. Пусть $P_n(x)=a_{n,0}+a_{n,1}x+\ldots+a_{n,m}x^m$ последовательность многочленов, степень которых не превосходит фиксированного числа m. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\left(P_n(x)\right)^2dx=0$, то для любого $k,\ 0\le k\le m\ \lim\limits_{n\to\infty}a_{n,k}=0$.

1.18. Найти все тройки положительных чисел a,b,c такие, что существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n$ и найти этот предел.

1.19. Пусть $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}$, где p - фиксированное число. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$, монотонно убывая, стремится к числу e тогда и только тогда, когда $p\ge\frac{1}{2}$.

1.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2(x)dx}{1+\cos^2(nx)}$.

1.21. Определить предельное положение графика кривой $\frac{1}{|x|^n}+\frac{1}{|y|^n}=1$ при $n\to\infty$.

1.22. При каких $x\in[0;\pi]$ последовательность композиций $\sin x,\ \cos(\sin x),\ \sin(\cos(\sin x)),\ldots$ сходится.

1.23. Показать, что разность последовательностей $a_n=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\cos(\sin n)}$; $b_n=n\cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sin n\right)$ сходится и найти ее предел.

1.24. Исследовать на сходимость последовательность $a_0=0;\ a_1=1;\ldots$ если при $k\geq 1$ ее члены связаны зависимостью $a_{k+1}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}a_i$.

1.25. Построить график функции $y=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ при $x\geq 0$.

1.26. $\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^1(bx+a(1-x))^t\,dx\right)^{\frac{1}{t}}$, если $0<a<b$.

1.27. Найти предел $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k^{1/2}}{n^{3/2}}}-n\right)$.

1.28. Существует ли такая ограниченная последовательность $\{x_n\}$, что $x_{n+1}-x_n\to 0$, но $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)$ не существует?

1.29. $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)$.

1.30. $\lim_{t\to\infty}t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2}$.

1.31. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{ij}{i+j}$.

1.32. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}}$; $n\in\mathrm{N}$.

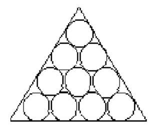
1.33. $\lim_{n\to\infty}\left(n^3\int_n^{2n}\frac{x}{1+x^5}\,dx\right)$.

1.34. Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ - ограниченная последовательность натуральных чисел, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}=1$. Найти $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

1.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^n}{2^{(2^n)}}$.

1.36. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}1\operatorname{tg}2+\operatorname{tg}2\operatorname{tg}3+\ldots+\operatorname{tg}(n-1)\operatorname{tg}n}{\operatorname{tg}n-n\operatorname{tg}1}$.

1.37. В равносторонний треугольник вписаны окружности так, как показано на рисунке. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S}$, где S - площадь треугольника, а S_n - сумма площадей всех n кругов.



1.38. $x_1>0,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{1+nx_n^2}$. Доказать, что существует предел $\lim x_n$ и найти его.

1.39. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}[kx]$. Здесь $[\alpha]$ – целая часть числа α.

1.40. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}}$.

1.41.В последовательности $\{a_n\}$ $a_1=3,\ a_n=a_{n-1}-\dfrac{1}{(n-1)\cdot n\cdot n!},\quad n=2,3...$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

1.42. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...2n}$.

1.43. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\ldots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$.

1.44.Пусть функция $f(x)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем для всех $x\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $\left|f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)\right|\le 1$. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

1.45. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot k!$

1.46. Пусть x - вещественное число. Пусть $a_{i0}=\dfrac{x}{2^i},\ a_{i,j+1}=a_{i,j}{}^2+2a_{i,j}$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n,n}$.

1.47. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(\dfrac{xdx}{arctg(nx)}\right)\right)^n$.

§ 2. Корни

Приведем некоторые сведения, полезные при решении задач о корнях функций или уравнений.

Определение. x_0 *- корень кратности* n *функции* $f(x)$, *если* $f(x_0)=f'(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$, *а* $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

Примечание. *У полинома* $P(x)$ x_0 *- корень кратности* n, *если* $P(x)=(x-x_0)^n Q(x)$, $Q(x_0)\neq 0$.

Простой корень: $f(x_0)=0$, $f'(x_0)\neq 0$.

Если x_0 *- корень кратности* n *для* $f(x)$, *то* x_0 *- корень кратности* $(n-1)$ *для* $f'(x)$.

Весьма полезны следующие теоремы.

Теорема Ролля. *Если* f *непрерывна на* $[a,b]$ *и дифференцируема на* (a,b) *и* $f(a)=f(b)$, *то существует* $c\in(a;b)$ *такая, что* $f'(c)=0$.

Теорема Лагранжа. *Если* f *непрерывна на* $[a,b]$ *и дифференцируема на* (a,b), *то существует* $c\in(a;b)$ *такая, что* $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Замечание. Если в задаче исследуется с помощью теорем Ролля или Лагранжа определитель с параметром, то обычно надо рассматривать как функцию весь определитель.

Если в задаче требуется доказать существование корня $f(x)$ *на* $(a;b)$, *то можно идти следующими путями.*

1) *Доказать, что* $f(x)$ *непрерывна и на концах отрезка имеет разные знаки (монотонность* $f(x)$ *влечет единственность корня);*
2) *Найти первообразную* F $(F'=f)$ *и доказать, что* $F(a)=F(b)$;
3) *Графически (может помочь поведение* $f(x)$ *вблизи асимптот).*

Если требуется доказать, что корень удовлетворяет некоторому условию, то обычно удобнее всего предположить, что условие не выполнено (выполнено противоположное) и получить противоречие.

В задачах о корнях полиномов полезна

Теорема Виета: *Корни* $x_1,x_2,...,x_n$: $x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$.

$$x_1+x_2+...+x_n=-a_1;$$
$$x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n=a_2;$$
$$\ldots$$
$$x_1x_2\cdot...\cdot x_n=(-1)^n a_n.$$

Попробовать использовать сведения из теории функций комплексной переменной (например, вычеты или теорему Лиувилля о том, что аналитическая и ограниченная на всей комплексной плоскости функция есть постоянная).

В задачах о корнях решений линейных дифференциальных уравнений полезна теорема Штурма и ее следствия.

Теорема Штурма. *Если* x_0, x_1 *— два последовательных корня некоторого решения* $y(x)$ *уравнения* $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, $p(x), q(x)$ *— непрерывные функции, то всякое другое линейно независимое с* $y(x)$ *решение того же уравнения имеет в точности один корень между* x_0 *и* x_1 *(заметим, что совпадать корни линейно независимых решений не могут).*

Теорема. *Если* $q(x)$ *— непрерывная функция на конечном замкнутом промежутке* $[a,b]$ *и* $q(x)\le 0$ *на* $[a,b]$, *то все решения уравнения* $y''+q(x)y=0$ *имеют не более одного корня на* $[a,b]$.

Пусть имеется два уравнения

$$y''+q_1(x)y=0,\ z''+q_2(x)z=0,\ q_1\ne q_2.$$

Тогда справедлива

Теорема. *Если* $q_1(x)\le q_2(x)$ *на* $[a,b]$, *то между каждыми двумя корнями любого решения* $y(x)$ *первого уравнения находится по крайней мере один корень любого решения* $z(x)$ *второго уравнения.*

2.1. Функции $u, v\in C^1$. $u'v-uv'\ne 0$. Доказать, что тогда между любыми двумя корнями уравнения $v=0$ лежит корень уравнения $u=0$ и наоборот.

2.2. Доказать, что если $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$, то уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ имеет, по крайней мере, один корень между 0 и 1.

2.3. Если $f(x)$, $\varphi(x)$, $\phi(x)$ непрерывны в $[a;b]$ и дифференцируемы в $(a;b)$, то существует точка $\xi\in(a;b)$ такая, что

$$\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \phi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \phi(b) \\ f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \phi'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

2.4. Если $\varphi(x)+\varphi'(x)\to a$ при $x\to\infty$, то $\varphi(x)\to a$ и $\varphi'(x)\to 0$. Доказать.

2.5. $f(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Доказать, что все корни $f(x)$ расположены на $(-1;1)$.

2.6. Доказать: если $|a_n|\le 1$ для любого n, то уравнение $1+a_1z+a_2z^2+\ldots=0$ не может иметь корня, модуль которого был бы меньше $1/2$.

2.7. Доказать, что если $p(x)$ - полином степени n, не имеющий кратных корней, $q(x)$ - полином степени l не равный тождественно нулю, то полином $\sum\limits_{k=0}^{2n}\left(p(x)q(x)\right)^{(k)}$ не делится на $p(x)$.

2.8. $p(x)$ - полином с вещественными коэффициентами степени n, имеющий n вещественных корней (с учетом кратности). Доказать, что для

$\forall\alpha \in \mathrm{R}\setminus\{0\}$ полином $p'(x)+\alpha p(x)$ также имеет n вещественных корней (с учетом кратности).

2.9. Известно, что $f(-x)=f^3(x)$ (f - вещественная функция). Доказать, что среди корней уравнения $f(x)=\sin x$ не более одного рационального.

2.10. Показать, что уравнение $\dfrac{a_1}{a_1+x}+\dfrac{a_2}{a_2+x}+\ldots+\dfrac{a_n}{a_n+x}=n,$ где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - различные вещественные числа, отличные от 0, имеет ровно n различных вещественных корней.

2.11. При каких ограничениях на коэффициенты p и q уравнение $x^{2n+1}+px+q=0$ (n - натуральное число) имеет ровно три различных вещественных корня.

2.12. Пусть $P(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$ полином степени $n>0$ с вещественными коэффициентами; a отлично от 0. Доказать, что если $b^2-\dfrac{2nac}{n-1}<0,$ то $P(x)$ имеет не более $(n-2)$ различных вещественных корней.

2.13. Сколько корней полинома $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k$ находится в открытом промежутке $(-a_0;a_0)$ $(a_0>0)$, если $a_0^2+a_1^2+\ldots+a_k^2\le 1$?

2.14. Доказать, что уравнение $2^{x^2-x}=3\sin x$ имеет хотя бы один корень.

2.15. Полином x^n-kx-1 имеет степень $n>2$. Доказать, что сумма n -ых степеней всех его корней равна n.

2.16. Пусть полином x^3-ax+b $(a>0;\, b>0)$ имеет только вещественные корни. Показать, что наименьший положительный корень лежит между b/a и $3b/2a$.

2.17. Пусть функция f задана на всей числовой оси, не равна нулю тождественно и является решением линейного уравнения $y''=(x^3+Dx)y$ (D - число). Доказать что:

а) Нули функции f ограничены сверху;

б) Нули функции f не ограничены снизу.

2.18. Найти все вещественные корни уравнения $xe^{-x}+e^{-x}+\dfrac{x^2}{2}-1=0.$

2.19. Доказать, что для любого полинома $P(x)$ степени $n>1$ имеющего n различных вещественных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n,$ справедливо

$$\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\ldots+\frac{1}{P'(x_n)}=0.$$

2.20. Функция f задана и дифференцируема на отрезке $[a;b]$, $f(a)=f(b)=0$. Доказать, что существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $f'(c)=f(c)$.

2.21. Доказать, что многочлены $(z+1)^{2003}+1$ и $z^{20}-2002\cdot z^{10}-2003$ не имеют общих комплексных корней.

2.22. Пусть $f(x)$ - многочлен степени n и $\Phi(x)=f(x)+\dfrac{f'(x)}{2}+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x)}{2^n}$. Доказать, что, если все корни $\Phi(x)$ вещественные, то все корни $f(x)$ тоже вещественные.

2.23. Пусть $x_1,\ldots x_5$ - корни уравнения $x^5-x-1=0$. Найти $x_1^6+x_2^6+\ldots+x_5^6$.

2.24. Решите уравнение: $(x^2+[x]+1)^2+[x^2+[x]+1]=x-1$. Здесь $[x]-$ целая часть числа, то есть наибольшее целое, не превосходящее x.

2.25. Пусть комплексные числа a, b, c такие, что все корни уравнения $z^3+az^2+bz+c=0$ лежат на окружности $|z|=1$. Что можно сказать о расположении на комплексной плоскости корней уравнения $z^3+|a|z^2+|b|z+|c|=0$?

2.26. Доказать, что многочлен $x^{18n}\left(x^5+1\right)+x^{12n+1}\left(x^2+1\right)+x^{6n+2}\left(x^2+1\right)$, $n\in\mathbb{N}$ делится на многочлен $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

2.27. Даны n комплексных чисел $c_1,c_2,\ldots,c_n$ таких, что изображающие их точки плоскости являются вершинами выпуклого n-угольника. Доказать, что если $\left(z-c_1\right)^{-1}+\left(z-c_2\right)^{-1}+\ldots+\left(z-c_n\right)^{-1}=0$, то отвечающая z точка плоскости лежит внутри этого n-угольника.

2.28. Пусть $A-$ непустое замкнутое ограниченное подмножество вещественной оси и $f:A\to A$ - неубывающая непрерывная функция. Доказать, что существует точка $p\in A$ такая, что $f(p)=p$. (Множество замкнуто, если его дополнение есть объединение открытых интервалов, функция g неубывающая, если $g(x)\le g(y)$ для всех $x\le y$).

2.29. Пусть $n,k\in\mathbb{N}$ и полином $f(x)=x^{2n}+x^n+1$ делится на $g(x)=x^{2k}-x^k+1$. Доказать, что $f(x)$ делится на $h(x)=x^{2k}+x^k+1$.

§ 3. Исследование функций.

Для того, чтобы дифференцируемая на (a,b) *функция* $f(x)$ *не убывала (возрастала) на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x)$ *была неотрицательна (положительна) всюду на* (a,b). *Аналогичное свойство (с изменением знака производной) есть для убывания.*

Если функция $f(x)$ *дифференцируема в точке* c *и имеет в этой точке локальный экстремум, то* $f'(c)=0$.

Если функция $f(x)$ *имеет на интервале* (a,b) *конечную вторую производную и эта производная неположительная (неотрицательная) всюду на* (a,b), *то график функции* $y=f(x)$ *имеет на* (a,b) *выпуклость, направленную вниз (вверх), то есть график функции* $y=f(x)$ *лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.*

Пусть функция $f(x)$ *имеет в некоторой окрестности точки* c *производную* $(n+1)-$*го порядка и выполнены соотношения:*

$f''(c)=f'''(c)=...=f^{(n)}(c)=0,\ f^{(n+1)}(c)\neq 0.$ *Тогда, если* $(n+1)-$ *нечетное число, то график функции* $y=f(x)$ *имеет перегиб в точке* $M(c,f(c))$. *Если же* $(n+1)-$ *четное число и, кроме того,* $f'(c)=0$, *то функция* $y=f(x)$ *имеет локальный экстремум в точке* $x=c$, *точнее, максимум, если* $f^{(n+1)}(c)<0$, *и минимум, если* $f^{(n+1)}(c)>0$.

Важной характеристикой графика функции являются его асимптоты. Прямая $x=a$ *является вертикальной асимптотой графика, если хотя бы один из односторонних пределов* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *или* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *бесконечен.*

Прямую $y=kx+b$ *называют наклонной правосторонней (левосторонней) асимптотой, если функцию* $y=f(x)$ *при* $x\to+\infty$ *(*$x\to-\infty$*) можно представить в виде* $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, *где* $\alpha(x)-$ *бесконечно малая функция. Для существования правосторонней асимптоты необходимо существование двух конечных пределов:* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$, *и достаточно существования второго из них. Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная* $y=b$.

Иногда в задачах полезна информация о связи асимптот прямой и обратной функций. Если функция f *имеет обратную* f^{-1}, *то их графики, а значит, и их асимптоты, симметричны относительно прямой* $y = x$. *Если* $y = kx + b$ *- наклонная асимптота графика* $y = f(x)$, *то* $y = (x-b)/k$ *- наклонная асимптота графика* $y = f^{-1}(x)$. *Горизонтальной асимптоте* $y = b$ *графика* $y = f(x)$ *соответствует вертикальная асимптота* $x = b$ *графика обратной функции* $y = f^{-1}(x)$.

Если $y = kx + b$ *- асимптота и существует* $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = k$, *если же предел производной не существует, но функция дифференцируема, то производная осциллирует (меняет знак).*

Иногда оказывается удобнее не исследовать явное выражение для функции, а найти уравнение (алгебраическое, дифференциальное или функциональное), которому функция удовлетворяет, и исследовать решение соответствующего уравнения, используя для этого специфические приемы (см. соответствующие разделы).

$f^{(n)}(0)$ *можно искать через разложение функции* f *в ряд Маклорена (коэффициент перед* x^n *-это* $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$*).*

3.1. $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0;1]$, причем выполнены условия $f(0) = 0,\ |f'(x)| \le k|f(x)|$. Доказать, что $f(x) \equiv 0$.

3.2. Если кривая $y = f(x)$ пересекает некоторую прямую в трех различных точках, то между крайними точками пересечения находится хотя бы одна точка перегиба кривой.

3.3. Функция $f(x)$ представлена в виде $f(x) = g(p(x))$, где $p(x)$ - квадратный трехчлен, $g(x)$ - дважды дифференцируема. Доказать, что вторая производная $f(x)$ обладает тем же свойством, т.е. $f''(x) = h(P(x))$ для некоторой функции h.

3.4. В какой точке плоскости функция $\Phi(x;y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2-8x+16} + \sqrt{x^2+y^2-8y+16} +$
$+\sqrt{x^2+y^2-18x-6y+90}$ достигает наименьшего значения ?

3.5. Найти асимптоту $A(x)$ решения $y(x)$ задачи Коши:

$x \ge 1;\ y(1) = 1;\ y' + 2xy^2 = 2x^3 + x$ и показать, что $0 \le y(x) - A(x) < \dfrac{1}{4x}$.

3.6. Пусть $f \in C^{\infty}[a;b]$. Доказать: f продолжается до аналитической функции в окрестности $[a;b] \Leftrightarrow \exists c = c_f : \left| f^{(n)}(x) \right| \le c^n n!$

3.7. Пусть $f_i(x)\ (i = 1,2,3,4)$ полином 4-й степени. Тогда

$$G(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) & f_4'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) & f_4''(x) \\ f_1'''(x) & f_2'''(x) & f_3'''(x) & f_4'''(x) \end{vmatrix}$$

есть полином не выше 4 степени.

3.8. Функция $f(x,y)$ имеет локальный минимум в точке $(x_0; y_0)$ на любой прямой, проходящей через эту точку. Будет ли $f(x,y)$ иметь локальный минимум в точке $(x_0; y_0)$?

3.9. Исследовать сходимость последовательности $y(x),\ y(y(x)),\ldots$ при $-1/2 \le x \le 1$, $y(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3(1-x^2)} - x\right)$.

3.10. $f(x) = \sqrt{x}\quad 0 < a < b$. Доказать, что существует единственное число $c \in \left(\sqrt{ab}; \dfrac{a+b}{2}\right)$ такое, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

3.11. Найти минимальное значение функции $u(x,y,z) = \sqrt{1+(x-a)^2} + \sqrt{1+(y-x)^2} + \sqrt{1+(z-y)^2} + \sqrt{1+(b-z)^2}$ в области $a \le x \le y \le z \le b$.

3.12. При положительных значениях x исследовать на монотонность функцию $\dfrac{b^x - a^x}{x}$, где $0 < a < b < 1$.

3.13. Найти соотношение между a и b, при выполнении которого функция $f(x) = e^{-x^2}\int\limits_a^x e^{t^2}dt + be^{-x^2}$ монотонна при $x \ge a$.

3.14. Пусть $f(x)$ определена и дифференцируема на $[1;+\infty)$, $f(1) = 1$ и $|f(x)| \le \dfrac{1}{x}$. Доказать, что при некотором $x_0 : f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.

3.15. Доказать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ на интервале $(0;\pi)$ является положительной и монотонно возрастающей.

3.16. Пусть $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b]$, причем $F'(b)=0$. Возьмем $k>0$. Доказать, что $\exists c\in(a;b)$ такое, что $F'(c)=k(F(c)-F(a))$.

3.17. Что больше $\min\limits_{-1\le y\le 1}\max\limits_{-1\le x\le 1}(x^2+yx)$ или $\max\limits_{-1\le x\le 1}\min\limits_{-1\le y\le 1}(x^2+yx)$.

3.18. Доказать, что не существует многочлена $F(x)$, удовлетворяющего для всех вещественных x неравенству $F'(x)F''(x)>F(x)F'''(x)$. Привести пример трижды дифференцируемой функции $F(x)$ с таким свойством.

3.19. Проверить: $\sup\left|\left(\dfrac{1}{x}\sin x\right)^{(1982)}\right|=\dfrac{1}{1983}$.

3.20. Верны ли следующие утверждения:

1) $f\in C[0;1]$, f отображает $[0;1]$ на $[0;1]$. Тогда существует $x_0\in[0;1]$ такая, что $f(x_0)=x_0$;

2) $f\in C[0;1]$, f отображает $(0;1)$ на $(0;1)$. Тогда существует $x_0\in(0;1)$ такая, что $f(x_0)=x_0$.

3.21. Функция f, заданная на всей оси, удовлетворяет соотношению $f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$ при некотором положительном a. Доказать, что f периодична и найти ее период.

3.22. Существует ли не равная константе функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая для всех $x,y\in\mathbb{R}$ неравенству $|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$.

3.23. Пусть $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ - непрерывная функция. Доказать, что:

а) если $\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$.

б) результат пункта а) неверен для непрерывной функции $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$.

3.24. Пусть $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}, c_k \neq 0, k = 1,2,...,n.$ Доказать, что если $f \in C(\mathbb{R}), f(x) = \sum_{1 \le k \le n} a_k f(b_k x + c_k y)$ при любых $x, y \in \mathbb{R}$, то $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

3.25. Построить пример строго положительного многочлена от двух переменных $P(x;y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_{kl} x^k y^l > 0, a_{kl} \in \mathbb{R},$ не достигающего своего наименьшего значения.

3.26. Пусть f непрерывна на $[0;1]$, $f(0) = f(1)$. Верно ли, что график этой функции имеет хорду, параллельную оси абсцисс, длины $1/5$? Хорда - отрезок с концами на графике.

3.27. Найти все алгебраические многочлены P, удовлетворяющие при всех x соотношению: $(x-1)P(x+1) - (x+2)P(x) \equiv 0.$

3.28. Пусть функция $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ непрерывна и обладает свойством: для любого $x \in (0;1)$ существует последовательность $\{x_n\}_1^{\infty} \in (0;1)$ такая, что $x_n > x,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = 0.$ Доказать, что f - постоянная функция.

3.29. Найти асимптоты обратной функции f^{-1}, если задана сама функция $f(x) = 4x - \operatorname{arctg} x$.

3.30. Функции fg, gh, fh бесконечно дифференцируемы. Следует ли отсюда непрерывность хотя бы одной из функций f, g, h хотя бы в одной точке?

3.31. Непрерывная на оси функция f принимает только иррациональные значения. $f(\sqrt{2}) = \sqrt{e}$. Найти $f(2)$.

3.32. Каким должен быть угол наклона ствола орудия к горизонту, чтобы при данной скорости вылета снаряда площадь под траекторией снаряда была наибольшей? Сопротивление воздуха не учитывать.

3.33. Найдите $y^{(n)}(0)$, если $y(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$.

3.34. Функция f задана и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, $f(a) = a$, $f(b) = b$. Доказать существование таких различных точек $x_1, x_2 \in (a,b)$, что $f'(x_1) f'(x_2) = 1$.

3.35. Показать, что любой многочлен можно представить в виде разности монотонно возрастающих многочленов.

3.36. Определенная на $\mathbb{R}$ неубывающая функция f является трижды дифференцируемой и удовлетворяет тождеству $f\big(f(t)\big) \equiv 3t + \sin t$. Вычислить значение третьей производной $f'''(0)$ в точке $t = 0$.

3.37. Непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такова, что при иррациональном значении аргумента значение функции рационально. Доказать, что функция-константа.

3.38. Найти все непрерывные функции $f(x)$, определенные на $(-\infty,\infty)$ и такие, что

$$f(x)=\max_{-\infty<y<\infty}(xy-f(y)).$$

3.39. Пусть $g(x)$ - непрерывная функция, определенная при всех вещественных x. Через $g_n(x)$ обозначим функцию $g(g(...g(x)...))$, где g повторяется n раз. Доказать следующие утверждения:

а) Если для некоторого n функция $g_n(x)$ строго монотонна, то $g(x)$ также строго монотонна.

б) Если для некоторого n функция $g_n(x)=x,\ -\infty<x<\infty$, и $g(x)$ возрастает, то $g(x)=x,\ -\infty<x<\infty$.

в) Пусть $g_n(x)=x,\ -\infty<x<\infty$. Если n нечетно, то $g(x)=x,\ -\infty<x<\infty$, если n четно, то $g_2(x)=x,\ -\infty<x<\infty$.

г) Пусть $g_n(x)=x$ для некоторого натурального n и всех вещественных x и $g(x_0)=x_0$ для некоторого $x_0\in\mathbb{R}$. Тогда существует возрастающая функция φ такая, что $g(x)=\psi(-\varphi(x)),\ -\infty<x<\infty$, где ψ - обратная к φ функция.

3.40. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - непрерывная функция. Предположим, что для любого положительного c график f может быть преобразован в график cf с помощью только сдвигов и поворотов. Следует ли отсюда, что $f(x)=ax+b$ для некоторых вещественных a,b?

§ 4. Геометрия.

Для получения уравнений линий, поверхностей чаще всего стоит ввести удобный параметр (угол, точка касания и т.п.), выразить координаты через него, а потом исключить параметр – получится уравнение, связывающее x,y (x,y,z). *Не забыть проверить: если фигура (тело) обладает некоторой симметрией, то и ее уравнение обладает соответствующей симметрией относительно входящих в него переменных*

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ *в точке* x_0:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Уравнение касательной к эллипсу (гиперболе) $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ *в точке* (x_0, y_0)*:*

$\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} = 1.$

Касательная плоскость к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ *в точке* (x_0, y_0, z_0)*:*

$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$

Хотя в программу технического вуза входит, в основном, аналитическая геометрия, не стоит забывать, что можно использовать и известные из школьного курса факты из элементарной геометрии.

Приведем несколько полезных формул из векторной алгебры.

$$\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\bullet(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\bullet(\vec{a}\times\vec{b}).$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\bullet\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\bullet\vec{b}).$$

Площадь S *параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a}, \vec{b}$*:* $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$

Объем V *параллелепипеда, построенного на векторах* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$*:*

$$V = \left|\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})\right| = \left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right\| = \sqrt{\left\|\begin{matrix} \vec{a}\bullet\vec{a} & \vec{a}\bullet\vec{b} & \vec{a}\bullet\vec{c} \\ \vec{b}\bullet\vec{a} & \vec{b}\bullet\vec{b} & \vec{b}\bullet\vec{c} \\ \vec{c}\bullet\vec{a} & \vec{c}\bullet\vec{b} & \vec{c}\bullet\vec{c} \end{matrix}\right\|}.$$

В двумерном случае перейти от геометрической задачи к алгебраической можно не только с помощью аналитической геометрии (введение системы координат и получение уравнений), но и рассматривая плоскость как комплексную и используя действия с комплексными числами.

4.1. Решить уравнение $\overline{x} = \overline{a}\times(\overline{x}+\overline{b})$.

4.2. Дан выпуклый многогранник. Возьмем единичный вектор внешней нормали каждой грани и умножим его на площадь грани. Доказать, что сумма получившихся векторов равна $\overline{0}$.

4.3. Может ли в сечении куба плоскостью получиться правильный пятиугольник?

4.4. Доказать: если круглый лист бумаги перегибать так, чтобы край его все время проходил через точку, не совпадающую с центром листа, то огибающая линий сгиба будет эллипсом.

4.5. Можно ли в эллипс вписать правильный шестиугольник?

4.6. Написать уравнение круговой конической поверхности, для которой оси прямоугольной декартовой систем координат служат образующими.

4.7. Можно ли так расположить в пространстве точки O, A, B, C, чтобы расстояние между ними были: $|OC| = 3; |AB| = 4; |BC| = 5;$
$|OA| = |OB| = 6; |AC| = 7.$

4.8. Какую площадь покрывают круги с центрами на эллипсе $8x^2 + 9y^2 = 72$, касающиеся круга $x^2 - 2x + y^2 \le 3$.

4.9. Три точки движутся по плоскости с постоянными скоростями. Доказать, что если существует три момента времени, когда эти точки лежат на одной прямой, то они обладают этим свойством все время.

4.10. Даны две пересекающиеся прямые и точка M, не лежащая ни на одной из них. Какая кривая есть геометрическое место точек N, лежащих на прямых, проходящих через M, со свойством: середина MN совпадает с серединой отрезка соединяющего точки пересечения прямой, проходящей через M и N, с данными прямыми.

4.11. Из точки, лежащей вне эллипсоида, проведены все касательные к нему. Доказать, что все точки касания лежат в одной плоскости.

4.12. $a > 0,\ b > 0,\ r > 0$. Доказать, что расстояние от любой точки эллипса $\dfrac{x^2}{(a+r)^2} + \dfrac{y^2}{(b+r)^2} = 1$ до эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ не превосходит r.

4.13. Внутренняя поверхность трехгранного угла, ребрами которого служат положительные лучи осей OX, OY, OZ декартовой системы координат, зеркальна. Луч света идет из $(.)M_0$, лежащей внутри угла, в направлении вектора $\bar{a}$, образующего тупые углы с осями OX, OY, OZ. Доказать,что свет отразится ровно по одному разу от каждой из граней угла (если не попадет ни на одно из ребер) и найти по какой прямой он будет двигаться после всех этих отражений.

4.14. Дана гипербола и точка, не лежащая на ней. Рассматриваются всевозможные хорды гиперболы, проходящие через эту точку. Доказать, что точки пересечения касательных к гиперболе, проходящих через концы таких хорд, лежат на одной прямой.

4.15. Три точки A, B, C лежат на одной прямой l (C между A и B), причем $\overline{AC} = 3\overline{CB}$. На $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ по одну сторону от прямой l построены две полуокружности. Пусть a и b - касательные к ним в $(.)A$ и B, и γ - окружность, касающаяся a и b и наибольшей из рассматриваемых полуокружностей. Доказать, что γ, b и рассматриваемые полуокружности имеют общую касательную окружность.

4.16. Является ли поверхность с уравнением $xy + yz + zx = 0$ поверхностью вращения?

4.17. Шар катится по двум пересекающимся прямым. По какой кривой движется его центр?

4.18. Найти уравнение поверхности, составленной из нормалей, проведенных в точках, лежащих на оси OX, к гиперболическому параболоиду с уравнением $z = xy$.

4.19. Записать каноническое уравнение эллипса с большой полуосью A, касающегося данной прямой $y = kx + b$. Найти ограничения на A, k, b при которых задача имеет решение.
4.20. Найти пересечение внутренностей всех ромбов, вписанных в данный эллипс.
4.21. В кубе проведены 4 диагонали боковых граней так, что они не имеют общих точек. Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 - прямые, на которых лежат эти диагонали. Доказать, что если прямая l пересекает три из них, то она лежит в одной плоскости с четвертой из них.
4.22. A - вершина куба C с ребром 4. S - сфера, вписанная в C, R - область, состоящая из всех точек M между S и C таких, что M ближе к A, чем к любой другой вершине куба C. Найти объем $V(R)$.
4.23. Планета движется по эллипсу с полуосями a и b $(a > b)$. Известно, что радиус-вектор планеты, проведенный из фокуса, за равные промежутки времени описывает равные площади. Найти скорость планеты, если величина скорости изменения площади - σ.
4.24. Прямая $x = a$ является касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в $(.)A(a;0)$. По одну сторону оси OX выбирается $(.)B$ на эллипсе и $(.)C$ на касательной так, что длина отрезка касательной AC равна длине дуги эллипса AB. Пусть P -точка пересечения прямой BC с осью OX. Найти предельное положение $(.)P$, когда $(.)B$ стремится по эллипсу к $(.)A$.
4.25. Пусть A - точка параболы и L - прямая, параллельная касательной к параболе, проведенной в точке A. B и C - точки пересечения прямой L с параболой. Рассмотрим ΔABC и параболический сегмент ABC. Пусть T и C - их площади. Доказать, что $T = \frac{3}{4}S$.
4.26. Точки A, B, C движутся по плоскости так, что каждый момент времени нормаль к траектории точки A, проведенная через $(.)A$, является биссектрисой угла BAC. Аналогичное условие выполняется при движении точек B и C. Доказать, что периметр ΔABC постоянен.
4.27. В квадрат со стороной длины a поместить два круга так, чтобы сумма их площадей была наибольшей.
4.28. Из начала координат опущены перпендикуляры на всевозможные касательные к окружности с уравнением $x^2 + y^2 = 2x$. Найти уравнение кривой, которую составляют основания этих перпендикуляров.
4.29. Даны две непересекающиеся и не лежащие одна в другой окружности радиусов R_1 и R_2 $(R_1 \neq R_2)$. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей.
4.30. На эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ найти такую точку, лежащую в первом квадранте, чтобы площадь Δ, образованного касательной к эллипсу в этой точке и осями координат, была наименьшей.

4.31. Определить радиус наибольшей окружности, лежащей на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c)$.

4.32. Доказать, что кривая, задаваемая параметрическим уравнением $\begin{cases} x=a_1t^2+b_1t+c_1 \\ y=a_2t^2+b_2t+c_2 \\ z=a_3t^2+b_3t+c_3 \end{cases}$, плоская, то есть все точки этой кривой принадлежат некоторой плоскости.

4.33. Найти геометрическое место центров прямоугольников, вписанных в данный треугольник так, что одна из их сторон лежит на основании треугольника.

4.34. Даны три параллельные прямые на плоскости. Доказать, что существует правильный треугольник с вершинами, лежащими на этих прямых, причем на каждой прямой лежит ровно одна вершина.

4.35. Равносторонние треугольники со сторонами $1, 3, 5, 7, \ldots$ выстроены так, что их основания расположены на одной прямой и вплотную примыкают друг к другу. Докажите, что вершины треугольников, противолежащих основанию, расположены на параболе и удалены от ее фокуса на целочисленные расстояния.

4.36. В пространстве R^3 введены декартовы координаты $(x;y;z)$. Из точки $A(1;1;-1)$ пройти кратчайшим путем в точку $B(-2;0;4)$, заходя по пути на ось OZ.

4.37. Сумма длин нескольких векторов плоскости равна 4. Доказать, что из этих векторов можно выбрать некоторые (может быть один), так чтобы длина суммы выбранных векторов была не менее 1.

4.38. В пространстве R^4 заданы четырехмерный куб и трехмерная гиперплоскость, не параллельная ни одному из ребер куба. Доказать, что она содержит не более 6 вершин куба.

4.39. Составьте уравнение поверхности, получаемой вращением кривой $x^3+y^3=3xy;\ z=0$ вокруг прямой $x=y=z$.

4.40. На плоскости нарисованы оси координат и гипербола $y=\frac{k}{x}$ (масштаб по осям не указан). На гиперболе отмечена точка A. С помощью циркуля и линейки (без делений) провести касательную к гиперболе в точке A.

4.41. При каких значениях параметра k прямые $kx-y-k=0$, $2kx-y-2k=0$ и $3kx-2y-3k=0$ пересекаются в одной точке?

4.42. В эллипсоид $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ вписать прямой эллиптический цилиндр (ось цилиндра совпадает с осью эллипсоида) максимального объём объёма.

4.43. В R^3 задана поверхность $x^5 + y^5 = z^7$. Найти все прямые, принадлежащие этой поверхности.
4.44. На параболе $y^2 = 2px$ найти точку так, чтобы нормаль, проведенная к параболе в этой точке, отсекала сегмент наименьшей площади.
4.45. По прямой $x + y = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ движется источник света S. При каком положении S тень, отбрасываемая эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ на прямую $x + y = -2\sqrt{a^2 + b^2}$, имеет наименьшую длину.
4.46. Касательные к параболе $y^2 = 2px$ в точках A, B, C образуют треугольник KLM. Известно, что площадь треугольника ABC равна S. Вычислить площадь треугольника KLM.
4.47. Найти кривую, образованную центрами окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через данную точку.
4.48. Может ли внутри круга радиуса 1 находиться дуга параболы, длина которой больше 4?
4.49. Планета имеет форму тела, полученного вращением квадрата со стороной a вокруг одной из диагоналей. Путешествие по планете считается кругосветным, если его маршрут – замкнутая кривая, симметричная относительно ее центра. Найти длину кратчайшего маршрута кругосветного путешествия.
4.50. Через каждую вершину треугольника , стороны которого попарно различны, проводится ветвь гиперболы, фокусы которой находятся в двух других вершинах. Доказать, что эти гиперболы имеют общую точку внутри треугольника.
4.51. Пусть $A_1,\ldots A_n$ - вершины правильного $n-$угольника, вписанного в окружность единичного радиуса, $B-$некоторая точка этой окружности. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |BA_k|^2 = 2n.$

§ 5. Линейная алгебра.

Некоторые свойства определителя.
Если $A, B-$ *квадратные матрицы, то* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det(B \cdot A)$.
Заметим, что $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

$$\frac{d}{dx}\left(\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \ldots & f_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} (f_{11}(x))' & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ (f_{21}(x))' & f_{22}(x) & \ldots & f_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (f_{n1}(x))' & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & (f_{12}(x))' & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & (f_{22}(x))' & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & (f_{n2}(x))' & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & (f_{1n}(x))' \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & (f_{2n}(x))' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & (f_{nn}(x))' \end{vmatrix}.$$

Объем V $n-$мерного параллелепипеда, построенного на векторах, заданных своими координатами a_{ik} в ортонормированном базисе

$$V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Объем оценивается сверху произведением длин ребер, что приводит к неравенству Адамара для определителя:

$$V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \le \sqrt{\prod_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)}.$$

Для вычисления определителя $n-$го порядка чаще всего выводится рекуррентное соотношение с понижением его порядка.

Пусть $A = \{a_{ij}\}$, транспонированная матрица: $A^T = \{a_{ji}\}$, сопряженная: $A^* = \{\overline{a_{ji}}\}$. Матрица A называется симметрической, если $A^T = A$, эрмитовой или самосопряженной, если $A^* = A$, ортогональной, если $A^T = A^{-1}$, унитарной, если $A^* = A^{-1}$, нормальной, если $A^* A = AA^*$.

Ненулевой вектор x называется собственным вектором матрицы (линейного оператора) A, если существует такое число λ (называемое собственным числом или собственным значением), что $Ax = \lambda x$. Совокупность собственных значений матрицы называется спектром матрицы (спектром линейного оператора). Собственное значение линейного оператора (матрицы) есть корень уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Многочлен, стоящий в левой части уравнения, называется характеристическим многочленом матрицы (оператора) A. Коэффициенты этого уравнения – инварианты линейного оператора, то есть они не меняются при переходе к другому базису, хотя матрица оператора при этом и меняется ($A' = T^{-1} AT$, где $T-$ матрица перехода к новому базису). В частности, такими *инвариантами являются определитель (*$\det A$*) и след линейного оператора (* $Tr\,A \equiv Sp\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ *).*

Собственные значения самосопряженного оператора вещественны, а собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Кроме того, в линейном пространстве можно выбрать ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора. Собственные числа унитарного оператора (вообще говоря, комплексные) по модулю равны единице.

В базисе из своих собственных векторов (если такой существует, то есть у оператора есть n *линейно независимых собственных векторов) матрица линейного оператора диагональна, и на диагонали стоят собственные числа оператора.*

Полезное свойство следа матрицы: $Sp(A\cdot B) = Sp(B\cdot A)$.

Нередко бывает полезен критерий Сильвестра: Для того, чтобы квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$, $a_{ik} = a_{ki}$ *,была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы* $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

где $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$.

Замечание. Вычислению определителей посвящен параграф 13.6.

5.1. A - ортогональная матрица, $\det A = -1$. Доказать, что $\det(E + A) = 0$.

5.2. Столбцы матрицы M, как и ее строки, представляют собой арифметические прогрессии. Какой элемент находится в правом верхнем углу матрицы?

$$M = \begin{pmatrix} . & 9 & . & ? \\ . & . & 8 & . \\ . & . & . & 5 \\ 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

5.3. Квадраты длин ребер AB, AC, AD, BC, BD, CD некоторого тетраэдра объема V равны, соответственно p, q, r, s, t, u. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & p & q & r \\ 1 & p & 0 & s & t \\ 1 & q & s & 0 & u \\ 1 & r & t & u & 0 \end{vmatrix}.$$

5.4. Пусть A, B - две невырожденные эрмитовы матрицы. Доказать, что характеристический многочлен $A^{-1}B$ имеет вещественные коэффициенты и число пар его комплексных корней не превосходит числа отрицательных собственных значений матрицы A.

5.5. I_n - квадратная матрица порядка n, все элементы которой равны 1. Доказать, что $\left(\mathrm{E}\text{-}\mathrm{I}_n\right)^{-1} = \mathrm{E} - \dfrac{1}{n-1}\mathrm{I}_n$.

5.6. Строками квадратной матрицы $\mathrm{A}(z)$ являются наборы различных одночленов вида z^n $(n = 0,1,2,\ldots)$ такие, что в каждом столбце матрицы присутствует 1. Доказать, что все корни многочлена $\det\mathrm{A}(z)$ по модулю больше 1/2.

5.7. При каких натуральных n система линейных уравнений совместна?

$$\begin{cases} \quad x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 \quad + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 \quad + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ldots \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1} = 1 \end{cases}$$

5.8. Элементами квадратной матрицы являются полиномы от комплексной переменной z. При любом z матрица $\mathrm{A}(z)$ обратима. Доказать, что элементами обратной матрицы $\mathrm{A}^{-1}(z)$ также являются полиномы.

5.9. Среди всех определителей 4-го порядка, с элементами, равными +1 или -1, найти наибольший.

5.10. Матрица А размерности $n \times n$ такова, что $\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} + \mathrm{E} = 0$. Доказать, что $\det \mathrm{A} \neq 0$. Найти A^{-1}.

5.11. Доказать, что в указанном определителе Δ можно так изменить один из его элементов на величину, по модулю равную одной миллионной, что новый определитель будет равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

5.12. В квадратной матрице А векторы-столбцы являются попарно ортогональными. Доказать, что модуль определителя матрицы А равен произведению модулей ее векторов-столбцов.

5.13. Зная характеристический многочлен обратимой матрицы порядка n, найти характеристический многочлен A^{-1}.

5.14. Все элементы матрицы А размера 10×10 целые числа. Известно, что у 92 из этих чисел остаток при делении на 3 равен 1. Доказать, что $\det A$ делится на 3.

5.15. Квадратные матрицы А, В одного формата таковы, что $AP = PB$, где Р - ненулевая матрица. Доказать, что у А и В есть хотя бы одно общее собственное число.

5.16. Вычислить определитель матрицы 1985-го порядка с элементами $a_{ik} = \ln\left(i + \sqrt{i^2 - 2ik + k^2 + 1} - k\right)$, $0 \le i, k < 1984$.

5.17. Рассматриваются всевозможные определители порядка 3, у которых на главной диагонали стоит x, а на остальных местах числа +1 или -1. Найти наименьшее положительное a такое, что при $x > a$ все такие определители положительны.

5.18. Пусть А - вещественная симметричная матрица порядка n с определителем $\det A = \Delta$ и пусть $\lambda \neq 0$ - собственное число матрицы А, а $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$-соответствующий собственный вектор длины 1 (т.е. $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$). Вычислить определитель

$$(n+1)\text{-го порядка:}\ \begin{vmatrix} & & & x_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & x_n \\ x_1 & .. & x_n & 0 \end{vmatrix}.$$

5.19. $A = \|a_{ij}\|$ - матрица, где $a_{ij} = 0$ или 1 $i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, \ldots, 5$, причем $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}$ нечетно. Двое по очереди просматривают произвольно выбранную строку слева направо и заменяют в ней по выбору любые нули единицами и наоборот. При этом первый элемент, который нужно изменить в выбранной строке - единица. Выигрывает тот, кто получит нулевую матрицу. Доказать, что существует выигрышная стратегия для первого игрока.

5.20. Известно, что определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} > 0$ и $\begin{vmatrix} d & e \\ e & f \end{vmatrix} > 0,\ f > 0$.

Доказать, что $\Delta \le a \cdot d \cdot f$

5.21. Для определителя $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$ справедливы неравенства $|A_1| > |A_2| + |A_3|$; $|B_2| > |B_1| + |B_3|$; $|C_3| > |C_1| + |C_2|$. Доказать, что $\Delta \neq 0$.

5.22. M - целочисленная матрица размера 3×3, обратная к которой тоже целочисленна. Доказать, что число нечетных элементов из M не меньше 3 и не больше 7 и что это наилучшие оценки.

5.23. Известно, что матрицы A, B и C попарно перестановочны. Доказать, что существуют вещественные числа α, β, γ не все равные 0, такие, что $\det(\alpha A + \beta B + \gamma C) = 0$.

5.24. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x/n & x/n \end{pmatrix}^n$.

5.25. Доказать: $\det\left(\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{4}\right) = 0, a_{ij} = \sin(x_i + y_j), x_i, y_j$ - произвольные числа.

5.26. Пусть A и B - квадратные матрицы одного порядка такие, что $AB = BA$ и существуют натуральные m и k, для которых $A^m = 0$, $B^k = 0$. Доказать, что $\det(A + B) = 0$.

5.27. Пусть $M_5(R)$ - множество вещественных матриц 5-го порядка. Существует ли матрица $A \in M_5(R)$ такая, что $A^2 = -E$, где E - единичная матрица ?

5.28. Пусть $a, b > 0$, $A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$. Найти такую матрицу B, что $B^8 = A$.

5.29. A и B - квадратные матрицы. Известно, что $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$. Доказать, что $\det(A - B)$ может принимать только одно из трех значений 0, 1 или -1.

5.30. Найти необходимое и достаточное условие равенства всех корней характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ вещественной симметрической матрицы $A = \{a_{ij}\}(a_{ij} = a_{ji}, a_{ij} \in R)$.

5.31. Решить матричное уравнение $X + SX + XS = A$, где S^2 - нулевая матрица.

5.32. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1/n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix}$.

5.33. На черных клетках шахматной доски написаны $ch\ x$, а на белых - $sh\ x$. За один ход можно все функции, стоящие на какой-то горизонтали или какой-то вертикали, заменить на их производные. Можно ли не более, чем за 2003 хода получить расстановку, при которой по краям доски написаны $ch\ x$, а в остальных клетках $sh\ x$?

5.34. Пусть A – квадратная матрица с $\det A \neq 0$ (т.е. невырожденная), в каждой строке которой стоит только одно число, отличное от 0 и равное +1 или –1. Доказать, что при некотором натуральном m справедливо равенство: $A^m = A^T$, где A^T - транспонированная матрица A.

5.35. Даны две матрицы A и B размерами 3×2 и 2×3 соответственно, причем известно, что

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$ Найти BA.

5.36. У симметричной матрицы порядка n все элементы положительны. Докажите, что у нее найдется положительное собственное число.

5.37. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{D_n}{n!\ln n}$, где $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$.

5.38. Пусть квадратные матрицы A и B третьего порядка таковы, что $A = A^T, B = B^T$, $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\det A > 0$, $b_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\det B > 0$.

Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot b_{ji} > 0$.

5.39. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ различные вещественные $n \times n$ матрицы. Если $\mathbf{A}^3 = \mathbf{B}^3$ и $\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \mathbf{B}^2\mathbf{A}$, то может ли матрица $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$ быть обратимой?

5.40. Пусть A - $(n \times n)$-матрица, все элементы которой являются четными числами. Могут ли среди ее собственных чисел быть нечетные?

5.41. Докажите, что любую ненулевую диагональную матрицу $(n\times n)$ при $n>1$ можно представить в виде суммы двух матриц, определитель каждой из которых равен единице.
5.42. Пусть X и Y - квадратные матрицы порядка n, причем матрица X - невырожденная. Может ли коммутатор этих матриц $(XY-YX)$ оказаться равным матрице X?
5.43. Пусть A - квадратная матрица порядка $n=2006$, все элементы которой равны единице, E - единичная матрица такого же порядка. Найти матрицу $(E-A)^{-2006}$.
5.44. Матрица $M=\left[m_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ определяется следующим образом: $m_{ij}=a_i a_j$ при $i\neq j$, и $m_{ii}=a_i^2+k$. Вычислить $\det M$.
5.45. В действительной квадратной матрице заданы все элементы, кроме лежащих на диагонали. Доказать, что на пустых местах можно расставить нули и единицы так, чтобы матрица оказалась невырожденной.
5.46. Пусть A и B - эрмитовы матрицы n- го порядка, $A^2=A,\ B^2=B,$ $AB=-BA,$ X – матрица столбец $\left(X\in\mathbb{C}^n\right),$ X^* – транспонированная и комплексно сопряженная матрица, $X^*X=1$. Доказать, что $\left(X^*AX\right)^2+\left(X^*BX\right)^2\leq 1.$
5.47. Пусть A,B - квадратные матрицы второго порядка. Известно, что собственные числа у матрицы A равны 1 и 3, а у матрицы B равны 2 и 4. Могут ли собственные числа матрицы $A+B$ быть равными 5 и 6? А 1 и 9?

§ 6. Равенства.

Возможные пути доказательства равенств.

Если имеется целый параметр n, то можно

1) доказывать по индукции, то есть (а) проверить равенство при $n=1$ (база индукции) и (б) предположив, что равенство верно при $n=k$, доказать, что оно верно и при $n=k+1$ (индукционный переход). Тогда по аксиоме математической индукции равенство верно при любом натуральном n.

2) показать, что левая и правая части удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению и при $n=1$ совпадают.

Если имеется непрерывно меняющийся параметр:

1) *Пусть $f(a)=g(a)$ и $f'(x)=g'(x)$ при всех $x,\ a\leq x$. Тогда $f(x)=g(x)$ при всех $x,\ a\leq x$.*
2) *Проверить, что левая и правая части удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению и одинаковым начальным условиям.*
3) *Воспользоваться свойствами симметрии (например, четностью, периодичностью и т.п.) функции (если в равенство входит одна функция от разных аргументов).*

4) *Если требуется доказать, что нечто постоянно, то можно продифференцировать и показать, что производная равна нулю.*
5) *Равенство прямой и обратной функций* $f(x)=f^{-1}(x)$ *эквивалентно* $f(x)=x$ *(с учетом области определения).*
6) *Возможно, необходимое равенство получается предельным переходом (по некоторому параметру) из другого (более простого, но содержащего параметр) равенства.*

Если g *- функция, обратная к* f *(*$g=f^{-1}$*), то, используя график функции, легко показать, что* $\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$.

Можно вычислить значения одной и той же функции от левой и правой частей и убедиться в их равенстве. Для самих аргументов это означает какой-то набор вариантов, включающий их совпадение (в случае функции, имеющей обратную, например, монотонной - только совпадение), который можно перебрать и проанализировать.

6.1. f - вещественная функция на $[a;b]$, $f(a+b-x)=f(x)$. Показать, что $\int\limits_a^b xf(x)dx=\dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)dx$.

6.2. Решить уравнение $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

6.3. Доказать равенство $\int\limits_0^1 xf(x)f(1-x)dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)f(1-x)dx$.

6.4. Доказать, что $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(\alpha x+\beta y)dxdy=2\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,f(x\sqrt{\alpha^2+\beta^2})dx$.

6.5. Пусть $arctgx+arctgy+arctgz+arctgt=\pi$, где $x,y,z\in\mathrm{R}$. Доказать, что $\dfrac{x+y+z+t}{xyzt}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}$.

6.6. Доказать, что $\int\limits_0^1\left[1-(1-t)^n\right]t^{-1}dt=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

6.7. Функция f - дифференцируема на $[0;1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. Доказать, что для любого натурального n на $(0;1)$ найдутся n различных точек $x_1,x_2,\ldots,x_n$, для которых $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{f'(x_k)}=n$.

6.8. Доказать, что если функция f непрерывна на $[0;1]$ и $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$, то существует точка $x_0 \in (0;1)$, такая, что $f(x_0) = x_0^2$.

6.9. $f \in C^{\infty}(-\infty;+\infty)$ и существует $L > 0$ такое, что $\left|f^{(n)}(x)\right| \le L$ для любых n и x. Пусть $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ при $n \in \mathrm{N}$. Доказать, что $f(x) \equiv 0$.

6.10. Доказать, что $\int\limits_0^1 \sqrt[4]{1-t^4}\,dx = \int\limits_0^1 \sqrt[4]{4t-6t^2+4t^3-t^4}\,dt$

6.11. Функция $f(x)$ - четная и непрерывная на $[-a;a]$. Докажите, что $\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int\limits_0^a f(x)dx$.

6.12. a,b,c – комплексные числа, $|a| = |b| = |c| = r$, $a+b+c \ne 0$. Доказать, что $\left|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right| = r$.

6.13. Существует ли непрерывная на $(1,+\infty)$ функция $f(t)$ такая, что $\int\limits_x^{x^2} f(t)dt = 1$ для любого $x > 1$.

6.14. Пусть f и g – непостоянные дифференцируемые вещественные функции на R и для любых $x, y \in \mathrm{R}$ выполнено:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),$$
$$g(x-y) = f(x)g(y) + g(x)f(y).$$

Пусть $f'(0) = 0$. Доказать, что для любого x имеет место соотношение: $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

6.15. $T_n(x) = \cos(n \bullet \arccos(x)), x \in [-1,1]$. Доказать: $T_{2n}(x) = T_n(2x^2-1)$.

6.16. $p_n(z) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}$, $c_k = \int\limits_a^b z^k \rho(z)dz.$

Доказать: $\int\limits_a^b p_n(z)z^m\rho(z)dz=0,\ m<n,\ m\in\mathbb{N}.$

6.17. Доказать: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx+\int\limits_0^{\sin 1} arc\sin(arc\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\sin 1$.

6.18. Пусть $f:[0,a]\to R$ — строго возрастающая дифференцируемая функция, $f(0)=0$, g — функция, обратная f. Доказать, что для $x\in[0,a]$

$$xf(x)=\int\limits_0^x f(t)dt+\int\limits_0^{f(x)} g(t)dt.$$

6.19. Найти непрерывную функцию $f(x)$ такую, что

$$\int\limits_{-x}^0\frac{f(x+t)}{e^x+e^{-t}}dt=\frac{1}{1+e^x},\ x\in\mathbb{R}.$$

6.19. Пусть $P_n(x)$ - многочлен степени n, определяемый равенством $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}=\frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$. Доказать, что имеет место равенство

$$P_{n+1}(x)+2x(n+1)P_n(x)+n(n+1)\left(1+x^2\right)P_{n-1}(x)=0.$$

§ 7. Неравенства.

Возможные пути доказательства неравенств.

1) *Если имеется целый параметр n, то можно доказывать по индукции, то есть (а) проверить неравенство при $n=1$ (база индукции) и (б) предположив, что неравенство верно при $n=k$, доказать, что оно верно и при $n=k+1$ (индукционный переход). Тогда по аксиоме математической индукции неравенство верно при любом натуральном n.*
2) *Попробовать использовать геометрические соображения*
3) *Пусть $f(a)\le g(a)$ и $f'(x)\le g'(x)$ при всех $x,\ a\le x$. Тогда $f(x)\le g(x)$ при всех $x,\ a\le x$.*

   Возможно: Пусть $f(a)\le g(a)$, $f'(a)\le g'(a)$ и $f''(x)\le g''(x)$ при всех $x,\ a\le x$. Тогда $f(x)\le g(x)$ при всех $x,\ a\le x$.
4) *Если $\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)\le\min\limits_{x\in[a,b]}g(x)$, то $f(x)\le g(x)$ на $[a,b]$.*
5) *Если $f(a)\ge 0$, $f(b)\ge 0$ и $f''(x)\le 0$ при $x\in(a,b)$ то $f(x)>0$ при $x\in(a,b)$.*
6) *Если надо оценить значение функции, а есть оценка производной и значение функции в точке x_0, то следует писать*

   $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(t)dt$ *и оценивать интеграл.*

Для функции двух переменных имеем

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy),$$

где путь интегрирования выбирается произвольно.

7) *Если функция выпукла вверх (вниз) на* $[a,b]$, *то ее график находится между секущей, проведенной через* $(a,f(a)),(b,f(b))$, *и касательной в любой точке графика на промежутке.*

Может помочь использование известных классических неравенств:

1) *Неравенства между средним квадратическим, средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим. Если* $a_1,a_2,...a_n$ – *положительные числа, то*

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}\geq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$$

Равенства верны только при $a_1=a_2=...=a_n$.

2) *Неравенство Коши:*

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\leq(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+...+a_n^{\ 2})(b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+...+b_n^{\ 2})$$

Равенство верно, если $\lambda a_k+\mu b_k=0$, *где* $\lambda^2+\mu^2\neq 0$, *при всех* $k=1,2,...n$.

3) *Неравенство Буняковского:*

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

Равенство верно при $\lambda f(x)+\mu g(x)\equiv 0$, *где* $\lambda^2+\mu^2\neq 0$.

4) *Если* $U\geq 0,\ V\geq 0,\ p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *то* $UV\leq\frac{U^p}{p}+\frac{V^q}{q}$.

5) *Неравенство Гельдера. Если* $p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *то*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx\leq(\int_a^b f^p(x)dx)^{\frac{1}{p}}(\int_a^b g^q(x)dx)^{\frac{1}{q}}.$$

Равенство выполнено при $\lambda f^p(x)+\mu g^q(x)\equiv 0$, *где* $\lambda^2+\mu^2\neq 0$.

6) *Неравенство Минковского. Если* $p\geq 1$, *то*

$$(\int_a^b (f(x)+g(x))^p dx)^{\frac{1}{p}}\leq(\int_a^b f^p(x)dx)^{\frac{1}{p}}+(\int_a^b g^p(x)dx)^{\frac{1}{p}}$$

Равенство выполнено при $\lambda f(x)+\mu g(x)\equiv 0$, *где* $\lambda^2+\mu^2\neq 0$.

7) *Неравенство Иенсена. Если* f – *выпуклая вниз функция, определенная на* (a,b); $x_n\in(a,b)$; $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$; $\alpha_i>0, i=1,2,...n$, *то справедливо*

неравенство $f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$. *Если* f *– выпуклая вверх функция, то знак неравенства меняется на противоположный.*

7.1. Пусть функция f дважды дифференцируема на $[0,1]$ и выпукла вниз, кроме того $f'(1) < 2f(1)$. Доказать, что $\int_0^1 f(x)dx > 0$.7.2. f и g - монотонно возрастающие функции на $[a;b]$. Доказать, что $(b-a)\int_a^b f(t)g(t)dt \ge \int_a^b f(t)dt\int_a^b g(t)dt$.

7.3. Доказать, что $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

7.4. Доказать, что для любых вещественных чисел x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3

$$(x_2y_3 - y_2x_3)^2 + (x_1y_3 - y_1x_3)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \le$$
$$\le \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right).$$

7.5. $u, v \ge 0,\ p > 1,\ q = \frac{p}{p-1}$. Доказать: $uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.

