САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Н. Н. Поляхов, П. Е. Товстик
С. А. Зегжда, М. П. Юшков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНИК

2 ДИНАМИКА. Некоторые прикладные вопросы теоретической механики

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. Н. Поляхов, П. Е. Товстик,
С. А. Зегжда, М. П. Юшков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том II
Динамика. Некоторые прикладные вопросы теоретической механики

Учебник

Под редакцией проф. *П. Е. Товстика*

4-е издание,
переработанное и расширенное

ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 531
ББК 22.21
П347

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *В. В. Александров* (Моск. гос. ун-т); член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. *А. М. Кривцов* (С.-Петерб. гос. политехн. ун-т)

Авторы: Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, П. Е. Товстик, М. П. Юшков, А. К. Беляев, В. Г. Быков, В. В. Додонов, А. С. Ковачев, Н. Ф. Морозов, Н. В. Наумова, В. И. Петрова, Ш. Х. Солтаханов, Т. М. Товстик, Т. П. Товстик

Рекомендовано к публикации
УМК по УГСН 01.00.00 математика и механика
Санкт-Петербургского государственного университета

Поляхов Н. Н., Товстик П. Е., Зегжда С. А., Юшков М. П.

П347 Теоретическая и прикладная механика. Том II. Динамика. Некоторые прикладные вопросы теоретической механики: учебник / под ред. П. Е. Товстика. 4-е изд., перераб. и расшир. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2022. — 548 с.
ISBN 978-5-288-06242-1 (Т. 2)
ISBN 978-5-288-06213-1 (общий)

В основу двухтомного учебника «Теоретическая и прикладная механика» были положены лекции, продолжительное время читавшиеся авторами на математико-механическом факультете, а также специальные курсы, разработанные сотрудниками кафедры, отражающие новые научные результаты. Второй том учебника охватывает широкий круг специальных вопросов, имеющих важное прикладное значение: устойчивость движения, нелинейные колебания, динамика и статика платформы Стюарта, механика при действии случайных сил, элементы теории управления, связь неголономной механики с теорией управления, колебания и балансировка роторных систем, физическая теория удара, статика и динамика тонкого стержня, динамика полета, обобщенный маятник Капицы.

Учебник предназначен для студентов университетов, обучающихся по специальностям «математика» и «механика». Он может быть интересен и для аспирантов и специалистов по аналитической механике.

УДК 531
ББК 22.21

ISBN 978-5-288-06242-1 (Т. 2)
ISBN 978-5-288-06213-1 (общий)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ КО ВТОРОМУ ТОМУ

Как указывалось во Введении к первому тому учебника, материал общего курса «Теоретическая механика» и ряда специальных курсов, читавшихся авторами на протяжении многих лет на математико-механическом факультете Ленинградского — Санкт-Петербургского государственного университета, разбит на три раздела.

В первый том вошли разделы «Кинематика» и «Динамика. Общие вопросы теоретической механики. Основы аналитической механики». В них излагались главы, посвященные кинематике точки, кинематике твердого тела, сложному движению, динамике точки, динамике системы, движению при наличии связей, малым колебаниям системы, динамике твердого тела, вариационным принципам механики, статике, интегрированию уравнений механики, элементам специальной теории относительности.

Предлагаемый читателю второй том учебника содержит третий раздел «Динамика. Некоторые прикладные вопросы теоретической механики». Материал глав этого раздела отражает основное содержание ряда специальных курсов, читаемых на кафедре теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского университета. Основная литература во втором томе указывается в ссылках в каждой главе.

В **главе I «Устойчивость движения»** дается определение устойчивости возмущенного движения по Ляпунову и приводятся теоремы Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости. Приводятся теоремы Лагранжа, Ляпунова и Четаева об устойчивости положений равновесия и стационарных движений консервативных систем. Обсуждается влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость положения равновесия консервативной системы (теоремы Томсона и Тета). Исследуется устойчивость положения равновесия по линейному приближению. Приводятся критерии Рауса — Гурвица и Михайлова об отрицательности вещественных частей корней полинома. По линейному приближению исследуется устойчивость периодических движений неавтономных систем. Рассматривается устойчивость нулевого решения уравнения Матье, к которому приводятся, например, колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса.

В **главе II «Нелинейные колебания»** особое внимание обращено на изложение приближенных способов решения нелинейных уравнений (метод малого параметра, асимптотические методы). Установлена связь метода Бубнова — Галеркина с принципом Гаусса. Подробно излагается предложенный академиком П. Л. Капицей метод прямого разделения движений, недостаточно освещенный в настоящее время в учебной литературе. Теоретические результаты поясняются решением ряда новых примеров. Последние параграфы посвящены обсуждению странных аттракторов и методу двухмасштабных разложений.

В **главе III «Динамика и статика платформы Стюарта»** исследование динамики нагруженной платформы стенда ведется двумя различными методами — применением классических теорем теоретической механики и с помощью использования специальной формы уравнений движения, введенной в главе VIII первого тома учебника. Рассматриваются кинематика стенда, дифференциальные уравнения движения нагруженной платформы, решения прямой и обратной задач динамики, стандартные движения платформы, введение обратной связи, обеспечивающей устойчивые колебания нагруженной платформы Стюарта, области достижимости положений платформы в шестимерном пространстве обобщенных координат. Для стабилизации положения равновесия платформы стенда используется третий возможный метод — уравнения Лагранжа второго рода.

В **главе IV «Колебания и автобалансировка роторных систем»** рассматриваются простейшие модели роторных систем с конечным числом степеней свободы. Изучаются различные типы колебаний роторов, обусловленные их неуравновешенностью, неравножесткостью упругих характеристик вала или опор, а также влиянием сил внутреннего трения и конструкционного демпфирования. Исследуются вопросы балансировки роторов, оснащенных пассивными шаровыми автобалансировочными устройствами. Заканчивается глава исследованием влияния неидеальности конструкции автобалансировочных устройств.

Глава V «Элементы теории управления» посвящена постановке задач теории управления и краткому обзору некоторых методов их решения. Задачи теории управления можно разделить на два больших класса. Первый из них связан с выбором в том или ином смысле оптимального управления, а второй — с задачей удержания движения на выбранной траектории или вблизи нее. Излагается принцип максимума Понтрягина. Приводится решение некоторых задач теории управления. Вводятся понятия управляемости, стабилизируемости и наблюдаемости.

Глава VI «Обобщенная задача Чебышёва. Неголономная механика и теория управления» разбита на две части. В первой части

формулируется обобщенная задача Чебышёва и приводятся две теории для ее решения. Для создания этих теорий развивается аппарат неголономной механики при наличии связей высокого порядка. Связи рассматриваются как программные. В первой теории строится совместная система дифференциальных уравнений для определения неизвестных обобщенных координат и множителей Лагранжа. Вторая теория базируется на использовании обобщенного принципа Гаусса. Применение теорий иллюстрируется решением задачи о движении искусственного спутника с постоянным по величине ускорением.

Во второй части главы для решения одной из важнейших задач теории управления — о выборе оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему за заданное время из одного фазового состояния в другое — предлагается применять вторую теорию движения неголономных систем со связями высокого порядка. Показывается, что при решении поставленной задачи с помощью принципа максимума Понтрягина при минимизации функционала от квадрата управляющей силы непрерывно выполняется связь высокого порядка. Поэтому для решения той же задачи удобно применить обобщенный принцип Гаусса, свойственный теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. Это позволяет сформулировать обобщенную задачу Чебышёва и на основе ее решения построить управляющую силу в виде полинома от времени. Применение предлагаемой теории демонстрируется на решении модельной задачи о гашении колебаний тележки с маятниками. Ставится и решается расширенная краевая задача, в которой задаются значения и ускорения в начале и в конце движения системы. Благодаря этому удается находить управляющую силу без скачков, свойственных решению, полученному с использованием принципа максимума Понтрягина. В конце главы для демонстрации возможности использования предложенной теории для исследования управления механическими системами с распределенными параметрами рассматривается задача о гашении колебаний гибкой «руки» манипулятора.

В **главе VII «Механика со случайными силами»** в краткой форме излагаются методы определения вероятностных характеристик движения механических систем, находящихся под действием случайных сил. Во вводных параграфах приводятся основные сведения о случайных величинах и случайных процессах, необходимые для дальнейшего. При определении вероятностных характеристик изложение ограничено в основном корреляционным уровнем, при котором определяются математические ожидания и корреляционные функции решений при условии, что эти же характеристики заданы для внешних сил. Для стационарных процессов используется преобразование Фурье и определяются спектральные плотности.

Для статистически линейных систем удается найти точное решение. Для анализа нелинейных систем можно использовать лишь приближенные методы. Это методы статистической линеаризации и методы статистического моделирования. Упомянутый в конце главы метод решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова приводит к точному решению, однако область его практической применимости очень узкая.

Глава VIII «Физическая теория удара» посвящена классической теории удара, хотя начинается она с изложения теории Герца соударения упругих шаров. Подробно обсуждается понятие коэффициента восстановления, введенное Ньютоном. Дается новый вывод алгебраической системы уравнений Лагранжа первого и второго рода, соответствующих классической теории удара механических систем с идеальными связями. Эта система уравнений в ряде задач приобретает особо простую форму при использовании квазискоростей. В качестве примера рассматривается удар по прямолинейной цепочке стержней и по цепочке, расположенной на дуге окружности. В этих задачах уравнения Лагранжа, записанные в квазискоростях, по форме совпадают с уравнениями в конечных разностях. Это позволило построить аналитическое решение двух данных задач. Рассматриваются и другие важные примеры применения изложенных методов классической теории удара.

В **главе IX «Статика и динамика тонкого стержня»** излагаются классические результаты Эйлера о нелинейном статическом деформировании продольно сжатого стержня, результаты работы М. А. Лаврентьева и А. Ю. Ишлинского о потере устойчивости при динамическом продольном сжатии и современные результаты, связанные в основном с исследованием взаимодействия продольных и поперечных колебаний. Глава знакомит читателей с основными методами исследования — с методами Даламбера и Фурье, с методами исследования параметрических резонансов, с асимптотическим методом двухмасштабных разложений.

В **главе X «Динамика полета»** вводятся основные координатные системы, используемые в динамике полета, исследуются уравнения движения летательного аппарата (ЛА) в связанной системе координат, обсуждаются силы, действующие на ЛА, рассматриваются вопросы, связанные с движением систем переменной массы, в том числе, приводится формула подсчета силы тяги реактивного двигателя, изучается движение летательного аппарата в начальной стартовой системе координат, применяются методы неголономной механики для наведения ЛА на цель. Отмечается, что динамика полета занимается изучением движения самолетов и ракет в атмосфере Земли, ее методы могут быть применены и к исследованию движения подводных лодок и надводных кораблей.

В **главе XI «Обобщение задачи о маятнике Капицы»** исследуется устойчивость вертикального положения перевернутого обобщенного маятника Капицы при различных вертикальных вибрациях опоры. Рассматривается вертикальный деформируемый стержень со свободным верхним концом и зажатым или шарнирно опертым нижним концом при гармонических или стационарных случайных колебаниях опоры. Гибкий стержень моделируется системой с несколькими степенями свободы. Найдены условия устойчивости верхнего вертикального положения маятника. Учитываются как изгибные, так и продольные колебания стержня. Найдены области притяжения в устойчивом вертикальном положении.

Как и в томе I, при изложении материала в каждой главе ведется своя двойная нумерация формул, при этом первая цифра указывает номер параграфа. При необходимости сослаться на формулу из другой главы дается словесное указание о номере главы и тома, в которых находится эта формула. Для рисунков, таблиц и примеров используется самостоятельная нумерация в каждой главе.

Содержание тома II переведено на английский язык А. Р. Алимовым (главы I, II, III, V, VI, X), А. К. Беляевым (глава IX), А. С. Ковачевым (глава IV), Д. А. Лисаченко (глава VIII), В. А. Шелковиной (глава VII). Общее редактирование перевода (за исключением главы IX) осуществили А. Р. Алимов, Е. Л. Белькинд и Г. А. Синильщикова. Глава XI в английском переводе отсутствует.

Хотя учебник издается в двух томах, но по характеру изложения каждый из них имеет самостоятельное значение. Поэтому эти тома можно рассматривать как две отдельные книги, в каждой из которых ведется своя нумерация глав.

Авторы будут весьма признательны всем, кто пришлет свои замечания по данному учебнику.

П. Е. Товстик

М. П. Юшков
yushkovmp@mail.ru

ДИНАМИКА
Некоторые прикладные вопросы теоретической механики

Во втором томе учебника рассматриваются некоторые разделы высшей математики, имеющие непосредственное отношение к теоретической механике (главы «Устойчивость движения», «Нелинейные колебания», «Элементы теории управления», «Механика со случайными силами»). Материал этих глав и первого тома помогают по-новому изложить ряд дополнительных глав аналитической механики, имеющих важное практическое значение (главы «Динамика и статика платформы Стюарта», «Колебания и автобалансировка роторных систем», «Физическая теория удара», «Динамика полета»). В свою очередь, это позволяет как углублять и расширять решение некоторых важнейших задач механики (глава «Статика и динамика тонкого стержня», «Обобщение задачи о маятнике Капицы»), так и предлагать новые методы расчета практически важных задач (например, главы «Динамика и статика платформы Стюарта», «Обобщенная задача Чебышёва. Неголономная механика и теория управления»).

Материал глав данного тома учебника может быть использован для создания специальных курсов.

Глава I
УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Авторы: *П. Е. Товстик, М. П. Юшков*

В главе дается определение устойчивости возмущенного движения по Ляпунову и приводятся теоремы Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости. Приводятся теоремы Лагранжа, Ляпунова и Четаева об устойчивости положений равновесия и стационарных движений консервативных систем. Обсуждается влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость положения равновесия консервативной системы (теоремы Томсона и Тета). Исследуется устойчивость положения равновесия по линейному приближению. Приводятся критерии Рауса — Гурвица и Михайлова об отрицательности вещественных частей корней полинома. По линейному приближению исследуется устойчивость периодических движений неавтономных систем. Рассматривается устойчивость нулевого решения уравнения Матье, к которому приводятся колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса.

§ 1. Дифференциальные уравнения возмущенного движения

Будем считать, что система уравнений Лагранжа второго рода после введения обозначений $y_\sigma = q^\sigma$, $y_{s+\sigma} = \dot{q}^\sigma$, $\sigma = \overline{1,s}$, $n = 2s$, может быть представлена в виде

$$\frac{dy_k}{dt} = Y_k(y_1, y_2, \dots, y_n, t)\,, \quad k = \overline{1,n}\,. \tag{1.1}$$

Напомним, что процедура перехода от уравнений Лагранжа второго рода к системе (1.1) при $n = 3$ была изложена в § 6 главы IV первого тома учебника.

При движении под действием сил, имеющих потенциал, уравнения движения сводятся к системе канонических уравнений (6.10) из упомянутого выше параграфа первого тома, которые посредством использования новых обозначений также могут быть приведены к уравнениям вида (1.1).

Будем рассматривать фазовые координаты $y_1, y_2, \dots, y_n$ как *изображающую точку* M n-мерного евклидова пространства[1]. Тогда систему уравнений (1.1) можно переписать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}, t)\,, \qquad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T\,, \quad \boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T\,. \tag{1.2}$$

[1] Не путать с изображающей точкой по Герцу, введенной в главе V первого тома учебника.

Система дифференциальных уравнений (1.2) решается при начальных условиях

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \,. \tag{1.3}$$

Решение $\boldsymbol{y}(t)$, соответствующее этим начальным условиям, называется *невозмущенным движением.* Всякое движение, соответствующее другим решениям уравнения (1.2), назовем *возмущенным движением.* Обозначим возмущенное движение через $\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)$. Оно также является решением уравнения (1.2), но удовлетворяющим начальным условиям $\widetilde{\boldsymbol{y}}(0) = \widetilde{\boldsymbol{y}}_0$, отличным от начальных условий (1.3).

При исследовании уравнения (1.2) всегда можно положить

$$\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{x}(t)\,, \quad \widetilde{\boldsymbol{y}}(0) = \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{x}_0\,,$$

где $\boldsymbol{x}(t)$ называется *возмущением*, а $\boldsymbol{x}_0$ — *начальным возмущением*, причем

$$\begin{gathered} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)\,, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \\ X(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{x}(t), t) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}(t), t)\,. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Ясно, что $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}, t) \equiv \boldsymbol{0}$, поэтому уравнение (1.4) имеет решение, тождественно равное нулю: $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{0}$. Тем самым исследование свойств невозмущенного решения уравнения (1.2) сводится к исследованию нулевого решения уравнения (1.4). Движение $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{0}$ можно трактовать как состояние покоя для системы (1.4).

Если вектор-функция $\boldsymbol{X}$ явно не зависит от времени t, то уравнение (1.4) называют *автономным.*

Определение 1. Если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число δ, что при выполнении условия $||\boldsymbol{x}_0|| < \delta$ для всех значений времени t выполняется неравенство $||\boldsymbol{x}(t)|| < \varepsilon$, то невозмущенное движение называется *устойчивым в смысле Ляпунова.* В противном случае оно называется *неустойчивым в смысле Ляпунова.*

Определение 2. Устойчивое движение называется *асимптотически устойчивым*, если найдется такое число $\gamma > 0$, что из неравенства $||\boldsymbol{x}_0|| < \gamma$ будет следовать $\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{0}$ при $t \to \infty$.

В связи с этими определениями сделаем ряд замечаний.

Фазовые координаты x_k, $k = \overline{1, n}$, целесообразно считать безразмерными, ибо в противном случае придется складывать величины разных размерностей.

Через $||\boldsymbol{z}||$ обозначена норма вектора $\boldsymbol{z}$, причем в определениях может быть использована любая норма. Наиболее употребительными являются нормы

$$||\boldsymbol{z}||_1 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_k^2} \quad \text{и} \quad ||\boldsymbol{z}||_2 = \max_{k=\overline{1,n}} |z_k|\,,$$

первая из которых есть длина вектора $\boldsymbol{z}$, а вторая равна максимальному отклонению фазовых координат от нуля.

Предполагается, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что при $||\boldsymbol{x}_0|| < \varepsilon$ уравнение (1.4) имеет ограниченное решение на бесконечном интервале времени. В противном случае понятие устойчивости не вводится. Например, задача Коши для уравнения первого порядка $\dot{x} = x^2$, $x(0) = \varepsilon$, имеет ограниченное решение $x(t) = 1/(\varepsilon^{-1} - t)$ лишь при $t < \varepsilon^{-1}$.

В данной главе вопрос о построении возмущенного движения не рассматривается. Речь идет только об устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения.

Для пояснения **геометрического смысла** введенных понятий рассмотрим движение изображающей точки, приняв для определенности выбор нормы в виде $||\boldsymbol{z}||_1$. С течением времени изображающая точка вычерчивает в n-мерном пространстве некоторую кривую, называемую *интегральной кривой*, или *фазовой траекторией*. Введем две сферы, $||\boldsymbol{x}|| = \delta$ и $||\boldsymbol{x}|| = \varepsilon$, которые будем называть соответственно ε-сферой и δ-сферой. Движение устойчиво, если любая интегральная кривая, начинающаяся в момент времени $t_0 = 0$ в точке M_0, находящейся внутри δ-сферы (рис. 1), в дальнейшем не выходит за пределы ε-сферы. Если движение неустойчиво, то хотя бы одна траектория изображающей точки M с течением времени пересечет ε-сферу даже при положении точки M_0, сколь угодно близком к началу координат. Если точка M при $t \to \infty$ стремится к началу координат, то наблюдается асимптотическая устойчивость системы.

В качестве примера рассмотрим малые колебания, описываемые задачей Коши:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0\,, \qquad x(0) = a\,, \quad \dot{x}(0) = v\,.$$

При $h = 0$ задача имеет решение $x(t) = a\cos\omega t + (v/\omega)\sin\omega t$. Очевидно, что взяв начальные значения a и v достаточно малыми, мы получим при любом t сколь угодно малые значения функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$. Следовательно, при $h = 0$ нулевое решение устойчиво. Точно также нетрудно проверить, что при $h > 0$ будет $x(t) = Ce^{-ht}\cos(kt + \alpha)$, откуда следует асимптотическая устойчивость нулевого решения.

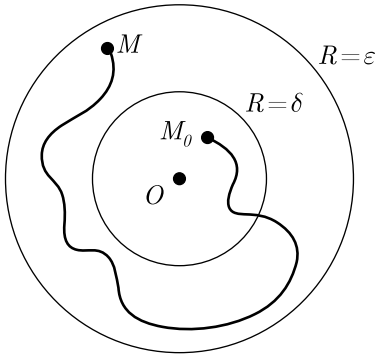

Рис. 1. δ-сфера и ε-сфера

Исследование устойчивости решений уравнения (1.2) тесно связано с изучением движения по заданной программе. Пусть требуется обеспечить движение по закону $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$. Для этого необходимо, чтобы начальные условия точно соответствовали значениям (1.3). Однако осуществить это на практике не удается, поэтому реальное движение является возмущенным. Важно установить влияние начальных возмущений на отклонение реального движения от программного.

§ 2. Прямой метод Ляпунова

А. М. Ляпуновым предложены два метода решения задач об устойчивости движения. Первый является *методом характеристических показателей решений* уравнений возмущенного движения, второй позволяет судить об устойчивости движений по характеру поведения некоторых вспомогательных функций.

Рассмотрим второй метод, который называется *прямым методом Ляпунова.* С этой целью приведем прежде всего несколько определений.

Функция $V(\boldsymbol{x}, t)$, заданная при $||\boldsymbol{x}|| < R$, $0 \leqslant t < \infty$, непрерывно дифференцируемая по всем аргументам и обращающаяся в нуль в начале координат ($V(\mathbf{0}, t) = 0$), называется *функцией Ляпунова.*

Функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x}, t)$ называется *положительной (отрицательной)*, если $V(\boldsymbol{x}, t) \geqslant 0$ ($V(\boldsymbol{x}, t) \leqslant 0$) при всех $\boldsymbol{x}, t$.

В соответствии с этими определениями функция $V(\boldsymbol{x}, t) \equiv 0$ является и положительной, и отрицательной.

Не зависящая от времени функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x})$ называется *положительно определенной*, если она положительна и обращается в нуль

только в начале координат (точнее, существует такое $\varepsilon > 0$, что из равенства $V(\boldsymbol{x}) = 0$ при $||\boldsymbol{x}|| < \varepsilon$ следует $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$).

Зависящая от времени функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x}, t)$ называется положительно определенной, если существует не зависящая от времени положительно определенная функция Ляпунова $W(\boldsymbol{x})$, такая, что $V(\boldsymbol{x}, t) \geqslant W(\boldsymbol{x})$ при всех t.

Аналогично определяется *отрицательно определенная* функция Ляпунова. Ниже для определенности рассматриваются положительные функции Ляпунова, ибо отрицательные приводятся к ним сменой знака.

Вычислим полную производную по времени функции $V(\boldsymbol{x}(t), t)$ с учетом того, что функция $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.4). Получаем

$$V'(\boldsymbol{x}, t) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t}\,.$$

Функция $V'(\boldsymbol{x}, t)$ называется *производной функции Ляпунова* $V(\boldsymbol{x}, t)$, *вычисленной в силу уравнения возмущенного движения.* В силу равенства $\boldsymbol{X}(\mathbf{0}, t) \equiv \mathbf{0}$ функция $V'(\boldsymbol{x}, t)$ сама является функцией Ляпунова, и к ней могут быть применены введенные выше определения.

Теорема 1 Ляпунова об устойчивости. *Если существует положительно определенная функция Ляпунова* $V(\boldsymbol{x}, t)$, *производная которой* $V'(\boldsymbol{x}, t)$, *вычисленная в силу уравнения возмущенного движения, отрицательна (или тождественно равна нулю), то невозмущенное движение* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *устойчиво.*

Доказательство. В соответствии с определением устойчивости по Ляпунову возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и будем искать $\delta > 0$. Пусть

$$a = \min_{|\boldsymbol{x}|=\varepsilon} W(\boldsymbol{x}) > 0\,, \quad V(\boldsymbol{x}, t) \geqslant W(\boldsymbol{x}) > 0\,, \quad |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\,.$$

Здесь минимум непрерывной функции $W(\boldsymbol{x})$ разыскивается на замкнутом множестве $|\boldsymbol{x}| = \varepsilon$, которое в случае нормы $||\boldsymbol{x}||_1$ является сферой радиуса $R = \varepsilon$ (см. рис. 1). По теореме Вейерштрасса этот минимум существует, и в силу положительной определенности функции $W(\boldsymbol{x})$ он положителен. Функция $V(\boldsymbol{x}, 0)$ непрерывна и $V(\mathbf{0}, 0) = 0$. Поэтому существует $\delta > 0$, такое, что $V(\boldsymbol{x}, 0) < a$ при всех $|\boldsymbol{x}| < \delta$. Это значение δ является искомым. Действительно, возьмем произвольную точку M_0 внутри сферы радиуса $R = \delta$ и рассмотрим траекторию, выходящую из этой точки (см. рис. 1). Вдоль этой траектории проинтегрируем по времени уравнение

$$\frac{dV}{dt} = V'(\boldsymbol{x}(t), t)\,, \qquad V(t) - V(0) = \int_0^t V'(\boldsymbol{x}(t), t)\,dt\,. \tag{2.1}$$

Функция V' отрицательна, поэтому $V(t) \leqslant V(0)$. Имеем $a > V(0) \geqslant V(t) \geqslant W(t)$. Траектория не может пересечь сферу радиуса $R = \varepsilon$, ибо на этой сфере $W \geqslant a$, что противоречит неравенству $W < a$.

Теорема 2 Ляпунова об асимптотической устойчивости. *Если существует положительно определенная функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x}, t)$, допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой $V'(\boldsymbol{x}, t)$, вычисленная в силу уравнения возмущенного движения, определенно отрицательна, то невозмущенное движение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво.*

Теорема 3 Ляпунова о неустойчивости. *Если существует функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x}, t)$, допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой $V'(\boldsymbol{x}, t)$, вычисленная в силу уравнения возмущенного движения, определенно положительна, а функция $V(\boldsymbol{x}, 0)$ принимает положительные значения при сколь угодно малых $|\boldsymbol{x}|$, то невозмущенное движение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ неустойчиво.*

Теоремы 2 и 3 приводим без доказательства, однако дадим некоторые пояснения.

Термин «функция, допускающая бесконечно малый высший предел» был введен А. М. Ляпуновым. Он эквивалентен равномерной непрерывности функции $V(\boldsymbol{x}, t)$ по $\boldsymbol{x}$ при $0 \leqslant t < \infty$. А именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $|V(\boldsymbol{x}, t)| < \varepsilon$ при $|\boldsymbol{x}| < \delta$ и при всех t. Например, функция $V(x, t) = x^2/(1 + t)$ не является допускающей бесконечно малый высший предел.

Для асимптотической устойчивости требуется, чтобы $V(\boldsymbol{x}, t) \to 0$ при $t \to \infty$, что следует из формулы (2.1) в случае определенно отрицательной функции V'. Если функция $V(\boldsymbol{x}, t)$ допускает бесконечно малый высший предел, то из соотношения $V(\boldsymbol{x}, t) \to 0$ следует $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$.

Согласно условиям теоремы 3 можно взять начальную точку M_0, в которой $V(\boldsymbol{x}, 0) > 0$, сколь угодно близко к началу координат. В силу формулы (2.1) в случае положительно определенной функции V' функция $V(t)$ растет, и траектория выходит за пределы ε-сферы, что говорит о неустойчивости.

Пример 1. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2 + \mu x_1^3\,, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2^3\,. \tag{2.2}$$

Функция $V = (1/2)(x_1^2 + x_2^2)$ является определенно положительной. Составим ее полную производную по времени в силу уравнений возмущенного движения (2.2):

$$V' = \frac{dV}{dt} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \mu\left(x_1^4 + x_2^4\right)\,.$$

В данном примере производная V' имеет тот же знак, что и параметр μ. Поэтому при $\mu = 0$ по теореме 1 Ляпунова наблюдается устойчивость движения, при $\mu < 0$ по теореме 2 система асимптотически устойчива, а при $\mu > 0$ согласно теореме 3 движение неустойчиво.

К сожалению, не существует общих методов нахождения функции V. Для ее отыскания можно дать лишь некоторые рекомендации. Так, в механических задачах часто в виде функции Ляпунова удобно брать выражение, аналогичное по структуре выражению полной механической энергии системы. Иногда удается составить требуемую функцию сложением правых частей уравнений движения, помноженных на координаты. В некоторых случаях целесообразно использовать различные квадратичные формы, при этом удается применять правила знакоопределенности квадратичных форм, например, теорему Сильвестра.

Если для уравнений возмущенного движения известны интегралы

$$F_k(\boldsymbol{x}) = C_k\,, \quad k = \overline{1, m}\,,$$

то Н. Г. Четаев предложил искать функцию Ляпунова в виде комбинации

$$V(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left[F_k(\boldsymbol{x}) - F_k(\mathbf{0})\right] + \sum_{k=1}^{m} \varkappa_k \left[F_k^2(\boldsymbol{x}) - F_k^2(\mathbf{0})\right]\,, \tag{2.3}$$

называемой *связкой интегралов*. Если в данном случае удается подобрать λ_k, $\varkappa_k$, $k = \overline{1, m}$, так, что функция V оказывается определенно положительной, то по теореме Ляпунова наблюдается устойчивость движения. Для удобства один из коэффициентов можно положить равным единице. Иногда удается построить функцию V при $\varkappa_k = 0$, $k = \overline{1, m}$.

В общем случае функцию $V(\boldsymbol{x})$ можно искать в виде

$$V(\boldsymbol{x}) = f(F_1(\boldsymbol{x}) - F_1(\mathbf{0})\,,\, F_2(\boldsymbol{x}) - F_2(\mathbf{0})\,,\, \ldots\,,\, F_m(\boldsymbol{x}) - F_m(\mathbf{0}))\,,$$

где f — любая функция.

Пример 2. В качестве иллюстрации использования связки интегралов (2.3) рассмотрим устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром инерции. Уравнения вращательного движения имеют вид

$$\begin{gathered} A\frac{d\omega_x}{dt} + (C - B)\omega_y\omega_z = 0\,, \quad B\frac{d\omega_y}{dt} + (A - C)\omega_z\omega_x = 0\,, \\ C\frac{d\omega_z}{dt} + (B - A)\omega_x\omega_y = 0\,, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где A, B, C — главные моменты инерции (считаем, что $A > B > C$), ω_x, ω_y, ω_z — проекции угловой скорости на главные оси инерции.

Система (2.4) имеет два интеграла (интеграл энергии и интеграл моментов)

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = C_1\,, \quad A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = C_2\,.$$

Докажем устойчивость перманентного вращения вокруг оси x с наибольшим моментом инерции $\omega_x = \omega_x^0,\ \omega_y = \omega_z = 0$. Введем возмущения x_k и положим $\omega_x = \omega_x^0 + x_1,\ \omega_y = x_2,\ \omega_z = x_3$. Тогда выписанные интегралы движения запишутся в виде

$$F_1 = A(\omega_x^0 + x_1)^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2\,, \quad F_2 = A^2(\omega_x^0 + x_1)^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2\,.$$

Нетрудно проверить, что связка интегралов

$$V(x_1, x_2, x_3) = AF_1 - F_2 + (F_1 - A(\omega_x^0)^2)^2$$

является определенно положительной функцией.

Точно также можно доказать устойчивость вращения вокруг оси z с наименьшим моментом инерции. Вращение вокруг оси y со средним моментом инерции неустойчиво, что будет установлено ниже по линейному приближению. Метод, использующий связку интегралов, не пригоден для установления неустойчивости движения.

§ 3. Устойчивость равновесия и стационарных движений консервативных систем

Устойчивость положения равновесия системы. Напомним, что ранее (см. § 5 главы V первого тома учебника) была сформулирована *теорема Лагранжа*, утверждающая, что положение равновесия является устойчивым, если потенциальная энергия консервативной голономной стационарной системы имеет в этом положении изолированный минимум. Доказательство данной теоремы теперь легко провести, опираясь на теорему 1 Ляпунова.

Действительно, уравнения Лагранжа второго рода, записанные в нормальной форме, или канонические уравнения Гамильтона можно рассматривать как уравнения возмущенного движения, если принять, что в положении равновесия обобщенные координаты и обобщенные скорости равны нулю. Так как на консервативную систему наложены стационарные связи, то существует интеграл энергии

$$T + \Pi = \mathrm{const}\,.$$

Если функцию Ляпунова взять в виде

$$V = T + \Pi\,, \tag{3.1}$$

то легко показать, что она является определенно положительной функцией обобщенных координат и обобщенных скоростей. Действительно, кинетическая энергия T по определению есть положительно определенная квадратичная форма. Потенциальная энергия Π находится с точностью до аддитивного слагаемого, поэтому можно считать, что она обращается в нуль в начале координат. Но тогда можно утверждать, что $\Pi(q^1, q^2, \dots, q^s) \geqslant 0$, так как предполагается, что в начале координат потенциальная энергия имеет изолированный минимум. Следовательно, введенная функция (3.1) оказывается определенно положительной, причем ее полная производная по времени в силу уравнений возмущенного движения тождественно равна нулю, поскольку $T + \Pi = \mathrm{const}$. Таким образом, согласно первой теореме Ляпунова положение равновесия устойчиво.

Отметим, что значительно труднее выявить условия неустойчивости положения равновесия. Приведем некоторые **признаки неустойчивости**. Для их формулировки разложим потенциальную энергию в окрестности положения равновесия в ряд по обобщенным координатам, группируя члены различного порядка малости:

$$\Pi = \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \dots ,$$
$$\Pi_2 = \sum_{k,l=1}^{n} c_{kl} q_k q_l , \quad \Pi_3 = \sum_{k,l,m=1}^{n} c_{klm} q_k q_l q_m , \ \dots . \tag{3.2}$$

Положение равновесия неустойчиво, если потенциальная энергия в положении равновесия

— *не имеет минимума, и это обстоятельство следует из выражения* Π_2 *(А. М. Ляпунов),*
— *имеет строгий максимум, и это обстоятельство следует из членов наинизшей степени* ($m \geqslant 2$) *в разложении* (3.2) *(А. М. Ляпунов),*
— *является однородной функцией обобщенных координат, и положение равновесия не имеет минимума (Н. Г. Четаев).*

Пример 3. На закрепленном бревне лежит брус толщиной $2h$ так, что его центр тяжести C_0 находится на продолжении вертикального радиуса бревна (рис. 2). Брус перекатывается по бревну без проскальзывания. Найти условия устойчивости положения равновесия.

Перекатим брус. Угол поворота бруса обозначим через φ. Тогда дуга равна $r\varphi$, где r — радиус бревна. Вычислим потенциальную энергию силы тяжести бруса. Как следует из рис. 2, имеем

$$\Pi = mg\,(y_c - h - r) = mg\,(OK_1 + K_2K_3 + K_4C - h - r) =$$
$$= mg\,(r\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi + h\cos\varphi - h - r)\,.$$

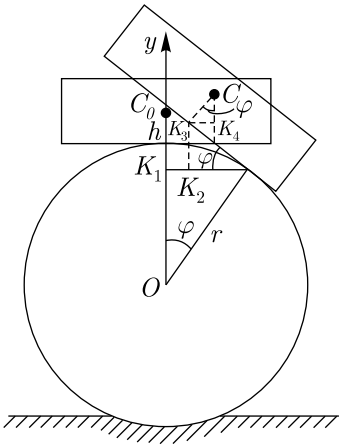

Рис. 2. Равновесие бруса на бревне

Необходимым и достаточным условием равновесия является обращение в нуль обобщенных сил, действующих на систему. В рассматриваемом случае получаем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mg\left(r\varphi\cos\varphi - h\sin\varphi\right) = 0\,,$$

откуда $\varphi = 0$ есть положение равновесия. Для установления устойчивости этого положения вычисляем вторую производную:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mg\left(r\cos\varphi - r\varphi\sin\varphi - h\cos\varphi\right).$$

При $\varphi = 0$ имеем

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mg\left(r - h\right).$$

Отсюда видно, что в положении равновесия при $r > h$ потенциальная энергия имеет минимум, а при $r < h$ — максимум. В первом случае система устойчива, а во втором — неустойчива.

Устойчивость стационарных движений. Пусть координаты $q^1, q^2, \ldots, q^r$ являются циклическими. Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$L = L\left(t, q^{r+1}, q^{r+2}, \ldots, q^s, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots, \dot{q}^s\right).$$

Координаты $q^{r+1}, q^{r+2}, \ldots, q^s$ называются *позиционными*. При наличии r циклических координат уравнения Лагранжа допускают существование r интегралов:

$$\partial L/\partial \dot{q}^i = C_i\,, \quad i = \overline{1, r}\,. \tag{3.3}$$

Если произвольные постоянные $C_i,\ i=\overline{1,r}$, найти по начальным условиям, то из уравнений (3.3) можно определить r обобщенных скоростей:

$$\dot{q}^i = \widehat{\dot{q}}^{\,i}\left(t, q^{r+1}, q^{r+2}, \dots, q^s, \dot{q}^{r+1}, \dot{q}^{r+2}, \dots, \dot{q}^s, C_1, C_2, \dots, C_r\right)\,, \quad i=\overline{1,r}\,.$$

Это возможно, так как

$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\right] \neq 0\,, \quad i,j=\overline{1,r}\,.$$

Подставив эти функции в выражение кинетической энергии, исключим ее зависимость от циклических координат и их скоростей:

$$\widehat{T} = \widehat{T}\left(t, q^{r+1}, q^{r+2}, \dots, q^s, \dot{q}^{r+1}, \dot{q}^{r+2}, \dots, \dot{q}^s, C_1, C_2, \dots, C_r\right)\,.$$

Система уравнений Лагранжа второго рода (6.4) из первого тома учебника при наличии интегралов (3.3), как показал Раус, может быть сведена к уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\dot{q}^p} - \frac{\partial R}{\partial q^p} = -\frac{\partial\Pi}{\partial q^p}\,, \quad R = \widehat{T} - \sum_{i=1}^{r} C_i\dot{q}^i\,, \quad p=\overline{r+1,s}\,, \tag{3.4}$$

где R — *функция Рауса*. Уравнения (3.4) содержат лишь позиционные координаты и скорости и называются *уравнениями Рауса*.

В функции R можно выделить следующие слагаемые:

$$R = R_2 + R_1 + R_0\,, \quad R_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k=r+1}^{s} a_{jk}\dot{q}^i\dot{q}^k\,,$$

$$R_1 = \sum_{j=r+1}^{s} a_j\dot{q}^j\,.$$

Здесь величины $a_{jk},\ a_j,\ R_0$ являются функциями позиционных координат и постоянных интегрирования $C_1, C_2, \dots, C_r$.

Так как $\partial R_0/\partial\dot{q}^p = 0$, а

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial\dot{q}^p} - \frac{\partial R_1}{\partial q^p} = \frac{da_p}{dt} - \sum_{j=r+1}^{s}\frac{\partial a_j}{\partial q^p}\,\dot{q}^j =$$

$$= \sum_{j=r+1}^{s}\frac{\partial a_p}{\partial q^j}\,\dot{q}^j - \sum_{j=r+1}^{s}\frac{\partial a_j}{\partial q^p}\,\dot{q}^j = \sum_{j=r+1}^{s}\mathrm{g}_{pj}\,\dot{q}^j\,,$$

где

$$\mathrm{g}_{pj} = \frac{\partial a_p}{\partial q^j} - \frac{\partial a_j}{\partial q^p}\,,$$

то уравнения (3.4) могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot q^p} - \frac{\partial R_2}{\partial q^p} = -\frac{\partial W}{\partial q^p} - \sum_{j=r+1}^{s} \mathrm{g}_{pj}\dot q^j\,, \qquad p = \overline{r+1, s}\,. \tag{3.5}$$

Здесь

$$W = \Pi - R_0\,. \tag{3.6}$$

Уравнениям (3.5) можно сопоставить некоторую систему, называемую *приведенной*, в которой функции R_2 и W играют роли кинетической и потенциальной энергий. Слагаемые суммы $\sum\limits_{j=r+1}^{s}(-\mathrm{g}_{pj}\dot q^j)$, как уже отмечалось в § 6 главы VII первого тома учебника, являются гироскопическими силами, так как они характерны для систем, содержащих гироскопы. Эти силы имеют кососимметричную матрицу, поскольку $\mathrm{g}_{pj} = -\mathrm{g}_{jp}$. Важным свойством гироскопических сил является обращение в нуль их работы на действительном перемещении системы. Следствием этого является существование интеграла энергии

$$R_2 + W = R_2 + \Pi - R_0 = \mathrm{const}\,.$$

Будем считать движение системы *стационарным*, если все позиционные координаты и циклические скорости не изменяются, то есть если выполняются условия

$$q^p(t) = q_0^p\,, \quad p = \overline{r+1, s}\,, \quad \dot q^i = \dot q_0^i\,, \quad i = \overline{1, r}\,.$$

Как следует из системы (3.5), стационарному движению исходной системы соответствует состояние покоя приведенной. При этом обобщенные силы обращаются в нуль, то есть

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q^p}\right)_{q_0^p} = 0\,, \quad p = \overline{r+1, s}\,,$$

или

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^p}\right)_{q_0^p} = \left(\frac{\partial R_0}{\partial q^p}\right)_{q_0^p}\,, \quad p = \overline{r+1, s}\,. \tag{3.7}$$

Таким образом, исследование устойчивости стационарного движения сводится к исследованию устойчивости состояния покоя приведенной системы. Критерием устойчивости в данном случае является *теорема Рауса*: *если в стационарном движении функция* $W = \Pi - R_0$ *имеет минимум и возмущения не нарушают циклических интегралов* (3.3), *то это движение устойчиво относительно позиционных координат и скоростей.*

Пример 4. Исследуем устойчивость движения конического маятника (см. § 2 главы VI первого тома учебника). Выражения кинетической и потенциальной энергий запишутся следующим образом:

$$T = \frac{ml^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\theta\right), \quad \Pi = -mgl\cos\theta\,.$$

Координата ψ является циклической, а θ — позиционной. Из циклического интеграла

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = ml^2\dot\psi\sin^2\theta = C \tag{3.8}$$

находим $\dot\psi = C\,/(ml^2\sin^2\theta)$ и подставляем в выражение кинетической энергии:

$$\widehat{T} = \frac{ml^2}{2}\,\dot\theta^2 + \frac{C^2}{2ml^2\sin^2\theta}\,.$$

В данном случае функция Рауса имеет вид

$$R = \widehat{T} - C\widehat{\dot\psi} = \frac{ml^2}{2}\,\dot\theta^2 - \frac{C^2}{2ml^2\sin^2\theta}\,,$$

откуда

$$R_2 = \frac{ml^2}{2}\,\dot\theta^2\,, \quad R_1 = 0\,, \quad R_0 = -\frac{C^2}{2ml^2\sin^2\theta}\,.$$

Составим функцию (3.6):

$$W = \Pi - R_0 = -mgl\cos\theta + \frac{C^2}{2ml^2\sin^2\theta}\,.$$

Как ранее, при стационарном движении обозначим θ и $\dot\psi$ через α и ω. Из условия (3.7) получим

$$mgl\sin\alpha = \frac{C^2\cos\alpha}{ml^2\sin^3\alpha}\,.$$

Исключая отсюда с помощью циклического интеграла (3.8), записанного для стационарного движения, постоянную C, выводим соотношение $\omega^2 l\cos\alpha = \mathrm{g}$.

Функция W при $\theta = 0$ имеет минимум, так как

$$\left.\frac{dW}{d\theta}\right|_{\theta=\alpha} = 0\,, \quad \left.\frac{d^2W}{d\theta^2}\right|_{\theta=\alpha} = mgl\cos\alpha + \frac{C^2(3\,cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{ml^2\sin^4\alpha} > 0\,.$$

Здесь учтено, что угол α изменяется в пределах $0 < \alpha < \pi/2$.

Таким образом, из теоремы Рауса следует, что движение конического маятника устойчиво.

§ 4. Теоремы Томсона и Тета

В этом параграфе обсуждается влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость положения равновесия консервативной системы. Рассматривается линейная система с n степенями свободы, которая в векторной форме записывается в виде

$$\boldsymbol{A}\cdot\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{B}\cdot\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Gamma}\cdot\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}\,,\qquad \boldsymbol{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_n)^T\,. \tag{4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{q}$ — вектор обобщенных координат, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{C}$ — постоянные квадратные матрицы, причем матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ симметричные, а матрица $\boldsymbol{\Gamma}$ кососимметричная, матрица $\boldsymbol{A}$ определенно положительная, матрица $\boldsymbol{B}$ положительная или равна нулю. Слагаемые в (4.1) описывают последовательно силы инерции, диссипативные силы, гироскопические силы и потенциальные силы.

Если $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{0}$, а матрица $\boldsymbol{C}$ определенно положительная, то положение равновесия $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ согласно теореме Лагранжа устойчиво. Ниже обсуждается влияние матриц $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{\Gamma}$ на устойчивость положения равновесия. Результаты представлены в виде четырех *теорем Томсона и Тета.*

Теорема 1. *Если положение равновесия консервативной системы устойчиво (то есть матрица $\boldsymbol{C}$ определенно положительная), то добавление диссипативных и гироскопических сил не нарушает устойчивость.*

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 диссипативные силы с полной диссипацией (то есть матрица $\boldsymbol{B}$ определенно положительная), то положение равновесия асимптотически устойчиво.*

Теорема 3. *Если степень неустойчивости положения равновесия консервативной системы четная, то добавление гироскопических сил может привести к устойчивости положения равновесия. Если степень неустойчивости нечетная, то добавление гироскопических сил не может привести к устойчивости.*

Теорема 4. *Если степень неустойчивости четная и в результате добавления гироскопических сил положение равновесия стало устойчивым (см. теорему 3), то добавление диссипативных сил разрушает устойчивость.*

Не приводя полного доказательства всех теорем Томсона и Тета, ограничимся их обсуждением.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{q}}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{q}^T\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{q}\,,$$

равную полной энергии системы. В условиях теорем 1 и 2 эта функция положительно определенная. Ее производная, вычисленная в силу системы (4.1), равна

$$V' = -\dot{\boldsymbol{q}}^T\cdot\boldsymbol{B}\cdot\dot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{4.2}$$

Заметим, что гироскопические силы не производят работы, поэтому матрица $\boldsymbol{\Gamma}$ не входит в выражение (4.2).

В условиях теоремы 1 функция V' отрицательна, поэтому заключение теоремы 1 сразу следует из теоремы 1 Ляпунова об устойчивости.

Функция V' не является определенно отрицательной функцией $2n$ аргументов $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$, поэтому теорема 2 Ляпунова об асимптотической устойчивости здесь неприменима. Из формулы (4.2) следует, что полная энергия системы со временем убывает, следовательно, утверждение теоремы 2 является ожидаемым.

Для доказательства теоремы 2 будем искать решение системы (4.1) в виде $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{u}e^{\mu t}$. Для амплитудного вектора $\boldsymbol{u}$ получаем алгебраическую систему уравнений

$$\boldsymbol{D}(\mu)\cdot\boldsymbol{u} = 0\,, \qquad \boldsymbol{D}(\mu) = \mu^2\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{B} + \mu\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{C}\,. \tag{4.3}$$

Пусть μ — один из $2n$ корней характеристического уравнения

$$\det(\boldsymbol{D}(\mu)) = 0\,, \tag{4.4}$$

а $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + i\boldsymbol{u}_2$ — соответствующий амплитудный вектор, в котором отделены вещественная и мнимая части. Умножим уравнение (4.3) на вектор $(\boldsymbol{u}_1 - i\boldsymbol{u}_2)^T$. Тогда после преобразований для μ получим квадратное уравнение

$$a\mu^2 + (b + i\gamma)\mu + c = 0\,, \tag{4.5}$$

где

$$a = \boldsymbol{u}_1^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}_2\,, \quad b = \boldsymbol{u}_1^T\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2^T\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}_2\,,$$
$$c = \boldsymbol{u}_1^T\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2^T\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{\gamma} = 2\,\boldsymbol{u}_1^T\cdot\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{u}_2\,.$$

С учетом свойств матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ имеем $a,\ b,\ c > 0$. Тогда можно доказать, что при любом вещественном γ оба корня уравнения (4.5) имеют отрицательные вещественные части.

В теоремах 3 и 4 (в отличие от теорем 1 и 2) не предполагается, что матрица $\boldsymbol{C}$ положительно определенная. В силу симметрии матрицы $\boldsymbol{C}$ все корни λ_k характеристического уравнения $\det(\lambda\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})=0$ вещественные. Число m положительных корней этого уравнения называется *степенью неустойчивости* системы. Случай нулевых корней не рассматривается.

Линейным неособым преобразованием $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{p}$ приведем консервативную часть системы (4.1) к главным координатам:

$$\ddot{p}_k-\lambda_k p_k=0\,,\qquad k=\overline{1,n}\,. \tag{4.6}$$

Уравнениям (4.6) с $\lambda_k>0$ соответствуют неустойчивые движения. Пусть степень неустойчивости m четная. Разобьем неустойчивые движения на пары и покажем, что добавлением гироскопических сил неустойчивые движения пары могут стать устойчивыми. Рассмотрим одну из пар:

$$\ddot{p}_1+\gamma\dot{p}_2-\lambda_1 p_1=0\,,\quad \ddot{p}_2-\gamma\dot{p}_1-\lambda_2 p_2=0\,,\qquad \lambda_1,\lambda_2<0\,. \tag{4.7}$$

У характеристического уравнения системы (4.7) $\mu^4+(\gamma^2-\lambda_1-\lambda_2)\mu^2+\lambda_1\lambda_2=0$ при $|\gamma|>\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}$ все корни чисто мнимые.

Если степень неустойчивости m нечетная, то для одного из положительных корней λ_k не найдется пары. В результате оказывается, что движение системы (4.1) будет неустойчивым при любых гироскопических силах. Рассмотрим характеристическое уравнение (4.4) $f(\mu)=\det(\boldsymbol{D}(\mu))=0$ при $\boldsymbol{B}=0$. Функция $f(\mu)$ — это четная функция μ, ибо, с одной стороны, транспонирование матрицы $\boldsymbol{D}(\mu)$ не меняет ее определителя, с другой, — гироскопические члены с множителем μ меняют знак. Положим $\mu^2=\lambda$ и перепишем уравнение (4.4) в виде $f_1(\lambda)=f(\mu)=0$. Это уравнение имеет положительный корень $\lambda>0$, ибо знак $f_1(0)$ совпадает с отрицательным (при нечетном m) знаком определителя $\det(\boldsymbol{C})$, а при $\lambda\to\infty$ знак $f_1(\lambda)$ совпадает с положительным знаком определителя $\det(\boldsymbol{A})$.

При обсуждении теоремы 4 ограничимся рассмотрением системы (4.7), в которую включены диссипативные силы:

$$\ddot{p}_1+b_1\dot{p}_1-\gamma\dot{p}_2-\lambda_1 p_1=0\,,\quad \ddot{p}_2+b_2\dot{p}_2+\gamma\dot{p}_1-\lambda_2 p_2=0\,,\qquad \lambda_1,\lambda_2<0\,. \tag{4.8}$$

Характеристическое уравнение системы (4.8)

$$\mu^4+a_1\mu^3+a_2\mu^2+a_3\mu+a_4=0\,,\quad a_3=-b_1\lambda_2-b_2\lambda_1$$

имеет отрицательный коэффициент a_3, что говорит о неустойчивости нулевого решения системы (4.8).

В реальных системах всегда присутствуют силы сопротивления, поэтому устойчивость, достигнутая за счет действия гироскопических сил, называется *вре́менной* в отличие от обычной устойчивости по Ляпунову, которую в гироскопических системах называют *вековой*.

Пример 5. Малые колебания вблизи вертикального положения симметричного вращающегося волчка описываются приближенной системой уравнений

$$A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} - Pz_c\alpha = 0\,, \qquad A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} - Pz_c\beta = 0\,, \tag{4.9}$$

где A — момент инерции волчка относительно горизонтальной оси, проходящей через точку опоры, C — момент инерции относительно оси волчка, α, β — углы отклонения оси волчка от вертикали в плоскостях xz и yz, ω — угловая скорость вращения волчка, P — вес волчка, $OC = z_c$ — расстояние от центра тяжести до точки опоры (см. рис. 3).

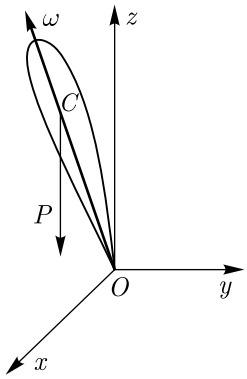

Рис. 3. Устойчивость вертикального положения симметричного вращающегося волчка

Степень неустойчивости системы (4.9) при $\omega = 0$ равна 2, что соответствует возможности падения в плоскостях xz, yz. При

$$\omega > \frac{2\sqrt{APz_c}}{C}$$

вертикальное положение волчка становится устойчивым, однако силы трения разрушают эту устойчивость.

§ 5. Исследование устойчивости по линейному приближению

Во многих случаях суждение об устойчивости нулевого решения уравнения в возмущениях можно получить по линейному приближению. Рассмотрим здесь автономное уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.1}$$

Считая вектор-функцию $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ голоморфной функцией $\boldsymbol{x}$, разложим ее в ряд, выделив линейное приближение

$$\begin{gathered}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{A} = \left.\frac{d\boldsymbol{X}}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} = (a_{km})\,,\\ a_{km} = \left.\frac{\partial X_k}{\partial x_m}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}\,, \quad k,m=\overline{1,n}\,,\end{gathered} \tag{5.2}$$

где вектор-функция $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})$ содержит слагаемые выше первого порядка малости при $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}$. Впрочем, предположение о голоморфности функции $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ является слишком ограничительным, приведенные в этом параграфе теоремы остаются без изменения и при $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}) = o(||\boldsymbol{x}||)$.

Наряду с системой (5.1) или (5.2) будем рассматривать ее линейное приближение

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y}\,. \tag{5.3}$$

Отыскивая решение системы (5.3) в виде $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}e^{\lambda t}$, для определения неизвестных $\boldsymbol{u}$ получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\,, \tag{5.4}$$

где $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица порядка n.

Для того чтобы система (5.4) имела нетривиальное решение, определитель из ее коэффициентов должен обращаться в нуль:

$$\Delta(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{5.5}$$

Запишем еще характеристическое уравнение (5.5) в виде равенства нулю полинома степени n:

$$\Delta(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,. \tag{5.6}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения (5.6). Как следует из трех приведенных ниже теорем, устойчивость нулевого решения как линейной системы (5.3), так и нелинейной системы (5.1) существенно зависит от этих корней.

Теорема 1 об асимптотической устойчивости. *Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение как линейной системы* (5.3), *так и нелинейной системы* (5.1) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 2 о неустойчивости. *Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет отрицательную вещественную часть, то нулевое решение как линейной системы* (5.3), *так и нелинейной системы* (5.1) *неустойчиво.*

Теорема 3. Критический случай. *Предполагается, что среди корней характеристического уравнения нет корней с положительной вещественной частью, однако есть нулевые и/или чисто мнимые корни. При этом предположении нулевое решение уравнений первого приближения* (5.3) *устойчиво, если корням с нулевой вещественной частью соответствуют простые элементарные делители определителя* (5.5), *и неустойчиво, если кратным корням с нулевой вещественной частью соответствуют кратные элементарные делители. В критическом случае асимптотическая устойчивость, устойчивость или неустойчивость нулевого решения нелинейного уравнения* (5.1) *зависит от нелинейных слагаемых* $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})$.

Для *доказательства* утверждений теорем 1–3 в части, касающейся линейной системы (5.3), достаточно вспомнить, что ее общее решение складывается из частных решений вида $\boldsymbol{u}_k e^{\lambda_k t}$ в случае простых элементарных делителей матрицы (5.5) и из частных решений вида

$$\left(\boldsymbol{u}_k^{(0)} + \boldsymbol{u}_k^{(1)} t + \cdots + \boldsymbol{u}_k^{(m-1)} t^{m-1}\right) e^{\lambda_k t}$$

в случае элементарных делителей кратности m.

При доказательстве теорем 1 и 2 для нелинейной системы (5.1) ограничимся частным случаем, когда все корни уравнения (5.6) простые, вещественные и среди них нет нулевого корня, хотя сами теоремы 1 и 2 справедливы и без этих ограничений. Рассмотрим невырожденное линейное преобразование неизвестных $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{z}$, приводящее матрицу $\boldsymbol{A}$ к диагональному виду. Тогда система уравнений (5.3) запишется в виде

$$\dot{z}_k - \lambda_k z_k + \widehat{\theta}_k(\boldsymbol{z}) = 0\,, \quad k = \overline{1, n}\,, \tag{5.7}$$

где, по-прежнему, $\widehat{\theta}_k(\boldsymbol{z})$ — нелинейные функции, удовлетворяющие условию $\widehat{\theta}_k(\boldsymbol{z}) = o(|\boldsymbol{z}|)$ при $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{0}$.

Для доказательства теоремы 1 возьмем определенно положительную функцию Ляпунова в виде

$$V(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} z_k^2\,.$$

Ее производная в силу уравнения (5.7) равна

$$V'(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k^2 + P(\boldsymbol{z}), \quad P(\boldsymbol{z}) = -\sum_{k=1}^{n} z_k \widehat{\theta}_k(\boldsymbol{z}) = o(|\boldsymbol{z}|^2).$$

При всех $\lambda_k < 0$ функция $V'(\boldsymbol{z})$ определенно отрицательная, ибо поправочное слагаемое $P(\boldsymbol{z})$ при $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{0}$ имеет более высокий порядок малости и не влияет на знак. Следовательно, для системы (5.7) выполнены условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. В силу невырожденности преобразования $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{z}$ нулевое решение системы (5.1) также асимптотически устойчиво.

Для доказательства теоремы 2 возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k^2.$$

Ее производная в силу уравнения (5.7) равна

$$V'(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 z_k^2 + Q(\boldsymbol{z}), \quad Q(\boldsymbol{z}) = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k \widehat{\theta}_k(\boldsymbol{z}) = o(|\boldsymbol{z}|^2).$$

В силу условий теоремы 2 функция $V'(\boldsymbol{z})$ определенно положительная, а сама функция $V(\boldsymbol{z})$ может принимать положительные значения при произвольно малых значениях $|\boldsymbol{z}|$. Следовательно, выполнены условия теоремы Ляпунова о неустойчивости.

В связи с теоремой 3 для нелинейной системы (5.1) вернемся к обсуждению примера 1, в котором рассмотрена система уравнений (2.2):

$$\dot{x}_1 = x_2 + \mu x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2^3.$$

Характеристическое уравнение линейного приближения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Как показано в примере 1, в зависимости от параметра μ нулевое решение асимптотически устойчиво ($\mu < 0$), устойчиво ($\mu = 0$) или неустойчиво ($\mu > 0$).

А. М. Ляпуновым было выполнено исследование критических случаев в случае одного нулевого корня характеристического уравнения (5.5),

в случае двух нулевых корней и в случае пары чисто мнимых корней. Исследования критических случаев при различных предположениях продолжаются и в настоящее время.

Остальная часть параграфа посвящена формулировке критериев того, что все корни уравнения (5.6) имеют отрицательные вещественные части.

Сформулируем сначала **необходимое условие**.

Для того чтобы все корни уравнения (5.6) *при* $a_0 > 0$ *имели отрицательные вещественные части, необходимо, чтобы выполнялось* $a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$.

Пусть все корни уравнения (5.6) имеют отрицательные вещественные части. Разложим левую часть (5.6) на множители:

$$\Delta(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)\,. \tag{5.8}$$

Для вещественного корня $\lambda - \lambda_k = \lambda + \alpha_k$, $\alpha_k > 0$. Для пары комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta$ имеем $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 2\lambda\alpha + \alpha^2 + \beta^2$. Следовательно, произведение (5.8) состоит из сомножителей с положительными коэффициентами.

Критерий Рауса — Гурвица. Рассмотрим бесконечную матрицу, составленную из коэффициентов уравнения (5.6):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Для того чтобы все корни уравнения (5.6) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно (при* $a_0 > 0$*) выполнение* n *неравенств*

$$\begin{gathered} \Delta_1 = a_1 > 0\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0\,, \dots\,, \quad \Delta_n > 0\,. \end{gathered} \tag{5.10}$$

Определители (5.10) составлены из левой верхней части матрицы (5.9). Элементы a_k в определителях (5.10) при $k > n$ заменяются нулями. Критерий Рауса — Гурвица приводится без доказательства.

Многочлены (5.6), все корни которых имеют отрицательные вещественные части, называются *гурвицевыми*.

Рассмотрим частные случаи.

При $n = 1$ критерий Рауса — Гурвица приводит к условию $a_1 > 0$.

При $n = 2$ получаем условия $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$.

При $n = 3$ положительности коэффициентов уравнения (5.6) уже недостаточно. Кроме положительности коэффициентов дополнительно должно быть выполнено условие $a_1 a_2 > a_0 a_3$. Это условие впервые было получено Вышнеградским при исследовании устойчивости работы регулятора Уатта. Уравнение третьей степени $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ после замены переменной может быть приведено к виду $z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + 1 = 0$, и наряду с условиями $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ дополнительное условие имеет вид $b_1 b_2 > 1$. На плоскости b_1, b_2 область асимптотической устойчивости лежит выше параболы $b_1 b_2 = 1$ (см. рис. 4).

Рис. 4. Определение области асимптотической устойчивости с помощью критерия Рауса — Гурвица

Критерий Михайлова. При формулировке этого критерия записываем уравнение (5.6) в виде

$$f(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots + b_n\lambda^n = 0\,, \quad b_0 > 0\,. \tag{5.11}$$

Положим $\lambda = i\omega$. Тогда

$$f(i\omega) = f_1(\omega) + i f_2(\omega)\,,$$
$$f_1(\omega) = b_0 - \beta_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots\,, \quad f_2(\omega) = b_1\omega - \beta_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots\,.$$

На комплексной плоскости $z = x + iy$ строим параметрически заданную кривую:

$$x = f_1(\omega)\,, \quad y = f_2(\omega)\,, \qquad 0 \leqslant \omega < \infty\,. \tag{5.12}$$

Предполагается, что уравнение (5.11) не имеет чисто мнимых корней. Тогда кривая (5.12) не проходит через начало координат, и можно ввести

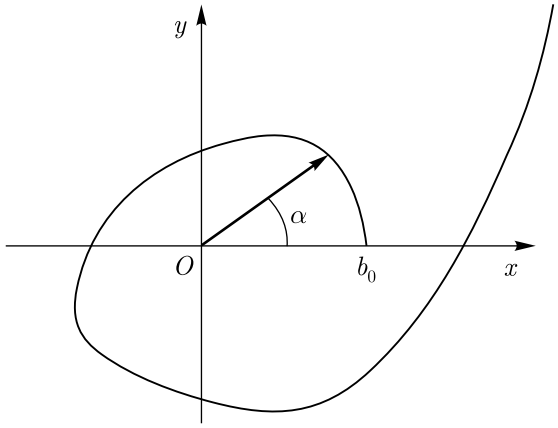

Рис. 5. Диаграмма Михайлова

радиус-вектор, соединяющий текущую точку на кривой с началом координат (см. рис. 5).

Будем следить за углом поворота этого вектора при изменении параметра ω от нуля до бесконечности. Полное изменение $\Delta\alpha$ этого угла пропорционально $\pi/2$ и равно $\Delta\alpha = k\pi/2$, где k — целое число, ибо угол $\alpha = 0$ при $\omega = 0$, и в зависимости от четности n угол α стремится к нулю или к $\pm\pi/2$ при $\omega \to \infty$. Последнее утверждение следует из формулы $\operatorname{tg}\alpha = f_2(\omega)/f_1(\omega)$, и в зависимости от четности n больше степень числителя или степень знаменателя. В примере на рис. 5 $k = 5$.

Теперь можно сформулировать **критерий Михайлова**:

Для того, чтобы все корни уравнения (5.11) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнение равенства* $\Delta\alpha = n\pi/2$.

При построении диаграммы Михайлова получается и побочный результат:

Если $k = n - 2m$, *то уравнение* (5.11) *имеет* $n - m$ *корней с отрицательной вещественной частью и* m *корней с положительной.*

Для *доказательства* разложим многочлен (5.11) на множители

$$f(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

и воспользуемся тем, что аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей.

Найдем вклад в полное приращение угла $\Delta\alpha$, связанный с отдельными сомножителями, при изменении параметра ω от 0 до $+\infty$. При этом конец

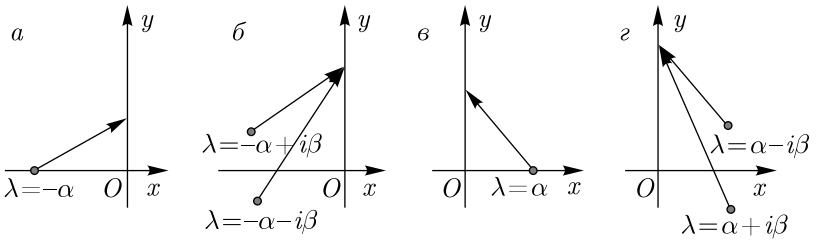

Рис. 6. О количестве корней характеристического уравнения с отрицательными и положительными вещественными частями

вектора движется по оси y от 0 до $+\infty$. Из рис. 6,*а* ясно, что вклад множителя с отрицательным корнем $\lambda = -\alpha$ равен $\pi/2$, вклад двух множителей, соответствующих паре чисто мнимых корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ с отрицательной вещественной частью, равен π (см. рис. 6,*б*). Вклады корней с положительной вещественной частью равны, соответственно, $-\pi/2$ (рис. 6,*в*) и $-\pi$ (рис. 6,*г*). Сложение вкладов завершает доказательство.

§ 6. Устойчивость периодических решений по линейному приближению

Рассмотрим уравнение с периодической правой частью:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}, t)\,, \quad \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}\,, \qquad \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}, t+T) \equiv \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}, t)\,. \tag{6.1}$$

Предположим, что уравнение (6.1) имеет периодическое решение $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$, $\boldsymbol{\varphi}(t+T) = \boldsymbol{\varphi}(t)$. Положим $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{x}(t)$. Тогда для возмущения $\boldsymbol{x}(t)$ получим уравнение, в котором выделено линейное приближение:

$$\begin{gathered} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, t)\,, \quad \boldsymbol{A}(t) = \left.\frac{d\boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)} = (a_{km}(t))\,, \\ a_{km}(t) = \left.\frac{\partial Y_k}{\partial y_m}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)}\,, \quad k, m = \overline{1, n}\,, \end{gathered} \tag{6.2}$$

где вектор-функция $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, t) = o(||\boldsymbol{x}||)$. В отличие от уравнения (5.2) здесь матрица $\boldsymbol{A}(t)$ и вектор-функция $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, t)$ периодичны по t с периодом T.

В качественном отношении результаты исследования устойчивости нулевого решения уравнения (6.2) дословно повторяют результаты для автономного уравнения (5.2). Дело в том, что существует невырожденное линейное преобразование $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{H}(t)\cdot\boldsymbol{x}$, в результате которого уравнение (6.2)

принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \boldsymbol{A}_*(t)\cdot\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\theta}_*(\boldsymbol{z},t)\,, \quad \boldsymbol{\theta}_*(\boldsymbol{x},t) = o(||\boldsymbol{x}||)$$

с постоянной матрицей $\boldsymbol{A}_*$. Тем самым рассматриваемая задача в линейном приближении сводится к автономной.

Однако вернемся к уравнению (6.2) и рассмотрим уравнение линейного приближения

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{x}\,, \quad \boldsymbol{A}(t+T) = \boldsymbol{A}(t)\,. \tag{6.3}$$

Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее соотношению

$$\boldsymbol{x}(t+T) = \rho\boldsymbol{x}(t)\,.$$

В силу периодичности $\boldsymbol{x}(t+kT) = \rho^k\boldsymbol{x}(t)$, поэтому параметр ρ, называемый *характеристическим показателем*, служит мерой скорости роста решения с течением времени. Ясно, что $|\boldsymbol{x}(t)| \to 0$ при $|\rho| < 1$ и $|\boldsymbol{x}(t)| \to \infty$ при $|\rho| > 1$.

Для вычисления характеристических показателей построим фундаментальную матрицу решений $\boldsymbol{X}(t)$ уравнения (6.3):

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{X}\,, \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{E}\,. \tag{6.4}$$

Любое решение уравнения (6.3) имеет вид

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{C}\,, \quad \boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T\,, \tag{6.5}$$

где $\boldsymbol{C}$ — вектор произвольных постоянных. Подставляя (6.5) в соотношение (6.3) при $t = 0$, приходим к уравнению $(\boldsymbol{X}(T) - \rho\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{C} = 0$, откуда получаем уравнение для определения характеристических показателей

$$\det(\boldsymbol{X}(T) - \rho\boldsymbol{E}) = 0\,. \tag{6.6}$$

Матрица $\boldsymbol{X}(T)$ называется *матрицантом*. Уравнение (6.6) имеет n корней $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$.

Теоремы 1 и 2 предыдущего параграфа почти дословно повторяются и для периодических уравнений (6.2) и (6.3):

Теорема 1 об асимптотической устойчивости. *Если все характеристические показатели по модулю меньше единицы, то нулевое решение систем* (6.2) *и* (6.3) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 2 о неустойчивости. *Если хоть один характеристический показатель по модулю больше единицы, то нулевое решение систем* (6.2) *и* (6.3) *неустойчиво.*

Теорема 3. Критический случай. *Если все характеристические показатели по модулю не превосходят единицы и характеристические показатели с* $|\rho| = 1$ *являются простыми корнями уравнения* (6.6), *то нулевое решение линейного уравнения* (6.3) *устойчиво. Устойчивость нулевого решения нелинейного уравнения, как и ранее, зависит от функции* $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, t)$.

К сожалению, в общем случае для построения матрицанта $\boldsymbol{X}(T)$ можно использовать лишь методы численного интегрирования задачи Коши (6.4) на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$.

Если периодическая составляющая матрицы $\boldsymbol{A}(t)$ мала, то есть

$$\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_0 + \mu \boldsymbol{A}_1(t)\,, \qquad \mu \ll 1\,,$$

то для построения матрицанта и последующего исследования устойчивости могут быть использованы методы разложения в ряд по малому параметру, что будет продемонстрировано ниже.

§ 7. Колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса. Уравнение Матье

Уравнение колебаний математического маятника в вертикальной плоскости имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{\mathrm{g}}{l} \sin \varphi = 0\,,$$

где $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника от вертикали, l — длина маятника, g — ускорение свободного падения. В случае вибрирующей в вертикальном направлении точки подвеса следует считать $\mathrm{g} = \mathrm{g}_0 + A\omega^2 \sin \omega t$, где A и ω — амплитуда и частота колебаний (рис. 7,*а*).

Введем безразмерные обозначения, в которых запишем в линейном приближении уравнение колебаний в стандартном виде *уравнения Матье*:

$$x'' + (q + \mu \cos 2\tau)\, x = 0, \quad (.)' = \frac{d(.)}{d\tau}\,, \tag{7.1}$$

где

$$\tau = \frac{\omega t}{2}\,, \quad q = \frac{4\mathrm{g}_0}{l\omega^2}\,, \quad \mu = \frac{4A}{l}\,.$$

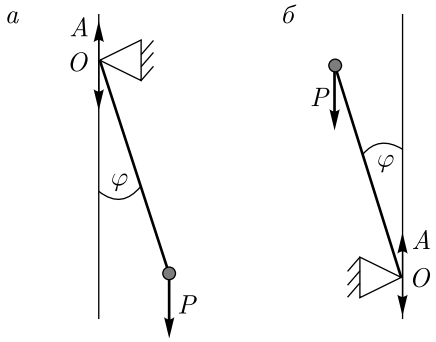

Рис. 7. Маятник с колеблющейся точкой подвеса

При $\mu \ll 1$ линейно независимые решения уравнения (7.1) ищем в виде

$$\begin{aligned} &x_1(\tau,\mu) = x_{10}(\tau) + \mu x_{11}(\tau) + \mu^2 x_{12}(\tau) + \dots\,, \\ &x_1(0,\mu) = 1\,, \quad x_1'(0,\mu) = 0\,, \\ &x_2(\tau,\mu) = x_{20}(\tau) + \mu x_{21}(\tau) + \mu^2 x_{22}(\tau) + \dots\,, \\ &x_2(0,\mu) = 0\,, \quad x_2'(0,\mu) = 1\,. \end{aligned} \tag{7.2}$$

В нулевом приближении имеем $x_{10} = \cos(q_1\tau)$, $x_{20} = \sin(q_1\tau)/q_1$, $q_1 = \sqrt{q}$, а последующие приближения находим из рекуррентных задач Коши

$$x_{km}'' + q\,x_{km} + x_{k,m-1}\cos 2\tau = 0\,, \quad x_{km}(0) = 0, \quad x_{km}'(0) = 0\,,$$
$$k = 1, 2,\ m = 1, 2, \dots\,,$$

решения которых выражается через интегралы Дюамеля

$$x_{km}(\tau) = -\frac{1}{q_1}\int_0^\tau \sin(q_1(\tau-\tau_1))x_{k,m-1}(\tau_1)\cos 2\tau_1\,d\tau_1\,.$$

Период функции в уравнении (7.1) равен π, поэтому уравнение (6.6) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x_1(\pi,\mu) - \rho & x_1'(\pi,\mu) \\ x_2(\pi,\mu) & x_2'(\pi,\mu) - \rho \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \rho^2 - 2a\rho + \Delta = 0\,, \tag{7.3}$$

где

$$2a = x_1(\pi,\mu) + x_2'(\pi,\mu)\,, \quad \Delta = x_1(\pi,\mu)x_2'(\pi,\mu) - x_1'(\pi,\mu)x_2(\pi,\mu)\,.$$

Нетрудно проверить, что $\Delta' = 0$, поэтому с учетом начальных условий (7.2) $\Delta = 1$, и уравнение (7.3) принимает вид

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0\,. \tag{7.4}$$

При $|a| > 1$ оба корня ρ_1 и ρ_2 уравнения (7.4) вещественные и один из них по модулю больше единицы, следовательно, нулевое решение уравнения (7.1) неустойчиво. Если же $|a| < 1$, корни ρ_1 и ρ_2 комплексные, причем $|\rho_{1,2}| = 1$, следовательно, нулевое решение устойчиво. Случай $|a| = 1$ определяет границу области неустойчивости на плоскости параметров (q, μ).

Проводя вычисления по формулам (7.2), находим

$$a = \cos(q_1\pi) + \mu^2 \frac{\pi \sin(q_1\pi)}{16q_1(q_1^2 - 1)} + O(\mu^3)\,,$$

откуда следует, что при $\mu \ll 1$ неустойчивость возможна, если величина q_1 близка к одному из целых чисел 1, 2, ... Пусть $q_1 = 1 + \varepsilon$, тогда

$$a = -1 + \frac{\pi}{2}\left(\varepsilon^2 - \frac{\mu^2}{16}\right) + O(\mu^3)\,. \tag{7.5}$$

Тем самым найдена главная область неустойчивости $|\varepsilon| < \mu/4 + O\mu^2$, или $|q - 1| < \mu/8 + O\mu^2$. Для построения остальных областей неустойчивости следует удерживать бóльшее число слагаемых в разложении (7.5). Приведем границы первых трех областей неустойчивости (с сохранением слагаемых порядка μ^3), взятые из справочников по специальным функциям:

$$1 - \frac{\mu}{8} - \frac{\mu^2}{32} + \frac{\mu^3}{512} < q^{(1)} < 1 + \frac{\mu}{8} - \frac{\mu^2}{32} - \frac{\mu^3}{512}\,,$$
$$4 - \frac{\mu^2}{48} < q^{(2)} < 4 + \frac{5\mu^2}{48}\,,$$
$$9 + \frac{\mu^2}{64} - \frac{\mu^3}{512} < q^{(3)} < 9 + \frac{\mu^2}{64} + \frac{\mu^3}{512}\,.$$

Области неустойчивости примыкают к оси $\mu = 0$ в точках $q^{(n)} = n^2$ (рис. 8). У главной области неустойчивости касательные к ее границам при $\mu = 0$ образуют конечный угол (это *широкая* область неустойчивости). Остальные области неустойчивости — *узкие*, ибо касательные к их границам при $\mu = 0$ совпадают.

Выше рассмотрены колебания маятника без учета сил сопротивления. В случае наличия сил сопротивления, пропорционального скорости, области неустойчивости показаны на рис. 8 пунктиром. Эти области уже не примыкают к оси $\mu = 0$, и неустойчивость в узких областях может возбуждаться при бóльших значениях μ, чем в широкой.

Рассмотрим также устойчивость вертикального положения перевернутого маятника (рис. 7,*b*), когда точка опоры расположена внизу. При отсут-

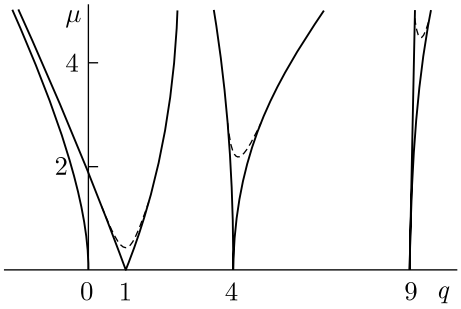

Рис. 8. Диаграмма Айнса — Стретта

ствии колебаний точки опоры это положение неустойчиво (как неустойчиво положение карандаша, стоящего на острие), а при наличии колебаний, как показал Капица[2], оно может стать устойчивым.

Малые колебания перевернутого маятника описываются тем же уравнением (7.1), но при $q < 0$. Положим $q = -q_2^2$. Вычисляя по описанной выше схеме параметр a, получаем

$$a = \operatorname{ch}(q_2\pi) - \\ -\mu^2 \frac{q_2\pi(4-5q+q^2)\operatorname{ch}(q_2\pi) + (2(2+q^2)+\pi(4-5q+q^2))\operatorname{sh}(q_2\pi)}{32q_2(1-q)^2(4-q)},$$

откуда находим границу q^* области устойчивости $q > -q^*$, где

$$q^* = \mu^2 \frac{2+\pi^{-1}}{16} + O(\mu^3).$$

Эта область включает в себя и отрицательные значения q и является весьма узкой (см. рис. 8).

На рис. 8 приведен фрагмент *диаграммы Айнса — Стретта*. Рассматривая эту диаграмму в целом, замечаем, что при $\mu \ll 1$ области неустойчивых значений q относительно малы. С ростом μ области неустойчивости растут, и при $\mu \gg 1$, наоборот, подавляющая часть значений q попадает в области неустойчивости.

Более подробно маятник Капицы обсуждается в главе XI.

[2] См. статью: *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. экспер. и теор. физики. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–598.

Глава II
НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Авторы: *П. Е. Товстик, М. П. Юшков*

В данной главе особое внимание обращено на изложение приближенных способов решения нелинейных уравнений (метод малого параметра, асимптотические методы, метод двухмасштабных разложений). Установлена связь метода Бубнова — Галёркина с принципом Гаусса. Подробно излагается предложенный академиком П. Л. Капицей метод прямого разделения движений, недостаточно освещенный в настоящее время в учебной литературе. Теоретические результаты поясняются решением ряда новых примеров. Последний параграф посвящен обсуждению странных аттракторов.

§ 1. Основные свойства нелинейных систем

При изучении колебаний точки (см. § 7 главы IV первого тома учебника) мы рассматривали решение линейного дифференциального уравнения, которое оказывалось линейным потому, что упругая сила, действующая на точку, подчинялась закону Гука, а сила сопротивления была пропорциональна скорости движения точки. Однако при достаточно больших деформациях закон Гука не выполняется, и в общем случае сила упругости F представляет собой некоторую нелинейную функцию x. Эту силу нередко задают в виде

$$F = ax + bx^3\,, \quad a > 0\,.$$

Говорят, что при $b > 0$ упругая сила имеет жесткую характеристику, а при $b < 0$ — мягкую. При такой восстанавливающей силе уравнение движения точки можно записать в виде *уравнения Дюффинга*

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \mu x^3 = 0\,, \quad \omega^2 = \frac{a}{m}\,, \quad \mu = \frac{b}{m}\,. \tag{1.1}$$

Нелинейность упругой силы может проявляться даже при выполнении закона Гука. Для подтверждения этого рассмотрим тело, которое при колебаниях в зависимости от положения испытывает воздействие разного числа пружин. В этом случае зависимость упругой силы от перемещения имеет характер ломаной линии.

Нелинейной относительно скорости может быть и сила сопротивления. Например, аэродинамическая сила сопротивления при достаточно больших скоростях изменяется по нелинейном закону (см. главу X). В сложной зависимости от скорости находится и сила сопротивления, отражающая

рассеяние энергии внутри деформируемой системы (обычно эту величину оценивают петлей гистерезиса, характеризующей отклонение от закона Гука при циклических деформациях упругого тела). Нелинейной является также зависимость силы сухого трения от скорости перемещения. Простейший закон ее изменения, установленный Кулоном, приведен на рис. 1.

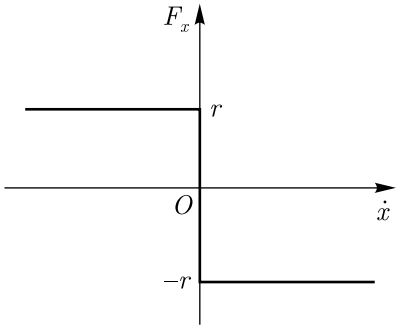

Рис. 1. Изменение силы сухого трения согласно закону Кулона

Таким образом, нелинейные уравнения, отражающие различный характер сил, действующих на точку, встречаются в самых разных задачах механики. Отметим, что даже слабонелинейные системы (то есть системы, нелинейные члены уравнения движения которых пропорциональны малому параметру μ) обладают рядом специфических свойств, не поддающихся объяснению на основе линейной теории колебаний. Так, при анализе колебаний в линейных системах все возможные виды движения характеризуются с помощью частных процессов, что невозможно в нелинейной системе, поскольку для нелинейного уравнения нарушается принцип суперпозиции частных решений. В нелинейной системе независимое рассмотрение поведения отдельных гармоник колебаний недопустимо, так как при подстановке в дифференциальное уравнение суммы двух разных гармоник колебаний влияют друг на друга. Аналогично, если действующую возмущающую силу разложить в ряд Фурье, то для нелинейного уравнения ее действие на систему не равно сумме действий всех слагаемых указанного ряда.

В линейных системах собственная частота колебаний не зависит от начальных условий, то есть колебания обладают таутохронностью. При нелинейной постановке задачи это свойство отсутствует (см. § 2 главы VI первого тома учебника).

В линейной системе вынужденные колебания, возбуждаемые возмущающей гармонической силой, происходят с частотой последней. Однако даже в слабонелинейных системах могут появляться колебания с частотами как кратными частоте возбуждающей силы, так и дробными относительно нее.

В линейных системах при наличии сопротивления установившиеся колебания могут возникать лишь под действием внешней периодической силы. В нелинейной же системе подобные колебания появляются и в случае, когда внешняя сила задана не как периодическая функция времени. Их появление может быть обусловлено присутствием в системе источников и поглотителей энергии, действие которых регулируется самой колеблющейся системой. Периодические движения, возникающие в подобной автономной системе, называются *автоколебаниями.* Классическим примером автоколебательной системы является маятник часов. При малых отклонениях маятника, которых недостаточно для включения механизма часов, он совершает линейные затухающие колебания. Если же маятнику сообщить такое отклонение, при котором механизм часов включится, то он будет совершать автоколебания, которые могут быть объяснены только в рамках нелинейной теории. Эти колебания являются устойчивыми и таутохронными.

Рассмотрим автоколебательную систему, представляющую собой грузик на пружине, расположенный на бесконечной горизонтальной ленте транспортера, движущейся с постоянной скоростью. Сила воздействия ленты на грузик складывается из силы, раскачивающей систему, и силы, тормозящей ее. Возможность возникновения автоколебаний в данном случае можно объяснить следующим образом.

Пусть диаграмма энергетического баланса имеет вид, представленный на рис. 2, где изображена зависимость изменения энергии E_+, поступающей в систему, и энергии E_-, расходуемой ею, от амплитуды колебаний грузика a. По диаграмме видно, что при $a < a_*$ приток энергии превосходит ее расход, поэтому амплитуда возрастает. При $a > a_*$ из-за превышения расхода энергии над притоком ее амплитуда колебаний убывает. Если же $a = a_*$, то система совершает устойчивые автоколебания с указанной амплитудой, при этом приток и расход энергии компенсируются.

В нелинейных системах часто возникают *параметрические колебания*, обусловленные периодическим изменением некоторых ее параметров. При определенных соотношениях характеристик системы решение может быть неустойчивым, в результате чего малые возмущения вызовут увеличение ее колебаний. Такое явление называется *параметрическим резонансом.* Установление условий возникновения параметрических резонансов обыч-

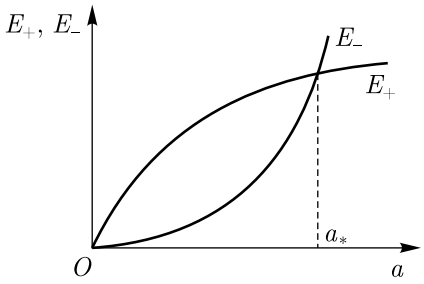

Рис. 2. Диаграмма энергетического баланса

но требует исследования линеаризованного дифференциального уравнения, содержащего коэффициенты, являющиеся периодическими функциями времени. Таким образом, при изучении нелинейных колебаний нередко возникает необходимость в одновременном изучении линейных систем с коэффициентами, изменяющимися во времени. Отметим, что параметрические колебания могут возникать и в линейных системах.

При численном интегрировании дифференциальных уравнений нелинейных систем при немалых значениях параметра нелинейности были обнаружены неожиданные явления. Оказалось, что в зависимости от начальных условий в нелинейной механической системе может возникнуть несколько устойчивых решений. Помимо этого, в фазовом пространстве могут появиться множества, к которым неограниченно приближаются (притягиваются) решения системы с ростом времени. Эти множества назвали *странными аттракторами* (от английского слова *attraction* — притяжение).

§ 2. Частные случаи нелинейных колебаний

Аналитическое решение некоторых нелинейных уравнений. Изучение поведения нелинейных систем сопряжено, как правило, с привлечением сложного математического аппарата. Точное аналитическое решение удается найти только для небольшого класса нелинейных уравнений.

Нелинейная задача нередко может быть разбита на последовательность линейных задач, каждая из которых имеет решение. При этом данные, характеризующие окончание движения на одном этапе, принимаются за начальные условия следующего. Данный метод построения решений иногда называется *методом припасовывания*.

Рассмотрим массу m, находящуюся на плоском шероховатом основании, перемещающемся горизонтально по закону ($k = \text{const}, J_0 = \text{const}$)

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{J_0}{k}\, t - \frac{J_0}{k^2}\, \sin kt\,. \tag{2.1}$$

Относительное перемещение x тела описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} = -m\ddot{\eta} - F\ \text{sign}\ \dot{x}\,, \tag{2.2}$$

где F — сила сухого трения. На каждом этапе движения, где знак скорости $\dot{x}$ не изменяется, это уравнение является линейным. Предположим, что в моменты, когда $\dot{x} = 0$, величина $|m\ddot{\eta}| > F$. Тогда при нулевых начальных условиях решение уравнения (2.2) можно записать в виде

$$x(t) = f(t, t_0)\,, \quad t_0 < t < t_1\,,$$

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n-1} f(t_{\nu+1}, t_\nu) + f(t, t_n)\,, \quad t_n < t < t_{n+1}\,, \tag{2.3}$$

$$n = 1, 2, \dots\,,$$

$$f(t, t_n) = J_0 k^{-2}[\sin kt - \sin kt_n - k(t - t_n)\, \cos kt_n + 0.5\,(-1)^n \mu k^2 (t - t_n)^2]\,,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots\,, \quad \mu = F/(mJ_0)\,.$$

Здесь t_n, $n = 1, 2, \dots$, — моменты времени, в которые $\dot{x} = 0$. Их находят из рекуррентного соотношения

$$\cos kt_{n+1} = \cos kt_n - (-1)^n \mu k(t_{n+1} - t_n)\,,$$

причем движение начинается в момент t_0, удовлетворяющий уравнению $\sin kt_0 = \mu$.

Решение (2.3) было построено в предположении, что

$$|m\ddot{\eta}(t_n)| > F\,, \quad \text{то есть} \quad |\sin kt_n| > \mu\,, \quad n = 1, 2, \dots\,.$$

Можно показать, что при $\mu \ll 1$ это условие выполняется.

При перемещении материальной точки по прямой в стационарном силовом поле, когда уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + f(x) = 0\,, \tag{2.4}$$

некоторые сведения о движении можно получить из закона сохранения механической энергии

$$m\dot{x}^2/2 + \Pi(x) = h\,, \tag{2.5}$$

где потенциальная энергия $\Pi(x)$ связана с силой $f(x)$ соотношением

$$\Pi(x) = \int_{x^*}^{x} f(x)\,dx\,. \tag{2.6}$$

Здесь x^* характеризует положение, от которого отсчитывается потенциальная энергия.

Из выражения (2.5) следует, что время t, за которое точка переходит из положения x_0 в положение x, задается интегралом

$$t = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{m}\,dx}{\sqrt{2}\,\sqrt{h - \Pi(x)}}\,. \tag{2.7}$$

Здесь интеграл со знаком плюс соответствует случаю, когда $x > x_0$, а со знаком минус — случаю $x < x_0$.

Применим формулу (2.7) к уравнению Дюффинга (1.1) для мягкой характеристики ($\mu < 0$). В рассматриваемом примере в соответствии с выражениями (1.1), (2.4) и (2.6) имеем

$$m = 1\,, \quad f(x) = \omega^2 x + \mu x^3\,, \quad x^* = 0\,, \quad \Pi(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\mu x^4}{4}\,.$$

Пусть в начальный момент $x = a$, а $\dot{x} = 0$. Тогда из закона сохранения механической энергии (2.5) получаем

$$h = \frac{\omega^2 a^2}{2} + \frac{\mu a^4}{4}\,. \tag{2.8}$$

Если величина a такова, что $f(a) > 0$, то есть

$$-\mu a^2 < \omega^2\,, \tag{2.9}$$

то при $t > 0$ точка движется к началу координат, и, следовательно, в интеграле (2.7) $x < a = x_0$. Поэтому имеем

$$t = -\int_a^x dx \Bigg/ \left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{\omega^2 a^2}{2} + \frac{\mu a^4}{4} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \frac{\mu x^4}{4}}\right) =$$

$$= \int_x^a dx \Bigg/ \left(\omega\sqrt{(a^2 - x^2)\left[1 + \frac{\mu}{2\omega^2}(a^2 + x^2)\right]}\right)\,.$$

Переходя к новой переменной α_1 по формуле

$$x = a \sin \alpha_1 \tag{2.10}$$

и вводя обозначение

$$k^2 = -\frac{\mu a^2}{2\omega^2} \left(1 + \frac{\mu a^2}{2\omega^2}\right)^{-1},$$

получаем

$$\tau \equiv \omega \sqrt{1 + \frac{\mu a^2}{2\omega^2}}\, t = \int_{\alpha_1}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} - \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}} = K(k) - F(\alpha_1, k)\,,$$

где использованы общепринятые обозначения полного и неполного эллиптических интегралов первого рода. Положив $\alpha_1 = 0$, получим время t_* движения до начала координат:

$$t_* = K(k) \Big/ \sqrt{\omega^2 + \frac{\mu a^2}{2}}\,.$$

Если то же значение h, задаваемое формулой (2.8), соответствует начальным условиям $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \sqrt{2h}$, то время движения от начала координат до положения $x = a \sin \alpha_1$ задается интегралом

$$\tau \equiv \omega \sqrt{1 + \frac{\mu a^2}{2\omega^2}}\, t = \int_0^{\alpha_1} d\alpha / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} = F(\alpha_1, k)\,.$$

Обращая этот интеграл, можно записать

$$\alpha_1 = \psi(\tau, k)\,,$$

а поскольку

$$\sin \alpha_1 = \sin \psi(\tau, k) = \operatorname{sn}(\tau, k)\,,$$

то на основании замены (2.10) закон движения точки можно представить следующим образом:

$$x = a\ \operatorname{sn}(\tau, k) = a \operatorname{sn}\left(\sqrt{\omega^2 + \frac{\mu a^2}{2}}\, t,\ k\right).$$

Последняя функция является периодической с периодом $4K(k)$ по аргументу τ, а следовательно, движение во времени совершается с периодом

$$T = 4\,K(k) \Bigg/ \left(\omega\sqrt{1+\frac{\mu a^2}{2\omega^2}}\right) = 4\,t_*\,. \tag{2.11}$$

Эта формула получена с учетом соотношения (2.9). По ней можно проследить зависимость периода колебаний от начальных условий. Для соответствующей линейной задачи следует положить $\mu = 0$. Тогда модуль k эллиптического интеграла также обратится в нуль. Поэтому из формулы (2.11) на основании $K(0) = \pi/2$ находим

$$T = 2\pi/\omega\,.$$

При изменении a от нуля до предельно возможного значения $a_* = \omega/\sqrt{-\mu}$ радикал $\sqrt{1+\mu a^2/(2\omega^2)}$ изменяется от единицы до $\sqrt{1/2}$, модуль k — от нуля до единицы. Поэтому период T возрастает от значения $2\pi/\omega$ до бесконечности, так как $K(1) = \infty$.

Исследование движения с помощью фазовой плоскости. Для качественного исследования движения нелинейных систем удобно использовать фазовую плоскость. Это особенно эффективно при рассмотрении консервативной автономной системы. В таком случае вместо заданного уравнения (2.4) вводят систему двух уравнений первого порядка (в дальнейшем для удобства полагаем $m = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = y\,, \quad \frac{dy}{dt} = -f(x)\,. \tag{2.12}$$

Плоскость переменных x, y называется *фазовой плоскостью*, а точка с координатами (x, y) — *изображающей*. Кривая, по которой движется изображающая точка, является *фазовой траекторией*, или *интегральной кривой* (см. § 1 главы I; напомним, что рассматриваемую здесь изображающую точку не следует путать с изображающей точкой по Герцу). Уравнение ее легко получить из системы (2.12):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{y}\,. \tag{2.13}$$

Особые точки этого уравнения находим из условий

$$f(x) = 0\,, \quad y = 0\,, \tag{2.14}$$

то есть все они располагаются на оси x. Так как $y = dx/dt$, то при $y = 0$ скорость материальной точки равна нулю. В особых точках (2.14) при этом и $f(x) = 0$, то есть сила обращается в нуль. Следовательно, особые точки дифференциального уравнения (2.13) соответствуют случаям равновесия материальной системы.

Вычислим скорость изображающей точки (*фазовую скорость*):

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{y^2 + f^2(x)}\,.$$

Отсюда видно, что скорость изображающей точки нигде не может обращаться в нуль, за исключением особых точек.

Для определения фазовых траекторий проинтегрируем уравнение с разделяющимися переменными (2.13). Тогда

$$y^2/2 + \Pi(x) = h\,, \tag{2.15}$$

где h — произвольная постоянная. Полученное выражение имеет простой физический смысл, являясь интегралом энергии (2.5). Перепишем уравнение фазовых траекторий (2.15) следующим образом:

$$\pm y = \sqrt{2}\,\sqrt{h - \Pi(x)}\,. \tag{2.16}$$

Отсюда видно, что все фазовые траектории симметричны относительно оси x. Как следует из выражения (2.13), касательные к интегральным кривым в точках их пересечения с осью x параллельны оси y. Исключение составляют особые точки, задаваемые соотношениями (2.14). В точках (x, y), где x удовлетворяет уравнению $f(x) = 0$, а $y \neq 0$ задается выражением (2.16), касательные к интегральным кривым параллельны оси x.

Движение по фазовым траекториям в верхней полуплоскости происходит слева направо (так как положительность y означает возрастание функции x), а в нижней — справа налево, что отмечается на интегральных кривых стрелками.

Рассмотрим фазовые траектории уравнения Дюффинга (1.1) для жесткой характеристики ($\mu > 0$). Построим на *плоскости баланса энергии* (рис. 3) кривую

$$\Pi(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\mu x^4}{4}\,, \tag{2.17}$$

являющуюся параболой четвертого порядка. Примем значение постоянной энергии $h = h_1$, что соответствует выбору определенных начальных условий. Согласно закону сохранения энергии (2.15) при $y = 0$ имеем $\Pi(x) = h_1$.

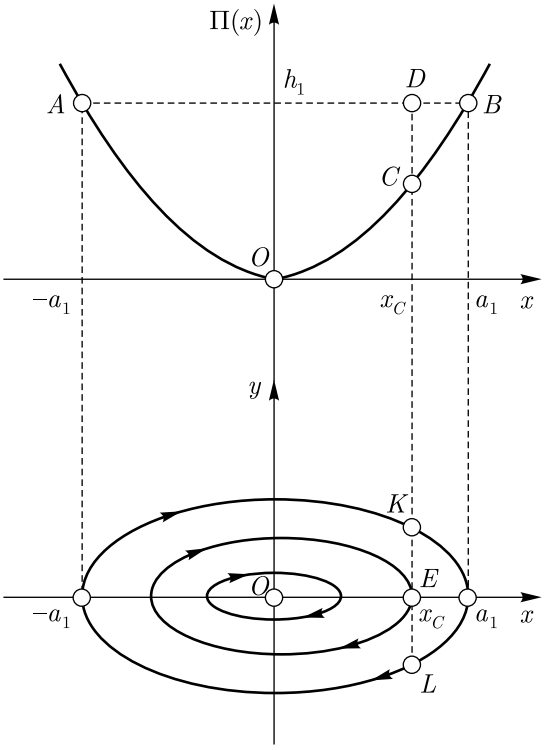

Рис. 3. Фазовые траектории уравнения Дюффинга для жесткой характеристики

Вещественные корни уравнения $\Pi(x) - h_1 = 0$ обозначим через a_1 и $-a_1$. Точкам $A = (-a_1, h_1)$, $B = (a_1, h_1)$ на кривой (2.17) на фазовой плоскости соответствуют точки $(-a_1, 0)$, $(a_1, 0)$. Интегральную кривую, проходящую через эти точки, можно построить следующим образом: задаем абсциссу x_C, затем на плоскости баланса энергии снимаем длину отрезка $CD = h_1 - \Pi(x_C)$, а по ней на фазовой плоскости с помощью отрезков $EK = EL = \sqrt{2}\sqrt{h_1 - \Pi(x_C)}$ находим симметричные точки K и L интегральной кривой.

Таким образом, дуге AOB на плоскости баланса энергии на фазовой плоскости соответствует замкнутая кривая. Выбирая другие значения h, можно построить семейство интегральных кривых. При $h = 0$ интегральная кривая вырождается в точку $(0, 0)$. Вблизи этой точки фазовые траектории имеют вид эллипсов, так как при малых x интеграл энергии при-

ближенно можно записать в виде

$$\frac{y^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = h\,.$$

Следовательно, движение вблизи особой точки, которой соответствует минимум потенциальной энергии, характеризуется наличием фазовых траекторий, представляющих собой замкнутые кривые типа эллипсов, вложенных один в другой. Такая особая точка называется *центром*. Движение изображающей точки по указанным траекториям является периодическим, что соответствует периодическому движению материальной точки. Сама особая точка в данном случае соответствует устойчивому положению равновесия. Период T движения при $h = h_1$ можно найти по формуле (2.7). Вычисляя T как удвоенное время движения по верхней части кривой от точки с абсциссой $-a_1$ до точки с абсциссой a_1, получаем

$$T = \int_{-a_1}^{a_1} \sqrt{2}\,dx/\sqrt{h_1 - \Pi(x)}\,.$$

Как видно из приведенной формулы, колебания оказываются неизохронными. Отсюда следует, что это движение нельзя считать устойчивым по Ляпунову, так как две изображающие точки, начиная движение из двух близких точек и двигаясь по близким траекториям, из-за разности периодов удаляются друг от друга на конечное расстояние. Близость при этом траекторий движения означает, что в данном случае система обладает *орбитальной устойчивостью*.

Проиллюстрируем теперь с помощью фазовой плоскости движение, описываемое уравнением Дюффинга (1.1) для мягкой характеристики ($\mu < 0$). Потенциальная энергия этой системы при $x = 0$ имеет минимум, а при $x = \pm a_* = \pm\omega/\sqrt{-\mu}$ — максимумы (рис. 4). Начало координат на фазовой плоскости, соответствующее минимуму потенциальной энергии, опять является особой точкой типа центра, окруженной замкнутыми фазовыми траекториями.

Исследуем характер фазовых траекторий вблизи особых точек $(a_*, 0)$ и $(-a_*, 0)$, соответствующих максимумам потенциальной энергии. Уравнения фазовых траекторий найдем из уравнения сохранения полной механической энергии

$$\frac{y^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\mu x^4}{4} = h\,.$$

Если положить $x = a_* + \xi$, то при достаточно малых ξ это уравнение приближенно можно записать в виде

$$\frac{y^2}{2} - \omega^2\xi^2 = h - h_*\,, \qquad h_* = \frac{\omega^2 a_*^2}{2} + \frac{\mu a_*^4}{4} = -\frac{\mu a_*^4}{4}\,.$$

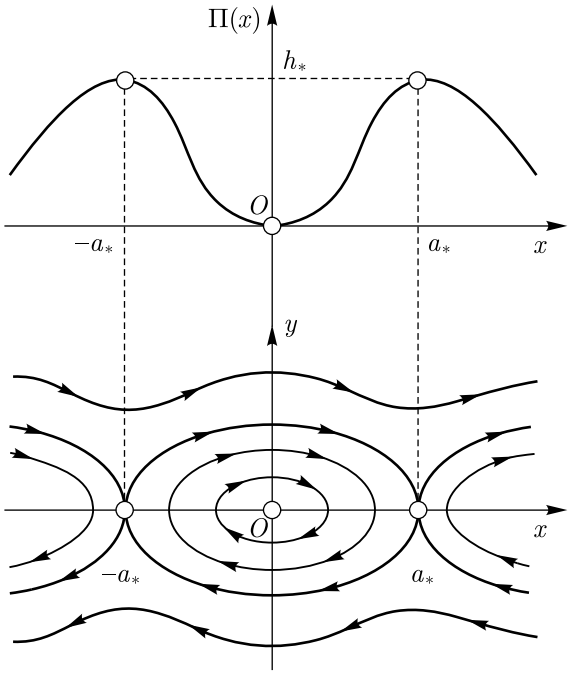

Рис. 4. Фазовые траектории уравнения Дюффинга для мягкой характеристики

Отсюда следует, что вблизи рассматриваемой особой точки интегральные кривые имеют следующий вид: при $h = h_*$ — это две прямые, проходящие через особую точку, а при $h > h_*$ и $h < h_*$ — это гиперболы, пересекающие соответственно вертикальную и горизонтальную оси. Данная особая точка называется *седлом*. Из рис. 4 видно, что положение равновесия при этом неустойчиво. Интегральные кривые с самопересечением, проходящие через особые точки, называются *сепаратрисами*[1]. На рисунке они даны толстыми линиями. Нахождение сепаратрис представляет интерес, так как они разделяют интегральные кривые на области, соответствующие фазовым траекториям разных типов.

Рассмотрим теперь особую точку дифференциального уравнения (2.13), соответствующую точке перегиба кривой потенциальной энергии при x_0, считая, что в этой точке касательная к указанной кривой горизонтальна (рис. 5). В данном случае при $h = h_0$ фазовая траектория в точке $(x_0,\ 0)$ имеет точку возврата первого рода. Интегральные кривые

[1] От французского *séparer* — разделять.

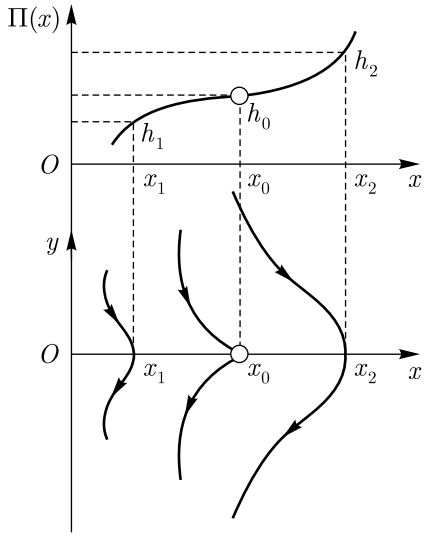

Рис. 5. Случай точки перегиба кривой потенциальной энергии

при значениях $h = h_1 < h_0$ или $h = h_2 > h_0$ легко изобразить на фазовой плоскости. По фазовым траекториям видно, что движение системы является неустойчивым в смысле Ляпунова. Положение равновесия при $x = x_0$ оказывается также неустойчивым.

Остановимся на случае движения автономных систем, когда наряду с консервативной силой $f(x)$ действует неконсервативная сила $\varphi(x,\ \dot{x})$, зависящая от скорости. Тогда уравнению движения

$$\ddot{x} + \varphi(x, \dot{x}) + f(x) = 0\,, \quad m = 1$$

можно сопоставить систему первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\varphi(x, y) - f(x)$$

и уравнения фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi(x, y) + f(x)}{y}\,. \tag{2.18}$$

Как и ранее, особым точкам, определяемым из уравнений

$$y = 0, \quad \varphi(x, 0) + f(x) = 0\,, \tag{2.19}$$

соответствуют равновесные положения механической системы.

Нелинейные неконсервативные автономные системы подразделяют на *диссипативные* и *автоколебательные*. В диссипативных системах невозможно периодическое движение. В этих системах наблюдается рассеяние (диссипация) энергии, что приводит к затуханию колебаний. Движение автоколебательных систем также сопровождается потерей энергии, но эти потери автоматически компенсируются поступлением энергии из некоторого внешнего источника и регулируются самой системой. Некоторые автоколебательные системы рассматривались в § 1. При движении диссипативных систем особые точки (2.19) имеют обычно вид устойчивых или неустойчивых фокусов или узлов. К таким точкам при устойчивости стремятся фазовые траектории, а при неустойчивости эти кривые расходятся из особых точек.

В качестве примера движения диссипативной системы исследуем колебания обычного линейного осциллятора с единичной массой при наличии силы кулонова трения $\mathbf{F}$, движение которого описывается следующим нелинейным уравнением:

$$\ddot{x} + \omega^2 x - F_x = 0\,, \quad \omega^2 = \text{const}\,.$$

Проекция силы сухого трения на ось x имеет вид кривой, представленной на рис. 1. Для аналитического ее представления удобно воспользоваться функцией $\operatorname{sign} \dot{x}$. Однако при $\dot{x} = 0$ эта функция равна нулю. Проекция F_x при том же условии может иметь любое значение от $(-r)$ до r. Поэтому движение материальной точки при сухом трении характеризуется наличием *зоны застоя*, в которой точка находится в состоянии равновесия, если действующая на нее сила упругости не превосходит силы трения. Зона застоя на фазовой плоскости выражается отрезком $[-r/\omega^2,\ r/\omega^2]$. Данный отрезок состоит из особых точек уравнения (2.18).

Итак, движению материальной точки соответствует дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x + r \operatorname{sign} \dot{x} = 0\,. \tag{2.20}$$

Его решение можно было бы получить методом припасовывания. Однако для нахождения решения можно применить и метод Льенара.

Метод Льенара. Фазовые траектории, задаваемые любым дифференциальным уравнением $dy/dx = f(x,\ y)$, могут быть приближенно построены методом изоклин, известным из курса дифференциальных уравнений. Метод Льенара позволяет строить фазовые траектории, соответствующие уравнению движения вида

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + x = 0\,. \tag{2.21}$$

Рассмотрим фазовую плоскость. Фазовые траектории найдем из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi(y) + x}{y}\,.$$

Построим на фазовой плоскости (рис. 6) кривую

$$x = -\varphi(y)\,. \tag{2.22}$$

Проведем через точку $M(x, y)$ горизонтальную прямую, пересекающую кривую (2.22) в точке N. Из точки N опустим перпендикуляр NS на ось x и соединим точки S и M прямой. Перпендикуляр к отрезку SM определяет направление интегральной кривой в точке M. Действительно,

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\beta = -\frac{x + \varphi(y)}{y} = \frac{dy}{dx}\,.$$

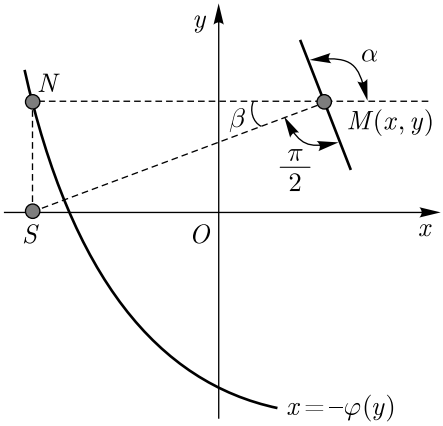

Рис. 6. Построение фазовой траектории по методу Льенара

Теперь приближенное построение фазовой траектории, проходящей через точку $M(x, y)$, можно выполнить следующим образом. Определив направление интегральной кривой в точке $M(x, y)$, заменим фазовую траекторию в малой окрестности этой точки отрезком касательной. В конце данного отрезка снова найдем направление касательной методом Льенара и отложим в этом направлении небольшой отрезок и т. д. В результате можно построить фазовую траекторию в виде ломаной линии, состоящей из отрезков достаточно малой длины.

Применим метод Льенара к уравнению (2.20), справедливому до попадания точки в зону застоя. Для записи его в форме (2.21) перейдем от времени t ко времени $\tau = \omega t$. Тогда будут выполняться соотношения

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \omega\frac{dx}{d\tau}\,, \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2x}{d\tau^2}\,,$$

и уравнение (2.20) можно переписать в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x + \frac{r}{\omega^2}\,\mathrm{sign}\,\frac{dx}{d\tau} = 0\,.$$

Обозначим $y_1 = dx/d\tau$. Дифференциальное уравнение интегральных кривых выглядит следующим образом:

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{x + \frac{r}{\omega^2}\ \mathrm{sign}\ y_1}{y_1}\,.$$

В рассматриваемом случае кривая $x = -\varphi(y_1)$ имеет вид

$$x = -\frac{r}{\omega^2}\ \mathrm{sign}\ y_1$$

и распадается на две полупрямые (рис. 7):

$$x = \begin{cases} -r/\omega^2, & y_1 > 0\,, \\ r/\omega^2\,, & y_1 < 0\,. \end{cases}$$

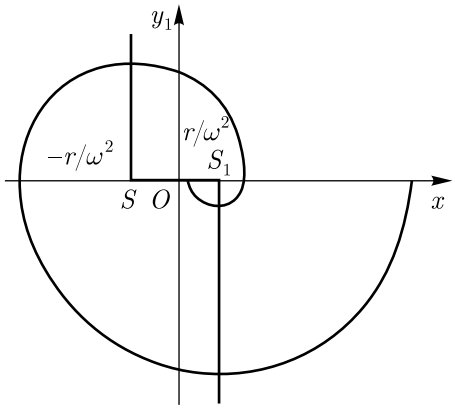

Рис. 7. Фазовая траектория линейного осциллятора при наличии силы кулонова трения

Вид полученной кривой $x = -\varphi(y_1)$ позволяет точно построить интегральные кривые методом Льенара. Действительно, при выборе точки M в любом месте верхней полуплоскости соответствующая ей точка N, находящаяся на кривой $x = -\varphi(y_1)$, всегда проектируется в точку S с координатами $(-r/\omega^2, 0)$. А так как дуга интегральной кривой в точке M должна быть ортогональна направлению SM, то можно утверждать, что в рассматриваемом примере все интегральные кривые в верхней полуплоскости должны иметь вид полуокружностей с общим

центром в точке S. Фазовые траектории в нижней полуплоскости также состоят из полуокружностей, но центры их находятся в точке S_1 с координатами $(r/\omega^2, 0)$. Таким образом, фазовая траектория состоит из эксцентрически расположенных полуокружностей. Движение прекращается при попадании конца очередной полуокружности в зону застоя (рис. 7).

Автоколебательная система. Рассмотрим в качестве примера автоколебательной системы такую систему, движение которой в фазовых переменных описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = py + \frac{x}{\rho}(1-\rho^2)\,, \qquad \frac{dy}{dt} = -px + \frac{y}{\rho}(1-\rho^2)\,, \tag{2.23}$$

где $p = \text{const}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние от изображающей точки до начала координат. На основе системы (2.23) составим дифференциальное уравнение вида

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = \rho\,(1-\rho^2)$$

и перейдем в нем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{d\rho}{dt} = 1-\rho^2\,. \tag{2.24}$$

Выведя из системы (2.23) уравнение

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = p\,\rho^2$$

и перейдя в нем к полярным координатам, получим уравнение для определения угла φ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -p\,. \tag{2.25}$$

Проинтегрировав дифференциальные уравнения (2.24), (2.25) при начальных условиях $\rho(0) = \rho_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, найдем уравнения движения изображающей точки в полярных координатах:

$$\rho = \frac{1+\rho_0-(1-\rho_0)e^{-2t}}{1+\rho_0+(1-\rho_0)e^{-2t}}\,, \quad \varphi = -p\,t + \varphi_0\,. \tag{2.26}$$

Замкнутая фазовая траектория, соответствующая периодическому движению системы, называется *предельным циклом*. На практике удается осуществить автоколебания лишь с устойчивыми предельными циклами. Из уравнения (2.24) можно получить решение $\rho = 1$. Эта замкнутая

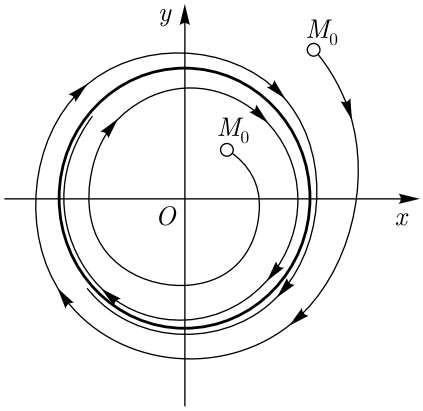

Рис. 8. Пример асимптотически устойчивого предельного цикла

кривая, являющаяся окружностью, оказывается предельным циклом. При $\rho_0 < 1$ из (2.24) следует, что $d\rho/dt > 0$, то есть ρ возрастает, а при $\rho_0 > 1$, что ρ убывает. Более четко характер изменения ρ и φ можно проследить по уравнениям (2.26). Из них видно, что независимо от начальных условий изображающая точка движется по логарифмическим спиралям, навивающимся изнутри или снаружи на единичную окружность (рис. 8). Такой предельный цикл называется *асимптотически устойчивым*. Движению по предельному циклу соответствуют автоколебания системы. Периодическое движение возможно и в нелинейных консервативных системах, но оно зависит от начальных условий. В случае автоколебаний периодическое движение по предельному циклу устанавливается и при возмущении начальных условий в определенных границах (в анализируемом случае возмущения могли быть любыми).

Перейдем к рассмотрению некоторых распространенных методов приближенного решения уравнений нелинейных колебаний.

§ 3. Использование принципа Гаусса при отыскании приближенных решений уравнений нелинейных колебаний. Метод Бубнова — Галёркина[2]

Если движение механической системы задано не полностью, то уравнения, позволяющие замкнуть неполную систему до полной, целесообразно

[2]Параграф использует содержание статьи: *Юшков М. П.* Построение приближенных решений уравнений нелинейных колебаний на основе принципа Гаусса // Вестн. Ленингр. ун-та. 1984. № 13. С. 121–123.

строить, исходя из принципа Гаусса, который в общем случае может быть записан в виде (см. § 4 главы IX первого тома учебника)

$$\delta''(M\mathbf{W} - \mathbf{Y})^2 = 0\,. \tag{3.1}$$

Воспользуемся этим принципом для отыскания приближенных решений нелинейного уравнения

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})\,. \tag{3.2}$$

Предположим, что движение материальной точки в интервале $[0, \tau]$ ищем в виде

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f^\nu(t)\,, \tag{3.3}$$

где $f^\nu(t)$ — линейно независимые функции, а a_ν — параметры, подлежащие определению.