7.6. $abcd = 1$. Доказать: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + bc + ac + ad + bd + cd \ge 10$.

7.7. Показать, что для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $k^2 \le (a_1 + \ldots + a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right)$.

7.8. Для непрерывных на $[a;b]$ функций $P(x)$ и $G(x)$ доказать неравенство

$$\left(\left(\int_a^b P(x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b G(x)dx\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \int_a^b \left(P^2(x) + G^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

7.9. a_k - положительная последовательность. Показать, что если отношение $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ возрастает, то последовательность $A_k = (a_1 + \ldots + a_k)^{-1}$ строго выпукла, т.е. при всех $k > 0$ $2A(k) < A(k-1) + A(k+1)$.

7.10. $n \in \mathrm{Z}$, λ - иррациональное число, $\omega(n) = \min_m |\lambda n - m|$. Доказать, что $\omega(n) \le \frac{1}{4}\left|e^{2\pi i n\lambda} - 1\right|$.

7.11. Доказать, что $0 < \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x} dx < \frac{1}{200\pi}$.

7.12. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - длины сторон многоугольника единичного периметра, то $\frac{1}{2} \le \sum\limits_{i \ne j} a_i a_j \le 1 - \frac{1}{n}$.

7.13. Проверить, что для неубывающей функции $f(x)$ на $(0;+\infty)$ и $a \le b \le c \le d$ $\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_c^d f(x)dx \le \int\limits_{a+c}^{b+d} f(x)dx$.

7.14. Доказать, что если числа x_k образуют невозрастающую положительную последовательность, то при любом натуральном n $x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + \ldots + (2n-1)x_n^2 \le (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$.

7.15. $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k!}; g(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{k!}$. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $\frac{f(x)}{g(x)} \ge 1986$.

7.16. Функция $f(x, y)$, заданная и дифференцируемая при всех вещественных x, y обладает тем свойством, что в любой точке ее градиент ортогонален радиус-вектору этой точки. (т.е. $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$) и $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le 1$; $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 1$. Доказать, что если $f(0,1) = 0$, то $|f(1,2)| \le \ln 2$.

7.17. Доказать неравенство $pe^{\frac{x}{p}} + qe^{\frac{x}{q}} \le e^{\frac{x}{8p^2q^2}}$, если $p, q > 0$, $p + q = 1$.

7.18. Доказать, что при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет место неравенство $\sin x \cdot tgx > x^2$.

7.19. Доказать, что $\frac{\pi}{6} < \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

7.20. Доказать неравенство $x^2 \ge (1+x)[\ln(1+x)]^2$ для всех $x > -1$.

7.21. Доказать, что для $x, y, \alpha \in (0;1)$ при $x \ne y$ выполнено неравенство $\frac{1}{|x^\alpha - y^\alpha|} < \frac{1}{\alpha|x - y|}$.

7.22. На плоскости XOY изобразите множество решений неравенства $\int\limits_{-1}^{1}|x+yt|dt \le 1$.

7.23. Найти пересечение областей Γ_k: $|xy|^k \le |x|^k + |y|^k$ $(k = 1,2,3,\ldots)$.

7.24. Доказать, что при $0 < x \le 1$; $1 \le \dfrac{1+nx^{n+1}}{(n+1)x^n} \le 1 + \dfrac{n(1-x)^2}{2x^n}$. (n - натуральное число)

7.25. Пусть M - множество непрерывно дифференцируемых на $[0;1]$ функций $f(x)$, для которых $f(0)=0$, $f(1)=1$. Найти наибольшее число k, такое, что для всех функций из M справедливо неравенство $k \le \int\limits_0^1 |f'(x) - 2f(x)|dx$.

7.26. Функция Φ непрерывна на $[0;1]$, и для всех x $0 < A \le \Phi(x) \le B$. Доказать, что $AB\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\Phi(x)} \le A + B - \int\limits_0^1 \Phi(x)dx$.

7.27. x, y - положительные числа и $x + y = 1$. Доказать, что $x^x + y^y \ge \sqrt{2}$.

7.28. Доказать неравенство $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{2}} < \ln(1+x) < \dfrac{x+\dfrac{x}{1+x}}{2}$ при $x > 0$.

7.29. Что больше $\dfrac{1989^{1989}}{1988^{1988}}$ или $\dfrac{1988^{1988}}{1987^{1987}}$?

7.30. Функция F непрерывна и положительна на $[0;1]$. Фиксируем H, для которого $0 < H < 1$. Доказать, что существует C из $[0;1-H]$ для которого $\int\limits_C^{C+H} F(t)dt < \dfrac{H}{1-H}\int\limits_0^1 F(t)dt$.

7.31. Функция f монотонно убывает к нулю на $[a;+\infty)$, а функция φ непрерывна на R и имеет период $T > 0$, причем $\int\limits_0^T \varphi(t)dt = 0$. Доказать $\left|\int\limits_A^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt\right| < f(A)\int\limits_0^T |\varphi(t)|dt$ при $A \ge a$.

7.32. Функции A и B непрерывны на $[0;1]$ $0<c<1$ и для всех x $A(x)\geq B(x)\geq 0$. Известно, что $\int\limits_0^1 xB(x)dx=\int\limits_0^c xA(x)dx$. Доказать, что $\int\limits_0^1 B(x)dx\leq\int\limits_0^c A(x)dx$.

7.33. Последовательность x_n задана следующим образом: $x_1=1; x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$. Доказать, что для $n\geq 3$ $\sqrt{2n}<x_{n+1}<\sqrt{2n+\frac{1}{2}\ln n}$.

7.34. Значения непрерывной на $[a;b]$ функции f неотрицательны и не превосходят M. Доказать, что $0\leq\left(\int\limits_a^b f(x)dx\right)^2-\left(\int\limits_a^b f(x)\cos xdx\right)^2-\left(\int\limits_a^b f(x)\sin xdx\right)^2\leq M^2\frac{(b-a)^4}{12}$..

7.35. Доказать, что $\left|\int\limits_x^{x+1}\sin t^2dt\right|\leq\frac{1}{x}$ при $x>0$.

7.36. Доказать, что если $f\in C^{(2)}[0;1]$, $f\geq 0$; $f''<0$, то $\int\limits_0^1 xf(x)dx\leq\frac{2}{3}\int\limits_0^1 f(x)dx$.

7.37. f - непрерывная функция на $[a;b]$, $0\leq f(x)\leq M$, $\forall x\in[a;b], \int\limits_a^b f(x)dx=M^{\frac{3}{2}}$. Доказать, что $\int\limits_a^b\sqrt{f(x)}dx\geq M$.

7.38. Про числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ известно, что для всех x $|a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx|\leq|\sin x|$. Доказать, что $|a_1+2a_2+\ldots+na_n|\leq 1$.

7.39. Доказать неравенство $(1+x)^\alpha-(1-x)^\alpha\leq 2^\alpha x; x,\alpha\in[0;1]$.

7.40. Доказать, что для дважды непрерывно дифференцируемой $2\pi-$ периодической вещественной функции f выполнено неравенство: $\left(\int\limits_0^{2\pi}(f'(x))^2dx\right)^2\leq\int\limits_0^{2\pi}(f''(x))^2dx\cdot\int\limits_0^{2\pi}f^2(x)dx$.

7.41. Доказать неравенство: $\ln\frac{x+y}{2\sqrt{xy}} \ge \frac{x+y}{4xy} - \frac{1}{x+y}$ при $x>1, y>1$.

7.42. Пусть функция f задана и имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f'(x)dx = 0$. Доказать, что для всех $x \in [a,b]$ будет $|f(x)| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$.

7.43. Пусть $g(x) \in C^1[0;+2)$ и $g'(x) \ge 0$ для любого $x \in [0;2)$. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\int_1^{\frac{2}{n+1}} g(x)dx + \int_1^{\frac{4}{n+1}} g(x)dx + \int_1^{\frac{6}{n+1}} g(x)dx + \ldots + \int_1^{\frac{2n}{n+1}} g(x)dx \ge 0.$$

7.44. Пусть $f(x), g(x), h(x) \in C[a,b]$ и $h(x) > 0$ на $[a,b]$. Пусть $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x) + \int_a^x h(t)f(t)dt$. Доказать, что на $[a,b]$

$$f(x) \le g(x) + \int_a^x h(t)g(t)\exp\left(\int_t^x h(u)du\right)dt.$$

7.45. Непрерывная и неотрицательная на круге $(x,y): x^2+y^2 \le 1$ функция $f(x,y)$ для всех $r, 0<r\le 1$, удовлетворяет неравенству

$$\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi \le \frac{2}{r}\iint_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)dxdy.$$

Доказать, что $f(x,y) \equiv 0$ в данном круге.

7.46. Доказать, что

$$0 < \int_0^\infty \frac{xdx}{e^x-1} - \sum_{n=1}^{2009}\frac{1}{n^2} < \frac{1}{2009}.$$

§ 8. Интеграл.

При доказательстве тождеств с определенными интегралами чаще всего требуется делать замену переменной. Возможно, надо разбить исходный интеграл на два и в одном из них заменить переменную (обозначив ее той же буквой), а потом их собрать в один. Стремиться свести к интегралу от нечетной функции по симметричному относительно нуля промежутку (из этого условия и выбирать характер замены), который равен нулю. Если есть несколько интегралов, в которых присутствует одна неизвестная функция с разными аргументами, то сделать замену так, чтобы аргументы *после замены стали одинаковыми. Может быть, в одном или нескольких интегралах надо проинтегрировать по частям.*

Интегралы, зависящие от параметров.

Способ вычисления интеграла, зависящего от параметра:

а) продифференцировать (или проинтегрировать по параметру;

б) вычислить полученный интеграл;

в) проинтегрировать (продифференцировать по параметру для получения исходного интеграла, произвольную постоянную найти, вычислив данный интеграл при каком-то значении параметра;

возможно, вместо б) и в) будет:

составить дифференциальное уравнение (неизвестная функция- искомый интеграл, переменная – параметр) и решить его.

$$\frac{d}{dp}(\int_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)dx) = f(b(p),p)b'(p) - f(a(p),p)a'(p) + \int_{a(p)}^{b(p)} \frac{\partial}{\partial p} f(x,p)dx.$$

Вычисление интеграла I_n с целым параметром:

а) вычислить I_1 (или I_2),

б) вывести рекуррентное соотношение (выразить I_{n+1} или I_{n+2} через I_n) и с его помощью найти нужный интеграл. Возможно, в задаче фигурирует конкретное значение n (то есть формально параметра нет), но выводить часто удобнее общее рекуррентное соотношение, а потом применить его нужное количество раз.

Независимость интеграла от параметра:

1) *Попробовать просто вычислить интеграл и убедиться, что он не зависит от параметра.*
2) *Если интеграл вычислить не удается, то продифференцировать его по параметру и доказать, что производная равна нулю, используя приемы, описанные в начале параграфа.*

Для вычисления интеграла без параметра часто удобно параметр ввести и, используя описанные выше приемы, найти этот более общий интеграл, а затем взять нужное значение параметра и получить ответ.

При преобразовании интегралов часто используют простое, но полезное равенство: $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}} = 1.$

Возможно, вычисление интеграла можно свести к интегрированию по замкнутому контуру в комплексной плоскости, где можно использовать теорему о вычетах. Иногда может помочь выполнение преобразования Лапласа от искомого интеграла по параметру (в частности, при преобразовании Лапласа свертка переходит в произведение).

8.1. Вычислить $\int_0^{\pi} \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

8.2. Вычислить $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin^6 x\cos^4 x dx$.

8.3. Дан $\int\limits_{a}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} x dx, \alpha > 0$. Показать, что функция $f(\alpha) = (\alpha+1) I_{\alpha} I_{\alpha+1}$, определенная так при $\alpha > 0$ является периодической с периодом I. Вычислить $f(0)$.

8.4. Вычислить $\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{1+\varphi(x)+\sqrt{1+\varphi^2(x)}} dx$, где $\varphi(x)$ - нечетная функция ?

8.5. Вычислить $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

8.6. Доказать равенство: $\int\limits_{0}^{\infty} f\left(x+\frac{a}{x}\right) dx = \int\limits_{0}^{\infty} f\left(\sqrt{x^2+4a}\right) dx,\ a > 0$.

8.7. Вычислить $\int\limits_{0}^{1} \frac{arctgx}{1+x} dx$.

8.8. Вычислить $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{\alpha}\right)}$.

8.9. Вычислить $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{u\sin tu}{1+u^2} du,\ t > 0$.

8.10. Вычислить $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sec^2\theta}{2} e^{\frac{\sec^2\theta}{2}} \right)^{-1} d\theta$.

8.11. При каких натуральных p число $E(p) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+p)}$ рационально?

8.12. Найти длину дуги линии $x = \int\limits_{1}^{t} \frac{\cos z}{z} dz, y = \int\limits_{1}^{t} \frac{\sin z}{z} dz$, от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной.

8.13. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+tg^k x}$ не зависит от k.

8.14. Найти $f'(0)$, если $f(x)=\int\limits_0^x \cos\left(\frac{1}{t}\right)dt, f(0)=0$.

8.15. Из каждой точки кривой L, заданной уравнением $y=x^n$, $x\in[0;1]$, $n>1$ проведем вектор касательной единичной длины, составляющий острый угол с осью OX. Найти площадь $S(n)$ области, заметаемой этим вектором при движении точки вдоль кривой L.

8.16. Найти интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$.

8.17. Пусть функция $\Phi(x)$ непрерывна на всей числовой оси и $h>0$. Составим новую функцию $S_h(\Phi,x)=\frac{1}{h}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi(x+t)dt$. Выразить $S_h(S_h(\Phi,x),x)$ через однократный интеграл.

8.18. Из точек параболы $y=x^2$ проводятся касательные к параболе $y=x^2+1$. Доказать, что площадь криволинейного треугольника, образованного этими касательными и дугой параболы $y=x^2+1$ между точками касания не зависит от выбора точки на нижней параболе.

8.19. $p(x)$ - положительная кусочно-непрерывная убывающая функция на $[0;1]$. Доказать: $\frac{\int\limits_0^1 xp^2(x)dx}{\int\limits_0^1 xp(x)dx} \le \frac{\int\limits_0^1 p^2(x)dx}{\int\limits_0^1 p(x)dx}$.

8.20. Для натурального n найти $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

8.21. Найти $I_n(x)=\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos nt}{1-x\cos t}dt$ для $|x|<1;\ n\in\mathrm{N}$.

8.22. При каких значениях A интеграл $\int\limits_0^{\pi}|\sin x - A|dx$ принимает наименьшее значение?

8.23. Найти интеграл $\int\limits_5^7 \frac{\sqrt{\ln(12-x)}}{\sqrt{\ln(12-x)}+\sqrt{\ln x}}dx$.

8.24. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+nx-[nx]}dx$, $[x]$ - целая часть числа x.

8.25. Найти $\int e^{\cos x}\frac{x\sin^3 x+\cos x}{\sin^2 x}dx$.

8.26. Вычислить $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x+1992x^{1992}}$.

8.27. Без помощи калькулятора доказать, что $\int\limits_0^1\sqrt{\sin \pi x}dx < 0{,}8.$

8.28. Вычислить $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin 2001x}{\sin x}dx$.

8.29. Пусть $T(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 1/2\\ -2x-2, 1/2< x\le 1\end{cases}$ и $T^{(n+1)}(x)=T\left(T^{(n)}(x)\right)$, $n=1,2,3,\ldots,$ $T^{(1)}(x)=T(x)$. Найти $\int\limits_0^1 T^{(n)}(x)dx.$

8.30. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{\infty}(-1)^{[x^2]}dx$.

8.31. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)dx,$ где n – целое.

8.32. Вычислить $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}$, считая известным, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$

8.33. Что больше: $\int\limits_0^1 x^x dx$ или $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy$?

8.34. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)\left(x^2+1\right)}$.

8.35. Исследовать на сходимость интеграл: $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4\cos^2 x}$.

8.36. Функция $f(x)$ такова, что $\int\limits_{0}^{\infty}\left(a\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2\right)dx=1$. Найдите максимально возможное значение $f(0)$ в зависимости от a $(a>0)$.

8.37. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx$, $n\in\mathbb{N}$.

8.38. Вычислить $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+2^{\pi\operatorname{tg}x}}$.

8.39. Пусть функция f задана и интегрируема по Риману на $[0,1]$ и $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}x\int\limits_{x}^{1}\frac{f(t)}{t^2}dt=0$.

8.40. Вычислить $\int\limits_{0}^{2008}x(x-4)(x-8)\cdot\ldots\cdot(x-2008)\,dx$.

8.41. Вычислить $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}|\ln x-\ln y|e^{-(x+y)}dxdy$.

8.42. Непрерывная на всей плоскости функция $f(x.y)$ такова, что криволинейный интеграл $\int\limits_{L}f(x,y)dl$ по любому отрезку L длины 1 равен нулю. Доказать, что $f(x,y)\equiv 0$.

8.43. Пусть $f(x)$ – непрерывная возрастающая на $[0,\infty)$ функция, $f(0)=0$. Обозначим через $(x(t),y(t))$ координаты центра тяжести подграфика $f(x)$ на $[0,\infty)$, то есть фигуры, ограниченной линиями $e=f(x),\ y=0,\ x=t$.

а) Считая известной функцию $x(t)$, найти $f(x)$, если $f(1)=1$.

б) Доказать, что при дополнительном условии выпуклости вниз функции $f(x)$ для всех $t>0$ верны неравенства $x(t)\ge\frac{2}{3}t$, $y(t)\le\frac{1}{3}f(t)$.

§ 9. Дифференциальные уравнения (ДУ).

Попробовать решить уравнение (возможно, выразить решение через интеграл). Чаще всего для этого надо делать замену переменной.

$y' = f(\frac{y}{x})$ *- замена* $y = xt$;

если в уравнении встречается $x + yy'$, *то вероятна замена* $t = x^2 + y^2$;

$y' + p(x)y = f(x)y^a$ *(в частности, может быть* $a = 0$*) – замена* $y = ue^{-\int p(x)dx}$; *решение:* $y = ue^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$ *(формулу можно писать и тогда, когда в правой части стоит* $f(x,y)$ *и использовать это выражение, например, для оценок).*

Возможно, в уравнении надо рассматривать не y *как функцию от* x, *а наоборот:* $x(y)$, $y' = \frac{1}{x'}$.

Если в уравнении $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ *выполнено* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, *то левая часть есть полный дифференциал и решение:*

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = C,$$

где путь интегрирования и точка (x_0, y_0) *выбираются произвольно.*

Если условие полного дифференциала не выполнено, то можно попробовать найти интегрирующий множитель $\mu(x)$, $\mu(y)$ *или* $\mu(x,y)$ *такой, что* $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$. *Тогда после умножения всего уравнения на* μ *в левой части будет полный дифференциал и решение в квадратурах (то есть через интегралы) пишется, как и раньше.*

Уравнение второго порядка может оказаться уравнением со вторым полным дифференциалом

$$A(x,y)y'' + B(x,y)(y')^2 + C(x.y)y' + D(x.y) = 0.$$

Достаточное условие того, что в односвязной области это второй полный дифференциал:

$A_y^{'}(x,y) = B(x.y),\ 2A_x^{'}(x,y) = C(x.y),\ C_x^{'}(x,y) = 2D_y^{'}(x.y),$

$A_{xx}^{''}(x,y) = D_y^{'}(x.y).$

В этом случае общий интеграл уравнения:

$$\int_{y_0}^{y} A(x,y)dy + \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau = C_1 x + C_2.$$

В уравнении высшего порядка попробовать понизить порядок с помощью замены.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $n-$*го порядка* $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=0$ *есть линейная комбинация с произвольными коэффициентами его* n *линейно независимых решений (фундаментальной системы решений)* $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$.
Решения линейно независимы тогда и только тогда, когда их вронскиан W *не обращается в нуль ни в одной точке:*

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Полезная формула для вронскиана:

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds}.$$

Если в уравнении отсутствует $y^{(n-1)}$ *(например,* $y''+\omega^2 y=0$*), то* $W(x)=const$.

Для двух функций: $W=y_1y_2'-y_2y_1'=y_1^{\,2}\dfrac{d}{dx}(\dfrac{y_2}{y_1})$. *Эту связь часто используют в олимпиадных задачах.*

Для уравнения второго порядка $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ *решение* $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, *где* y_1, y_2 *- линейно независимые решения. При этом, если* y_1 *известно (например, подобрано), то* $y_2(x)=y_1(x)\int \dfrac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}dx$.

Угадать частное решение бывает удобнее, если от исходного уравнения перейти к уравнению Риккати $z'+z^2+pz+q=0$ *с помощью замены* $y(x)=exp(\int z(x)dx)$.

Решение неоднородного уравнения $y''+\omega^2 y=f(x)$, $\omega=const$, $x\ge a$, *имеет вид*

$$y=c_1\sin\omega x+c_2\cos\omega x+\frac{1}{\omega}\int_a^x f(t)\sin\omega(x-t)dt.$$

Уравнение Эйлера $n-$*го порядка*
$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+a_2x^{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+a_n y=0$ *сводится к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены*

$$x=e^t \quad \left(\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt},\ldots,\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\frac{d^ky}{dt^k}\right)$$

В задачах о корнях решений линейных однородных дифференциальных уравнений полезна теорема Штурма и ее следствия.

***Теорема Штурма**. Если x_0, x_1 – два последовательных корня некоторого решения $y(x)$ уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, $p(x), q(x)$ – непрерывные функции, то всякое другое линейно независимое с $y(x)$ решение того же уравнения имеет в точности один корень между x_0 и x_1 (заметим, что совпадать корни линейно независимых решений не могут).*

***Теорема.** Если $q(x)$ – непрерывная функция на конечном замкнутом промежутке $[a,b]$ и $q(x)\le 0$ на $[a,b]$, то все решения уравнения*
$y''+q(x)y=0$ имеют не более одного корня на $[a,b]$.

Пусть имеется два уравнения

$$y''+q_1(x)y=0,\ z''+q_2(x)z=0,\ q_1\ne q_2.$$

Тогда справедлива

***Теорема**. Если $q_1(x)\le q_2(x)$ на $[a,b]$, то между каждыми двумя корнями любого решения $y(x)$ первого уравнения находится по крайней мере один корень любого решения $z(x)$ второго уравнения.*

9.1. Найти площадь, ограниченную отрезком $(c;d)$ оси абсцисс и кривой, являющейся графиком решения ДУ $yy''=-1$, если известно, что на $(c;d)$: $y(x)>0$, $\lim\limits_{x\to c+0} y(x)=\lim\limits_{x\to d-0} y(x)=0$; $\max\limits_{x\in(c;d)} y(x)=m$.

9.2. Решить уравнение: $\int\limits_0^1 \varphi(\alpha x)d\alpha = n\varphi(x)$.

9.3. Решить уравнение: $y'\cos y = x-\sin y$.

9.4. Решить уравнение: $\int\limits_0^x (x^2-t^2)\varphi(t)dt=\frac{x^3}{3}$.

9.5. Доказать, что если $q(x)\ne 0$ и ДУ $y''+q(x)y=0$ имеет не обращающееся в нуль ω - периодическое решение $y(x)$, то $\int\limits_0^\omega q(x)dx<0$.

9.6. Доказать, что решение $y(x)$ ДУ $x^2y'=y-x$ не может быть разложено в степенной ряд ни в какой окрестности $x=0$.

9.7. Решить уравнение $\int\limits_0^{y'} \frac{\cos t dt}{\cos^2\left(\frac{3}{4}\sin t\right)}=\frac{4}{3}tgx$.

9.8. Может ли функция $y=1-\cos x$ быть на интервале $(-a;a)$ решением ДУ $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, где $p(x)$ - непрерывные функции на $(-a;a)$.

9.9. Пусть непрерывно дифференцируемые на полуоси $x \ge 0$ функции y и H связаны соотношением $y'' + e^{-H} y = 0$. Показать, что из интегрируемости на полуоси функции $H_+' = \max\{0, H'\}$ следует ограниченность функции y.

9.10. Пусть в ДУ $y' = y + p(x)$ функция $p(x)$ непрерывна при всех x и $p(x+\omega) = p(x)$. Доказать, что существует единственное периодическое решение этого уравнения с периодом ω.

9.11. Динамика противоборства двух армий описывается системой $\begin{cases} x' = -ay, \\ y' = -bx \end{cases}$ $(a > 0,\ b > 0)$. При каких начальных данных $x(0) = x_0 > 0,\ y(0) = y_0 > 0$ победит первая армия (т.е. численность у второй армии обратится в 0 при некотором $t > 0$)? При каких условиях победит вторая армия?

9.12. Доказать, что все решения линейного ДУ $y'' + f(x)y = 0$ ограничены на $[0;+\infty)$, если $f(x)$ непрерывно дифференцируемая возрастающая функция на $[0;+\infty)$, принимающая положительные значения.

9.13. Рассмотрим задачу Коши: $y' = -z^3,\ z' = y^3,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0$. Пусть $y(x) = f(x),\ z(x) = g(x)$ - ее решение, определенное на всей вещественной оси. Доказать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ периодичны.

9.14. Пусть $y'' \le -a^2 y(x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ и точка $x_0 \in (0;+\infty)$, ближайшая к началу координат точка, в которой обращается в 0 решение задачи Коши: $z''(x) + a^2 z(x) = 0,\ z(0) = 0,\ z'(0) = 1$. Доказать: а) на $[0; x_0]$ $y(x) \le z(x)$.

б) на $\left[0; \dfrac{x_0}{2}\right]$ $y'(x) \le z'(x)$.

9.15. Найти все интегральные кривые ДУ $y''' = y'\left(3(y'')^2 - y'y'''\right)$.

9.16. Дано ДУ $y' + y^2 + k(x) = 0$, где $k(x)$ непрерывна и для всех $x \ge 0$ $k(x) \ge -a^2$ для некоторой постоянной $a > 0$. Доказать, что если решение $y(x)$ определено для всех $x \ge 0$, то оно ограничено на $[0;+\infty)$.

9.17. Дано ДУ: $y'' + k(x)y = 0$ и два его решения $y(x)$ и $z(x)$, определенные на $[0;1]$ и удовлетворяющие условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ z(1) = 0,\ z'(1) = -1$. Доказать, что $y(1) = z(0)$.

9.18. При каких условиях решение задачи Коши $y'' + py' + qy = f(x),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$ будет иметь при $x = x_0$ точку перегиба? Функция $f(x)$ считается бесконечно дифференцируемой, $p = const,\ q = const$.

9.19. Пусть $y(x)$ - решение ДУ $x^2 y'' + \{x\} y' - y = 0$ на $(-1;1)$, имеющее непрерывную производную второго порядка и удовлетворяющее условию

$\lim\limits_{x\to -1} y(x) = y_0$ ($\{x\}$ - дробная часть числа x). При каких условиях это решение является невозрастающей функцией ?

9.20. Решить ДУ бесконечного порядка: $y + \frac{x^2}{2!}y'' + \frac{x^4}{4!}y''''+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}y^{(2n)}+... = \cos x$.

Можно считать, что все производные ограничены одной и той же константой на любом конечном интервале.

9.21. Пусть невозрастающие на R_+ непрерывно-дифференцируемые функции a, b принимают значения на промежутке $\left[r^{-1}; r\right]$, где $r > 1$. Показать, что стартующее из единичного круга решение системы $\begin{cases} \dot{x} = a(t)y, \\ \dot{y} = -b(t)x \end{cases}$ $(t > 0)$ остается в пределах круга радиуса r.

9.22. Верно ли, что если непрерывные коэффициенты линейного ДУ первого порядка сохраняют знак в некоторой окрестности $+\infty$, то и любое его решение обладает этим свойством ?

9.23. Найти множество всех точек плоскости таких, что через каждую проходит ровно одна из кривых $y = y(x)$, подчиненных условиям: $y''(x) + y(x) = (y'(0))^2, y''(0) = 0, x \in \mathrm{R}$.

9.24. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - линейно независимые на интервале I решения ДУ $y'' = f(x)y$, где $f(x)$ непрерывна на I. Пусть на I $y_1(x)y_2(x) > 0$. Доказать, что существует положительная постоянная c, такая, что функция $z(x) = c\sqrt{y_1(x)y_2(x)}$ удовлетворяет ДУ $z'' + z^{-3} = f(z)z$.

9.25. $u(x)$ - решение ДУ $y'' + q(x)y = 0$. (q: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}, q$ - непрерывна), и пусть α, β - нули $u(x)$ $(\alpha < \beta)$, причем $u(x) \neq 0$ для $x \in (\alpha; \beta)$. Доказать, что любое линейно независимое с $u(x)$ решение $v(x)$ того же уравнения имеет единственный нуль в $(\alpha; \beta)$.

9.26. Нарисовать на плоскости $(x; y)$ интегральные кривые ДУ $\frac{dy}{dx} = y^{-1}x(x^2 - 1)$.

9.27. Функция $y(x)$ ограничена на $(0;+\infty)$ и является решением ДУ $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывна на $(0;+\infty)$ и при $x > 0$ удовлетворяет неравенству $0 \le f(x) \le m$. Найти оценки сверху и снизу значений функции $y(x)$ на $(0;+\infty)$.

9.28. Пусть $\Phi(x)$ - решение ДУ $y'' - 2y' + y = 2e^x$. Известно, что для всех x $\Phi'(x) > 0$. Следует ли из этого, что $\Phi(x) > 0$?

9.29. Доказать, что существует решение $y = f(x)$ ДУ $y' = y^{10} - 1$, удовлетворяющее при всех вещественных x неравенству $|f(x)| < 1$.

9.30. Доказать, что любое решение ДУ $\frac{dx}{dt} = \left(2 + t^4 + \cos x\right)^{-1}$ ограничено.

9.31. Найдите функцию f, удовлетворяющую соотношению $\int\limits_0^x e^u f(x-u)du = \sin x, x \in \mathrm{R}.$

9.32. Решить уравнение $\frac{du}{dt} = u(t) + \int\limits_0^1 u(s)ds, u \in C^2[0;\infty), t \geq 0.$

9.33. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $y' = x\sqrt{2 - x^2 - y^2}$, $y(0) = 0$. Доказать, что $y(x) < 1$.

9.34. Решить уравнение $y''e^{-2x} - y'e^{-2x} + 16y = 0.$

9.35. Решить краевую задачу:

$xy'' + 2y' - xy = 0$, $y(+0) = \lim\limits_{x \to +0} y(x)$ - ограничено, $y(\ln 2) = \frac{3}{\ln 16}$.

9.36. Функция $y(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяет уравнению $y' = 1 + x^2 + y^2$. Доказать, что $b - a < \pi$.

9.37. Снегопад начался до полудня и продолжался далее с постоянной интенсивностью. Ровно в полдень бригада вышла на уборку снега на шоссе постоянной ширины. За первые 2 часа рабочие очистили 2 км. Шоссе, а за следующие 2 часа им удалось продвинуться лишь на 1 км. Скорость уборку снега постоянна. Определить время начала снегопада.

9.38**.** Найти такую дифференцируемую f, что $f(x) = x^2 + 2\int\limits_0^1 f(xt)dt$**.**

9.39. Для каких λ уравнение $\int\limits_0^1 \min\{x, t\} f(t)dt = \lambda f(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ имеет ненулевое решение, удовлетворяющее условиям: $f(0) = f(1) = 0$?

9.40. Доказать, что частное решение уравнения
$y''' + yy'' - y'^2 = 1$, $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) > 0$ возрастает при $x > 0$

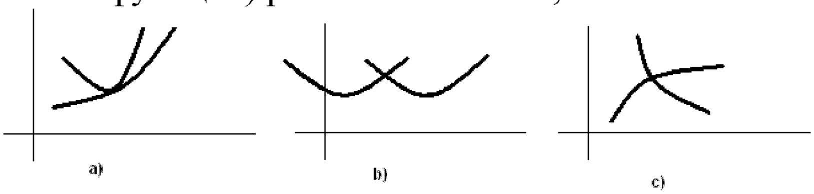
9.41. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $4y^2y'' = x\left(y'\right)^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

9.42. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{(y')^2}{y} = x' + \dfrac{xy'}{y}, \\ x'y + xy' = 1, \end{cases} \quad \text{где } x = x(t),\ y = y(t)\ .$$

9.43. Функции $a(x), b(x)$ на промежутке X удовлетворяют следующим условиям: $b(x)<0$, $b(x)$ - дифференцируема, $a(x)$ - непрерывна, $b'(x)+2a(x)b(x)=0$. Доказать, что на X существует фундаментальная система решений $\{\varphi_1(x); \varphi_2(x)\}$ дифференциального уравнения $y''+a(x)y'+b(x)y=0$, удовлетворяющая условию $\varphi_1(x)\varphi_2(x)=1$.

9.44. Могут ли графики двух решений уравнения $y''+q(x)y=0$ ($q(x)$ – непрерывная функция) располагаться так, как показано на рисунке?



9.45. Найти общее решение дифференциального уравнения

$5y+y'^2=x(x+y')$

9.46. Решить уравнение:

$$(2x^3y+x+1)y''+2x^3(y')^2+2(6x^2y+1)y'+6xy^2=0.$$

9.47. Вещества A,B,C в организме человека распадаются, причем скорость распада пропорциональна массе вещества.

а) Период полураспада вещества A равен двум часам. Лекарство должно приниматься как можно реже. Как часто и в каких количествах следует его принимать, если присутствие более m граммов A опасно, а менее $m/4$ граммов – неэффективно?

б) Лекарство B с периодом полураспада 12 часов безвредно, но при его распаде образуется вещество C с периодом полураспада 24 часа, присутствие которого в организме опасно в количестве более M граммов. Скорость образования вещества C равно половине скорости распада B. Какова максимальная доза B, которую можно принять один раз?

в) Какова максимальная доза B, которую можно принимать постоянно, один раз в сутки в одно и то же время?

9.48. Какие качественные особенности (экстремумы, точки перегиба, асимптоты) может иметь график решения дифференциального уравнения

$$y'=(y-x)^7-a(y-x)?$$

Перечислить все особенности и построить эскизы графиков. Значения a, при которых эти возможности реализуются, можно не указывать.

§ 10. Функциональные уравнения.

Сначала целесообразно проанализировать область определения и класс функций, в котором ищется решение, ибо это влияет на ответ и, кроме того, может подсказать путь решения.

Стоит проверить следующие способы решения.

Проанализировать составляющие уравнение функции с точки зрения их свойств (четность, нечетность, периодичность, возрастание, выпуклость и т.п.). Если в результате анализа приходим к противоречию, то решения не существует.

Применить соотношение, задаваемое уравнением, несколько раз, стараясь получить более простое уравнение, например, такое, в котором у искомой функции везде одинаковые аргументы. Тогда для данной функции получается алгебраическое (или трансцендентное) уравнение, из которого функцию надо найти алгебраическим путем.

Применить соотношение n *раз, а затем сделать предельный переход при* $n \to \infty$. *Может получиться более простое соотношение, из которого можно найти функцию. Для реализации этого пути важна непрерывность искомой функции.*

Использовать замену переменной, стремясь упростить аргументы искомой функции.

Если в условии оговаривается, что искомая функция дифференцируема, то надо обязательно попробовать продифференцировать уравнение, стремясь вместо функционального получить дифференциальное уравнение, которое можно решить. Возможно, производную находить по определению, используя функциональное уравнение для преобразования выражения, стоящего под знаком предела.

Если в уравнение входят функции от нескольких переменных, то попробовать дифференцировать по каждой из них. При этом может получиться уравнение в частных производных, но его тоже можно попробовать решить, например, последовательным интегрированием по разным переменным или с помощью разделения переменных, то есть с использованием следующего свойства: Если $f(x) = g(y)$ *для любых значений* x *и* y, *то это уравнение эквивалентно двум уравнениям* $f(x) = \lambda,\ g(y) = \lambda$, *где* $\lambda -$ *некоторая константа.*

Может быть, данное функциональное уравнение целесообразно решать поэтапно, то есть сначала для целых аргументов, потом для рациональных, а потом (предельным переходом с использованием непрерывности) для всех вещественных.

В уравнении со сдвинутым аргументом на полуоси можно попробовать а) рекуррентное построение решения; б) использование преобразования Лапласа L:

$$L(f(x)) = F(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx,$$

$$L(f(x+a)) = e^{ap}F(p),$$

$$L^{-1}(F(p)) = \sum_k \underset{p_k}{res}(F(p)e^{px}).$$

Бесконечно дифференцируемое решение можно попробовать искать в виде ряда Тейлора (Маклорена). Если в условии предполагается меньшая

гладкость, то, возможно, удастся доказать, что решение бесконечно дифференцируемо, или, по крайней мере, найти решение при дополнительных ограничениях (бесконечная дифференцируемость).
При решении функциональных уравнений редко встречаются эквивалентные преобразования. Обычно только следствия. Поэтому ответ надо проверять подстановкой в исходное уравнение.

10.1. Найти на $(0,\infty)$ дифференцируемое решение функционального уравнения $f(xy)=f(x)+f(y)$.

10.2. Решить функциональное уравнение $f(x)=f\left(\frac{x}{1+x}\right)$, $f(x)$ - непрерывная функция.
10.3. Функция f непрерывна в нуле и для любого x удовлетворяет уравнению $f(x)+f\left(\frac{2x}{3}\right)=x.$. Найти f.
10.4. Найти дважды дифференцируемую функцию $\varphi(x)$ такую, что для любых вещественных x,y $\varphi(x+y)\cdot\varphi(x-y)=\varphi^2(x)-\varphi^2(y)$.
10.5. Найти все такие функции f, определенные на множестве R_+ положительных вещественных чисел и принимающие значение в R_+, для которых выполнены следующие условия:
1) $f(x\cdot f(y))=y\cdot f(x)$ при $\forall x,y\in\mathrm{R}_+$,
2) $f(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$.
10.6. Найти все заданные на плоскости дважды дифференцируемые функции такие, что для любого прямоугольника $ABCD$ $\Phi(A)+\Phi(C)=\Phi(B)+\Phi(D)$.
10.7. Найти решение разностного уравнения $y(x+1)-y(x)=f(x)$ равное нулю при $x\le 0$. Здесь $f(x)$ - непрерывная на $(-\infty;+\infty)$ функция, равная нулю на $(-\infty;0]$. Является ли такое решение единственным?
10.8. Найти $f(x)$, если $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

10.9. Найти все определенные на $(0;+\infty)$ дважды дифференцируемые функции $f(x)$ такие, что для всех $x>0$, $f'(x)>0$ и выполнено равенство $f(f'(x))=-f(x)$.

10.10. Найти все функции f, для которых $f(x+y)=f(x)f(y)-xy$ при любых x и y.
10.11. Найти непрерывно дифференцируемое решение функционального уравнения

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy\left(\frac{x^2}{3}+\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{3}\right),\ \ x,y\in\mathbb{R},$ удовлетворяющее условию $f(2)=-2$.

10.12. Найти функцию $f(x)$, непрерывную всюду на вещественной оси за исключением точек $x=0$ и $x=1$ и удовлетворяющую уравнению $f\left(\frac{x}{x+1}\right)+2f\left(x+1\right)=x+1$.

10.13. Пусть функция f непрерывна в нуле и на всей оси удовлетворяет соотношению $2f(2x)=f(x)+x$. Найти f.

10.14. Найти функцию f такую, что $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$ для всех $x\neq\pm1$.

10.15. Найти функцию f такую, что $f(0)=1$ и $(x+1)f(x)=1-f\left(\frac{1}{x}\right)$ для всех $x\neq0$.

10.16. Монотонная функция f для всех x, y удовлетворяет соотношению $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Найти f.

10.17. Доказать, что строго монотонная функция f, удовлетворяющая для всех x, y соотношению $f(x+y)=f(x)f(y)$, является показательной функцией.

10.18. Найти все функции f, удовлетворяющие соотношениям: $xf(y)=yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$, если про f предполагается, что она а) непрерывна; б) любая (то есть нет дополнительных предположений.

10.19. Решить функциональное уравнение: $f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x$.

10.20. Функция f такова, что для любого вещественного x: $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$. Доказать, что f - периодическая.

10.21. Найти функцию f, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} f'(x)=f'(x-1) \\ f(x)+f(x-1)=x \end{cases}.$$

10.22. Найти все бесконечно дифференцируемые функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\ \ x,y\in\mathbb{R}.$$

10.23. Доказать, что если не равная тождественно нулю функция f, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяет тождеству

$$f(x)f(y)=f(x+y),\ \ x,y\in\mathbb{R},$$

и дифференцируема в точке $x=0$, то она бесконечно дифференцируема в любой точке $x\in\mathbb{R}$.

10.24. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям: $f(x) \in C^2(-\infty,\infty)$ и для любых x, h верно $f(x+h) - f(x) = h f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$. Доказать, что функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = ax^2 + bx + c$.

§ 11. Ряды.

Некоторые полезные ряды.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *сходится при* $s > 1$, *расходится при* $s \le 1$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$

При проверке сходимости часто бывает полезна формула Стирлинга: $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Оценка ряда:

Пусть $f(x)$ *монотонно убывает и* $f(x) > 0$ *для всех положительных* x. *Тогда* $\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) \le \int_0^{\infty} f(x)dx$.

Важно помнить, что у сходящегося ряда с положительными членами от группировки и перестановки членов сумма не меняется, если же ряд знакопеременный и условно сходящийся, то меняется.

Для вычисления суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *можно применять следующие приемы.*

1) *Свести ряд к одному или нескольким известным (например, к геометрической прогрессии);*

2) *Свести ряд к ряду вида* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k-1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_1) = -b_1$;

3) *Рассмотреть степенной ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. *Найти его сумму: (i) с помощью известных рядов Тейлора; (ii) а) продифференцировать (проинтегрировать) по* x, *сведя его к геометрической прогрессии или другому ряду, сумма которого известна (то есть действие (дифференцирование или интегрирование) выбирать, стараясь добиться сокращения «ненужных» для геометрической прогрессии множителей), б) найти сумму получившейся геометрической*

прогрессии, в) вернуться к исходному ряду с помощью обратного действия (интегрирования или дифференцирования) по x*, г) положить* $x=1$.

4) Рассмотреть тригонометрический ряд (или ряд по системе экспонент) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k x)$ *(выбрать* x, ω_k *так, чтобы получался исходный ряд) и найти функцию, для которой это ряд Фурье, а потом просто подставить в эту функцию нужное значение аргумента* x.

5) Для определения суммы функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *возможно, удастся составить дифференциальное уравнение, которому ряд удовлетворяет, и решить его.*

Ряд Тейлора: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. *Остаточный член в форме Лагранжа:* $r_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $c\in(x_0,x)$. *Ряд Тейлора сходится к функции* $f(x)$*, если остаточный член стремится к нулю.*

Ряд Фурье функции с периодом T:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{T}\right),$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx.$$

Ряд Фурье сходится к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Простые свойства ряда, связанные со свойствами симметрии функции:

если функция четна ($f(-x)=f(x)$*), то* $b_n=0$*;*

если функция нечетна ($f(-x)=-f(x)$*), то* $a_n=0$*;*

если функция такова: ($f(x+\frac{T}{2})=f(x)$*), то* $a_{2n+1}=b_{2n+1}=0$*;*

если функция такова: ($f(x+\frac{T}{2})=-f(x)$*), то* $a_{2n}=b_{2n}=0$

11.1. Доказать, что если ряд $\sum u_n^2$ сходится, то сходится и ряд $\sum\frac{u_n}{n}$.

11.2. Показать, что:

а) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)$;

б) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots=\frac{15}{16}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)$.

11.3. Исследовать сходимость:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

б) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}$.

11.4. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ - сходящийся положительный ряд $r_n=\sum_{k=n}^{\infty}u_k$. Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{r_n}$ расходятся.

11.5. Доказать: если в гармоническом ряде $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ вычеркнуть все члены, знаменатели которых, записанные в десятичной системе, содержат цифру 9, то оставшаяся часть ряда будет сходящейся.

11.6. Пусть $0, u_1, u_2, \ldots$ - последовательность, задаваемая соотношением $u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}, f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$. Доказать, что $f(x)=-e^{ax}f(-x)$.

11.7. Найти множество значений функции $u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^n t}{n!}\sin(nt-\sin^2 t),\ t\in \mathrm{R}$.

11.8. Пусть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n>0$ и последовательность a_n убывающая. Доказать, что $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

11.9. Ряд $\sum a_n=a$ - сходится, $a_n>0,\ S_n$ - его частичные суммы. Доказать, что ряд $\sum na_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum(a-S_n)$.

11.10.Доказать, что разложение в ряд Маклорена функции $x^{-1}\ln(1+x)$ имеет вид $1+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots$, где

$$C_n=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \ldots & 0\\ . & . & . & . & \ldots & .\\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \ldots & \frac{1}{2}\end{vmatrix}.$$

11.11. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{arctg(n+1)}{arctg(n)}\right)$?

11.12. Известно, что $a_n \geq 0$ и $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$ для любого n. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма не превосходит $2ea_1$.

11.13. Найти все x, при которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}\sin nx$.

11.14. Пусть положительный ряд $\sum a_n$ - сходится. Сходится ли ряд $\sum_{p=1}^{\infty}(a_1a_2...a_p)^{\frac{1}{p}}$.

11.15. $a_n > 0$; $\sum a_n^{-1}$ - сходится. Сходится ли $\sum_n \frac{n}{a_1+a_2+...+a_n}$?

11.16. $a_n > 0$; $\sum a_n$ - сходится, $c_n = a_n - a_{n+1}$ - убывающая последовательность. Доказать, что $a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1} \to +\infty$.

11.17. Пусть $f_0(x) = e^x$; $f_{n+1}(x) = xf_n{}'(x)$. Доказать, что $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!} = e^e$.

11.18. $f\colon [0;\infty) \to [0;\infty)$ - строго возрастающая непрерывная функция такая, что $f(0)=0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ сходится. f^{-1} - функция, обратная к f. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ сходится.

11.19. Известно, что для последовательности $\{x_k\}$ неотрицательных чисел существует такое c, что для $k = 0, 1, 2, 3,...$ $\sum_{n=0}^{\infty} x_n x_{n+k} \leq cx_k$. Доказать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится.

11.20. Найти сумму ряда $1+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}+...$.

11.21. Исследовать сходимость ряда $e^{-\left|\ln\left|tg1^\circ\right|\right|} + e^{-\left|\ln\left|tg1^\circ\right|\ln\left|tg3^\circ\right|\right|} + ... + e^{-\left|\ln\left|tg1^\circ\right|\ln\left|tg3^\circ\right|\cdot...\cdot\ln\left|tg(2k-1)^\circ\right|\right|} + ...$.

11.22. Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2n-1})}$.

11.23. Найти сумму ряда $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

11.24. Пусть n - натурально. Доказать, что $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^{k-n}}{k!}\neq 0$ при всех $x\in\mathrm{R}$.

11.25. Пусть $\{a_n\}$ - монотонно возрастающая положительная последовательность. Доказать, что сходимость ряда $\sum_{n}\arccos^2\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ равносильна ограниченности $\{a_n\}$.

11.26. Пусть $\{p_n\}$ - последовательность простых чисел, занумерованных в порядке возрастания $(p_1=1)$. Доказать неравенство:
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{-1}\ldots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)^{-1}>\sum_{1\le k\le p_m}\frac{1}{k}.$$

11.27. Исследовать на сходимость ряд с общим членом $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e$.

11.28. Показать, что для любого фиксированного $m\geq 2$ ряд
$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m-1}-\frac{x}{m}+\frac{1}{m+1}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{x}{2m}+\frac{1}{2m+1}+\ldots+\frac{1}{3m-1}-\frac{x}{3m}+\ldots$$
сходится только для одного значения x и найти сумму ряда для этого x.

11.29. Найти $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$.

11.30. Последовательность x_n такая, что
$$x_1=\frac{1}{2},\ x_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{2}},\ \ n=1,2,\ldots.$$
Докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty}x_n<1{,}025$.

11.31. Найти $\sum_{n=1}^{\infty}arcctg\,2u_n^2$, где
$$u_1=1,\quad u_2=1,\quad u_n=4u_{n-1}-u_{n-2}.$$

11.32. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, если $a_n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(n+1)^{2m}}$.

11.33. Привести пример сходящегося ряда $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ такого, что ряд

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\ln n\right)^{0,01}$ расходится.

11.34. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ - последовательность положительных чисел, удовлетворяющая при любом $n \geq 1$ условию: $\sum_{j=1}^{n} a_j \geq \sqrt{n}$. Доказать, что ряд

$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\ 2}$ расходится.

11.35. Исследовать на сходимость $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k!)}$.

11.36. Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos(4^k x)$ Доказать существование такой константы $C > 0$, что для всех $x_1,\ x_2 \in R$ будет $\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leq C\sqrt{\left|x_1 - x_2\right|}$.

11.37. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k}$.

11.38. Найти область сходимости и просуммировать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} e^{-nx}$.

11.39. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{a_n x} + 1}$ при $x > 0$, если $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n$ при $n = 1, 2, \ldots$.

11.40. Решить уравнение $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = e^{x^2} \left(5x + 4\right)$.

11.41. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{\left(4n\right)!}$.

11.42. Показать, что для любого фиксированного целого $m \geq 2$ ряд сходится только для одного фиксированного значения x и найти сумму ряда для этого x.

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \frac{x}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m-1} - \frac{x}{2m} + \frac{1}{2m+1} + \ldots + \frac{1}{3m-1} - \frac{x}{3m} + \frac{1}{3m+1} + \ldots$$

11.43. Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где $a_k \geq 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots.,$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1, \sum_{k=0}^{\infty} k a_k < n,\ n -$ заранее фиксированное натуральное число, при этом отрезок [0,1] содержится внутри интервала сходимости степенного ряда. Доказать, что на интервале (0,1) уравнение $f(x)=x^n$ не имеет решения.

11.44. Ряд $S(x)=f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\ldots$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Выразить $S(x)$ через $f(x)$, если $S(0)=0$. Для какой f будет $S(x)=x^2$?

§ 12. Разные задачи.

12.1. Упростить выражение $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\prod\limits_{i\neq j}\frac{1}{x_i-x_j}$.

12.2. 64 спичечных коробка, половина которых повернута этикетками вниз, сложены в виде "шахматной доски". Разрешается перевертывать разом любой вертикальный или горизонтальный ряд коробков, а также переставлять параллельные ряды. Как получить конфигурацию, в которой перевернуты только коробки, расположенные по периметру?

12.3. Можно ли все точки пространства раскрасить в два цвета так, чтобы любой отрезок любой прямой содержал точки обоих цветов?

12.4. В каждой точке M выпуклой области $\Omega\in\mathrm{R}^3$ задано скалярное поле $u(M)$, имеющее во всех точках непрерывный и ограниченный градиент ($|grad(u)|\le a$). Доказать, что для любых двух точек $M,N\in\Omega$ имеет место $|u(N)-u(M)|\le a\left|\overline{MN}\right|$.

12.5. Четыре корабля A,B,C,D плывут в тумане с постоянными н различными скоростями по бесконечному плоскому океану. 5 пар: A и B, B и C, C и A, B и D , C и D чуть не столкнулись (т.е. прошли через одну точку в одно время). Доказать, что тогда A и D тоже должны столкнуться. “Кратные” столкновения по условию не происходят.

12.6. Пусть $P(x)$ - полином с целыми коэффициентами такой, что $P(0)=P(1)=1;\ a_{n+1}=P(a_n),\ n=0,1,\ldots;\quad a_0$ - произвольное целое число. Доказать, что все члены последовательности попарно взаимно просты.

12.7. Пусть $\Phi(x)=4\cdot x(1-x)$ и функциональная последовательность $\Phi_n(x)$ строится рекуррентно $\Phi_n(x)=\Phi(\Phi_{n-1}(x))$. Найти $\int\limits_0^1\Phi_n(x)dx$.

12.8. Известно, что многочлен $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ с целыми коэффициентами обладает следующим свойством: если S - иррациональнее число, то и $f(S)$ - иррациональное число. Доказать, что степень многочлена равна 1.

12.9. Турист стоит на углу квадратно вспаханного поля размером $2\,\text{км} \times 2\,\text{км}$. По пашне он может двигаться со скоростью k км/ч, а по тропе, огибающей поле - со скоростью m км/ч ($m > k$). По какой траектории следует двигаться туристу, чтобы достичь противоположного угла поля за наименьшее время?

12.10. Вычислить сумму $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k C_m^k k^n$, где $n \le m$.

12.11. Какое множество на комплексной плоскости может задавать уравнение $\frac{z^2}{a^2}+\frac{\bar{z}^2}{b^2}=1$ в зависимости от значений параметров a и b $(a>0,\ b>0)$?

12.12. X - квадратная матрица порядка n. Рассмотрим ее определитель как функцию h^2 переменных x_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$ элементов матрицы.

а) Пусть $y_{ij}(x)=\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\det \mathrm{X},\ \mathrm{Y}=(y_{ij})_{i,j=1}$. Найти произведение XY.

б) Вычислить повторный интеграл по всем переменным

$$\int_0^1 dx_{11}\int_0^1 dx_{12}\dots\int_0^1 dx_{21}\int_0^1 dx_{12}\dots\int_0^1 \det \mathrm{X}\,dx_{nn}.$$

12.13. Средним значением зависящей от времени величины называется предел $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$. Найти среднее значение квадрата расстояния от движущейся в плоскости точки до ближайшей точки с целыми координатами, если точка движется по прямой

а) с постоянной скоростью.

б) с постоянным ускорением. Можно считать известными все данные, определяющие движение.

12.14. Часовая стрелка имеет длину a, а минутная - b. Найти расстояние между их концами в тот момент, когда оно изменяется быстрее всего.

12.15. Найти наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a$ (a - фиксировано, $z=x+iy$).

12.16. z_1,z_2,z_3 - комплексные числа, лежащие на единичной полуокружности, не являющееся вещественными одновременно и такие, что $2(z_1+z_2+z_3)-3z_1z_2z_3\in\mathbb{R}$. Доказать, что $\max\limits_k(\arg z_k)\ge\frac{\pi}{6}$.

12.17. Найти все функции, отображающие $[0;1]$ в себя и такие, что для всех точек из $[0;1]$, $|x-y|\le|f(x)-f(y)|$.

12.18. Тяжелый шар опускают в наполненный водой сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса. Осевое сечение конуса - равносторонний треугольник со стороной 1. Найти зависимость объема вытесненной жидкости от радиуса шара и наибольшее значение этого объема.

12.19. Ордината центра тяжести однородной пластины, имеющей форму криволинейной трапеции, ограниченной осями координат, прямой $x = a$ и дифференцируемой кривой, проходящей через точку $(0;1)$, есть линейная функция при всех $a > 0$. Найти эту функцию, если угловой коэффициент асимптоты кривой равен 1.

12.20. Из пункта А наблюдается часть пространства в виде прямого кругового конуса с углом наблюдения φ. Прямолинейно движущаяся цель пересекает область наблюдения на высоте h $(0 < H_1 \le h \le M)$. Найти вероятность того, что при перелете цели через область наблюдения минимальный угол между прямой, соединяющей цель с пунктом А и осью наблюдения меньше x, а минимальное расстояние от цели до оси наблюдения меньше y. Предполагается, что вероятность перелета через любую часть области наблюдения зависит только от объема этой части.

12.21. Пусть x_i - последовательность положительных чисел и $\Delta_k = \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) - \sqrt[k]{x_1 x_2 \ldots x_k}$. Доказать, что последовательность $k\Delta_k$ является неубывающей.

12.22. Скорость пловца в стоячей воде равна v. Он плывет в бесконечно широком потоке, скорость которого постоянна и равна γ, $\gamma < v$. Пловец начинает и кончает движение в фиксированной точке и плывет по кусочно гладкой кривой. Какой наибольший путь преодолеет пловец за время T ?

12.23. Функция f в окрестности нуля имеет непрерывные производные до порядка $(k+1)$ включительно и $f(0) = 0$. Доказать: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{(k)} = \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(0)$.

12.24. Один инженер решил выкопать у себя на даче колодец за три дня. Колодец имеет форму цилиндра глубины H. Помогите ему распределить работу поровну (на три равные части).

12.25. Для числа $\frac{10^{1989}}{\left(10^{221}+3\right)}$ найти две последние цифры, стоящие перед десятичной запятой.

12.26. Пусть $\alpha_n = \min\limits_{m \in \mathrm{N}} \left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right|$. Доказать: $\frac{1}{4n^2} < \alpha_n < \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

12.27. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x = u + u^2 \cos v,\ y = u^2,\ z = u^2 + (1-u)\sin v \quad (u \in [0;1];\ v \in [0;2\pi])$.

12.28.Доказать, что вычет функции $\frac{1}{(1-e^z)^n}$ в нуле раен -1 для любого натурального n.

12.29. В выпуклом n-угольнике наудачу выбираются 2 диагонали. Какова вероятность того, что они пересекаются? (Точкой пересечения считается общая точка двух несовпадающих диагоналей, лежащая внутри многоугольника.)

12.30. Доказать, что ближайшее к $\dfrac{n!}{e}$ целое число делится на $(n-1)$.

12.31. Найти $\max\limits_{z\in\mathbb{C},|z|\le 1}\left|az^n+bz^k\right|$, где $k,n\in\mathbb{N}$, $a,b\in\mathbb{C}$.

12.32. Пусть $f(x)$ - положительная убывающая дифференцируемая выпуклая вниз функция, определенная на $(-\infty,\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. В области на плоскости, ограниченной графиком функции и осью OX расположен точечный источник света. Источник находится выше оси OX, лучи света отражаются от границ области по законам геометрической оптики. Доказать, что найдется такое $N>0$, что часть области, расположенная правее прямой $x=N$, не будет освещена.

§ 13. Некоторые дополнения.

В этом параграфе собраны задачи, которые чаще встречаются в школьных, чем в студенческих олимпиадах, но автору кажется, что знакомство с соответствующими идеями будет полезно и при подготовке к студенческой олимпиаде.

§ 13.1. Целая и дробная части числа.

Целой частью $[x]$ *числа* x *называется наибольшее целое число, не превосходящее данное. Дробной частью* $\{x\}$ *числа называется разность числа и его целой части:* $\{x\}=x-[x]$.

Имеют место неравенства $[x]\le x<[x]+1,\ 0\le\{x\}<1$.

Если хотя бы одно из чисел x,y *целое, то* $[x+y]=[x]+[y]$.

Имеет место тождество $[\frac{x}{m}]=[\frac{[x]}{m}]$.

Показатель степени, с которым простое число p *входит в каноническое разложение* $m!$, *равен* $[\frac{m}{p}]+[\frac{m}{p^2}]+\ldots+[\frac{m}{p^s}]$, *где* s *определяется соотношением* $p^s\le m<p^{s+1}$.

13.1.1. Положительное число x таково, что $[x]\cdot\{x\}=100$. Чему может быть равно число $[x^2]-[x]^2$?

13.1.2. Дана функция $f(x)=\lg[x]+\lg\{x\}$. Для некоторого вещественного числа a оказалось, что $f(a)=2$. Докажите, что $f(a^2)>4$.