Функция $x(t)$, заданная в виде (3.3), вообще говоря, не удовлетворяет дифференциальному уравнению, поэтому при подстановке ее в уравнение (3.2) получаем

$$m\ddot{x} - F(t, x, \dot{x}) = R\,, \tag{3.4}$$

где R — невязка. Данную невязку с точки зрения механики можно рассматривать как силу, которую следует дополнительно приложить к точке, чтобы она двигалась по закону (3.3).

Движение в виде (3.3) будем считать заданным не полностью, поскольку незаданными являются параметры a_ν. Для определения этих параметров потребуем, варьируя (как и в принципе Гаусса) только ускорения, чтобы среднее значение квадрата силы R в интервале $[0, \tau]$ было минимальным, то есть чтобы выполнялось условие

$$\delta'' \int_0^\tau (m\ddot{x} - F(t, x, \dot{x}))^2 dt = 0\,.$$

Иначе говоря, будем искать коэффициенты a_ν, исходя из требования минимума среднеквадратичной ошибки в интервале $[0, \tau]$.

Учитывая, что в принципе Гаусса варьируются только ускорения, имеем

$$\int_0^\tau (m\ddot{x} - F(t, x, \dot{x}))\, \delta''\ddot{x} dt = 0\,.$$

Подставляя в это уравнение выражение (3.3), получаем

$$\sum_{\nu=1}^{n} \delta'' a_\nu \int_0^\tau \left(m \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \ddot{f}^\nu - F\left(t, \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f^\nu, \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \dot{f}^\nu\right)\right) \ddot{f}^\nu \, dt = 0\,. \tag{3.5}$$

Величины $\delta'' a_\nu$ линейно независимы, поэтому из уравнения (3.5) вытекает

$$\int_0^\tau \left(m \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \ddot{f}^\nu - F\left(t, \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f^\nu, \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \dot{f}^\nu\right)\right) \ddot{f}^\nu \, dt = 0\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,. \tag{3.6}$$

Условия, при которых данная система алгебраических уравнений имеет отличные от нуля решения, зависят от вида функций $F(t, x, \dot{x})$ и $f^\nu(t)$, $\nu = \overline{1,n}$.

Величина R была введена формулой (3.4) как сила. Теперь будем рассматривать ее как погрешность, с которой функция $x(t)$, заданная в виде (3.3), удовлетворяет уравнению (3.2). При подобном подходе система алгебраических уравнении (3.6) относительно параметров a_ν становится системой, позволяющей найти частное приближенное решение уравнения (3.2) в виде (3.3).

Воспользуемся предлагаемым общим методом для нахождения приближенных периодических решений уравнения (3.2). Для простоты периодические решения будем искать в виде

$$x(t) = a_1 \cos kt + a_2 \sin kt\,. \tag{3.7}$$

Перепишем систему (3.6), в которой в данном случае верхний предел τ следует положить равным периоду $2\pi/k$, таким образом:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi/k} (-mk^2(a_1 \cos kt + a_2 \sin kt) - F(t, a_1 \cos kt + \\ &+ a_2 \sin kt, -a_1 k \sin kt + a_2 k \cos kt)) \cos kt \, dt = 0\,, \\ &\int_0^{2\pi/k} (-mk^2(a_1 \cos kt + a_2 \sin kt) - F(t, a_1 \cos kt + \\ &+ a_2 \sin kt, -a_1 k \sin kt + a_2 k \cos kt)) \sin kt \, dt = 0\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Эти уравнения используются для приближенного построения решения уравнения (3.2) в виде (3.7) в *методе Бубнова — Галёркина*. Обычно они выводятся из принципа возможных перемещений.

Изложенный общий метод отыскания приближенных решений уравнения (3.2) легко допускает обобщение на случай произвольной механической системы с s степенями свободы. Принцип Гаусса (3.1) при этом используется в интегральной форме

$$\delta'' \int_0^\tau (M\mathbf{W} - \mathbf{Y})^2 dt = 0\,,$$

откуда

$$\int_0^\tau (M\mathbf{W} - \mathbf{Y}) \cdot \delta''\mathbf{w}\, dt = 0\,.$$

Принимая во внимание, что

$$M\mathbf{W} - \mathbf{Y} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} - Q_\sigma \right) \mathbf{e}^\sigma\,, \quad \delta''\mathbf{w} = \delta''\ddot{q}^\sigma \mathbf{e}_\sigma\,,$$

получаем

$$\int_0^\tau \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} - Q_\sigma \right) \delta''\ddot{q}^\sigma\, dt = 0\,.$$

Из этого уравнения следует, что функции $q^\sigma(t)$, заданные в виде

$$q^\sigma(t) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^\sigma f^\nu(t)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{3.9}$$

можно рассматривать как приближенное решение уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,,$$

если параметры a_ν^σ удовлетворяют уравнениям

$$\int_0^\tau \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} - Q_\sigma \right) \ddot{f}^\nu\, dt = 0\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,,$$

в которых функции $q^\sigma(t)$ считаем заданными в виде (3.9).

Рассмотрим несколько примеров, подтверждающих конструктивность предлагаемого метода отыскания приближенных периодических решений нелинейных уравнений.

Применение метода Бубнова — Галёркина для исследования решений уравнения Дюффинга. Отыщем прежде всего приближенное решение уравнения

$$\ddot{x} + f(x) = 0\,, \tag{3.10}$$

где принято $m = 1$, $F(t, x, \dot{x}) = -f(x)$. Как следует из системы (3.8), функция

$$x(t) = a \sin kt \tag{3.11}$$

приближенно удовлетворяет уравнению (3.10) в случае, если параметры a и k связаны соотношением

$$\int_0^{2\pi/k} (-ak^2 \sin kt + f(a \sin kt)) \sin kt \, dt = 0 \,.$$

В частности, для уравнения Дюффнинга, согласно которому $f(x) = \omega^2 x + \mu x^3$, после вычисления интеграла получаем

$$k = \sqrt{\omega^2 + (3/4)\mu a^2} \,.$$

Это соотношение показывает, что при нелинейных колебаниях между амплитудой a и частотой k свободных колебаний существует связь. Таким образом, свободные колебания, описываемые однородным уравнением Дюффинга, не являются таутохронными.

При изучении вынужденных колебаний, описываемых неоднородным уравнением Дюффинга

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \mu x^3 = h \sin kt \,, \tag{3.12}$$

установившееся движение снова отыскиваем в виде (3.11), но теперь k совпадает с частотой вынуждающей силы, а амплитуда a подлежит определению. Отметим, что к уравнению (3.12) приводятся многие задачи механики и физики.

В рассматриваемом случае система (3.8) сводится к уравнению

$$\int_0^{2\pi/k} (-k^2 a \sin kt + \omega^2 a \sin kt + \mu a^3 \sin^3 kt - \\ - h \sin kt) \sin kt \, dt = 0 \,.$$

После взятия интеграла получаем

$$(3/4)\mu a^3 + (\omega^2 - k^2) a = h \,. \tag{3.13}$$

Формула (3.13), выражающая зависимость амплитуды a установившихся вынужденных колебаний от частоты k вынуждающей силы, называется *амплитудно-частотной характеристикой системы.*

Построим кривую (3.13), переписав ее уравнение в виде

$$k^2 = \omega^2 + \frac{3}{4} \mu a^2 - \frac{h}{a} \,.$$

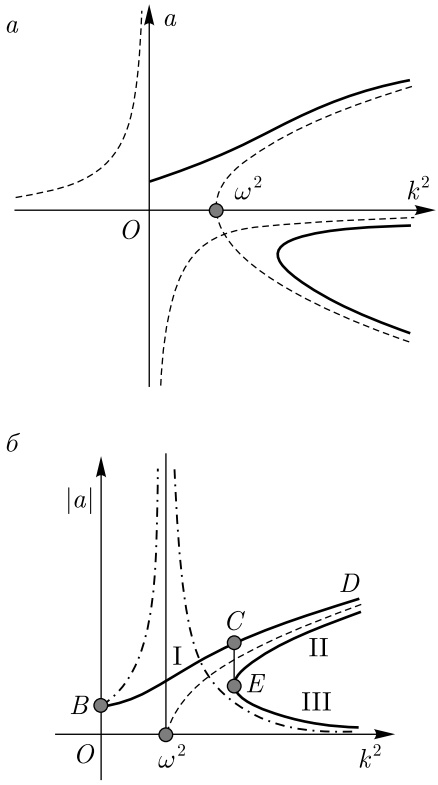

Рис. 9. Амплитудно-частотная характеристика уравнения Дюффинга при отсутствии сопротивления

Интересующую нас кривую получаем как результат сложения двух кривых, показанных на рис. 9,*а* штриховыми линиями. Одна из них представляет собой параболу $k^2 = \omega^2 + (3/4)\mu a^2$, а другая — гиперболу, отнесенную к своим асимптотам: $k^2 = -h/2$. После сложения значений k^2, соответствующих этим кривым, получаем интересующую нас амплитудно-частотную характеристику, представленную на рис. 9,*а* сплошной линией.

Нередко амплитудные кривые строят для модуля амплитуды (рис. 9,*б*), а перемену знака последней при переходе системы через резонанс учитывают изменением фазы колебаний. Штриховая линия на рис. 9,*б* соответствует свободным колебаниям ($h = 0$) и называется *скелетной кривой*.

Уравнение (3.12) при $\mu = 0$ становится линейным. Амплитудно-частотная характеристика для этого случая показана на рис. 9,*б* штрих-

пунктирной линией. Сравнивая кривые, соответствующие случаям $\mu = 0$ и $\mu > 0$, видим, что амлитудно-частотную характеристику нелинейной системы можно считать полученной как бы в результате изгибания вправо амплитудной кривой линейной системы. При мягкой характеристике упругой силы, то есть при $\mu < 0$, амплитудно-частотная характеристика изгибается в противоположную сторону.

По полученной характеристике (рис. 9,*б*) можно проследить качественные отличия нелинейных колебаний от линейных. При $k = \omega$, когда в линейной системе наблюдается резонанс, нелинейные вынужденные колебания происходят с конечной амплитудой, даже если влиянием сил сопротивления пренебрегаем. Эти амплитуды продолжают возрастать с увеличением частоты, а, начиная с некоторого значения k, каждой частоте соответствуют три возможных значения амплитуды a.

Можно показать, что колебания с амплитудами, значения которых лежат на ветви II, неустойчивы, а колебания с амплитудами, лежащими на ветви III (то есть ниже точки E), оказываются устойчивыми. Колебания, задаваемые ветвью I, в зоне трех решений (на участке CD) устойчивы лишь при достаточно малых возмущениях. Таким образом, нарастание амплитуды a при постепенном увеличении частоты k возмущающей силы в системе определяется ветвью BC амплитудно-частотной характеристики. При дальнейшем увеличении k возрастание a идет по ветви CD, однако если она достаточно близко подходит к неустойчивой ветви II, то при больших возмущениях может произойти срыв с этой части кривой I на кривую III, характеризующую устойчивые колебания. При этом амплитуда a уменьшается скачком, а в дальнейшем, при возрастании частоты, монотонно убывает.

При постепенном уменьшении частоты k возмущающей силы амплитуда a увеличивается (кривая III), пока не достигнет точки E, после чего происходит перескок с кривой III на кривую I, и амплитуда a увеличивается на величину, соответствующую отрезку EC. При последующем убывании k уменьшение a определяется ветвью CB кривой I.

Таким образом, можно отметить еще одну особенность вынужденных колебаний нелинейной системы: максимальная амплитуда при разгоне системы больше максимальной ее амплитуды при уменьшении частоты возмущающей силы.

Уравнение (3.12) составлено без учета сил сопротивления, и поэтому при отсутствии возмущений теоретически могут возникнуть вынужденные колебания со сколь угодно большой амплитудой. Напомним, что при изучении линейных систем подобное несоответствие опытным данным удавалось устранить рассмотрением сил сопротивления. Введем диссипативную

силу, учитывающую неупругое сопротивление материала, и в нелинейную систему.

Существует несколько различных гипотез, позволяющих приближенно учесть рассеяние энергии в материале при колебаниях. Рассмотрим одну из простейших.

Обычно силы сопротивления оказываются сдвинутыми по фазе относительно сил упругости на величину $\pi/2$. Считая, что сопротивление не нарушает синусоидального закона колебаний, по виду сил упругости можно строить силы неупругого сопротивления, заменяя $x(t)$ величиной $\dot{x}(t)$, что и отражает сдвиг фазы на величину $\pi/2$. При этом, кроме того, домножаем полученное выражение на коэффициент

$$\varphi = \eta/k\,,$$

где η — коэффициент потерь, а k — частота возмущающей силы. Исходя из этого, примем, что в рассматриваемой задаче силу неупругого сопротивления можно взять в виде

$$\varphi\omega^2\dot{x} + \varphi\mu x^2\dot{x} = \varphi\omega^2\dot{x} + \frac{\varphi}{k^2}\,\mu\dot{x}^3\,,$$

и, следовательно, вместо уравнения (3.12) имеем

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \mu x^3 + \varphi\omega^2\dot{x} + \frac{\varphi}{k^2}\,\mu\dot{x}^3 - h\sin kt = 0\,. \tag{3.14}$$

Установившиеся вынужденные колебания в этом случае оказываются сдвинутыми по фазе относительно вынуждающей силы. Поэтому решение уравнения (3.14) ищем в виде

$$x(t) = a\sin(kt + \varepsilon)\,.$$

Определению подлежат амплитуда a и начальная фаза ε. Сравнивая это выражение с выражением (3.7), видим, что неизвестные a и ε связаны неизвестными a_1 и a_2 соотношениями

$$\begin{gathered} a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,; \quad \varepsilon = \operatorname{arcctg}\frac{a_2}{a_1}\,, \quad a_1 > 0\,; \\ \varepsilon = \pi + \operatorname{arcctg}\frac{a_2}{a_1}\,, \quad a_1 < 0\,; \\ \varepsilon = 0\,, \quad a_1 = 0\,, \quad a_2 > 0\,; \qquad \varepsilon = \pi\,, \quad a_1 = 0\,, \quad a_2 < 0\,. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Систему (3.8) представим следующим образом:

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{2\pi/k} \psi(a_1, a_2, k, t)\cos kt\, dt = 0\,,\\&\int\limits_0^{2\pi/k} \psi(a_1, a_2, k, t)\sin kt\, dt = 0\,.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь

$$\psi(a_1, a_2, k, t) = -k^2(a_1\cos kt + a_2\sin kt)+$$

$$+\omega^2(a_1\cos kt + a_2\sin kt) + \mu(a_1^3\,\cos^3 kt+$$

$$+3\,a_1^2\,a_2\,\cos^2 kt\,\sin kt + 3\,a_1\,a_2^2\,\cos kt\,\sin^2 kt + a_2^3\,\sin^3 kt)+$$

$$+\varphi\,\omega^2\,k\,(-a_1\,\sin kt + a_2\,\cos kt) + \varphi\,\mu\,k\,(-a_1^3\,\sin^3 kt+$$

$$+3\,a_1^2\,a_2\,\sin^2 kt\,\cos kt - 3\,a_1\,a_2^2\,\sin kt\,\cos^2 kt + a_2^3\,\cos^3 kt) - h\,\sin kt\,.$$

После взятия интегралов (3.16) имеем алгебраическую систему нелинейных уравнений относительно a_1 и a_2:

$$\begin{aligned}&a_1(\omega^2 - k^2) + \frac{3}{4}\,\mu a_1^3 + \frac{3}{4}\,\mu a_1 a_2^2 + \varphi\omega^2 k a_2+\\&\quad+\frac{3}{4}\,\varphi\mu k a_1^2 a_2 + \frac{3}{4}\,\varphi\mu k a_2^3 = 0\,,\\&a_2(\omega^2 - k^2) + \frac{3}{4}\,\mu a_2^3 + \frac{3}{4}\,\mu a_2 a_1^2 - \varphi\omega^2 k a_1-\\&\quad-\frac{3}{4}\,\varphi\mu k a_2^2 a_1 - \frac{3}{4}\,\varphi\mu k a_1^3 = h\,.\end{aligned}$$

Возводя эти уравнения в квадрат, складывая их и приводя подобные члены, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{9}{16}\,\mu^2(1+\varphi^2k^2)a^6 + \frac{3}{2}\,\mu(\omega^2 - k^2 + \varphi^2k^2\omega^2)a^4+\\&\quad+((\omega^2 - k^2)^2 + \varphi^2k^2\omega^4)\,a^2 = h^2\,,\end{aligned} \tag{3.17}$$

где согласно обозначению (3.15) $a^2 = a_1^2 + a_2^2$.

Таким образом, получено уравнение амплитудно-частотной характеристики, учитывающее силу неупругого сопротивления. Отметим, что выражение (3.17) при $\varphi = 0$ совпадает с выражением (3.13), возведенным в

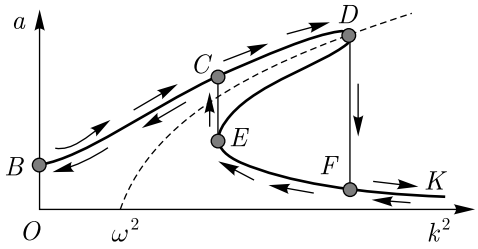

Рис. 10. Амплитудно-частотная характеристика уравнения Дюффинга при учете сопротивления

квадрат. Амплитудной характеристике, построенной по уравнению (3.17), соответствует кривая, изображенная на рис. 10, которая хорошо согласуется с опытными данными и отражает изменение амплитуды при разгоне системы, определяемое линией $BCDFK$, а при уменьшении частоты — линией $KFECB$. Здесь легко прослеживается перескок значений амплитуды колебаний, характеризуемый отрезками DF и EC.

§ 4. Метод малого параметра

Широкий класс нелинейных дифференциальных уравнений может быть исследован методом малого параметра путем построения сходящихся рядов, расположенных по его степеням. Остановимся на методе Пуанкаре — Ляпунова отыскания периодических решений нелинейной системы. Несмотря на частный характер этой задачи, она имеет большое практическое значение.

Пусть нелинейная система содержит малый параметр μ. При $\mu = 0$ она превращается в систему, называемую *порождающей*. Рассмотрим задачи, для которых решение исходной нелинейной системы при $\mu \to 0$ стремится к решению порождающей. В этом случае периодические решения порождающей системы (которые по предположению можно построить) являются приближенными решениями трудно исследуемой основной нелинейной системы.

Периодические колебания неавтономной системы.

Случай функционального определителя, не равного нулю. Предположим, что уравнения движения механической системы записаны в нормальной форме:

$$\dot{x}_\sigma = X_\sigma(\mu, t, x_1, \dots, x_s), \quad \sigma = \overline{1, s}, \tag{4.1}$$

где функции $X_\sigma(\mu, t, x)$ в некоторой области являются голоморфными функциями переменных $x_1, \dots, x_s$ и параметра μ (при достаточно малых его значениях).

Рассмотрим случай, когда эти функции оказываются периодическими по времени t, причем, не умаляя общности рассуждений, период можно считать равным 2π. Разлагая правую часть (4.1) в ряды по степеням малого параметра μ, можно записать

$$\dot{x}_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n X_\sigma^{(n)}(t, x_1, \dots, x_s)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{4.2}$$

где функции $X_\sigma^{(n)}(t, x)$ являются 2π-периодическими функциями t, голоморфными относительно $x_1, x_2, \dots, x_s$. Системе уравнений (4.2) при $\mu = 0$ соответствует следующая порождающая система:

$$\dot{x}_\sigma^{(0)} = X_\sigma^{(0)}(t, x_1^{(0)}, \dots, x_s^{(0)})\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{4.3}$$

Любое 2π-периодическое ее решение

$$x_\sigma^{(0)} = x_\sigma^{(0)}(t)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{4.4}$$

называется *порождающим*.

Будем искать 2π-периодическое решение исходной системы (4.2), которое при $\mu = 0$ обращается в порождающее.

Согласно теории дифференциальных уравнений решения системы (4.2) являются функциями вида

$$x_\sigma^{(0)} = x_\sigma(\mu, t, C_1, \dots, C_s)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,,$$

где C_σ — произвольные постоянные, которые могут быть выражены через начальные данные $(x_\sigma)_{t=0}$. Удобно, однако, выразить их через разности

$$(x_\sigma)_{t=0} - (x_\sigma^{(0)})_{t=0} = \alpha_0\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,.$$

Тогда можно записать, что

$$x_\sigma = x_\sigma(\mu, t, \alpha_1, \dots, \alpha_s)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{4.5}$$

В развернутом виде разности $(x_\sigma)_{t=0} - (x_\sigma^{(0)})_{t=0}$ могут быть представлены в виде

$$x_\sigma(\mu, 0, \alpha_1, \dots, \alpha_s) - x_\sigma^{(0)}(0)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{4.6}$$

Для выделения из множества решений (4.5) интересующего нас 2π-периодического решения, обращающегося при $\mu = 0$ в порождающее, требуется выбрать величины $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ определенным образом. Выбор следует производить, исходя из условий периодичности

$$\begin{gathered}\Phi_\sigma(\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = x_\sigma(\mu, 2\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_s) - \\ -x_\sigma(\mu, 0, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = 0\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Как показал Пуанкаре, система (4.7) имеет единственное голоморфное решение

$$\alpha_\sigma = \alpha_\sigma(\mu)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{4.8}$$

при условии, что ее функциональный определитель в нулевой точке не равен нулю:

$$\Delta\Big|_{\mu=\alpha_1=\dots=\alpha_s=0} = \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_s)}{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}\Bigg|_{\mu=\alpha_1=\dots=\alpha_s=0} \neq 0\,. \tag{4.9}$$

Решение (4.8) обращается в нуль при $\mu = 0$. Кроме того, им установлено, что в данном случае заведомо существует единственное 2π-периодическое решение системы (4.2), стремящееся при $\mu \to 0$ к периодическому решению порождающей системы.

Вследствие голоморфности искомого решения отыскиваем его в виде рядов

$$x_\sigma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n x_\sigma^{(n)}(t)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{4.10}$$

где подлежащие определению функции $x_\sigma^{(n)}$ являются 2π-периодическими:

$$x_\sigma^{(n)}(2\pi) = x_\sigma^{(n)}(0)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,.$$

Подставим ряды (4.10) в уравнения (4.2) и приравняем в обеих частях равенств коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ. Тогда получим следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{x}_\sigma^{(n)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial X_\sigma^{(0)}}{\partial x_i} x_i^{(n)} + \psi_\sigma^{(n)}(t, x_1^{(0)}, \dots, x_s^{(0)}, \dots, x_1^{(n-1)}, \dots, x_s^{(n-1)})\,, \\ \sigma = \overline{1, s}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,,\end{gathered} \tag{4.11}$$

где производные вычислены для порождающего решения (4.4), а $\psi_\sigma^{(n)}$ являются некоторыми известными функциями от переменных $t, x_\sigma^{(k)}$ $(\sigma =$

$\overline{1,s}$, $k = \overline{0,n-1}$). Данные рекуррентные системы позволяют последовательно определять функции $x_\sigma^{(1)}, x_\sigma^{(2)}, \dots$ ($\sigma = \overline{1,s}$), если найдено порождающее решение $x_1^{(0)}, \dots, x_2^{(0)}$.

Отметим, однако, что интегрирование систем (4.11) в общем случае сопряжено с большими трудностями, так как здесь мы оперируем системами линейных уравнений с периодическими коэффициентами, решение которых представляет собой самостоятельную сложную задачу. Таким образом установлена связь между задачами нелинейных колебаний и задачами колебаний линейных систем с переменными коэффициентами.

Значительно проще оказывается случай, когда изучаемая система имеет вид

$$\dot{x}_\sigma(t) = \sum_{i=1}^{s} c_{\sigma i} x_i(t) + f_\sigma(t) + \mu F_\sigma(\mu, t, x_1, \dots, x_s)\,, \qquad c_{\sigma i} = \mathrm{const}\,, \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{4.12}$$

При этом порождающая система и рекуррентные системы (4.11), приобретающие форму

$$\dot{x}_\sigma = \sum_{i=1}^{s} c_{\sigma i} x_i(t) + \psi_\sigma^{(n)}(\mu, t, x_1^{(0)}, \dots, x_s^{(0)}, \dots, x_1^{(n-1)}, \dots, x_s^{(n-1)})\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad n = 1, 2, \dots\,,$$

являются линейными системами с постоянными коэффициентами, интегрирование которых не составляет трудностей. Уравнения (4.12) называются *квазилинейными*.

В качестве примера квазилинейной системы рассмотрим неоднородное *уравнение Дюффинга*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = P \sin t + \mu x^3\,,$$

где ω не равно целым числам. Это уравнение может быть переписано в виде системы второго порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + P \sin t + \mu x_1^3\,. \tag{4.13}$$

Порождающая система

$$\dot{x}_1^{(0)} = x_2^{(0)}\,, \quad \dot{x}_2^{(0)} = -\omega^2 x_1^{(0)} + P \sin t$$

имеет общее решение

$$x_1^{(0)}(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{P}{\omega^2 - 1} \sin t\,,$$

$$x_2^{(0)}(t) = \omega C_1 \cos \omega t - \omega C_2 \sin \omega t + \frac{P}{\omega^2 - 1} \cos t\,,$$

которое при нецелых ω и $C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0$ не является 2π-периодическим. Полагая $C_1 = C_2 = 0$, что обеспечивается выбором начальных условий

$$x_1^{(0)}(0) = 0\,, \quad x_2^{(0)}(0) = \frac{P}{\omega^2 - 1}\,, \tag{4.14}$$

получаем интересующее нас 2π-периодическое порождающее решение:

$$x_1^{(0)}(t) = \frac{P}{\omega^2 - 1} \sin t\,, \quad x_2^{(0)}(t) = \frac{P}{\omega^2 - 1} \cos t\,. \tag{4.15}$$

Прежде чем перейти к отысканию решения в виде (4.10), убедимся, что функциональный определитель (4.9) в рассматриваемом примере не равен нулю. С этой целью воспользуемся тем, что искомое решение $x_\sigma(t)$ является голоморфным относительно $\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, то есть может быть представлено в виде ряда:

$$\dot{x}_\sigma(t) = x_\sigma^{(0)}(t) + \mu b_\sigma(t) + \sum_{i=1}^{s} \alpha_n a_{\sigma n}(t) + \ \ldots\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,.$$

Условия периодичности (4.7) при этом записываются следующим образом:

$$\Phi_\sigma = \mu\,[b_\sigma(2\pi) - b_\sigma(0)] + \sum_{n=1}^{s} \alpha_n [a_{\sigma n}(2\pi) - a_{\sigma n}(0)] + \ \ldots\ = 0\,,$$
$$\sigma = \overline{1, s}\,.$$

Вычисляя теперь определитель (4.9), получаем

$$\Delta|_{\mu=\alpha_1=\ldots=\alpha_s=0} = |a_{\sigma n}(2\pi) - a_{\sigma n}(0)|\,. \tag{4.16}$$

В рассматриваемом случае решение системы (4.13) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^{(0)}(t) + \mu\, b_1(t) + \alpha_1 a_{11}(t) + \alpha_2 a_{12}(t) + \ \ldots\,, \\ x_2(t) &= x_2^{(0)}(t) + \mu\, b_2(t) + \alpha_1 a_{21}(t) + \alpha_2 a_{22}(t) + \ \ldots\,, \end{aligned} \tag{4.17}$$

где α_1, α_2 — отклонения начальных условий искомого решения от начальных условий (4.14):

$$x_1(0) - x_1^{(0)}(0) = \alpha_1\,, \quad x_2(0) - x_2^{(0)}(0) = \alpha_2\,. \tag{4.18}$$

На основании первого уравнения системы (4.13) при этом должны удовлетворяться уравнения

$$b_2(t) = \dot{b}_1(t)\,, \quad a_{21}(t) = \dot{a}_{11}(t)\,, \quad a_{22}(t) = \dot{a}_{12}(t)\,, \ldots\,. \tag{4.19}$$

Найдем функции α_{11}, α_{12}. Подставив ряды (4.17) в систему (4.13), после приравнивания коэффициентов при α_{11} и α_{12} получим

$$\ddot{a}_{11} + \omega^2 a_{11} = 0\,, \quad \ddot{a}_{12} + \omega^2 a_{12} = 0\,. \tag{4.20}$$

Для определения начальных условий перепишем соотношения (4.18) с учетом формул (4.17) и (4.19):

$$\alpha_{11}(0) = 1\,, \quad \dot{\alpha}_{11}(0) = 0\,, \quad \alpha_{12}(0) = 0\,, \quad \dot{\alpha}_{12}(0) = 1\,.$$

Таким начальным условиям будут соответствовать следующие частные решения уравнений (4.20):

$$\alpha_{11}(t) = \cos\omega t\,, \quad \alpha_{12}(t) = \frac{1}{\omega}\sin\omega t\,,$$

поэтому определитель (4.16) с учетом соотношений (4.19) примет вид

$$\begin{vmatrix} \cos 2\omega\pi - 1 & \frac{1}{\omega}\,\sin 2\omega\pi \\ -\omega\,\sin 2\omega\pi & \cos 2\omega\pi - 1 \end{vmatrix} = 2\,(1 - \cos 2\omega\pi)\,.$$

Отсюда видно, что он не равен нулю при нецелых ω, и, следовательно, согласно теореме Пуанкаре существует 2π-периодическое решение, переходящее при $\mu = 0$ в решение (4.15). Отметим, что этот вывод справедлив и для более общего уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = P\sin t + \mu f(x)\,,$$

где $f(x)$ — нелинейная голоморфная функция. Последнее вытекает из того, что функции α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22}, входящие в определитель (4.16), не зависят от вида функции $f(x)$.

Итак, будем отыскивать решение неоднородного уравнения Дюффинга в виде ряда

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^n x^{(n)}(t)\,, \tag{4.21}$$

где искомые функции $x^{(n)}(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, должны удовлетворять условиям периодичности:

$$x^{(n)}(2\pi) = x^{(n)}(0)\,, \quad \dot{x}^{(n)}(2\pi) = \dot{x}^{(n)}(0)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{4.22}$$

Подставляя ряд (4.21) в уравнение Дюффинга и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем систему рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} = P\sin t\,,\\
&\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = (x^{(0)})^3\,,\\
&\ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} = 3(x^{(0)})^2 x^{(1)}\,,\\
&\ddot{x}^{(3)} + \omega^2 x^{(3)} = 3[x^{(0)}(x^{(1)})^2 + (x^{(0)})^2 x^{(2)}]\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Первое из этих уравнений является порождающим, и его 2π-периодическое решение имеет вид (4.15). Подставляя его в правую часть второго уравнения и учитывая, что $\sin t^3 = (1/4)(3\sin t - \sin 3t)$, имеем

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = \frac{P^3}{4(\omega^2-1)^3}\,(3\sin t - \sin 3t)\,.$$

Частное решение последнего уравнения, удовлетворяющее условиям (4.22), таково:

$$x^{(1)}(t) = \frac{3P^3}{4(\omega^2-1)^4}\,\sin t - \frac{P^3}{4(\omega^2-1)(\omega^2-9)}\,\sin 3t\,.$$

Аналогично определяем функции $x^{(2)}(t)$, $x^{(3)}(t), \dots$.

Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми ряда (4.21), получаем

$$x(t) \approx \frac{P}{\omega^2-1}\,\sin t + \frac{\mu P^3}{4(\omega^2-1)^3}\left(\frac{3\sin t}{\omega^2-1} - \frac{\sin 3t}{\omega^2-9}\right).$$

Отметим, что при функциональном определителе (4.9), не равном нулю, решение квазилинейной системы при достаточно малых μ оказывается близким к решению соответствующей линейной системы.

Случай функционального определителя, равного нулю. Более сложным оказывается интегрирование, когда функциональный определитель (4.9) обращается в нуль. Для пояснения возможности возникновения такого случая обратимся к предыдущему примеру. При резонансе ($\omega = 1$) порождающее уравнение имеет вид

$$\ddot{x}^{(0)} + x^{(0)} = P\sin t\,.$$

Общее решение этого уравнения, как было показано в § 7 главы IV первого тома учебника, таково:

$$x^{(0)}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{Pt}{2}\,\cos t\,.$$

Оно может быть 2π-периодическим лишь при $P = 0$, то есть когда порождающее уравнение имеет вид

$$\ddot{x}^{(0)} + x^{(0)} = 0\,.$$

Это уравнение можно рассматривать как предельный случай уравнения

$$\ddot{x} + x = \mu\,(P\sin t + x^3)\,, \quad \mu \to 0\,.$$

Таким образом, при резонансе рассмотрение приходится ограничивать случаем, когда нелинейные слагаемые и вынуждающая сила имеют один порядок малости. Существенно, что при этом 2π-периодическое порождающее решение зависит от произвольных постоянных.

В общем случае нелинейная система (4.3) может иметь порождающее решение, зависящее от k произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_k$. Оказывается, что тогда функциональный определитель (4.9) равен нулю, при этом постоянные $C_1, \ldots, C_k$ должны удовлетворить некоторым дополнительным условиям, чтобы выделяемое ими решение было 2π-периодическим. Подробное выписывание этих условий оказывается довольно громоздким[3].

Рассмотрим неоднородное уравнение Дюффинга для случая, когда ω равно единице или мало от нее отличается, то есть $\omega^2 = 1 - \mu c$. Тогда уравнение Дюффинга можно переписать в виде

$$\ddot{x} + x = \mu\,(P\sin t + cx + x^3)\,. \tag{4.23}$$

Естественно, что если наряду с данным уравнением рассматривать его запись в виде нормальной системы дифференциальных уравнений типа (4.13), то неизвестным функциям x_1 и x_2 соответствуют x и $\dot{x}$.

Порождающее уравнение имеет 2π-периодические решение

$$x^{(0)}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t\,, \tag{4.24}$$

зависящее от параметров C_1 и C_2. Согласно выражениям (4.6) можно записать

$$\begin{aligned} x(\mu, 0, \alpha_1, \alpha_2) - x^{(0)}(0) &= \alpha_1\,, \\ \dot{x}(\mu, 0, \alpha_1, \alpha_2) - \dot{x}^{(0)}(0) &= \alpha_2\,. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Интересующее нас решение можно представить в виде ряда

$$x(t) = x^{(0)}(t) + \mu\, b(t) + \sum_{n=1}^{2} \alpha_n a_n(t) + \ldots\,. \tag{4.26}$$

[3] См., например: *Малкин И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.; Л., 1949. 224 с.

Найдем функции $b(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$. С этой целью подставим ряд (4.26) в уравнение (4.23). Тогда

$$\begin{gathered}\ddot{b} + b = P\sin t + cx^{(0)} + (x^{(0)})^3\,,\\ \ddot{a}_1 + a_1 = 0\,, \quad \ddot{a}_1 + a_1 = 0\,.\end{gathered} \tag{4.27}$$

Значения начальных условий можно вычислить после подстановки указанного ряда в формулы (4.25):

$$b(0) = 0\,, \quad \dot{b}(0) = 0\,, \quad a_1(0) = 1\,, \quad \dot{a}_1(0) = 0\,, \quad a_2(0) = 0\,, \quad \dot{a}_2(0) = 1\,.$$

После интегрирования уравнений (4.27) имеем[4]

$$b(t) = \int\limits_0^t P\sin\tau + cx^{(0)}(\tau) + [x^{(0)}]^3\sin(t-\tau)d\tau\,,$$

$$a_1(t) = \cos t, \quad a_2(t) = \sin t\,.$$

Из условия 2π-периодичности решения (4.26) следует $b(2\pi) - b(0) = 0$, $\dot{b}(2\pi) - \dot{b}(0) = 0$, поэтому из выражения для $b(t)$ находим

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{2\pi}\Big(P\sin\tau + cx^{(0)}(\tau) + [x^{(0)}]^3\sin(\tau)\Big)\,d\tau = 0\,,\\ \int\limits_0^{2\pi}\Big(P\sin\tau + cx^{(0)}(\tau) + [x^{(0)}]^3\cos(\tau)\Big)\,d\tau = 0\,,\end{gathered} \tag{4.28}$$

откуда с учетом формулы (4.24) получаем

$$P + c\,C_2 + \frac{3}{4}\,C_2(C_1^2 + C_2^2) = 0\,, \quad C_1\,[c + \frac{3}{4}\,(C_1^2 + C_2^2)] = 0\,.$$

Здесь множитель $c + (3/4)(C_1^2 + C_2^2)$ не может обратиться в нуль, так как в противном случае не будет удовлетворяться первое уравнение. Поэтому решением данной системы является $C_1 = 0$, $C_2 = a$, где a — корень кубического уравнения

$$(3/4)\,a^3 + c\,a + P = 0\,. \tag{4.29}$$

[4]Здесь уместно напомнить, что решение неоднородного уравнения гармонических колебаний, полученное в § 7 главы IV первого тома учебника, выражается через интеграл Дюамеля.

Таким образом, порождающее решение представляем следующим образом:

$$x^{(0)}(t) = a \sin t\,. \tag{4.30}$$

Теперь 2π-периодическое решение уравнения (4.23) можно искать в виде ряда (4.21), причем должны выполняться условия периодичности (4.22). Для определения функции $x^{(1)}(t)$ используем уравнение

$$\ddot{x}^{(1)} + x^{(1)} = P \sin t + c\, x^{(0)} + (x^{(0)})^3\,. \tag{4.31}$$

Подставляя сюда порождающее решение (4.30), с учетом условия (4.29) получаем уравнение

$$\ddot{x}^{(1)} + x^{(1)} = -\frac{a^3}{4}\, \sin 3t\,,$$

решение которого имеет вид

$$x^{(1)}(t) = C_1^{(1)} \cos t + C_2^{(1)} \sin t + \frac{a^3}{32}\, \sin 3t\,.$$

Значения произвольных постоянных $C_1^{(1)}$ и $C_2^{(1)}$ можно найти из условия 2π-периодичности функции $x^{(2)}(t)$. Для этого правая часть дифференциального уравнения относительно функции $x^{(2)}(t)$ не должна содержать слагаемых, пропорциональных $\sin t$ и $\cos t$. Отметим, что этот способ отыскания постоянных $C_1^{(1)}$ и $C_2^{(1)}$ полностью аналогичен способу определения постоянных C_1 и C_2 в решении (4.24). Уравнения (4.28), позволившие найти постоянные C_1 и C_2, и являются условиями отсутствия в правой части уравнения (4.31) слагаемых, пропорциональных $\sin t$ и $\cos t$. Производя вычисления, связанные с определением постоянных $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, получаем

$$C_1^{(1)} = 0\,, \quad C_2^{(1)} = 3a^5 \left(c + \frac{9}{4}\, a^2\right)^{-1}\,.$$

Таким же образом можно найти и третий член ряда (4.21), хотя объем вычислений при этом резко увеличивается.

Периодические свободные колебания автономной системы. Перейдем к отысканию периодических решений систем вида

$$\dot{x}_\sigma = \mu X_\sigma(\mu, x_1, \ldots, x_s)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{4.32}$$

где функции X_σ, $\sigma = \overline{1, s}$, не зависят явно от времени. Такие системы принято называть *автономными*. Будем предполагать, что правые части уравнений (4.32) содержат голоморфные функции своих переменных.

Исследование подобных систем имеет ряд особенностей. Прежде всего, в отличие от предыдущих случаев здесь нельзя заранее указать величину периода колебаний T, который, вообще говоря, является функцией от μ. Кроме того, так как дифференциальные уравнения не содержат t в явном виде, то при некотором известном периодическом решении $x_\sigma = x_\sigma(t)$, $\sigma = \overline{1,s}$, периодическим решением является и $x_\sigma = x_\sigma(t-t_1)$, где t_1 оказывается произвольным сдвигом времени.

Пусть $x_\sigma^{(0)} = x_\sigma^{(0)}(t)$, $\sigma = \overline{1,s}$, — T-периодическое решение порождающей автономной системы. Будем искать $(T+\alpha_0)$-периодическое решение нелинейной системы, обращающееся в порождающее при $\mu = 0$. Необходимые и достаточные условия его периодичности запишем в виде

$$\begin{gathered}\Phi_\sigma(\mu,\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_s) = x_\sigma(\mu,T+\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_s)- \\ -x_\sigma(\mu,0,\alpha_1,\dots,\alpha_s) = 0\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,,\end{gathered} \tag{4.33}$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_s$, как и ранее, — отклонения начальных условий искомого решения от тех же условий порождающего. Здесь функции Φ_σ являются голоморфными функциями своих переменных, обращающимися в нуль при $\alpha_\tau = \mu = 0$, $\tau = \overline{0,s}$. Таким образом, мы получили s уравнений для определения $s+1$ неизвестных функций $\alpha_\tau(\mu)$, поэтому одну из них можно рассматривать как параметр, от которого зависит решение.

Отметим, что в нуле в нуль обращается и функциональный определитель $\Delta\big|_{\mu=\alpha_\tau=0} = 0$, так как система (4.33) наряду с тривиальным решением при $\mu = \alpha_0 = 0$ должна допускать существование бесчисленного множества решений, ибо порождающее решение остается периодическим при замене в нем аргумента t аргументом $t - t_1$. Различные случаи обращения в нуль функционального определителя исследовались А. Пуанкаре, В. Мак-Милланом, И. Г. Малкиным.

Следуя Пуанкаре, будем по-прежнему отыскивать голоморфное решение в виде

$$x_\sigma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x_\sigma^{(n)}(t)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,,$$

где, однако, в случае автономной системы в отличие от неавтономной функции $x_\sigma^{(n)}(t)$ могут не удовлетворять условиям периодичности $x_\sigma^{(n)}(t+T+\alpha_0) = x_\sigma^{(n)}(t)$, $n = 0,1,2,\dots$. В частности, эти функции могут содержать вековые члены, неограниченно возрастающие с течением времени. Аналогичная картина наблюдается при разложении в ряд периодической функции

$$\sin(\omega+\mu)t = \sin\omega t + \mu t\cos\omega t - \frac{\mu^2 t^2}{2!}\sin\omega t - \dots\,,$$

когда конечным числом членов ряда для достаточно большого значения времени не удается характеризовать поведение периодической функции[5]. Рядом ученых (П. Лаплас, Ж. Лагранж, М. В. Остроградский, А. Линдстедт, А. И. Крылов и др.) были предложены методы, исключающие из решений эти нежелательные слагаемые.

Для иллюстрации одного из них найдем периодическое решение *уравнения Рэлея*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu\,(1 - \dot{x}^2)\,\dot{x} \tag{4.34}$$

при начальных условиях

$$x(0) = A\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,. \tag{4.35}$$

Подобное уравнение описывает, например, колебания *маятника Фроуда*, являющегося обычным физическим маятником, насаженным с трением на горизонтальную ось, вращающуюся с постоянной угловой скоростью. Со стороны оси на маятник действует момент сил трения, зависящий от относительной скорости вращения.

Для нахождении решения применим метод[6], согласно которому функцию x и квадрат неизвестной частоты колебании p^2 отыскивают в виде рядов, расположенных по степеням малого параметра μ:

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots\,, \tag{4.36}$$

$$p^2 = \omega^2 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \ldots\,. \tag{4.37}$$

Функции $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \ldots$ и коэффициенты $h_1, h_2, \ldots$ подлежат определению, причем последние будем подбирать так, чтобы у функций $x_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots$ отсутствовали вековые члены.

Подставляя выражения (4.36) и (4.37) в уравнение (4.34) и приравнивая слагаемые с одинаковыми степенями μ, получаем

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_0 + p^2 x_0 = 0\,,\\
&\ddot{x}_1 + p^2 x_1 = h_1 x_0 + \left(1 - \dot{x}_0^2\right)\dot{x}_0\,,\\
&\ddot{x}_2 + p^2 x_2 = h_1 x_1 + h_2 x_0 + \dot{x}_1 - 3\dot{x}_0^2 \dot{x}_1\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{4.38}$$

[5] С подобными проблемами столкнулись в XVIII веке в астрономии при отыскании периодических движений планет с помощью рядов. Именно в связи с этим возник термин «вековые члены», когда приближенное решение оказалось неудовлетворительным при больших значениях времени (порядка века) из-за наличия слагаемых, содержащих в качестве множителя указанную переменную.

[6] *Крылов А. Н.* Вибрация судов. Л.; М., 1936. С. 209–214.

Согласно равенствам (4.35) при этом должны выполняться следующие начальные условия:

$$x_0(0) = A\,, \quad \dot{x}_0(0) = 0\,, \quad x_1(0) = 0\,, \quad \dot{x}_1(0) = 0\,,$$
$$x_2(0) = 0\,, \quad \dot{x}_2(0) = 0\,, \quad \ldots$$

Следовательно, решение порождающего уравнения имеет вид

$$x_0 = A\cos pt\,.$$

Подставим его во второе уравнение системы (4.38). Тогда

$$\ddot{x}_1 + p^2 x_1 = h_1 A\cos pt + Ap\left(\frac{3}{4}A^2p^2 - 1\right)\sin pt - \frac{1}{4}A^3p^3\sin 3pt\,. \qquad (4.39)$$

Чтобы функция $x_1(t)$ не содержала вековых членов, исключим из правой части уравнения (4.39) слагаемые с $\cos pt$ и $\sin pt$. Для этого должны выполняться условия $h_1 = 0$, $A^2 = 4/(3p^2)$, причем $p = \omega$.

Итак, в нулевом приближении уравнение (4.34) имеет периодическое решение $x = A\cos\omega t$, причем амплитуда колебаний оказывается не произвольной, а равной $A = 2/(\omega\sqrt{3})$. Таким образом, в неконсервативной системе, описываемой уравнением Рэлея, могут возникнуть автоколебания с определенными частотой и амплитудой.

Для отыскания первого приближения имеем уравнение

$$\ddot{x}_1 + p^2 x_1 = -\frac{A^3p^3}{4}\sin 3pt\,.$$

Из его общего решения

$$x_1 = M_1\cos pt + N_1\sin pt + \frac{A^3p}{32}\sin 3pt$$

следует выделить частное решение $x_1 = (A^3p/32)(\sin 3pt - 3\sin pt)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Таким образом, в первом приближении решение уравнения (4.34) имеет вид

$$x = A\cos pt + \frac{\mu A^3 p}{32}(\sin 3pt - 3\sin pt)\,,$$
$$A = 2/(p\sqrt{3})\,, \quad p = \omega\,.$$

Для нахождения второго приближения следует решить уравнение

$$\begin{gathered}\ddot{x}_2 + p^2 x_2 = A\left(h_2 - \frac{3A^2p^2}{32} + \frac{21A^4p^4}{128}\right)\cos pt + \\ + A^3p^2\left(\frac{3}{32} - \frac{21A^2p^2}{128}\right)\cos 3pt + \frac{9A^5p^4}{128}\cos 5pt\,.\end{gathered} \qquad (4.40)$$

Вековые члены отсутствуют, если

$$h_2 = \frac{3A^2p^2}{32} - \frac{21A^4p^4}{128}, \quad \text{то есть} \quad p^2 = \omega^2 + \mu^2 \left(\frac{3A^2p^2}{32} - \frac{21A^4p^4}{128} \right).$$

При этом частное решение уравнения (4.40), соответствующее нулевым начальным условиям, строится просто. Дальнейшее уточнение решения и квадрата частоты колебаний производится аналогично.

Предельный цикл полученных колебаний близок к эллипсу, а сами движения напоминают гармонические, то есть имеем характерный случай *квазилинейных колебаний*. Однако если параметр μ оказывается немалым (например, $\mu = 10$), то предельный цикл резко отличается от эллипса. В этом можно убедиться, строя фазовую траекторию, например методом Льенара. Закон движения при этом отличается от синусоидального, обладая характерными участками быстрого изменения величины x. Подобные колебания называются *релаксационными*.

Попутно укажем на связь уравнений Рэлея и Ван-дер-Поля. Если уравнение (4.34) продифференцировать по времени и выполнить замену $y = \sqrt{3}\,\dot{x}$, то получим *уравнение Ван-дер-Поля*, описывающее работу электронного генератора:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \mu\,(1 - y^2)\,\dot{y}\,.$$

§ 5. Метод Крылова — Боголюбова

Колебания автономных систем. В предыдущем параграфе голоморфное решение строилось в виде сходящихся рядов, расположенных по степеням малого параметра μ. Построение приближений более высокого порядка требовало значительного увеличения объема вычислений. Наряду с названными методами большое значение имеют методы отыскания решений в виде асимптотических рядов, конечное число членов которых стремится к точному решению при $\mu \to 0$. Подобным методом является метод, предложенный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, который мы используем для исследовании уравнений движения автономной системы:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x})\,. \tag{5.1}$$

При $\mu = 0$ это уравнение обращается в обычное уравнение гармонических колебаний, имеющее решение

$$x = a\cos\psi\,. \tag{5.2}$$

Здесь амплитуда a постоянна, а фаза ψ — линейная функция времени: $\dot{a} = 0,\ \dot{\psi} = \omega,\ \psi = \omega t + \ \theta,\ \theta = \ \text{const}$.

Приближенное решение уравнения (5.1) при $\mu \neq 0$ также будем искать в виде (5.2), считая, что a и ψ — искомые функции времени. Уточнение этого решения достигается добавлением конечного числа n членов, домноженных на степени малого параметра μ. Итак, решение уравнения (5.1) ищем в виде

$$x = a(t)\cos\psi(t) + \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{\nu} u_{\nu}(a,\psi)\,. \tag{5.3}$$

Функции $u_{\nu}(a,\psi)$ отыскиваем как 2π-периодические по аргументу ψ и удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_0^{2\pi} u_{\nu}(a,\psi)\cos\psi\, d\psi = 0\,, \quad \int\limits_0^{2\pi} u_{\nu}(a,\psi)\sin\psi\, d\psi = 0\,,\ \nu = \overline{1,n}\,, \tag{5.4}$$

что, с одной стороны, обеспечивает однозначность определения этих функций, а с другой — означает, что в решении (5.3) слагаемое $a(t)\cos\psi(t)$ полностью содержит первую гармонику. Неизвестные функции $a(t)$ и $\psi(t)$ находим из дифференциальных уравнений

$$\dot{a} = \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{\nu} A_{\nu}(a)\,, \quad \dot{\psi} = \omega + \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{\nu} B_{\nu}(a)\,. \tag{5.5}$$

Функции $u_{\nu}(a,\psi)$, $A_{\nu}(a)$, $B_{\nu}(a)$, входящие в ряды (5.3) н (5.5), должны определяться уравнением (5.1). Рассмотрим сначала его левую часть. При вычислении производной $\ddot{x}$ от функции x, заданной в виде ряда (5.3), появятся производные $\dot{a}$ и $\dot{\psi}$, а также производные $\ddot{a}$ и $\ddot{\psi}$. Из рядов (5.5) следует, что

$$\ddot{a} = \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{\nu} \frac{dA_{\nu}}{da}\,\dot{a} = \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{\nu} \frac{dA_{\nu}}{da} \sum_{\lambda=1}^{n} \mu^{\lambda} A_{\lambda}\,,$$
$$\ddot{\psi} = \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{\nu} \frac{dB_{\nu}}{da}\,\dot{a} = \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{\nu} \frac{dB_{\nu}}{da} \sum_{\lambda=1}^{n} \mu^{\lambda} A_{\lambda}\,.$$

Эти выражения, а также выражения (5.3) и (5.5) позволяют представить левую часть уравнения (5.1) в виде ряда по степеням μ (из-за громоздкости

выражений выписываем лишь первые два из них):

$$\begin{gathered}\ddot{x}+\omega^2 x=\mu\left[-2\omega A_1\sin\psi-2\omega a B_1\cos\psi+\omega^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}+u_1\right)\right]+\\ +\mu^2\left[\left(A_1\frac{dA_1}{da}-aB_1^2-2\omega a B_2\right)\cos\psi-\right.\\ -\left(2\omega A_2+2A_1B_1+aA_1\frac{dB_1}{da}\right)\sin\psi+2\omega A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi}+2\omega B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}+\\ \left.+\omega^2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2}+u_2\right)\right]+\ldots\,.\end{gathered}\tag{5.6}$$

Выражение $\mu f(x,\dot{x})$, входящее в уравнение (5.1), в свою очередь, можно представить в виде ряда

$$\begin{gathered}\mu f(x,\dot{x})=\mu f+\mu^2\left[u_1\frac{\partial f}{\partial x}+\right.\\ \left.+\left(A_1\cos\psi-aB_1\sin\psi+\omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\right]+\ldots\,,\end{gathered}\tag{5.7}$$

где в правой части после вычисления всех производных от функции f аргументы x и $\dot{x}$ заменяем соответственно величинами $a\cos\psi$ и $-a\omega\sin\psi$.

Приравнивая в соотношениях (5.6) и (5.7) слагаемые с равными степенями μ^ν, $\nu=\overline{1,n}$, получаем

$$\begin{gathered}\omega^2\left(\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial\psi^2}+u_\nu\right)=f_{\nu-1}(a,\psi)+2\omega A_\nu\sin\psi+2\omega a B_\nu\cos\psi\,,\\ \nu=\overline{1,n}\,,\end{gathered}\tag{5.8}$$

где использованы обозначения

$$\begin{gathered}f_0(a,\psi)=f(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\,,\\ f_1(a,\psi)=u_1\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\left(A_1\cos\psi-aB_1\sin\psi+\omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)+\\ +\left(aB_1^2-A_1\frac{dA_1}{da}\right)\cos\psi+\left(2A_1B_1+aA_1\frac{dB_1}{da}\right)\sin\psi-\\ -2\omega\left(A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi}+B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}\right)\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

Отметим, что при этом уравнение (5.1) удовлетворяется с точностью до малых порядка μ^{n+1}.

Функции $f_\nu(a,\psi)$ являются 2π-периодическими по аргументу ψ и выражаются через $A_1,\ B_1,\ u_1,\ \dots,\ A_\nu,\ B_\nu,\ u_\nu$.

Найдем A_ν, B_ν, u_ν из ν-го уравнения системы (5.8), если известны все предыдущие функции. Разложим в ряды Фурье функции $f_{\nu-1}(a,\psi)$ и $u_\nu(a,\psi)$ (вторая из них на основании условий (5.4) не содержит первых гармоник):

$$f_{\nu-1}(a,\psi) = \mathrm{g}_0^{(\nu-1)}(a) + \sum_{\varkappa=1}^{\infty}\left[\mathrm{g}_\varkappa^{(\nu-1)}(a)\cos\varkappa\psi + h_\varkappa^{(\nu-1)}(a)\sin\varkappa\psi\right],$$

$$u_\nu(a,\psi) = v_0^{(\nu)}(a) + \sum_{\varkappa=2}^{\infty}\left[v_\varkappa^{(\nu)}(a)\cos\varkappa\psi + w_\varkappa^{(\nu)}(a)\sin\varkappa\psi\right].$$

Подставив эти выражения в соответствующее уравнение системы (5.8) и приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках, получим

$$A_\nu(a) = -\frac{h_1^{(\nu-1)}(a)}{2\omega}, \quad B_\nu(a) = -\frac{\mathrm{g}_1^{(\nu-1)}(a)}{2\omega a}, \quad v_0^\nu(a) = \frac{\mathrm{g}_0^{(\nu-1)}(a)}{\omega^2},$$

$$v_\varkappa^{(\nu)}(a) = \frac{\mathrm{g}_\varkappa^{(\nu-1)}(a)}{\omega^2(1-\varkappa^2)}, \quad w_\varkappa^{(\nu)}(a) = \frac{h_\varkappa^{(\nu-1)}(a)}{\omega^2(1-\varkappa^2)}, \quad \varkappa = 2,3,\dots.$$

Таким образом, находим функции $A_\nu(a)$, $B_\nu(a)$ и ряды Фурье функций $u_\nu(a,\psi)$, $\nu=\overline{1,n}$, то есть решаем задачу с требуемой точностью.

Пусть для достаточно большого промежутка времени, имеющего порядок величины $1/\mu$, получено первое приближение

$$x = a\cos\psi + \mu u_1(a,\psi), \tag{5.9}$$

где a и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\dot a = \mu A_1(a), \quad \dot\psi = \omega + \mu B_1(a). \tag{5.10}$$

Тогда по теореме о среднем приращения амплитуды и фазы за время t согласно формулам (5.10) можно представить в виде

$$a(t) - a(0) = t\mu\overline{A_1(a)}, \quad \psi(t) - \omega t - \psi(0) = t\mu\overline{B_1(a)}, \tag{5.11}$$

где чертой отмечены средние значения соответствующих функций в интервале $[0,t]$. Из выражений (5.11) следует, что первый член ряда (5.9) содержит величины порядка μ, то есть в решении

$$x = a(t)\cos\psi(t), \tag{5.12}$$

где a и ψ удовлетворяют уравнениям (5.10), учитываются величины порядка μ. Исходя из этого, решение (5.9) иногда называют *улучшенным первым приближением* в отличие от *первого приближения* (5.12).

Именно в виде (5.12) отыскивается решение уравнения (5.1) *методом Ван-дер-Поля*. При этом функцию $\psi(t)$ представляют следующим образом:

$$\psi(t) = \omega t + \theta(t)\,.$$

Так как для отыскания двух неизвестных функций $a(t)$ и $\theta(t)$ используют одно уравнение (5.1), то на них можно наложить дополнительное условие, например

$$\dot{a}\cos\psi - a\,\dot{\theta}\sin\psi = 0\,. \tag{5.13}$$

Это условие удобно тем, что при его выполнении $\dot{x}$ имеет вид

$$\dot{x} = -a\omega\sin\psi\,,$$

то есть тот же, что и для постоянных значений a и θ. После вычисления ускорения $\ddot{x}$ и подстановки его в уравнение (5.1) получаем

$$\dot{a}\sin\psi + a\,\dot{\theta}\cos\psi = -\frac{\mu}{\omega}\,f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\,. \tag{5.14}$$

Из системы (5.13), (5.14) находим производные $\dot{a}$ и $\dot{\theta}$:

$$\dot{a} = -\frac{\mu f}{\omega}\,\sin\psi\,, \quad \dot{\theta} = \dot{\psi} - \omega = -\frac{\mu f}{\omega a}\,\cos\psi\,.$$

Заменяя в этих уравнениях функции $f\sin\psi$ и $f\cos\psi$ их средними значениями за период 2π, получаем

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\mu}{2\omega\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\,\sin\psi\,d\psi\,, \\ \dot{\psi} &= \omega - \frac{\mu}{2\omega a\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\,\cos\psi\,d\psi\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Это *«уравнения установления» Ван-дер-Поля* (или *уравнения переходного процесса Ван-дер-Поля*). В обозначениях, применявшихся в методе Крылова — Боголюбова, уравнения (5.15) можно переписать в виде (5 10). Таким образом, первое приближение (5.12), полученное методом Крылова — Боголюбова, совпадает с решением, найденным методом Ван-дер-Поля.

Построим первое приближение (5.12) для *уравнения Ван-дер-Поля*:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu\,(1 - x^2)\,\dot{x}\,, \quad f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\,\dot{x}\,.$$

В соответствии с уравнениями (5.15) имеем

$$\dot{a} = -\frac{\mu}{2\omega\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1 - a^2\cos^2\psi)(-a\omega\sin\psi)\,\sin\psi\,d\psi = \frac{\mu a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\,,$$

$$\dot{\psi} = \omega - \frac{\mu}{2\omega a\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1 - a^2\cos^2\psi)(-a\omega\sin\psi)\,\cos\psi\,d\psi = \omega\,.$$

Так как $2a\dot{a} = da^2/dt$, то данная система может быть записана в виде

$$\frac{da^2}{dt} = \mu a^2\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\,, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega\,. \tag{5.16}$$

Интегрируя эти уравнения при начальных условиях $a(0) = a_0$, $\psi(0) = \psi_0$, получаем

$$a(t) = a_0 e^{(1/2)\mu t}\left[1 + \frac{1}{4}\,a_0^2(e^{\mu t} - 1)\right]^{-1/2}\,, \quad \psi(t) = \omega t + \psi_0\,. \tag{5.17}$$

Из системы (5.16) следует, что установившийся режим, когда амплитуда постоянна, возможен при $a^2 = 0$ и $a^2 = 4$. Значение $a = 0$ соответствует состоянию покоя системы. Однако такое положение равновесия оказывается неустойчивым, поскольку согласно формуле (5.17) при $a_0 \neq 0$ имеем $a \underset{t\to\infty}{\to} 2$, что указывает на устойчивые автоколебания при амплитуде $a = 2$. Таким образом, в системе, описываемой уравнением Ван-дер-Поля, автоколебания возникают самопроизвольно при любых начальных значениях амплитуды, отличных от нуля.

Колебания неавтономных систем. Рассмотрим случай, когда движение описывается уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(kt, x, \dot{x})\,, \tag{5.18}$$

где малая возмущающая сила μf является 2π-периодической по аргументу kt. Пусть функция f имеет вид

$$f(kt, x, \dot{x}) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x, \dot{x})\,\cos nkt\,,$$

а коэффициенты $f_n(x, \dot{x})$ являются некоторыми многочленами от x и $\dot{x}$. Для отыскания приближенного решения в виде (5.12) будем раскладывать функции $f_n(x, \dot{x})$ в ряды Фурье, подставив в них вместо x и $\dot{x}$ выражения $a\cos(\omega t + \theta)$ и $-a\omega\sin(\omega t + \theta)$. Тем самым мы представим функцию $f(kt, x, \dot{x})$ двойным рядом Фурье. Входящие в него произведения $\cos nkt \cos m\omega t$ и $\cos nkt \sin m\omega t$ могут быть выражены в виде суммы гармоник с частотами $|nk \pm m\omega|$, которые называются *комбинационными частотами*.

Если одна из таких частот оказывается близкой к собственной частоте ω, то есть

$$k \approx p\omega/q\,,$$

где p и q — целые взаимно простые числа, то в нелинейной системе может появиться резонанс. Если $p = q = 1$, то резонанс называют *главным*, или *обыкновенным*. При $p = 1$, $q \neq 1$ говорят, что резонанс наступает *на обертоне внешней частоты*, в противном случае ($q = 1$, $p \neq 1$) он возникает *на обертоне собственной частоты* (*резонанс n-го рода*). Последнее явление было отмечено ещё Гельмгольцем, обнаружившим, что ухо человека иногда улавливает звук не только заданной частоты k, но и частот $k/2$, $k/3$ и т. д. Он считал, что это следует объяснять прежде всего нелинейными механическими свойствами барабанной перепонки. Первые теоретические исследования в данном направлении были выполнены Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси методом малого параметра.

Представим частоту внешней силы k в виде $k = p\omega/q + \Delta$, где Δ — *расстройка относительно резонанса* с частотой $p\omega/q$. Как и ранее, будем считать, что основное слагаемое в приближенном решении имеет вид (5.12). Неизвестную функцию $\psi(t)$ в данном случае удобно представить в виде

$$\psi(t) = \frac{q}{p}\,kt + \theta(t)\,,$$

где $\theta(t)$ — новая неизвестная функция.

При уточнении первого приближения (5.12) будем искать решение в виде

$$x = a\cos\left(\frac{q}{p}\,kt + \theta\right) + \sum_{\nu=1}^{n} \mu^\nu u_\nu(a, kt, \theta)\,, \tag{5.19}$$

где функции a и θ определяются из дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \sum_{\nu=1}^{n} \mu^\nu A_\nu(a,\ \theta)\,, \\ \dot{\theta} &= \omega - \tfrac{q}{p}\,k + \sum_{\nu=1}^{n} \mu^\nu B_\nu(a,\ \theta)\,, \end{aligned} \tag{5.20}$$

причем разность $\left(\omega - \frac{q}{p}\,k\right)$ не обязательно мала. Подлежащие определению функции A_ν, B_ν, u_ν, $\nu = \overline{1,n}$, отыскиваем как 2π-периодические относительно своих переменных θ и kt.

Для нахождения решения выражение (5.19) следует подставить в уравнение (5.18), используя при этом зависимости (5.20). Раскладывая затем правую часть уравнения (5.18) в ряд по степеням μ и приравнивая коэффициенты в левой и правой частях равенства при одинаковых степенях малого параметра, получаем соотношения для определения всех неизвестных функций. Однако в рассматриваемом случае даже для низших приближений формулы оказываются громоздкими, поэтому не будем выписывать их в общем виде, а перейдем к решению конкретного примера.

Рассмотрим колебания, описываемые уравнением (3.14). Будем отыскивать решение вблизи основного резонанса, то есть положим $p = q = 1$. Как уже отмечалось, в первом приближении метод Крылова — Боголюбова позволяет получить решение, совпадающее с решением, выведенным методом Ван-дер-Поля. Согласно последнему решение ищем в виде

$$x = a(t)\cos\psi(t)\,, \quad \psi(t) = kt + \theta(t)\,, \tag{5.21}$$

где искомые функции a и θ связаны соотношением (5.13). Существенно, что при этом производные $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ вычисляют по сравнительно простым формулам:

$$\begin{gathered} \dot{x} = -ak\sin\psi\,, \\ \ddot{x} = -ak^2\cos\psi - \dot{a}k\sin\psi - ak\dot{\theta}\cos\psi\,. \end{gathered} \tag{5.22}$$

Уравнение (3.14) с учетом выражений (5.21) и (5.22) может быть представлено в виде

$$-\dot{a}k\,\sin\psi - ak\dot{\theta}\cos\psi = h\sin(\psi-\theta) + F(\psi)\,, \tag{5.23}$$

где $F(\psi) = a\,(k^2-\omega^2)\cos\psi - \mu a^3\,\cos^3\psi + \varphi\omega^2\,ka\sin\psi + \varphi\,ka^3\,\sin^3\psi$.

Из уравнений (5.13), (5.23) находим производные $\dot{a}$ и $\dot{\theta}$:

$$\dot{a} = -\frac{h\sin(\psi-\theta) + F(\psi)}{\omega}\,\sin\psi\,,$$

$$\dot{\theta} = -\frac{h\sin(\psi-\theta) + F(\psi)}{a\omega}\,\cos\psi\,.$$

Усредняя правые части этих уравнений по переменной ψ за период 2π, то есть полагая

$$\dot{a} = -\frac{1}{2\omega\pi}\int\limits_0^{2\pi}(h\sin(\psi-\theta) + F(\psi))\,\sin\psi\,d\psi\,,$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{2a\omega\pi}\int\limits_0^{2\pi}(h\sin(\psi-\theta)+F(\psi))\cos\psi\,d\psi\,,$$

после вычисления соответствующих интегралов получаем

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\frac{\varphi\omega^2}{2}\,a - \frac{3\mu\varphi}{8}\,a^3 - \frac{h}{2k}\cos\theta\,,\\ \dot{\theta} &= \frac{h}{2ka}\sin\theta + \frac{3\mu}{8k}\,a^2 - \frac{\omega^2-k^2}{2k}\,.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Эти уравнения дают возможность рассмотреть и стационарные колебания. Полагая $\dot{a} = \dot{\theta} = 0$, получаем систему двух уравнений, позволяющую определить зависимость амплитуды a и сдвига фазы $\varepsilon = \theta - \pi/2$ от частоты k возмущающей силы. Отметим, что выражение $h^2 = h^2\cos^2\theta + h^2\sin^2\theta$ при подстановке в него величин $h\cos\theta$ и $h\sin\theta$, найденных из соотношений (5.24) при $\dot{a} = \dot{\theta} = 0$, совпадает с уравнением амплитудно-частотной характеристики (3.17), выведенным ранее методом Бубнова — Галеркина.

Колебания в системах с медленно меняющимися параметрами. Асимптотический метод Крылова — Боголюбова был распространен А. Ю. Митропольским на системы, содержащие медленно меняющиеся параметры. Это позволяет, в частности, изучать прохождение механической системы через резонанс при изменении частоты возмущающей силы по заданному закону. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(\vartheta, x, \dot{x})\,, \tag{5.25}$$

где $f(\vartheta, x, \dot{x})$ — функция, периодическая по ϑ с периодом 2π. Величина ϑ является фазой возмущающей силы. Будем считать, что мгновенная частота этой силы k, равная $\dot{\vartheta}$, медленно изменяется во времени. Величину k удобно рассматривать как функцию «медленного» времени $\tau = \mu t$. Это дает возможность учесть, что скорость изменения частоты k, то есть

$$k = \frac{dk}{dt} = \frac{dk}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \mu\frac{dk}{d\tau} = \mu g(\tau)\,,$$

является величиной порядка μ. Изменение частоты k во времени при подобном подходе имеет тот же порядок малости, что и нелинейные члены. Это позволяет и переменность частоты, и нелинейность учесть единым асимптотическим методом.

На основании сказанного в данном случае колебания в первом приближении целесообразно искать в виде $x = \cos(\vartheta + \theta)$, где $a(t)$ и $\theta(t)$ —

неизвестные функции времени. Медленное изменение частоты $k = \dot{\vartheta}$ приводит к возбуждению колебаний с частотой, которая должна быть близка к частоте собственных колебаний ω. Поэтому примем $\dot{\psi} = \dot{\vartheta} + \dot{\theta}$ при $\mu \to 0$, то есть $\dot{\theta} \to \omega - k$ при $\mu \to 0$. Следовательно, при уточнении первого приближения решение уравнения (5.25) будем искать в виде ряда

$$x = a\cos(\vartheta + \theta) + \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{\nu} u_{\nu}(a_{\nu},\ \theta)\,,$$

в котором функции $u_{\nu}(a, \theta)$ являются 2π-периодическими по аргументу θ, а функции $a(t)$ и $\theta(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{a} = \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{\nu} A_{\nu}(a,\ \theta)\,, \quad \dot{\theta} = \omega - k + \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{\nu} B_{\nu}(a,\ \theta)\,.$$

Рассмотрим в качестве примера уравнение, правая часть которого имеет следующий вид:

$$\mu f(\vartheta, x, \dot{x}) = h\sin\vartheta - \varphi\omega^2\dot{x} - \frac{\varphi}{k^2}\,\mu\dot{x}^3 - \mu x^3\,. \tag{5.26}$$

Построим первое приближение $x = a\cos(\vartheta + \theta)$, в котором функции $a(t)$ и $\theta(t)$ следует искать из уравнений

$$\dot{a} = \mu A_1(a, \theta)\,, \quad \dot{\theta} = \omega - k - \mu B_1(a,\ \theta)\,. \tag{5.27}$$

При этом производные $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ с точностью до малых порядка μ включительно таковы:

$$\begin{aligned}
\dot{x} = \dot{a}\cos(\vartheta + \theta) - a(\dot{\vartheta} + \dot{\theta})\sin(\vartheta + \theta) = -a\omega\sin(\vartheta + \theta) + \\
+ \mu(A_1\cos(\vartheta + \theta) - aB_1\sin(\vartheta + \theta))\,, \\
\ddot{x} = -a\omega^2\cos(\vartheta + \theta) + \mu\,[-2A_1\omega\sin(\vartheta + \theta) - 2B_1 a\omega\cos(\vartheta + \theta) + \\
+ (\omega - k)\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\cos(\vartheta + \theta) - a(\omega - k)\frac{\partial B_1}{\partial\theta}\sin(\vartheta + \theta)\Big]\,.
\end{aligned}$$

Следовательно, левую часть уравнения (5.25) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + \omega^2 x = \mu\,[-2A_1\omega\sin(\vartheta + \theta) - 2B_1 a\omega\cos(\vartheta + \theta) + \\
+ (\omega - k)\,\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\,\cos(\vartheta + \theta) - a(\omega - k)\,\frac{\partial B_1}{\partial\theta}\,\sin(\vartheta + \theta)\Big]\,.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Правая его часть, заданная выражением (5.26), с точностью до величин порядка μ включительно может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned}\mu f(\vartheta,\ x,\ \dot{x}) = \mu \left[\frac{h}{\mu}\,\sin\vartheta + \frac{\varphi}{\mu}\,a\omega^3\,\sin(\vartheta+\theta) + \right.\\ \left. + \frac{\varphi}{k^2}\,a^3\omega^3\,\sin^3(\vartheta+\theta) - a^3\,\cos^3(\vartheta+\theta)\right].\end{aligned} \tag{5.29}$$

Входящую в это выражение величину $\sin\vartheta$ можно представить в виде

$$\sin\vartheta = \cos\theta\sin(\vartheta+\theta) - \sin\theta\cos(\vartheta+\theta)\,.$$

Приравнивая теперь выражения (5.28) и (5.29) и вводя обозначение $\psi = \vartheta + \theta$, находим

$$\begin{aligned}-2A_1\omega\sin\psi - 2B_1 a\omega\cos\psi + \frac{\partial A_1}{\partial\theta}(\omega-k)\cos\psi - \\ -a\,\frac{\partial B_1}{\partial\theta}(\omega-k)\sin\psi = \frac{h}{\mu}(\cos\theta\sin\psi - \sin\theta\cos\psi) + \\ + \frac{\varphi}{\mu}\,a\omega^3\sin\psi + \frac{\varphi}{k^2}\,a^3\omega^3\sin^3\psi - a^3\cos^3\psi\,.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Умножая уравнение (5.30) последовательно на $\cos\psi$ и $\sin\psi$ и интегрируя по ψ в пределах от 0 до 2π, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}(\omega-k) - 2B_1 a\omega = -\frac{h}{\mu}\,\sin\theta - \frac{3}{4}\,a^3\,,\\ a\,\frac{\partial B_1}{\partial\theta}(\omega-k) + 2A_1\omega = -\frac{h}{\mu}\,\cos\theta - \frac{\varphi}{\mu}\,a\omega^3 - \frac{3}{4}\frac{\varphi}{k^2}\,a^3\omega^3\,.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$A_1 = A_1^0 + A_1^1\,\cos\vartheta\,, \quad B_1 = B_1^0 + B_1^1\,\sin\vartheta\,, \tag{5.32}$$

где A_1^0, A_1^1, B_1^0, B_1^1 подлежат определению. Подставим выражения (5.32) в систему (5.31) и приравняем свободные члены и коэффициенты при $\cos\theta$ и $\sin\theta$, при этом получим

$$B_1^1(\omega-k)a + 2A_1^1\omega = -\frac{h}{\mu}\,,$$

$$2a\omega B_1^1 + A_1^1(\omega-k) = \frac{h}{\mu}\,,$$

$$2A_1^0\omega = -\frac{\varphi}{\mu}\,a\omega^3 - \frac{3}{4}\frac{\varphi}{k^2}\,a^3\omega^3\,,$$

$$2a\omega B_1^0 = \frac{3}{4}\,a^3\,.$$

Определив отсюда интересующие нас постоянные и подставив выражения (5.32) в систему (5.27), найдем

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varphi\,\omega^2}{2}\,a - \frac{3}{8}\frac{\varphi}{k^2}\,\mu a^3\omega^2 - \frac{h}{\omega+k}\,\cos\theta\,, \\ \dot{\theta} &= \omega - k + \frac{3}{8}\frac{\mu}{\omega}\,a^2 + \frac{h}{a(\omega+k)}\,\sin\theta\,. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Итак, построение первого приближения свелось к интегрированию системы (5.33). Его можно выполнить лишь численно. Отметим, что численное интегрирование системы (5.33) рациональнее интегрирования непосредственно исходного нелинейного уравнения, так как последнее имеет быстро осциллирующее решение, вследствие чего интенсивно накапливается ошибка интегрирования. Функции же a и θ, определяемые из системы (5.33), меняются медленно, что обеспечивает хорошую точность численных результатов. Иными словами, уравнения (5.33) позволяют находить огибающую быстро осциллирующей кривой $x(t)$.

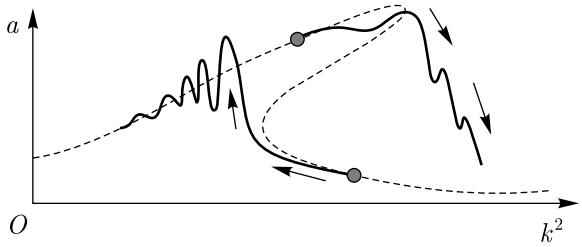

Рис. 11. Изменение амплитуды в зависимости от медленно меняющейся частоты

Интегрирование системы (5.33) при заданной функции $k = k(t)$ позволяет определить закон изменения амплитуды a во времени. Так как время можно рассматривать как функцию k, то можно выявить и закон изменения амплитуды от частоты. На рис. 11 приведена качественная картина зависимости амплитуды a от величины k^2 при ее возрастании и убывании. Штриховой линией показана амплитудно-частотная характеристика, которая была представлена на рис. 10.

§ 6. Метод прямого разделения движений

Основная идея метода. Пусть уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}, x, t) + \Phi(\dot{x}, x, t, kt)\,, \tag{6.1}$$

где F — «медленная» сила, а Φ — «быстрая» сила, имеющая период 2π по «быстрому» времени kt. Из характера действующих на точку сил ясно, что ее движение на плоскости Otx складывается из движения вдоль некоторой плавной кривой и быстрых осцилляций с частотой k около нее. Исходя из сказанного, решение уравнения (6.1) ищем в виде

$$x(t) = X(t) + \xi(t, kt)\,, \tag{6.2}$$

где ξ представляет собой быстрые осцилляции около плавного движения X. Величину ξ можно рассматривать и как разность между x и средним движением X. Потребуем поэтому, чтобы среднее значение функции ξ за период $2\pi/k$ было равно нулю:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \xi(t, \theta)\, d\theta = 0\,, \quad \theta = kt\,. \tag{6.3}$$

Подставив выражение (6.2) в уравнение (6.1), получим

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = F(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t) + \Phi(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t, kt)\,. \tag{6.4}$$

Обозначим через $\widetilde{F}$ и $\widetilde{\Phi}$ средние значения сил F и Φ за период $2\pi/k$. Приближенно их можно вычислить по формулам

$$\widetilde{F}(\dot{X}, X, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t)\, d\theta\,, \quad \theta = kt\,,$$

$$\widetilde{\Phi}(\dot{X}, X, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t, \theta)\, d\theta\,.$$

Особо следует отметить, что переменные $\dot{X}$, X, t в этих формулах являются постоянными параметрами. Интегрирование ведется по быстрому времени $\theta = kt$, от которого зависят только смещение ξ, скорость $\dot{\xi}$ и сила Φ. Данное приближенное вычисление средних значений сил F и Φ составляет основную идею *метода прямого разделения движений*, который

позволяет выделить каждый вид движения, то есть записать уравнения для X и ξ отдельно. Этот метод первоначально назывался *методом Капицы*[7].

Приравнивая среднее значение правой части уравнения (6.4), равное $\widetilde{F} + \widetilde{\Phi}$, среднему значению его левой части $m\ddot{X}$, получаем

$$m\ddot{X} = \widetilde{F}(\dot{X}, X, t) + \widetilde{\Phi}(\dot{X}, X, t)\,. \tag{6.5}$$

Для записи дифференциального уравнения относительно смещения ξ рассмотрим разность между силой $F + \Phi$ и ее средним значением $\widetilde{F} + \widetilde{\Phi}$. Приравнивая эту разность величине $m\ddot{\xi}$, имеем

$$\begin{gathered} m\ddot{\xi} = F(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t) + \Phi(\dot{X} + \dot{\xi}, X + \xi, t, kt) - \\ -\widetilde{F}(\dot{X}, X, t) - \widetilde{\Phi}(\dot{X}, X, t)\,. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Переменные $\dot{X}$, X и t считаем в данном уравнении параметрами.

Уравнение (6.5) относительно функции X может быть записано только после нахождения функции ξ. Вместе с тем, чтобы выписать уравнение (6.6) относительно ξ, следует знать среднее движение X. Для выхода из этого затруднительного положения необходимо преодолеть основную трудность, связанную с применением метода прямого разделения движений. Уравнение относительно ξ и его решение находят каким-либо другим приближенным методом, который может быть основан, в частности, на разложении сил F и Φ в ряды Тейлора, а также на разложении функции ξ в ряд по степеням малого параметра.

Покажем на конкретных примерах, какие важные и интересные механические явления могут быть исследованы методом прямого разделения движений.

Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса[8]**.** Пусть точка подвеса физического маятника колеблется

---

[7]Обсуждаемый метод решения нелинейных уравнений был предложен академиком П. Л. Капицей (см.: *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. экспер. и теор. физики. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–598). Дальнейшее развитие этот приближенный метод получил в работе И. И. Блехмана (см.: *Блехман И. И.* Метод прямого разделения движений в задачах о действии вибрации на нелинейные механические системы // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1976. № 6. С. 13–27). После этой статьи появилось и название «метод прямого разделения движений».

[8]Эта задача была рассмотрена академиком П. Л. Капицей при изложении его нового метода решения нелинейного уравнения в статье, указанной в предыдущей ссылке.

вдоль вертикали по гармоническому закону $H \sin kt$. Уравнение колебаний маятника при этом имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi + mlHk^2 \sin kt \sin\varphi\,. \tag{6.7}$$

Здесь φ — угол отклонения маятника, отсчитываемый от его нижнего вертикального положения, J — момент инерции относительно оси подвеса, m — масса маятника, l — расстояние от оси вращения до центра тяжести.

Предположим, что частота k существенно больше частоты $\omega = \sqrt{mgl/J}$ малых свободных колебаний маятника. При этом момент $(-mgl\sin\varphi)$ можно считать медленно изменяющимся по сравнению с моментом $mlHk^2 \sin kt \sin\varphi$. Представим угол φ в виде $\varphi = X + \xi$. При $H \ll l$ величину ξ для некоторых начальных условий можно считать малой по сравнению с X. Разлагая правую часть уравнения (6.7) в ряд Тейлора по ξ и ограничиваясь величинами порядка ξ, находим

$$\begin{gathered} -mgl\sin\varphi + mlHk^2 \sin kt \sin\varphi = \\ = (mlHk^2 \sin kt - mgl)(\sin X + \xi\cos X)\,. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Приравнивая величину $J\ddot{X}$ среднему значению правой части этого выражения, имеем

$$J\ddot{X} = -mgl\sin X + mlHk^2 \cos X \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \xi \sin\theta\, d\theta\,. \tag{6.9}$$

Вычитая правую часть данного уравнения из правой части выражения (6.8) и приравнивая результат величине $J\ddot{\xi}$, записываем

$$\begin{gathered} J\ddot{\xi} = mlHk^2 \sin kt \sin X - mgl\xi\cos X + \\ +mlHk^2 \cos X \left(\xi \sin kt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \xi \sin\theta\, d\theta \right)\,, \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} \ddot{\xi} = \mu k^2 \Bigg[\sin kt(\sin X + \xi\cos X) - \\ -\frac{g}{Hk^2}\,\xi\cos X - \cos X \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \xi\sin\theta\, d\theta \Bigg]\,, \end{gathered} \tag{6.10}$$

где $\mu = mlH/J$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда параметры H и k таковы, что величина $\mathrm{g}/(Hk^2)$ имеет порядок единицы, а $\mu \ll 1$. При этих предположениях, как непосредственно следует из уравнения (6.10), функция ξ, изменяющаяся с частотой k, является величиной порядка μ. Оставляя в правой части уравнения (6.10) величину порядка μ, имеем

$$\ddot{\xi} = \mu k^2 \sin kt \sin X\,. \tag{6.11}$$

Частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (6.3), таково:

$$\xi = -\mu \sin X \sin kt\,.$$

Напомним, что в соответствии с основной идеей метода прямого разделения движений величина X в уравнении (6.11) считается постоянной.

Подставляя найденное выражение для ξ в уравнение (6.9), получаем

$$J\ddot{X} = -m\mathrm{g}l \sin X - \frac{(mlHk)^2}{4J} \sin 2X\,. \tag{6.12}$$

Для определения, при каких условиях верхнее вертикальное положение маятника в случае колебания его точки подвеса по вертикали оказывается устойчивым, воспользуемся уравнением (6.12). Полагая $X = \pi + X_1$ и считая отклонения X_1 малыми, имеем

$$J\ddot{X}_1 + \left(\frac{(mlHk)^2}{2J} - m\mathrm{g}l\right) X_1 = 0\,.$$

Отсюда видно, что величина X_1 изменяется по гармоническому закону, и, следовательно, верхнее вертикальное положение маятника устойчиво, если

$$mlH^2k^2 > 2J\mathrm{g}\,. \tag{6.13}$$

В частном случае математического маятника $J = ml^2$, и условие (6.13) можно записать в виде

$$H^2k^2 > 2\mathrm{g}l\,.$$

Колебания груза на пружине при быстро вибрирующей точке подвеса и сухом трении[9]**.** Для амортизации различных установок, основание которых совершает высокочастотные колебания, их крепят к основанию не жестко, а упруго. Демпфирование колебаний этих установок может быть осуществлено с помощью сил сухого трения. Этот сложный и

[9] См.: *Зегжда С. А., Юшков М. П.* Движение в быстро осциллирующем поле при сухом трении // В кн.: Прикладная механика. Вып. 1. Л.: 1973. С. 20–26.

технически важный вопрос может быть рассмотрен на простой механической модели.

Груз массой m связан с основанием пружиной с жесткостью c. Пусть основание внезапно начинает перемещаться по закону (см. § 2, формула (2.1))

$$\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)\,,$$

$$\text{где} \quad \eta_1(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0\,, \\ \dfrac{J_0}{k}\,t\,, & t > 0\,, \end{cases} \qquad \eta_2(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0\,, \\ -\dfrac{J_0}{k^2}\,\sin kt\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

Обозначим через x перемещение груза относительно основания. При этом абсолютное перемещение груза равно $x + \eta$. Силу сухого трения при перемещении с относительной скоростью $\dot{x}$ считаем равной $(-mJ_c\,\mathrm{sign}\dot{x})$. Для простоты полагаем, что силой тяжести можно пренебречь. Тогда уравнение движения груза можно записать в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -J_0 \sin kt - J_c\,\mathrm{sign}\dot{x}\,, \quad \omega^2 = c/m\,. \tag{6.14}$$

В соответствии с основной идеей метода полагаем $x = X + \xi$. Уравнение (6.14) при этом записывается следующим образом:

$$\ddot{X} + \ddot{\xi} + \omega^2(X + \xi) = -J_0 \sin kt - J_c\,\mathrm{sign}(\dot{X} + \dot{\xi})\,. \tag{6.15}$$

Приближенно можно считать, что функции X и ξ изменяются по гармоническому закону с частотами ω и k соответственно, поэтому в выражении для скорости $\dot{x} = \dot{X} + \dot{\xi}$ при $k \gg \omega$ величину $\dot{X}$ можно считать малой по сравнению с $\dot{\xi}$. Для возможности пользоваться в дальнейшем разложением функции $\mathrm{sign}\,(\dot{\xi} + \dot{X})$ в ряд по $\dot{X}$ необходимо на основе физических соображений ввести понятие производной от функции $\mathrm{sign}\,\dot{x}$. Эта функция используется здесь для того, чтобы показать, что сила сухого трения изменяет направление при изменении направления движения. В действительности сила сухого трения изменяется не скачком, а непрерывно. Поэтому можно принять, что ее изменение описывается не функцией $\mathrm{sign}\,\dot{x}$, а функцией $f_\varepsilon(\dot{x})$, которую задаем в виде

$$f_\varepsilon(\dot{x}) = \begin{cases} -1\,, & -\infty < \dot{x} < -\varepsilon\,, \\ \dot{x}/\varepsilon\,, & -\varepsilon < \dot{x} < \varepsilon\,, \\ 1\,, & \varepsilon < \dot{x} < +\infty\,. \end{cases}$$

Величина ε, вообще говоря, неизвестна. Очевидно, что ее влияние на движение системы несущественно, если $\varepsilon \ll \max|\dot{x}|$. Функцию $\mathrm{sign}\,\dot{x}$ можно рассматривать как предел функции $f_\varepsilon(\dot{x})$ при $\varepsilon \to 0$.

Вычислим производную

$$\frac{df_\varepsilon(\dot x)}{d\dot x} = 2\delta_\varepsilon(\dot x) = \begin{cases} 0\,, & -\infty < \dot x < -\varepsilon\,, \\ 1/\varepsilon\,, & -\varepsilon < \dot x < \varepsilon\,, \\ 0\,, & \varepsilon < \dot x < +\infty\,. \end{cases}$$

Функция $\delta_\varepsilon(\dot x)$ при $\varepsilon \to 0$ переходит в обобщенную δ-функцию. По определению она обладает свойством

$$\int\limits_a^b \delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0\,, & \tau = 0 \notin [a,b]\,, \\ 1\,, & \tau = 0 \in [a,b]\,. \end{cases} \tag{6.16}$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(\dot x) = \operatorname{sign}\dot x\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{df_\varepsilon(\dot x)}{d\dot x} = 2\delta(\dot x)\,,$$

то естественно считать, что

$$\frac{d\operatorname{sign}\dot x}{d\dot x} = 2\delta(\dot x)\,. \tag{6.17}$$

Разлагая функцию $\operatorname{sign}(\dot\xi + \dot X)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами этого разложения, с учетом формулы (6.17) имеем

$$\operatorname{sign}(\dot\xi + \dot X) = \operatorname{sign}\dot\xi + 2\delta(\dot\xi)\dot X\,. \tag{6.18}$$

Исходя из уравнения (6.15), а также из соотношения (6.18), в соответствии с основной идеей метода прямого разделения движений приближенно можно считать, что функции ξ и X удовлетворяют уравнениям

$$\ddot\xi + \omega^2\xi = -J_0(\sin kt + \mu\operatorname{sign}\dot\xi)\,, \quad \mu = J_c/J_0\,, \tag{6.19}$$

$$\ddot X + \omega^2 X = -\frac{2J_c}{T}\dot X \int\limits_t^{t+T} \delta(\dot\xi(\tau))\,d\tau\,, \quad T = \frac{2\pi}{k}\,. \tag{6.20}$$

Уравнение (6.19) было исследовано Дж. П. Ден-Гартогом[10]. Им было показано, что периодическое решение данного уравнения приближенно может быть представлено в виде

$$\xi(t) = A\sin(kt - \alpha)\,, \quad A = \frac{J_0\sqrt{1-(4\mu/\pi)^2}}{k^2-\omega^2}\,, \quad \alpha = \arcsin\frac{4\mu}{\pi}\,. \tag{6.21}$$

[10] См.: *Den-Hartog J. P.* Forced Vibrations with combined Viscous and Coulomb Damping // Trans. ASME. 1931. Vol. 53. P. 107.

Вычислим теперь среднее значение функции $\delta(\dot{\xi})$ за период $T = 2\pi/k$. Пусть в интервале $[t, t+T]$ функция $\dot{\xi}(t)$ обращается в нуль в моменты времени t_1 и $t_2 = t_1 + T/2$. Не умоляя общности рассуждений, можно считать, что $t_1 > t$, а $t_2 < t+T$. В окрестности точек t_ν, $\nu = 1, 2$, функция $\dot{\xi}(\tau)$ может быть записана в виде

$$\dot{\xi}(\tau) = \ddot{\xi}(t_\nu)(\tau - t_\nu)\,, \quad \dot{\xi}(t_\nu) = 0\,, \quad \left|\ddot{\xi}(t_\nu)\right| = Ak^2\,. \tag{6.22}$$

Так как вне окрестности этих точек $\dot{\xi}(\tau) \neq 0$, то интеграл, входящий в правую часть уравнения (6.20), на основании формул (6.16) и (6.22) может быть представлен в виде

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \delta(\dot{\xi}(\tau))\,d\tau = \frac{1}{T}\int\limits_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \delta(\dot{\xi}(\tau))\,d\tau + \frac{1}{T}\int\limits_{t_2-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} \delta(\dot{\xi}(\tau))\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{T}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(a_1\tau)\,d\tau + \frac{1}{T}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(a_2\tau)\,d\tau\,, \quad a_\nu = \ddot{\xi}(t_\nu)\,.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(a_\nu\tau)\,d\tau = \frac{1}{a_\nu}\int\limits_{-\varepsilon a_\nu}^{\varepsilon a_\nu} \delta(\tau_1)\,d\tau_1 = \begin{cases} 1/a_\nu\,, & a_\nu > 0\,, \\ -1/a_\nu\,, & a_\nu < 0\,, \end{cases}$$

$$|a_\nu| = \left|\ddot{\xi}(t_\nu)\right| = Ak^2\,,$$

окончательно имеем

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \delta(\dot{\xi}(\tau))\,d\tau = \frac{2}{TAk^2}\,.$$

Подставляя это значение интеграла в уравнение (6.20), можно записать

$$\ddot{X} + 2n\dot{X} + \omega^2 X = 0\,, \quad n = \frac{\mu(k^2 - \omega^2)}{\pi k\sqrt{1 - (4\mu/\pi)^2}}\,. \tag{6.23}$$

Начальные условия при интегрировании этого уравнения определяем с учетом (6.2) и (6.21).

Уравнение (6.23) означает, что при высокочастотных колебаниях с малой амплитудой реакция системы на сравнительно медленные его движения, а также на другие внешние воздействия такая же, как и у систем с

вязким трением. В этом случае система как бы плавает, то есть становится более чувствительной к внешним нагрузкам. Этим, в частности, объясняются самопроизвольные перемещения установок на колеблющихся основаниях, отвинчивание гаек на вибрирующих болтах и т. д. Существенно, что метод прямого разделения движений позволяет не только объяснить механизм перехода сухого трения в «вязкое», но и найти соответствующий коэффициент для силы «вязкого сопротивления».

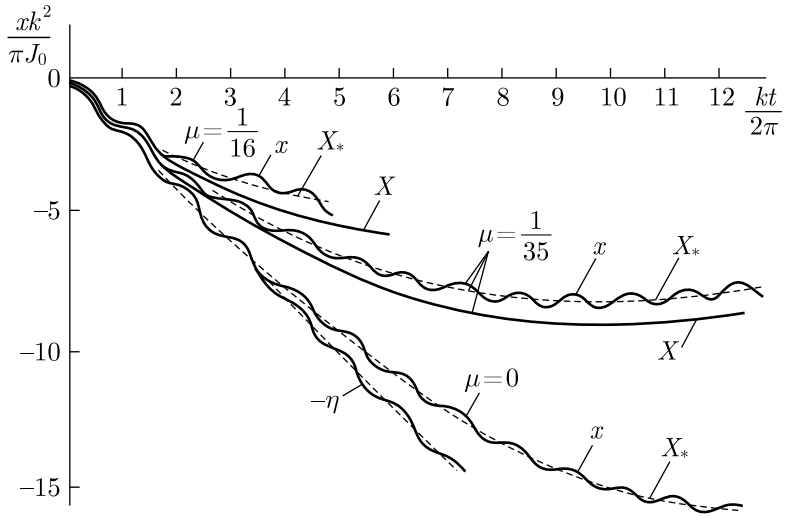

Рис. 12. Движение точки в быстро осциллирующем поле при сухом трении

Результаты численного интегрирования уравнения (6.14) и приближенные решения, полученные из уравнения (6.23), представлены на рис. 12. Все зависимости построены в безразмерных координатах. По оси абсцисс отложено число периодов возмущения $\eta_2(t)$, а по оси ординат — безразмерная величина

$$\frac{k^2 x}{\pi J_0} = \frac{x}{\pi a}\,, \quad a = \frac{J_0}{k^2}\,,$$

то есть отношение относительных смещений к амплитуде a колебаний основания, уменьшенное в π раз, чтобы прямая η_2 имела наклон в $45°$.

Из точного решения $x(t)$ может быть выделено его среднее значение $X_*(t)$. Из рисунка видно, что чем меньше величина μ, тем ближе решение $X(t)$ к точному среднему значению $X_*(t)$.

§ 7. Метод двухмасштабных разложений

Двухмасштабные разложения в нелинейных колебаниях являются одним из вариантов асимптотического метода Боголюбова — Митропольского. Эти разложения удобны при представлении колебаний с медленно меняющейся амплитудой. На начальном этапе решения неизвестные функции рассматриваются как функции двух аргументов $x = x(t, \theta)$, где t — обычное время, а $\theta = \mu t$ — медленное время, μ — малый параметр, причем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \mu \frac{\partial x}{\partial \theta} \,. \tag{7.1}$$

Метод будет проиллюстрирован на примере системы с двумя степенями свободы, описывающей колебания маятника, точка подвеса которого прикреплена к пружине и движется по вертикальной прямой (рис. 13).

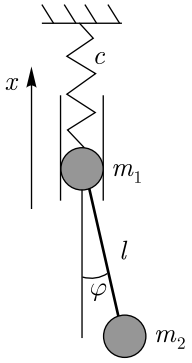

Рис. 13. Колебания двухмассовой системы

Кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \sin\varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \right) \,, \quad \Pi = \frac{1}{2} c x^2 + m_2 \mathrm{g} l (1 - \cos\varphi) \,,$$

где x — вертикальное перемещение точки подвеса маятника, отсчитываемое от положения равновесия, φ — угол отклонения маятника, m_1, m_2 — массы, l — длина маятника, c — жесткость пружины, g — ускорение свободного падения.

Уравнения Лагранжа второго рода запишем в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \eta(\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi) = 0 \,, \quad l\ddot{\varphi} + (\mathrm{g} + \ddot{x}) \sin\varphi = 0 \,, \tag{7.2}$$

где

$$\omega^2 = \frac{c}{m_1 + m_2} \,, \quad \eta = \frac{l m_2}{m_1 + m_2} \,.$$

Рассмотрим сначала малые колебания системы (7.2), отбросив нелинейное слагаемое в первом уравнении и положив приближенно $\sin\varphi = \varphi$. Тогда решение первого уравнения (7.2) с начальными условиями $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ имеет вид

$$x(t) = a\cos\omega t\,.$$

Второе уравнение в (7.2)

$$\ddot{\varphi} + \left(\nu^2 - \frac{a}{l}\omega^2\cos\omega t\right)\varphi = 0\,, \quad \nu^2 = \frac{\mathrm{g}}{l}\,,$$

является уравнением Матье, исследованным в § 7 главы I. После приведения этого уравнения к стандартному виду $x'' + (q + \mu\cos 2\tau)x = 0$ замечаем, что нулевое решение этого уравнения может быть неустойчивым в связи с возникновением параметрических резонансов, причем главная область неустойчивости на плоскости параметров (q, μ) при малых μ описывается неравенством $|q - 1| \leqslant \mu/8$. В наших обозначениях область неустойчивости имеет вид

$$\left|\left(\frac{2\nu}{\omega}\right)^2 - 1\right| \leqslant \frac{a}{2l}\,, \quad \nu^2 = \frac{\mathrm{g}}{l}\,, \tag{7.3}$$

где ν — частота малых колебаний маятника.

Полученный результат имеет смысл только на начальном этапе движения. При параметрическом резонансе амплитуда колебаний экспоненциально растет, что противоречит закону сохранения энергии ($T + \Pi = \mathrm{const}$) для рассматриваемой консервативной системы. Для устранения этого противоречия необходим приводимый ниже более точный анализ системы (7.2).

Из неравенств (7.3) следует, что главный резонанс имеет место при $\nu \approx \omega/2$. В системе (7.2) введем расстройку частоты δ по формуле

$$\nu^2 = \frac{\omega^2}{4} + \mu\delta\,.$$

Оставаясь в рамках малых колебаний, будем искать решение системы (7.2) в виде рядов

$$x = l(\mu x_1(t,\theta) + \mu^2 x_2(t,\theta) + \ldots)\,, \quad \varphi = \mu\varphi_1(t,\theta) + \mu^2 f_2(t,\theta) + \ldots\,, \tag{7.4}$$

где μ — малый параметр, а функции двух аргументов $x_k(t,\theta)$ и $\varphi_k(t,\theta)$ подлежат последовательному определению в результате подстановки в систему (7.2). При вычислении производных используем соотношение (7.1).

Возьмем начальные условия в виде $x(0) = \mu l,\ \dot{x}(0) = 0$, а начальные условия для $\varphi(t)$ возьмем исчезающе малыми, но не нулевыми, ибо в противном случае колебания маятника не возбуждаются.

Результаты подстановки рядов (7.4) в систему (7.2) с учетом (7.1) разлагаем в ряды по μ и приравниваем нулю коэффициенты при μ в разных степенях. При μ в первой степени получаем

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \omega^2 x_1 = 0\,, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \frac{\omega^2}{4}\varphi_1 = 0\,.$$

Решения этих уравнений

$$x_1(t,\theta) = x_{1c}(\theta)\cos\omega t + x_{1s}(\theta)\sin\omega t\,,$$
$$\varphi_1(t,\theta) = \varphi_{1c}(\theta)\cos(\omega t/2) + \varphi_{1s}(\theta)\sin(\omega t/2)$$

содержат произвольные функции $x_{1c}(\theta),\ x_{1s}(\theta),\ \varphi_{1c}(\theta),\ \varphi_{1s}(\theta)$, подлежащие определению из следующих приближений.

Коэффициенты при μ^2 в разложении уравнений (7.2) дают

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \omega^2 x_2 + X_2 = 0\,, \quad X_2(t,\theta) = 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial\theta\partial t} + \eta_1\left(\varphi_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)^2\right)\,,\\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + \frac{\omega^2}{4}\varphi_2 + \Phi_2 = 0\,, \quad \Phi_2(t,\theta) = 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta\partial t} + \delta\varphi_1 + \varphi_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}\,,\end{gathered} \tag{7.5}$$

где $\eta_1 = \eta/l = m_1/(m_1+m_2)$.

Уравнения (7.5) имеют ограниченные решения при выполнении условий

$$\int_0^{2\pi/\omega} X_2(t,\theta)\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}dt = 0\,, \qquad \int_0^{\pi/\omega}\Phi_2(t,\theta)\begin{pmatrix}\sin(\omega t/2)\\ \cos(\omega t/2)\end{pmatrix}dt = 0\,,$$

которые приводят к системе четырех линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x_{1c}(\theta),\ x_{1s}(\theta),\ \varphi_{1c}(\theta),\ \varphi_{1s}(\theta)$:

$$\begin{gathered}\frac{dx_{1c}}{d\theta} + \frac{\eta_1\omega}{4}\varphi_{1c}\varphi_{1s} = 0\,, \quad \frac{dx_{1s}}{d\theta} + \frac{\eta_1\omega}{8}(\varphi_{1s}^2 - \varphi_{1c}^2) = 0\,,\\ \frac{d\varphi_{1c}}{d\theta} - \frac{\delta}{\omega}\varphi_{1s} + \frac{\omega}{2}(\varphi_{1c}x_{1s} - \varphi_{1s}x_{1c}) = 0\,,\\ \frac{d\varphi_{1s}}{d\theta} + \frac{\delta}{\omega}\varphi_{1c} - \frac{\omega}{2}(\varphi_{1s}x_{1s} + \varphi_{1c}x_{1c}) = 0\,.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Если пренебречь нелинейными слагаемыми в первых двух уравнениях системы (7.6), то с учетом принятых начальных условий $x(0) = \mu l, \dot{x}(0) = 0$

получим $x_{1c} \equiv 1$, $x_{1s} \equiv 0$. Оставшиеся два уравнения (7.6) становятся линейными уравнениями с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\varphi_{1c}}{d\theta} - \left(\frac{\delta}{\omega} + \frac{\omega}{2}\right)\varphi_{1s} = 0\,, \quad \frac{d\varphi_{1s}}{d\theta} + \left(\frac{\delta}{\omega} - \frac{\omega}{2}\right)\varphi_{1c} = 0\,.$$

При отыскании их решения в виде $\varphi_{1c}(\theta) = \varphi_{1c}^0 e^{\lambda\theta}$, $\varphi_{1s}(\theta) = \varphi_{1c}^0 e^{\lambda\theta}$ для параметра λ получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{4} - \frac{\delta^2}{\omega^2}\,. \tag{7.7}$$

Из этого уравнения вытекают границы области неустойчивости $|\delta| \leqslant \omega^2/2$, совпадающие с учетом смены обозначений с определенными по формуле (7.3).

Также уравнение (7.7) дает скорость роста амплитуды при потере устойчивости в линейном приближении (на начальном этапе движения, пока угол φ мал). Для выяснения этого обратимся к нелинейной системе (7.6). Эта система имеет интеграл

$$4\left(x_{1c}^2(\theta) + x_{1s}^2(\theta)\right) + \eta_1\left(\varphi_{1c}^2(\theta) + \varphi_{1s}^2(\theta)\right) = C\,. \tag{7.8}$$

С учетом принятых начальных условий $C = 4$, откуда находим оценку максимальной амплитуды колебаний маятника:

$$\max_t |\varphi(t)| = \max_t \mu\sqrt{\varphi_{1c}^2(\theta) + \varphi_{1s}^2(\theta)} \leqslant \frac{2\mu}{\sqrt{\eta_1}} = \frac{2a}{l}\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2}}\,, \tag{7.9}$$

где a — начальная амплитуда точки подвеса. Расчеты показывают, что эта оценка выполняется, если расстройка $\delta = 0$. С ростом $|\delta|$ максимальная амплитуда колебаний маятника уменьшается, а при выходе за границу области неустойчивости колебания маятника не возбуждаются.

Для иллюстрации рассмотрим численный пример. Пусть расстройка частоты отсутствует ($\delta = 0$). Возьмем следующие значения параметров: $\omega = 2$, $\nu = 1$, $l = 9.8$. Пусть $m_1 = m_2$, тогда $\eta_1 = 1/2$. Возьмем начальные условия $x(0) = a = 0.1$, $x'(0) = 0$, $\varphi(0) = 0.001$, $\varphi'(0) = 0$. На рис. 14 в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant 2000$ представлены результаты численного интегрирования системы (7.2) с указанными начальными условиями. Сверху показано изменение функции $x(t)$, а снизу — функции $\varphi(t)$.

Движение представляет собой периодические биения с последовательной передачей энергии вертикальных колебаний опоры $x(t)$ в колебания маятника $\varphi(t)$ и наоборот. В некоторые моменты времени вертикальные

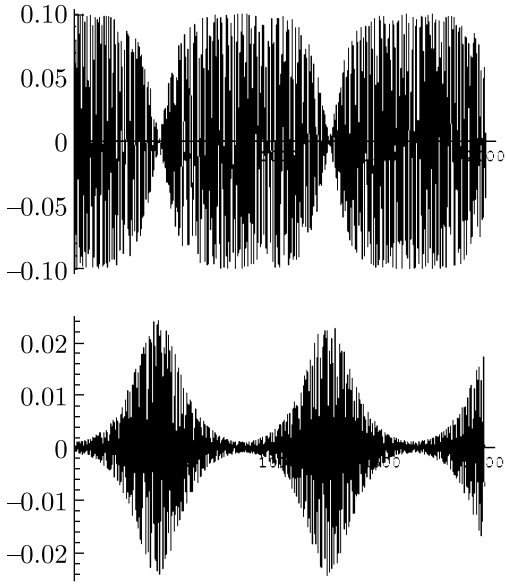

Рис. 14. Периодические биения с последовательной передачей энергии от одного движения к другому

колебания опоры практически прекращаются, а амплитуда колебаний маятника становится максимальной. Рассматриваемая система консервативна, следствием чего является интеграл (7.8). Амплитуда вертикальных колебаний не превосходит величины $a = 0.1$, определяемой начальными условиями. Для принятых значений параметров согласно формуле (7.9) для оценки амплитуды колебаний маятника имеем $\max_t |\varphi_(t)| \leqslant 0.028$, что приближенно согласуется с результатами численного интегрирования.

Биения с передачей энергии возникают также в линейной задаче при колебаниях двух одинаковых маятников, соединенных слабой пружиной, или вообще при колебаниях слабо связанных систем с равными или близкими парциальными частотами. В рассмотренной выше задаче связь осуществляется через малые нелинейные слагаемые, поэтому биения осуществляются через параметрический резонанс, при котором одна из парциальных частот вдвое больше другой.

§ 8. Уравнение Дюффинга и странный аттрактор

В предыдущих параграфах этой главы рассматривались различные приближенные методы построения решений нелинейных уравнений. Однако эти способы дают хорошие результаты лишь в случаях, когда нелинейность не слишком большая. В противном случае описанные в главе мето-

ды неприменимы, и единственным способом построения решения является численное интегрирование. При этом отмечается неожиданное поведение множества решений системы уравнений. Возможно существование нескольких устойчивых решений, более того, в фазовом пространстве возможно появление множеств, к которым неограниченно приближаются (притягиваются) решения системы с ростом времени. Эти множества называются *странными аттракторами*[11].

В частности, странные аттракторы могут возникать при вынужденных колебаниях механической системы с одной степенью свободы под действием периодической возмущающей силы

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}, x, t)\,, \qquad F(\dot{x}, x, T + t) = F(\dot{x}, x, t)\,.$$

Заметим, что странные аттракторы не возникают при решении уравнений $\ddot{x} = F(\dot{x}, x)$, однако могут возникать у нелинейных уравнений более высокого порядка, например, $\dddot{x} = F(\ddot{x}, \dot{x}, x)$.

Ниже представлены результаты численных экспериментов по построению устойчивых решений уравнения Дюффинга при наличии сопротивления под действием гармонического возбуждения. Установлено наличие двух типов решений: периодических решений с периодом, кратным периоду возбуждения, и странных аттракторов. Исследована зависимость числа решений и их типа от уровня возбуждения.

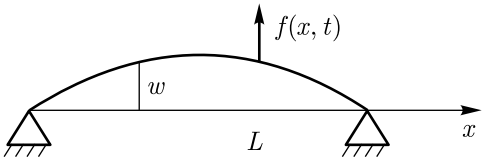

Рис. 15. Шарнирно опертая балка с несмещаемыми опорами

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания шарнирно опертой балки (рис. 15) под действием поперечной нагрузки интенсивностью $f(x,t)$[12]. Расстояние между несмещающимися опорами равно L. При

[11] От английского слова *attraction* — притяжение.

[12] См. статью *Товстик П. Е., Товстик Т. М.* Уравнение Дуффинга и странный аттрактор // Анализ и синтез нелин. механич. колебат. систем. СПб.: 1998. Т. 2. С. 229–235. О связи странных аттракторов с классической теорией устойчивости движения см. в монографии: *Леонов Г. А.* Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 144 с.

больших прогибах появляется продольная растягивающая сила P, и колебания описываются уравнением

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t)\,,$$

$$P = \frac{ES}{L}\int\limits_0^L \left(\sqrt{1+(\partial w/\partial x)^2} - 1\right) dx \approx \frac{ES}{2L}\int\limits_0^L (\partial w/\partial x)^2\, dx\,.$$

Пусть $f(x,t) = f_0 \sin(\pi x/L)\cos\Omega t$. Тогда после разделения переменных и изменения масштаба

$$w(x,t) = \alpha x(\tau)\sin\frac{\pi x}{L}\,, \qquad t = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{\rho S}{EJ}}\,\tau$$

приходим к уравнению Дюффинга

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x + x^3 = b\cos\omega\tau\,, \quad \Omega = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2\sqrt{\frac{\rho S}{EJ}}\,\omega\,, \quad b = \frac{2L^4}{\pi^4 E\sqrt{JS}}\,f_0\,, \tag{8.1}$$

в которое дополнительно введено слагаемое $c\dot{x}$, учитывающее силы сопротивления, пропорциональные скорости.

Уравнение (8.1) содержит три параметра — c, b и ω. Зафиксируем значения двух из них ($\omega = 1$, $c = 0.25$) и будем менять параметр b в широком диапазоне $0 \leqslant b \leqslant 50$ (при этом мы не выходим за рамки физически разумных значений, ибо с уменьшением толщины балки уменьшается момент инерции поперечного сечения J и растет параметр b). Принимая $\omega = 1$, мы рассматриваем частоту возмущения, совпадающую с частотой свободных колебаний линейной системы.

Метод исследования решения заключается в следующем. Уравнение (8.1) интегрируем численно, беря произвольные начальные условия $x(0)$, $\dot{x}(0)$. Фиксируем и наносим на фазовую плоскость x, $\dot{x}$ точки

$$x(mT)\,,\ \dot{x}(mT)\,, \quad m = 0,1,2,\ldots\,, \quad T = 2\pi\,. \tag{8.2}$$

Плоскость $x, \dot{x}$ с нанесенными на ней точками (8.2) называется *диаграммой Пуанкаре*. Диаграммы (или *сечения*) Пуанкаре являются мощным средством, позволяющим определять качественный характер поведения решений и выявлять бифуркации, то есть переходы из одного качественного состояния в другое.

При $c > 0$ в уравнение (8.1) введено затухание, и при $\tau \to \infty$ решение $x(\tau)$ стремится к некоторому предельному решению. Поэтому при $m \to \infty$

реализуется один из трех вариантов поведения точек (8.2) на диаграмме Пуанкаре:

$$\begin{array}{ll} (1) & \{x(mT), \dot{x}(mT)\} \to \{p_1,\ q_1\}\,, \\ (2) & \{x(mkT+j), \dot{x}(mkT+j)\} \to \{p_j,\ q_j\}\,, \quad j = \overline{1,k}\,, \\ (3) & \{x(mT), \dot{x}(mT)\} \in G\,, \end{array}$$

где $\{p_j,\ q_j\}$ — фиксированные точки на фазовой плоскости, G — некоторое множество точек на этой плоскости, называемое *странным аттрактором*. В случае (1) решение уравнения (8.1) с выбранными начальными условиями стремится при $\tau \to \infty$ к периодическому решению с периодом T, равным периоду возмущения. В случае (2) решение стремится к периодическому решению с периодом kT. Впрочем, случай (1) можно считать частным случаем (2) при $k = 1$. В случае (3) предельное решение не является периодическим.

Предельное решение зависит как от параметра b, так и от начальных условий. Для $b \leqslant 50$ зафиксировано 18 интервалов изменения b с различным качественным поведением решений. Таблица 1 содержит сводку результатов. В ней для соответствующих интервалов изменения b приведены: числа n различных предельных решений, получающихся при изменении начальных условий; числа k, определяющие периоды kT предельных решений; странные аттракторы отмечены в таблице 1 буквой A.

Обсудим содержимое таблицы 1. При $0 < b \leqslant 2.8$ и при $9.8 \leqslant b \leqslant 22.8$ независимо от начальных условий решение при $\tau \to \infty$ стремится к одному и тому же предельному решению.

Таблица 1. **Зависимость решений от параметра** b

b	n	k	b	n	k
0.0 – 2.8	1	1	39.6 – 39.61	3	A, A, 6
2.9 – 9.7	2	1, 1	39.62 – 40.7	2	A, A
9.8 – 22.8	1	1	40.8 – 41.6	1	A
22.9 – 35.5	2	1, 1	41.7 – 44.0	2	A, 3
35.6 – 38.5	2	2, 2	44.3 – 48.6	1	3
38.7 – 39.2	2	4, 4	48.6 – 49.1	2	3, 3
39.3 – 39.35	2	8, 8	49.2	2	6, 6
39.36 – 39.38	2	16,16	49.3 – 49.4	2	A, A
39.4 – 39.59	2	A, A	49.5 – 50.6	1	A

При $2.9 \leqslant b \leqslant 9.7$ и при $22.9 \leqslant b \leqslant 35.5$ в зависимости от начальных условий решение при $\tau \to \infty$ стремится к одному из двух устойчивых предельных решений. Рассмотрим, например, значение $b = 4$. Два предельных

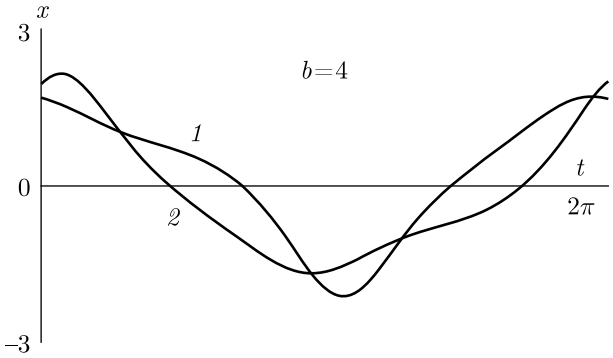

Рис. 16. Два предельных решения при $b = 4$

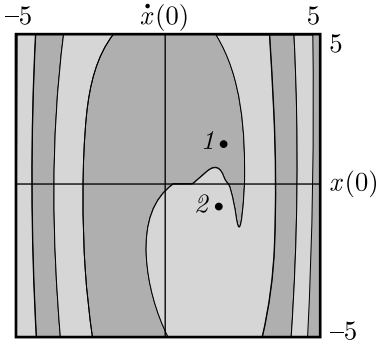

Рис. 17. Области начальных условий при $|x(0)| \leqslant 5,\ |\dot{x}(0)| \leqslant 5$

решения показаны на рис. 16, а на рис. 17 представлены соответствующие области начальных условий при $|x(0)| \leqslant 5$, $|\dot{x}(0)| \leqslant 5$.