13.1.3. Сколько раз в последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = [\sqrt{2n} + \frac{1}{2}]$, встречается число 1511?

13.1.4. Найти все такие числа a, что все числа $[a],[2a],\ldots,[Na]$ различны между собой, и все числа $[\frac{1}{a}],[\frac{2}{a}],\ldots,[\frac{N}{a}]$ также различны между собой (натуральное N фиксировано).

13.1.5. Натуральные числа m и n взаимно просты и $n < m$. Какое число больше: $[1\cdot\frac{m}{n}]+[2\cdot\frac{m}{n}]+\ldots+[n\cdot\frac{m}{n}]$ или $[1\cdot\frac{n}{m}]+[2\cdot\frac{n}{m}]+\ldots+[m\cdot\frac{n}{m}]$?

13.1.6. Докажите, что ни для какого натурального n число $[\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}]$ не является квадратом натурального числа.

13.1.7. Найдите все положительные решения уравнения $5[x^2]+5[x]-x^2-x=2000$.

13.1.8. Вычислить $\iint\limits_D [x^2+y^2]dxdy$, где $D=\{(x,y): -1\le x\le 1, -1\le y\le 1\}$.

§ 13.2. Решение уравнений с помощью автоморфных функций.

Функция *f(x)* называется автоморфной (антиавтоморфной), *если она имеет нетривиальный инвариант (антиинвариант), то есть существует такая дробно-линейная функция* $\psi(x)\ne x$, *что* $\psi(x)\in D(f)$ *для* $\forall x\in D(f)\bigcap D(\psi)$, *и справедливо* $f(\psi(x))=f(x)$. $\left(f(\psi(x))=-f(x)\right)$.

Четные и периодические функции являются автоморфными.

Если график функции имеет вертикальную ось симметрии $x=a$, *то функция является автоморфной (*$\psi(x)=2a-x$ *- инвариант f(x)).*

Например, квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\ne 0)$ *является автоморфной функцией,* $\psi(x)=-\dfrac{b}{a}-x$ *- инвариант f(x).*

Укажем некоторые свойства инвариантов:

1) *если дробно-линейная функция* $\psi(x)$ *- инвариант (антиинвариант)* $f(x)$, *то* $\psi^{-1}(x)$ *также инвариант (антиинвариант)* $f(x)$;
2) *если дробно-линейные функции* $\psi(x)$, $\varphi(x)$ *- инварианты (антиинварианты)* $f(x)$, *то* $\varphi(\psi(x))$ *- инвариант* $f(x)$;
3) *если* $\psi(x)$ *- инвариант* $f(x)$, *а* $\varphi(x)$ *- антиинвариант* $f(x)$, *то* $\varphi(\psi(x))$ *и* $\psi(\varphi(x))$ *- антиинварианты* $f(x)$.

Пример:

$$f(x)=\frac{\left(x^2-x+1\right)^3}{x^2(x-1)^2}$$ *- автоморфная и имеет 5 инвариантов:*

$$\psi_1=1-x, \qquad \psi_3=\frac{1}{1-x}, \qquad \psi_5=\frac{x}{1-x}.$$

$$\psi_2=\frac{1}{x}, \qquad \psi_4=\frac{x-1}{x},$$

Нечетные и антипериодические функции являются антиавтоморфными. Пример:

$f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{x^2+1}$ *- антиавтоморфна,* $\psi_1=-x$, $\psi_2=\dfrac{1}{x}$ *- антиинварианты.*

Но $f(x)$ *- автоморфна,* $\psi(x)=-\dfrac{1}{x}$ *- инвариант.*

Рассмотрим уравнение

$$f(g(x))=f(h(x)), \qquad (*)$$

где $g(x)$ *и* $h(x)$ *- некоторые функции. Для его решения применим инварианты автоморфных функций. Если* $\psi(x)$ *- инвариант* $f(x)$*, то решения уравнения*

$$\psi(g(x))=h(x), \qquad (**)$$

если они принадлежат области определения уравнения (*), будут решениями (*).

13.2.1. Решить уравнение $[x]^2+\dfrac{1}{[x]^2}=\{x\}+\dfrac{1}{\{x\}}$, где $[x]$ - целая часть x, $\{x\}$ - дробная часть x.

13.2.2. При любом $n\in\mathbb{N}$ и любых $a,b:a\neq b$ решить уравнение

$$\left(x-a\right)^{2n}+\left(x-b\right)^{2n}=\left(a-b\right)^{2n}.$$

Для решений уравнений вида $f(g(x))+f(h(x))=0$ *естественно применять антиавтоморфные функции. Если* $\psi(x)$ *- антиинвариант* $f(x)$*, то решения уравнения* $f(\psi(g(x)))=f(h(x))$ *будут решениями исходного.*

13.2.3. Решите уравнение $(a+\sin^n x)/\cos^m x+(a+\cos^n 3x)/\sin^m 3x=0$, где n – четное натуральное число, m – нечетное натуральное число; $a>0$.

13.2.4. Решить уравнение: $\sin^3 2x\,|\operatorname{tg}2x|=\cos^3 3x\,|\operatorname{ctg}3x|$;

13.2.5. Для любого натурального n решить уравнение:

$$\sum_{k=0}^{n}(2x+k)^4=\sum_{k=0}^{n}(x^2-3x+1+k)^4;$$

13.2.6. Решить уравнение: $[x]^2+\{x\}^3=\dfrac{1}{[x]^2}+\dfrac{1}{\{x\}^3}$.

13.2.7. Решить уравнение: $\dfrac{4-\{x\}}{\{x^2\}-3\{x\}+3}=\dfrac{4-[x]}{[x^2]-3[x]+3}$.

13.2.8. Решить уравнение:

$$x^2+2x-([\frac{x^2+x+1}{2}]+[\frac{x+1}{2}])=0.$$

13.2.9. Решить уравнение:

$$\sum_{k=0}^{n}((x+k)|x+k|+(x^2+2nx+k)|x^2+2nx+k|)=0.$$

13.2.10. Решить уравнение:

$$\frac{4x^2+1}{2x}\ln|2x|+\frac{x^2-6x+10}{x-3}\ln|x-3|=0.$$

§ 13.3. Решение уравнений вида $f(f(\ldots f(x)\ldots))=x$

Рассмотрим уравнение

$$f_n(x)=x, \qquad (1)$$

где $f_n(x)$ *-* n*-кратная суперпозиция функции* $f(x)$, $n\geq 3$. *Вместе с уравнением (1) рассмотрим уравнения*

$$f(x)=x, \qquad (2)$$

$$f(f(x))=x. \qquad (3)$$

Приведем некоторые утверждения, связывающие эти уравнения.

1. *Уравнение (1) является следствием уравнения (2)*
2. *Если либо* $f(x)\leq x$ *при всех* x *из ОДЗ уравнения (1), либо* $f(x)\geq x$ *при всех* x *из ОДЗ уравнения (1), то уравнения (1) и (2) – равносильны.*
3. *Если функция* $f(x)$ *при некотором* a *удовлетворяет одному из следующих условий:*

$$1.\begin{cases} f(x)\leq x,\ \text{если}\ x\leq a \\ f(x)\geq x,\ \text{если}\ x>a \end{cases} \qquad 2.\begin{cases} f(x)\geq x,\ \text{если}\ x<a \\ f(a)=a \\ a\leq f(x)\leq x,\ \text{если}\ x>a \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} x\leq f(x)\leq a,\ \text{если}\ x<a \\ f(a)=a \\ f(x)\leq x,\ \text{если}\ x>a \end{cases}$$

то уравнения (1) и (2) равносильны.

4. *Если функция* $f(x)$ *является возрастающей, то уравнения (1) и (2) – равносильны.*
5. *Если функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на промежутке и уравнение (2) не имеет решений, то и уравнение (1) их тоже не имеет.*
6. *Пусть функция* $f(x)$ *- убывающая. Если* n *- нечетное число, то уравнение (1) равносильно уравнению (2), если же* n *- четное число, то – уравнению (3).*
7. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и дифференцируема на интервале* (a,b). *Если или* $|f'(x)|>1$ *при всех* x *из* (a,b), *или* $|f'(x)|<1$ *при любых* x *из* (a,b), *то уравнения (1) и (2) – равносильны.*

С уравнением (1) естественным образом связаны система уравнений

$$\begin{cases} f(x_1)=x_2 \\ f(x_2)=x_3 \\ \quad\dots \\ f(x_n)=x_1 \end{cases} \tag{4}$$

и уравнение

$$f_{n-1}(x)=f^{-1}(x), \tag{5}$$

где $f^{-1}(x)$ *- функция, обратная к* $f(x)$.

13.3.1. Решить уравнение

$$1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{\vdots \atop 1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{x}}}}=x,$$ где знак деления повторяется n раз.

13.3.2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x_1 = x_2 \\ \sin x_2 = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ \sin x_n = x_1 \end{cases}$$

13.3.3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5-2[x_1]=2x_2 \\ 5-2[x_2]=2x_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 5-2[x_n]=2x_1 \end{cases}$$

13.3.4. Решить уравнение: $4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{\begin{array}{c}\vdots\\ 4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{x}}\end{array}}}=x$, где знак деления повторяется n раз.

13.3.5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1+2[x_1]-3=x_2+[x_2] \\ 3x_2+2[x_2]-3=x_3+[x_3] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3x_n+2[x_n]-3=x_1+[x_1]. \end{cases}$$

§ 13.4. Геометрические приемы решения уравнений

При решении некоторых уравнений полезным является использование геометрических соображений. Рассмотрим ряд уравнений такого типа.

$f(g(x))=x.$

$f(g(x))=x \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=y, \\ f(y)=x. \end{cases}$ *То есть решение дается пересечением графика* $g(x)$ *и симметричного относительно* $y=x$ *образа графика* $f(x)$.

Уравнение эквивалентно совокупности систем $\begin{cases} g(x)=x, \\ f(x)=x. \end{cases}$ $\begin{cases} g(x)=a-x, \\ f(a-x)=x. \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

$f(f(x))=x.$

Решение – координаты точек на графике функции $f(x)$, *симметричные относительно* $y=x$. *Уравнение эквивалентно системе* $\begin{cases} f(x)=y, \\ f(y)=x. \end{cases}$

Свойства.

Если $f(x)$ *определена и непрерывна на* $D(f)$ *и уравнение* $f(x)=x$ *не имеет решений, то уравнение* $f(f(x))=x$ *не имеет решений.*

Если $f(x)$ *возрастает (не обязательно строго), то* $f(f(x))=x$ *и* $f(x)=x$ *эквивалентны.*

Замечание. Для убывающих функций это неверно (пусть $f(x)=-x$, *тогда* $f(f(x))=x$ $(x=x)$ *и* $f(x)=x$ $(x=-x)$ *неравносильны).*

Если $f(x)$ *многочлен, то* $f(f(x))-x$ *делится на* $f(x)-x$.

$g(g(x))=-x$. *(это частный случай первого уравнения при* $f(x)=-g(x)$*).*

Для решения уравнения необходимо и достаточно найти все точки A *графика функции* $g(x)$, *которые при повороте на* $\frac{\pi}{2}$ *по часовой стрелке перейдут в точки графика той же функции. При этом абсциссы точек* A *есть решения уравнения (см. рис. 3 в ответах). Уравнение связано с системой* $\begin{cases} g(x)=y, \\ g(y)=-x. \end{cases}$

$$f(f(x)+h(x))+h(x)=x. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является следствием уравнения

$$f(x)+h(x)=x. \qquad (2)$$

Если $f(x)$ *возрастает, то (1) и (2) эквивалентны.*

С уравнением (1) естественно связана система уравнений

$$\begin{cases} f(x)+h(x)=y, \\ f(y)+h(x)=x. \end{cases}$$

Пусть a *- решение уравнения (2). Точка* $A(a,f(a))$ *лежит на* L: $y=x-h(a)$ *(для каждого решения - своя), то есть симметрична относительно* L *самой себе. В общем случае: число* a *есть решение уравнения (1) тогда и только тогда, когда для точки* $A(a,f(a))$ *найдется точка* B *на графике функции* $f(x)$, *симметричная относительно* L *точке* A.

13.4.1. Решить уравнение: $\left[x^2\right]-\left\{x^2-1\right\}-1=x.$

13.4.2. $\begin{cases} x[x]-1=y, \\ y[y]-1=x. \end{cases}$

13.4.3. $\begin{cases} \left| x - 2[\frac{x+1}{2}] \right| = y, \\ \left| y - 2[\frac{y+1}{2}] \right| = -x. \end{cases}$

13.4.4. $\begin{cases} \{|x|\} - x = y, \\ \{|y|\} - y = -x. \end{cases}$

13.4.5. $3 - \left| \left| 3 - \left| |x| - 2 \right| + x^2 \right| - 2 \right| = x - x^2.$

§ 13.5. Игровые задачи и инварианты.

В задачах о преобразованиях обычно ключевым моментом является поиск инварианта. Рекомендуется сначала проверить наличие стандартных инвариантов (ранг матрицы при ее элементарных преобразованиях, длина вектора при ортогональном преобразовании и т.п.), а затем начать поиск специфических для данной задачи инвариантов. В игровых задачах инвариантом обычно бывает позиция, которая воспроизводится после одного или нескольких ходов.

13.5.1. В алфавите языка АУ всего две буквы А и У. От следующих восьми замен буквосочетаний смысл любого слова не меняется: УАУ↔АА, УАА↔АУ, ААУ↔УА, ААА↔УУ (замену можно делать в любом месте слова). Являются ли в этом языке синонимами слова УАА и АУУ?

13.5.2. В языческом храме по кругу подвешены 12 бутылок, одна из которых висит горлышком вниз, а остальные горлышком вверх. Жрец утверждает, что если вместо неё перевернутой окажется соседняя бутылка стоит ожидать крупных неприятностей: а) если добиться этого переворачивая по 6 соседних бутылок, то будет гром и молния, б) по 5- землетрясение, в) по 4- наводнение, г) по 3- конец света. Какие стихийные бедствия жрец может вызвать?

13.5.3. Круг разделён на 6 секторов. В каждом написано число. Разрешается одновременно увеличивать числа в любых двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными, если в начале они такие: 1,0,1,0,0,0?

13.5.4. В углу таблицы 20х20 стоит минус, в остальных клетках- плюсы. Разрешается выбирать любую строку или столбец и менять все стоящие там знаки на противоположные. Можно ли такими операциями получить таблицу из одних плюсов?

13.5.5. По окружности расставлены 200 единиц. Каждую минуту берут 12 подряд идущих чисел, меняют знак у каждого из них и записывают их на те же места в обратном порядке. Докажите, что если после этого поменять знак у 100 чисел, идущих через одно, то на окружности будет ровно 100 единиц.

13.5.6. Дана тройка чисел: $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Разрешается любые два из них заменять такими: их суммой, деленной на $\sqrt{2}$, и их разностью, деленной на $\sqrt{2}$. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, получить тройку чисел $1, \sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$?

13.5.7. Даны три числа: 2000, 2001, 2002. За ход разрешается заменить числа a, b, c на ab/c, ac/b, bc/a. Можно ли через несколько ходов получить числа 1998, 2001, 2004?

§ 13.6. Вычисление определителей.

Основные способы вычисления определителей n-го порядка таковы.

1. *Свести определитель к треугольному виду с помощью элементарных преобразований.*
2. *Рассмотреть определитель как полином от некоторой переменной, найти его корни, то есть значения переменной, при которой определитель обращается в ноль (например, у него становятся пропорциональными какие-то строки). Тогда определитель есть произведение линейных множителей, соответствующих корням, и коэффициента при старшей степени полинома, который обычно легко найти.*
3. *Представить определитель в виде суммы определителей, пользуясь формулой (которая справедлива, разумеется, для любой строки или столбца):*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. *Выразить определитель порядка n через определитель порядка n-1 (или n-2) и применить рекуррентное соотношение n раз.*

Если рекуррентное соотношение имеет вид:

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n > 2,$$

то решить уравнение $x^2 - px - q = 0$. *Пусть* α, β *– его корни. Тогда* $D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$. D_1 *и* D_2 *вычисляются непосредственно, подставляются в формулу при* $n = 1, 2$, *что дает систему для определения постоянных* C_1, C_2. *Если* $\alpha = \beta$, *то* $D_n = \alpha^n((n-1)C_1 + C_2)$.

5. *С целью получить определитель, который легко вычисляется изменить элементы определителя, используя свойство: если ко всем элементам определителя прибавить одно и то же число, то он увеличится на произведение этого числа на сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя.*
6. *Использовать свойство*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Возможно два варианта. а) Чтобы вычислить $\det C$ *представить C в виде произведения матриц A и B, определители которых легко вычисляются. б) Чтобы вычислить* $\det C$*, домножить C справа (или слева) на неособую матрицу B (*$\det B \neq 0$*), такую что ее определитель и определитель матрицы CB (или, соответственно, BC) легко вычисляются. Тогда искомый определитель находится по формуле:*

$$\det C = \frac{\det(CB)}{\det B}.$$

7. *Учесть связь определителя с объемом. Объем* V_n $n-$*мерного гиперпараллелепипеда, построенного на векторах* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *:*

$$V_n^2 = \begin{vmatrix} (x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \ldots & (x_1,x_n) \\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & \ldots & (x_2,x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_n,x_1) & (x_n,x_2) & \ldots & (x_n,x_n) \end{vmatrix}.$$

Если векторы x_i *заданы координатами в ортонормированном базисе, то*

$$V_n = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}, \quad x_i = \begin{pmatrix} \xi_{1i} \\ \xi_{2i} \\ \ldots \\ \xi_{ni} \end{pmatrix}.$$

Имеет место неравенство Адамара:

$$V_n^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}^{\ 2}.$$

13.6.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n & n & n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{vmatrix}$. 13.6.2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

13.6.3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & x-2 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & x-n+1 \end{vmatrix}$.

13.6.4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^{\ 2} & x_2^{\ 2} & x_3^{\ 2} & \ldots & x_n^{\ 2} \\ . & . & . & . & . \\ x_1^{\ n-1} & x_2^{\ n-1} & x_3^{\ n-1} & \ldots & x_n^{\ n-1} \end{vmatrix}$.

13.6.5. Доказать, что определитель, все элементы какой-либо строки (или столбца) которого равны единице, равен сумме алгебраических дополнений всех элементов этого определителя.

13.6.6. Пусть $\{a_i(t)\}$, $\{b_i(t)\}$, $i = 1,2,\ldots n -$ линейно независимые системы функций. Доказать, что следующий определитель $m-$го порядка $(m > n)$:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t_1)b_i(t_1) & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t_1)b_i(t_2) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t_1)b_i(t_m) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t_2)b_i(t_1) & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t_2)b_i(t_2) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t_2)b_i(t_m) \\ . & . & . & . \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t_m)b_i(t_1) & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t_m)b_i(t_2) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t_m)b_i(t_m) \end{vmatrix}.$$

13.6.7. $\begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & n+2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & n+3 & \dots & 3 & 3 \\ . & . & . & . & . & . \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 2n-1 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & 2n \end{vmatrix}$. 13.6.8. $\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ . & . & . & . \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

13.6.9. Пусть $f(x) = \det(A + xB),\ x \in \mathbb{R},\ A, B -$ квадратные матрицы порядка n, причем все элементы матрицы B равны 1. а) Найти $f''(x)$. б) Найти $f'(x)$ при условии, что $n = 2k, k \in \mathbb{N},\ a_{ij} = -a_{ji}$.

13.6.10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix}$. 13.6.11. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$.

13.6.12. Найти определитель $\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{n+2} \\ . & . & . & . & . \\ S_n & S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n} \end{vmatrix}$, где $S_k = 1^k + 2^k + 3^K + \dots + n^k$.

13.6.13. Найти определитель $2n-$го порядка матрицы $\begin{pmatrix} A(1) & A(2) \\ A(2) & A(3) \end{pmatrix}$, где $A(k) - n \times n$ матрица вида $A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & k \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

13.6.14. Вычислить определитель $\Delta(k) = |a_{ij}(k)|$ $n-$го порядка, где $a_{ij}(k) = C_{k+i-1}^{j-1}$. C_p^q – биномиальные коэффициенты ($C_p^q = 0$ при p, q), $k = 0, 1, 2, \dots$.

13.6.15. Пусть $K(x,t)$ - непрерывная функция в квадрате $a \le x,t \le b$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{n!}$ сходится. Здесь

$$d_n = \int_a^a dt_1 \int_a^a dt_2 \ldots \int_a^a dt_n \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \ldots & K(t_2,t_n) \\ . & . & \ldots & . \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix}.$$

13.6.16. Как изменится определитель 2008-го порядка $\det\{a_{ik}\}$, если каждый его элемент a_{ik} умножить на $2008^{i\text{-}k}$? А определитель 2007-го порядка?

РЕШЕНИЯ

1.1. $$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} =$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{2}{3}.$$

$(k^2+k+1) = \left((k+1)^2-(k+1)+1\right)$.

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{r=0}^{n-1}\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{r}{n}\right)^2} = \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{4}.$

1.3. Этот предел равен $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \dfrac{\pi}{4}.$

1.4. $\ln y_n = \ln \sqrt[n]{\prod\limits_{p=1}^{n}\left(1+\dfrac{p}{n}\right)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{p}{n}\right)$. Это интегральная сумма

для $\int\limits_0^2 \ln x dx$, где $x_p^{(n)} = 1+\dfrac{p}{n} \Rightarrow \ln y_n \to \int\limits_0^2 \ln x dx = \left(x\ln x - x\right)\Big|_0^2$

$2\ln 2-1;\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^{2\ln 2-1} = \dfrac{4}{e}.$

1.5. *Решение 1.*

Докажем сначала, что $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ по индукции. Для $n=1$

- верно. Пусть верно для n : $\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\sqrt{2n+1}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} < 1.$

Рассмотрим выражение для $n+1$: $\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)\sqrt{2n+3}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+2)} =$

$$\underbrace{\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\sqrt{2n+1}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}}_{\text{<1 по предположению}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{2n+2}}_{\text{<1,т.к.}} < 1.$$

$$\frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3}}{2n+2} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)(2n+3) < (2n+2)^2 \Leftrightarrow 3<4$$

Решение 2.

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} \underbrace{\sin x dx}_{d\tau} = -\sin^{2n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2n-1)\sin^{2n-2} x\cos^2 dx = (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2} x(1-\sin^2 x)dx =$$

$$=(2n-1)I_{2n-2}-(2n-1)I_{2n} \Rightarrow I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}I_{2n-2} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$$

т.е. надо найти

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} xdx = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^{2n} xdx}_{+1} + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} xdx\right).$$

Для $\forall\varepsilon>0$ $|I_2|\le\varepsilon$. На $\left[0;\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right]\sin^{2n} x\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^{2n} xdx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \lim_{n\to\infty} \sin^{2n} x dx = 0, \text{ т.е. } \forall\varepsilon > 0 \exists N : n > N \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \right| < \varepsilon + \varepsilon .$$

Решение 3.

$a_n = \dfrac{(2n)!}{((2n)!!)^2} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}((n)!)^2}$. По формуле Стирлинга получаем

$$a_n = \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi n} \bullet 2^{-2n} \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \frac{1}{2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0 .$$

Решение 4.

$\ln a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1 - \dfrac{1}{2k}) \sim -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$ - ряд расходится как эквивалентный гармоническому, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

1.6. Найдем

$$a + (a+d)q + (a+2d)q^2 + \ldots + (a+nd)q^n = a(1+q+q^2+\ldots+q^n) +$$
$$+d\left[(1+q+q^2+\ldots+q^n) + (q^2+q^3+\ldots+q^n) + \ldots + (q^n)\right] =$$
$$= \frac{1}{q-1}\left(a(q^{n+1}-1) + d\left(nq^{n+1} - \frac{q^{n+1}-q}{q-1}\right)\right);$$

$$1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n} = n + 10(n-1) + 10^2(n-2) + \ldots + 10^n \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9} - n\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1+11+\ldots+111\ldots1}{10^n} = \frac{10}{81}.$$

Решение 2.

Поделим почленно, тогда искомый предел- это сумма ряда:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+11+\ldots+111\ldots1}{10^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{1}{10}\right)^n$. Данная сумма находится стандартным способом с использованием функциональных рядов:

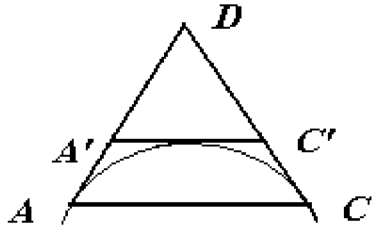
$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)' = z\left(\frac{z}{1-z}\right)' = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad z = \frac{1}{10}.$$

1.7.

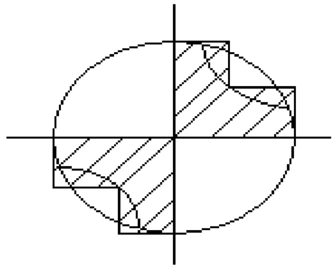
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} <$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\to 1.$$

1.8. $\dfrac{\Delta}{\Delta'}=\dfrac{S_{ADC}}{S_{A'D'C'}}=\left(\dfrac{AC}{A'C'}\right)^2=\left(\dfrac{2a+2a\cos\alpha}{2a}\right)=(1+\cos\alpha)^2\underset{\alpha\to 0}{\to}4.$



1.9. Из чертежа видно, что площадь заштрихованной фигуры равна $2(2R-1)$



и

$$\frac{\pi R^2}{2}\le S(R)\le\frac{\pi R^2}{2}+2(2R-1)\ \Rightarrow\ R^{-2}S(R)\underset{R\to\infty}{\to}\frac{\pi}{2}.$$

1.10. Так как $y_{k+1}=x_{k+1}+\dfrac{x_k}{2}\le x_k+\dfrac{x_{k-1}}{2}=y_k$, то по теореме Вейерштрасса существует y: $y_k=y+c_k$, где последовательность c_k монотонно убывает к нулю. Положим $y_0=x_0$, тогда, суммируя в пределах $1\le k\le p$ равенства $(-2)^k x_k=(-2)^k(y+c_k)+(-2)^{k-1}x_{k-1}$. Найдем следующее представление для x_p: $x_p=\dfrac{y}{3}\left(2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^p\right)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^p\sum\limits_{k=1}^{p}(-2)^k c_k$. Но по теореме Штольца $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^p\sum\limits_{k=0}^{p}(-2)^k c_k=\lim\limits_{p\to\infty}(-2)^p\dfrac{c_p}{2^p-2^{p-1}}= \ =2\lim\limits_{p\to\infty}(-1)^p c_p=0$, так что $x_p\to\dfrac{2}{3}y$ и последовательность сходится.

Решение 2.

Последовательность $z_k=\max\{x_k,x_{k-1}\}$ невозрастающая и ограниченная снизу нулем, значит она имеет предел. Пусть $d_k=z_k-\min\{x_k,x_{k-1}\}$,. $d_k\ge 0$, $x_{k+1}\le z_k-d_k/2$, $x_{k+2}\le z_k-d_k/4$, то есть $z_{k+2}\le z_k-d_k/4$. Но тогда $d_k\le z_k-z_{k+2}$, а значит, $d_k\to 0$. Учитывая определение z_k,d_k получаем, что x_k имеет предел.

1.11. Введем $f(x)=x(1-x),\ 0<f(x)<x, 0<x<1.$ Тогда $0<p_k(x)=p_{k-1}(f(x))=f(f(\ldots f(x)))=f(p_{k-1}(x))<p_{k-1}(x)<\ldots<x$ – монотонно убывающая последовательность. $\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1-x}=1+\dfrac{x}{1-x}>x.$

$$1<\frac{1}{p_r(x)}-\frac{1}{p_{r-1}(x)}=1+\frac{p_{r-1}(x)}{1-p_{r-1}(x)}<1+\frac{x}{1-x}.$$

Усредняем по r от 1 до k. Получим: $1<\dfrac{\frac{1}{p_k(x)}-\frac{1}{x}}{k}<1+\dfrac{x}{1-x}$,

$$1<\frac{1}{kp_k(x/k)}-1/x<1+\frac{x}{k}\left(1-\frac{x}{k}\right)\underset{k\to\infty}{\to}1.$$

Ответ: $kp_k\left(\dfrac{x}{k}\right)\underset{k\to\infty}{\to}\dfrac{x}{x+1}$.

1.13. $$\ln a_n=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-\frac{1}{n}}\right)=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\to\int_0^1\ln(1+x^2)dx=$$

$$=2-\ln 2-\frac{\pi}{2};\ a_n\to\frac{1}{2}e^{2-\frac{\pi}{2}}.$$

1.14. $u_4=u_5=\ldots=u_n=0$, так как в эти произведения входят множители $\sqrt[4]{4}-\sqrt{2}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

1.15. Нет. Пример $f(x)=\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}2\cos(x^2)$ не существует.

1.16. $\dfrac{2}{\pi^2}$.

1.17. Надо ортогонализовать базис из функций $1,x,x^2,\ldots,x^m$ на отрезке $(0;1)\in L^2$. Тогда $\int_0^1\left(P_n(x)\right)^2dx=\sum_{k=0}^{m}C_{n,k}^2\underset{k\to\infty}{\to}0\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \forall k\ C_{n,k}\to0\Rightarrow a_{n,k}\to0.$

1.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)\cdot n}$. Если $\dfrac{b+1}{c}\neq 1$, то $\lim = \begin{cases}\infty\\ 0\end{cases}$.

Если $\dfrac{b+1}{c}=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{c}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{1}{cn}\ln a = \dfrac{1}{c}\ln a$ и

предел $e^{\frac{1}{c}\ln a} = a^c$.

1.20.

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 x dx}{1+\cos^2(nx)} = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{\pi k}{n}}^{\frac{\pi(k+1)}{n}}\frac{\cos^2 x dx}{1+\cos^2(nx)} = \sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\xi_k\int_{\frac{\pi k}{n}}^{\frac{\pi(k+1)}{n}}\frac{dx}{1+\cos^2(nx)} =$$

(по теореме о среднем $\exists\xi_k\in\left(\dfrac{\pi k}{n};\dfrac{\pi(k+1)}{n}n\right)$)

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\xi_k\frac{1}{n}\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}\frac{dt}{1+\cos^2 t} = \sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\xi_k\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+\cos^2 t} =$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+\cos^2 t}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\xi_k\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+\cos^2 t}\cdot\int_0^{\pi}\cos^2 t dt = \text{вычислить}.$$

1.24. Сумма не изменится, если в нее добавить слагаемое с $i=0$. Тогда $a_{k+1}=s_{k-1}$, $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}s_k$. где s_{k-1}- среднее арифметическое. $\mathrm{s_k} = \dfrac{k\mathrm{s_{k-1}}+a_{\mathrm{k}}}{k+1} = \dfrac{k\mathrm{s_{k-1}}+s_{\mathrm{k-2}}}{k+1}$. Тогда $s_k - s_{k-1} = -\dfrac{s_{k-1}-s_{k-2}}{k+1} = \dfrac{s_{k-2}-s_{k-3}}{(k+1)k} = \ldots$ $=(-1)^{k-1}\dfrac{(s_1-s_0)2}{(k+1)!}$. Множитель 2 добавили, чтобы получить факториал в знаменателе. $s_0=0, s_1=\dfrac{1}{2}$. Поэтому $s_k-s_{k-1}=(-1)^{k-1}\dfrac{1}{(k+1)!}$. Суммируем по k от 1. В пределе получаем $\dfrac{1}{e}$. Ответ: $\dfrac{1}{e}$.

1.25.Выносим из под корня $\max\{1,x^n,\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n\}$. Далее предел находится стандартно. Ответ. $1,\ 0\le x\le 1;\ \ x,\ 1<x\le 2;\ \ \dfrac{x^2}{2}, 2<x<\infty$.

1.27. $\int\limits_0^n \sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{x}}{n^{3/2}}\right)}dx < \sum\limits_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{k^{1/2}}{n^{3/2}}} < \int\limits_1^{n+1} \sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{x}}{n^{3/2}}\right)}dx$. Разложить в ряд $1+\frac{\sqrt{x}}{n^{3/2}}-\frac{x}{8n} < \sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{n^{3/2}}} < 1+\frac{\sqrt{x}}{n^{3/2}}$ и подставить в интеграл (оценки усиливаются)

$$\int\limits_0^n \left(1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{n^{3/2}}\right)dx = \left(x+\frac{x^{3/2}}{3n^{3/2}}\right)\Bigg|_1^{n+1} = (n+1)-1+\frac{1}{3}\frac{(n+1)^{3/2}}{n^{3/2}}-\frac{1}{3n^{3/2}}$$

$$n+\frac{1}{3}-\frac{1}{16n} < \sum_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}}} < n+\frac{1}{3}\frac{(n+1)^{3/2}}{n^{3/2}}-\frac{1}{3n^{3/2}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{16n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}} < \sum_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}}-n < \underbrace{\frac{1}{3}\frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{3n^{\frac{3}{2}}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}}-n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Решение 2.

Представим выражение в виде суммы слагаемых вида $\sqrt{1+\alpha}-1=\frac{\alpha}{2}+O(\alpha^2),\ \alpha=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=O(\frac{1}{n}),\ O(\alpha^2)=O(\frac{1}{n^2})$. При суммировании первое слагаемое даст в пределе $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2}dx$, а второе стремится к нулю.

1.28. Да. Рассмотрим последовательность промежутков $\{\Delta_n\}$ такую, что Δ_n левее Δ_{n+1}. Пусть $f(t)=(-1)^n$ при $t\in\Delta_n$. А между Δ_n и Δ_{n+1} функция f линейна $x_n=f(n)$. Если длины смежных с Δ_n интервалов неограниченно возрастают, то $x_{n+1}-x_n\to 0$. С другой стороны, подбирая последовательно длины Δ_n достаточно большие, можно добиться, чтобы среди чисел $\frac{x_1+\ldots+x_m}{m}$ были сколь угодно близкие как к $+1$, так и к -1, т.е. не существует $\lim\frac{x_1+\ldots+x_m}{m}$.

1.30.

$$\frac{1}{(k+1)^2+t^2} \le \int\limits_k^{k+1} \frac{1}{u^2+t^2}du \le \frac{1}{k^2+t^2};\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2} \le \int\limits_1^{\infty}\frac{du}{u^2+t^2} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2},$$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{du}{u^2+t^2} = \frac{\pi}{2t} - \frac{1}{t}arctg\frac{1}{t},\quad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2} - \frac{1}{1+t^2},$$

$$t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \le \frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{t} \le t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2},$$

то есть $\lim\limits_{t\to\infty} t\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2} = \frac{\pi}{2}$. 1.31.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{ij}{i+j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}\frac{j}{n}}{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\frac{xy}{x+y} = \frac{19}{18} - \frac{4}{3}\ln 2.$$

1.32. Пусть $c_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}$, $s_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}$. Тогда $2^n c_n s_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(2\cos\frac{k\pi}{2n+1}\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}$. Но $\sin\frac{2k\pi}{2n+1} = \sin\left(\pi - \frac{2k\pi}{2n+1}\right) = \sin\frac{(2n-2k+1)\pi}{2n+1}$ и при $k = \left[\frac{n}{2}\right]+1, \left[\frac{n}{2}\right]+2, \ldots, n$ и выражение $(2n-2k+1)$ пробегает в порядке убывания все нечетные значения от $n-1$ или n (в зависимости от четности n $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] (2k)$ пробегает все четные значения от 2 до $n-1$ или n (в зависимости от четности n). Таким образом, $2^n c_n s_n = s_n$, а т.к. $s_n \ne 0$, то $c_n = \frac{1}{2^n}$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{2}$.

1.33. Для $x > 1$: $\frac{1}{(x+1)^4} < \frac{x}{1+x^5} < \frac{1}{x^4} \Rightarrow \frac{7}{24} \leftarrow \frac{n^3}{3}\left(\frac{1}{(r+1)^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right) <$ $n^3\int\limits_n^{2n}\frac{x}{1+x^5}dx < \frac{n^3}{3}\left(\frac{1}{8n^3} - \frac{1}{n^3}\right) \to \frac{7}{24}$.

Можно решить по правилу Лопиталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_n^{2n}\frac{x}{1+x^5}dx}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+2}{1+32n^5}-\frac{n}{1+n^5}}{-\frac{3}{n^4}}=\frac{7}{24}.$$

1.34. Пусть $\forall n\in\mathrm{N}$: $a_n\le M$, а $f(n)$ - количество членов последовательности, отличных от 1 (т.е. $a_k\ge 2$) с $k\in 1,\ldots,n$. Тогда $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\ge 2^{\frac{f(n)}{n}}\ge 1$. По теореме о сжатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{f(n)}{n}}=1$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=0$. Далее, очевидно, $1\le\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\le 1+(M-1)\frac{f(n)}{n}\underset{n\to\infty}{\to}1.\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=1.$

1.35.

$$\frac{(n!)^n}{2^{(2^n)}}<\frac{n^{n^2}}{2^{(2^n)}}=\frac{2^{n^2\log_2 n}}{2^{(2^n)}}=2^{n^2\log_2 n-2^n}=2^{-2^n\left(1-\frac{n^2\log_2 n}{2^n}\right)}\underset{n\to\infty}{\to}0\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{2^{(2^n)}}=0.$$

1.36. Так как число π иррационально, то $\operatorname{tg}k$ определен при любом k. Из формулы

$$\operatorname{tg}1=\frac{\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}(k-1)}{1+\operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)}$$

находим

$$\operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)=\frac{\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}(k-1)}{\operatorname{tg}1}-1.$$

Значит

$$\operatorname{tg}1\operatorname{tg}2+\operatorname{tg}2\operatorname{tg}3+\ldots+\operatorname{tg}(n-1)\operatorname{tg}n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}(k-1)}{\operatorname{tg}1}-1\right)=$$

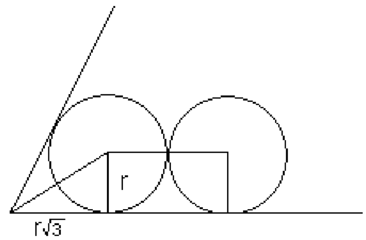
$$\frac{1}{\operatorname{tg}1}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}(k-1)\right)-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{1}{\operatorname{tg}1}\left(\operatorname{tg}n-\operatorname{tg}1\right)-(n-1)=\frac{1}{\operatorname{tg}1}\operatorname{tg}n-n.$$

То есть искомый предел равен

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}1\operatorname{tg}2+\operatorname{tg}2\operatorname{tg}3+\ldots+\operatorname{tg}(n-1)\operatorname{tg}n}{\operatorname{tg}n-n\operatorname{tg}1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}1}\operatorname{tg}n-n}{\operatorname{tg}n-n\operatorname{tg}1}=\operatorname{ctg}1.$$

1.37. Пусть m - число окружностей в нижнем ряду. Тогда всего окружностей $n=\frac{1+m}{2}\cdot m=\frac{m(m+1)}{2}$.

Пусть сторона треугольника a, а радиус окружности r (см. рисунок). Тогда $a=2r(m-2)+2r+2r\sqrt{3}$, следовательно,



$r=\frac{a}{2m-2+2\sqrt{3}}$. Тогда

$$S_n=\frac{\pi a^2\cdot m(m+1)}{(2m-2+2\sqrt{3})^2\cdot 2}\text{ и }S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S}=\lim_{m\to\infty}\frac{\pi m(m+1)\cdot 4}{2\sqrt{3}(2m-2+2\sqrt{3})^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

1.38. Так как $0<x_{n+1}<x_n$, то данная последовательность убывает и ограничена, потому $x_n\to\lambda\ge 0$. Если $\lambda\ne 0$, то $\frac{x_{n+1}}{x_n}\to 1$, с другой стороны, $nx_n^2\to+\infty$, так что $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{1+nx_n^2}\to 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\lambda=0$.

1.39. По определению целой части числа $kx-1\le[kx]\le kx$

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1)\le\sum_{k=1}^{n}[kx]\le\sum_{k=1}^{n}kx$$

$$x\frac{(1+n)n}{2}-n\le\sum_{k=1}^{n}[kx]\le x\frac{(1+n)n}{2}$$

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{1+n}{n}-\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx]\le\frac{x}{2}\cdot\frac{(1+n)}{n}.$$

Так как левая и правая части неравенства сходятся к $\frac{x}{2}$ при $n\to\infty$, то выражение, заключенное между ними стремится к тому же пределу.

<u>Ответ:</u> $\frac{x}{2}$.

1.40. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0.$$

1.41. $a_n-a_{n-1}=-\dfrac{1}{(n-1)\cdot n\cdot n!}$.

Следовательно,

$$a_n-a_1=-\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot n!}-\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot(n-1)!}-\ldots-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2!}$$

$$a_n=3-\frac{2-1}{1\cdot 2\cdot 2!}-\frac{3-2}{2\cdot 3\cdot 3!}-\ldots-\frac{n-(n-1)}{(n-1)\cdot n\cdot n!}=$$

$$=3-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2\cdot 2!}-\frac{1}{2\cdot 3!}+\frac{1}{3\cdot 3!}-\ldots-\frac{1}{(n-1)\cdot n!}+\frac{1}{n\cdot n!}=$$

$$=2+\frac{1}{2!}+\frac{3-1}{2\cdot 3!}+\frac{4-1}{3\cdot 4!}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)\cdot n!}+\frac{1}{n\cdot n!}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n\cdot n!}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$.

1.42.

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)=-\ln n+\frac{1}{n}(\ln(n+1)+\ln(n+2)+\ldots+\ln(n+n))=$$

$$=-\ln n+\frac{1}{n}\left(\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+\ln\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)+\ldots+\ln\left(n\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right)=\int\limits_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1.$$

Значит, искомый предел равен $e^{2\ln 2-1}=\dfrac{4}{e}$.

1.43. Обозначим $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{n^4+k}}$. Заметим, что

$$a_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+1}}=\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{(1+n)n}{2\sqrt{n^4+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$$

$$a_n\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+n}}=\frac{1}{\sqrt{n^4+n}}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{(1+n)n}{2\sqrt{n^4+n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$$

По теореме о сжатой переменной заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

1.44. Применим дважды правило Лопиталя к функции $\dfrac{e^{x^2/2} f(x)}{e^{x^2/2}}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2/2} f(x)}{e^{x^2/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2/2}\left(xf(x)+f'(x)\right)}{xe^{x^2/2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2/2}\left(\left(x^2+1\right)f(x)+2xf'(x)+f''(x)\right)}{e^{x^2/2}\left(x^2+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2+1\right)f(x)+2xf'(x)+f''(x)}{x^2+1} = 0.$$

Замечание. Эта задача предлагалась на олимпиаде С.-Петербурга 2006 г. От студентов не требовалось доказательства правомочности применения правила Лопиталя. Отметим, что возможность его использования не требует дополнительных ограничений на функцию $f(x)$. Смотри, например, доказательство правила Лопиталя (Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1), где не требуется предположение о том, что функция в числителе дроби стремится к бесконечности.

1.45. Преобразуем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)k! - k!\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)! - k!\right) = (n+1)! - 1$$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = 1.$$

1.46. Прибавим к обеим частям рекуррентного соотношения 1: $a_{i,j+1}+1 = a_{i,j}{}^2 + 2a_{i,j}+1$, введем обозначение $b_{i,j+1} = a_{i,j}+1$, получим $b_{i,j+1} = b_{i,j}{}^2$. Следовательно, $b_{i,n} = \left(b_{i,0}\right)^{2^n}$, $b_{n,n} = \left(b_{n,0}\right)^{2^n}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,n} = \lim_{n\to\infty}\left(b_{n,n}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2^n}+1\right)^{2^n} - 1 = e^x - 1.$$

1.47. Положим

$$J_n = \frac{1}{3\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{xdx}{arctg(nx)}\right) - 1.$$

Достаточно вычислить $J = \lim\limits_{n\to\infty} nJ_n$, так как тогда искомый предел будет равен

$$\lim_{n\to\infty}(1+J_n)^n=\lim_{n\to\infty}((1+J_n)^{\frac{1}{J_n}})^{nJ_n}=e^J \ .$$

Используя равенство $\dfrac{1}{3\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}xdx=\dfrac{\pi}{2}$, преобразуем J_n:

$$J_n=\frac{1}{3\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{xdx}{arctg(nx)}\right)-\frac{2}{\pi}\frac{1}{3\pi}\int_{\pi}^{2\pi}xdx=\frac{1}{3\pi}\int_{\pi}^{2\pi}x\left(\frac{xdx}{arctg(nx)}-\frac{2}{\pi}\right)dx.$$

Применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{t\to\infty}t\left(\frac{1}{arctgt}-\frac{2}{\pi}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\pi arctgt}\lim_{t\to\infty}t(\pi-2arctgt)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\lim_{t\to\infty}\frac{\pi-2arctgt}{1/t}=\frac{2}{\pi^2}\lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{2}{1+t^2}}{-1/t^2}=\frac{4}{\pi^2}.$$

Выполняя предельный переход под знаком интеграла, получаем

$$J=\lim_{n\to\infty\infty}nJ_n=\frac{4}{3\pi^2}$$

Для обоснования перехода к пределу заметим, что, по доказанному,

$$\max_{n\pi\le t\le 2n\pi}\left|t\left(\frac{1}{arctgt}-\frac{2}{\pi}\right)-\frac{4}{\pi^2}\right|\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Ответ: $e^{\frac{4}{3\pi^2}}$.

2.1. Пусть $u(\alpha)=u(\beta)=0$ и $v\neq 0, x\in(\alpha;\beta)$, следовательно, функция $\dfrac{u}{v}$ непрерывна на $(\alpha;\beta)$ и $\left.\dfrac{u}{v}\right|_{x=\alpha,\beta}=0.$ По теореме Ролля $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=0$ в некоторой точке внутри $(\alpha;\beta)$, что противоречит предположению.

2.2. $f(x)=\dfrac{a_0x^{n+1}}{n+1}+\dfrac{a_1x^n}{n}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}x^2}{2}+a_nx,\ f(0)=f(1)=0$, следовательно, существует точка, где $0=f'(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$.

2.3. Пусть $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a)\\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b)\\ f(x) & \varphi(x) & \psi(x)\end{vmatrix}. F(a)=F(b)=0$, следовательно, существует ξ такая, что $F'(\xi)=0$.

2.4. Пусть $\varphi(x)=a+\psi(x)$ так, что $\psi(x)+\psi'(x)\to 0$. Если $\psi(x)$ не меняет знака (пусть например $\psi'(x)>0$ при $x>x_0$), то $\psi(x)$ монотонно возрастает и должна стремиться либо к конкретному пределу l, либо к ∞. Если $\psi(x)\to\infty$, то $\psi'(x)\to-\infty$, что противоречит предпосылке. Если $\psi(x)\to l$, то $\psi'(x)\to -l$, что невозможно, если $l\neq 0$. Аналогично, если $\psi'(x)<0$ при $x>x_0$. Если $\psi'(x)$ меняет знак при сколь угодно больших x, то $\psi(x)$ имеет $\max$ и $\min$ правее любого сколь угодно большого числа. Пусть x достаточно велико и соответствует $\max$ или $\min$ $\psi(x)$, тогда $\psi(x)+\psi'(x)$ мало, а $\psi'(x)=0$, так что $\psi(x)$ мало. Другие значения $\psi(x)$ тем более малы по абсолютной величине, когда x достаточно велико.

2.5. $\left(x^2-1\right)^n$ - корни -1, 1 кратности n. $\left(\left(x^2-1\right)^n\right)'$ по теореме Ролля имеет корень $c\in(-1;1)$ и корни -1, 1 кратности $(n-1)$, $\left(\left(x^2-1\right)^n\right)''$ по теореме Ролля имеет корни на $(-1;c)$ и $(c,1)$, а корни -1, 1 кратности $(n-2)$, ... и т.д. $\frac{d}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$ имеет n корней на $(-1;1)$. Но это полином степени n, следовательно, это все его корни.

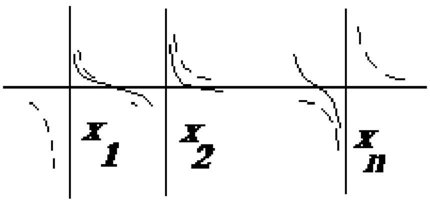
2.6. Из уравнения следует $-1=z(a_1+a_2z+a_3z^2+\ldots)$. Пусть $|z|<\frac{1}{2}$; $1=|z||a_1+a_2z+a_3z^2+\ldots|\leq\leq|z|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=\;|z|\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2|z|$. Т.е. $1\leq 2|z|\;\Rightarrow|z|\geq\frac{1}{2}$ - противоречие.

2.7. Пусть $r(x)=\sum\limits_{k=0}^{2n}\left(p(x)q(x)\right)^{(k)}\Rightarrow r(x)-r'(x)=p(x)q(x)$. Если $r(x)$ делится на $p(x)$, то и $r'(x)=r(x)-p(x)q(x)$ делится на $p(x)$. Значит, каждый корень $p(x)$ является кратным корнем $r(x)$, а т.к. $p(x)$ кратных корней не имеет, то полином $r(x)$ делится на $p^2(x)$. Но это невозможно, т.к. степень полинома $r(x)<2n$ равна степени полинома $p^2(x)$. Противоречие, т.е. $r(x)$ не может делиться на $p^2(x)$.

2.8. $p(x)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\ldots\left(x-x_n\right)$;

$$p'(x)+\alpha p(x)=\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_n\right)\left(\alpha+\frac{1}{x-x_1}+\ldots+\frac{1}{x-x_n}\right)=\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_n\right)\varphi(x).$$

Если корни простые, то для $p'+\alpha p$ $x_1,\ldots,x_n$ не являются корнями. Рассмотрим φ, на каждом из отрезков $(x_1;x_2),(x_2;x_3)\ldots$ у нее будет



по 1 корню, всего $(n-1)$ корней. Если $\alpha > 0$, то появится корень левее x_1, если $\alpha < 0$ - правее x_n. Если x_1 - корень кратности n, то для $p' + \alpha p$ x_1 - корень кратности $n-1$, а остальные корни находятся так же, как для простых корней.

2.9. $f(x) = f(-(-x)) = f^3(-x) = f^9(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f^8(x)=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=\pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \pi n + \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$. Рациональный корень $x = 0$.

2.10. $\frac{a_1}{a_1+x} + \frac{a_2}{a_2+x} + \ldots + \frac{a_n}{a_n+x} = n \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_1+x} - 1 + \frac{a_2}{a_2+x} - 1 + \ldots$

$\ldots + \frac{a_n}{a_n+x} - 1 = 0 \Leftrightarrow -x\left(\frac{1}{a_1+x} + \frac{1}{a_2+x} + \ldots + \frac{1}{a_n+x}\right) = 0$, т.к. это сводится к полиному степени n, то корней не больше n. Уравнение сводится к виду $-\frac{xp_n'(x)}{p_n(x)} = 0$, где $p_n(x) = (a_1+x)(a_2+x)\cdot\ldots\cdot(a_n+x)$, но $p_n(x)$ имеет n вещественных корней $-a_{11}, -a_{21}, \ldots -a_{n1} \Rightarrow p_n'(x)$ имеет $(n-1)$ корень, да еще один корень $x = 0$.

2.12. $p(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots$. Пусть этот полином имеет корней больше, чем $n-2$, например, $n-1$. Между корнями функции есть корень производной. Продифференцируем $n-2$ раза, следовательно, $p^{(n-2)}(x) = a\frac{n!}{2}x^2 + b(n-1)!\,x + c(n-2)!$ имеет вещественный корень. Но, дискриминант $b^2((n-1)!)^2 - 2acn!(n-2)! = ((n-1)!)\left(b^2 - \frac{2acn}{n-1}\right) < 0$, следовательно, у него нет вещественных корней. Противоречие.

2.13. Пусть $0 < |x| = r < a_0$ и $a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k = 0$. Тогда $a_0^2 = \left(\sum_{j=1}^{k} a_j x^j\right)^2$ и по неравенству Коши $a_0^2 \le \sum_1^k a_j^2 \sum_1^k r^{2j} \le \left(1 - a_0^2\right)\frac{r^2}{1-r^2}$, т.е. $a_0 \le r$. Ответ: корней на $(-a_0; a_0)$ нет.

2.14. Экстремум функции $y=2^{x^2-x}$: $y'=2^{x^2-x}\ln 2(2x-1)=0$. При $x=\frac{1}{2}-\min$ функции. $2^{x^2-x}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}<1$;

$3\sin x\Big|_{x=\frac{1}{2}}>\left(3x-\frac{3x^3}{3!}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{16}>1$, т.е. в точке $x=\frac{1}{2}$ $2^{x^2-x}<3\sin x$, но в точке $x=0$ $2^{x^2-x}=1>3\sin x=0$, а при $x\to\infty$ $2^{x^2-x}>3\sin x$, следовательно, существует корень (и даже два).

2.15. x^n-kx-1; $x_1,x_2,\ldots,x_n$ - корни. $n>2$ $x_i^n=kx_i+1$ - сложим всё уравнения $\sum_{i=1}^{n}x_i^n=k\sum_{i=1}^{n}x_i+n=n$, так как по теореме Виета $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$.

2.16. $f(x)=x^3-ax+b\,(a>0;b>0); x>0\ (x^3-ax+b)'=3x^2-a=0$;

$x=\pm\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}; x=0\Rightarrow f(0)=b>0; f''(x)=0=6x$ в точке перегиба $x=0$.

Проведем касательную в точку $x=0: y=-ax+b; f(x)$ выше касательной, следовательно, наименьший положительный корень больше корня $-ax+b=0$, т.е. $x=\frac{b}{a}$. Найдем экстремум при $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}; y=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{3}}+b=-\frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}+b$. Проведем секущую через $(0;b)$. Кривая - ниже секущей $(f''>0)$, следовательно, корень функции меньше корня секущей, т.е. $\frac{y-b}{-\frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}+b-b}\xrightarrow[y=0]{}x=\frac{3b}{2a}$.

2.17. $y''=(x^3+Dx)y$;

а)$\exists c$: для $x>c$ $x^3+Dx>\alpha>0$ по теореме Штурма число корней не превосходит числа корней $y''=\alpha y$;

б))$\exists c$: для $x<c$ $x^3+Dx<-\alpha<0$ по теореме Штурма корней у решения на любом отрезке не меньше, чем у $y''=-\alpha y$ - решение $\cos\sqrt{\alpha}x$; $\sin\sqrt{\alpha}x$; т.е. корней бесконечно много.

2.18. $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+x=x\left(1-e^{-x}\right)>0$ при $x\neq 0$. При $x=0$ $f(x)=0$, т.е. $x=0$ - единственный корень.

2.19. $P(x)=a(x-x_1)\ldots(x-x_n), a\neq 0$. Тогда $P'(x)=P_1(x)+\ldots+P_n(x)$, где $P_k(x)$ - полином степени $n-1\geq 1$. $P_k(x_i)=0$ при

$k \neq i \Rightarrow P'(x_i) = P_i(x_i) \neq 0$. Рассмотрим полином $F(x) = -1 + \frac{P_1(x)}{P'(x_1)} + \ldots + \frac{P_n(x)}{P'(x_n)}$; $F(x)$ - полином степени $\leq n-1$ $F(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j(x_i)}{P'(x_j)} - 1 = \frac{P_i(x_i)}{P'(x_i)} - 1 = 0$, т.е. $F(x)$ имеет n различных корней, следовательно, $F(x) \equiv 0$. Так как старший коэффициент каждого из $P_k(x)$ равен a, то коэффициент $F(x)$ при x^{k-1} равен $\frac{a}{P'(x_1)} + \ldots + \frac{a}{P'(x_n)}$, но этот коэффициент равен нулю.

Второе решение.

Пусть $P(x) = \prod (x - x_i)$. Рассмотрим многочлен

$$P_0(x) = P'(x) \cdot \left(\frac{1}{P'(x_1)} + \ldots + \frac{1}{P'(x_n)} \right).$$

Докажем, что $P_0(x_1) = 0$ или $\frac{P'(x_1)}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{P'(x_1)}{P'(x_n)} = -1$.

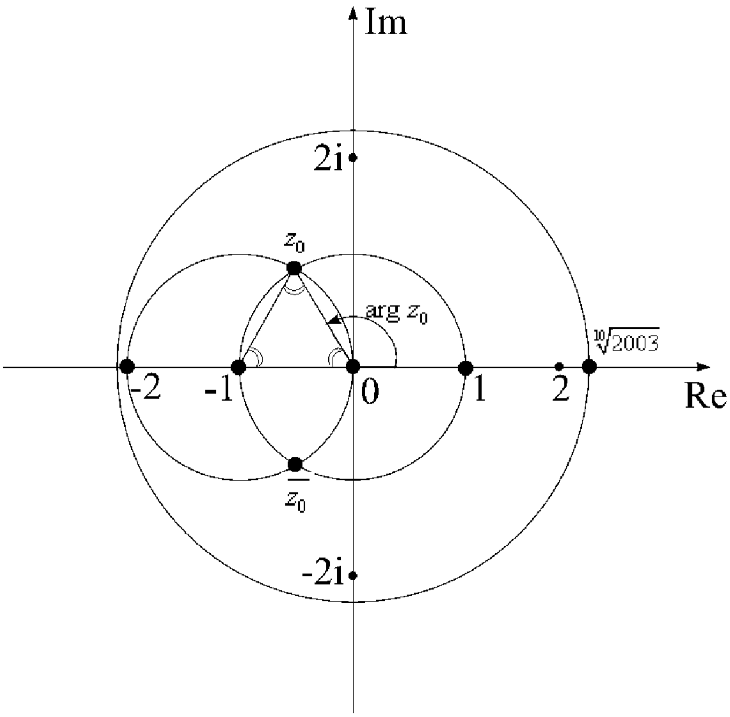
Получим

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\prod\limits_{i \neq 1} (x_1 - x_i)}{\prod\limits_{\substack{i \neq k \\ k \geq 2}} (x_k - x_i)} = \frac{\cancel{(x_1 - x_2)}(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)}{\cancel{(x_2 - x_1)}(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)} + \ldots + \frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots\cancel{(x_1 - x_n)}}{\cancel{(x_n - x_1)}(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

Рассмотрим полученное выражение как многочлен $P_{n-2}(x_1)$ степени *n – 2*. Тогда $P_{n-2}(x_k) = -1$ для $x_k = x_2, \ldots, x_n$. То есть многочлен степени *n –2* принимает значение –1 в *n – 1* точке, значит $P_{n-2}(x_1) \equiv -1$. Следовательно, $P_0(x_1) = 0$. Что и требовалось доказать.

2.20. Пусть $f(b) > 0$ (если $f(b) < 0$, то взять $-f(x)$, следовательно, $f(x) > 0$ на отрезке $(a;b)$, $f(a) = 0$ (такая точка a существует из-за условия $f(0) = 0$. Пусть последовательность $a_n \to a; g(x) = \ln f(x)$ на $[a_n;b]$: $|g(b) - g(a_n)| = |g'(c_n)(b - a_n)| = = \left| \frac{f'(c_n)}{f(c_n)} \right| \cdot |b - a_n| \leq k|b - a_n| \leq k$. Но $f(a) \to 0 \Rightarrow g(a_n) \to -\infty$, что противоречит предыдущему неравенству, т.е. точки, в которой $f(b) > 0$ (или $f(b) < 0$) не существует.