Был проведен также анализ влияния начальных условий в более широкой области $|x(0)| \leqslant 100$, $|\dot{x}(0)| \leqslant 100$, который показал, что области, соответствующие первому и второму предельным решениям, чередуются, как в слоеном пироге.

Продолжим обсуждение таблицы 1. При $22.9 \leqslant b \leqslant 39.59$ уравнение (8.1) имеет два решения (получающиеся при смене начальных условий). Сначала период решений равен T, затем $2T$, $4T$, $8T$, $16T, \ldots$. При этом интервалы изменения b, при которых период постоянный, уменьшаются. Завершается этот процесс сменой периодических решений двумя странными аттракторами. Такой процесс удвоения периода вообще характерен для приближения к странному аттрактору.

Описать здесь весь рассмотренный диапазон изменения b не представляется возможным. Ограничимся четырьмя последовательными интервалами в диапазоне $39.62 \leqslant b \leqslant 48.6$ и рассмотрим 6 последовательных зна-

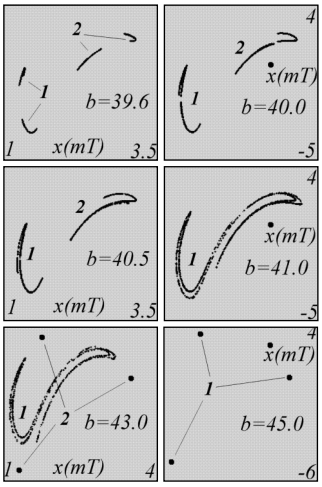

Рис. 18. Странные аттракторы на диаграммах Пуанкаре

чений b. Результаты представлены в виде диаграмм Пуанкаре (рис. 18), на которых наносятся точки с координатами $x(mT)$, $\dot{x}(mT)$ при целых $m > 200$.

Если предельное решение является kT-периодическим, на диаграмме будет k различных точек. Число точек у странного аттрактора зависит от продолжительности интегрирования. На рис. 18 странные аттракторы содержат по 800 точек, $201 \leqslant m \leqslant 1000$. Первые 200 точек не наносятся, чтобы исключить влияние начальных условий.

Рассмотрим последовательно диаграммы, показанные на рис. 18. На первой из них (при $b = 39.62$) изображены два странных аттрактора, *1* и *2*, которые могут быть получены при тех или иных начальных условиях. Каждый из них состоит из двух изолированных «кусков». При $b = 40.0$ картина та же, но куски друг с другом сближаются по сравнению с преды-

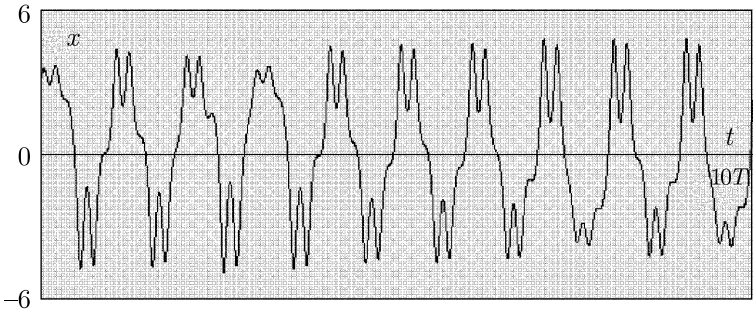

Рис. 19. Хаотическое движение при странном аттракторе

дущей диаграммой. При $b = 40.5$ каждый аттрактор состоит уже из одного куска. Далее происходит сближение аттракторов между собой, и при $b = 41.0$ имеем уже только один аттрактор *1* при всех начальных условиях (решение $x(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 10T$ показано на рис. 19).

При дальнейшем увеличении b странный аттрактор исчезает и остается только одно $3T$-периодическое решение *1*, показанное тремя точками на рис. 18 для $b = 45.0$.

Движение $x(t)$ при странном аттракторе иногда называют *хаотическим*. Однако хаос здесь неполный, просматривается некая периодичность (см. рис. 19). При попытке описать странный аттрактор стационарным случайным процессом оказывается, что его коэффициент корреляции $K(\tau)$ принимает значения, близкие к единице, при сколь угодно больших значениях τ.

Глава III
ДИНАМИКА И СТАТИКА ПЛАТФОРМЫ СТЮАРТА

Авторы: *С. А. Зегжда, П. Е. Товстик, М. П. Юшков, Т. М. Товстик, Т. П. Товстик, В. В. Додонов, В. И. Петрова*

Для удобства чтения материал главы разбит на три части. В части *I* исследуется динамика нагруженной платформы Стюарта с помощью классических методов теоретической механики — теоремы о движении центра масс и теоремы моментов в относительном движении относительно центра масс. В части *II* динамика платформы Стюарта рассматривается с помощью применения специальной формы дифференциальных уравнений движения, изложенной в главе VIII первого тома учебника. В части *III* статика трехстержневой платформы Стюарта изучается с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

I. ПРИМЕНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ НАГРУЖЕННОЙ ПЛАТФОРМЫ СТЮАРТА[1]

§ 1. Постановка задачи и кинематика платформы Стюарта

Постановка задачи о движении нагруженной платформы Стюарта. В ближайших параграфах в качестве решения одной из прикладных задач теоретической механики рассматривается кинематика и динамика нагруженной платформы Гью — Стюарта[2], опирающейся на шесть

[1] Часть *I* является расширенной редакцией статей: *Леонов Г. А., Зегжда С. А., Кузнецов Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Юшков М. П.* Движение твердого тела, управляемое шестью стержнями переменной длины // Докл. РАН. 2014. Т. 455. № 3. С. 282–286; *Леонов Г. А., Зегжда С. А., Зуев С. М., Ершов Б. А., Казунин Д. В., Костыгова Д. М., Кузнецов Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Юшков М. П.* Динамика платформы Стюарта и управление ее движением // Доклады РАН. 2014. Т. 458. № 1. С. 36–41; *Леонов Г. А., Товстик П. Е., Товстик Т. М.* Области достижимости положений платформы Стьюарта в шестимерном пространстве обобщенных координат // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2017. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4(62). Вып. 2. С. 300–309.

[2] Первая техническая реализация платформы, приводимой в движение шестью стержнями переменной длины, для проверки работоспособности шин самолетов была предложена Гью (*V. E. Gough*). Независимо от этого первую статью, посвященную теории движения подобных систем, опубликовал Д. Стюарт (*Stewart D.* A platform with six degrees of freedom // Proc. of the Institution of mechanical engineers. London. 1965. Vol. 180. № 15. P. 371–386).

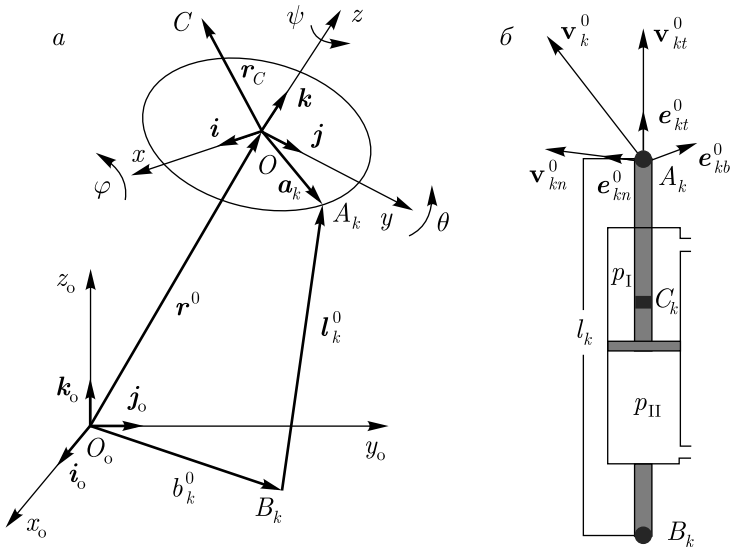

Рис. 1. Схемы платформы Стюарта и пневмоцилиндра

гидроцилиндров (или пневмоцилиндров). Записываются дифференциальные уравнения движения и вычисляются силы, обеспечивающие получение заданного программного движения. Для обеспечения устойчивости этого движения введена обратная связь. Рассмотрены численные примеры и влияние запаздывания в управлении.

Платформа Гью — Стюарта используется при конструировании динамических стендов для обучения и тренировки летчиков и шоферов, а также для испытания на надежность бортовых систем самолетов и летательных аппаратов. Помимо этого, она получила необычайно широкое распространение в технике. Изучению поведения этой сложной механической системы посвящена обширная научная литература.

Кинематика платформы Стюарта. Введем неподвижную систему координат $O_0x_0y_0z_0$ с ортами $\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0$ и подвижную систему координат $Oxyz$ с ортами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, жестко связанную с платформой (рис. 1,*а*). Шесть стержней переменной длины B_kA_k $(k = \overline{1,6})$ имитируют пневмоцилиндры (рис. 1,*б*) и прикреплены с помощью сферических шарниров концами B_k к неподвижному основанию, а концами A_k $(k = \overline{1,6})$ — к платформе. Требуется получить заданное движение платформы за счет изменения длин стержней.

Ориентация платформы определяется положением точки O (полюса)

$$\overrightarrow{O_0O} = \boldsymbol{r}^0(t) = x_0(t)\boldsymbol{i}_0 + y_0(t)\boldsymbol{j}_0 + z_0(t)\boldsymbol{k}_0$$

и тремя последовательными углами поворота вокруг полюса на углы рысканья (ψ), тангажа (θ) и крена (φ). Подробнее о введении подобных углов см. в главе X. Тензор поворота $\boldsymbol{P}(\psi,\theta,\varphi)$ равен

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_\psi C_\theta & -S_\psi C_\varphi + C_\psi S_\theta S_\varphi & S_\psi S_\varphi + C_\psi S_\theta C_\varphi \\ S_\psi C_\theta & C_\psi C_\varphi + S_\psi S_\theta S_\varphi & -C_\psi S_\varphi + S_\psi S_\theta C_\varphi \\ -S_\theta & C_\theta S_\varphi & C_\theta C_\varphi \end{pmatrix},$$

где для краткости обозначено $C_\varphi = \cos\varphi$, $S_\theta = \sin\theta$ и т. п. Приведем формулы Пуассона для производной по времени[3] тензора $\boldsymbol{P}$:

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{P}\,, \quad \boldsymbol{\omega}^0 = \omega_x^0\,\boldsymbol{i}_0 + \omega_y^0\,\boldsymbol{j}_0 + \omega_z^0\,\boldsymbol{k}_0 = \omega_x\,\boldsymbol{i} + \omega_y\,\boldsymbol{j} + \omega_z\,\boldsymbol{k}\,,$$
$$\omega_x^0 = \dot\varphi\cos\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi\,, \quad \omega_y^0 = \dot\varphi\cos\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi\,,$$
$$\omega_z^0 = \dot\psi - \dot\varphi\sin\theta\,,$$

где $\boldsymbol{\omega}^0$ — угловая скорость вращения платформы. Введем вектор обобщенных координат, определяющих положение платформы

$$\boldsymbol{q} = \{x_0, y_0, z_0, \varphi, \theta, \psi\} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}\,. \tag{1.1}$$

Если величины (1.1) заданы, то длины гидроцилиндров (пневмоцилиндров) $l_k = l_k(q_j)$ и их направления $\boldsymbol{e}_{kt}^0$ определяются по явным формулам

$$\overrightarrow{B_k A_k} = \boldsymbol{l}_k^0 = l_k \boldsymbol{e}_{kt}^0 = \boldsymbol{r}^0 + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{b}_k^0\,, \quad k = \overline{1,6}\,, \tag{1.2}$$

где векторы $\boldsymbol{a}_k = \overrightarrow{OA_k}$ и $\boldsymbol{b}_k^0 = \overrightarrow{O_0B_k}$ показаны на рис. 1,*а*. Наоборот, если заданы l_k, величины q_j определяются из шести нелинейных уравнений

$$l_k = l_k(q_j)\,, \quad k, j = \overline{1,6}\,. \tag{1.3}$$

Дифференцируя уравнения (1.2) по времени, получим систему линейных уравнений относительно $\dot{\boldsymbol{r}}^0$, $\boldsymbol{\omega}^0$, которую запишем в виде

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}^0 = \dot{\boldsymbol{l}}\,, \qquad \boldsymbol{V}^0 = \{\dot x_0,\, \dot y_0,\, \dot z_0,\, \omega_x^0,\, \omega_y^0,\, \omega_z^0\}^T\,,$$
$$\dot{\boldsymbol{l}} = \{\dot l_1, \dot l_2, \dot l_3, \dot l_4, \dot l_5, \dot l_6\}^T\,, \tag{1.4}$$

[3] См. монографию: *Жилин П. А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор. 2001. 276 с.

где матрица $\boldsymbol{A}$ составлена из векторов-строк $\boldsymbol{A}_k = \{\boldsymbol{e}^0_{kt},\ \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}_k\times\boldsymbol{e}^0_{kt}\}$, через ^{T} обозначено транспонирование, а точкой — производная по времени.

Решение системы (1.4), рассматриваемое совместно с формулами

$$\dot\varphi = \frac{\omega^0_y\sin\psi + \omega^0_x\cos\psi}{\cos\theta}\,, \quad \dot\theta = \omega^0_y\cos\psi - \omega^0_x\sin\psi\,, \quad \dot\psi = \omega^0_z + \dot\varphi\sin\theta\,, \tag{1.5}$$

позволяет производные $\dot q_i$ представить в виде линейной комбинации производных $\dot l_j$ с коэффициентами, зависящими от координат q_i. Данные выражения для $\dot q_i$ будем рассматривать как систему дифференциальных уравнений относительно функций $q_i(t)$. Интегрируя ее, по движению, заданному в координатах l_j, найдем движение в координатах q_i.

Обращение в нуль определителя матрицы $\boldsymbol{A}$ говорит о выходе на границу области управляемости.

§ 2. Дифференциальные уравнения движения нагруженной платформы Стюарта

Уравнения движения нагруженной платформы. Уравнение движения центра тяжести C нагруженной платформы и уравнение моментов относительно точки C в подвижной системе координат имеют вид

$$\begin{gathered}
m\left(\ddot{\boldsymbol{r}}^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^0\times\boldsymbol{r}^0_c + \boldsymbol{\omega}^0\times(\boldsymbol{\omega}^0\times\boldsymbol{r}^0_c)\right) + m\mathrm{g}\boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{F}^0 = \sum_{k=1}^{6} F_k\boldsymbol{e}^0_{kt}\,,\\
\boldsymbol{J}_c\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{J}_c\cdot\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{6} F_k\left(\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{r}_c\right)\times\boldsymbol{e}_{kt}\,,\\
\boldsymbol{e}_{kt} = \boldsymbol{P}^T\cdot\boldsymbol{e}^0_{kt}\,,\quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{P}^T\cdot\boldsymbol{\omega}^0\,,
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где m, $\boldsymbol{J}_c$ — масса платформы с грузом и ее тензор инерции относительно точки C, g — ускорение свободного падения, $\ddot{\boldsymbol{r}}^0$ — ускорение точки O, F_k — силы, действующие на платформу со стороны стержней. Через $\boldsymbol{F}^0$ и $\boldsymbol{M}$ обозначены главный вектор и главный момент относительно точки C сил $\mathbf{F}_k$. Система уравнений (2.1) совместно с (1.5) имеет 12-й порядок и описывает движение платформы при заданных силах.

Отметим, что второе уравнение в системе (2.1) часто записывают для неподвижной системы координат $O_0x_0y_0z_0$:

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}_c\cdot\boldsymbol{P}^T\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}^0 + \boldsymbol{\omega}^0\times(\boldsymbol{J}_c\cdot\boldsymbol{P}^T\cdot\boldsymbol{\omega}^0) = \boldsymbol{M}^0 = \sum_{k=1}^{6} F_k\left(\boldsymbol{a}^0_k - \boldsymbol{r}^0_c\right)\times\boldsymbol{e}^0_{kt}\,,\quad \boldsymbol{r}^0_c = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}_c\,.$$

Тогда, в частности, если задано движение платформы $\boldsymbol{q}(t)$, то векторы $\boldsymbol{F}^0$ и $\boldsymbol{M}^0$ становятся известными, и потребные для получения этого движения

силы F_k находятся из уравнений движения, которые можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{F} = \mathcal{F}^0\,, \quad \boldsymbol{F} = \{F_1, \ldots, F_6\}^T\,, \quad \mathcal{F}^0 = \{F_x^0, F_y^0, F_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0\}^T\,,$$

где матрица $\boldsymbol{A}$ та же, что и в (1.4).

Численные примеры. В качестве примера рассмотрим платформу Стюарта, у которой шарниры A_k и B_k симметрично расположены на подвижной и неподвижной окружностях соответственно радиусов R_a и R_b, находящихся в плоскостях Oxy и $O_0x_0y_0$. Примем, что минимальное расстояние между верхними и нижними шарнирами равно d, а угол, при повороте на который получаем прежнее расположение шарниров, равен $2\pi/3$ (рис. 2). Пусть в начальном положении расстояние между плоскостями верхних и нижних шарниров равно h. Считаем, что в начальном положении центр тяжести C платформы и укрепленного на ней твердого тела лежит над центрами окружностей, причем $z_c > 0$.

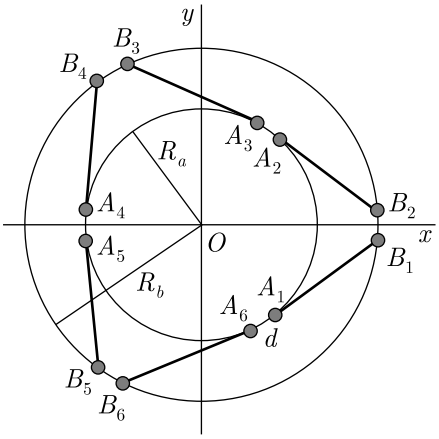

Рис. 2. Вид сверху на платформу Стюарта

Пусть $R_a = 0.7608\,\text{м}$, $R_b = 1\,\text{м}$, $d = 0.2\,\text{м}$, $h = 1.0196\,\text{м}$, $z_c = 0.8\,\text{м}$, $l = 1.255\,\text{м}$, $m\text{g} = 10^4\,\text{Н}$. В уравнениях кинематики и динамики данной платформы перейдем к безразмерным переменным. За единицу длины примем величину R_b, за единицу силы — силу тяжести $m\text{g}$ всей системы, безразмерное время введем, полагая $\widetilde{t} = \omega t$ $(\omega^2 = \text{g}/R_b)$. Отличать безразмерные величины от размерных будем использованием знака «тильда», как это сделано для времени. Во всех расчетах, выполненных на компьютере, сила инерции и вес пневмоцилиндров не учитывались.

Анализ динамики данной платформы начнем с вычисления усилий в пневмоцилиндрах, обеспечивающих простейшее заданное колебательное вертикальное движение платформы по закону

$$\widetilde{z}_0(\widetilde{t}) = 0.2\,(1 - e^{-\widetilde{t}/2})^2\,\sin\widetilde{t}\,. \tag{2.2}$$

Перемещение по вертикали представлено в таком виде для того, чтобы в начальный момент времени и скорость, и ускорение платформы были равны нулю. В противном случае при $\widetilde{t} = 0$ потребовалось бы скачкообразное приложение силы. При сделанных предположениях усилия, создаваемые пневмоцилиндрами для осуществления движения (2.2), будут одинаковыми. График изменения данного усилия $\widetilde{F}(\widetilde{t})$ представлен на рис. 3.

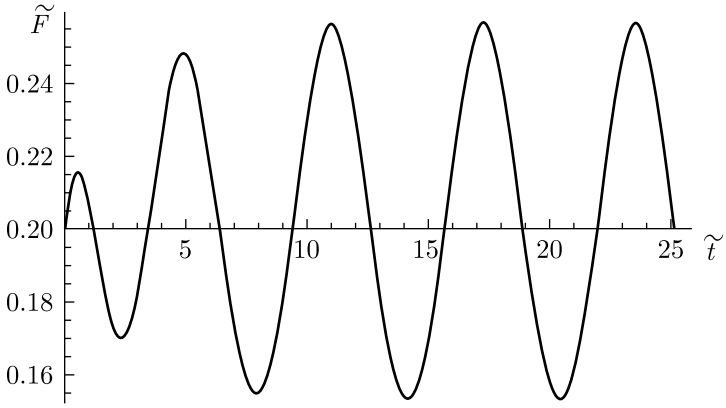

Рис. 3. Усилия в пневмоцилиндрах

Перейдем теперь к обсуждению обратной задачи динамики для случая движения по вертикали. Это движение описывается одним дифференциальным уравнением второго порядка относительно $\widetilde{z}_0(\widetilde{t})$. Поэтому решение прямой задачи позволяет определить усилие $\widetilde{F}(\widetilde{t})$ в аналитической форме. Использование этого аналитического выражения при численном решении обратной задачи приводит при достаточно большом промежутке времени к заметной ошибке. Поэтому рассмотрим небольшой промежуток интегрирования, но к усилию $\widetilde{F}(\widetilde{t})$ добавим малое возмущение, положив

$$\Delta\widetilde{F}(\widetilde{t}) = 0.0001\,(1 - e^{-\widetilde{t}/2})\,\sin 2\widetilde{t}\,. \tag{2.3}$$

В результате интегрирования получаем функцию $\widetilde{z}_0(\widetilde{t})$, приведенную на рис. 4. Из графика видно, что на начальном промежутке времени

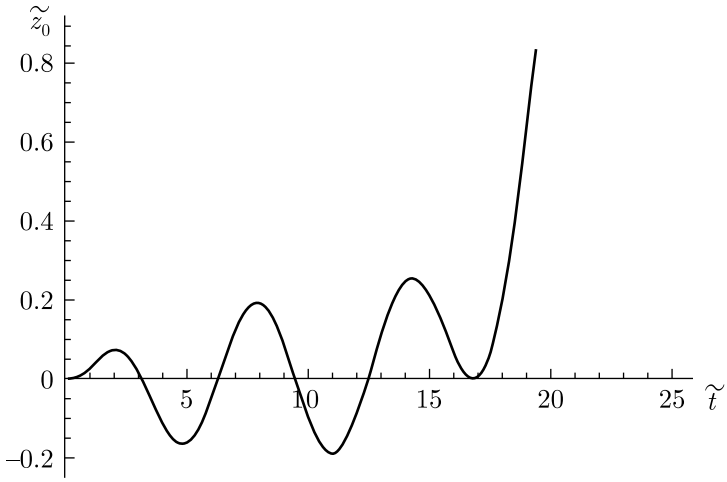

Рис. 4. Вертикальное движение платформы

$(0 < \widetilde{t} < 12)$ введенное возмущение сказывается незначительно, в то время как в дальнейшем наступает интенсивное движение по вертикали. Устойчивого движения по закону (2.2) удастся добиться лишь с помощью обратной связи, которая будет введена в § 4.

§ 3. Влияние инерции и веса пневмоцилиндров

Найдем поправки, которые нужно внести в уравнения движения (2.1) для учета влияния сил инерции и веса пневмоцилиндров. Разложим скорость $\boldsymbol{v}_k^0 = \dot{\boldsymbol{r}}^0 + \boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{a}_k^0$ точки A_k на направление $\boldsymbol{e}_{kt}^0$ и перпендикулярное к нему направление $\boldsymbol{e}_{kn}^0$ (см. рис. 1,*б*):

$$\boldsymbol{v}_k^0 = v_{kt}^0 \boldsymbol{e}_{kt}^0 + \boldsymbol{v}_{kn}^0\,, \quad v_{kt}^0 = \boldsymbol{v}_k^0 \cdot \boldsymbol{e}_{kt}^0 = \dot{l}_k\,, \quad \boldsymbol{v}_{kn}^0 = v_{kn}^0 \boldsymbol{e}_{kn}^0\,.$$

Тогда угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_k^0$ пневмоцилиндра равна

$$\boldsymbol{\omega}_k^0 = \frac{v_{kn}^0}{l_k} \boldsymbol{e}_{kb}^0\,, \quad \boldsymbol{e}_{kb}^0 = \boldsymbol{e}_{kt}^0 \times \boldsymbol{e}_{kn}^0\,.$$

Единичные векторы $\boldsymbol{e}_{kt}^0$, $\boldsymbol{e}_{kn}^0$ и $\boldsymbol{e}_{kb}^0$ являются ортами подвижной системы координат, связанной с k-м пневмоцилиндром. Рассмотрим ускорение точки A_k:

$$\boldsymbol{w}_k^0 = \ddot{\boldsymbol{r}}^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^0 \times \boldsymbol{a}_k^0 + \boldsymbol{\omega}^0 \times (\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{a}_k^0) = w_{kt}^0 \boldsymbol{e}_{kt}^0 + w_{kn}^0 \boldsymbol{e}_{kn}^0 + w_{kb}^0 \boldsymbol{e}_{kb}^0\,. \tag{3.1}$$

С другой стороны, по теореме Кориолиса

$$\boldsymbol{w}_k^0 = \ddot{l}_k \boldsymbol{e}_{kt}^0 + 2\boldsymbol{\omega}_k^0 \times \dot{l}_k \boldsymbol{e}_{kt}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}_k^0 \times \boldsymbol{l}_k^0 + \boldsymbol{\omega}_k^0 \times (\boldsymbol{\omega}_k^0 \times \boldsymbol{l}_k^0)\,, \quad \boldsymbol{l}_k^0 = l_k \boldsymbol{e}_{kt}^0\,, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_k^0 = \varepsilon_{kn}^0 \boldsymbol{e}_{kn}^0 + \varepsilon_{kb}^0 \boldsymbol{e}_{kb}^0$ — искомое угловое ускорение пневмоцилиндра. Сравнивая формулы (3.1) и (3.2), находим

$$w_{kt}^0 = \ddot{l}_k - (\omega_k^0)^2 l_k\,, \quad \varepsilon_{kn}^0 = -\frac{w_{kb}^0}{l_k}\,, \quad \varepsilon_{kb}^0 = \frac{w_{kn}^0}{l_k} - \frac{2v_{kn}^0 \dot{l}_k}{l_k^2}\,.$$

Запишем уравнения движения пневмоцилиндра и штока:

$$J_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^0 = \boldsymbol{M}_k^0 = \boldsymbol{l}_k^0 \times \widehat{\boldsymbol{F}}_k - S_k \mathrm{g} \boldsymbol{e}_{kt}^0 \times \boldsymbol{k}_0\,, \quad \widehat{\boldsymbol{F}}_k = \widehat{F}_{kn} \boldsymbol{e}_{kn}^0 + \widehat{F}_{kb} \boldsymbol{e}_{kb}^0\,,$$
$$\widehat{m}(\ddot{l}_k - \omega_k^2 l_{kc}) = \widehat{F}_{kt} - \widehat{m} \mathrm{g} \boldsymbol{e}_{kt}^0 \cdot \boldsymbol{k}_0\,, \quad \widehat{F}_{kt} = P_k - F_{kt}^0 - \nu \dot{l}_k\,,$$

где $J_k = J_0 + \widehat{J} + \widehat{m} l_{kc}^2$, J_0 — момент инерции пневмоцилиндра относительно точки B_k, $\widehat{J}$ — момент инерции штока с поршнем относительно его центра тяжести C_k (см. рис. 1,*б*), $\widehat{m}$ — масса штока с поршнем, $l_{kc} = B_k C_k = l_k - l_0$ — расстояние от центра тяжести C_k до неподвижной точки B_k, $l_0 = C_k A_k = \mathrm{const}$, $S_k = S_0 + \widehat{m} l_{kc}$, S_0 — статический момент пневмоцилиндра относительно точки B_k, P_k — сила давления воздуха на поршень, ν — коэффициент вязкого трения при движении поршня.

Теперь можно найти силу

$$\boldsymbol{F}_k^0 = F_{kt}^0 \boldsymbol{e}_{kt}^0 + F_{kn}^0 \boldsymbol{e}_{kn}^0 + F_{kb}^0 \boldsymbol{e}_{kb}^0\,, \tag{3.3}$$

действующую со стороны пневмоцилиндра на платформу, где

$$F_{kt}^0 = P_k - \nu \dot{l}_k - \widehat{m}(w_{kt}^0 + \omega_k^2 l_0 + \mathrm{g}\, \boldsymbol{e}_{kt}^0 \cdot \boldsymbol{k}_0)\,,$$
$$F_{kn}^0 = -\widehat{F}_{kn} = -\frac{J_k w_{kn}^0}{l_k^2} + \frac{2J_k v_{kn}^0 \dot{l}_k}{l_k^3} - \frac{S_k \mathrm{g}\, \boldsymbol{e}_{kn}^0 \cdot \boldsymbol{k}_0}{l_k}\,,$$
$$F_{kb}^0 = -\widehat{F}_{kb} = -\frac{J_k w_{kb}^0}{l_k^2} - \frac{S_k \mathrm{g}\, \boldsymbol{e}_{kb}^0 \cdot \boldsymbol{k}_0}{l_k}\,.$$

В уточненном варианте система (2.1) записывается в виде

$$\begin{gathered} m\big(\ddot{\boldsymbol{r}}^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^0 \times \boldsymbol{r}_c^0 + \boldsymbol{\omega}^0 \times (\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{r}_c^0)\big) + m\mathrm{g}\boldsymbol{k}_0 = \sum_{k=1}^{6} \boldsymbol{F}_k^0\,, \\ \boldsymbol{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^{6} \boldsymbol{a}_k \times \boldsymbol{F}_k\,, \quad \boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{F}_k^0\,, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где силы $\boldsymbol{F}_k^0$ вычисляются по формуле (3.3).

При $F_{kt} = P_k,\ F_{kn} = F_{kb} = 0$ система (3.4) переходит в систему (2.1). Для системы (3.4) задача вычисления сил по заданному движению платформы трансформируется в задачу вычисления величин P_k.

§ 4. Построение обратной связи. Стабилизация движений платформы Стюарта

Построение обратной связи. Целью управления является получение заданного движения платформы. Предположим для простоты, что силы инерции пневмоцилиндров не учитываются. Тогда в соответствии со сказанным выше по заданным функциям $q_i^p(t)$ находим силы $F_k^p(t)$, которые нужно приложить к платформе со стороны пневмоцилиндров (индексом ^{p} отмечаем программное движение). Однако такой способ управления невозможен, ибо, как следовало из рис. 4, даже простейшее движение платформы в виде вертикальных колебаний оказывается неустойчивым. Поэтому предлагается ввести обратные связи и задавать приложенные силы в виде

$$F_k(t) = F_k^p(t) + G(l_k^p(t) - l_k(t))\,, \quad k = \overline{1,6}\,, \tag{4.1}$$

где $l_k^p(t)$ — программные длины пневмоцилиндров, вычисляемые по формулам (1.2), $l_k(t)$ — длины, измеряемые в процессе движения, G — коэффициент обратных связей.

При обсуждении величины G ограничимся линейным приближением. Предположим первоначально, что вектор обобщенных координат $\mathbf{q} = 0$, то есть рассмотрим задачу о стабилизации положения равновесия платформы. (Здесь и в дальнейшем принимается, что координатой z_0 задается смещение платформы по вертикали). В этом случае в формуле (4.1) функции $F_k^p(t)$ и $l_k^p(t)$ становятся постоянными величинами, при этом система оказывается консервативной, ибо обратные связи можно рассматривать как пружины с жесткостью G. Потенциальная энергия системы равна

$$\begin{aligned} \Pi &= -\frac{1}{2}\,mgz_c(\varphi^2 + \theta^2) + \frac{1}{2}\,G\sum_{k=1}^{6}(\Delta l_k)^2 = \\ &= -\frac{1}{2}\,mgz_c(\varphi^2 + \theta^2) + \frac{1}{2}\,G\,\boldsymbol{q}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{q}\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь матрица $\boldsymbol{C}$ такова:

$$\boldsymbol{C} = l^2\,\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}\,, \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{L}_6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_k = \frac{\boldsymbol{A}_k}{l}\,. \tag{4.3}$$

Таким образом, введенная в формуле (4.3) матрица $\boldsymbol{L}$ отличается от матрицы $\boldsymbol{A}$, использованной в формуле (1.4), множителем l^{-6}, а l — длина пневмоцилиндров в положении равновесия. Матрица $\boldsymbol{C}$ симметричная и положительно определенная, поэтому коэффициент G можно выбрать настолько большим, чтобы потенциальная энергия (4.2) была положительно определенной, что обеспечивает устойчивость положения равновесия платформы. Из расчетов следует, что в рассматриваемом случае это будет при $G > 0.5807 mgz_c l^{-2}$.

Стабилизация движений по вертикали и горизонтали. Используя численный эксперимент, покажем, что введение обратной связи (4.1) позволяет стабилизировать установившиеся колебания рассматриваемой платформы по вертикали и горизонтали, заданные в виде

$$\widetilde{z}_0^p(\widetilde{t}) = 0.2\,\sin\widetilde{t}\,, \tag{4.4}$$

$$\widetilde{x}_0^p(\widetilde{t}) = 0.2\,\sin\widetilde{t}\,. \tag{4.5}$$

Выше, когда была обнаружена неустойчивость движения платформы по вертикали, использовалось точное аналитическое решение прямой задачи, так как вертикальное движение описывалось одним дифференциальным уравнением второго порядка. Теперь при исследовании и горизонтального, и вертикального движений платформы будем применять единый подход, при котором при решении как прямой, так и обратной задач будут использоваться все шесть дифференциальных уравнений движения.

В случае вертикальных колебаний (4.4) безразмерные усилия $\widetilde{F}^p(\widetilde{t})$ во всех стержнях изменяются по периодическому закону с периодом 2π и с амплитудой 0.056 относительно среднего значения 0.212. Возмутим эти программные усилия, добавляя к ним соответственно силы

$$\Delta\widetilde{F}^p(\widetilde{t}) = \delta\sin(2\widetilde{t} + k\pi/3)\,, \quad k = \overline{1,6}\,. \tag{4.6}$$

Устойчивость движений при наличии этих возмущений будем обеспечивать введением обратных связей (4.1). Расчеты показали, что при $\widetilde{G} = GR_b/(mg) = 100$ и $\delta = 0.04$ отклонения $\widetilde{z}_0^p(\widetilde{t}) - \widetilde{z}_0(\widetilde{t})$, $k = \overline{1,6}$, (здесь $\widetilde{z}_0(\widetilde{t})$ — безразмерное осуществляемое движение) не превосходят по модулю величины 10^{-5}, а при $\widetilde{G} = 30$ и $\delta = 0.02$ — величины $4 \cdot 10^{-5}$. Отметим, что $\delta = 0.02$ соизмеримо с амплитудой колебаний $\widetilde{F}^p(\widetilde{t})$. Обратим внимание на то, что если в (4.1) отсутствует $\widetilde{F}^p(\widetilde{t})$, то и в этом случае отклонения $\widetilde{z}_0^p(\widetilde{t}) - \widetilde{z}_0(\widetilde{t})$ по модулю не превосходят величины $6 \cdot 10^{-3}$, если $\widetilde{G} = 100$ и $\delta = 0$.

При горизонтальных колебаниях (4.5) усилия в пневмоцилиндрах 1 и 2, 3 и 6, 5 и 4 представлены на рис. 5 соответственно сплошной, пунктирной

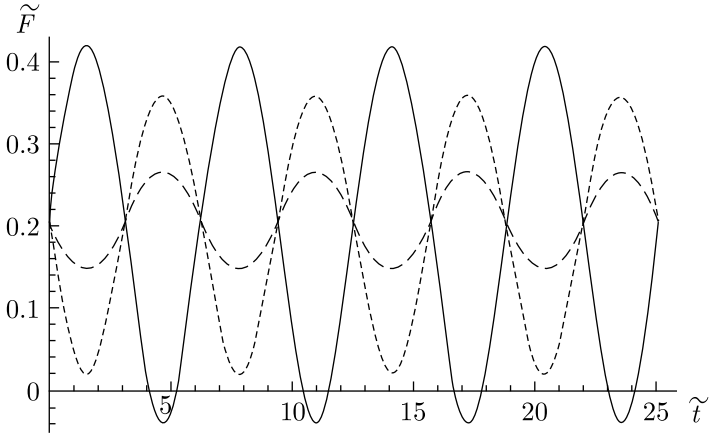

Рис. 5. Усилия в пневмоцилиндрах

и штрихованной линиями. Расчеты показали, что при возмущении данных усилий на величины (4.6) получим следующие результаты: при $\widetilde{G} = 30,\ \delta = 0.02$ отклонения $\widetilde{x}^p_{0k}(\widetilde{t}) - \widetilde{x}_{0k}(\widetilde{t})$ не превосходят по модулю величины $4 \cdot 10^{-3}$, а при $\widetilde{G} = 30,\ \delta = 0.04$ — величины 0.0075. Если же $\widetilde{G} = 100,\ \delta = 0.02$, то погрешность уменьшится в 10 раз. Особо отметим, что величина $\delta = 0.04$ соизмерима с амплитудой программных усилий в 4-м и 5-м стержнях.

§ 5. Линеаризация уравнений движения платформы

Линеаризация уравнений движения платформы. Рассмотрим малые колебания конкретной симметричной платформы, введенной выше. В качестве отсчетного возьмем положение равновесия, в котором все обобщенные координаты равны нулю, а длины стержней и усилия в них постоянны:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}\,, \qquad l_k = l_0 = 1.255\,, \qquad F_k = F_0 = 0.205, \quad k = \overline{1,6}\,.$$

Введем возмущения s_k длин стержней (перемещений поршней) по формуле $l_k = l_0 + s_k$. При малых $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_6)^T$ и $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_6)^T$ связь между ними дается формулой

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{A}_0 \cdot \boldsymbol{q}\,, \qquad \boldsymbol{A}_0 = \left\{ \left. \frac{\partial l_k}{\partial q_j} \right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}} \right\} = \lim_{\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{0}} \boldsymbol{A}\,, \tag{5.1}$$

где матрица $\boldsymbol{A}$ та же, что и в формуле (1.4). Матрица $\boldsymbol{A}_0$ для размеров стенда, приведенных выше, такова:

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} -0.424 & -0.401 & 0.812 & -0.490 & -0.377 & -0.442 \\ -0.424 & 0.401 & 0.812 & 0.490 & -0.377 & 0.442 \\ 0.559 & -0.166 & 0.812 & 0.571 & -0.236 & -0.442 \\ -0.136 & -0.568 & 0.812 & 0.081 & 0.612 & 0.442 \\ -0.136 & 0.568 & 0.812 & -0.081 & 0.612 & -0.442 \\ 0.559 & 0.166 & 0.812 & -0.571 & -0.236 & 0.442 \end{pmatrix}.$$

Для малых $\boldsymbol{q}$ запишем уравнения движения платформы, выделив в них линейные слагаемые:

$$\boldsymbol{B} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{err}} = \mathcal{F}^0 = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{F}\,. \tag{5.2}$$

Здесь ненулевые элементы постоянных матриц $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и вектора $\boldsymbol{f}$ равны

$$\begin{aligned} &b_{11} = b_{22} = b_{33} = 1\,, \quad b_{44} = b_{55} = b_{66} = \rho^2 + z_c^2\,, \\ &b_{15} = b_{51} = \rho^2 z_c\,, \qquad b_{24} = b_{42} = -\rho^2 z_c\,, \\ &c_{44} = c_{55} = z_c\,, \qquad f_3 = 1\,. \end{aligned}$$

В уравнении (5.2) вектор $\boldsymbol{f}^{err}$ включает нелинейные слагаемые системы (2.1).

Пусть задано программное движение $\boldsymbol{q}^p(t)$. По формуле (5.1) находим $\boldsymbol{s}^p = \boldsymbol{A}_0 \cdot \boldsymbol{q}^p$. Строго говоря, величина $\boldsymbol{s}^p$ должна определяться, как это описано выше. Возникающее при этом различие может быть включено в $\boldsymbol{f}^{err}$. Программное значение $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^p$ определяем из системы (5.2) при $\boldsymbol{f}^{err} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^p$. Теперь можем написать

$$\boldsymbol{B} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}}^p - \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{q}^p + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}_0^T \cdot \boldsymbol{F}^p\,. \tag{5.3}$$

Ниже показано, что точность задания $\boldsymbol{F}^p$ слабо влияет на результирующее движение. Более того, при выполнении определенных ограничений на управление можно считать $\boldsymbol{F}^p = \boldsymbol{0}$.

С целью стабилизации движения добавим к силам $\boldsymbol{F}^p$ управляющие силы $\boldsymbol{F}^c$, положив в уравнении (5.2) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^p + \boldsymbol{F}^c$. Введем разности действительного и программного движений:

$$\boldsymbol{\delta q} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^p\,, \qquad \boldsymbol{\delta s} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}^p\,, \qquad \boldsymbol{\delta s} = \boldsymbol{A}_0 \cdot \boldsymbol{\delta q}\,.$$

Введем управляющие силы $\boldsymbol{F}^c$ по формуле

$$\boldsymbol{F}^c = -G\boldsymbol{\delta s} - G_f \boldsymbol{\delta \dot{s}}\,, \tag{5.4}$$

где постоянные $G \geqslant 0$ и $G_f \geqslant 0$ подлежат выбору из условия минимизации вектора $\boldsymbol{\delta s}$. Разность уравнений (5.2) и (5.3) дает

$$\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{A}_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta \ddot{s}} - \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A}_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta s} + \boldsymbol{A}_0^T \cdot (G\boldsymbol{\delta s} + G_f \boldsymbol{\delta \dot{s}}) + \boldsymbol{f}^{\mathrm{err}} = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.5}$$

Исследование уравнения (5.5)**.** Перепишем уравнение (5.5):

$$\boldsymbol{\delta \ddot{s}} - \boldsymbol{C}_* \cdot \boldsymbol{\delta s} + \boldsymbol{A}_* \cdot (G\boldsymbol{\delta s} + G_f \boldsymbol{\delta \dot{s}}) + \boldsymbol{A}_{\mathrm{err}} \cdot \boldsymbol{f}^{\mathrm{err}} = \boldsymbol{0}\,, \tag{5.6}$$

где

$$\boldsymbol{C}_* = \boldsymbol{A}_0 \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A}_0)^{-1}\,, \qquad \boldsymbol{A}_* = \boldsymbol{A}_0 \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_0^T\,, \qquad \boldsymbol{A}_{\mathrm{err}} = \boldsymbol{A}_0 \cdot \boldsymbol{B}^{-1}\,.$$

При $\boldsymbol{f}^{err} = \boldsymbol{0}$ нулевое решение уравнения (5.6) асимптотически устойчиво, если все корни λ характеристического уравнения

$$\det\left(\lambda^2 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{C}_* + \boldsymbol{A}_*(G + \lambda G_f)\right) = 0 \tag{5.7}$$

имеют отрицательные вещественные части.

Матрица $\boldsymbol{C}_*$ — симметричная положительная, а матрица $\boldsymbol{A}_*$ — симметричная положительно определенная. Отсюда сразу следует, что при отсутствии управления ($G = G_f = 0$) нулевое решение неустойчиво, а при достаточно большом G устойчиво и при $G_f > 0$ асимптотически устойчиво. Приведем численные результаты для платформы с параметрами, принятыми выше.

При $G = G_f = 0$ уравнение (5.7) имеет 8-кратный нулевой корень и две пары корней $\lambda = \pm 0.887$, что говорит о неустойчивости. Устойчивость наступает при $G > 0.706$, и при $G_f = 0$ имеет место режим незатухающих колебаний.

Пусть $G \gg 1,\ G_f \sim 1$. Тогда главными в уравнении (5.5) будут слагаемые

$$G\boldsymbol{A}_0^T \cdot \boldsymbol{\delta s} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{err}} = \boldsymbol{0}\,.$$

Отсюда следует, что при отсутствии резонансов имеет место оценка

$$||\boldsymbol{\delta s}|| \sim \frac{||\boldsymbol{f}^{\mathrm{err}}||}{G}\,, \tag{5.8}$$

где норма вектора определена соотношением

$$||\boldsymbol{s}|| = \max_{t,k} |s_k(t)|\,. \tag{5.9}$$

Влияние запаздывания управления. Запишем уравнение (5.6), введя в управление постоянное запаздывание τ:

$$\boldsymbol{\delta}\ddot{\boldsymbol{s}}(t) - \boldsymbol{C}_* \cdot \boldsymbol{\delta s}(t) + \boldsymbol{A}_* \cdot (G\boldsymbol{\delta s}(t-\tau) + G_f \boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{s}}(t-\tau)) + \boldsymbol{A}_{\mathrm{err}} \cdot \boldsymbol{f}^{\mathrm{err}} = \boldsymbol{0}\,.$$

Запаздывание естественным образом связано со временем, которое необходимо пневмоцилиндрам для создания управляющего давления, соответствующего выражению (5.4).

Считая запаздывание малым, введем в уравнение (5.9) разложение

$$\boldsymbol{\delta s}(t-\tau) = \boldsymbol{\delta s}(t) - \tau\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{s}}(t) + \frac{\tau^2}{2}\boldsymbol{\delta}\ddot{\boldsymbol{s}}(t)\,.$$

Тогда характеристическое уравнение для (5.9) принимает вид

$$\det\left(\lambda^2(\boldsymbol{E} - k\boldsymbol{A}_*) + \lambda\boldsymbol{A}_*(G_f - \tau G) + G\boldsymbol{A}_* - \boldsymbol{C}\right) = 0\,,$$

где $k = \tau G_f - \tau^2 G/2$. Для асимптотической устойчивости достаточно выполнения трех условий: установленного ранее условия $G > 0.706$, неравенства $G_f > \tau G$ и положительной определенности матрицы $\boldsymbol{E} - k\boldsymbol{A}_*$. Последнее условие будет выполнено при

$$k < \frac{1}{\rho_{\max}}\,,$$

где $\rho_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $\boldsymbol{A}_*$. Для рассматриваемых параметров $\rho_{\max} = 3.956$.

Для коэффициента G_f получаем двухстороннюю оценку

$$\tau G < G_f < \frac{\tau G}{2} + \frac{1}{\tau\rho_{\max}}\,. \tag{5.10}$$

Левая часть неравенства (5.10) меньше правой, если

$$G < \frac{2}{\tau^2\rho_{\max}}\,.$$

Последнее неравенство накладывает ограничение на коэффициент G при наличии запаздывания.

Некоторые численные результаты. Рассмотрим динамику симметричной управляемой платформы с параметрами, введенными выше. Влияние запаздывания не учитываем. Рассмотрим моделирование сложного движения тела, участвующего в одном поступательном и двух вращательных движениях. В качестве программного движения возьмем

$$q_1^p(t) = a\sin\nu t\,, \quad q_5^p(t) = a\sin\nu t\,, \quad q^p(t) = a\sin\nu t\,,$$
$$q_2^p(t) = q_3^p(t) = q_4^p(t) = 0\,,$$

где a — заданная амплитуда линейных и угловых колебаний (для простоты считаем амплитуды линейных и угловых колебаний в безразмерных переменных одинаковыми).

Будем интегрировать систему уравнений (5.2), вычисляя вектор программных перемещений поршней $\boldsymbol{s}^p$ по точным формулам (1.2), а программные усилия в штоках $\boldsymbol{F}^p$ — из приближенной системы (5.3), в которой удержаны только линейные слагаемые.

Качество управления будем оценивать относительной погрешностью η, равной

$$\eta = \frac{||\boldsymbol{\delta q}||}{||\boldsymbol{q}^p||}\,, \quad \boldsymbol{\delta q} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^p\,, \quad ||\boldsymbol{q}^p|| = a\,,$$

где норма вектора определена соотношением (5.9).

Исследуем качество управления в зависимости от параметров обратной связи G, G_f, от амплитуды колебаний программного движения a и от частоты колебаний $\nu \leqslant 5$ (в размерном времени частота ограничена 2.5 Гц). Считаем сначала, что начальные условия у действительного и программного движений совпадают.

Таблица 1. **Зависимость** $\eta(\nu)$

№	a	G	G_f	$\nu = 1$	2	3	4	5
1	0.1	100	5	0.010	0.016	0.027	0.042	0.061
2	0.1	30	2	0.034	0.055	0.094	0.152	0.231
3	0.1	10	1	0.107	0.183	0.331	0.556	0.911
4	0.1	3	0.3	0.476	1.043	2.660	2.377	1.811
5	0.2	100	5	0.010	0.016	0.027	0.042	0.062
6	0.2	30	2	0.033	0.054	0.094	0.155	0.239
7	0.2	10	1	0.107	0.183	0.341	0.581	0.962
8	0.2	3	0.3	0.482	1.094	3.074	2.417	1.865
9	0.2	30	1	0.033	0.055	0.096	0.163	0.266
10	0.2	30	5	0.033	0.052	0.084	0.126	0.174

В таблице 1 для двух значений амплитуды a и пяти значений частоты колебаний ν представлены значения функции качества управления $\eta(\nu)$ в зависимости от параметров обратной связи G и G_f. Данные таблицы 1 позволяют сделать следующие выводы.

В соответствии с приближенной формулой (5.8) с ростом G функция $\eta(\nu)$ убывает примерно как $1/G$. При $G \sim 3$ принятый способ управления неприменим (требуется более точное задание сил $\boldsymbol{F}^p$).

Функция $\eta(\nu)$ существенно возрастает вместе с частотой ν.

Как показывает сравнение строк 1–4 и 5–8, для относительно малых значений $\eta(\nu)$ (скажем, $\eta(\nu) < 0.5$) эта функция слабо зависит от ампли-

туды a. Зависимость проявляется лишь в области, где описанный способ управления неприменим.

Зависимость от параметра G_f следует из сравнения строки 6 со строками 9 и 10. С ростом G_f функция $\eta(\nu)$ убывает, причем более существенно при больших частотах ν.

Данные таблицы 1 получены в предположении, что начальные условия у действительного и программного движений совпадают, то есть

$$q_k = 0\,, \quad k = \overline{1,6}\,, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_5 = \dot{q}_6 = \nu a\,, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \dot{q}_4 = 0 \quad \text{при} \quad t = 0\,,$$

а программные усилия в стержнях вычисляются описанным выше способом. Однако обеспечение неоднородных по скорости начальных условий технически трудно реализовать. Поэтому возьмем для действительного движения однородные условия

$$q_k = \dot{q}_k = 0\,, \quad k = \overline{1,6}\,, \quad \text{при} \quad t = 0\,. \tag{5.11}$$

Полученное решение состоит из переходного процесса при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, который с течением времени стремится к периодическому решению с частотой ν. Поэтому при вычислении нормы этого решения по формуле (5.9) следует считать $t > t_*$. Естественно, что полученные результаты совпали с приведенными в таблице 1. Речь может идти лишь о длительности переходного процесса, который согласно проведенным вычислениям оказался меньше половины периода (см. также рис. 6).

Можно пойти по пути упрощения задания программных сил, положив $F_k^p = 0,\ k = \overline{1,6}$. В таблице 2 приведены полученные при интегрировании результаты. Видим, что по крайней мере для $G = 100$ и $G = 30$ результаты по сравнению с приведенными в таблице 1 изменились незначительно.

Таблица 2. **Зависимость $\eta(\nu)$ при нулевых программных силах**

№	a	G	G_f	$\nu = 1$	2	3	4	5
5*	0.2	100	5	0.015	0.019	0.029	0.045	0.065
6*	0.2	30	2	0.049	0.065	0.105	0.167	0.252
7*	0.2	10	1	0.153	0.225	0.391	0.643	1.028
8*	0.2	3	0.3	0.781	1.6329	3.316	2.500	1.892

Для иллюстрации сближения действительного и программного движений при несовпадении начальных условий и неточности задания программных усилий в штоках на рис. 6 приведены графики функций $q_1(t)$ и

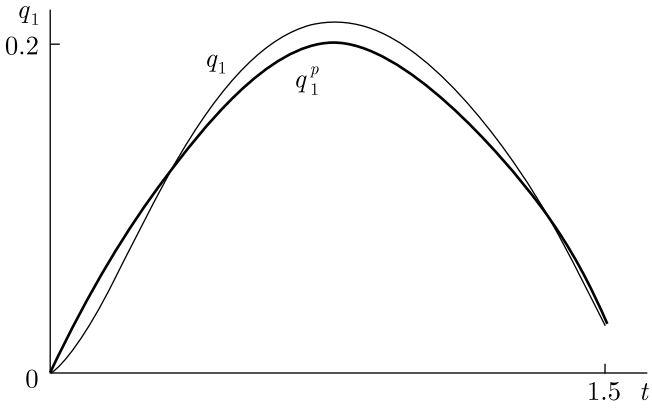

Рис. 6. Действительное и программное движения

$q_1^p(t)$. Взяты значения параметров $a = 0.2,\ G = 30,\ G_f = 2,\ \nu = 2$ и рассмотрен случай, когда $F_k^p = 0$, а функции $q_k(t)$ удовлетворяют нулевым начальным условиям (5.11).

Итак, вследствие неустойчивости решения обратной задачи динамики для реализации программного движения необходимо введение обратных связей по перемещениям и по скоростям штоков. Для получения достаточно точного программного движения платформы Стюарта имеются две возможности — либо точно задавать усилия в штоках, либо сильно увеличивать коэффициент обратной связи G по перемещению штоков. При снижении требований к точности возможно получение приемлемых результатов в случае задания приближенных выражений для программных сил в штоках или даже приравнивание их нулю. Правда, в последнем случае приходится увеличивать коэффициент G.

§ 6. Области достижимости положений платформы Стюарта в шестимерном пространстве обобщенных координат

Рассмотрим теперь построение областей достижимости (рабочих областей) в шестимерном пространстве обобщенных координат, определяющих положение платформы. При этом для визуализации результатов найдем проекции этих областей на подпространства меньшей размерности.

1. Область достижимости. Положим, как и ранее,

$$l_k = l_0 + s_k\,, \quad k = \overline{1,6}\,,$$

где s_k — вариации длин стержней по отношению к начальному положению l_0.

Перепишем уравнения (1.3) в виде

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{q})\,. \tag{6.1}$$

Чтобы найти $\boldsymbol{q} = (q_k,\ k = \overline{1,6})$ для заданных $\boldsymbol{s} = (s_k,\ k = \overline{1,6})$, будем решать уравнения (6.1) методом итераций Ньютона:

$$\boldsymbol{q}^{n+1} = \boldsymbol{q}^n + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}^n)(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}^n)\,,$$
$$\boldsymbol{s} = \big(s_k,\ k = \overline{1,6}\big)\ , \quad \boldsymbol{s}^n = \big(l_k(\boldsymbol{q}^n) - l_0\,,\ k = \overline{1,6}\big)\ ,$$

где $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}))^{-1}$ и $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = \partial\boldsymbol{s}/\partial\boldsymbol{q}$ — матрица из (1.4). В качестве нулевого приближения возьмем начальное положение платформы: $\boldsymbol{q}^0 = \boldsymbol{s}^0 = \boldsymbol{0}$. Вычисления показывают, что $\boldsymbol{q}^n \to \boldsymbol{q}$ при $\det(\boldsymbol{A}) \neq\ 0$.

В качестве примера возьмем опять следующие размеры платформы: $R_b = 1$ (принят за единицу длины), $R_a = 0.7608$, $h = 1.0189$, $l_0 = 1.255$, $d = 0.2$. Тогда в начальном положении матрицы $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{0})$ и $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{A}_0^{-1}$ равны соответственно (напомним, что матрица $\boldsymbol{A}_0$ вычислялась в § 5)

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} -0.424 & -0.401 & 0.812 & -0.490 & -0.377 & -0.442 \\ -0.424 & 0.401 & 0.812 & 0.490 & -0.377 & 0.442 \\ 0.559 & -0.166 & 0.812 & 0.571 & -0.236 & -0.442 \\ -0.136 & -0.568 & 0.812 & 0.081 & 0.612 & 0.442 \\ -0.136 & 0.568 & 0.812 & -0.081 & 0.612 & -0.442 \\ 0.559 & 0.166 & 0.812 & -0.571 & -0.236 & 0.442 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} -0.455 & -0.455 & 0.531 & -0.075 & -0.075 & 0.531 \\ -0.350 & 0.350 & -0.219 & -0.569 & 0.569 & 0.219 \\ 0.205 & 0.205 & 0.205 & 0.205 & 0.205 & 0.205 \\ -0.394 & 0.394 & 0.520 & 0.126 & -0.126 & -0.520 \\ -0.373 & -0.373 & -0.155 & 0.528 & 0.528 & -0.155 \\ -0.377 & 0.377 & -0.377 & 0.377 & -0.377 & 0.377 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим куб S_δ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_6$ с границей Γ_s:

$$S_\delta:\quad |s_k| \leqslant \delta\,,\ k = \overline{1,6}\,,$$

и будем считать, что длины стержней l_k (по конструктивным соображениям) могут меняться лишь в пределах $l_0 - \delta \leqslant l_k \leqslant l_0 + \delta,\ k = \overline{1,6}$. Нашей задачей является описание области возможных значений координат q_k (область достижимости) $Q_\delta:\ (q_k,\ k = \overline{1,6})$ с границей Γ_q в пространстве обобщенных координат, если длины стержней лежат в указанных пределах.

Общий способ построения границы Γ_q состоит в следующем. Берем произвольную параметрически заданную кривую

$$q_k = q_k(\tau)\,, \quad \tau \geqslant 0\,, \quad q_k(0) = 0\,, \quad k = \overline{1,6}\,, \tag{6.2}$$

и ищем первую точку $\tau = \tau_*$, для которой

$$\boldsymbol{s}(\tau_*) = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}(\tau_*)) \in \Gamma_s \quad \text{или} \quad \det(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}(\tau_*))) = 0\,. \tag{6.3}$$

Тогда $\boldsymbol{q}(\tau_*) \in \Gamma_q$.

Ниже при частных предположениях обсуждаются и более простые способы построения границы Γ_q.

2. Линейное приближение. Если максимальное изменение δ длин стержней мало по сравнению с радиусом R_b (именно, $\delta \ll 1$), то уравнение (6.1) приближенно дает линейные соотношения между векторами $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{A}_0 \cdot \boldsymbol{q}\,, \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{s}\,,$$

из которых может быть получен ряд приближенных оценок для пределов изменения обобщенных координат q_k.

2.1. Оценки проекций множества Q_δ на ось q_k, непосредственно следующие из соотношения $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{s}$, имеют вид

$$-q_k^g\delta \leqslant q_k \leqslant q_k^g\delta\,, \quad q_k^g = \sum_{j=1}^{6} |b_{kj}|\,, \quad k = \overline{1,6}\,, \quad \boldsymbol{B}_0 = \{b_{kj}\}\,. \tag{6.4}$$

2.2. Находим оценки пересечения множества Q_δ и оси q_k:

$$-q_k^r\delta \leqslant q_k \leqslant q_k^r\delta \quad \text{при} \quad q_i = 0\,,\ i \neq k\,, \quad k = \overline{1,6}\,, \tag{6.5}$$

где коэффициенты

$$q_k^r = \min_j\{1/|a_{jk}|\}\,, \quad \boldsymbol{A}_0 = \{a_{jk}\}\,.$$

2.3. Граница двухмерной проекции пространства Q_δ на любую плоскость q_kq_n может быть представлена в полярных координатах r, α:

$$q_k = r(\alpha)\delta\,\cos\alpha\,, \quad q_n = r(\alpha)\delta\,\sin\alpha\,,$$

$$r(\alpha) = \sum_{j=1}^{6} |b_{kj}\cos\alpha + b_{nj}\sin\alpha|\,, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi\,.$$

2.4. Построение пересечения пространства Q_δ плоскостью $q_k q_n$ (при $q_i = 0$ при $i \neq k,\ i \neq n$) является более сложным. Сначала решаем вспомогательную систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{6} b_{kj} c_j = \hat{q}_k\,, \quad \sum_{j=1}^{6} b_{nj} c_j = \hat{q}_n\,, \quad \sum_{j=1}^{6} b_{ij} c_j = 0\,, \quad i \neq k\,,\ i \neq n\,,$$

с неизвестными $\xi_m = (\hat{q}_k,\ \hat{q}_n, c_i\ (i \neq k,\ i \neq n))$. В этой системе величины c_k и c_n считаются заданными. Решение имеет вид $\xi_m = a_{m1} c_k + a_{m2} c_n$. Затем находим область на плоскости $c_k c_n$, в которой $|c_i| \leqslant 1$ для всех $i = \overline{1,6}$. Наконец, по формулам $q_k = a_{11} c_k + a_{12} c_n,\ q_n = a_{21} c_k + a_{22} c_n$ находим область на плоскости $q_k q_n$.

3. Численные примеры. Возьмем те же размеры платформы, что и выше.

3.1. Сначала обсудим одномерные пределы изменения обобщенных координат, определяемые в линейном приближении по формулам (6.4) и (6.5). Коэффициенты q_k^g и q_k^r приведены в таблице 3. Во всех случаях $q_k^g \geqslant q_k^r$, так как величины q_k^r получены при наличии ограничений. Однако $q_3^g = q_3^r$ и $q_6^g = q_6^r$, так как в этих случаях в силу симметрии относительно перемещения и поворота вокруг оси z ограничения выполнены автоматически.

Таблица 3. **Одномерные пределы в линейном приближении**

	$q_1 = x_0$	$q_2 = y_0$	$q_3 = z_0$	$q_4 = \varphi$	$q_5 = \theta$	$q_6 = \psi$
q_k^g	2.125	2.279	1.231	2.079	2.110	2.266
q_k^r	1.789	1.764	1.231	1.751	1.631	2.266

3.2. В таблице 4 для $\delta = 0.2$ линейное приближение сравнивается с точными границами проекций и пересечений. Линейные границы $q_k^g \delta$ и $q_k^r \delta$ получены по формулам (6.4) и (6.5), они одинаковы (по модулю) для верхних и нижних границ изменения обобщенных координат.

Для получения точных границ $q_k^{gm} \leqslant q_k \leqslant q_k^{gp}$ проекций решаем (методом итераций) 64 системы уравнений (6.1) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(q)$ при $\boldsymbol{s} \in S_\delta^0,\ S_\delta^0 = \{s_j = \pm\delta,\ j = \overline{1,6}\}$, после чего находим

$$q_k^{gm} = \min_{\boldsymbol{s} \in S_\delta^0} q_k(\boldsymbol{s})\,, \quad q_k^{gp} = \max_{\boldsymbol{s} \in S_\delta^0} q_k(\boldsymbol{s})\,, \quad k = \overline{1,6}\,.$$

Для построения границ пересечения пространства Q_δ и прямой q_k вычисляем величины s_j по формулам (6.1), меняя q_k при $q_i = 0,\ i \neq k$, до

тех пор, пока $\max_{q_k} |s_j|$ не станет равным δ. В результате находим q_k^{rm} и q_k^{rp}. Для координат x_0, z_0, θ нижняя и верхняя точные значения границ различаются по модулю.

Таблица 4. **Сравнение линейного приближения и точных результатов при** $\delta = 0.2$

	$q_1 = x_0$	$q_2 = y_0$	$q_3 = z_0$
$\lvert q_k\rvert \leqslant q_k^g\delta$	0.425	0.456	0.246
$q_k^{gm} \leqslant q_k \leqslant q_k^{gp}$	$-0.421/0.431$	± 0.452	$-0.260/0.246$
$\lvert q_k\rvert \leqslant q_k^r\delta$	0.357	0.353	0.246
$q_k^{rm} \leqslant q_k \leqslant q_k^{rp}$	$-0.377/0.318$	± 0.313	$-0.260/0.238$
	$q_4 = \varphi$	$q_5 = \theta$	$q_6 = \psi$
$\lvert q_k\rvert \leqslant q_k^g\delta$	0.416	0.422	0.453
$q_k^{gm} \leqslant q_k \leqslant q_k^{gp}$	± 0.416	$-0.426/0.468$	± 0.470
$\lvert q_k\rvert \leqslant q_k^r\delta$	0.416	0.326	0.453
$q_k^{rm} \leqslant q_k \leqslant q_k^{rp}$	± 0.335	$-0.328/0.340$	± 0.420

3.3. Для принятых значений параметров величина δ ограничена неравенством $\delta < 0.295$, ибо $\min\limits_{\boldsymbol{s}\in S_\delta} |\det(\boldsymbol{A})| = 0$ при $\delta = 0.295$.

3.4. Двухмерная проекция области G_δ на плоскость xy в линейном приближении (см. п. 2.4) показана кривой *1* на рис. 7,*б*. При этом для определенности принято $\delta = 1$, ибо в линейном приближении форма области не зависит от δ. Граница пересечения с плоскостью xy (при $z_0 = \varphi = \theta = \psi = 0$) показана кривой *2* (в последнем случае платформа совершает поступательное движение в плоскости $z = 0$). На рис. 7,*а* показана граница области на вспомогательной плоскости c_1c_2, которая используется при построении кривой *2* (см. п. 2.4). Также на рис. 7,*а* и рис. 7,*б* показаны

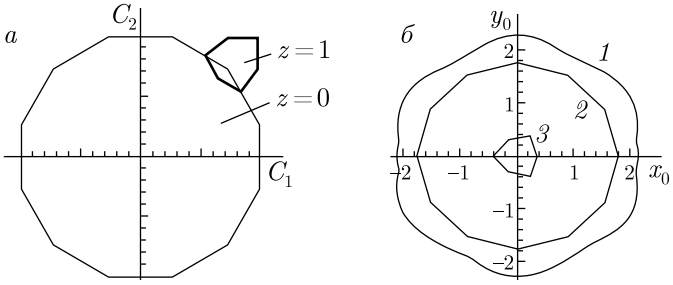

Рис. 7. Вспомогательные области на плоскости c_1c_2 (*а*), границы проекции (*1*) и пересечений (*2, 3*) в линейном приближении (*б*)

кривые *3*, которые соответствуют пересечению области G_δ с плоскостью xy при $z_0 = 1,\ \varphi = \theta = \psi = 0$.

3.5. Рассмотрим теперь построение точных кривых *1е* и *2е*, соответствующих при $\delta = 0.2$ приближенным кривым *1а* и *2а* и показанных на рис. 8 как для проекции на плоскость xy (*1е*), так и для пересечения с этой плоскостью (*2е*). В последнем случае обратимся к полярным координатам и используем формулы (6.2), (6.3) при

$$x_0 = r\cos\alpha\,, \quad y_0 = r\sin\alpha\,, \quad z_0 = \varphi = \theta = \psi = 0\,. \tag{6.6}$$

По формуле (6.1) для значений $\boldsymbol{q}$, заданных формулами (6.2), находим s. Увеличивая от нуля параметр r при фиксированном α, находим первое значение $r(\alpha)$, при котором $\max_k |s_k| = \delta$. Точная (*2е*) и приближенная (*2а*) границы пересечения области G_δ с плоскостью xy показаны на рис. 8,*б*. Видим, что они практически неразличимы. На рис. 8,*в* в увеличенном масштабе приведен график функции $r(\alpha)$, из которого следует, что кривая $r(\alpha)$ имеет угловые точки и не является выпуклой.

Построение проекции области Q_δ на плоскость xy оказывается более трудоемким. Здесь недостаточно вычисления решений x_0 и y_0 системы (4.2) на множестве S_δ^0. Следует решать систему (4.2) при $\boldsymbol{s} \in S_\delta$, то

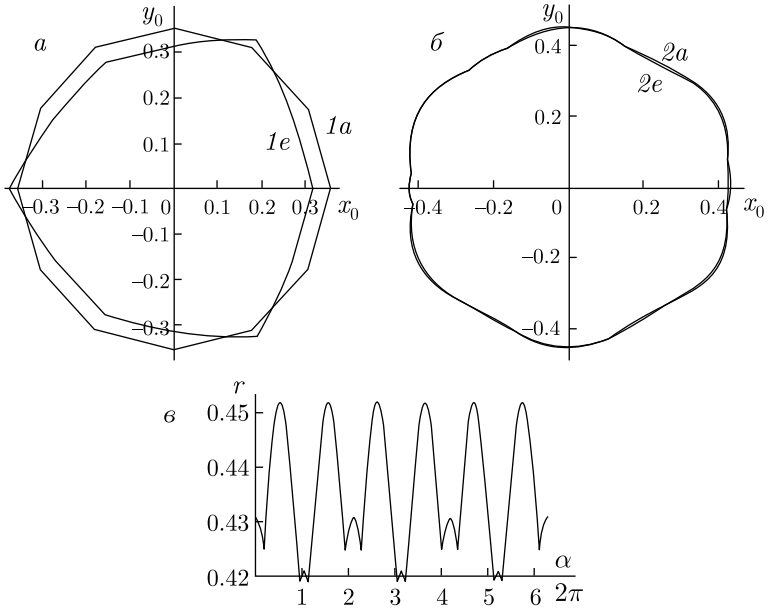

Рис. 8. Сравнение приближенных (*1а*, *2а*) и точных (*1е*, *2е*) границ проекций (*а*) и пересечений (*б*). Зависимость $r(\alpha)$ (*в*)

есть во всем кубе. Для перебора точек куба используем метод Монте-Карло. Для повышения вероятности попадания точек на грани куба введем случайные числа ξ_k, равномерно распределенные на промежутке $[-N\delta, N\delta]$, $N > 1$, и положим

$$s_k = \begin{cases} -\delta\,, & \xi_k < -\delta\,, \\ \xi_k\,, & |\xi_k| \leqslant \delta\,, \\ \delta\,, & \xi_k > \delta\,, \end{cases} \qquad k = \overline{1,6}\,. \tag{6.7}$$

Было взято 10^7 наборов точек (6.7) и построена область с границей *1e* на плоскости x_0y_0, показанная на рис. 8,*a*. Видим, что кривые *1e* и *1a* заметно различаются. Однако величину $\delta = 0.2$ следует считать относительно большой, ибо она составляет $2/3$ от максимально возможного значения $\delta = 0.295$.

3.5 Область достижимости $G_\delta \in R_6$ достаточно сложна[4]. Приведем в линейном приближении при различных предположениях решение задачи о нахождении параллелепипеда максимального объема V. В шестимерном пространстве $V = \Pi_{k=1}^6 q_k^*$ методом Монте-Карло находим половины длин сторон этого параллелепипеда:

$$x_0^* = 0.391\delta\,, \quad y_0^* = 0.417\delta\,, \quad z_0^* = 0.204\delta\,,$$
$$\varphi^* = 0.388\delta\,, \quad \theta^* = 0.440\delta\,, \quad \psi^* = 0.384\delta\,.$$

Рассмотрим трехмерные сечения области G_δ и найдем параллелепипеды максимального объема в этих сечениях. Половины длин сторон представлены в таблице 5.

Таблица 5. **Трехмерные сечения максимального объема**

	x_0^*	y_0^*	z_0	φ^*	θ^*	ψ^*
1	0.786δ	0.832δ	0.410δ	0	0	0
2	0.786δ	0.832δ	0	0	0	0.754δ
3	0.786δ	0	0.410δ	0	0.833δ	0
4	0	0.832δ	0.410δ	0.680δ	0	0
5	0	0	0	0.680δ	0.833δ	0.754δ

Строки таблицы 5 соответствуют поступательному перемещению платформы (1), плоскому движению плоскостей xy (2), xz (3), yz (4) и вращательному движению вокруг точки O (5).

[4]Именно поэтому в статье *Adkins F. A., Haug E. J.* Operational envelope of a spatial Stewart platform // Trans. ASME. J. Mech. Des. 1997. Vol. 31. № 368. P. 330–332 при решении задач управления использовалась рабочая область $P_\delta \in G_\delta$, имеющая форму параллелепипеда $|q_k| \leqslant q_k^*$.

Таким образом, получено условие разрешимости системы уравнений, описывающих движение платформы Стюарта. В шестимерном пространстве обобщенных координат исследована область достижимости положений платформы при заданном диапазоне изменения длин штоков. Эта область не является выпуклой и содержит ребра. Рассмотрены одномерные и двухмерные проекции и сечения области достижимости. Построены рабочие области в форме параллелепипедов, лежащие в области достижимости.

В заключение первой части данной главы отметим следующее. Помимо рассмотренных выше задач, можно было бы перечислить еще целый ряд дополнительных интересных проблем, возникающих при исследовании динамики нагруженной платформы Стюарта. Так, например, можно обратить внимание на работы по созданию математического обеспечения для эффективного функционирования динамических тренажеров, которые предназначены для выработки устойчивых профессиональных навыков операторов, наводящих линию визирования на объект при наличии непредсказуемого перемещения основания. Помехи создаются инструктором, который выбором движений основания (платформы Стюарта) всячески стремится воспрепятствовать работе оператора, находящегося на платформе. Одновременные действия оператора и инструктора рассматриваются как антагонистическая игра, в которой каждый из игроков выбором своих стратегий стремится добиться наилучшего результата[5]. Осуществляется поиск минимаксного управления, обеспечивающего стабилизацию линии визирования, направленной на неподвижный относительно Земли объект[6].

---

[5]См., например, учебник: *Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В.* Теория игр. БХВ-Петербург. 2012. 432 с.

[6]Основные результаты исследований отражены в работах: *Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А.* Лекции по механике управляемых систем. М.: МАКС-Пресс. 2012. 240 с.; *Латонов В. В., Тихомиров В. В.* Управление линии визирования цели по видеоизображению // Вестн. Моск. ун-та. Серия: Математика. Механика. 2018. № 1. С. 53–59; *Бурлаков Д. С., Латонов В. В., Чертополохов В. А.* Идентификация параметров модели подвижной платформы опорного типа // Фундам. и прикл. математика. 2018. Т. 22. № 2. С. 57–73; *Латонов В. В.* Программные стратегии тестирования качества управления линией визирования по видеоизображению // Вестн. Моск. ун-та. Серия: Математика. Механика. 2018. № 6. С. 51–56; *Латонов В. В.* Задачи минимаксной оптимизации системы стабилизации линии визирования // Вестн. Моск. ун-та. Серия: Математика. Механика. 2019. № 6. С. 64–68; *Александров В. В., Латонов В. В.* Задачи минимаксной стабилизации линии визирования инерционного объекта на подвижном основании // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 17.

II. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ НАГРУЖЕННОЙ ПЛАТФОРМЫ СТЮАРТА[7,8]

§ 7. Постановка задачи и системы координат

Постановка задачи. В первом разделе данной главы для изучения поведения нагруженной платформы Стюарта применялся классический подход, опиравшийся на использование теоремы о движении центра масс и теоремы об изменении кинетического момента системы в ее относительном движении относительно центра масс. Теперь для исследования той же механической задачи применим специальную форму уравнений движения, изложенную в § 7 главы VIII первого тома учебника (там она называлась «Уравнения движения системы твердых тел в избыточных координатах»).

При изучении движения платформы динамического имитационного стенда необходимо составить уравнения движения системы в такой форме, которая позволяла бы конструктивно определять усилия, возникающие в гидроцилиндрах (пневмоцилиндрах) при заданном движении платформы. И наоборот, по заданным усилиям, создаваемым штоками гидроцилиндров, находить движение системы. Как было указано выше, в этом разделе данной главы для этого будет использована специальная форма уравнений движения. Но для работы с этой формой требуется знать преобразования между системами координат, используемыми при исследовании задачи. Далее будут выведены формулы для пересчета координат в четырех системах координат, используемых для изучения движения нагруженной платформы Стюарта, являющейся центральной компонентой динамического имитационного стенда. Применяющиеся ниже обозначения

---

[7]Второй раздел «Применение специальной формы уравнений движения для исследования движения нагруженной платформы Стюарта» главы III данного тома написан В. И. Петровой.

[8]Текст второго раздела главы III основан на содержании статей: *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Специальная форма уравнений динамики системы твердых тел // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 4. С. 805–807; *Зегжда С. А., Юшков М. П.* Применение новой формы уравнений динамики для управления движением платформы робототехнического стенда с помощью стержней переменной длины // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1996. Вып. 3 (№ 15). С. 112–114; *Petrova V. I.* Relation between coordinate systems describing the dynamics of a loaded Stewart platform // AIP (American Institute of Physics). Conference Proceedings 1959, 030019 (2018), pp. 030019-1–030019-7; *Зегжда С. А., Петрова В. И., Юшков М. П.* Применение специальной формы дифференциальных уравнений для исследования движений нагруженной платформы Стюарта // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 128–140.

могут отличаться от обозначений, которые были приняты в первом разделе главы.

Системы координат. Введем системы координат (см. рис. 9): $O_1\xi\eta\zeta$ — неподвижная система координат, связанная с основанием стенда; $Ox_oy_oz_o$ — система, жестко связанная с подвижной платформой стенда (платформой Стюарта); $Cxyz$ — система, имеющая начало в общем центре масс подвижной нагруженной платформы, ее оси направлены по главным центральным осям инерции рассматриваемого твердого тела.

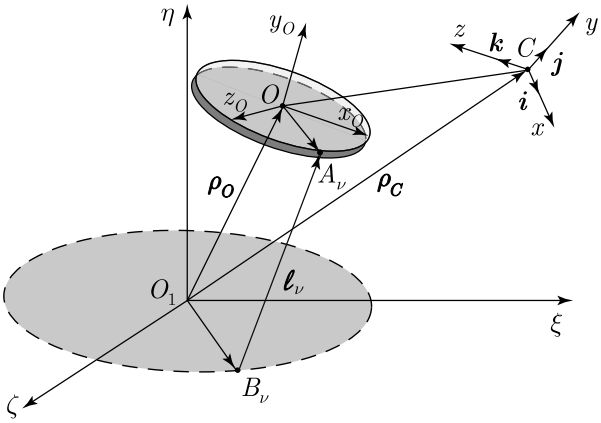

Рис. 9. Модель нагруженной платформы Стюарта

Ориентация осей платформы Ox_o, Oy_o, Oz_o относительно поступательно движущейся системы координат $O\xi'\eta'\zeta'$ задается тремя последовательными поворотами на самолетные углы[9] (см. рис. 10): ψ — рыскания, θ — тангажа, φ — крена.

Закон движения нагруженной платформы стенда задан, если известны закон движения полюса O этой системы:

$$\xi_o = \xi_o(t)\,, \quad \eta_o = \eta_o(t)\,, \quad \zeta_o = \zeta_o(t), \tag{7.1}$$

и закон вращения этого тела вокруг полюса:

$$\psi = \psi(t)\,, \quad \theta = \theta(t)\,, \quad \varphi = \varphi(t)\,. \tag{7.2}$$

[9]В этом разделе, в отличие от первой части главы, для разнообразия вводятся другие ориентации декартовых систем координат и другая самолетная система координат, использовавшиеся в Советском Союзе (см., например, монографии: *Сихарулидзе Ю. Г.* Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука. 1982. 352 с.; *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение. 1983. 320 с.). Подробнее о системе самолетных углов см. в главе X.

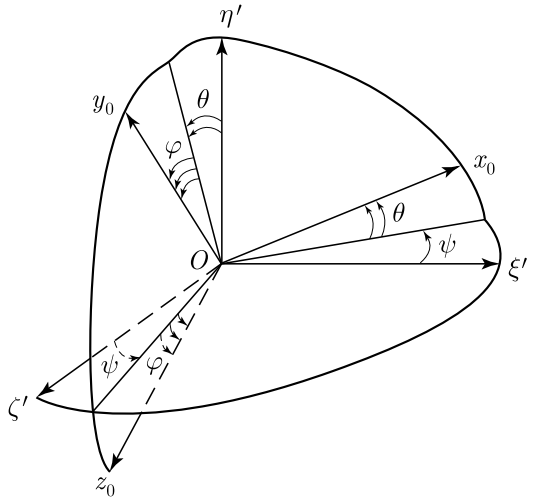

Рис. 10. Самолетные углы, использовавшиеся в Советском Союзе

Функции (7.1) определяют вектор $\boldsymbol{\rho}_o(t)$:

$$\boldsymbol{\rho}_o(t) = \xi_o(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \eta_o(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \zeta_o(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ — орты неподвижной системы $O_1\xi\eta\zeta$.

При изучении динамики твердого тела обычно как функции времени рассматриваются, во-первых, вектор $\boldsymbol{\rho}_c$, определяющий положение центра масс нагруженной платформы стенда, и, во-вторых, векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, являющиеся ортами связанной системы координат $Cxyz$ (см. рис. 9).

§ 8. Формулы перехода между системами координат

Определение закона движения платформы стенда по известному закону изменения длин гидроцилиндров. Нагруженная платформа Стюарта имеет 6 степеней свободы. Выше за обобщенные координаты были приняты

$$\xi_o\,,\ \eta_o\,,\ \zeta_o\,,\ \psi\,,\ \theta\,,\ \varphi\,; \tag{8.1}$$

при движении они изменяются согласно законам (7.1), (7.2).

Но для определения положения исследуемого тела может быть выбрана и другая система криволинейных координат. Для динамического стенда за такую новую систему координат удобно принять длины гидроцилиндров (пневмоцилиндров) $B_\nu A_\nu$ ($\nu = \overline{1,6}$), поддерживающих платформу с кабиной (см. рис. 9):

$$\ell_\nu, \quad \nu = \overline{1,6}. \tag{8.2}$$

При использовании таких двух систем координат важно знать формулы перехода от одних криволинейных координат к другим.

Обычно подобные формулы выражаются трансцендентными соотношениями. В данном параграфе предлагается новый метод (основы его упоминались и в первой части главы) определения соответствия между новыми и старыми координатами в процессе движения системы. С этой целью записывается система дифференциальных уравнений относительно новых координат, а неоднородность этих дифференциальных уравнений характеризуется законом изменения старых координат.

Итак, считаем заданным закон изменения координат (8.2)

$$\ell_\nu = \ell_\nu(t)\,, \quad \nu = \overline{1,6}\,. \tag{8.3}$$

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ положение платформы стенда известно, то есть известными при $t = 0$ являются значения как координат (8.1), так и координат (8.2).

Рассматривается следующая задача: известно как будут изменяться длины гидроцилиндров (8.3), начиная с момента $t = 0$; определить как при этом будут изменяться координаты (8.1).

Таким образом, по функциям (8.3) хотим найти закон изменения координат (8.1) из некоторой системы дифференциальных уравнений. Для составления искомой системы уравнений поступим следующим образом.

Запишем очевидные равенства:

$$\ell_\nu^2(t) = \boldsymbol{\ell}_\nu^2(t)\,, \quad \nu = \overline{1,6}\,, \tag{8.4}$$

где $\boldsymbol{\ell}_\nu = \overrightarrow{B_\nu A_\nu}$ (см. рис. 9), B_ν — точка крепления ν-го гидроцилиндра к неподвижному основанию, A_ν — точка его крепления к подвижной платформе.

Дифференцируя равенства (8.4) по времени и учитывая соотношения между векторами, следующие из рис. 9, запишем

$$\begin{aligned}
&\ell_\nu(t)\dot{\ell}_\nu(t) \equiv \boldsymbol{\ell}_\nu \cdot \dot{\boldsymbol{\ell}}_\nu = \\
&= (\overrightarrow{B_\nu O_1} + \boldsymbol{\rho}_o(t) + \overrightarrow{OA_\nu}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\rho}}_o + \dot{\overrightarrow{OA_\nu}}) = \\
&= (\boldsymbol{\rho}_o(t) + x_{o\nu}\boldsymbol{i}_o + z_{o\nu}\boldsymbol{k}_o - \xi_\nu\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \zeta_\nu\boldsymbol{\varepsilon}_3)\cdot \\
&\cdot (\dot{\boldsymbol{\rho}}_o + x_{o\nu}\dot{\boldsymbol{i}}_o + z_{o\nu}\dot{\boldsymbol{k}}_o)\,, \quad \nu = \overline{1,6}\,.
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Здесь ξ_ν, ζ_ν — координаты точки B_ν в плоскости $O_1\xi\zeta$, $x_{o\nu}, z_{o\nu}$ — координаты точки A_ν в плоскости Ox_oz_o, $\boldsymbol{i}_o, \boldsymbol{k}_o$ — орты осей Ox_o, Oz_o.

Входящие в систему уравнений (8.5) векторы можно представить в виде

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_o(t) = \xi_o(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \eta_o(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \zeta_o(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,, \\ \boldsymbol{i}_o(t) = \alpha_{11}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \alpha_{12}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \alpha_{13}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,, \\ \boldsymbol{k}_o(t) = \alpha_{31}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \alpha_{32}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \alpha_{33}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,, \end{cases} \tag{8.6}$$

где $\alpha_{\sigma\tau}$ — косинусы направляющих углов.

К системе шести уравнений (8.5) добавим еще 6 уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_o \cdot \dot{\boldsymbol{i}}_o = 0\,, \quad \boldsymbol{j}_o \cdot \dot{\boldsymbol{j}}_o = 0\,, \quad \boldsymbol{k}_o \cdot \dot{\boldsymbol{k}}_o = 0\,, \\ \dot{\boldsymbol{i}}_o \cdot \boldsymbol{j}_o + \boldsymbol{i}_o \cdot \dot{\boldsymbol{j}}_o = 0\,, \quad \dot{\boldsymbol{j}}_o \cdot \boldsymbol{k}_o + \boldsymbol{j}_o \cdot \dot{\boldsymbol{k}}_o = 0\,, \\ \dot{\boldsymbol{k}}_o \cdot \boldsymbol{i}_o + \boldsymbol{k}_o \cdot \dot{\boldsymbol{i}}_o = 0\,. \end{cases} \tag{8.7}$$

Эти уравнения получаются, если продифференцировать по времени очевидные соотношения:

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_o^2 = 1\,, \quad \boldsymbol{j}_o^2 = 1\,, \quad \boldsymbol{k}_o^2 = 1\,, \\ \boldsymbol{i}_o \cdot \boldsymbol{j}_o = 0\,, \quad \boldsymbol{j}_o \cdot \boldsymbol{k}_o = 0\,, \quad \boldsymbol{k}_o \cdot \boldsymbol{i}_o = 0\,. \end{cases} \tag{8.8}$$

Появившийся в формулах (8.7) и (8.8) вектор $\boldsymbol{j}_o$ может быть представлен следующим образом:

$$\boldsymbol{j}_o(t) = \alpha_{21}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \alpha_{22}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \alpha_{23}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,.$$

Система уравнений (8.5), (8.7) содержит 12 неизвестных функций времени:

$$\xi_o(t)\,,\ \eta_o(t)\,,\ \zeta_o(t)\,,\ \alpha_{\sigma\tau}(t)\,,\ \ \sigma,\tau = \overline{1,3}\,. \tag{8.9}$$

Они являются координатами векторов $\boldsymbol{\rho}_o$, $\boldsymbol{i}_o$, $\boldsymbol{j}_o$, $\boldsymbol{k}_o$ относительно неподвижной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Будем рассматривать эту систему как систему дифференциальных уравнений относительно искомых функций (8.9). Напомним, что в этих уравнениях $\ell_\nu(t)$, $\dot{\ell}_\nu(t)$, $\nu = \overline{1,6}$, считаются заданными функциями времени.

Интегрируя систему (8.5), (8.7) при начальных данных

$$\begin{gathered} \xi_o(0) = \xi_o^0\,, \quad \eta_o(0) = \eta_o^0\,, \quad \zeta_o(0) = \zeta_o^0\,, \\ \alpha_{\sigma\tau}(0) = \alpha_{\sigma\tau}^0\,, \quad \sigma,\tau = \overline{1,3}\,, \end{gathered} \tag{8.10}$$

найдем неизвестные функции (8.9). Значения $\alpha_{\sigma\tau}^0$, $\sigma,\tau = \overline{1,3}$, могут быть подсчитаны по заданным начальным значениям самолетных углов

$$\psi(0) = \psi^0\,, \quad \theta(0) = \theta^0\,, \quad \varphi(0) = \varphi^0$$

с помощью матрицы направляющих косинусов[10] между осями координатных систем $Ox_oy_oz_o$ и $O_1\xi\eta\zeta$:

Таблица 6. **Матрица направляющих косинусов**

	$O\xi'$	$O\eta'$	$O\zeta'$
Ox_o	$\cos\psi\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\psi\cos\theta$
Oy_o	$-\cos\psi\sin\theta\cos\varphi+$ $+\sin\psi\sin\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\psi\sin\varphi+$ $+\sin\psi\sin\theta\cos\varphi$
Oz_o	$\cos\psi\sin\theta\sin\varphi+$ $+\sin\psi\cos\varphi$	$-\cos\theta\sin\varphi$	$\cos\psi\cos\varphi-$ $-\sin\psi\sin\theta\sin\varphi$

Итак, функции $\xi_o(t)$, $\eta_o(t)$, $\zeta_o(t)$, входящие в закон движения платформы (7.1), определены; необходимо еще выразить самолетные углы ψ, θ, φ через найденные функции $\alpha_{\sigma\tau}(t), \sigma, \tau = \overline{1,3}$, то есть найти и вторую часть закона движения (7.2). С этой целью выпишем соотношения

$$\dot{\boldsymbol{i}}_o \cdot \boldsymbol{j}_o = r\,, \quad \dot{\boldsymbol{j}}_o \cdot \boldsymbol{k}_o = p\,, \quad \dot{\boldsymbol{k}}_o \cdot \boldsymbol{i}_o = q\,. \tag{8.11}$$

Эти формулы получены из следующих соображений. Имеем

$$\dot{\boldsymbol{i}}_o = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}_o = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_o & \boldsymbol{j}_o & \boldsymbol{k}_o \\ p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\boldsymbol{j}_o - q\boldsymbol{k}_o\,, \tag{8.12}$$

поэтому $\dot{\boldsymbol{i}}_o \cdot \boldsymbol{j}_o = r$. Аналогично выводятся и следующие две формулы в (8.11).

Таким образом, в результате решения системы (8.5), (8.7) по формулам (8.11) определяем функции $p = p(t)$, $q = q(t)$, $r = r(t)$. В свою очередь, эти функции p, q, r связаны с самолетными углами кинематическими уравнениями Эйлера[11]:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi}\,, \\ q = \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\,, \\ r = -\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\,. \end{cases} \tag{8.13}$$

[10] См., например, монографию: *Сихарулидзе Ю. Г.* Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука. 1982. 352 с.

[11] См. предыдущую сноску.

Поэтому уравнения (8.13) согласно формулам (8.11) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi} = \\ = \dot{\alpha}_{21}(t)\alpha_{31}(t) + \dot{\alpha}_{22}(t)\alpha_{32}(t) + \dot{\alpha}_{23}(t)\alpha_{33}(t)\,, \\ \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi = \\ = \dot{\alpha}_{31}(t)\alpha_{11}(t) + \dot{\alpha}_{32}(t)\alpha_{12}(t) + \dot{\alpha}_{33}(t)\alpha_{13}(t)\,, \\ -\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi = \\ = \dot{\alpha}_{11}(t)\alpha_{21}(t) + \dot{\alpha}_{12}(t)\alpha_{22}(t) + \dot{\alpha}_{13}(t)\alpha_{23}(t)\,. \end{cases} \tag{8.14}$$

Правые части этих уравнений являются найденными функциями времени, поэтому систему (8.14) можно рассматривать как систему трех дифференциальных уравнений относительно самолетных углов ψ, θ, φ. После интегрирования ее при заданных начальных данных получим закон вращения нагруженной платформы (7.2):

$$\psi = \psi(t)\,, \quad \theta = \theta(t)\,, \quad \varphi = \varphi(t)\,.$$

Определение закона изменения длин гидроцилиндров по известному закону движения платформы стенда. Требуется найти переход от системы координат (8.1) к системе координат (8.2). Этот переход может быть осуществлен различными способами.

1. При классическом подходе выпишем «векторы» гидроцилиндров:

$$\boldsymbol{\ell}_\nu = \boldsymbol{\rho}_o(t) + x_{o\nu}\boldsymbol{i}_o(t) + z_{o\nu}\boldsymbol{k}_o(t) - \xi_\nu\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \zeta_\nu\boldsymbol{\varepsilon}_3\,, \quad \nu = \overline{1,6}\,, \tag{8.15}$$

где векторы $\boldsymbol{i}_o, \boldsymbol{k}_o$ представлены формулами (8.6) (добавим к ним формулу для $\boldsymbol{j}_o$)

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_o(t) = \alpha_{11}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \alpha_{12}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \alpha_{13}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,, \\ \boldsymbol{j}_o(t) = \alpha_{21}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \alpha_{22}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \alpha_{23}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,, \\ \boldsymbol{k}_o(t) = \alpha_{31}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \alpha_{32}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \alpha_{33}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,. \end{cases}$$

Как отмечалось выше, выражения $\alpha_{\sigma\tau}$, $\sigma, \tau = \overline{1,3}$, через самолетные углы известны. Определив по формулам (8.15) векторы $\boldsymbol{\ell}_\nu$, $\nu = \overline{1,6}$, сможем найти и их длины ℓ_ν, $\nu = \overline{1,6}$.

2. Для нахождения векторов $\boldsymbol{i}_o$, $\boldsymbol{k}_o$, входящих в формулы (8.15) как функции времени, можно предложить и другой способ. Используя выражение (8.12) и круговые перестановки для векторов $\boldsymbol{i}_o$, $\boldsymbol{j}_o$, $\boldsymbol{k}_o$ и величин p,

q, r, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{i}}_o = r\boldsymbol{j}_o - q\boldsymbol{k}_o\,, \\ \dot{\boldsymbol{j}}_o = p\boldsymbol{k}_o - r\boldsymbol{i}_o\,, \\ \dot{\boldsymbol{k}}_o = q\boldsymbol{i}_o - p\boldsymbol{j}_o\,. \end{cases} \tag{8.16}$$

Здесь функции $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ при известном законе движения платформы стенда (7.1), (7.2) определяются из кинематических уравнений Эйлера (8.13).

Таким образом, во втором способе требуется при использовании формул (7.1), (7.2), (8.13) проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (8.16), которая в развернутом виде такова:

$$\begin{gathered} \dot{\alpha}_{11} = r(t)\alpha_{21} - q(t)\alpha_{31}\,, \quad \dot{\alpha}_{12} = r(t)\alpha_{22} - q(t)\alpha_{32}\,, \\ \dot{\alpha}_{13} = r(t)\alpha_{23} - q(t)\alpha_{33}\,, \quad \dot{\alpha}_{21} = p(t)\alpha_{31} - r(t)\alpha_{11}\,, \\ \dot{\alpha}_{22} = p(t)\alpha_{32} - r(t)\alpha_{12}\,, \quad \dot{\alpha}_{23} = p(t)\alpha_{33} - r(t)\alpha_{13}\,, \\ \dot{\alpha}_{31} = q(t)\alpha_{11} - p(t)\alpha_{21}\,, \quad \dot{\alpha}_{32} = q(t)\alpha_{12} - p(t)\alpha_{22}\,, \\ \dot{\alpha}_{33} = q(t)\alpha_{13} - p(t)\alpha_{23}\,. \end{gathered} \tag{8.17}$$

Решив систему (8.17) при начальных данных (8.10), найдем векторы $\boldsymbol{i}_o(t)$, $\boldsymbol{k}_o(t)$, а тогда по формулам (8.15) найдем и векторы $\boldsymbol{\ell}_\nu$, $\nu = \overline{1,6}$, по которым вычислим и их длины.

3. Составляя выражения (8.5) при задании уравнений движения (7.1), (7.2), после определения векторов $\boldsymbol{i}_o(t)$, $\boldsymbol{k}_o(t)$ (аналогично тому, как это делалось в предыдущем методе) получим выражения

$$\ell_\nu \dot{\ell}_\nu = f_\nu(t)\,, \ \nu = \overline{1,6}\,, \tag{8.18}$$

где через $f_\nu(t)$ обозначены функции, стоящие в правых частях формул (8.5). Запись (8.18) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений относительно длин стержней ℓ_ν, $\nu = \overline{1,6}$. Эта система легко интегрируется, в результате чего найдем закон изменения длин гидроцилиндров. Действительно:

$$f_\nu(t) = \ell_\nu \dot{\ell}_\nu = \frac{1}{2}\frac{d\ell_\nu^2}{dt}\,, \ \nu = \overline{1,6}\,,$$

откуда

$$\ell_\nu^2(t) = 2\int\limits_0^t f_\nu(t_1)dt_1\,, \ \nu = \overline{1,6}\,.$$

Определение по заданному закону движения платформы стенда вектор-функций $\boldsymbol{\rho}_c(t)$, $\boldsymbol{i}(t)$, $\boldsymbol{j}(t)$, $\boldsymbol{k}(t)$. Пусть движение платформы стенда задается уравнениями (7.1), (7.2). Для описания движения системы $Cxyz$ будем опять строить некоторые дифференциальные уравнения.

Составим выражения

$$\begin{aligned}
&\ell_\nu(t)\dot{\ell}_\nu \equiv \boldsymbol{\ell}_\nu(t)\cdot\dot{\boldsymbol{\ell}}_\nu(t) = \\
&= (\boldsymbol{\rho}_c(t) + \overrightarrow{CA_\nu} + \overrightarrow{B_\nu O_1})\cdot(\dot{\boldsymbol{\rho}}_c(t) + \dot{\overrightarrow{CA_\nu}}) = \\
&= (\boldsymbol{\rho}_c(t) + x_\nu\boldsymbol{i}(t) + y_\nu\boldsymbol{j}(t) + z_\nu\boldsymbol{k}(t) - \xi_\nu\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \zeta_\nu\boldsymbol{\varepsilon}_3)\cdot \\
&\cdot(\dot{\boldsymbol{\rho}}_c + x_\nu\dot{\boldsymbol{i}}(t) + y_\nu\dot{\boldsymbol{j}}(t) + z_\nu\dot{\boldsymbol{k}}(t))\,, \quad \nu = \overline{1,6}\,,
\end{aligned} \tag{8.19}$$

где x_ν, y_ν, z_ν — координаты точек $A_\nu(\nu = \overline{1,6})$ в системе $Cxyz$.

Отметим, что положение центра масс C в системе $Ox_oy_oz_o$ считается известным, и заданными считаются координаты x_ν, y_ν z_ν точек $A_\nu(\nu = \overline{1,6})$ в системе $Cxyz$. Векторы $\boldsymbol{\rho}_c(t)$, $\boldsymbol{i}(t)$, $\boldsymbol{j}(t)$, $\boldsymbol{k}(t)$ теперь задаются через их проекции на неподвижные оси $O_1\xi$, $O_1\eta$, $O_1\zeta$ с ортами $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$:

$$\begin{cases}
\boldsymbol{\rho}_c(t) = \xi(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \eta(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \zeta(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,, \\
\boldsymbol{i}(t) = \beta_{11}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \beta_{12}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \beta_{13}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,, \\
\boldsymbol{j}(t) = \beta_{21}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \beta_{22}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \beta_{23}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,, \\
\boldsymbol{k}(t) = \beta_{31}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \beta_{32}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \beta_{33}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3\,.
\end{cases}$$

Известными считаются начальное положение центра масс и ориентация главных центральных осей инерции:

$$\begin{cases}
\xi(0) = \xi^0,\ \eta(0) = \eta^0,\ \zeta(0) = \zeta^0\,, \\
\beta_{\sigma\tau}(0) = \beta^0_{\sigma\tau}\,, \quad \sigma,\tau = \overline{1,3}\,.
\end{cases} \tag{8.20}$$

Как и ранее, по известному закону движения платформы стенда (7.1), (7.2) можно найти функции

$$f_\nu(t) = \ell_\nu(t)\dot{\ell}_\nu(t)\,,\ \nu = \overline{1,6}\,,$$

а тогда выражения (8.19) можно рассматривать как систему шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно векторов $\boldsymbol{\rho}_c$, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Дополним (аналогично предыдущим рассуждениям) эту систему дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases}
\boldsymbol{i}\cdot\dot{\boldsymbol{i}} = 0\,, \quad \boldsymbol{j}\cdot\dot{\boldsymbol{j}} = 0\,, \quad \boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{k}} = 0\,, \\
\dot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{j} + \boldsymbol{i}\cdot\dot{\boldsymbol{j}} = 0\,, \quad \dot{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{k} + \boldsymbol{j}\cdot\dot{\boldsymbol{k}} = 0\,, \\
\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{i}} = 0\,,
\end{cases} \tag{8.21}$$

являющимися следствием абстрактных связей

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}^2 = 1\,, \quad \boldsymbol{j}^2 = 1\,, \quad \boldsymbol{k}^2 = 1\,, \\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0\,, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0\,, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0\,, \end{cases}$$

наложенных на движение нагруженной платформы и введенных в § 7 главы VIII первого тома учебника.

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (8.19), (8.21) при начальных данных (8.20), найдем вектор-функции

$$\boldsymbol{\rho}_c = \boldsymbol{\rho}_c(t)\,, \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}(t)\,, \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(t)\,, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}(t)\,.$$

Определение закона движения платформы стенда по заданным функциям $\boldsymbol{\rho}_c(t)$, $\boldsymbol{i}(t)$, $\boldsymbol{j}(t)$, $\boldsymbol{k}(t)$. Отметим, что вектор-функции

$$\boldsymbol{\rho}_c = \boldsymbol{\rho}_c(t)\,, \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}(t)\,, \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(t)\,, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}(t) \tag{8.22}$$

становятся заданными как функции времени в результате интегрирования дифференциальных уравнений динамики стенда, записанных в специальной форме.

Используя выражения (8.22) в формулах (8.19), найдем функции $f_\nu(t) = \ell_\nu \dot{\ell}_\nu(t)$, $\nu = \overline{1,6}$. Подставим эти функции в выражения (8.5). В результате интегрирования полученной системы дифференциальных уравнений (8.5) и присоединенных к ней уравнений (8.7) при начальных данных (8.10) получим вектор-функции

$$\boldsymbol{\rho}_o = \boldsymbol{\rho}_o(t)\,, \ \boldsymbol{i}_o = \boldsymbol{i}_o(t)\,, \ \boldsymbol{j}_o = \boldsymbol{j}_o(t)\,, \ \boldsymbol{k}_o = \boldsymbol{k}_o(t)\,.$$

По формулам (8.11) находим функции $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, а затем интегрированием системы (8.14) получаем закон изменения углов ψ, θ, φ.

§ 9. Решение прямой задачи динамики

Определение усилий в штоках гидроцилиндров (пневмоцилиндров) по заданному закону движения платформы стенда. В § 8 было показано, как по заданному закону движения платформы определяются вектор-функции $\boldsymbol{\rho}_c(t)$, $\boldsymbol{i}(t)$, $\boldsymbol{j}(t)$, $\boldsymbol{k}(t)$, используемые в специальной форме уравнений динамики твердого тела.

Напомним, что $\boldsymbol{\rho}_c = \overrightarrow{O_1C}$ — радиус-вектор центра масс нагруженной платформы стенда, а $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты главных центральных осей инерции

данной механической системы. Моменты инерции A, B, C относительно этих осей предполагаются известными:

$$A = \int\limits_{(m)} (y^2 + z^2)dm\,, \quad B = \int\limits_{(m)} (z^2 + x^2)dm\,, \quad C = \int\limits_{(m)} (x^2 + y^2)dm\,.$$

При использовании специальной формы уравнений динамики (см. § 7 главы VIII первого тома учебника) в рассмотрение вводятся следующие величины:

$$I_x = \int\limits_{(m)} x^2 dm\,,\ I_y = \int\limits_{(m)} y^2 dm\,,\ I_z = \int\limits_{(m)} z^2 dm\,.$$

С классическими величинами A, B и C они связаны соотношениями

$$I_x = \frac{C - A + B}{2}\,, \quad I_y = \frac{A - B + C}{2}\,, \quad I_z = \frac{B - C + A}{2}\,.$$

К данной механической системе приложена сила тяжести всей системы $M\mathbf{g}$ и шесть сил $\boldsymbol{F}_\nu$, действующих на платформу со стороны штоков гидроцилиндров. Силами инерции вращательного движения гидроцилиндров и моментами сил трения в шаровых шарнирах гидроцилиндров можно пренебречь, и поэтому можно считать, что силы $\boldsymbol{F}_\nu$, $\nu = \overline{1,6}$, действуют по направлениям векторов $\boldsymbol{\ell}_\nu$, $\nu = \overline{1,6}$. Силы $\boldsymbol{F}_\nu$, $\nu = \overline{1,6}$, можно, таким образом, представить в виде

$$\boldsymbol{F}_\nu = \frac{u_\nu \boldsymbol{\ell}_\nu}{\ell_\nu}\,, \quad \ell_\nu = |\boldsymbol{\ell}_\nu|\,, \quad \nu = \overline{1,6}\,.$$

Здесь u_ν, $\nu = \overline{1,6}$, — управляющие параметры, обеспечивающие необходимое движение платформы.

В соответствии с теоремой о движении центра масс имеем

$$M\ddot{\boldsymbol{\rho}}_c = \sum_{\nu=1}^{6} \boldsymbol{F}_\nu + M\mathbf{g}\,, \tag{9.1}$$

где M — масса всей системы.

Вращательное движение рассматриваемой системы относительно центра масс, как было показано в § 7 главы VIII первого тома учебника, описывается следующей системой дифференциальных уравнений относительно

векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{i}} &= -\left(\dot{\boldsymbol{i}}\right)^2 \boldsymbol{i} - \frac{2I_y}{I_x+I_y}(\dot{\boldsymbol{i}}\cdot\dot{\boldsymbol{j}})\boldsymbol{j} - \\
&\quad - \frac{2I_z}{I_z+I_x}(\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\dot{\boldsymbol{i}})\boldsymbol{k} + \frac{L_z}{I_x+I_y}\boldsymbol{j} - \frac{L_y}{I_z+I_x}\boldsymbol{k}\,, \\
\ddot{\boldsymbol{j}} &= -\left(\dot{\boldsymbol{j}}\right)^2 \boldsymbol{j} - \frac{2I_z}{I_y+I_z}(\dot{\boldsymbol{j}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{k} - \\
&\quad - \frac{2I_x}{I_x+I_y}(\dot{\boldsymbol{i}}\cdot\dot{\boldsymbol{j}})\boldsymbol{i} + \frac{L_x}{I_y+I_z}\boldsymbol{k} - \frac{L_z}{I_x+I_y}\boldsymbol{i}\,, \\
\ddot{\boldsymbol{k}} &= -\left(\dot{\boldsymbol{k}}\right)^2 \boldsymbol{k} - \frac{2I_x}{I_z+I_x}(\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\dot{\boldsymbol{i}})\boldsymbol{i} - \\
&\quad - \frac{2I_y}{I_y+I_z}(\dot{\boldsymbol{j}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{j} + \frac{L_y}{I_z+I_x}\boldsymbol{i} - \frac{L_x}{I_y+I_z}\boldsymbol{j}\,.
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

Здесь L_x, L_y, L_z — суммы проекций моментов сил $\boldsymbol{F}_\nu$, $\nu = \overline{1,6}$:

$$
\boldsymbol{L} = \sum_{\nu=1}^{6}(x_\nu\boldsymbol{i} + y_\nu\boldsymbol{j} + z_\nu\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{F}_\nu\,.
$$

Проектируя первое из уравнений (9.2) на ось Cx, второе на ось Cy, а третье на ось Cz, получим соответственно

$$
\begin{gathered}
\ddot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{i} = -\left(\dot{\boldsymbol{i}}\right)^2, \quad \ddot{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{j} = -\left(\dot{\boldsymbol{j}}\right)^2, \\
\ddot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k} = -\left(\dot{\boldsymbol{k}}\right)^2.
\end{gathered}
\tag{9.3}
$$

Выпишем теперь проекцию второго уравнения на ось Cz, затем третьего на ось Cx, а первого — на ось Cy:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{k} &= -\frac{2I_z}{I_y+I_z}(\dot{\boldsymbol{j}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}}) + \frac{L_x}{I_y+I_z}\,, \\
\ddot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{i} &= -\frac{2I_x}{I_z+I_x}(\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\dot{\boldsymbol{i}}) + \frac{L_y}{I_z+I_x}\,, \\
\ddot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{j} &= -\frac{2I_y}{I_x+I_y}(\dot{\boldsymbol{i}}\cdot\dot{\boldsymbol{j}}) + \frac{L_z}{I_x+I_y}\,.
\end{aligned}
\tag{9.4}
$$

Легко проверить, что эти три уравнения эквивалентны динамическим уравнениям Эйлера относительно проекций p, q, r вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси Cx, Cy, Cz:

$$
\begin{aligned}
A\dot{p} - (B-C)qr &= L_x\,, \\
B\dot{q} - (C-A)rp &= L_y\,, \\
C\dot{r} - (A-B)pq &= L_z\,.
\end{aligned}
$$

Уравнения (9.4) выражают, таким образом, теорему моментов относительно центра масс. Уравнения же (9.3) вытекают из того, что орты $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ являются единичными, то есть такими, что

$$\boldsymbol{i}^2 = 1\,, \quad \boldsymbol{j}^2 = 1\,, \quad \boldsymbol{k}^2 = 1\,.$$

Дважды дифференцируя по времени эти равенства, придем к уравнениям (9.3). Эта же операция, примененная к условиям ортогональности векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} &2\dot{\boldsymbol{i}} \cdot \dot{\boldsymbol{j}} + \ddot{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{i} \cdot \ddot{\boldsymbol{j}} = 0\,, \\ &2\dot{\boldsymbol{j}} \cdot \dot{\boldsymbol{k}} + \ddot{\boldsymbol{j}} \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{j} \cdot \ddot{\boldsymbol{k}} = 0\,, \\ &2\dot{\boldsymbol{k}} \cdot \dot{\boldsymbol{i}} + \ddot{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} \cdot \ddot{\boldsymbol{i}} = 0\,. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Подставляя в эти выражения величины $\ddot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{j}$, $\ddot{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{i}$, $\ddot{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{k}$, $\ddot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{j}$, $\ddot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{i}$, $\ddot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{k}$, найденные из уравнений (9.2), получим тождества. Таким образом, система трех векторных уравнений (9.2) эквивалентна системе девяти скалярных уравнений (9.3), (9.4), (9.5).

Вернемся к основной задаче — к определению функций $u_\nu(t)$, $\nu = \overline{1,6}$, по заданным вектор-функциям $\boldsymbol{\rho}_c(t), \boldsymbol{i}(t), \boldsymbol{j}(t), \boldsymbol{k}(t)$. Напомним, что эти функции в § 8 были найдены по заданному закону движения платформы.

Из уравнения (9.1) следует, что

$$\boldsymbol{F} \equiv \sum_{\nu=1}^{6} \boldsymbol{F}_\nu = M\ddot{\boldsymbol{\rho}}_c - M\mathbf{g}\,. \tag{9.6}$$

Вектор-функция $\boldsymbol{\rho}_c(t)$ позволяет, таким образом, определить, как изменяется во времени главный вектор $\boldsymbol{F}$ системы сил $\boldsymbol{F}_\nu$, $\nu = \overline{1,6}$.

Векторное уравнение (9.6) в скалярной форме запишем в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{6} U_\nu \ell_{\nu x} = F_x(t)\,, \\ &\sum_{\nu=1}^{6} U_\nu \ell_{\nu y} = F_y(t)\,, \\ &\sum_{\nu=1}^{6} U_\nu \ell_{\nu z} = F_z(t)\,, \end{aligned} \tag{9.7}$$

где

$$U_\nu = \frac{u_\nu}{\ell_\nu}\,, \quad \nu = \overline{1,6}\,,$$

$$
\begin{cases}
F_x(t) = M(\ddot{\boldsymbol{\rho}}_c - \mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{i}(t) = \\
= M[\ddot{\xi}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{i}(t) + \ddot{\eta}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \boldsymbol{i}(t) + \\
+ \ddot{\zeta}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot \boldsymbol{i}(t) - -\mathrm{g}\boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot \boldsymbol{i}(t)] = M[\ddot{\xi}(t)\beta_{11}(t) + \\
+ \ddot{\eta}(t)\beta_{12}(t) + \ddot{\zeta}(t)\beta_{13}(t) - \mathrm{g}\beta_{13}(t)]\,, \\
F_y(t) = M[\ddot{\xi}(t)\beta_{21}(t) + \\
+ \ddot{\eta}(t)\beta_{22}(t) + \ddot{\zeta}(t)\beta_{23}(t) - \mathrm{g}\beta_{23}(t)]\,, \\
F_z(t) = M[\ddot{\xi}(t)\beta_{31}(t) + \\
+ \ddot{\eta}(t)\beta_{32}(t) + \ddot{\zeta}(t)\beta_{33}(t) - \mathrm{g}\beta_{33}(t)]\,, \\
\ell_{\nu x} = \xi(t)\beta_{11}(t) + \eta(t)\beta_{12}(t) + \zeta(t)\beta_{13}(t) + x_\nu - \\
- \xi_\nu\beta_{11}(t) - \zeta_\nu\beta_{13}(t), \\
\ell_{\nu y} = \xi(t)\beta_{21}(t) + \eta(t)\beta_{22}(t) + \zeta(t)\beta_{23}(t) + y_\nu - \\
- \xi_\nu\beta_{21}(t) - \zeta_\nu\beta_{23}(t)\,, \\
\ell_{\nu z} = \xi(t)\beta_{31}(t) + \eta(t)\beta_{32}(t) + \zeta(t)\beta_{33}(t) + z_\nu - \\
- \xi_\nu\beta_{31}(t) - \zeta_\nu\beta_{33}(t)\,, \\
\boldsymbol{\ell}_\nu = \ell_{\nu x}\boldsymbol{i} + \ell_{\nu y}\boldsymbol{j} + \ell_{\nu z}\boldsymbol{k}\,, \quad \nu = \overline{1,6}\,.
\end{cases}
\tag{9.8}
$$

Система уравнений (9.4) позволяет определить проекции L_x, L_y, L_z главного момента сил $\boldsymbol{F}_\nu$, $\nu = \overline{1,6}$,

$$
\boldsymbol{L} = \sum_{\nu=1}^{6} \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu\,, \quad \boldsymbol{r}_\nu = x_\nu\boldsymbol{i} + y_\nu\boldsymbol{j} + z_\nu\boldsymbol{k}\,,
$$

$$
\boldsymbol{F}_\nu = U_\nu\boldsymbol{\ell}_\nu\,, \quad U_\nu = \frac{u_\nu}{\ell_\nu}\,.
$$

Так как

$$
\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \\ U_\nu\ell_{\nu x} & U_\nu\ell_{\nu y} & U_\nu\ell_{\nu z} \end{vmatrix}\,,
$$

то

$$
\begin{cases}
L_x = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{6} U_\nu(y_\nu\ell_{\nu z} - z_\nu\ell_{\nu y})\,, \\
L_y = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{6} U_\nu(z_\nu\ell_{\nu x} - x_\nu\ell_{\nu z})\,, \\
L_z = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{6} U_\nu(x_\nu\ell_{\nu y} - y_\nu\ell_{\nu x})\,.
\end{cases}
\tag{9.9}
$$

Рассматривая совокупность формул (9.7), (9.9) как систему линейных алгебраических уравнений относительно U_ν, $\nu = \overline{1,6}$, найдем искомые управляющие параметры

$$u_\nu(t) = \ell_\nu(t) U_\nu(t)\,, \quad \nu = \overline{1,6}\,.$$

Таким образом, задача отыскания искомых управляющих усилий $u_\nu(t)$, $\nu = \overline{1,6}$, обеспечивающих заданное движение системы, решена.