2.21. $z^{20} - 2002 \cdot z^{10} - 2003 = 0$ - квадратное уравнение относительно z^{10}.
Тогда $\left[\begin{array}{l} z^{10} = 2003 \\ z^{10} = -1 \end{array}\right.$. Таким образом, корни этих уравнений лежат на окружностях с центрами в начале координат и радиусами $\sqrt[10]{2003} > 2$; 1.



Корни уравнения $(z+1)^{2003} + 1 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^{2003} = -1$ лежат на окружности с центром в $-1 \in \mathbb{C}$ и радиусом 1.
Общими корнями многочленов могут быть только z_0 и $\overline{z_0}$, отмеченные на рисунке. Треугольник $0, -1, z_0$ - равносторонний, так как все его стороны равны 1. Следовательно, $\arg z_0 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Но тогда $z_0^{10} \neq -1$ и z_0 не является общим корнем многочленов. Очевидно, что тогда $\overline{z_0}$ также не является общим корнем, так как все коэффициенты многочленов вещественные. Общих корней нет.

2.22. $\Phi(x)$ - многочлен степени *n*, следовательно, он имеет *n* корней (с учетом кратностей), лежащих на некотором промежутке $[a,b]$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = e^{-2x} \cdot \Phi(x)$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} \cdot \Phi(x) = 0$, то по теореме Ролля производная $\varphi'(x)$ имеет не менее *n* корней на промежутке $[a,+\infty)$.

$$\varphi'(x) = e^{-2x}(-2\Phi(x) + \Phi'(x)) =$$
$$= e^{-2x}\left(-2f(x) - f'(x) + \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{2^{n-1}} + f'(x) + \frac{f''(x)}{2} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{2^{n-1}}\right) = e^{-2x}\left(-2f(x)\right).$$

Следовательно, $f(x)$ имеет *n* вещественных корней.

2.23. Заметим, что $x^6 = x^2 + x$, следовательно,
$$\sum x_i^6 = \left(\sum x_i\right)^2 - 2\sum x_i x_j + \sum x_i = 0 + 0 - 0 = 0.$$

2.24. Первый способ. Перенесём слагаемое –1 в левую часть уравнения и рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + [x] + 1$. Тогда, данное уравнение можно записать в виде: $f(f(x)) = x$. Так как $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $[x] \le x \le [x]+1$, то $f(x) > x$. Следовательно, $f(f(x)) > f(x) > x$, то есть данное уравнение корней не имеет. Заключительный вывод может быть получен и из других соображений. Справедливость равенства $f(f(x)) = x$ означает, что функцией, обратной к $f(x)$ является она сама. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$, причём, из неравенства $f(x)>x$ следует, что график функции $f(x)$ Должен располагаться выше этой прямой, значит, график обратной к ней функции – ниже. Следовательно, совпасть эти два графика не могут.

Второй способ. Пусть $y=x^2+[x]+1$, тогда $y^2+[y]=x-1$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+[x]+1=y, \\ y^2+[y]+1=x. \end{cases}$$

Ее следствием является уравнение $(y^2-x^2)+([y]-[x])=x-y$. Пусть $x\geq y$, тогда $x^2\geq y^2$ и $[x]\geq[y]$, то есть правая часть этого уравнения принимает неотрицательные значения, а левая часть – неположительные. Аналогичная ситуация возникает и в случае, когда $y\geq x$. Таким образом, равенство возможно только, если $y=x$. Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению $x^2+[x]+1=x$, которое не имеет решений, так как $[x]+1>x$ для любого вещественного x.

2.25. Все корни уравнения $z^3+|a|z^2+|b|z+|c|=0$ также лежат на окружности $|z|=1$. Для доказательства положим, что z_1, z_2, z_3 - корни уравнения $z^3+az^2+bz+c=0$. Тогда $b=z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3=z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=c\overline{a}$. Так как $|c|=(z_1z_2z_3)=1$, то $|a|=|b|$, и второе уравнение принимает вид $z^3+|a|z^2+|a|z+1=0$. Один из корней этого уравнения равен (–1), а два других являются комплексно сопряженными числами, произведение которых равно 1. Следовательно, они также лежат на окружности $|z|=1$.

2.26. Обозначим $p_1=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\dfrac{x^6-1}{x-1}$. Корни x_* полинома p_1 удовлетворяют соотношению $x_*^6-1=0$. Проверим, что корни p_1 являются корнями многочлена $x_*^{18n}\left(x_*^5+1\right)+x_*^{12n+1}\left(x_*^2+1\right)+x_*^{6n+2}\left(x_*^2+1\right)=$ $=\left|x_*^6=1\right|=x_*^5+1+x_*^3+x_*+x_*^4+x_*^2=p_1(x_*)=0$. Следовательно, данный многочлен делится на p_1.

2.27. Сделаем замену $w_1 = c_1 - z, \ldots, w_n = c_n - z$. Тогда задача сводится к доказательству того, что число 0 лежит внутри n-угольника, образованного комплексными числами $w_1, \ldots, w_n$ при условии того, что n-угольник выпуклый и числа $w_1, \ldots, w_n$ связаны соотношением $w_1^{-1} + w_2^{-1} + \ldots + w_n^{-1} = 0$. Докажем сформулированное утверждение. Векторы, изображающие комплексные числа w и w^{-1} образуют с осью Ох равные и симметрично расположенные углы. (Чтобы это проверить, достаточно записать w и w^{-1} в показательной форме). Далее, если векторы, изображающие комплексные числа, лежат по одну сторону от прямой, проходящей через 0, то их сумма не равна 0 и лежит по ту же сторону от этой прямой (поскольку комплексные числа можно складывать по правилу параллелограмма).

Допустим, что 0 лежит вне выпуклого многоугольника с вершинами $w_1, \ldots, w_n$. Тогда через 0 можно провести прямую, не пересекающую многоугольник, а векторы $w_1, \ldots, w_n$ лежат по одну сторону от этой прямой. Векторы $w_1^{-1}, w_2^{-1}, \ldots, w_n^{-1}$ будут также лежать по одну сторону от некоторой прямой и, значит, их сумма не равна 0, что противоречит условию задачи. Итак, 0 лежит внутри многоугольника с вершинами $w_1, \ldots, w_n$.

2.28. Пусть $f(x) \neq x$ для всех $x \in A$. Пусть $[a,b]$ - наименьший замкнутый интервал, содержащий A. Так как A замкнуто, $a,b \in A$. По предположению $f(a) > a$, $f(b) < b$. Пусть $p = \sup\{x \in A : f(x) > x\}$. Так как A замкнуто, а f непрерывна, то $f(p) \geq p$, значит $f(p) > p$. Для всех $x > p$, $x \in A$, имеем $f(x) < x$. Значит $f(f(p)) < f(p)$, что противоречит тому, что f невозрастающая.

2.29. Комплексное число $x_1 = \cos\dfrac{\pi}{3k} + i\sin\dfrac{\pi}{3k}$ есть корень $g(x)$. Пусть $\alpha = \dfrac{\pi n}{3k}$. Так как $g(x)$ есть делитель $f(x)$, $f(x_1) = g(x_1) = 0$. То есть

$0 = x_1^{2n} + x_1^{n} + 1 = (\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)) + \cos\alpha + i\sin\alpha + 1 = 0$, откуда $(2\cos\alpha + 1)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 0$. Значит, $2\cos\alpha + 1 = 0$, то есть $\alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi c,\ c \in \mathbb{Z}$. Пусть x_2 - корень полинома $h(x)$. Так как $h(x) = \dfrac{x^{3k} - 1}{x^{k} - 1}$, корни полинома $h(x)$ различны и таковы: $x_2 \cos\dfrac{2\pi s}{3k} + i\sin\dfrac{2\pi s}{3k},\ s = 3a \pm 1,\ a \in \mathbb{Z}$. Достаточно проверить, что $f(x_2) = 0$. Имеем $f(x_2) = x_2^{2n} + x_2^{n} + 1 =$

$= (\cos(4s\alpha) + i\sin(4s\alpha)) + (\cos(2s\alpha) + i\sin(2s\alpha)) + 1 =$
$= (2\cos(2s\alpha) + 1)(\cos(2s\alpha) + i\sin(2s\alpha)) = 0$, так как $2\cos(2s\alpha) + 1 =$

$2\cos(2s(\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi c)) + 1 = 2\cos(\dfrac{4\pi s}{3}) + 1 = 2\cos(\dfrac{4\pi}{3}(3a \pm 1)) + 1 = 0.$

3.1. Пусть $f(b) > 0$ (если $f(b) < 0$, то взять $-f(x)$, следовательно, $f(x) > 0$ на отрезке $(a;b), f(a) = 0$ (такая точка a существует из-за условия $f(0) = 0$). Пусть последовательность $a_n \to a; g(x) = \ln f(x)$ на $[a_n;b]$: $|g(b) - g(a_n)| = |g'(c_n)(b - a_n)| = \left|\dfrac{f'(c_n)}{f(c_n)}\right| \cdot |b - a_n| \le k|b - a_n| \le k$. Но $f(a) \to 0 \Rightarrow g(a_n) \to -\infty$, что противоречит предыдущему неравенству, т.е. точки, в которой $f(b) > 0$ (или $f(b) < 0$) не существует.

3.2. $\Phi(x) = f(x) - a - bx; \Phi(x_1) = \Phi(x_2) = \Phi(x_3) = 0\ x_1 < x_2 < x_3$.Тогда $\Phi'(x)$ имеет, по крайней мере, по одному нулю в каждом из интервалов $x_1 \le x \le x_2$ и $x_2 \le x \le x_3 \Rightarrow \Phi''(x) = f''(x)$ имеет, по крайней мере, одно изменение знака между x_1 и x_2.

3.3. $f''(x) = (g'(p)p')' = g''(p)(p')^2 + g'p'' = g''(p)(2ax + b)^2 + g'(p)a =$

$= g''(p)4\left(a^2x^2 + abx + ac - ac + \dfrac{b^2}{4}\right) + g'(p)a = 4ag''(p)(ax^2 + bx + c) +$

$+(b^2 - 4ac)g''(p) + g'(p)a = g''(p)(4ap + b^2 - 4ac) + ag'(p).$

3.4. $\Phi(x, y)$ - сумма расстояний от $(\cdot)M(x;y)$ до точек $O(0;0)$; $A(4;0)$; $B(0;4)$; $C(9;3)$ и по неравенству треугольника $\Phi(x, y) = |OM| + |MC| + |AM| + |MB| \ge |OC| + |AB|$, причем равенство достоверно лишь когда $(\cdot)M$ одновременно принадлежит отрезкам AB и OC. Точку $M(3;1)$ находим на пересечении прямых AB: $x+y=4$ и OC: $x-3y=0$. Ответ: (3;1).

3.5. Из уравнения видно, что условие $y'(x)=0$ выполнено для точек $(x;y)$ гиперболы $H(x)=\left(x^2+0{,}5\right)^{\frac{1}{2}}$ с асимптотой $A(x)=x$. На промежутке $x\geq 1$ рассмотрим $F(x)=H(x)-y(x)$. $F(1)=\sqrt{\frac{3}{2}}-1>0$. Допустим, что эта функция меняет знак. x_0 - нижняя грань (замкнутого) множества корней уравнения $F(x)=0$. Тогда x_0 - тоже корень этого уравнения, а левее x_0 функция положительна, следовательно, $F'(x_0)\leq 0$. Однако, т.к. $y(x_0)=H(x_0)$, точка $(x_0;y_0)$, где $y_0=y(x_0)$ лежит на гиперболе и значит $y'(x_0)=0$. Поэтому $F'(x_0)=H'(x_0)>0$. Противоречие, следовательно, $F(x)>0$. Аналогично (с использованием условий $G(1)=G'(1)=0$; $G''(1)=1$ устанавливается, что $G(x)=y(x)-A(x)\geq 0$. Итак, $x\leq y(x)<H(x)\Rightarrow 0\leq y(x)-x<H(x)-x<\frac{1}{4x}$. Ответ: $A(x)=x$.

3.7. Вычислим $G^{(5)}(x)$:

$$G'(x)=\begin{vmatrix} f_1(x)\ldots \\ f_1'(x)\ldots \\ f_1''(x)\ldots \\ f_1''''(x)\ldots \end{vmatrix} \ldots G''''(x)=\begin{vmatrix} f'_1(x)\ldots \\ f_1''(x)\ldots \\ f_1'''(x)\ldots \\ f_1''''(x)\ldots \end{vmatrix}.$$

$G^{(5)}(x)=0$, т.к. в определителе будут 2 одинаковые строки или (если дифференцировать последнюю строку) $f_i^{(5)}(x)=0$, т.к. f_i - полином 4-й степени, т.е. $G(x)$ - полином не выше 4-й степени.

3.8. Может не иметь. Пример: $f(x_0,y_0)=0; f(x,y)=-1$ на дуге некоторой окружности, проходящей через $(x_0;y_0)$; $f(x,y)=1$ в остальных точках.

3.9. Равенство $y=y(x)$ равносильно одновременному выполнению двух условий $-\frac{1}{2}\leq x,y\leq 1$ и $x^2+xy+y^2=\frac{3}{4}$ (точнее, рассматриваем половину этого эллипса, т.к. корень в условии неотрицателен). Из симметричности этих условий следует, что функция y совпадает с обратной, поэтому рассматриваемая последовательность имеет вид $y(x)$, x, $y(x)$, x,... и может сходиться лишь при условии $y(x)=x$, т.е. при $x=\frac{1}{2}$, т.е. последовательность расходится при $x\neq\frac{1}{2}$, при $x=\frac{1}{2}$ она постоянна.

3.10. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ - убывающая функция (непрерывная) $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}=\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$. Покажем, что $f'\left(\sqrt{ab}\right)>\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}>f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, откуда и следует утверждение $\underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt[4]{ab}}>\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}_{\Leftrightarrow\sqrt{b}+\sqrt{a}>\sqrt[4]{ab}}>\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{b+a}}}_{\Leftrightarrow b+a+2\sqrt{ab}<2a+2b\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}<a+b}$. Очевидно, $(a<b)\Rightarrow\exists(\cdot)c$, удовлетворяющая условию: $f'(x)$ - непрерывна и монотонна.

Второе решение.

$\exists c\in(a,b): f(b)-f(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}(b-a)$, $\sqrt{c}=2^{-1}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$, $c=(a+b+2\sqrt{ab})/4=((a+b)/2+\sqrt{ab})/2\in[(a+b)/2,\sqrt{ab}]$.

3.11. Значение функции есть длина ломаной, соединяющей точки $(a,0)-(x,1)-(y,2)-(z,3)-(b,4)$. Минимум достигается, когда точки расположены на одной прямой $(a,0)-(b,4)$.

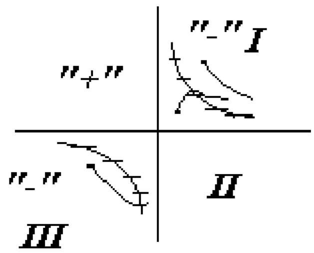
3.12. Фиксируем $y>x>0$. По теореме Коши в некоторой точке $(\cdot)c\in(a;b)$: $\dfrac{b^y-a^y}{b^x-a^x}=\dfrac{yc^{y-1}}{xc^{x-1}}=\dfrac{y}{x}c^{y-x}\underbrace{<}_{c<1}\dfrac{y}{x}\Rightarrow\dfrac{b^y-a^y}{y}<\dfrac{b^x-a^x}{x}$, т.е. функция монотонно убывает.

Второе решение.

$\dfrac{b^x-a^x}{x}=\int\limits_a^b t^{x-1}dt$. $0<a\le t\le b<1$. Функция t^{x-1} монотонно убывает (от x).

3.13. Функция удовлетворяет соотношению $y'=-2xy+1$. Начальные условия $\begin{cases}x=a\\ y=be^{-a^2}\end{cases}$. Функция монотонна, если производная $\neq 0$. Указан знак производной в (-) на плоскости (y,x). На ветвях гиперболы $y'=0$, т.е. интегральные кривые нашего дифференциального уравнения параллельны оси OX.

Если начальная точка находится в области 1, то интегральная кривая не пересечет ветвь гиперболы, если в области 2 или 3, то пересечет. То есть функция будет монотонна, когда



начальные условия принадлежат области 1, то есть при $-2x_0y_0+1>0 \Leftrightarrow -2abe^{-a^2}+1>0$.

3.14. $$f(1)=1; g(x)=f(x)-\frac{1}{x}\le 0; x\in(1;+\infty);$$

$$\underbrace{g(1)=f(1)-\frac{1}{1}=0;}_{\Rightarrow\exists x_0:\, f'(x_0)+\frac{1}{x_0^2}=0}\ \underbrace{g(\infty)=0}_{|f(x)|\le\frac{1}{x}}.$$

Замечание для преподавателей. Возможно «размножение» задачи с заменой исходного неравенства на $|f(x)|\le\frac{1}{x^2}$, или $|f(x)|\le\frac{1}{\ln(x+2)}$, или просто на убывание на бесконечности.

3.15. $$f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}>0;\ x\in(0;\pi);\ f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{x^2}=$$

$$=\frac{\sin^2 x-x^2\cos x}{x^2\sin^2 x}\ge 0;\ \frac{\sin^2 x}{\cos x}\ge x^2;\ \frac{\cos x\sin x}{\cos x}+\sin x\frac{1}{\cos^2 x}\ge 2x;$$

$$\underbrace{\cos x+\frac{1}{\cos x}}_{\ge 2}+2\underbrace{\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}}_{\ge 0}\ge 2.$$

3.16. Пусть $F(a)=0$ (если нет, то рассмотрим $F(x)-F(a)$) $F(x)=e^{kx}g(x); F(a)=0\Rightarrow g(a)=0; F'(b)=0=ke^{kb}g(b)+e^{kb}g'(b)\Rightarrow$ $\Rightarrow g'(b)+kg(b)=0$. Если $g(b)=0$, то $F(b)=0$, т.е. $F'(b)=kF(b)$. Пусть $g(b)>0$. Тогда, т.к. $k>0\Rightarrow g'(b)<0$. В точке a функция g обращается в ноль, а в $(\cdot)b$ убывает, следовательно, $\exists(\cdot)c\in(a;b)$, в которой она имеет максимум, а в максимуме $g'(c)=0\Rightarrow F'(c)=kF(c)$.

3.17. При фиксированном значении y, $|y|\le 1$, функция x^2+yx достигает наибольшего значения на концах интервала. Следовательно,

$$\max_{|x|\le 1}(x^2+yx)=\max\{1+y,1-y\}=1+|y|,$$

$$\min_{|y|\le 1}\max_{|x|\le 1}(x^2+yx)=\min_{|y|\le 1}(1+|y|)=1.$$

Так как при фиксированном значении $x, |x| \le 1$, функция $x^2 + yx$ линейна по y, то ее наименьшее значение также достигается на концах интервала. Отсюда

$$\min_{|y|\le 1}(x^2 + yx) = \min\{x^2 + x, x^2 - x\} = x^2 - |x|,$$

$$\max_{|x|\le 1}\min_{|y|\le 1}(x^2 + yx) = \max_{|x|\le 1}(x^2 - |x|) = 0.$$

Ответ. $\max\limits_{|x|\le 1}\min\limits_{|y|\le 1}(x^2 + yx) = 0 < 1 = \min\limits_{|y|\le 1}\max\limits_{|x|\le 1}(x^2 + yx)$.

3.18. $F'(x)F''(x) - F(x)F'''(x)$ есть либо тождественный нуль (нужное строгое неравенство не выполнено), либо полином нечетной степени (старшие степени не сокращаются), поэтому он обязательно меняет знак на вещественной оси. Пример функции, обладающей нужным свойством: $\exp(\exp(-x))$.

Замечание для преподавателей. Поскольку $F'(x)F''(x) - F(x)F'''(x)$ есть вронскиан F и F'', задачу можно переформулировать: доказать, что если F полином степени выше первой, то F и F'' не могут быть одновременно решениями дифференциального уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

3.20. 1) Верно. Если $f(0) = 0$, то $x_0 = 0$, если $f(1) = 1$, то $x_0 = 1$. Если $f(0) = a \ne 0; f(1) = b \ne 1$, то рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - x; \varphi(0) = a > 0; \varphi(1) = b - 1 < 0; \varphi$ - непрерывная, следовательно, $\exists(\cdot)x_0 \in [0;1]$, что $\varphi(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) = 0$.

2) Неверно . Пример: $f(x) = x^2$ не имеет неподвижных точек на $(0;1)$.

3.21. $$f(x+a) - 2^{-1} = \sqrt{f(x) - f^2(x)} \quad (1)$$

$f^2(x+a) - f(x+a) + 4^{-1} = f(x) - f^2(x) \Rightarrow f^2(x+a) - f(x+a) = -\left(4^{-1} - f(x) + f^2(x)\right) \Rightarrow f(x) = 2^{-1} \pm \sqrt{f(x+a) - f^2(x+a)}$. Из (1) $\Rightarrow$ взять "+". Тогда по (1) $f(x+2a) = 2^{-1} + \sqrt{f(x+a) - f^2(x+a)} = f(x)$, т.е. период равен $2a$.

Второе решение.

Пусть $c_n = f(x+na) = F(c_{n-1})$, $F(t) = 1/2 + \sqrt{t - t^2}$. Область значений F есть $[1/2, 1]$. На этом отрезке график F (четверть окружности) симметричен относительно биссектрисы первого квадранта, поэтому $F(F(t)) = t$. Значит, $c_{n+2} = c_n$, то есть период равен $2a$.

3.22. Из неравенства следует $f'(y) = 0$ (функция f дифференцируема в любой точке $y \in \mathrm{R} \Rightarrow f(y) = const$.

3.23. Доказательство от противного. Пусть это утверждение неверно, следовательно, $\exists N>0$: $\forall n\in\mathrm{N}$ $\exists x_n$: $x_n>n$ удовлетворяет условию $f(x_n)\in[0;N]$, т.к. $f(x)$ непрерывна, а значит, ее значения на $[0;N]$ ограничены, то найдется такое значение M, что если $f(x)\le N$, то $f(f(x_n))\le M$, т.е. для $\forall n\in\mathrm{N}$ $\exists x_n$: $x_n>n$, для которого $f(f(x_n))\le M$, что противоречит условию $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty$. б) $f(x)\equiv\frac{1}{x}$: $(0;\infty)\to(0;\infty)$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$; , но $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$.

3.24. $f(x)=\int\limits_0^1 f(x)dy=\sum\limits_{1\le k\le n} a_k\int\limits_0^1 f(b_kx+c_ky)dy=\sum\limits_{1\le k\le n}\frac{a_k}{c_k}\int\limits_{b_kx}^{b_kx+c_k} f(z)dz$, таким образом, если $f(x)$ непрерывна, то $\int\limits_{b_kx}^{b_kx+c_k} f(z)dz$ непрерывно дифференцируема, т.е. $f\in C^1$ и т.д., т.е. $f\in C^\infty$.

3.25. $P(x,y)=x^2+(xy-1)^2>0$, но в точке $\left(\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}\right):P\left(\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}\right)=\varepsilon^2$ для любого ε, т.е. $P\left(\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}\right)\underset{\varepsilon\to0}{\to}0$, но 0 не достигается.

3.26. Рассмотрим $F(x)=f\left(x+\frac{1}{5}\right)-f(x), x\in\left[0,\frac{4}{5}\right]$. Надо показать, что существует x_0, такое что $F(x_0)=0$. Имеем:

$$F(0)=f\left(\frac{1}{5}\right)-f(0); F\left(\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right),$$

$$F\left(\frac{2}{5}\right)=f\left(\frac{3}{5}\right)-f\left(\frac{2}{5}\right), F\left(\frac{3}{5}\right)=f\left(\frac{4}{5}\right)-f\left(\frac{3}{5}\right), F\left(\frac{4}{5}\right)=f(1)-f\left(\frac{4}{5}\right).$$

Суммируем: $F(0)+F\left(\frac{1}{5}\right)+F\left(\frac{2}{5}\right)+F\left(\frac{3}{5}\right)+F\left(\frac{4}{5}\right)=f(1)-f(0)=0.$

Значит, в левой части либо все нули (тогда задача решена), либо есть числа разных знаков. Пусть это $F(x_1)$ и $F(x_2)$, где $0\le x_1<x_2\le 4/5$ По непрерывности F существует x_0: $x_1<x_0<x_2$ такое, что $F(x_0)=0\Rightarrow f\left(x_0+\frac{1}{5}\right)=f(x_0)$.

3.27. Подставим в тождество $x = 1;\ -1;\ 0$: $-3P(1) = 0$; $-3P(-1) = 0$; $-P(1) - 2P(0) = 0$. Т.е. $P(x)$ имеет корни $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = 0$ и, следовательно, делится на $(x^3 - x)$. Пусть $Q(x)$ - многочлен, такой, что $P(x) = (x^3 - x)Q(x)$. Подставим в тождество:

$$(x-1)\left((x+1)^3 - (x+1)\right)Q(x+1) - (x+2)(x^3 - x)Q(x) \equiv 0,$$

$$(x-1)\left(x^3 + 3x^2 + 2x\right)Q(x+1) - (x+2)(x^3 - x)Q(x) \equiv 0,$$

$$(x-1)\left(x^3 + 3x^2 + 2x\right)(Q(x+1) - Q(x)) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathrm{R}: Q(x+1) = Q(x).$$

Пусть $Q(0) = c$. Тогда многочлен $Q(x) - c$ имеет бесконечно много корней: 0,1,2,3,... Т.е. это 0. Ответ: $c(x^3 - x)$.

3.28. Пусть для некоторых $c_1, c_1,\ c_1 < c_2$: $f(c_1) \neq f(c_2)$. Пусть

$l = \dfrac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} > 0$. Рассмотрим множество

$S = \left\{ x \in [c_1; c_2]:\ \left|f(x) - f(c_1)\right| \le -\dfrac{l}{2}(x - c_1) \right\}$. Это собственное подмножество $[c_1, c_2]$, содержит c_1, не содержит c_2. Оно замкнуто, так как f непрерывна. Пусть $s = \sup S,\ s < c_2$ Возьмем $x > s$ из последовательности, заданной в условии: $\left|f(x) - f(c_1)\right| \le \dfrac{l}{2}(x - c_1)$. Тогда $x \in S$. Противоречие.

3.29. Асимптоты функции $f(x)$: $y = kx + b$,

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 4,\ b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}(-\operatorname{arctg} x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & x \to +\infty \\ \dfrac{\pi}{2} & x \to -\infty \end{cases}$$

При $x \to +\infty$ $y = 4x - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{y + \frac{\pi}{2}}{4}$, $\quad y \to +\infty$,

при $x \to -\infty$ $y = 4x + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{y - \frac{\pi}{2}}{4}$, $\quad y \to -\infty$.

Асимптоты обратной функции $f^{-1}(x)$ (прямые, симметричные относительно прямой $y = x$ к асимптотам прямой функции):

$$y = \frac{x}{4} + \frac{\pi}{8} \quad \text{при } x \to +\infty, \qquad y = \frac{x}{4} - \frac{\pi}{8} \quad \text{при } x \to -\infty.$$

3.30. Пусть A, B, C - три всюду плотных множества, дизъюнктивно покрывающих всю прямую (например, рациональные числа, их сдвиги на $\sqrt{2}$

и все остальные), тогда произведение характеристических функций любых двух из этих множеств есть 0 на всей прямой, но функции всюду разрывны.

3.31. Функция постоянна. Если предположить, что она принимает два различных иррациональных значения, то в силу непрерывности она принимает и все промежуточные значения (теорема Больцано-Коши). Но между любыми иррациональными числами есть рациональные. Получаем противоречие. Ответ: $f(2)=\sqrt{e}$

3.32. Пусть v_0 – начальная скорость, α – угол наклона. Тогда составляющие скорости будут $v_x = v_0\cos\alpha$, $v_y = v_0\sin\alpha - gt$.

Смещение снаряда по осям: $x = tv_0\cos\alpha$, $y = tv_0\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}$.

Площадь под траекторией

$$S = \int_0^{2t_0} y\,dx = \int_0^{2t_0}\left(tv_0\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)v_0\cos\alpha\,dt,$$

где t_0 – время, за которое снаряд попадет в верхнюю точку траектории:

$$v_y(t_0) = 0 = v_0\sin\alpha - gt,$$

то есть $t_0 = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$.

Тогда

$$S = S(\alpha) = \frac{2}{3}v_0^4 g^{-2}\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

Найдем максимум функции $S(\alpha)$, $0<\alpha<\pi/2$.

$$S'(\alpha) = \frac{2}{3}v_0^4 g^{-2}(-\sin^4\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 0.$$

Тогда $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}^2\alpha = 3 \\ \sin\alpha = 0 \end{array}\right. \\ 0<\alpha<\pi/2 \end{cases}$

Откуда получим $\alpha = \pi/3$.

Ответ: $\alpha = \pi/3$.

3.33. Пусть $\sqrt{1+t}=\sum_{k=0}^{2N}a_k t^k+o(t^{2N})$, тогда

$$2\sum_{n=0}^{N}a_{2n}t^{2n}+o(t^{2N})=\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}=\sqrt{2+2\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}y(-t^2)=$$

$$=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{N}y^{(n)}(0)\frac{(-t^2)^n}{n!}+o(t^{2N})$$

откуда, сравнивая коэффициенты многочленов Тейлора, находим, что $y^{(n)}(0)=(-1)^n\sqrt{2}\cdot n!\cdot a_{2n}$. Значения коэффициентов a_{2n} определяется из разложения Маклорена: $\sqrt{1+t}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{1/2}\cdot t^k$ и приводят к формуле

$$y^{(n)}(0)=(-1)^n\sqrt{2}\cdot n!\cdot\frac{(4n-3)!!}{4^n(2n)!}.$$

Ответ: $y^{(n)}(0)=(-1)^n\sqrt{2}\cdot n!\cdot\frac{(4n-3)!!}{4^n(2n)!}$.

3.34. Рассмотрим функцию $F(x)=f(x)+x-a-b$. Она непрерывна на $[a,b]$, причем $F(a)=f(a)-b=a-b$, $F(b)=f(b)-a=b-a$, то есть $F(x)$ принимает на концах отрезка $[a,b]$ значения разных знаков. Значит, существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $F(c)=0$, следовательно, $f(c)+c-a-b=0\Leftrightarrow f(c)=a+b-c$. Применим теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$. То есть существует точка $x_1\in(a,c)$ такая, что $f'(x_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{a+b-c-a}{c-a}=\frac{b-c}{c-a}$ и точка $x_2\in(c,b)$ такая, что $f'(x_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{b-a-b+c}{c-a}=\frac{c-a}{b-c}$. Но тогда:

$f'(x_1)f'(x_2)=\frac{b-c}{c-a}\cdot\frac{c-a}{b-c}=1$, что и требовалось.

3.35. Пусть $P(x)$ - многочлен. Рассмотрим многочлены вида $q_\pm(x)=\left(P'(x)\right)^2\pm P'(x)+1$. Очевидно, что их первообразные $Q_\pm(x)$ есть возрастающие многочлены. А также, что $P'(x)=\frac{q_+(x)-q_-(x)}{2}$ и, следовательно, $P(x)=\frac{1}{2}Q_+(x)-\frac{1}{2}Q_-(x)+C$, что и требовалось доказать.

3.36. Предположим, что $f(0)<0$. Тогда $0=3\cdot 0+\sin 0=f\left(f(0)\right)\le f(0)<0$ - противоречие. Аналогичным образом предположение $f(0)>0$ также приводит к противоречию. Следовательно, $f(0)=0$. Продифференцируем тождество три раза:

$$f'\left(f(t)\right)\cdot f'(t)\equiv 3+\cos t,$$

$$f''(f(t))\cdot(f'(t))^2+f'(f(t))\cdot f''(t)\equiv-\sin t,$$

$$f'''(f(t))\cdot(f'(t))^3+3f''(f(t))\cdot f''(t)\cdot f'(t)+f'(f(t))\cdot f'''(t)\equiv-\cos t.$$

Подставим $t=0$ и $f(0)=0$, и учтем, что функция неубывающая:

$$f'(0)=2,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-\frac{1}{10}.$$

3.37. В силу непрерывности f образ вещественной прямой – это прямая, луч, отрезок или точка. С другой стороны, это множество должно быть не более, чем счетно, поскольку $f(\mathbb{Q})$, очевидно, не более, чем счетно, а $f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, по условию, тоже не более, чем счетно. Значит, это точка.

3.38. Для всех $x,y\in(-\infty,\infty)$, выполнено неравенство $f(x)\ge xy-f(y)$.

Подставим в него $y=x$ и получим $f(x)\ge x^2-f(x)$, то есть $f(x)\ge\frac{x^2}{2}$.

Докажем, что $f(x)=\frac{x^2}{2}$. От противного. Пусть существует x_0, такое, что $f(x_0)>\frac{x_0^{\ 2}}{2}$. Докажем, что для всех y выполнено неравенство:

$$f(x_0)-(x_0y-f(y))\ge f(x_0)-\frac{x_0^{\ 2}}{2}>0 \qquad (1)$$

Этого будет достаточно, так как неравенство противоречит условиям задачи: из него следует, что

$$f(x_0)\ge\max_y(x_0-f(y)+f(x_0)-\frac{x_0^{\ 2}}{2})>\max_y(x_0y-f(y)).$$

Неравенство (1) равносильно следующему:

$$\frac{x_0}{2}-x_0y+f(y)\ge 0.$$

Учитывая, что $f(y)\ge\frac{y^2}{2}$, приходим к неравенству

$$\frac{x_0^{\ 2}}{2}-x_0y+\frac{y^2}{2}\ge 0,$$

которое верно, так как левая часть равна $\frac{1}{2}(x_0-y)^2$.

Ответ. $f(x)=\frac{x^2}{2}$.

3.39. а) В противном случае существуют x, y такие, что $g(x0 = g(y), x \neq y,$ откуда $g_n(x) = g_n(y)$, что противоречит условию.

б) Фиксируем x и предположим, что $x < g(x)$. Тогда, ввиду возрастания g,

$g(x) < g(g(x)) = g_2(x), g_2(x) = g(g(x)) < g(g_2(x)) = g_3(x),...$

$g_{n-1}(x) < g_n(x) = x,$ то есть $x < x$, то есть противоречие. Точно так же доказывается невозможность неравенства $x > g(x)$. Значит, $g(x) = x.$

в) Если n нечетно и $g(x)$ убывает, то $g_n(x)$ также убывает. Поэтому равенство $g_n(x) = x$ невозможно для всех x. Следовательно, g возрастает, а тогда $g(x) = x$ согласно пункту б). Если $g(x)$ строго монотонна, то $g_2(x)$ возрастает. Пусть $n = 2k, f(x) = g_2(x)$. Тогда $f_k = g_n$ и к функциям f, f_k можно применить результат задачи б), согласно которому $f(x) = g_2(x) = x$.

г) Утверждение выполняется для $\varphi(x) = x - g(x)$. Действительно, так как $g(x_0) \neq x_0$, то $g(x)$ то $g(x)$ убывает согласно задаче б).Следовательно, φ возрастает. Далее, благодаря в), $g_2(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому $\varphi(g(x)) = g(x) - g(g(x)) = g(x) - x = -\varphi(x)$. Значит, $g(x) = \psi(\varphi(g(x))) = \psi(-\varphi(x)).$

3.40. Нет. Функция $f(x) = e^x$ также обладает этим свойством, так как $ce^x = e^{x+\ln c}$.

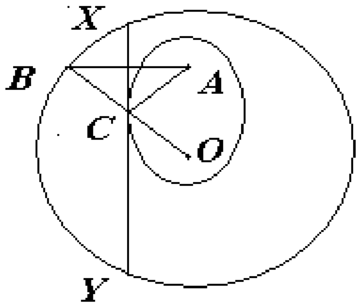
4.1. $\overline{x} = \overline{a} \times \overline{x} + \overline{a} \times \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \times \overline{x} = \overline{a} \times \left[\overline{a} \times \overline{x}\right] + \overline{a} \times \left[\overline{a} \times \overline{b}\right] = \overline{a}(\overline{a} \cdot \overline{x}) - \overline{x} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{a}) + \overline{a} \times \left[\overline{a} \times \overline{b}\right] = -\overline{x} \cdot \overline{a}^2 + \overline{a} \times \left[\overline{a} \times \overline{b}\right].$ Но $\overline{a} \times \overline{x} = \overline{x} - \overline{a} \times \overline{b} \Rightarrow \overline{x} - \overline{a} \times \overline{b} = -\overline{x} \cdot \overline{a}^2 + \overline{a} \times \left[\overline{a} \times \overline{b}\right] \Rightarrow$

$$\overline{x} = \frac{\overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \left[\overline{a} \times \overline{b}\right]}{1 + \overline{a}^2}.$$

4.2. Пусть n - внешняя нормаль к S. Надо доказать, что $\iint\limits_S \overline{n} dS = \overline{0}$, т.е. для каждой компоненты $\iint\limits_S n_i dS = 0;\ (i = 1,2,3)$. Возьмем постоянное векторное поле $\overline{F} = (1;0;0)$. Тогда $\iint\limits_S n_i dS = \iiint\limits_\Omega div\overline{F} dv = 0$ (по теореме Остроградского -Гаусса). $n_1 = (\overline{F}, \overline{n})$. Аналогично для n_2 и n_3 (взять $\overline{F} = (0;1;0)$ или $(0;0;1)$.

4.3. У куба 6 граней. Если в сечении пятиугольника, то пересечены 5 из них, значит, среди них есть параллельные, следовательно, стороны пятиугольника параллельны (но у правильного пятиугольника нет параллельных сторон).

4.4. $(\cdot)A$ совмещается с $(\cdot)B$ на окружности, следовательно, $XY \perp AB$ и делит AB пополам, следовательно, $BC = AC$,



следовательно, $OC + AC = OC + CB = R = const$, следовательно, геометрическое место точек C - эллипс с фокусами O и A. Линия XY - касательная к эллипсу в $(\cdot)C$, т.к. $\angle OCX = \angle BCY \Rightarrow \angle OCX = \angle ACY$ (свойство касательной к эллипсу)

4.5. Правильный многоугольник можно вписать в окружность, но окружность с эллипсом может иметь не более 4-х общих точек, следовательно, правильный шестиугольник вписать в эллипс, не являющийся окружностью, нельзя.

4.6. Так как ось конуса образует равные углы со всеми образующими конуса, т.е. с осями координат, то она имеет своим направляющим вектором либо $(1;1;1)$, либо $(1;1;-1)$, либо $(1;-1;1)$, либо $(1;-1;-1)$. Рассмотрим первый вариант и обозначим направляющий вектор через a. Пусть $r(x;y;z)$ радиус - вектор любой точки конуса и $k = (0;0;1)$ уравнение конуса $k^2(a,r)^2 = r^2(a,k)^2$ или $xy + yz + zx = 0$. Аналогично другие 3 варианта. Ответ: $xy + yz + zx = 0$, или $yz - xy - zx = 0$, или $xy - yz - zx = 0$, или $xz - yx - zy = 0$.

4.7. Пусть $\alpha \le \beta \le \gamma$ - плоские углы при вершине O. Из теоремы косинусов находим: $\cos\alpha = \frac{7}{9}$; $\cos\beta = \frac{5}{9}$; $\cos\gamma = -\frac{1}{9}$;

$$0 \le \gamma \le \alpha + \beta < \pi \Rightarrow \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \le \cos\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\gamma)^2 \le (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta +$$

$+\cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le 1$. Однако, найденные значения косинусов дают для левой части неравенства значение $\frac{745}{729}$, т.е. такая конфигурация невозможна.

Второе решение.

Пусть $a = OA, b = OB, c = OC$. Составим матрицу Грама. $(a,a) = 6^2 = 36$, $(b,b) = 6^2 = 36$, $(c,c) = 3^2 = 9$,

$(a,b) = ((a,a) + (b,b) - (a-b, a-b))/2 = (6^2 + 6^2 - 4^2)/2 = 28$,

$(a,c) = ((a,a) + (c,c) - (a-c, a-c))/2 = (6^2 + 3^2 - 7^2)/2 = -2$,

$(b,c) = ((b,b) + (c,c) - (b-c, b-c))/2 = (6^2 + 3^2 - 5^2)/2 = 10$. Матрица Грама должна быть положительно определена (это критерий реализуемости в пространстве, но здесь достаточно необходимости). Однако, здесь определитель Грама равен -256<0, то есть конфигурация невозможна.

4.8. Возьмем полуось $a=3$, фокусы $A(-1;0)$; $B(1;0)$, круг K радиуса 2 с центром B лежит внутри эллипса. По свойству эллипса для любой $(\cdot)E$ на нем $|AE|+|EB|=2a=6$.

1) Пусть точка M покрыта каким-то кругом с центром E на эллипсе радиусом $|EB|-2$. Тогда, по неравенству треугольника $|AM|\le|AE|+|EM|\le|AE|+\big||EB|-2\big|=4$, т.е. M принадлежит дополнению C круга K до круга Γ с центром A и радиусом 4, содержащему данный эллипс.

2) Пусть M принадлежит множеству C. Не ограничивая общности, можно считать M лежащей вне эллипса, т.к. все тоски C внутри эллипса, очевидно, покрыты кругами, касающимися K. Тогда, луч AM пересекает эллипс в некоторой точке E так, что $4\ge|AM|=|AE|+|EM|=\big|6-|EB|\big|+|EM|\Rightarrow|EM|\le|EB|-2$, т.е. M покрыта касающимся K кругом с центром E. Площадь C равна площади Γ - площадь $K=16\pi-4\pi=12\pi$.

4.9. Пусть $r_k=a_k+v_kt$ - радиус-вектор $k-$й точки, N - нормаль к плоскости. Векторное произведение $[r_2-r_1,r_3-r_1]=N\cdot f(t)$ ($f(t)-$квадратичная функция от t) обращается в ноль, если точки лежат на одной прямой. Но если квадратичная функция равна нулю при трех различных значениях t, то она равна нулю тождественно.

4.11. Пусть задана $(\cdot)(x;y;z)$. Уравнение всех касательных плоскостей $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$; $(x_0;y_0;z_0)$ - точка касания. Так как все эти плоскости проходят через одну $(\cdot)(x;y;z)$, то $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$, то есть все точки касания лежат в плоскости, заданной этим уравнением.

4.12. $\frac{x^2}{(a+r)^2}+\frac{y^2}{(b+r)^2}=1$. Если для любой точки эллипса (1) укажем точку эллипса (2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, расстояние до которого r, то расстояние от этой точки до эллипса (2) (это $\min$ таких расстояний)$\le r$. В полярных координатах эллипсы задаются уравнениями:

$$\begin{cases}x_1=(a+r)\cos\varphi\\ y_1=(b+r)\sin\varphi\end{cases}(1);\quad\begin{cases}x_2=a\cos\varphi\\ y_2=b\sin\varphi\end{cases}(2).$$

Найдем расстояние между точками с одинаковым углом φ: $x_1-x_2=r\cos\varphi$; $y_1-y_2=r\sin\varphi$, следовательно, расстояние равно r.

4.13. Уравнение исходного луча:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}.$$

Продолжение луча пересечет все плоскости, т.к. он не параллелен ни одной из них. При отражении получится прямая, у которой одна из координат $(x_0; y_0; z_0)$ меняет знак (l, m или n тоже), т.е. после 3-х отражений получим:

$$\begin{cases} x = -x_0 - lt \\ y = -y_0 - mt \\ z = -z_0 - nt \end{cases} \text{ - уравнение луча.}$$

4.14. Уравнение касательных к гиперболе: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\frac{x_1 X}{a^2} - \frac{y_1 Y}{b^2} = 1$; $\frac{x_2 X}{a^2} - \frac{y_2 Y}{b^2} = 1$. Пусть $(X;Y)$ - точка пересечения касательных. Тогда фиксируем X, Y и видим, что точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ лежат на прямой $\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1$. Но точка $(c;d)$ лежит на этой же прямой по условию, а значит $\frac{cX}{a^2} - \frac{dY}{b^2} = 1$. Теперь фиксируем c, d, (координаты $(X;Y)$ точки пересечения оказываются связанными этим соотношением), то есть все точки пересечения касательных лежат на этой прямой. $\frac{cX}{a^2} - \frac{dY}{b^2} = 1$.

4.15. Выберем масштаб: $AC = 6, CB = 2, AB = 8$, радиус большей полуокружности равен 3, меньшей- 1.радиус γ равен 4. По теореме Пифагора центр γ расположен на расстоянии $\sqrt{(3+4)^2 - 1^2} = 4\sqrt{3}$ от прямой AB. Пусть радиус искомой (вписанной) окружности равен r, расстояний от AB y. Условие касания малой полуокружности и b: $(r+1)^2 = (r-1)^2 + y^2$. Условие касания большой полуокружности и b: $(r+3)^2 = (r-5)^2 + y^2$. Условие касания γ и b: $(r+4)^2 = (4-r)^2 + (4\sqrt{3} - y)^2$. Эти уравнения совместны. Решение: $r = 4/3$, $y = 4/\sqrt{3}$.

4.16. Да (см. 4.6.). Можно без ссылки на 4.6. Исходя из симметрии уравнения, возможная ось – прямая $x = y = z$ с направляющим вектором $N = (1,1,1)/\sqrt{3}$. Проекция $r = (x, y, z)$ на это направление есть $v = (x + y + z)/\sqrt{3}$. Расстояние от r до этой прямой $\rho^2 = ([r, N])^2 =$

$$= ((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2)/3 = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)/3.$$

Уравнение $xy + yz + zx = 0$ приводится к виду $2v^2 = \rho^2$, то есть это поверхность вращения.

4.17. Пусть угол между прямыми $2\varphi_0$. Биссектрису угла между этими прямыми выберем за ось OX, а ось OY вертикальна. Тогда $x^2\cos^2\varphi_0 + a^2 = r^2 = x^2 + y^2$. Отсюда сразу получаем уравнение эллипса $\frac{x^2\sin^2\varphi_0}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, точнее его части до точки $(\frac{a}{\sin\varphi_0}, 0)$.

4.20. Докажем, что центр симметрии любого параллелограмма, вписанного в эллипс, совпадает с центром симметрии эллипса. Если сжать эллипс вдоль одной из осей так, чтобы получилась окружность, то параллелограмм перейдет в параллелограмм, а так как у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна π, то этот параллелограмм будет прямоугольником. Следовательно, его диагонали являются диаметрами окружности, а их точка пересечения- центром окружности. Возвращаясь с помощью растяжения к исходному эллипсу, получаем нужное утверждение.

Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, его вершины являются точками пересечения с эллипсом взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через центр. Докажем, что такие точки являются вершинами ромба. Так как параллелограмм с перпендикулярными диагоналями являе тся ромбом, достаточно доказать, что эти точки являются вершинами параллелограмма. Это следует из того факта, что точки симметричны относительно центра эллипса (так как относительно него симметричен эллипс и обе прямые).

Докажем, что все ромбы, вписанные в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, описаны около одной и той же окружности. Пусть прямые $y = kx,\ y = -x/k$ - диагонали

ромба $ABCD$. Решая системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = -x/k, \end{cases}$$

Найдем координаты точек A, B, C, D:

$x_{1,2}=\frac{\pm ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}$, $y_{1,2}=\frac{\pm kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}$,

$x_{3,4}=\frac{\pm kab}{\sqrt{a^2+k^2b^2}}$, $y_{3,4}=\frac{\pm ab}{\sqrt{a^2+k^2b^2}}$,

Отсюда

$$|OC|=\frac{ab\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{b^2+k^2a^2}},\ |OD|=\frac{ab\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{a^2+k^2b^2}}.$$

Следовательно, длина высоты OE, опущенной из центра O на сторону CD, равна

$$\pi|OE|=\frac{|OC||OD|}{\sqrt{|OC|^2+|OD|^2}}=\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2}}.$$

Таким образом, радиус окружности, вписанной в произвольный ромб $ABCD$ равен $\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2}}$. Это означает, что открытый круг данного радиуса с центром в точке O содержится во всех ромбах, вписанных в данный эллипс. Кроме того, любая точка вне данного открытого круга оказывается вне некоторого открытого ромба.

Ответ. Пересечением внутренностей всех ромбов, вписанных в эллипс с полуосями a,b , является внутренность круга с центром в центре эллипса и радиуса $\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2}}$.

4.22. Из соображений симметрии $8V(R)=V(C)-V(Ш)$, где Ш -шар, ограниченный S, отсюда $V(R)=8-\frac{4}{3}\pi$.

4.23. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{2xx'}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$ (*); $S=\left|\frac{\overline{r}\times d\overline{r}}{2}\right|$; $\overline{r}=(x+F)\overline{i}+y\overline{j}$; $d\overline{r}=dx\overline{i}+dy\overline{j}\Rightarrow S=(x+F)dy-ydx\Rightarrow\sigma=\frac{(x+F)y'-yx'}{2}$ (**). Из уравнений (*) и (**) находим $(x';y')$.

4.24. Зададим эллипс параметрически:

$$\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases};\ B\to A\Leftrightarrow\varphi\to 0.$$

Длина дуги $AB: L(\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)d\varphi=b\int\limits_0^{\varphi}(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi=$

$=b\int\limits_0^{\varphi}(1+\frac{a^2-b^2}{2b^2}\varphi^2+\ldots)d\varphi=b\varphi+\frac{a^2-b^2}{6b}\varphi^3+o(\varphi^3)$. Уравнение прямой

BC: $\dfrac{x-a}{a\cos\varphi-a}=\dfrac{y-l(\varphi)}{b\sin\varphi-l(\varphi)}$. Точка пересечения P этой прямой с

осью OX: $x=a-\dfrac{al(\varphi)(\cos\varphi-1)}{b\sin\varphi-l(\varphi)}=$

$$=a+a\frac{\left(b\varphi+\frac{a^2-b^2}{6b^2}\varphi^3+o(\varphi^3)\right)\left(\frac{\varphi^2}{2}+o(\varphi^3)\right)}{b\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{6}+d\varphi^3\right)-b\varphi-\frac{a^2-b^2}{6b}\varphi^3+o(\varphi^3)};$$

$$\lim_{\varphi\to 0}x=\lim_{\varphi\to 0}\left(a+a\frac{\frac{b\varphi^3}{2}+o(\varphi^3)}{-\varphi^3\left(\frac{b}{6}+\frac{a^2-b^2}{6b}\right)+o(\varphi^3)}\right)=a-\frac{3b^2}{a}.$$

Второе решение.

В пределе все будет так же, как у окружности с радиусом, равным радиусу кривизны эллипса в точке А. Радиус кривизны $R=\dfrac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{y''x'-y'x''}=$

$=\dfrac{(b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi)^{3/2}}{ab}=\dfrac{b^2}{a}$ при $\varphi=0$. Центр окружности

$x_0=a-R=\dfrac{c^2}{a}$, точка на окружности $x=a=R(1-\cos t), y=R\sin t$, точка

на прямой $x=a, y=Rt$. $BC:\ \dfrac{x-a}{-R(1-\cos t)}=\dfrac{y-Rt}{R\sin t-Rt}$. Пересечение с

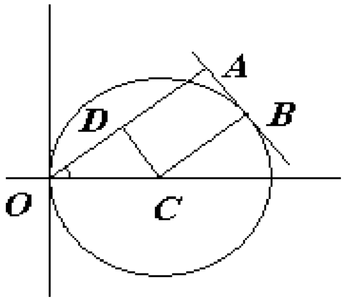
осью OX: $y=0, x=\dfrac{a-Rt(1-\cos t)}{t-\sin t}\to a-3R=a-3\dfrac{b^2}{a}$ при $t\to 0$.

4.26. $\bar r_A(t);\ \bar r_B(t);\ \bar r_C(t)$ - радиус - векторы точек A,B,C. $\overline{AB}=\bar r_B-\bar r_A;\ \overline{AC}=\bar r_C-\bar r_A$, нормируем их и получаем биссектрису (их сумма) - это совпадает с нормалью. $\dfrac{\bar r_B-\bar r_A}{|\bar r_B-\bar r_A|}+\dfrac{\bar r_C-\bar r_A}{|\bar r_C-\bar r_A|}=\bar n_A$,

перпендикулярно касательной $\dfrac{d\bar r_A}{dt}$, то есть $\dfrac{d\bar r_A}{dt}\cdot\left(\dfrac{\bar r_B-\bar r_A}{|\bar r_B-\bar r_A|}+\dfrac{\bar r_C-\bar r_A}{|\bar r_C-\bar r_A|}\right)=0\ (*)$.

Такие же условия для C и B. Надо доказать, что $|\bar{r}_B - \bar{r}_A| + |\bar{r}_C - \bar{r}_A| + |\bar{r}_C - \bar{r}_B| = const.$ Найдем производную по t от суммы: $\frac{d}{dt}(|\bar{r}_B - \bar{r}_A| + |\bar{r}_C - \bar{r}_A| + |\bar{r}_C - \bar{r}_B|)$. В силу трех соотношений (*), она обращается в ноль.

4.28.



$CD \perp OA;\ CB \parallel DA;$

$AB \perp OA:\ AD = BC = R = 1;$

$OD = |OC|\cos\varphi = R\cos\varphi = \cos\varphi;$,

$|OA| = 1 + \cos\varphi$, то есть уравнение кривой в полярных координатах $\rho = 1 + \cos\varphi$.

4.29. Расстояние центра 3-й окружности от центра 1-й $R_1 + r$, от центра 2-й $R_2 + r$. Разность этих расстояний $R_1 - R_2 = const$, т.е. геометрическое место центров - гипербола с фокусами -центрами окружностей и вещественной полуосью $\frac{R_1 - R_2}{2}$. Одна ветвь - внешнее касание окружностей, другая - внутреннее.

4.31. Пусть P - некоторая плоскость, пересекающая эллипсоид E по окружности с центром в $(\cdot)A$. Проведем через A плоскость Q, задав ее уравнением $x = x_0$. Пересечение Q и E - эллипс $F = \left\{(x_0; y_0; z_0):\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{d^2}\right\}$. Полуоси F имеют различную длину, поэтому $P \neq Q$. Пусть $l = P \cap Q;\ B_1, B_2$ - точки пересечения прямой l и E. Тогда $|B_1B_2|$ - диаметр окружности, являющейся пересечением P и E. Он не превосходит наибольшей из осей эллипса F, то есть величины $2b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{d^2}} \le 2b$. Значит, радиус любой окружности, лежащей на E не превосходит b. Покажем, что существует окружность радиуса $R = b$. Проведем плоскость P через полуось b и через диаметр длины $d = 2b$ эллипса с полуосями a и c. Тогда в пересечении $P \cap E$ получим эллипс, у которого диаметр d является осью симметрии и, тем самым, одна из его полуосей равна $\frac{d}{2} = b$, а вторая полуось ортогональна d и также равна b. Следовательно, $P \cap E$ является окружностью радиуса b.

4.32.Три двумерных вектора $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$ линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists A,B,C: A\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow Ax+By+Cz=D$, т.е. точки кривой лежат на этой плоскости.

4.33. Ответ: отрезок от середины основания до середины высоты, опущенной на него.

4.34. Рассмотрим угол, величиной $\pi/3$ с вершиной на средней прямой. Возьмем в качестве параметра угол α стороны с прямой. Меняя α, попытаемся получить искомый правильный треугольник. Условия этого: $\dfrac{a}{\sin\alpha} - \dfrac{b}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)} = 0$. Пусть $f(\alpha) = \dfrac{a}{\sin\alpha} - \dfrac{b}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}$. Функция f непрерывна и $f(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\to} \infty; f(\alpha) \underset{\alpha\to\frac{\pi}{3}-0}{\to} -\infty$. Поэтому $\exists\alpha_0 : f(\alpha_0)=0$.

4.35. Пусть $M_n(x_n, y_n)$ - вершина n-го треугольника. $x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = \dfrac{1}{2}+3+\dfrac{5}{2},\dots,x_n = \dfrac{1}{2}+3+5+\dots+\dfrac{2n-1}{2} =$

$= n + \dfrac{3+2n-3}{2}(n-2) = n^2 - n \quad y_n = \dfrac{2n-1}{2}\sqrt{3}$. Исключим n, следовательно, $y^2 = 3\cdot\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$ - парабола. $p=\dfrac{3}{2}; F(\dfrac{1}{2};0)$. расстояние от вершины n-го треугольника до фокуса F

$$\rho = \sqrt{\left(n^2-n-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(n^2-n\right)^2 - \left(n^2-n\right) + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(4n^2-4n+1\right)} =$$

$= \sqrt{\left(n^2-n+1\right)^2} = n^2-n+1$ - целое число

4.36. Обозначим точку попадания на OZ через C. Эта точка не меняется, если совершить поворот точке A относительно оси OZ. Повернем так, что она окажется в плоскости XOZ, где находится точка B. Тогда $A'B$ - отрезок прямой, пересечение которого с OZ дает искомую точку C.

4.37.

$$4 = \sum_i |\bar{a}_i| = \sum_i |a_i^x + a_i^y| \le \sum_i |a_i^x| + \sum_i |a_i^y| = \sum_{i:a_i^x>0} a_i^x + \sum_{i:a_i^x<0} -a_i^x + \sum_{i:a_i^y>0} a_i^y + \sum_{i:a_i^y>0} (-a_i^y).$$

Значит, хотя бы одна из сумм не меньше 1, например,

$$\sum_{i:a_i^x>0} a_i^x \Rightarrow \left\| \sum_{i:a_i^x>0} a_i^x \right| + \left| \sum_{i:a_i^x>0} a_i^y \right\| \ge \left| \sum_{i:a_i^x>0} a_i^x \right| = \sum_{i:a_i^x>0} a_i^x \ge 1.$$

4.38. Доказательство проведем для общего случая. Рассмотрим k-мерный куб (k=4 для нашего случая). Введем систему координат, чтобы центр куба совпал с началом системы координат, координатные оси были параллельны ребрам куба, а длина ребра была бы равна 2. Тогда вершины куба – точки вида $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$, где $\varepsilon_j = \pm 1$ $(j = 1, 2, \ldots k)$. Рассмотрим гиперплоскость Γ, не параллельную ни одному из ребер. Уравнение Γ: $a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k = b$, при этом все $a_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots k)$ (если $a_i = 0$, то Γ параллельна i-ой координатной оси и, следовательно, параллельна некоторым ребрам). Надо доказать, что Γ содержит не более n_k вершин куба (где $n_4 = 6$). Заметим, что все $a_1, \ldots a_k$ можно считать большими нуля, т.к. множество вершин куба инвариантно относительно замен знаков координат на противоположные. Поэтому плоскости, задаваемые уравнениями $a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k = b$ и $|a_1| x_1 + \ldots + |a_k| x_k = b$, содержат одинаковое число вершин куба.

Если $a_1 = \ldots = a_k$, то уравнение Γ имеет вид: $x_1 + \ldots + x_k = \dfrac{b}{a_1}$. Γ содержит только те вершины куба, в которых ровно L координат, где $L = \dfrac{1}{2}\left(k + \dfrac{b}{a_1}\right)$, равны 1 (а остальные равны -1). Число таких вершин равно нулю, если $L \notin \mathbb{Z}$, а также если L<0 и L>k, и равно C_k^L, если $L \in \{0; 1; \ldots k\}$. Нетрудно проверить, что $C_k^L \leq n_k$ при всех L, поэтому в этом случае утверждение задачи выполнено.

Пусть теперь $a_i \neq a_j$ для некоторых i и j. Тогда все числа $-a_i - a_j$; $-a_i + a_j$; $a_i - a_j$; $a_i + a_j$ - различны. Зафиксируем $\varepsilon_i \in \{+1; -1\}$ для всех $L \neq i, j$. Тогда ε_i и ε_j, удовлетворяющие равенству $a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_k\varepsilon_k = b$, можно выбрать самое большее одним способом. Т.к. наборов $\{\varepsilon_L : L \neq i, j\}$ существует 2^{k-2}, то число решений уравнения $a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_k\varepsilon_k = b$, $\varepsilon_L \in \{+1; -1\}$ $(L = 1, 2, \ldots k)$, равное числу вершин куба на гиперплоскости Γ, не превосходит 2^{k-2}. Но $2^{k-2} \leq n_k$, и, следовательно, и в этом случае утверждение задачи доказано.

4.39. Пусть S – искомая поверхность. Ее пересечение с плоскостью $x + y + z = a$ либо пусто, либо является сечением сферы радиуса r, однозначно определяемого по a, то есть уравнение S имеет вид $r^2 = f(a)$ или $x^2 + y^2 + z^2 = f(x + y + z)$. При $z = 0$ $r^2 = x^2 + y^2$; $a = x + y$, так что уравнение кривой можно записать в виде $3(a+1)r^2 = a^3 + 3a^2$, откуда $f(a) = \dfrac{a^3 + 3a^2}{3a + 3}$.

Ответ: $3(x + y + z + 1)(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2(x + y + z + 3)$.

4.40. Пусть координаты точки $A(x_0, \frac{k}{x_0})$. Уравнение касательной:

$y = -\frac{k}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{k}{x_0} = -\frac{k}{x_0^2}(x - 2x_0)$, то есть касательная пересекает ось абсцисс в точке $B(2x_0, 0)$. Строим окружность с центром в точке A радиусом AO (O - начало координат). Она пересекает ось абсцисс в точке B. AB и есть искомая касательная.

4.41. Так как третье уравнение является следствием первых двух, то достаточно выяснить, когда система

$$\begin{cases} kx - y = k, \\ 2kx - y = 2k \end{cases}$$

имеет единственное решение, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 2k & -1 \end{vmatrix} = k \neq 0.$$

Ответ: $k \neq 0$.

4.42. Пусть оси цилиндров совпадают с OZ. Тогда основания цилиндров лежат в плоскостях $z = \pm h$, то есть это эллипсы с полуосями $a(h) = a\sqrt{1 - h^2/c^2}$, $b(h) = b\sqrt{1 - h^2/c^2}$. $V(h) = 2hS(h) = 2\pi abh(1 - h^2/c^2)$. $V'(h) = 2\pi ab(1 - 3h^2/c^2) = 0$. Находим экстремум функции: $V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi abc$.

4.43. Обозначим $(*)$ уравнение поверхности. Уравнения прямой имеют вид

$(**)$: $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$. Подставляя $(**)$ в $(*)$, имеем:

$(x_0 + mt)^5 + (y_0 + nt)^5 = (z_0 + pt)^7$. Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях t, получим:

t^7 : $0 = p^7 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow z = z_0$,

t^5 : $m^5 + n^5 = 0 \Rightarrow m = -n$,

t^4 : $5m^4 x_0 + 5n^4 y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = -y_0$,

t^0 : $x_0^5 + y_0^5 = x_0^5 - x_0^5 = z_0^7 = 0 \Rightarrow z_0 = 0$.

Поэтому $(x_0+mt)^5+(y_0+nt)^5=0$, что верно для $y_0=-x_0$ и $m=-n$.

Если же $m=0$, то и $n=0$, то есть $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}$, что определяет точку, а не прямую. Ответ: $\begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$.

4.44. Пусть парабола имеет уравнение $y^2=2px$ и $M_0(x_0,y_0)$ - искомая точка. Будем считать, что $p>0,\ y<0$. Чтобы найти площадь сегмента перейдем к полярным координатам $x-x_0=r\cos\varphi,\ y-y_0=r\sin\varphi$. Тогда уравнение параболы будет иметь вид $r=\dfrac{2p\cos\varphi-2y_0\sin\varphi}{\sin^2\varphi}$. Площадь сегмента вычислим по формуле $S=\dfrac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi$, где φ_0 – угол наклона нормали к параболе в точке M_0. Так как вектор нормали равен $(p,-y_0)$, то $tg\varphi_0=-\dfrac{y_0}{p}$.

Теперь вычислим интеграл:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi=\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} \frac{4p^2\cos^2\varphi-8py_0\sin\varphi\cos\varphi+4y_0^2\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi=$$

$$=-\frac{4}{3}p^2\left(\text{ctg}^3\varphi\right)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}+4py_0\frac{1}{\sin^2\varphi}\Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}-4y_0^2\left(\text{ctg}\varphi\right)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{4}{3}p^2\left(-\text{tg}^3\varphi_0-\text{ctg}^3\varphi_0\right)+4py_0\left(\frac{1}{\cos^2\varphi_0}-\frac{1}{\sin^2\varphi_0}\right)-$$

$$-4y_0^2\left(-\text{tg}\varphi_0-\text{ctg}\varphi_0\right)=-\frac{4}{3}\frac{\left(y_0^2+p^2\right)^3}{py_0^3}.$$

Дифференцируя эту площадь по переменной y_0, и, исследуя производную, получим $y_0=\pm p$. Ответ: $\left(\dfrac{p}{2},\pm p\right)$.

4.45. Предположим сначала, что $a=b$, то есть что эллипс является окружностью. В этом случае тень, отбрасываемая окружностью $x^2+y^2=a^2$ на прямую $x+y=-2\sqrt{2a^2}$ при движении точки по прямой $x+y=2\sqrt{2a^2}$ имеет наименьшую длину тогда, когда точка является проекцией центра окружности на прямую, в чем можно убедиться с помощью простых элементарно-геометрических построений или вычислением. Выполним линейное преобразование плоскости, переводящее эллипс в окружность. Так как оно переводит прямые в прямые и не изменяет соотношения длин параллельных отрезков (а также свойства пересекать эллипс), то искомая точка получается обратным преобразованием из экстремальной точки для окружности. Нужным свойством обладает растяжение вдоль оси OX с коэффициентом $k=\frac{a}{b}$. Его координатное выражение $\xi = kx$, $\eta = y$ позволяет найти уравнения образов прямых: $\frac{\xi}{k}+\eta=\pm 2\sqrt{a^2+b^2}$. Так как к такой прямой перпендикулярен вектор $(1,k)$, то проекцией начала координат является точка вида (t,kt). Подставляя в уравнение, получаем $t\left(\frac{1}{k}+k\right)=2\sqrt{a^2+b^2}$, откуда $t=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Применяя к найденной точке обратное преобразование, находим искомую точку: $\left(\frac{t}{k},kt\right)$.

Ответ: $\left(\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

4.46. Касательные к параболе в точках $\left(\frac{y_i^2}{2p},y_i\right)$, $(i=1,2,3)$ задаются уравнениями $yy'=px+\frac{y_i^2}{2}$. Они пересекаются в точках $\left(\frac{y_iy_j}{2p},\frac{y_i+y_j}{2}\right)$. Следовательно,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\frac{y_1^2}{2p} & y_1 & 1\\ \frac{y_2^2}{2p} & y_2 & 1\\ \frac{y_3^2}{2p} & y_3 & 1\end{matrix}\right\|,\quad S_{KLM}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\frac{y_1y_2}{2p} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1\\ \frac{y_2y_3}{2p} & \frac{y_2+y_3}{2} & 1\\ \frac{y_3y_1}{2p} & \frac{y_3+y_1}{2} & 1\end{matrix}\right\|.$$

Отсюда находим, что $S_{KLM}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}S$.

4.47. Пусть O – центр данной окружности l, A – данная точка. Если A лежит на окружности l, то другая окружность касается l и проходит через A тогда и только тогда, когда она касается l в точке A; ее центром может быть любая точка прямой OA, кроме точек O и A.

Пусть A лежит внутри окружности l. Если O_1 - центр окружности, проходящей через A, то ее радиус равен $|O_1A|$, и она касается l тогда и только тогда, когда $|O_1A|+|O_1O|=r$, где r - радиус l. Множество таких точек O_1 есть эллипс с фокусами в O и A.

Аналогично, если A лежит вне окружности l, то точка O_1 должна удовлетворять одному из равенств: $|O_1O|-|O_1A|=r$, если окружность с центром в O_1, проходящая через A, касается l внешним образом, или $|O_1A|-|O_1O|=r$, если касание внутреннее. Множество таких точек O_1 - это гипербола.

4.48. Рассмотрим дугу параболы $y=ax^2$ внутри круга $x^2+(y-1)^2=1$, предполагая при этом, что $a>1/2$. Парабола с окружностью пересекаются в трех точках: $(0,0)$ и $(\pm a^{-1}\sqrt{2a-1}, a^{-1}(2a-1))$. Покажем, что для достаточно больших a длина L дуги параболы между точками $(0,0)$ и $(a^{-1}\sqrt{2a-1}, a^{-1}(2a-1))$ больше, чем 2, что в силу симметрии дает требуемый результат.

$$L=\int_0^{a^{-1}\sqrt{2a-1}}\sqrt{1+(2ax)^2}\,dx=\frac{1}{2a}\int_0^{2\sqrt{2a-1}}\sqrt{1+x^2}\,dx=$$

$$=2+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{2\sqrt{2a-1}}(\sqrt{1+x^2}-x)\,dx-2\right).$$

Для $x\geq 0$ выполнено:

$$\sqrt{1+x^2}-x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}>\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\geq\frac{1}{2(x+1)}.$$

Поэтому для достаточно большого a имеем:

$$\int_0^{2\sqrt{2a-1}}(\sqrt{1+x^2}-x)\,dx\geq\frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2a-1}}\frac{dx}{x+1}=\frac{\ln(1+2\sqrt{2a-1})}{2}>2,$$

Откуда и следует, что $L>2$.

4.49. Маршрут должен пересекать экватор, по крайней мере, в двух диаметрально противоположных точках. Часть маршрута, проходящая по нижней половине планеты, имеет ту же длину, что и оставшаяся часть. Поэтому достаточно найти кратчайший маршрут, соединяющий противоположные точки экватора. Разрежем поверхность верхней части по отрезку, соединяющему полюс S и выбранную точку A на экваторе, и развернем ее. Диаметрально противоположная точка тогда будет серединой B дуги полученного сектора. Следовательно, кратчайший маршрут – отрезок прямой AB. Далее, длина дуги AB равна $\frac{1}{2}2\pi\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi a\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $\angle ASB=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$, откуда

$|AB|=2a\sin(\frac{1}{2}\angle ASB)=2a\sin\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. Ответ: $4a\sin\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

4.50. Докажем, что дуга гиперболы, начинающаяся в вершине треугольника и заканчивающаяся на противоположной стороне, целиком лежит внутри треугольника. Так как ветвь гиперболы – выпуклая кривая, то эта дуга лежит внутри угла, образованного ее хордой и касательной к гиперболе в вершине. Ввиду оптического свойства гиперболы касательная в вершине является биссектрисой треугольника. Так как противоположная сторона является осью симметрии, то выбранная ветвь гиперболы пересекает ее ровно в одной точке, причем эта точка лежит между фокусами, то есть на противоположной стороне. Значит, дуга содержится в треугольнике, образованном биссектрисой, хордой и стороной, и поэтому содержится в исходном треугольнике. Из доказанного следует, что любая пара гипербол имеет общую точку O внутри треугольника. Докажем, что третья гипербола проходит через эту точку. Пусть S_A, S_B, S_C - расстояния от точки O до соответствующих вершин, a, b, c - длины сторон, противоположных одноименным вершинам. Тогда $S_A-S_C=c-a,\ S_B-S_C=c-b,$ откуда $S_A-S_B=(c-a)-(c-b)=b-a,$ что и требовалось доказать.

4.51. Рассмотрим плоскость многоугольника как комплексную с началом в центре многоугольника и вещественной осью, проходящей через A_1. Тогда $B=e^{i\varphi},\ A_k=e^{2i\pi(k-1)/n}$,.

$|BA_k|^2=(e^{i\varphi}-e^{i\varphi_k})(e^{-i\varphi}-e^{-i\varphi_k})=2+e^{i\varphi}e^{-i\varphi_k}+e^{-i\varphi}e^{i\varphi_k}$.

$\sum_{k=1}^{n}|BA_k|^2=2n-e^{i\varphi}\sum_{k=1}^{n}e^{-i\varphi_k}-e^{-i\varphi}\sum_{k=1}^{n}e^{i\varphi_k}=2n,$ так как $\sum_{k=1}^{n}e^{\pm i\varphi_k}=0.$

Замечание. Аналогичное решение можно построить с помощью векторной алгебры.

5.1. A - ортогональна, следовательно, $AA^T = A^T A = E$, $\det A = \det A^T = -1$, $\det(A+E) = \det(A + AA^T) = \det A \cdot \det(E + A^T) =$
$= -\det(E+A)^T = -\det(E+A) \Rightarrow \det(E+A) = 0$..

5.2. Введем систему координат с началом в левом нижнем углу. По условию элемент $M(x,y)$ - линейная (неоднородная) функция по x и по y, т.е. $M(x,y) = 1 + ax + by + cxy$. Задача эквивалентна системе:

$$\begin{cases} a + 3b + 3c = M(1;3) - 1 = 8 \\ 2a + 2b + 4c = M(2;2) - 1 = 7 \\ 3a + b + 3c = M(3;1) - 1 = 4 \end{cases}.$$

Решение системы $\left(-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}; 1\right)$, следовательно, искомый элемент

$$M(3;3) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{21}{4} + 9 = 14{,}5.$$

5.3. Выберем начало прямоугольной декартовой системы координат равноудаленным от вершин тетраэдра. Пусть $OA = (a_1;a_2;a_3) = a$; $OB = (b_1;b_2;b_3) = b$; $OC = (c_1;c_2;c_3) = c$; $OD = (d_1;d_2;d_3) = d$. Тогда $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = r^2$, где r - радиус описанной сферы, и по известной формуле аналитической геометрии для объема тетраэдра имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (a-b)^2 & (a-c)^2 & (a-d)^2 \\ 1 & (b-a)^2 & 0 & (b-c)^2 & (b-d)^2 \\ 1 & (c-a)^2 & (c-b)^2 & 0 & (c-d)^2 \\ 1 & (d-a)^2 & (d-b)^2 & (d-c)^2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & aa & ab & ac & ad \\ 1 & ba & bb & bc & bd \\ 1 & ca & cb & cc & cd \\ 1 & da & db & dc & dd \end{vmatrix} =$$

$$= -8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 8(6V)^2.$$

5.5. Покажем, что:

$$(\mathrm{E} - \mathrm{I_n})\left(\mathrm{E} - \frac{1}{n-1}\mathrm{I_n}\right) = \mathrm{E}; \mathrm{I_n^2} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} = n\mathrm{I_n}$$

$$(\mathrm{E} - \mathrm{I}_n)(\mathrm{E} - \frac{1}{n-1}\mathrm{I}_n) = \mathrm{E} - \frac{1}{n-1}\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_n + \frac{1}{n+1}\mathrm{I}_n^2 = \mathrm{E} - \frac{n}{n-1}\mathrm{I}_n + \frac{n}{n-1}\mathrm{I}_n = \mathrm{E}$$

5.6. Допустим, что при некотором $|z|<1$ столбцы зависимы. Пусть λ_p - максимальный по модулю коэффициент соответствующей линейной комбинации. Рассматривая строку, содержащую элемент p-го столбца, равный 1, получаем оценку $|\lambda_p| = \left|\sum_{k\neq p}\lambda_k z^{n_k}\right| < |\lambda_p|\sum_1^{\infty}|z|^n = |\lambda_p|\frac{|z|}{1-|z|}$, из которой следует $1-|z|<|z|$, т.е. $|z|>\frac{1}{2}$.

5.7. Вычитаем $2e$ из 1-го, 3-е из 2-го,..., следовательно, $x_1+x_2=0;\ x_2+x_3=0;\ldots;x_n+x_n=0 \Rightarrow x_1=-x_2=x_3=\ldots=(-1)^{n-1}x_n$ Подставим это в 1-е уравнение и получим $x_n=1$ при четном n и неверное равенство $0=1$ при нечетном n. Т.е. система совместна при четном n ($x_k=(-1)^{k-1};\ k=1,2,\ldots,n$) и несовместна при нечетных n.

5.8. $\det \mathrm{A}(z)$ - полином, но $\mathrm{A}(z)$ обратима при любом z, следовательно, $\det \mathrm{A}(z)\neq 0$ при $\forall z \Rightarrow \det \mathrm{A}(z)=const\neq 0$ (основная теорема алгебры). Элементы обратной матрицы $\frac{\mathrm{A}_{ij}(z)}{\det \mathrm{A}(z)}$, где $\mathrm{A}_{ij}(z)$ - полином (алгебраическое дополнение), следовательно, это полином.

5.10. $A^2+2A+\mathrm{E}=0 \Rightarrow \quad E=-A^2-2A=(-A-2E)\cdot A=\mathrm{A}\cdot(-A-2E)\Rightarrow$ $A^{-1}=(-A-2E)$, то есть обратная матрицы существует, а значит и $\det A\neq 0$.

5.11. $\begin{vmatrix} 1 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 10^{-6} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

5.13. По условию, нам известен характеристический многочлен $\varphi(\lambda)=\det(A-\lambda E)$. Заметим, что $A(A^{-1}-\lambda E)=E-\lambda A=-\lambda(A-\lambda^{-1}E)$. В силу обратимости матрицы A ее определитель не равен нулю и, следовательно, $\det A\det(A^{-1}-\lambda E)=(-1)^n\lambda^n\varphi(\lambda^{-1})$.

Ответ. $(\det A)^{-1}(-1)^n\lambda^n\varphi(\lambda^{-1})$.

5.14. Так как 92 числа имеют остаток 1 от деления на 3, то найдутся две строки в матрице A, все элементы которых обладают этим свойством. Пусть, для простоты, это первые две строки. Тогда

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3b_{11}+1 & 3b_{12}+1 & \ldots & 3b_{1n}+1 \\ 3b_{21}+1 & 3b_{22}+1 & \ldots & 3b_{2n}+1 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 3(b_{11}-b_{21}) & 3(b_{12}-b_{22}) & \dots & 3(b_{1n}-b_{2n}) \\ 3b_{21}+1 & 3b_{22}+1 & \dots & 3b_{2n}+1 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} b_{11}-b_{21} & b_{12}-b_{22} & \dots & b_{1n}-b_{2n} \\ 3b_{21}+1 & 3b_{22}+1 & \dots & 3b_{2n}+1 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где a_{ij}, b_{ij} – целые, что и требовалось доказать.

5.18. На левую часть соотношения $-\frac{1}{\lambda}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = -\mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ (полученного из определения собственного числа и собственного вектора с помощью транспонирования и деления на $-\lambda$ можно смотреть как на результат сложения строк матрицы A, каждая из которых умножается на соответствующее число $-\frac{x_i}{\lambda}$, $i = 1,2,\dots,n$. Сделаем над строками данного определителя аналогичную цепочку преобразований: к $(n+1)$-ой строке прибавим i-ую строку, умноженную на $-\frac{x_i}{\lambda}$, $i = 1,2,\dots,n$. Отсюда

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{X} \\ \mathrm{X} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{X} \\ 0 & -\frac{|x|^2}{\lambda} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda}\Delta.$$

5.19. Первым ходом надо сделать четными суммы во всех столбцах. Это можно сделать, т.к. общая сумма нечетная, значит в каком-то столбце нечетная сумма. Нужно выбрать первый из таких столбцов и, найдя в нем элемент, равный единице, заменить его нулем, и потом в этой строке поменять 1 на 0 и 0 на 1 так, чтобы во всех столбцах была четная сумма. Второй игрок вынужден будет в каком-то столбце изменить четность. Надо опять сделать ее четной. Выиграть второй не может, т.к. победа - нулевая матрица с четной суммой. Остается доказать, что игра конечна. Умножим сумму в 1-ом столбце на 2^5, во втором на 2^4, в 3-м на 2^3, в 4-м на 2^2, в 5-м на 2. Составим сумму $B = 2^5 S_1 + 2^4 S_2 + \dots + 2S_5$, где S_i – сумма в i – ом столбце. Так как первый заменяемый элемент должен быть 1, то при каждом ходе B уменьшается

на целое число. Поэтому, в конце концов, будет B=0, ***но это будет для нулевой матрицы.***

5.20.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = adf + 2bec - dc^2 - ae^2 - fb^2 > 0$$

. ***Необходимо, чтобы*** $\Delta \le adf \Leftrightarrow 2bec \le dc^2 + ae^2 + fb^2 < adf + 2$

. ***Докажем, что*** $adf > 0$:

$df > e^2 > 0,\ f > 0$ ***значит, надо доказать, что*** $ad > 0$, ***но*** $d > 0$, ***то есть осталось показать, что*** $a > 0$.

$$2bec - \frac{e^2c^2}{f} - fb^2;\ \frac{2becf - e^2c^2 - f^2b^2}{f} < 0,$$

так как $f > 0$ ***и*** $(ec - fb)^2 > 0$;

$\Delta = a(df - e^2) + 2bec - dc^2 - fb^2$;

$adf - ae^2 = a\left(df - e^2\right)$ ***имеет тот же знак, что и*** a, ***поэтому рассмотрим второе слагаемое***

$$2bec - dc^2 - fb^2 < 2bec - \frac{e^2c^2}{f} - fb^2 =$$

$$= \frac{2becf - e^2c^2 - f^2b^2}{f} < 0$$ ***и если*** a - ***отрицательно, то*** $\Delta < 0$ - ***противоречие, следовательно,*** $a > 0$ ***и (уже доказано)*** $2bec - dc^2 - fb^2 < 0 \Rightarrow$

$2bec - dc^2 - fb^2 - ae^2 < 0$, ***что и требовалось доказать.***

Замечание. ***Если вспомнить критерий Сильвестра, то сразу получаем, что матрица положительно определена. Значит, диагональные элементы*** a, d, f ***положительны. Далее,***

$$2bec = 2(fb)(ec)/f \le ((fb)^2 + (ec)^2)/f =$$

$$fb^2 + e^2c^2/f \le fb^2 + (fd)c^2/f = fb^2 + dc^2$$

.

5.21. Пусть $D = 0$, следовательно, столбцы линейно зависимы. Можно считать, что коэффициент в линейной комбинации перед первым столбцом равен 1 . Если он равен 0, то линейная комбинация 2-го и 3-го равна 0. Но из $\lambda b_2 + \mu b_3 = 0 \Rightarrow |\mu| > |\lambda|$, а тогда $\lambda c_2 + \mu c_3 \neq 0$, т.к. $|\mu c_3| > |\lambda c_2|$, а если коэффициент отличен от 0, то на него нормируем. Пусть $|\eta| \geq |\lambda| \geq |\mu|$, тогда из выражения $\eta a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 = 0 \Rightarrow \eta a_1 = -\lambda a_2 - \mu a_3 \Rightarrow$ $a_1 = -\frac{\lambda}{\eta} a_2 - \frac{\mu}{\eta} a_3 \quad \Rightarrow |a_1| \leq \left|\frac{\lambda}{\eta}\right| |a_2| + \left|\frac{\mu}{\eta}\right| |a_3|$, что противоречит условию $|a_1| > |a_2| + |a_3|$. Если неравенство $|\lambda| \geq |\mu| \geq |\eta|$, то брать $\eta b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3 = 0$ и аналогично для $|\mu| \geq |\eta| \geq |\lambda|$, брать $\eta c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3 = 0$ и опять противоречие.

5.23. Из перестановочности матриц следует, что существует общий собственный вектор. Действительно, пусть λ_1 - собственное число A, V_1 - соответствующее собственное подпространство оператора А. Тогда $B : V_1 \to V_1$ (если $x \in V_1$, т.е. $\mathrm{A}x = \lambda_1 x_1$, то $\mathrm{A(Bx)} = \mathrm{BA}x = \lambda_1 \mathrm{B}x$, то есть $\mathrm{B}x \in V_1$), следовательно, собственное число λ_2 - оператора В в V_1 и собственное пространство $V_2 \in V_1$. Аналогично, оператор С отображает V_2 в V_2, следовательно, существует λ_3 и собственный вектор $x \in V_2$, который является собственным также для А и В. Комплексные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ являются двумерными векторами над полем $\mathbb{R}$. Поэтому они линейно зависимы над $\mathbb{R}$, т.е. для некоторого ненулевого набора вещественных чисел α, β, γ: $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 + \gamma\lambda_3 = 0 \Rightarrow$ $(\alpha A + \beta B + \gamma C)x = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 + \gamma\lambda_3)x = 0$, т.е. матрица $\alpha A + \beta B + \gamma C$ - вырожденная.

5.24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{x}{n} & \frac{x}{n} \end{pmatrix}^n = \mathrm{A}^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \mathrm{A}$ - доказывается по индукции:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{x}{n} & \frac{x}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.25. $a_{ij} = \sin x_i \cos y_j + \sin y_j \cos x_i$, значит, определитель равен сумме 2^4 определителей, строки которых $(\sin x_i \cos y_1, \sin x_i \cos y_2, \ldots, \sin x_i \cos y_4)$ или $(\sin y_1 \cos x_i, \sin y_2 \cos x_i, \ldots, \sin y_4 \cos x_i)$. Если в нем есть две строки одинакового типа, то они пропорциональны, т.е. определитель равен 0. Но две строки одного типа обязательно будут, если размер определителя не меньше трех, а у нас он равен 4, т.е. все определители равны нулю.

5.26. Рассмотрим $(A+B)^{m+k}=\sum_{i=0}^{m+k} C_{m+k}^{i} A^{i} B^{m+k-i}=0,$ поскольку все слагаемые равны 0, ибо $i>m$ (и $A^{i}=0$), либо $m+k-i>k$ (и $B^{k}=0$). Тогда $0=\det(A+B)^{m+k}=(\det(A+B))^{m+k} \Rightarrow \det(A+B)=0.$

5.27. $\det A^{2}=(\det A)^{2}$, но $\det(-E)=-1$ для матрицы 5-го порядка. Поэтому равенство $A^{2}=-E$ невозможно, то есть такой матрицы не существует.

5.28. $A=\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$ Ищем B в виде

$$B=x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^{2}=x^{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+y^{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=2x^{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+2y^{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^{4}=8x^{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+8y^{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\ B^{8}=128x^{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+128y^{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} a+b=128\left(x^{8}+y^{8}\right) \\ a-b=128\left(x^{8}-y^{8}\right) \end{cases}; \qquad \begin{cases} x=\sqrt[8]{\dfrac{a}{128}} \\ y=\sqrt[8]{\dfrac{b}{128}} \end{cases}$$

Замечание. Степень 8 в условии можно заменить на любую натуральную.

5.29. $(A-B)^{3}=A^{3}-3A^{2}B+3AB^{2}-B^{3}=A-3AB+3AB-B=A-B;$ $\det(A-B)^{3}=(\det(A-B))^{3}=\det(A-B)\Rightarrow \det(A-B)=0;1;-1.$

5.30. Поскольку матрица вещественна и симметрична, то все корни $\alpha_{1},\alpha_{2},\ldots,\alpha_{n}$ ее характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=\lambda^{n}+a_{1}\lambda^{n-1}+a_{2}\lambda^{n-2}+\ldots+a_{n}=0$ вещественны. Требование равенства всех корней приводит к соотношению: $\sum(\alpha_{i}-\alpha_{j})^{2}=0,$ или (теорема Виета) $(n-1)a_{1}^{2}-2na_{2}=0.$ Выражая a_{1} и a_{2} через элементы исходной матрицы, получаем:

$$(n-1)\sum(a_{ij})^{2}-2n\sum_{i<j}(a_{ii}a_{jj}-a_{ij}^{2});$$

$$(n-1)\sum a_{ii}{}^{2}-2\sum_{i<j}a_{ii}a_{jj}+2n\sum_{i<j}a_{ij}^{2};$$

$$\sum(a_{ii}-a_{jj})^{2}+2n\sum_{i<j}a_{ij}^{2}=0.$$

т.е. все корни равны тогда и только тогда, когда $a_{ij}=0;\ i\neq j$ и $a_{ii}=a_{jj}$, т.е. $A=aE$, где E - единичная матрица.

Второе решение.
Вещественная симметричная матрица приводится к диагональному виду. Собственные числа равны, значит, эта матрица пропорциональна единичной. Но тогда она обладает этим свойством в любом базисе.
5.31. Обе части уравнения умножим на S слева, справа, а также слева и справа. Это дает $SX + SXS = SA$; $XS + SXS = AS$ и $SXS = SAS$. Отсюда находим $X = A - SX - XS = A - SA - AS + 2SAS$.

5.32. $$\lim_{n\to\infty}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1/n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}I_n.$$

В I_n прибавляем к первой строке все остальные строки, при этом i-тую строку умножаем на $\frac{1}{(i-1)!}\cdot x^{i-1}$ $(i = 2,3,\dots,n+1)$. В результате

$$I_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R_n(x) \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix}, \text{ где } R_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Откуда $I_n = R_n(x)\cdot(-1)^{n+1+1}\cdot(-1)^n\cdot n!$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}I_n = \lim\limits_{n\to\infty}R_n(x) = e^x.$

5.33. Составим вспомогательную матрицу 8×8, в которой вместо $\operatorname{ch} x$ напишем 1, а вместо $\operatorname{sh} x$ – (-1). При каждом ходе во вспомогательной матрице одна строка или один столбец умножается на -1. При этой операции ранг матрицы не меняется. Но у исходной матрицы он равен 1, а у той, что требуется получить – 2. Значит, это невозможно.
5.34. Заметим, что матрицы, указанные в условии задачи, образуют группу по обычному умножению матриц:

1. единичным элементом группы является E – единичная матрица;
2. произведение двух таких матриц также удовлетворяет условию задачи (проверяется непосредственно);
3. ассоциативность по умножению;

4. матрица A^{-1} - совпадает с транспонированной матрицей A^T, так как из условия следует, что матрица ортогональна.

Так как группа конечного порядка, то для некоторого натурального m будет выполнено: $A^m = E$, откуда $A^{m-1} \cdot A = E$ и, следовательно, $A^{m-1} = A^{-1} = A^T$, что и требовалось доказать.

5.35. $A(BA)B = (AB)(AB) = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2 = 9\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 9(AB)$

$A(BA)B = A(9E)B$, умножим слева и справа на A^T, B^T:

$$(A^T A)(BA)(BB^T) = (A^T A)(9E)(BB^T) \qquad (*)$$

$A^T A,\ BB^T$ - квадратные матрицы второго порядка.

Докажем, что они обратимы, то есть $\det A^T A \neq 0, \det BB^T \neq 0$. Пусть $\overline{u}$ и $\overline{v}$ столбцы матрицы А ($\overline{u}, \overline{v}$ - трехмерные векторы), тогда $\overline{u}^T, \overline{v}^T$ - строки матрицы A^T.

$$\det A^T A = \det\begin{pmatrix} \overline{u}^T \\ \overline{v}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \overline{u}^T \cdot \overline{u} & \overline{u}^T \cdot \overline{v} \\ \overline{v}^T \cdot \overline{u} & \overline{v}^T \cdot \overline{v} \end{pmatrix} = \left(\overline{u}^T \cdot \overline{u}\right)\left(\overline{v}^T \cdot \overline{v}\right) - \left(\overline{v}^T \cdot \overline{u}\right)\left(\overline{u}^T \cdot \overline{v}\right) =$$

$$= \left(\overline{u}^T \cdot \overline{u}\right)\left(\overline{v}^T \cdot \overline{v}\right) - \left(\overline{u}^T \cdot \overline{v}\right)^2 \geq 0$$

(неравенство Коши – Буняковского – Шварца, причем равенство нулю эквивалентно тому, что $\overline{u}, \overline{v}$ - линейно зависимы) или иначе

$$\left(\overline{u}^T \cdot \overline{u}\right)\left(\overline{v}^T \cdot \overline{v}\right) - \left(\overline{u}^T \cdot \overline{v}\right)^2 = \left|\overline{u}\right|^2 \left|\overline{v}\right|^2 - \left|\overline{u}\right|^2 \left|\overline{v}\right|^2 \cos^2\left(\widehat{\overline{u}, \overline{v}}\right) = \left|\overline{u}\right|^2 \left|\overline{v}\right|^2 \sin^2\left(\widehat{\overline{u}, \overline{v}}\right) = \left|\overline{u} \times \overline{v}\right| = 0 \ -$$

Значит, $\overline{u}, \overline{v}$ линейно зависимы.

Но $2 \geq \operatorname{Rg} A \geq \operatorname{Rg} AB = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 18 & 18 \\ 0 & 9 & 9 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2$

$\operatorname{Rg} A = 2$. Значит, $\overline{u}, \overline{v}$ - линейно независимы.

$\det A^T A = \left|\overline{u} \times \overline{v}\right| \neq 0$ (частный случай теоремы Бине – Коши). Аналогично $\det BB^T \neq 0$. На обратимые матрицы можно сократить равенство (*):

$$BA = 9E = 9\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Ответ: $BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5.36. Все собственные числа матрицы вещественны, так как она симметрична. Сумма их – след матрицы – положительна, поскольку след матрицы оператора инвариантен относительно замены базиса и, значит, совпадает с суммой диагональных элементов исходной матрицы, которая положительна. Поэтому хотя бы одно из собственных значений положительно.

5.37. Представив последний столбец в виде суммы, получим

$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 4 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & n & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & ... & 1 & 0 \\ 1 & 4 & ... & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & n & 0 \\ 1 & 1 & ... & 1 & n \end{vmatrix}$. В первом определителе вычтем последний столбец из всех столбцов, а второй определитель разложим по последнему столбцу. $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 3 & ... & 0 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix} + nD_{n-1} = (n-1)! + nD_{n-1}$, то есть

$\dfrac{D_n}{n!} - \dfrac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{1}{n}$. Рассмотрим

$$\frac{D_3}{3!} - \frac{D_2}{2!} = \frac{1}{3}$$
$$+$$
$$\frac{D_4}{4!} - \frac{D_3}{3!} = \frac{1}{4} \qquad ,$$
$$+.....+$$
$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{n}$$

откуда получим $\dfrac{D_n}{n!} - \dfrac{D_2}{2!} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{n}$, и, следовательно, $\dfrac{D_n}{n!} \sim \ln n$, таким образом, искомый предел равен 1.

5.38. $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot b_{ji} = TrAB$. Из условия следует, что матрицы A, B положительно определены. Пусть W - такая ортогональная матрица, что $WAW^{-1} = A_1$ - диагональная. Тогда матрица $WBW^{-1} = B_1$ тоже положительно определена. Следовательно,

$TrAB = Tr\left(WABW^{-1}\right) = Tr\left(\left(WAW^{-1}\right)\left(WBW^{-1}\right)\right) = TrA_1B_1$. Но $A_1 = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$,

где $d_1 > 0, d_2 > 0, d_3 > 0$ и $TrA_1B_1 = d_1 \cdot b_1^* + d_2 \cdot b_2^* + d_3 \cdot b_3^*$, где $B_1 = \begin{bmatrix} b_1^* & * & * \\ * & b_2^* & * \\ * & * & b_3^* \end{bmatrix}$.

Так как B_1 - положительно определена, то $b_1^*, b_2^*, b_3^* > 0$, и из $TrA_1B_1 = d_1 \cdot b_1^* + d_2 \cdot b_2^* + d_3 \cdot b_3^*$ следует требуемое.

5.39. Нет. Если да, то

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \left(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2\right)\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\right) =$$

$$= \left(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^3 + \mathbf{B}^2\mathbf{A} - \mathbf{A}^2\mathbf{B} - \mathbf{B}^3\right) = \left(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2\right)^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Противоречие.

5.40. Рассмотрим характеристический многочлен $\lambda^n - P_{n-1}(\lambda) = 0$. Так как правая часть четна, и $P_{n-1}(\lambda)$ тоже четно для целых λ (так как слагаемые имеют хотя бы один четный множитель вида a_{ij}), то λ^n - четное. Следовательно, ни одно собственное число не может быть нечетным.

5.41. Рассмотрим частный случай при $n = 2$. Тогда для любой ненулевой диагональной матрицы имеем:

$A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Легко заметить, что определители обеих матриц равны единице. Теперь рассмотрим случай $n = 3$. Так как матрица должна быть ненулевой, то хотя бы один элемент на главной диагонали отличен от нуля. Предположим, что $c \neq 0$. Пусть $c > 0$. Тогда имеем:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ -r & b & 0 \\ 0 & 0 & c/2 \end{pmatrix}, \text{ где } r = \sqrt{\frac{2}{c}}.$$

Если $c < 0$, тогда

$$A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ -r & b & 0 \\ 0 & 0 & c/2 \end{pmatrix}, \text{ где } r = \sqrt{-\frac{2}{c}}.$$

Легко проверить, что определители обеих матриц равны единице.

Любую квадратную матрицу можно представить в виде блочно-диагональной матрицы, составленной из блоков A_2 и, если n нечетное, A_3. Таким образом, утверждение доказано.

5.42. Нет, не может. Из условия $XY - YX = X$ следует равенство $XYX^{-1} - Y = E$. Но матрицы XYX^{-1} и Y подобны и, тем самым, имеют одинаковый след. Поэтому $\mathrm{Tr}\left(XYX^{-1} - Y\right) = 0$, но $\mathrm{Tr}\, E = n \neq 0$.

Утверждение о равенстве следов подобных матриц может быть доказано следующим образом: $\det\left(XYX^{-1} - \lambda E\right) = \det\left(X\left(Y - \lambda E\right)X^{-1}\right) = \det\left(Y - \lambda E\right)$, то есть характеристические полиномы матриц XYX^{-1} и Y совпадают, а след матрицы является коэффициентом характеристического полинома при $\left(-\lambda\right)^{n-1}$, где n – порядок матрицы.

5.43. Поскольку $A^2 = nA$, то $A^2 - A - (n-1)A + (n-1)A = (n-1)E$, откуда получаем $A(A-E) - (n-1)(A-E) = \left[A - (n-1)E\right](A-E) = (n-1)E$ и

$$\left(E - A\right)^{-1} = E - \frac{1}{n-1}A.$$

$$\left(E - A\right)^{-n} = \left(E - \frac{1}{n-1}A\right)^n = E + \sum_{k=1}^{n} c_n^k \frac{(-1)^k}{(n-k)^k} A^k = E + \sum_{k=1}^{n} c_n^k \frac{(-1)^k n^{k-1}}{(n-k)^k} A =$$

$$= E + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_n^k \left(\frac{-n}{n-1}\right)^k A = E + \frac{1}{n}\left[\left(1 - \frac{n}{n-1}\right)^n - 1\right] = E - \frac{1}{n}\left[1 - \left(\frac{-1}{n-1}\right)^n\right]A$$

Тогда при $n = 2006$ получаем $\left(E - A\right)^{-2006} = E - \frac{1}{2006}\left[1 - \left(\frac{1}{2005}\right)^{2006}\right]A$.

5.44. Запишем искомый определитель и представим последний столбец в виде суммы двух столбцов:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1^2 + k & a_1a_2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 + k & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 + k & \dots & a_3a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 + k \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + k & a_1a_2 & a_1a_2 & \dots & 0 \\ a_1a_2 & a_2^2 + k & a_2a_3 & \dots & 0 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 + k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & k \end{vmatrix} + a_n \begin{vmatrix} a_1^2 + k & a_1a_2 & a_1a_2 & \dots & a_1 \\ a_1a_2 & a_2^2 + k & a_2a_3 & \dots & a_2 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 + k & \dots & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Во втором определителе из каждого столбца с номером j вычтем последний столбец, умноженный на a_j. Тогда

$$D_n = kD_{n-1} + a_n \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & k & 0 & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & k & \dots & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = kD_{n-1} + k^{n-1}{a_n}^2 =$$

$$= k\left(kD_{n-2} + k^{n-2}a^2{}_{n-1}\right) + k^{n-1}{a_n}^2 = k^2 D_{n-2} + k^{n-1}\left(a_{n-1}^2 + a_n^2\right) = \dots =$$

$$= k^{n-1}\left(k + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right).$$

5.45. Доказательство проведем индукцией по n. Основание индукции $n = 1$ очевидно. Покажем, как сделать индуктивный переход от $n-1$ к n. Поставим на пересечении первой строки и первого столбца данной матрицы A число x. Минор элемента x удовлетворяет предположению индукции, так что, расставив на диагонали M нули и единицы, можем добиться того, что $M \neq 0$. Разлагая определитель матрицы A по первой строке, получим $\det A = x \cdot M +$ члены, не зависящие от x. Так как $M \neq 0$, то $\det A \neq 0$ либо при $x = 0$, либо при $x = 1$.

5.46. Пусть M – эрмитова матрица и $Y = \left(M - \left(X^* M X\right) I\right) X$. Тогда $0 \le Y^* Y =$

$$= \left(X^* \left(M - \left(X^* M X\right) I\right)^2 X\right) = \left(X^* \left(M^2 - 2\left(X^* M X\right) M + \left(X^* M X\right)^2 I\right) X\right) =$$

$= X^* M^2 X - 2\left(X^* M X\right)^2 + \left(X^* M X\right)^2 = X^* M^2 X - \left(X^* M X\right)^2$. То есть число $\left(X^* M X\right)^2 \le X^* M^2 X$. Для $M = A$ получаем $\left(X^* A X\right)^2 \le X^* A^2 X = X^* A X$. Значит, число $0 \le X^* A X \le 1$. Аналогично $0 \le X^* B X \le 1$. Введем величины $a, b \in \mathbb{R}$. Пусть $r^2 = a^2 + b^2$ и $C = aA + bB$. Тогда C - эрмитова и $C^2 = a^2 A^2 + b^2 B^2 + abAB + baBA = a^2 A + b^2 B$ (из условий задачи). Поэтому $\left(X^* C X\right)^2 \le X^* C^2 X \le a^2 X^* A X + b^2 X^* B X \le a^2 + b^2$. Положим $a = X^* A X$, $b = X^* B X$. Тогда $\left(X^* C X\right)^2 = aX^* A X + bX^* B X = a^2 + b^2 = r^2$. Следовательно, $\left(r^2\right)^2 \le r^2$, и, значит $r^2 \le 1$, что и требовалось доказать.

5.47. След матрицы $A+B$ равен сумме следов A и B.Так как след матрицы равен сумме ее собственных чисел, то след матрицы $A+B$ равен1+3+2+4=10. Но 5+6=11, то есть 5 и 6 не могут быть собственными числами суммы матриц. Числа 1 и 9 могут. Пример:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 4\end{pmatrix}.$$

6.1. $a+b-x=u;$ $\int\limits_a^b xf\left(x\right)dx=\int\limits_b^a (a+b-u)f\left(a+b-u\right)(-du)=$

$$=\int\limits_a^b (a+b-u)f(a+b-u)du=\int\limits_a^b (a+b-u)f(u)du=$$

$$=(a+b)\int\limits_a^b f(u)du-\int\limits_a^b uf(u)du,\ \int\limits_a^b xf(x)dx=(a+b)\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^b xf(x)dx.$$

6.2. $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1}-1}$. Пусть $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}$, следовательно, это уравнение $x=f(f(x))$ (1) $\Leftrightarrow f(x)=x$ (2). Корень (2) является корнем (1). Пусть x_0 - корень (1), но $f(x_0)\neq x_0$, значит либо $f(x_0)>x_0$ либо $f(x_0)<x_0$. Но f возрастающая функция поэтому для случая $f(x_0)>x_0$ $x_0=f(f(x_0))>f(x_0)$, во втором случае $x_0=f(f(x_0))<f(x_0)$, т.е. получено противоречие в обоих случаях, т.е. $f(x_0)=x_0$. Решим уравнение $x^3=2x-1;\ x^3-2x+1=$

$$(x-1)(x^2+x-1)=0\Rightarrow x=1;\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Замечание. Начало решения можно провести по-другому. Пусть $y=\sqrt[3]{2x-1}$. Тогда $y^3=2x-1,\ x^3=2y-1$. Вычитаем уравнения и получаем $(y-x)(y^2+xy+x^2+2)=0$. Так как второй сомножитель положителен, $y=x$. Тогда $x^3=2x-1$ и далее, как выше.

6.3. $\int\limits_0^1 xf(x)f(1-x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)f(1-x)dx=0;$

$\Rightarrow\int\limits_{1/2}^{-1/2} yf(\frac{1}{2}-y)f(\frac{1}{2}+y)dy=0,\ y=\frac{1}{2}-x$, так как под интегралом нечетная функция.

6.4. Замена переменной: $\begin{cases} \dfrac{\alpha x+\beta y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=z \\ \dfrac{\beta x-\alpha y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=u \end{cases}$; якобиан

$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & -\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \end{vmatrix}=-1.$ Значит $dudz=dxdy$;

$z^2+u^2=x^2+y^2=1,\quad \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(\alpha x+\beta y)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dz\int\limits_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} f(z\sqrt{\alpha^2+\beta^2})du=$

$=2\int\limits_{-1}^{1}dz\sqrt{1-z^2}\,f(z\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$.

6.6. Сделаем замену $x=1-t$.

$\int\limits_0^1(1-(1-t)^n)t^{-1}dt=\int\limits_0^1\frac{1-x^n}{1-x}dx=\int\limits_0^1(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})dx=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$

6.7. Значения $f(x)$ непрерывно заполняют отрезок $[0;1]$. Построим последовательность точек a_k: $a_{k-1}<a_k$ таких, что $f(a_k)=\frac{k}{n}$. Строим последовательность (сначала a_1, где $f=\frac{1}{n}$, потом, на отрезке $(a_1;1)$ ищем точку a_2, где значение равно $\frac{2}{n}$. Оно существует, т.к. функция непрерывна. По теореме Лагранжа для $[a_{k-1};a_k]$: $\frac{1}{n}=f(a_k)-f(a_{k-1})=$

$=f'(x_k)(a_k-a_{k-1});\quad \frac{1}{f'(x_k)}=(a_k-a_{k-1})n;\quad \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(x_k)}=n\sum(a_k-a_{k-1})=n$

(так как $\sum(a_k-a_{k-1})=1$ - длина отрезка $[0,1]$), что и требовалось доказать.

6.8. Пусть $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt-\frac{x^3}{3}$, $F(0)=F(1)=0$. Значит, по теореме Ролля существует такое x_0, что $f(x_0)=x_0^2$.

6.9. Докажем, что для любого целого $k\ge 0$ существует сходящаяся к 0 последовательность точек $\{u_n\}$, в каждой из которых $f^{(k)}(u_n)=0$. По индукции. Для $k=0$ верно по условию. Пусть верно для $k=m$, т.е. существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ и $f^{(m)}(x_n)=0$.

Тогда для $\forall i,\ i \in \mathrm{N}$ по теореме Ролля между точками x_i и x_{i+1} найдется точка y_i такая, что $f^{(m+1)}(y_i)=0$, а это означает, что последовательность $\{y_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и $f^{(m+1)}(y_n)=0$. Итак, это утверждение доказано. Из него следует, что $f^{(k)}(0)=0$. Для любого натурального k (т.к. $f \in C^{\infty}$). Применяя формулу Тейлора к отрезку $[0;x_0]$, получаем:

$$f(x_0)=f(0)+f'(0)x_0+\frac{f'(0)}{2!}x_0^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x_0^n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x_0^n;$$

$0<|\xi|<|x_0| \Rightarrow |f(x_0)| \le \dfrac{L|x_0|^n}{n!}$ для всех $n \in \mathrm{N}$ и любого x_0, то есть $f(x_0)=0$ так как $\dfrac{|x_0|^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то есть $f(x)=0$ при любом x.

6.10. Замена $x=1-t$.

6.11. $$\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)dx}{1+e^x}=\int\limits_{-a}^{0}\frac{f(x)dx}{1+e^x}+\int\limits_{0}^{a}\frac{f(x)dx}{1+e^x}=-\int\limits_{a}^{0}\frac{f(-t)dt}{1+\frac{1}{e^t}}+\int\limits_{0}^{a}\frac{f(x)dx}{1+e^x}=$$

$$=\int\limits_{0}^{a}\frac{f(t)(1+e^t)dt}{1+e^t}=\int\limits_{0}^{a}f(t)dt.$$

6.12. Задача допускает следующее обобщение: если взять n комплексных чисел $a_1,a_2,\ldots a_n \in \mathbb{C}$ таких, что $|a_1|=|a_2|=\ldots|a_n|=r\neq 0,$ и рассмотреть суммы возможных произведений из n этих чисел по s (T_n^s $(s<n)$), то $\left|\dfrac{T_n^s}{T_n^{n-s}}\right|=r^{2s-n}$. (*)

Доказательство:

Пусть φ_j $(j=1,2,\ldots,n)$ – аргументы чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Тогда $a_j=re^{i\varphi_j}$ и из T_n^s можно вынести множитель r^s, а из T_n^{n-s} – множитель r^{n-s}. После этого в числителе останется величина $e^{i\psi}\cdot\sum e^{-i\theta}$, а в знаменателе – величина $\sum e^{i\theta}$, где ψ – сумма всех аргументов φ_j, а θ – сумма $(n-s)$ аргументов тех чисел a_j, которые входят в соответствующее слагаемое знаменателя T_n^{n-s}. Поскольку $\sum e^{i\theta}$ и $\sum e^{-i\theta}$ – комплексно сопряженные числа, то $\left|\sum e^{i\theta}\right|=\left|\sum e^{-i\theta}\right|$. Кроме того, $\left|e^{i\psi}\right|=1$. Тем самым, соотношение (*) доказано. Исходное утверждение задачи следует из него при n=3 и s=2.

6.13. Продифференцировав, получим $2xf(x^2)=f(x)$, то есть $2x^2f(x^2)=xf(x)$. Обозначим $F(x)=xf(x)$, тогда $2F(x^2)=F(x)$. Сделаем замену $x=e^{\ln y}$, $2F(e^{2\ln y})=F(e^{\ln y})$. Обозначив $t=\ln y$, $G(t)=F(e^{\ln y})$, получим $2G(2t)=G(t)$, $2tG(2t)=tG(t)$. Пусть $H(t)=tG(t)$. Тогда $H(2t)=H(t)$ (*).

Например, $H \equiv const = c$ дает $G(t) = \frac{c}{t}$, $F(x) = \frac{c}{\ln x}$, откуда $f(x) = \frac{c}{x \ln x}$.

Подставив в условие (*), получим

$$\int_x^{x^2} \frac{c}{t \ln t} dt = c \cdot \ln \ln t \,|_x^{x^2} = 1,$$

то есть $c = \frac{1}{\ln 2}$. Итак, $f(x) = \frac{1}{\ln 2 \cdot x \ln x}$ - искомый пример.

6.14. Дифференцируем уравнения по y

$$f'(x+y) = f(x)f'(y) - g(x)g'(y),$$
$$g'(x+y) = f(x)g'(y) + g(x)f'(y).$$

При $y = 0$ имеем

$$f'(x) = -g'(0)g(x) \text{ и } g'(x) = g'(0)f(x).$$

Значит $2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 0$. Интегрируя, получим $f^2(x) + g^2(x) = C$. Так как функции f и g непостоянны, то $C \neq 0$.

Далее

$$f^2(x+y) + g^2(x+y) = \left(f(x)f(y) - g(x)g(y)\right)^2 + \left(f(x)g(y) - g(x)f(y)\right)^2 =$$

$$= f^2(x)f^2(y) + g^2(x)g^2(y) + f^2(x)g^2(y) + g^2(x)f^2(y) =$$
$$\left(f^2(x) + g^2(x)\right)\left(f^2(y) + g^2(y)\right).$$

Значит, $C = C^2$, а т.к. $C \neq 0$, то $C = 1$.

6.15. $T_{2n}(x) = \cos(2n \bullet \arccos(x)) = \cos(n \bullet \arccos(\cos(2\arccos(x)))) =$
$\cos(n \bullet \arccos(2x^2 - 1)) = T_n(2x^2 - 1).$

6.16. Домножим определитель на $z^m \rho(z)$ и проинтегрируем по отрезку $[a,b]$. Поскольку все строки, кроме последней, не зависят от z, то

$$\int_a^b p_n(z) z^m \rho(z) dz = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & \ldots & c_{2n-1} \\ \int_a^b z^m \rho(z) dz & \int_a^b z^{m+1} \rho(z) dz & \ldots & \ldots & \int_a^b z^{m+n} \rho(z) dz \end{vmatrix}$$

Принимая во внимание определение c_k, замечаем , что определитель имеет две одинаковых строки, то есть он равен нулю.

6.17. Воспользоваться выражением для суммы интегралов от прямой и обратной функций (см. справочные сведения в начале параграфа).

6.18. Первый способ. Аналогично 6.17.

Второй способ. Пусть $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt+\int\limits_0^{f(x)} g(t)dt-xf(x)$. Эта функция дифференцируема на $[0,a]$. $F'(x)=f(x)+g(f(x))f'(x)-f(x)-xf'(x)=0$.
Значит, $F(x)=const$, но $F(0)=0$. Следовательно, $F(x)=0$.

6.19. При $x=0$ получается неверное равенство. Следовательно, такой функции не существует.

Возможно другое решение:

$$\int_{-x}^{0}\frac{f(x+t)}{e^x+e^{-t}}dt=\begin{vmatrix} y=x+t \\ dt=dy \end{vmatrix}=\int_0^x\frac{f(y)}{e^x+e^{x-y}}dy=\frac{1}{e^x}\int_0^x\frac{f(y)}{1+e^{-y}}dy.$$

По условию $\int_{-x}^{0}\frac{f(x+t)}{e^x+e^{-t}}dt=\frac{1}{1+e^x}$, следовательно, $\frac{f(x)}{1+e^x}=\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)'$,

$$\frac{e^x f(x)}{1+e^x}=\frac{e^x\left(1+e^x\right)-e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}.$$

Таким образом, $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$. Поскольку имелся неравносильный переход, ответ необходимо проверить подстановкой, которая показывает, что данная функция не является решением.

6.20. Возьмем равенство $\left(\operatorname{arctg}x\right)'\cdot\left(1+x^2\right)=1$ и продифференцируем его $(n+1)$ раз. Получим

$$\left(\operatorname{arctg}x\right)^{(n+2)}\left(1+x^2\right)+(n+1)\left(\operatorname{arctg}x\right)^{(n+1)}\cdot 2x+\frac{(n+1)n}{2}\left(\operatorname{arctg}x\right)^{(n)}\cdot 2=0.$$

Упрощая полученное равенство с учетом того, что $\left(\operatorname{arctg}x\right)^{(n)}=\frac{P_{n-1}(x)}{\left(1+x^2\right)^n}$,

получим требуемое.

7.1. По формуле Тейлора: $f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2$, $c\in(x,1)$.
Выпуклость вниз дает $f''(c)\ge 0$. Следовательно, $f(x)\ge f(1)+f'(1)(x-1)\ge\frac{f'(1)}{2}+f'(1)(x-1)= \quad =f'(1)(x-\frac{1}{2})$. Тогда

$$\int\limits_0^1 f(x)dx>f'(1)\int\limits_0^1(x-\frac{1}{2})dx=0.$$

7.2. $$\int_a^b \left(\int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dx\right)dy \ge 0$$

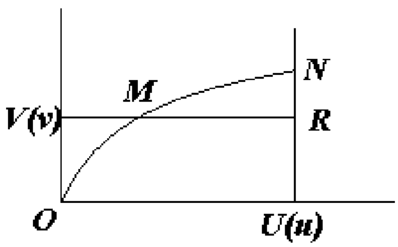
$$\Leftrightarrow \int_a^b \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)dy + \int_a^b \left(\int_a^b f(y)g(y)dy\right)dx - \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(y)dy$$

$$-\int_a^b f(y)dy \int_a^b g(x)dx \ge 0 \Leftrightarrow (b-a)\int_a^b f(t)g(t)dt \ge \int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt$$

7.3. $n! > \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \Leftrightarrow e^n > \dfrac{n^n}{n!}$, но $e^n = 1 + \dfrac{n}{1!} + \ldots + \dfrac{n^k}{k!} + \ldots$ То есть $\dfrac{n^n}{n!}$ лишь одно слагаемое, а все они положительны.

7.4. Для любых вещественных чисел $\overline{\mathrm{A}} = (x_1; x_2; x_3)$; $\overline{\mathrm{B}} = (y_1; y_2; y_3)$ неравенство преобразуется к виду $\left|\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}\right|^2 \le \left|\overline{\mathrm{A}}\right|^2 + \left|\overline{\mathrm{B}}\right|^2$, равенство будет в случае, когда $\overline{\mathrm{A}} \perp \overline{\mathrm{B}}$: $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$.

7.5.



Рисуем кривую $v = u^{p-1}$. Площадь прямоугольника $OVRU \le$ суммы площадей ONU и OMV, $uv \le \int_0^u u_1^{p-1}du_1 + \int_0^v v_1^{1/(p-1)}dv_1$, причем равенство в том и только в том случае, если M и N совпадают, то есть $v = u^{p-1}$. Вычислим интегралы и получим нужное неравенство.

Замечание. Можно использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\sqrt[n+m]{x^n y^m} \le \dfrac{nx+my}{n+m}$, $p = (n+m)/n,\ q = (n+m)/m,\ x = u^p,\ y = v^q$. Получаем решение для рациональных p, q. Далее по непрерывности.

7.6. $2ab + 2cd \ge 4\sqrt{abcd} = 4;\ ab + dc \ge 2\sqrt{abcd} = 2;\ bc + ad \ge$ $\ge 2\sqrt{abcd} = 2;\ bd + ac \ge 2\sqrt{abcd} = 2;\ 4 + 2 + 2 + 2 = 10.$

7.7. Для $x > 0$: $x + \dfrac{1}{x} \ge 2 \Rightarrow$ $(a_1 + \ldots + a_k)\left(\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_k}\right) =$

$$= k + \sum_{p<r,r=2}^{k}\left(\frac{a_p}{a_r} + \frac{a_r}{a_p}\right) \ge k + 2\sum_{p<r;r=2}^{k}(r-1) = k + 2\frac{(k^2-k)}{2} = k^2.$$

7.8. Обозначим интегралы от P и G соответственно A и B. Тогда по неравенству Коши:

$A^2+B^2=\int_a^b \big(AP(x)+BG(x)\big)dx \le \int_a^b (A^2+B^2)(P^2(x)+G^2(x))^{\frac{1}{2}}dx$, откуда и следует необходимое неравенство.