§ 10. Решение обратной задачи динамики

Определение закона движения нагруженной платформы стенда по заданным усилиям, создаваемым гидроцилиндрами. Задача состоит в интегрировании системы дифференциальных уравнений (9.1), (9.3), (9.4), (9.5) при начальных данных

$$\begin{cases} \xi(0) = \xi^0\,, \eta(0) = \eta^0\,, \zeta(0) = \zeta^0\,, \\ \dot\xi(0) = 0\,, \dot\eta(0) = 0\,, \dot\zeta(0) = 0\,, \\ \beta_{\sigma\tau}(0) = \beta^0_{\sigma\tau}\,, \dot\beta_{\sigma\tau}(0) = 0\,, \\ \sigma, \tau = \overline{1,3}\,. \end{cases} \tag{10.1}$$

Векторное уравнение (9.1) в проекциях на орты $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ таково:

$$\begin{cases} M\ddot{\boldsymbol{\rho}}_c \cdot \boldsymbol{i} \equiv M(\ddot\xi(t)\beta_{11}(t) + \ddot\eta(t)\beta_{12}(t) + \ddot\zeta(t)\beta_{13}(t)) = \\ = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{6} \frac{u_\nu}{\ell_\nu}\ell_{\nu x} + Mg\beta_{13}(t)\,, \\ M\ddot{\boldsymbol{\rho}}_c \cdot \boldsymbol{j} \equiv M(\ddot\xi(t)\beta_{21}(t) + \ddot\eta(t)\beta_{22}(t) + \ddot\zeta(t)\beta_{23}(t)) = \\ = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{6} \frac{u_\nu}{\ell_\nu}\ell_{\nu y} + Mg\beta_{23}(t)\,, \\ M\ddot{\boldsymbol{\rho}}_c \cdot \boldsymbol{k} \equiv M(\ddot\xi(t)\beta_{31}(t) + \ddot\eta(t)\beta_{32}(t) + \ddot\zeta(t)\beta_{33}(t)) = \\ = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{6} \frac{u_\nu}{\ell_\nu}\ell_{\nu z} + Mg\beta_{33}(t)\,. \end{cases} \tag{10.2}$$

Здесь величины $\ell_{\nu x}, \ell_{\nu y}, \ell_{\nu z}$, $\ell_\nu = \sqrt{\ell_{\nu x}^2 + \ell_{\nu y}^2 + \ell_{\nu z}^2}$ $(\nu = \overline{1,6})$ выражаются через искомые функции по формулам (9.8). Дифференциальные уравнения (10.2) следует рассматривать совместно с уравнениями (9.3), (9.4), (9.5).

Отметим, что величины L_x, L_y, L_z, входящие в уравнения (9.4), как функции искомых переменных и заданных управлений u_ν, $\nu = \overline{1,6}$, задаются выражениями

$$\begin{cases} L_x = \sum\limits_{\nu=1}^{6} \dfrac{u_\nu}{\ell_\nu}(y_\nu \ell_{\nu z} - z_\nu \ell_{\nu y})\,, \\ L_y = \sum\limits_{\nu=1}^{6} \dfrac{u_\nu}{\ell_\nu}(z_\nu \ell_{\nu x} - x_\nu \ell_{\nu z})\,, \\ L_z = \sum\limits_{\nu=1}^{6} \dfrac{u_\nu}{\ell_\nu}(x_\nu \ell_{\nu y} - y_\nu \ell_{\nu x})\,. \end{cases}$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (10.2), (9.3), (9.4), (9.5) при начальных данных (10.1) позволяет по заданным управлениям $u_\nu(t)$, $\nu = \overline{1,6}$, определить вектор-функции $\boldsymbol{\rho}_c(t)$, $\boldsymbol{i}(t)$, $\boldsymbol{j}(t)$, $\boldsymbol{k}(t)$. Алгоритм определения закона движения платформы по этим найденным вектор-функциям описан в § 8.

Итак, полученные в этих двух параграфах дифференциальные уравнения позволяют решать как прямую, так и обратную задачи динамики. Для полноты исследования этих двух задач система дифференциальных уравнений в дальнейшем записывается в безразмерном виде. За единицу длины принят радиус R_b окружности, на которой расположены нижние концы гидроцилиндров, за единицу силы принята сила тяжести $M\mathrm{g}$ всей системы, вводится безразмерное время $\tau = \omega t$ ($\omega^2 = \mathrm{g}/R_b$). Однако, в последующих формулах и на графиках безразмерное время обозначается через t и для безразмерных координат и сил используются обычные буквы.

§ 11. Вертикальные колебания платформы[12]

Найдем усилия в гидроцилиндрах, обеспечивающие простейшее заданное колебательное вертикальное движение симметрично нагруженной плат-

[12] Малые вертикальные колебания нагруженной платформы обычно возникают и в том случае, когда она находится в положении равновесия, являющемся, как известно, неустойчивым. Это объясняется тем, что моторы, поддерживающие требуемые давления в гидроцилиндрах, обычно создают и малые синусоидальные отклонения давлений. Возникающие малые колебания нагруженной платформы стенда в технике называются «паразитными». Эти колебания, являющиеся одной из реальных причин выхода системы из положения неустойчивого равновесия, рассматриваются в статье: *Зегжда С. А., Петрова В. И., Юшков М. П.* Применение специальной формы дифференциальных уравнений для исследования движений нагруженной платформы Стюарта // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 1. С. 128–140.

формы по закону

$$\eta(t) = 0.2\,(\sin t)(1 - e^{-t/2})^2\,. \tag{11.1}$$

Перемещение $\eta(t)$ по вертикали, как и в § 2, представлено в таком виде для того, чтобы в начальный момент и скорость, и ускорение платформы были бы равны нулю. В противном случае в начальный момент потребовалось бы скачкообразное приложение силы. В то же время в системе быстро устанавливаются вертикальные синусоидальные колебания с амплитудой *0.2* и частотой *1*.

С помощью пакета MATHEMATICA можно в случае, когда центр масс всей системы находится над центром платформы, показать, что такое движение обеспечивается в цилиндре с помощью усилия $F(t)$, имеющего весьма громоздкое аналитическое представление (в силу симметрии задачи усилия во всех цилиндрах получились одинаковыми). Графически изменение этого усилия представлено на рис. 11.

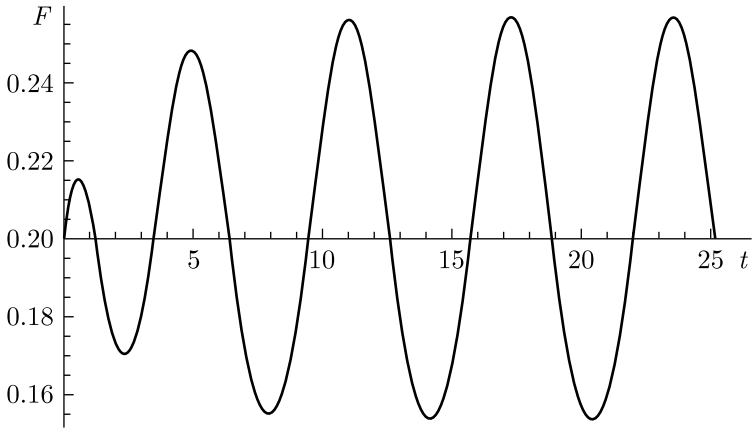

Рис. 11. График усилия в цилиндре

Если теперь решать обратную задачу, прикладывая к нагруженной платформе найденные усилия $F(t)$, то получим требуемые вертикальные колебания платформы по закону (11.1).

Перейдем к случаю малого возмущения управления $F(t)$. Обозначим через $\eta_*(t)$ перемещение платформы стенда, соответствующее малому возмущению управления $F(t)$, полученному в результате решения прямой задачи механики. Возмущение зададим в виде малой величины $0.0001\,(\sin 2t)(1 - e^{-t/2})$, то есть положим

$$F_*(t) = F(t) + 0.0001\,(\sin 2t)(1 - e^{-t/2})\,.$$

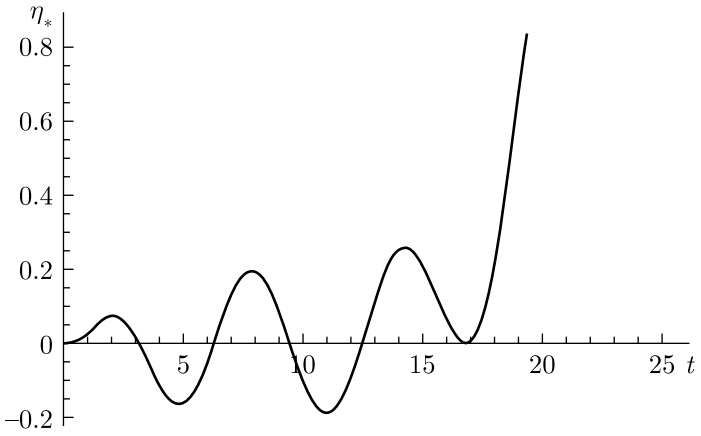

Рис. 12. Движение платформы при малом возмущении вертикальной силы

График функции $\eta_*(t)$ представлен на рис. 12. Из этого графика видно, что на начальном промежутке времени $(0 < \tau < 12)$ введенное возмущение сказывается незначительно, в то время как в дальнейшем наступает интенсивное движение платформы вверх. Отметим, что при этом, несмотря на колебательный характер силы $F(t)$, платформа движется быстро вверх без осцилляций.

Итак видим, что платформа резко начинает подниматься вверх, хотя функция $F_*(t)$ очень незначительно отличается от функции $F(t)$, обеспечивающей движение по закону (11.1). Это указывает на неустойчивость требуемых вертикальных колебаний платформы (11.1).

Специально подчеркнем, что численные результаты, полученные для вертикальных колебаний платформы стенда, полностью соответствуют движению, найденному в части I с помощью применения основных теорем динамики о движении центра масс и об изменении кинетического момента в движении относительно центра масс. Для этого достаточно обратить внимание на полное совпадение графиков на рисунках 3, 4, полученных в части I, и на рисунках 11, 12, полученных в части II данной главы.

§ 12. О неустойчивости решения обратной задачи динамики для платформы Стьюарта. Введение обратных связей

Как и в § 11, ограничимся исследованием вертикального движения платформы. При этом нижние и верхние шарниры штоков расположены в горизонтальных плоскостях. Обозначим через z переменное расстояние между

этими плоскостями. При этом углы α_k всех шести стержней к вертикали одинаковы и равны $\alpha(z)$, причем $d\alpha/dz < 0$. Все продольные усилия F_k в штоках одинаковы и равны F_c.

Уравнение вертикального движения платформы имеет вид

$$m\ddot{z} = -P + F_d\,, \qquad F_d = F_d(z) = 6F_c\cos\alpha(z)\,, \tag{12.1}$$

где m и P — масса и вес платформы соответственно, а F_d — вертикальная составляющая равнодействующей сил, приложенных к платформе со стороны штоков.

Рассмотрим сначала положение равновесия платформы, определяемое равенствами

$$z = z_0\,, \quad \alpha = \alpha_0 = \alpha(z_0)\,, \quad F_c = \frac{P}{6\cos\alpha_0}\,. \tag{12.2}$$

Введем малое возмущение $x(t)$ и рассмотрим возмущенное движение $z(t) = z_0 + x(t)$ в окрестности положения равновесия

$$m\ddot{x}(t) = -P + F_d(z_0 + x(t))\,.$$

В линейном по x приближении в силу соотношений (12.1) и (12.2) получаем

$$m\ddot{x}(t) = k\,x(t)\,, \qquad k = -6F_c\sin\alpha(z_0)\frac{d\alpha}{dz_0} > 0\,,$$

откуда следует неустойчивость положения равновесия (12.2).

Рассмотрим теперь движение платформы, определяемое равенствами

$$z = z_0(t)\,, \quad \alpha(t) = \alpha_0(z_0(t))\,, \quad F_c(t) = \frac{m\ddot{z}_0(t) + P}{6\cos\alpha(z_0(t))}\,. \tag{12.3}$$

Здесь движение платформы $z_0(t)$ задано, и усилия в штоках $F_c(t)$ определяются из уравнения (12.1) (при решении прямой задачи динамики).

Как и выше, введем малое возмущение $x(t)$ и рассмотрим возмущенное движение $z(t) = z_0(t)+x(t)$ в окрестности невозмущенного движения (12.3)

$$m(\ddot{z}_0(t) + \ddot{x}(t)) = -P + F_d(z_0(t) + x(t))\,.$$

В линейном по $x(t)$ приближении в силу соотношений (12.1) и (12.3) получаем

$$m\ddot{x}(t) = k(t)\,x(t)\,, \qquad k(t) = -6F_c(t)\sin\alpha(z_0(t))\frac{d\alpha}{dz_0}\,. \tag{12.4}$$

Если в течение всего времени движения $F_c(t) > 0$ или $P + \ddot{z}_0(t) > 0$, то $k(t) > 0$, и невозмущенное движение неустойчиво.

Действительно, пусть в начальный момент $t = 0$ будет $x(0) > 0$, $\dot{x}_0(0) \geqslant 0$. Тогда при любом t будет выполнено неравенство

$$x(t) \geqslant x(0)e^{\beta t}\,, \quad \beta > 0\,, \quad \beta^2 = \frac{\min_t k(t)}{m}\,.$$

В § 11 численно была подучена неустойчивость при постоянно действующих малых возмущениях. Здесь неустойчивость установлена при возмущении начальных условий. Из приведенного анализа следует вывод о том, что невозможно получить требуемое движение платформы, задавая усилия в гидроцилиндрах, полученные в результате решения прямой задачи динамики. Необходимо введение обратных связей, которые учитывают отклонение получающегося движения от требуемого. То же справедливо и для равновесия платформы с тремя стержнями, рассмотренного далее в части *III* данной главы. Требуемое движение при наличии обратных связей можно получить при силовом воздействии на стержни либо при кинематическом управлении, когда задаются длины стержней.

Для получения устойчивых вертикальных колебаний платформы по закону (11.1) введем, как и в части *I*, классические обратные связи, формируя силы $F_k(t)$, $k = \overline{1,6}$, создаваемые гидроцилиндрами, в виде

$$F_k(t) = F_k^p(t) + G(l_k^p(t) - l_k(t))\,, \quad k = \overline{1,6}\,.$$

Здесь $F_k^p(t)$ — программные управляющие силы, $l_k^p(t)$ — программные длины гидроцилиндров, $l_k(t)$ — измеренные фактические длины гидроцилиндров, G — коэффициент обратных связей. Аналогично части *I* путем численных экспериментов можно показать, что при определенном выборе величины G всегда можно добиться отклонения истинного движения от программного движения (11.1) с заданной точностью. Более того, при достаточно большой величине коэффициента обратных связей G можно осуществить программное движение (11.1) даже при $F_k^p(t) \equiv 0$.

III. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛАТФОРМЫ СТЮАРТА[13]

§ 13. Кинематика трехстержневой платформы Стюарта

Введение. Ранее были рассмотрены нагруженные платформы Стюарта, движение которых управлялось шестью стержнями переменной длины. Наряду с такими платформами часто используются и платформы, опирающиеся на три стержня. Подобные конструкции бывают удобны, когда достаточно управления лишь по трем координатам, например при проектировании механизма позиционирования активных поверхностей зеркал радиотелескопов. В этом случае достаточно добиться точного углового ориентирования зеркал, а положение их центра масс не имеет значения[14].

В этом разделе будем изучать статику нагруженной платформы Стюарта, опираясь на аппарат уравнений Лагранжа второго рода. Далее будет проведена линеаризация уравнений Лагранжа второго рода, описывающих поведение системы вблизи положения равновесия платформы, и выведены параметры управляющих сил, которые обеспечивают устойчивость положения равновесия. Вводимые далее обозначения могут отличаться от принятых ранее.

Описание кинематики. Рассмотрим кинематику платформы, опирающейся на три стержня регулируемой длины.

Подвижная платформа моделируется плоской пластиной в форме правильного треугольника. Движение платформы управляется тремя стержнями A_iB_i $(i = \overline{1,3})$, соединенными сферическими шарнирами с подвижной платформой в точках B_i и цилиндрическими шарнирами с основанием в точках A_i (см. рис. 13). Положение и ориентация подвижной платформы регулируется за счет целенаправленного изменения длин стержней, на которые она опирается, и соответствующего изменения углов их наклона к основанию. Точки B_i $(i = \overline{1,3})$ образуют правильный треугольник, вокруг которого может быть описана окружность радиуса R_b, точки A_i $(i = \overline{1,3})$ в основании также образуют правильный треугольник, вписанный в окруж-

[13]При написании данной части главы III использовано содержание статей: *Александров В. В., Локшин Б. Я., Гомес Е. Л., Салазар И. Х.* Стабилизация управляемой платформы при наличии ветровых возмущений // Фундамент. и прикл. матем. 2005. Том 11. Вып. 7. С. 97–115; *Зуев С. М.* Стабилизация положения равновесия платформы Стюарта с тремя степенями свободы // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2013. Сер. 1. Вып. 4. С. 84–92.

[14]Первые телескопы такого типа начали работать на Гавайских островах и строятся в настоящее время в Мексике.

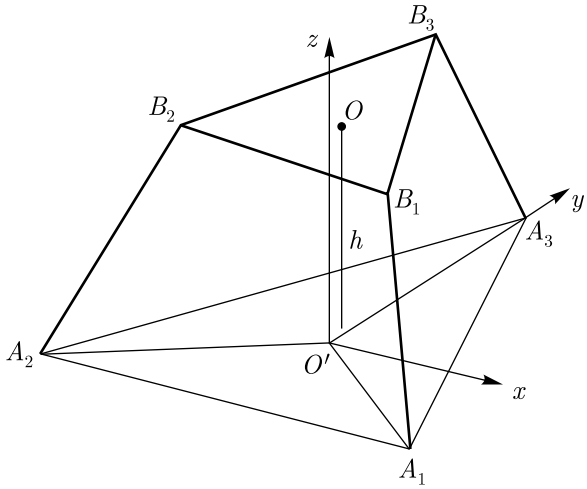

Рис. 13. Общая схема платформы

ность с радиусом R_a и имеющий центр в точке O'. Ось $\boldsymbol{a}_i$ цилиндрического шарнира в каждой точке A_i лежит в плоскости основания и $\boldsymbol{a}_i \perp \overrightarrow{O'A_i}$.

Введем неподвижную декартовую систему координат $O'xyz$ и систему координат $O\xi\eta\zeta$, скрепленную с подвижной платформой. При этом точки A_i в неподвижной системе будут иметь координаты

$$A_1 = \left(\frac{\sqrt{3}R_a}{2}, -\frac{R_a}{2}, 0\right), \quad A_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}R_a}{2}, -\frac{R_a}{2}, 0\right),$$
$$A_3 = (0,\, R_a,\, 0)\,.$$

Координаты точки B_i в подвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$ имеют вид

$$B_1 = \left(\frac{\sqrt{3}R_b}{2}, -\frac{R_b}{2}, 0\right), \quad B_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}R_b}{2}, -\frac{R_b}{2}, 0\right),$$
$$B_3 = (0,\, R_b,\, 0)\,.$$

Радиус-векторы точек A_i и B_i в неподвижной системе координат будем рассматривать как столбцы

$$\mathbf{r}_a^i = \begin{pmatrix} x_a^i \\ y_a^i \\ z_a^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_b^i = \begin{pmatrix} x_b^i \\ y_b^i \\ z_b^i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,3}\,.$$

Если точка определяется вектором $\boldsymbol{\rho}_\nu$ в подвижной системе координат, то в неподвижной она будет задаваться вектором

$$\mathbf{r}^\nu = \mathbf{r}^0 + K\boldsymbol{\rho}_\nu\,. \tag{13.1}$$

Здесь $\mathbf{r}^0$ есть радиус-вектор точки O — начала подвижной системы координат, K — матрица поворота подвижной системы координат относительно неподвижной:

$$K^{-1} = K^T\,, \quad \det K = 1\,,$$

$$K = \begin{pmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 \\ c_1s_3 + c_3s_2s_1 & s_3c_1 - s_2s_3s_1 & -c_2s_1 \\ s_1s_3 - c_1s_2c_3 & c_1s_2s_3 + c_1s_3 & c_2c_1 \end{pmatrix}\,, \tag{13.2}$$

$$c_i = \cos\psi_i\,, \quad s_i = \sin\psi_i\,, \quad i = \overline{1,3}\,.$$

С помощью формулы (13.1) можно найти радиус-векторы $\mathbf{r}_b^i$ точек B_i крепления каждого стержня к верхней платформы. Тогда длины стержней вычисляются по формулам

$$l_i = \sqrt{\left(r_b^i - r_a^i\right)^T\,\left(r_b^i - r_a^i\right)}\,, \quad i = \overline{1,3}\,.$$

Для удобства последующих записей введем в рассмотрение единичные векторы $\mathbf{e}_i$, направленные вдоль каждого из стержней от A_i к B_i:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{r}_b^i - \mathbf{r}_a^i}{l_i}\,. \tag{13.3}$$

Положение платформы однозначно задается вектором $\mathbf{q}^T = (x_0, y_0, z_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ с шестью обобщенными координатами, описывающими положение и ориентацию платформы относительно неподвижного основания, причем x_0, y_0, z_0 — декартовы координаты точки O в неподвижной системе координат $O'xyz$, а ψ_1, ψ_2, ψ_3 — соответственно углы крена, тангажа и рыскания.

§ 14. Уравнения динамики платформы с тремя стержнями

Пусть центр масс находится в центре треугольника, стержни предполагаются невесомыми. Выберем $\mathbf{q}^T = (q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6)$ в качестве обобщенных координат и запишем уравнения Лагранжа второго рода.

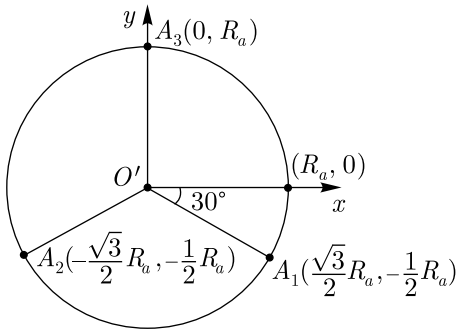

Рис. 14. Основание платформы

Если V_0 — скорость точки O, то

$$V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i^2 \,.$$

Обозначим через J^i, $i = \overline{1,3}$, главные центральные моменты инерции нагруженной подвижной платформы. Пусть ω_i — составляющие вектора мгновенной угловой скорости. Тогда

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \cos\psi_2 \cos\psi_1 & \sin\psi_1 & 0 \\ -\cos\psi_2 \sin\psi_1 & \sin\psi_1 & 0 \\ \sin\psi_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \end{pmatrix} .$$

Теперь выражение для кинетической энергии можно представить в виде

$$T(\mathbf{q}) = \frac{MV_0^2(\mathbf{q})}{2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} J^i \omega_i^2(\mathbf{q}) \,. \tag{14.1}$$

Заметим, что для задания положения платформы число координат вектора $\mathbf{q}$ избыточно. В точках B_i штоки соединяются с нижней платформой с помощью цилиндрических шарниров таким образом, что всегда проекция на плоскость $O'xy$ каждой из точек A_i лежит на прямой $O'B_i$ (см. рис. 14). Чтобы выявить зависимость между координатами, введем уравнения связей, соответствующие кинематике платформы:

$$y_b^1 = -\frac{x_b^1}{\sqrt{3}} \,, \quad y_b^2 = \frac{x_b^2}{\sqrt{3}} \,, \quad x_b^3 = 0 \,.$$

Возьмем в качестве независимых координат координату q_3 центра подвижной платформы по оси $O'z$ и углы поворота q_4, q_5 относительно осей $O'x$ и $O'y$. Остальные координаты выразим через независимые:

$$\begin{cases} q_1 &= -\dfrac{R_b \cos q_5 \sin q_4 \sin q_5}{\cos q_4 \cos q_5 + 1}\,, \\ q_2 &= \dfrac{R_b}{2}\dfrac{\sin^2 q_5 - \cos^2 q_5 \sin^2 q_4}{\cos q_4 \cos q_5 + 1}\,, \\ q_6 &= -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin q_4 \sin q_5}{\sin q_4 + \sin q_5}\right). \end{cases} \tag{14.2}$$

Здесь $-\pi/2 < q_4 < \pi/2$, $-\pi/2 < q_5 < \pi/2$.

Переобозначим выбранные независимые координаты $p_1 \equiv q_3$, $p_2 \equiv q_4$, $p_3 \equiv q_5$ и возьмем их в качестве новых обобщенных координат, однозначно задающих положение платформы. Тогда система уравнений Лагранжа второго рода имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_i} = Q_i\,, \quad i = \overline{1,3}\,, \tag{14.3}$$

где Q_i — обобщенные силы, соответствующие координатам p_i $(i = \overline{1,3})$.

Уравнения (14.2) позволяют выразить вектор $\mathbf{q}$ через вектор $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p})\,. \tag{14.4}$$

Подставив (14.4) в (14.1), найдем выражение для кинетической энергии через обобщенные координаты $\mathbf{p}$ и обобщенные скорости $\dot{\mathbf{p}}$.

Для составления выражений обобщенных сил Q_i выпишем силы и радиус-векторы точек их приложения в проекциях на оси неподвижной системы координат. На платформу действуют сила тяжести $\mathbf{F}_O$, приложенная к точке O с радиус-вектором $\mathbf{r}_b^o$ и направленная вдоль оси $O'z$, а также три силы $\mathbf{F}_i$ $(i = \overline{1,3})$, приложенные к точкам B_i $(i = \overline{1,3})$ с радиус-векторами $\mathbf{r}_b^i$ и направленные вдоль векторов $\mathbf{e}_i$. С помощью формул (14.4) и (13.3) мы можем найти выражения для $\mathbf{e}_i$ через обобщенные координаты $\mathbf{p}$. В результате получим

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{p}) = F_i \mathbf{e}_i(\mathbf{p})\,, \quad \mathbf{F}_O = (0, 0, -M\mathrm{g})^T\,. \tag{14.5}$$

Составим выражение элементарной работы:

$$\delta A = \mathbf{F}_O(\mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{r}^o(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{3} \mathbf{F}_i(\mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{r}_b^i(\mathbf{p}) =$$

$$= -M\mathrm{g}\delta p_1 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mathbf{F}_i(\mathbf{p}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_b^i(\mathbf{p})}{\partial p_j}\delta p_j\,.$$

Обозначим через F_x^j, F_y^j, F_z^j компоненты вектора $\mathbf{F}_j$ и найдем обобщенные силы, равные коэффициентам при независимых вариациях δp_i:

$$Q_i = \sum_{j=0}^{3} \left(F_x^j \frac{\partial x^j}{\partial p_i} + F_y^j \frac{\partial y^j}{\partial p_i} + F_z^j \frac{\partial z^j}{\partial p_i} \right) . \tag{14.6}$$

Напомним, что индекс $j = 0$ используется для обозначения координат центра подвижной платформы и силы тяжести. Заметим, что с помощью формул (14.5) проекции F_x^i, F_y^i, F_z^i выражаются через обобщенные координаты p_i и внешние управляющие силы F_i, $i = \overline{1,3}$, которые могут быть заданы как функции времени или функции обобщенных координат p_i, или как каждая функция только «своей» длины l_i, которая также в конечном счете зависит от обобщенных координат.

Подставляя выражения (14.6) в уравнения Лагранжа (14.3), получим систему дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат.

Наоборот, при заданном программном движении, то есть при задании $p_i = p_i(t)$ как функций от времени, из (14.3) можем найти управляющие силы F_i $(i = \overline{1,3})$ тоже как функции времени.

§ 15. Стабилизация равновесия горизонтального положения платформы

Пусть в системе реализуется стационарный режим

$$p_1 = h, \quad p_2 = p_3 = 0 . \tag{15.1}$$

Из уравнений Лагранжа (14.3) определим стационарные значения сил F_i^*, обеспечивающих это состояние равновесия:

$$F_i^* = \frac{1}{3p} Mg\sqrt{(R_a - R_b)^2 + h^2} , \quad i = \overline{1,3} .$$

Для исследования поведения системы в окрестности положения (15.1) введем малые приращения координат, а также дополнительные малые управляющие силы ΔF_i:

$$\begin{gathered} p_1 = h + \Delta p_1 , \\ p_2 = \Delta p_2 , \\ p_3 = \Delta p_3, \\ F_i = F_i^* + \Delta F_i , \quad i = \overline{1,3} . \end{gathered}$$

Введем безразмерные управляющие силы:

$$u_i = \frac{\Delta F_i}{F_i^*}\,, \quad i = \overline{1,3}\,.$$

Тогда из уравнений Лагранжа (14.3) получим уравнения первого приближения, которые запишем в матричном виде:

$$\ddot{\mathbf{p}} = H\mathbf{p} + G\mathbf{u}\,. \tag{15.2}$$

Матрицы H и G — постоянные матрицы размера 3×3, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$.

Если положить в уравнениях (15.2) $u_i = 0$ для $i = \overline{1,3}$, то получим систему

$$\ddot{\mathbf{p}} = H\mathbf{p}\,,$$

для которой можно показать, что ее решение будет неустойчиво. Для этого достаточно записать матрицу H:

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} \end{pmatrix}\,,$$

где

$$H_{11} = \frac{\mathrm{g}s^2}{h(s^2+h^2)}\,, \qquad H_{22} = \frac{M\mathrm{g}R_b(s^2R_a + h^2(R_a - R_b))}{2hJ_1(s^2+h^2)}\,,$$
$$H_{33} = \frac{M\mathrm{g}R_b(s^2R_a + h^2(R_a - R_b))}{2hJ_2(s^2+h^2)}\,, \qquad s^2 = (R_a - R_b)^2\,.$$

Из вида матрицы H следует, что колебания по обобщенным координатам «развязываются», и тривиальное решение экспоненциально неустойчиво. Это означает, что для обеспечения реализации стационарного положения (15.1) платформы необходимо дополнительное управляющее воздействие.

Запишем систему дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + B\mathbf{u}, \\ z = (p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, p_3, \dot{p}_3)^T, \end{gathered} \tag{15.3}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$A_{21} = \frac{\mathrm{g}s^2}{h(s^2+h^2)}\,, \qquad A_{43} = \frac{M\mathrm{g}R_b(s^2R_a + h^2(R_a - R_b))}{2hJ_1(s^2+h^2)}\,,$$

$$A_{55} = \frac{M\mathrm{g}R_b(s^2R_a + h^2(R_a - R_b))}{2hJ_2(s^2+h^2)}\,,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathrm{g}}{3} & \frac{\mathrm{g}}{3} & \frac{\mathrm{g}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M\mathrm{g}R_b}{6J_1} & -\frac{M\mathrm{g}R_b}{6J_1} & -\frac{M\mathrm{g}R_b}{3J_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M\mathrm{g}R_b}{2\sqrt{(3)}J_2} & \frac{M\mathrm{g}R_b}{2\sqrt{(3)}J_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Управление будем строить в виде линейных обратных связей:

$$\mathbf{u} = K\mathbf{z}\,, \tag{15.4}$$

где $K = |k_{ij}|_{(3,6)}$ — постоянная матрица, подлежащая определению. Будем выбирать коэффициенты матрицы обратной связи таким образом, чтобы у нас система разбилась на три независимых подсистемы, каждую из которых исследуем на устойчивость. Подставляя (15.4) в (15.3), получим замкнутую систему

$$\dot{\mathbf{z}} = (A + BK)\mathbf{z} + C\mathbf{z}\,, \tag{15.5}$$

где матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} & c_{1,6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & c_{2,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} & c_{3,6} \end{pmatrix}.$$

Разобъем систему на три независимые системы, приравняв нулю следующие коэффициенты c_{ij} (чтобы в результате матрица C стала блочно-диагональной):

$$\begin{cases} c_{1,3} = c_{1,4} = c_{1,5} = c_{1,6} = 0\,, \\ c_{2,1} = c_{2,2} = c_{2,5} = c_{2,6} = 0\,, \\ c_{3,1} = c_{3,2} = c_{3,3} = c_{3,4} = 0\,, \end{cases} \tag{15.6}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь все матрицы C_k, $k = \overline{1,3}$, имеют размерность 2×2.

Рассмотрим условия (15.6) как систему 12 алгебраических уравнений относительно 18 неизвестных $k_{i,j}$. Возьмем в качестве независимых шести коэффициентов $k_{1,i}$, $i = \overline{1,6}$; остальные коэффициенты матрицы K выразим через них с помощью системы (15.6).

Таким образом, система дифференциальных уравнений (15.5) расщепляется на три подсистемы. Рассмотрим их характеристические уравнения

$$\det(C_k - E\lambda) = 0\,, \quad k = \overline{1,3}\,. \tag{15.7}$$

Для устойчивости решения необходимо и достаточно[15], чтобы действительные части корней характеристических уравнений были бы отрицательны, а для этого нужно, чтобы все коэффициенты для каждого из получившихся характеристических уравнений были бы одного знака, так как все уравнения являются уравнениями второй степени.

Характеристические уравнения имеют вид

$$\lambda^2 + d_{1i}\lambda + d_{2i} = 0\,, \quad i = \overline{1,3}\,,$$

следовательно, для устойчивости требуется положительность всех коэффициентов d_{1i} и d_{2i}, $i = \overline{1,3}$.

В результате мы получаем следующие ограничения на коэффициенты $k_{1,i}$, обеспечивающие асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (15.5):

$$\begin{cases} k_{1,1} < -\dfrac{s^2}{h(s^2+h^2)}\,, \\ k_{1,2} < 0\,, \\ k_{1,3} > \dfrac{s^2R_a + h^2(R_a - R_b)}{2h(s^2+h^2)}\,, \\ k_{1,4} > 0\,, \\ k_{1,5} > \dfrac{\sqrt{3}(s^2R_a + h^2(R_a - R_b))}{2h(s^2+h^2)}\,, \\ k_{1,6} > 0\,. \end{cases} \tag{15.8}$$

Таким образом, найдены параметры уравнения с обратной связью, обеспечивающие асимптотическую устойчивость в случае малых отклонений от стационарного положения.

[15] См., например, монографию: *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука. 1976. 320 с.

§ 16. Числовой пример

Зададим параметры платформы:

$$M = 200\,(\text{кг})\,, \quad R_a = 3\,(\text{м})\,, \quad R_b = 2\,(\text{м})\,, \quad h = 2\,(\text{м})\,.$$

Тогда

$$J_x = J_y = \frac{MR_b^2}{4} = 200\,(\text{кг}\,\text{м}^2)\,, \quad J_z = \frac{MR_b^2}{2} = 400\,(\text{кг}\,\text{м}^2)\,,$$

$$F_i^* = 731.194\,(\text{Н})\,,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.867 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.867 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.27 & 3.27 & 3.27 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3.27 & -3.27 & -6.54 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5.664 & 5.664 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно полученным ограничениям (15.8) будем иметь следующие требования для коэффициентов матрицы обратных связей:

$$k_{1,1} < -0.1\,, \quad k_{1,2} < 0\,, \quad k_{1,3} > 0.35\,,$$
$$k_{1,4} > 0\,, \quad k_{1,5} > 0.606\,, \quad k_{1,6} > 0\,.$$

Пусть

$$k_{1,1} = -1\,, \quad k_{1,2} = -1\,, \quad k_{1,3} = 1\,, \quad k_{1,4} = 1\,, \quad k_{1,5} = 1\,, \quad k_{1,6} = 1\,.$$

Тогда характеристические уравнения (15.7) будут иметь корни с отрицательными действительными частями. Для первого уравнения

$$\lambda^2 + 3\lambda + 0.826 = 0\,,$$

отвечающего за колебания центра масс, корни будут равны (-0.307, -2.69). Для второго и третьего уравнений

$$\lambda^2 + 6\lambda + 1.19 = 0\,,$$

$$\lambda^2 + 3.464\lambda + 0.416 = 0\,,$$

отвечающих за колебания платформы около ее центра масс, корни будут равны $(-0.205,\ -5.79)$ и $(-0.125,\ -3.34)$ соответственно.

Таким образом, были вычислены параметры обратной связи, при которой горизонтальное положение равновесия платформы будет устойчивым. Заметим, что выбранные коэффициенты матрицы обратных связей являются лишь одним из возможных наборов коэффициентов, обеспечивающих устойчивость.

Глава IV
КОЛЕБАНИЯ И АВТОБАЛАНСИРОВКА РОТОРНЫХ СИСТЕМ

Авторы: *В. Г. Быков, А. С. Ковáчев, П. Е. Товстик*

В данной главе рассматриваются простейшие модели роторных систем с конечным числом степеней свободы. Изучаются различные типы колебаний роторов, обусловленные их неуравновешенностью, неравножесткостью упругих характеристик вала или опор, а также влиянием сил внутреннего трения и конструкционного демпфирования. Исследуются вопросы балансировки роторов, оснащенных пассивными шаровыми автобалансировочными устройствами.

§ 1. Вынужденные и самовозбуждающиеся колебания ротора с изотропным вязко-упругим валом[1]

Основные понятия. Ротором принято называть вращающийся элемент механизма или машины, удерживаемый в опорных подшипниках качения или скольжения. Механическую модель ротора обычно представляют в виде массивного твердого тела, закрепленного на упругом или жестком вале, вращающемся в жестких или упруго закрепленных опорных подшипниках. Прямую, соединяющую центры подшипников, называют *осью вращения* ротора. Ротор называют *уравновешенным*, если одна из его главных центральных осей инерции (далее для краткости мы будем называть ее *полярной осью*) совпадает с осью вращения. Уравновешенный ротор с изотропными (то есть одинаковыми по всем направлениям) вязко-упругими характеристиками вала и опор не испытывает при вращении переменных инерционных нагрузок, вызывающих изгиб вала или деформацию упругих опор.

Если полярная ось ротора не совпадает с осью вращения, то различают три основных типа неуравновешенности:

1) *статическая неуравновешенность* имеет место в случае, когда полярная ось ротора параллельна оси вращения (рис. 1,*а*);

2) *моментная неуравновешенность* возникает, если полярная ось пересекает ось вращения в центре тяжести ротора G (рис. 1,*б*);

[1]Параграф содержит материалы, частично опубликованные в статье: *Быков В. Г., Товстик П. Е.* Синхронные прецессии и автоколебания статически неуравновешенного ротора при ограниченном возбуждении // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 572–582.

3) *динамическая неуравновешенность* подразумевает случай, когда полярная ось пересекает ось вращения не в центре тяжести ротора или перекрещивается с ней (рис. 1,*в*).

Мерой неуравновешенности точечной массы служит *вектор дисбаланса*, направленный вдоль *эксцентриситета* — радиус-вектора этой массы относительно оси ротора. Величина вектора дисбаланса равна произведению неуравновешенной массы на величину эксцентриситета. Общий дисбаланс ротора приводят к двум векторам: главному вектору $\mathbf{D}$ и главному моменту $\mathbf{M}_D$ дисбалансов независимо от причин, вызвавших смещение s центра масс G с оси вращения.

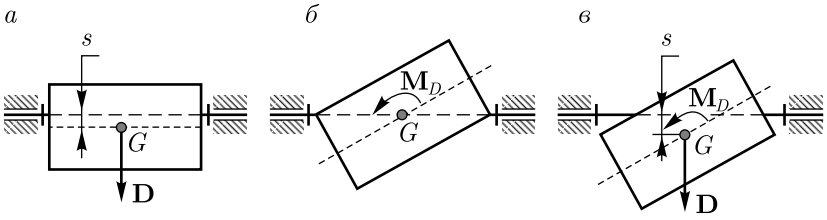

Рис. 1. Типы неуравновешенности роторов

Неуравновешенность ротора является причиной появления инерционных сил и моментов, вызывающих его вынужденные поперечные колебания, что, в свою очередь, может приводить к повышенным нагрузкам на подшипники и опасным вибрациям роторной машины. На практике конструкционную неуравновешенность ротора устраняют путем балансировки, закрепляя в определенных местах корректирующие массы. Однако при эксплуатации некоторых типов быстроходных роторных машин (например, центрифуг, сепараторов и т. п.) в ходе выполняемой ими технологической операции могут возникать режимные изменения дисбаланса, которые невозможно устранить точечной балансировкой ротора. В этих случаях наиболее перспективным, а иногда и единственно возможным способом устранения дисбаланса является применение автобалансировочных устройств различного типа[2]. Тем не менее, даже у полностью уравновешенного ротора в ряде случаев возникают самовозбуждающиеся вибрации, обусловленные потерей устойчивости основного режима вращения. Причины их появления могут быть связаны с параметрическими возбуждениями вследствие неравножесткости упругого вала или упругих опор,

[2] *Гусаров А. А.* Автобалансирующие устройства прямого действия. М.: Наука, 2002. 120 с.

а также с влиянием сил внутреннего трения в вале и конструкционного демпфирования между отдельными элементами роторной системы.

Модель ротора Джеффкотта. Уравнения движения в неподвижной, вращающейся и полярной системах координат. Для исследования динамики и устойчивости роторных систем часто используют простейшую механическую модель ротора в виде массивного жесткого диска, закрепленного посередине невесомого гибкого вала. В рамках такой модели, которую в литературе принято называть ротором Джеффкотта[3], исследуют только плоское движение диска и пренебрегают влиянием гироскопических сил и моментов.

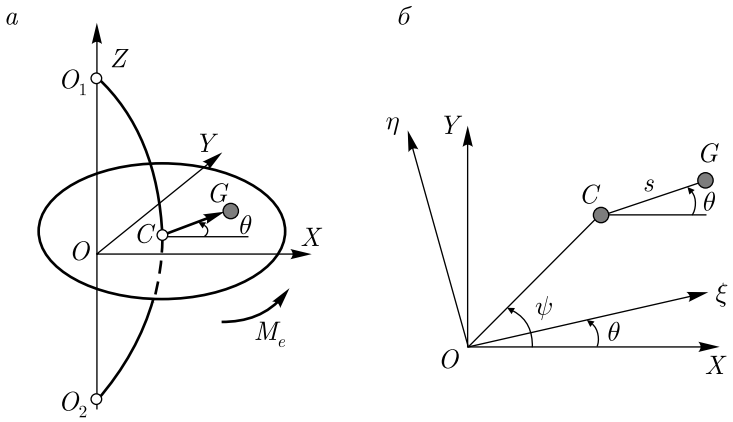

Рис. 2. Модель ротора Джеффкотта

Рассмотрим модель ротора Джеффкотта, закрепленного в вертикальных шарнирных опорах, как показано на рис. 2,*а*. Будем считать, что движение ротора происходит под действием приложенного к диску внешнего вращающего момента M_e. Предполагая, что центр масс диска G не совпадает с точкой C крепления диска к валу, обозначим через $s = |\overrightarrow{CG}|$ величину вектора статического эксцентриситета ротора. Введем неподвижную систему координат $OXYZ$ следующим образом: ось Z направим вертикально вверх вдоль прямой, соединяющей центры опор O_1 и O_2, а оси X и Y расположим в горизонтальной плоскости, проходящей через точки C и G (плоскости статического эксцентриситета). Угол поворота ротора θ зададим как угол между осью OX и вектором эксцентриситета $\overrightarrow{CG}$. В плос-

[3] *Genta G.* Dynamics of Rotating Systems. Springer. 2005. 658 p.

кости статического эксцентриситета дополнительно введем вращающуюся систему координат $O\xi\eta$, как показано на рис. 2,*б*.

Описанная модель ротора имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем абсолютные координаты x, y точки C и угол поворота ротора θ. Выражая координаты центра масс диска через обобщенные, запишем выражение для кинетической энергии ротора:

$$T = \frac{1}{2}m\big((\dot{x} - s\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{y} + s\dot{\theta}\cos\theta)^2\big) + \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2\,, \tag{1.1}$$

где m — масса диска, а J_G — его момент инерции относительно перпендикулярной оси, проходящей через точку G.

Предположим, что вал ротора изотропен, то есть коэффициент упругости вала k одинаков для всех направлений, перпендикулярных его оси. Тогда выражение для потенциальной энергии упругого вала имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)\,. \tag{1.2}$$

Далее будем полагать, что на ротор действуют силы сопротивления четырех типов: 1) силы трения со стороны неподвижной части роторной машины (трение в подшипниках, неподвижные демпферы); 2) внешние силы сопротивления поперечным движениям вала; 3) силы внутреннего трения в вале, обусловленные его деформацией при изгибе; 4) силы конструкционного демпфирования между отдельными элементами роторной системы. Силы сопротивления первого и второго типа, рассматриваемые в неподвижной системе координат, относят к *неротационному демпфированию*, а силы сопротивления третьего и четвертого типа, рассматриваемые во вращающейся системе координат, — к *ротационному демпфированию*. Предположим для простоты, что неротационное и ротационное демпфирования имеют вязкий характер, то есть силы сопротивления линейно зависят от абсолютных или относительных скоростей. Тогда мы можем задать их посредством диссипативной функции Рэлея R, рассматривая ее в виде суммы двух компонент R_n и R_r, представляющих неротационное и ротационное демпфирования

$$R = R_n + R_r\,, \quad R_n = \frac{1}{2}\,c_n(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\,c_\theta\dot{\theta}^2\,, \quad R_r = \frac{1}{2}\,c_r(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)\,. \tag{1.3}$$

Здесь c_n — коэффициент демпфирования, отвечающий силам внешнего сопротивления поперечному движению вала, c_θ — коэффициент демпфирования, отвечающий силам внешнего сопротивления вращательному движению, c_r — коэффициент ротационного демпфирования, ξ и η — координаты точки C во вращающейся системе координат. Учитывая соотношения

между неподвижными и вращающимися координатами

$$\xi = x\cos\theta + y\sin\theta\,, \quad \eta = -x\sin\theta + y\cos\theta\,, \tag{1.4}$$

ротационную компоненту функции Рэлея можно представить в виде

$$R_r = \frac{1}{2}\,c_r((\dot{x}+\dot{\theta}y)^2 + (\dot{y}-\dot{\theta}x)^2)\,. \tag{1.5}$$

Для нахождения обобщенных сил запишем выражение для элементарной работы внешних сил:

$$\delta A = Q_x\delta x + Q_y\delta y + Q_\theta\delta\theta = M_e\delta\theta\,,$$

откуда следует

$$Q_x = Q_y = 0\,, \qquad Q_\theta = M_e\,. \tag{1.6}$$

С учетом выражений (1.1)–(1.6) уравнения Лагранжа второго рода, описывающие динамику представленной модели ротора в неподвижной системе координат, имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (c_n + c_r)\dot{x} + c_r\dot{\theta}y + kx = ms(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta)\,, \\ m\ddot{y} + (c_n + c_r)\dot{y} - c_r\dot{\theta}x + ky = ms(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta)\,, \\ J_C\ddot{\theta} + c_\theta\dot{\theta} + c_r(\dot{x}y - x\dot{y} + (x^2+y^2)\dot{\theta}) = M_e + ms(\ddot{x}\sin\theta - \ddot{y}\cos\theta)\,, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $J_C = J_G + ms^2 = mr^2$ (r — радиус инерции диска).

Чтобы уменьшить число параметров, представим систему уравнений (1.7) в безразмерном виде. Для этого перейдем к безразмерным координатам и времени

$$\bar{x} = \frac{x}{r}, \quad \bar{y} = \frac{y}{r}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\Omega},$$

где $\Omega = \sqrt{k/m}$ — собственная частота поперечных колебаний вала. В результате получим

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} + (\delta_n + \delta_r)\dot{\bar{x}} + \delta_r\dot{\theta}\bar{y} + \bar{x} = \varepsilon(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta)\,, \\ \ddot{\bar{y}} + (\delta_n + \delta_r)\dot{\bar{y}} - \delta_r\dot{\theta}\bar{x} + \bar{y} = \varepsilon(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta)\,, \\ \ddot{\theta} + \delta_\theta\dot{\theta} + \delta_r(\dot{\bar{x}}\bar{y} - \bar{x}\dot{\bar{y}} + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\dot{\theta}) = \mu + \varepsilon(\ddot{\bar{x}}\sin\theta - \ddot{\bar{y}}\cos\theta)\,, \end{cases} \tag{1.8}$$

где

$$\delta_n = \frac{c_n}{m\Omega}\,, \quad \delta_r = \frac{c_r}{m\Omega}\,, \quad \delta_\theta = \frac{c_\theta}{mr^2\Omega}\,, \quad \mu = \frac{M_e}{mr^2\Omega^2}\,, \quad \varepsilon = \frac{s}{r}\,.$$

В системе (1.8) точки над переменными означают дифференцирование по безразмерному времени $\bar{t}$, а безразмерные параметры имеют следующий смысл: δ_n, δ_r, δ_θ характеризуют вязкое демпфирование, μ — внешний вращающий момент, ε — статический эксцентриситет. Далее для простоты черту над безразмерными переменными писать не будем.

Для исследования прецессионных движений ротора удобно использовать уравнения во вращающейся системе координат $O\xi\eta$, которые можно получить, подставив в уравнения (1.8) соотношения между неподвижными и вращающимися безразмерными координатами

$$x = \xi\cos\theta - \eta\sin\theta, \quad y = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta\,. \tag{1.9}$$

Складывая и вычитая почленно первые два уравнения полученной системы, после элементарных преобразований будем иметь

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + (\delta_n + \delta_r)\dot{\xi} + (1-\nu^2)\xi - 2\nu\dot{\eta} - (\dot{\nu} + \delta_n\nu)\eta = \varepsilon\nu^2\,, \\ \ddot{\eta} + (\delta_n + \delta_r)\dot{\eta} + (1-\nu^2)\eta + 2\nu\dot{\xi} + (\dot{\nu} + \delta_n\nu)\xi = -\varepsilon\dot{\nu}\,, \\ \dot{\nu} + \delta_\theta\nu + \delta_r(\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi) = \mu - \varepsilon(\ddot{\eta} + 2\nu\dot{\xi} + \xi\dot{\nu} - \eta\nu^2)\,, \end{cases} \tag{1.10}$$

где $\nu = \dot{\theta}$ — безразмерная угловая скорость вала.

Наряду с вращающейся системой координат мы также будем использовать полярные координаты: безразмерную амплитуду $a = |\overrightarrow{OC}|/r$ прецессионного движения ротора и полный фазовый угол ψ радиус-вектора $\overrightarrow{OC}$ в неподвижной системе координат (см. рис. 2,*б*). Подставим в систему (1.8) $x = a\cos\psi$, $y = a\sin\psi$ и проведем следующие преобразования: 1) умножим первое уравнение на $\cos\psi$ и сложим почленно со вторым, умноженным на $\sin\psi$; 2) умножим первое уравнение на $\sin\psi$ и вычтем почленно второе уравнение, умноженное на $\cos\psi$. В результате получим

$$\begin{cases} \ddot{a} + (\delta_n + \delta_r)\dot{a} + (1-\dot{\psi}^2)a = \varepsilon(\dot{\theta}^2\cos(\theta-\psi) + \ddot{\theta}\sin(\theta-\psi))\,, \\ (\ddot{\psi} + \delta_n\dot{\psi} - \delta_r(\dot{\theta} - \dot{\psi}))a + 2\dot{a}\dot{\psi} = \varepsilon(\dot{\theta}^2\sin(\theta-\psi) - \ddot{\theta}\cos(\theta-\psi))\,, \\ \ddot{\theta} + \delta_\theta\dot{\theta} + \delta_r a^2(\dot{\theta} - \dot{\psi}) = \mu - \varepsilon((\ddot{a} - a\dot{\psi}^2)\sin(\theta-\psi) + (a\ddot{\psi} + 2\dot{a}\dot{\psi})\cos(\theta-\psi))\,. \end{cases} \tag{1.11}$$

Порядок системы (1.11) можно понизить, если в качестве переменных рассматривать угол сдвига фаз $\phi = \theta - \psi$ и безразмерные угловые скорости прецессионного движения $\dot{\psi} = \omega$ и собственного вращения $\dot{\theta} = \nu$:

$$\begin{cases} \ddot{a} + (\delta_n + \delta_r)\dot{a} + (1-\omega^2)a = \varepsilon(\nu^2\cos\phi + \dot{\nu}\sin\phi)\,, \\ (\dot{\omega} + \delta_n\omega - \delta_r\dot{\phi})a + 2\dot{a}\omega = \varepsilon(\nu^2\sin\phi - \dot{\nu}\cos\phi)\,, \\ \dot{\nu} + \delta_\theta\nu + \delta_r\dot{\phi}a^2 = \mu - \varepsilon((\ddot{a} - a\omega^2)\sin\phi + (a\dot{\omega} + 2\dot{a}\omega)\cos\phi)\,, \\ \dot{\phi} = \nu - \omega\,. \end{cases} \tag{1.12}$$

Система (1.12) полностью эквивалентна системам (1.8) и (1.10), но более удобна для исследования асинхронных прецессий ротора.

Отметим, что все представленные системы уравнений являются нелинейными, поэтому их анализ представляет известные трудности. В то же время ряд явлений динамики роторных систем может быть изучен в рамках более простой модели, в которой угловая скорость собственного вращения ротора считается постоянной величиной.

Вынужденные и самовозбуждающиеся колебания ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Предположим, что вал ротора вращается с постоянной безразмерной угловой скоростью $\dot{\theta} = \nu = \text{const}$. В этом случае угол поворота ротора считается заданным, и ротор имеет только две степени свободы. Уравнения движения ротора относительно координат x и y получим, подставив в первые два уравнения системы (1.8) $\theta = \nu t$:

$$\begin{cases} \ddot{x} + (\delta_n + \delta_r)\dot{x} + \delta_r \nu y + x = \varepsilon \nu^2 \cos \nu t\,, \\ \ddot{y} + (\delta_n + \delta_r)\dot{y} - \delta_r \nu x + y = \varepsilon \nu^2 \sin \nu t\,. \end{cases} \tag{1.13}$$

Вводя комплексную переменную $z = x + iy$, запишем систему (1.13) в виде одного комплексного уравнения

$$\ddot{z} + (\delta_n + \delta_r)\dot{z} + (1 - i\delta_r \nu) z = \varepsilon \nu^2 e^{i\nu t}\,. \tag{1.14}$$

Поскольку уравнение (1.14) является линейным по z, то его общее решение можно представить в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$z = z_0 e^{i\nu t} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}\,, \tag{1.15}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + (\delta_n + \delta_r)\lambda + 1 - i\delta_r \nu = 0\,. \tag{1.16}$$

Подставляя в уравнение (1.14) частное решение вида $z = z_0 e^{i\nu t}$, находим

$$z_0 = \frac{\varepsilon \nu^2}{1 - \nu^2 + i\delta_n \nu}\,. \tag{1.17}$$

Возвращаясь к вещественным координатам, получаем частное решение системы (1.13):

$$x_0 = a_0 \cos(\nu t + \phi_0)\,, \qquad y_0 = a_0 \sin(\nu t + \phi_0)\,, \tag{1.18}$$

где

$$a_0 = |z_0| = \frac{\varepsilon\nu^2}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + (\delta_n\nu)^2}}\,, \qquad \operatorname{tg}\phi_0 = \frac{\delta_n\nu}{\nu^2 - 1}\,.$$

Частное решение (1.18), обусловленное неуравновешенностью ротора, описывает вынужденные колебания в виде круговой синхронной прецессии центра диска. Амплитуда a_0 прецессионного движения точки C и угол сдвига фаз ϕ_0 между векторами $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{CG}$ зависят от частоты ν, совпадающей с угловой скоростью вращения диска. Заметим, что в выражение (1.18) не входит коэффициент ротационного демпфирования δ_r. Это связано с тем, что при синхронной регулярной прецессии изогнутый вал ротора за время одного оборота не испытывает деформаций растяжения и сжатия, из-за которых и возникает внутреннее трение.

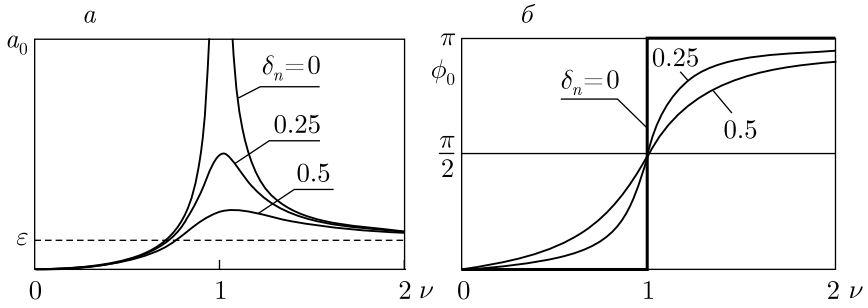

Рис. 3. Амплитудно-частотные (*а*) и фазо-частотные (*б*) характеристики вынужденных колебаний ротора

На рис. 3 представлены амплитудно-частотные (АЧХ) и фазо-частотные (ФЧХ) характеристики вынужденных колебаний ротора, рассчитанные для различных значений коэффициента внешнего демпфирования δ_n. Резонансный характер амплитуды прецессии проявляется, когда угловая скорость ротора ν приближается к критическому значению ν_c, соответствующему собственной частоте поперечных колебаний вала

$$\nu_c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\delta_n^2}{2}}}\,. \tag{1.19}$$

Анализ фазо-частотной характеристики показывает, что когда угловая скорость ротора ниже критической ($\nu < 1$), угол сдвига фаз $\phi_0 < \pi/2$, то есть вектор $\overrightarrow{CG}$ направлен в сторону от оси вращения. При $\nu = 1$ угол ϕ_0 становится равным $\pi/2$, а в закритической области при $\nu > 1$ вектор $\overrightarrow{CG}$ поворачивается в сторону оси вращения. С ростом угловой скорости

центр масс диска G приближается к точке O, поэтому этот эффект называют *самоцентрированием ротора* в закритической области.

Рассмотрим теперь общее решение однородного уравнения (1.14) и запишем выражение для корней характеристического уравнения (1.16):

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\delta_n + \delta_r \pm \sqrt{(\delta_n + \delta_r)^2 - 4 + i4\delta_r\nu}\right) . \tag{1.20}$$

Характер общего решения определяют знаки действительных и мнимых частей λ_1 и λ_2. Воспользовавшись известной формулой

$$\sqrt{a \pm ib} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} \pm i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right) , \tag{1.21}$$

находим

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -\frac{\delta_n + \delta_r}{2} \mp \mathfrak{R}^+ , \quad \operatorname{Im}\lambda_{1,2} = \mp\mathfrak{R}^- ,$$

где

$$\mathfrak{R}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{((\delta_n+\delta_r)^2-4)^2+(4\delta_r\nu)^2} \pm ((\delta_n+\delta_r)^2-4)} .$$

На рис. 4 представлены графики действительных и мнимых частей корней характеристического уравнения в зависимости от частоты ν, рассчитанные для случая, когда $\delta_n = \delta_r = 0.06$. Штриховые прямые отвечают случаю $\delta_r = 0$. Из графиков видно, что неравенства $\operatorname{Im}\lambda_1 < 0$, $\operatorname{Im}\lambda_2 > 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ справедливы во всем диапазоне угловых скоростей, в то время как неравенство $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$ выполняется только при условии $\nu < \nu_*$, где ν_* — пороговая частота, определяемая уравнением $\operatorname{Re}\lambda_2 = 0$, которое имеет единственный положительный корень

$$\nu = \nu_* = 1 + \frac{\delta_n}{\delta_r} . \tag{1.22}$$

Сравнение формул (1.19) и (1.22) показывает, что при $\delta_n = 0$, то есть при отсутствии внешнего трения, пороговая частота совпадает с критической, а если внешнее трение присутствует, то пороговая частота больше критической.

Анализ корней характеристического уравнения позволяет сделать вывод о том, что собственные колебания ротора, описываемые общим решением однородного уравнения (1.14), представляют собой сумму прямой и обратной прецессий. При этом амплитуда обратной прецессии затухает быстрее амплитуды прямой, поскольку $|\operatorname{Re}\lambda_1| > |\operatorname{Re}\lambda_2|$. Если угловая скорость ротора ν меньше порогового значения ν_*, то собственные прецессионные движения экспоненциально затухают, и по истечении некоторого

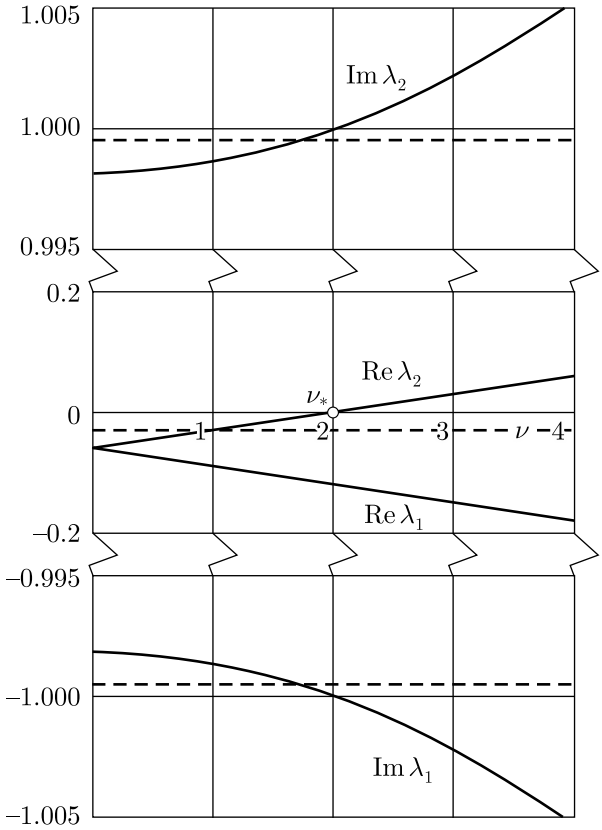

Рис. 4. Действительные и мнимые части корней (1.20)

промежутка времени в системе установится чисто вынужденный синхронный прецессионный режим (1.18). В случае, когда угловая скорость превышает закритическое пороговое значение, движение ротора будет неустойчивым вследствие экспоненциального роста амплитуды собственной прямой прецессии.

Рассмотрим подробнее случай, когда $\nu = \nu_*$, то есть угловая скорость в точности равна пороговой частоте. Учитывая, что корни характеристического уравнения (1.20) в этом случае имеют вид

$$\lambda_1 = -(\delta_n + \delta_r + i)\,, \qquad \lambda_2 = i\,,$$

представим общее решение (1.15) в виде суммы прямой и обратной прецессий с переменными амплитудами:

$$z = (z_0 e^{i(\delta_n/\delta_r)t} + C_2)e^{it} + C_1 e^{-(\delta_n+\delta_r)t} e^{-it}\,. \tag{1.23}$$

Поскольку амплитуда обратной прецессии экспоненциально убывает со временем, а амплитуда прямой прецессии меняется периодически, то установившийся режим движения ротора будет иметь характер прямой асинхронной прецессии с периодически меняющейся амплитудой.

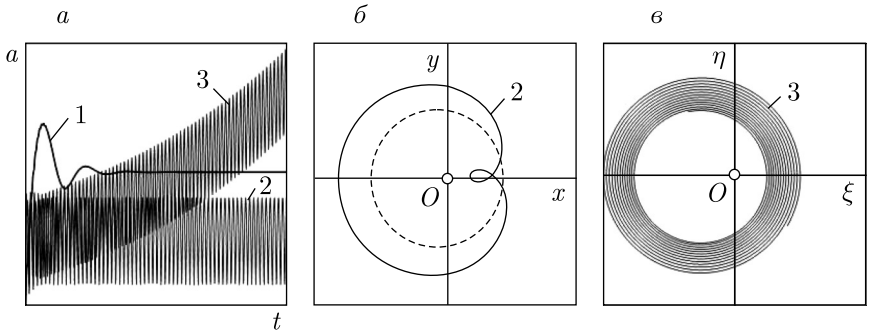

Рис. 5. Типы прецессионного движения ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью

Графики на рис. 5,*а* показывают три характерных типа прецессионного движения ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Кривая 1 соответствует случаю $\nu < \nu_*$ и отвечает синхронной прецессии, кривая 2 ($\nu = \nu_*$) представляет прямую прецессию с периодически меняющейся амплитудой, кривая 3 ($\nu > \nu_*$) демонстрирует неустойчивое прецессионное движение, при котором среднее за период значение амплитуды возрастает по экспоненциальному закону. На рис. 5,*б* показаны траектории точки C (сплошная кривая) и точки G (штриховая кривая) в неподвижной системе координат Oxy для случая $\nu = \nu_*$. Рисунок 5,*в* представляет раскручивающуюся спиралевидную траекторию точки C во вращающейся системе координат $O\xi\eta$ в случае, когда $\nu > \nu_*$. Следует отметить, что предположение о постоянстве угловой скорости ротора в условиях потери устойчивости вращательного режима приводит к неограниченному росту амплитуды прецессионного движения. Однако такой рост амплитуды может происходить только за счет перекачки энергии собственного вращения ротора. Поэтому поддержание постоянной угловой скорости требует наличия источника энергии неограниченной мощности. В реальности такая ситуация невозможна, поэтому для исследования динамики ротора на частотах, превышающих пороговое значение, необходима механическая модель, учитывающая фактор ограниченного возбуждения.

Устойчивость собственного вращения уравновешенного ротора при ограниченном возбуждении. Рассмотрим вопрос об устойчиво-

сти вращательного движения полностью уравновешенного ротора, находящегося под действием внешнего вращающего момента. Полагая в системе (1.10) $\varepsilon = 0$, получаем уравнения, описывающие движение уравновешенного ротора во вращающейся системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + (\delta_n + \delta_r)\dot{\xi} + (1 - \nu^2)\xi - 2\nu\dot{\eta} - (\dot{\nu} + \delta_n\nu)\eta = 0\,, \\ \ddot{\eta} + (\delta_n + \delta_r)\dot{\eta} + (1 - \nu^2)\eta + 2\nu\dot{\xi} + (\dot{\nu} + \delta_n\nu)\xi = 0\,, \\ \dot{\nu} + \delta_\theta\nu + \delta_r(\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi)\eta = \mu\,. \end{cases} \tag{1.24}$$

Считая параметр μ, характеризующий внешний вращающий момент, постоянным, подставим в (1.24) стационарное решение вида $\nu = \nu_0 = \mathrm{const}$, $\xi = \xi_0 = \mathrm{const}$, $\eta = \eta_0 = \mathrm{const}$. В результате получим алгебраическую систему уравнений относительно ν_0, ξ_0 и η_0:

$$\begin{cases} (1 - \nu_0^2)\xi_0 - \delta_n\nu_0\eta_0 = 0\,, \\ \delta_n\nu_0\xi_0 + (1 - \nu_0^2)\eta_0 = 0\,, \\ \delta_\theta\nu_0 = \mu\,. \end{cases} \tag{1.25}$$

Рассматривая первые два уравнения (1.25) как линейную систему относительно ξ_0 и η_0, запишем ее определитель:

$$D = (1 - \nu_0^2)^2 + (\delta_n\nu_0)^2\,. \tag{1.26}$$

Поскольку $D > 0$, система (1.25) имеет единственное тривиальное решение

$$\xi_0 = \eta_0 = 0\,, \qquad \nu_0 = \mu/\delta_\theta\,, \tag{1.27}$$

соответствующее вращению диска с постоянной угловой скоростью при отсутствии изгиба вала. Далее решение (1.27) будем называть стационарным режимом «собственного вращения».

Для исследования устойчивости данного режима подставим в уравнения (1.24) $\xi = \Delta\xi$, $\eta = \Delta\eta$, $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$, где $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ и $\Delta\nu$ — малые вариации координат и угловой скорости. Разлагая полученные выражения в ряды и пренебрегая малыми второго порядка и выше, получаем линеаризованную систему уравнений в вариациях:

$$\begin{cases} (\ddot{\Delta\xi}) + (\delta_n + \delta_r)(\dot{\Delta\xi}) - 2\nu_0(\dot{\Delta\eta}) + (1 - \nu_0^2)\Delta\xi - \delta_n\nu_0\Delta\eta = 0\,, \\ (\ddot{\Delta\eta}) + (\delta_n + \delta_r)(\dot{\Delta\eta}) + 2\nu_0(\dot{\Delta\xi}) + (1 - \nu_0^2)\Delta\eta + \delta_n\nu_0\Delta\xi = 0\,, \\ (\dot{\Delta\nu}) + \delta_\theta\Delta\nu = 0\,. \end{cases} \tag{1.28}$$

Третье уравнение системы (1.28) независимо и легко интегрируется, поэтому для исследования устойчивости достаточно найти решение линейной

системы двух уравнений второго порядка относительно вариаций координат $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$. Введение комплексной вариации $\Delta\zeta = \Delta\xi + i\Delta\eta$ приводит эту систему к одному уравнению второго порядка

$$(\ddot{\Delta\zeta}) + (\delta_n + \delta_r + 2i\nu_0)(\dot{\Delta\zeta}) + (1 - \nu_0^2 + i\delta_n\nu_0)\Delta\zeta = 0\,, \tag{1.29}$$

которому отвечает характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + (\delta_n + \delta_r + 2i\nu_0)\lambda + 1 - \nu_0^2 + i\delta_n\nu_0 = 0\,, \tag{1.30}$$

корни которого имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\delta_n + \delta_r + 2i\nu_0 \pm \sqrt{(\delta_n + \delta_r)^2 - 4 + i4\delta_r\nu_0)}\right)\,. \tag{1.31}$$

Заметим, что действительные части комплексных корней (1.31) совпадают с действительными частями корней (1.20), откуда следует, что $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ при любых значениях параметров, а $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$ при выполнении условия (1.22). Отсюда с учетом третьего уравнения (1.25) получаем следующее условие асимптотической устойчивости:

$$\mu < \mu_* = \delta_\theta\left(1 + \frac{\delta_n}{\delta_r}\right)\,. \tag{1.32}$$

Таким образом, стационарный режим собственного вращения асимптотически устойчив, когда величина параметра μ строго меньше порогового значения μ_*, зависящего от коэффициентов внешнего и ротационного демпфирования.

Автоколебания уравновешенного ротора. Следует отметить, что используя уравнения движения уравновешенного ротора во вращающейся системе координат (1.24), мы смогли обнаружить только одно стационарное решение — режим собственного вращения. Покажем, что уравнения в полярной системе координат позволяют обнаружить еще одно стационарное решение, отвечающее стационарному режиму асинхронных автоколебаний. Полагая в системе (1.12) $\varepsilon = 0$, получаем

$$\begin{cases} \ddot{a} + (\delta_n + \delta_r)\dot{a} + (1 - \omega^2)a = 0\,, \\ (\dot{\omega} + \delta_n\omega - \delta_r(\nu - \omega))a + 2\dot{a}\omega = 0\,, \\ \dot{\nu} + \delta_\theta\nu + \delta_r(\nu - \omega)a^2 = \mu\,. \end{cases} \tag{1.33}$$

Стационарное решение системы (1.33) $a = a_0 = \mathrm{const}$, $\omega = \omega_0 = \mathrm{const}$, $\nu = \nu_0 = \mathrm{const}$ должно удовлетворять следующей системе алгебраических

уравнений:

$$\begin{cases} (1-\omega_0^2)a_0 = 0\,, \\ (\delta_n\omega_0 - \delta_r(\nu_0-\omega_0))a_0 = 0\,, \\ \delta_\theta\nu_0 + \delta_r(\nu_0-\omega_0)a_0^2 = \mu\,. \end{cases} \tag{1.34}$$

Также, как и система уравнений (1.25), система (1.34) имеет очевидное решение $a_0 = 0$, $\nu_0 = \mu/\delta_\theta$, представляющее стационарный режим собственного вращения. Но если считать $a_0 \neq 0$, то легко найти еще одно стационарное решение системы (1.34):

$$\omega_0 = 1\,, \quad \nu_0 = \nu_* = 1 + \frac{\delta_n}{\delta_r}\,, \quad a_0 = \sqrt{\frac{1}{\delta_n}(\mu - \delta_\theta\nu_*)}\,. \tag{1.35}$$

Решение (1.35) имеет характер регулярной асинхронной прецессии, причем угловая скорость собственного вращения ротора в точности совпадает с пороговой частотой (1.22), определенной ранее для модели ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Поскольку амплитуда и частота асинхронной прецессии полностью определяются параметрами системы, этот стационарный режим является автоколебательным, а условие его существования имеет вид

$$\mu > \delta_\theta\nu_* = \delta_\theta\left(1 + \frac{\delta_n}{\delta_r}\right) = \mu_*\,. \tag{1.36}$$

Таким образом, можно констатировать, что пороговое значение μ_*, задающее область существования автоколебательного режима, совпадает с пороговым значением (1.32), ограничивающим область асимптотической устойчивости стационарного режима собственного вращения.

Проведем исследование устойчивости автоколебательного режима по первому приближению. Подставим в систему (1.33) $a = a_0 + \Delta a$, $\omega = 1 + \Delta\omega$, $\nu = \nu_* + \Delta\nu$, где Δa, $\Delta\omega$ и $\Delta\nu$ — малые вариации переменных. Разлагая полученные выражения в ряды по малым вариациям и пренебрегая малыми второго порядка и выше, получим линеаризованную систему уравнений в вариациях:

$$\begin{cases} (\ddot{\Delta a}) + (\delta_n + \delta_r)(\dot{\Delta a}) - 2a_0\Delta\omega = 0\,, \\ (\dot{\Delta\omega}) + 2\dfrac{(\dot{\Delta a})}{a_0} + (\delta_n + \delta_r)\Delta\omega - \delta_r\Delta\nu = 0\,, \\ (\dot{\Delta\nu}) + 2\delta_n a_0\Delta a - \delta_r a_0^2\Delta\omega + (\delta_\theta + \delta_r a_0^2)\Delta\nu = 0\,. \end{cases} \tag{1.37}$$

Представим систему (1.37) в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\mathbf{Z}\,, \tag{1.38}$$

где

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} \Delta\dot{a} \\ \Delta a \\ \Delta\omega \\ \Delta\nu \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} -(\delta_n+\delta_r) & 0 & 2a_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2/a_0 & 0 & -(\delta_n+\delta_r) & \delta_r \\ 0 & -2\delta_n a_0 & \delta_r a_0^2 & -(\delta_\theta+\delta_r a_0^2) \end{Vmatrix}.$$

Характеристический полином системы (1.38) имеет четвертый порядок:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0\,, \tag{1.39}$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= 2(\delta_n + \delta_r) + \delta_\theta + \delta_r a_0^2\,, \\ b_2 &= 4 + (\delta_n + \delta_r)^2 + 2\delta_\theta(\delta_n + \delta_r) + \delta_r(2\delta_n + \delta_r)a_0^2\,, \\ b_3 &= \delta_\theta(4 + (\delta_n + \delta_r)^2) + \delta_r(4 + \delta_n\delta_r + \delta_n^2)a_0^2\,, \\ b_4 &= 4\delta_n\delta_r a_0^2\,. \end{aligned}$$

Заметим, что все коэффициенты b_i в случае $a_0 \neq 0$ положительны, поэтому необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости в соответствии с критерием Льенара и Шипара[4] имеет вид

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} > 0\,, \tag{1.40}$$

где Δ_3 — минор матрицы Гурвица третьего порядка. Непосредственные вычисления дают

$$\begin{aligned} \Delta_3 = b_1b_2b_3 - b_1^2b_4 - b_0b_3^2 = (\delta_n+\delta_r)(2\delta_\theta(4+(\delta_n+\delta_r)^2)(4+(\delta_n+\delta_r+\delta_\theta)^2)+ \\ + a_0^2\delta_r(\delta_r^3(2\delta_n + 3\delta_\theta) + \delta_r^2(8 + 6\delta_n^2 + 14\delta_n\delta_\theta + 3\delta_\theta^2) + \delta_r(8\delta_n + 6\delta_n^3 + \\ + (28 + 19\delta_n^2)\delta_\theta + 9\delta_n\delta_\theta^2) + (16 + \delta_n^4 + 4\delta_n(2 + \delta_n^2)\delta_\theta + (10 + 3\delta_n^2)\delta_\theta^2))+ \\ + a_0^4\delta_r^2(4\delta_n^3 + 2(8 + 3\delta_n^2)\delta_\theta + \delta_r^2(3\delta_n + \delta_\theta + \delta_r(12 + 7\delta_n^2 + 6\delta_n\delta_\theta))+ \\ + a_0^6\delta_r^3(4 + 2\delta_n^2 + \delta_n\delta_r)\,. \end{aligned}$$

Поскольку выражение для Δ_3 не содержит отрицательных слагаемых, можно утверждать, что стационарный автоколебательный режим будет асимптотически устойчив во всей области его существования, то есть при выполнении условия (1.36).

[4] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

Для иллюстрации полученных результатов было проведено численное интегрирование системы (1.33) при следующих значениях безразмерных параметров: $\delta_n = 0.11$, $\delta_r = 0.11$, $\delta_\theta = 0.08$. Подставив эти значения в формулу (1.36), получим пороговое значение параметра, характеризующего внешний вращательный момент: $\mu_* = 0.16$.

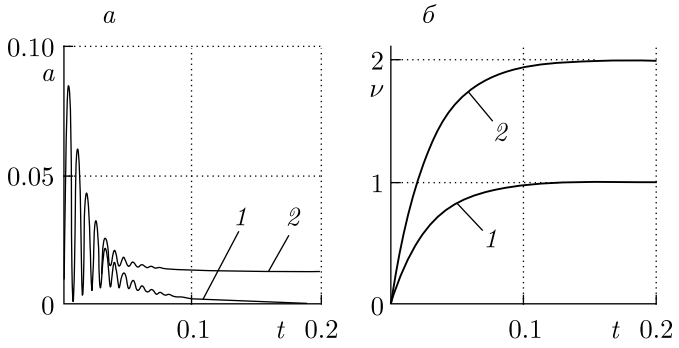

Рис. 6. Собственные колебания уравновешенного ротора при $\mu \leqslant \mu_*$

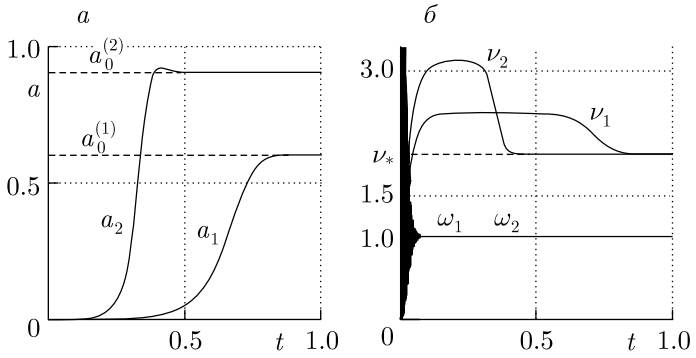

Рис. 7. Асинхронные автоколебания уравновешенного ротора при $\mu > \mu_*$

На рис. 6,*а* показаны графики амплитуды a прецессионного движения ротора и угловой скорости ν в зависимости от времени в случаях, когда $\mu = 0.08 < \mu_*$ (кривая *1*) и $\mu = \mu_*$ (кривая *2*). Собственные колебания ротора в этих случаях обусловлены начальными возмущениями. Кривая *1* демонстрирует асимптотическую устойчивость режима собственного вращения, а кривая *2* отвечает критическому стационарному режиму. Отметим, что в критическом случае величина установившейся амплитуды прецессионного движения зависит от начальных условий интегриро-

вания. На рис. 6,*б* представлены аналогичные графики для угловых скоростей ротора. В обоих случаях установившаяся угловая скорость ротора равна μ/δ_θ.

Рисунки 7,*а* и 7,*б* представляют графики амплитуд автоколебаний и угловых скоростей ν и ω в случаях, когда внешний вращающий момент превышает пороговое значение, то есть при $\mu > \mu_*$. Кривые a_1, ν_1 и ω_1 построены для случая $\mu = 0.2$, а кривые a_2, ν_2 и ω_2 — для случая $\mu = 0.25$. Штриховые прямые отвечают стационарным решениям, определяемым формулами (1.35). Результаты расчетов подтверждают, что установившиеся амплитуды автоколебаний зависят от внешнего вращающего момента, а установившиеся угловые скорости собственного вращения и прецессионного движения не зависят и определяются только параметрами системы.

Вынужденные колебания неуравновешенного ротора при ограниченном возбуждении. Вернемся к описанной выше модели статически неуравновешенного ротора Джеффкотта, вращающегося под действием приложенного внешнего момента. Для исследования вынужденных колебаний ротора воспользуемся уравнениями во вращающейся системе координат (1.10). Параметр μ, характеризующий внешний вращающий момент, будем, как и ранее, считать постоянным.

Подставим в систему (1.10) стационарное решение вида $\xi = \xi_0 = \text{const}$, $\eta = \eta_0 = \text{const}$, $\nu = \nu_0 = \text{const}$. В результате получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1-\nu_0^2)\xi_0 - \delta_n\nu_0\eta_0 = \varepsilon\nu_0^2\,, \\ \delta_n\nu_0\xi_0 + (1-\nu_0^2)\eta_0 = 0\,, \\ \delta_\theta\nu_0 - \varepsilon\nu_0^2\eta_0 = \mu\,. \end{cases} \tag{1.41}$$

Отсутствие в полученных уравнениях коэффициента ротационного демпфирования свидетельствует о том, что внутреннее трение «не работает», то есть стационарное движение ротора представляет собой регулярную синхронную прецессию. Из первых двух уравнений (1.41) имеем

$$\xi_0 = \frac{\varepsilon\nu_0^2(1-\nu_0^2)}{(1-\nu_0^2)^2+\delta_n^2\nu_0^2}\,, \quad \eta_0 = \frac{-\varepsilon\delta_n\nu_0^3}{(1-\nu_0^2)^2+\delta_n^2\nu_0^2}\,, \tag{1.42}$$

откуда находим выражение для амплитуды вынужденных колебаний:

$$a_0 = \sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2} = \frac{\varepsilon\nu_0^2}{\sqrt{(1-\nu_0^2)^2+\delta_n^2\nu_0^2}}\,. \tag{1.43}$$

С учетом формул (1.42) и (1.43) последнее уравнение системы (1.41) можно записать в виде

$$(\delta_\theta + \delta_n a_0^2)\nu_0 = \mu\,. \tag{1.44}$$

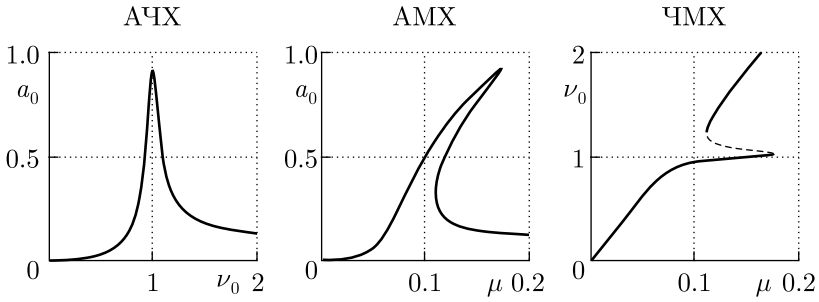

Рис. 8. Стационарные характеристики вынужденных колебаний ротора

На рис. 8 представлены стационарные амплитудно-частотная (АЧХ), амплитудно-моментная (АМХ) и частотно-моментная (ЧМХ) характеристики вынужденных колебаний, рассчитанные по формулам (1.43) и (1.44) при $\varepsilon = 0.1$, $\delta_n = 0.11$, $\delta_r = 0.11$, $\delta_\theta = 0.08$. Максимуму амплитуды АЧХ соответствует критическая угловая скорость ν_c, определяемая формулой (1.19). Отметим, что АМХ и ЧМХ имеют ярко выраженный нелинейный характер, заключающийся в существовании области, где одному значению параметра μ отвечают три стационарных режима.

Для исследования устойчивости синхронных прецессий по первому приближению положим в системе (1.10) $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$, $\eta = \eta_0 + \Delta\eta$, $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$, где $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ и $\Delta\nu$ — малые отклонения от стационарных значений ξ_0, η_0, определяемых системой (1.41). Разлагая полученные выражения в ряды и пренебрегая малыми второго порядка и выше, получим линейную систему уравнений в вариациях:

$$\mathbf{A}\dot{\zeta} + \mathbf{B}\zeta = \mathbf{0}\,, \tag{1.45}$$

где

$$\zeta = \begin{Vmatrix} \Delta\dot{\xi} \\ \Delta\dot{\eta} \\ \Delta\nu \\ \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon + \xi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 + \varepsilon\xi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \delta_n + \delta_r & -2\nu_0 & -\delta_n\eta_0 - 2\nu_0(\varepsilon + \xi_0) & 1 - \nu_0^2 & -\delta_n\nu_0 \\ 2\nu_0 & \delta_n + \delta_r & -2\eta_0\nu_0 + \delta_n\xi_0 & \delta\nu_0 & 1 - \nu_0^2 \\ \delta_r\eta_0 + 2\varepsilon\nu_0 & -\delta_r\xi_0 & \delta_\theta - 2\varepsilon\eta_0\nu_0 & 0 & -\varepsilon\nu_0^2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Коэффициенты характеристического полинома системы (1.45)

$$|\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sum_{k=0}^{5} b_k\lambda^{5-k} = 0 \tag{1.46}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 - \varepsilon^2\,, \\ b_1 &= 2(\delta_n + \delta_r) + \delta_\theta + \delta_r a_0^2 + 2\varepsilon\delta_r\xi_0 - \varepsilon^2(\delta_n + \delta_r)\,, \\ b_2 &= 2(1 + \nu_0^2) + (\delta_n + \delta_r)^2 + 2\delta_\theta(\delta_n + \delta_r) + \delta_r(2\delta_n + \delta_r)a_0^2 + \\ &\quad + \varepsilon((2\delta_r^2 + 2\delta_n\delta_r + 1)\xi_0 - \delta_n\nu_0\eta_0) - \varepsilon^2(1 + 2\nu_0^2)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= 2(\delta_n + \delta_r) + \delta_\theta(2 + (\delta_n + \delta_r)^2) + 2(\delta_n - \delta_r + \delta_\theta)\nu_0^2 + \\ &\quad + \delta_r(1 + \delta_n\delta_r + \delta_n^2 + 3\nu_0^2)a_0^2 + \varepsilon((\delta_n + 3\delta_r + (\delta_n + 6\delta_r)\nu_0^2)\xi_0 - \\ &\quad - \delta_n(\delta_n + \delta_r)\nu_0\eta_0) + \varepsilon^2(\delta_n + 5\delta_r)\nu_0^2\,, \\ b_4 &= (1 - \nu_0^2)^2 + 2\delta_\theta(\delta_n + \delta_r) + (\delta_n^2 + 2\delta_\theta(\delta_n - \delta_r))\nu_0^2 + \\ &\quad + \delta_n\delta_r(1 + \nu_0^2)a_0^2 + \varepsilon((1 + 3(1 + \delta_n\delta_r)\nu_0^2)\xi_0 - (2(\delta_n + \delta_r) + \delta_n\nu_0^2)\nu_0\eta_0 + \\ &\quad + (1 + 3(1 + \delta_n\delta_r)\nu_0^2)\xi_0) + \varepsilon^2\nu_0^2(5 - \nu_0^2)\,, \\ b_5 &= \delta_\theta((1 - \nu_0^2)^2 + \delta_n^2\nu_0^2) + \varepsilon(\delta_n\nu_0^2(1 + \nu_0^2)\xi_0 - \nu_0(2 - (2 - \delta_n^2)\nu_0^2)\eta_0) + 2\varepsilon^2\delta_n\nu_0^4\,. \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости регулярных синхронных прецессий дает критерий Льенара и Шипара

$$b_k > 0, \;\; k = \overline{0,5} \quad \Delta_2 > 0\,, \quad \Delta_4 > 0\,,$$

где Δ_2 и Δ_4 — соответствующие миноры матрицы Гурвица.

Рисунок 9, где показаны графики зависимостей коэффициентов b_k и миноров Δ_2, Δ_4 от ν_0, демонстрирует, что условие $b_5 > 0$ определяет области устойчивости синхронных прецессий в виде $\nu_0 < \tilde{\nu}_1$ или $\nu_0 > \tilde{\nu}_2$, а условие $\Delta_4 > 0$ задает область устойчивости как $\nu_0 < \nu_*$, где ν_* — закритическая пороговая частота, определяемая уравнением $\Delta_4 = 0$.

На рис. 10 представлены двухпараметрические диаграммы устойчивости синхронных прецессий в плоскости параметров $(\nu_0\,, \delta_r)$, $(\nu_0\,, \delta_n)$ и $(\delta_n\,, \delta_r)$. Темным цветом на диаграммах выделены области неустойчивости,

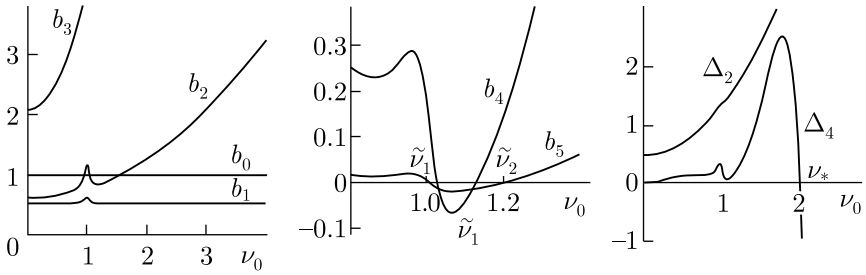

Рис. 9. Зависимость коэффициентов b_k и миноров Δ_2, Δ_4 от ν_0

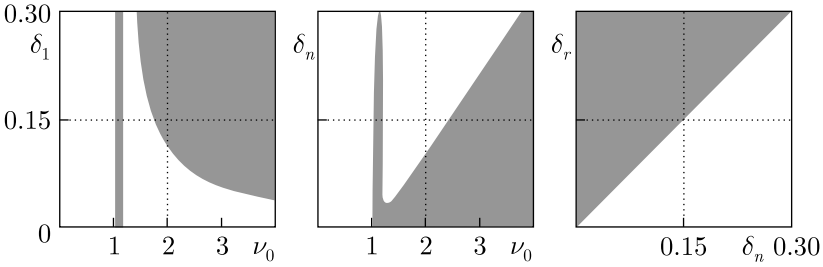

Рис. 10. Двухпараметрические диаграммы устойчивости

в которых выполняется хотя бы одно из неравенств: $b_5 < 0$ или $\Delta_4 < 0$. На левой диаграмме, построенной для случая $\delta_n = 0.11$, и средней, построенной при $\delta_r = 0.11$, четко выделяется зона неустойчивости в виде узкой вертикальной полосы, которая соответствует падающему участку частотно-моментной характеристики, отмеченному на рис. 8,*в* штрихами. Правая диаграмма, построенная для случая $\nu_0 = 2$, показывает, что синхронная прецессия неустойчива при условии $\delta_n < \delta_r$.

Взаимодействие вынужденных колебаний и автоколебаний. Исследуем движения ротора в случае, когда параметр μ превышает пороговое значение μ_*, ограничивающее область устойчивости синхронных прецессий. Учитывая полученные ранее результаты, можно предположить, что характер движения ротора в этом случае будет представлять собой асинхронные автоколебания. Величину параметра μ_* найдем, подставив пороговое значение частоты ν_* в выражение (1.44). Тогда для значений расчетных параметров, введенных в предыдущем разделе, пороговые значения частоты и момента будут равны соответственно $\nu_* = 2.00364$ и $\mu_* = 0.16126$.

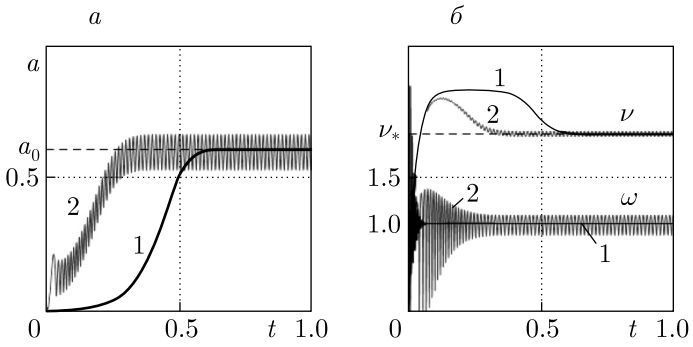

Рис. 11. Автоколебания уравновешенного и неуравновешенного роторов

На рис. 11 представлены результаты численного интегрирования системы (1.12) для уравновешенного и неуравновешенного ротора в случае, когда $\mu = 0.2$. Кривые 1 рассчитаны при $\varepsilon = 0$, а кривые 2 — при $\varepsilon = 0.05$. Графики на рис. 11,*а* показывают изменение амплитуды прецессионного движения точки C от времени для уравновешенного (кривая 1) и неуравновешенного (кривая 2) роторов. Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что неуравновешенность ротора оказывает влияние как на время установления автоколебательного режима, так и на его характер. Из рисунка видно, что установившаяся амплитуда прецессионного движения уравновешенного ротора постоянна и равна стационарному значению a_0, рассчитанному по формуле (1.35), тогда как для неуравновешенного ротора амплитуда автоколебаний представляет собой быстро осциллирующую около значения a_0 функцию времени. Такой же быстро осциллирующий характер в случае неуравновешенного ротора имеют и угловые скорости собственного вращения ν и прецессионного движения ω, графики которых представлены на рис. 11,*б*. При этом автоколебания носят асинхронный характер, поскольку осцилляции ν происходят около пороговой частоты ν_*, а осцилляции ω — около критической частоты ν_c.

Основные выводы. Сформулируем основные итоги аналитического и численного исследования модели неуравновешенного ротора Джеффкотта с изотропным вязко-упругим валом.

1. Вращение статически неуравновешенного ротора с угловой скоростью, близкой к собственной частоте поперечных колебаний (критической скоростью), приводит к резонансным колебаниям, которые имеют характер регулярной синхронной прецессии. В закритической области частот имеет место эффект самоцентрирования ротора.

2. Уравновешенный ротор Джеффкотта имеет закритическую пороговую частоту, обусловленную влиянием сил, связанных с ротационным демпфированием. При вращении с угловой скоростью, превышающей пороговую частоту, происходит потеря устойчивости режима собственного вращения. Предположение о постоянстве угловой скорости ротора в условиях потери устойчивости вращательного режима приводит к неограниченному росту амплитуды прецессионного движения, что требует наличия источника энергии неограниченной мощности.

3. Для уравновешенного ротора с ограниченным возбуждением существует пороговый вращающий момент, зависящий от коэффициентов внешнего (неротационного) и внутреннего (ротационного) демпфирования, при достижении которого режим собственного вращения теряет устойчивость. Если вращающий момент превышает пороговое значение, то в системе устанавливается асимптотически устойчивый асинхронный автоколебательный режим с постоянной амплитудой и постоянными угловыми скоростями собственного вращения и прецессионного движения.

4. В случае неуравновешенного ротора величина порогового момента остается прежней, но меняется характер автоколебательного режима: амплитуда и угловые скорости представляют собой функции времени, быстро осциллирующие около стационарных значений.

§ 2. Вынужденные и самовозбуждающиеся колебания ротора с ортотропным вязко-упругим валом[5]

Механическая модель ротора и уравнения движения. Рассмотрим механическую модель статически неуравновешенного ротора Джеффкотта в предположении, что его вал имеет неодинаковые упругие свойства по различным направлениям, перпендикулярным его полярной оси. Для определенности мы будем учитывать ортотропию вязко-упругих характеристик вала ротора, полагая, что его диаграмма жесткости имеет вид эллипса.

Направим оси связанной с ротором системы координат $C\xi'\eta'$ вдоль осей эллипса жесткости, а отвечающие им коэффициенты упругости вала обозначим через k_ξ и k_η. Введем также вращающуюся систему координат $O\xi\eta$, оси которой коллинеарны соответствующим осям связанной системы координат. Положение центра масс G диска в связанной системе координат определим двумя параметрами: величиной эксцентриситета $s = |\overrightarrow{CG}|$ и

[5]Параграф содержит материал, опубликованный в статье: *Bykov V. G.* Synchronous and asynchronous whirling of the balanced rotor with an orthotropic elastic shaft // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. № 080010. https://doi.org/10.1063/1.5034727.

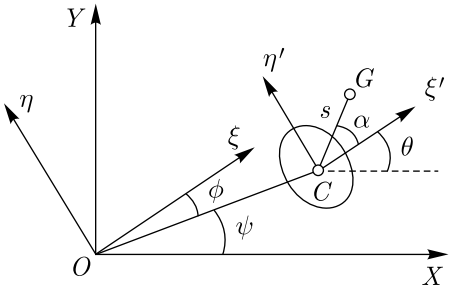

Рис. 12. Ротор Джеффкотта с ортотропным валом

фазовым углом вектора дисбаланса α, как показано на рис. 12. Тогда выражение для кинетической энергии ротора примет вид

$$T = \frac{1}{2}m((\dot{x} - s\dot{\theta}\sin(\theta+\alpha))^2 + (\dot{y} + s\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha))^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2\,. \tag{2.1}$$

Диссипативная функция неротационного демпфирования для ротора с ортотропным валом остается такой же, как и в случае изотропного вала (см. выражение (1.3)), а потенциальную энергию вала и диссипативную функцию ротационного демпфирования запишем в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}(k_\xi\xi^2 + k_\eta\eta^2)\,, \quad R_r = \frac{1}{2}\left(c_\xi\dot{\xi}^2 + c_\eta\dot{\eta}^2\right), \tag{2.2}$$

где c_ξ и c_η — коэффициенты ротационного демпфирования.

Подставив в выражения (1.3) и (2.1) формулы, связывающие неподвижные и вращающиеся координаты

$$x = \xi\cos\theta - \eta\sin\theta, \quad y = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta\,, \tag{2.3}$$

запишем уравнения Лагранжа второго рода во вращающейся системе координат

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} + (c_n + c_\xi)\dot{\xi} - 2m\dot{\theta}\dot{\eta} + (k_\xi - m\dot{\theta}^2)\xi - (m\ddot{\theta} + c_n\dot{\theta})\eta = \\ \qquad\qquad = ms(\dot{\theta}^2\cos\alpha + \ddot{\theta}\sin\alpha)\,, \\ m\ddot{\eta} + (c_n + c_\eta)\dot{\eta} + 2m\dot{\theta}\dot{\xi} + (m\ddot{\theta} + c_n\dot{\theta})\xi + (k_\eta - m\dot{\theta}^2)\eta = \\ \qquad\qquad = ms(\dot{\theta}^2\sin\alpha - \ddot{\theta}\cos\alpha)\,, \\ mr^2\ddot{\theta} + c_\theta\dot{\theta} + (c_n\dot{\theta} + m\ddot{\theta})(\xi^2+\eta^2) + \xi(c_n\dot{\eta} + 2m\dot{\theta}\dot{\xi} + m\ddot{\eta}) - \\ - \eta(c_n\dot{\xi} - 2m\dot{\theta}\dot{\eta} + m\ddot{\xi}) = M_e + ms(\ddot{\xi} - 2\dot{\theta}\dot{\eta} - 2\ddot{\theta}\eta)\sin\alpha - \\ - ms(\ddot{\eta} + 2\dot{\theta}\dot{\xi} + 2\ddot{\theta}\xi)\cos\alpha\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $mr^2 = J_G + ms^2$, а M_e — внешний вращающий момент.

Третье уравнение системы (2.4) можно представить в более компактном виде, если почленно вычесть из него второе уравнение, умноженное на ξ, и сложить с первым уравнением, умноженным на η:

$$mr^2\ddot{\theta} + c_\theta\dot{\theta} + c_\xi\dot{\xi}\eta - c_\eta\dot{\eta}\xi + (k_\xi - k_\eta)\xi\eta = M_e + \\ + ms\big((\ddot{\xi} - 2\dot{\theta}\dot{\eta} - \ddot{\theta}\eta - \dot{\theta}^2\xi)\sin\alpha - (\ddot{\eta} + 2\dot{\theta}\dot{\xi} + \ddot{\theta}\xi - \dot{\theta}^2\eta)\cos\alpha\big)\,.$$

Переходя к безразмерным переменным $\bar{\xi} = \xi/r$, $\bar{\eta} = \eta/r$ и безразмерному времени $\bar{t} = \Omega t$, где $\Omega = \sqrt{(k_\xi + k_\eta)/2m}$, получаем

$$\begin{cases} \ddot{\bar{\xi}} + (\delta_n + \delta_\xi)\dot{\bar{\xi}} + (\kappa_\xi - \nu^2)\bar{\xi} - 2\nu\dot{\bar{\eta}} - (\dot{\nu} + \delta_n\nu)\bar{\eta} = \varepsilon(\nu^2\cos\alpha + \dot{\nu}\sin\alpha)\,, \\ \ddot{\bar{\eta}} + (\delta_n + \delta_\eta)\dot{\bar{\eta}} + (\kappa_\eta - \nu^2)\bar{\eta} + 2\nu\dot{\bar{\xi}} + (\dot{\nu} + \delta_n\nu)\bar{\xi} = \varepsilon(\nu^2\sin\alpha - \dot{\nu}\cos\alpha)\,, \\ \dot{\nu} + \delta_\theta\nu + \delta_\xi\dot{\bar{\xi}}\bar{\eta} - \delta_\eta\dot{\bar{\eta}}\bar{\xi} + (\kappa_\xi - \kappa_\eta)\bar{\xi}\bar{\eta} = \mu + \\ \qquad + \varepsilon\big((\ddot{\bar{\xi}} - 2\nu\dot{\bar{\eta}} - \dot{\nu}\bar{\eta} - \nu^2\bar{\xi})\sin\alpha - (\ddot{\bar{\eta}} + 2\nu\dot{\bar{\xi}} + \dot{\nu}\bar{\xi} - \nu^2\bar{\eta})\cos\alpha\big)\,, \end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$\nu = \dot{\theta} \text{ — безразмерная угловая скорость ротора,}$$
$$\delta_n = \frac{c_n}{m\Omega}\,, \quad \delta_\xi = \frac{c_\xi}{m\Omega}\,, \quad \delta_\eta = \frac{c_\eta}{m\Omega}, \quad \delta_\theta = \frac{c_\theta}{mr^2\Omega}\,,$$
$$\kappa_\xi = \frac{k_\xi}{m\Omega^2}, \quad \kappa_\eta = \frac{k_\eta}{m\Omega^2}\,, \quad \mu = \frac{M_e}{mr^2\Omega^2}, \quad \varepsilon = \frac{s}{r}\,.$$

Систему уравнений (2.5) мы будем использовать при исследовании устойчивости стационарного режима собственного вращения, анализе вынужденных колебаний ротора и устойчивости вынужденных синхронных прецессий. Как и ранее, черту над безразмерными переменными опускаем.

Перейдем во вращающейся системе $O\xi\eta$ к полярным координатам $\xi = a\cos\phi$, $\eta = a\sin\phi$, где $a = |\overrightarrow{OC}|/r$ — величина радиус-вектора точки C, а ϕ — его фазовый угол (см. рис. 12). После подстановки в (2.5) полярных координат проделаем следующие преобразования: 1) умножим первое уравнение на $\cos\phi$ и сложим со вторым, умноженным на $\sin\phi$; 2) умножим первое уравнение на $\sin\phi$ и вычтем второе, умноженное на $\cos\phi$; 3) умножим второе уравнение на a и сложим с третьим уравнением. В результате после элементарных преобразований получим следующую систему урав-

нений:

$$\begin{cases} \ddot{a} + (\delta_n + \delta_r)\dot{a} + (1-\omega^2)a + (\delta\dot{a} + \kappa a)\cos 2\phi - \delta\dot{\phi}a\sin 2\phi = \\ \qquad\qquad = \varepsilon(\nu^2\cos(\phi+\alpha) + \dot{\nu}\sin(\phi+\alpha))\,, \\ (\dot{\omega} + \delta_n\omega - \delta_r\dot{\phi})a + 2\dot{a}\omega + (\delta\dot{a} + \kappa a)\sin 2\phi + \delta\dot{\phi}a\cos 2\phi = \\ \qquad\qquad = \varepsilon(\nu^2\sin(\phi+\alpha) - \dot{\nu}\cos(\phi+\alpha))\,, \\ \dot{\nu} + \delta_\theta\nu + (\dot{\omega} + \delta_n\omega)a^2 + 2\omega\dot{a}a = \\ \qquad\qquad = \mu - \varepsilon((\ddot{a} - a\omega^2)\sin(\phi+\alpha)) + (a\dot{\omega} + 2\dot{a}\omega)\cos(\phi+\alpha)))\,, \\ \dot{\phi} = \nu - \omega\,. \end{cases} \tag{2.6}$$

Здесь $\omega = \dot{\psi} = \dot{\theta} - \dot{\phi}$ — угловая скорость прецессионного движения в неподвижной системе координат. В системе (2.6) для удобства введены следующие обозначения:

$$\kappa = (\kappa_\xi - \kappa_\eta)/2\,, \quad \delta = (\delta_\xi - \delta_\eta)/2\,, \quad \delta_r = (\delta_\xi + \delta_\eta)/2\,. \tag{2.7}$$

Параметры κ и δ можно назвать коэффициентами ортотропии соответственно по жесткости и демпфированию.

Далее систему (2.6) мы будем использовать для исследования параметрических и самовозбуждающихся колебаний ротора.

Устойчивость собственного вращения уравновешенного ротора. Рассмотрим случай полностью уравновешенного ротора с ортотропным валом, на который действует постоянный вращающий момент. Положим в системе (2.5) $\varepsilon = 0$, $\mu = \mathrm{const}$ и подставим в нее стационарное решение вида $\xi = \xi_0 = \mathrm{const}$, $\eta = \eta_0 = \mathrm{const}$, $\nu = \nu_0 = \mathrm{const}$. В результате с учетом обозначений (2.7) получим алгебраическую систему уравнений относительно ξ_0, η_0 и ν_0:

$$\begin{cases} (1 + \kappa - \nu_0^2)\xi_0 - \delta_n\nu_0\eta_0 = 0\,, \\ \delta_n\nu_0\xi_0 + (1 - \kappa - \nu_0^2)\eta_0 = 0\,, \\ \delta_\theta\nu_0 + 2\kappa\xi_0\eta_0 = \mu\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Считая ν_0 параметром, рассмотрим первые два уравнения (2.8) как линейную систему относительно ξ_0, η_0 с определителем

$$D = (1 - \nu_0^2)^2 + \delta_n^2\nu_0^2 - \kappa^2\,. \tag{2.9}$$

Если $D \neq 0$, то система (2.8) имеет единственное решение $\xi_0 = \eta_0 = 0$, $\nu_0 = \mu/\delta_\theta$, отвечающее стационарному режиму собственного вращения.

Поскольку этот случай всегда имеет место для достаточно малых значений коэффициента ортотропии κ, то далее мы будем называть его случаем «слабо ортотропного» вала. Если коэффициент ортотропии удовлетворяет условию

$$|\kappa| > \delta_n \sqrt{1 - \frac{\delta_n^2}{4}}\,, \tag{2.10}$$

то уравнение $D = 0$ имеет два действительных корня

$$\nu_{0i} = \sqrt{1 - \frac{\delta_n^2}{2} \pm \sqrt{\kappa^2 - \delta_n^2 + \frac{\delta_n^4}{4}}}\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{2.11}$$

представляющих критические угловые скорости ротора. Отвечающие этим корням нетривиальные решения системы (2.8)

$$\xi_{0\,i}^2 = \frac{\mu - \delta_\theta \nu_{0i}}{2\kappa} \cdot \frac{\delta_n \nu_{0i}}{1 + \kappa - \nu_{0i}^2}\,, \quad \eta_{0\,i}^2 = \frac{\mu - \delta_\theta \nu_{0i}}{2\kappa} \cdot \frac{1 + \kappa - \nu_{0i}^2}{\delta_n \nu_{0i}} \quad i = 1, 2\,, \tag{2.12}$$

описывают параметрические колебания ротора, при которых точка C совершает круговое прецессионное движение с частотой ν_{01} или ν_{02}. Условие существования двух критических частот можно также записать в виде

$$\delta_n < {\delta_n}^* = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \kappa^2})}\,, \tag{2.13}$$

где ${\delta_n}^*$ — предельное значение коэффициента внешнего демпфирования при фиксированном значении параметра ортотропии κ.

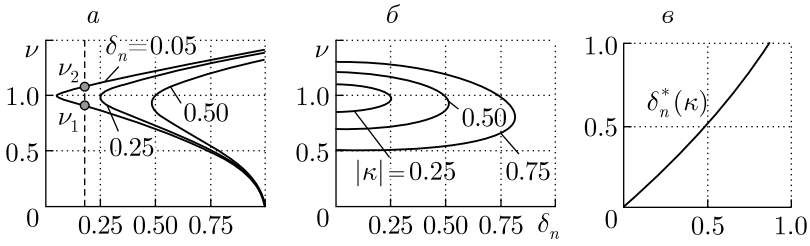

Рис. 13. Критические частоты (*а*, *б*) и коэффициент демпфирования ${\delta_n}^*$ (*в*)

На рис. 13,*а* показаны графики зависимости критических частот (угловых скоростей) от величины параметра $|\kappa|$, рассчитанные по формуле (2.11) для трех значений коэффициента внешнего демпфирования δ_n. Аналогичные графики, но уже в зависимости от коэффициента δ_n при

фиксированных значениях $|\kappa|$, приведены на рис. 13,*б*. Анализ графиков позволяет сделать вывод о том, что интервал между критическими частотами (ν_{01}, ν_{02}) расширяется с ростом параметра ортотропии κ и сужается с увеличением коэффициента внешнего демпфирования δ_n. График зависимости предельного коэффициента демпфирования ${\delta_n}^*$ от κ представлен на рис. 13,*в*.

Проведем исследование устойчивости стационарного режима собственного вращения по первому приближению. Для этого подставим в систему (2.5) $\xi = \Delta\xi$, $\eta = \Delta\eta$, $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$, где $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ и $\Delta\nu$ — малые вариации координат и угловой скорости. После стандартной процедуры разложения в ряды и отбрасывания малых второго порядка и выше, получим линеаризованную систему уравнений в вариациях:

$$\begin{cases} (\ddot{\Delta\xi})+(\delta_n+\delta_r+\delta)(\dot{\Delta\xi})-2\nu_0(\dot{\Delta\eta})+(1-\nu_0^2+\kappa)\Delta\xi-\delta_n\nu_0\Delta\eta = 0\,, \\ (\ddot{\Delta\eta})+(\delta_n+\delta_r-\delta)(\dot{\Delta\eta})+2\nu_0(\dot{\Delta\xi})+(1-\nu_0^2-\kappa)\Delta\eta+\delta_n\nu_0\Delta\xi = 0\,, \\ (\dot{\Delta\nu}) + \delta_\theta\Delta\nu = 0\,. \end{cases} \tag{2.14}$$

Первые два уравнения (2.14) можно рассматривать как независимую систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно вариаций координат $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$. Характеристическое уравнение данной системы представляет собой полином 4-й степени

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0 \tag{2.15}$$

с коэффициентами

$$b_1 = 2(\delta_n + \delta_r)\,, \quad b_2 = (\delta_n + \delta_r)^2 + 2(1 + \nu_0^2) - \delta^2\,,$$
$$b_3 = 2(\delta_n + \delta_r - \kappa\delta + (\delta_n - \delta_r)\nu_0^2)\,, \quad b_4 = (1 - \nu_0^2)^2 + \delta_n^2\nu_0^2 - \kappa^2\,.$$

Очевидно, что $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$, поэтому, на основании критерия Льенара и Шипара необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$b_4 > 0, \qquad \Delta_3 > 0\,, \tag{2.16}$$

где Δ_3 — минор матрицы Гурвица третьего порядка.

Заметим, что $b_4 = D$, а корни ν_1 и ν_2 уравнения $D = 0$ определяются выражением (2.11). Отсюда следует, что первое условие (2.16) выполняется в областях $\nu_0 < \nu_{01}$ и $\nu_0 > \nu_{02}$. Используя третье уравнение системы (2.8) и учитывая, что $\xi_0 = \eta_0 = 0$, находим соответствующие условия для параметра μ

$$\mu < \mu_1 = \delta_\theta\nu_{01}\,, \qquad \mu > \mu_2 = \delta_\theta\nu_{02}\,. \tag{2.17}$$

Для проверки второго условия (2.16) представим Δ_3 в виде

$$\Delta_3 = b_1(b_2 b_3 - b_1 b_4) - b_3^2 = A\nu_0^4 + B\nu_0^2 + C\,,$$

где

$$A = -16\delta_r^2\,, \quad B = 4(4-\delta_r^2)(\delta_n^2+\delta_r^2) - 4\delta^2(\delta_n^2-\delta_r^2) - 16\delta\kappa\delta_r\,,$$
$$C = 4((\delta_n+\delta_r)^2 - \delta^2)((\delta_n+\delta_r)(\delta_n+\delta_r-\delta\kappa)+\kappa^2)\,.$$

Поскольку $A<0$ и $C>0$, то биквадратное уравнение $A\nu_0^4 + B\nu_0^2 + C = 0$ имеет единственный положительный корень

$$\nu_* = \sqrt{\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}}\,, \tag{2.18}$$

отвечающий пороговому значению частоты. Если при этом предположить, что $\delta = 0$, то есть рассматривать анизотропию только упругих характеристик вала, то для величины пороговой частоты получим следующую формулу:

$$\nu_* = \left(1+\frac{\delta_n}{\delta_r}\right)\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\delta_r^2}{4}\right)+\sqrt{\left(1+\frac{\delta_r^2}{4}\right)^2+\left(\frac{\kappa\delta_r}{\delta_n+\delta_r}\right)^2}}\,. \tag{2.19}$$

Пороговое значение параметра μ, характеризующего внешний вращающий момент, при котором стационарный режим собственного вращения теряет устойчивость, имеет вид

$$\mu_* = \delta_\theta \nu_*\,. \tag{2.20}$$

На рис. 14 показаны графики зависимостей коэффициента b_4 и минора Δ_3 от параметра μ, рассчитанные при $\delta_n = 0.11$, $\delta_r = 0.1$, $\delta = 0$, $\delta_\theta = 0.1$. Вариант *а* соответствует слабо ортотропному валу ($\kappa = 0.05$), когда условие (2.10) не выполнено, а вариант *б* ($\kappa = 0.3$) — сильно ортотропному. В областях, где графики лежат выше оси абсцисс, гарантируется асимптотическая устойчивость режима собственного вращения. Из рисунка видно, что в случае слабо ортотропного вала стационарный режим собственного вращения асимптотически устойчив в области $\mu < \mu_*$. В случае сильно ортотропного вала появляется дополнительная «критическая» область неустойчивости (μ_1, μ_2). Далее будет показано, что если $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$, то у ротора с сильно ортотропным валом возникают параметрические колебания в виде синхронных прецессий точки C на частоте первой критической скорости ν_{01}.

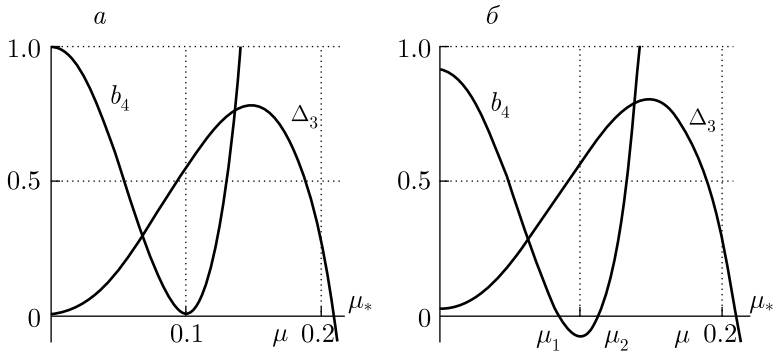

Рис. 14. Области асимптотической устойчивости стационарного режима собственного вращения

Синхронные прецессии и асинхронные автоколебания уравновешенного ротора. Для исследования стационарных синхронных режимов движения уравновешенного ротора воспользуемся уравнениями (2.6), которые в случае $\varepsilon = 0$ имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{a} + (\delta_n + \delta_r)\dot{a} + (1-\omega^2)a + (\delta\dot{a} + \kappa a)\cos 2\phi - \delta a\dot{\phi}\sin 2\phi = 0\,, \\ (\dot{\omega}+\delta_n\omega-\delta_r\dot{\phi})a+2\omega\dot{a}+\delta a\dot{\phi}\cos 2\phi+(\delta\dot{a}+\kappa a)\sin 2\phi = 0\,, \\ \dot{\nu} + \delta_\theta\nu + (\dot{\omega} + \delta_n\omega)a^2 + 2\omega\dot{a}a = \mu\,, \\ \dot{\phi} = \nu - \omega\,. \end{cases} \tag{2.21}$$

Подставив в систему (2.21) $a = a_0 = \mathrm{const}$, $\omega = \omega_0 = \mathrm{const}$, $\nu = \nu_0 = \mathrm{const}$, получим систему трансцендентных уравнений относительно a_0, ω_0, ν_0:

$$\begin{cases} (1 - \omega_0^2 + \kappa\cos 2\phi - \delta(\nu_0 - \omega_0)\sin 2\phi)a_0 = 0\,, \\ (\delta_n\omega_0 + \kappa\sin 2\phi - (\delta_r - \delta\cos 2\phi)(\nu_0 - \omega_0))a_0 = 0\,, \\ \delta_\theta\nu_0 + \delta_n\omega_0 a_0^2 = \mu\,. \end{cases} \tag{2.22}$$

Система (2.22) имеет очевидное тривиальное решение $a_0 = 0$, $\nu_0 = \mu/\delta_\theta$, отвечающее стационарному режиму собственного вращения. Если считать $a_0 \neq 0$, то система (2.22) примет вид

$$\begin{cases} 1 - \omega_0^2 + \kappa\cos 2\phi = \delta(\nu_0 - \omega_0)\sin 2\phi\,, \\ \delta_n\omega_0 + \kappa\sin 2\phi = (\nu_0 - \omega_0)(\delta_r - \delta\cos 2\phi)\,, \\ \delta_\theta\nu_0 + \delta_n\omega_0 a_0^2 = \mu\,. \end{cases} \tag{2.23}$$

Покажем, что система (2.23) имеет стационарное решение типа регулярной синхронной прецессии. Полагая $\omega_0 = \nu_0$ и $\phi = \phi_0$, получаем

$$\begin{cases} 1 - \nu_0^2 = -\kappa \cos 2\phi_0 \,, \\ \delta_n \nu_0 = -\kappa \sin 2\phi_0 \,, \\ \delta_n \nu_0 a_0^2 = \mu - \delta_\theta \nu_0 \,. \end{cases} \tag{2.24}$$

Исключив из первых двух уравнений (2.24) неизвестную ϕ_0, придем к уравнению

$$(1 - \nu_0^2)^2 + \delta_n^2 \nu_0^2 - \kappa^2 = 0 \,, \tag{2.25}$$

левая часть которого совпадает с выражением (2.9) для определителя D. Отсюда следует, что регулярная синхронная прецессия может происходить только на критических частотах ν_{01} или ν_{02}, определяемых формулой (2.11). Подставляя в последнее уравнение (2.24) значения критических частот, находим выражения для соответствующих амплитуд и углов сдвига фаз:

$$a_{0i}^2 = \frac{\mu - \delta_\theta \nu_{0i}}{\delta_n \nu_{0i}} \,, \qquad \phi_{0i} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\delta_n \nu_{0i}}{1 - \nu_{0i}^2} \,, \qquad i = 1, 2 \,. \tag{2.26}$$

Если параметр $\mu \in (\delta_\theta \nu_{01} \,, \delta_\theta \nu_{02})$, то из первой формулы (2.26) имеем $a_{01}^2 > 0$ и $a_{02}^2 < 0$, откуда следует, что синхронная прецессия может происходить только с частотой ν_{01}.

На рис. 15 представлены соответственно графики амплитуд, углов сдвига фаз, угловых скоростей собственного вращения и прецессионного движения, построенные в результате численного интегрирования системы (2.21) при следующих значениях безразмерных параметров: $\delta_n = \delta_r = 0.11$, $\delta_\theta = 0.08$, $\alpha = 0.3$, $\delta = 0$, $\kappa = 0.3$. Критические значения $\mu_1 = 0.06764$ и $\mu_2 = 0.09026$ рассчитаны по формулам (2.11) и (2.17). Кривые 1 и 2 построены для случаев $\mu = 0.08$ и $\mu = 0.09$, принадлежащих критической области $(\mu_1 \,, \mu_2)$. Штриховые прямые отвечают установившимся значениям переменных и рассчитаны по формулам (2.26). Графики подтверждают, что в случаях, когда $\mu \in (\mu_1 \,, \mu_2)$, установившиеся движения ротора представляют собой регулярные синхронные прецессии с частотой, равной первой критической скорости ν_{01}.

Рассмотрим движение ротора в случае, когда внешний вращающий момент превышает пороговое значение, определяющее границу области устойчивости режима собственного вращения (2.20). Для выбранных значений параметров пороговая частота, рассчитанная по формуле (2.19), будет равна $\nu_* = 2.0056$, откуда находим $\mu_* = \delta_\theta \nu_* = 0.1605$.

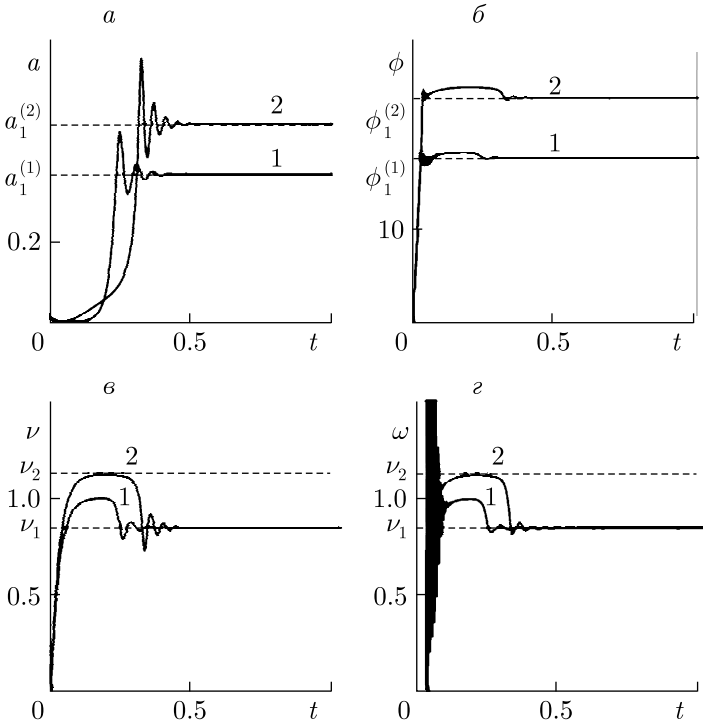

Рис. 15. Синхронные прецессии уравновешенного ротора в критической области

На рис. 16 представлены результаты численного интегрирования системы (2.21) при $\mu = 0.25 > \mu_*$. Графики показывают, как меняются со временем амплитуда a прецессионного движения ротора, угловые скорости прецессионного движения ω и собственного вращения ν и угол сдвига фаз ϕ. Из рисунка видно, что ортотропия упругих характеристик вала оказывает на режим автоколебаний ротора такое же влияние, как и неуравновешенность (см. рис. 11), порождая малые быстрые осцилляции амплитуды и угловых скоростей, накладывающиеся на медленно меняющиеся функции времени. При этом фазовый угол представляет собой быстро меняющуюся функцию времени, совершая большое число полных оборотов за время одного оборота ротора.

Учитывая характер автоколебаний ротора, будем искать частное решение системы уравнений (2.21) в виде суперпозиции медленных и быстрых движений:

$$a(t,\phi)=\tilde{a}(t)+\epsilon A(\phi)\,, \quad \omega(t,\phi)=\tilde{\omega}(t)+\epsilon W(\phi)\,, \quad \nu(t,\phi)=\tilde{\nu}+\epsilon V(\phi)\,, \quad (2.27)$$

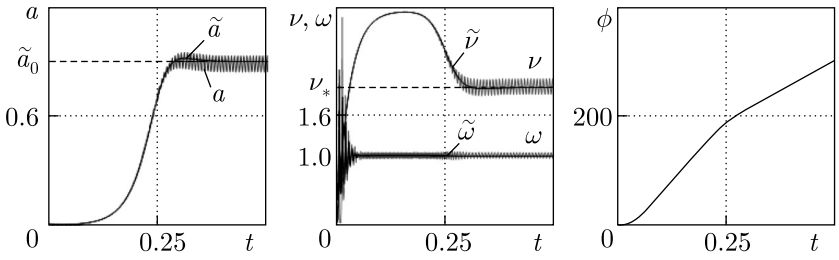

Рис. 16. Асинхронные автоколебания

где $\tilde{a}(t)$, $\tilde{\omega}(t)$ и $\tilde{\nu}(t)$ — медленно меняющиеся функции времени, $A(\phi)$, $W(\phi)$ и $V(\phi)$ — периодические функции быстро изменяющегося угла ϕ, имеющие нулевые средние за период значения, а $\epsilon \ll 1$ — малый параметр. Наибольший интерес в решении (2.27) представляют медленные компоненты, отражающие общую тенденцию характера автоколебательного режима. Эти компоненты могут быть найдены при помощи метода осреднения. Подставляя (2.27) в (2.21) и усредняя полученные соотношения по ϕ за период, получим в первом приближении, с учетом малости параметров ϵ, κ и δ, систему уравнений относительно «медленных» переменных $\tilde{a}$, $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\nu}$:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{a}} + (\delta_n + \delta_r)\dot{\tilde{a}} + (1 - \tilde{\omega}^2)\tilde{a} = 0\,, \\ (\dot{\tilde{\omega}} + \delta_n\tilde{\omega} - \delta_r(\tilde{\nu} - \tilde{\omega}))\tilde{a} + 2\,\tilde{\omega}\dot{\tilde{a}} = 0\,, \\ \dot{\tilde{\nu}} + \delta_\theta\tilde{\nu} + \delta_r(\tilde{\nu} - \tilde{\omega})\tilde{a}^2 = \mu\,. \end{cases} \tag{2.28}$$

Приближенная система (2.28) с точностью до обозначений совпадает с точной системой (1.33) для ротора с изотропным валом, поэтому она имеет стационарное решение типа регулярной асинхронной прецессии, аналогичное решению (1.35):

$$\tilde{\omega}_0 = 1\,, \quad \tilde{\nu}_0 = \nu_* = 1 + \frac{\delta_n}{\delta_r}\,, \quad \tilde{a}_0 = \sqrt{\frac{1}{\delta_n}\left(\mu - \delta_\theta(1 + \frac{\delta_n}{\delta_r})\right)}\,, \tag{2.29}$$

а условие существования и асимптотической устойчивости данного решения будет иметь вид

$$\mu > \delta_\theta\left(1 + \frac{\delta_n}{\delta_r}\right) = \delta_\theta\nu_* = \mu_*\,. \tag{2.30}$$

Результаты численного интегрирования приближенной системы (2.28) также показаны на рис. 16. Можно отметить, что численные решения точной

системы (2.21) отличаются от решений приближенной системы (2.28) появлением высокочастотных осцилляций амплитуды и угловых скоростей, обусловленных ортотропией упругих характеристик вала.

Вынужденные синхронные прецессии и автоколебания неуравновешенного ротора. Вынужденные синхронные прецессии статически неуравновешенного ротора под действием инерционной нагрузки удобно исследовать с помощью уравнений во вращающейся системе координат. Считая внешний вращающий момент постоянным, подставим в систему (2.5) стационарное решение вида $\xi = \xi_0 = \mathrm{const}$, $\eta = \eta_0 = \mathrm{const}$, $\nu = \nu_0 = \mathrm{const}$. В результате с учетом выражений (2.7) получим алгебраическую систему уравнений относительно координат ξ_0, η_0 и угловой скорости ν_0:

$$\begin{cases} (1-\nu_0^2+\kappa)\xi_0 - \delta_n\nu_0\eta_0 = \varepsilon\nu_0^2\cos\alpha\,, \\ \delta_n\nu_0\xi_0 + (1-\nu_0^2-\kappa)\eta_0 = \varepsilon\nu_0^2\sin\alpha\,, \\ \delta_\theta\nu_0 + 2\kappa\xi_0\eta_0 = \mu - \varepsilon\nu_0^2(\xi_0\sin\alpha - \eta_0\cos\alpha)\,. \end{cases} \tag{2.31}$$

Из первых двух уравнений (2.31) находим

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \varepsilon\nu_0^2\frac{(1-\nu_0^2-\kappa)\cos\alpha+\delta_n\nu_0\sin\alpha}{(1-\nu_0^2)^2+\delta_n^2\nu_0^2-\kappa^2}\,, \\ \eta_0 &= \varepsilon\nu_0^2\frac{(1-\nu_0^2+\kappa)\sin\alpha-\delta_n\nu_0\cos\alpha}{(1-\nu_0^2)^2+\delta_n^2\nu_0^2-\kappa^2}\,, \end{aligned} \tag{2.32}$$

откуда получаем выражения для расчета амплитуды и фазового угла установившихся вынужденных колебаний в зависимости от угловой скорости ротора:

$$a_0 = \sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2}\,, \qquad \phi_0 = \operatorname{arctg}\frac{\eta_0}{\xi_0}\,. \tag{2.33}$$

Выражения (2.32) и (2.33) позволяют построить стационарные амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики вынужденных колебаний ротора.

На рис. 17,*а* представлены АЧХ и ФЧХ для слабо ортотропного ротора, рассчитанные при $\varepsilon = 0.05$, $\delta_n = 0.1$, $\delta_\theta = 0.1$, $\kappa_\eta = 0.9\kappa_\xi$ или ($|\kappa| = 0.05$, $\delta_n^* = 0.05$), а на рис. 17,*б* — для сильно ортотропного ротора ($\kappa_\eta = 2\kappa_\xi$ или $|\kappa| = 0.333$, $\delta_n^* = 0.338$). Для сравнения штриховыми кривыми показаны АЧХ и ФЧХ для изотропного ротора ($\kappa = \alpha = 0$). Графики показывают, что в случае слабо ортотропного вала, когда параметры системы не удовлетворяют условиям (2.10) и (2.13), ротор имеет одну критическую частоту. При этом максимальная амплитуда отклонения центра

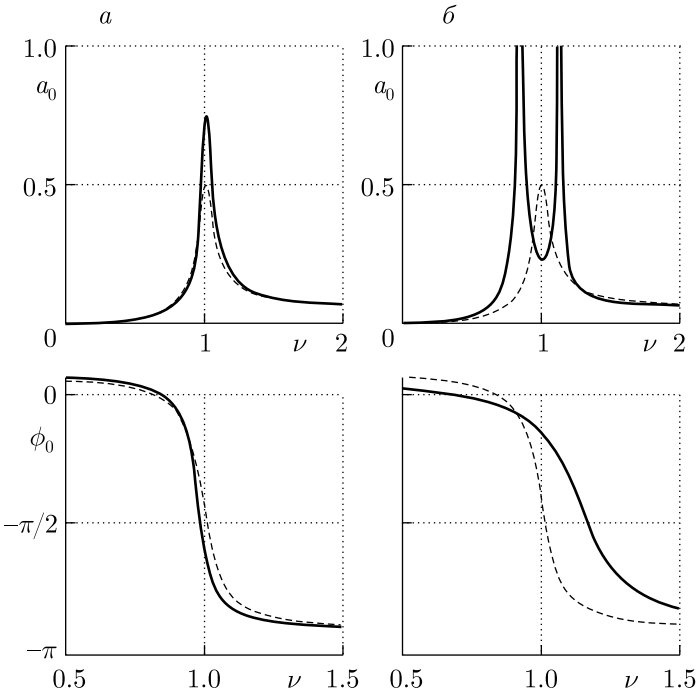

Рис. 17. АЧХ и ФЧХ ротора со слабо ортотропным валом (*а*) и с сильно ортотропным валом (*б*)

диска конечна. В случае сильной ортотропии вала, когда условия (2.10), (2.13) выполняются, происходит расщепление критической частоты и разрыв АЧХ. Отметим, что, несмотря на наличие внешнего демпфирования, знаменатель в выражениях (2.32) на критических частотах (2.11) обращается в нуль, что приводит к стремлению амплитуды к бесконечности. Поэтому более реальную картину вынужденных колебаний ротора дают амплитудно-моментная (АМХ) и частотно-моментная (ЧМХ) характеристики, построенные с привлечением третьего уравнения системы (2.31), учитывающего ограниченность внешнего возбуждения.

На рис. 18 представлены АМХ и ЧМХ, рассчитанные для ротора со слабо ортотропным валом, а рис. 19 демонстрирует аналогичные характеристики для ротора с сильно ортотропным валом. В обоих случаях мы видим ярко проявляющийся нелинейный характер АМХ и ЧМХ, который приводит к появлению области, в которой одному значению параметра μ отвечают несколько стационарных решений, практическая осуществимость которых будет определяться, исходя из условий устойчивости.

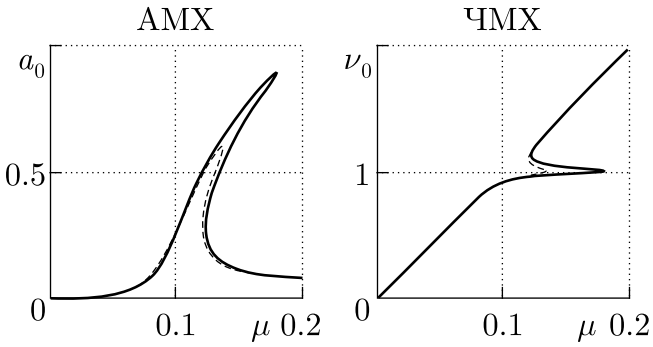

Рис. 18. АМХ и ЧМХ вынужденных колебаний ротора со слабо ортотропным валом

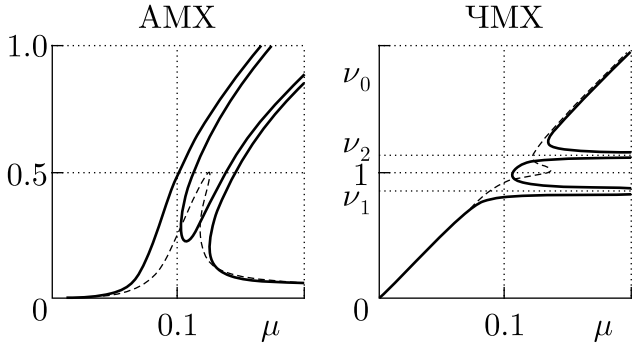

Рис. 19. АМХ и ЧМХ вынужденных колебаний ротора с сильно ортотропным валом

Для исследования устойчивости стационарных решений подставим в систему (2.5) $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$, $\eta = \eta_0 + \Delta\eta$, $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$, где $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ и $\Delta\nu$ — малые вариации. Разлагая полученные выражения в ряды и пренебрегая малыми второго порядка и выше, получим линейную систему уравнений в вариациях:

$$\mathbf{A}\dot{\zeta} + \mathbf{B}\zeta = 0\,, \tag{2.34}$$

где

$$\zeta = \{\Delta\dot{\xi}, \Delta\dot{\eta}, \Delta\nu, \Delta\xi, \Delta\eta\}^T\,,$$

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\eta_0 - \varepsilon S_\alpha & \delta_n + \delta_\xi & -2\nu_0 \\ 0 & 1 & \xi_0 + \varepsilon C_\alpha & 2\nu_0 & \delta_n + \delta_\eta \\ -\varepsilon S_\alpha & \varepsilon C_\alpha & 1 + \varepsilon(C_\alpha\xi_0 + S_\alpha\eta_0) & \delta_\xi\eta_0 + 2\varepsilon C_\alpha\nu_0 & -\delta_\eta\xi_0 + 2\varepsilon C_\alpha\nu_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\,,$$

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -\delta_n\eta_0 - 2\nu_0(\varepsilon C_\alpha + \xi_0) & 1+\kappa-\nu_0^2 & -\delta_n\nu_0 \\ 0 & 0 & \delta_n\xi_0 - 2\nu_0(\varepsilon S_\alpha + \eta_0) & \delta_n\nu_0 & 1-\kappa-\nu_0^2 \\ 0 & 0 & \delta_\theta - 2\varepsilon\nu_0(C_\alpha\eta_0 - S_\alpha\xi_0) & 2\kappa\eta_0 + \varepsilon S_\alpha\nu_0^2 & 2\kappa\xi_0 - \varepsilon C_\alpha\nu_0^2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь для сокращения записи введены следующие обозначения: $S_\alpha = \sin\alpha$, $C_\alpha = \cos\alpha$.

Характеристический полином системы (2.34) имеет пятый порядок

$$|\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sum_{k=0}^{5} b_k\lambda^{5-k} = 0\,, \tag{2.35}$$

а необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости стационарных решений на основании критерия Льенара и Шипара имеют вид

$$b_k > 0, \;\; k = 0, \ldots, 5\,, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0\,,$$

где Δ_2, и Δ_4 — соответствующие миноры матрицы Гурвица.

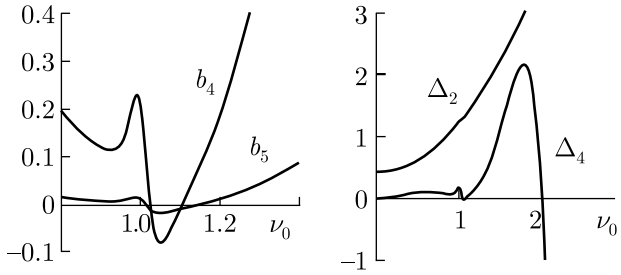

Рис. 20. Области устойчивости для слабо ортотропного ротора

На рис. 20 и 21 показаны графики зависимостей коэффициентов b_k и миноров Δ_2, Δ_4 от ν_0 соответственно для слабо и сильно ортотропного ротора. Интервалы частот, в которых все графики лежат выше оси абсцисс, отвечают асимптотически устойчивым вынужденным синхронным прецессиям ротора. Графики показывают, что в обоих случаях границы «критической» области неустойчивости определяют два положительных действительных корня ν_1 и ν_2 уравнения $b_5 = 0$, а пороговое значение ν_* частоты синхронных прецессий — максимальный действительный корень уравнения $\Delta_4 = 0$. После этого пороговую величину параметра μ_* можно найти из последнего уравнения системы (2.31).

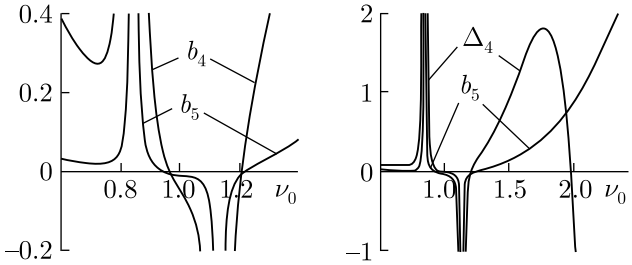

Рис. 21. Области устойчивости для сильно ортотропного ротора

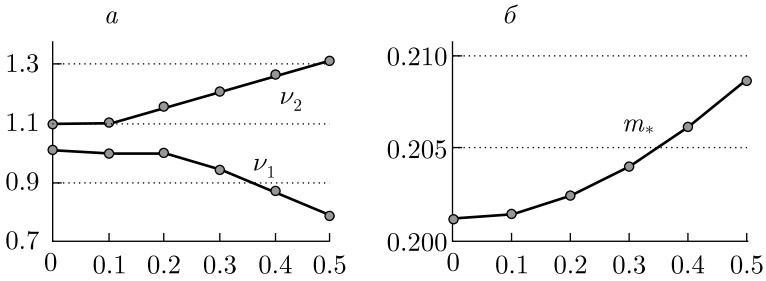

Рис. 22. Границы «критической» области неустойчивости (*а*) и пороговое значение параметра μ (б)

В таблице 1 приведены результаты расчета границ «критической области» неустойчивости ν_1, ν_2 и величины порогового момента μ_* в зависимости от величины коэффициента ортотропии κ. Данные из таблицы, представленные на рис. 22, показывают расширение критической области неустойчивости и увеличение порогового значения μ_* при увеличении параметра κ.

Таблица 1. **Границы области неустойчивости и пороговые моменты**

κ	α	ν_1	ν_2	μ_*
0	0	1.00916	1.09362	0.20122
0.1	0.1	0.99751	1.10100	0.20151
0.2	0.2	0.99795	1.15168	0.20247
0.3	0.3	0.94301	1.20615	0.20405
0.4	0.4	0.86862	1.26059	0.20616
0.5	0.5	0.78862	1.31403	0.20870

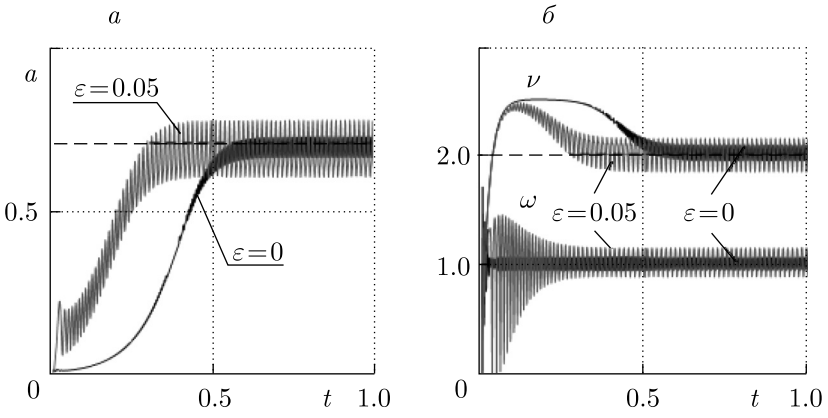

Рис. 23. Асинхронные автоколебания неуравновешенного ортотропного ротора

Рассмотрим движение ротора в случае, когда $\mu > \mu_*$, то есть внешний вращающий момент превышает пороговое значение, определяющее границу области устойчивости вынужденных синхронных прецессий. На рис. 23 представлены результаты численного интегрирования системы (2.6) в режиме асинхронных автоколебаний при следующих значениях безразмерных параметров: $\delta_n = \delta_\xi = \delta_\eta = \delta_\theta = 0.1$, $\delta = 0$, $\kappa = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\mu = 0.25 > \mu_* = 0.20405$ (см. таблицу 1).

Графики показывают, как меняются со временем амплитуда a прецессионного движения ротора (а) и угловые скорости прецессионного движения ω и собственного вращения ν (б). Для сравнения на рисунках приведены аналогичные графики для уравновешенного ротора ($\varepsilon = 0$), показанные более темным цветом. Из рисунков следует, что неуравновешенность ротора не влияет на средние установившиеся значения амплитуды автоколебаний и угловых скоростей собственного вращения и прецессионного движения ротора, но при этом быстрые осцилляции амплитуды и угловых скоростей у неуравновешенного ротора более интенсивны, чем у уравновешенного.

Основные выводы. На основании результатов аналитического и численного исследования модели ротора с ортотропно упругим валом можно констатировать следующее:

1. Уравновешенный ротор с ортотропным упругим валом может иметь три типа установившихся режимов движения: собственное вращение при отсутствии изгиба вала, регулярную синхронную прецессию и асинхронные автоколебания.

2. В случае слабой ортотропии вала (при нарушении условия (2.10)) режим собственного вращения асимптотически устойчив в докритической и закритической областях частот при условии, что внешний вращающий момент меньше порогового значения, определяемого соотношением (2.20).

3. В случае достаточно сильной ортотропии вала критическая частота расщепляется на две, в результате чего появляется «критическая область» неустойчивости режима собственного вращения, для которой имеют место асимптотически устойчивые регулярные синхронные прецессии ротора. Установившаяся угловая скорость ротора в критической области не зависит от приложенного вращающего момента и равна первой критической скорости.

4. В случае, когда внешний вращающий момент превышает пороговое значение, в системе устанавливается асимптотически устойчивый режим асинхронных автоколебаний.

§ 3. Автоматическая балансировка статически неуравновешенного ротора[6]

Принцип действия шарового автобалансировочного устройства. В некоторых типах высокоскоростных роторных машин — центрифугах, сепараторах, центробежных насосах и др. — дисбаланс ротора может меняться в процессе их работы. В таких случаях для снижения уровня вибрации машины необходима непрерывная балансировка ротора. Для решения этой проблемы были разработаны технологии, основанные на использовании активных и пассивных автобалансировочных устройств (АБУ) различного типа. На практике широкое распространение получили пассивные шаровые АБУ, которые нашли применение не только в вышеупомянутых роторных машинах, но и в высокоточных мехатронных приборах — приводах дисководов, микроэлектродвигателях и т. п.

Шаровое АБУ предназначено для компенсации дисбаланса упруго подвешенного ротора на угловых скоростях, превышающих его первую критическую скорость. Оно представляет собой обойму, содержащую одну или несколько круговых полостей, в которых могут свободно перемещаться массивные шары. Шаровое АБУ закрепляется на роторе так, чтобы ось симметрии обоймы совпадала с полярной осью ротора. Принцип действия

[6]Параграф содержит материалы, опубликованные в статьях: *Быков В. Г.* Стационарные режимы движения неуравновешенного ротора с автобалансировочным механизмом // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. 2. С. 90–101; *Быков В. Г.* Нестационарные режимы движения статически неуравновешенного ротора с автобалансировочным механизмом // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 3. С. 89–96.

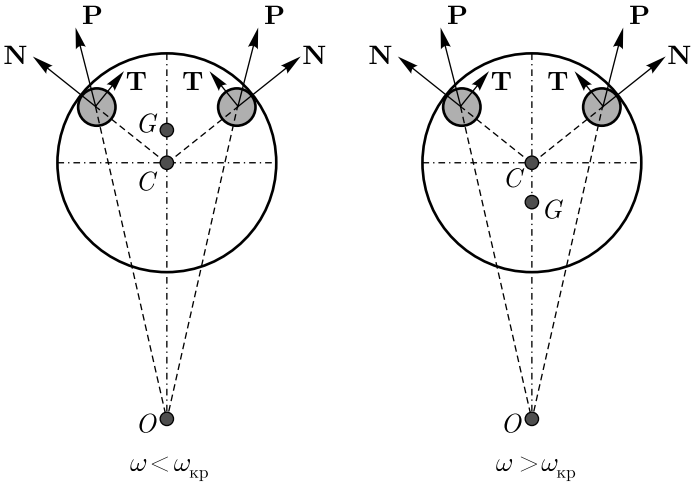

Рис. 24. Принцип действия шарового АБУ

шарового АБУ, впервые запатентованного в конце XIX века[7], представлен на рис. 24.

При вращении ротора с угловой скоростью меньшей критической, шары под действием тангенсальных составляющих T центробежных сил P будут сближаться, перемещаясь на «тяжелую» сторону ротора, что ведет к увеличению общего дисбаланса системы. Если угловая скорость ротора выше критической, то шары также сближаются под действием центробежных сил, но в силу эффекта самоцентрирования ротора их движение будет направлено к «легкой» стороне, что при достаточной массе балансировочных шаров приведет к полному уравновешиванию системы. При этом точки C и O совпадут, силы T обратятся в нуль, и движение шаров прекратится. Таким образом можно констатировать, что уравновешивающий эффект при использовании АБУ проявляется только в закритической области частот.

Несмотря на то, что первое теоретическое исследование, посвященное автобалансировке роторов при помощи шарового устройства, появилось еще 1932 г.[8], интерес к этой проблеме не ослабевает и сегодня. Об этом свидетельствуют как многочисленные статьи и патенты, так и появившиеся за последние несколько лет фирменные технологии по применению АБУ в машиностроении и бытовой технике (рис. 25).

[7] *Herrick G. M.* Self-adjusting counter-balance: patent № 414642 US, 1889.

[8] *Thearle E. L.* A new type of dynamic-balancing machine // Transactions of ASME 54 (12), 1932, pp. 131–141.

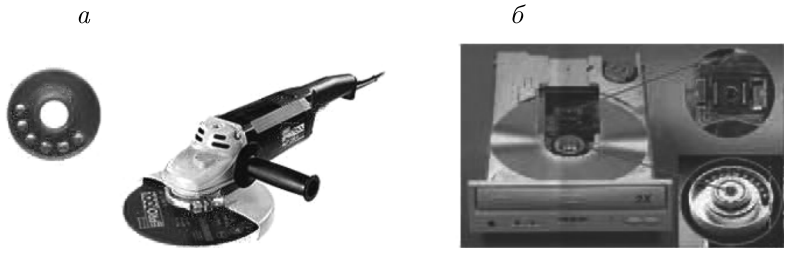

Рис. 25. Технология Autobalancer для ручных шлифовальных машин (*а*), DVD-плеер LG Electronics (*б*)

Механическая модель ротора, оснащенного шаровым автобалансировочным устройством. Рассмотрим модель статически неуравновешенного ротора в виде массивного жесткого диска, симметрично закрепленного посередине вертикального невесомого упругого вала, вращающегося в шарнирных опорах O_1 и O_2 под действием приложенного внешнего момента M_e (рис. 26).

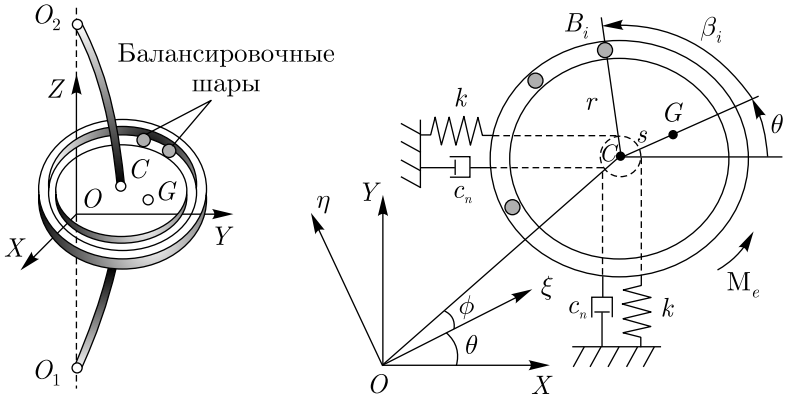

Рис. 26. Механическая модель ротора с шаровым АБУ

Для компенсации дисбаланса ротор оснащен пассивным шаровым АБУ в виде закрепленной на одной оси с диском и заполненной вязкой жидкостью круговой полости, в которой могут свободно перемещаться балансировочные шары одинаковой массы. В соответствии с моделью ротора Джеффкотта предполагаем, что движение диска происходит только в горизонтальной плоскости, перпендикулярной оси вала.

Пусть точки G и C обозначают соответственно центр масс диска и точку крепления диска к валу. Для описания движения ротора и балансировочных шаров введем две системы координат: неподвижную — $OXYZ$, и вращающуюся — $C\xi\eta\zeta$, как показано на рис. 26. Обозначим через s статический эксцентриситет ротора, через m — массу диска ротора и закрепленного на нем корпуса АБУ (без учета массы шаров), через J_G — момент инерции ротора относительно полярной оси, через k — коэффициент упругости вала, через m_b — массу одного балансировочного шара, через r — радиус круговой полости АБУ.

Если АБУ содержит n шаров, то в силу сделанных допущений описанная механическая система имеет $n+3$ степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем абсолютные координаты x и y точки C, угол θ поворота диска в плоскости XOY, углы β_i $(i = \overline{1,n})$ отклонений шаров относительно круговой полости АБУ и запишем выражения для кинетической энергии системы и потенциальной энергии упругого вала:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_b\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{x}_{B_i}^2 + \dot{y}_{B_i}^2\right),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2).$$

Здесь

$$x_G = x + s\cos\theta, \qquad x_{B_i} = x + r\cos(\theta + \beta_i),$$
$$y_G = y + s\sin\theta, \qquad y_{B_i} = y + r\sin(\theta + \beta_i).$$

Полагая, что внутреннее трение и конструкционное демпфирование пренебрежимо малы, будем учитывать в нашей модели только силы внешнего вязкого сопротивления, действующие на ротор, и силы вязкого сопротивления в обойме АБУ, действующие на балансировочные шары. Обозначив через c_n, c_θ и c_b коэффициенты демпфирования, характеризующие потери энергии соответственно при поперечных движениях диска, вращении вала в подшипниках и движении балансировочных шаров, запишем выражение для диссипативной функции Рэлея:

$$R = \frac{1}{2}c_n(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}c_\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}c_b\sum_{i=1}^{n}(\dot{\psi}_i)^2.$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода, описывающие движение ротора с АБУ в неподвижной системе координат, имеют вид

$$\begin{cases} (m+nm_b)\ddot{x}+c_n\dot{x}+kx=-\dfrac{d^2}{dt^2}\left[ms\cos\theta+m_br\sum\limits_{j=1}^{n}\cos\varphi_j\right], \\ (m+nm_b)\ddot{y}+c_n\dot{y}+ky=-\dfrac{d^2}{dt^2}\left[ms\sin\theta+m_br\sum\limits_{j=1}^{n}\sin\varphi_j\right], \\ J_C\ddot{\theta}+c_\theta\dot{\theta}=M_e+ms(\ddot{x}\sin\theta-\ddot{y}\cos\theta)+c_b\sum\limits_{j=1}^{n}(\dot{\varphi}_j-\dot{\theta}), \\ m_br^2\ddot{\varphi}_j+c_b(\dot{\varphi}_j-\dot{\theta})=m_br(\ddot{x}\sin\varphi_j-\ddot{x}\cos\varphi_j), \quad j=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\varphi_i=\theta+\beta_i$, $J_C=J_G+ms^2$.

Перейдя к безразмерным координатам $\bar{x}=x/r$, $\bar{y}=y/r$ и времени $\bar{t}=\Omega t$ $(\Omega=\sqrt{k/m})$, представим уравнения (3.1) в безразмерной форме:

$$\begin{cases} (1+n\chi)\ddot{x}+\delta_n\dot{x}+x=\varepsilon(\dot{\theta}^2\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta)+\chi\sum\limits_{i=1}^{n}(\dot{\varphi}_i^2\cos\varphi_i+\ddot{\varphi}_i\sin\varphi_i), \\ (1+n\chi)\ddot{y}+\delta_n\dot{y}+y=\varepsilon(\dot{\theta}^2\sin\theta-\ddot{\theta}\cos\theta)+\chi\sum\limits_{i=1}^{n}(\dot{\varphi}_i^2\sin\varphi_i-\ddot{\varphi}_i\cos\varphi_i), \\ \rho\ddot{\theta}+\delta_\theta\dot{\theta}=\mu+\varepsilon(\ddot{x}\sin\theta-\ddot{y}\cos\theta)+\chi\delta_b\sum\limits_{i=1}^{n}(\dot{\varphi}_i-\dot{\theta}), \\ \ddot{\varphi}_i+\delta_b(\dot{\varphi}_i-\dot{\theta})=\ddot{x}\sin\varphi_i-\ddot{y}\cos\varphi_i, \quad i=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{3.2}$$

где

$$\chi=\frac{m_b}{m}, \qquad \varepsilon=\frac{s}{r}, \qquad \rho=\frac{J_C}{mr^2\Omega}, \qquad \mu=\frac{M_e}{mr^2\Omega^2},$$
$$\delta_n=\frac{c_n}{m\Omega}, \qquad \delta_\theta=\frac{c_\theta}{mr^2\Omega}, \qquad \delta_b=\frac{c_b}{m_br^2\Omega}.$$

В системе уравнений (3.2) точка обозначает производную по безразмерному времени, а черта над безразмерными переменными для простоты опущена.

Предположим, что вал вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\theta}=\nu$. Обозначим через ξ и η координаты точки C во вращающейся системе координат и выразим через них неподвижные координаты

$$x=\xi\cos\nu t-\eta\sin\nu t, \qquad y=\xi\sin\nu t+\eta\cos\nu t. \tag{3.3}$$

Подставим выражения (3.3) в систему (3.2) и проделаем следующие преобразования. Умножим первое уравнение на $\cos\nu t$ и сложим со вторым, умноженным на $\sin\nu t$, затем умножим второе уравнение на $\cos\nu t$ и вычтем первое, умноженное на $\sin\nu t$. В результате получим систему уравнений относительно координат ξ, η и β_i:

$$\begin{cases}(1+n\chi)(\ddot{\xi}-2\nu\dot{\eta}-\nu^2\xi)+\delta_n(\dot{\xi}-\nu\eta)+\xi=\varepsilon\nu^2+\chi\sum\limits_{i=1}^{n}((\nu+\dot{\beta}_i)^2\cos\beta_i+\ddot{\beta}_i\sin\beta_i),\\ (1+n\chi)(\ddot{\eta}+2\nu\dot{\xi}-\nu^2\eta)+\delta_n(\dot{\eta}+\nu\xi)+\eta=\chi\sum\limits_{i=1}^{n}((\nu+\dot{\beta}_i)^2\sin\beta_i-\ddot{\beta}_i\cos\beta_i)\,,\\ \ddot{\beta}_i+\delta_b\dot{\beta}_i=(\ddot{\xi}-2\nu\dot{\eta}-\nu^2\xi)\sin\beta_i-(\ddot{\eta}+2\nu\dot{\xi}-\nu^2\eta)\cos\beta_i,\quad i=\overline{1,n}\,.\end{cases} \tag{3.4}$$

Режимы равномерного вращения ротора, при которых координаты ξ, η и β_i остаются постоянными, будем называть стационарными. Уравнения, описывающие стационарные режимы, получим, положив в уравнениях (3.4) $\xi=\xi_0=\mathrm{const}$, $\eta=\eta_0=\mathrm{const}$ и $\beta_i=\beta_{i0}=\mathrm{const}$:

$$\begin{cases}(1-(1+n\chi)\nu^2)\xi_0-\delta_n\nu\eta_0=\varepsilon\nu^2+\chi\nu^2\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\beta_{i0}\,,\\ (1-(1+n\chi)\nu^2)\eta_0+\delta_n\nu\xi_0=\chi\nu^2\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\beta_{i0}\,,\\ \xi_0\sin\beta_{i0}-\eta_0\cos\beta_{i0}=0\,,\qquad i=\overline{1,n}\,.\end{cases} \tag{3.5}$$

Из последнего уравнения (3.5) вытекает, что для всех $i=\overline{1,n}$

$$\beta_{i0}=\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta_0}{\xi_0}\right)+\pi k,\quad k=0,1,\ldots\,.$$

Из этих условий следует, что в случае несбалансированного стационарного режима балансировочные шары могут занимать положения только на прямой, проходящей через точки O и C, располагаясь либо на одной, либо на противоположных сторонах круговой обоймы.

Сбалансированный стационарный режим. Условия существования и устойчивости. Стационарный режим собственного вращения ротора, при котором геометрический центр диска C лежит на оси O_1O_2, далее будем называть сбалансированным стационарным режимом. Полагая в уравнениях (3.5) $\xi_0=\eta_0=0$, получаем систему двух уравнений

относительно углов отклонения балансировочных шаров β_{i0}

$$\chi \sum_{i=1}^{n} \cos\beta_{i0} = -\varepsilon\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} \sin\beta_{i0} = 0\,. \tag{3.6}$$

При $n = 1$ система (3.6) имеет единственное решение $\beta_1 = \pi$, существующее только при выполнении условия $\chi = \varepsilon$. Отсюда следует, что одного шара недостаточно для уравновешивания ротора с переменным дисбалансом. При $n = 2$ решение системы (3.6) имеет вид

$$\beta_{10} = \beta\,, \quad \beta_{20} = -\beta\,, \quad \text{где} \quad \beta = \pm\arccos\left(-\frac{\varepsilon}{2\chi}\right)\,, \tag{3.7}$$

и существует при условии $2\chi \geqslant \varepsilon$. В случае, когда $n > 2$, то есть АБУ содержит более двух балансировочных шаров, система (3.6) имеет бесконечное множество решений, которые существуют при выполнении условия $n\chi \geqslant \varepsilon$, или в размерных параметрах

$$nm_b r \geqslant ms\,. \tag{3.8}$$

Таким образом, для существования сбалансированного стационарного режима необходимо, чтобы величина максимального дисбаланса всех балансировочных шаров была не меньше величины дисбаланса ротора.

Проведем исследование устойчивости сбалансированного стационарного режима для ротора, оснащенного АБУ с двумя шарами. Подставим в уравнения (3.4) $n = 2$, $\xi = \Delta\xi$, $\eta = \Delta\eta$, $\beta_1 = \beta + \Delta\beta_1$ и $\beta_2 = -\beta + \Delta\beta_2$, где $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ и $\Delta\beta_i$, $i = 1, 2$, — малые вариации обобщенных координат. Разлагая полученные выражения в ряды и пренебрегая малыми второго порядка и выше, получаем линейную систему уравнений в вариациях:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C} = \mathbf{0}\,, \tag{3.9}$$

где

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1+2\chi & 0 & -\chi\sin\beta & \chi\sin\beta \\ 0 & 1+2\chi & \chi\cos\beta & \chi\cos\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta & 1 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \delta_n & -2(1+2\chi)\nu & -2\chi\nu\cos\beta & -2\chi\nu\cos\beta \\ 2(1+2\chi)\nu & \delta_n & -2\chi\nu\sin\beta & 2\chi\nu\sin\beta \\ 2\nu\cos\beta & 2\nu\sin\beta & \delta_b & 0 \\ 2\nu\cos\beta & -2\nu\sin\beta & 0 & \delta_b \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 1-(1{+}2\chi)\nu^2 & -\delta_n\nu & \chi\nu^2\sin\beta & -\chi\nu^2\sin\beta \\ \delta_n\nu & 1-(1{+}2\chi)\nu^2 & -\chi\nu^2\cos\beta & -\chi\nu^2\cos\beta \\ \nu^2\sin\beta & -\nu^2\cos\beta & 0 & 0 \\ -\nu^2\sin\beta & -\nu^2\cos\beta & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Характеристический полином системы (3.9) имеет восьмой порядок:

$$|\lambda^2\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} + \mathbf{C}| = \sum_{i=0}^{8} b_i\lambda^{8-i} = 0\,, \tag{3.10}$$

а его коэффициенты равны соответственно

$$\begin{aligned}
&b_0 = 1 + 2\chi + \chi^2\sin^2 2\beta, \qquad b_1 = 2(1+\chi)(\delta_n + \delta_b(1+2\chi))\,,\\
&b_2 = 2(1+\chi) + \delta_n^2 + 2\delta_n\delta_b(2+3\chi) + \delta_b^2(1+2\chi)^2 +\\
&\quad + 2\nu^2(1 + 3\chi + \chi^2(3-\cos 4\beta))\,,\\
&b_3 = 2(\delta_n + \delta_b(2+3\chi) + \delta_n\delta_b(\delta_n + \delta_b(1+2\chi)) +\\
&\quad + \nu^2(\delta_n(1+4\chi) + \delta_b(2 + 7\chi + 6\chi^2)))\,,\\
&b_4 = (1+\delta_n\delta_b)^2 + 2\delta_b(\delta_n + \delta_b(1+2\chi)) + \nu^4(1 + 6\chi + \chi^2(11 - 3\cos 4\beta)) +\\
&\quad + \nu^2(-2 + 8\chi + \delta_n^2 + 2\delta_b(2\delta_n(1+3\chi) + \delta_b(1+2\chi)^2)\,,\\
&b_5 = 2\delta_b(1+\delta_n\delta_b) + 2\nu^2(\delta_n\delta_b(\delta_n + \delta_b(1+2\chi) + 2\delta_b(\chi-1)) +\\
&\quad + 2\nu^4(3\chi\delta_n + \delta_b(1 + 5\chi + 6\chi^2))\,,\\
&b_6 = \delta_b^2 + \nu^2\delta_b^2(\delta_n^2 - 2(1+2\chi)) + \nu^4(\delta_b^2(1{+}2\chi)^2 + 6\delta_n\delta_b\chi - 2\chi) +\\
&\quad + 2\delta_b\chi\nu^6(\chi + \chi^2(3-\cos 4\beta))\,,\\
&b_7 = 2\delta_b\nu^4\chi(\nu^2(1+2\chi) - 1)\,, \qquad b_8 = \nu^8\chi^2\sin^2 2\beta\,.
\end{aligned}$$

Необходимым условием устойчивости стационарного режима является положительность всех коэффициентов b_i. В частности, из условия $b_7 > 0$ имеем

$$\nu > \frac{1}{\sqrt{1+2\chi}}\,, \tag{3.11}$$

откуда следует, что сбалансированный стационарный режим неустойчив в докритической области частот.

Исследование устойчивости в закритической области удобно проводить с помощью критерия Рауса, согласно которому необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости сбалансированного режима является положительность коэффициентов Рауса $c_{i,1}$, $i = \overline{1,9}$, вы-

числяемых по рекуррентной формуле[9]

$$c_{i,j} = c_{i-2,j+1} - \frac{c_{i-1,j+1}c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}\,, \tag{3.12}$$

где

$$c_{1,1} = b_0\,, \quad c_{1,2} = b_2\,, \quad c_{1,3} = b_4\,, \quad c_{1,4} = b_6\,, \quad c_{1,5} = b_8\,,$$
$$c_{2,1} = b_1\,, \quad c_{2,2} = b_3\,, \quad c_{2,3} = b_5\,, \quad c_{2,4} = b_7\,, \quad c_{2,5} = 0\,.$$

В выражения для коэффициентов характеристического полинома входят четыре безразмерных параметра: ε, χ, δ_n, δ_b. Если три параметра зафиксировать, то есть задать им конкретные значения, тогда в плоскости, соответствующей оставшемуся параметру и безразмерной частоте ν, на основе критерия Рауса можно построить области устойчивости и неустойчивости сбалансированного стационарного режима, которые в дальнейшем будем называть двухпараметрическими диаграммами устойчивости. В качестве примера на рис. 27 представлены диаграммы устойчивости в случае, когда $\varepsilon = 0.05$ и $\chi = 0.04$, то есть при выполнении условия существования сбалансированного стационарного режима (3.8).

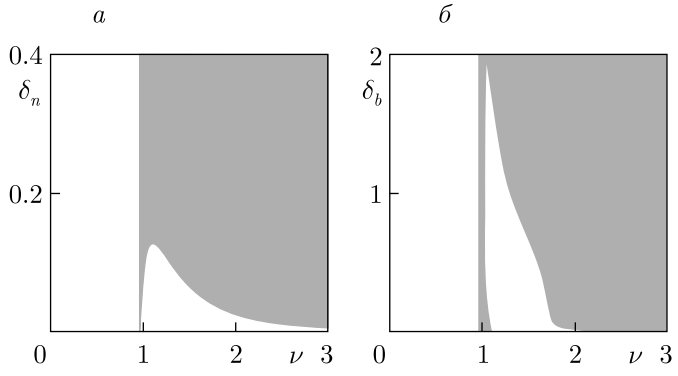

Рис. 27. Диаграммы устойчивости сбалансированного стационарного режима

Диаграмма (*а*) в плоскости параметров (ν, δ_n) рассчитана для $\delta_b = 1$; аналогичная диаграмма (*б*) в плоскости параметров (ν, δ_b) рассчитана для $\delta_n = 0.1$. Области, соответствующие асимптотической устойчивости сбалансированного стационарного режима, выделены темным цветом. Анализ диаграмм показывает, что при достаточной массе балансировочных шаров сбалансированный стационарный режим устойчив в закритической области при определенных значениях коэффициентов демпфирования.

[9] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

Графики, характеризующие прецессионное движение точки C и движение балансировочных шаров, рассчитанные путем численного интегрирования системы (3.4) при $n = 2$, $\varepsilon = 0.05$, $\chi = 0.04$, $\delta_n = 0.1$ и $\delta_b = 1$, представлены на на рис. 28,*а* (случай $\nu = 0.8$), на рис. 28,*б* (случай $\nu = 1.2$) и на рис. 28,*в* (случай $\nu = 2$).

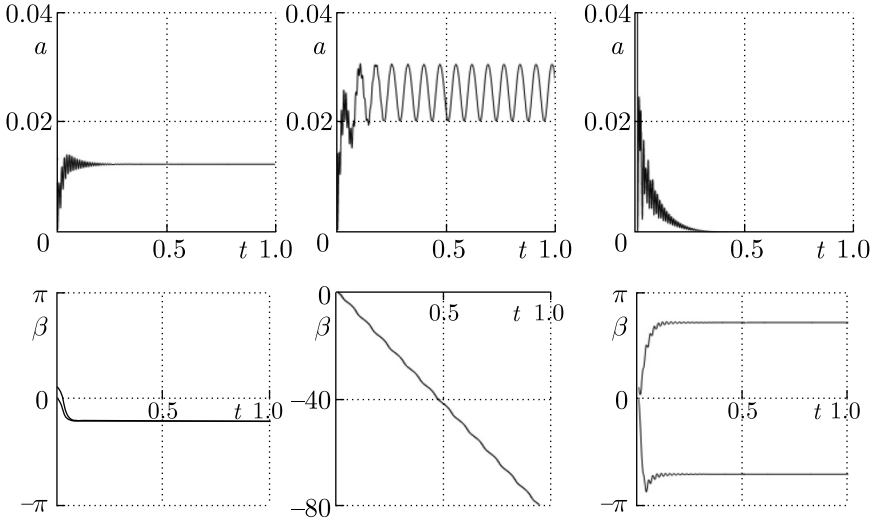

Рис. 28. Характерные типы прецесионного движения ротора и движения балансировочных шаров

В первом случае в системе устанавливается докритический несбалансированный стационарный режим прецессионного движения точки C с постоянной амплитудой. При этом балансировочные шары соприкасаются, а их общий центр масс лежит на прямой, проходящей через точки O и C. Второй случай соответствует закритической угловой скорости, при этом параметры системы соответствуют неустойчивым (светлым) областям диаграмм устойчивости, представленных на рис. 27. Графики показывают, что в системе наблюдается автоколебательный прецессионный режим, сопровождающийся быстрыми вращательными движениями балансировочных шаров относительно диска ротора. В третьем случае параметры системы соответствуют устойчивой (темной) области диаграмм 27, и мы видим, что в системе устанавливается сбалансированный стационарный режим собственного вращения, а балансировочные шары занимают положения, в соответствии со значениями углов β_{10} и β_{20}, рассчитанными по формуле (3.7).

Несбалансированные стационарные режимы. Условия существования. Как было продемонстрировано ранее, исследование прецессионных (несбалансированных) режимов движения ротора удобно проводить в полярных координатах a и ϕ, где $a = |\overrightarrow{OC}|/R$ — величина радиус-вектора точки C, а ϕ — его фазовый угол во вращающейся системе координат (рис. 26). Подставим в уравнения (3.4) соотношения $\xi = a\cos\phi$, $\eta = a\sin\phi$ и выполним следующие преобразования: умножим первое уравнение на $\cos\phi$ и сложим со вторым, умноженным на $\sin\phi$, затем умножим второе уравнение на $\cos\phi$ и вычтем из первого, умноженного на $\sin\phi$. В результате будем иметь

$$\begin{cases} (1+2\chi)(\ddot{a} - (\nu+\dot{\phi})^2 a) + \delta_n \dot{a} + a = \\ = \varepsilon\nu^2\cos\phi + \chi\sum\limits_{i=1}^{n}((\nu+\dot{\beta}_i)^2\cos(\phi-\beta_i) - \ddot{\beta}_i\sin(\phi-\beta_i)), \\ (1+2\chi)(a\ddot{\phi} + 2\dot{a}(\nu+\dot{\phi})) + \delta_n a(\nu+\dot{\phi}) = \\ = -\varepsilon\nu^2\sin\phi - \chi\sum\limits_{i=1}^{n}((\nu+\dot{\beta}_i)^2\sin(\phi-\beta_i) + \ddot{\beta}_i\cos(\phi-\beta_i)), \\ \ddot{\beta}_i + \delta_b\dot{\beta}_i = (a(\nu+\dot{\phi})^2 - \ddot{a})\sin(\phi-\beta_i) - (a\ddot{\phi} + 2\dot{a}(\nu+\dot{\phi}))\cos(\phi-\beta_i), \\ i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Рассматривая АБУ с двумя шарами, подставим в уравнения (3.13) $n = 2$ и стационарное решение вида $a = a_0$, $\phi = \phi_0$, $\beta_1 = \beta_{10}$ и $\beta_2 = \beta_{20}$. В результате получим систему трансцендентных уравнений, описывающих несбалансированный стационарный режим движения ротора:

$$\begin{cases} a_0(1-(1+2\chi)\nu^2) - \chi\nu^2(\cos(\phi_0-\beta_{10}) + \cos(\phi_0-\beta_{20})) = \varepsilon\nu^2\cos\phi_0, \\ a_0\delta_n\nu + \chi\nu^2(\sin(\phi_0-\beta_{10}) + \sin(\phi_0-\beta_{20})] = -\varepsilon\nu^2\sin\phi_0, \\ a_0\sin(\phi_0-\beta_{10}) = 0, \\ a_0\sin(\phi_0-\beta_{20}) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Поскольку мы рассматриваем случай, когда $a_0 \neq 0$, то из последних двух уравнений системы (3.14) имеем два возможных решения

$$\beta_{i0}^{(1)} = \phi_0, \quad \beta_{i0}^{(2)} = \phi_0 - \pi, \quad i = 1, 2, \tag{3.15}$$

которые показывают, что общий центр масс балансировочных шаров лежит на прямой OC. При этом возможны три варианта расположения шаров (см. рис. 29): 1) шары соприкасаются в точке, расположенной дальше

от точки O, чем точка C; 2) шары соприкасаются в точке, которая находится между точками O и C; 3) шары располагаются на противоположных сторонах обоймы по разные стороны от точки C.

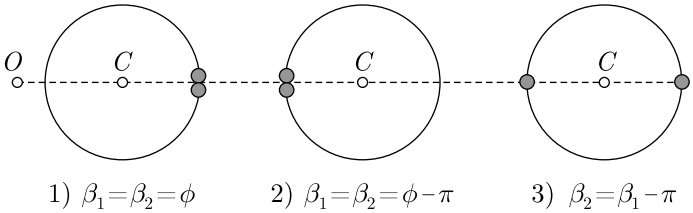

Рис. 29. Возможные конфигурации балансировочных шаров в случае несбалансированных стационарных режимов движения ротора

Очевидно, что в силу действия на шары центробежных сил вторая и третья конфигурации будут неустойчивы, поэтому практически реализуется только первая конфигурация балансировочных шаров. Подставив в уравнения (3.14) $\beta_{10} = \beta_{20} = \phi_0$, получим

$$\begin{cases} a_0(1-(1+2\chi)\nu^2) - 2\chi\nu^2 = \varepsilon\nu^2\cos\phi_0\,, \\ a_0\delta_n\nu = -\varepsilon\nu^2\sin\phi_0\,. \end{cases} \tag{3.16}$$

Для исключения ϕ_0 возведем обе части уравнений (3.16) в квадрат и сложим, в результате придем к квадратному уравнению относительно a_0:

$$((1-(1+2\chi)\nu^2)^2+\delta_n^2\nu^2)a_0^2-4\chi\nu^2(1-(1+2\chi)\nu^2)a_0+(4\chi^2-\varepsilon^2)\nu^4=0\,. \tag{3.17}$$

Введем в рассмотрение безразмерный параметр

$$\sigma = \frac{2\chi}{\varepsilon} = \frac{2m_b r}{ms}\,,$$

выражающий отношение максимального дисбаланса, вносимого балансировочными шарами, к величине дисбаланса ротора и назовем его *балансировочным коэффициентом*. Выясним, как величина параметра σ влияет на условие существования несбалансированных стационарных режимов движения ротора. Для этого представим квадратное уравнение (3.17) в виде

$$pa_0^2 - qa_0 + r = 0\,, \tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned} p &= (1-(1+2\chi)\nu^2)^2 + \delta_n^2\nu^2 > 0\,, \\ q &= 4\chi\nu^2(1-(1+2\chi)\nu^2)\,, \\ r &= 4\nu^4(\chi^2-\varepsilon^2) = \varepsilon^2\nu^4(\sigma^2-1)\,, \end{aligned} \tag{3.19}$$

и запишем выражение для его корней:

$$a_0^{(1,2)} = \frac{q \mp \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}\,. \tag{3.20}$$

Поскольку a_0 представляет собой длину радиус-вектора $\overrightarrow{OC}$, то имеют физический смысл только действительные и неотрицательные корни. Анализ выражений (3.19) и (3.20) дает следующие условия существования несбалансированных стационарных режимов в зависимости от величины балансировочного коэффициента.

Если $\sigma < 1$, то $r < 0$. В этом случае для любых значений ν уравнение (3.18) имеет один положительный корень $a_0^{(2)}$, отвечающий несбалансированному стационарному режиму.

Если $\sigma = 1$, то $r = 0$. Здесь уравнение (3.18) имеет один нулевой корень или один положительный корень $a_0^{(2)}$ при условии $q > 0$ или

$$\nu < \frac{1}{\sqrt{1+2\chi}}\,. \tag{3.21}$$

Если $\sigma > 1$, то $r > 0$. Тогда выражение (3.20) дает два положительных корня при условии $q^2 - 4pr > 0$ или

$$\nu < \frac{1}{1+2\chi}\left(\sqrt{1+2\chi+\frac{\delta_n^2}{4}(\sigma^2-1)} - \frac{\delta_n}{2}\sqrt{\sigma^2-1}\right)\,. \tag{3.22}$$

Определив величину стационарной амплитуды a_0, соответствующее стационарное значение угла сдвига фаз ϕ_0 можно найти из первого уравнения (3.16):

$$\phi_0^{(i)} = \arccos\left(a_0^{(i)}\left(\frac{1-\nu^2}{\varepsilon\nu^2} - \sigma\right) - \sigma\right)\,, \quad i = 1, 2. \tag{3.23}$$

На рис. 30 представлены амплитудно-частотные (АЧХ) и фазочастотные (ФЧХ) характеристики стационарных несбалансированных режимов, рассчитанные по формулам (3.20) и (3.23) при $\varepsilon = 0.05$, $\delta_n = 0.1$ для трех значений балансировочного коэффициента σ. Сплошные кривые отвечают значениям $a_0^{(2)}$ и $\phi_0^{(2)}$, штриховые — $a_0^{(1)}$ и $\phi_0^{(1)}$.

Устойчивость несбалансированных стационарных режимов. Подставим в уравнения (3.13) $n=2$, $a=a_0+\Delta a$, $\phi=\phi_0+\Delta\phi$, $\beta_1=\phi_0+\Delta\beta_1$ и $\beta_2=\phi_0+\Delta\beta_2$, где Δa, $\Delta\phi$, $\Delta\beta_1$ и $\Delta\beta_2$ – малые вариации обобщенных координат от стационарных значений, соответствующих несбалансированному

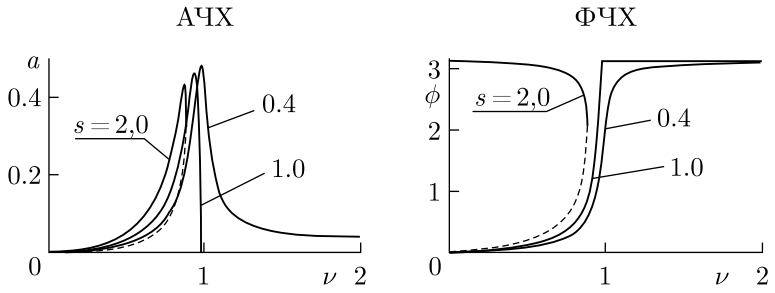

Рис. 30. АЧХ и ФЧХ несбалансированных стационарных режимов движения ротора

режиму. Разлагая полученные выражения в ряды по малым вариациям и опуская слагаемые второго порядка малости, получаем с учетом уравнений (3.16) линейную систему уравнений:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C} = \mathbf{0}\,, \tag{3.24}$$

где

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} \Delta a \\ \Delta\phi \\ \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1{+}2\chi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1{+}2\chi)a_0 & \chi & \chi \\ 0 & a_0 & 1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \delta_n & -2a_0(1{+}2\chi)\nu & -2\chi\nu & -2\chi\nu \\ 2(1{+}2\chi)\nu & a_0\delta_n & 0 & 0 \\ 2\nu & 0 & \delta_b & 0 \\ 2\nu & 0 & 0 & \delta_b \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 1-(1{+}2\chi)\nu^2 & -a_0\delta_n\nu & 0 & 0 \\ \delta_n\nu & a_0(1-(1{+}2\chi)\nu^2 & -\chi\nu^2 & -\chi\nu^2 \\ 0 & -a_0\nu^2 & a_0\nu^2 & 0 \\ 0 & -a_0\nu^2 & 0 & a_0\nu^2 \end{Vmatrix}.$$

Выводы об устойчивости стационарных несбалансированных режимов можно сделать на основе анализа коэффициентов характеристического полинома и критерия Рауса. Запишем выражения для коэффициентов харак-

теристического полинома, который имеет вид, аналогичный (3.10):

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 1+2\chi, \qquad b_1 = 2(1+\chi)(\delta_n+\delta_b(1+2\chi))\,,\\
b_2 &= 2(1+\chi)+\delta_n^2+2\delta_n\delta_b(2+3\chi)+\delta_b^2(1+2\chi)^2+2\nu^2(1+3\chi+2\chi^2)(1+a_0)\,,\\
b_3 &= 2(\delta_n+\delta_b(2+3\chi)+\delta_n\delta_b(\delta_n+\delta_b(1+2\chi))+\\
&\quad+\nu^2(\delta_n(1+4\chi)+\delta_b(2+7\chi+6\chi^2))+a_0(\delta_n(2+3\chi)+\delta_b(1+2\chi)))\,,\\
b_4 &= (1+\delta_n\delta_b)^2+2\delta_b(\delta_n+\delta_b(1+2\chi))+\nu^4(1+6\chi+8\chi^2)+\\
&\quad+\nu^2(-2+8\chi+\delta_n^2+2\delta_b(2\delta_n(1+3\chi)+\delta_b(1+2\chi)^2)+a_0^2\nu^4(1+2\chi)^2+\\
&\quad+2a_0\nu^2(2+3\chi+2\delta_n\delta_b(1+2\chi)+\delta_n^2+\nu^2(2+7\chi+6\chi^2))\,,\\
b_5 &= 2\delta_b(1+\delta_n\delta_b)+2\nu^2(\delta_n\delta_b(\delta_n+\delta_b(1+2\chi)+2\delta_b(\chi-1))+\\
&\quad+2\nu^4(3\chi\delta_n+\delta_b(1+5\chi+6\chi^2))+2\delta_n a_0^2\nu^4(1+2\chi)+\\
&\quad+2a_0\nu^2(\delta_n^2\delta_b+2\delta_n(1+(1+3\chi)\nu^2)\,,\\
b_6 &= \delta_b^2+\nu^2\delta_b^2(\delta_n^2-2(1+2\chi))+\nu^4(\delta_b^2(1+2\chi)^2+6\delta_n\delta_b\chi-2\chi)+\\
&\quad+a_0^2\nu^4(2(1+\nu^2)+4\chi(1+2(1+\chi)\nu^2+\delta_n^2))+\\
&\quad+a_0\nu^2(2(1-2\nu^2)+2\nu^2(\nu^2+2\chi(1+(5+6\chi)\nu^2)+2\nu^2\delta_n^2+\\
&\quad+4\delta_n\delta_b(1+4(1+2\chi)\nu^2))\,,\\
b_7 &= 2\delta_b\chi\nu^4((1+2\chi)\nu^2-1)+2a_0^2\nu^4\delta_n(1+(1+2\chi)\nu_2)+\\
&\quad+2a_0\nu^2(\delta_n^2\delta_b\nu^2+3\chi\delta_n\nu^4+\delta_b((1-\nu^2)^2-4\nu^2\chi(1-(1+\chi)\nu^2))\,,\\
b_8 &= a_0\nu^4(a_0((1-(1+2\chi)\nu^2)^2+\delta_n^2\nu^2)-2\chi\nu^2(1-(1+2\chi)\nu^2)\,.
\end{aligned}
$$

Заметим, что коэффициент b_8 с учетом обозначений (3.19) можно записать в виде

$$b_8 = a_0\nu^4\big(pa_0-\frac{q}{2}\big)\,.$$

Очевидно, что знак коэффициента b_8 определяется выражением в скобках, которое после подстановки стационарных значений a_0, определяемых формулой (3.20), примет вид

$$pa_0^{(1,2)}-\frac{q}{2} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{q^2-4pr}\,.$$

Знак «+» соответствует верхним ветвям АЧХ и ФЧХ, показанным на рис. 30 сплошными кривыми, а знак «–» — нижним ветвям, отмеченным штрихами. Отсюда следует, что нижние ветви частотных характеристик несбалансированных стационарных режимов не удовлетворяют необходимому условию устойчивости для любых значений параметров системы.

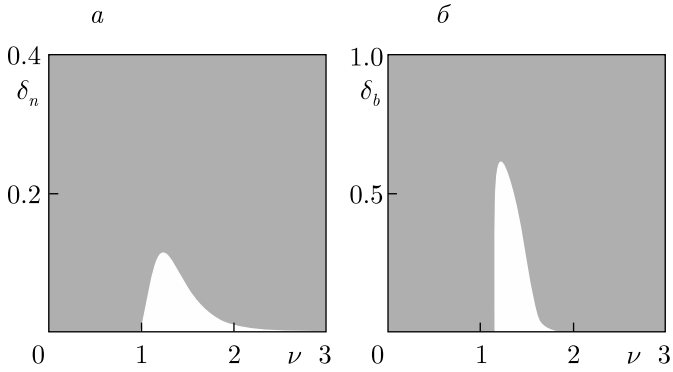

Рис. 31. Двухпараметрические диаграммы устойчивости несбалансированных стационарных режимов

Устойчивость стационарных режимов, отвечающих верхним ветвям частотных характеристик, может быть установлена, как и ранее, на основании критерия Рауса. Результаты численных расчетов представлены на рис. 31 в виде двухпараметрических диаграмм устойчивости, построенных в плоскости параметров ν, δ_n (*а*) и ν, δ_b (*б*) при $\varepsilon = 0.05$, $\chi = 0.02$ и $\sigma = 2\chi/\varepsilon = 0.8$. Области асимптотической устойчивости несбалансированных стационарных режимов выделены темным цветом. Поскольку балансировочный коэффициент $\sigma < 1$, то масса балансировочных шаров недостаточна для уравновешивания дисбаланса. Левая диаграмма рассчитана при $\delta_b = 0.5$, а правая — при $\delta_n = 0.1$. Анализ диаграмм устойчивости показывает, что в докритической области (то есть при $\nu < 1$) несбалансированный стационарный режим асимптотически устойчив при любых значениях параметров, тогда как в закритической области устойчивость гарантируется только при определенных значениях коэффициентов демпфирования δ_n и δ_b.

Данные утверждения иллюстрируют представленные на рис. 32 результаты численного интегрирования системы уравнений (3.14), проведенного при вышеуказанных значениях параметров δ_n и δ_b. Графики (*а*) демонстрируют изменение со временем амплитуды a, фазового угла ϕ и углов отклонения балансировочных шаров β_1 и β_2 в случае, когда безразмерная угловая скорость ротора $\nu = 0.8 < 1$, то есть ниже критической. Аналогичные графики (*б*) и (*в*) построены для случая, когда угловая скорость ротора выше критической. При этом графики (*б*) рассчитаны при $\nu = 1.3$ и соответствуют неустойчивой области диаграммы 31, а графики (*в*) получены для случая $\nu = 2$ и отвечают устойчивой области диаграммы. Из рисунка видно, что устойчивым областям диаграммы отвечают стацио-

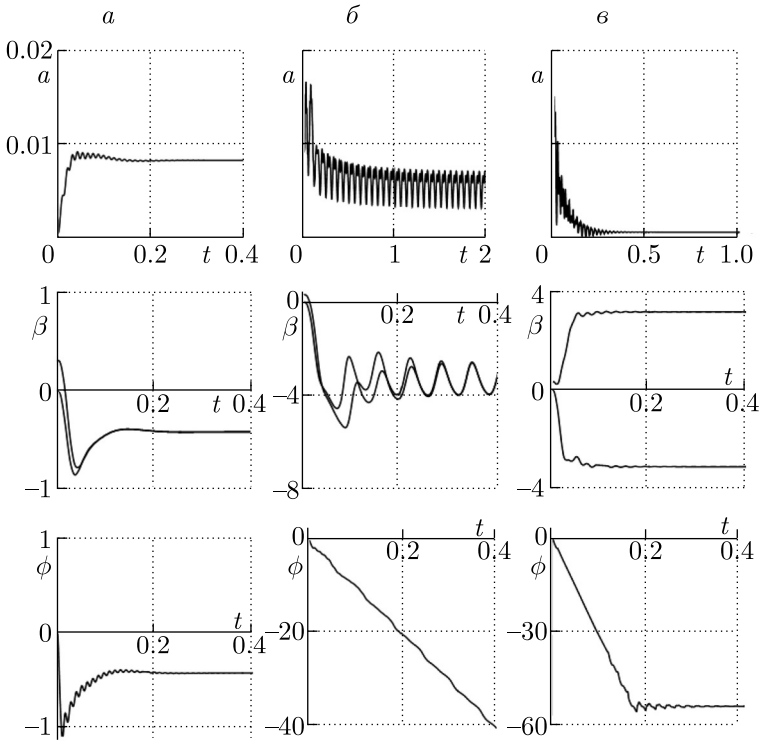

Рис. 32. Характерные типы колебаний ротора при $\sigma < 1$

нарные несбалансированные режимы в виде регулярных прецессионных движений ротора.

Нестационарное прохождение через резонанс. Представляет интерес исследовать поведение ротора, оснащенного АБУ, при нестационарном прохождении критической частоты. Это можно сделать путем численного интегрирования системы (3.2), предполагая, что безразмерная угловая скорость ротора меняется со временем по линейному закону:

$$\dot{\theta}(t) = \nu(t) = \alpha t\,, \qquad \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0, \qquad \alpha = \text{const}\ .$$

На рис. 33 показаны графики амплитудных кривых (*а*) и углов отклонения балансировочных шариков (*б*), рассчитанные при $\varepsilon = 0.05$, $\chi = 0.02$, $\delta_n = 0.1$, $\delta_b = 10$ для двух значений углового ускорения α.

Штриховой кривой отмечена стационарная АЧХ. Поскольку в данном случае $\sigma = 0.8 < 1$, то есть масса балансировочных шаров недостаточна для компенсации дисбаланса, то в закритической области устанавливается

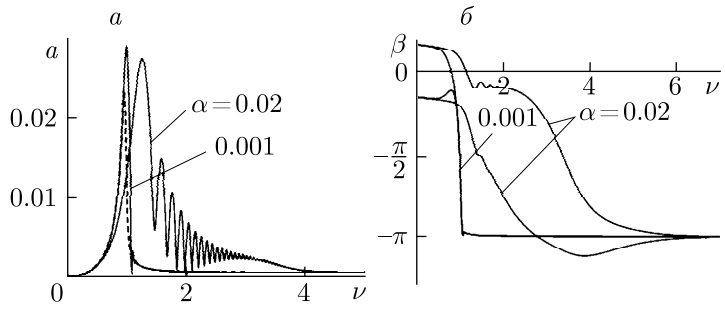

Рис. 33. Прохождение через резонанс в случае $\sigma = 0.8$

несбалансированный стационарный режим. Анализ поведения амплитудных графиков обнаруживает интересную особенность: максимум амплитуды прецессионного движения ротора при нестационарном переходе через резонанс превышает максимальную амплитуду стационарной АЧХ. Это явление связано с тем, что в резонансной области, как видно из графиков на рис. 33,*б*, ротор получает дополнительное инерционное возмущение за счет движения балансировочных шаров.

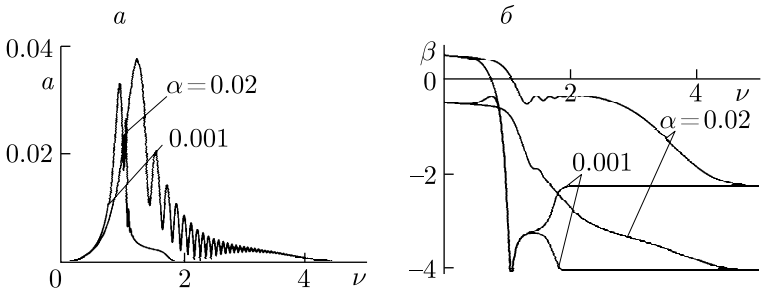

Рис. 34. Прохождение через резонанс в случае $\sigma = 1.6$

Аналогичные графики для случая $\sigma = 1.6$ представлены на рис. 34. В этом случае масса балансировочных шаров достаточна для компенсации дисбаланса, и мы видим, что в закритической области частот устанавливается сбалансированный режим. Можно отметить, что минимальное значение угловой скорости вращения ротора, при которой наступает балансировка, существенно зависит от величины углового ускорения.

Рассмотрим, как влияет на вид амплитудных кривых величина коэффициента вязкого трения в АБУ. На рис. 35 представлены кривые прохож-

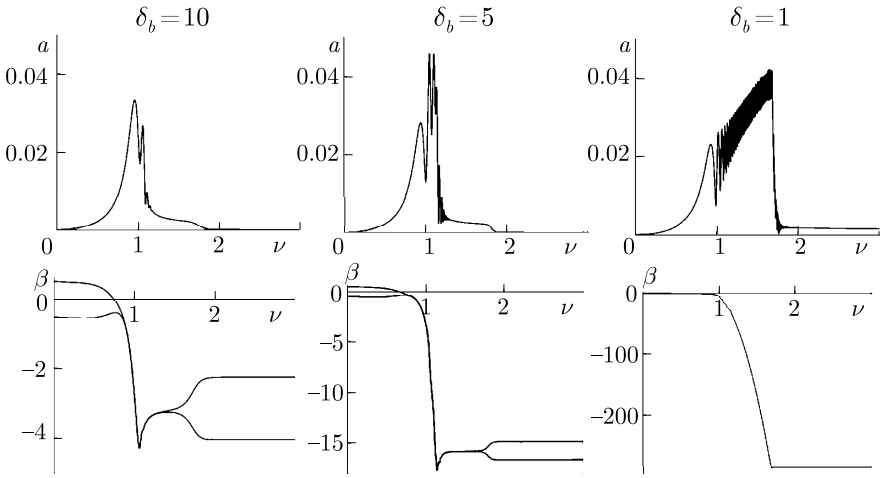

Рис. 35. Влияние вязкого трения в АБУ

дения через критическую скорость, рассчитанные в случае $\sigma = 1.6$ для трех значений коэффициента демпфирования δ_b. Мы видим, что при $\delta_b = 10$ амплитуда прецессионного движения ротора в процессе перехода резонансной области изменяется достаточно плавно. В то же время в случаях, когда $\delta_b = 5$ и $\delta_b = 1$, графики показывают, что после прохождения критической частоты возникают высокочастотные колебания нарастающей амплитуды с последующим ее резким «срывом». Этот эффект связан с тем, что недостаточное демпфирование в АБУ приводит к проскальзыванию балансировочных шаров в круговой полости АБУ, поэтому их углы отклонения относительно диска ротора быстро изменяются, совершая большое число полных оборотов. В результате этого на прецессионное движение ротора накладываются высокочастотные колебания, обусловленные движениями шаров.

Основные выводы

1. Статически неуравновешенный ротор Джеффкотта может быть полностью уравновешен в закритической области при помощи одного шарового автобалансировочного устройства при условии, что величина максимального суммарного дисбаланса шаров превышает величину дисбаланса ротора и выполнены условия асимптотической устойчивости сбалансированного стационарного режима.

2. Важную роль в процессе автобалансировки играет конструкционное демпфирование в АБУ. При недостаточной величине коэффициента демпфирования в закритической области могут возникнуть автоколеба-

ния ротора, сопровождаемые быстрым движением балансировочных шаров в АБУ.

3. Если общая масса балансировочных шаров недостаточна, то в докритической области при любых значениях параметров системы устанавливается несбалансированный стационарный режим в виде регулярной синхронной прецессии ротора. В закритической области данный режим будет устойчив только при определенных соотношениях между параметрами системы.

4. Амплитуда вынужденных колебаний ротора, оснащенного АБУ, при нестационарном прохождении критической частоты зависит не только от углового ускорения и внешнего демпфирования, но и от массы балансировочных шаров. При этом максимум амплитуды при нестационарном прохождении резонансной области может превышать максимум амплитуды стационарной АЧХ, а процесс автобалансировки ротора существенно зависит от его углового ускорения.

§ 4. Автоматическая балансировка ротора Джеффкотта с ортотропно упругим валом[10]

Механическая модель. Рассмотрим механическую модель статически неуравновешенного ротора Джеффкотта с шаровым АБУ, предполагая, что вал ротора является ортотропным, то есть имеет разные вязко-упругие характеристики по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Введем три системы координат: неподвижную OXY, вращающуюся $O\xi\eta$ и жестко связанную с ротором $C\xi'\eta'$ (рис. 36).

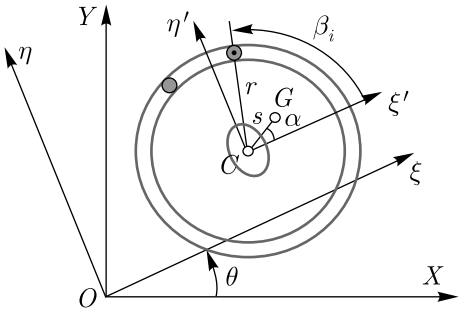

Рис. 36. Системы координат

[10]Параграф содержит материал, опубликованный в статье: *Быков В. Г.* Автобалансировка ротора с ортотропно упругим валом // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 514–527.

Пусть оси ξ и η коллинеарны осям ξ' и η', направленным вдоль осей эллипса жесткости. Соответствующие этим осям коэффициенты упругости вала обозначим через k_ξ и k_η. Положение центра масс диска зададим эксцентриситетом $s = |\overrightarrow{CG}|$ и фазовым углом α между вектором дисбаланса и осью ξ'. В качестве обобщенных координат выберем координаты x и y точки C в неподвижной системе, угол поворота ротора θ и углы β_i $(i = 1, \ldots, n)$ отклонения балансировочных шаров относительно круговой полости АБУ.

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий системы:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_b\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{x}_{B_i}^2 + \dot{y}_{B_i}^2\right),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}k_\eta(-x\sin\theta + y\cos\theta)^2,$$

где

$$x_G = x + s\cos(\theta+\alpha), \qquad x_{B_i} = x + r\cos(\theta+\beta_i),$$
$$y_G = y + s\sin(\theta+\alpha), \qquad y_{B_i} = y + r\sin(\theta+\beta_i),$$

m — масса ротора, m_b — масса балансировочного шара, r — радиус круговой полости АБУ.

Предполагая, что на ротор действуют только силы внешнего вязкого демпфирования, а круговая полость содержит вязкую жидкость, запишем выражение для диссипативной функции Рэлея:

$$R = \frac{1}{2}c_n(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}c_\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}c_b\sum_{i=1}^{n}\dot{\beta}_i^2,$$

где c_n и c_θ — коэффициенты внешнего демпфирования, c_b — коэффициент сопротивления движению шаров в АБУ.

Считая угол $\theta = \theta(t)$ заданной функцией времени, введем новую переменную $\varphi_i = \theta + \beta_i$ и запишем уравнения Лагранжа второго рода относительно обобщенных координат x, y и φ_i:

$$\begin{cases} (m+nm_b)\ddot{x}+c_n\dot{x}+(k_\xi\cos^2\theta+k_\eta\sin^2\theta)x+\dfrac{1}{2}(k_\xi-k_\eta)y\sin 2\theta = \\ \qquad = -\dfrac{d^2}{dt^2}\left[ms\cos(\theta+\alpha)+m_br\sum\cos\varphi_i\right], \\ (m+nm_b)\ddot{y}+c_0\dot{y}+(k_\xi\sin^2\theta+k_\eta\cos^2\theta)y+\dfrac{1}{2}(k_\xi-k_\eta)x\sin 2\theta = \\ \qquad = -\dfrac{d^2}{dt^2}\left[ms\sin(\theta+\alpha)+m_br\sum\sin\varphi_i\right], \\ m_br^2\ddot{\varphi}_i+c_\psi(\dot{\varphi}-\dot{\theta})_i=m_br(\ddot{x}\sin\varphi_i-\ddot{y}\cos\varphi_i), \quad i=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{4.1}$$

В случае, когда ротор вращается с постоянной угловой скоростью $\dot\theta = \omega$, удобно записать уравнения движения во вращающейся системе координат $O\xi\eta$. Подставим в систему (4.1) выражения

$$x = \xi\cos\omega t - \eta\sin\omega t\,, \qquad y = \xi\sin\omega t + \eta\cos\omega t$$

и проделаем следующие преобразования. Умножим первое уравнение на $\cos\omega t$ и сложим со вторым, умноженным на $\sin\omega t$, затем умножим второе уравнение на $\cos\omega t$ и вычтем первое, умноженное на $\sin\omega t$. В результате получим автономные уравнения движения относительно переменных ξ, η и β_i. Переходя к безразмерным координатам и времени, представим их в виде

$$\begin{cases} (1+n\chi)(\ddot{\bar\xi} - 2\nu\dot{\bar\eta} - \nu^2\bar\xi) + \delta_n(\dot{\bar\xi} - \nu\bar\eta) + \kappa_\xi\bar\xi = \\ \qquad\qquad = \varepsilon\nu^2\cos\alpha + \chi\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((\nu+\dot\beta_i)^2\cos\beta_i + \ddot\beta_i\sin\beta_i\Big)\,, \\ (1+n\chi)(\ddot{\bar\eta} + 2\nu\dot{\bar\xi} - \nu^2\bar\eta) + \delta_n(\dot{\bar\eta} + \nu\bar\xi) + \kappa_\eta\bar\eta = \\ \qquad\qquad = \varepsilon\nu^2\sin\alpha + \chi\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((\nu+\dot\beta_i)^2\sin\beta_i - \ddot\beta_i\cos\beta_i\Big)\,, \\ \ddot\beta_i + \delta_\beta\dot\beta_i = (\ddot{\bar\xi} - 2\nu\dot{\bar\eta} - \nu^2\bar\xi)\sin\beta_i - (\ddot{\bar\eta} + 2\nu\dot{\bar\xi} - \nu^2\bar\eta)\cos\beta_i\,, \quad i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{4.2}$$

где

$$\bar\xi = \frac{\xi}{r}\,, \quad \bar\eta = \frac{\eta}{r}\,, \quad \bar t = \Omega t\,, \quad \Omega = \sqrt{\frac{k_\xi + k_\eta}{2m}}\,, \quad \nu = \frac{\omega}{\Omega}\,,$$
$$\chi = \frac{m_b}{m}\,, \quad \varepsilon = \frac{s}{r}\,, \quad \delta_n = \frac{c_n}{m\Omega}\,, \quad \delta_b = \frac{c_b}{m_b\Omega r^2}\,,$$
$$\kappa_\xi = \frac{k_\xi}{m\Omega^2} = \frac{2k_\xi}{k_\xi + k_\eta}\,, \quad \kappa_\eta = \frac{k_\eta}{m\Omega^2} = \frac{2k_\eta}{k_\xi + k_\eta}\,.$$

Далее для простоты черту над безразмерными переменными опускаем.

Несбалансированные стационарные режимы. Для нахождения частных решений системы (4.2) вида $\xi = \xi_0 = \mathrm{const}$, $\eta = \eta_0 = \mathrm{const}$, $\psi_i = \beta_{i0} = \mathrm{const}$ положим значения всех производных от обобщенных координат равными нулю. В результате получим систему трансцендентных

уравнений, описывающую стационарные режимы движения ротора:

$$\begin{cases} \left(\kappa_\xi - (1+n\chi)\nu^2\right)\xi_0 - \delta_n\nu\eta_0 = \varepsilon\nu^2\cos\alpha + \chi\nu^2\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\beta_{i0}\,, \\ \left(\kappa_\eta - (1+n\chi)\nu^2\right)\eta_0 + \delta_0\nu\xi_0 = \varepsilon\nu^2\sin\alpha + \chi\nu^2\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\beta_{i0}\,, \\ \xi_0\sin\beta_{i0} - \eta_0\cos\beta_{i0} = 0\,, \qquad i=\overline{1,n}\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

Исследование стационарных режимов удобно проводить в полярной системе координат. Выберем в качестве искомых переменных длину a_0 и угол ϕ_0 поворота радиус-вектора $\overrightarrow{OC}$. Подставляя выражения $\xi_0 = a_0\cos\phi_0$ и $\eta_0 = a_0\sin\phi_0$ в последнее уравнение системы (4.3), получаем

$$a_0\sin(\beta_{i0}-\phi_0) = 0\,, \qquad i=\overline{1,n}\,. \tag{4.4}$$

Если $a_0 \neq 0$, то из уравнения (4.4) получаем

$$\beta_{i0} = \phi_0 + \pi k\,, \quad i=\overline{1,n}\,; \;\; k\in\mathbb{Z}\,. \tag{4.5}$$

Рассмотрим случай, когда АБУ содержит два балансировочных шара, тогда, в случае несбалансированного стационарного режима, то есть регулярной синхронной прецессии ротора, возможны только два варианта взаимного расположения балансировочных шаров: либо $\beta_{20} = \beta_{10}$, либо $\beta_{20} = \beta_{10}+\pi$. Преобразуем первые два уравнения системы (4.3): умножим первое уравнение на $\cos\phi_0$ и сложим со вторым, умноженным на $\sin\phi_0$, затем умножим первое уравнение на $\sin\phi_0$ и вычтем второе, умноженное на $\cos\phi_0$. В результате получим

$$\begin{cases} a_0\left(\kappa_\xi\cos^2\phi_0 + \kappa_\eta\sin^2\phi_0 - (1+2\chi)\nu^2\right) = \varepsilon\nu^2\cos(\phi_0-\alpha) + \chi\nu^2\gamma\,, \\ a_0\left((\kappa_\xi-\kappa_\eta)\cos\phi_0\sin\phi_0 - \delta_n\nu\right) = \varepsilon\nu^2\sin(\phi_0-\alpha)\,, \end{cases} \tag{4.6}$$

где

$$\gamma = \cos(\beta_{10}-\phi_0) + \cos(\beta_{20}-\phi_0)\,.$$

Параметр γ в случае регулярной прецессии с учетом соотношений (4.5) может принимать одно из трех возможных значений: 2, -2 или 0. Каждому из них соответствует определенный вариант положения балансировочных шаров в круговой полости АБУ, показанных на рис. 29. Отметим, что второй и третий варианты неустойчивы при любых значениях параметров, так как под действием центробежных сил шары стремятся занять наиболее удаленное от точки O положение, поэтому далее мы будем исследовать

только первый вариант расположения шаров, при котором $\gamma = 2$. Выражая в системе (4.6) $\cos^2\phi_0$ и $\sin^2\phi_0$ через $\cos 2\phi_0$, и учитывая, что $\kappa_\xi + \kappa_\eta = 2$ и $\kappa_\xi - \kappa_\eta = 2\kappa$, получаем

$$\begin{cases} a_0\kappa\cos 2\phi_0 + a_0\left(1-(1+2\chi)\nu^2\right) - 2\chi\nu^2 = \varepsilon\nu^2\cos(\phi_0-\alpha)\,, \\ a_0\kappa\sin 2\phi_0 - a_0\delta_n\nu = \varepsilon\nu^2\sin(\phi_0-\alpha)\,. \end{cases} \tag{4.7}$$

Умножив второе уравнение (4.7) на мнимую единицу i и сложив с первым, приходим к комплексному уравнению относительно a_0, ϕ_0 и ν:

$$a_0\kappa e^{i2\phi_0} + a_0(1-(1+2\chi)\nu^2 - i\delta_n\nu) - 2\chi\nu^2 = \varepsilon\nu^2 e^{i(\phi_0-\alpha)}\,. \tag{4.8}$$

Рассматривая уравнение (4.8) как квадратное относительно $e^{i\phi_0}$, находим

$$e^{i\phi_0} = \frac{\varepsilon\nu^2 e^{-i\alpha} \pm \sqrt{D(a_0,\nu)}}{2a_0\kappa}\,, \tag{4.9}$$

где

$$D(a_0,\nu) = (\varepsilon\nu^2 e^{-i\alpha})^2 - 4a_0\kappa(a_0(1-(1+2\mu)\nu^2 - i\delta_n\nu) - 2\chi\nu^2)\,.$$

Приравняв модули левой и правой частей соотношения (4.9), получим относительно a_0 и ν уравнение

$$|\varepsilon\nu^2 e^{-i\alpha} \pm \sqrt{D(a_0,\nu)}| = 2a_0|\kappa|\,, \tag{4.10}$$

пригодное для расчета АЧХ ротора. Исключая из системы (4.7) переменную a_0, получаем уравнение для расчета ФЧХ:

$$(1-(1+2\chi)\nu^2)\sin(\phi_0-\alpha) + \delta_n\nu\cos(\phi_0-\alpha) - \kappa\sin(\phi_0+\alpha) = \\ = \frac{2\chi}{\varepsilon}(\kappa\sin 2\phi_0 - \delta_n\nu)\,, \tag{4.11}$$

где $\sigma = 2\mu/\varepsilon$ — балансировочный коэффициент.

На рис. 37 представлены два варианта расчета АЧХ и ФЧХ для ротора со слабо ортотропным валом ($|\kappa| = 0.05$), рассчитанные по формулам (4.10) и (4.11) при следующих значениях безразмерных параметров: $\varepsilon = 0.05$, $\delta_n = 0.1$, $\kappa_\xi = 1.05$, $\kappa_\eta = 0.95$, $\alpha = 0.25$. Вариант (*а*) соответствует случаю, когда балансировочный коэффициент $\sigma = 0.8$, то есть масса балансировочных шаров недостаточна для компенсации дисбаланса. Мы видим, что в этом случае несбалансированный режим существует во всей области частот. Вариант (*б*), рассчитанный при $\sigma = 1.2$, показывает, что несбалансированный режим существует только в докритической области

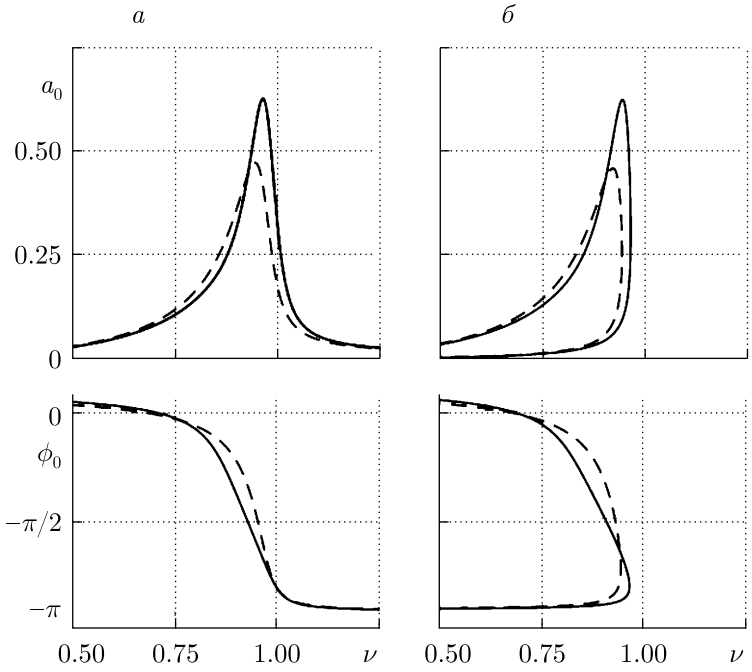

Рис. 37. АЧХ и ФЧХ ротора со слабо ортотропным валом

частот. Для сравнения штриховые кривые демонстрируют АЧХ и ФЧХ ротора с изотропным валом.

На рис. 38 представлены аналогичные характеристики, рассчитанные для ротора с сильно ортотропным валом ($|\kappa| = 0.333$) при $\kappa_\xi = 0.666$ и $\kappa_\eta = 1.333$. В этом случае возникают две области резонансных колебаний ротора, амплитуда которых на двух критических частотах стремится к бесконечности. Из рисунка видно, что в случае, когда $\sigma = 0.8$, несбалансированный режим у ортотропного ротора существует во всей области частот, за исключением критических, а в случае $\sigma = 1.2$ у ортотропного ротора, в отличие от изотропного, несбалансированный режим существует и в области не очень высоких закритических частот.

Сбалансированный стационарный режим. Полагая в системе (4.3) $\xi_0 = \eta_0 = 0$, получим уравнения, описывающие сбалансированный стационарный режим:

$$\chi \sum_{i=1}^{n} \cos\beta_{i0} = -\varepsilon \cos\alpha\,, \qquad \chi \sum_{i=1}^{n} \sin\beta_{i0} = -\varepsilon \sin\alpha\,. \tag{4.12}$$

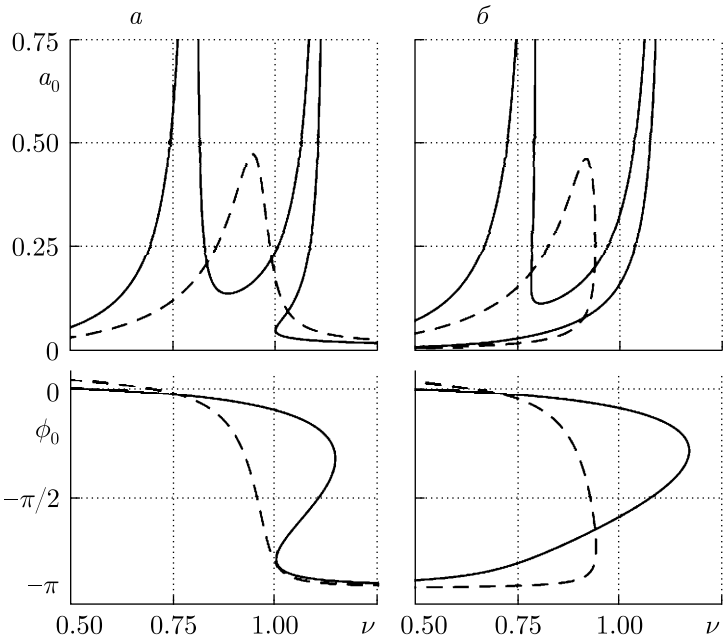

Рис. 38. АЧХ и ФЧХ ротора с сильно ортотропным валом

Уравнения (4.12) отличаются от аналогичных уравнений для изотропного ротора (3.6) наличием фазового угла α. В случае, когда $n = 2$, система (4.12) при выполнении условия $\sigma \geqslant 1$ имеет единственное решение

$$\beta_{10} = \arccos(-\varepsilon/2\chi) + \alpha\,, \qquad \beta_{20} = -\arccos(-\varepsilon/2\chi) + \alpha\,. \tag{4.13}$$

Исследуем его устойчивость по первому приближению. Пусть $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\beta_1$ и $\Delta\beta_2$ — малые отклонения обобщенных координат от стационарных значений, соответствующих сбалансированному режиму. Подставляя выражения

$$\xi = \Delta\xi, \quad \eta = \Delta\eta\,, \quad \beta_1 = \beta_{10} + \Delta\beta_1\,, \quad \beta_2 = \beta_{20} + \Delta\beta_2$$

в уравнения (4.2), разлагая в ряды по малым отклонениям и пренебрегая малыми второго порядка и выше, получаем линейную систему уравнений в вариациях восьмого порядка. Запишем ее в матричной форме:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{B}\mathbf{Z} = \mathbf{0}\,, \tag{4.14}$$

где

$$\mathbf{Z} = \{\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \Delta\dot{\xi}, \Delta\dot{\eta}, \Delta\dot{\beta}_1, \Delta\dot{\beta}_2\}^T\,,$$

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{A}} \end{Vmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{Vmatrix} 1+2\chi & 0 & -\chi S_{10} & -\chi S_{20} \\ 0 & 1+2\chi & \chi C_{10} & \chi C_{20} \\ -S_{10} & C_{10} & 1 & 0 \\ -S_{20} & C_{20} & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\tilde{\mathbf{B}}} \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{Vmatrix} (k_1 - (1{+}2\chi)\nu^2) & -\delta_n\nu & \chi\nu^2 S_{10} & \chi\nu^2 S_{20} \\ \delta_n\nu & (\kappa_\eta - (1{+}2\chi)\nu^2) & -\chi\nu^2 C_{10} & -\chi\nu^2 C_{20} \\ \nu^2 S_{10} & -\nu^2 C_{10} & 0 & 0 \\ \nu^2 S_{20} & -\nu^2 C_{20} & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{B}}} = \begin{Vmatrix} \delta_0 & -2(1+2\chi)\nu & -2\chi\nu C_{10} & -2\chi\nu C_{20} \\ 2(1+2\chi)\nu & \delta_n & -2\chi\nu S_{10} & -2\chi\nu S_{20} \\ 2\nu C_{10} & 2\nu S_{10} & \delta_b & 0 \\ 2\nu C_{20} & 2\nu S\psi_{20} & 0 & \delta_b \end{Vmatrix},$$

$S_{i0} = \sin\beta_{i0}$, $C_{i0} = \cos\beta_{i0}$, $\mathbf{E}$ — единичная, $\mathbf{O}$ — нулевая (4×4)-матрицы.

С учетом формул (4.13) выражения для коэффициентов характеристического полинома системы (4.14) имеют вид

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1 + 2\chi + \varepsilon^2\gamma_1, \qquad a_1 = 2(1+\chi)\gamma_2, \\
&a_2 = 2(1+\chi)(1+\delta_n\delta_b) + \gamma_2^2 + \chi\gamma_3 + 2\left((1+\chi)(1+2\chi) + 2\varepsilon^2\gamma_1\right)\nu^2, \\
&a_3 = 2\gamma_2(1+\delta_n\delta_b) + (2(1+\chi) + \chi\gamma_3)\delta_b + 2\left(\delta_n(1+4\chi) + 2\delta_b(1+2\chi)\right)\nu^2, \\
&a_4 = (\nu^2-1)^2 - \lambda^2 + \delta_0^2\delta_1^2 + 2\delta_1(\delta_0+\gamma_2) + 2\left(3\mu + 4\mu^2 + 3\varepsilon^2\gamma_1\right)\nu^4 + \\
&\quad + \left(\delta_n^2 + 2\delta_b^2(1+2\chi)^2 + 4\delta_n\delta_b(1+3\chi) + 8\chi + 2\chi\gamma_3\right)\nu^2, \\
&a_5 = 2\delta_b\left((\nu^2-1)^2 - \kappa^2 + \delta_n\delta_b + \chi\gamma_3 + \delta_n\gamma_2 + 2\chi\nu^2 + \chi(5+6\chi)\nu^4\right) + \\
&\quad + 6\chi\delta_n\nu^4, \\
&a_6 = \delta_b^2\left(((1+2\chi)\nu^2-1)^2 - \kappa^2\right) + \delta_n^2\delta_b^2\nu^2 + \chi\nu^4(\gamma_3 + 6\delta_n\delta_b + 2(\nu^2-1)) + \\
&\quad + 4(\chi^2 + 2\varepsilon^2\gamma_1)\nu^6, \\
&a_7 = \chi\delta_b\left(2(1+2\chi)\nu^2 - 2 + \gamma_3\right)\nu^4, \\
&a_8 = \varepsilon^2\gamma_1\nu^8,
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_1 = 1 - \varepsilon^2/(4\chi^2), \quad \gamma_2 = \delta_n + (1+2\chi)\delta_b, \quad \gamma_3 = 2\kappa(1 - \varepsilon^2/(2\chi^2))\cos 2\alpha.$$

Необходимое условие устойчивости сбалансированного стационарного режима, вытекающее из условия положительности коэффициента a_7, имеет вид

$$\nu^2 > \left(1 - 2\kappa(1 - 2/\sigma^2)\cos 2\alpha\right)/(1+2\chi). \tag{4.15}$$

Для изотропного ротора (то есть в случае $\kappa = 0$) условие (4.15) совпадает с условием (3.11).

Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения является положительность коэффициентов Рауса $c_{i,1}$, $i=1, \ldots, 9$, вычисляемых по рекуррентным формулам $c_{i,j} = c_{i-2,j+1} - c_{i-1,j+1}c_{i-2,1}/c_{i-1,1}$, где

$$c_{1,1} = a_0\,, \quad c_{1,2} = a_2\,, \quad c_{1,3} = a_4\,, \quad c_{1,4} = a_6\,, \quad c_{1,5} = a_8\,,$$
$$c_{2,1} = a_1\,, \quad c_{2,2} = a_3\,, \quad c_{2,3} = a_5\,, \quad c_{2,4} = a_7\,, \quad c_{2,5} = 0\,.$$

Расчеты, проведенные при $\varepsilon=0.05$, $\chi=0.03$, $\delta_n=0.05$, $\delta_b=10$, определяют следующие области асимптотической устойчивости сбалансированного стационарного режима:

ротор с изотропным валом ($\kappa = 0$, $\alpha = 0$) $\quad \nu > 1.024$,
ротор с ортотропным валом ($|\kappa| = 0.333$, $\alpha = 0.25$) $\quad \nu > 1.177$.

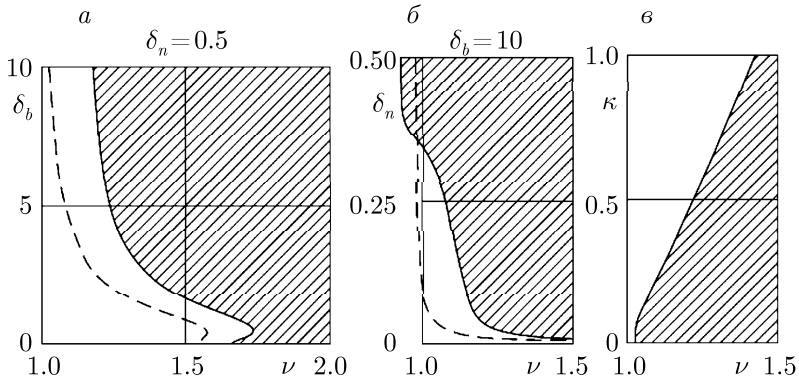

Рис. 39. Двухпараметрические диаграммы устойчивости сбалансированного стационарного режима

Оценить влияние отдельных параметров системы удобно с помощью двухпараметрических диаграмм устойчивости. На рис. 39 представлены диаграммы устойчивости в плоскости параметров (ν, δ_b) и (ν, δ_n), рассчитанные с использованием критерия Рауса для изотропного и ортотропного роторов. Диаграмма (*а*) соответствует случаю $\delta_n=0.05$, диаграмма (*б*) — случаю $\delta_b = 10$. Области устойчивости сбалансированного стационарного режима для ортотропного ротора заштрихованы. Границы области устойчивости для изотропного ротора отмечены штрихами. Диаграмма (*в*) демонстрирует сужение области устойчивости в плоскости параметров (ν, κ) с ростом параметра анизотропии κ.

Переходные режимы. Поведение ротора в процессе перехода к стационарному режиму исследовалось путем численного интегрирования системы (4.2) при постоянных значениях угловой скорости ν. Результаты расчетов представлены на рис. 40, где сплошные кривые соответствуют ортотропному ротору ($|\kappa|=0.333$), а штриховые — изотропному.

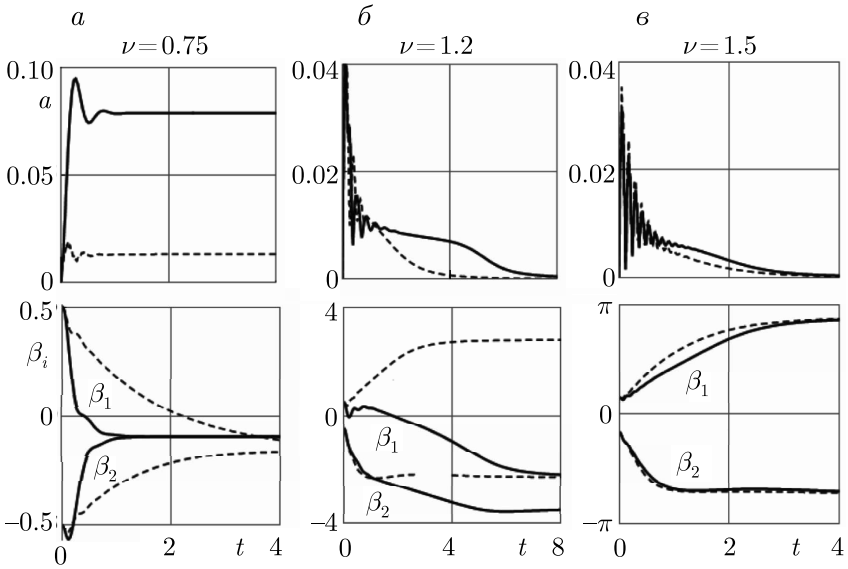

Рис. 40. Влияние ортотропии вала на переходные процессы

На рис. 40,*а* показаны временны́е зависимости смещения центра диска $a=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ и углов отклонения балансировочных шаров β_1 и β_2, рассчитанные для случая, когда угловая скорость ротора ниже критической. Варианты (*б*) и (*в*) демонстрируют аналогичные результаты в закритической области ($\nu>1$). Анализ графиков показывает, что при $\nu=0.75$ амплитуда круговой прецессии у ротора с ортотропным валом больше, чем у ротора с изотропным. В случае, когда $\nu=1.2$, ортотропия вала сказывается на продолжительности переходного процесса, а при $\nu=1.5$ ортотропия вала практически не влияет на движение ротора и балансировочных шаров.

Особый интерес для практики представляют режимы нестационарного прохождения через критическую область, возникающие при разгоне ротора из состояния покоя или при выбеге ротора в случае, когда его начальная угловая скорость выше критической. На рис. 41 представлены результаты численного интегрирования системы (4.2) для ротора, вращающегося

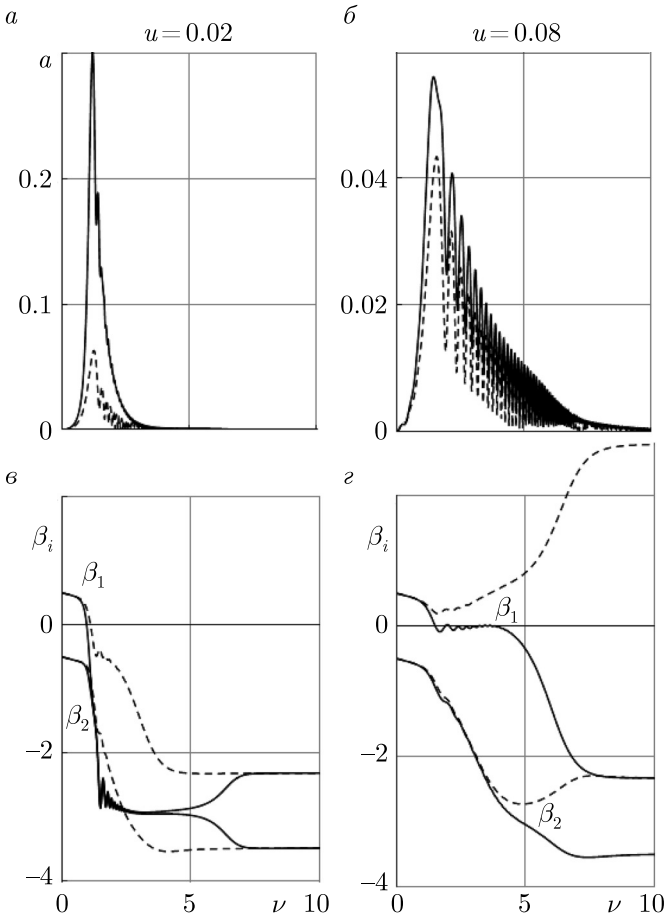

Рис. 41. Нестационарное прохождение критической частоты

с постоянным безразмерным угловым ускорением $\ddot{\theta}(t) = u$. График (*а*) демонстрирует изменение амплитуды колебаний точки C в зависимости от мгновенной угловой скорости в режиме «медленного» ($u = 0.02$) прохождения критической области, а график (*б*) отвечает «быстрому» прохождению ($u = 0.08$). Видно, что при медленном прохождении максимальное отклонение точки C у ортотропного ротора (сплошная кривая) в несколько раз больше, чем у ротора с изотропным валом (штриховая кривая). При быстром прохождении критической области амплитуды прецессионного движения у изотропного и ортотропного роторов отличаются незначительно.

Графики (*в*) и (*г*) показывают влияние ускорения ротора на движение балансировочных шаров. При медленном изменении угловой скорости

шары, двигаясь в одну сторону, соединяются вместе, а в закритической области расходятся в разные стороны, занимая позицию, соответствующую сбалансированному режиму. При быстром изменении угловой скорости ротора шары не соприкасаются, а их движение к стационарным точкам может происходить как в одном, так и в разных направлениях.

Основные выводы. На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы о влиянии ортотропии упругих свойств гибкого вала на движение ротора, оснащенного АБУ.

1. Ортотропия упругих характеристик гибкого вала приводит к появлению второй критической частоты, а также служит причиной (в случае когда внешнее демпфирование меньше критического) неограниченного роста амплитуды прецессионного движения.

2. Условия существования сбалансированного стационарного режима для ортотропного ротора имеют такой же вид, как и для изотропного ротора, но при этом область устойчивости данного режима сужается с ростом параметра анизотропии.

3. Численное исследование переходных режимов движения показывает, что при вращении ротора с постоянной угловой скоростью анизотропия оказывает заметное влияние на движение ротора в докритической области и вблизи критических частот. В закритической области при достаточно больших угловых скоростях ортотропия вала не оказывает существенного влияния на процесс автобалансировки.

4. При медленном нестационарном прохождении критической области отклонение центра диска в случае ортотропного вала может в несколько раз превышать аналогичное отклонение у ротора с изотропным валом.

§ 5. Влияние неидеальности конструкции автобалансировочных устройств[11]

В § 3 и 4 данной главы процессы автобалансировки статически неуравновешенного ротора рассматривались в предположении, что траектория движения центров балансировочных шаров относительно АБУ имеет форму идеальной окружности с центром в точке C. Однако на практике в ряде случаев для адекватного математического описания процесса автобалан-

[11] Параграф содержит материалы, опубликованные в статьях: *Быков В. Г., Ковачев А. С.* Динамика ротора с эксцентрическим шаровым автобалансировочным устройством // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2014. Том 1. Вып. 4. С. 579–588; *Быков В. Г., Ковачев А. С.* Динамика статически неуравновешенного ротора с эллиптическим шаровым автобалансировочным устройством // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2019. Том 6(64). Вып. 3. С. 452–462.

сировки возникает необходимость учитывать влияние возможного эксцентриситета и неидеальности формы беговой дорожки АБУ.

Автобалансировка ротора с учетом эксцентриситета шарового АБУ. Рассмотрим модель статически неуравновешенного ротора Джеффкотта, описанную в § 4, но предположим, что шаровое АБУ установлено на диск с некоторым эксцентриситетом, то есть точка E — центр круговой полости АБУ не совпадает с точкой C крепления диска ротора к валу.

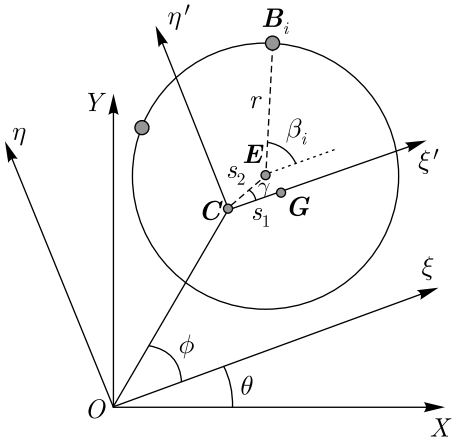

Рис. 42. Ротор с неидеально установленным шаровым АБУ

Обозначим величину статического эксцентриситета ротора через $s_1 = |CG|$, а для описания эксцентриситета АБУ введем два параметра: смещение $s_2 = |CE|$ и угол эксцентриситета $\gamma = \angle GCE$ (рис. 42). Параметры s_1 и s_2 будем считать малыми по сравнению с радиусом r беговой дорожки.