7.9. Поскольку $\dfrac{a_k}{a_{k+p}}=\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\dfrac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\cdot\ldots\cdot\dfrac{a_{k+p-1}}{a_{k+p}}$, то при одновременном увеличении индексов числителя и знаменателя дроби $\dfrac{a_k}{a_{k+p}}$ на 1 дробь увеличивается. Следовательно, для любого $k>1$ $\dfrac{1}{\dfrac{A(k-1)}{A(k)}-1}=\left(\dfrac{a_1}{a_k}+\dfrac{a_2}{a_k}+\ldots+\dfrac{a_{k-1}}{a_k}\right)<$ $\dfrac{a_1}{a_{k+1}}+\left(\dfrac{a_2}{a_{k+1}}+\dfrac{a_3}{a_{k+1}}+\ldots+\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{A(k)}{A(k+1)}-1}$, откуда видно, что $\dfrac{A(k)}{A(k+1)}<\dfrac{A(k-1)}{A(k)}$ или $4A^2(k)<4A(k-1)A(k+1)\le(A(k-1)+A(k+1))^2$, что и требовалось доказать.

7.10. $0\le\omega(n)\le 1/2,\ \pi\omega(n)\le\pi/2,$ $\sin(\pi\omega(n))\ge 2\omega(n),$ $\left|e^{2\pi i n\lambda}-1\right|=\left|e^{2\pi i(n\lambda-m)}-1\right|=\left|e^{2\pi i\omega(n)}-1\right|=2\sin(\pi\omega(n))\ge 4\omega(n)$.

7.11. $\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\dfrac{\cos x}{x}dx=\dfrac{\sin x}{x}\Big|_{100\pi}^{200\pi}+\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx;$ $\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx=$ $\int\limits_{100\pi}^{101\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx+\int\limits_{101\pi}^{102\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx+\ldots+\int\limits_{198\pi}^{199\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx+\int\limits_{199\pi}^{200\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx>0,$ так как $\int\limits_{100\pi}^{101\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx+\int\limits_{101\pi}^{102\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx>0,\ldots,\int\limits_{198\pi}^{199\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx+\int\limits_{199\pi}^{200\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx>0.$

$$\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x^2}dx<\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{100\pi}-\frac{1}{200\pi}=\frac{1}{200\pi}.$$

Замечание для преподавателя. В задаче можно потребовать доказать более сильное неравенство (оценка сверху: $\dfrac{3}{40000\pi^2}$). Тогда в решении надо еще раз проинтегрировать по частям.

7.12. Верхняя оценка: $\sum\limits_{i\ne j}a_ia_j=\left(\sum a_i\right)^2-\sum a_i^2=1-\dfrac{1}{n}-\sum\left(a_i-\dfrac{1}{n}\right)^2\le 1-\dfrac{1}{n}.$

Чтобы получить оценку снизу, введем векторы $\bar{a}_i$ последовательно проходимых сторон и обозначим α_{ij} - угол между $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_j$. Тогда $1=\sum\sum a_i a_j - \left(\sum \bar{a}_i\right)\left(\sum \bar{a}_j\right) = \sum_{i\neq j} a_i a_j (1-\cos\alpha_{ij}) \le 2\sum_{i\neq j} a_i a_j$.

7.13. $\int\limits_{a+c}^{b+d} y(x)dx = \int\limits_{a+c}^{b+c} y(x)dx + \int\limits_{b+c}^{b+d} y(x)dx \ge \int\limits_{a}^{b} y(x)dx + \int\limits_{c}^{d} y(x)dx.$

7.14. По индукции. База очевидна. По индукционному предположению: $(x_1+\ldots+x_n+x_{n+1})^2 = (x_1+\ldots+x_n)^2 + 2(x_1+\ldots+x_n)x_{n+1} + x_{n+1}^2 \ge$
$x_1^2+3x_2^2+\ldots+(2n-1)x_n^2+2nx_{n+1}^2+x_{n+1}^2$ (так как $x_n > x_{n+1}$).

7.15. $f+ig=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^k}{k!}=e^{e^{ix}}=e^{\cos x}e^{i\sin x}$; $\frac{g(x)}{f(x)}=tg\sin x\ge 1986$;
$|arctg1986|>1$, следовательно, таких x не существует.

7.16. Пусть L - прямая от $(1;0)$ до $(2;1)$. Тогда $f(1;2)=f(1;2)-f(1;0)=$
$\left|\int\limits_L\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)\right|\le\int\limits_L\left|\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right|$. Поскольку $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$,
$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial x}$. Значит, $f(1;2)\le\int\limits_L\left|\frac{\partial f}{\partial x}dx-\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial x}dy\right|=\int\limits_L\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\left|dx-\frac{x}{y}dy\right|$
$\le\int\limits_0^1\left(dx-\frac{x}{x+1}dx\right)= =\int\limits_0^1\frac{dx}{x+1}=\ln 2$.

Второе решение: f - дифференцируема $\forall(x;y)$: $grad(f)\perp\bar{r}$. На направлении, перпендикулярном $grad(f)$, функция постоянна, следовательно, она постоянна на любом луче, выходящем из $(0;0)$, так как луч произволен, она постоянна на всей плоскости. Но $f(0;1)=0\Rightarrow f(x;y)=const=0<\ln 2$. Чтобы второе решение не проходило, надо в условии говорить, что $f(x;y)$ обладает указанным свойством не во всей плоскости, а в некоторой области, содержащей $(0;1)$ и $(1;2)$ (достаточно исключить из плоскости точку (0,0)).

7.18. $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\sin x\cdot tgx\right)'=\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}>2x=(x^2)'$; при $x=0$: $0=0$.
$\left(\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)'=\cos x+\frac{1}{\cos x}+\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}>2=(2x)'$ при $x>0$.

7.19. Интеграл $I>\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$;
$I<\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

7.20. $x^2 \geq (1+x)(\ln(1+x))^2$; $1+x=u$; $(u-1)^2 \geq u\ln^2 u$; $u=e^t \Rightarrow$ $\Rightarrow (e^t-1)^2 \geq e^t t^2$. Извлекаем корень $\left|e^t-1\right| \geq e^{\frac{1}{2}t}|t| \Leftrightarrow \left|e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}\right| \geq |t|$; $2\left|sh\frac{t}{2}\right| \geq |t|$ при $t=0$ совпадают, а при $t>0$: $(2sh\frac{t}{2})' = ch\frac{t}{2} \geq 1$ (аналогично при $t<0$).

7.23. Пусть Γ - искомое множество, Γ_x - вертикальная полоса $|x| \leq 1$, Γ_y - горизонтальная полоса $|y| \leq 1$. Покажем, что $\Gamma = \Gamma_x \cup \Gamma_y$,

а) $(\Gamma_x \cup \Gamma_y \subseteq \Gamma)$. Ввиду симметрии достаточно убедиться, что при любом натуральном k $\Gamma_x \subseteq \Gamma_k$. Действительно, $|x| \leq 1 \Rightarrow |x|^k \leq 1 \Rightarrow |xy|^k \leq |y|^k \Rightarrow |xy|^k \leq |x|^k + |y|^k$.

б) $(\Gamma \subseteq \Gamma_x \cup \Gamma_y)$. Допустим, что существует $(\cdot)(x;y)$ множества Γ, не принадлежащая ни одной из полос, т.е. при всех k $|xy|^k \leq |x|^k + |y|^k$, и в то же время $|x|>1$, $|y|>1$. Тогда, записывая первое соотношение в виде $1 \leq |x|^{-k} + |y|^{-k}$ и, переходя к пределу по k, получаем неравенство $1 \leq 0$, опровергающее наше допущение.

Ответ: замкнутый “крест” $\{|x| \leq 1\} \bigcup \{|y| \leq 1\}$.

7.26. $0 < A \leq \Phi(x) \leq B$; $(B-\Phi(x))(A-\Phi(x)) \leq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB \leq (A+B)\Phi(x) - \Phi^2(x) \underset{\Phi(x)>0}{\Rightarrow} \frac{AB}{\Phi(x)} \leq A+B-\Phi(x) \Rightarrow$$

$\int\limits_0^1 \frac{AB}{\Phi(x)}dx \leq A+B-\int\limits_0^1 \Phi(x)dx$, что и требовалось доказать.

7.27. $x,y>0$; $x+y=1$; $x^x+y^y \geq \sqrt{2}$. Экстремум: $(x^x+(1-x)^{1-x})' = x^x(\ln x+1)-(1-x)^{1-x}(\ln(1-x)+1)=0$. Экстремум в точке $x=\frac{1}{2}(\min)$. Функция выпукла вниз, так как вторая производная больше нуля. $2(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ в этой точке, то есть в остальных $x^x+(1-x)^{1-x} \geq \sqrt{2}$.

7.29. $1989^{1989} \cdot 1987^{1987} \vee 1988^{1988\cdot 2}$;

$1989\ln 1989 + 1987\ln 1987 \vee 2\cdot 1988\ln 1988$;

$1988(\ln 1989 + \ln 1987) + \ln\frac{1989}{1987} \vee 1988 \cdot 2\ln 1988$;

$1988\left(\ln\left(\frac{1988^2-1}{1988^2}\right)\right) + \ln\frac{1989}{1987} \vee 0$;

$1988\ln\left(1-\frac{1}{1988^2}\right) \vee \ln\left(1-\frac{2}{1989}\right)$; $-\frac{1}{1988} > -\frac{2}{1989}$, откуда и следует нужное неравенство.

Замечание. Пусть $f(x) = x\ln x$, тогда $f''(x) = 1/x > 0$. Отсюда $f(1988+1) + f(1988-1) \geq 2f(1988)$.

7.31. $\left|\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\varphi(t)dt\right| = \left|\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} (f(t)-f(\alpha))\varphi(t)dt\right| \leq (f(\alpha)-f(\alpha+T))\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} |\varphi(t)|dt$

$$\left|\int\limits_{A}^{B} f(t)\varphi(t)dt\right| \leq \left|\int\limits_{A}^{A+T} f(t)\varphi(t)dt + \int\limits_{A+T}^{A+2T} f(t)\varphi(t)dt + \ldots + \int\limits_{A+nT}^{B} f(t)\varphi(t)dt\right| \leq$$

$$\leq ((f(A)-f(A+T)) + (f(A+T)-f(A+2T)) + \ldots - f(A+nT))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{0}^{T}|\varphi(t)|dt + f(A+nT)\int\limits_{A+nT}^{B}|\varphi(t)|dt \leq f(A)\int\limits_{0}^{T}|\varphi(t)|dt; \ \lim_{B\to\infty}\int\limits_{A}^{B} f(t)\varphi(t)dt$$

существует, т.к. $\left|\int\limits_{B}^{C} f(t)\varphi(t)dt\right| \leq f(B)\int\limits_{0}^{T}|\varphi(t)|dt \underset{\substack{B\to\infty\\ C\to\infty}}{\to} 0$, т.к. $f(B) \underset{B\to\infty}{\to} 0$.

7.32. Пусть $H(x) = A(x) - B(x) \geq 0$: $\int\limits_{0}^{1} xB(x)dx = \int\limits_{0}^{c} x(H(x)+B(x))dx$

$\int\limits_{c}^{1} xB(x)dx = \int\limits_{0}^{c} xH(x)dx$. По теореме о среднем для обеих частей равенства существуют k_1 и k_2:

$$k_1\int\limits_{c}^{1} B(x)dx = k_2\int\limits_{0}^{c} H(x)dx,\ c < k_1 < 1;\ \ 0 < k_2 < c\ \ (k_1 > k_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{c}^{1} B(x)dx < \int\limits_{0}^{c} H(x)dx = \int\limits_{0}^{c} A(x)dx - \int\limits_{0}^{c} B(x)dx \Rightarrow \int\limits_{0}^{1} B(x)dx < \int\limits_{0}^{c} A(x)dx.$$

Возможно второе решение: $A(x) \geq B(x) \geq 0 \Rightarrow \int\limits_{0}^{c} dx\int\limits_{0}^{x} A(y)dy \geq \int\limits_{0}^{c} dx\int\limits_{0}^{x} B(y)dy$.

Поменять порядок интегрирования и использовать заданное равенство.

7.33. $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, $\qquad x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{x_n^2} > 2$,

$$x_{n+1}^2 = x_1^2 + (x_2^2 - x_1^2) + \ldots + (x_{n+1}^2 - x_n^2) > 2n,$$

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2} < x_n^2 + 2 + \frac{1}{2(n-1)} < \ldots < 2n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2(n-1)}.$$

Оценивая ряд по интегральному признаку Коши, получим $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2}\ln n$.

7.34. $$F(b)=\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\cos xdx\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\sin xdx\right)^2;$$

$$F'(b)=2f(b)\left[\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)\cos xdx\cos b-\int_a^b f(x)\sin xdx\sin b\right]=$$

$$=2f(b)\left[\int_a^b f(x)(1-\cos(x-b))dx\right]=2f(b)\left[2\int_a^b f(x)\sin^2\frac{x-b}{2}dx\right];$$

$$0\le F'(b)\le 4f(b)M\int_a^b\frac{(x-b)^2}{4}dx\le M^2\frac{(b-a)^3}{3}\Rightarrow 0\le F(b)\le M^2\frac{(b-a)^4}{12}.$$

7.35. $$\left|\int_x^{x+1}\sin t^2dt\right|=\left|\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{\cos y}{\sqrt{y}}\right|\Bigg|_{x^2}^{(x+1)^2}+\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos y}{2\sqrt{y^3}}dy\right|\le$$

$$\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{2\sqrt{y^3}}dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x}.$$

7.36. Неравенство можно умножить на любое положительное C, оно не изменится. Поэтому можно считать, что $f(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$. Требуется доказать, что $\int_0^1(x-\frac{2}{3})f(x)dx\le 0$. На $[0,\frac{2}{3}]$ функция $f(x)$ выпукла вверх. Тогда из-за того, что $f(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$, выполнено: $(x-\frac{2}{3})f(x)\le x(x-\frac{2}{3})$. На $[\frac{2}{3},1]$ по той же причине $f(x)\le x$, то есть также выполнено: $(x-\frac{2}{3})f(x)\le x(x-\frac{2}{3})$.

Значит, $\int_0^1(x-\frac{2}{3})f(x)dx\le\int_0^1(x-\frac{2}{3})xdx=0$.

7.37. $M^{\frac{3}{2}}=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\sqrt{f(x)}\sqrt{f(x)}dx\le\sqrt{M}\int_a^b\sqrt{f(x)}dx\Rightarrow\int_a^b\sqrt{f(x)}dx\ge M$.

7.38. $\left|a_1\frac{\sin x}{x}+2a_2\frac{\sin 2x}{2x}+...+na_n\frac{\sin nx}{nx}\right|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|$. Переходим в неравенстве к пределу при $x\to 0\Rightarrow\left|a_1+2a_2+...+na_n\right|\le 1$.

7.39. При $x=0$ и $x=1$ неравенство верно (равенство). Правая часть - линейная функция, левая - функция, выпуклая вниз, т.к. $((1+x)^{\alpha}-(1-x)^{\alpha})''>0$. Отсюда следует нужное неравенство.

7.40. При $f(x)=0$ неравенство тривиально выполнено. При $f(x)\neq 0$ функция $y(t)=\int_0^{2\pi}(f''(x))^2dx+2t\int_0^{2\pi}f''(x)f(x)dx+t^2\int_0^{2\pi}f^2(x)dx=$

$=\int_0^{2\pi}(f''(x)+tf(x))^2dt\geq 0$ является квадратным трехчленом с неположительным дискриминантом:

$$\left(\int_0^{2\pi}f''(x)f(x)dx\right)^2\leq\int_0^{2\pi}\left(f''(x)\right)^2dx\cdot\int_0^{2\pi}f^2(x)dx.$$

Остается применить формулы интегрирования по частям $\int_0^{2\pi}f''(x)f(x)dx=-\int_0^{2\pi}\left(f'(x)\right)^2dx$, внеинтегральный член исчезает ввиду периодичности f.

Второе решение. Разложим функцию f в ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_ke^{ikx},\ \ f'(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}ikC_ke^{ikx},\ \ f''(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(-k^2C_k\right)e^{ikx}.$$

Так как f – дважды непрерывно дифференцируемая функция, все эти ряды сходятся абсолютно. По равенству Парсеваля $\int_0^{2\pi}f^2(x)dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|C_k\right|^2$. Тогда, используя его и неравенство Коши-Буняковского получаем:

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(f'(x)\right)^2dx\right)^2=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2\left|C_k\right|^2\right)^2\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(k^2\left|C_k\right|\right)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|C_k\right|^2=$$

7.41.

$$=\int_0^{2\pi}\left(f''(x)\right)^2dx\int_0^{2\pi}f^2(x)dx.$$

$$\ln\frac{x+y}{2}-\frac{1}{2}(\ln x+\ln y)\geq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow$$

$$2\ln\frac{x+y}{2}+\frac{2}{x+y}\geq(\ln x+\ln y)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Leftrightarrow$$

$$2\ln\frac{x+y}{2}+\frac{1}{\frac{x+y}{2}}\geq\frac{1}{2}\left(2\ln x+\frac{1}{x}+2\ln y+\frac{1}{y}\right).$$ Для доказательства

рассмотрим функцию $y=2\ln t+\frac{1}{t},\ t>1$. Найдем ее вторую производную:

$y'' = -\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^3} = \frac{-2(t-1)}{t^3} < 0$. Следовательно, функция выпукла вверх и данное неравенство верно.

7.42. Так как $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то найдется такое $x_0 \in (a,b)$, что $f(x_0) = 0$. Если

$x < x_0$, то $f(x) = \frac{1}{2}(\int\limits_a^x f'(s)ds - \int\limits_x^{x_0} f'(s)ds + \int\limits_{x_0}^b f'(s)ds)$, если же $x > x_0$, то

$f(x) = \frac{1}{2}(\int\limits_{x_0}^x f'(s)ds - \int\limits_a^{x_0} f'(s)ds - \int\limits_x^b f'(s)ds)$. Отсюда $|f(x)| \le \frac{1}{2}\int\limits_a^b |f'(x)|dx$.

7.43. Рассмотрим функцию $F(t) = \int_0^t g\left(\frac{2}{n+1}x\right)dx$, $n \in \mathbb{N}$, определенную на интервале $\left[0, n+1\right)$. Эта функция выпукла, так как

$F''(t) = \frac{2}{n+1} g\left(\frac{2}{n+1}t\right) \ge 0$, $\forall\, t \in \left[0, n+1\right)$. Поэтому к $F(t)$ можно

применить неравенство Йенсена: $F\left(\sum\limits_{i=1}^n q_i t_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^n q_i F(t_i)$,

$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$. Выберем $q_i = \frac{1}{n}$, $t_i = i$, $i = 1, \ldots, n$. Получим

$nF\left(\frac{n+1}{2}\right) \le \sum\limits_{i=1}^n F(i)$ и, учитывая определение функции $F(t)$, запишем

$n\int_0^{\frac{n+1}{2}} g\left(\frac{2}{n+1}x\right)dx \le \int_0^1 g\left(\frac{2}{n+1}x\right)dx + \ldots + \int_0^n g\left(\frac{2}{n+1}x\right)dx$. После очевидного преобразования, имеем

$$\int_{\frac{n+1}{2}}^1 g\left(\frac{2}{n+1}x\right)dx + \int_{\frac{n+1}{2}}^2 g\left(\frac{2}{n+1}x\right)dx + \ldots + \int_{\frac{n+1}{2}}^n g\left(\frac{2}{n+1}x\right)dx \ge 0.$$

Подставив $y = \frac{2}{n+1}x$, получим

$$\int_1^{\frac{2}{n+1}} g(y)dy + \int_1^{\frac{4}{n+1}} g(y)dy + \ldots + \int_1^{\frac{2n}{n+1}} g(y)dy \ge 0.$$

7.44. Умножая исходное неравенство на $h(x)$, приведем его к виду $R'(x)-h(x)R(x)\le h(x)g(x)$, где $R(x)=\int_a^x h(t)f(t)dt$. Умножая это неравенство на $\exp\left(-\int_a^x h(t)dt\right)$, получим

$$\left(R(x)\exp\left(-\int_a^x h(t)dt\right)\right)'\le h(x)g(x)\exp\left(-\int_a^x h(t)dt\right).$$

Интегрируя последнее неравенство от a до x и принимая во внимание, что $R(a)=0$, получим

$$R(x)\le\int_a^x h(t)g(t)\exp\left(\int_a^x h(u)du\right)dt.$$

Наконец, сопоставляя это с исходным неравенством и учитывая определение $R(x)$, получим $f(x)\le g(x)+\int_a^x h(t)g(t)\exp\left(\int_t^x h(u)du\right)dt$.

7.45. Перейдем к полярным координатам

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)dxdy=\int_0^r(\rho\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)d\varphi)d\rho.$$

Если обозначить $g(r)=r\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi$, то исходное неравенство перепишется в виде:

$$g(r)\le 2\int_0^r g(\rho)d\rho.$$

Подставляя неравенство в себя n раз, получаем:

$$g(r)\le 2^n\int_0^r d\rho_1\int_0^{\rho_1}\dots\int_0^{\rho_{n-1}} g(\rho_n)d\rho_n.$$

Так как функция $f(x,y)$ непрерывна в круге $x^2+y^2\le\le 1$, то она ограничена, следовательно, ограничена и функция $g(r)$. Ясно, что $g(r)$ неотрицательна. Таким образом, $0\le g(r)\le M$ для всех $r\in(0,1]$. Это означает, что для всех натуральных n и $r\in(0,1]$

$$0\le g(r)\le M\cdot 2\int_0^r d\rho_1\int_0^{\rho_1}\dots\int_0^{\rho_{n-1}} d\rho_n=M\frac{2^n}{n!}r^n\le M\frac{2^n}{n!}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$, то $g(r)\equiv 0$ на $(0,1]$. Следовательно, для всех $r\in(0,1]$: $\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi=0$. Если бы для некоторого φ имело место неравенство $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)>0$, то, ввиду непрерывности f, оно было бы верно на некотором интервале, и интеграл в силу неотрицательности функции был бы положительным. Итак, $f(x,y)=0$ при $x^2+y^2\neq 0$. Равенство $f(0,0)=0$ следует из непрерывности f.

7.46. Используя формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии, разложим в ряд выражение под знаком интеграла $(x>0)$

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{e^x(1-e^{-x})}=xe^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}=x\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}.$$

Для этого ряда выполнены условия почленной интегрируемости. Учитывая равенство

$$\int\limits_0^{\infty} xe^{-kx}dx=\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{\infty} xe^{-x}dx=\frac{1}{k^2},$$

Получаем

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{e^x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

Откуда

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{e^x-1}-\sum_{n=1}^{2009}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=2010}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Утверждение задачи следует из неравенств

$$0<\sum_{n=2010}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=2010}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2010}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2009}.$$

8.1. $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-z)\sin z}{1+\cos^2 z}dz=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin z}{1+\cos^2 z}dz-I;\ 2I=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin z}{1+\cos^2 z}dz=$

$$\underset{\cos z=u}{=}\pi\int\limits_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2}=\pi arctg(u)\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi^2}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi^2}{4}.$$

8.2. $$\int_0^{\pi} x\sin^6 x\cos^4 x dx \underset{x=\pi-y}{=} \pi\int_0^{\pi}\sin^6 y\cos^4 y dy - \int_0^{\pi} y\sin^6 y\cos^4 y dy;$$

$$\int_0^{\pi} x\sin^6 x\cos^4 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^6 y\cos^4 y dy = \frac{3}{512}\pi^2.$$

8.3. $$I_{\alpha+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha+1} x(\sin x dx) = -\left[\sin^{\alpha+1} x\cos x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\alpha+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} x\cos^2 x dx;$$

$I_{\alpha+2} = (\alpha+1)(I_\alpha - I_{\alpha+2}) \Rightarrow (\alpha+2)I_{\alpha+2} = (\alpha+1)I_\alpha \Rightarrow f(\alpha+1) = (\alpha+2)I_{\alpha+1}I_{\alpha+2} =$ $= (\alpha+1)I_\alpha I_{\alpha+1} = f(\alpha)$; f имеет период 1 и для целого p: $f(p) = f(0) = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

8.4. $$\int_{-a}^{a}\ldots = \int_0^{a}\ldots + \int_{-a}^{0}\ldots = \int_0^{a} dx\left(\frac{1}{1+\varphi(x)+\sqrt{1+\varphi^2(x)}} + \frac{1}{1-\varphi(x)+\sqrt{1+\varphi^2(x)}}\right) =$$

$$= \int_0^{a}\frac{2+2\sqrt{1+\varphi^2(x)}}{2+2\sqrt{1+\varphi^2(x)}}dx = a$$

8.5. $$I \underset{x=tg\alpha}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tg\alpha)d\alpha;\quad 1+tg\alpha = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha} \Rightarrow I = \frac{\pi}{8}\ln 2 +$$

$+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\alpha d\alpha$ Заменяя $\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$, получим $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

8.6. Заменяя $x + \frac{a}{x} = \sqrt{y^2+4a}$, то есть $y^2 = \left(x - \frac{a}{x}\right)^2$;

$y = x - \frac{a}{x}$; $dx = \frac{dy}{1+\frac{a}{x^2}}$; $x = \frac{y+\sqrt{y^2+4a}}{2}$;

$\int_0^{\infty} f\left(x+\frac{a}{x}\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{y^2+4a}\right)\frac{dy}{1+\frac{2a}{y^2+2a+y\sqrt{y^2+4a}}} =$ Заменяя y на $-y$, получим

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{y^2+4a})\left(\frac{y^2+2a+y\sqrt{y^2+4a}}{y^2+4a+y\sqrt{y^2+4a}}+\frac{y^2+2a-y\sqrt{y^2+4a}}{y^2+4a-y\sqrt{y^2+4a}}\right)dy=$$

$$=\int_0^{\infty} f(\sqrt{y^2+4a})dy.$$

Второе решение. Делаем замену в интеграле в левой части: $x=\sqrt{a}e^t$. Тогда получаем $\int_{-\infty}^{\infty} f(2\sqrt{a}ch(t))\sqrt{a}e^t dt=$ (берем четную часть) $=\int_{-\infty}^{\infty} f(2\sqrt{a}ch(t))\sqrt{a}ch(t)dt=2\sqrt{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(2\sqrt{a}ch(t))\sqrt{a}ch(t)dt$. В левой части такой же интеграл получается после замены $x=2\sqrt{a}sh(t)$.

8.7. $\int_0^1 \frac{arctgx}{1+x}dx=arctgx\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$ (см. задачу 8.5).

8.8.

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}=\int_0^{\infty}\frac{x^{-\alpha}}{x^{-\alpha}+1}\cdot\frac{1}{x^{-2}+1}\cdot\frac{dx}{x^2}\underset{\frac{1}{x}=x}{=}\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha}+1}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha}+1}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}+1}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\infty}\frac{1+x^{\alpha}}{x^{\alpha}+1}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$\frac{1}{2}arctg(x)\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{4}.$$

8.9. Найдем $L(I(t))$ - преобразование Лапласа от $I(t)$, т.к. $L(\sin tu)=\frac{u}{p^2+u^2}$; $L(I(t))=\int_0^{\infty}\frac{u^2du}{\left(p^2+u^2\right)\left(1+u^2\right)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{p+1}=$ $L\left(\frac{\pi}{2}e^{-t}\right)$.

Значит, $I(t)=\frac{\pi}{2}e^{-t}$.

Замечание. Искомый интеграл- это синус-преобразование Фурье. Его можно найти по вычетам стандартным для теории функций комплексной переменной способом.

8.10. Интегрируя дифференциальное тождество $2\cos^2\theta\cdot e^{-\frac{1}{2\cos^2\theta}}d\theta=e^{-\frac{1}{2}(1+tg^2\theta)}d(tg\theta)+d(\sin\theta\cos\theta e^{-\frac{1}{2\cos^2\theta}})$ по промежутку $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$, получим $I=\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(1+t^2)}dt=\frac{1}{2\sqrt{e}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2e}}$.

8.11. Вычисляя $\int_0^1 x^{p-1}e^x dx$ путем почленного интегрирования степенного ряда, получаем $E(p)$, а вычисляя тот же интеграл по частям, получим представление $E(p)=(-1)^p p!\left(1-e\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$, из которого видно, что $E(p)$ рационально лишь при условии обращения в нуль суммы в правой части. Последнее же выполнено лишь при $p=2$.

8.12. $$t=1\to(0;0)y'_x=\frac{\left(\int_1^t\frac{\sin z}{z}dz\right)'}{\left(\int_1^t\frac{\cos z}{z}dz\right)'}=\frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\cos t}{t}}=tgt=\infty\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

ближайшая точка $t=\frac{\pi}{2}$; $l=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2}+\frac{\sin^2 t}{t^2}}dt=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t}=\ln\frac{\pi}{2}.$

8.13. $$\frac{d}{dk}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(tgx)^k}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(tgx)^k\ln tgxdx}{(1+(tgx)^k)^2}=0\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(tgx)^k\ln tgxdx}{(1+(tgx)^k)^2}+$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(tgx)^k\ln tgxdx}{(1+(tgx)^k)^2}=0;\quad\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(tgx)^k\ln tgxdx}{(1+(tgx)^k)^2}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\ln tgydx}{(tgy)^k(1+(ctgy)^k)^2}=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(tgy)^k\ln tgy}{\left(1+(tgy)^k\right)^2}dy.$$

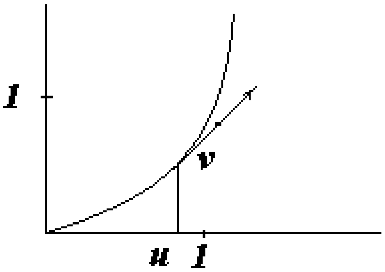
8.14. $$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt}{x}\underset{\frac{1}{t}=z}{=}\lim_{x\to0}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{\cos z}{z^2}dz}{x};\qquad\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{\cos z}{z^2}dz=\frac{\sin z}{z^2}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{\infty}+2\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{\sin z}{z^3}dz$$

Здесь проинтегрировали по частям ($u=\frac{1}{z^2}$, $dv=\cos zdz$). Учитывая, что

.

$x\sin\frac{1}{x}\underset{x\to0}{\to}0$, получаем $\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\left|\frac{\sin z}{z^3}\right|dz\le-\frac{1}{2z^2}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{\infty}=\frac{x^2}{2}\Rightarrow f'(0)=0.$

8.15.



$S(n)=\iint\limits_D dxdy$. Введем новые координаты u,v: $u-$ абсцисса точки касания, $v-$ расстояние точки на касательном векторе от его начала.

Так как кривая $y=f(x)=x^n$ выпукла вниз, то такая замена переменных однозначна. Новая область интегрирования будет $0\le u\le 1;\ 0\le v\le 1$. Найдем “якобиан”:

$x=u+v\cos\varphi; y=f(u)+v\sin\varphi; x_u^{'}=1-v\sin\varphi\cdot\varphi'_u;$

$y'_u=f'(u)+v\cos\varphi\cdot\varphi'_u; x'_v=\cos\varphi-v\sin\varphi\cdot\varphi'_v;$

$y'_v=\sin\varphi+v\cos\varphi\cdot\varphi'_v;\ \varphi'_v=0$ (φ не зависит от v);

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=\sin\varphi-v\sin^2\varphi\cdot\varphi'_u+v\cos\varphi\cdot\varphi'_v-v^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\varphi'_u\cdot v'_v-$$

$$-f'(u)\cos\varphi+f'(u)\cdot v\sin\varphi\cdot\varphi'_v-v\cos^2\varphi\cdot\varphi'_u+$$

$$+v^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\varphi'_u\,\varphi'_v=\sin\varphi-v\cdot\varphi'_u+v\frac{u'_v}{\cos\varphi}-$$

$$=tg\varphi\cos\varphi=-v\cdot\varphi'_u;$$

$$S(n)=\int_0^1\int_0^1 dudv\cdot v\varphi'_u=\int_0^1 vdv\int_0^1\varphi'_u\,du=\frac{1}{2}(\varphi(1)-\varphi(0))=$$

$$=\frac{1}{2}(arctgf'(1)-arctgf'(0))=\frac{1}{2}(arctg(n)-arctg(0))=\frac{arctg(n)}{2}.$$

8.16.

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(tgx)}{a^2+b^2tg^2x}=$$

$$=\frac{2}{ba}arctg\frac{btgx}{a}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{ba}.$$

8.17.

$S_h(S_h(\Phi_1 x)_1 x)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}dt\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varphi(x+t+s)ds=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varphi(x+t+s)ds.$ Так как

$$\begin{cases} u=t+s \\ v=t-s \end{cases},\ |J|=2,$$

$$S_h(S_h(\Phi,x),x)=\frac{1}{h^2}\cdot 2\iint\limits_D dudv\Phi(x+u)=\frac{4}{h^2}\int\limits_0^h du\int\limits_0^{h-u} dv\Phi(x+u)+$$

$$+\frac{4}{h^2}\int\limits_{-h}^0 du\int\limits_0^{h+u} dv\Phi(x+u)=\frac{4}{h^2}\int\limits_0^h du\Phi(x+u)(h-u)+\frac{4}{h^2}\int\limits_{-h}^0 du\Phi(x+u)(h+u).$$

8.21. **1 способ**. Можно заметить, что $I_{n+1}(x)+I_{n-1}(x)=\int\limits_0^\pi \frac{\cos(n+1)t+\cos(n-1)t}{1-x\cos t}dt==\frac{2}{x}\left(\int\limits_0^\pi \frac{\cos nt}{1-x\cos t}dx\right)=\frac{2}{x}I_n(x)$. Прямое вычисление дает $I_0(x)=\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}};\, I_1(x)=\frac{\pi(1-\sqrt{1-x^2})}{x\sqrt{1-x^2}}$. Тогда, например, по индукции $I_n(x)=\frac{\pi(1-\sqrt{1-x^2})^n}{x^n\sqrt{1-x^2}};\ (|x|<1;\ n\in\mathrm{N})$.

2 способ. Интеграл равен половине интеграла по $[-\pi,\pi]$. Делая замену переменной $z=e^{it}$, сводим интеграл к интегралу по единичной окружности в комплексной плоскости. По теореме о вычетах $I_n(x)=-\frac{\pi}{x}(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z))$, где $f(z)=\frac{(z^{2n}+1)}{z^n(z-z_1)(z-z_2)}$; $z_1=\frac{1}{x}(1-\sqrt{1-x^2});\, z_2=\frac{1}{x}(1+\sqrt{1-x^2})$. Надо сосчитать вычеты (в точке $z=0$ удобно разложить в ряд Лорана), откуда и получается ответ.

8.23.
$$I\underset{y=6-x}{=}\int\limits_{-1}^1 \frac{dy}{1+\sqrt{\frac{\ln(6-y)}{\ln(6+y)}}}=\int\limits_{-1}^0 \frac{dy}{1+\sqrt{\frac{\ln(6-y)}{\ln(6+y)}}}+\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+\sqrt{\frac{\ln(6-y)}{\ln(6+y)}}}=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{dy}{1+\sqrt{\frac{\ln(6-y)}{\ln(6+y)}}}+\frac{dy}{1+\sqrt{\frac{\ln(6+y)}{\ln(6-y)}}}\right)=\int\limits_0^1 1\cdot dt=1.$$

8.24. $$I_n=\int_0^1\frac{\sin(\pi x)dx}{1+nx-[nx]}=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{\sin(\pi x)dx}{1+nx-k+1}\underset{nx-k+1=t}{=}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{\sin(\pi\frac{t+k-1}{n})d\frac{t}{n}}{1+t};\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin(\pi\frac{t+k-1}{n})\frac{1}{n}=$$

$$=\int_0^1\sin(\pi x)dx=\frac{2}{\pi}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}I_n=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\frac{2}{\pi}\ln 2.$$

8.25. $$\int e^{\cos x}\sin x\cdot xdx+\int e^{\cos x}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-xe^{\cos x}+\int e^{\cos x}dx-e^{\cos x}\frac{1}{\sin x}-$$

$$-\int e^{\cos x}dx=-e^{\cos x}(x+\frac{1}{\sin x}).$$

8.26. $$I=\int_1^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^{1991}}+1992}\cdot\frac{dx}{x^{1992}}\underset{t=x^{-1991}}{=}-\frac{1}{1991}\int_1^0\frac{dt}{t+1992}=\frac{1}{1991}\ln\frac{1993}{1992}.$$

8.27. $$\int_0^1\sqrt{\sin\pi x}dx\le\sqrt{\int_0^1\sin\pi xdx\int_0^1 dx}<\sqrt{\frac{2}{\pi}}<0{,}8.$$

8.28. $$\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+3)x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x\cos 2x}{\sin x}dx+\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x\cos(2n+1)x}{\sin x}dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx-\int_0^{\pi}\sin(2n+1)x\sin xdx+2\int_0^{\pi}\cos(2n+1)x\cos xdx=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\ldots=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}dx=\pi$$

8.29. График $T^{(n)}(x)$ имеет 2^{n-1} одинаковых пиков. Т.к. всего пиков 2^{n-1}, то общая площадь: $\int_0^1 T^{(n)}(x)dx=2^{n-1}(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot 1)=\frac{1}{2}.$

Замечание. Можно показать, что операция T превращает пик в два пика, не меняя площади.

8.30. Изменение знака подынтегральной функции происходит при переходе через точки вида $x=\sqrt{n},\ n\in N.$ Так как расстояние между соседними точками такого вида стремится к нулю при $n\to\infty$, то достаточно исследовать поведение интеграла

$$\int_0^{\sqrt{n}} (-1)^{[x^2]}dx = 1-(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(-1)^{n-1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) =$$

$$= 1-\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}},$$

очевидно, имеющего предел при $n\to\infty$. Ответ: интеграл сходится.

8.31. Сделаем замену переменной. Пусть $t = x-\pi,\ \ dt = dx$, получаем

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt + n\pi)dt =$$

$$= (-1)^n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt)dt = 0.$$

Последний интеграл равен нулю как определенный интеграл от нечетной функции по отрезку, симметричному относительно начала координат.

8.32. $I = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1}dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ B\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{B} x^3\frac{1}{e^x-1}dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ B\to\infty}} \int_0^{\infty} x^3 \frac{1}{1-e^{-x}}\frac{dx}{e^x}.$

Разложим $\frac{1}{1-e^{-x}}$ в ряд

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ B\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{B} x^3 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}\frac{dx}{e^x} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ B\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{B}\sum_{k=0}^{\infty} x^3 e^{-(k+1)x}dx.$$

Поскольку ряд сходится равномерно, его можно почленно интегрировать:

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ B\to\infty}} \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\varepsilon}^{B} x^3 e^{-(k+1)x}dx.$$

Трижды проинтегрировав по частям, находим данный интеграл.

Получаем $I = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k^4} = \frac{\pi}{15}.$

8.33. Сделаем замену переменных во втором интеграле: $u = xy$,

тогда интеграл будет равен $-\int_0^1\left(\int_1^u \frac{u^u}{x}dx\right)du = -\int_0^1 u^u\left(\ln x\Big|_1^u\right)du = -\int_0^1 u^u \ln u du.$

Таким образом, $\int_0^1 u^u(1+\ln u)du = u^u\Big|_0^1 = 0,$ и следовательно, оба интеграла равны.

8.34. $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(e^{x}+1\right)\left(x^{2}+1\right)}\overset{x=-t}{=}\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^{t}dt}{\left(e^{t}+1\right)\left(t^{2}+1\right)}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^{t}+1-1}{\left(e^{t}+1\right)\left(t^{2}+1\right)}dt=$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(t^{2}+1\right)}-\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(e^{t}+1\right)\left(t^{2}+1\right)}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(t^{2}+1\right)}-I,$$

$$2I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{t^{2}+1}=\frac{\pi}{2},\quad I=\frac{\pi}{4}.$$

8.35. Пусть $\frac{1}{1+x^{4}\cos^{2}x}=f(x)$. Тогда при $\pi n\le x\le\pi(n+1)$

$$\frac{1}{1+\pi^{4}(n+1)^{4}\cos^{2}x}\le f(x)\le\frac{1}{1+\pi^{4}n^{4}\cos^{2}x},$$

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{dx}{1+\pi^{4}(n+1)^{4}\cos^{2}x}\le\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)}f(x)dx\le\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{dx}{1+\pi^{4}n^{4}\cos^{2}x}.$$ Но

$$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\pi^{4}(n+1)^{4}\cos^{2}x}=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^{2}x+1+\pi^{4}(n+1)^{4}}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^{2}x+1+\pi^{4}(n+1)^{4}}=\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^{4}(n+1)^{4}}}$$

Суммируя по n, находим $\pi\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\pi^{4}(n+1)^{4}}}\le\int\limits_{0}^{\infty}f(x)dx\le\pi\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\pi^{4}n^{4}}}$.

Следовательно, интеграл сходится.

8.36. Если $a>0$, то

$$1=\int\limits_{0}^{\infty}\left(a\left(f(x)\right)^{2}+\left(f'(x)\right)^{2}\right)dx\ge$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}2\sqrt{a}\left|f(x)\cdot f'(x)\right|dx\ge\left|\int\limits_{0}^{\infty}2\sqrt{a}f(x)\cdot f'(x)dx\right|=\sqrt{a}\left|f(\infty)^{2}-f(0)^{2}\right|=\sqrt{a}f(0)^{2}$$

(иначе нет сходимости интеграла), поэтому $f(0)\le\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$, а это значение достигается для функции, для которой $\sqrt{a}=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|$, то есть для

$$f(x)=\frac{\exp(-x\sqrt{a})}{\sqrt[4]{a}}.$$

8.37. Будем считать интеграл по частям: $u=(\sin x-\cos x)^{2n}$ и $dv=\dfrac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^{2n+1}}dx$. Тогда $du=2n(\sin x-\cos x)^{2n-1}(\cos x+\sin x)dx$, а

$v=\dfrac{1}{2n(\sin x+\cos x)^{2n}}$. Обозначим искомый интеграл за I_n и получим

$$I_n=\frac{(\sin x-\cos x)^{2n}}{2n(\sin x+\cos x)^{2n}}\Bigg|_0^{\pi/4}-1\cdot\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n-1}dx \quad \text{или}$$

$$I_n=-\frac{1}{2n}-I_{n-1}=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n-2)}+I_{n-2}=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\ln 2$$

8.38. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+2^{\pi\operatorname{tg}x}}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+2^{\pi\operatorname{tg}x}}+\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+2^{\pi\operatorname{tg}x}}=$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+2^{\pi\operatorname{tg}x}}+\int_0^1\frac{dx}{1+2^{\pi\operatorname{tg}(-x)}}=\int_0^1\left(\frac{1}{1+2^{\pi\operatorname{tg}x}}+\frac{dx}{1+2^{-\pi\operatorname{tg}x}}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{2+2^{\pi\operatorname{tg}x}+2^{-\pi\operatorname{tg}x}}{2+2^{\pi\operatorname{tg}x}+2^{-\pi\operatorname{tg}x}}\right)dx=\int_0^1 dx=1.$$

8.39. Пусть $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$, $\varepsilon>0$. Существует h: $h\in(0,1)$ такое, что для всех $t\in(0,h)$: $|f(t)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. При $x<h$:

$$\left|x\int_x^1\frac{|f(t)|}{t^2}dt\right|\le x\int_x^h\frac{|f(t)|}{t^2}dt+x\int_h^1\frac{|f(t)|}{t^2}dt<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{Mx}{h}.\ \text{При } x<\delta=\min\{h,\frac{\varepsilon h}{2M}\}$$

получаем оценку интеграла через сколь угодно малое положительное ε, что и приводит к требуемому результату.

Второе решение. Если интеграл ограничен, то предел ноль. Если неограничен, то по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^1\frac{|f(t)|}{t^2}dt}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{|f(x)|}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=0$.

8.40. Сделаем замену переменной $y = x - 1004$. Тогда

$$\int_0^{2008} x(x-4)(x-8)\cdot\ldots\cdot(x-2008)\,dx =$$

$$= \int_{-1004}^{1004} (y+1004)(y+1000)\cdot\ldots\cdot(y+4)y(y-4)\cdot\ldots\cdot(y-1000)(y-1004)\,dy =$$

$$= \int_{-1004}^{1004} \left(y^2-1004^2\right)\left(y^2-1000^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(y^2-4^2\right)\cdot y\,dy = 0,$$

так как интегрируем нечетную функцию по симметричному относительно нуля промежутку.

8.41. Пусть $I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |\ln x - \ln y| e^{-(x+y)}\,dx\,dy$. Так как подынтегральное выражение не меняется от замены x на y, а y на x, то интегрировать можно по области $D = \{(x,y): 0 < x < +\infty, 0 < y < x\}$, то есть $I = 2\int_0^{\infty} dx \int_0^{x} \ln\frac{x}{y} e^{-(x+y)}\,dy$.

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменной $y = tx$, $t \in (0,1)$ и изменим порядок интегрирования

$$I = 2\int_0^{\infty} dx \int_0^{1} \ln\frac{1}{t} e^{-(1+t)x} x\,dt = -2\int_0^{1} \ln t\,dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t)x} x\,dx$$

Вычислим внутренний интеграл по частям: $\int_0^{\infty} e^{-(1+t)x} x\,dx = \frac{1}{(t+1)^2}$.

$I = -2\int_0^{1} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\ln t}{-(1+t)^2}\,dt$. Вычисляя интеграл по частям, получим

$$I = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln t}{t+1} - \ln t + \ln(1+t)\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-t\ln t}{t+1} + \ln(1+t)\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = 2\ln 2.$$

8.42. Для точки (x_0, y_0) и угла α пусть

$g(t) = g(t, x_0, y_0, \alpha) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$. Тогда $\int_t^{t+1} g(\tau)\,d\tau = 0$ для всех t. Дифференцируя по t, получаем $g(t+1)=g(t)$. Для функции $f(x,y)$ ввиду произвольности x_0, y_0, α это означает, что значения $f(x,y)$ в любых двух точках, находящихся на расстоянии 1 друг от друга, совпадают. Любые две точки плоскости можно соединить ломаной, длина каждого звена которой равна 1. Следовательно, функция постоянна, а из равенства нулю интегралов следует, что $f(x,y)\equiv 0$.

8.43. а) Пусть

$$M(t)=\int_0^t f(x)dx,\ M_1(t)=\int_0^t xf(x)dx\ .$$

Тогда $$x(t)=\frac{M_1(t)}{M(t)},\ M'(t)=f(t),\ M_1'(t)=tf(t).$$

Дифференцируя первое равенство, получаем

$$x'(t)=\frac{M_1'(t)M(t)-M_1(t)M'(t)}{M^2(t)}=\frac{tf(t)M(t)-f(t)M_1(t)}{M^2(t)}=$$

$$=\frac{f(t)}{M(t)}\left(t-\frac{M_1(t)}{M(t)}\right)=\frac{M'(t)}{M(t)}(t-x(t))=(\ln M(t))'(t-x(t)).$$

Следовательно,

$$(\ln M(t))'=\frac{x'(t)}{t-x(t)}\ \Rightarrow M(t)=K\exp\left(\int_1^t\frac{x'(s)ds}{s-x(s)}\right).$$

Отсюда

$$f(t)=M'(t)=K\exp\left(\int_1^t\frac{x'(s)ds}{s-x(s)}\right)\frac{x'(t)}{t-x(t)}.$$

При $t=1$ получаем $f(1)=1=K\dfrac{x'(1)}{1-x(1)}$, откуда $K=\dfrac{1-x(1)}{x'(1)}$. Итак,

$$f(t)=\frac{1-x(1)}{t-x(t)}\cdot\frac{x'(t)}{x'(1)}\cdot\exp\left(\int_1^t\frac{x'(s)ds}{s-x(s)}\right).$$

б) Неравенство $x(t)\ge\dfrac{2}{3}t$ перепишем в виде $M_1(t)\ge\dfrac{2}{3}tM(t)$. При $t=0$, очевидно, имеет место равенство. Поэтому достаточно доказать, что при $t>0$:

$$M_1'(t)\ge\frac{2}{3}(tM'(t)+M(t)),$$

то есть неравенство

$$tf(t) \ge \frac{2}{3}(tf(t) + \int_0^t f(x)dx),$$

которое равносильно следующему $tf(t) \ge 2\int_0^t f(x)dx.$

Из выпуклости f следует, что $f(x) \le \frac{f(t)}{t}x$ для всех $x \in [0,t]$ (график лежит ниже хорды). Интегрируя, получаем:

$$\int_0^t f(x)dx \le \frac{f(t)}{t}\int_0^t xdx = \frac{1}{2}tf(t),$$

что и требовалось. Рассмотрим функцию g, график которой получен из графика f симметрией относительно прямой $x + y = t$ и сдвигом на $t - f(t)$. Она выпукла вниз, а центр тяжести ее подграфика на отрезке $[0, f(t)]$ имеет координаты $(f(t) - y(t), t - x(t))$, так как он подвергается тем же преобразованиям, что и подграфик f. Поэтому первое из доказываемых неравенств, справедливость которого уже установлена, для g записывается в форме, эквивалентной второму для f:

$$f(t) - y(t) \ge \frac{2}{3}f(t).$$

9.1. $\left.\begin{matrix} yy'' = -1 \\ y > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y'' < 0$, следовательно, график выпуклый вверх.

$y' = p(y); yp\frac{dp}{dy} = -1 \Rightarrow (y')^2 = -2\ln(C_1 y); y' = \pm\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}$. При $y = m; y' = 0(\max) \Rightarrow C_1 = \frac{1}{m};$ $y' > 0$ при $x \in (c;a);$ $y' < 0$ при $x \in (a,d);$ $y(a) = m$.

Решения: $x_1 = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}} + c$, так как $x_1 \underset{y\to 0}{\to} c;$ $x_2 = -\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}} + d$, так как $x_2 \underset{y\to 0}{\to} d;$

$$x_2 - x_1 = -2\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}} + d - c$$

$$x_2(m) - x_1(m) = 0 \Rightarrow d - c = 2\int_0^m \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}} \quad (1) \quad \Rightarrow x_2 - x_1 =$$

$$=2\int_y^m \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}};\ S=\int_0^m (x_2(y)-x_1(y))dy = 2\int_0^m dy\int_y^m \frac{dz}{\sqrt{-2\ln\frac{z}{m}}}=$$

$$=\int_0^m dz\int_0^z \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{z}{m}}}=\int_0^m \frac{zdz}{\sqrt{-2\ln\frac{z}{m}}} \underset{\sqrt{-2\ln\frac{z}{m}}=t}{=} \int_0^\infty m^2 e^{-t^2}dt = m^2\sqrt{\pi}.$$

Параметр m находится из соотношения (1): $m=(d-c)/(2\sqrt{2\pi})$. Значит, $S=(d-c)^2/(8\sqrt{\pi})$.

9.2. $\int_0^1 \varphi(\alpha x)d\alpha \underset{\alpha x=z}{=} \int_0^x \varphi(z)x^{-1}dz$, т.е. уравнение имеет вид $\int_0^x \varphi(z)dz = nx\varphi(x)$.

Пусть $F(x)=\int_0^x \varphi(z)dz,\ F=nxF',\ F=c|x|^{1/n}$. Дифференцируем: $\varphi=c|x|^{(1-n)/n}$.

9.3. $\sin y = z \Rightarrow z' = x - z \Rightarrow z = x-1+ce^{-x} = \sin y$.

9.4. $x^2-t^2=(x-t)^2+2t(x-t) \Rightarrow \frac{x^3}{3}=\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt + 2\int_0^x (x-t)t\varphi(t)dt$.

Делаем преобразование Лапласа:
$\frac{2}{p^4}=\frac{2}{p^3}\Phi(p)-\frac{2}{p^2}\Phi'(p) \Rightarrow \Phi(p)=cp+\frac{1}{2p}$, т.к. $\Phi(p)$ - изображение, то $\Phi(p)\underset{p\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow c=0$, то есть

$$\Phi(p)=\frac{1}{2p}\Rightarrow \varphi(x)=\frac{1}{2}.$$

Замечание. Можно решать по-другому. Чтобы избавиться от интеграла, продифференцировать, сократить на x и снова продифференцировать.

9.5. $y''+q(x)y=0 \underset{y\neq 0}{\Rightarrow} q(x)=-\frac{y''}{y} \Rightarrow \int_0^\omega q(x)dx = \int_0^\omega (-\frac{y''}{y})dx =$

$-\int_0^\omega \frac{1}{y}dy' = -\frac{y'}{y}\Big|_0^\omega - \int_0^\omega \left(\frac{y'}{y}\right)^2 dx < 0$ ибо внеинтегральный член равен нулю, поскольку $\omega -$ период.

9.8. Не может, так как $y''+py'+qy=\cos x + p(x)\sin x + q(x)(1-\cos x)\big|_{x=0}=1\neq 0$.

9.9. Из тождества $\left(e^{-ay^2}+e^{-b}(y')^2\right)'=-\left(a'e^{-a}y^2+b'e^{-b}(y')^2\right)$, где $a(x)=\int\limits_0^x H'_+(s)ds$ и $b(x)=a(x)-H(x)$ - две неубывающие функции. Видно, что стоящая в левой части тождества под знаком производной положительная функция $p(x)$ не возрастает. Следовательно, $y^2(x)\le p(x)e^{a(x)}\le p(0)e^{\int\limits_0^\infty H'_+(s)ds}$, т.е. функция $y(x)$ ограничена.

9.11. $y''=-bx'=bay$, $y=C_1e^{\sqrt{ab}t}+C_2e^{-\sqrt{ab}t}$, $x=-C_1\sqrt{\dfrac{a}{b}}e^{\sqrt{ab}t}+C_1\sqrt{\dfrac{a}{b}}e^{-\sqrt{ab}t}$. Из начальных условий, $y=\dfrac{1}{2}\left(y_0-\sqrt{\dfrac{b}{a}}x_0\right)e^{\sqrt{ab}t}+\dfrac{1}{2}\left(y_0+\sqrt{\dfrac{b}{a}}x_0\right)e^{-\sqrt{ab}t}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{2\sqrt{ab}t}=\dfrac{y_0+\dfrac{b}{a}x_0}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}x_0-y_0}$. Если дробь больше нуля, то существует такое t, то есть условие: $\sqrt{b}x_0>\sqrt{a}y_0$.

Второе решение. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b}{a}\dfrac{x}{y}\Rightarrow\int ydy=\int\dfrac{b}{a}xdx$, $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{b}{a}\dfrac{x^2}{2}=C$ - семейство гипербол, $C=\dfrac{y_0^2}{2}-\dfrac{b}{a}\dfrac{x_0^2}{2}$. Если $\dfrac{y_0^2}{2}-\dfrac{b}{a}\dfrac{x_0^2}{2}>0$, то с ростом t будет $x(t)\to 0$, т.е. выиграет вторая армия, если $\dfrac{y_0^2}{2}-\dfrac{b}{a}\dfrac{x_0^2}{2}<0$, то выиграет первая, если $y_0=\sqrt{\dfrac{b}{a}}x_0$, то ничья, т.к. оба обратятся в нуль.

9.13. $y'y^3+z'z^3=0\Rightarrow\dfrac{1}{4}\dfrac{d}{dx}\left(y^4+z^4\right)=0\Rightarrow y^4+z^4=c; y(0)=1;$ $z(0)=0\Rightarrow y^4+z^4=1$ - задает замкнутую кривую на плоскости $(y;z)$. Пусть $(f(x);g(x))$ - решение. Найдем скорость v движения точки по кривой: $v=(f'(x);g'(x))=(-g^3(x);f^3(x))\Rightarrow|v|^2=f^6(x)+g^6(x)==y^6+z^6$, эта функция рассматривается на замкнутой ограниченной кривой $y^4+z^4=1$. Она достигает там наименьшего значения. Но $y^6+z^6>0\Rightarrow y^6+z^6\ge c>0$ поскольку, если такого c не существует, то y^6+z^6 достигает значения 0 в некоторой точке x_1, но тогда $y=0$ и $z=0$, чего не может быть из-за $y^4+z^4=1$. Рассматриваемая кривая ограничена. Раз скорость больше или равна $\sqrt{c}>0$, то при некотором $x=x_0$ мы придем в начальную точку

$(y;z)=(1;0)$, но это означает, что мы получим ту же самую задачу Коши, следовательно, период равен x_0.

9.14. $z=\frac{1}{a}\sin ax;\ x_0=\frac{\pi}{a};\ a>0$. Рассмотрим $y''+a^2y=f(x)\le 0$. Решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y=a^{-1}\sin ax+a^{-1}\int\limits_0^x f(t)\sin a(x-t)dt$. Если $f(x)\le 0$, то при $0<x<\pi a^{-1};\ t<\pi a^{-1}\sin a(x-t)>0$, следовательно, интеграл меньше нуля, следовательно, $y\le a^{-1}\sin ax=z; y'(x)=\cos ax+\int\limits_0^x f(t)\cos a(x-t)dt$.

При $0<x<\pi(2a)^{-1}; y'(x)\le\cos ax$, т.к. $\cos(a(x-t))>0;\ f(t)\le 0$ (т.е. интеграл не превосходит нуля).

9.15. $0=y'(y'')^2+2y'(y'')^2-(1+(y')^2)y'''\Rightarrow 0=y'+$

$$+\frac{2y'(y'')^2-(1+(y')^2)y'''}{(y'')^2}=y'+\left(\frac{1+(y')^2}{y''}\right)'\Rightarrow C_1-y=\frac{1+(y')^2}{y''}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1y''-1=yy''+(y')^2=(yy')'\Rightarrow C_1y'-x+C_2=yy'=\frac{1}{2}(y^2)'\Rightarrow$$

$\Rightarrow C_1y-\frac{1}{2}x^2+C_2x=\frac{1}{2}y^2+C_3$ - окружность. Еще решение: $y''=0\Rightarrow y=C_1x+C_2$.

9.16. $y'=-y^2-k(x)$. Допустим, что y неограничена.

1) Пусть $y>a\Rightarrow y'<0\Rightarrow y$ убывает, следовательно, противоречие.