Пусть АБУ содержит n балансировочных шаров одинаковой массы m_b. Обозначим через x, y координаты точки C, через m — массу диска ротора с корпусом АБУ (без балансировочных шаров), через k — коэффициент упругости вала, через c_n, c_θ и c_b — коэффициенты демпфирования. Тогда выражения для кинетической энергии системы, потенциальной энергии упругого вала и диссипативной функции Рэлея можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_b\sum_{j=1}^{n}(\dot{x}_{B_j}^2 + \dot{y}_{B_j}^2)\,,\\
&\Pi = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2), \qquad R = \frac{1}{2}c_n(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}c_b\sum_{j=1}^{n}\dot{\beta}_j^2 + \frac{1}{2}c_\theta\dot{\theta}^2\,,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

где

$$x_G = x + s_1\cos\theta\,, \quad y_G = y + s_1\sin\theta\,,$$
$$x_{B_j} = x + s_2\cos(\theta+\gamma) + r\cos(\theta+\beta_j)\,,$$
$$y_{B_j} = y + s_2\sin(\theta+\gamma) + r\sin(\theta+\beta_j)\,.$$

Считая угол поворота $\theta=\theta(t)$ заданной функцией времени, запишем уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} (m+nm_b)\ddot{x} + c_n\dot{x} + kx = \\ = -\dfrac{d^2}{dt^2}\left[ms_1\cos\theta + nm_bs_2\cos(\theta+\gamma) + m_br\sum\limits_{j=1}^{n}\cos(\theta+\beta_j)\right], \\ (m+nm_b)\ddot{y} + c_n\dot{y} + ky = \\ = -\dfrac{d^2}{dt^2}\left[ms_1\sin\theta + nm_bs_2\sin(\theta+\gamma) + m_br\sum\limits_{j=1}^{n}\sin(\theta+\beta_j)\right], \\ m_br^2(\ddot{\beta}_j+\ddot{\theta}) + c_b\dot{\beta}_j = m_br\big(\ddot{x}\sin(\theta+\beta_j) - \ddot{y}\cos(\theta+\beta_j)\big) + \\ \qquad + m_brs_2\big(\dot{\theta}^2\sin(\gamma-\beta_j) - \ddot{\theta}\cos(\gamma-\beta_j)\big)\,,\ j=\overline{1,n}\,. \end{cases} \tag{5.2}$$

Переходя в системе (5.2) к безразмерным переменным

$$\bar{x} = \frac{x}{r}\,, \quad \bar{y} = \frac{y}{r}\,, \quad \bar{t} = \Omega t\,, \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,,$$

получаем

$$\begin{cases} (1+n\chi)\ddot{\bar{x}} + \delta_n\dot{\bar{x}} + \bar{x} = -\dfrac{d^2}{d\bar{t}^2}\left[\varepsilon_1\cos\theta + n\varepsilon_2\chi\cos(\theta+\gamma) + \chi\sum\limits_{j=1}^{n}\cos(\theta+\beta_j)\right], \\ (1+n\chi)\ddot{\bar{y}} + \delta_n\dot{\bar{y}} + \bar{y} = -\dfrac{d^2}{d\bar{t}^2}\left[\varepsilon_1\sin\theta + n\varepsilon_2\chi\sin(\theta+\gamma) + \chi\sum\limits_{j=1}^{n}\sin(\theta+\beta_j)\right], \\ \ddot{\beta}_j + \ddot{\theta} + \delta_b\dot{\beta}_j = \ddot{\bar{x}}\sin(\theta+\beta_j) - \ddot{\bar{y}}\cos(\theta+\beta_j) + \\ \qquad + \varepsilon_2\big(\dot{\theta}^2\sin(\gamma-\beta_j) - \ddot{\theta}\cos(\gamma-\beta_j)\big)\,,\ j=\overline{1,n}\,, \end{cases} \tag{5.3}$$

где

$$\chi = \frac{m_b}{m}\,, \quad \varepsilon_1 = \frac{s_1}{r}\,, \quad \varepsilon_2 = \frac{s_2}{r}\,, \quad \delta_n = \frac{c_n}{m\Omega}\,, \quad \delta_b = \frac{c_b}{m_br^2\Omega}\,.$$

Далее мы будем рассматривать вращение ротора с постоянной угловой скоростью $\nu = \dot{\theta} = \mathrm{const}$. Подставляя в систему (5.3) $\theta = \nu t$ и опуская для

простоты черту над безразмерными переменными, будем иметь

$$\begin{cases} (1+n\chi)\ddot{x}+\delta_n\dot{x}+x=\big(\varepsilon_1\cos\nu t+n\varepsilon_2\chi\cos(\nu t+\gamma)\big)\nu^2+ \\ \qquad\qquad +\chi\sum\limits_{j=1}^{n}\big((\nu+\dot{\beta}_j)^2\cos(\nu t+\beta_j)+\ddot{\beta}_j\sin(\nu t+\beta_j)\big)\,, \\ (1+n\chi)\ddot{y}+\delta_n\dot{y}+y=\big(\varepsilon_1\sin\nu t+n\varepsilon_2\chi_2\sin(\nu t+\gamma)\big)\nu^2+ \\ \qquad\qquad +\chi\sum\limits_{j=1}^{n}\big((\nu+\dot{\beta}_j)^2\sin(\nu t+\beta_j)-\ddot{\beta}_j\cos(\nu t+\beta_j)\big)\,, \\ \ddot{\beta}_j+\delta_b\dot{\beta}_j=\ddot{x}\sin(\nu t+\beta_j)-\ddot{y}\cos(\nu t+\beta_j)+\varepsilon_2\nu^2\sin(\gamma-\beta_j)\,,\ j=\overline{1,n}\,. \end{cases} \tag{5.4}$$

Введя комплексную переменную $z=x+iy$, представим систему (5.4) в комплексной форме:

$$\begin{cases} (1+n\chi)\ddot{z}+\delta_n\dot{z}+z=\left((\varepsilon_1+n\varepsilon_2\chi e^{i\gamma})\nu^2+\chi\sum\limits_{j=1}^{n}((\nu+\dot{\beta}_j)^2-i\ddot{\beta}_j)e^{i\beta_j}\right)e^{i\nu t}\,, \\ \ddot{\beta}_j+\delta_b\dot{\beta}_j=-\mathrm{Im}\left[\ddot{z}e^{-i(\nu t+\beta_j)}\right]+\varepsilon_2\nu^2\sin(\gamma-\beta_j)\,,\ j=\overline{1,n}\,. \end{cases} \tag{5.5}$$

Перейдем к уравнениям движения во вращающейся системе координат $O\xi\eta$. Для этого воспользуемся комплексной переменной $\zeta=\xi+i\eta$ и подставим в систему (5.5) соотношения

$$z=\zeta e^{i\nu t}\,,\quad \dot{z}=(\dot{\zeta}+i\nu\zeta)e^{i\nu t}\,,\quad \ddot{z}=(\ddot{\zeta}+2i\nu\dot{\zeta}-\nu^2\zeta)e^{i\nu t}\,; \tag{5.6}$$

в результате получим

$$\begin{cases} (1+n\chi)\ddot{\zeta}+(\delta_n+2i\nu(1+n\chi))\dot{\zeta}+(1-(1+n\chi)\nu^2+i\nu\delta_n)\zeta= \\ \qquad\qquad =(\varepsilon_1+n\varepsilon_2\chi e^{i\gamma})\nu^2+\chi\sum\limits_{j=1}^{n}((\nu+\dot{\beta}_j)^2-i\ddot{\beta}_j)e^{i\beta_j}\,, \\ \ddot{\beta}_j+\delta_b\dot{\beta}_j=-\mathrm{Im}[(\ddot{\zeta}+2i\nu\dot{\zeta}-\nu^2\zeta)e^{-i\beta_j}]+\varepsilon_2\nu^2\sin(\gamma-\beta_j)\,,\ j=\overline{1,n}\,. \end{cases} \tag{5.7}$$

Система уравнений (5.7), в отличие от (5.5), является автономной и удобна для исследования стационарных режимов движения ротора.

Стационарные решения системы (5.7) будем искать в виде

$$\zeta=\zeta_0=\xi_0+i\eta_0\,,\qquad \beta_j=\beta_{0j}=\mathrm{const}\,,\ j=\overline{1,n}\,, \tag{5.8}$$

где $a_0=\sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2}=\mathrm{const}$ — амплитуда прецессионного движения центра диска. Подставив выражения (5.8) в уравнения (5.7), получим систему

трансцендентных уравнений относительно неизвестных ξ_0, η_0 и β_{0j}:

$$\begin{cases} (1-(1+n\chi)\nu^2+i\nu\delta_n)(\xi_0+i\eta_0)=\nu^2\left(\varepsilon_1+n\varepsilon_2\chi e^{i\gamma}+\chi\sum\limits_{j=1}^{n}e^{i\beta_{0j}}\right), \\ \eta_0\cos\beta_{0j}-\xi_0\sin\beta_{0j}+\varepsilon_2\sin(\gamma-\beta_{0j})=0\,,\ j=\overline{1,n}\,. \end{cases} \tag{5.9}$$

Проверим возможность существования сбалансированного стационарного режима, при котором геометрический центр диска C лежит на оси O_1O_2. Для этого подставим в систему (5.9) $\xi_0=\eta_0=0$ и разделим в первом уравнении вещественные и мнимые части; в результате будем иметь

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}\cos\beta_{0j}=-\dfrac{\varepsilon_1}{\chi}-n\varepsilon_2\cos\gamma\,, \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sin\beta_{0j}=-n\varepsilon_2\sin\gamma\,, \\ \sin(\gamma-\beta_{0j})=0\,,\ j=\overline{1,n}\,. \end{cases} \tag{5.10}$$

Умножая первое уравнение системы (5.10) на $\sin\gamma$ и вычитая из него второе уравнение, умноженное на $\cos\gamma$, получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\sin(\gamma-\beta_{0j})=-\varepsilon_1\sin\gamma=0\,.$$

Отсюда следует, что $\gamma=0$ или $\gamma=\pi$, то есть полностью сбалансированный стационарный режим для ротора с неидеальным расположением АБУ возможен лишь в случаях, когда точки E, C и G лежат на одной прямой. С учетом этого система (5.10) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}\cos\beta_{0j}=-\dfrac{\varepsilon_1}{\chi}\pm n\varepsilon_2\,, \\ \sin\beta_{0j}=0\,,\ j=\overline{1,n}\,, \end{cases} \tag{5.11}$$

откуда вытекает, что все углы отклонения балансировочных шаров могут принимать только два значения: $\beta_{0j}=\{0,\pi\}$, $j=\overline{1,n}$, то есть центры всех шаров также должны лежать на одной прямой с точками C и G. Кроме того, параметры системы должны быть таковы, чтобы выполнялось первое уравнение (5.11). Например, для двухшарикового АБУ $(n=2)$, в случае, когда $\gamma=0$, сбалансированный режим будет иметь место при

условии $\chi = \varepsilon_1/2(1-\varepsilon_2)$, а в случае $\gamma = \pi$ — при условии $\chi = \varepsilon_1/2(1+\varepsilon_2)$. Учитывая все вышеизложенное, можно констатировать, что наличие эксцентриситета АБУ не позволяет обеспечить полную балансировку ротора с произвольным дисбалансом.

Найдем условия существования несбалансированных прецессионных стационарных режимов движения ротора для случая, когда АБУ содержит два балансировочных шара. Преобразуем уравнения, описывающие движение балансировочных шаров

$$\begin{cases} \eta_0 \cos\beta_{01} - \xi_0 \sin\beta_{01} + \varepsilon_2 \sin(\gamma - \beta_{01}) = 0\,, \\ \eta_0 \cos\beta_{02} - \xi_0 \sin\beta_{02} + \varepsilon_2 \sin(\gamma - \beta_{02}) = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

следующим образом. Умножим первое уравнение (5.12) на $\sin\beta_{02}$ и вычтем из него второе уравнение, умноженное на $\sin\beta_{01}$. Аналогично вычтем второе уравнение, умноженное на $\cos\beta_{01}$, из первого, умноженного на $\cos\beta_{02}$. В итоге получим

$$\begin{cases} \sin(\beta_{02} - \beta_{01})(\eta_0 + \varepsilon_2 \sin\gamma) = 0\,, \\ \sin(\beta_{02} - \beta_{01})(\xi_0 + \varepsilon_2 \cos\gamma) = 0\,. \end{cases} \tag{5.13}$$

Система (5.13) имеет два типа решений. Решения первого типа удовлетворяют уравнению

$$\sin(\beta_{01} - \beta_{02}) = 0\,,$$

из которого следует, что $\beta_{01} = \beta_{02} + \pi k$ $(k = 0, 1)$, то есть балансировочные шары либо соприкасаются, либо располагаются на противоположных сторонах круговой полости АБУ. Решения второго типа имеют вид

$$\eta_0 = -\varepsilon_2 \sin\gamma\,, \;\; \xi_0 = -\varepsilon_2 \cos\gamma\,, \quad \text{или} \quad a_0 = \varepsilon_2\,, \;\; \phi_0 = \gamma \pm \pi(2k+1)\,. \tag{5.14}$$

Таким образом, характерной чертой решений второго типа является наличие остаточной вибрации ротора, амплитуда которой в точности равна эксцентриситету АБУ. Учитывая малость последнего, несбалансированные стационарные режимы, соответствующие решениям второго типа, можно назвать почти сбалансированными.

Найдём углы отклонения балансировочных шаров, соответствующие почти сбалансированному стационарному режиму. Подставляя решение (5.14) в первое уравнение (5.9), получаем комплексное уравнение

$$\chi\nu^2(e^{i\beta_{01}} + e^{i\beta_{02}}) = -\varepsilon_1\nu^2 + \varepsilon_2\big(1 - (1+4\chi)\nu^2 + i\nu\delta_n\big)e^{i\gamma}\,, \tag{5.15}$$

эквивалентное системе двух вещественных уравнений

$$\begin{cases} \cos\beta_{01} + \cos\beta_{02} = -\dfrac{\varepsilon_1}{\chi} - \dfrac{\varepsilon_2\big((1-\nu^2)\cos\gamma - \nu\delta_n\sin\gamma\big)}{\chi\nu^2}\,, \\ \sin\beta_{01} + \sin\beta_{02} = -\dfrac{\varepsilon_2\big((1-\nu^2)\sin\gamma + \nu\delta_n\cos\gamma\big)}{\chi\nu^2}\,. \end{cases} \tag{5.16}$$

Обозначив правые части уравнений (5.16) через p_1 и p_2 соответственно, представим их в виде

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{\beta_{01}+\beta_{02}}{2}\cos\dfrac{\beta_{01}-\beta_{02}}{2} = p_1\,, \\ 2\sin\dfrac{\beta_{01}+\beta_{02}}{2}\cos\dfrac{\beta_{01}-\beta_{02}}{2} = p_2\,, \end{cases} \tag{5.17}$$

откуда следует

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\beta_{01}+\beta_{02}}{2} = \dfrac{p_2}{p_1}\,, \\ \cos\dfrac{\beta_{01}-\beta_{02}}{2} = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{p_1^2+p_2^2}\,. \end{cases} \tag{5.18}$$

С учетом малости параметра ε_2 решение системы (5.18) имеет вид

$$\begin{aligned} \beta_{01} &= \pm\arccos\big(-\frac{1}{2}\sqrt{p_1^2+p_2^2}\,\big) + \operatorname{arctg}\frac{p_2}{p_1}\,, \\ \beta_{02} &= \mp\arccos\big(-\frac{1}{2}\sqrt{p_1^2+p_2^2}\,\big) + \operatorname{arctg}\frac{p_2}{p_1}\,. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Из формул (5.19) вытекает условие существования почти сбалансированного режима

$$p_1^2 + p_2^2 \leqslant 4\,. \tag{5.20}$$

Отметим, что в случае идеально закрепленного АБУ (то есть при $\varepsilon_2 = 0$ и $\gamma = 0$) будем иметь $p_1 = -\varepsilon_1/\chi$, $p_2 = 0$. При этом формулы (5.19) примут вид, аналогичный полученным ранее формулам (3.7).

На рис. 43,*а* представлены графики изменения величины $p_1^2 + p_2^2$ в зависимости от безразмерной угловой скорости ν, рассчитанные для трех значений балансировочного коэффициента $\sigma = 2m_bR/(ms_1)$. Из графиков видно, что условие (5.20) выполняется при значениях балансировочного коэффициента $\sigma \geqslant 1$, то есть в закритической области частот. Кривые на рис. 43,*б* показывают стационарные значения углов отклонения балансировочных шаров в зависимости от угловой скорости ротора, рассчитанные по формулам (5.19).

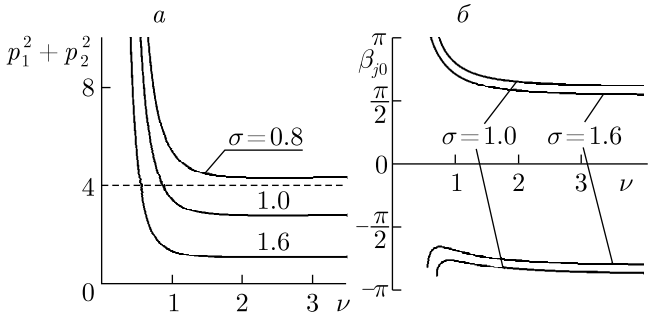

Рис. 43. Почти сбалансированный стационарный режим: (*а*) условия существования; (*б*) углы отклонения балансировочных шаров

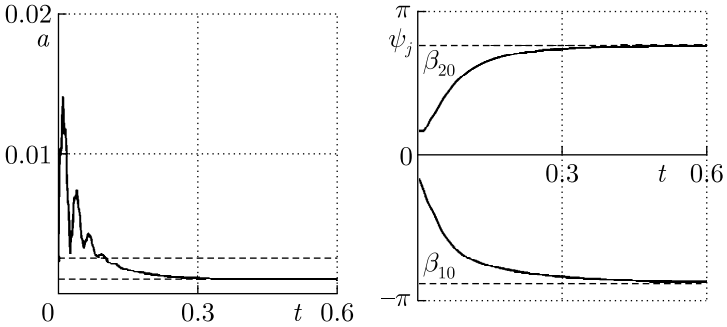

Рис. 44. Переход к почти сбалансированному режиму при $\nu = 1.5$ и $\sigma = 1$

Результаты численного интегрирования системы (5.4) при постоянной угловой скорости ротора $\nu = 1.5$ и значениях безразмерных параметров $\chi = 0.025$, $\varepsilon_1 = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.02$, $\gamma = 1$, $\delta_n = 0.21$, $\delta_b = 4.26$, отвечающих почти сбалансированному стационарному режиму, представлены на рис. 44. Графики демонстрируют, что после непродолжительного переходного процесса размерная амплитуда прецессионного движения точки C $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ становится равной величине эксцентриситета АБУ s_2, а балансировочные шары занимают положение, соответствующее решению (5.19), отмеченному штриховыми прямыми.

Исследуем теперь условия существования несбалансированных стационарных режимов движения ротора, отвечающих решению системы (5.13) вида $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0$. Подставив это решение в систему (5.9) и разделив

вещественные и мнимые части первого уравнения, получим

$$\begin{cases}(1-(1+2\chi)\nu^2)\xi_0-\delta_n\nu\eta_0-(\varepsilon_1+2\varepsilon_2\chi\cos\gamma)\nu^2=2\chi\nu^2\cos\beta_0\,,\\ \delta_n\nu\xi_0+(1-(1+2\chi)\nu^2)\eta_0-2\varepsilon_2\chi\nu^2\sin\gamma=2\chi\nu^2\sin\beta_0\,,\\ (\xi_0+\varepsilon_2\cos\gamma)\sin\beta_0=(\eta_0+\varepsilon_2\sin\gamma)\cos\beta_0\,.\end{cases}\tag{5.21}$$

Обозначив через B_1 и B_2 левые части первых двух уравнений системы (5.21) и исключив угол β_0, получим два уравнения

$$\begin{cases}{B_1}^2+{B_2}^2=4\chi^2\nu^4\,,\\ (\xi_0+\varepsilon_2\cos\gamma)B_2=(\eta_0+\varepsilon_2\sin\gamma)B_1\,,\end{cases}\tag{5.22}$$

представляющие собой квадратичную систему вида

$$\begin{cases}\kappa_{10}(\xi_0^2+\eta_0^2)+\kappa_{11}\xi_0+\kappa_{12}\eta_0+\kappa_{13}=0\,,\\ \kappa_{20}(\xi_0^2+\eta_0^2)+\kappa_{21}\xi_0+\kappa_{22}\eta_0+\kappa_{23}=0\,,\end{cases}\tag{5.23}$$

где

$$\begin{aligned}&\kappa_{10}=(1-(1+2\chi)\nu^2)^2+\delta_n^2\nu^2\,,\\ &\kappa_{11}=-2\varepsilon_1\big(1-(1+2\chi)\nu^2\big)\nu^2-4\chi\varepsilon_2\big(1-(1+2\chi)\nu^2\big)\cos\gamma+\delta_n\nu\sin\gamma\big)\nu^2\,,\\ &\kappa_{12}=2\varepsilon_1\delta_n\nu^3-2\chi\varepsilon_2\big((1-(1+4\chi)\nu^2)\sin\gamma-\delta_n\nu\cos\gamma\big)\nu^2\,,\\ &\kappa_{13}=\big(\varepsilon_1^2+4\chi\varepsilon_1\varepsilon_2\cos\gamma+4\chi^2(\varepsilon_2^2-1)\big)\nu^4,\quad \kappa_{20}=\delta_n\nu\,,\\ &\kappa_{21}=\varepsilon_2\big(\delta_n\nu\cos\gamma-(1-\nu^2)\sin\gamma\big)\,,\\ &\kappa_{22}=\varepsilon_1\nu^2+\varepsilon_2(\delta_n\nu\sin\gamma+(1-\nu^2)\cos\gamma)\,,\quad \kappa_{23}=\varepsilon_1\varepsilon_2\nu^2\sin\gamma\,.\end{aligned}$$

Численное решение системы (5.23) можно получить в виде амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) несбалансированных стационарных режимов, представленных на рис. 45. Расчеты были проведены

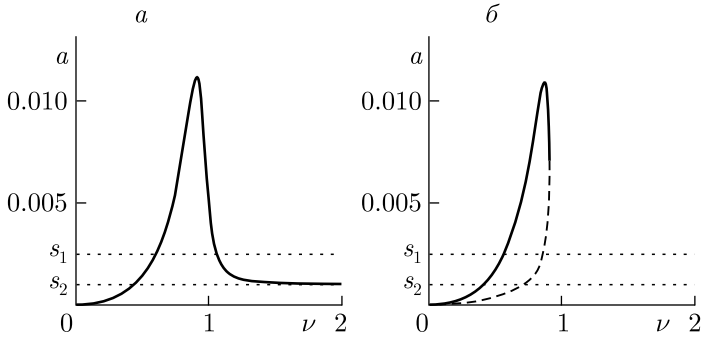

Рис. 45. АЧХ несбалансированных стационарных режимов

для следующих значений безразмерных параметров: $\varepsilon_1 = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.02$, $\gamma = 1$, $\delta_n = 0.21$, $\delta_b = 1$. Рисунок *а* соответствует случаю, когда балансировочный коэффициент $\sigma = 0.8$, то есть масса балансировочных шаров недостаточна для компенсации дисбаланса, а рисунок *б* — случаю, когда $\sigma = 1.6$. Характер АЧХ показывает, что в случае $\sigma < 1$ несбалансированные стационарные режимы существуют во всем диапазоне угловых скоростей ротора, в то время, как при $\sigma > 1$ несбалансированные режимы имеют место только в докритической области частот.

На рис. 46 показаны результаты численного интегрирования системы (5.4) при $\sigma = 0.8$. Графики зависимости амплитуды прецессионного дви-

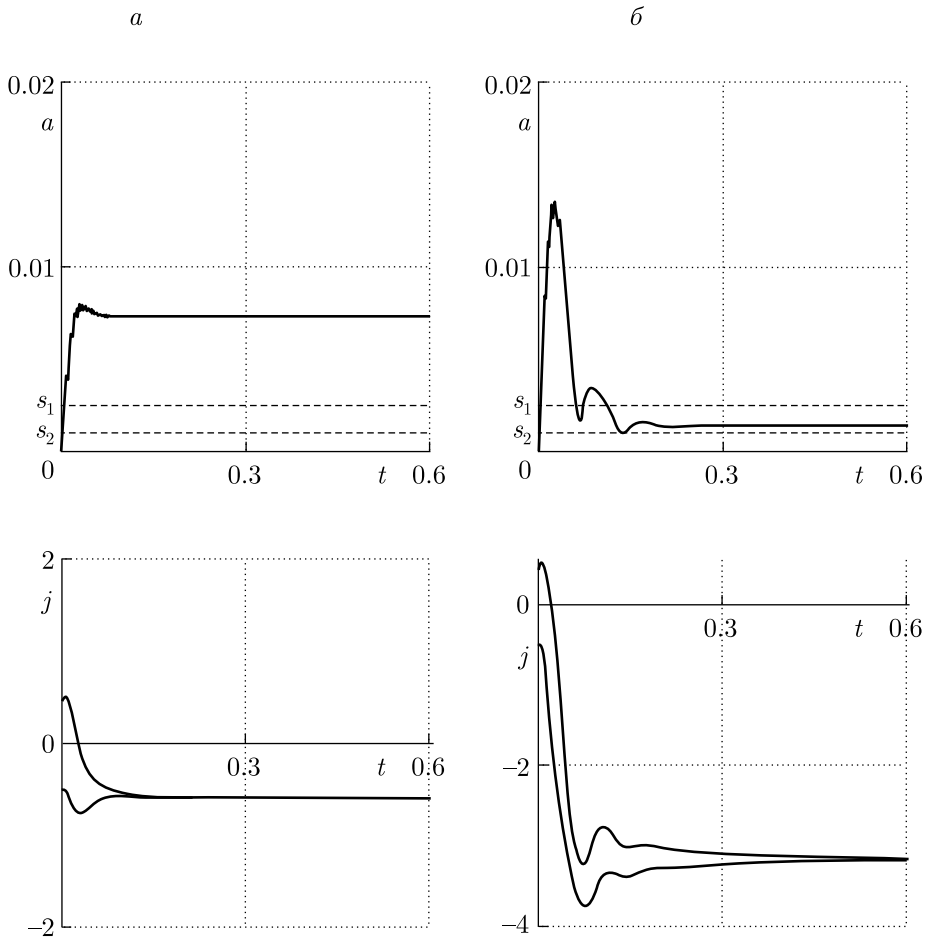

Рис. 46. Переход к несбалансированному стационарному режиму: $\nu = 0.8$ (*а*), $\nu = 1.2$ (*б*)

жения ротора и углов отклонения балансировочных шариков от времени на рис. 46,*а* получены для ротора вращающегося с докритической угловой скоростью, а на рис. 46,*б* — с закритической угловой скоростью.

Автобалансировка ротора с учетом эллиптичности беговой дорожки шарового АБУ. Рассмотрим вопрос о влиянии неидеальности формы беговой дорожки АБУ на процесс автобалансировки статически неуравновешенного ротора Джеффкотта. Для этого рассмотрим модель шарового АБУ, представленную на рис. 47, предполагая, что его внутренняя полость (беговая дорожка) имеет форму не идеальной окружности, а эллипса с полуосями r_1 и r_2.

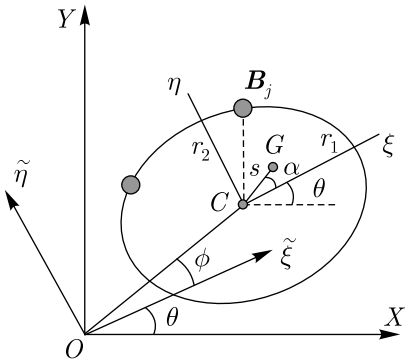

Рис. 47. АБУ с эллипсовидной беговой дорожкой

Обозначим через C точку крепления диска к валу, G — центр масс диска, $s = |CG|$ — величину и α — фазовый угол статического эксцентриситета диска. Для определения положения ротора и балансировочных шаров введем три системы координат: неподвижную $OXYZ$, жестко связанную с ротором $C\xi\eta$ и вращающуюся $O\tilde{\xi}\tilde{\eta}$. Оси связанной системы координат направим вдоль осей эллипса беговой дорожки АБУ, а оси вращающейся системы направим параллельно соответствующим осям связанной. Угол поворота между осями OX и $C\xi$ обозначим через θ.

Если предположить, что угловая скорость ротора $\dot{\theta}(t)$ изменяется со временем по заданному закону, а движение диска происходит только в плоскости статического эксцентриситета, то описанная механическая модель будет иметь $n+2$ степени свободы, где n — число балансировочных шаров, которые рассматриваются как материальные точки. Выберем в качестве обобщенных координат абсолютные координаты x и y точки C в неподвижной системе и относительные координаты балансировочных ша-

ров ξ_j и η_j, удовлетворяющие уравнениям голономных связей

$$f_j = \frac{\xi_j^2}{r_1^2} + \frac{\eta_j^2}{r_2^2} - 1 = 0\,, \quad j = \overline{1,n}\,. \tag{5.24}$$

Выразим абсолютные координаты точек G и B_j через введенные обобщенные координаты

$$\begin{aligned} x_G &= x + s\cos(\theta+\alpha)\,, \quad & x_{B_j} &= x + \xi_j\cos\theta - \eta_j\sin\theta\,, \\ y_G &= y + s\sin(\theta+\alpha)\,, \quad & y_{B_j} &= y + \xi_j\sin\theta + \eta_j\cos\theta \end{aligned} \tag{5.25}$$

и запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий системы:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_b\sum_{j=1}^{n}(\dot{x}_{B_j}^2 + \dot{y}_{B_j}^2)\,, \quad \Pi = \frac{1}{2}k(x^2+y^2)\,, \tag{5.26}$$

где m и I_G — масса и момент инерции диска, m_b — масса балансировочного шара, k — коэффициент упругости вала.

Полагая, что на ротор действуют только силы внешнего вязкого демпфирования, а балансировочные шары движутся в вязкой среде, запишем выражение для диссипативной функции Рэлея:

$$R = \frac{1}{2}c_n(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}c_b\sum_{j=1}^{n}(\dot{\xi}_j^2 + \dot{\eta}_j^2)\,, \tag{5.27}$$

где c_n — коэффициент сопротивления поперечному движению диска, а c_b — коэффициент сопротивления движению балансировочных шаров в обойме АБУ.

Для построения математической модели системы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода с неопределенными множителями λ_j, отвечающими уравнениям связей (5.24):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\,, \quad i = \overline{1,n+2}\,, \tag{5.28}$$

где $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_{2j+1} = \xi_j$, $q_{2j+2} = \eta_j$, $j = \overline{1,n}$.

Уравнения (5.28) с учетом выражений (5.24)–(5.26) имеют вид

$$\begin{cases}(m+nm_b)\ddot{x}+c_n\dot{x}+kx=ms(\dot{\theta}^2\cos(\theta+\alpha)+\ddot{\theta}\sin(\theta+\alpha))-\\ -m_b\sum\limits_{j=1}^{n}\left((\ddot{\xi}_j-\dot{\theta}^2\xi_j-2\dot{\theta}\dot{\eta}_j-\ddot{\theta}\eta_j)\cos\theta-(\ddot{\eta}_j-\dot{\theta}^2\eta_j+2\dot{\theta}\dot{\xi}_j+\ddot{\theta}\xi_j)\sin\theta\right),\\ (m+nm_b)\ddot{y}+c_n\dot{y}+ky=ms(\dot{\theta}^2\sin(\theta+\alpha)-\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha))-\\ -m_b\sum\limits_{j=1}^{n}\left((\ddot{\xi}_j-\dot{\theta}^2\xi_j-2\dot{\theta}\dot{\eta}_j-\ddot{\theta}\eta_j)\sin\theta+(\ddot{\eta}_j-\dot{\theta}^2\eta_j+2\dot{\theta}\dot{\xi}_j+\ddot{\theta}\xi_j)\cos\theta\right),\\ m_b\ddot{\xi}_j+c_b\dot{\xi}_j-m_b(2\dot{\theta}\dot{\eta}_j+\dot{\theta}^2\xi_j+\ddot{\theta}\eta_j)=-m_b(\ddot{x}\cos\theta+\ddot{y}\sin\theta)+\lambda_j\dfrac{2\xi_j}{r_1^2},\\ m_b\ddot{\eta}_j+c_b\dot{\eta}_j+m_b(2\dot{\theta}\dot{\xi}_j+\dot{\theta}^2\eta_j+\ddot{\theta}\xi_j)=m_b(\ddot{x}\sin\theta-\ddot{y}\cos\theta)+\lambda_j\dfrac{2\eta_j}{r_2^2},\ j=\overline{1,n}\end{cases}\tag{5.29}$$

и совместно с уравнениями связей (5.24) образуют замкнутую систему $3n+2$ уравнений относительно $2n+2$ обобщенных координат и n множителей Лагранжа. Исключая из $2n$ уравнений системы (5.29), описывающих движение балансировочных шаров, неопределенные множители λ_j, получим систему $n+2$ уравнений, которую представим в безразмерной форме:

$$\begin{cases}(1+n\chi)(\ddot{\bar{x}}+\delta_n\dot{\bar{x}}+\bar{x})=\varepsilon(\dot{\theta}^2\cos(\theta+\alpha)+\ddot{\theta}\sin(\theta+\alpha))-\\ -\chi\sum\limits_{j=1}^{n}\left((\ddot{\bar{\xi}}_j-\dot{\theta}^2\bar{\xi}_j-2\dot{\theta}\dot{\bar{\eta}}_j-\ddot{\theta}\bar{\eta}_j)\cos\theta-(\ddot{\bar{\eta}}_j-\dot{\theta}^2\bar{\eta}_j+2\dot{\theta}\dot{\bar{\xi}}_j+\ddot{\theta}\xi_j)\sin\theta\right),\\ (1+n\chi)(\ddot{\bar{y}}+\delta_n\dot{\bar{y}}+\bar{y})=\varepsilon(\dot{\theta}^2\sin(\theta+\alpha)-\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha))-\\ -\chi\sum\limits_{j=1}^{n}\left((\ddot{\bar{\xi}}_j-\dot{\theta}^2\bar{\xi}_j-2\dot{\theta}\dot{\bar{\eta}}_j-\ddot{\theta}\bar{\eta}_j)\sin\theta+(\ddot{\bar{\eta}}_j+\dot{\theta}^2\bar{\eta}_j+2\dot{\theta}\dot{\bar{\xi}}_j+\ddot{\theta}\xi_j)\cos\theta\right),\\ \rho_1^2\bar{\eta}_j(\ddot{\bar{\xi}}_j+\delta_b\dot{\bar{\xi}}_j-2\dot{\theta}\dot{\bar{\eta}}_j-\dot{\theta}^2\bar{\xi}_j-\ddot{\theta}\bar{\eta}_j+\ddot{\bar{x}}\cos\theta+\ddot{\bar{y}}\sin\theta)=\\ =\rho_2^2\bar{\xi}_j(\ddot{\bar{\eta}}_j+\delta_b\dot{\bar{\eta}}_j+2\dot{\theta}\dot{\bar{\xi}}_j-\dot{\theta}^2\bar{\eta}_j+\ddot{\theta}\bar{\xi}_j+\ddot{\bar{y}}\cos\theta-\ddot{\bar{x}}\sin\theta),\ j=\overline{1,n},\end{cases}\tag{5.30}$$

где

$$\bar{x}=\frac{x}{r},\quad \bar{y}=\frac{y}{r},\quad \bar{\xi}_j=\frac{\xi_j}{r},\quad \bar{\eta}_j=\frac{\eta_j}{r},\quad \bar{t}=\Omega t,\quad \Omega=\sqrt{\frac{k}{m+nm_b}},$$

$$\chi=\frac{m_b}{m},\quad \varepsilon=\frac{s}{r},\quad \delta_n=\frac{c_n}{(m+nm_b)\Omega},\quad \delta_b=\frac{c_b}{m_b\Omega},\quad \rho_1=\frac{r_1}{r},\ \rho_2=\frac{r_2}{r},$$

$r=\dfrac{r_1+r_2}{2}$ — масштабный коэффициент.

Замкнутую и пригодную для численного интегрирования систему $2n+2$ дифференциальных уравнений второго порядка получим, добавив к системе (5.30) n дважды продифференцированных уравнений связей

$$\rho_2^2(\dot{\bar{\xi}}_j^2 + \bar{\xi}_j\ddot{\bar{\xi}}_j) + \rho_1^2(\dot{\bar{\eta}}_j^2 + \bar{\eta}_j\ddot{\bar{\eta}}_j) = 0\,, \quad j = \overline{1,n}\,. \tag{5.31}$$

Далее для простоты черту над безразмерными переменными писать не будем.

Стационарные режимы движения. Исследуем случай вращения ротора с постоянной безразмерной угловой скоростью $\dot{\theta}=\nu=\mathrm{const}$. Вводя комплексные переменные $z = x + iy$ и $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = \overline{1,n}$, запишем первые два уравнения системы (5.30) в виде одного уравнения в комплексной форме:

$$(1 + n\chi)(\ddot{z} + \delta_n\dot{z} + z) = \varepsilon\nu^2 e^{i(\nu t+\alpha)} - \chi\sum_{j=1}^{n}(\ddot{\zeta}_j - \nu^2\zeta_j + 2i\nu\dot{\zeta}_j)e^{i\nu t}\,. \tag{5.32}$$

В уравнении (5.32) переменная z задает положение точки C в неподвижной системе координат. Используя экспоненциальную форму записи, представим ее виде

$$z = ae^{i(\nu t+\phi)} = \tilde{z}e^{i\nu t}\,,$$

где $\tilde{z} = ae^{i\phi} = \tilde{\xi}+i\tilde{\eta}$ — комплексная переменная, описывающая положение точки C во вращающейся системе координат $O\tilde{\xi}\tilde{\eta}$. Перейдя в системе (5.30) к новым безразмерным переменным $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$, получим автономную систему уравнений, удобную для исследования стационарных режимов движения ротора:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{\xi}}+\delta_n\dot{\tilde{\xi}}-2\nu\dot{\tilde{\eta}}+(1-\nu^2)\tilde{\xi}-\nu\delta_n\tilde{\eta}=\dfrac{1}{1+n\chi}\left(\varepsilon\nu^2\cos\alpha-\chi\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\ddot{\xi}_j-\nu^2\xi_j-2\nu\dot{\eta}_j)\right), \\ \ddot{\tilde{\eta}}+\delta_n\dot{\tilde{\eta}}+2\nu\dot{\tilde{\xi}}+(1-\nu^2)\tilde{\eta}+\nu\delta_n\tilde{\xi}=\dfrac{1}{1+n\chi}\left(\varepsilon\nu^2\sin\alpha-\chi\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\ddot{\eta}_j-\nu^2\eta_j+2\nu\dot{\xi}_j)\right), \\ \rho_1^2\eta_j(\ddot{\xi}_j + \delta_b\dot{\xi}_j - \nu(2\dot{\eta}_j + \nu\xi_j) + \ddot{\tilde{\xi}} - 2\nu\dot{\tilde{\eta}} - \nu^2\tilde{\xi}) = \\ \quad = \rho_2^2\xi_j(\ddot{\eta}_j + \delta_b\dot{\eta}_j + \nu(2\dot{\xi}_j - \nu\eta_j) + \ddot{\tilde{\eta}} - 2\nu\dot{\tilde{\xi}} - \nu^2\tilde{\eta})\,, \quad j = \overline{1,n}\,. \end{cases} \tag{5.33}$$

Подставив в систему (5.33) и в уравнения связей (5.24) стационарные решения вида $\tilde{\xi}=\tilde{\xi}_c=\mathrm{const}$, $\tilde{\eta}=\tilde{\eta}_c=\mathrm{const}$, $\xi_j=\xi_{j0}=\mathrm{const}$ и $\eta_j=\eta_{j0}=\mathrm{const}$,

получим замкнутую систему $2n+2$ алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1+2\chi)((1-\nu^2)\tilde{\xi}_c - \nu\delta_n\tilde{\eta}_c) = \nu^2(\varepsilon\cos\alpha + \chi\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_{j0})\,, \\ (1+2\chi)(\nu\delta_n\tilde{\xi}_c + (1-\nu^2)\tilde{\eta}_c) = \nu^2(\varepsilon\sin\alpha + \chi\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_{j0})\,, \\ \rho_1^2\eta_{j0}\tilde{\xi}_c - \rho_2^2\xi_{j0}\tilde{\eta}_c = (\rho_2^2-\rho_1^2)\xi_{j0}\eta_{j0}\,, \\ \rho_2^2\xi_{j0}^2 + \rho_1^2\eta_{j0}^2 = \rho_1^2\rho_2^2\,,\ j=\overline{1,n}\,. \end{cases} \tag{5.34}$$

При $n=2$ система (5.34) представляет собой шесть уравнений, описывающих стационарные режимы движения ротора в случае АБУ с двумя балансировочными шарами. Исследуем ее подробно и прежде всего выясним вопрос о существовании полностью сбалансированного режима. Подставляя в первые четыре уравнения $\tilde{\xi}_c=\tilde{\eta}_c=0$, получаем

$$\begin{cases} \varepsilon\cos\alpha + \chi(\xi_{10}+\xi_{20}) = 0\,, \\ \varepsilon\sin\alpha + \chi(\eta_{10}+\eta_{20}) = 0\,, \\ (\rho_2^2-\rho_1^2)\xi_{10}\eta_{10} = 0\,, \\ (\rho_2^2-\rho_1^2)\xi_{20}\eta_{20} = 0\,. \end{cases} \tag{5.35}$$

В случае «идеального» АБУ, когда $\rho_1=\rho_2$, третье и четвертое уравнения (5.35) удовлетворяются тождественно, а первое и второе совместно с уравнениями связей образуют замкнутую систему уравнений. При этом, поскольку оси ξ и η связанной системы координат в этом случае могут быть направлены произвольно, не умаляя общности, можно положить $\alpha=0$. В результате получаем систему

$$\begin{cases} \xi_{10}+\xi_{20} = -\varepsilon/\chi\,, \\ \eta_{10}+\eta_{20} = 0\,, \\ \xi_{10}^2+\eta_{10}^2 = 1\,, \\ \xi_{20}^2+\eta_{20}^2 = 1\,, \end{cases} \tag{5.36}$$

которая имеет единственное решение

$$\xi_{10}=\xi_{20}=-\frac{\varepsilon}{2\chi}\,,\quad \eta_{10}=\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4\chi^2}}=-\eta_{20}\,, \tag{5.37}$$

отвечающее полностью сбалансированному вращению ротора.

В случае эллиптического АБУ $\rho_1 \neq \rho_2$, поэтому, объединяя уравнения (5.36) с уравнениями связей, получаем систему из шести уравнений относительно четырех неизвестных

$$\begin{cases} \xi_{10} + \xi_{20} = -\dfrac{\varepsilon}{\chi}\cos\alpha\,, \\ \eta_{10} + \eta_{20} = -\dfrac{\varepsilon}{\chi}\sin\alpha\,, \\ \xi_{10}\eta_{10} = 0\,, \\ \xi_{20}\eta_{20} = 0\,, \\ \rho_2^2\xi_{10}^2 + \rho_1^2\eta_{10}^2 = \rho_1^2\rho_2^2\,, \\ \rho_2^2\xi_{20}^2 + \rho_1^2\eta_{20}^2 = \rho_1^2\rho_2^2\,. \end{cases} \tag{5.38}$$

Система (5.38) переопределена и имеет решения вида

$$\begin{gathered} \{\xi_{10} = 0\,,\ \eta_{10} = \pm\rho_2\,,\ \xi_{20} = \pm\rho_1\,,\ \eta_{20} = 0\}\,, \\ \{\xi_{10} = \pm\rho_1\,,\ \eta_{10} = 0\,,\ \xi_{20} = 0\,,\ \eta_{20} = \pm\rho_2\} \end{gathered} \tag{5.39}$$

только при выполнении дополнительных условий

$$\begin{cases} |\alpha| = \operatorname{arctg}\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\,, \\ \chi = \dfrac{\varepsilon}{\rho_1^2 + \rho_2^2}\,. \end{cases} \tag{5.40}$$

Решения (5.39) имеют простое физическое объяснение. В случае, когда диск ротора полностью уравновешен, точка C — центр эллиптической обоймы АБУ — лежит на оси вращения. Но тогда положение равновесия балансировочных шаров может быть только в вершинах эллипса, так как в противном случае шары будут двигаться под действием касательных составляющих центробежных сил. Однако особого смысла решения (5.39) не имеют, поскольку условия (5.40) не выполнимы для произвольного дисбаланса. Следовательно, мы можем констатировать, что полностью сбалансированный режим в случае эллиптического АБУ практически нереализуем.

Исследуем теперь вопрос о существовании несбалансированных стационарных режимов движения ротора. Полагая, что амплитуда $a = \sqrt{\tilde{\xi}_c^2 + \tilde{\eta}_c^2}$ установившегося прецессионного движения точки C не равна нулю, преобразуем последние четыре уравнения системы (5.35) следующим образом: умножим третье уравнение на $\xi_{20}\eta_{20}$ и вычтем из него четвертое

уравнение, умноженное на $\xi_{10}\eta_{10}$, а также вычтем из пятого уравнения шестое. В результате получим два уравнения

$$\begin{aligned}&\rho_1^2\tilde{\xi}_c(\xi_{20}-\xi_{10})\eta_{10}\eta_{20}=\rho_2^2\tilde{\eta}_c(\eta_{20}-\eta_{10})\xi_{10}\xi_{20}\,,\\&\rho_2^2(\xi_{10}^2-\xi_{20}^2)+\rho_1^2(\eta_{10}^2-\eta_{20}^2)=0\,,\end{aligned}\tag{5.41}$$

которые удовлетворяются тождественно при условии

$$\xi_{10}=\xi_{20}=\xi_0\,,\quad \eta_{10}=\eta_{20}=\eta_0\,.\tag{5.42}$$

Поскольку в рассматриваемой модели АБУ мы пренебрегаем размерами балансировочных шаров, то условие (5.42) означает, что два шара соприкасаются друг с другом.

Подставляя соотношения (5.42) в систему (5.35), запишем ее в виде

$$\begin{cases}p_1\tilde{\xi}_c-p_2\tilde{\eta}_c=\varepsilon\cos\alpha+2\chi\xi_0\,,\\p_2\tilde{\xi}_c+p_1\tilde{\eta}_c=\varepsilon\sin\alpha+2\chi\eta_0\,,\\\rho_1^2\eta_0\tilde{\xi}_c-\rho_2^2\xi_0\tilde{\eta}_c=(\rho_2^2-\rho_1^2)\xi_0\eta_0\,,\\\rho_2^2\xi_0^2+\rho_1^2\eta_0^2=\rho_1^2\rho_2^2\,,\end{cases}\tag{5.43}$$

где

$$p_1=(1+2\chi)\frac{1-\nu^2}{\nu^2}\,,\quad p_2=(1+2\chi)\frac{\delta_n}{\nu}\,.$$

Выражая из первых двух уравнений (5.43) переменные $\tilde{\xi}_c$ и $\tilde{\eta}_c$ через ξ_0 и η_0,

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_c&=\frac{\varepsilon(p_1\cos\alpha+p_2\sin\alpha)+2\chi(p_1\xi_0+p_2\eta_0)}{p_1^2+p_2^2}\,,\\\tilde{\eta}_c&=\frac{\varepsilon(p_1\sin\alpha-p_2\cos\alpha)+2\chi(p_1\eta_0-p_2\xi_0)}{p_1^2+p_2^2}\,,\end{aligned}\tag{5.44}$$

и подставляя формулы (5.44) в третье уравнение (5.43), получаем систему двух уравнений второго порядка относительно переменных ξ_0 и η_0:

$$\begin{cases}A_1\xi_0\eta_0+A_2\xi_0+A_3\eta_0+A_4=0\,,\\\dfrac{\xi_0^2}{\rho_1^2}+\dfrac{\eta_0^2}{\rho_2^2}=1\,,\end{cases}\tag{5.45}$$

где

$$\begin{aligned}&A_1=(p_1^2+p_2^2+2\chi p_1)(\rho_1^2-\rho_2^2)\,,\quad A_2=\varepsilon\rho_2^2(p_2\cos\alpha-p_1\sin\alpha)\,,\\&A_3=\varepsilon\rho_1^2(p_1\cos\alpha+p_2\sin\alpha),\quad A_4=2\chi p_2\rho_1^2\rho_2^2\,.\end{aligned}$$

Система (5.45) может быть сведена к одному уравнению четвертой степени, но более удобным будет графический метод ее исследования. Для этого выразим первое уравнение в виде дробно-линейных функций вида

$$\eta_0 = -\frac{A_2\xi_0 + A_4}{A_1\xi_0 + A_3}\,, \quad \text{или} \quad \xi_0 = -\frac{A_3\eta_0 + A_1}{A_1\eta_0 + A_2}\,,$$

графики которых представляет собой симметричную гиперболу с асимптотами

$$\xi = -\frac{A_3}{A_1}\,, \quad \eta = -\frac{A_2}{A_1}\,.$$

Таким образом, графическое решение системы (5.45) будет представлять собой точки пересечения симметричной гиперболы и эллипса.

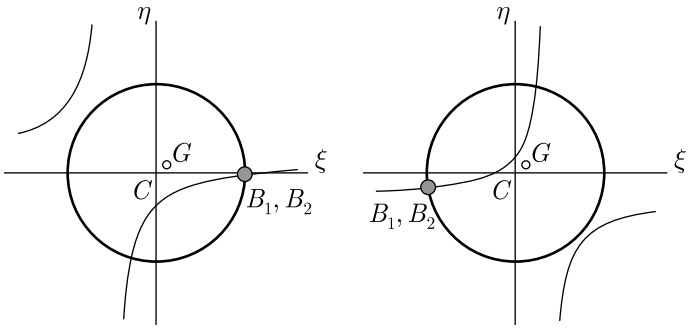

Рис. 48. Графическое решение системы (5.45)

На рис. 48 показаны графические решения системы (5.45), рассчитанные при следующих значениях безразмерных параметров: $\chi = 0.02$, $\varepsilon = 0.04$, $\rho_1 = 1.28$, $\rho_2 = 1.2$, $\delta_n = 0.1$, $\alpha = 0.6$. Левый рисунок соответствует случаю $\nu = 0.85$, когда безразмерная угловая скорость ротора ниже критической, а правый отвечает закритической частоте $\nu = 1.5$. В обоих случаях графики гиперболы и эллипса имеют по две точки пересечения, однако реальные положения показанных на рисунке балансировочных шаров будут соответствовать тем точкам, которые расположены дальше от оси вращения ротора, соединяющей центры подшипников. Устойчивость этих положений обусловлена действующими на шары центробежными силами. При этом в докритическом режиме шары расположены на стороне дисбаланса диска, что увеличивает общий дисбаланс ротора, а в закритической области — на стороне противоположной дисбалансу, в силу чего суммарный дисбаланс диска и шаров становится меньше, чем в докритическом случае.

Нестационарные режимы движения. Исследование нестационарных режимов движения ротора, оснащенного АБУ с двумя балансировочными шарами, проведем путем численного интегрирования системы уравнений (5.30), (5.31). Полагая, что ротор вращается с постоянным угловым ускорением $\ddot{\theta} = \dot{\nu} = \text{const}$, рассмотрим процесс прохождения системы через критическую область. На рис. 49 кривая *1* представляет зависимость амплитуды прецессионного движения точки C от безразмерной угловой скорости ν в случае, когда $\nu = 0.16t$ при следующих значениях безразмерных параметров: $\chi = 0.02$, $\varepsilon = 0.04$, $\alpha = 0.6$, $\delta_n = 0.18$, $\delta_b = 40$, $\rho_1 = 1.28$, $\rho_2 = 1.2$.

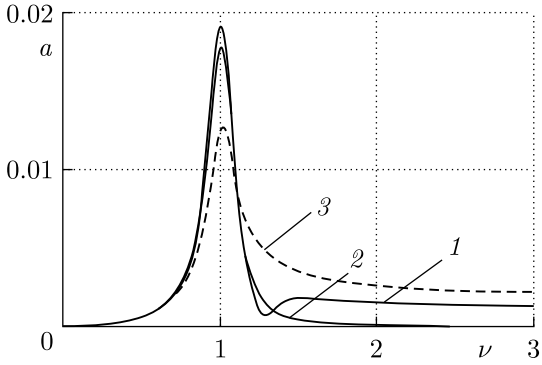

Рис. 49. Нестационарное прохождение критической области

Для сравнения на этом же рисунке приведены амплитудно-частотные кривые для ротора с идеальным круговым АБУ (кривая *2*) и для ротора без АБУ (штриховая кривая *3*). Из рисунка видно, что эллиптическое АБУ, в отличие от кругового, не обеспечивает балансировку ротора в закритической области.

Рисунок 50 демонстрирует изменение положения балансировочных шаров для ротора с круговой (*а*) и эллиптической (*б*) беговой дорожкой АБУ в зависимости от угловой скорости ν. Сплошные кривые соответствуют связанным координатам ξ_1 и η_1 центра первого шара, а штриховые — связанным координатам центра второго шара ξ_2 и η_2. На рисунке показаны также установившиеся положения балансировочных шаров в обоймах кругового и эллиптического АБУ.

Анализ графиков позволяет сделать вывод о том, что изменение круговой формы беговой дорожки АБУ на эллиптическую приводит к потере функциональности АБУ в закритической области, поскольку балансиро-

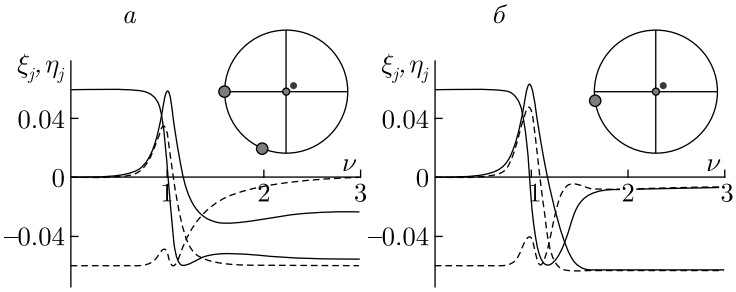

Рис. 50. Движение балансировочных шаров: (*а*) круговое АБУ; (*б*) эллиптическое АБУ

вочные шары в этом случае не могут занять положение, уравновешивающее дисбаланс.

Представляет также интерес рассмотреть переходные процессы при вращении ротора с постоянной угловой скоростью. На рис. 51 представлены результаты численного интегрирования системы (5.30), (5.31) в случае вращения ротора с докритической ($\nu = 0.8$) и закритической ($\nu = 1.5$) угловыми скоростями.

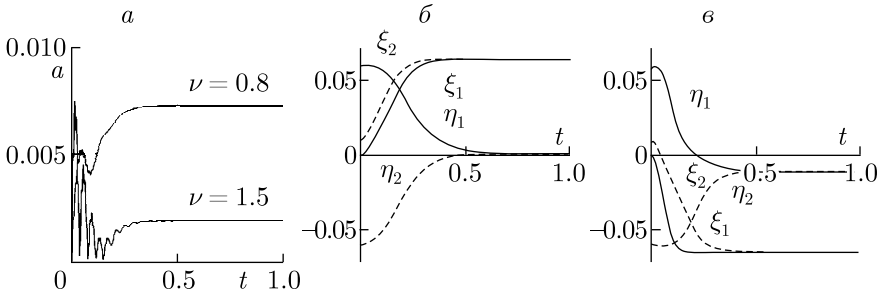

Рис. 51. Вращение ротора с постоянной угловой скоростью

Рисунок (*а*) показывает изменение амплитуд прецессионного движения точки C, а рисунки (*б*) и (*в*) — изменение положения балансировочных шаров. Графики демонстрируют, что в обоих случаях в системе устанавливаются несбалансированные стационарные режимы, когда балансировочные шары находятся в одной точке.

Основные выводы

1. Шаровое АБУ, эксцентрически закрепленное на диске, не может обеспечить полной балансировки статически неуравновешенного ротора с переменным дисбалансом, поскольку сбалансированный стационарный ре-

жим возможен только при определенных соотношениях между параметрами системы.

2. Наилучшим достижимым на практике результатом для эксцентрического АБУ является закритический почти сбалансированный стационарный режим, при котором амплитуда прецессионного движения ротора не зависит от угловой скорости и в точности равна величине эксцентриситета АБУ.

3. Беговая дорожка балансировочных шаров АБУ должна иметь форму, максимально приближенную к идеальной окружности. Эллиптичность формы может привести к потере функциональности АБУ.

Глава V
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Авторы: *П. Е. Товстик, Н. В. Наумова*

В этой главе дается постановка задач теории управления и краткий обзор некоторых методов их решения. Задачи теории управления можно разделить на два больших класса. Первый из них связан с выбором в том или ином смысле оптимального управления, а второй — с задачей удержания движения на выбранной траектории или вблизи нее. Излагается принцип максимума Понтрягина. Приводится решение некоторых задач теории управления. Вводятся понятия управляемости, стабилизируемости и наблюдаемости[1].

§ 1. Постановки задач оптимального управления

Пусть движение механической системы описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, u_k, t)\,, \quad i, j = \overline{1, n}\,, \quad k = \overline{1, m}\,, \tag{1.1}$$

где x_i — фазовые координаты, включающие обобщенные перемещения и скорости, $u_k(t) \in U \subset R_m$ — подлежащие выбору управления, принадлежащие замкнутому множеству U пространства R_m, t — время. Ищется решение системы (1.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$x_i(t_0) = x_i^0\,, \quad x_i(t_1) = x_i^1\,, \quad i = \overline{1, n}\,.$$

При основной постановке задачи считается, что все величины

$$t_0\,, \quad t_1\,, \qquad x_i^0\,, \quad x_i^1\,, \quad i = \overline{1, n}\,, \tag{1.2}$$

заданы. Также рассматриваются другие варианты граничных условий, при которых часть величин (1.2) не задана и/или на них наложены связи вида

$$\varphi_p(x_i^0, t_0) = 0\,, \quad p = \overline{1, P}\,, \qquad \psi_q(x_i^1, t_1) = 0\,, \quad q = \overline{1, Q}\,.$$

[1] См. книги: *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.; *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2002. 308 с.; *Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М.* Оптимизация динамики управляемых систем. Изд-во Московского ун-та, 2000. 304 с.; *Пасынков В. Е., Пасынкова И. А., Наумова Н. В.* Экстремальные задачи. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2002. 78 с.

В качестве иллюстрации целесообразности постановки различных вариантов граничных условий рассмотрим управление движением ракеты, которая должна попасть в движущуюся цель. Момент пуска ракеты (то есть величина t_0) может быть не задан, может быть не задана и скорость ракеты в момент окончания движения (то есть одна из величин $x_i(t_1)$). Также должны быть поставлены условия вида $\psi_q(x_i(t_1), t_1) = 0$, зависящие от закона движения цели.

Система (1.1) может не иметь решения, удовлетворяющего поставленным граничным условиям (например, самолет не может долететь из Санкт-Петербурга в Москву за 1 минуту). Если же решения существуют, то, как правило, их бесконечно много. Поэтому ставится задача нахождения оптимального решения, доставляющего максимум функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_i(t), u_k(t), t)\, dt\,, \tag{1.3}$$

где функции $x_i(t)$ удовлетворяют уравнениям (1.1) и граничным условиям, $u_k(t) \in U$ — выбранные управления. Отыскание максимума, а не минимума функционала (1.3) не имеет принципиального значения — если требуется обеспечить минимум, то достаточно изменить знак у функционала (1.3).

В качестве примера требования экстремума функционала (1.3) можно привести задачу оптимального быстродействия (то есть нахождения решения, соответствующего минимальному времени движения). В этом случае можно положить $f_0 \equiv -1$. Другим примером является задача о построении движения с минимальным расходом топлива, которое формирует силу тяги движущегося объекта.

Замечание. Сформулированная здесь задача называется *задачей Лагранжа.* Возможны ее модификации, имеющие практически то же решение, что и описанное ниже. *Задача Майера* отличается от задачи Лагранжа наличием внеинтегрального слагаемого в выражении минимизируемого функционала:

$$J = g(x_i^0, t_0, x_i^1, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_i(t), u_k(t), t)\, dt\,, \tag{1.4}$$

а в *задаче Больца* разыскивается минимум только внеинтегрального слагаемого ($f_0 \equiv 0$ в формуле (1.4)).

§ 2. Решение задачи оптимального управления методами классического вариационного исчисления. Принцип максимума Понтрягина

Ищем максимум функционала (1.3) при наличии n неголономных связей (1.1). Включим эти связи в функционал (1.3) с помощью множителей Лагранжа $\lambda_i(t)$ (их зависимость от времени обусловлена неголономностью связей). Тогда получим функционал

$$\begin{aligned} J^* &= \int_{t_0}^{t_1} \left(f_0 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(H(x_i, \lambda_i, u_k, t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i \right) dt\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где введена функция

$$H = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\,, \tag{2.2}$$

которую принято называть *функцией Понтрягина — Гамильтона* из-за формального сходства полученной ниже системы уравнений с системой канонических уравнений.

Найдем вариацию функционала (2.1):

$$\begin{aligned} \delta J^* = \widetilde{J}^* - J^* = \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \left(H(\widetilde{x}_i, \lambda_i, \widetilde{u}_k, t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{\widetilde{x}}_i \right) dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \left(H(x_i, \lambda_i, u_k, t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i \right) dt\,, \end{aligned}$$

где принято $\widetilde{x}_i = x_i + \delta x_i$, $\widetilde{t}_0 = t_0 + \delta t_0$, $\widetilde{t}_1 = t_1 + \delta t_1$, $\widetilde{u}_k = u_k + \delta u_k$, причем волной обозначены величины сравнения, а значком δ — вариации. Для действительного движения при любых вариациях должно быть выполнено неравенство $\delta J^* \leqslant 0$.

Считая вариации δx_i, δt_0, δt_1 малыми, найдем вариацию δJ^* с точностью до величин первого порядка малости по отношению к величинам δx_i, δt_0, δt_1. После интегрирования по частям и упрощений получаем

$$\begin{aligned} \delta J^* = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{\lambda}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \Delta H \right) dt + \\ + \left[H \delta t - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta x_i \right]_{t=t_0}^{t=t_1}\,, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где обозначено

$$\Delta H = H(x_i, \lambda_i, \widetilde{u}_k, t) - H(x_i, \lambda_i, u_k, t)\,, \qquad \Delta x_i = \delta x_i + \dot{x}_i \delta t\,, \quad i = \overline{1, n}\,.$$

Здесь Δx_i — полная вариация.

Из условия $\delta J^* \leqslant 0$ в силу произвольности δx_i получаем уравнения для $\dot{\lambda}_i$, которые вместе с уравнениями (1.1) образуют систему

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i}\,, \\ \dot{\lambda}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}\,, \end{cases} \qquad i = \overline{1, n}\,, \tag{2.4}$$

похожую на систему канонических уравнений.

Замена величины ΔH выражением

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial u_k}\, \delta u_k$$

с последующим получением уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0\,, \quad k = \overline{1, m}\,, \tag{2.5}$$

для управлений u_k не всегда корректна. Она верна, если управления лежат строго внутри области U. Если же управления выходят на границу области U, то их следует искать из условия

$$\min_{u_k \in U} H(x_i(t), \lambda_i(t), u_k, t)\,,$$

где функции $x_i(t)$, $\lambda_i(t)$ удовлетворяют уравнениям (2.4) и граничным условиям.

Описанный алгоритм составляет содержание *принципа максимума Понтрягина*. Название максимум, а не минимум имеет исторические причины и не меняет существа задачи. Напомним, что, если мы хотим искать минимум, то нужно изменить знак у функционала (1.3).

Следствия, вытекающие из рассмотрения внеинтегральных членов в представлении (2.3) при отыскании максимума функционала δJ^*, обсуждаются в следующем параграфе.

§ 3. Граничные условия

В соответствии с порядком системы (2.4) на каждом конце рассматриваемого интервала времени (t_0, t_1) должно быть задано n условий, однако в связи с тем, что моменты времени t_0, t_1 могут быть не заданы, число условий на каждом конце возрастает до $n+1$.

Внеинтегральное слагаемое в (2.3) при $t = t_1$ дает (случай $t = t_0$ рассматривается аналогично)

$$\delta J_1^* = H\delta t_1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t_1)\Delta x_i^1 \geqslant 0\,, \quad \Delta x_i^1 = \delta x_i^1 + \dot{x}_i \delta t_1 \quad (t = t_1)\,. \tag{3.1}$$

Если конец $t = t_1$ закреплен, то есть заданы условия $x_i(t_1) = x_i^1$, то $\Delta x_i^1 = \delta t_1 = \delta J_1^* = 0$.

Если конец $t = t_1$ свободен, то вариации Δx_i^1 и δt_1 произвольны и граничные условия принимают вид

$$\lambda_i = 0\,, \quad i = \overline{1,n}\,, \qquad H = 0 \quad (t = t_1)\,.$$

В промежуточном случае, если не задана часть из величин x_i^1, t_1, обращаются в нули при $t = t_1$ соответствующие величины λ_i, H.

Рассмотрим более сложный случай, когда на конце $t = t_1$ должны быть выполнены условия

$$\psi_p(x_i, t) = 0\,, \quad p = \overline{1,P}\,, \quad P \leqslant n+1\,, \tag{3.2}$$

причем условия закрепления отдельных координат $x_j(t_1) = x_j^1$ записываем в рамках общей схемы (3.2).

Вариации связей (3.2) добавляем с множителями Лагранжа Λ_p к выражению (3.1). В результате получаем

$$\delta J_1^* = \left(H - \sum_{p=1}^{P} \Lambda_p \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\delta t_1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i + \sum_{p=1}^{P} \Lambda_p \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)\Delta x_i^1 \geqslant 0\,.$$

Теперь вариации δt_1 и Δx_i^1 становятся независимыми. Приравнивая нулю коэффициенты при них, получаем систему из $n+1$ уравнения

$$H - \sum_{p=1}^{P} \Lambda_p \frac{\partial \psi_p}{\partial t} = 0\,, \qquad \lambda_i + \sum_{p=1}^{P} \Lambda_p \frac{\partial \psi_p}{\partial x_i} = 0\,, \quad i = \overline{1,n}\,, \tag{3.3}$$

которая вместе с P уравнениями (3.2) служит для построения граничных условий при $t = t_1$. Общее количество неизвестных x_i, λ_i, Λ_p, t_1, H равно

$2n + P + 2$, а уравнений (3.2), (3.3) имеется $n + P + 1$. Следовательно, остается $n + 1$ граничное условие.

§ 4. Решение задачи на быстродействие с помощью принципа максимума Понтрягина

Рассмотрим движение материальной точки с массой $m = 1$ по прямой Ox под действием управляющей силы $u(t)$, причем $|u(t)| \leqslant 1$. В начальный момент времени заданы координата и проекция скорости точки:

$$x(0) = a\,, \quad \dot{x}(0) = v\,.$$

Требуется перевести точку в начало координат с нулевой скоростью за наименьшее время T: $x(T) = \dot{x}(T) = 0$. Подобная задача, называемая *задачей на быстродействие*, отражает, например, упрощенную схему стыковки грузового корабля с космической станцией.

Запишем уравнение движения $\ddot{x} = u$ в виде системы уравнений первого порядка (1.1):

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \quad \dot{x}_2 = u\,.$$

Функция Понтрягина — Гамильтона (2.2) имеет вид

$$H = -1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u\,. \tag{4.1}$$

Напомним, что при отыскании минимума функционала следовало в формуле (1.3) заменить функцию f_0 на $(-f_0)$.

Запишем систему уравнений (2.4)

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2\,, \quad \dot{x}_2 = u\,, \\ \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0\,, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \end{gathered} \tag{4.2}$$

с граничными условиями

$$x_1(0) = a\,, \quad x_2(0) = v\,, \quad x_1(T) = 0\,, \quad x_2(T) = 0\,. \tag{4.3}$$

Интегрирование третьего и четвертого уравнений из (4.2) дает

$$\lambda_1 = c\,, \quad \lambda_2 = -ct + c_1\,, \tag{4.4}$$

где c, c_1 — произвольные постоянные. Из (4.1) следует, что минимум функции $H(u)$ достигается при $u(t) = -\operatorname{sign}\lambda_2 = \pm 1$, причем из (4.4) следует, что переключение управления происходит не более одного раза.

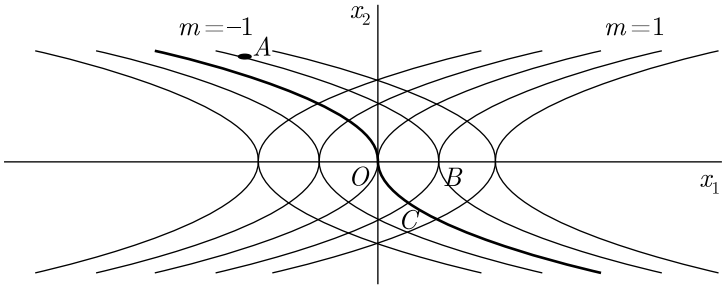

Рис. 1. Решение задачи на быстродействие

Дальнейший план решения задачи заключается в интегрировании первых двух уравнений в (4.2) при $u = 1$ и $u = -1$, в построении возможных траекторий на фазовой плоскости x_1x_2, которые получаются после исключения времени, и, наконец, в удовлетворении граничных условий (4.3).

Упомянутые траектории имеют форму парабол (см. рис. 1)

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2} + D_1\,, \qquad u = 1\,,$$
$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + D_2\,, \qquad u = -1\,,$$

где $D_1,\ D_2$ — произвольные постоянные.

Пусть в начальный момент $t = 0$ точка занимала в фазовом пространстве положение A. Ее оптимальной траекторией является $ABCO$, причем участок ABC точка проходит при $u = -1$, в точке C происходит переключение, и финальный участок CO точка проходит при $u = 1$. Жирной линией на рис. 1 отмечена кривая, находясь на которой, точка достигает начала координат без переключений.

§ 5. Управление горизонтальным движением тележки с маятниками на основе применения принципа максимума Понтрягина

Постановка одной из задач теории управления. Рассмотрим одну из основных задач теории управления — о нахождении управляющей оптимальной силы, переводящей за заданное время механическую систему с конечным числом степеней свободы из одного фазового состояния с конкретными обобщенными координатами и скоростями в новое фазовое состояние с заданными обобщенными координатами и скоростями. В качестве модельного примера будем отыскивать управляющую силу F, перемещающую горизонтально движущуюся вдоль оси x тележку массы m за

заданное время $\widetilde{T}$ на расстояние S. На тележке укреплены оси s математических маятников с массами m_σ и длинами l_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. На рис. 2 для определенности изображена тележка с двумя маятниками. Требуется переместить данную систему из первоначального состояния покоя в новое положение покоя (при такой постановке задачи обычно говорят, что решается задача о гашении колебаний).

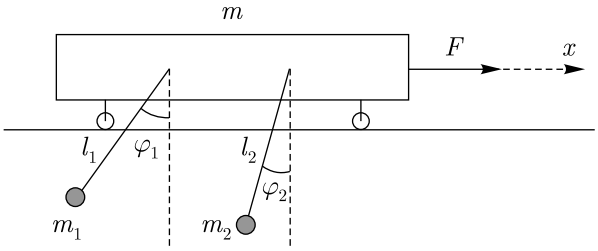

Рис. 2. Тележка с двумя маятниками

Система имеет $s+1$ степень свободы; для описания ее движения введем координату x, характеризующую горизонтальное смещение тележки, и углы поворотов маятников φ_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Кинетическая и потенциальная энергии системы в случае малых колебаний имеют вид (g — ускорение силы тяжести)

$$2T = m\dot{x}^2 + \sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma(\dot{x} - l_\sigma\dot{\varphi}_\sigma)^2\,, \quad 2\Pi = \mathrm{g}\sum_{\sigma=1}^{s} l_\sigma m_\sigma \varphi_\sigma^2\,,$$

поэтому уравнения Лагранжа второго рода запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered} M\ddot{x} - \sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma l_\sigma \ddot{\varphi}_\sigma = F\,, \quad M = m + \sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma\,, \\ \ddot{x} - l_\sigma\ddot{\varphi}_\sigma = \mathrm{g}\varphi_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Очевидно, что здесь первое уравнение выражает закон движения центра масс всей системы:

$$M\ddot{x}_c = F\,, \quad x_c = x - \frac{\sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma l_\sigma \varphi_\sigma}{M}\,.$$

Для гашения колебаний рассматриваемой механической системы, то есть для наличия покоя системы в начальный момент и для обеспечения прекращения колебаний при остановке системы, управляющая сила долж-

на быть такой, чтобы выполнялись следующие краевые условия:

$$\begin{gathered} x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(\widetilde{T}) = 0\,, \quad x(\widetilde{T}) = S\,, \\ \varphi_\sigma(0) = \varphi_\sigma(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \dot{\varphi}_\sigma(0) = \dot{\varphi}_\sigma(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Рассматриваемая механическая система имеет нулевую частоту Ω_0 и s ненулевых собственных размерных частот Ω_σ, $\sigma = \overline{1,s}$.

Для дальнейших исследований систему (5.1) удобно записать в главных координатах (см. § 4 главы VII первого тома учебника). Обратим внимание на то, что, подставив $\ddot{x}$ из первого уравнения системы (5.1) в остальные, получим систему s уравнений относительно неизвестных, φ_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Рассматривая полученные уравнения как самостоятельную систему дифференциальных уравнений, перейдем в ней к безразмерным нормальным координатам x_σ, $\sigma = \overline{1,s}$, которые окажутся линейными комбинациями тех же углов отклонений маятников. Переходя к безразмерному времени $\tau = \Omega_1 t$ и вводя $(s+1)$-ю безразмерную главную координату x_0, пропорциональную перемещению центра масс рассматриваемой механической системы, в результате получим

$$\begin{cases} x_0'' = u\,, \\ x_\sigma'' + \omega_\sigma^2 x_\sigma = u\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \end{cases} \tag{5.3}$$

Здесь u — управление, пропорциональное силе F, штрихи соответствуют производным по безразмерному времени τ, $\omega_\sigma = \Omega_\sigma/\Omega_1$, $\sigma = \overline{1,s}$. В правых частях уравнений стоит одно и то же безразмерное управление u, этого легко добиться соответствующим изменением масштабов главных координат. Полученную систему дифференциальных уравнений (5.3), удовлетворяя требованиям (5.2), будем решать при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} x_0(0) = x_0'(0) = 0\,, \quad x_\sigma(0) = x_\sigma'(0) = 0\,, \quad T = \Omega_1 \widetilde{T}\,, \\ x_0(T) = a \equiv \frac{S}{l_1}\,, \quad x_0'(T) = 0\,, \quad x_\sigma(T) = x_\sigma'(T) = 0\,, \\ \sigma = \overline{1,s}\,. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Система (5.3) имеет $(s+1)$ дифференциальных уравнений, из нее требуется найти неизвестные функции x_0, x_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Но в этой же системе (5.3) неопределенной является и функция $u(t)$. Поэтому для решения поставленной задачи (5.3)–(5.4) необходимо добавить еще одно условие. Оно должно выражать тот принцип, который положен в основу выбора управления $u(\tau)$ (управляющей силы $F(t)$) из всего множества возможных

управлений, при которых рассматриваемая задача имеет решение. Обычно при решении подобных задач выбор управления подчиняется условию минимальности функционала[2]

$$J = \int\limits_0^T u^2 d\tau \,. \tag{5.5}$$

Одним из наиболее употребительных классических методов решения сформулированной задачи оптимального управления (5.3)–(5.5) является метод, опирающийся на использование принципа максимума Понтрягина.

Решение задачи с использованием принципа максимума Понтрягина. Согласно изложенной в § 2 теории в случае применения этого принципа уравнения (5.3) переписываются в виде (1.1). В рассмотрение вводятся множители Лагранжа $\lambda_k(\tau)$, $k = \overline{1, 2s+2}$, и функция Гамильтона — Понтрягина (2.2) записывается следующим образом:

$$H = -u^2 + \sum_{k=1}^{2s+2} \lambda_k \, f_k \, (q, u) \,.$$

Напомним, что при отыскании минимума функционала (5.5) в нем подынтегральная функция u^2 заменяется на $(-u^2)$.

Неизвестные функции $\lambda_k(\tau)$ подчиняются второй группе уравнений (2.4):

$$\lambda_k' = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \,, \quad k = \overline{1, 2s+2} \,,$$

а искомое управление $u(\tau)$ определяется из условия (2.5):

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \,. \tag{5.6}$$

В рассматриваемом случае имеем

$$H = -u^2 + \lambda_1 \, q_2 + \lambda_2 \, u + \sum_{\sigma=1}^{s} \lambda_{2\sigma+1} \, q_{2\sigma+2} + \sum_{\sigma=1}^{s} \lambda_{2\sigma+2} \, (u - \omega_\sigma^2 \, q_{2\sigma+1}) \,, \tag{5.7}$$

$$\lambda_1' = 0 \,, \quad \lambda_2' = -\lambda_1 \,, \quad \lambda_{2\sigma+1}' = \omega_\sigma^2 \, \lambda_{2\sigma+2} \,, \quad \lambda_{2\sigma+2}' = -\lambda_{2\sigma+1} \,, \quad \sigma = \overline{1, s} \,. \tag{5.8}$$

[2] См., например, монографию: *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.

Из выражений (5.6) и (5.7) следует, что

$$u(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{s+1} \lambda_{2\sigma}(\tau)\,.$$

Функции $\lambda_{2\sigma}(\tau)$, $\sigma = \overline{1, s+1}$, в соответствии с системой (5.8) удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_2'' = 0\,, \quad \lambda_{2\sigma+2}'' + \omega_\sigma^2\, \lambda_{2\sigma+2} = 0\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,.$$

Поэтому минимизация функционала (5.5) достигается при

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + \sum_{\sigma=1}^{s} (C_{2\sigma+1} \cos\omega_\sigma\tau + C_{2\sigma+2} \sin\omega_\sigma\tau)\,. \tag{5.9}$$

Здесь C_k, $k = \overline{1, 2s+2}$, — произвольные постоянные. Подставляем функцию (5.9) в правые части уравнений (5.3). Общее решение этой системы дифференциальных уравнений будет содержать произвольные постоянные D_k, $k = \overline{1, 2s+2}$. Таким образом, полученное общее решение будет зависеть от $4s+4$ произвольных постоянных C_k, D_k, $k = \overline{1, 2s+2}$, которые определяются из $4s+4$ заданных граничных условий (5.4).

Но описанный общий подход нахождения решения, удовлетворяющего краевым условиям (5.4), оказывается громоздким. Поэтому покажем, каким образом можно значительно упростить возникшую проблему отыскания произвольных постоянных в нашем случае.

Здесь особенно важным является то, что решается задача о гашении колебаний рассматриваемой механической системы, поэтому в начальный момент $\tau_0 = 0$ система находится в покое, то есть равны нулю все ее главные обобщенные координаты и скорости. Вследствие этого частное решение системы (5.3) при нулевых начальных условиях удобно представить через интегралы Дюамеля:

$$\begin{gathered} x_0(\tau) = \int_0^\tau u(\tau_1)(\tau - \tau_1)\, d\tau_1\,, \\ x_\sigma(\tau) = \frac{1}{\omega_\sigma} \int_0^\tau u(\tau_1) \sin\omega_\sigma(\tau - \tau_1)\, d\tau_1\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \end{gathered} \tag{5.10}$$

Теперь после подстановки этих выражений при учете выражения (5.9) во вторую группу граничных условий (при $\tau = T$) и вычисления интегралов получим алгебраическую линейную неоднородную систему уравнений относительно лишь неизвестных C_σ, $\sigma = \overline{1, 2s+2}$. Решив ее, окончательно найдем искомое управление.

Интересно, что полученное с помощью принципа максимума Понтрягина управление (5.9), во-первых, зависит лишь от собственных частот системы, и, во-вторых, достигается за счет отыскания искомой управляющей силы в виде ряда по собственным частотам системы, что при длительном времени движения будет вводить исследуемую механическую систему в резонанс.

Численные расчеты. Проведем расчеты для случая $s = 2$ (см. рис. 2). Так как поставленная краевая задача является линейной, то ее решение будет пропорционально величине a. Поэтому, не умаляя общности, можно положить $a = 1$. Тогда решение будет зависеть лишь от двух безразмерных параметров

$$\frac{T}{T_2} \quad \text{и} \quad \frac{T_2}{T_1}\,,$$

где T_1 и T_2 — безразмерные периоды колебаний, соответствующие первой и второй ненулевым собственным частотам. Так как $\omega_1 = 1$, то $T_1 = 2\pi$, в свою очередь $T_2 = 2\pi/\omega_2$.

Рассмотрим три случая движения:

$$T = T_2\,, \quad T = 8\,T_2\,, \quad T = 16\,T_2\,, \quad \text{при этом} \quad T_2 = 0.5\,T_1\,. \tag{5.11}$$

Так как $s = 2$, то формула (5.9) принимает вид

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + C_3\cos\omega_1\tau + C_4\sin\omega_1\tau + C_5\cos\omega_2\tau + C_6\sin\omega_2\tau\,. \tag{5.12}$$

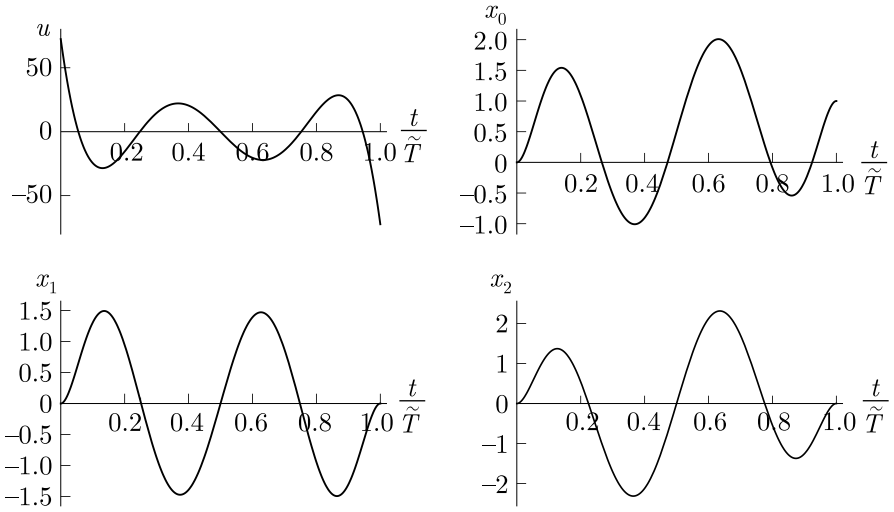

Рис. 3. Кратковременное движение механической системы, $T = T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$

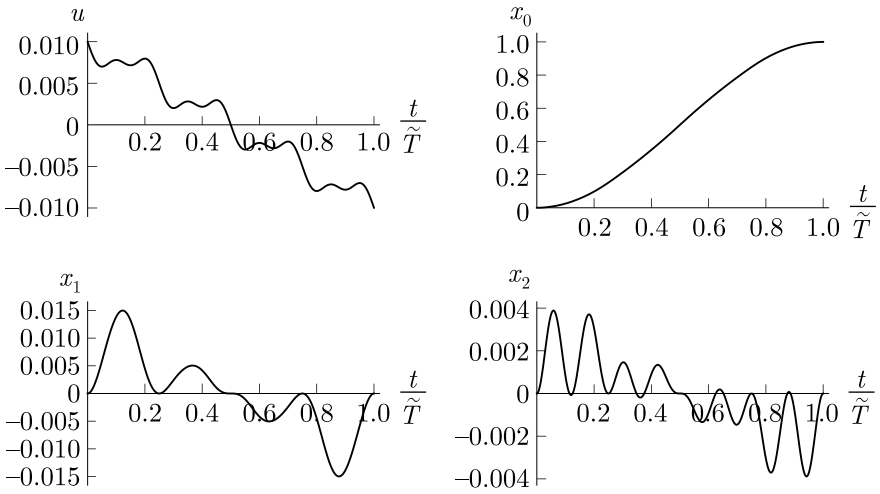

Рис. 4. Движение механической системы при $T = 8\,T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$

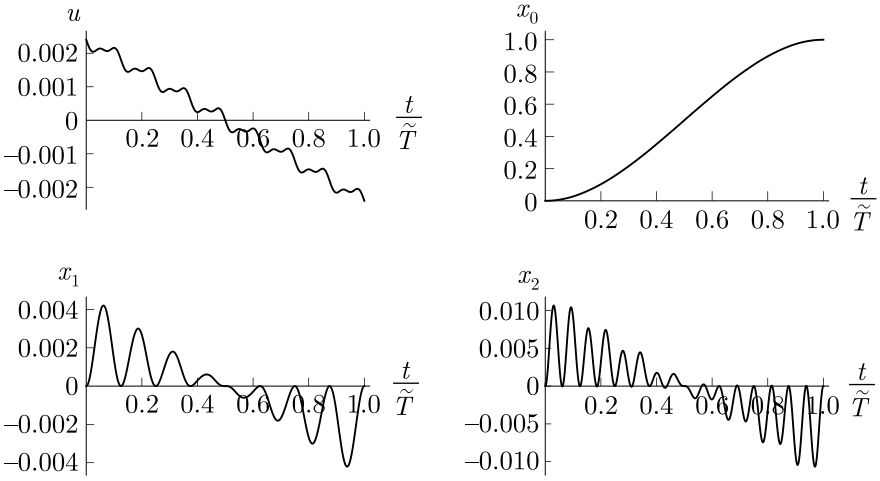

Рис. 5. Длительное движение механической системы,
$T = 16\,T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$

Подставив управление (5.12) в интегралы Дюамеля (5.10) (при $s = 2$), после удовлетворения граничных условий (5.4) при $\tau = T$ получим алгебраическую систему относительно C_k, $k = \overline{1,6}$, из которой легко найти численные значения искомых произвольных постоянных:

$$T = T_2 \ :$$

$$C_1 = 2174.6\,, \quad C_2 = -1384.4\,, \quad C_3 = -2102.12\,,$$

$$C_4 = 0\,, \quad C_5 = 0\,, \quad C_6 = 400.01\,;$$

$$T = 8\,T_2\ :$$
$$C_1 = 0.0099\,,\quad C_2 = -0.0008\,,\quad C_3 = 0\,,$$
$$C_4 = -0.0016\,,\quad C_5 = 0\,,\quad C_6 = -0.0008\,;$$
$$T = 16\,T_2\ :$$
$$C_1 = 0.0024\,,\quad C_2 = -0.0001\,,\quad C_3 = 0\,,$$
$$C_4 = -0.0002\,,\quad C_5 = 0\,,\quad C_6 = -0.0001\,.$$

Результаты расчетов, полученные с учетом этих значений, представлены на рис. 3–5.

Как видно из этих графиков, все кривые симметричны относительно точки, соответствующей середине движения. Помимо этого, результаты расчетов имеют две характерные особенности. Во-первых, управление имеет скачки в начале и в конце движения, что очевидно, так как согласно формуле (5.12) не равны нулю значения $u(0)$ и $u(1)$. Поэтому в начале и в конце процесса возникают большие колебания координат x_1 и x_2. Во-вторых, при длительном движении в механической системе развиваются интенсивные колебания и в течение всего движения, что и ожидалось, так как управление, найденное с помощью принципа максимума Понтрягина, содержит гармоники с собственными частотами системы.

В следующей главе будет введен новый метод отыскания управляющей силы, опирающийся на использование обобщенного принципа Гаусса. Этот новый метод позволяет построить управление в виде полинома.

§ 6. Линейные задачи теории управления. Управляемость

В этом и в следующих параграфах без доказательства приводятся основные сведения о поведении линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами. Здесь обсуждается управляемость.

Рассматривается управляемая система в n-мерном фазовом пространстве R_n

$$\dot{x} = A{\cdot}x + B{\cdot}u\,,\quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R_n\,,\quad u = (u_1, \dots, u_m)^T \in R_m\,, \tag{6.1}$$

где A и B — постоянные матрицы соответствующих размеров $(n \times n)$ и $(n \times m)$, $u = u(t)$ — вектор управляющих воздействий.

Определение. Система (A, B) называется *вполне управляемой*, если для любых точек x^0, $x^1 \in R_n$ и для любого момента времени T существует управление $u(t)$, такое, что решение системы (6.1) с начальным условием $x(0) = x^0$ в момент времени T принимает значение $x(T) = x^1$.

Иными словами, управление переводит систему из одной точки фазового пространства в другую. Ясно, что управление не является единственным. Действительно, пусть $T_1 < T$. Можно взять любое управление при $0 \leqslant t \leqslant T_1$, а затем добиться выполнения условия $x(T) = x^1$ за счет выбора управления на интервале $T_1 < t \leqslant T$.

Критерием полной управляемости служит

Теорема. Для того чтобы система (A, B) была *вполне управляемой*, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости $U = (B, A \cdot B, A^2 \cdot B, \ldots, A^{n-1} \cdot B)$ размеров $n \times mn$ был равен n.

Докажем необходимость заключения теоремы, одновременно пояснив происхождение матрицы U. Представим решение системы (6.1), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$, в виде

$$x(T) = \int_0^T e^{A(T-t)} \cdot Bu(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \cdot Bf_k\,, \qquad f_k = \frac{1}{k!}\int_0^T (T-t)u(t)\,dt\,,$$

где ряд равномерно сходится. Пусть $\operatorname{rang}(U) = n_1 < n$. Представим пространство R_n в виде суммы подпространства R_{n_1}, натянутого на векторы-столбцы матрицы U, и ортогонального дополнения R_{n-n_1} ($R_n = R_{n_1} + R_{n-n_1}$). Возьмем $x_1 \neq 0,\ x_1 \in R_{n-n_1}$. По теореме Гамильтона — Кели матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению $|A - \lambda E| = 0$, откуда следует, что

$$A^n = \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \ldots + \alpha_n E\,.$$

Подпространство R_{n_1} совпадает с подпространством, натянутым на векторы-столбцы всех матриц $A^k B,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, и ни при каком выборе чисел f_k равенство $x(T) = x^1$ не может быть выполнено.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = u$. Положим $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эта система вполне управляема, ибо ранг матрицы управляемости

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

равен двум.

Если взять $B = (1, 0)^T$, то, как нетрудно проверить, система (A, B) вполне управляемой не будет.

§ 7. Стабилизируемость и наблюдаемость

Целью этого параграфа является обсуждение способов удержания системы на выбранной траектории. Пусть x — это отклонение от нее. В линейном приближении задача описывается тем же уравнением (6.1)

$$\begin{gathered} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u(x)\,, \\ x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R_n\,, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^T \in R_m\,, \end{gathered} \tag{7.1}$$

в котором теперь управление $u = u(x)$ является функцией отклонений x. Пусть $u = K \cdot x$, где K — постоянная $(m \times n)$-матрица.

Теперь уравнение (7.1) принимает вид

$$\dot{x} = (A + B \cdot K) \cdot x\,. \tag{7.2}$$

Определение. Система (A, B) *вполне стабилизируема*, если существует матрица K такая, что матрица $A + B \cdot K$ гурвицева.

Иными словами, все собственные числа матрицы $A + B \cdot K$ имеют отрицательные вещественные части и $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для любых начальных условий.

Критерием полной управляемости служит

Теорема. Для того, чтобы система (A, B) была вполне стабилизируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была вполне управляемой.

Можно показать, что для вполне стабилизируемой системы матрицу K можно выбрать таким образом, чтобы корни характеристического уравнения $A + B \cdot K - \lambda E = 0$ были любыми. Последнее утверждение позволяет регулировать скорость приближения к нулю решения $x(t)$.

Для реализации равенства $u = K \cdot x$ нужно знать вектор x. Пусть над движением системы проводятся наблюдения $z = (z_1, \dots, z_p)^T$, результаты которых связаны с x формулой

$$z = H \cdot x\,, \tag{7.3}$$

где H — постоянная $(p \times n)$-матрица.

Если $p \geqslant n$ и $\operatorname{rang}(H) = n$, то из системы уравнений (7.3) можно найти x, а затем для стабилизации воспользоваться управлением $u = K \cdot x$. В противном случае необходимо решать *задачу восстановления* x по результатам наблюдений.

Пусть сначала рассматривается система (7.1) при $B = 0$, то есть $\dot{x} = A \cdot x$, и нам известны значения $z(t)$ на некотором интервале времени $[t_0, t]$, $t_0 < t$. Дифференцирование равенства (7.3) по времени с учетом уравнения $\dot{x} = A \cdot x$ приводит к системе уравнений относительно $x(t)$

$$\frac{d^k z}{dt^k} = H \cdot A^k \cdot x\,, \quad k = 0, 1, \dots\,, \tag{7.4}$$

в которой левые части следует считать известными. Система (7.4) имеет единственное решение, если ранг матрицы в левой части равен n. Как и в задаче управляемости, можно ограничиться рассмотрением матрицы наблюдаемости V размером $(pn \times n)$:

$$V = \begin{pmatrix} H \\ H \cdot A \\ \dots \\ H \cdot A^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Критерием наблюдаемости служит равенство $\operatorname{rang}(V) = n$.

Реализация этого плана наталкивается на трудность, заключающуюся в том, что дифференцирование результатов наблюдений затруднительно в связи с потерей точности. Поэтому предлагается *процесс восстановления* $x(t)$, связанный с построением вспомогательной функции $\widehat{x}(t)$, такой, что $\widehat{x}(t) \to x(t)$ при $t \to \infty$. Пусть эта функция удовлетворяет вспомогательной системе уравнений

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A} \cdot \widehat{x} + R \cdot z \tag{7.5}$$

с подлежащей выбору постоянной матрицы R размера $(m \times p)$. Пусть $y = \widehat{x} - x$, тогда $\dot{y} = \widehat{A} \cdot y + (\widehat{A} - A + R \cdot H) \cdot x$. Положим $\widehat{A} = A - R \cdot H$. Тогда $\dot{y} = (A - R \cdot H) \cdot y$. При $\operatorname{rang}(V) = n$ система (A, H) вполне управляема (строки матрицы V становятся столбцами матрицы U), поэтому можно подобрать такую матрицу R, чтобы матрица $A - R \cdot H$ была гурвицевой с любыми корнями характеристического уравнения. Взяв корни с отрицательными вещественными частями, получим $y(t) \to 0$ или $\widehat{x}(t) \to x(t)$ при $t \to \infty$.

Пример 2. Рассмотрим движение $X = \cos t$, удовлетворяющее уравнению $\ddot{X} + X = 0$ и начальным условиям $X(0) = 1$, $\dot{X}(0) = 0$. Требуется восстановить это движение по результатам наблюдения величины $z = X + \dot{X}$.

После приведения к уравнениям первого порядка получаем систему $\dot{x} = A \cdot x$, причем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = (1,\ 1)\,.$$

Система (A, H) наблюдаема, ибо ранг матрицы наблюдаемости

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

равен двум. Возьмем, например, $R = (r_1, r_2)^T = (1, 2)^T$. Тогда матрица $A - R \cdot H$ будет гурвицевой. Для восстановления вектора x численно решим задачу Коши

$$\dot{x} = A \cdot x\,, \quad \dot{y} = (A - R \cdot H) \cdot y\,, \qquad x(0) = (1, 0)^T\,, \quad y(0) = (-1, 0)^T\,.$$

Заметим, что начальные условия для вспомогательного вектора y произвольны, и их значения взяты для определенности.

На рис. 6 представлены функции $x_1(t)$ и $\widehat{x}_1(t)$, полученные при численном интегрировании. Видим, что $\widehat{x}_1(t) \to x_1(t)$ при $t \to \infty$.

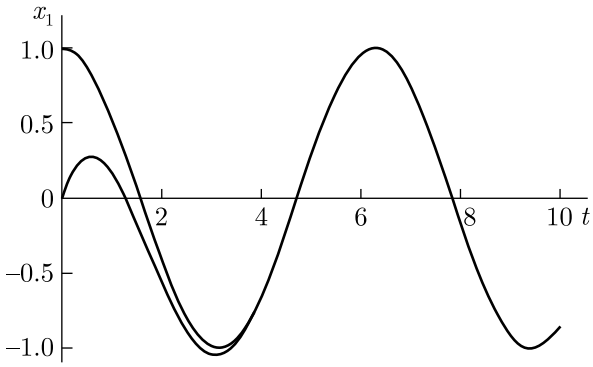

Рис. 6. Восстановление решения по результатам наблюдений

Казалось бы, для стабилизации можно в (7.2) использовать построенный вектор $\widehat{x}$:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot K \cdot \widehat{x}\,. \tag{7.6}$$

Однако это не так, ибо теперь вектор наблюдений z получен для системы (7.6), а не для системы $\dot{x} = A \cdot x$ при $B = 0$. Поэтому процесс восстановления вектора $\widehat{x}$ нужно повторить заново.

Рассматривая совместно уравнения (7.5) и (7.6), для вектора $y = \widehat{x} - x$ приходим к уравнению

$$\dot{y} = (\widehat{A} - R \cdot H) \cdot y + (\widehat{A} - A - B \cdot K + R \cdot H) \cdot x\,.$$

Полагая $\widehat{A} - A - B \cdot K + R \cdot H = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (\widehat{A} - R \cdot H) \cdot y\,, \\ \dot{x} &= (A + B \cdot K) \cdot x + B \cdot K \cdot y\,, \end{aligned} \tag{7.7}$$

в которой матрицы R и K подбираются из условия, чтобы матрицы $A - R \cdot H$ и $A + B \cdot K$ были гурвицевыми. Тогда будет выполнено условие восстановления $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и условие стабилизации $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Основная цель стабилизации — компенсировать возмущения, действующие на систему. Рассмотрим сначала пример. Пусть на свободно движущуюся точку действует возмущающая сила $\xi(t)$. Решение уравнения

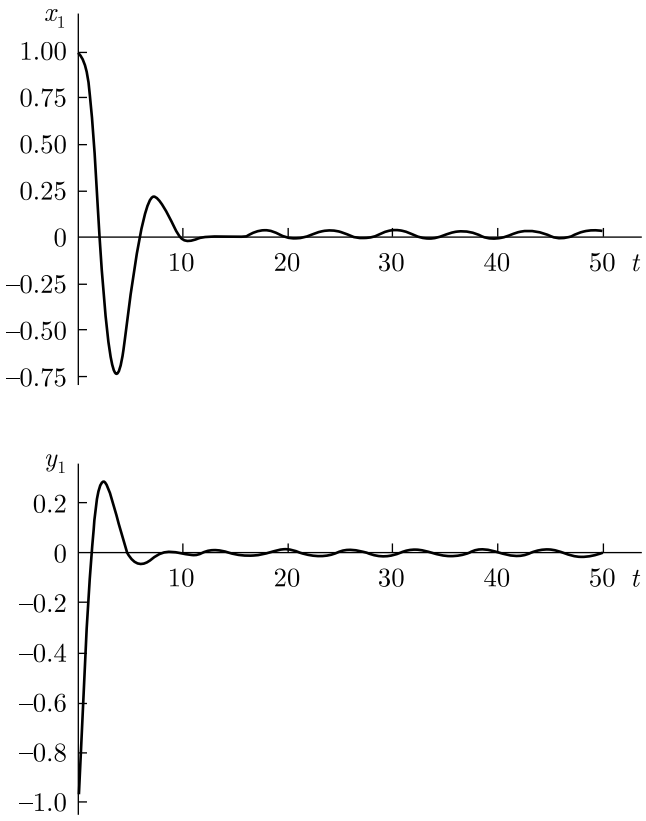

Рис. 7. Стабилизация при $a = 0.01$

$\ddot{x} = \xi(t)$ с начальными условиями $x(0) = a,\ \dot{x}(0) = v$ имеет вид

$$x(t) = a + vt + \int_0^t \left(\int_0^{t_1} \xi(t_2) dt_2 \right) dt_1 \,.$$

В частности, для постоянного возмущения $\xi(t) = \xi_0$ решение будет $x(t) = a + vt + \xi_0 t^2/2$. Следовательно, даже для весьма малых $a,\ v,\ \xi_0$ с ростом времени решение становится большим.

Рассмотрим стабилизацию вполне управляемой системы при действии возмущений:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u + \xi(t)\,, \qquad z = H \cdot x + \eta(t)\,,$$

где $\xi(t)$ — малое возмущение, $\eta(t)$ — малая ошибка в наблюдении. Как и ранее, вводим вспомогательный вектор $\widehat{x}$ и вектор рассогласования $y = \widehat{x} - x$.

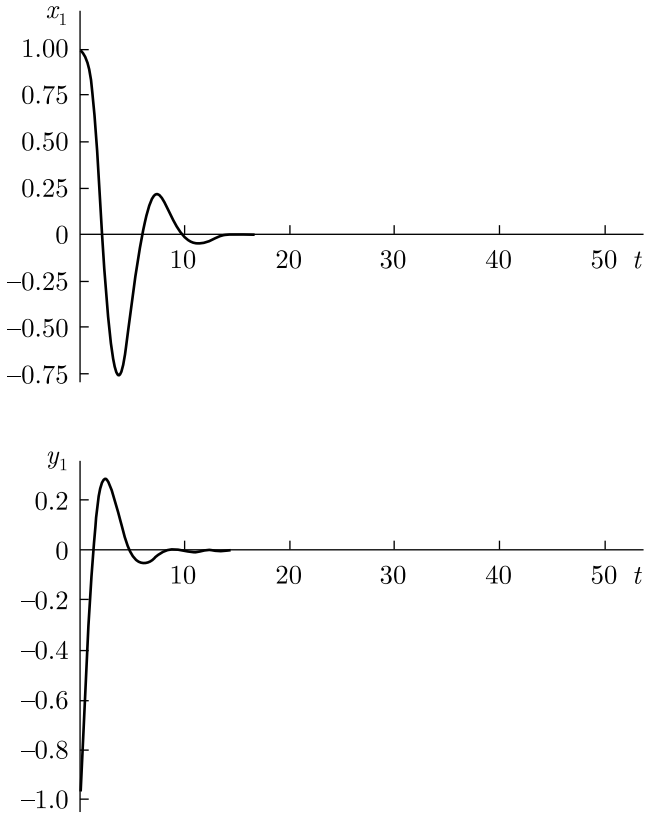

Рис. 8. Стабилизация при $a = 0$

Повторяя приведенные выше выкладки, вместо (7.7) приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (\widehat{A} - R \cdot H) \cdot y + R \cdot H \cdot \eta(t) - \xi(t)\,, \\ \dot{x} &= (A + B \cdot K) \cdot x + B \cdot K \cdot y + \xi(t)\,. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Разумеется, решения уравнений (7.8) не стремятся к нулю, однако независимо от начальных условий они с течением времени становятся малыми (порядка возмущений).

Пример 3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H = (1, 0)\,.$$

Эта система вполне управляема и наблюдаема. Возьмем

$$R = (r_1, r_2)^T = (1, 1)^T\,, \qquad K = (k_1, k_2) = (-1, -1)\,.$$

Тогда матрицы

$$A - R \cdot H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A + B \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

будут гурвицевыми. Возьмем возмущения и начальные условия в виде

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} a \sin^2 t \\ a \cos^2 t \end{pmatrix}, \quad \eta(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix},$$
$$x(0) = 1\,,\ \dot{x}(0) = 0\,, \quad y(0) = -1\,,\ \dot{y}(0) = 0\,.$$

На рис. 7 представлены результаты стабилизации для первых компонент векторов x и y. Видим, что с течением времени эти функции становятся малыми порядка возмущений. Если же возмущения отсутствуют ($a = 0$), то обе эти функции стремятся к нулю (см. рис. 8).

Глава VI
ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ЧЕБЫШЁВА. НЕГОЛОНОМНАЯ МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Авторы: *В. В. Додонов, С. А Зегжда, Ш. Х. Солтаханов, П. Е. Товстик, М. П. Юшков*

Данная глава разбита на две части. В первой части приводятся две теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. Связи рассматриваются как программные. В первой теории строится совместная система дифференциальных уравнений для определения неизвестных обобщенных координат и множителей Лагранжа. Вторая теория базируется на использовании обобщенного принципа Гаусса. Применение теорий иллюстрируется решением задачи о движении искусственного спутника с постоянным по величине ускорением.

Во второй части главы для решения одной из важнейших задач теории управления — о выборе оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему за заданное время из одного фазового состояния в другое — предлагается применять вторую теорию движения неголономных систем со связями высокого порядка. Показывается, что при решении поставленной задачи с помощью принципа максимума Понтрягина при минимизации функционала от квадрата управляющей силы непрерывно выполняется связь высокого порядка. Поэтому для решения той же задачи удобно применить обобщенный принцип Гаусса, свойственный теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. Это позволяет построить управляющую силу в виде полинома от времени. Применение предлагаемой теории демонстрируется на решении модельной задачи о гашении колебаний тележки с маятниками. Ставится и решается расширенная краевая задача, в которой задаются значения и ускорения в начале и в конце движения системы. Благодаря этому удается находить управляющую силу без скачков, свойственных решению, полученному с использованием принципа максимума Понтрягина. В конце главы показывается возможность применения обобщенного принципа Гаусса для гашения колебаний системы с распределенными параметрами (например, гибкой «руки» манипулятора).

[1] Материал данной главы соответствует содержанию монографии: *Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А.* Неголономная механика и теория управления. М.: Наука; Физматлит, 2018. 236 с. Краткое изложение главы отражено в обзорных статьях: *Юшков М. П.* Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. I; II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 680–701; *Он же. Там же.* 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 515–537.

I. ПОСТАНОВКА ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЧЕБЫШЁВА. ДВЕ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМИ СВЯЗЯМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

§ 1. Постановка обобщенной задачи Чебышёва

Общеизвестны выдающиеся работы П.Л.Чебышёва, посвященные самым различным областям математики и механики[2]. В частности, им была создана теория синтеза механизмов[3], в которой он ставил задачу создания таких машин, отдельные звенья которых с указанной точностью должны были совершать заданные движения. Среди таких устройств можно вспомнить, например, многозвенники с остановками определенных частей в заданных положениях[4]. Постановку подобных задач назовем *задачей Чебышёва.* Далее в данном параграфе будет предложено обобщение такой задачи на случай, когда при той же системе активных обобщенных сил итоговое движение системы должно удовлетворять дополнительной системе дифференциальных уравнений высокого порядка.

Итак, поставим следующую задачу. Пусть движение механической системы под действием обобщенных сил $Q = (Q_1, \ldots, Q_s)$ в обобщенных координатах $q = (q^1, \ldots, q^s)$ описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \\ T = \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{\alpha\beta}\dot q^\alpha \dot q^\beta\,, \qquad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,, \quad q^0 = t\,,\ \dot q^0 = 1\,, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где M — масса всей системы (см. главу VI первого тома учебника).

---

[2]См.: *Чебышёв П. Л.* Сочинения П. Л. Чебышёва, изданные под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сонина. СПб.: Имп. Акад. Наук. Т. I. 1899. 714 с.; Т. II. 1907. 736 с.

[3]См.: Научное наследие П. Л. Чебышёва. Выпуск второй. Теория механизмов (Отв. редакторы Н. Г. Бруевич и И. И. Артоболевский). М.; Л.: Изд. АН СССР, 1945. 192 с.

[4]Ряд механизмов, выполненных под руководством П. Л. Чебышёва (в том числе и лично изготовленных им из дерева и сохранивших его пометки), находится в Музее истории Петербургского университета, в Музее истории математико-механического факультета и на кафедре теоретической и прикладной механики СПбГУ. См. статью: *Kuteeva G., Yushkov M., Rimushkina E.* Pafnutii Lvovich Chebyshev as a mechanician (2015) 2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading, art. no. 7106746 >http://www.scopus.com/alert/results/record.url?AID=1979589 &ATP=search&eid=2-s2.0-84938238584&origin=SingleRecordEmailAlert.

Потребуем, чтобы движение этой механической системы одновременно удовлетворяло системе дифференциальных уравнений ($n \geqslant 3$)

$$f_n^{\varkappa} \equiv a_{n\sigma}^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(n-1)}{q})\overset{(n)}{q^{\sigma}} + a_{n0}^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(n-1)}{q}) = 0\,, \qquad (1.2)$$
$$\sigma = \overline{1, s}\,, \qquad \varkappa = \overline{1, k}\,, \qquad k \leqslant s\,, \qquad l = s - k\,,$$

где введены обозначения типа $\overset{(n)}{q^{\sigma}} = d^n q^{\sigma}/dt^n$. Сформулированную задачу назовем обобщенной задачей Чебышёва. Как уже отмечалось, она усложнена относительно обсуждавшейся ранее задачи Чебышёва из области синтеза механизмов тем, что теперь требуется найти не только движение некоторых звеньев механизма, а и движение всей системы, удовлетворяющее дополнительной системе дифференциальных уравнений высокого порядка (1.2).

Для решения поставленной задачи требуется найти дополнительные силы $R = (R_1, \ldots, R_s)$, добавив которые к правым частям уравнений (1.1), то есть переписав их в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\sigma}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\sigma}} = Q_{\sigma} + R_{\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \qquad (1.3)$$

мы получим замкнутую постановку задачи. Таким образом, под *обобщенной задачей Чебышёва* понимается решение совместной системы уравнений (1.2), (1.3), в которой неизвестными функциями времени являются $q = (q^1, \ldots, q^s)$ и $R = (R_1, \ldots, R_s)$.

Отметим, что обобщенную задачу Чебышёва по предложению академика С. С. Григоряна иногда называют и *смешанной задачей динамики*[5], так как в ней имеются признаки как прямой, так и обратной задач динамики. Действительно, с одной стороны, мы ищем движение при заданных силах $Q = (Q_1, \ldots, Q_s)$, а с другой стороны, при заданных характеристиках движения (1.2) отыскиваем обобщенные силы $R = (R_1, \ldots, R_s)$.

Особо отметим, что сформулированную обобщенную задачу Чебышёва (1.2), (1.3) можно рассматривать как некоторую задачу управления, в которой программа движения (обязательная для исполнения!) задается в виде дополнительной системы дифференциальных уравнений высокого порядка $n \geqslant 3$. Таким образом, формулировкой обобщенных задач Чебышёва в теории управления вводится фактически новый класс задач со специфическим заданием программы движения. Для решения подобных

[5] См.: *Зегжда С. А., Юшков М. П.* Смешанная задача динамики // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 5. С. 628–630.

задач в данной главе предлагается воспользоваться предлагаемым аппаратом неголономной механики, рассматривая дополнительную систему дифференциальных уравнений как неголономные связи высокого порядка.

В связи с выше сказанным напомним некоторые сведения из классической теории неголономных систем. Если на движение системы наложены голономные связи

$$f_0^{\varkappa}(t,q)=0\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,, \tag{1.4}$$

или неголономные связи первого порядка

$$f_1^{\varkappa}(t,q,\dot q)=0\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,, \tag{1.5}$$

или линейные неголономные связи второго порядка

$$\begin{gathered} f_2^{\varkappa}\,(t,q,\dot q,\ddot q)\equiv\ a_{2\sigma}^{l+\varkappa}\,(t,q,\dot q)\,\ddot q^{\,\sigma}+a_{2,0}^{l+\varkappa}\,(t,q,\dot q)=0\,,\\ \sigma=\overline{1,s}\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,,\quad l=s-k\,, \end{gathered} \tag{1.6}$$

то при идеальности этих связей их силы реакций соответственно имеют вид (см. главу VI первого тома учебника)

$$\mathbf{R}=\Lambda_{\varkappa}\boldsymbol{\nabla} f_0^{\varkappa}\,,\qquad \mathbf{R}=\Lambda_{\varkappa}\boldsymbol{\nabla}'f_1^{\varkappa}\,,\qquad \mathbf{R}=\Lambda_{\varkappa}\boldsymbol{\nabla}''f_2^{\varkappa}\,,\qquad \varkappa=\overline{1,k}\,. \tag{1.7}$$

Использованные в формулах (1.7) обобщенные операторы Гамильтона $\boldsymbol{\nabla}'$ и $\boldsymbol{\nabla}''$ были введены Н. Н. Поляховым[6]. Из них как частный случай при задании голономных связей получается классический оператор Гамильтона (оператор набла) (см. главу VI первого тома учебника).

Важно, что в классической аналитической механике для идеальных связей (1.4), (1.5), (1.6) множители Лагранжа $\Lambda_{\varkappa}$, $\varkappa=\overline{1,k}$, определяются как известные функции переменных $t,q,\dot q$ (см. опять главу VI первого тома учебника):

$$\Lambda_{\varkappa}=\Lambda_{\varkappa}(t,q,\dot q)\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,. \tag{1.8}$$

Для голономных связей функции (1.8) были получены в начале прошлого века А. М. Ляпуновым и Г. К. Сусловым[7], а для неголономных связей впер-

[6]См. работы: *Поляхов Н. Н.* Уравнения движения механических систем при нелинейных, неголономных связях в общем случае // Вестн. Ленингр. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 1972. Вып. 1 (№ 1). С. 124–132; *Он же.* О дифференциальных принципах механики, получаемых из уравнений движения неголономных систем // *Там же.* 1974. Вып. 3 (№ 13). С. 106–116.

[7]См. работы: *Ляпунов А. М.* Лекции по теоретической механике. Киев: Наукова думка. 1982. 632 с. и *Суслов Г. К.* Основы аналитической механики. Том I. Киев: Тип. Имп. ун-та Св. Владимира, 1900. 287 с.

вые были приведены в работе[8], а затем повторены в первом издании данного учебника[9]. Через десять лет этот результат другими методами был получен в США, Италии, Польше, Швеции, Советском Союзе[10]. Функции (1.8) могут быть получены и при задании связей в виде (1.6)[11].

В отличие от этого, если сформулированную обобщенную задачу Чебышёва рассматривать как неголономную задачу с идеальными линейными связями (1.2) порядка $n \geqslant 3$, то реакции этих связей (играющие роль искомых управляющих сил с точки зрения поставленного нового класса задач теории управления) приходится искать как неизвестные функции времени.

Эти рассуждения снимают вопрос, возникавший у некоторых известных механиков Советского Союза при постановке обобщенной задачи Чебышёва. Дело в том, что, как указывают Л. А. Парс и В. В. Румянцев[12],

---

[8]См. статью: *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Уравнения динамики как необходимые условия минимальности принуждения по Гауссу // Колебания и устойчивость механических систем. Прикл. механика. Вып. 5. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. С. 9–16.

[9]См. первое издание учебника для университетов: *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 536 с.

[10]См. работы: *Storch J., Gates S.* Motivating Kane's method for obtaining equations of motion for dynamic systems // J. of Guidance, Dynamics and Control. 1989. Vol. 12. № 4. P. 593–595; *Udwadia F. E., Kalaba R. E.* A new perspective on constrained motion // Proceedings of the Royal Society. London. 1992. Vol. A439. № 1906. P. 407–410; *Borri M., Bottasso C., Mantegazza P.* Equivalence of Kane's and Maggi's equations // Meccanica. 1990. Vol. 25. № 4. P. 272–274; *Они же.* Acceleration projection method in multibody dynamics // Europ. J. Mech. A/Solids. 1992. Vol. 11. № 3. P. 403–417; *Blajer W.* A projetion method approach to constrained dynamic analysis // ASME. J. Appl. Mech. 1992. Vol. 59. № 3. P. 643–649; *Essén H.* Projecting Newton's equations onto non-ordinate tangent vectors of the configuration space; a new look at Lagrange's equations in terms of quasicoordinates // 18th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., Haifa, Aug. 22–28, 1992. Haifa, 1992. P. 52; *Он же.* On the geometry of nonholonomic dynamics // ASME. J. Appl. Mech. 1994. № 61. P. 689–694; *Величенко В. В.* Матричные уравнения движения неголономных систем // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 3. С. 499–504; *Голубев Ю. Ф.* Основные принципы механики для систем с дифференциальными нелинейными связями // Второе Всероссийское совещание-семинар зав. каф. теорет. механики. Тез. докл. Москва, 11–16 октября 1999 г. С. 14–15.

[11]Отметим, что в настоящее время существует единственный пример появления линейной неголономной связи второго порядка, осуществляемой контактным путем, при движении материальной точки, находящейся на конце нерастяжимой нити, навивающейся на вертикальный круговой цилиндр: *F. Kitzka.* An example for the application of a nonholonomic constraint of 2nd order in particle mechanics // ZAMM. 1986. Vol. 66. № 7. S. 312–314.

[12]См. работы: *Парс Л. А.* Аналитическая динамика (Перевод с англ.). М.: Наука, 1971. 636 с.; *Румянцев В. В.* О совместимости двух основных принципов динамики и о принципе Четаева // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления.

силы не могут зависеть от ускорений. Поэтому многие считали, что задание связей высокого порядка потребует и задания сил реакций этих связей, зависящих не только от ускорений, но и от более высоких порядков производных от обобщенных координат. Но, как указывалось выше, эти силы реакций в обобщенной задаче Чебышёва считаются неизвестными функциями времени, подлежащими одновременному определению вместе с обобщенными координатами.

Для решения сформулированной обобщенной задачи Чебышёва можно построить две теории движения неголономных систем со связями высокого порядка (см. ниже[13]).

§ 2. Первая теория движения неголономных систем со связями высокого порядка. Построение совместной системы дифференциальных уравнений

Формирование управляющих сил в первой теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. Рассмотрим теперь движение механической системы, описываемое в системе криволинейных координат $q = (q^1, \ldots, q^s)$ с базисами

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s\}, \quad \{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^s\}$$

в случае, когда на движение этой системы наложены линейные идеальные неголономные связи высокого порядка (1.2).

Как отмечалось в предыдущем параграфе, для решения обобщенной задачи Чебышёва требуется найти дополнительные обобщенные силы

$$R = (R_1, \ldots, R_s), \tag{2.1}$$

обеспечивающие выполнение программы движения, заданной в виде системы дифференциальных уравнений (1.2). Для решения поставленной задачи предлагается развить классическую теорию движения неголономных систем на случай наложения связей высокого порядка $n \geqslant 3$. Считая свя-

М.: Наука, 1975. С. 258–267; *Он же.* К вопросу о совместимости дифференциальных принципов механики // Аэромеханика и газовая динамика. М.: Наука, 1976. С. 172–178.

[13]Подробнее об этих теориях и их применении к решению некоторых задач механики см. в монографиях: *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука; Физматлит, 2009. 344 с.; *Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А.* Неголономная механика и теория управления. М.: Наука, Физматлит. 2018. 236 с.

зи (1.2) идеальными[14], их реакцию по аналогии с классической теорией движения неголономных систем можно было бы представить в виде

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla}^{(n)} f_n^\varkappa \,, \quad \varkappa = \overline{1,k} \,, \qquad \mathbf{R}_L = 0 \,, \tag{2.2}$$

где использован обобщенный оператор Поляхова

$$\boldsymbol{\nabla}^{(n)} f_n^\varkappa = \frac{\partial f_n^\varkappa}{\partial \overset{(n)}{q^\sigma}} \, \mathbf{e}^\sigma \,.$$

Обратим внимание на то, что в классической неголономной механике реакции (1.7) создаются автоматически материально осуществленными связями (1.4)–(1.6). В отличие от этого в рассматриваемой обобщенной задаче Чебышёва реакции (2.1) являются управляющими силами и создаются системой управления. Перейдем к обсуждению формирования управляющих сил в рассматриваемой задаче.

Пусть системой управления создается некоторая сила, возможная элементарная работа которой такова:

$$\delta A = \Lambda b_\sigma \delta q^\sigma \,, \quad \sigma = \overline{1,s} \,.$$

Величину Λ, входящую в это выражение, назовем *обобщенной управляющей силой*. Если теперь система управления позволяет формировать k управляющих сил $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, то имеем

$$\delta A = \Lambda_\varkappa b_\sigma^\varkappa \delta q^\sigma \,, \quad \varkappa = \overline{1,k} \,, \quad \sigma = \overline{1,s} \,. \tag{2.3}$$

Вошедшие в формулу (2.3) коэффициенты $b_\sigma^\varkappa$ системой управления осуществляются обычно в виде постоянных величин или заданных функций обобщенных координат.

Из формул (2.3) следует, что искомые дополнительные обобщенные силы (2.1) таковы:

$$R_\sigma = \Lambda_\varkappa b_\sigma^\varkappa \,. \tag{2.4}$$

Напомним, что вошедшие в формулу (2.4) множители Лагранжа $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, в излагаемой теории рассматриваются как функции времени, подлежащие определению. При этом, как увидим ниже, дифференциальное уравнение относительно каждой из функций $\Lambda_\varkappa$ в первой теории движения неголономных систем со связями высокого порядка будет иметь порядок $(n-2)$.

[14]Здесь уместно обратить внимание на то, что сформулированная задача имеет неединственное решение, и для выделения определенного решения вводится дополнительное требование «идеальности» связей.

Если обобщенные управляющие силы (2.4) создадут вектор управления $\mathbf{R}$, совпадающий с вектором (2.2), то полученное управление с позиций неголономной механики можно было бы назвать *идеальным управлением.*

Построение совместной системы дифференциальных уравнений в первой теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. Теперь система дифференциальных уравнений (1.3) в касательном пространстве к многообразию всех положений механической системы, которые она может иметь в данный момент времени, запишется в виде одного векторного уравнения[15]

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_{\varkappa}\mathbf{b}^{\varkappa}\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{2.5}$$

в котором введены обозначения

$$\begin{gathered}
\mathbf{Y} = Q_{\sigma}\mathbf{e}^{\sigma}\,, \qquad \mathbf{b}^{\varkappa} = b^{\varkappa}_{\sigma}\mathbf{e}^{\sigma}\,,\\
\mathbf{W} = \left(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right)\mathbf{e}^{\sigma} = \left(\ddot{q}^{\,\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right)\mathbf{e}_{\sigma}\,,\\
\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \mathrm{g}^{\sigma\tau}\Gamma_{\tau,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathrm{g}^{\sigma\tau}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{\tau\beta}}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial \mathrm{g}_{\tau\alpha}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial \mathrm{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^{\tau}}\right),\\
\sigma,\tau = \overline{1,s}\,, \qquad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Из выражений (2.5) и (2.6) можно составить систему дифференциальных уравнений, разрешенных относительно обобщенных ускорений:

$$\begin{gathered}
\ddot{q}^{\,\sigma} = \mathfrak{F}^{\sigma}_{2}(t,q,\dot{q},\Lambda)\,,\\
\mathfrak{F}^{\sigma}_{2} = -\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} + (Q_{\tau} + \Lambda_{\varkappa}b^{\varkappa}_{\tau})\mathrm{g}^{\sigma\tau}/M\,,\\
\sigma,\tau = \overline{1,s}\,, \qquad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,.
\end{gathered} \tag{2.7}$$

Система s уравнений (2.7) содержит $(s+k)$ неизвестных функций q^{σ}, $\sigma = \overline{1,s}$, $\Lambda_{\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$. Покажем вначале, как эту систему можно дополнить дифференциальными уравнениями относительно множителей Лагранжа $\Lambda_{\varkappa}$ в случае $n = 3$. Тогда уравнения связей (1.2) имеют вид

$$\begin{gathered}
f^{\varkappa}_{3} \equiv a^{\varkappa}_{3\sigma}(t,q,\dot{q},\ddot{q})\;\dddot{q}^{\,\sigma} + a^{\varkappa}_{3,0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) = 0\,,\\
\sigma = \overline{1,s}\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Остановимся первоначально на выводе одной важной формулы. Из утверждения

$$\mathbf{e}^{\rho}\cdot\mathbf{e}_{\tau} = \mathrm{const}\,, \quad \rho,\tau = \overline{1,s}\,, \tag{2.9}$$

[15]Здесь полезно вспомнить материал главы VI первого тома учебника.

следует, что

$$-\dot{\mathbf{e}}^{\rho}\cdot\mathbf{e}_{\tau}=\mathbf{e}^{\rho}\cdot\dot{\mathbf{e}}_{\tau}\,. \tag{2.10}$$

Если для удобства рассуждений обозначать временно вектор $\dot{\mathbf{e}}_{\tau}$ как вектор $\mathbf{b}=b^{\,\sigma}\,\mathbf{e}_{\sigma}$, то правая часть формулы (2.10) оказывается равной $b^{\,\rho}$. Поэтому $b^{\,\rho}$ можно приравнять левой части формулы (2.10):

$$b^{\,\rho}=-\dot{\mathbf{e}}^{\rho}\cdot\mathbf{e}_{\tau}=-\dot{q}^{\alpha}\,\frac{\partial\mathbf{e}^{\rho}}{\partial q^{\alpha}}\cdot\mathbf{e}_{\tau}\,. \tag{2.11}$$

Но в то же время из равенства (2.9) имеем

$$-\frac{\partial\mathbf{e}^{\rho}}{\partial q^{\alpha}}\cdot\mathbf{e}_{\tau}=\frac{\partial\mathbf{e}_{\tau}}{\partial q^{\alpha}}\cdot\mathbf{e}^{\rho}\equiv\Gamma^{\rho}_{\tau\alpha}\,,$$

поэтому согласно (2.11) можем записать

$$b^{\,\rho}=\Gamma^{\rho}_{\tau\alpha}\,\dot{q}^{\alpha}\,.$$

В результате получаем интересующую нас формулу:

$$\dot{\mathbf{e}}_{\tau}=\Gamma^{\rho}_{\tau\alpha}\,\dot{q}^{\alpha}\,\mathbf{e}_{\rho}\,. \tag{2.12}$$

Возьмем теперь представление вектора ускорения системы (2.6) в виде

$$\mathbf{W}=\left(\ddot{q}^{\,\tau}+\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right)\mathbf{e}_{\tau}$$

и продифференцируем его по времени. Тогда получим

$$\dot{\mathbf{W}}=\left(\dddot{q}^{\,\tau}+\frac{d}{dt}\left(\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right)\right)\mathbf{e}_{\tau}+\left(\ddot{q}^{\,\tau}+\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right)\dot{\mathbf{e}}_{\tau}\,. \tag{2.13}$$

Введем новые векторы

$$\mathbf{a}^{\varkappa}_{3}=a^{\varkappa}_{3\sigma}\,\mathbf{e}^{\sigma}\,,\quad \sigma=\overline{1,s}\,,\qquad \varkappa=\overline{1,k}\,, \tag{2.14}$$

полностью определяемые уравнениями связей (2.8). Если теперь формулу (2.13) умножить на векторы (2.14), предварительно заменив в ней вектор $\dot{\mathbf{e}}_{\tau}$ его выражением (2.12), то получим

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{W}}\cdot\mathbf{a}^{\varkappa}_{3}=\left(\dddot{q}^{\,\tau}+\frac{d}{dt}\left(\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right)\right)a^{\varkappa}_{3\sigma}+\left(\ddot{q}^{\,\tau}+\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right)\Gamma^{\rho}_{\tau\alpha}\,\dot{q}^{\alpha}\,,\\ \varkappa=\overline{1,k}\,.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Добавим к обеим частям формулы (2.15) слагаемые $a^{\varkappa}_{3,0}(t,q,\dot q,\ddot q)$ и учтем выполнение связей (2.8). В результате запишем следующее представление заданных неголономных связей (2.8) в виде скалярных произведений:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{W}}\cdot\mathbf{a}^{\varkappa}_3=\chi^{\varkappa}_3(t,q,\dot q,\ddot q)\,,\\ \chi^{\varkappa}_3=-a^{\varkappa}_{3,0}+a^{\varkappa}_{3\sigma}\left(\frac{d}{dt}\big(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\dot q^{\alpha}\dot q^{\beta}\big)+\big(\ddot q^{\,\tau}+\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\dot q^{\alpha}\dot q^{\beta}\big)\Gamma^{\sigma}_{\tau\alpha}\dot q^{\alpha}\right),\\ \sigma,\tau=\overline{1,s}\,,\qquad \alpha,\beta=\overline{0,s}\,,\qquad \varkappa=\overline{1,k}\,.\end{gathered}\tag{2.16}$$

Полученная запись уравнений связей (2.16) позволяет построить дополнительную систему дифференциальных уравнений относительно множителей Лагранжа. Продифференцируем векторное уравнение движения системы (2.5) по времени:

$$M\dot{\mathbf{W}}=\dot{\mathbf{Y}}+\dot\Lambda_{\varkappa}\mathbf{b}^{\varkappa}+\Lambda_{\varkappa}\dot{\mathbf{b}}^{\varkappa}\,,\qquad \varkappa=\overline{1,k}\,.\tag{2.17}$$

Напомним, что если задан вектор $\mathbf{a}=a_{\tau}\,\mathbf{e}^{\tau}$, то ковариантные компоненты от его производной $\mathbf{b}=\dot{\mathbf{a}}$ вычисляются по формуле[16]

$$b_{\rho}=\dot a_{\rho}-\Gamma^{\tau}_{\rho\alpha}\,a_{\tau}\dot q^{\alpha}\,,\tag{2.18}$$

поэтому производные от векторов в формуле (2.17) имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{Y}}=(\dot Q_{\tau}-Q_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\tau\alpha}\dot q^{\alpha})\,\mathbf{e}^{\tau}\,,\qquad \dot{\mathbf{b}}^{\varkappa}=(\dot b^{\varkappa}_{\tau}-b^{\varkappa}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\tau\alpha}\dot q^{\alpha})\,\mathbf{e}^{\tau}\,,\\ \sigma,\tau=\overline{1,s}\,,\qquad \alpha,\beta=\overline{0,s}\,,\qquad \varkappa=\overline{1,k}\,.\end{gathered}$$

Если теперь умножить уравнение (2.17) на векторы $\mathbf{a}^{\mu}_3$ и учесть выражения связей (2.16), то сможем записать

$$\begin{gathered}\dot\Lambda_{\varkappa}h^{\varkappa\mu}_3=B^{\mu}_3(t,q,\dot q,\ddot q,\Lambda)\,,\qquad B^{\mu}_3=M\chi^{\mu}_3-\dot{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{a}^{\mu}_3-\Lambda_{\varkappa}\dot{\mathbf{b}}^{\varkappa}\cdot\mathbf{a}^{\mu}_3\,,\\ h^{\varkappa\mu}_3=\mathbf{b}^{\varkappa}\cdot\mathbf{a}^{\mu}_3=b^{\varkappa}_{\sigma}a^{\mu}_{3\tau}\mathrm{g}^{\sigma\tau}\,,\qquad \sigma,\tau=\overline{1,s}\,,\qquad \varkappa,\mu=\overline{1,k}\,.\end{gathered}\tag{2.19}$$

В предположении, что имеет место неравенство

$$\det\,[b^{\varkappa}_{\sigma}a^{\mu}_{3\tau}\mathrm{g}^{\sigma\tau}]\neq 0\,,\quad \sigma,\tau=\overline{1,s}\,,\quad \varkappa,\mu=\overline{1,k}\,,$$

[16] См. формулу (A.52) в монографии: *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука; Физматлит, 2009. 344 с.

линейную неоднородную алгебраическую систему (2.19) можно разрешить относительно $\dot{\Lambda}_\varkappa$:

$$\dot{\Lambda}_\varkappa = h^3_{\varkappa\mu}(t,q,\dot{q},\ddot{q})B^\mu_3(t,q,\dot{q},\ddot{q},\Lambda)\,, \qquad \varkappa,\mu=\overline{1,k}\,. \tag{2.20}$$

Здесь $h^3_{\varkappa\mu}$ являются элементами матрицы, обратной по отношению к матрице $(h^{\varkappa\mu}_3)$. Важно, что формулы (2.7) позволяют исключить производные $\ddot{q}^{\,\sigma}$ из функций $h^3_{\varkappa\mu}$, B^μ_3 и представить правые части уравнений (2.20) в виде

$$\dot{\Lambda}_\varkappa = C^3_\varkappa(t,q,\dot{q},\Lambda)\,, \qquad \varkappa=\overline{1,k}\,. \tag{2.21}$$

Перейдем теперь к общему случаю. При произвольном n появятся функции $h^n_{\varkappa\mu}$, B^μ_n, из которых потребуется исключать производные $\ddot{q}^{\,\sigma}, \ldots, \overset{(n-1)}{q^\sigma}$. Из выражений (2.7) следует, что

$$\dddot{q}^{\,\sigma} = \frac{\partial F^\sigma_2}{\partial t} + \frac{\partial F^\sigma_2}{\partial q^\tau}\,\dot{q}^{\,\tau} + \frac{\partial F^\sigma_2}{\partial \dot{q}^\tau}\,\ddot{q}^{\,\tau} + \frac{\partial F^\sigma_2}{\partial \Lambda_\varkappa}\,\dot{\Lambda}_\varkappa\,, \quad \sigma,\tau=\overline{1,s}\,, \quad \varkappa=\overline{1,k}\,. \tag{2.22}$$

Формулы (2.7) позволяют исключить производные $\ddot{q}^{\,\tau}$ из выражений (2.22) и записать их в виде

$$\dddot{q}^{\,\sigma} = \mathfrak{F}^\sigma_3(t,q,\dot{q},\Lambda,\dot{\Lambda})\,, \qquad \sigma=\overline{1,s}\,.$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$\overset{(n-1)}{q^\sigma} = \mathfrak{F}^\sigma_{n-1}(t,q,\dot{q},\Lambda,\dot{\Lambda},\ldots,\overset{(n-3)}{\Lambda})\,, \qquad \sigma=\overline{1,s}\,.$$

Таким образом, в общем случае имеем

$$\overset{(n-2)}{\Lambda_\varkappa} = C^n_\varkappa(t,q,\dot{q},\Lambda,\dot{\Lambda},\ldots,\overset{(n-3)}{\Lambda})\,, \qquad \varkappa=\overline{1,k}\,, \qquad n\geqslant 3\,. \tag{2.23}$$

Частным случаем этих уравнений при $n=3$ является система (2.21).

Уравнения (2.7) и (2.23) образуют замкнутую систему уравнений относительно функций $q^\sigma(t)$ и $\Lambda_\varkappa(t)$. При начальных данных

$$\begin{gathered}\Lambda_\varkappa(t_0)=\Lambda^0_\varkappa\,, \quad \dot{\Lambda}_\varkappa(t_0)=\dot{\Lambda}^0_\varkappa\,, \quad \ldots \quad , \quad \overset{(n-3)}{\Lambda_\varkappa}(t_0)=\overset{(n-3)}{\Lambda_\varkappa}{}^0\,, \\ q^\sigma(t_0)=q^\sigma_0\,, \qquad \dot{q}^\sigma(t_0)=\dot{q}^\sigma_0\,, \qquad \varkappa=\overline{1,k}\,, \quad \sigma=\overline{1,s}\,,\end{gathered} \tag{2.24}$$

она имеет единственное решение.

§ 3. Движение искусственного спутника Земли с постоянным по модулю ускорением. Размерные дифференциальные уравнения движения[17]

Общая теория движения спутника с зафиксированной величиной ускорения (использование первой теории.) Интересным примером реальной неголономной связи высокого порядка является задача о движении искусственного спутника с постоянным по модулю ускорением в поле притяжения Земли[18]. Изучим подробно решение этой проблемы, так как оно хорошо демонстрирует применение изложенной в предыдущем параграфе первой теории движения неголономных систем со связями высокого порядка.

Пусть материальная точка с массой m движется в поле притяжения Земли, то есть точка является искусственным спутником Земли (ИСЗ). Как известно, в этом случае точка перемещается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр притяжения (Земля). Для описания движения удобно воспользоваться полярной системой координат

$$q^1 = r\,, \qquad q^2 = \varphi$$

с базисами $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$ и $\{\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^\varphi\}$.

При движении спутника его ускорение $\mathbf{w}$ меняется, и его проекции на оси принятой полярной системы координат вычисляются по формулам

$$pr_{\mathbf{e}_r}\mathbf{w} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\,, \qquad pr_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{w} = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,.$$

Ясно, что квадрат величины ускорения w^2 будет равен

$$w^2 = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2\,.$$

---

[17] Текст параграфа отражает содержание статьи: *Dodonov V. V., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* The motion of an Earth satellite after imposition of a non-holonomic third-order constraint // AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings 1959, 030006 (2018); doi: 10.1063/1.5034586.

[18] Видимо, первым примером реальной неголономной связи высокого порядка являлся пример о движении искусственного спутника Земли с постоянным по модулю ускорением, предложенный в статьях: *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Применение обобщенного принципа Гаусса для составления уравнений движения систем с неголономными связями третьего порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. 1990. Сер. 1. Вып. 3. (№ 15). С. 77–83; *Они же.* Уравнения движения одной неголономной системы при наличии связи второго порядка // *Там же.* 1991. Вып. 4. (№ 22). С. 26–29. В дальнейшем этот пример был исследован, в частности, в работе *Juschkov M. P., Soltachanov S. H., Zegzhda S. A.* Anwendung des generalisierten Gaußschen Prinzips auf die Untersuchung der Bewegung eines Satelliten mit konstanter Beschleunigung // Technische Mechanik. 2004. Bd. 24. Heft 3–4. S. 236–241.

Предположим, что в некоторый момент времени $t = 0$ ускорение спутника имеет величину w_0. Поставим следующую задачу: найти такое движение спутника (в этом случае его лучше называть космическим аппаратом), при котором в дальнейшем имеющаяся величина ускорения w_0 не будет меняться, то есть будет оставаться постоянной. Такое требование можно выразить в виде нелинейной неголономной связи второго порядка

$$f_2(q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 - w_0^2 = 0\,, \tag{3.1}$$

которая накладывается на дальнейшее движение спутника (космического аппарата).

Таким образом, поставлена реальная механическая задача из области космонавтики, в которой на движение материальной точки накладывается неголономная нелинейная связь второго порядка (3.1). По постановке задачи эту связь можно считать идеальной (здесь полезно еще раз прочесть ссылку, введенную перед формулой (2.2)). Сформулированную задачу можно рассматривать как задачу теории управления, когда программа движения состоит в требовании, чтобы в процессе движения выполнялось нелинейное дифференциальное уравнение (3.1). Решать эту задачу будем аппаратом неголономной механики со связями высокого порядка, изложенным в предыдущем параграфе, поэтому наложенную на движение связь (3.1) естественно назвать *программной связью*, а создаваемая ею реакция оказывается искомой *управляющей силой*, решающей поставленную задачу управления.

Для применения изложенной в предыдущем параграфе теории движения неголономных систем со связями высокого порядка связь (3.1) следует продифференцировать по времени и представить ее в виде линейной неголономной связи третьего порядка:

$$\begin{gathered} f_3 \equiv \dot{f}_2 = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)(\dddot{r} - \dot{r}\dot{\varphi}^2 - 2r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + \\ +(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})(\dot{r}\ddot{\varphi} + r\dddot{\varphi} + 2\ddot{r}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\ddot{\varphi}) = 0\,. \end{gathered}$$

Эту линейную связь удобно записать в стандартном виде:

$$\begin{gathered} f_3(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dddot{q}) \equiv a_{3r}\dddot{r} + a_{3\varphi}\dddot{\varphi} + a_{3,0} = 0\,, \\ a_{3r} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,, \\ a_{3\varphi} = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})r\,, \\ a_{3,0} = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})(\dot{r}\ddot{\varphi} + 2\ddot{r}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\ddot{\varphi}) - \\ -(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)(\dot{r}\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{\varphi}\ddot{\varphi})\,. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Запишем векторное уравнение движения:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \Lambda \boldsymbol{\nabla}^{'''} f_3 \equiv \mathbf{F} + \Lambda \left(\frac{\partial f_3}{\partial \dddot{r}} \mathbf{e}^r + \frac{\partial f_3}{\partial \dddot{\varphi}} \mathbf{e}^\varphi \right) . \tag{3.3}$$

Умножая его на векторы основного базиса $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, получим

$$\begin{gathered} \Lambda_*(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \frac{\mu}{r^2} , \\ \Lambda_*(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0 , \\ \Lambda_* = \frac{\Lambda}{m} - 1 . \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь μ — постоянная Гаусса для поля притяжения Земли. Из системы (3.4) получаем дифференциальные уравнения вида (2.7):

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 + \frac{\mu}{\Lambda_* r^2} , \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} . \tag{3.5}$$

Используем уравнения (3.5) для того, чтобы с помощью уравнения связи (3.2) получить дополнительное дифференциальное уравнение относительно Λ_*. Для этого вначале первые два уравнения (3.4) продифференцируем по времени:

$$\dot{\Lambda}_*(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \Lambda_*(\dddot{r} - \dot{r}\dot{\varphi}^2 - 2r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + 2\frac{\mu}{r^3}\dot{r} = 0 , \tag{3.6}$$

$$\dot{\Lambda}_*(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \Lambda_*(\dot{r}\ddot{\varphi} + r\dddot{\varphi} + 2\ddot{r}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\ddot{\varphi}) = 0 . \tag{3.7}$$

Чтобы выделить здесь уравнение связи (а тем самым уничтожить третьи производные), умножим уравнение (3.6) на a_{3r}, а уравнение (3.7) — на $a_{3\varphi}$ и результаты сложим:

$$\dot{\Lambda}_* = \frac{2\mu\dot{r}\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right)}{r^3((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2)} .$$

Учитывая уравнение связи (3.2), отсюда получим интересующее нас уравнение типа (2.21):

$$\dot{\Lambda}_* = -\frac{2\mu}{w_0^2}\frac{\dot{r}}{r^5\Lambda_*} . \tag{3.8}$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (3.5), (3.8) дает решение поставленной задачи: при заданной силе притяжения Земли будет найдено движение искусственного спутника Земли с постоянным по

модулю ускорением, для чего к нему надо приложить найденную дополнительную силу (управляющую силу), формируемую множителем Лагранжа Λ, который будет найден как функция времени после решения системы уравнений (3.5), (3.8).

Движения спутников с постоянными ускорениями серий «Космос», «Молния» и «Тундра» (на основе первой теории движения неголономных систем со связями высокого порядка). Для получения начальных данных для системы дифференциальных уравнений (3.5), (3.8) воспользуемся известными формулами (см. § 9 главы IV первого тома учебника; напомним, что e — эксцентриситет орбиты, p — фокальный параметр):

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}\,, \quad \dot\varphi = \frac{\sqrt{p\mu}}{r^2}\,, \quad \dot r = \frac{pe\dot\varphi\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}\,, \\ \ddot\varphi = -\frac{2\dot r\dot\varphi}{r}\,, \quad \ddot r = r\dot\varphi^2 - \frac{\mu}{r^2}\,. \tag{3.9}$$

Первоначально рассмотрим движение одного из советских спутников системы «Космос» с высотами над поверхностью Земли в перигее $H_\pi = 183\,\text{км}$ и в апогее $H_\alpha = 244\,\text{км}$ (здесь и далее численные данные взяты из интернета). Считаем, что радиус Земли $R_З = 6371\,\text{км}$ и ускорение силы тяжести на поверхности Земли $\mathrm{g}_0 = 9.82\cdot 10^{-3}\,\text{км/с}^2$ (то есть принимаем, что Земля является шаром с равномерно распределенной массой). Тогда получаем

$$r_\pi = 6554\,\text{км}\,, \quad r_\alpha = 6615\,\text{км}\,, \quad \mu = \mathrm{g}_0 R_З^2 = 398590\,\text{км}^3/\text{с}^2\,, \\ e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = 0.004632\,, \quad p = r_\pi(1+e) = 6584.36\,\text{км}\,.$$

Будем рассматривать случай, когда ускорение спутника закрепляется при его положении в перигее. Тогда начальные данные при $t_0 = 0$ для численного интегрирования системы уравнений (3.5), (3.8) по формулам (3.9) принимают значения (дополняем их согласно формулам (2.24) условием $\Lambda(0) = 0$, что эквивалентно требованию $\Lambda_*(0) = -1$):

$$r(0) = 6554\,\text{км}\,, \quad \varphi(0) = 0\,, \quad \dot r(0) = 0\,, \\ \dot\varphi(0) = 0.00119263\,\text{с}^{-1}\,, \quad \ddot r(0) = 0.0000429824\,\text{км/с}^2\,, \\ \ddot\varphi(0) = 0\,, \quad \Lambda(0) = 0\,. \tag{3.10}$$

Результаты численного интегрирования при начальных данных (3.10) представлены на рис. 1. Из левой части рисунка видно, что изучаемый

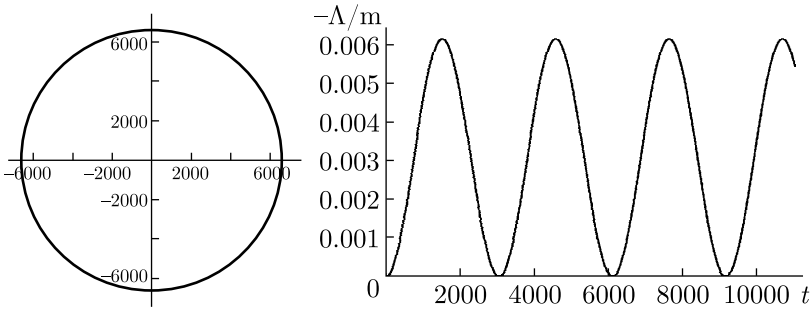

Рис. 1. Движение ИСЗ системы «Космос» после фиксирования величины ускорения в перигее при использовании первой теории движения

спутник при постановке исследуемой задачи практически движется по окружности, изображенной сплошной линией. Отметим, что исходно спутник при заданных параметрах орбиты движется по почти круговой орбите. Первоначально большинство спутников Земли запускались именно подобным образом, что позволяло при расчетах их движения пользоваться малостью эксцентриситета e орбиты.

На правой части рисунка изображена зависимость от времени множителя Лагранжа, формирующего управляющую силу, обеспечивающую выполнение программы движения, заданной в виде дифференциального уравнения (3.2). Отметим, что технически создание потребной управляющей силы легко осуществить установкой на спутник дополнительного реактивного двигателя.

Если рассмотреть траекторию спутника системы «Космос» в нашей задаче в крупном масштабе, то можно заметить, что после закрепления величины ускорения спутник начинает вращаться, попеременно касаясь двух концентрических окружностей с центрами в центре Земли (штриховые линии на рис. 2). После начала движения с внутренней окружности первое такое приближение к наружной окружности прослеживается на последовательности фрагментов траектории (сплошная линия), представленных на рис. 2.

Более наглядно движение спутника с постоянным ускорением между двумя концентрическими окружностями наблюдается у спутников, запущенных на высоко эллиптические орбиты. С этой целью рассмотрим движение спутника системы «Молния». Перигей такой орбиты располагался над Москвой, а апогей — над Владивостоком. В силу выполнения закона площадей такие спутники быстро двигались над Москвой, но медленно,

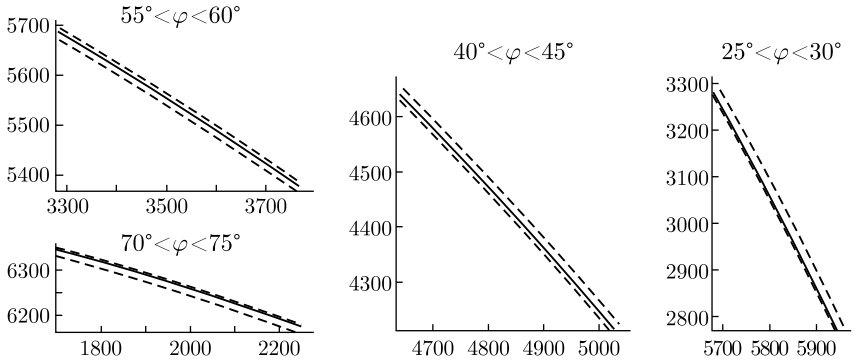

Рис. 2. Участки траектории спутника системы «Космос» с постоянной величиной ускорения при использовании первой теории движения

как бы «зависая», над Владивостоком. При запуске серии таких спутников над Владивостоком всегда находился спутник, обеспечивавший хорошую передачу телевизионного сигнала из Москвы.

Итак, для спутника системы «Молния» имеем

$$r_\pi = 6871\,\text{км}\,, \quad r_\alpha = 46371\,\text{км}\,,$$
$$e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = 0.741895\,, \quad p = r_\pi(1+e) = 11968.6\,\text{км}\,,$$

поэтому начальные условия для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений равны

$$\begin{gathered} r(0) = 6871\,\text{км}\,, \quad \varphi(0) = 0\,, \quad \dot r(0) = 0\,, \\ \dot\varphi(0) = 0.001463\,\text{с}^{-1}\,, \quad \ddot r(0) = 0.00626368\,\text{км/с}^2\,, \\ \ddot\varphi(0) = 0\,, \quad \Lambda(0) = 0\,. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Результаты интегрирования уравнений движения при начальных данных (3.11) представлены на рис. 3. На нем исходная эллиптическая орбита изображена пунктиром, между двумя концентрическими окружностями (штриховая линия) сплошной линией указана траектория спутника после закрепления его ускорения в перигее.

Сравним вычисления, полученные для двух рассмотренных ИСЗ. Орбита спутника серии «Космос» является почти круговой, поэтому его ускорение меняется мало. Следовательно, для создания движения с постоянным ускорением требуется незначительная обобщенная управляющая сила $\Lambda = \Lambda(t)$. В отличие от этого спутник серии «Молния» при закреплении величины ускорения в перигее начинает двигаться по почти эллиптической

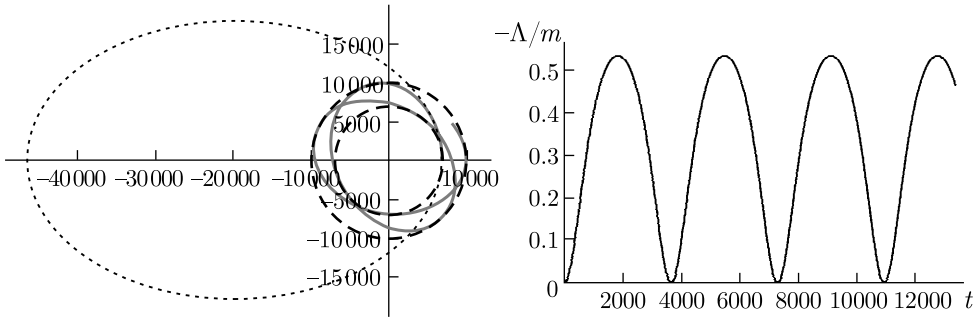

Рис. 3. Движение ИСЗ системы «Молния» после фиксирования величины ускорения в перигее при использовании первой теории движения

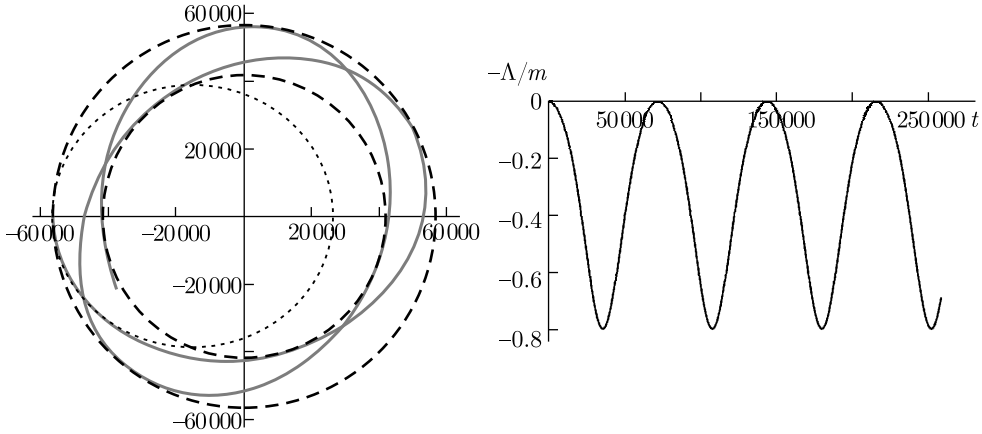

Рис. 4. Движение ИСЗ системы «Тундра» после фиксирования величины ускорения в апогее при использовании первой теории движения

траектории, резко отличающейся от первоначальной орбиты. Это требует значительно бóльшей управляющей обобщенной силы, увеличивающейся по сравнению с предыдущей на два порядка (сравнить графики на правых частях рисунков 1 и 3).

Рассмотрим теперь спутник серии «Тундра» с параметрами[19]

$$r_\pi = 26371\,\text{км}\,, \quad r_\alpha = 56371\,\text{км}\,,$$
$$e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = 0.362573\,, \quad p = r_\pi(1+e) = 35932.4\,\text{км}\,.$$

[19]См. статью: *Додонов В. В.* Движение спутника Земли после фиксирования величины его ускорения в апогее // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2019–2020 гг. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2020. С. 3–13.

Спутники этой серии запускались для получения устойчивой связи с северными районами Советского Союза. Если мы теперь для разнообразия хотим зафиксировать величину ускорения спутника не в перигее, а в апогее, то для интегрирования системы дифференциальных уравнений (3.5), (3.8) придется задать следующие начальные условия:

$$\begin{gathered} r(0) = 56371\,\text{км}\,, \quad \varphi(0) = \pi\,, \quad \dot{r}(0) = 0\,, \\ \dot{\varphi}(0) = 0.00003766\,\text{с}^{-1}\,, \quad \ddot{r}(0) = -0.00004548\,\text{км/с}^2\,, \\ \ddot{\varphi}(0) = 0\,, \quad \Lambda(0) = 0\,. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Решение, полученное при начальных данных (3.12), представлено на рис. 4.

§ 4. Движение искусственного спутника Земли с постоянным по модулю ускорением. Безразмерные дифференциальные уравнения движения

Движение спутника в поле притяжения Земли описывается следующим векторным уравнением:

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\frac{\mu\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\,, \quad \mu = \gamma M\,, \quad \rho = |\boldsymbol{\rho}|\,. \tag{4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор, соединяющий центр Земли со спутником, γ — гравитационная постоянная, M — масса Земли. Постоянная μ может быть представлена в виде (здесь и далее полезно обращаться к содержанию § 9 главы IV первого тома учебника)

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\,,$$

где a — большая полуось эллиптической орбиты спутника, а T — время полного оборота.

Уравнение (4.1) в безразмерных переменных

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \boldsymbol{\rho}/a\,, \quad \tau = 2\pi t/T$$

запишется в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}/r^3\,, \quad r = |\mathbf{r}|\,. \tag{4.2}$$

Здесь и в дальнейшем производная по безразмерному времени τ обозначается точкой. Интеграл энергии и интеграл площадей уравнения (4.2) имеют вид

$$v^2 = 2/r - 1\,, \quad v = |\dot{\mathbf{r}}|\,, \quad r^2\dot{\varphi} = \sqrt{1-e^2}\,, \tag{4.3}$$

где e — эксцентриситет эллиптической орбиты. Пусть в исходный момент, начиная с которого спутник должен двигаться с постоянным ускорением, он находится на оси x. Не умаляя общности, можно принять, что начальные данные при этом таковы:

$$\begin{gathered} x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = \sqrt{2x_0 - x_0^2 - 1 + e^2}/x_0\,, \\ y(0) = y_0 = 0\,, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = \sqrt{1-e^2}/x_0\,, \quad 1 - e \leqslant x_0 \leqslant 1 + e\,. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Уравнение связи в принятых обозначениях запишется в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}^2 - 1/x_0^4 = 0\,. \tag{4.5}$$

Данное уравнение будет, в частности, выполняться в случае, когда вектор $\ddot{\mathbf{r}}$, коллинеарный вектору $\mathbf{r}$, будет постоянным по величине. При этом производная по времени от вектора $\ddot{\mathbf{r}}$ будет ортогональна вектору $\mathbf{r}$, то есть будем иметь

$$\mathbf{e}_r \cdot \dddot{\mathbf{r}} = 0\,, \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r\,. \tag{4.6}$$

Это уравнение является линейной неголономной программной связью третьего порядка. Таким образом, система уравнений (1.2) в данной задаче сводится к одному уравнению (4.6).

Будем считать, что спутник, который теперь правильнее называть космическим аппаратом (КА), снабжен обобщенной управляющей силой Λ, при которой вектор управляющей силы равен

$$\mathbf{R} = \Lambda \mathbf{e}_r\,. \tag{4.7}$$

Из уравнения (4.6) следует, что при данной силе $\mathbf{R}$ управление будет идеальным.

Движение КА, начиная с момента наложения связи (4.6), описывается уравнением

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \Lambda \frac{\mathbf{r}}{r}\,. \tag{4.8}$$

В момент наложения связи управляющая сила отсутствует, то есть

$$\Lambda(0) = 0\,. \tag{4.9}$$

Дифференцируя выражение (4.8) по τ, получаем

$$\dddot{\mathbf{r}} = -\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r^3} + \frac{3\dot{r}}{r^4}\mathbf{r} + \dot{\Lambda}\frac{\mathbf{r}}{r} + \Lambda\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \Lambda\frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2}\,.$$

Умножая это уравнение скалярно на $\mathbf{r}$ и учитывая уравнение связи (4.6), а также то, что

$$r^2 = \mathbf{r}^2\,, \quad \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}\,,$$

приходим к уравнению

$$\dot{\Lambda} = -\frac{2\dot{r}}{r^3}\,. \tag{4.10}$$

Таким образом, система уравнений (2.21) в данной задаче сводится к одному уравнению (4.10). Полагая в нем

$$\dot{\Lambda} = \frac{d\Lambda}{dr}\dot{r}\,,$$

получаем

$$\frac{d\Lambda}{dr} = -\frac{2}{\dot{r}^3}\,.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что в соответствии с выражениями (4.4) и (4.9) $\Lambda = 0$ при $r = x_0$, будем иметь

$$\Lambda = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{x_0^2}\,.$$

Подставив это выражение в уравнение (4.8), получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{rx_0^2}\,. \tag{4.11}$$

Уравнение (4.11) позволяет в нашей задаче найти движение, удовлетворяющее уравнению (4.5), не зная той управляющей силы $\mathbf{R} = \Lambda\mathbf{r}/r$, благодаря которой оно осуществляется. Однако для того, чтобы это реально произошло, эту силу необходимо знать как функцию времени. Поэтому не будем исключать управляющую силу из уравнения (4.8), а будем его рассматривать совместно с уравнением (4.10).

Проектируя векторное уравнение (4.8) на орты полярной системы координат $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ и $\mathbf{e}_\varphi^0$, получаем

$$\begin{gathered} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{r^2} = \Lambda\,, \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0\,. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Дополнив эти два уравнения уравнением (4.10), получим замкнутую систему уравнений, позволяющую найти и движение, и управляющую силу.

Численное интегрирование системы уравнений (4.10), (4.12) велось при начальных данных

$$r(0) = x_0 = 1 - e\,, \quad \dot{r}(0) = 0\,, \quad \varphi(0) = 0\,,$$
$$\dot{\varphi}(0) = \sqrt{1-e^2}/x_0^2\,, \quad \Lambda(0) = 0\,.$$

Расчеты показали, что при любом значении эксцентриситета e, отличном от нуля и единицы, траекторией движения КА является кривая, лежащая между двумя концентрическими окружностями радиусов r_1 и r_2, которые являются положительными корнями уравнения[20]

$$2r^3 - (4 - x_0)x_0 r^2 + x_0^2(1 - e^2) = 0\,.$$

Отметим, что движение между окружностями этих радиусов не является периодическим в том смысле, что точка никогда не возвратится в исходное положение за целое число оборотов.

В качестве примера на рисунках 5, 6, 7 приведены результаты расчетов в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T/2$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \pi)$ при $e = 0.4$. На рис. 5 тонкими линиями показаны исходная эллиптическая орбита, а также концентрические окружности соответственно радиусов $r_1 = 0.6$ и $r_2 = 0.754$, между которыми лежит решение уравнения (4.11). Оно изображено жирной линией.

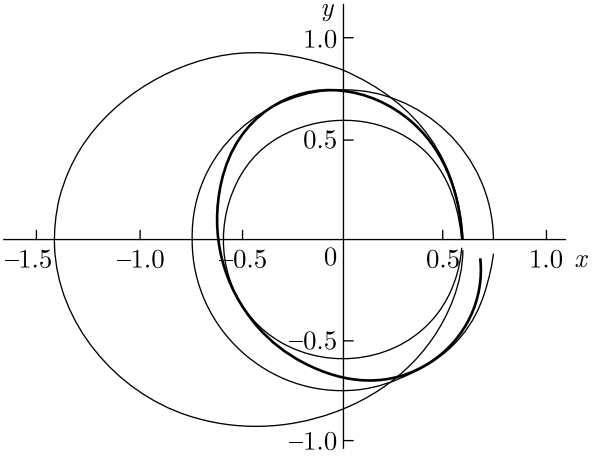

Рис. 5. Траектория движения КА

[20]См. стр. 152 монографии *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Наука; Физматлит, 2005.

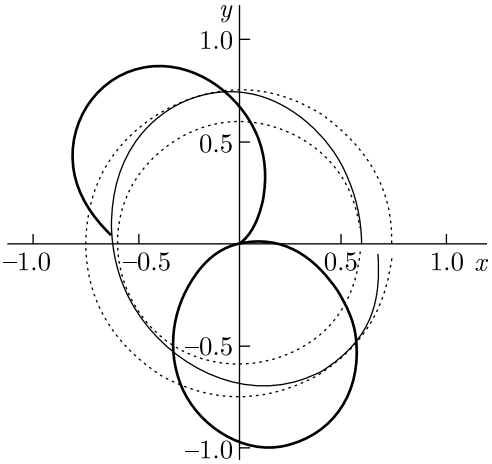

Рис. 6. Годограф управляющей силы

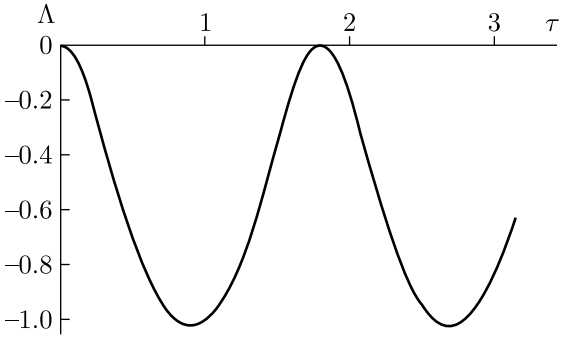

Рис. 7. График управляющей силы

Годограф управляющей силы $\mathbf{R} = \Lambda(\tau)\mathbf{r}/r$, обеспечивающей данное движение, на рис. 6 изображен жирной линией. При его рассмотрении следует иметь в виду, что во все время движения $\Lambda \leqslant 0$. График функции $\Lambda(\tau)$ изображен на рис. 7. Отметим, что величина Λ, как следует из уравнений (4.1) и (4.8), измеряется в долях силы тяготения F, где $F = \mu m/a^2$. Здесь m — масса спутника. Такую управляющую силу легко осуществить технически, поставив дополнительный реактивный двигатель, тяга которого направлена от КА к притягивающему центру. Именно такую силу задавала формула (4.7), причем функция $\Lambda(\tau)$ оказалась отрицательной или равной нулю[21].

[21] Еще один пример, отражающий наложение линейной неголономной связи третьего порядка, рассмотрен в монографии, указанной в предыдущей сноске. Он изучает плав-

§ 5. Вторая теория движения неголономных систем со связями высокого порядка. Обобщенный принцип Гаусса

При обсуждении второй теории движения неголономных систем со связями высокого порядка опять будем ограничиваться рассмотрением только линейных относительно старших производных связей. В случае задания нелинейных связей для использования теории их следует предварительно продифференцировать по времени[22]. Центральным местом во второй теории движения неголономных систем со связями высокого порядка является обобщенный принцип Гаусса[23].

Обсуждение принципа Гаусса. Вернемся сначала к классической формулировке принципа Гаусса (см. формулы (4.13) и (4.14) главы IX первого тома учебника):

$$\delta'' Z = 0\,, \tag{5.1}$$

где принуждение по Гауссу равно

$$Z = \frac{M}{2}\left(\mathbf{W} - \frac{\mathbf{Y}}{M}\right)^2. \tag{5.2}$$

Два штриха в формуле (5.1) подчеркивают, что варьируются только вторые производные от обобщенных координат. Произведя это варьирование, получим представление принципа Гаусса в другой записи:

$$\big(M\mathbf{W} - \mathbf{Y}\big)\cdot\delta''\mathbf{W} = 0\,. \tag{5.3}$$

ный перелет спутника с одной круговой орбиты на другую как один из вариантов движения, альтернативных движению спутника по эллипсу Гомана. При этом плавность перелета в упомянутом примере характеризовалась параметрами специально построенного обобщенного уравнения Сирса.

[22]Отметим, что влияние нелинейности связей подробно обсуждается в монографии: *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука; Физматлит, 2009. 344 с.

[23]Обобщенный принцип Гаусса был предложен еще в 1983 г. в статьях: *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1328–1330; *Они же.* Линейное преобразование сил и обобщенный принцип Гаусса // Вестн. Ленингр. ун-та. 1984. № 1. С. 73–79. Следует отметить, что впервые этот принцип был сформулирован М. А. Чуевым, к сожалению, в мало известной работе: *Чуев М. А.* К вопросу аналитического метода синтеза механизма // Изв. вузов. Машиностроение. Изд-во МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1974. № 8. С. 165–167. Позже независимо от этого с помощью введения линейного преобразования сил его удалось строго сформулировать в двух перечисленных выше статьях.

Так как имеет место второй закон Ньютона

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}\,, \tag{5.4}$$

то, исходя из формы (5.3), принцип Гаусса можно переписать и в виде

$$\delta''(\mathbf{R})^2 = 0\,, \tag{5.5}$$

что можно трактовать как требование минимальности реакции идеальных линейных неголономных связей второго порядка (1.6):

$$f_2^{\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q) \equiv a_{2\sigma}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q)\,\ddot q^{\,\sigma} + a_{2,0}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q) \;=\; 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{5.6}$$

Интересно дать геометрическую интерпретацию принципа Гаусса. Напомним, что связи (5.6) разбивают (см. главы VI и IX первого тома учебника) касательное пространство на два ортогональных подпространства K и L с базисами $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{l+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^{s}\}$ и $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_l\}$. Сами связи в пространстве обобщенных ускорений задают l-мерную плоскость $\mathbb{T}(t,q,\dot q,\ddot q)$, для которой t, q и $\dot q$ являются заданными параметрами. На этой плоскости должны находиться концы векторов ускорения $\mathbf{W}$ механической системы. В ней же находятся и векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$, $\lambda = \overline{1,l}$. Напомним, что вариация ускорения $\delta''\mathbf{W}$ определяется как вектор $\delta''\mathbf{W} = \delta''\ddot q^{\,\sigma}\mathbf{e}_\sigma$, который может быть представлен разложенным по базису пространства L и поэтому подчиняется условиям

$$\boldsymbol{\nabla}''f_2^{\varkappa}\cdot\delta''\mathbf{W} = 0\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{5.7}$$

Из формул (5.3) и (5.7) легко получить, что реакция идеальных неголономных связей второго порядка выражается формулой

$$\mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa\,\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,,$$

то есть принадлежит пространству K.

Запись принципа Гаусса в форме (5.5) показывает, что в случае наложения идеальных линейных неголономных связей второго порядка (5.6) их реакция $\mathbf{R}/M = \mathbf{W} - \mathbf{Y}/M$ «принуждает» двигаться механическую систему с минимальным значением величины этой реакции. Поэтому принцип Гаусса иногда называют и *принципом наименьшего принуждения.*

Все эти рассуждения в случае движения одной материальной точки при наложении идеальной неголономной связи второго порядка

$$f_2^1(t,y,\dot y,\ddot y) \equiv a_{2\sigma}^3(t,y,\dot y)\,\ddot y_\sigma + a_{2,0}^3(t,y,\dot y) \;=\; 0\,, \quad \sigma = \overline{1,3}\,, \tag{5.8}$$

где $y = (y_1, y_2, y_3)$ — декартовые координаты изучаемой точки, поясняются рисунком 8. На нем в пространстве ускорений точки нарисована плоскость

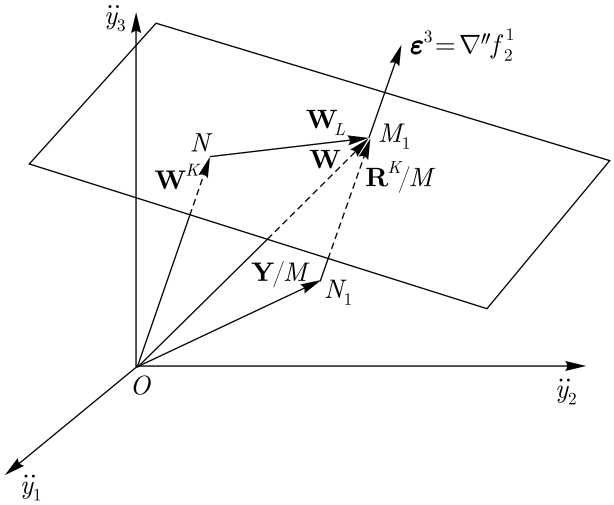

Рис. 8. Ускорение точки при наличии линейной связи второго порядка

(5.8), задаваемая вектором $\mathbf{W}^K$, на ней в точке M_1 заканчивается вектор $\mathbf{W}$ ускорения материальной точки, перпендикулярно плоскости от точки M_1 идет вектор взаимного базиса $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = \boldsymbol{\nabla}'' f_2^1$, по которому должна быть направлена реакция $\mathbf{R}^K$ идеальной связи (5.8). Сама эта реакция $\mathbf{R}^K/M$ на рис. 8 представляется вектором $\overrightarrow{N_1 M_1}$, проведенным перпендикулярно плоскости связи из конца вектора активной силы $\mathbf{Y}/M$, действующей на материальную точку. Из самого построения этого вектора следует, что он имеет наименьшую длину, то есть согласно принципу Гаусса, записанному в виде (5.5), реакция, обеспечивающая выполнение идеальной связи (5.8), действительно оказывается минимальной.

Обобщенный принцип Гаусса. Как указывалось выше, строго обобщенный принцип Гаусса был сформулирован на основе введения понятия линейного преобразования сил. Однако существо этого принципа легко пояснить, расширяя приведенную выше геометрическую иллюстрацию классического принципа Гаусса.

Рассмотрим случай наложения на движение механической системы линейных неголономных связей третьего порядка:

$$f_3^{\varkappa}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \dddot{q}) \equiv a_{3\sigma}^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}, \ddot{q})\ \dddot{q}^{\,\sigma} + a_{3,0}^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \ = \ 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \quad (5.9)$$

Этими уравнениями в пространстве векторов $\dot{\mathbf{W}}$ задается l-мерная плоскость, на которой для удовлетворения связей (5.9) должны находиться

концы этих векторов. Если теперь на рисунке 8 заменить величины $\ddot{y}_1$, $\ddot{y}_2$, $\ddot{y}_3$ на $\dddot{y}_1$, $\dddot{y}_2$, $\dddot{y}_3$, а векторы $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}^K$, $\mathbf{W}_L$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{R}^K$ на векторы $\dot{\mathbf{W}}$, $\dot{\mathbf{W}}^K$, $\dot{\mathbf{W}}_L$, $\dot{\mathbf{Y}}$, $\dot{\mathbf{R}}^K$, то аналогично предыдущему пункту можно утверждать, что в случае задания связей (5.9) минимизируется величина $\dot{\mathbf{R}}/M = \dot{\mathbf{R}}^K/M$, а тем самым выполняется аналогично формуле (5.1) утверждение

$$\delta''' Z_{(1)} = 0\,, \tag{5.10}$$

где введено обозначение

$$Z_{(1)} = \frac{M}{2}\left(\dot{\mathbf{W}} - \frac{\dot{\mathbf{Y}}}{M}\right)^2. \tag{5.11}$$

Запись (5.10) можно рассматривать как *обобщенный принцип Гаусса*, справедливый при наложении связей (5.9). Значок «(1)» в формулах (5.10) и (5.11) указывает на порядок обобщенного принципа по отношению к классическому принципу Гаусса, а три штриха в записи (5.10) подчеркивают, что варьируются лишь третьи производные от обобщенных координат. Аналогично соотношению формул (5.1) и (5.3) обобщенный принцип Гаусса (5.10) можно переписать в виде

$$\left(M\dot{\mathbf{W}} - \dot{\mathbf{Y}}\right)\cdot \delta'''\dot{\mathbf{W}} = 0\,. \tag{5.12}$$

Полученный обобщенный принцип Гаусса первого порядка в случае задания линейных неголономных связей порядка $(n+2)$ легко обобщается на *обобщенный принцип Гаусса n-го порядка*

$$\delta^{(n+2)} Z_{(n)} = 0\,, \tag{5.13}$$

где введено обозначение

$$Z_{(n)} = \frac{M}{2}\left(\overset{(n)}{\mathbf{W}} - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{Y}}}{M}\right)^2. \tag{5.14}$$

В формулах (5.13), (5.14) индекс (n) означает порядок производной по времени от вектора, а индекс $(n+2)$ указывает на то, что частный дифференциал вычисляется при фиксированных $t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, \ldots, \overset{(n+1)}{q^\sigma}$.

При использовании принципа (5.13) должны быть заданы начальные условия

$$\Lambda_\varkappa(t_0) = \Lambda^0_\varkappa\,, \quad \dot{\Lambda}_\varkappa(t_0) = \dot{\Lambda}^0_\varkappa\,, \quad \ldots \quad , \quad \overset{(n-1)}{\Lambda_\varkappa}(t_0) = \overset{(n-1)}{\Lambda_\varkappa}{}^0\,,$$
$$q^\sigma(t_0) = q^\sigma_0\,, \qquad \dot{q}^\sigma(t_0) = \dot{q}^\sigma_0\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,.$$

Минимизируемый в данном пункте по величине вектор $\vec{\mathfrak{R}} \equiv \overset{(n)}{\mathbf{R}} = M\overset{(n)}{\mathbf{W}} - \overset{(n)}{\mathbf{Y}}$ можно назвать условно «реакцией» линейных неголономных связей порядка $(n+2)$.

Составление уравнений движения согласно второй теории движения неголономных систем со связями высокого порядка базируется на применении обобщенного принципа Гаусса.

§ 6. Исследование движений спутников с постоянными ускорениями на основе второй теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. Размерные дифференциальные уравнения[24]

Запишем обобщенный принцип Гаусса для спутника Земли при наложении линейной неголономной связи третьего порядка (3.2):

$$\left(m\dot{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{F}}\right) \cdot \delta'''\dot{\mathbf{w}} = 0\,. \tag{6.1}$$

Перепишем принцип (6.1) в виде:

$$(mU_\rho - P_\rho)\,\delta''' U^\rho = 0\,, \quad \rho = 1,2\,, \quad \mathbf{U} = \dot{\mathbf{w}}\,, \quad \mathbf{P} = \dot{\mathbf{F}}\,. \tag{6.2}$$

Воспользуемся известной формулой (2.18) для ковариантных компонент векторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{P}$

$$U_\rho = \dot{w}_\rho - \Gamma^\tau_{\rho\sigma} w_\tau \dot{q}^\sigma\,, \quad P_\rho = \dot{F}_\rho - \Gamma^\tau_{\rho\sigma} F_\tau \dot{q}^\sigma\,, \quad \rho,\sigma,\tau = 1,2\,, \tag{6.3}$$

где $\Gamma^\tau_{\rho\sigma}$ — символы Кристоффеля второго рода. Ковариантные компоненты ускорения и силы в формуле (6.3) имеют вид

$$w_1 = w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\,, \quad w_2 = w_\varphi = r(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,,$$

$$F_1 = -\frac{m\mu}{r^2}\,, \quad F_2 = 0\,.$$

Вариации $\delta''' U^1$ и $\delta''' U^2$ в нашей задаче выражаются следующим образом:

$$\delta''' U^1 = \delta'''\,\dddot{r}\,, \quad \delta''' U^2 = \delta'''\,\dddot{\varphi}\,,$$

[24] См. работы: *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Применение обобщенного принципа Гаусса для составления уравнений движения систем с неголономными связями третьего порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. 1990. Сер. 1. Вып. 3. (№ 15). С. 77–83; *Они же.* Уравнения движения одной неголономной системы при наличии связи второго порядка // *Там же.* 1991. Вып. 4. (№ 22). С. 26–29; *Dodonov V. V., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* The motion of an Earth satellite after imposition of a non-holonomic third-order constraint // AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings 1959, 030006 (2018).

причем согласно связи (3.2) они связаны соотношением

$$\delta'''\,\dddot{\varphi} = -\frac{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2}{r(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})}\,\delta'''\,\dddot{r}\,.$$

Поэтому принцип (6.2) можно переписать в виде

$$\left(mU_1 - P_1 - \frac{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2}{r(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})}(mU_2 - P_2)\right)\delta'''\,\dddot{r} = 0\,. \tag{6.4}$$

Так как ненулевыми символами Кристоффеля будут только

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}\,, \quad \Gamma^1_{22} = -r\,,$$

то формулы (6.3) можно представить в виде

$$U_1 = \dddot{r} - 3\dot{r}\dot{\varphi}^2 - 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\,, \quad U_2 = 3r\ddot{r}\dot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi} + r^2\,\dddot{\varphi} - r^2\dot{\varphi}^3\,,$$

$$P_1 = \frac{2\mu m\dot{r}}{r^3}\,, \quad P_2 = -\frac{\mu m\dot{\varphi}}{r}\,.$$

Теперь из записи принципа (6.4) ввиду произвольности вариации $\delta'''\,\dddot{r}$ получаем

$$\begin{gathered}\dddot{r} - 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - 3\dot{r}\dot{\varphi}^2 - \frac{2\mu\dot{r}}{r^3} - \\ -\frac{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\left(3r\ddot{r}\dot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi} + \frac{\mu\dot{\varphi}}{r} + r^2\,\dddot{\varphi} - r^2\dot{\varphi}^3\right)}{r\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)} = 0\,.\end{gathered} \tag{6.5}$$

Решая систему из уравнений (3.2) и (6.5) относительно $\dddot{r}$ и $\dddot{\varphi}$, имеем

$$\begin{aligned}\dddot{r} &= \frac{\dot{r}\left(2\mu + 3r^3\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\mu\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right)\left(2\dot{r}\left(2r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right) + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\right)}{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + 4\dot{r}^2\dot{\varphi}^2 + 4r\dot{r}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}^2} + 3r^4\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}{r^3}\,, \\ \dddot{\varphi} &= \frac{r^3\dot{\varphi}\left(r\dot{\varphi}^2 - 3\ddot{r}\right) - 3r^3\dot{r}\ddot{\varphi} - \frac{\mu\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right)\left(\dot{\varphi}\left(r\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right) - 4\dot{r}^2\right) - 2r\dot{r}\ddot{\varphi}\right)}{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + 4\dot{r}^2\dot{\varphi}^2 + 4r\dot{r}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}^2}}{r^4}\,.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Интегрирования полученной системы дифференциальных уравнений (6.6) при начальных данных (3.10) и (3.11) дают решения поставленных задач.

На рис. 9 представлены траектории движения спутников серий «Космос» и «Молния», вычисленные с помощью дифференциальных уравнений, полученных по второй теории для случая, когда закрепление модуля ускорения происходит в перигее. Как видно из этих траекторий, при

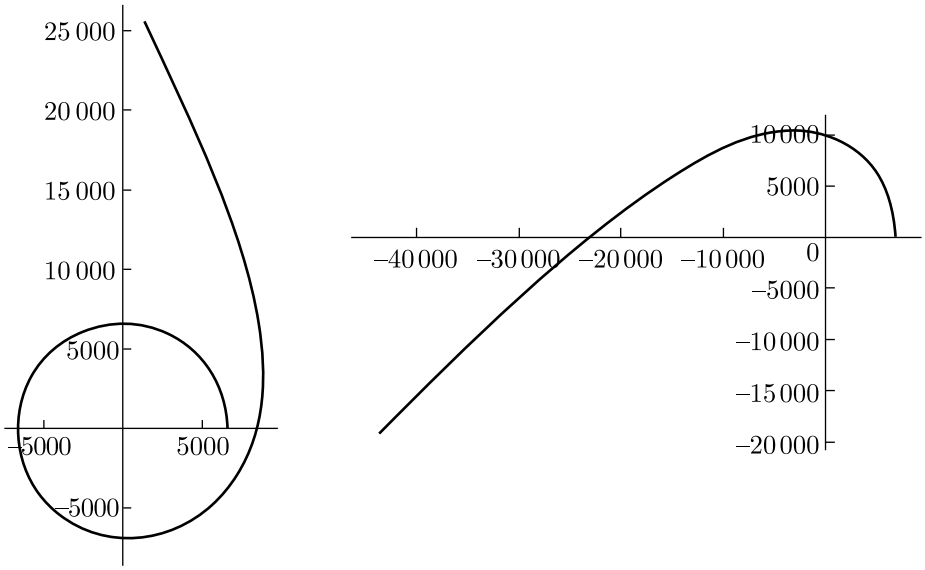

Рис. 9. Движения спутников систем «Космос» и «Молния» после фиксирования величин ускорений в перигеях при использовании второй теории движения

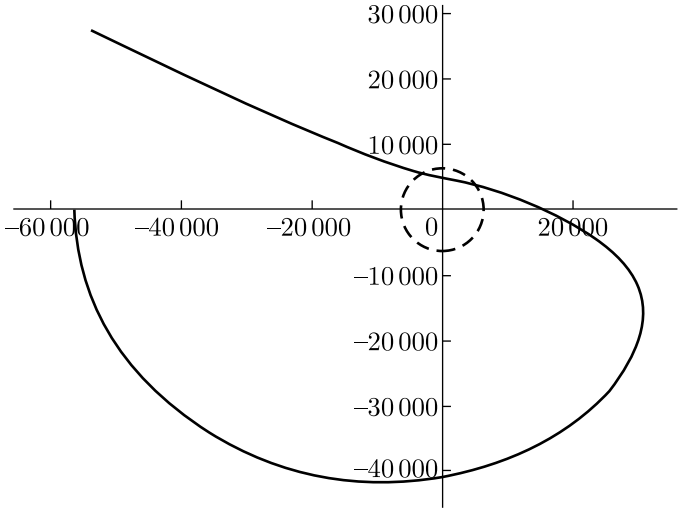

Рис. 10. Движение ИСЗ системы «Тундра» после фиксирования величины ускорения в апогее при использовании второй теории движения

закреплении ускорения спутника он после некоторого вращения вокруг Земли начинает асимптотически стремиться к движению по прямой.

Остановимся еще на исследовании движения спутника серии «Тундра» в случае фиксации величины его ускорения w_α в апогее[25]. В этом случае система дифференциальных уравнений (6.6) должна интегрироваться при начальных данных (3.12). Получающаяся при этом траектория движения спутника серии «Тундра» показана на рис. 10. Отметим, что эта траектория качественно отличается от траекторий, представленных на рисунке 9, появившимся изгибом кривой.

Обсудим это явление. На рис. 9 показаны траектории спутников после фиксации величин их ускорений в перигеях траекторий. После этих точек спутник начинает удаляться от притягивающего центра. В свою очередь, после закрепления величины ускорения в апогее спутник начинает двигаться в сторону притягивающего центра, и при вхождении в зону активного притяжения этого центра у него наблюдается упоминавшийся выше изгиб траектории. В дальнейшем по мере удаления от притягивающего центра спутник быстро выходит на движение по прямой. Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Представленные рассуждения относятся к точечному центру притяжения. Если же такую же силу создает модель Земли в виде однородного шара с радиусом $R_З = 6371$ км, то рассматриваемый спутник согласно рис. 10 встретится с поверхностью Земли. Напомним, что на рисунке Земля представлена штриховой окружностью.

Обсуждение полученных результатов. Сравнивая траектории спутников при закреплении их ускорения в перигее, полученные по двум теориям движения неголономных систем со связями высокого порядка (при решении обобщенных задач Чебышёва, полученных разными методами), видим их принципиальное различие.

С точки зрения механики неголономных систем различие полученных решений можно пояснить следующим образом. Первая теория строится на преобразованиях векторного уравнения Ньютона в случае приложения идеальных линейных неголономных связей высокого порядка (в нашем примере на преобразованиях уравнения (4.4)). Таким уравнениям движения соответствует принцип Манжерона — Делеану[26], обеспечивающий минимальность модуля силы реакции связей. Во второй же теории ис-

[25] См. статью: *Додонов В. В.* Движение спутника Земли после фиксирования величины его ускорения в апогее // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2019–2020 гг. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2020. С. 3–13.

[26] См., напр., монографию: *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Наука; Физматлит, 2005. 272 с.

пользуется обобщенный принцип Гаусса, дающий минимальность модуля соответствующей производной (в нашем случае первой производной) от вектора реакции наложенных связей высокого порядка.

Полученные результаты интересно дополнить следующими рассуждениями. Как известно, движение точки с постоянным ускорением происходит либо при равномерном вращении по окружности, либо в случае прямолинейного равноускоренного движения. Элементы первого такого движения при вращении спутника между двумя концентрическими окружностями получены с помощью первой теории, а асимптотическое стремление спутника к равноускоренному движению по прямой было получено в случае применения второй теории. Таким образом, видим, что две различные теории движения неголономных систем со связями высокого порядка в нашем примере удачно дополняют друг друга и совместно дают ожидаемые решения.

§ 7. Исследование движений спутников с постоянными ускорениями на основе второй теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. Безразмерные дифференциальные уравнения

Составим теперь безразмерные дифференциальные уравнения данной задачи, вытекающее из обобщенного принципа Гаусса[27]. Дифференцируя уравнение связи (4.5) по времени, получаем

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}} = 0\,. \tag{7.1}$$

Определяя минимум функции

$$Z_{(1)} = \frac{m}{2}\left|\dddot{\mathbf{r}} + \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r^3} - \frac{3\dot{r}\mathbf{r}}{r^4}\right|^2$$

на множестве значений $\dddot{\mathbf{r}}$, допускаемых уравнением (7.1), придем к уравнению

$$\dddot{\mathbf{r}} = -\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r^3} + \frac{3\dot{r}}{r^4}\,\mathbf{r} + \Lambda^*\,\ddot{\mathbf{r}}\,, \tag{7.2}$$

где Λ^* — искомый множитель Лагранжа. Из выражений (4.5), (4.3) следует, что

$$\Lambda^* = \frac{x_0^4}{r^3}\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} - \frac{3x_0^4\,\dot{r}}{r^4}\,\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}\,.$$

[27] См. монографию: *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука; Физматлит, 2009. 344 с.

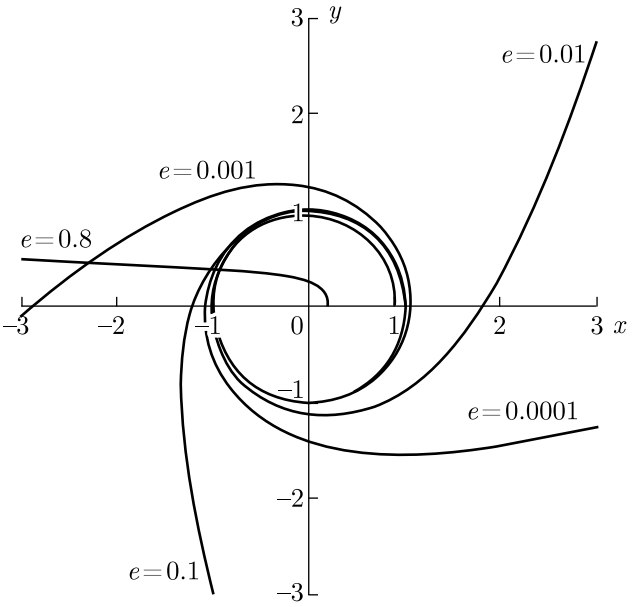

Рис. 11. Движение КА с постоянным по модулю ускорением (безразмерные дифференциальные уравнения)

Численное интегрирование уравнения (7.2) при подстановке в него величины Λ^* велось в декартовых координатах. Начальные данные (4.4) дополнялись начальными данными по ускорениям:

$$\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 = -1/x_0^2\,, \qquad \ddot{y}(0) = \ddot{y}_0 = 0\,.$$

Расчеты показали, что даже при очень малом эксцентриситете, причем независимо от x_0, траектория уходит на бесконечность. Она асимптотически приближается к движению по прямой с постоянным ускорением. Из рис. 11 видно, что с ростом величины e процесс выхода на прямую ускоряется. Все кривые соответствуют случаю, когда $x_0 = 1 - e$. Выход на движение по прямой с постоянным ускорением после приблизительно трех оборотов при величине $e \approx 4 \cdot 10^{-6}$, когда движение до наложения связи с большой точностью удовлетворяло этой связи, говорит о некоторой интересной особенности данного решения. Попытаемся понять причину этого.

Принцип, сформулированный Гауссом, при отсутствии активных сил и связей приводит к движению с нулевым ускорением $\mathbf{W}$, что согласуется с первым законом Ньютона. Отметим, что из этого принципа могут быть получены уравнения динамики.

Обобщенный принцип Гаусса, примененный к случаю, когда активные силы и связи отсутствуют, приводит к движению не с нулевым ускорением $\mathbf{W}$, а с нулевой производной n-го порядка по времени от вектора $\mathbf{W}$, где n — порядок принципа. Следовательно, при $n = 1$ применение обобщенного принципа Гаусса при отсутствии активных сил и связей приведет к равноускоренному движению по прямой. На такое «естественное» в рамках данного принципа движение и стремится выйти спутник (превращающийся в космический аппарат) даже при $e \approx 4 \cdot 10^{-6}$. Ясно, что рассматриваемая задача о движении спутника (космического аппарата) с постоянным по модулю ускорением может иметь решение, при котором он асимптотически выходит на движение по прямой с этим постоянным ускорением. Такое решение, как видим, и дает применение к данной задаче обобщенного принципа Гаусса первого порядка.

Сравним еще раз использование двух теорий движения неголономных систем со связями высокого порядка на примере решения задач о движении спутников, превращающихся в космические аппараты при закреплении в некоторый момент времени величин имеющихся у них ускорений.

При использовании первой теории в § 4 было получено движение спутников между двумя концентрическими окружностями, причем с уменьшением эксцентриситета e исходной эллиптической орбиты эти окружности все более сближаются друг с другом (это особенно наглядно было видно в § 3 на примере движения спутника серии «Космос», имевшего эксцентриситет $e = 0.004632$). Таким образом, эта теория улавливает в изучаемой сложной задаче элементы движения с постоянным ускорением по окружности. В отличие от этого применение второй теории, использующей обобщенный принцип Гаусса, как показывает исследование в данном параграфе, приводит к асимптотическому стремлению к равноускоренному движению по прямой. Таким образом, применение этих обеих теорий в рассматриваемой задаче дополняет друг друга и дают ожидаемые решения.

Особенно удачным оказывается применение обобщенного принципа Гаусса для решения задачи о переводе механической системы за фиксированный промежуток времени из одного фазового состояния в другое фазовое состояние. Этот подход позволил построить новый эффективный метод для решения указанной, одной из важнейших задач теории управления. Изложению этого метода и некоторому его развитию посвящена следующая часть данной главы.

II. НЕГОЛОНОМНАЯ МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Вторая часть данной главы является связующим звеном между двумя совершенно различными разделами механики — неголономной механикой и теорией управления. Показано, что на основе решения обобщенной задачи Чебышёва можно построить новый метод отыскания оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему за указанный промежуток времени из одного фазового состояния в другое.

§ 8. Постановка одной из важнейших задач теории управления

Рассмотрим одну из основных задач теории управления о нахождении управляющей оптимальной силы, переводящей за заданное время механическую систему с конечным числом степеней свободы из одного фазового состояния с конкретными обобщенными координатами и скоростями в новое фазовое состояние с заданными обобщенными координатами и скоростями. В качестве модельного примера будем отыскивать управляющую силу F, перемещающую горизонтально движущуюся вдоль оси x тележку массы m за заданное время $\widetilde{T}$ на расстояние S (такая задача формулировалась выше в § 5 главы V). На тележке укреплены оси s математических маятников с массами m_σ и длинами l_σ, $\sigma = \overline{1, s}$. На рис. 12 (он идентичен рисунку 2 главы V) для определенности изображена тележка с двумя маятниками. Требуется переместить данную систему из первоначального состояния покоя в новое положение покоя (при такой постановке задачи обычно говорят, что решается задача о гашении колебаний).

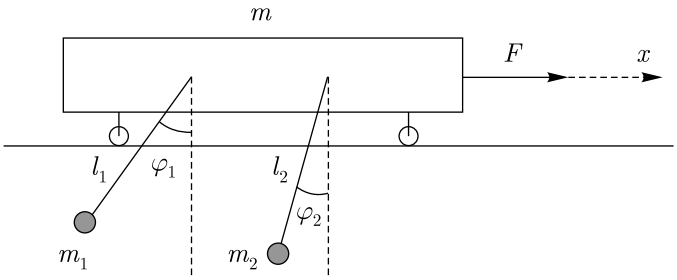

Рис. 12. Тележка с маятниками

Система имеет $s + 1$ степень свободы, для описания ее движения, как и в § 5 главы V, введем координату x, характеризующую горизонтальное смещение тележки, и углы поворотов маятников φ_σ, $\sigma = \overline{1, s}$. Кинетическая и потенциальная энергии системы в случае малых колебаний имеют

вид (g — ускорение силы тяжести)

$$2T = m\dot{x}^2 + \sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma(\dot{x} - l_\sigma\dot{\varphi}_\sigma)^2\,, \quad 2\Pi = \mathrm{g}\sum_{\sigma=1}^{s} l_\sigma m_\sigma \varphi_\sigma^2\,,$$

поэтому уравнения Лагранжа второго рода запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered} M\ddot{x} - \sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma l_\sigma \ddot{\varphi}_\sigma = F\,, \quad M = m + \sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma\,, \\ \ddot{x} - l_\sigma\ddot{\varphi}_\sigma = \mathrm{g}\varphi_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \end{gathered} \tag{8.1}$$

Очевидно, что здесь первое уравнение выражает закон движения центра масс всей системы:

$$M\ddot{x}_c = F\,, \quad x_c = x - \frac{\sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma l_\sigma \varphi_\sigma}{M}\,.$$

Для гашения колебаний рассматриваемой механической системы, то есть для наличия покоя системы в начальный момент и для обеспечения прекращения колебаний при остановке системы, управляющая сила должна быть такой, чтобы выполнялись следующие краевые условия:

$$\begin{gathered} x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(\widetilde{T}) = 0\,, \quad x(\widetilde{T}) = S\,, \\ \varphi_\sigma(0) = \varphi_\sigma(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \dot{\varphi}_\sigma(0) = \dot{\varphi}_\sigma(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \end{gathered} \tag{8.2}$$

Для дальнейших исследований систему (8.1) удобно записать в главных координатах. Рассматриваемая механическая система имеет нулевую частоту $\Omega_0 = 0$ и s ненулевых собственных частот Ω_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Используя собственные формы колебаний, соответствующие этим частотам, введем главные безразмерные координаты x_σ, $\sigma = \overline{1,s}$, задавая их как линейные комбинации углов φ_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Переходя к безразмерному времени $\tau = \Omega_1 t$ и вводя $(s+1)$-ю безразмерную главную координату x_0, пропорциональную перемещению центра масс рассматриваемой механической системы, в результате получим

$$\begin{cases} x_0'' = u\,, \\ x_\sigma'' + \omega_\sigma^2 x_\sigma = u\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \end{cases} \tag{8.3}$$

Здесь u — управление, пропорциональное силе F, штрихи соответствуют производным по безразмерному времени τ, $\omega_\sigma = \Omega_\sigma/\Omega_1$, $\sigma = \overline{1,s}$. В правых частях уравнений стоит одно и то же безразмерное управление u: этого

легко добиться соответствующим изменением масштабов главных координат. Полученную систему дифференциальных уравнений (8.3), удовлетворяя требованиям (8.2), будем решать при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} x_0(0) = x_0'(0) = 0\,, \quad x_\sigma(0) = x_\sigma'(0) = 0\,, \quad T = \Omega_1 \widetilde{T}\,, \\ x_0(T) = a \equiv \frac{S}{l_1}\,, \quad x_0'(T) = 0\,, \quad x_\sigma(T) = x_\sigma'(T) = 0\,, \\ \sigma = \overline{1, s}\,. \end{gathered} \tag{8.4}$$

Система (8.3) имеет $(s+1)$ дифференциальных уравнений, из нее требуется найти неизвестные функции x_0, x_σ, $\sigma = \overline{1, s}$. Но в этой же системе (8.3) неопределенной является и функция $u(t)$. Поэтому для решения поставленной задачи (8.3)–(8.4) необходимо добавить еще одно условие. Оно должно выражать тот принцип, который положен в основу выбора управления $u(\tau)$ (управляющей силы $F(t)$) из всего множества возможных управлений, при которых рассматриваемая задача имеет решение. Обычно[28] при решении подобных задач выбор управления подчиняется условию минимальности функционала

$$J = \int\limits_0^T u^2 d\tau\,. \tag{8.5}$$

Одним из наиболее принятых классических методов решения сформулированной задачи оптимального управления (8.3)–(8.5) является метод, опирающийся на использование принципа максимума Понтрягина, изложенного в § 2 главы V.

§ 9. Связь решения, полученного с помощью принципа максимума Понтрягина, с неголономной задачей[29]

Как было видно из § 5 главы V, представление размерных дифференциальных уравнений (8.1) горизонтального движения тележки с s маятниками в виде безразмерных независимых уравнений в главных координатах (8.3) (при задании граничных условий (8.4)) оказалось весьма эффективным.

[28] См., например, монографию: *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.

[29] Материал данного параграфа и ряда последующих кратко отражен в работе: *Yushkov M., Zegzhda S., Soltakhanov Sh., Naumova N., Shugaylo T.*. A novel approach to suppression of oscillations // ZAMM. May 2018. Vol. 98. Issue 5. P. 781–788.

Именно благодаря этому при гашении колебаний рассматриваемой механической системы с помощью использования принципа максимума Понтрягина при минимизации функционала (8.5) удалось построить безразмерное управление в виде простой формулы (5.9) главы V:

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(C_{2\sigma+1}\cos\omega_\sigma\tau + C_{2\sigma+2}\sin\omega_\sigma\tau\right). \tag{9.1}$$

Эта формула позволяет посмотреть на полученное с помощью принципа максимума Понтрягина решение с совершенно новой и интересной точки зрения, которая позволит соединить две абсолютно различные области механики — теорию управления и неголономную механику.

С этой целью обратим, прежде всего, внимание на то, что полученное по принципу максимума Понтрягина управление (9.1) можно рассматривать как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega_2^2\right)\ldots\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega_s^2\right)u = 0\,. \tag{9.2}$$

Частным случаем решения (9.1) при $s = 2$ является решение (5.12) главы V, которому соответствует частный случай уравнения (9.2), записываемый в виде

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega_2^2\right)u = 0\,. \tag{9.3}$$

Возвращаясь в уравнении (9.3) к размерным переменным, будем иметь

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\Omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\Omega_2^2\right)F = 0\,. \tag{9.4}$$

Подставим теперь в уравнение (9.4) выражение для F из первого уравнения первоначальной системы (8.1), рассматриваемой для случая $s = 2$. Тогда получим дифференциальное уравнение 8-го порядка относительно обобщенных координат x, φ_1 и φ_2:

$$\begin{gathered} a_{8,x}\frac{d^8x}{dt^8} + a_{8,\varphi_1}\frac{d^8\varphi_1}{dt^6} + a_{8,\varphi_2}\frac{d^8\varphi_2}{dt^8} + a_{6,x}\frac{d^6x}{dt^6} + a_{6,\varphi_1}\frac{d^6\varphi_1}{dt^6} + \\ + a_{6,\varphi_2}\frac{d^6\varphi_2}{dt^6} + a_{4,x}\frac{d^4x}{dt^4} + a_{4,\varphi_1}\frac{d^4\varphi_1}{dt^4} + a_{4,\varphi_2}\frac{d^4\varphi_2}{dt^4} = 0\,. \end{gathered} \tag{9.5}$$

Постоянные коэффициенты этого уравнения связаны с параметрами механической системы формулами

$$a_{8,x} = M + m_1 + m_2\,, \quad a_{8,\varphi_1} = -m_1\,l_1\,, \quad a_{8,\varphi_2} = -m_2\,l_2\,,$$
$$a_{6,x} = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)(M + m_1 + m_2)\,, \quad a_{6,\varphi_1} = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\,m_1\,l_1\,,$$
$$a_{6,\varphi_2} = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\,m_2\,l_2\,, \quad a_{4,x} = \Omega_1^2\,\Omega_2^2\,(M + m_1 + m_2)\,,$$
$$a_{4,\varphi_1} = -\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,m_1\,l_1\,, \quad a_{4,\varphi_2} = -\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,m_2\,l_2\,.$$

Таким образом, решению поставленной задачи при $s = 2$ с использованием принципа максимума Понтрягина соответствует решение некоторой неголономной задачи при наложении связи (9.5) восьмого порядка.

Отметим, что задав другое число s, из уравнения (9.2), переписанного в размерных величинах, получим вместо (9.5) дифференциальное уравнение порядка $2s+4$ относительно обобщенных координат, в котором постоянные коэффициенты, как и ранее, будут вычисляться через размерные параметры рассматриваемой механической системы. Это дифференциальное уравнение опять можно рассматривать как неголономную связь порядка $2s+4$, наложенную на движение механической системы. Другими словами: если рассматриваемая механическая система движется под действием управления, найденного с помощью принципа максимума Понтрягина, то в процессе этого движения непрерывно выполняется неголономная связь порядка $2s+4$. Поэтому наличие связи высокого порядка, вытекающей из минимизации функционала (8.5) с помощью применения принципа максимума Понтрягина, позволяет задачу определения управляющей силы, обеспечивающей гашение колебаний, рассматривать как некоторую задачу неголономной механики со связями высокого порядка.

Итак, решение краевой задачи (8.3), (8.4) при минимизации функционала (8.5) с помощью принципа максимума Понтрягина оказалось эквивалентным решению задачи о движении механической системы при наложении неголономной связи порядка $2s+4$. Поэтому можно сформулировать обобщенную задачу Чебышёва, в которой программа движения задается в виде дифференциального уравнения порядка $2s+4$. Решать эту обобщенную задачу Чебышёва представляется целесообразным, опираясь на теории движения неголономных систем со связями высокого порядка, развитые в части *I)* данной главы. Согласно этим теориям при наличии связи порядка $2s+4$ можно составить уравнение порядка $2s+2$ относительно реакции этой связи. Таким образом, если рассматривать связь порядка $2s+4$ как некоторую программу движения, которую должна выполнять механическая система, то реакция этой связи оказывается управляющей силой, обеспечивающей выполнение заданной программы. Следовательно,

в общем случае дифференциальное уравнение (9.2) порядка $2s+2$ относительно управления можно трактовать как дифференциальное уравнение относительно реакции связи. Но если мы продолжаем пользоваться теорией движения неголономных систем со связями высокого порядка, то естественно вместо минимизации функционала (8.5) с помощью принципа максимума Понтрягина воспользоваться вариационным принципом, свойственным этой теории. Таковым принципом является обобщенный принцип Гаусса, изложенный в § 5 данной главы. Применению этого принципа к решению поставленной нами задачи при $s = 2$ посвящен следующий параграф.

§ 10. Решение задачи с использованием обобщенного принципа Гаусса

Некоторые общие замечания. Система уравнений (8.3) описывает управляемое движение той механической системы, которая имеет нулевую собственную частоту и s различных ненулевых собственных частот. Необходимо только, чтобы управляющей силой возбуждались все собственные формы колебаний. Это, конечно, достаточно широкий класс механических систем, в который как классический пример входит и тележка с маятниками. Система (8.3) записана в главных координатах и в безразмерной форме, и потому имеет простой вид. Благодаря этой простоте выше на основе несложных выкладок было показано, что минимальность функционала (8.5) в соответствии с принципом максимума Понтрягина достигается при отыскании искомого управления в виде (9.1). Обобщенный принцип Гаусса, как и принцип максимума Понтрягина, никак, конечно, не связан с тем, в размерной или в безразмерной форме записаны уравнения движения и какие координаты используются — главные или обычные. Учитывая это, для простоты изложения обобщенный принцип Гаусса сформулируем применительно к системе уравнений (8.3), полагая, что в ней берутся обычные производные по времени t. Рассуждения будем проводить применительно к гашению колебаний тележки с двумя маятниками, на движение которой наложена связь восьмого порядка (9.5).

Уравнения движения тележки с двумя маятниками ($s = 2$) в главных координатах. Размерные дифференциальные уравнения движения тележки с двумя маятниками (см. рис. 12) согласно системе уравнений (8.1) при $s = 2$ имеют вид

$$\begin{gathered} M\ddot{x} - m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 = F\,, \quad M = m + m_1 + m_2\,, \\ \ddot{x} - l_1 \ddot{\varphi}_1 = \mathrm{g}\varphi_1\,, \quad \ddot{x} - l_2 \ddot{\varphi}_2 = \mathrm{g}\varphi_2\,. \end{gathered} \tag{10.1}$$

Напомним, что здесь первое уравнение Лагранжа второго рода отражает теорему о движении центра масс:

$$M\ddot{x}_c = F\,, \quad x_c = x - \frac{\sum_{\sigma=1}^{2} m_\sigma l_\sigma \varphi_\sigma}{M}\,. \tag{10.2}$$

Поэтому абсциссу центра масс x_c можно принять за одну из главных размерных координат рассматриваемой механической системы.

Выражая $\ddot{x}$ из первого уравнения системы (10.1) и подставляя во второе и третье, получим

$$\begin{aligned} l_1\ddot{\varphi}_1 + \mathrm{g}\varphi_1 &= \frac{F}{M} + \frac{m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1}{M} + \frac{m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2}{M}\,, \\ l_2\ddot{\varphi}_2 + \mathrm{g}\varphi_2 &= \frac{F}{M} + \frac{m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1}{M} + \frac{m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2}{M}\,. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Введя параметры

$$\alpha = \frac{l_2}{l_1}\,, \quad \beta = \frac{m_1}{M}\,, \quad \gamma = \frac{m_2}{M}\,, \quad \mathrm{k}^2 = \frac{\mathrm{g}}{l_1}\,,$$

систему (10.3) перепишем в виде

$$\begin{aligned} (1-\beta)\ddot{\varphi}_1 - \gamma\alpha\ddot{\varphi}_2 + \mathrm{k}^2\varphi_1 &= \frac{F}{Ml_1}\,, \\ -\beta\ddot{\varphi}_1 + \alpha(1-\gamma)\ddot{\varphi}_2 + \mathrm{k}^2\varphi_2 &= \frac{F}{Ml_1}\,. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Теперь систему (10.4) можно рассматривать как систему двух дифференциальных уравнений относительно неизвестных φ_1, φ_2, которую желательно записать в главных координатах.

Следуя теории, изложенной в главе VII первого тома учебника, полагаем в системе (10.4) $F = 0$ и ее частные решения будем искать в форме

$$\varphi_\sigma = B_\sigma \sin(\Omega t + \delta)\,, \quad \sigma = 1, 2\,,$$

где Ω — искомая размерная собственная частота. Из системы (10.4) следует, что постоянные B_1 и B_2 должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} (\mathrm{k}^2 - (1-\beta)\Omega^2)B_1 + \gamma\alpha\Omega^2 B_2 &= 0\,, \\ \beta\Omega^2 B_1 + (\mathrm{k}^2 - \alpha(1-\gamma)\Omega^2)B_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы и обозначая $\Omega^2 = \mathrm{k}^2\lambda^2$, придем к следующему уравнению относительно λ^2:

$$\alpha(1-\beta-\gamma)\lambda^4 - (1+\alpha-\beta-\alpha\gamma)\lambda^2 + 1 = 0\,. \tag{10.6}$$

Следовательно, искомые собственные частоты таковы:

$$\Omega_\nu^2 = \mathrm{k}^2\lambda_\nu^2\,, \quad \nu = 1,2\,,$$
$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1+\alpha-\beta-\alpha\gamma \mp \sqrt{(1+\alpha-\beta-\alpha\gamma)^2 - 4\alpha(1-\beta-\gamma)}}{2\alpha(1-\beta-\gamma)}\,. \tag{10.7}$$

Когда λ_ν^2 принимает значения (10.7), уравнения (10.5) оказываются линейно зависимыми, отбросим последнее из них. При каждом λ_ν^2, $\nu = 1,2$, получающиеся из первого уравнения произвольные постоянные $B_{\nu\sigma}$, $\sigma = 1,2$, будут пропорциональны алгебраическим дополнениям $\Delta_{\nu\sigma}$, $\nu,\sigma = 1,2$, элементов последней строки характеристического определителя системы (10.5). Поэтому они вычисляются по формулам

$$\Delta_{\nu 1} = -\alpha\gamma\lambda_\nu^2\,, \quad \Delta_{\nu 2} = 1-(1-\beta)\lambda_\nu^2\,, \qquad \nu = 1,2\,. \tag{10.8}$$

Согласно общей теории малых колебаний наличие собственных векторов, задаваемых выражениями (10.8), позволяет следующим образом связать координаты φ_1, φ_2 с главными координатами ξ_1, ξ_2:

$$\varphi_1 = \sum_{\nu=1}^{2}\Delta_{\nu 1}\xi_\nu\,, \quad \varphi_2 = \sum_{\nu=1}^{2}\Delta_{\nu 2}\xi_\nu\,. \tag{10.9}$$

Подставляя выражения (10.8) в первое уравнение системы (10.4), получаем

$$(1-\beta)\sum_{\nu=1}^{2}\Delta_{\nu 1}\ddot{\xi}_\nu - \alpha\gamma\sum_{\nu=1}^{2}\Delta_{\nu 2}\ddot{\xi}_\nu + \mathrm{k}^2\sum_{\nu=1}^{2}\Delta_{\nu 1}\xi_\nu = \frac{F}{Ml_1}\,.$$

Отсюда и из соотношений (10.7) и (10.8) следует, что

$$-\alpha\gamma\sum_{\nu=1}^{2}(\ddot{\xi}_\nu + \Omega_\nu^2\xi_\nu) = \frac{F}{Ml_1}\,. \tag{10.10}$$

Рассмотрим теперь второе уравнение системы (10.4). Чтобы из него получить уравнение, аналогичное по своей структуре уравнению (10.10), необходимо будет учесть, что из уравнения частот (10.6) вытекают следующие соотношения:

$$(1-(1-\beta)\lambda_\nu^2)(1-\alpha(1-\gamma)\lambda_\nu^2) = \alpha\beta\gamma\lambda_\nu^4\,, \quad \nu = 1,2\,.$$

Поэтому можем написать

$$\Delta_{\nu 2} = 1-(1-\beta)\lambda_\nu^2 = \frac{\alpha\beta\gamma\lambda_\nu^4}{1-\alpha(1-\gamma)\lambda_\nu^2}\,, \quad \nu = 1,2\,. \tag{10.11}$$

Используя формулы (10.11) при подстановке выражений (10.9) во второе уравнение системы (10.4), будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^{2} \frac{\alpha\beta\gamma\lambda_\nu^2}{1-\alpha(1-\gamma)\lambda_\nu^2}\,(\ddot{\xi}_\nu + \Omega_\nu^2\xi_\nu) = \frac{F}{Ml_1}\,. \tag{10.12}$$

Рассматривая теперь выражения (10.10) и (10.12) как систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $y = \ddot{\xi}_1 + \Omega_1^2\xi_1$, $z = \ddot{\xi}_2 + \Omega_2^2\xi_2$, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \Omega_1^2\xi_1 &= \frac{F(1+a_2)}{\alpha\gamma M l_1(a_1-a_2)}\,, \\ \ddot{\xi}_2 + \Omega_2^2\xi_2 &= \frac{F(1+a_1)}{\alpha\gamma M l_1(a_2-a_1)}\,, \end{aligned} \tag{10.13}$$

где

$$a_\nu = \frac{\beta\lambda_\nu^2}{1-\alpha(1-\gamma)\lambda_\nu^2}\,, \quad \nu = 1,2\,.$$

Таким образом, уравнение (10.2) и система (10.13) являются искомыми уравнениями в главных размерных координатах x_c, ξ_1 и ξ_2. Целесообразно перейти в них к безразмерной переменной $x_0 = x_c/l_1$ и к безразмерному времени $\tau = \Omega_1 t$, а также положить

$$x_1 = \frac{\alpha\gamma(a_1-a_2)}{1+a_2}\,\xi_1\,, \quad x_2 = \frac{\alpha\gamma(a_2-a_1)}{1+a_1}\,\xi_2\,.$$

В результате будем иметь

$$\begin{cases} x_0'' = u\,, \\ x_\sigma'' + \omega_\sigma^2 x_\sigma = u\,, \quad \sigma = 1,2\,. \end{cases} \tag{10.14}$$

Здесь штрихи соответствуют производным по безразмерному времени τ и

$$u = \frac{F}{Mg\lambda_1^2}\,, \quad \omega_\sigma = \frac{\Omega_\sigma}{\Omega_1}\,, \quad \sigma = 1,2\,.$$

Таким образом, построенная система дифференциальных уравнений (10.14) в безразмерных главных координатах является частным случаем системы уравнений (8.3) при $s = 2$.

Система (10.14) должна интегрироваться при граничных условиях

$$\begin{gathered} x_0(0) = x_0'(0) = 0\,, \quad x_\sigma(0) = x_\sigma'(0) = 0\,, \quad \sigma = 1,2, \quad T = \Omega_1\,\widetilde{T}\,, \\ x_0(T) = a \equiv \frac{S}{l_1}\,, \quad x_0'(T) = 0\,, \quad x_\sigma(T) = x_\sigma'(T) = 0\,. \end{gathered} \tag{10.15}$$

В главе V с помощью применения принципа максимума Понтрягина было получено безразмерное управление u, записанное выше в виде формулы (9.1). Подставив управление (9.1) в интегралы Дюамеля (5.10) главы V (напомним, что $s = 2$), из удовлетворения граничным условиям (10.15) при $\tau = T$ получим шесть линейных алгебраических неоднородных уравнений для нахождения коэффициентов C_σ, $\sigma = \overline{1,6}$.

Нахождение управления с помощью использования обобщенного принципа Гаусса. Как мы видели в главе VI первого тома учебника, при использовании понятия касательного пространства к многообразию всех положений механической системы, которые она может иметь в данный момент времени, уравнения Лагранжа второго рода можно представить в виде одного векторного уравнения

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}\,, \tag{10.16}$$

где в случае тележки с двумя маятниками

$$M\mathbf{W} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} a_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\,\tau}\,\mathbf{e}^{\sigma}\,, \quad \mathbf{Y} = -\sum_{\sigma,\tau=1}^{3} c_{\sigma\tau}\,q^{\tau}\,\mathbf{e}^{\sigma}\,, \quad \mathbf{R} = \sum_{\sigma=1}^{3} R_\sigma\,\mathbf{e}^{\sigma}\,,$$
$$q^1 = \varphi_1\,, \quad q^2 = \varphi_2\,, \quad q^3 = x\,,$$

а $\mathbf{e}^\sigma$, $\sigma = \overline{1,3}$, являются векторами взаимного базиса, введенными в касательном пространстве. Отметим, что искомое управление u, удовлетворяющее программе движения, заданной в виде дифференциального уравнения (9.5), можно рассматривать как реакцию линейной неголономной связи восьмого порядка. Поэтому в уравнении (10.16) вектор, соответствующий наличию управления u, обозначен буквой $\mathbf{R}$, которая используется обычно в неголономной механике для обозначения вектора реакции связи. Обратим особое внимание на то, что применительно к нашей задаче управляемого движения его можно представить в виде

$$\mathbf{R} = u(t)\,\mathbf{b}\,, \quad \mathbf{b} = \sum_{\sigma=1}^{3} b_\sigma\,\mathbf{e}^{\sigma}\,,$$

где коэффициенты (b_1, b_2, b_3) задаются технической реализацией конкретного устройства, создающего реальную управляющую силу.

Обобщенный принцип Гаусса при наличии связи восьмого порядка утверждает, что

$$\delta^{(8)}\left(M\,\frac{d^6\mathbf{W}}{dt^6} - \frac{d^6\mathbf{Y}}{dt^6}\right)^2 = 0\,. \tag{10.17}$$

Здесь символ $\delta^{(8)}$ означает, что варьируются лишь восьмые производные от обобщенных координат. Согласно принципу (10.17) линейная связь восьмого порядка (9.5) является идеальной (можно говорить, что в этом случае и отыскиваемое управление можно назвать идеальным), если ее «реакция» $\overrightarrow{\mathfrak{R}} \equiv \mathbf{R}_{(6)}$ оказывается минимальной, то есть если минимальной оказывается величина

$$(\overrightarrow{\mathfrak{R}})^2 \equiv \left(\mathbf{R}_{(6)}\right)^2 = \left(M\,\frac{d^6\mathbf{W}}{dt^6} - \frac{d^6\mathbf{Y}}{dt^6}\right)^2 . \tag{10.18}$$

Из всех возможных линейных неголономных связей восьмого порядка выделим такое подмножество, для элементов которого величина $(\overrightarrow{\mathfrak{R}})^2 \equiv \left(\mathbf{R}_{(6)}\right)^2$ равна своей нижней границе, равной нулю. Всем этим элементам, как это следует из выражения (10.18), соответствует единственное уравнение

$$\frac{d^6u}{dt^6} = 0\,,$$

общее решение которого имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{6} C_k t^{k-1}\,. \tag{10.19}$$

В отличие от управления, задаваемого формулой (5.12) главы V, управление, отыскиваемое в виде полинома (10.19), не будет иметь осцилляций, соответствующих собственным частотам системы. Найденная функция будет достаточно гладкой, в чем состоит ее безусловное преимущество[30].

Анализ численных расчетов. Проведем три расчета рассматриваемой механической системы, соответствующих трем временам движения (5.11) главы V. Значения произвольных постоянных в управлении (10.19) при каждом конкретном значении безразмерного времени движения T находятся совершенно аналогично тому, как это делалось при определении произвольных постоянных для решения, полученного ранее при использовании принципа максимума Понтрягина. В результате для найденного с

[30]Отметим, что с помощью другого подхода управление в виде полинома было получено в работах: *Костин Г. В., Саурин В. В.* Интегродифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости // Доклады Академии наук. 2005. Т. 404. № 5. С. 535–538; *Они же.* Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // Доклады академии наук. 2006. Т. 408. № 6. С. 750–753.

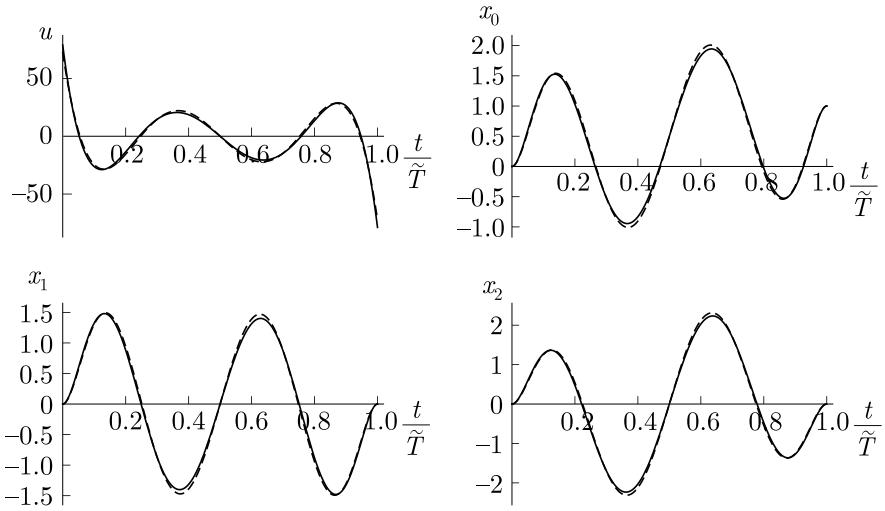

Рис. 13. Кратковременное движение механической системы, $T = T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$

помощью обобщенного принципа Гаусса управления (10.19) получим значения:

$$T = T_2 \ :$$
$$C_1 = 78.876\,, \quad C_2 = -693.61\,, \quad C_3 = 1492.85\,,$$
$$C_4 = -1248.86\,, \quad C_5 = 445.03\,, \quad C_6 = -56.663\,;$$
$$T = 8\,T_2 \ :$$
$$C_1 = 0.00002\,, \quad C_2 = 0.00254\,, \quad C_3 = 0.00004\,,$$
$$C_4 = -0.00005\,, \quad C_5 = 0\,, \quad C_6 = 0\,;$$
$$T = 16\,T_2 \ :$$
$$C_1 = 0\,, \quad C_2 = 0.00034\,, \quad C_3 = 0\,,$$
$$C_4 = 0\,, \quad C_5 = 0\,, \quad C_6 = 0\,.$$

На рисунках 13–15 графически представлены результаты расчетов, полученных при использовании двух различных принципов. Как и в главе V, принималось, что $T_2 = 0.5\,T_1$ и учитывалось, что $\omega_1 = 1$. Решения, полученные с помощью принципа максимума Понтрягина (см. рис. 3–4 главы V), повторены на рисунках штрихованными кривыми, а решениям, полученным с привлечением обобщенного принципа Гаусса, соответствуют сплошные линии.

Из сравнения этих случаев движения видно, что при кратковременном движении (при времени перемещения тележки, близком к периоду второй формы колебаний, см. рис. 13) решения, полученные по обоим методам,

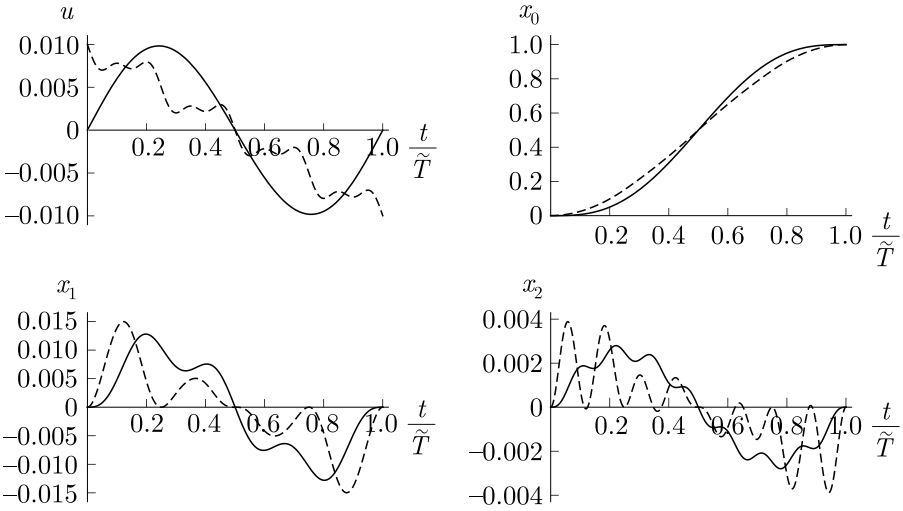

Рис. 14. Кратковременное движение механической системы, $T = 8\,T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$

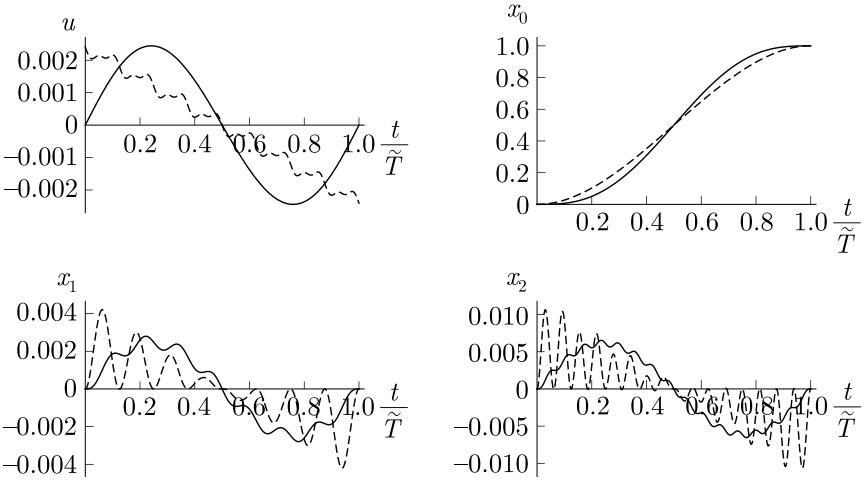

Рис. 15. Длительное движение механической системы, $T = 16\,T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$

практически совпадают (что можно рассматривать как доброкачественность предлагаемого нового метода расчета), а при увеличении времени движения они начинают заметно различаться. Это различие можно объяснить тем, что управление, полученное с помощью использования принципа максимума Понтрягина, как отмечалось выше, содержит гармоники с собственными частотами системы, что вводит систему в резонанс. В то же время управление, созданное с применением обобщенного принципа Гаусса, задается полиномом, что обеспечивает сравнительно плавное движение системы.

Интересно обратить внимание еще на одно обстоятельство — применение принципа максимума Понтрягина всегда создает скачки управляющей силы в начале и в конце движения. Если же используется обобщенный принцип Гаусса, то при длительном времени движения подобные скачки исчезают. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли удалить скачки управления и при кратковременном движении системы. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

§ 11. Расширенная (обобщенная) краевая задача

В данном параграфе нашей целью является устранение скачков управляющей силы в начале и в конце движения, полученных при использовании обобщенного принципа Гаусса в случае исследования кратковременного движения механической системы (см. рис. 13). Для этого дополнительно к краевым условиям (8.2) достаточно потребовать выполнения и условий

$$\ddot{x}(0) = 0\,, \quad \ddot{x}(\widetilde{T}) = 0\,. \tag{11.1}$$

Из уравнений (8.1) и граничных условий (8.2) следует, что при выполнении (11.1) в начале и в конце пути ускорения у всех точек системы будут равны нулю. В главных координатах к граничным условиям (8.4) добавятся краевые условия

$$\ddot{x}_0(0) = 0\,, \quad \ddot{x}_0(T) = 0\,. \tag{11.2}$$

Таким образом, теперь уравнения (8.3) должны решаться при выполнении граничных условий (8.4) и (11.2). Добавление граничных условий (11.2) отличает сформулированную в этом параграфе задачу от первоначально поставленной классической краевой задачи (8.3), (8.4), поэтому задачу (8.3), (8.4), (11.2) будем называть *расширенной (обобщенной) краевой задачей.*

Для решения такой задачи воспользуемся обобщенным принципом Гаусса, порядок которого увеличим на две единицы по отношению к прин-

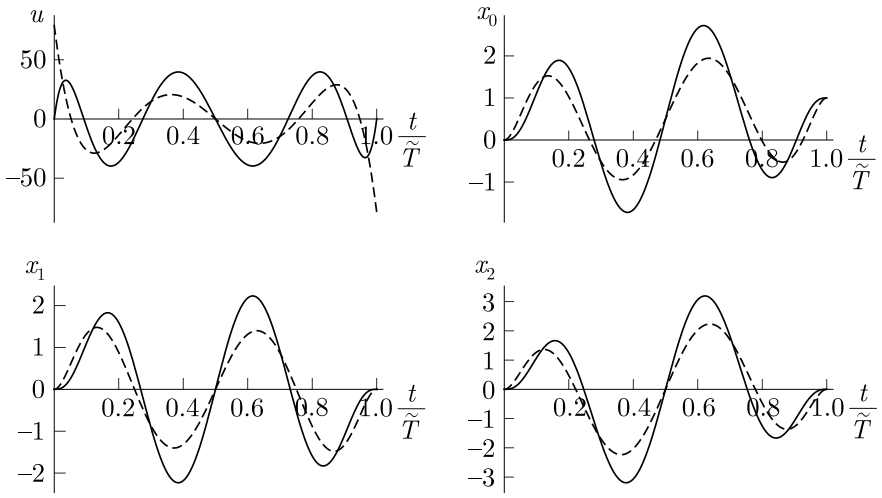

Рис. 16. Кратковременное движение без скачков управляющей силы, $T = T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$

ципу, использованному в предыдущем параграфе. Тогда будет отыскиваться минимум выражения

$$(\overrightarrow{\mathfrak{R}})^2 \equiv \left(\mathbf{R}_{(8)}\right)^2 = \left(M\,\frac{d^8\mathbf{W}}{dt^8} - \frac{d^8\mathbf{Y}}{dt^8}\right)^2, \tag{11.3}$$

и, в свою очередь, минимум выражения (11.3), равный нулю, достигается при выполнении дифференциального уравнения

$$\frac{d^8u}{dt^8} = 0\,.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{8} C_k t^{k-1}\,. \tag{11.4}$$

Значения произвольных постоянных C_k, $k = \overline{1,8}$, получим из удовлетворения граничных условий при $\tau = T$ и при выполнении $\ddot{x}_0(0) = 0$. При этом легко заметить, что $C_1 = 0$, так как в силу первого уравнения в (8.3) и дополнительного граничного условия $\ddot{x}_0(0) = 0$ получаем, что $u(0) = 0$. Поэтому вместо (11.4) имеем

$$u(t) = \sum_{k=2}^{8} C_k t^{k-1}\,,$$

и для нахождения имеющихся здесь неизвестных коэффициентов достаточно выполнить лишь граничные условия при $\tau = T$.

После взятия интегралов и решения линейной алгебраической неоднородной системы уравнений седьмого порядка, получим следующие численные значения:

$$\begin{gathered} T = T_2 \ : \\ C_1 = 0\,, \quad C_2 = 669.77\,, \quad C_3 = -4266.12\,, \\ C_4 = 8837.38\,, \quad C_5 = -8337.44\,, \quad C_6 = 3958.27\,, \\ C_7 = -922.054\,, \quad C_8 = 83.8568\,. \end{gathered} \tag{11.5}$$

Вычисляя частное решение системы дифференциальных уравнений (8.3) при $s = 2$, соответствующее нулевым начальным условиям, в виде интегралов Дюамеля при значениях (11.5), получим графики, представленные на рис. 16. Как видно из графика безразмерного управления, действительно удалось устранить скачки управляющей силы в начале и в конце движения системы.

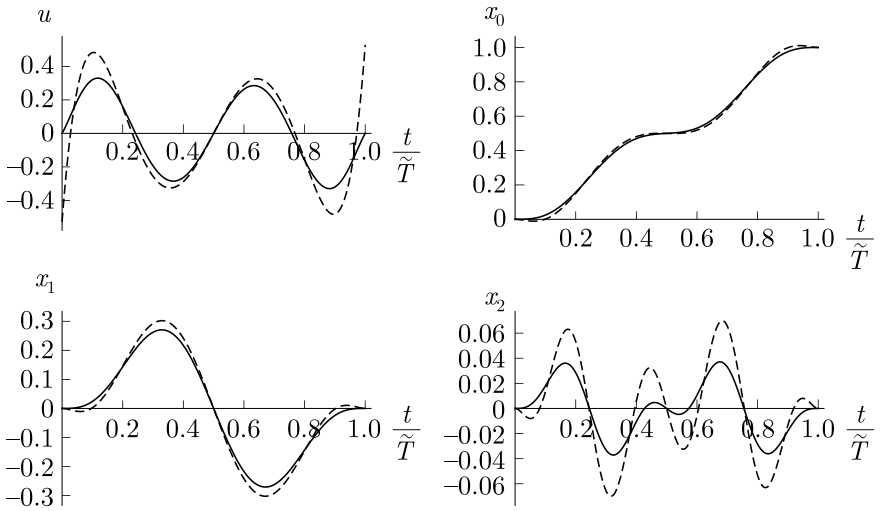

Рис. 17. Сравнение решений по Гауссу, соответствующих расширенной и обычной краевым задачам, при $T = 4\,T_2$, $T_2 = 0.25\,T_1$

Интересно еще сравнить между собой результаты, полученные с помощью применения обобщенного принципа Гаусса для расширенной краевой задачи и для исходно поставленной классической краевой задачи. Результаты таких расчетов для различных соотношений параметров представлены на рисунках 17, 18, 19, 20 сплошными кривыми при решении обобщен-

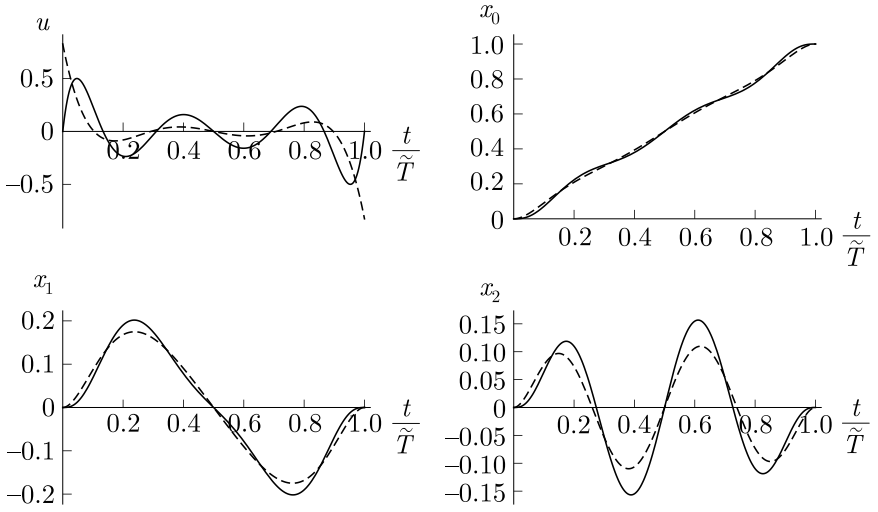

Рис. 18. Сравнение решений по Гауссу, соответствующих расширенной и обычной краевым задачам, при $T = 2\,T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$

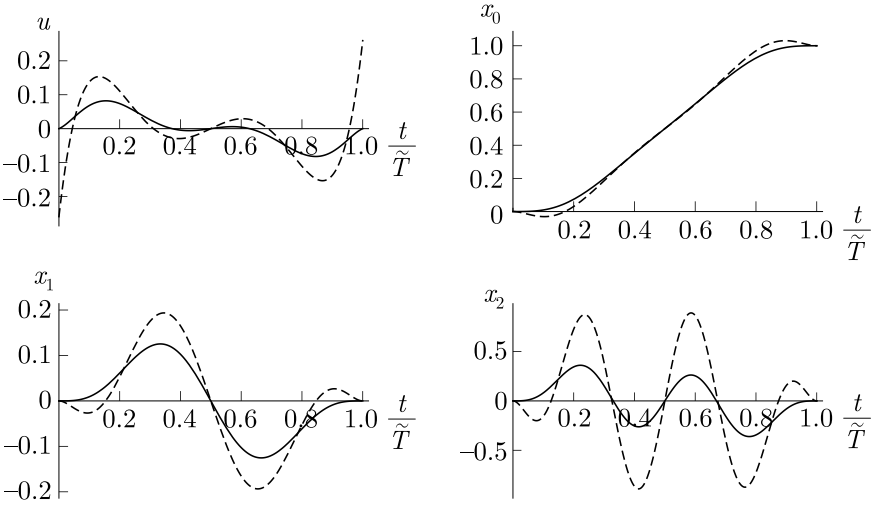

Рис. 19. Сравнение решений по Гауссу, соответствующих расширенной и обычной краевым задачам, при $T = 3\,T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$

ных задач. Штриховыми линиями на них изображены кривые, соответствующие применению также обобщенного принципа Гаусса, но для обычной нерасширенной краевой задачи. Отметим, что если решение обычной краевой задачи дает почти нулевые значения управления в начале и в конце движения, то расширять её нет необходимости (см. рис. 20).