2) Пусть $y<-a$. Сравнить с $y_b'=-y_b^2+a^2$ - его решение $y_b=cth(-ax+b)$ имеет особенность в точке $x=\frac{b}{a};\ y_b\underset{x\to\infty}{\to}1;\ y_b'\underset{x\to\infty}{\to}0.$

9.20. Полагая $x=0$, находим $y(0)=1$. Последовательно дифференцируя уравнение и полагая $x=0$, получаем

$$y'(0)=0,\ 2y''(0)=-1,\ y'''(0)=0,$$

$$(1+C_4^2+C_4^4)y^{(4)}(0)=8y^{(4)}(0)=1,$$

$$(1+C_{2k}^2+C_{2k}^4+\ldots+C_{2k}^{2k})y^{(2k)}(0)=2^{2k-1}y^{(2k)}(0)=(-1)^k,y^{(2k)}(0)=\frac{(-1)^k}{2^{2k-1}},$$

$$y^{(2k+1)}(0)=0.$$

Теперь легко видеть, что

$$y(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k-1}(2k)!}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}-1=2\cos\frac{x}{2}-1.$$

Найденное решение можно найти и другим путем. Наложенное на $y(x)$ условие означает, что ряд Тейлора

$$y(x+t) = y(x) + y'(x)t + \ldots + \frac{y^{(n)}(x)}{n!}t^n + \ldots$$

Сходится к $y(x+t)$ для всех вещественных x,t. Подставляя $t = \pm x,$ и складывая ряды, получаем удвоенную левую часть уравнения. Значит, $y(x+x)+y(x-x) = 2\cos x,$ то есть $y(2x)-y(0) = 2\cos x,$

откуда $y(x) = \cos\frac{x}{2} - 1$. Проверка показывает, что эта функция удовлетворяет уравнению.

9.23. Очевидно, что при $t \in \mathrm{R}$ кривая $y = t\sin x + t^2$ отвечает поставленным условиям. Обратно, пусть функция удовлетворяет указанным ограничениям. Тогда функция $z(x) = y(x) + (y'(0))^2$ будучи решением уравнения $z'' + z = 0;\ z(0) = -z''(0) = 0$ имеет вид $z(x) = t\sin x \Rightarrow t = z'(0) = y'(0) \Rightarrow y(x) = z(x) + t^2 = t\sin x + t^2$.Теперь задача переформулируется так: через какие точки $(x; y)$ проходит единственная кривая вида $y = t\sin x + t^2$? Т.е. вопрос сводится к однозначной разрешимости квадратного уравнения $t^2 + t\sin x - y = 0,$ равносильной условию $\sin^2 x + 4y = 0$. Ответ: $y = -\left(\frac{1}{2}\sin x\right)^2$.

9.24. $z = c\sqrt{y_1 y_2} \Rightarrow z^{-1}(z'' + z^{-3}) = (c(y_1y_2)^{1/2})^{-1}\cdot$
$\cdot(c\cdot 4^{-1}\left[(f(x)y_1y_2\cdot 2 + 2y_1'y_2')2y_1y_2 - (y_1'y_2 + y_1y_2')^2 + c^{-3}\right]) =$
$= f(x) + (y_1y_2)^{-2}(-4^{-1}(y_1'y_2 - y_1y_2{}')^2 + c^{-4}) =$
$= f(x) + (y_1y_2)^{-2}(-4^{-1}(W(y_1;y_2))^2 + c^{-4})$.

Вронскиан решений y_1 и y_2: $W(y_1;y_2) = const \neq 0$, поэтому существует c, при котором второе слагаемое обращается в нуль, т.е. все выражение равно $f(x)$.

9.25. Если u,v - линейно зависимы, то утверждение очевидно. Пусть u,v - линейно независимы. Тогда $W(x) = uv' + u'v = c \neq 0$. Заметим, что $u'(\alpha)u'(\beta) < 0$. Действительно, при $u(x) > 0\ \forall x \in (\alpha;\beta)$ имеем $u'(\alpha) > 0;\ u'(\beta) < 0,$ т.к. если $u'(\alpha) < 0,$ то $u'(x) < 0$ в некоторой окрестности точки α, и тогда $u(x)$ строго убывает в этой окрестности, в частности, $u(x) < u(\alpha) = 0$, противоречие (аналогично $u'(\beta) < 0$). Так как $c = W(\alpha) = -v(\alpha)u'(\alpha),\ c = W(\beta) = -v(\beta)u'(\beta),$ то $v(\alpha)v(\beta) < 0,$ следовательно, по теореме Больцано существует $\gamma \in (\alpha;\beta)$: $v(\gamma) = 0$. Если $v(\gamma_1) = 0 = v(\gamma_2);\ \gamma_1,\gamma_2 \in (\alpha;\beta);$

$\gamma_1 < \gamma_2$, то, применяя доказанное выше (с перестановкой u, v), находим $\delta \in (\gamma_1;\gamma_2)$ такое, что $u(\delta) = 0$, что противоречит предположению.

9.26. $ydy = x(x^2 - 1)dx \Rightarrow y^2 = \left(x^2 - 1\right)^2 + c - 1$.

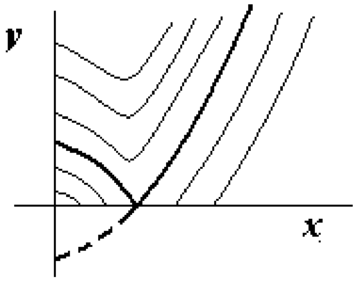


Рисунок симметричен относительно OX и OY. Жирная линия: $y^2 = \left(x^2 - 1\right)^2 - 1$.

9.27. Подстановка $x = e^t$ сводит уравнение к линейному. Методом вариации произвольных постоянных находится решение, которое с учетом ограниченности имеет вид $y = \dfrac{x}{3}\int\limits_0^x f(s)ds - \dfrac{1}{3x^2}\int\limits_0^x s^3 f(s)ds$. Ответ: $-\dfrac{m}{2} \le y \le 0$.

9.28. $\Phi(x) = (C_1 + C_2x + x^2)e^x$; $\Phi'(x) = (x^2 + (2 + C_2)x + C_1 + C_2)e^x > 0$; $\forall x \Rightarrow D = (2 + C_2)^2 - 4(C_1 + C_2) < 0 \Rightarrow C_1 > 1 + 4^{-1}C_2^2$. Найдем дискриминант D, для $C_1 + C_2x + x^2$: $D = C_2^2 - 4C_1 < C_2^2 - 4 - C_2^2 = -4 < 0 \Rightarrow \Phi(x) > 0$.

9.29. Выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. $y = 1; y = -1$ являются решениями. Значит, для начальных данных $-1 < y_0 = 1$ существует решение, которое будет заключено между этими. Оно задано на всей оси. Действительно, если существует максимальное значение $x = x_0$ для интегральной кривой, то имеем решение задачи Коши с условием в этой точке и получаем решение в точке, правее x_0, что противоречит предположению.

9.30. $\left|x(t_2) - x(t_1)\right| = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \dfrac{dx}{dt}dt\right| \le \int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\dfrac{dx}{dt}\right|dt \le \int\limits_{t_1}^{t_2}\dfrac{dt}{1+t^4} \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dt}{1+t^4} = M$ - сходится, то есть решение ограничено (отклонение в любой точке от фиксированного значения не превосходит M).

9.31. $x-u=v;\ \int_0^x e^u f(x-u)du = -\int_x^0 e^{x-v} f(v)dv = e^x \int_0^x e^{-v} f(v)dv =$

$= \sin x;\ \int_0^x e^{-v} f(v)dv = e^{-x}\sin x$. Продифференцируем

$e^{-x} f(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x;\ f(x) = \cos x - \sin x$.

Второе решение. Делаем преобразование Лапласа: $\dfrac{F(p)}{p-1} = \dfrac{1}{1+p^2}$, $F(p) = \dfrac{p-1}{1+p^2}$, $f(x) = \cos x - \sin x$.

9.32. $u \in C^2 \Rightarrow u'' = u' \Rightarrow u = C_1 + C_2 e^t;\ \int_0^1 u(s)ds = C_1 + C_2(e-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2 e^t = C_1 + C_2 e^t + C_1 + C_2(e-1) \Rightarrow C_1 = C_2 \dfrac{1-e}{2}$.

Ответ: $u(t) = C_2(\dfrac{1-e}{2} + e^t)$.

9.33. $y' = \rho\cos\varphi\sqrt{2-\rho^2} \le \rho\sqrt{2-\rho^2} \le 1;\ y(x) \le x$ при $x \ge 0$. Поскольку решение лежит в круге $\rho < \sqrt{2}$, то $y(x) \le x$ влечет $y < 1$. Отрицательные значения x исключаются из рассмотрения в силу четности $y(x)$.

9.34. Положим $t = e^x$. Тогда $y'_x = y'_t \cdot e^x$, $y''_{xx} = y''_{tt} \cdot e^{2x} + y'_t e^x$, и уравнение преобразуется к виду

$y''_{tt} + 16y = 0$.

Его решение:

$y = C_1 \sin 4t + C_2 \cos 4t$

$y = C_1 \sin\left(4e^x\right) + C_2 \cos\left(4e^x\right)$.

9.35. $(xy)'' - xy = 0$

$y = C_1 \dfrac{e^x}{x} + C_2 \dfrac{e^{-x}}{x}$

Первое условие равносильно $C_1 = -C_2$.

Второе условие $y = C_1\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$; $\dfrac{3}{\ln 16} = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{\ln 2} C_1$

$C_1 = \dfrac{1}{2}$. Ответ: $y = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$.

9.36. Имеем

$$\frac{dy}{dx}=1+x^2+y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\ge 1+y^2 \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2}\ge dx \Rightarrow \int_a^b dx=b-a\le$$

$\le \operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

9.39. Пусть b – скорость выпадения снега (увеличение толщины снежного покрова за единицу времени, *см/час*), c – производительность уборки снега (уменьшение толщины снега за единицу времени на единицу длины шоссе, *см км/час*) Пусть снег начался за t_0 часов до полудня. В момент времени t перед бригадой находится участок шоссе, покрытый слоем снега толщиной $b(t+t_0)$ *см*. А скорость *м* передвижения бригады по шоссе составляет $c/(b(t+t_0))$ *км/час*. За время T бригада удалится от начальной точки на расстояние

$$x=\int_0^T v\,dt=\int_0^T \frac{c}{b(t+t_0)}dt=\frac{c}{b}\left(\ln\left(t_0+T\right)-\ln t_0\right).$$

По условиям $x(2)=2,\quad x(4)=3$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{c}{b}\ln\dfrac{t_0+2}{t_0}=2\\[2ex] \dfrac{c}{b}\ln\dfrac{t_0+4}{t_0}=3\end{cases}$$

Из решения системы получим $t_0=\sqrt{5}-1=1$ *час*14*мин*.9,8*сек*.

9.38. Пусть $z=xt$. Тогда $f(x)=x^2+\frac{2}{x}\int_0^x f(z)dz \Rightarrow xf=x^3+2\int_0^x f(z)dz$.

Пусть $F(x)=\int_0^x f(z)dz,\ xF'-2F-x^3=0.$ Решение этого уравнения: $F(x)=x^3+Cx^2$. Тогда: $f=3x^2+2Cx$. Проверкой убеждаемся, что подходит любое C.

9.39. Уравнение переписывается в виде $\int_0^x tf(t)dt+x\int_x^1 f(t)dt=\lambda f(x)$. Двукратное дифференцирование дает: $\lambda f''(x)+f(x)=0$. Решая его, из краевых условий находим $\lambda=\frac{1}{(\pi n)^2}$. Поскольку было дифференцирование, нужна проверка. Краевым условиям удовлетворяет $f(x)=C\sin(\pi n x)$. После подстановки убеждаемся, что эта функция не подходит. Решений нет.

9.40. Предположим противное и пусть $x=a$ - точка максимума. Интегрируя уравнение в пределах от 0 до a, получим: $(y''+yy')\Big|_0^a=\int\limits_0^a(2y'^2+1)dx>0$. Противоречие, так как левая часть не больше 0 в силу краевого условия и того, что в точке a - максимум (то есть $y''(a)<0$).

9.41. Делим данное уравнение на $4y^3$: $\dfrac{y''}{y}=\dfrac{1}{4}x\left(\dfrac{y'}{y}\right)^3$. Обозначим $z=\dfrac{y'}{y}$, тогда $z'=\dfrac{y''y-y'^2}{y^2}=\dfrac{y''}{y}-\left(\dfrac{y'}{y}\right)^2=\dfrac{y''}{y}-z^2$, откуда $\dfrac{y''}{y}=z^2+z'$. Подставляя в уравнение, получаем: $z^2+z'=\dfrac{1}{4}xz^3$ или $z'=\dfrac{1}{4}xz^3-z^2$. Поделим почленно на z^2: $\dfrac{z'}{z^2}=\dfrac{1}{4}xz-1$. Обозначим $u=\dfrac{1}{z}$, откуда $\dfrac{z'}{z^2}=-u'$, тогда уравнение превращается в $u'=1-\dfrac{x}{4u}$. Введем $u=vx$. Тогда $u'=v'x+v$ и уравнение принимает вид $v'x+v=1-\dfrac{1}{4v}$ или $v'=-\dfrac{v^2-v+0{,}25}{vx}$, то есть $v'=-\dfrac{(v-0{,}5)^2}{vx}$, которое является уравнением с разделяющимися переменными и с начальным условием $v(1)=0{,}5$ так как $v=\dfrac{1}{xz}=\dfrac{y}{xy'}$. При таком начальном условии уравнение имеет единственное решение – постоянную функцию $v=0{,}5$, что означает, что $\dfrac{y}{xy'}=0{,}5$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными при начальном условии $y(1)=1$, получим $y=x^2$.

Заметим, что решение $y=x^2$ задачи Коши может быть угадано. Тогда для окончательного решения задачи необходимо проверить выполнение условий теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

9.42. Умножим первое уравнение системы на y:

$$\begin{cases} yy''+(y')^2=x'y+xy' \\ x'y+xy'=1 \end{cases}$$

Заметим, что $yy''+(y')^2=(y'y)'$ и $x'y+xy'=(xy)'$. Тогда $\begin{cases}(y'y)'=1\\(xy)'=1\end{cases}$.

Откуда из первого уравнения получаем $y'y=t+C_1$, значит, $ydy=(t+c_1)dt$, то есть $\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{(t+C_1)^2}{2}+C_2$, следовательно,

$y=\pm\sqrt{\left(t+C_1\right)^2+\tilde{C}_2}$. Тогда из второго уравнения находим x: $xy=t+C_3$, то есть $x=\dfrac{t+C_3}{y}$, что дает $x=\pm\dfrac{t+C_3}{\sqrt{\left(t+C_1\right)^2+\tilde{C}_2}}$.

9.43. Покажем, что существует функция $c(x)$ такая, что функции $\exp\left(\pm c(x)\right)$ удовлетворяют уравнению $y''+a(x)y'+b(x)y=0$. Подставляя $\exp\left(\pm c(x)\right)$ в это уравнение, получаем:

$$\pm c''+\left(c'\right)^2\pm ac'+b=0 \quad\Leftarrow\quad \pm c''+\left(c'\right)^2\mp\frac{b'}{2b}c'+b=0 \quad\Leftarrow$$

$$\pm\left(\frac{c''}{c'}-\frac{b'}{2b}\right)+c'+\frac{b}{c'}=0 \;\Leftarrow\; \pm\left(\ln\frac{c'}{\sqrt{-b}}\right)'+\sqrt{-b}\left(\frac{c'}{\sqrt{-b}}-\frac{\sqrt{-b}}{c'}\right)=0 \;\Leftarrow\; \frac{c'}{\sqrt{-b}}=1$$

$\Leftarrow$ $c(x)$ – некоторая первообразная функции $\sqrt{-b(x)}$ на X.

9.44. а) Нет. В точке касания кривых у двух решений одинаковые начальные данные (значение функции и ее производной). Значит, по теореме существования и единственности решения задачи Коши решение единственно. Что приводит к противоречию.

б) Да. Например, если $q\left(x\right)\equiv-1$, $y''-y=0$, $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$. Меняя c_1 и c_2, получим нужные решения.

в) Нет. В точке пересечения у графиков разный характер выпуклости, то есть разный знак второй производной, причем она не равна нулю. Но $y''\left(x_0\right)=-q\left(x_0\right)y\left(x_0\right)$, то есть $y''\left(x_0\right)$ у обоих графиков должны совпадать. Что приводит к противоречию.

9.45. Продифференцируем обе части по x:

$5y'+2y'y''=x+y'+x\left(1+y''\right)$, откуда $\left(y''+2\right)\left(2y'-x\right)=0$. Значит $y''=-2$ или $y'=\dfrac{x}{2}$. То есть, $y'=-2x+c$ или $y'=\dfrac{x}{2}$. Подставив полученные выражения в уравнение, получим два решения: $y=cx-x^2-\dfrac{c^2}{5}$, $y=\dfrac{x^2}{4}$.

9.46. $A(x,y)=2x^3y+x+1,\ A'_y(x,y)=B(x,y)=2x^3,\ D(x,y)=6xy^2,$

$$2A'_x(x,y)=C(x,y)=2(6x^2y+1),\ C'_x(x,y)=2D'_y(x,y)=24xy.$$

Выполнение этих условий показывает, что данное уравнение есть уравнение со вторым полным дифференциалом. Тогда общий интеграл:

$$\int_{y_0}^{y}(2x^3y+x+1)dy+\int_{x_0}^{x}dt\left(\int_{x_0}^{t}6\tau y^2d\tau\right)=$$

$$=x^3y^2+xy+y-x^3y_0^2-xy_0-y_0+x^3y_0^2=c_1x+c_2.$$

9.47. а) В данный момент времени в организме не может находиться более m граммов А, через 4 часа его станет $m/4$. Значит, промежутки времени между приемами не могут превышать четырех часов. Если принять в первый раз m граммов, а затем по $3m/4$ граммов через каждые 4 часа, то условия задачи будут выполнены.

б) Пусть $x(t), y(t)$ - массы веществ В и С соответственно, присутствующие в организме через время t после приема лекарства В. Тогда

$$\begin{cases} x'=-\dfrac{\ln 2}{12}x, \\ y'=-\dfrac{\ln 2}{24}y-\dfrac{1}{2}x'=-\dfrac{\ln 2}{24}(x-y), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x(t)=2^{-\frac{t}{12}}x_0, \\ y(t)=2^{-\frac{t}{24}}(x_0+y_0)-2^{-\frac{t}{12}}x_0. \end{cases} \qquad (1)$$

Стандартное исследование $y(t)$ на экстремум показывает, что $y(t)$ достигает максимума при $t=t_0$, где t_0 определяется из уравнения

$$2^{-\frac{t_0}{24}}=\frac{x_0+y_0}{2x_0}. \qquad (2)$$

Следовательно,

$$\max_t y(t)=(x_0+y_0)\frac{x_0+y_0}{2x_0}-x_0\left(\frac{x_0+y_0}{2x_0}\right)^2=\frac{(x_0+y_0)^2}{4x_0}. \quad (3)$$

По условиям задачи y_0 и $\max_t y(t)\le M$, откуда $x_0\le 4M$. Ответ: 4M г.

в) Пусть принимается постоянно по r граммов В. Обозначим через x_n, y_n массы веществ В и С, соответственно. Сразу после $n-$го приема. Тогда x_{n+1}, y_{n+1} можно найти, подставляя в (1) $t=24,\ x_n, y_n$ в качестве начальных данных и добавляя r к массе вещества В:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{4}x_n + r, \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} - \dfrac{1}{4}x_n = \dfrac{1}{2}y_n + \dfrac{1}{4}x_n, \end{cases}$$

Так как $x_1 = r$, то $x_2 = \frac{1}{4}r + r,\ x_3 = \frac{1}{16}r + \frac{1}{4}r + r,$ и т.д. С помощью метода математической индукции нетрудно доказать, что $x_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)r,$ откуда (таким же способом) $x_n + y_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)r$. Найдем наибольшее значение $y(t)$ между $n-$м и $(n+1)-$м приемами лекарства. Из найденных выражений для x_n и $x_n + y_n$ следует, что $x_n + y_n \le 2x_n,\ n \ge 1$.

$$\mu_n = \frac{(x_n + y_n)^2}{4x_n} = \frac{3}{4}\frac{(2^n - 1)^2}{4^n - 1}r = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{2}{2^n + 1}\right)r$$

(использовались найденные выражения для x_n и $x_n + y_n$). Для всех n должны быть выполнены неравенства $\mu_n \le M$. Это возможно тогда и только тогда, когда $r \le \frac{4}{3}M$. Ответ: $\frac{4}{3}M$.

9.48. Приведем основную часть решения. Сделаем замену $z = y - x,\ z' = y' - 1$. Пусть $p(z) = z^7 - az$. Тогда получим уравнение

$$z' = p(z) - 1. \qquad (1)$$

Продифференцировав по x, получим

$$z'' = p'(z)z' = p'(z)(p(z) - 1) \qquad (2)$$

Можно показать, что каждое решение (1)- монотонная функция. Если при этом $z(x)$ непостоянна, то она не принимает значений, равных корням многочлена $p(z) - 1$. Используя теорему существования и единственности решений ДУ, можно доказать, что множество значений любого непостоянного решения есть один из открытых интервалов, на которые разбивают числовую прямую корни уравнения $p(z) - 1 = 0$. Рассмотрим один из таких интервалов и выясним, какие особенности могут быть у решения исходного уравнения, множество значений которого равно этому интервалу. Так как $y' = p(z)$, то из существования экстремума у функции $y(x)$ следует, что в рассматриваемом интервале находится корень уравнения $p(z) = 0$, а так как $y'' = z''$, то точке перегиба функции $y(x)$ соответствует, согласно (2), экстремум многочлена $p(z)$ (напомним, что корни многочлена $p(z)-1$ являются концами интервалов, которые мы рассматриваем. Исключительный случай- $a=0$ (критической точке не соответствует экстремум $p(z)$, знак y'' не меняется). Таким образом, поведение решения зависит от того, каково множество значений функции $z(x)$, и какие особые точки многочлена $p(z)$ этот интервал содержит. В случае бесконечного интервала необходимо учитывать, что график $z(x)$ должен иметь вертикальную асимптоту (это легко проверить непосредственно для уравнения $z'=cz^7$, а в рассматриваемом случае можно использовать неравенство $|z'|>c|z^7|$ для некоторого $c\in(0,1)$ и во всех достаточно больших по модулю x).

10.1. $\left.\begin{matrix} yf'(xy)=f'(x) \\ xf'(xy)=f'(y)\end{matrix}\right\} \Rightarrow xf'(x)=yf'(y)$ - выполнено для любого y, следовательно, $xf'(x)=C\Rightarrow f'(x)=\frac{C_1}{x}\Rightarrow f(x)=\int\frac{C_1}{x}dx=C_1\ln x+C_2$. Подставив в уравнение, получаем $C_2=0$.

Второе решение. Т.к. $x\neq 0$, можно считать, что $f(x)=F(\ln x)$. Тогда $u=\ln x,\ v=\ln y,\ F(u+v)=F(u)+F(v),\ F'(u+v)=F'(u),\ F'(u)=c,$ $F(u)=cu+b$. $F(2u)=F(u),\ b=0,\ F(u)=cu,\ f(x)=c\ln x$. Заметим, что если искать решение на всей оси за исключением нуля, то $f(x^2)=2f(x)=2f(-x)$, то есть функция четная и ответ: $f(x)=c\ln|x|$.

10.2.

$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{1+x}$; $f(x)=f(1-\frac{1}{1+x})=f\left(1-\frac{1}{1+1-\frac{1}{1+x}}\right)=$ после n применений формулы: $f(x)=f\left(1-\frac{1+(n-1)x}{1+nx}\right)\underset{n\to\infty}{\to}f(0),$ т.к. $1+1-\frac{1}{1+x}=1-\frac{1+x}{1+2x}=\ldots,$ формула проверяется по индукции. Пусть $h\to\infty,\ f(x)$ - непрерывная функция, $uf(x)\underset{n\to\infty}{\to}f(0)$, но на любом шаге она равна $f(x)$, следовательно, $f(x)=f(0)$, т.е. ответ: $f(x)=const$.

Второе решение. $f(x)=F(1/x),\ x\neq 0$. Из непрерывности f в нуле следует существование предела F на бесконечности. $F(1/x)=F(1+1/x)$, то есть

F периодична с периодом 1. $F(1/x)=F(n+1/x)\underset{n\to\infty}{\to} f(0)$. Отсюда и следует постоянство F, то есть и f.

10.3. Ясно, что $f(0)=0$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Далее,

$$f(x)=x-f(\frac{2x}{3})=x-(\frac{2x}{3}-f(\frac{4x}{9}))=\ldots=$$

$$=x-\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2 x+\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} x+(-1)^n f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right)=$$

$\dfrac{1-(2/3)^n}{1+2/3}x+(-1)^n f\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n x\right)$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ и пользуясь непрерывностью f в нуле, получим $f(x)=\dfrac{3}{5}x,\ x\in\mathbb{R}$.

Второе решение. Ищем частное решение в виде $f(x)=Cx$, Из подстановки в уравнение находим $C=3/5$. Ищем решение в виде $f(x)=Cx+g(x)$, $g(x)+g(2x/3)$, $g(x)=(-1)^n g((2/3)^n x)$. Из непрерывности при $n\to\infty$ получаем, что предел существует, только если $g(0)=0$ (иначе из-за $(-1)^n$ предела нет, но он есть и равен $g(x)$. Итак, $g(x)\equiv 0$. $f(x)=3x/5$.

10.4. Продифференцируем равенство по x:

$\varphi'_{(x+y)}(x+y)\cdot\varphi(x-y)+\varphi'_{(x-y)}(x-y)\cdot\varphi(x+y)=2\varphi(x)\cdot\varphi'_x(x)$. Затем продифференцируем по y:

$$\varphi''_{(x+y)}(x+y)\cdot\varphi(x-y)-\varphi'_{(x+y)}(x-y)\cdot\varphi'_{(x-y)}(x-y)-$$

$-\varphi''_{(x-y)}(x-y)\cdot\varphi(x+y)+\varphi'_{(x+y)}(x-y)\cdot\varphi'_{(x+y)}(x+y)=0$. Значит,

$\dfrac{\varphi''_{(x+y)}(x+y)}{\varphi(x+y)}=\dfrac{\varphi''_{(x-y)}(x-y)}{\varphi(x-y)}$, т.к. первое отношение зависит только от $x+y$, а второе от $x-y$ и они равны для любых x,y, следовательно, $\dfrac{\varphi''(u)}{\varphi(u)}=c$.

а) $c>0$ $(c=m^2)\Rightarrow\varphi(u)=Ae^{mu}+Be^{-mu}\Rightarrow A=-B\Rightarrow$

$\Rightarrow\varphi(u)=A(e^{mu}-e^{-mu})$ подставим в начальное равенство.

б) $c<0$ $(c=-m^2)\Rightarrow\varphi(u)=E\cos mu+D\cos mu\Rightarrow$

$\Rightarrow\varphi(u)=D\sin mu$.

в) $c=0\Rightarrow\varphi(u)=Fu\Rightarrow F$ - любое.

10.5. Пусть $f(x)$ - искомая функция. Положим в условии 1) $y=x$, получим, что при любом $x\in R_+$ число $b=xf(x)$ является неподвижной точкой функции $f(x)$, то есть $f(b)=b$. Пусть a - произвольная неподвижная точка функции $f(x)$. Докажем, что $a=1$. Если при $n\geq 2$ имеем $f(a^{n-1})=a^{n-1}$, то $f(a^n)=f(a\bullet a^{n-1})=f(af(a^{n-1}))=a^{n-1}f(a)=a^n$, таким образом, по индукции все числа a^n $(n \in \mathrm{N})$ тоже являются неподвижными точками. Далее, $a = f(a) = f(1\cdot a) = f(1\cdot f(a)) = af(1)$ из $a \neq 0$ следует $f(1) = 1$. Затем $af(\frac{1}{a}) = f(\frac{1}{a}f(a)) = f(\frac{1}{a}\cdot a) = f(1) = 1$, откуда $f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$. Наконец, аналогично проверяется, что $f(\frac{1}{a^n}) = \frac{1}{a^n}$. Таким образом, все числа a^n $(n \in \mathrm{Z})$ - неподвижные точки. Из условия 2) заключаем, что $a = 1$ (если $a > 1$, то $a^n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, но $a^n = f(a^n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ по условию 2)). Аналогично, для $a < 1$ и $n \to \infty$. Итак, при любом $x \in \mathrm{R}_+$ имеем $xf(x) = 1$, откуда $f(x) = \frac{1}{x}$.

Обратно: легко проверить, что функция $\frac{1}{x}$ удовлетворяет условиям 1) и 2).

10.6. Для $M(x,y) \in \mathrm{R}^2$ будем писать $\Phi(M) = \Phi(x,y)$. Обозначим $\Phi_1(x) = \Phi(x,0)$; $\Phi_2(y) = \Phi(0,y)$. Тогда $\Phi(x,y) = \Phi_1(x) + \Phi_2(y) - \Phi(0,0)$. Подставляя это выражение для $\Phi(x,y)$ в соотношение $\Phi(x+p,y) + \Phi(x-p,y) + \Phi(x,y+p) + \Phi(x,y-p)$ имеем $\Phi_1(x+p) - 2\Phi_1(x) + \Phi_1(x-p) = \Phi_2(y-p) + \Phi_2(y) + \Phi_2(y-p)$. Умножим обе части на p^{-2} и $p \to 0$, получим для $\forall x,y \in \mathrm{R}$ соотношения $\Phi_1''(x) = \Phi_2''(y) = 2k$, где k - некоторое вещественное число, следовательно, $\Phi_1(x) = kx^2 + ax + \alpha$; $\Phi_2(x) = kx^2 + bx + \beta$, и в результате $\Phi(x,y) = k(x^2 + y^2) + ax + by + c$. Проверка показывает, что все такие функции обладают сформулированным свойством. Замечание: условие гладкости $\Phi(x,y)$ можно ослабить, заменив его непрерывностью.

10.7. $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x-k)$ (ряд сходится для любого x, т.к. в нем лишь конечное число ненулевых слагаемых). Действительно, $y(x+1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x+1-k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x-(k-1)) =$

$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(x-k) \Rightarrow y(x+1) - y(x) = f(x-0) = f(x)$. При $x < 0$, $y(x) = 0$, т.к. $f(x-k) = 0$ при $x < 0$ и $k \geq 0$. Пусть $z(x)$ - другое решение с теми же свойствами. Тогда $v(x) = y(x) - z(x)$ удовлетворяет уравнению $v(x+1) - v(x) = 0$, т.е. $v(x)$ - периодическая функция, поэтому если $v(x) = 0$ при $x < 0$, то $v(x) \equiv 0$, т.е. $y(x) \equiv z(x)$ (решение единственно).

10.8. $x + \frac{1}{x} = u \Rightarrow f(u) = u^2 - 2$. Это решение при $|u| \geq 2$, а при $|u| < 2$ функция любая, т.к. $u = x + 1/x$ не принимает таких значений (нет информации о функции.

10.9. Продифференцировав заданное в условии равенство, получаем: $f'(f'(x))f''(x) = -f'(x)$ (*). Так как $f'(x) > 0$, то $f(f'(f'(x))) = -f(f'(x)) = f(x)$, откуда по строгой монотонности: $f'(f'(x)) = x$. Значит, (*) сводится к $xf''(x) = -f'(x)$. Пусть $y = f'(x)$. Тогда для y получаем дифференциальное уравнение $xy'(x) = -y(x)$, решением которого является $y = \frac{c}{x}$, $c > 0$. Поэтому $f(x) = c\ln(ax)$. Подставив данную функцию в исходное равенство, находим: $a^2 = \frac{1}{c}$. Ответ: $f(x) = c\ln\frac{x}{\sqrt{c}}$.

10.10. $x = 0 \Rightarrow f(y) = f(0)f(y) \Rightarrow f(y) = 0$ (для всех y не подходит, так как при $x \neq 0$ будет $0 = -xy$ - неверно при $y \neq 0$) или $f(0) = 1$. Итак, $1 = f(0) = f(-y)f(y) + y^2$, то есть $f(y)f(-y) = 1 - y^2$. При $x = y$: $f(2y) = f^2(y) - y^2$. При $x = -2y$:

$f(-y) = f(-2y)f(y) + 2y^2 = f^2(-y)f(y) - y^2 f(y) + 2y^2 =$

$= f(-y)(1 - y^2) - y^2 f(y) + 2y^2 = f(-y) - y^2(f(y) - f(-y)) + 2y^2$. То есть

$y^2(f(y) - f(-y)) = 2y^2 \Rightarrow f(-y) = 2 - f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - y^2 = (2 - f(y))f(y) \Rightarrow \big(f(y) - 1 - y\big)(f(y) - 1 + y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) = 1 + y$ или $f(y) = 1 - y$.

10.11. При $x = 0$ и $y = 0$ имеем: $f(0) = f(0) + f(0)$, то есть $f(0) = 0$.

Перепишем уравнение в виде:

$$f(x+y) - f(x) = f(y) - f(0) + xy\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{3}\right).$$

Делим его на y: $\dfrac{f(x+y) - f(x)}{y} = \dfrac{f(y) - f(0)}{y} + x\left(\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{xy}{2} + \dfrac{y^2}{3}\right)$.

Переходим к пределу в равенстве при $y \to 0$:

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(y) - f(0)}{y} + \lim_{y\to 0} x\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{3}\right).$$

Отсюда $f'(x) = f'(0) + \dfrac{x^3}{3}$.

Обозначим $f'(0) = k$, тогда $f'(x) = k + \dfrac{x^3}{3}$, следовательно,

$$f(x) = \int\left(k + \frac{x^3}{3}\right)dx = kx + \frac{x^4}{12} + C.$$ Так как $f(0) = 0$, то $C=0$.

Найдем k из условия $f(2)=-2$: $2k+\dfrac{2^4}{12}=-2$ или $k=-\dfrac{5}{3}$. Следовательно, если решение существует, то оно должно иметь вид $f(x)=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{x^4}{12}$. Подставляя в уравнение, убеждаемся, что это действительно решение.

10.12. Положим в уравнении $z=x+1$. Получим $f\left(\dfrac{z-1}{z}\right)+2f(z)=z$. Если обозначить $y(z)=\dfrac{z-1}{z}$, то нетрудно проверить, что $y(y(z))=-\dfrac{1}{z-1}$ и $y(y(y(z)))=z$. Подставляя эти соотношения в начальное уравнение, получим следующую систему:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{z-1}{z}\right)+2f(z)=z \\ f\left(-\dfrac{1}{z-1}\right)+2f\left(\dfrac{z-1}{z}\right)=\dfrac{z-1}{z} \\ f(z)+2f\left(-\dfrac{1}{z-1}\right)=-\dfrac{1}{z-1} \end{cases}.$$

Решая ее, находим $f(z)=\dfrac{4}{9}z-\dfrac{1}{9(z-1)}-\dfrac{2(z-1)}{9z}$.

10.13. Решение аналогично 10.3. Ответ: $f(x)=x/3$.

10.14. Подстановка $\dfrac{x}{x+1}=t$. Ответ: $f(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$.

10.15. Замена $x\to\dfrac{1}{x}$. Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

10.16.Путь решения. Доказывать последовательно следующие утверждения: (1) $f(0)=0$, (2) $f(-x)=-f(x)$, (3) для натуральных n и любого x: $f(nx)=nf(x)$, (4) для рационального x: $f(x)=xf(1)$, (5) доказать, что f - линейная функция (на всей оси), используя монотонность и непрерывность.

10.17.Ход решения аналогичен предыдущей задаче.

10.18.Ответ: а) $f(x)\equiv 0$, б) $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ c, & x=0.\end{cases}$

10.19. $f(x)=x-f(\dfrac{1}{1-x})=x-\dfrac{1}{1-x}+f(\dfrac{x-1}{x})=$
$=x-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{x-1}{x}-f(x)$. Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{x-1}{x}\right)$.

10.20. Для любого x: $f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1)=$
$\sqrt{2}(\sqrt{2}f(x)-f(x-1))=2f(x)-\sqrt{2}f(x-1)$, то есть
$f(x+2)=f(x)-\sqrt{2}f(x-1)$. Значит, $f(x+4)=f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1)=$
$=f(x)-\sqrt{2}(f(x-1)+f(x+1))=-f(x)$. Следовательно, для любого x: $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$, т. е. f - периодическая функция с периодом 8. Пример: $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$.

10.21. Интегрируя первое уравнение, получаем: $\begin{cases} f(x)-f(x-1)=C \\ f(x)+f(x-1)=x \end{cases}$.

Отсюда: $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+C)$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы, находим, что $C=\dfrac{1}{2}$. Ответ: $f(x)=\dfrac{2x+1}{4}$.

10.22. При $x=y=0$ тождество дает $f(0)=2f(0)$, то есть $f(0)=0$. Для любого $x\in\mathbb{R}$ из тождества

$$f(x+y)-f(x)=f(y)+2xy,\quad (y\in\mathbb{R})$$

получаем:

$$f'(x)=\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{f(y)+2xy}{y}=$$
$$=2x+\lim_{y\to0}\frac{f(y)-f(0)}{y}=2x+f'(0).$$

Поэтому искомая функция обязана удовлетворять условию:

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(y)dy=\int_0^x(2y+f'(0))dy=x^2+f'(0)x.$$

$f'(0)$ может принимать произвольное значение. В этом убеждаемся, проверяя, что при любом вещественном a функция $f(x)=x^2+ax$ удовлетворяет заданному тождеству.

Ответ. $f(x)=x^2+ax$.

10.23. При $x=y=0$ тождество дает $f(0)(f(0)-1)=0$, то есть $f(0)=0$ или $f(0)=1$. Если $f(0)=0$, то из тождества $f(0)f(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, следует, что $f(x)\equiv0$, а это противоречит условию задачи. Поэтому $f(0)=1$. Докажем, что функция f дифференцируема на всей оси. Действительно, для любого $x\in\mathbb{R}$ имеем:

$$f(x+y)=f(x)f(y)\qquad (y\in\mathbb{R}),$$

откуда

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=f(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-1}{y}=f(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(0)}{y}.$$

Поскольку по условию функция дифференцируема в нуле, то существует и указанный предел, то есть производная в произвольной точке x, равная

$$f'(x)=f(x)f'(0).$$

Пусть $f'(0)=a$, тогда $f'(x)=af(x)$. Функция $f(x)$ дифференцируема любое число раз. Действительно,

$$f''(x)=af'(x)=a^2f(x),\quad f'''(x)=af''(x)=a^3f(x)$$

и так далее. То есть при любом x имеем

$$f^{(n)}(x)=a^nf(x).$$

10.24. Продифференцируем обе части тождества по h: $f'(x+h)=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{2}f''\left(x+\frac{h}{2}\right)$.

Положим $x=-\frac{h}{2}$, тогда $f'\left(\frac{h}{2}\right)=f'(0)+\frac{h}{2}f''(0)$. Обозначим $\tilde{x}=\frac{h}{2}$. Следовательно, $f'(\tilde{x})=f'(0)+\tilde{x}\cdot f''(0)$. То есть, функция $f'(\tilde{x})$ является линейной, а значит, функция $f(\tilde{x})$ - квадратичная, то есть, представима в виде $f(x)=ax^2+bx+c$. Подстановкой убеждаемся, что для функции такого вида тождество справедливо.

11.1. $\frac{2u_n}{n}\le u_n^2+\frac{1}{n^2}$, а $\sum\frac{1}{n^2}$ - сходится.

11.2. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\ldots=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+$ $+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)\Rightarrow a)$ $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots=$ $=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots-\frac{1}{4^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)\Rightarrow$ б).

11.3. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(\varphi_n-\psi_n)$; $\sum_{n=2}^{\infty}\varphi_n$ - сходится. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\psi_n$ - расходится ($\lim_{n\to\infty}n\psi_n=1$), то есть ряд расходится.

б) Для частичной суммы $t_{3n}=S_{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>S_{2n}+\frac{n}{\sqrt{4n-1}}$;

$S_{2n}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{2n}}$ ряд сходится, следовательно, S_{2n} стремиться к конечному числу, следовательно, $t_{2n}\to\infty$ и ряд расходится.

11.4. $A_{nm} = \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}} + \ldots + \frac{u_{n+m}}{r_{n+m}} \geq \frac{u_{n+1} + \ldots + u_{n+m}}{r_{n+1}} = \frac{r_{n+1} - r_{n+m}}{r_{n+1}} = 1 - \frac{r_{n+m}}{r_{n+1}}$. $\sum u_n$ - сходится для любого n существует m такое, что $\frac{r_{n+m}}{r_{n+1}} < \frac{1}{2}$, но тогда $A_{nm} > \frac{1}{2}$, т.е. нарушается условие сходимости.

11.5. Неотрицательных целых чисел между 0 и $10^m - 1$ ровно $99\ldots9$, которые записываются девятью цифрами $0,1,2,\ldots,8$, существует $\overline{A}_9^m = 9^m$. Чисел, записываемых без 9 между $10^{m-1} - 1$ и $10^m - 1$ существует $9^m - 9^{m-1}$, следовательно, сумма нашей части гармонического ряда меньше $\frac{9-1}{1} + \frac{9^2 - 9}{10} + \frac{9^3 - 9^2}{100} + \ldots = 8\left(1 + \frac{9}{10} + \frac{9^2}{10^2} + \ldots\right) = 80$.

11.7. $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n t}{n!} \operatorname{Im} e^{i(nt - \sin^2 t)} = \operatorname{Im} e^{-i\sin^2 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sin t\, e^{it})^n =$ $\operatorname{Im} e^{-i\sin^2 t} e^{\sin t(\cos t + i\sin t)} = \operatorname{Im} e^{\sin t \cos t} = 0$.

11.8. $\sum_{n=1}^{k} a_n = S_k$; $0 \underset{k\to\infty}{\leftarrow} S_{2k} - S_k = a_{2k} + a_{2k+1} + \ldots + a_k > k a_{2k}$. Значит $2k a_{2k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Для нечетных - из монотонности.

11.11. Ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg(n+1) - arctg(n)}{arctg(n)}$ сходится одновременно с рядом $-\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (arctg(n+1) - arctg(n)) = -\frac{2}{\pi} \lim_{n\to\infty} (arctg(n+1) - arctg 1) = -\frac{1}{2}$.

11.12. $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} a_k$. Рассмотрим суммы $S_{2^n} \leq (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{2^n}) S_2 \underset{1+x \leq e^x}{\leq} e^1 e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2^2}} \ldots e^{\frac{1}{2^n}} S_2 \leq$ $\leq \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) S_2 = eS_2 = 2ea_1$. Ряд с положительными членами, следовательно, S_n возрастает и ряд сходится, причем он ограничен той же константой.

11.16. $c_k > 0 \left(a_k > a_{k+1}\right)$. Действительно, если существует p, что $c_p \leq 0$, то ввиду убывания c_k, $c_k \leq 0$ для любого $k > p$. Т.е. $a_p \leq a_{p+1} \leq a_{p+2} \leq \ldots$, что противоречит сходимости ряда.

$$a_k a_{k+1} \le a_k^2 = \left(\sum_{p\ge k} c_p\right)^2 = 2\sum_{p\ge k} c_p \sum_{q\ge p} c_q - \sum_{p\ge k} c_p^2 \le 2\sum_{p=k}^{\infty} c_p a_p \le 2c_k \sum_{p=k}^{\infty} a_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le \left(a_{k+1}^{-1} - a_k^{-1}\right)^{-1} = \frac{a_k a_{k+1}}{c_k} \le 2\sum_{p=k}^{\infty} a_p \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

11.18. $\sigma_i = \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{f^{-1}(k)}{k^2} < f^{-1}\left(2^{i+1}\right) \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k(k-1)} = f^{-1}\left(2^{i+1}\right)\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}}\right) =$ $= \frac{f^{-1}\left(2^{i+1}\right)}{2^{i+1}}$. Достаточно доказать сходимость $\sum_k \frac{f^{-1}\left(2^k\right)}{2^k}$. Пусть $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Тогда $g^{-1}(t) = f^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$. Т.к. данный ряд сходится, то сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} g(x)dx$, следовательно, сходится $\int_0^1 g^{-1}(x)dx$ (симметрия относительно прямой $y = x$). Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)\frac{1}{2^{k+1}}$ дает значение площади ступенчатой фигуры, целиком лежащей в подграфике функции g^{-1}: $(0;1] \to \mathrm{R}$, и, следовательно, сходится. "Перегруппировка" членов (сравнить частичные суммы!) приводит к сходящемуся ряду: $\sum_k \frac{1}{2^{k+1}} g^{-1}\left(\frac{1}{2^k}\right) = \sum_k \frac{f^{-1}\left(2^k\right)}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_k \frac{f^{-1}\left(2^k\right)}{2^k}$.

11.19.

$$\left(\sum_{n=0}^{N} x_n\right)^2 = \sum_{n=0}^{N} x_n^2 + 2\sum_{n=0}^{N-1} x_n x_{n+1} + 2\sum_{n=0}^{N-2} x_n x_{n+2} + \ldots \le \sum_{n=0}^{N} x_n^2 + \sum_{n=0}^{N} x_n x_{n+1}$$

$+\sum_{n=0}^{N} x_n x_{n+2} + \ldots \le 2c\sum_{k=0}^{N} x_k - cx_0$. Т.е. $S_N^2 \le 2cS_N - cx_0$. Это неравенство выполнено только при $S_N \le c + \sqrt{c^2 - cx_0}$, т.е. последовательность S_N монотонна ($x_k \ge 0$) и ограничена, следовательно, имеет конечный предел.

11.20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} = ch\frac{x}{2}$.

11.21. Все члены ряда, начиная с $n=23$ будут иметь в показателе множитель $\ln|tg45^\circ|=0$, то есть $a_n=1$ при $n\geq 23$, следовательно, ряд расходится.

11.22. $$\frac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2n-1})}=\frac{1-x}{1-x^{2n}}=$$
$$=(1-x)\left(1+x^{2^n}+x^{2\cdot 2^n}+\ldots+x^{k2^n}+\ldots\right)= \qquad =1-x+x^{2^n}-x^{2^n+1}+x^{2-2^n}-$$
$$x^{2\cdot 2^n+1}+\ldots+x^{k\cdot 2^n}-x^{k\cdot 2^n+1}+\ldots$$

11.23. Функция удовлетворяет уравнению $y'''=y+1$ и условиям $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$. Решение: $y=(e^x+2e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2))/3$.

11.24. $f_n(x)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. Тогда $f_n(0)=0; f_n(x)=e^x-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$; $f_n'(x)=f_{n-1}'(x)$. Пусть $f_n(x_0)=0$ (ясно, что $x_0<0$). По теореме Ролля существует $x_1\in(x_0;0)$ такая, что $f_n'(x_1)=f_{n-1}(x_1)=0$. Продолжая, найдем $x_n\in(x_{n-1};0)$ так, что $f_0(x_n)=0$. Но $f_0(x)=e^x\neq 0$. Наша функция есть $\frac{f_n(x)}{x^n}$.

11.25. Если не выполнено: $\frac{a_n}{a_{n+1}}\to 1$, то ряд расходится. Пусть $\frac{a_n}{a_{n+1}}\to 1$. Но $\arccos x\sim\sqrt{2(1-x)}$ при $x\to 1-0$, следовательно, данный ряд сходится одновременно с $\sum\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$, т.е. с $-\sum\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$, частичная сумма которого $S_N=\ln a_1-\ln a_N$, следовательно, $\{a_n\}$- ограничена.

11.26. $\left(1-\frac{1}{p_m}\right)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_m^n}$. Перемножая эти ряды, получаем требуемое.

11.27. Разложение $\ln(1+x)$ в ряд дает для $a_n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-e=-\frac{e}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ряд расходится.

11.28. Пусть $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)m+1}+\ldots+\frac{1}{km-1}-\frac{x}{km}\right)$. Если данный ряд сходится для каких-то x и y, то последовательность $S_n(x)-S_n(y)=\frac{y-x}{m}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ также сходится. Но так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ расходится, это возможно тогда и только тогда, когда $x=y$. Следовательно, ряд сходится не больше, чем для одного x. Далее, как известно, последовательность $A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{nm} - \ln(nm)$ сходится к эйлеровой константе γ. Таким образом,

$$S_n(m-1) = A_n + \ln(nm) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{km} = A_n + \ln m + \left(\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$$ и

$S_n(m-1) \to \gamma + \ln m - \gamma = \ln m$ при $n \to \infty$. Следовательно, при $x = m-1$ ряд сходится к $\ln m$.

11.29. $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}(-1)} =$

$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$$

11.30. Имеем: $x_1 = \sin\alpha$, где $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}$;

Аналогично, $x_3 = \sin\frac{\alpha}{4}, \ldots$, и, по индукции, $x_n = \sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Заметим, что $x_n = \sin\frac{\alpha}{2^{n-1}} < \frac{\alpha}{2^{n-1}}$.

Тогда для $n \geq 2$ $\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} x_k < \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha}{2^{k-1}} < \frac{1}{2} + \alpha \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2} + \alpha = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, и его сумма не превосходит $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$, но

$0{,}5 + \frac{\pi}{6} < 0{,}5 + \frac{3{,}15}{6} = 1{,}025.$

11.31.

$$\left.\begin{aligned} 4u_{n-1} \cdot u_n &= u_n^2 + u_n \cdot u_{n-2} \\ 4u_n \cdot u_{n-1} &= u_{n-1} \cdot u_{n+1} + u_{n-1}^2 \end{aligned}\right\| \Rightarrow u_n^2 + u_n \cdot u_{n-2} = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + u_{n-1}^2 \Rightarrow u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} =$$

$= u_{n-1}^2 - u_n \cdot u_{n-2} = \ldots = u_2^2 - u_3 \cdot u_1 = -2$

так как $u_3 = 3$.

$$\operatorname{arcctg} 2u_n^2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2u_n^2} = \operatorname{arctg} \frac{2}{4u_n^2} = \operatorname{arctg} \frac{-(u_n^2 + u_{n-1} \cdot u_{n+1})}{u_{n+1} \cdot u_n + u_{n-1} \cdot u_n} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_n}{u_{n-1}}}{\frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} + 1}$$

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\alpha \in I$ четверти, $\operatorname{tg}\beta = \frac{u_n}{u_{n-1}}$, $\beta \in I$ четверти.

Тогда $\dfrac{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\dfrac{u_n}{u_{n-1}}}{\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\dfrac{u_{n+1}}{u_n}+1}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+1}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta),\ -\dfrac{\pi}{2}\le\alpha-\beta\le\dfrac{\pi}{2}.$

Отсюда $\operatorname{arctg}\dfrac{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\dfrac{u_n}{u_{n-1}}}{\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\dfrac{u_{n+1}}{u_n}+1}=\alpha-\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\operatorname{arctg}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}.$

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{2u_n^2}=\operatorname{arctg}\frac{u_{n+1}}{u_n}-\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}.$$

Последовательность $x_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ удовлетворяет уравнению $x_n+\dfrac{1}{x_{n-1}}=4$ и все ее члены положительны. Следовательно, x_n ограничена сверху и монотонно возрастает. Ее предел есть корень уравнения $t+\dfrac{1}{t}=4$. Или $t^2-4t+1=0$. $t=2\pm\sqrt{3}$. Т.к. $x_1=1,\ x_2=3$ и далее она возрастает, то ее предел равен $2+\sqrt{3}$.

Отсюда $\sum\limits_{1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2u_n^2}=\operatorname{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right)-\dfrac{\pi}{4}$. А если знать, что

$\operatorname{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}$, то ответ: $\dfrac{\pi}{6}$.

11.32.

$$a_n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(n+1)^{2m}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}\bigg|_{x=\frac{1}{(n+1)^2}}=$$

$$=-\ln(1-x)\Big|_{x=\frac{1}{(n+1)^2}}=-\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln n-2\ln\left(n+1\right)+\ln\left(n+2\right)\right)$$

Рассмотрим частную сумму ряда:

$$S_N=-(\ln 1-2\ln 2+\ln 3+\ln 2-2\ln 3+\ln 4+\ln 3-2\ln 4+\ldots$$
$$\ldots+\ln(N-1)-2\ln N+\ln(N+1)+\ln N-2\ln(N+1)+\ln(N+2))=$$
$$=\ln 2+\ln\frac{N+1}{N+2}$$

$$S=\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{N\to\infty}\left(\ln 2+\ln\frac{N+1}{N+2}\right)=\ln 2$$

11.33. Пример. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$ сходится, так как

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{1.01}}=-100\left((\ln 2)^{-0.01}-\lim_{n\to\infty}(\ln n)^{-0.01}\right)<\infty.$$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится.

11.34. Получим оценку снизу для частичной суммы ряда: $\sum_{j=1}^{n}a_j^{\,2}\ge\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})$, которая сразу же приводит к требуемому результату (ибо гармонический ряд расходится). Докажем лемму.

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - положительные последовательности такие, что $b_1>b_2>\ldots>b_n$ и $\sum_{j=1}^{k}a_j\ge\sum_{j=1}^{k}b_j$ для $k=1,2,\ldots n$. Тогда $\sum_{j=1}^{n}a_j^{\,2}\ge\sum_{j=1}^{n}b_j^{\,2}$.

Действительно, возьмем произвольное n и временно зафиксируем его. Положим $b_{n+1}=0$. Тогда $\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})\sum_{j=1}^{k}b_j\le\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})\sum_{j=1}^{k}a_j$,

$\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=j}^{k}(b_k-b_{k+1})\le\sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{k=j}^{k}(b_k-b_{k+1})$. Значит, $\sum_{j=1}^{n}b_j^{\,2}\le\sum_{j=1}^{n}b_ja_j$. Возведя обе части в квадрат и использовав неравенство Коши-Буняковского, $\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)^2\le\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^{\,2}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^{\,2}\right)$, получаем $\sum_{j=1}^{n}b_j^{\,2}\le\sum_{j=1}^{n}a_j^{\,2}$. Для завершения доказательства нужной оценки осталось выбрать

$b_j=\sqrt{j}-\sqrt{j-1}=\frac{1}{\sqrt{j}+\sqrt{j-1}}$. Тогда по доказанной лемме:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{\;2} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{j}+\sqrt{j-1})^2} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2\sqrt{j})^2} = \frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}),$$ что и требовалось.

11.35. $\frac{1}{\ln(n!)} = \frac{1}{\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln(n)} > \frac{1}{n\ln(n)}$. Но $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ расходится (интегральный признак Коши). Значит рассматриваемый ряд расходится по признаку сравнения.

11.36. Известно, что $\left|\cos\alpha - \cos\beta\right| \leq \left|\alpha - \beta\right|$ $(*)$. Пусть

$$N = \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{|x_2 - x_1|}} + 2\right) - 1.$$

$$\left|f(x_2) - f(x_1)\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\left|\cos(4^n x_2) - \cos(4^n x_1)\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|\cos(4^n x_2) - \cos(4^n x_1)\right|.$$

В первой сумме: $\left|\cos(4^n x_2) - \cos(4^n x_1)\right| \leq 4^n\left|x_2 - x_1\right|$, а во второй: $\left|\cos(4^n x_2) - \cos(4^n x_1)\right| \leq 2$. Поэтому

$$\left|f(x_2) - f(x_1)\right| \leq \left|x_2 - x_1\right| \cdot \frac{2^{N+1} - 2}{2 - 1} + 4 \cdot \frac{1}{2^{N+1}} \leq C\sqrt{\left|x_2 - x_1\right|},$$ так как по определению N: $2^{N+1} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{|x_2 - x_1|}}$.

11.37. Пусть $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}$.

$$\int_0^x S_N(x)dx = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\int_0^x \operatorname{tg}\frac{x}{2^k}dx = -\sum_{n=1}^{N}\ln\cos\frac{x}{2^n} = -\ln\prod_{n=1}^{N}\cos\frac{x}{2^n} =$$

$$= -\ln\frac{\sin\frac{x}{2^N}\cos\frac{x}{2^N}\cos\frac{x}{2^{N-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2^N}} = -\ln\frac{\sin x}{2^N\sin\frac{x}{2^N}}.$$ Следовательно,

$$S_N(x) = \left(-\ln\frac{\sin x}{2^N\sin\frac{x}{2^N}}\right)' = -ctg(x) + \frac{1}{2^N}ctg\frac{x}{2^N} \underset{N\to\infty}{\to} \frac{1}{x} - ctg(x).$$

Ответ: $S(x) = \frac{1}{x} - ctg(x)$.

11.38. Использовать тождество $\dfrac{n}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n+1}\right)$ и стандартное разложение для $\ln(1+t)$. Ответ: $-(e^x+e^{-x})\ln(1-e^{-x})/2-1/2-e^{-x}/4$, сходимость при $x>0$.

11.39. Рассмотрим частную сумму

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{e^{a_nx}+1}=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_ne^{-a_nx}}{e^{-a_nx}+1}=\sum_{n=1}^{N}\left(-\ln\left(1+e^{-a_nx}\right)\right)'=$$

$$=-\left(\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+e^{-a_nx}\right)\right)'=-\left(\ln\prod_{n=1}^{N}\left(1+e^{-a_nx}\right)\right)' \qquad (1)$$

Преобразуем произведение $\prod_{n=1}^{N}\left(1+e^{-a_nx}\right)=\dfrac{1-e^{-a_1x}}{1-e^{-a_1x}}\prod_{n=1}^{N}\left(1+e^{-a_nx}\right)=$

$$=\frac{1}{1-e^{-a_1x}}\left(1-e^{-a_1x}\right)\left(1+e^{-a_1x}\right)\left(1+e^{-a_2x}\right)\ldots\left(1+e^{-a_nx}\right)=\frac{1}{1-e^{-a_1x}}\left(1-e^{-2a_nx}\right)$$

Проинтегрируем равенство (1): $\quad -\int_x^{+\infty}S_N(x)dx=-\left(\ln\dfrac{\left(1-e^{-2a_nx}\right)}{1-e^{-a_1x}}\right).$

При $N\to\infty$, $x>0$: $\quad -\int_x^{+\infty}S_N(x)dx=-\left(\ln\dfrac{1}{1-e^{-a_1x}}\right)=\ln\left(1-e^{-a_1x}\right).$

После дифференцирования получаем: $S(x)=\dfrac{-(-a_1)e^{-a_1x}}{1-e^{-a_1x}}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\dfrac{1}{e^x-1}.$

11.40. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x^2\right)^n=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(x^2\right)^{n-1}+e^{x^2}=$$

$$=2x^2e^{x^2}+e^{x^2}=e^{x^2}\left(2x^2+1\right).$$

Значит, $e^{x^2}\left(2x^2+1\right)=e^{x^2}\left(5x+4\right)$, откуда $2x^2+1=5x+4$, то есть $x_1=3,\ x_2=-1/2$. Оба корня подходят, так как рассмотренный степенной ряд сходится при всех $x\in\mathbb{R}$.

11.41. Пусть $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$. Продифференцируем ряд четыре раза, получим $S^{(4)}(x)=S(x),\ S(0)=1,\ S'(0)=0,\ S''(0)=0, S'''(0)=0$. Общее решение дифференциального уравнения $S(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\sin x+c_4\cos x$.

Из начальных условий получаем систему $c_1+c_2+c_4=1$, $c_1-c_2+c_3=0,\ c_1+c_2-c_4=0,\ c_1-c_2-c_3=0$, откуда находим $c_1=\frac{1}{4}$, $c_2=\frac{1}{4}, c_3=0, c_4=\frac{1}{2}$. Окончательно $S(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{4}+\frac{1}{2}\cos x$.

Заметим, что ответ мог быть получен и простым комбинированием известных рядов для $\cos x$ и $\operatorname{ch} x$.

11.42. Пусть $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)m+1}+\ldots+\frac{1}{km-1}-\frac{x}{km}\right)$. Если данный ряд сходится для каких-то x и y, то последовательность $S_n(x)-S_n(y)=\frac{y-x}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ тоже сходится. Но так как $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ расходится, то это возможно тогда и только тогда, когда $y=x$. Следовательно, ряд сходится не более чем для одного значения x. Известно, что последовательность $A_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{nm}-\ln(nm)$ сходится. Действительно, $A_n=\sum_{k=1}^{nm}\frac{1}{k}-\ln(nm)=\sum_{k=1}^{nm}\frac{1}{k}-\int_1^{nm}\frac{dt}{t}$. Откуда ясно, что A_n монотонно возрастает. Кроме того, из этого же соотношения следует, что $A_n\le\sum_{k=1}^{nm}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{nm+1}<1$. То есть последовательность A_n монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно сходится (вообще-то известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\gamma=0{,}5772\ldots$ - постоянная Эйлера, но для данной задачи это несущественно). Рассмотрим

$$S_n(m-1)=A_n+\ln(nm)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{m-1}{km}=A_n+\ln m+\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

Значит, $S_n(m-1)\underset{n\to\infty}{\to}\gamma+\ln m-\gamma=\ln m$. Значит, при $x=m-1$ ряд сходится к $\ln m$.

11.43. Возьмем $\mu_1,...\mu_m \ge 0$ при $k = 0,1,...m$, $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{\mu_1 + ... + \mu_m}$. Тогда $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$ и можно воспользоваться неравенством Иенсена для выпуклой вниз функции:

$$g\left(\frac{\mu_1 t_1 + ... + \mu_m t_m}{\mu_1 + ... + \mu_m}\right) \le \frac{\mu_1 g(t_1) + ... + \mu_m g(t_m)}{\mu_1 + ... + \mu_m}.$$

Зафиксируем число $x, 0 < x < 1$. Функция $g(t) = x^t$ выпукла вниз на $[0,\infty)$, так как $g''(t) = x^t \ln^2 x$, возьмем $\mu_k = a_k, t_k = k, k = 0,...m$. Получим

$$x^r \le \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} a_k},\ r = \frac{\sum_{k=0}^{m} k a_k}{\sum_{k=0}^{m} a_k}.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и учитывая, что $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, получаем

$$x^s \le \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ s = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k < n.$$

Так как $0 < x < 1$, то $x^n < x^s \le \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, значит, решения у уравнения нет.

11.44. Ряд $S(x)$ можно почленно дифференцировать, так как ряд из производных также сходится равномерно, ибо отличается от исходного лишь одним членом и знаком.
$S'(x) = f'(x) - f''(x) + f'''(x) + ... = f(x) - S(x)$. Значит, $S'(x) + S(x) = f(x)$. Решение этого уравнения с начальным условием $S(0) = 0$ есть $S(x) = e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$. (1) Если $S(x) = x^2$, то из (1) находим $(x^2 e^x)' = f(x)e^x$. Откуда $f(x) = x^2 + 2x$.

12.1. Разложим рациональную дробь на простейшие $\prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x - x_i} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{x - x_j} \prod_{i \ne j} \dfrac{1}{x_j - x_i}$. Умножим левую и правую части равенства на x и найдем $\lim\limits_{x\to\infty} ... \Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i \ne j} \dfrac{1}{x_j - x_i}$.

Замечание. Можно заметить, что частичная сумма – это сумма всех вычетов функции, задаваемой произведением, то есть это 0.

12.2. Написав на обратной этикетке коробки 1 число -1, получим квадратную матрицу 8×8 с элементами ± 1. Переворачивание отвечает умножению строки (или столбца) на -1. При допустимых преобразованиях ранг сохраняется, однако ранг исходной матрицы равен 1, а требуется получить матрицу ранга 2. Ответ: это невозможно.

12.3. Фиксируем произвольную точку. Сферы с рациональными радиусами вокруг этой точки и центр раскрасим в один цвет, с иррациональными - в другой.

12.4. Соединим точки $M(x_1;y_1;z_1)$ и $N(x_2;y_2;z_2)$ отрезком прямой. Он принадлежит Ω, т.к. Ω выпукла: $x=(x_2-x_1)t+x_1;\ y=(y_2-y_1)t+y_1;\ z=(z_2-z_1)t+z_1;\ t\in[0;1]$.

Применим к $u(N)-u(M)$ теорему Лагранжа

$$|u(N)-u(M)|=\left|\frac{\partial u}{\partial x}x_t'+\frac{\partial u}{\partial y}y_t'+\frac{\partial u}{\partial z}z_t'\right|\Bigg|_{t=c}=$$

$$=\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x_2-x_1)+\frac{\partial u}{\partial y}(y_2-y_1)+\frac{\partial u}{\partial z}(z_2-z_1)\right|\Bigg|_{t=c}\le$$

$$\le\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\,\Bigg|_{t=c}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\le$$

$$\le a\left|\overline{MN}\right|.$$

12.5. “Мировые” линии в координатах (плоскость движения -время) - это прямые. Прямые a, b и c пересекаются попарно, следовательно, они лежат в одной плоскости. Прямая d пересекает b и c, следовательно, она лежит в этой плоскости и поэтому должна пересечься с a (кратные столкновения не происходят, а параллельность “мировых” линий исключается из-за различия скоростей).

12.6. $P(0)=1\Rightarrow P(x)=1+xQ(x)$, где $Q(x)$ - полином с целыми коэффициентами. $a_{n+1}=P(a_n)=1+a_nQ(a_n)$. Если a_{n+1} и a_n имеют общие делители, то и 1 должна иметь эти делители, следовательно, a_{n+1} и a_n взаимно просты. $a_{n+k}=P(P(...P(a_n)));P(P(...P(x)))=R_k(x);$

$$R_k(0)=\underbrace{P\left(P\left(...\underbrace{P(0)}_{=1}\right)\right)}_{=k}=\underbrace{P(P(...P(1)))}_{k-1}=1,$$ т.е. $R_k(x)=1+xH(x)$ и

отсутствие общих делителей у a_{n+k} и a_n устанавливается так же, как и у a_{n+1} и a_n.

12.7. Замена $x=\sin^2 t;\ \Phi(x)=4\sin^2 t(1-\sin^2 t)=\sin^2 2t;$

$$\Phi(\Phi(x))=4\sin^2 2t\left(1-\sin^2 2t\right)=\sin^2 4t;\ldots;\underbrace{\Phi(\Phi\ldots\Phi(x))}_{n}=$$

$$=\sin^2\left(2^n t\right);\int_0^1 \Phi_n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\left(2^n t\right)2\sin t\cos t dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1-\cos(2^{n+1}t)\right)\sin 2t dt=\frac{1}{2}+\frac{\cos((1+2^n)\pi)-1}{8(1+2^n)}-$$

$$-\frac{\cos((1-2^n)\pi)-1}{8(1-2^n)}.$$

12.8. $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$;$\{s$ - иррационально $\Rightarrow f(s)$ - иррационально$\}\Leftrightarrow$ $\{f(s)$ -рационально $\Rightarrow s$ - рационально $\}$.

При $x\to+\infty; f(x)\to+\infty$ с некоторого значения x_0 монотонно. Возьмем целое $p>x_0$. Найдем все рациональные корни уравнения $f(x)=p$, где p- целое. Пусть несокращающаяся дробь m/k -корень

$$\left(\frac{m}{k}\right)^n+a_1\left(\frac{m}{k}\right)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\frac{m}{k}+a_n=p\Rightarrow$$

$m^n+a_1m^{n-1}k+\ldots+a_{n-1}mk^{n-1}+(a_n-p)k^n=0$, пусть $k\neq 1$, все слагаемые, кроме первого, делятся на k (все коэффициенты целые), противоречие, следовательно, $k=1$. Таким образом, если $f(x)=p$, то x - целое. Рассмотрим точку $x+1$, тогда $f(x+1)=p+1$. Действительно, если $f(x+1)$ отлично от $p+1$, например, $f(x+1)=p+2$, то рассмотрим функцию $f(x)-1$, она будет иметь корень между x и $x+1$, причем этот корень целый (по предыдущему рассуждению), но целых точек между x и $x+1$ нет (x - целое). Значит, $f(x+1)=p+1$. Аналогично, $f(x+2)=p+2,\ldots$ и т.д. $f(x+n+1)=p+n+1$, т.е. $n+1$ - точка полинома степени, не превосходящей n, лежит на прямой, следовательно, $n=1$, что и требовалось.

12.9. Сравнить k и $m/\sqrt{2}$ - составляющие скорости вдоль диагонали.

44. 12.11. Пусть $z=x+iy$. Тогда

$z^2=x^2-y^2+2ixy, \bar{z}^2=x^2-y^2-2ixy$. Значит,

45. $$\frac{z^2}{a^2}+\frac{\bar{z}^2}{b^2}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)(x^2-y^2)+2i\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)xy=1,$$

46. Откуда

47. $$\begin{cases}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)xy=0,\\ \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)(x^2-y^2)=1.\end{cases}$$

48. При $a\neq b$решения этой системы уравнений задают две точки плоскости с координатами $\left(\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},0\right)$. При $a=b$ уравнение задает на

плоскости гиперболу $x^2-y^2=\frac{a^2}{2}.$

49. 12.12. а) Заметим, что $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\det X=y_{ij}-$ алгебраическое дополнение элемента x_{ij}. Поэтому по свойству алгебраических дополнений

50. $$\sum_{k=1}^{n}x_{ik}y_{kj}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \det X, & i=j\end{cases}$$

51. То есть $XY=(\det X)E$, где $E-$ единичная матрица.

52. б) Последовательным интегрированием получаем $\int_0^1 dx_{11}\int_0^1 dx_{12}...\int_0^1 \det X dx_{nn}=\det\left(\int_0^1 x_{ij}dx_{ij}\right)=\det(a_{ij}),$

53. где $a_{ij}=1/2,\ i,j=1,...n.$ Следовательно, $\det(a_{ij})=0.$

54. 12.13. Обозначим через $\rho(x)$расстояние от точки xна вещественной прямой $f(t)=$до ближайшей целой точки. Тогда квадрат расстояния от точки с координатами (x,y) до ближайшей точки с целыми координатами равен $\rho^2(x)+\rho^2(y)$. Пусть $(x(t),y(t))$ - координаты движущейся точки в момент времени t. Тогда $f(t)=\rho^2(x(t))+\rho^2(y(t))$, и требуется найти предел (если он существует)

55. $$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(\rho^2(x(t))+\rho^2(y(t)))dt.$$

56. а) Рассмотрим случай, когда точка движется по оси OX вправо с постоянной скоростью, то есть $x(t)=at+b,\ y(t)=0.$ Очевидно, $f(u)=u^2$ при $0\le u\le 1/2$ и $f(u)=(1-u)^2$ при $1/2\le u\le 1,$ $f(u+n)=f(u)$ при $0\le u\le 1,$ $n=\pm1,\pm2,\ldots$ Поэтому для всех натуральных n

57. $$\frac{1}{n}\int_0^n f(u)du=\int_0^1 f(u)du=\int_0^{1/2}u^2du+\int_{1/2}^1(1-u)^2du=\frac{1}{12}.$$

58. Обозначим через $N(T)$ целую часть числа $aT+b$. Тогда

59. $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\rho^2(at)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{aT}\int_0^{aT+b}f(u)du=$$

60. $$=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{N(T)}{aT}\frac{1}{N(T)}\int_0^{N(T)}f(u)du+\frac{1}{aT}\int_{N(T)}^{aT+b}f(u)du\right)=$$

61. $$=\lim_{T\to\infty}\frac{N(T)}{aT}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{N(T)}\int_0^{N(T)}f(u)du\right)+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{aT}\int_{N(T)}^{aT+b}f(u)du=\frac{1}{12}.$$

62. Мы воспользовались тем, что

63. $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{aT}\int_{N(T)}^{aT+b}f(u)du=0,\quad \lim_{T\to\infty}\frac{N(T)}{aT}=1.$$

64. Теперь уже ясно, что если точка движется по любой прямой, непараллельной оси OX или OY, то

65. $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{N(T)}^{T}f(u)du=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{N(T)}^{T}\rho^2(x(t))dt+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{N(T)}^{T}\rho^2(y(t))dt=\frac{1}{6}.$$

66. Если же точка движется по прямой $x=a$ или $y=a$, то

67. $$f(t)=\rho(x(t))+\min\{(a-[a])^2,(1+[a]-a)^2\},$$

68. $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{12}+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\min\{(a-[a])^2,(1+[a]-a)^2\}dt=$$

69. $$=\frac{1}{12}+\min\{(a-[a])^2,(1+[a]-a)^2\},$$

70. где $[a]-$ целая часть числа a.

71. б) Пусть точка движется с постоянным ускорением g по оси OX. Тогда пройденный за время t путь равен $v_0 t + gt^2/2$, где v_0 - начальная скорость, а среднее значение равно

72. $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \rho^2(v_0 t + \frac{gt^2}{2})dt = \lim_{T\to\infty}\frac{t_n}{T}\frac{1}{t_n}\left(\int_0^{t_1} f(t)dt + \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt\right) +$$

73. $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_n}^T f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\left(\int_0^{t_1} f(t)dt + \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt\right),$$

74. Где через $t_1, t_2, \ldots t_n$ обозначены последовательные моменты прохождения через целые точки до момента времени T: $0 < t_1 < \ldots < t_n$, $\quad n = [v_0 T + gT^2/2]$, $\quad v_0 t_k + g t_k^2/2 = k, k = 1, 2, \ldots n.$

Положим $x_n = \int_0^{t_n} f(t)dt.$ По теореме Штольца

75. $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{t_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n - t_{n-1}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\rho^2(v_0 t + \frac{gt^2}{2})dt =$$

76. $$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n - t_{n-1}}\int_{n-1}^{n}\frac{\rho^2(u)du}{\sqrt{2gu + v_0^2}},$$

77. где $u = v_0 t + gt^2/2$. Заметим, что

78. $$\frac{1}{12\sqrt{2gn + v_0^2}} < \int_{n-1}^{n}\frac{\rho^2(u)du}{\sqrt{2gu + v_0^2}} < \frac{1}{12\sqrt{2g(n-1) + v_0^2}}.$$

79. Отсюда, учитывая равенства

80. $$\frac{1}{t_n - t_{n-1}} = \left(\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2n}{g}} - \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2(n-1)}{g}}\right)^{-1} =$$

81. $$\frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2n}{g}} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2(n-1)}{g}}\right),$$

82. Получаем

83. $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{t_n} = \frac{1}{12}\lim_{n\to\infty}\frac{g}{2}\frac{\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2n}{g}} - \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2(n-1)}{g}}}{\sqrt{2gn + v_0^2}} = \frac{1}{12}.$$

84. Таким образом, в этом случае ответ совпадает с ответом в пункте а). Теперь уже нетрудно понять, что и в общем случае ответы в пунктах а) и б) совпадают.

12.14. Угол θ между стрелками увеличивается с постоянной скоростью $\rho^2(\theta) = a^2 - 2ab\cos\theta + b^2 \Rightarrow 2\rho\rho' = 2ab\sin\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow (\rho'(\theta))^2 = (ab\sin\theta)^2 \rho^{-2}(\theta)$, т.к. $\rho^2(\theta) = (a - b\cos\theta)^2 +$
$+ (b\sin\theta)^2 \ge (b\sin\theta)^2$, то $(\rho'(\theta))^2 \le a^2$, причем максимальное значение a^2 достигается при условии $b\cos\theta = a$, следовательно, искомое значение $\rho^2 = b^2 - a^2$.

12.15. $z = re^{i\varphi};\ ra = \left|r^2 e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right| = \sqrt{r^4 + 2r^2\cos 2\varphi + 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow r^4 + (2\cos 2\varphi - a^2)r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = 2^{-1}(a^2 - 2\cos 2\varphi) \pm$
$\pm\sqrt{a^4 - 4\cos 2\phi a^2 + 4\cos^2 2\phi - 4} \Rightarrow r^2_{\max} = 2^{-1}\left(a^2 + 2 + \sqrt{a^2 + 2a}\right);$

$r^2_{\min} = 2^{-1}\left(a^2 - 2 - \sqrt{a^4 - 4a^2}\right)$ при $a^2 > 4$ и $r^2_{\min} = 0$ при $a^2 \le 4$.

12.16. $z_k = \cos\varphi_k + i\sin\varphi_k;\ k = 1,2,3,\ldots\ (\varphi_k \in [0;\pi])$. Тогда $2(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3) = 3\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$ или

$$\sin\varphi_1\left(\cos\varphi_2\cos\varphi_3 - \frac{2}{3}\right) + \sin\varphi_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_3 - \frac{2}{3}\right) +$$
$$+ \sin\varphi_3\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \frac{2}{3}\right) = \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3.\ (*)$$

Предположим, что $\varphi_k \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right)\forall k$. Отсюда, $\cos\varphi_k\cos\varphi_b > \frac{3}{4}$

и левая часть в (*) больше $\frac{1}{12}\sum_k \sin\varphi_k \ge \frac{1}{4}\sqrt[3]{\prod_k \sin\varphi_k}$. Значит

по (*) $\prod_k \sin\varphi_k > \frac{1}{4}\sqrt[3]{\prod_k \sin\varphi_k}$, т.е. $\prod_k \sin\varphi_k > \frac{1}{8}$ и получим

противоречие (случай одного или двух нулевых φ_k
разбирается аналогично).

12.17. $|f(1) - f(0)| \ge 1 - 0 = 1$, значит, $f(0) = 0,\ f(1) = 1$ или $f(0) = 1,\ f(1) = 0$. Заметим, что вместе с $f(x)$ требуемым свойством обладает $g(x) = f(1 - x)$. Поэтому, не снижая общности, можно считать, что $f(0) = 0$, а $f(1) = 1$. Пусть $0 \le x \le 1$. Поскольку одновременно

$x \le |f(x) - f(0)| = f(x)$ и $1 - x \le |f(1) - f(x)| = 1 - f(x)$, т.е. $x \ge f(x)$, то $f(x) = x$. Ответ: $x,\ 1-x$.

12.19. $f(t) = t + b + \varepsilon \underset{t\to\infty}{\to} 0$. Выберем N так, чтобы при $t > N$ было $\varepsilon < 1$,

$$y_c = \left(\int_0^a f(t)dt\right)^{-1}\left(\int_0^a 2^{-1} f^2(t)dt\right) =$$

$$= \left(C_2(N) + \int_N^a (t + b + \varepsilon)dt\right)^{-1}\left(C_1(N) + \int_N^a 2^{-1}(t + b + \varepsilon)^2 dt\right) =$$

$$= \left(C_2(N) + 2^{-1}(t+b)^2\Big|_N^a + o(1)(a-N)\right)^{-1} \cdot (C_1(N) + 6^{-1}(t+b)^3\Big|_N^a + o(1)(a-N)^2)$$

$\Rightarrow \dfrac{y_c}{a} \underset{a\to\infty}{\to} \dfrac{1}{3}$. Так как $y_c = ka + b$, то $k = \dfrac{1}{3}$. Но при $a = 0$ получаем отрезок $[0;1]$, его центр тяжести $-\left(0;\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow y_c = \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{2}$.

12.23. Формула $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^{(k)} =$

$$= \frac{f^{(k)}(x)x^k - kx^{k-1}f^{(k-1)}(x) + k(k-1)x^{k-2}f^{(k-2)}(x) + \ldots + (-1)^k k!\, f(x)}{x^{k+1}}$$

доказывается по индукции. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^{(k)} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)x^k - kx^{k-1}f^{(k-1)}(x) + k(k-1)x^{k-2}f^{(k-2)}(x) + \ldots + (-1)^k k!\, f(x)}{x^{k+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(k+1)}(x)x^k}{(k+1)x^k} = \frac{1}{k+1}f^{(k+1)}(0).$$

Замечание. Можно получить результат, воспользовавшись формулой Тейлора.

12.24. $dA = dm \cdot gh = \rho Sghdh,\ A(H) = \int_0^H \rho Sghdh = \rho SgH^2 / 2.$

$A(H_1) = \rho SgH_1^2 / 2 = A(H)/3,\ H_1 = H/\sqrt{3},$
$A(H_2) = \rho SgH_2^2 / 2 = 2A(H)/3,\ H_2 = H/\sqrt{2/3}.$

12.25. $10^{221}=M,\ 10^{1989}=M^9$. Раскладываем в ряд:
$$\frac{M^9}{M+3}=M^8-3M^7+3^2M^6-3^3M^5+3^4M^4-3^5M^3+3^6M^2-3^7M+3^8-3^9/M+.$$
$3^8=81^2=6400+160+1$. Слагаемые, содержащие M в положительных степенях, делятся на сто, остальные – меньше 1, т.е. вычитается положительная поправка. Ответ: 60.

12.26. $\alpha_n<\dfrac{1}{2n}$ - очевидно. Пусть $\left|\sqrt{2}-\dfrac{m}{n}\right|\le\dfrac{1}{4n^2}$ для некоторых $m,n\in\mathrm{N}$.

Тогда $\left|2-\dfrac{m^2}{n^2}\right|\le\dfrac{\left(\sqrt{2}+\dfrac{m}{n}\right)}{4n^2}\le\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\dfrac{1}{4n^2}\right)}{4n^2}<\dfrac{1}{n^2}$, т.е. $\left|2n^2-m^2\right|<1$, что невозможно.

12.27. Найдем поперечное сечение тела плоскостью $y=u_0^2=const$. Это эллипс $x-u_0=u_0^2\cos v;\ z-u_0^2=(1-u_0)\sin v$, центр которого в точке $\left(u_0;u_0^2;u_0^2\right)$, а полуоси u_0^2 и $(1-u_0)$. $S=\pi u_0^2(1-u_0); V=\int\limits_0^1 S(y)dy=\int\limits_0^1 \pi y(1-\sqrt{y})dy=\dfrac{\pi}{10}$.

12.28. Пусть $\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{(1\text{-}e^z)^n},0\right)=R_n$. Вычет производной $\dfrac{ne^z}{(1\text{-}e^z)^{n+1}}$ равен нулю, т.к. производная ряда Лорана не содержит члена $\dfrac{1}{z}$. Сравнивая вычеты $\dfrac{ne^z}{(1-e^z)^n}=-\dfrac{n}{(1-e^z)^n}+\dfrac{n}{(1-e^z)^{n+1}}$, видим, что $R_n=R_{n+1}$. Т.к. $R_1=-1,\ R_n=-1$ для любого n.

12.29. Пусть событие A означает, что выбранные диагонали пересекаются. Тогда $P(A)=\dfrac{M}{N}$, где N - число всех исходов данного опыта, а M - число тех из них, которые благоприятствуют событию A. Очевидно, что $N=\dfrac{\left(C_n^2-n\right)\left(C_n^2-n-1\right)}{2}$, так как выбрать диагональ значит выбрать ее концы, то есть выбрать две любые вершины данного n-угольника, кроме соседних, а выбрать другую – значит, выбрать любые две вершины, кроме соседних и тех, которые определяют первую диагональ; $M=C_n^4$, так как любые 4 вершины взаимно однозначно определяют пару пересекающихся диагоналей. Значит, $P(A)=\dfrac{2C_n^4}{\left(C_n^2-n\right)\left(C_n^2-n-1\right)}$.

12.30. Если разложение e^{-1} оборвать на члене $(-1)^n/n!$, то остаточный член будет менее $1/(n+1)!$ Значит, ближайшее к $\dfrac{n!}{e}$ целое число A равно

$$A=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)=$$
$$=n!-n!+n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3-\ldots+(n-1)(-1)^{n-1}=$$
$$=(n-1)\left(n(n-2)\ldots 3+\ldots+(-1)^{n-1}\right).$$

Откуда следует, что число A делится на $n-1$ нацело.

12.31. Пусть $a\neq 0$. Тогда $\left|az^n+bz^k\right|=\left|az^n\right|\left|1+\dfrac{b}{a}z^{k-n}\right|$. По принципу максимума модуля максимум достигается на границе, то есть при $|z|=1$. Если $n\neq k$, то максимум равен $|a|(1+\left|\dfrac{b}{a}\right|)=|a|+|b|$. Если $n=k,$ то максимум будет $|a+b|$. Аналогично рассматривается случай $b\neq 0$. При $a=b=0$ ответ очевиден.

Ответ. $|a|+|b|$, $n\neq k$ и $|a+b|$, $n=k$.

12.32. Предположим, что луч AA_0, касательный к графику $y=f(x)$ в точке A_0, уходит вправо неограниченно далеко. Обозначим через $A_0, A_1, A_2,\ldots$ точки отражения луча от графика функции, а через $x_0, x_1, x_2,\ldots$ абсциссы этих точек, через $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\ldots$.- углы падения луча на ось OX .Тогда для абсцисс точек $A_k, k=0,1,\ldots$ имеем

$$x_{k+1}=x_k+(f(x_k)+f(x_{k+1}))ctg\varphi_{k+1},\ k=0,1,\ldots \qquad (1)$$

Кроме того, $\varphi_{k+1}=\varphi_k+2arctg(-f'(x_k)),\ k=0,1,\ldots,$ а так как $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\infty,$ то последовательность φ_k возрастает и ограничена сверху числом $\pi/2$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi\leq\pi/2$. Отсюда вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f'(x_k)$.

Действительно, используя теорему Лагранжа о среднем для функции tgx: $tg\alpha - tg\beta = \dfrac{1}{\cos^2\gamma}(\alpha-\beta), \alpha<\gamma<\beta,$ имеем

$$-\sum_{r=0}^{\infty} f'(x_k) = \sum_{r=0}^{\infty} tg\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2} =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\cos^2\alpha_k}\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2} = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\varphi_{k+1}-\varphi_k\right) = \varphi-\varphi_1,$$

где $0<\alpha_k<(\varphi_{k+1}-\varphi_k)/2<\pi/4$. С другой стороны, $\theta_k=(\varphi_{k+1}-\varphi_k)/2-$ острый угол между касательной к графику функции $f(x)$ в точке A_k и осью OX, и

$$tg\theta_k = -f'(x_k) > \frac{f(x_k)-f(x_{k+1})}{x_{k+1}-x_k}.$$

Используя равенство (1), получаем

$x_{k+1}-x_k = cng\varphi_{k+1}(f(x_k)+f(x_{k+1})) < ctg\varphi_1(f(x_k)+f(x_k)) = 2f(x_k)ctg\varphi_1.$

Теперь имеем

$$-\sum_{r=0}^{\infty} f'(x_k) > \sum_{r=0}^{\infty}\frac{f(x_k)-f(x_{k+1})}{x_{k+1}-x_k} >$$

$$> \frac{1}{2ctg\varphi_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f(x_k)-f(x_{k+1})}{f(x_k)} = \frac{1}{2ctg\varphi_1}\sum_{r=0}^{\infty}\left(1-\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)}\right).$$

Известно, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k)$, $0<\alpha_k<1,$ расходится, если $\prod_{r=1}^{\infty}\alpha_k=0.$В нашем случае

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_{n+1})}{f(x_1)} = 0,$$

то есть ряд $\sum_{r=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{f(x_{k+1})}{f(x_k)}\right)$ расходится. Поэтому расходится и ряд

$\sum_{r=0}^{\infty} f'(x_k)$. Таким образом, предположение о неограниченном

распространении луча AA_0 вправо привело к противоречию. Легко заметить, что все другие лучи, исходящие из точки A_0, проходят левее луча AA_0, поэтому найдется такое $N>0$, что часть области, расположенная правее прямой $x=N$ не будет освещена.

13.1.1. $x^2=([x]+\{x\})^2=[x]^2+2[x]\cdot\{x\}+\{x\}^2=[x]^2+200+\{x\}^2$. $0<\{x\}^2<1$. Учитывая, что 200 и $[x]^2$-целые числа, получаем $[x^2]=[x]^2+200$, то есть $[x^2]-[x]^2=200$.

13.1.2 Из условия следует, что $[a]\cdot\{a\}=100$. Найдём целую и дробную части числа a^2: $a^2=([a]+\{a\})^2=[a]^2+2\cdot[a]\cdot\{a\}+\{a\}^2=[a]^2+200+\{a\}^2$. Поскольку $[a]^2+200$-целое, а $0\le\{a\}^2<1$, то $[a^2]=[a]^2+200$ и $\{a^2\}=\{a\}^2$.Следовательно, $f(a^2)=\lg([a^2]\cdot\{a^2\})=\lg(([a^2]+200)\cdot\{a\}^2)>\lg([a]\cdot\{a\})^2=4$

13.1.3. Первый способ.

$$[\sqrt{2n}+\frac{1}{2}]=1511\Leftrightarrow 1511\le\sqrt{2n}+\frac{1}{2}<1512\Leftrightarrow 1510{,}5\le\sqrt{2n}<1511{,}5\Leftrightarrow$$

$$2281610{,}25\le 2n<2284632{,}25\Leftrightarrow 1140805{,}125\le n<1142316{,}125.$$

Учитывая, что n - натуральное число, имеем: $1140805<n\le 1142316$. Количество натуральных решений этого неравенства равно: 1142316-1140805=1511.

Второй способ.

Последовательность, заданная в условии, в явном виде записывается так: 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; …,поэтому число 1511 встретится в ней 1511 раз. Для доказательства достаточно использовать, что $1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$, и проверить, что член последовательности с номером $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ не превышает n, а следующий член уже не меньше, чем $n+1$. Действительно,

$$a_{0,5n\cdot(n+1)}=[\sqrt{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{2}]<[\frac{n+(n+1)}{2}+\frac{1}{2}]+[n+1]=n+1, \text{ то есть } a_{0,5n\cdot(n+1)}\le n;$$

$$a_{0,5n\cdot(n+1)+1}=[\sqrt{n\cdot(n+1)+2}+\frac{1}{2}]=[\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}+\frac{1}{2}]\ge[n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}]=[n+1]=n+1.$$

13.1.4. Будем считать, что $a>0$. Тогда все возникающие в задаче числа неотрицательны. Если $a<\frac{N-1}{N}$, то $[Na]<N-1$, и поэтому среди чисел $[a],\dots,[Na]$ есть совпадающие. Итак, $a\ge\frac{N-1}{N}$. Но тогда и $\frac{1}{a}\ge\frac{N-1}{N}$ (второе условие аналогично первому с заменой a на $\frac{1}{a}$), так что $\frac{N-1}{N}\le a\le\frac{N}{N-1}$. Легко видеть, что все числа из этого интервала годятся. Случай $a<0$ рассматривается аналогично.

13.1.5. Первая сумма больше второй на $m-n$. Действительно, докажем, что после отбрасывания одного крайнего слагаемого в каждой сумме (т.е. чисел m и n) оставшиеся суммы S_1 и S_2 уже будут равны. Рассмотрим для этого все целые точки в прямоугольнике $m\times n$, левый нижний угол которого расположен в начале координат $O: 1\le x\le m-1, 1\le y\le n-1$. Всего их

$(m-1)(n-1)$, причем ровно половина – над диагональю, выходящей из O, и ровно половина – под ней (на диагонали нет целых точек в силу простоты m и n). Но количество целых точек с абсциссой k равно $[k\cdot\frac{m}{n}]$ (то же верно и для ординаты y). Следовательно, $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$.

13.2.1. Область определения: $x \in \bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(n, n+1)$. В обозначениях уравнения (*):

$$f(x) = x + \frac{1}{x},\ h(x) = [x]^2,\ g(x) = \{x\}.$$

$\psi(x) = \dfrac{1}{x}$ - инвариант $f(x)$, так как

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1/x} = \frac{1}{x} + x = f(x).$$

Получаем два уравнения:

$$[x]^2 = \{x\} \tag{1}$$

$$\frac{1}{[x]^2} = \{x\}. \tag{2}$$

Решение (1) есть $x = 0$, не принадлежащее области определения.
Рассмотрим (2):

$$\frac{1}{[x]^2} = \{x\},\ x = [x] + \{x\},\ \text{откуда } x = n + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Но при таком способе решения могут быть потеряны корни. Попробуем их найти. Ими могут быть только корни уравнения $\{x\}^2 = 1$, но таковых нет.

Поэтому, ответ - $x = n + \dfrac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

13.2.2. В обозначениях (*):

$$\begin{aligned} &f(x) = (x-a)^{2n} + (x-b)^{2n} \\ &g(x) = x \\ &h(x) = b \end{aligned}.$$

Так как $f(a+b-x) = f(x)$ для любого x, то прямая $x = \dfrac{a+b}{2}$ - ось симметрии графика $f(x)$. Найдем производную $f'(x) = 2n(x-a)^{2n-1} + 2n(x-b)^{2n-1}$, которая строго возрастает, и

$f'(a+b-x)=f'(x), f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$. Следовательно, $f'(x)>0$ при любом $x>\dfrac{a+b}{2}$. Следовательно, уравнение равносильно

совокупности $\left[\begin{array}{l} x=b \\ a+b-x=b \end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l} x=b \\ x=a \end{array}\right.$.

13.2.3. Область определения: $x\neq \pi/2+n\pi,\ x\neq n\pi/3,\ n\in\mathbb{Z}$.

$$f(x)=(a+\sin^n x)/\cos^m x,\ g(x)=x, h(x)=\pi/2-3x.$$

Так как $f(\pi+x)=-f(x)$, то функция $\psi(x)=\pi+x$ - антиинвариант $f(x)$, а данное уравнение равносильно на ОДЗ уравнению $f(g(x))=f(\pi+h(x))$. Функция $f(x)$ – четная, периодическая, с основным периодом 2π, и ее производная

$$f'(x)=\left(n\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+m\cos^{m-1}x\sin x(a+\sin^n x)\right)/\cos^{2m}x=$$
$$=\sin x\left(n\sin^{n-2}x\cos^2 x+m(a+\sin^n x)\right)/\cos^{m+1}x.$$

Следовательно, $f'(x)>0$ при $x\in[0;\pi/2)\cup(\pi/2;\pi]$. Значит функция $f(x)$ строго возрастает на $[0;\pi/2)$ от 0 до ∞ и на $(\pi/2;\pi]$ от $-\infty$ до -1. То есть, $f(x)$ – взаимно-однозначная на $[0;\pi/2)\cup(\pi/2;\pi]$, и данное уравнение равносильно семейству уравнений

$x=3\pi/2-3x+2\pi k,\ -x=3\pi/2-3x+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Окончательное решение: $x=3\pi/8+\pi k/2,\ -x=3\pi/4+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

13.3.1. Приняв $f(x)=1+3/x$, замечаем, что уравнение имеет вид (1). Так как суперпозиция двух дробно-линейных функций является дробно-линейной функцией, то $f_n(x)=(ax+b)/(cx+d)$, где a,b,c,d - некоторые числа. При этом может оказаться, что функция $f(x)$ тождественно равна x. В этом случае любое число будет решением исходного уравнения. Ясно, что $x=1$ не является решением заданного уравнения ($f_n(1)>1$), поэтому $f_n(x)\not\equiv x$. Отсюда следует, что решение исходного уравнения сводится к решению или квадратного, или линейного уравнения и, значит, не может иметь более двух решений. Уравнение (2) при этом записывается в виде $1+3/x=x$ и его решениями (по утверждению 1) будут $x_{1,2}=\left(1\pm\sqrt{13}\right)/2$.

13.3.2. Система имеет вид (4), причем $f(x)=\sin x$. Очевидно, что если упорядоченный набор $(x_1,x_2,\dots x_n)$ будет решением системы, то $|x_i|\leq 1$ при всех $i=1,2,\dots,n$. Поэтому можем считать, что $D(f)=[-1;1]$. Тогда функция $f(x)$ будет возрастающей и, следовательно, по утверждению 4 уравнение (1) в данном случае равносильно уравнению (2), то есть уравнению

$$\sin x = x \ . \qquad (6)$$

Ясно, что $x = 0$ - решение уравнения (6). Поскольку функция $h(x) = x - \sin x$ - строго возрастающая ($h'(x) = 1 - \cos x$), то других решений оно иметь не может. Отсюда следует, что заданная система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$.

13.3.3. Систему легко записать в виде (4), если считать, что $f(x) = 5/2 - [x]$. Функция $f(x)$ - невозрастающая, поэтому по утверждению 6 уравнение (1) в данном случае при нечетном n равносильно уравнению (2), а при четном n - уравнению (3). Для их решения построим функции $f(x)$ и прямую $y = x$, учитывая, что $f(x) = 5/2 - [x]$, если $[x] = k,\ k \in \mathbb{Z}$. На рисунке видно, что график функции $f(x)$ пересекает прямую $y = x$ в точке $(3/2;3/2)$. Отсюда следует, что $3/2$ - решение уравнения (2). Точки $A(k + 1/2; 5/2 - k)$ и $B(5/2 - k; k + 1/2)$ симметричны относительно прямой $y = x$ и лежат на графике функции $f(x)$. Очевидно, что таких точек нет при нечетном n. Следовательно, по геометрической интерпретации решений уравнений (3) числа $x_k = k - 1/2, k \in Z$, образуют множество его решений. Отсюда получаем, что если n - нечетное число, то заданная система имеет единственное решение - $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 3/2$, если же n - четное, то система имеет бесконечно много решений $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, где $x_{2i-1} = k + 1/2, x_{2i} = 5/2 - k, i = 1,2,\ldots,n/2,\ k \in \mathbb{Z}$.

13.4.1. Здесь $f(x) = [x] - \{x\},\ g(x) = x^2 - 1$.

$f(x) = y = 2n - x, n \le x < n+1, n \in \mathbb{Z}.$

Симметричный относительно $y = x$ график (см. рис.1): $y = 2n - x, n-1 < x \le n.$ $\begin{cases} x^2 - 1 = 2n - x, \\ n-1 < x \le n. \end{cases}$

При $n \le 1$ и $n > 3$ решений нет,

при $n = 2$: $\begin{cases} x^2 + x - 5 = 0, \\ 1 < x \le 2. \end{cases}$ $x = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$,,

при $n = 3$: $x = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$.

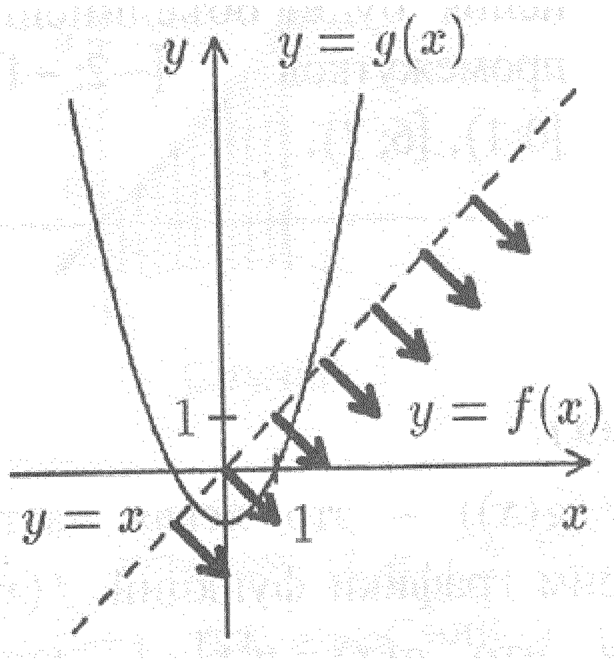


Рис. 1.

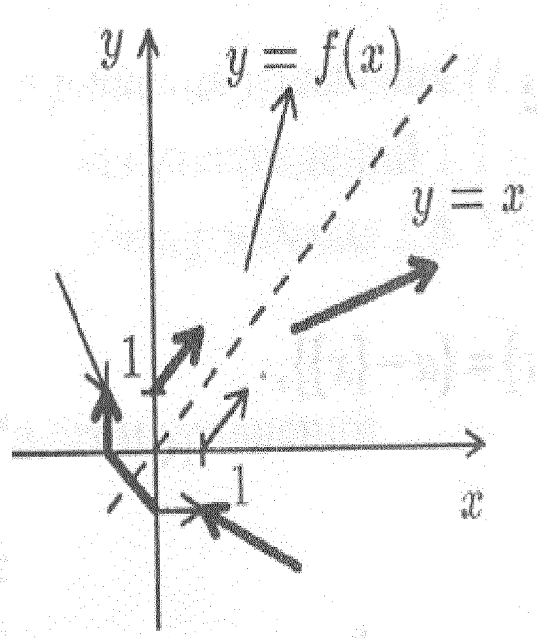


Рис. 2.

13.4.2. Здесь $f(x) = x[x] - 1$. График функции и его симметричный образ пересекаются по отрезку $[x, -x-1]$ при $x \in [-1, 0]$ (см. рис. 2).

13.4.3. Ответ: все точки отрезка $[-1, 0]$ (см. рис. 4).

13.4.4. Ответ: $x = 0, y = 0$.

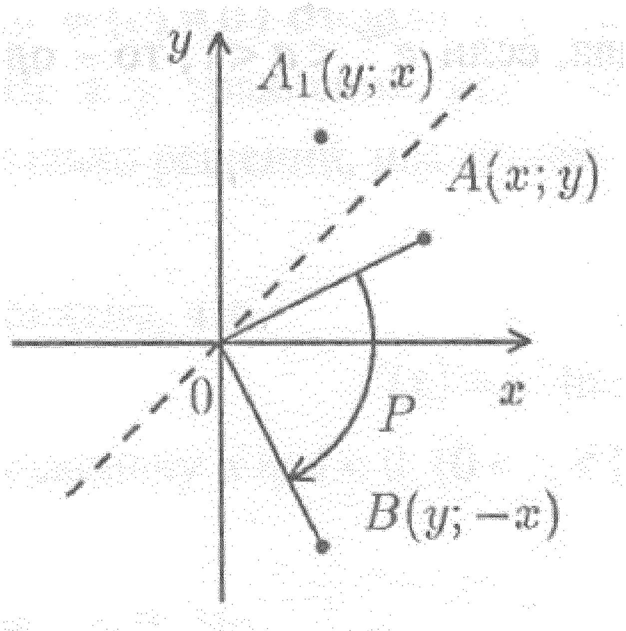


Рис. 3.

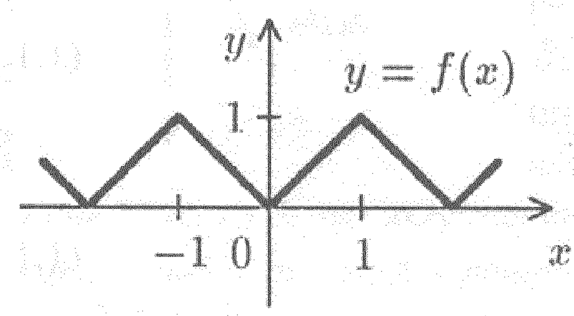


Рис. 4.

13.4.5. $f(x) = 3 - \left||x| - 2\right|$, $h(x) = x^2$.

$h(a) \geq 0$, значит L не выше прямой $y = x$ (см. рис. 5). Если $a < 2$, то точка B, симметричная точке $A(a, f(a))$ относительно L, не лежит на графике $f(x)$, а если $a \geq 2$, то такая точка лежит на графике. Значит, все числа a, $a \geq 2$, являются решениями уравнения и только они.

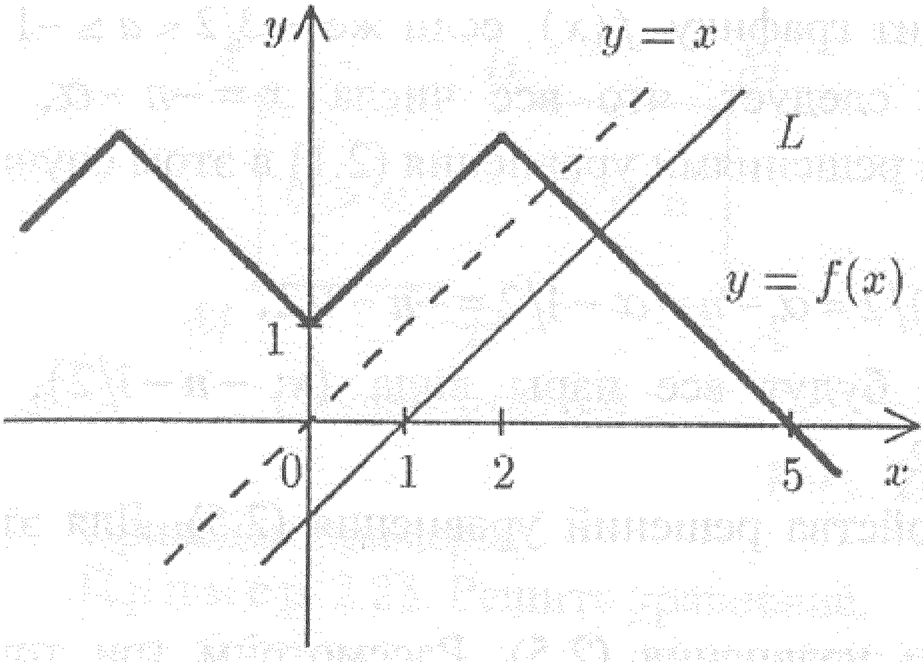


Рис. 5.

13.5.1. Нет. При каждой из этих замен чётность количества букв У не меняется. Но в УАА и АУУ четность разная.

13.5.2. Обозначим правильно подвешенную бутылку ”1”, неправильно- “-1”. Перевернуть значит умножить на –1. Раскрасим 12 секторов круга, в котором висят бутылки, в 6 цветов последовательно. Найдем произведение чисел, стоящих в секторах одного цвета. В 1-ом цвете получится “-1”, а в остальных будет “1”. Если переворачиваем по 6 бутылок подряд, то в каждом цвете одно число умножаем на –1. Значит произведения чисел, стоящих в секторах цветов 2, 3, 4, 5, 6 будут всегда одинаковы. Но в конечной расстановке в цвете 2 произведение должно быть “-1”, а в цветах 3, 4, 5, 6- “1”. Противоречие. То же самое доказательство подходит для пунктов в) и г), но раскрашивать надо соответственно в 4 и 3 цвета. В пункте б) ответ- можно. Действительно, будем переворачивать последовательно по 5 бутылок, двигаясь по часовой стрелке. Через 12 переворачиваний мы вернемся в исходную точку, перевернув каждую из бутылок по 5 раз, т.е. все они изменят положение. При этом две выбранные бутылки будут ориентированы так, как требуется. Теперь надо перевернуть 10 оставшихся бутылок, и мы получаем нужную конфигурацию.

13.5.3. Раскрасим сектора по очереди в два цвета (чёрный и белый). Найдём сумму в чёрных и белых секторах. Изначально сумма в чёрных секторах 2, а в белых 0. А в конце они должны быть одинаковыми. При каждом ходе каждая из сумм увеличивается на 1. Противоречие.

13.5.4. Нет. Если рассматривать указанную таблицу как матрицу с элементами 1 и –1, то указанные преобразования не меняют ее ранга. Но у исходной матрицы ранг 2, а у конечной- 1.

13.6.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -2 & -1 & 0 \\ 2-n & 3-n & 4-n & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 3-n & 4-n & 5-n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -2 & -1 & 0 \\ 2-n & 3-n & 4-n & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 3-n & . & . & \dots & . & . & . \\ -1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n \end{vmatrix} =$$

$$n\begin{vmatrix} 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -3 & -2 & -1 \\ 2-n & 3-n & 4-n & \dots & -2 & -1 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = n(-1)^{n-1}(-1)^{n(n-1)/2}.$$

13.6.2. Данный определитель есть полином четвертой степени от x. Его корни $\pm 3, \pm 2$. Коэффициент при старшей степени легко находится. Это определитель второго порядка, равный -3.

Ответ: $-3(x \ \ -9)(x^2-4)$.

13.6.3. Определитель есть полином степени $n-1$. Его корни $2,3,\dots n$. Коэффициент при старшей степени равен 1.

Ответ: $(x-2)(x-3)\dots(x-n)$.

13.6.4. Это определитель Вандермонда. Если среди чисел $x_1, x_2, \dots x_n$ есть одинаковые, то определитель равен нулю (есть одинаковые столбцы). Будем считать все эти числа разными. Рассмотрим определитель как функцию x_n, заменив для удобства эту переменную просто на x. Тогда определитель $n-$го порядка (Δ_n) есть полином степени $(n-1)$ от x, причем старший коэффициент – это Δ_{n-1}. Числа $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ являются корнями полинома ($i-$й столбец совпадает с последним).Значит,

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})\Delta_{n-1}(x_1, x_2, \dots x_{n-1}).$$

Повторяя рассуждение, приходим к ответу: $\Delta_n(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod\limits_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j).$

13.6.5. Пусть элементы $k-$ой строки определителя Δ равны 1. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}1\cdot A_{kj}+\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n}1\cdot A_{ij}=\Delta+\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}0=\Delta,$$

поскольку первая сумма есть разложение определителя по элементам k – й строки, а во второй стоят суммы произведений алгебраических дополнений элементов i – й строки на элементы другой строки (k – й), то есть нули.

13.6.6. Пусть $A_i=\begin{pmatrix}a_i(t_1)\\ a_i(t_2)\\ \dots\\ a_i(t_m)\end{pmatrix}$. Тогда j – й столбец искомого определителя есть линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n}b_i(t_j)A_i$. Но имеется лишь n линейно независимых столбцов A_i, в нашем же определителе их m, $m>n$. Поэтому у искомого определителя столбцы линейно зависимы, значит, он равен нулю.

13.6.7. Ответ: $\frac{1}{2}(n+3)n^n$.

13.6.8. Указание. Прибавить ко всем элементам определителя $(-x)$, получится диагональный определитель.

Ответ: $x(a_1-x)\dots(a_n-x)(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x})$.

13.6.9. а) Данная функция равна произведению x на сумму алгебраических дополнений определителя A, то есть это линейная функция, поэтому ее вторая производная равна нулю.

б) Указание. Показать, что $A_{ij}=-A_{ji}$, а значит, коэффициент при x нулевой: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=0$. Ответ: 0.

13.6.10. $\begin{vmatrix}1&1&1&1&\dots&1\\1&2&2&2&\dots&2\\1&2&3&3&\dots&3\\1&2&3&4&\dots&4\\ .&.&.&.&.&.\\1&2&3&4&\dots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\dots&0\\1&1&0&0&\dots&0\\1&1&1&0&\dots&0\\1&1&1&1&\dots&0\\ .&.&.&.&.&.\\1&1&1&1&\dots&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1&\dots&1\\0&1&1&1&\dots&1\\0&0&1&1&\dots&1\\0&0&0&1&\dots&1\\ .&.&.&.&.&.\\0&0&0&0&\dots&1\end{vmatrix}=1.$

13.6.11. Пусть $A-$ матрица этого определителя. Рассмотрим

$$AA^T=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)E,$$

где $E-$ единичная матрица. $\det A=\det A^T$, поэтому

$\det AA^T=\det A\cdot\det A^T=(\det A)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$.

Ответ: $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

13.6.12. Представим матрицу определителя в виде произведения двух матриц определителя Вандермонда, причем второй множитель- это транспонированная матрица первого множителя:

$$\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{n+2} \\ . & . & . & . & . \\ S_n & S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & n^2 & n^3 & \dots & n^n \end{pmatrix}.$$

Вычисление определителя Вандермонда (см. 13.6.4) дает:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & n^n \end{vmatrix}=$$

$$=(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1=$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}(n-k)^k.$$

Отсюда и получаем искомый определитель.

Ответ: $\prod_{k=1}^{n-1}(n-k)^{2k}$.

13.6.13. Проверяем, что $A(k)=A^k(1)$ при $k=1,2,3$ (несложно, вообще-то, доказать, что это верно при любом натуральном k, но нам здесь это не требуется). Умножим справа матрицу $\begin{pmatrix} A(1) & A(2) \\ A(2) & A(3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A(1) & A^2(1) \\ A^2(1) & A^3(1) \end{pmatrix}$ на треугольную матрицу с единичным определителем $\begin{pmatrix} E & -A(1) \\ 0 & E \end{pmatrix}$, где $E-$

единичная, а $0-$ нулевая матрицы $n-$го порядка. Получаем:

$$\begin{pmatrix} A(1) & A^2(1) \\ A^2(1) & A^3(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A(1) \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A(1) & 0 \\ A^2(1) & 0 \end{pmatrix}.$$ Определитель правой части равен нулю. Значит и определитель искомой матрицы равен нулю.

13.6.14. Докажем по индукции, что $\Delta(k)=1$. База индукции:

$$\Delta(0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & n-1 & (n-1)(n-2)/2 & \dots & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Индукционный переход $\Delta(s)=1 \Rightarrow \Delta(s+1)=1$, $s=0,1,2\dots$, следует из

равенства $\Delta(s+1)=\Delta(s)\det A$, где $\det A=1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Проверяем данное равенство, перемножая матрицы:

$$\begin{pmatrix} C_s^0 & C_s^1 & C_s^2 & \dots & C_s^{n-1} \\ C_{s+1}^0 & C_{s+1}^1 & C_{s+1}^2 & \dots & C_{s+1}^{n-1} \\ C_{s+2}^0 & C_{s+2}^1 & C_{s+2}^2 & \dots & C_{s+2}^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ C_{s+n-1}^0 & C_{s+n-1}^1 & C_{s+n-1}^2 & \dots & C_{s+n-1}^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} C_{s+1}^0 & C_{s+1}^1 & C_{s+1}^2 & \dots & C_{s+1}^{n-1} \\ C_{s+2}^0 & C_{s+2}^1 & C_{s+2}^2 & \dots & C_{s+2}^{n-1} \\ C_{s+3}^0 & C_{s+3}^1 & C_{s+3}^2 & \dots & C_{s+3}^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ C_{s+n}^0 & C_{s+n}^1 & C_{s+n}^2 & \dots & C_{s+n}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство верно благодаря тождеству для биномиальных коэффициентов: $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$.

13.6.15. Воспользуемся геометрическими соображениями (неравенство Адамара). $|d_n|$ оценивается через $n-$кратный интеграл от объема параллелепипеда, который не превосходит объема прямого параллелепипеда, то есть произведения длин ребер:

$$|d_n| \le (b-a)^n \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} K^2(t_j, t_i)} \le ((b-a)M)^n n^{n/2},\ M = \max_{a \le x, t \le b} |K(x,t)|.$$

Таким образом, для выяснения абсолютной сходимости исследуемого ряда достаточно проверить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((b-a)M)^n n^{n/2}}{n!}$, что легко выясняется с помощью формулы Стирлинга: $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

13.6.16.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}2008^{-1} & \ldots & a_{1,2008}2008^{-2007} \\ a_{21}2008 & a_{22} & \ldots & a_{2,2008}2008^{-2006} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2008,1}2008^{2007} & a_{2008,2}2008^{2006} & \ldots & a_{2008,2008} \end{vmatrix} =$$

$$= 2008^{-1} \cdot 2008^{-2} \cdot \ldots \cdot 2008^{-2007} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,2008} \\ 2008a_{2,1} & 2008a_{22} & \ldots & 2008a_{2,2008} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2008^{2007}a_{2008,1} & 2008^{2007}a_{2008,2} & \ldots & 2008^{2007}a_{2008,2008} \end{vmatrix} =$$

$$= 2008^{-1} \cdot 2008^{-2} \cdot \ldots \cdot 2008^{-2007} \cdot 2008 \cdot 2008^{2} \cdot \ldots \cdot 2008^{2007} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,2008} \\ a_{2,1} & a_{22} & \ldots & a_{2,2008} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2008,1} & a_{2008,2} & \ldots & a_{2008,2008} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,2008} \\ a_{2,1} & a_{22} & \ldots & a_{2,2008} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2008,1} & a_{2008,2} & \ldots & a_{2008,2008} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, определитель не изменится. Аналогично доказывается утверждение для определителя 2007 порядка.

Литература

1. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. М.: Наука, 1978.
2. Садовничий В.А., Григорян Л.А., Коняхин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: изд-во МГУ, 1987.
3. Харди Г.Х. Курс чистой математики. М.: Мир, 1953.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
5. Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. СПб: Невский Диалект, 2004.
6. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1976.
7. Зарубежные математические олимпиады (под ред. И.Н.Сергеева) М.: Наука, 1987
8. Давыденко И.С., Вайнтруб М.Р. Олимпиадные задачи по математике. Томск: ТПИ, 1975.
9. Методическое руководство для студенческих математических кружков. Челябинск: ЧПИ, 1976.
10. Сергеев В.М. Сборник олимпиадных задач по высшей математике. Омск: ОПИ, 1975.
11. Сборник задач повышенной трудности по курсу высшей математики для студентов электротехнических специальностей. Л.: ЛЭТИ, 1982.
12. Чучаев И.И. Нестандартные (функциональные) приемы решения уравнений. Саранск: изд-во Морд.ГУ, 2001.
13. Чучаев И.И. . Нестандартные (геометрические и функциональные) приемы решения уравнений. Саранск: изд-во Морд.ГУ, 2002.
14. Попов И.Ю. Методические указания по решению задач повышенной трудности (олимпийский сборник задач). СПб: ИТМО, 1993.
15. Беркович Ф.Д., Федий В.С. Задачи всероссийских и северокавказских математических олимпиад студентов. Ростов-на-Дону: РГУ. 1991.
16. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе» (1998-1999 гг.). СПб: ВИТУ, 1999.
17. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе» (2000 г.). СПб: ВИТУ, 2000.
18. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе» (2001 г.). СПб: ВИТУ, 2001.
19. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». Выпуск 4. СПб: ВИТУ, 2001.
20. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». Выпуск 5. СПб: ВИТУ, 2003.

21. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». Выпуск 6. СПб: ВИТУ, 2004.
22. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». Выпуск 7. СПб: ВИТУ, 2005.
23. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». Выпуск 8. СПб: ВИТУ, 2006.
24. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». Выпуск 9. СПб: ВИТУ, 2007.
25. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». Выпуск 10. СПб: ВИТУ, 2008.
26. Тоноян Г.А., Сергеев В.Н. Студенческие математические олимпиады. Ереван: ЕГУ, 1985.
27. Морозова Е.А., Петраков И.С. Международные математические олимпиады. М.: Просвещение, 1967.
28. Фомин А.А., Кузнецова Г.М. Международные математические олимпиады. М.: Дрофа, 1998.
29. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Математический кружок. СПб. 1992.
30. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.
31. Шубин М.А. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во МГУ, 1975.
32. Задачи студенческих олимпиад по математике с решениями. Сост.: Ржонсницкий А.В. и др. СПб: СПГТИ(ТУ), 1995.
33. Попов И.Ю. Задачи студенческих математических олимпиад. СПб: СПбГУ ИТМО, 2006.
34. Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями. Ростов-на-Дону: Феникс, 2008.
35. Беркович Ф.Д., Федий В.С. Задачи студенческих олимпиад по математике с указаниями и решениями. Ростов-на-Дону: Феникс, 2008.
36. Купцов Л.П., Резниченко С.В., Терешин Д.А., Яковлев Г.Н. Российские математические олимпиады школьников. Ростов-на-Дону: Феникс, 1996.

Содержание

Кафедра высшей математики – крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П.Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г.Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Санкт-Петербургским государственным электротехническим университетом (ЛЭТИ), Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами, как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