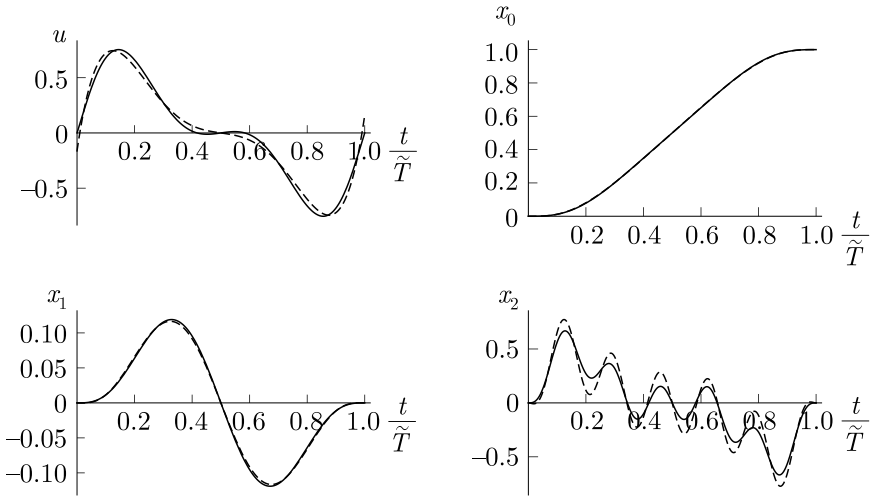

Рис. 20. Сравнение решений по Гауссу, соответствующих расширенной и обычной краевым задачам, при $T = 6\,T_2$, $T_2 = 0.25\,T_1$

Важно подчеркнуть, что решить сформулированную в этом параграфе расширенную (обобщенную) краевую задачу с помощью применения принципа максимума Понтрягина невозможно, так как полученное с его помощью управление будет содержать количество неизвестных произвольных постоянных, недостаточное для удовлетворения всех поставленных граничных условий. В отличие от этого применить к сформулированной расширенной краевой задаче обобщенный принцип Гаусса, как мы видели, можно, увеличив его порядок на две единицы.

Таким образом, основное качественное отличие нового подхода к задаче о гашении колебаний заключается в том, что он позволяет построить решение, при котором отсутствуют скачки управляющей силы и в начале, и в конце движения механической системы.

§ 12. Особые точки решения задачи

Как указывалось неоднократно, применение принципа максимума Понтрягина к исследованию гашения колебаний всегда находит управляющую силу, имеющую скачки в начале и в конце движения. Применение с этой же целью (отыскания управляющей силы) обобщенного принципа Гаусса создает подобные скачки лишь при кратковременном движении системы. С увеличением времени движения эти скачки уменьшаются и затем исчезают. Эти результаты подтверждаются графиками на рис. 13–15. В § 11

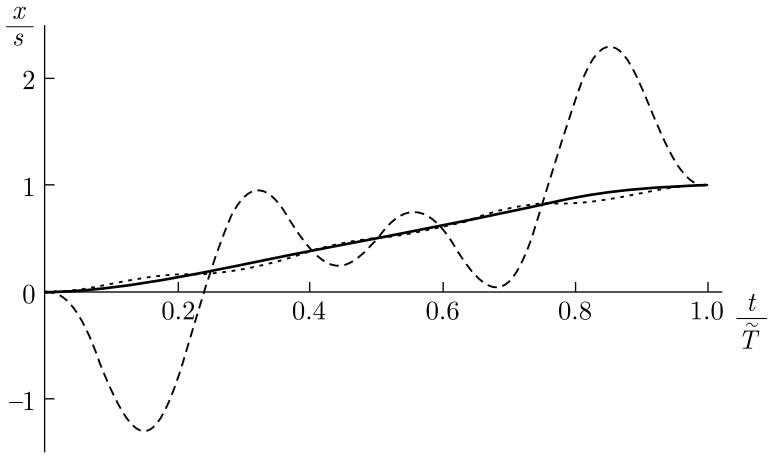

Рис. 21. Сравнение решений по Гауссу, соответствующих заданию различных краевых задач, $T = 4.02\,\pi$, $\omega_2 = 1.734\,\omega_1$

благодаря постановке и решению расширенной краевой задачи удалось построить с помощью обобщенного принципа Гаусса повышенного порядка управление без скачков (рис. 16–20).

Таким образом, применение обобщенного принципа Гаусса оказывается весьма эффективным. Однако формулировка и решение расширенной краевой задачи не всегда оказывается полезной. Дело в том, что, как показывают расчеты, результаты движения механической системы под действием управления, полученного в результате решения обобщенной краевой задачи, существенно зависят от безразмерного параметра $K = T/T_1$. Оказывается[31], что существует счетное множество таких значений параметра K, при приближении к которым в системе развиваются интенсивные колебания. Эти значения K были названы *особыми точками* решений расширенных краевых задач.

В качестве примера рассмотрим гашение колебаний тележки с двумя маятниками при следующих значениях безразмерных параметров:

$$\begin{gathered} l_2/l_1 = 1/5\,, \quad m_1/M = 2/3\,, \quad m_2/M = 1/12\,, \\ \omega_2 \equiv \Omega_2/\Omega_1 = 1.734\,, \quad T = 4.02\,\pi\,. \end{gathered} \tag{12.1}$$

Движение тележки, измеренное в долях S, полученное с помощью обобщенного принципа Гаусса в случае решения обыкновенной краевой задачи, представлено на рис. 21 плавной сплошной линией. В то же время в результате решения задачи при тех же параметрах (12.1) в случае

[31] См. статью: *Зегжда С. А., Гаврилов Д. Н.* Гашение колебаний упругого тела при его перемещении // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3. С. 73–83.

постановки расширенной краевой задачи получаем движение тележки, представленное на рис. 21 штриховой линией. Как мы видим, в этом случае, хотя и достигается поставленная задача о гашении колебаний, но при этом в системе развиваются интенсивные колебания тележки с большими размахами. Такое неожиданное поведение тележки объясняется тем, что принятым значениям параметров (12.1) соответствует значение $K = 2.01$, близкое к величине первой особой точки, равной $K = 2.01265$.

§ 13. Построение аналитического решения задачи, не содержащего особых точек

Определить управление движением тележки, которое является аналитической функцией времени при всех значениях параметра K, предлагается следующим образом.

Ставится, как и ранее, расширенная краевая задача (назовем ее *расширенной краевой задачей первого порядка*), получаемое в результате решение обозначим через $u_1(\tau)$.

Наряду с этой задачей ставится еще более сложная расширенная задача (назовем ее *расширенной краевой задачей второго порядка*), в которой дополнительно задается, что у тележки в начале и в конце пути производная и от ускорения по времени равна нулю. Решение этой задачи обозначим через $u_2(\tau)$. Это новое решение также будет иметь особые значения параметра K, но они будут отличны от особых значений предыдущего решения. Тогда при любых значениях параметра μ функция

$$u(\tau) = u_1(\tau) + \mu(u_2(\tau) - u_1(\tau)) \tag{13.1}$$

будет решением рассматриваемой задачи. Избежать вычисления особых значений решений u_1 и u_2 и построить аналитическое решение, непрерывно зависящее от параметра K, позволяет определение параметра μ из условия минимальности интеграла от квадрата функции $u(\tau)$ за время перемещения T. Это решение соответствует следующему значению параметра μ:

$$\mu = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_3 - 2J_2}\,,$$

где

$$J_1 = \int_0^T u_1^2(\tau)\,d\tau\,, \quad J_2 = \int_0^T u_1(\tau)u_2(\tau)\,d\tau\,, \quad J_3 = \int_0^T u_2^2(\tau)\,d\tau\,.$$

Предложенный подход будет использован при расчетах в следующем параграфе.

Как развитие предложенного метода можно было бы строить и решение $u_3(\tau)$ *расширенной краевой задачи третьего порядка*, в которой добавляются требования обращения в нули четвертых производных от координаты тележки в начале и в конце пути. По аналогии с формулой (13.1) управление будет находиться в виде

$$u(\tau) = u_2(\tau) + \mu(u_3(\tau) - u_2(\tau))\,, \tag{13.2}$$

где новое значение μ можно опять найти из минимизации интеграла от квадрата выражения (13.2).

Замечание. Управление без особых точек можно получить, применяя вместо обобщенного принципа Гаусса обобщенный принцип Гамильтона — Остроградского[32]. Тогда управление будет строиться с помощью базисных функций. И в этом случае оно окажется полиномом по времени, но порядок полинома будет равен $4s + 3$.

§ 14. Другой подход к задаче о гашении колебаний тележки с двумя маятниками

Уравнения движения при другом подходе к задаче о гашении колебаний тележки с двумя маятниками. В исследованной задаче о гашении колебаний тележки с маятниками искомой управляющей силой являлась горизонтальная сила, приложенная к тележке. Рассмотренное выше решение предполагало необходимость нахождения собственных частот и собственных форм колебаний, чтобы осуществить переход к главным координатам и записать систему в виде системы (10.14).

Предложим новый, более простой подход к решению задачи, который позволяет избежать определения собственных частот и собственных форм колебаний данной механической системы. Обратим внимание на то, что эти частоты и формы существенно зависят от массы тележки, в то время как сама проблема о гашении колебаний маятников зависит только от того, насколько целесообразно выбран закон перемещения тележки. Учитывая это важное обстоятельство, первоначально будем искать как функцию времени не силу F, которая приложена к тележке, а ускорение тележки $\ddot{x}$, при котором она за заданное время $\widetilde{T}$ переместится на заданное расстояние S при отсутствии скоростей и ускорений у тележки и у маятников в начале и в конце пути.

[32] См. работу: *Зегжда С. А., Товстик П. Е., Юшков М. П.* Обобщенный принцип Гамильтона — Остроградского и его применение для гашения колебаний // Доклады РАН. 2012. Т. 447. № 3. С. 280–283.

При такой постановке задачи вместо системы дифференциальных уравнений (10.14) естественным образом записываем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= U\,, \\ l_1\ddot{\varphi}_1 + \mathrm{g}\varphi_1 &= U\,, \\ l_2\ddot{\varphi}_2 + \mathrm{g}\varphi_2 &= U\,, \end{aligned} \tag{14.1}$$

где через U обозначено искомое размерное ускорение тележки. Интересно, что полученная система является системой независимых уравнений, то есть смещение тележки и углы поворотов маятников оказались главными координатами.

Если теперь ввести безразмерные координаты, управление и время по формулам

$$\bar{x}_0 = \frac{x}{l_1}\,, \quad \bar{x}_1 = \varphi_1\,, \quad \bar{x}_2 = \alpha\varphi_2\,, \quad \bar{u} = \frac{\ddot{x}}{\mathrm{g}}\,, \quad \bar{\tau} = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{l_1}}\,t\,,$$

то система уравнений (14.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_0'' &= \bar{u}\,, \\ \bar{x}_1'' + \bar{x}_1 &= \bar{u}\,, \\ \bar{x}_2'' + \frac{1}{\alpha}\,\bar{x}_2 &= \bar{u}\,, \end{aligned} \tag{14.2}$$

где штрихами обозначены производные по безразмерному времени $\bar{\tau}$, а $\bar{u}$ является искомым безразмерным ускорением тележки в долях g, отыскиваемом при новом подходе.

Полученная система (14.2) практически не отличается от системы (10.14). Это позволяет по разработанной выше процедуре на основе обобщенного принципа Гаусса определить искомое ускорение тележки и движение маятников. После этого, зная движение тележки и маятников, легко определим и искомую управляющую силу. Размерная горизонтальная управляющая сила F_N, получаемая по предложенному новому подходу, будет вычисляться по формуле

$$F_N = M\mathrm{g}\bar{u} - m_1\mathrm{g}\bar{x}_1'' - m_2\mathrm{g}\bar{x}_2''\,,$$

а соответствующее ей новое безразмерное управление u_N, выраженное в долях $M\mathrm{g}$, запишется в виде

$$u_N \equiv \frac{F_N}{M\mathrm{g}} = \bar{u}\,(1-\beta-\gamma) + \beta\,\bar{x}_1 + \frac{\gamma}{\alpha}\,\bar{x}_2\,.$$

Результаты численных расчетов гашения. Результаты численных расчетов, полученные по старому и по новому подходам для движения тележки с маятниками, сравнивались между собой, при этом использовалась формула (13.1). Вычислялись как функции времени управляющая сила F и углы поворотов маятников. Сила выражалась в долях $M\mathrm{g}$, где M — масса всей системы, а углы поворотов φ_1 и φ_2 — в градусах. Как отмечалось выше, данные функции, определенные как функции безразмерного времени $\tau = t/\widetilde{T}$, существенно зависят от параметра K, равного отношению безразмерного времени перемещения T к периоду T_1 первой формы колебаний механической системы. Интересным является случай, когда величина K находится в промежутке от единицы до двух[33]. Учитывая это, при расчетах полагалось, что K=1.54.

Так как отыскиваемые функции пропорциональны перемещению тележки S за время $\widetilde{T}$, то данное перемещение, заданное в долях длины первого наиболее длинного маятника, выбиралось так, чтобы углы поворота маятников были не больше десяти градусов. На рисунках 22–27 сплошные линии соответствуют результатам, полученным по новому подходу, а пунктирные — по старому.

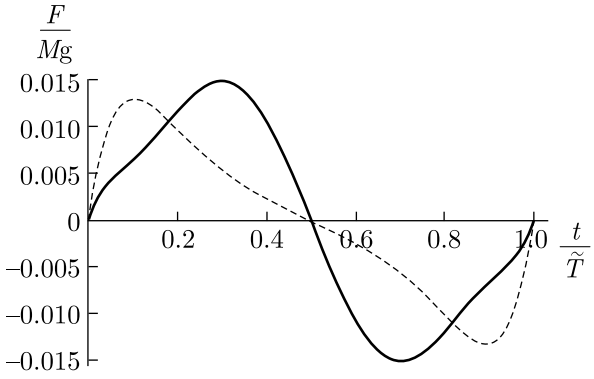

Рис. 22. Управляющая сила для тележки с одним маятником

Рисунки 22 и 23 соответствуют расчету, когда на тележке укреплен один маятник, при этом выбирались следующие параметры системы:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{1}{2}\,, \quad K = 1.54\,, \quad S = \frac{l}{5}\,.$$

[33]См. ссылку в § 12.

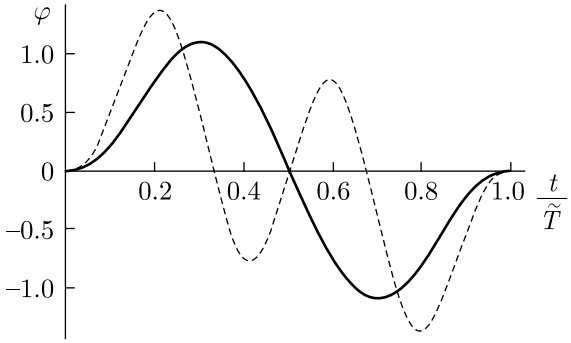

Рис. 23. Колебания маятника на тележке

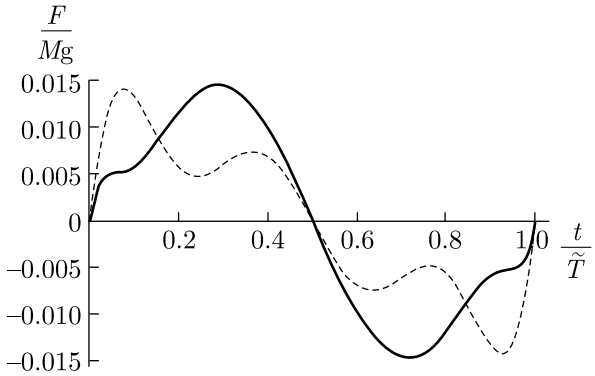

Рис. 24. Управляющая сила для тележки с двумя маятниками (случай $m_2/m_1 = 1/8$)

Рисунки 24–27 соответствуют движению тележки с двумя маятниками. В этом случае имеем четыре независимых параметра: K, отношения массы тележки m к массе m_1 первого маятника и к массе m_2 второго маятника, а также отношение длины l_2 второго маятника к длине l_1 первого. Рисунки 24–26 соответствуют параметрам системы

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{4}\,, \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{8}\,, \quad \frac{m}{m_1} = \frac{1}{2}\,, \quad K = 1.54\,, \quad S = \frac{l_1}{5}\,,$$

а для рисунка 27 принято

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{64}\,.$$

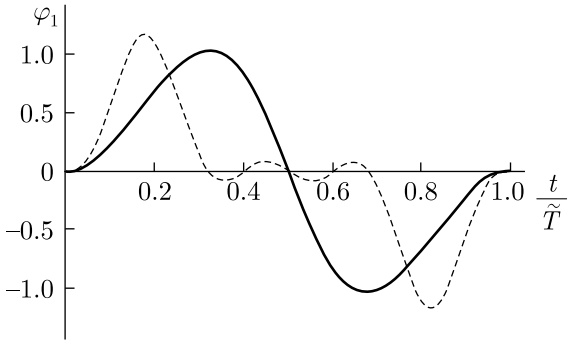

Рис. 25. Колебания первого маятника

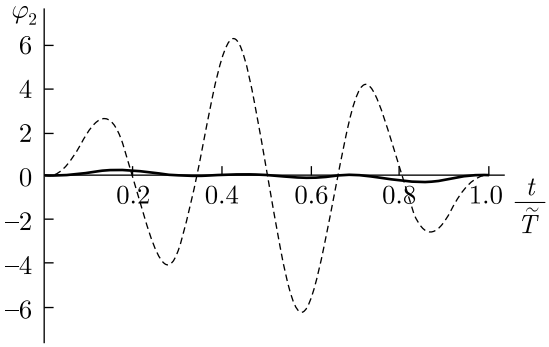

Рис. 26. Колебания второго маятника

Расчеты, как и следовало ожидать, показали, что чем больше масса тележки по отношению к массе маятников, тем ближе результаты, полученные по первому и по второму подходам. Поэтому полагалось, что масса тележки в два раза меньше массы первого основного маятника. Длина же второго маятника и его масса по отношению к первому принимались меньшими соответственно в четыре и в восемь раз. Перемещение тележки равно $0.2\,l_1$, где l_1 — длина основного маятника. Видим, что применение нового подхода дает уменьшение колебаний маятников и по амплитуде, и по частоте. Из сравнения рисунков 24 и 22 следует, что при новом подходе добавление второго маятника незначительно повлияло на управляющую силу, в то время как при обычном подходе она существенно изменилась.

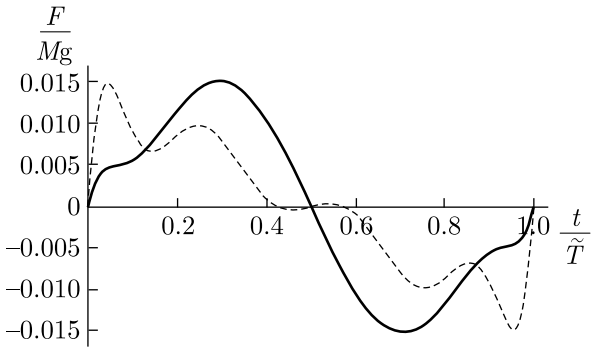

Рис. 27. Управляющая сила для тележки с двумя маятниками (случай $m_2/m_1 = 1/64$)

Интересным является и следующий результат: пусть в задаче с двумя маятниками масса второго меньше первого не в восемь, а в шестьдесят четыре раза. Сравнивая рисунки 27 и 24, видим, что при новом подходе такое существенное уменьшение массы второго маятника мало повлияло на управляющую силу, в то время как при обычном подходе она изменилась заметно.

§ 15. Гашение горизонтальных колебаний трехмассовой системы с пружинами[34]

Постановка задачи. Уравнения движения.

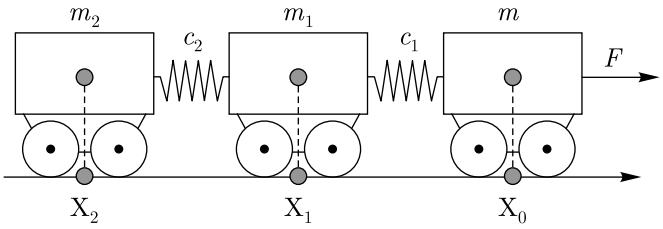

Рис. 28. Трехмассовая система с пружинами

Пусть имеется механическая система, состоящая из трех тележек массами m, m_1 и m_2 (см. рис. 28). Тележки с массами m и m_1 соединены

[34]Текст параграфа отражает содержание статьи: *Фазлыева К. М., Шугайло Т. С.* Управление гашением колебаний трехмассовой системы при горизонтальном движении // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2018–2019 гг. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2019. С. 55–66. Обозначения, принятые в этой статье, использованы при изложении § 15.

пружиной жесткости c_1, тележки с массами m_1 и m_2 — пружиной жесткости c_2. За заданное время $\widetilde{T}$ требуется переместить механическую систему из состояния покоя на расстояние S в новое состояние покоя за счет выбора управляющей силы F, приложенной к первой тележке. В этом случае условия на концах движения примут вид

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}_0(0) = 0\,, \quad \mathrm{X}_1(0) = 0\,, \quad \mathrm{X}_2(0) = 0\,, \\ &\dot{\mathrm{X}}_0(0) = 0\,, \quad \dot{\mathrm{X}}_1(0) = 0\,, \quad \dot{\mathrm{X}}_2(0) = 0\,, \\ &\mathrm{X}_0(\widetilde{T}) = S\,, \quad \mathrm{X}_1(\widetilde{T}) = S\,, \quad \mathrm{X}_2(\widetilde{T}) = S\,, \\ &\dot{\mathrm{X}}_0(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \dot{\mathrm{X}}_1(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \dot{\mathrm{X}}_2(\widetilde{T}) = 0\,. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Здесь X_0 — перемещение первой тележки, X_1 — второй, X_2 — третьей.

В принятых обобщенных координатах уравнения Лагранжа второго рода для нашей системы имеют вид

$$\begin{cases} m\,\ddot{\mathrm{X}}_0 + c_1(\mathrm{X}_0 - \mathrm{X}_1) = \mathrm{F}\,, \\ m_1\,\ddot{\mathrm{X}}_1 + c_1(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_0) + c_2(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2) = 0\,. \\ m_2\,\ddot{\mathrm{X}}_2 + c_2(\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1) = 0\,. \end{cases} \tag{15.2}$$

Уравнения движения в главных координатах. Пользуясь теорией малых колебаний, перепишем уравнения движения в нормальных координатах, не выделяя заранее абсциссу центра масс в качестве одной из главных координат. Для удобства дальнейшего изложения перепишем систему (15.2) в матричном виде:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{Y}\,,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_0 \\ \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{F} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные частоты системы обозначим через Ω_i, а собственные формы колебаний соответственно как $\mathbf{U}_i$. При этом Ω_i являются корнями характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{C} - \Omega^2\mathbf{A}) = 0\,,$$

которое дает нулевую частоту $\Omega_0 = 0$ и две ненулевые частоты Ω_1 и Ω_2. В свою очередь собственные формы можно записать в виде

$$\mathbf{U}_i = \left(\begin{array}{c} S \\ \frac{(c_1 - \Omega_i^2 m)S}{c_1} \\ \left| \begin{array}{cc} c_1 - \Omega_i^2 m & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - \Omega_i^2 m_1 \end{array} \right| \frac{S}{c_1 c_2} \end{array} \right).$$

Для представления уравнений движения в главных безразмерных координатах введем замену переменных

$$\mathbf{X} = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{U}_i \frac{S^2 M}{\mathbf{U}_i^T \mathbf{A} \mathbf{U}_i} x_i \,, \tag{15.3}$$

в результате чего уравнения движения (15.2) запишутся в виде

$$\ddot{x}_i + \Omega_i^2 x_i = \frac{\mathrm{F}}{SM} \,, \quad i = \overline{0,2} \,, \quad M = m + m_1 + m_2 \,.$$

Введем безразмерное время τ по формуле

$$\tau = \Omega_1 t \,, \quad T = \Omega_1 \widetilde{T} \,,$$

в результате чего безразмерные уравнения движения примут окончательный вид:

$$\begin{cases} x_0'' \ = u \,, \\ x_1'' \ + \ x_1 = u \,, \\ x_2'' \ + \ \omega_2^2 \, x_2 = u \,. \end{cases} \tag{15.4}$$

Здесь $u = \frac{\mathrm{F}}{SM\Omega_1^2}$ — безразмерное управление, $\omega_i^2 = \frac{\Omega_i^2}{\Omega_1^2}$, $i = \overline{0,2}$, $\Omega_0 = 0$. В уравнениях штрих указывает на дифференцирование по безразмерному времени τ.

Граничные условия (15.1) в безразмерных переменных примут вид

$$\begin{array}{lll} x_0(0) = 0 \,, & x_1(0) = 0 \,, & x_2(0) = 0 \,, \\ x_0'(0) = 0 \,, & x_1'(0) = 0 \,, & x_2'(0) = 0 \,, \\ x_0(T) = 1 \,, & x_1(T) = 0 \,, & x_2(T) = 0 \,, \\ x_0'(T) = 0 \,, & x_1'(T) = 0 \,, & x_2'(T) = 0 \,. \end{array} \tag{15.5}$$

Решение задачи с помощью принципа максимума Понтрягина. В системе уравнений (15.4) x_0, x_1, x_2, u являются неизвестными функциями времени, но самих уравнений всего три, следовательно, система

(15.4) является недоопределенной. Поэтому к рассматриваемой системе следует добавить еще одно условие, которое будет выражать критерий, положенный в основу выбора управляющего усилия из всех возможных вариантов, при которых система уравнений (15.4) имеет решение.

Критерии выбора u могут быть самыми разнообразными и чаще всего они зависят от утилитарных предпочтений при решении поставленной задачи. Например, потребуем, как и в предыдущих параграфах, минимальность функционала

$$J = \int_0^T u^2(\tau)d\tau\,. \tag{15.6}$$

Минимизировать поставленный функционал (15.6) сформулированной краевой задачи (15.4)–(15.6) будем одним из классических для теории управления методов — с помощью использования принципа максимума Понтрягина.

Согласно общей теории, изложенной в § 2 главы V, уравнения (15.4) следует записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$z_k' = f_k\,, \quad k = \overline{1,6}\,,$$

$$f_1 = z_2\,, \quad f_2 = u\,, \quad f_3 = z_4\,, \quad f_4 = u - z_3\,, \quad f_5 = z_6\,, \quad f_6 = u - {\omega_2}^2 z_5\,,$$

и составить функцию Гамильтона — Понтрягина

$$\mathrm{H} = u^2 + \sum_{k=1}^{6} \lambda_k f_k\,.$$

Система уравнений для отыскания множителей Лагранжа λ_k и управления u

$$\lambda_k' = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_k}\,, \quad k = \overline{1,6}\,, \quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u} = 0\,,$$

в нашем случае будет иметь вид

$$\begin{cases} \lambda_2'' = 0\,, \\ \lambda_4'' + \lambda_4 = 0\,, \\ \lambda_6'' + \omega_2^2 \lambda_6 = 0\,, \\ 2u + \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 = 0\,. \end{cases} \tag{15.7}$$

Из системы (15.7) следует, что управление запишется следующим образом:

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + C_3 \sin\tau + C_4 \cos\tau + C_5 \sin\omega_2\tau + C_6 \cos\omega_2\tau\,. \tag{15.8}$$

Здесь $C_k,\ k = \overline{1,6}$, — неизвестные произвольные постоянные.

Применение обобщенного принципа Гаусса. Как и в предыдущих параграфах, полученное управление (15.8) позволяет выявить неголономную связь высокого порядка, непрерывно сопровождающую решение, полученное с помощью применения принципа максимума Понтрягина. Выпишем эту связь.

Как легко видеть, управление (15.8) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Big(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega_1^2\Big)\Big(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega_2^2\Big)u=0\,.$$

Возвращаясь в этом уравнении от безразмерных переменных к размерным и подставляя затем выражение F, взятое из первого уравнения системы (15.2), будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{m}{\Omega_1^2}\frac{d^8\mathrm{X}_0}{dt^8}+\Big(m+\frac{c_1}{\Omega_1^2}+m\frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}\Big)\frac{d^6\mathrm{X}_0}{dt^6}-\frac{c_1}{\Omega_1^2}\frac{d^6\mathrm{X}_1}{dt^6}+\\ +\Big(c_1+m\Omega_2^2+c_1\frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}\Big)\frac{d^4\mathrm{X}_0}{dt^4}-\Big(c_1+c_1\frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}\Big)\frac{d^4\mathrm{X}_1}{dt^4}+\\ +c_1\Omega_2^2\frac{d^2\mathrm{X}_0}{dt^2}-c_1\Omega_2^2\frac{d^2\mathrm{X}_1}{dt^2}=0\,.\end{gathered}\tag{15.9}$$

Полученное дифференциальное уравнение (15.9) можно рассматривать как неголономную связь восьмого порядка, которая непрерывно выполняется при движении под действием управления, найденного при минимизации функционала (15.6).

Таким образом, при управлении, найденном с помощью принципа максимума Понтрягина, непрерывно выполняется неголономная связь высокого порядка, а в этом случае можно пытаться решать поставленную задачу управления с помощью второй теории движения неголономных систем со связями высокого порядка, опирающуюся на применение обобщенного принципа Гаусса. Согласно этому принципу при выполнении неголономной связи восьмого порядка (15.9) минимальной должна быть величина шестой производной вектора реакции связи, то есть величина

$$\big(\mathbf{R}_{(6)}\big)^2=\left(M\,\frac{d^6\mathbf{W}}{dt^6}-\frac{d^6\mathbf{Y}}{dt^6}\right)^2.$$

Выберем для нашего случая из всех возможных неголономных связей высокого порядка то семейство, для которого минимальная величина $(\mathbf{R}_{(6)})^2$ равна нулю. Так как управляющее усилие (или реакция наложенной неголономной связи восьмого порядка) может быть представлена в виде (см.

§ 10 данной главы)

$$\mathbf{R} = u(t)\mathbf{b}\,, \quad \mathbf{b} = \sum_{\sigma=1}^{3} b_\sigma \mathbf{e}^\sigma\,,$$

то, исходя из обобщенного принципа Гаусса, можно записать

$$\frac{d^6 u}{dt^6} = 0\,.$$

Следовательно, управляющее воздействие можно искать как полином пятой степени:

$$u = C_1 + C_2\tau + C_3\tau^2 + C_4\tau^3 + C_5\tau^4 + C_6\tau^5\,. \tag{15.10}$$

Решения $x_0(\tau)$, $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ системы (15.4) при неоднородности (15.8) или (15.10) удобно искать при помощи интегралов Дюамеля:

$$x_0(\tau) = \int_0^\tau u(\tau_1)(\tau - \tau_1)d\tau_1\,,$$

$$x_1(\tau) = \frac{1}{\omega_1}\int_0^\tau u(\tau_1)\sin(\omega_1(\tau - \tau_1))d\tau_1\,,$$

$$x_2(\tau) = \frac{1}{\omega_2}\int_0^\tau u(\tau_1)\sin(\omega_2(\tau - \tau_1))d\tau_1\,.$$

Удобство такого подхода заключается в том, что интегралы Дюамеля автоматически удовлетворяют нулевым начальным условиям. Поэтому, чтобы найти неизвестные постоянные C_i, достаточно подставить x_0, x_1 и x_2 в граничные условия на правом конце:

$$x_0(T) = 1\,, \quad x_1(T) = 0\,, \quad x_2(T) = 0\,,$$

$$x_0'(T) = 0\,, \quad x_1'(T) = 0\,, \quad x_2'(T) = 0\,.$$

Численные расчеты. Рассмотрим некоторые случаи управления движением и сравним решения, полученные применением принципа максимума Понтрягина и обобщенного принципа Гаусса. В качестве примера построим решения для системы с таким набором параметров: $m = 100$ кг, $m_1 = 300$ кг, $m_2 = 30$ кг, $c_1 = 15$ Н/м, $c_2 = 45$ Н/м.

Будем искать решение в двух масштабах для пары время — расстояние. В первом решении возьмем длительное время движения $\widetilde{T} = 110$ с и большое расстояние $S = 600$ м. Во втором расчете возьмем малое время движения $\widetilde{T} = 17$ с и короткое расстояние $S = 3$ м. В каждом из случаев получаем безразмерное время движения $T = 48.5$ и $T = 7.5$ соответственно.

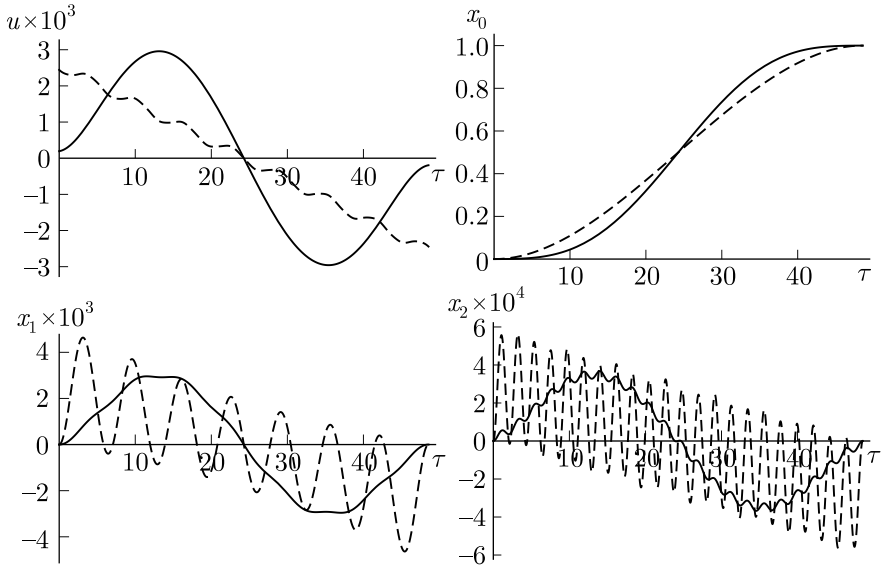

Рис. 29. Движение в безразмерных координатах при $T = 48.5$

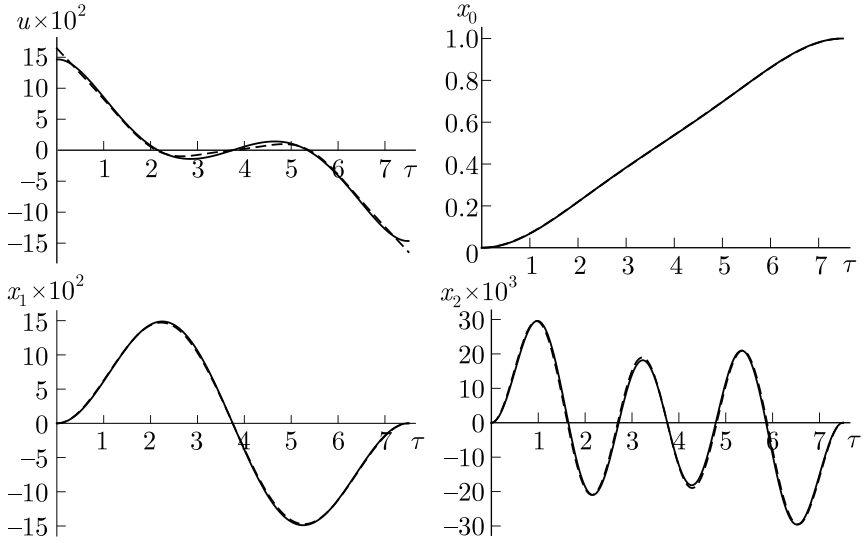

Рис. 30. Движение в безразмерных координатах при $T = 7.5$

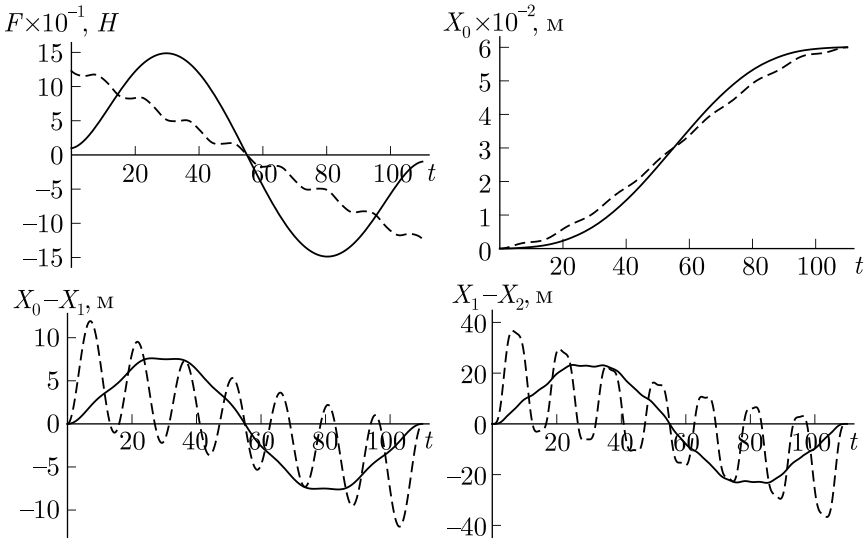

Рис. 31. Движение механической системы при $\widetilde{T} = 110$ с и $S = 600$ м

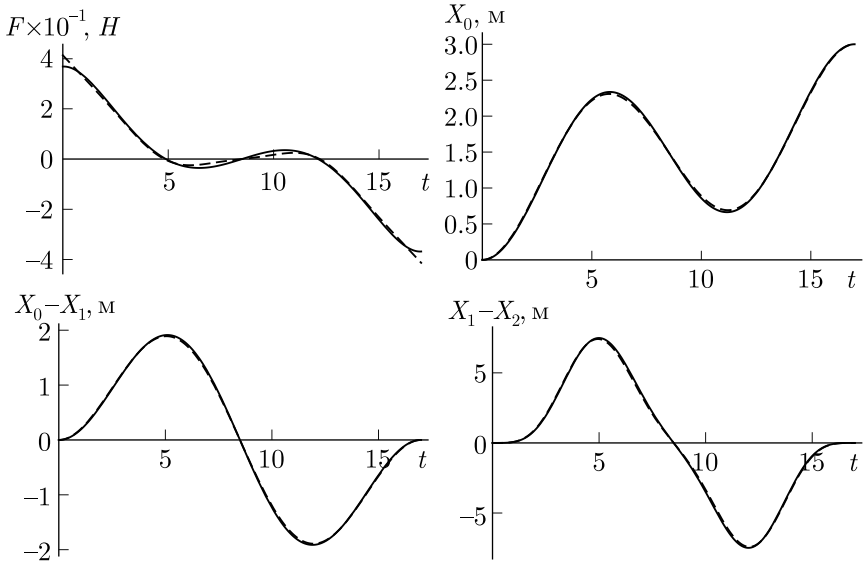

Рис. 32. Движение механической системы при $\widetilde{T} = 17$ с и $S = 3$ м

Проведем расчет в безразмерных величинах, а затем по формулам замены переменных (15.3) получим движение в исходных криволинейных координатах. Безразмерные результаты вычислений изображены на рис. 29 и 30, размерные — на рис. 31 и 32. Решения, полученные при помощи обобщенного принципа Гаусса, представлены сплошными кривыми, принципом максимума Понтрягина — штриховыми.

На представленных графиках можно заметить, что при длительном времени движения в решении, полученном применением принципа максимума Понтрягина, механическая система испытывает сильные колебания, что закономерно, так как вид управления, который получен этим методом, содержит гармонические слагаемые, действующие на систему с ее собственными частотами. Также управление, полученное классическим методом, имеет значительно более сложный вид, что затрудняет его реализацию на практике. Решение, полученное обобщенным принципом Гаусса, имеет полиномиальный вид, и с этой точки зрения выглядит более надежным. К преимуществам метода из области неголономной механики можно отнести и тот факт, что полученное этим методом управление при длительном движении начинается плавным нарастанием управляющего усилия, тогда как управляющее усилие, полученное применением принципа максимума Понтрягина, имеет резкие скачки в начале и в конце движения. Однако несмотря на существенные различия в подходах к решению поставленной задачи, эти два метода дают решения, все более сближающиеся друг с другом по мере уменьшения временного промежутка, отведенного системе на достижение требуемого фазового состояния.

§ 16. Гашение колебаний консоли[35]

Введение. В данном параграфе на примере колебаний консоли показывается, что обобщенный принцип Гаусса может быть с успехом применен не только к исследованию гашения колебаний механических систем с конечным числом степеней свободы, но и к исследованию гашения колебаний систем с распределенными параметрами.

В излагаемой части *II* данной главы для изучения проблемы гашения колебаний механических систем с конечным числом степеней свободы часто использовался метод, основанный на применении принципа максимума Понтрягина. Была установлена связь подобного подхода с обобщенной задачей Чебышёва. Анализ этой связи показывает, что для определения

[35] См. статью и монографию: *Солтаханов Ш. Х.* Гашение колебаний консоли // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 4. С. 105–112; *Он же.* Определение управляющих сил при наличии связей высокого порядка. М.: Наука; Физматлит, 2014. 240 с.

ускорения, с которым должна перемещаться упругая система таким образом, чтобы находясь в начальный момент в состоянии покоя, она, пройдя за заданный промежуток времени заданное расстояние, опять оказалась бы в состоянии покоя, целесообразно использовать обобщенный принцип Гаусса. Искомое ускорение, обеспечивающее гашение колебаний в конце пути, представится при этом в виде ряда по степеням времени t. Число членов этого ряда равно $(2s+2)$, где s — число ненулевых частот упругой системы. Эти частоты предполагались различными. Частоты располагались в порядке возрастания, и частоте ω_σ, $\sigma = \overline{1, s}$, соответствовали члены ряда $a_{2\sigma}t^{2\sigma} + a_{2\sigma+1}t^{2\sigma+1}$, где $a_{2\sigma}$ и $a_{2\sigma+1}$ — искомые постоянные. Перемещение упругой системы как абсолютно твердого тела учитывалось при этом членами $a_0 + a_1 t$.

Упругое тело, например консоль, имеет бесконечное число частот. Естественно возникает вопрос, целесообразно ли в этом случае при перемещении основания консоли обеспечивать гашение колебаний в конце пути для всего спектра частот. Дело в том, что вклад высших форм колебаний консоли в ее полную энергию в момент остановки мал. Конструктивное решение данного вопроса предложено в работах Г. В. Костина и В. В. Саурина[36]. В них искомое ускорение, также представленное в виде ряда по степеням t, предлагается определять, исходя из минимизации полной энергии консоли в момент остановки ее основания. Кривая прогиба, входящая в выражение для этой энергии, определялась по методу интегро-дифференциальных соотношений. В рассматриваемом параграфе данная энергия вычисляется на основе применения к решению изучаемой задачи уравнений Лагранжа второго рода. Скачки ускорения консоли как абсолютно твердого тела в начале и в конце пути устраняются тем, что разложение ускорения в ряд по степеням времени t начинается с t^2. Энергия колебаний рассматривается не только в конце пути, но и в процессе перемещения консоли. Этот расширенный энергетический подход позволяет подойти к данной задаче с новой точки зрения.

Применение уравнений Лагранжа второго рода к задаче гашения колебаний консоли. Пусть для простоты, как и в работе Г. В. Костина и В. В. Саурина 2006 года, консоль является однородной и имеет постоянное поперечное сечение. Эффективность применения уравнений Лагранжа к рассматриваемой задаче определяется тем, что при пред-

[36] См. статьи: *Костин Г. В., Саурин В. В.* Интегродифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости // Доклады Академии наук. 2005. Т. 404. № 5, С. 535–538; *Они же.* Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // *Там же.* 2006. Т. 408. № 6. С. 750–753.

ставлении прогиба консоли в виде ряда по собственным функциям $X_\sigma(x)$, $\sigma = \overline{1,\infty}$,

$$y_r(x,t) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} q_\sigma(t) X_\sigma(x)\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant l\,,$$

при времени перемещения, близком к периоду первой формы колебаний или его превосходящем, кинетическая и потенциальная энергии консоли найдутся в виде быстро сходящихся рядов

$$\begin{gathered} K_r = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{M_\sigma \dot{q}_\sigma^2}{2}\,, \qquad \Pi = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{M_\sigma \omega_\sigma^2 q_\sigma^2}{2}\,, \\ M_\sigma = \frac{m}{l} \int\limits_0^l X_\sigma^2(x)\,dx\,, \quad \omega_\sigma^2 = \frac{EJ}{ml^3}\,\lambda_\sigma^4\,, \quad \sigma = \overline{1,\infty}\,. \end{gathered} \tag{16.1}$$

Здесь l — длина консоли, m — ее масса, E — модуль Юнга, J — момент инерции поперечного сечения, λ_σ — корни уравнения

$$\cos\lambda \operatorname{ch}\lambda = -1\,.$$

Собственные формы и приведенные массы M_σ, $\sigma = \overline{1,\infty}$, таковы[37]:

$$\begin{gathered} X_\sigma(x) = \sin\frac{\lambda_\sigma x}{l} - \operatorname{sh}\frac{\lambda_\sigma x}{l} + A_\sigma\left(\operatorname{ch}\frac{\lambda_\sigma x}{l} - \cos\frac{\lambda_\sigma x}{l}\right), \\ A_\sigma = \frac{\operatorname{sh}\lambda_\sigma + \sin\lambda_\sigma}{\operatorname{ch}\lambda_\sigma + \cos\lambda_\sigma}\,, \qquad M_\sigma = mA_\sigma^2\,. \end{gathered}$$

Пусть функцией $\xi(t)$ задается перемещение основания консоли по направлению, перпендикулярному оси стержня. Тогда абсолютное перемещение $y_a(x,t)$ сечения x консоли представится в виде

$$y_a(x,t) = \xi(t) + y_r(x,t)\,,$$

где $y_r(x,t)$ — смещение сечений консоли относительно недеформированного состояния.

Вычислив кинетическую энергию системы

$$K = \frac{m}{2l} \int\limits_0^l \left(\frac{\partial y_a}{\partial t}\right)^2 dx$$

[37] См., например: *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 559 с.; *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1959. 440 с.

и подставив ее в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial K}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}\,, \qquad \sigma = \overline{1,\infty}\,,$$

придем к уравнениям

$$\ddot{q}_\sigma + \omega_\sigma^2 q_\sigma = -\frac{a_\sigma}{A_\sigma^2}\,\ddot{\xi}\,, \qquad \sigma = \overline{1,\infty}\,.$$

Здесь

$$a_\sigma = \frac{1}{l}\int\limits_0^l X_\sigma(x)\,dx\,, \qquad \sigma = \overline{1,\infty}\,.$$

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$x_0 = \frac{\xi}{l}\,, \quad x_\sigma = -\frac{A_\sigma^2}{a_\sigma}\frac{q_\sigma}{l}\,, \quad \sigma = \overline{1,\infty}\,, \qquad \tau = \omega_1 t\,, \tag{16.2}$$

и обозначим для простоты также точкой производную по безразмерному времени τ.

Тогда получим уравнения

$$\ddot{x}_0 = u\,, \quad \ddot{x}_\sigma + \overline{\omega}_\sigma^2 x_\sigma = u\,, \quad \overline{\omega}_\sigma = \frac{\omega_\sigma}{\omega_1} = \left(\frac{\lambda_\sigma}{\lambda_1}\right)^2, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{16.3}$$

Здесь u — искомое безразмерное ускорение основания консоли, а s — число учитываемых собственных форм колебаний.

При соударении шаров, как показал Рэлей[38], упругие колебания в них почти не возбуждаются по той причине, что и само ускорение центра масс каждого из шаров, и производная от него по времени в начале и в конце соударения равны нулю. Учитывая это обстоятельство, перемещение x_0 подчиним следующим краевым условиям:

$$\begin{gathered} x_0(0) = \dot{x}_0(0) = \ddot{x}_0(0) = u(0) = \dddot{x}_0(0) = \dot{u}(0) = 0\,, \\ x_0(T) = a\,,\ \dot{x}_0(T) = \ddot{x}_0(T) = u(T) = \dddot{x}_0(T) = \dot{u}(T) = 0\,. \end{gathered} \tag{16.4}$$

Здесь T — безразмерное время движения, а a — безразмерная величина перемещения.

Энергия колебаний консоли, как следует из выражений (16.1)–(16.2), такова:

[38] См., например: *Зегжда С. А.* Соударение упругих тел. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. 316 с.

$$K_r + \Pi = \frac{ml^2\omega_1^2}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{a_\sigma^2}{A_\sigma^2} (\dot{x}_\sigma^2 + \overline{\omega}_\sigma^2 x_\sigma^2) \,. \tag{16.5}$$

Пусть стержень является абсолютно твердым телом. Тогда ускорение u^*, отыскиваемое в виде

$$u^* = C_1\tau^2 + C_2\tau^3 + C_3\tau^4 + C_4\tau^5 \,,$$

однозначно определится из граничных условий (16.4). Перемещение, соответствующее этому ускорению, обозначим через x_0^*.

Отметим, что функция $u^*(\tau)$ обладает следующим свойством:

$$u^*(\tau) = -u^*(T - \tau) \,.$$

Отсюда следует, что $u^*(T/2) = 0$. Учитывая это, а также то, что $u^*(\tau) > 0$ при $0 < \tau < T/2$, найдем максимальную скорость основания:

$$v_{\max} = l\omega_1 v_m \,, \quad v_m = \dot{x}_0^*(T/2) \,.$$

Принимая за меру энергии величину

$$K_* = \frac{mv_{\max}^2}{2} \,,$$

в соответствии с выражением (16.5) получаем

$$En(\tau) = \frac{K_r + \Pi}{K_*} = \frac{1}{v_m^2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{a_\sigma^2}{A_\sigma^2} (\dot{x}_\sigma^2 + \overline{\omega}_\sigma^2 x_\sigma^2) \,. \tag{16.6}$$

Введем в рассмотрение максимальное ускорение консоли как абсолютно твердого тела:

$$\ddot{\xi}_{\max}^* = l\omega_1^2 u_m \,, \quad u_m = u^*(\tau_*) \,.$$

Здесь τ_* — тот момент времени, когда функция $u^*(\tau)$ максимальна.

Искомое ускорение $\ddot{\xi}$ гибкой консоли, вычисленное в долях такого ускорения, таково:

$$\overline{u} = \frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\xi}_{\max}^*} = \frac{u}{u_m} \,.$$

Функция $u(\tau)$, являющаяся решением рассматриваемой задачи, зависит непосредственно и от a, и от T. Новая же безразмерная величина $\overline{u}$, рассматриваемая как функция аргумента τ/T, от величины a не зависит. Параметром ее является только отношение времени перемещения к периоду

первой формы колебаний. Учитывая независимость искомого решения от величины a, при расчетах полагалось, что $a = 1$.

Гашение колебаний консоли как краевая задача и как задача минимизации величины $En(T)$. Первоначально задачу о гашении колебаний консоли в момент времени T рассмотрим как краевую задачу, то есть дополним условия (16.4) условиями

$$x_\sigma(0) = \dot{x}_\sigma(0) = x_\sigma(T) = \dot{x}_\sigma(T) = 0\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{16.7}$$

Краевая задача (16.3), (16.4), (16.7) может быть решена при представлении искомой функции $u(\tau)$ в виде суммы любых линейно независимых функций, число которых равно $(2s + 6)$.

Выше была установлена связь наложения краевых условий на движение, описываемое уравнениями (16.3), с обобщенной задачей Чебышёва. Из этого следует, что если при решении рассматриваемой краевой задачи выбрана система линейно независимых функций, то каждой такой системе функций будет соответствовать наложение связи порядка $(2s + 8)$.

Было также показано, что в случае минимизации функционала от квадрата безразмерного управления с использованием принципа максимума Понтрягина из множества уравнений возникающих при этом связей высокого порядка можно выделить подмножество, всем элементам которого соответствует одно единственное дифференциальное уравнение относительно управления, структура которого определяется только спектром собственных частот системы и не зависит от выбора обобщенных координат.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли из множества уравнений связей выделить новое подмножество, которому так же соответствовало бы одно единственное дифференциальное уравнение, в данном случае порядка $(2s + 6)$, с постоянными коэффициентами.

В соответствии с обобщенным принципом Гаусса порядка $(2s + 6)$

$$\left(\mathbf{R}_{(2s+6)}\right)^2 = \left(M \overset{(2s+6)}{\mathbf{W}} - \overset{(2s+6)}{\mathbf{Y}}\right)^2 = (\overset{(2s+6)}{u}\mathbf{b})^2$$

в рассматриваемой задаче наименьшее «принуждение» при связях порядка $(2s+8)$ будем иметь в том случае, когда искомая функция $u(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\overset{(2s+6)}{u} = 0\,.$$

Отсюда при учете того, что $u(0) = \dot{u}(0) = 0$, вытекает, что ускорение согласно обобщенному принципу Гаусса следует искать в виде

$$u(\tau) = \sum_{k=1}^{2s+4} C_k \tau^{k+1}\,, \tag{16.8}$$

где C_k — искомые постоянные, алгоритм определения которых был описан в предыдущих параграфах.

Напомним, что функции $u(\tau)$, $x_0(\tau)$, $x_\sigma(\tau)$, $\sigma = \overline{1,s}$, являющиеся решением данной задачи, обладают следующими свойствами:

$$\begin{gathered} u(\tau) = -u(T-\tau)\,, \\ x_0(\tau) = a - x_0(T-\tau)\,, \\ x_\sigma(\tau) = -x_\sigma(T-\tau)\,, \\ \sigma = \overline{1,s}\,. \end{gathered}$$

Рассмотрим теперь метод минимизации величины $En(T)$, задаваемой формулой (16.6). Как и в работе Г. В. Костина и В. В. Саурина 2006 года, ограничимся случаем, когда функция $u(\tau)$, удовлетворяющая условиям (16.4), имеет или два, или четыре свободных параметра. Итак, пусть

$$u(\tau) = \sum_{k=1}^{4} C_k \tau^{k+1} + \alpha\tau^6 + \beta\tau^7 + \gamma\tau^8 + \delta\tau^9\,. \tag{16.9}$$

Для простоты описания метода ограничимся двумя параметрами, то есть положим $\gamma = \delta = 0$. Определив из уравнения $\ddot{x}_0 = u$ и из условий (16.4) постоянные C_k, $k = \overline{1,4}$, как линейные функции параметров α и β, получим

$$u = u(\tau,\alpha,\beta)\,,$$

$$En(T,\alpha,\beta) = \frac{1}{v_m^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{a_\sigma^2}{A_\sigma^2} \left(\dot{x}_k^2(T,\alpha,\beta) + \overline{\omega}_k^2 x_k^2(T,\alpha,\beta)\right).$$

Здесь

$$x_k(T,\alpha,\beta) = \frac{1}{\overline{\omega}_k} \int\limits_0^T u(\tau,\alpha,\beta) \sin \overline{\omega}_k (T-\tau)\, d\tau\,,$$

$$\dot{x}_k(T,\alpha,\beta) = \int\limits_0^T u(\tau,\alpha,\beta) \cos \overline{\omega}_k (T-\tau)\, d\tau\,,$$

$$k = \overline{1,N}\,.$$

Число N выбиралось из условия, чтобы погрешность вычисления полной энергии консоли не превосходила 0.01 %. Расчеты показали, что при $T/T_1 \geqslant 0.6$ для этого достаточно положить $N = 8$. Искомые параметры α и β определялись из системы линейных уравнений

$$a_{11}\,\alpha + a_{12}\,\beta = -f_1(0,0)\,,$$
$$a_{21}\,\alpha + a_{22}\,\beta = -f_2(0,0)\,,$$

где

$$f_1(\alpha,\beta) = \frac{\partial En(T,\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\,, \quad f_2(\alpha,\beta) = \frac{\partial En(T,\alpha,\beta)}{\partial\beta}\,,$$
$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\,, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial f_1}{\partial\beta}\,, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial\beta}\,.$$

Аналогично строится решение и при четырех свободных параметрах.

Анализ результатов расчетов. Из выражений (16.8) и (16.9) следует, что решение по методу минимизации при двух свободных параметрах следует сравнивать с решением, соответствующим гашению одной формы ($s = 1$), а при четырех — гашению двух форм ($s = 2$).

Полная энергия колебаний консоли, оставшаяся после гашения s форм, такова:

$$En^{(s)}(T) = \frac{1}{v_m^2}\sum_{k=s+1}^{N}\frac{a_k^2}{A_k^2}(\dot{x}_k^{(s)}(T) + \overline{\omega}_k^2(x_k^{(s)}(T))^2)\,,$$

где

$$x_k^{(s)}(T) = \frac{1}{\overline{\omega}_k}\int\limits_0^T u^{(s)}(\tau)\sin\overline{\omega}_k(T-\tau)\,d\tau\,,$$
$$\dot{x}_k^{(s)}(T) = \int\limits_0^T u^{(s)}(\tau)\cos\overline{\omega}_k(T-\tau)\,d\tau\,,$$
$$k = \overline{1,N}\,.$$

Здесь $u^{(s)}(\tau)$ — решение краевой задачи при гашении s форм. Число N при вычислении энергии полагалось таким же, как и в методе минимизации.

Величины $En^{(s)}(T)$ быстро убывают с ростом отношения T/T_1. Их значения приведены в таблице 1.

Степень гашения характеризуется величиной $En^{(s)}(T)/En^*(T)$, где $En^*(T)$ — энергия колебаний в конце пути при рассмотрении консоли как абсолютно твердого тела. Данные значения приведены в таблице 2.

Таблица 1. **Значения** $En^{(s)}(T)$

s \ T/T_1	0.6	0.8	1	2
1	0.3954	0.008575	$8.205 \cdot 10^{-7}$	$1.331 \cdot 10^{-7}$
2	0.01593	$0.1146 \cdot 10^{-3}$	$3.059 \cdot 10^{-7}$	$2.059 \cdot 10^{-10}$

Таблица 2. **Значения** $En^{(s)}(T)/En^{*}(T)$

s \ T/T_1	0.6	0.8	1	2
1	0.3245	0.005475	$5.167 \cdot 10^{-7}$	$3.771 \cdot 10^{-6}$
2	0.01308	$0.7320 \cdot 10^{-4}$	$1.926 \cdot 10^{-7}$	$5.831 \cdot 10^{-9}$

Величины $En(T, \alpha, \beta)$ и $En(T, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ будут соответственно меньше величин $En^{(1)}(T)$ и $En^{(2)}(T)$. Эти разности, выраженные в процентах

$$\frac{En^{(1)}(T) - En(T, \alpha, \beta)}{En(T, \alpha, \beta)} 100\%, \quad \frac{En^{(2)}(T) - En(T, \alpha, \beta, \gamma, \delta)}{En(T, \alpha, \beta), \gamma, \delta} 100\%,$$

приведены в таблице 3.

Таблица 3. **Различие в процентах между краевой задачей и задачей минимизации**

s \ T/T_1	0.6	0.8	1
1	29.9	0.437	$0.576 \cdot 10^{-4}$
2	4.66	0.555	0.0633

Расчеты показали, что величинами, приведенными в таблице 3, достаточно точно характеризуется зависимость от параметра T/T_1 разности между ускорениями, вычисленными этими двумя методами.

Результаты вычислений, приведенные в таблице 3, говорят о том, что отношение $T/T_1 = 0.8$ может быть выделено как особое в том смысле, что при его уменьшении различие между данными двумя методами гашения колебаний консоли резко возрастает, и, наоборот, при его увеличении быстро убывает. Проблема гашения колебаний консоли при $T/T_1 < 0.8$ требует особого подхода. Дело в том, что при малом отношении T/T_1 гашение первой формы осуществляется при очень больших значениях модуля функции $\overline{u}(\tau/T)$ и, как следствие, при очень большой энергии колебаний в процессе перемещения. Поэтому случай, когда $T/T_1 < 0.8$, далее не рассматривается.

Результаты расчетов для трех характерных значений T/T_1 приведены на рис. 33–35. На них сплошные линии соответствуют стержню как

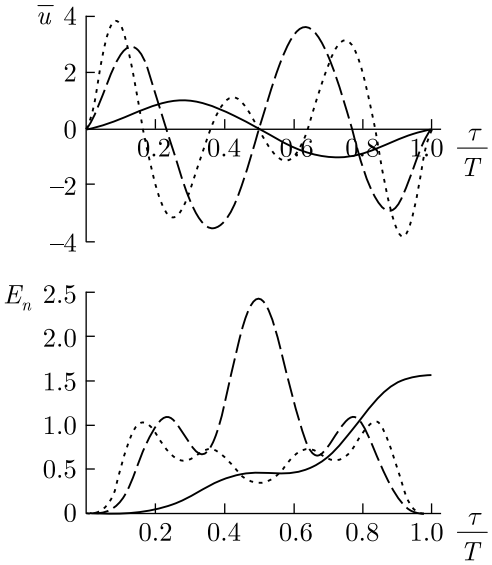

Рис. 33. Результаты расчетов при $T/T_1 = 0.8$

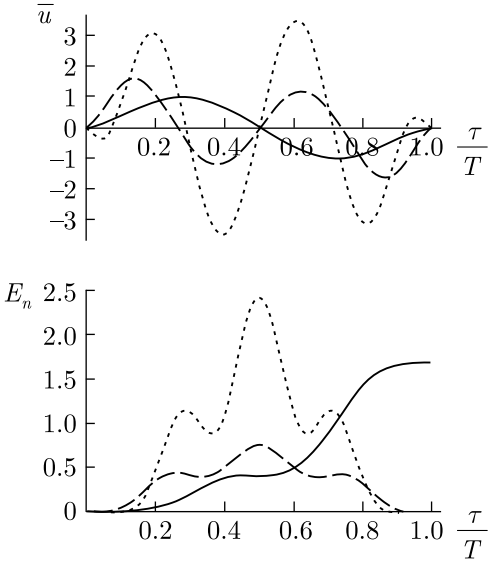

Рис. 34. Результаты расчетов при $T/T_1 = 1.12$

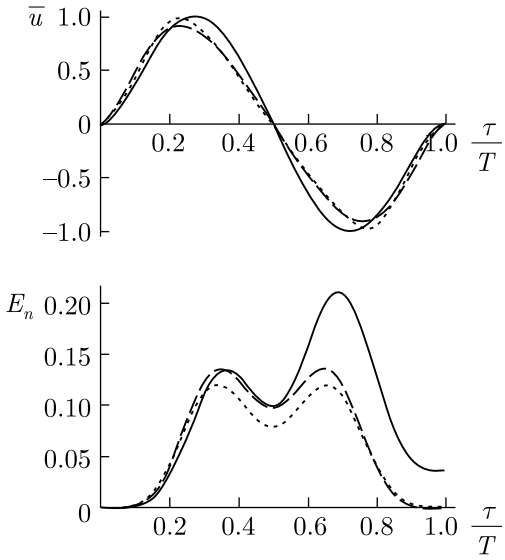

Рис. 35. Результаты расчетов при $T/T_1 = 2$

абсолютно твердому телу, кривые с длинными штрихами соответствуют гашению первой формы, а пунктирные кривые — гашению двух форм. Характерное значение $T/T_1 = 0.8$ обсуждалось выше.

При значении $T/T_1 = \lambda_1^2/\pi = 1.12$ расчеты были проведены в работе Г. В. Костина и В. В. Саурина 2006 года. Отметим, что в этой статье ускорение консоли как абсолютно твердого тела задавалось полиномом первой степени, а минимизация полной энергии в момент T при двух и четырех параметрах проводилась соответственно при полиномах третьей и пятой степеней.

Третье значение $T/T_1 = 2$ выбрано потому, что при этом, как видно из таблиц 1–2, колебания консоли в момент T настолько малы, что нет необходимости их гасить.

Из приведенных графиков функций $\overline{u}(\tau/T)$ и $En(\tau/T)$ можно сделать следующий вывод:

при $0.8 \leqslant T/T_1 < 1$ целесообразно гашение первых двух форм;

при $1 \leqslant T/T_1 \leqslant 2$ достаточным является гашение первой формы;

при $T/T_1 > 2$ вообще нет необходимости гасить колебания.

Отметим, что предложенная теория может быть непосредственно применена к расчету гашения колебаний гибкой «руки» манипулятора при ее остановке после перемещения основания на заданное расстояние в течение заданного промежутка времени.

Глава VII
МЕХАНИКА СО СЛУЧАЙНЫМИ СИЛАМИ

Авторы: *П. Е. Товстик, Т. М. Товстик*

В этой главе в краткой форме излагаются методы определения вероятностных характеристик движения механических систем, находящихся под действием случайных сил. Во вводных параграфах приводятся основные сведения о случайных величинах и случайных процессах, необходимые для дальнейшего. При определении вероятностных характеристик изложение ограничено в основном корреляционным уровнем, при котором определяются математические ожидания и корреляционные функции решений при условии, что эти же характеристики заданы для внешних сил. Для стационарных процессов используется преобразование Фурье и определяются спектральные плотности. Для статистически линейных систем удается найти точное решение. Для анализа нелинейных систем можно использовать лишь приближенные методы. Это методы статистической линеаризации и методы статистического моделирования. Упомянутый в конце главы метод решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова приводит к точному решению, однако область его практической применимости очень узкая[1].

§ 1. Элементы теории вероятностей

Излагаемый в этом параграфе вспомогательный материал не предназначен для изучения теории вероятностей.

Основным понятием теории вероятностей является *случайное событие* $\boldsymbol{A}$, которое может произойти, а может и не произойти. Событию $\boldsymbol{A}$ ставится в соответствие *вероятность*

$$p = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}), \quad 0 \leqslant p \leqslant 1 .$$

При $p = 0$ имеем *невозможное* событие, а при $p = 1$ — *достоверное* событие.

Если результатом события является число x, то говорим о *случайной величине* $\boldsymbol{X}$. Основной характеристикой случайной величины $\boldsymbol{X}$ является ее *функция распределения* $F(x)$, равная

$$F(x) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} < x) . \tag{1.1}$$

[1]Краткий список литературы: *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 884 с.; *Светлицкий В. А.* Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1976. 216 с.; *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука; Физматлит, 1980. 368 с.; *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. 206 с.

Принимаем, что $F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1$. Имеем $\boldsymbol{P}(x_1 \leqslant \boldsymbol{X} < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, поэтому $F(x)$ — (нестрого) возрастающая функция.

Если величина $\boldsymbol{X}$ может принимать лишь дискретное множество значений, то говорим о *дискретной случайной величине*. Например, число очков, выпавших при подбрасывании кубика, — дискретная случайная величина. В задачах механики нас интересуют, в первую очередь, случайные величины, которые могут принимать любые значения при $-\infty < x < \infty$ или из некоторого более узкого множества. Такие случайные величины называем *непрерывно распределенными*. Для таких случайных величин (если оставить в стороне некоторые вырожденные случаи) вводится *плотность вероятности* $f(x)$ по формуле

$$\begin{gathered} f(x) = \frac{dF}{dx}\,, \quad \text{причем} \quad f(x) \geqslant 0\,, \\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx\,,\ \boldsymbol{P}(x_1 \leqslant \boldsymbol{X} < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\,. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Кроме функций $F(x)$ и $f(x)$, содержащих исчерпывающую информацию о случайной величине, вводятся начальные и центральные моменты, из которых остановимся на *математическом ожидании* m_x и *дисперсии* D_x, где

$$\begin{aligned} m_x &= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx\,, \\ D_x &= \boldsymbol{E}(|\boldsymbol{X} - m_x|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - m_x|^2 f(x)\,dx\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем математическое ожидание случайной величины $\boldsymbol{Y}$ обозначаем через $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y})$. Математическое ожидание имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, а дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Например, при денежных расчетах она имеет размерность квадратных рублей. Чтобы вернуться к исходной размерности, вводится *стандартное отклонение* $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Можно предложить аналогию введенных вероятностных понятий и механических понятий. Рассмотрим стержень с массой $M = 1$ и линейной плотностью $f(x)$. Тогда математическое ожидание равно координате центра тяжести стержня ($x_c = m_x$), дисперсия равна моменту инерции относительно центра тяжести, а стандартное отклонение — радиусу инерции. Например, для равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ случайной величины будет

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a)\,, & x \in [a,b]\,, \\ 0\,, & x \notin [a,b]\,, \end{cases} \qquad m_x = \frac{b-a}{2}\,, \quad D_x = \frac{(b-a)^2}{12}\,.$$

Плотность распределения вероятностей *нормальной (гауссовой) случайной величины* с математическим ожиданием $m_x = a$ и стандартным отклонением $\sigma_x = \sigma$ будет

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} . \tag{1.4}$$

Математическое ожидание m_x — это среднее значение случайной величины $\boldsymbol{X}$, а *стандартное отклонение* σ_x — это мера отклонения от математического ожидания. Имеет место замечательная теорема Чебышёва, справедливая для любых случайных величин и утверждающая, что большие отклонения от математического ожидания случаются редко:

$$p = \boldsymbol{P}(|\boldsymbol{X} - m_x| > N\sigma_x) \leqslant \frac{1}{N^2}.$$

Например, при $N = 3$ будет $p \leqslant 1/9$. Для случайных величин с конкретным распределением эта оценка может быть улучшена. Для нормального распределения $p \leqslant 0.003$.

§ 2. Многомерные случайные величины

Если имеется несколько связанных между собой случайных величин $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$, то можно говорить об *$n$-мерной случайной величине* или об *n-мерном случайном векторе* $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)^T$ (значок ^{T} означает транспонирование). Для каждой из компонент $\boldsymbol{X}_k$ вектора $\boldsymbol{X}$, как и в § 1, по формулам, аналогичным (1.1)–(1.3), вводятся одномерные функции распределения $F_k(x_k)$, плотности вероятности $f_k(x_k)$, математические ожидание m_{x_k}, дисперсии D_{x_k}, стандартные отклонения σ_{x_k}.

Однако вводятся и новые понятия и вероятностные характеристики. Рассмотрим сначала для простоты *двухмерную случайную величину* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$. Вводится *двухмерная функция распределения* $F_2(x, y)$ и связанная с нею двухмерная плотность вероятности $f_2(x, y)$, равные

$$F_2(x, y) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} < x, \boldsymbol{Y} < y), \quad f_2(x, y) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y},$$

где функция $F_2(x, y)$ определена как вероятность одновременного наступления двух событий $\boldsymbol{X} < x$ и $\boldsymbol{Y} < y$. Если эти события независимы, то $F_2(x, y) = F_x(x)F_y(y)$ и $f_2(x, y) = f_x(x)f_y(y)$, где $F_x(x)$, $F_y(y)$ и $f_x(x)$, $f_y(y)$ — одномерные функции распределения и плотности вероятностей.

Вероятность попадания точки (x, y) в некоторую область G на плоскости XY равна

$$\boldsymbol{P}((x, y) \in G) = \int_G f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Вводится *корреляция* K_{xy} *случайных величин* $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ по формуле

$$K_{xy} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^0 \overline{\boldsymbol{Y}^0})\,, \quad \boldsymbol{X}^0 = \boldsymbol{X} - m_x\,, \quad m_x = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) \quad (x \to y)\,. \tag{2.1}$$

Здесь через $\boldsymbol{X}^0$ обозначена *центрированная случайная величина*, то есть величина, из которой вычтено ее математическое ожидание, черта над $\boldsymbol{Y}^0$ означает комплексное сопряжение. Имеют место соотношения

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^0) = 0\,, \quad K_{yx} = \overline{K_{xy}}\,, \quad K_{xx} = D_x\,. \tag{2.2}$$

Именно последнее из соотношений (2.2) явилось причиной введения в формуле (2.1) комплексно сопряженной величины $\overline{\boldsymbol{Y}^0}$ в определении корреляции K_{xy}.

Если $K_{xy} = 0$, то величины $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ называются *некоррелированными*. Из независимости случайных величин следует их некоррелированность, однако обратное утверждение в общем случае неверно.

Корреляция удовлетворяет неравенству $K_{xy}^2 \leqslant D_x D_y$. Вводится безразмерный *коэффициент корреляции*

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}\,, \quad |r_{xy}| \leqslant 1\,. \tag{2.3}$$

Сказанное обобщается на случайный вектор $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)^T$, для которого n-мерная функция распределения и плотность вероятности имеют вид

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_1 < x_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n < x_n)\,,$$
$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\,.$$

Вводится *корреляционная матрица*

$$\boldsymbol{K_X} = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^0 \cdot \overline{\boldsymbol{X}^{0T}}\right) = \begin{pmatrix} D_{x_1} & K_{x_1x_2} & \ldots & K_{x_1x_n} \\ K_{x_2x_1} & Dx_2 & \ldots & K_{x_2x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{x_nx_1} & K_{x_nx_2} & \ldots & D_{x_n} \end{pmatrix}\,, \tag{2.4}$$

в которой на главной диагонали стоят дисперсии отдельных процессов. С учетом (2.2) корреляционная матрица удовлетворяет соотношению $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{X}}^T = \overline{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{X}}}$.

Матрица $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{X}}$ положительна. Это значит, что все ее миноры, получающиеся при вычеркивании строк и столбцов с одинаковыми номерами, неотрицательны. Для доказательства рассмотрим случайную величину $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, равную произвольной линейной комбинации элементов вектора $\boldsymbol{X}$. Имеем

$$D_z = \boldsymbol{E}\left(|\boldsymbol{Z}|^2\right) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^0 \cdot \overline{\boldsymbol{X}^{0T}}\right) \cdot \overline{\boldsymbol{\alpha}^T} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{X}} \cdot \overline{\boldsymbol{\alpha}^T} \geqslant 0\,,$$

откуда в связи с неотрицательностью дисперсии следует требуемое.

§ 3. Случайные процессы

Случайным процессом или *случайной функцией* $\boldsymbol{X}(t)$ называется любое однопараметрическое семейство случайных величин, в котором в качестве параметра t выступает время. Зафиксировав случай, получаем функцию времени $x(t)$, называемую *реализацией*.

Зафиксировав время t, получаем случайную величину, для которой можно ввести описанные выше вероятностные характеристики: функцию распределения $F_1(x,t) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}(t) < x)$, математическое ожидание $m_x(t) = \boldsymbol{E}(X(t))$ и дисперсию

$$D_x(t) = \boldsymbol{E}\left(|\boldsymbol{X}^0(t)|^2\right)\,, \quad X^0(t) = X(t) - m_x(t)\,,$$

где $X^0(t)$ — центрированный случайный процесс.

Зафиксировав несколько моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$, получаем несколько случайных величин или случайный вектор

$$\boldsymbol{X}(t) = (\boldsymbol{X}(t_1), \ldots, \boldsymbol{X}(t_n))^T\,,$$

для которого можно ввести *n-мерную функцию распределения*

$$F_n(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{X}(t_1) < x_1, \ldots, \boldsymbol{X}(t_n) < x_n\right)\,. \qquad (3.1)$$

С ростом n каждая последующая функция распределения содержит (в общем случае) больше информации о процессе, чем предыдущая. Можно считать, что совокупность всех конечномерных распределений содержит исчерпывающую информацию о процессе. Однако использование функций распределения при $n \geqslant 2$ затруднительно, ибо, как правило, они неизвестны, а число аргументов у них не менее 4.

Поэтому обратимся к *корреляционной матрице* $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n)$ *процесса* $\boldsymbol{X}(t)$, которая строится так же, как и матрица (2.4):

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^0(t) \cdot \overline{\boldsymbol{X}^{0T}(t)}\right) = \\ = \begin{pmatrix} D_x(t_1) & k_x(t_1,t_2) & \ldots & k_x(t_1,t_n) \\ k_x(t_2,t_1) & D_x(t_2) & \ldots & k_x(t_2,t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_x(t_n,t_1) & k_x(t_n,t_2) & \ldots & D_x(t_n) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $k_x(u,v) = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^0(u)\overline{\boldsymbol{X}^0(v)}\right)$ — *корреляционная функция процесса* $\boldsymbol{X}(t)$. Имеют место соотношения $D_x(u) = k_x(u,u)$, $k_x(v,u) = \overline{k_x(u,v)}$. Не любая функция двух аргументов может служить корреляционной функцией случайного процесса, ибо матрица (3.2) должна быть положительной. В частности, должно выполняться неравенство

$$|k_x(u,v)| \leqslant \sqrt{D_x(u)D_x(v)}\,.$$

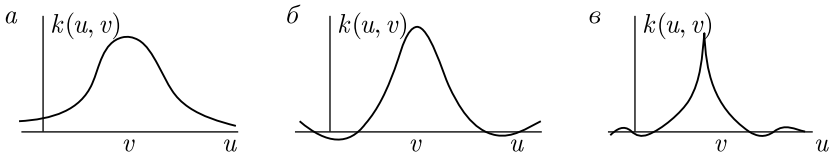

Рис. 1. Возможные графики корреляционных функций

Корреляционная функция $k_x(v,u)$ описывает меру вероятностной связи между случайными величинами $\boldsymbol{X}(u)$ и $\boldsymbol{X}(v)$. Как правило, эта связь убывает с ростом разности $|u-v|$. На рис. 1 показаны возможные графики корреляционных функций при фиксированном v.

§ 4. Операции математического анализа над случайными величинами и случайными процессами

В теории вероятностей введено несколько определений понятия предела. Мы будем пользоваться одним из них — пределом в среднеквадратичном смысле.

Определение 1. Пусть имеется бесконечная последовательность $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n, \ldots$ случайных величин. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ называется ее *пределом в среднеквадратичном смысле*, если

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}\left(|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_n|\right) = 0\,.$$

При этом используется обозначение $\boldsymbol{X} = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \boldsymbol{X}_n$, которое связано с сокращением трех английских слов «limit in mean».

Определение 2. Случайная функция $\boldsymbol{X}(t)$ называется *непрерывной в среднеквадратичном смысле* при $t = \tau$, если $\underset{t\to\tau}{\text{l.i.m.}}\, \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}(\tau)$.

Основываясь на определении 1, можно вывести критерий непрерывности случайной функции.

Для того чтобы *случайная функция* $\boldsymbol{X}(t)$ была *непрерывна в среднеквадратичном смысле* при $t = \tau$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке были непрерывны ее математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционная функция $k_x(t_1, t_2)$.

При доказательстве (которое здесь не приводится) приходится переписать понятие предела с «языка последовательностей» на «язык $\varepsilon - \delta$».

Определение 3. Случайная функция $\boldsymbol{Y}(t)$ называется *производной функции* $\boldsymbol{X}(t)$ *в среднеквадратичном смысле*, если

$$\boldsymbol{Y}(t) = \underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}}\, \frac{\boldsymbol{X}(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}\,.$$

Критерием существования производной функции $\boldsymbol{X}(t)$ является существование непрерывных производных dm_x/dt и $\partial^2 k_x/(\partial t_1 \partial t_2)$. При этом

$$m_y(t) = \frac{dm_x}{dt}\,, \qquad k_y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 k_x}{\partial t_1 \partial t_2}\,. \tag{4.1}$$

Рассматриваемые ниже интегралы

$$\boldsymbol{J} = \int_a^b \boldsymbol{X}(t)dt, \quad \boldsymbol{Z}(t) = \int_a^t \boldsymbol{X}(\tau)d\tau\,, \quad \boldsymbol{Y}(t) = \int_a^t g(t,\tau)\boldsymbol{X}(\tau)d\tau\,, \tag{4.2}$$

содержащие случайную функцию $\boldsymbol{X}(t)$, определяем как пределы в среднеквадратичном смысле сумм Римана (здесь $g(t,\tau)$ — непрерывная неслучайная функция). Например,

$$\boldsymbol{J} = \text{l.i.m.} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}(t_k)\Delta t_k\,, \qquad t_0 = a\,, \quad t_n = b\,, \quad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}$$

при $\max_k \Delta t_k \to 0$.

В отличие от непрерывности и дифференцируемости процессов будем считать, что рассматриваемые интегралы всегда существуют, ибо при интегрировании гладкость функций $\boldsymbol{Y}(t)$ и $\boldsymbol{Z}(t)$ по сравнению с функцией $\boldsymbol{X}(t)$ возрастает.

Найдем математическое ожидание $m_y(t)$ и корреляционную функцию $k_y(t_1, t_2)$ случайного процесса $\boldsymbol{Y}(t)$. Учитывая, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий, имеем

$$\begin{aligned} &m_y(t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}(t)) = \int_a^t g(t,\tau) m_x(\tau) d\tau\,, \\ &k_y(t_1,t_2) = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{Y}^0(t_1)\overline{\boldsymbol{Y}^0(t_2)}\right), \quad \boldsymbol{Y}^0(t) = \int_a^t g(t,\tau)\boldsymbol{X}^0(\tau) d\tau\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Проведя преобразования

$$\begin{aligned} &k_y(t_1,t_2) = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{Y}^0(t_1)\boldsymbol{Y}^0(t_2)\right) = \\ &= \boldsymbol{E}\left(\textstyle\int_a^{t_1} g(t_1,\tau)\boldsymbol{X}^0(\tau)d\tau \int_a^{t_2} g(t_2,\tau)\boldsymbol{X}^0(\tau)d\tau\right) = \\ &= \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} g(t_1,\tau_1)\overline{g(t_2,\tau_2)}\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^0(\tau_1)\overline{\boldsymbol{X}^0(\tau_2)}\right) d\tau_1 d\tau_2\,, \end{aligned}$$

получаем окончательно

$$k_y(t_1,t_2) = \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} g(t_1,\tau_1)\overline{g(t_2,\tau_2)} k_x(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\,. \tag{4.4}$$

Из формулы (4.4) можно найти дисперсию случайного процесса $\boldsymbol{Y}(t)$:

$$D_y(t) = k_y(t,t) = \int_a^t\int_a^t g(t,\tau_1)\overline{g(t,\tau_2)} k_x(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\,, \tag{4.5}$$

откуда следует, в частности, что для определения дисперсии интеграла нужно знать корреляционную функцию исходного процесса.

Формула (4.2) для процесса $\boldsymbol{Y}(t)$ представляет собой обобщение интеграла Дюамеля, описывающего реакцию линейной системы с одной степенью свободы на силу $\boldsymbol{X}(t)$.

Представленные в формулах (4.1)–(4.4) результаты говорят о том, что при решении линейных задач механики под действием случайных сил возможно несколько уровней анализа. Первый из них заключается в том, что мы ограничиваемся определением математических ожиданий процессов. При этом мы фактически имеем дело с неслучайными функциями. Следующий уровень — это *корреляционный уровень*, при котором определяются математические ожидания и корреляционные функции и которому ниже будет уделено основное внимание. Этот уровень анализа замкнут в себе в том смысле, что операции дифференцирования и интегрирования не выводят из него. При этом автоматически определяется и дисперсия, которая позволяет судить о вероятной величине отклонения от математического

ожидания. В то же время математическое ожидание и дисперсия, как следует из формул (4.1), (4.5), не порождают замкнутого уровня анализа.

§ 5. Механическая система с одной степенью свободы под действием случайной силы

Рассмотрим задачу Коши

$$m\ddot{x} + n\dot{x} + cx = F(t), \quad x(0) = a\,, \quad \dot{x}(0) = v\,,$$

описывающую малые вынужденные колебания груза на пружине с учетом сопротивления. Решение этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&x(t) = \left(a\cos\omega t + \frac{v+ha}{\omega}\sin\omega t\right)e^{-ht} + \int_0^t g(t-\tau)F(\tau)d\tau\,,\\
&h = \frac{n}{2m}\,, \quad \omega = \sqrt{k^2-h^2}\,, \quad k^2 = \frac{c}{m}\,,\\
&g(t-\tau) = \frac{1}{m\omega}e^{-h(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\,.
\end{aligned}$$

Пусть $F(t)$ — случайная сила с заданными математическим ожиданием $m_F(t)$ и корреляционной функцией $k_F(t_1,t_2)$. Требуется найти математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционную функцию $k_x(t_1,t_2)$ решения. Для простоты начальные условия a и v считаем неслучайными.

Находим математическое ожидание и центрированное возмущение

$$\begin{gathered}
m_x(t) = \left(a\cos\omega t + \frac{v+ha}{\omega}\sin\omega t\right)e^{-ht} + \int_0^t g(t-\tau)m_F(\tau)d\tau\,,\\
F^0(t) = F(t) - m_F(t)\,.
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Теперь корреляционную функцию находим по формуле (4.4) (знак комплексного сопряжения опущен, ибо считаем силу $F(t)$ вещественной):

$$k_x(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} g(t_1-\tau_1)g(t_2-\tau_2)k_F(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\,. \tag{5.2}$$

Полагая $t_1 = t_2 = t$, находим дисперсию $D_x(t) = k_x(t,t)$.

Чтобы придать вычислениям бóльшую наглядность, рассмотрим возмущение под действием белого шума.

Если $k_F(t_1,t_2) = H(t_1)\delta(t_1-t_2)$, где $\delta(t)$ — обобщенная дельта-функция Дирака, то процесс $F(t)$ называется *белым шумом*. Здесь ограниченная функция $H(t_1)$ — это *интенсивность белого шума*.

Напомним основные свойства дельта функции: $\delta(t) = 0$ при $t \neq 0$; $\delta(0) = \infty$; $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-c)dt = f(c)$.

Реальный процесс $F(t)$ можно приближенно считать белым шумом, если его корреляционная функция $k_F(t_1, t_2)$ достаточно быстро стремится к нулю с ростом разности $|t_1 - t_2|$; точнее, если можно приближенно считать $k_F(t_1, t_2) \approx 0$ при $|t_1 - t_2| > \Delta t$, где Δt существенно меньше характерного времени задачи. При этом интенсивность равна

$$H(t_1) = \int_{t_1-\Delta t}^{t_1+\Delta t} k_F(t_1, t_2)dt_2 \,.$$

В рассматриваемом примере аппроксимация процесса $F(t)$ белым шумом уместна, если $\Delta t \ll T, \quad T = 2\pi/\omega$.

Найдем дисперсию процесса $X(t)$:

$$D_x(t) = \int_0^t H(\tau)g^2(t-\tau)d\tau \,. \tag{5.3}$$

В предположении, что $H(\tau) = H_0 = \text{const}$, а силы сопротивления отсутствуют ($h = 0$), из (5.3) находим

$$D_x(t) = \frac{H_0}{mc}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right) \,. \tag{5.4}$$

Следовательно, при отсутствии сопротивления дисперсия вынужденных колебаний линейно растет со временем, совершая при этом колебания с частотой 2ω. Если $a = v = m_F = 0$, то колебания функции $X(t)$ будут расти пропорционально среднеквадратичному отклонению $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} \sim \sqrt{t}$. Интересно сравнить этот результат со скоростью роста амплитуды при резонансе под действием гармонического возбуждения, которая пропорциональна t.

При наличии сопротивления ($h > 0$) формула (5.3) дает более громоздкое, чем (5.4), выражение для дисперсии $D_x(t)$, которое здесь не приводится, однако при $t \to \infty$ дисперсия стремится к конечному значению, равному

$$D_x(\infty) = \frac{H_0\omega^2}{4hc^2} \,.$$

С течением времени размахи колебаний сначала нарастают, а затем стабилизируются.

На рис. 2 и 3 приведены результаты численного моделирования случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ при $a = v = m_F = 0$, $m = c = 1$, $h = 0.1$ под действием белого шума с интенсивностью $H = 1$ на интервалах времени

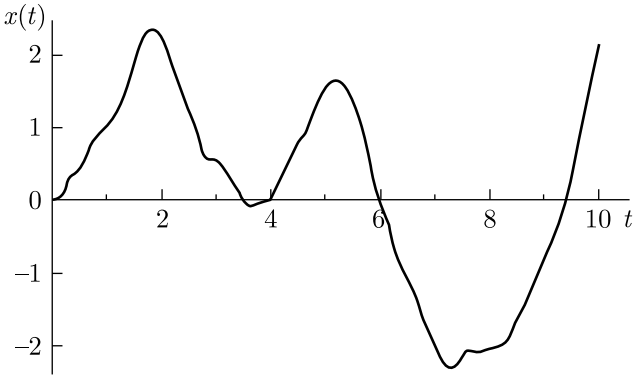

Рис. 2. Результат моделирования процесса $X(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 10$

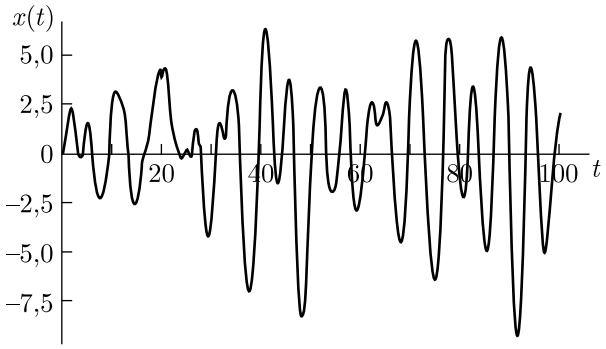

Рис. 3. Результат моделирования процесса $X(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 100$

$0 \leqslant t \leqslant 10$ и $0 \leqslant t \leqslant 100$ соответственно. Для принятых значений параметров период свободных колебаний близок к 2π, что можно проверить, подсчитав число максимумов кривой на рис. 3.

§ 6. Корреляционный анализ линейной механической системы с несколькими степенями свободы

Рассмотрим систему с n степенями свободы вида

$$\boldsymbol{A} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{B} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}(t)\,, \quad \boldsymbol{q}(0) = \dot{\boldsymbol{q}}(0) = 0\,, \tag{6.1}$$

где $\boldsymbol{q}(t) = (q_1, \ldots, q_n)^T$ — искомый вектор обобщенных координат, $\boldsymbol{Q}(t) = (Q_1, \ldots, Q_n)^T$ — заданный вектор обобщенных сил, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ — заданные

квадратные матрицы порядка n, причем $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Последующий анализ не предполагает симметрии либо положительной определенности этих матриц.

Решение задачи Коши (6.1) имеет вид

$$q(t) = \int_0^t \boldsymbol{G}(t,\tau) \cdot \boldsymbol{Q}(\tau) d\tau \,, \tag{6.2}$$

где $\boldsymbol{G}(t,\tau)$ — квадратная матрица импульсных переходных функций. Элемент $G_{ij}(t,\tau)$ этой матрицы — это реакция i-й обобщенной координаты в момент времени t на единичный импульс, приложенный вместо j-й обобщенной силы в момент τ.

При $t < \tau$ матрица $\boldsymbol{G}(t,\tau) \equiv 0$, а при $t \geqslant \tau$ элементы этой матрицы удовлетворяет однородным системам уравнений

$$\boldsymbol{A} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}_j}{\partial t^2} + \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{G}_j}{\partial t} + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{G}_j = \boldsymbol{0} \,, \quad \boldsymbol{G}_j = (G_{1j}, G_{2j}, \ldots, G_{nj})^T \,, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.3}$$

и начальным условиям при $t = \tau$

$$\boldsymbol{G}_j(\tau,\tau) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{A} \cdot \left.\frac{\partial \boldsymbol{G}_j}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \boldsymbol{\delta}_j \,, \quad \boldsymbol{\delta}_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{nj})^T \,,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Если матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ постоянны, возможно аналитическое построение решений системы (6.3). В этом случае матрица импульсных переходных функций зависит от разности аргументов $\boldsymbol{G}(t,\tau) = \widehat{\boldsymbol{G}}(t-\tau)$. Если же матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ зависят от времени, для построения матрицы $\boldsymbol{G}(t,\tau)$ приходится обращаться к численному интегрированию системы (6.3).

Пусть $\boldsymbol{Q}(t)$ и $\boldsymbol{q}(t)$ — вектор-функции со случайными компонентами, причем вероятностные характеристики возмущения $\boldsymbol{Q}(t)$ заданы, а вероятностные характеристики решения $\boldsymbol{q}(t)$ нужно найти. При корреляционном анализе такими характеристиками являются вектор математических ожиданий

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Q}}(t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{Q}(t)) = (m_{Q_1}(t), m_{Q_2}(t), \ldots, m_{Q_n}(t))^T \,,$$

состоящий из математических ожиданий отдельных компонент, и корреляционная матрица

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{Q}}(t_1,t_2) = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{Q}^0(t_1)\cdot\overline{\boldsymbol{Q}^{0T}(t_2)}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} K_{Q_1}(t_1,t_2) & K_{Q_1Q_2}(t_1,t_2) & \dots & K_{Q_1Q_n}(t_1,t_2) \\ K_{Q_2Q_1}(t_1,t_2) & K_{Q_2}(t_1,t_2) & \dots & K_{Q_2Q_n}(t_1,t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{Q_nQ_1}(t_1,t_2) & K_{Q_nQ_2}(t_n,t_2) & \dots & K_{Q_n}(t_1,t_2) \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

На главной диагонали в (6.4) стоят корреляционные функции отдельных компонент вектора $\boldsymbol{Q}(t)$, а остальные элементы — это *взаимные корреляционные функции*, описывающие вероятностную связь пар компонент, и определяемые по формулам типа

$$K_{Q_1Q_2}(t_1,t_2) = E\left(Q_1^0(t_1)\overline{Q_2^0(t_2)}\right), \quad Q_j^0(t) = Q_j(t) - m_{Q_j}(t).$$

Появление вероятностной связи между компонентами вектора $\boldsymbol{Q}(t)$ можно объяснить, в частности, следующим обстоятельством. Обобщенные силы Q_j выражаются через исходные силы X_i, заданные в декартовой системе координат, преобразованиями

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \tag{6.5}$$

где формулы перехода от обобщенных координат к декартовым имеют вид $x_i = x_i(q_j,t)$. Из (6.5) следует, что обобщенные силы Q_j зависимы между собой, даже если силы X_i независимы.

Корреляционная матрица $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{Q}}(t_1,t_2)$ положительна и удовлетворяет условию $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{Q}}(t_2,t_1) = \overline{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{Q}}(t_1,t_2)}$.

Результаты подстановки случайного вектора $\boldsymbol{Q}(t)$ в формулу (6.2) повторяют выкладки предыдущего параграфа с той разницей, что скалярные функции заменяются векторными и матричными функциями. Получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{q}}(t) &= \int_0^t \boldsymbol{G}(t,\tau)\cdot\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{Q}}(\tau)d\tau, \\ \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{q}}(t_1,t_2) &= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \boldsymbol{G}(t_1,\tau_1)\cdot\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{Q}}(\tau_1,\tau_2)\cdot\overline{G^T(t_2,\tau_2)}d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Формулы (6.6) служат обобщением формул (5.1) и (5.2) на случай системы с несколькими степенями свободы.

§ 7. Стационарные случайные процессы

Стационарные случайные процессы являются важным подмножеством случайных процессов. Вероятностные характеристики стационарных случайных процессов не зависят от начала отсчета времени и часто встречаются в приложениях. Например, если говорить о шуме в движущемся поезде или в летящем самолете как о случайном процессе, то в течение значительных интервалов времени шум можно описывать стационарным процессом. Нестационарным будет шум в периоды разгона, торможения или при других сменах режима движения.

Имеются два определения стационарного процесса.

Определение 4. Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в узком смысле*, если все его n-мерные функции распределения (3.1) не зависят от момента времени t_1, а зависят лишь от разностей $t_2 - t_1, \ \dots, \ t_n - t_1$.

Определение 5. Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если у него существуют конечные математическое ожидание и корреляционная функция, причем математическое ожидание постоянно ($m_x(t) = m_x^0$), а корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов ($K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau), \ \tau = t_2 - t_1$).

Ни одно из этих определений не является более общим, чем другое. Например, у процесса в узком смысле математическое ожидание может не быть конечным, а у процесса в широком смысле функции распределения могут не удовлетворять условию в определении 4.

Оценкой $\widehat{m}_x(t)$ процесса служит сумма, вычисленная по множеству реализаций $X^{(n)}(t)$ процесса

$$\widehat{m}_x(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X^{(n)}(t) \, .$$

Для определенного класса стационарных процессов, называемых *эргодичными*, осреднение по множеству реализаций можно заменить осреднением по времени:

$$\widehat{m}_x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \, .$$

Дадим строгое определение.

Определение 6. Процесс $X(t)$ называется *эргодичным по отношению к математическому ожиданию*, если

$$m_x = \underset{T \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \, . \tag{7.1}$$

Критерием эргодичности по отношению к математическому ожиданию является условие $\lim_{\tau\to\infty} k_x(\tau) \to 0$.

Аналогично можно ввести эргодичность по отношению к корреляционной функции

$$k_x(\tau) = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{T}\int_0^T X^0(t)\int_0^T X(t)\overline{X(t+\tau)}dt\,. \tag{7.2}$$

Ниже предполагается, что рассматриваемые стационарные процессы эргодичны. Эргодичность позволяет проводить вероятностный анализ даже в том случае, когда мы располагаем только одной реализацией. Например, можно провести вероятностный анализ Солнечной активности (эти исследования были выполнены ранее и продолжаются в настоящее время).

§ 8. Спектральная плотность

Использование представления стационарных процессов в виде интегралов Фурье является очень удобным для их описания и для выполнения ряда линейных операций над ними.

Напомним, что для неслучайной абсолютно интегрируемой функции $X(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|dt < \infty\,, \tag{8.1}$$

преобразование Фурье вводится по формуле

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{i\omega t}dt\,. \tag{8.2}$$

На основании теоремы Дирихле *обратное преобразование*

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{8.3}$$

справедливо, если на каждом конечном интервале функция $X(t)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода и не имеет других особенностей. При этом интеграл в (8.3) сходится в смысле главного значения, и в точках разрыва функции $X(t)$ формула (8.3) дает полусуммы предельных значений слева и справа.

Ясно, что для стационарного процесса условие (8.1) не выполнено. Поэтому вводится вспомогательная функция

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & |t| \leqslant T\,, \\ 0, & |t| > T, \end{cases}$$

и для нее могут быть использованы формулы (8.2) и (8.3).

Пользуясь эргодичностью и предполагая, что $m_x = 0$, запишем выражение для дисперсии:

$$D_x = \underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\overline{X(t)}dt\,.$$

Преобразование этого интеграла с использованием формул (8.2) и (8.3) дает

$$D_x = \underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T}|A_T(\omega)|^2 d\omega\,, \qquad A_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t)e^{i\omega t}dt\,.$$

Введем обозначение

$$s_x(\omega) = \underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2T}|A_T(\omega)|^2\,. \tag{8.4}$$

Тогда для дисперсии получаем выражение

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)d\omega\,. \tag{8.5}$$

Аналогичные вычисления дают выражение для корреляционной функции:

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega\,. \tag{8.6}$$

Функция $s_x(\omega)$ называется *спектральной плотностью* или *спектральной плотностью мощности процесса* $X(t)$. Рассмотрим, например, работу A сил сопротивления вида $F(t) = -nv(t)$, где $v(t)$ — скорость точки. Тогда работа за время T равна $A = -n\int_0^T v^2(t)dt$, а средняя мощность равна

$$N = \frac{A}{T} = -\frac{k}{T}\int_0^T v^2(t)dt\,.$$

Видим, что мощность вычисляется по такой же формуле, что и дисперсия. Если процесс $v(t)$ разложить в интеграл Фурье и выделить часть с частотами в интервале $[\omega,\, \omega + d\omega]$, то мощность выделенной части будет равна $s_v(\omega)d\omega$, что и объясняет происхождение названия «спектральная плотность мощности».

Формула (8.4) неудобна для вычисления спектральной плотности, однако, зная корреляционную функцию, ее можно вычислить исходя из формулы (8.6):

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\,. \tag{8.7}$$

В силу формулы (8.4) спектральная плотность неотрицательна:

$$s_x(\omega) \geqslant 0\,.$$

Для вещественного процесса корреляционная функция и спектральная плотность — четные функции, связанные соотношениями

$$k_x(\tau) = 2\int_0^\infty s_x(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega\,, \quad s_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty k_x(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau\,. \qquad (8.8)$$

Далее $D_x = k_x(0)$ и для вещественного процесса в силу неравенства (2.3) $|k_x(\tau)| \leqslant k_x(0)$.

Пример 1. Рассмотрим процесс $X(t)$ со спектральной плотностью вида

$$s_x(\omega) = \begin{cases} S_0\,, & |\omega| \leqslant \Omega\,, \\ 0\,, & |\omega| > \Omega\,. \end{cases}$$

Для него в силу формулы (8.8) корреляционная функция пропорциональна функции Дирихле

$$k_x(\tau) = 2S_0\frac{\sin(\Omega\tau)}{\tau}\,, \quad k_x(0) = D_x = 2S_0\Omega\,.$$

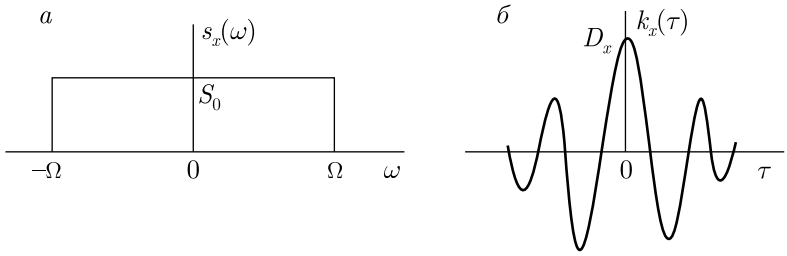

Рис. 4. Спектральная плотность и корреляционная функция процесса $X(t)$

С ростом Ω максимум функции $k_x(\tau)$, равный $2S_0\Omega$, растет, а сама функция $k_x(\tau)$ стягивается к началу координат. Графики функций $s_x(\omega)$ и $k_x(\tau)$ приведены на рис. 4. В пределе

$$\lim_{\Omega\to\infty} k_x(\tau) = S_0\delta(\tau)\,,$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака, процесс $X(t)$ называется *белым шумом*, а S_0 — его *интенсивность*. Название «белый шум» дано процессу по аналогии с белым светом, в котором представлены все частоты из видимого диапазона. Белый шум имеет бесконечную мощность. Мощность белого света конечна, ибо соотношение $s_x(\omega) = S_0$ нарушается в ультрафиолетовой и в инфракрасной областях.

§ 9. Спектральное разложение стационарного процесса

Здесь излагается ряд формальных операций над случайным процессом, приводящих к правильным конечным результатам.

Несмотря на то, что условие (8.1) не выполнено, положим

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V_x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega\,, \qquad V_x(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{i\omega t} dt\,. \quad (9.1)$$

Найдем корреляционную функцию случайной функции $V_x(\omega, \omega_1)$:

$$K_{V_x}(\omega, \omega_1) = \boldsymbol{E}(V_x(\omega)\overline{V_x(\omega_1)}) =$$
$$= \boldsymbol{E}\left(\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} X(t)\,\overline{X(t_1)}\,e^{i\omega t} e^{-i\omega_1 t_1}\,dt\,dt_1\right)\,.$$

Полагая

$$t_1 - t = \tau, \quad \boldsymbol{E}\left(X(t)\overline{X(t_1)}\right) = k_x(\tau)\,, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega_1 \tau} d\tau = s_x(\omega_1)\,,$$

получим

$$K_{V_x}(\omega, \omega_1) = s_x(\omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 - \omega)t} dt = 2\pi s_x(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega)\,. \quad (9.2)$$

Замена расходящегося интеграла в (9.2) на дельта-функцию может быть оправдана равенством

$$V_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 - \omega)t} dt\right) V_x(\omega_1) d\omega_1\,,$$

которое получается после исключения $X(t)$ из соотношений (9.1).

Разложение (9.1) позволяет выполнять операции дифференцирования и интегрирования над стационарными случайными процессами. Рассмотрим дифференцирование. Пусть $Y(t) = dX/dt$ и известна спектральная плотность $s_x(\omega)$. Требуется найти $s_y(\omega)$.

Записывая $Y(t)$ в виде

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V_y(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

и дифференцируя первое равенство (9.1) по t, находим $V_y(\omega) = i\omega V_x(\omega)$. Вычисление корреляционной функции $V_y(\omega)$ двумя способами приводит к равенству

$$K_{V_y}(\omega, \omega_1) = 2\pi s_y(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega) = \omega\omega_1 K_{V_x}(\omega, \omega_1) = 2\pi\omega\omega_1 s_x(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega)\,,$$

откуда следует искомая формула

$$s_y(\omega) = \omega^2 s_x(\omega)\,. \tag{9.3}$$

При этом остался в стороне вопрос о существовании производной. Критерием ее существования здесь выступает условие

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} s_y(\omega) d\omega < \infty\,. \tag{9.4}$$

Пусть, например, $s_x(\omega) = D/(\omega^2 + \alpha^2)$. Тогда $s_y(\omega) = D\omega^2/(\omega^2 + \alpha^2)$, и условие (9.4) не выполнено. Следовательно, случайная функция $X(t)$ не имеет производной. Графики функций $s_x(\omega)$ и $k_x(\tau)$ приведены на рис. 5.

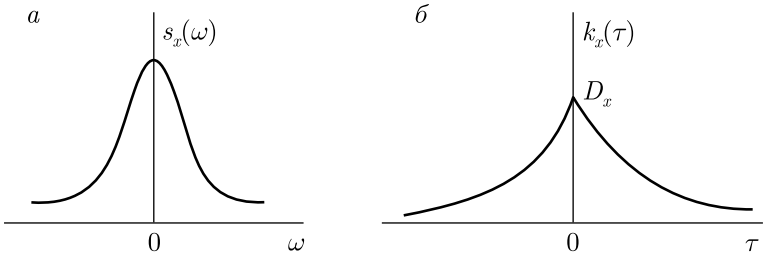

Рис. 5. Спектральная плотность и корреляционная функция процесса $X(t)$, не имеющего производной

Если $s_x(\omega) = D/((\omega^2 - \omega_0)^2 + \alpha^2)$, то функция $X(t)$ имеет первую производную и не имеет второй производной.

Можно предложить другой способ вывода формулы (9.3), не связанный со спектральным разложением. Из формулы (4.1) следует, что для стационарного процесса

$$k_y(\tau) = -\frac{d^2 k_x}{d\tau^2}\,, \quad Y = \frac{dX}{dt}\,.$$

Имеем

$$s_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_y(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k_x}{d\tau^2} e^{i\omega\tau} d\tau\,.$$

Теперь после двукратного интегрирования по частям с учетом связанного с эргодичностью соотношения $k_x(\tau) \to 0$ при $\tau \to \pm\infty$ получаем

$$s_y(\omega) = \omega^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \omega^2 s_x(\omega)\,.$$

§ 10. Колебания механической системы с одной степенью свободы при стационарном случайном возмущении

Рассмотрим уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + n\frac{dX}{dt} + cX = F(t)\,, \quad m > 0\,, \tag{10.1}$$

в предположении, что функция $F(t)$ — это стационарный случайный процесс с заданными математическим ожиданием m_F и спектральной плотностью $s_F(\omega)$. Требуется выяснить условия, при которых существует стационарное решение $X(t)$ уравнения (10.1), и найти m_x $s_x(\omega)$. В связи с тем, что решение складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, необходимо потребовать, чтобы с течением времени общее решение однородного уравнения стремилось к нулю (для этого необходимо и достаточно, чтобы было $n > 0,\ c > 0$). Тогда после затухания свободных колебаний оставшееся движение будет стационарным процессом.

Математическое ожидание решения $m_x = m_F/c$ находим, вычисляя математическое ожидание от обеих частей уравнения (10.1) и учитывая, что математические ожидания производных равны нулю.

Для вычисления $s_x(\omega)$ положим

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} V_x(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\,, \qquad F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} V_F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\,.$$

Тогда уравнение (10.1) дает

$$(c - m\omega^2 - in\omega)V_x = V_F\,, \quad V_x = S(\omega)V_F(\omega)\,, \quad S(\omega) = \frac{1}{c - m\omega^2 - in\omega}\,,$$

где функция $S(\omega)$ называется *передаточной функцией*, ибо при возмущении $F(t) = e^{-i\omega t}$ уравнение (10.1) имеет решение $X(t) = S(\omega)e^{-i\omega t}$.

Как и в предыдущем параграфе, выражая корреляционную функцию $K_{V_x}(\omega,\omega_1)$ через $K_{V_F}(\omega,\omega_1)$, находим окончательно

$$s_x(\omega) = s_F(\omega)|S(\omega)|^2 = \frac{s_F(\omega)}{(c - m\omega^2)^2 + n^2\omega^2}\,. \tag{10.2}$$

Располагая спектральной плотностью $s_x(\omega)$, можно найти дисперсию D_x по формуле (8.5) и, следовательно, оценить амплитуду колебаний.

Заметим, что при отсутствии сопротивления ($n = 0$) процесс $X(t)$ будет нестационарным, причем формула (8.5) дает $D_x = \infty$.

Пример 2. Боковая качка корабля описывается уравнением

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n\frac{d\varphi}{dt} + c\varphi = M(t)\,,$$

где φ — угол крена, J — момент инерции корабля относительно продольной оси вместе с моментом инерции присоединенных масс воды, n — коэффициент сопротивления, $-c\varphi$ — восстанавливающий момент, $M(t)$ — момент сил волнового воздействия. Функцию $M(t)$ считаем стационарным случайным процессом со спектральной плотностью $s_M(\omega)$. В соответствии с рекомендацией Международного Конгресса в Дельфте (1964 г.) функция $s_M(\omega)$ может быть принята в виде

$$s_M(\omega) = D_M\Phi(z)\,, \quad z = \frac{\omega}{\omega_a}\,, \quad \Phi(z) = 0.88z^{-5}e^{-0.44z^{-4}}\,,$$

где дисперсия D_M и частота ω_a характеризуют высоту волн и среднюю частоту их следования, а безразмерная функция $\Phi(z)$ показана на рис. 6.

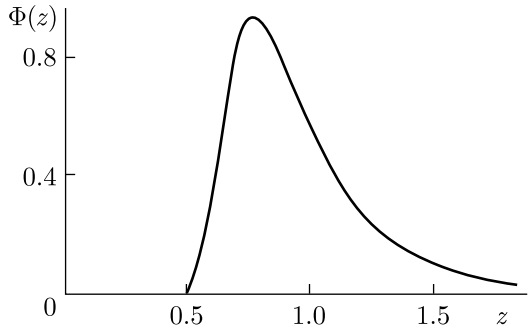

Рис. 6. Типичная спектральная плотность морского волнения

В силу формулы (10.2) дисперсия качки D_φ определяется по формуле

$$D_\varphi = 2\int_0^\infty s_M(\omega)|S(\omega)|^2 d\omega = 2\int_0^\infty \frac{s_M(\omega)}{(c - J\omega^2)^2 + n^2\omega^2}\,.$$

Функция $s_M(\omega)$ имеет максимум при $\omega = \omega_*$ (см. рис. 6). При малых n функция $|S(\omega)|^2$ имеет максимум вблизи резонансной частоты $\omega_0 = \sqrt{c/J}$. Расчеты показывают, что дисперсия качки D_φ будет максимальна при $\omega_* \approx \omega_0$.

Таким образом, *понятие резонанса обобщается на колебания при случайном стационарном возмущении.*

§ 11. Колебания механической системы с несколькими степенями свободы при стационарном случайном возмущении

Исходной является линейная система (6.1) дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\boldsymbol{A}\cdot\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{B}\cdot\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{q}=\boldsymbol{Q}(t)\,, \tag{11.1}$$

где $\boldsymbol{q}(t)=(q_1,\dots,q_n)^T$ — искомый вектор обобщенных координат, $\boldsymbol{Q}(t)=(Q_1,\dots,Q_n)^T$ — заданный вектор обобщенных сил, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ — заданные квадратные положительно определенные матрицы порядка n. В отличие от (6.1) здесь $\boldsymbol{Q}$ — стационарный случайный вектор обобщенных сил с заданными вектором математических ожиданий $\boldsymbol{m}_Q$ и спектральной матрицей $\boldsymbol{S}_Q(\omega)$. Начальные условия не ставятся и ищутся математическое ожидание $\boldsymbol{m}_q$ и спектральная матрица $\boldsymbol{S}_q(\omega)$ частного стационарного решения $\boldsymbol{q}(t)$.

Как и в (8.7), спектральные матрицы связаны с корреляционными матрицами соотношениями

$$\boldsymbol{S}_Q(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{K}_Q(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\,,$$
$$\boldsymbol{S}_q(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{K}_q(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\,.$$

По главной диагонали спектральных матриц стоят спектральные функции элементов случайных векторов, а остальные элементы — это взаимные спектральные функции $s_{Q_kQ_m}(\omega)$. Спектральные матрицы являются эрмитовыми, то есть удовлетворяют условиям

$$\boldsymbol{S}_Q^T=\overline{\boldsymbol{S}_Q}\,,$$
$$\boldsymbol{z}^T\cdot\boldsymbol{S}_Q\cdot\overline{\boldsymbol{z}}\geqslant 0\,,\quad \boldsymbol{z}=(z_1,\dots,z_n)^T\,.$$

Иными словами, транспонированная матрица равна сопряженной, и квадратичная форма, построенная на элементах этой матрицы, неотрицательна.

По аналогии с одной степенью свободы несложно установить, что

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{m}_q=\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{m}_Q\,,\\&\boldsymbol{S}_q(\omega)=\boldsymbol{S}(\omega)\cdot\boldsymbol{S}_Q(\omega)\cdot\overline{\boldsymbol{S}^T(\omega)}\,,\end{aligned} \tag{11.2}$$

где через $\boldsymbol{S}(\omega)$ обозначена матрица передаточных функций, равная

$$\boldsymbol{S}(\omega) = ((i\omega)^2\boldsymbol{A} + i\omega\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})^{-1}\,.$$

Отметим, что для системы с постоянными коэффициентами матрица импульсных переходных функций $\boldsymbol{G}(t_1, t_2)$ (см. (6.2)) зависит лишь от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$ и связана с матрицей передаточных функций формулой

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \int_0^\infty G(\tau)\; e^{-i\omega\tau} d\tau\,.$$

Пример 3. Рассмотрим колебания двухколесного транспортного средства (например, мотоцикла), едущего с постоянной скоростью v по неровной дороге. Малые колебания с перемещениями в вертикальной плоскости моделируем системой с двумя степенями свободы. Запишем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + \bar{n}\dot{\Delta}_1 + c\Delta_1 = 0\,, \quad x_1 = \Delta_1 - \xi_1\,, \\ m_{12}\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + \bar{n}\dot{\Delta}_2 + c\Delta_2 = 0\,, \quad x_2 = \Delta_2 - \xi_2\,, \end{aligned} \tag{11.3}$$

где x_1, x_2 — вертикальные перемещения корпуса над колесами, Δ_1, Δ_2 — деформации рессор, ξ_1, ξ_2 — высоты неровностей под колесами (рис. 7), m_1, m_{12}, m_2 — массовые характеристики ($m_{12}^2 < m_1 m_2$), $\bar{n}$ — коэффициент сопротивления, c — жесткость рессор. Неровности дороги описываем случайной функцией $\xi(s)$ с заданной корреляционной функцией $k_\xi(\lambda) = E\{\xi(s)\xi(s+\lambda)\}$.

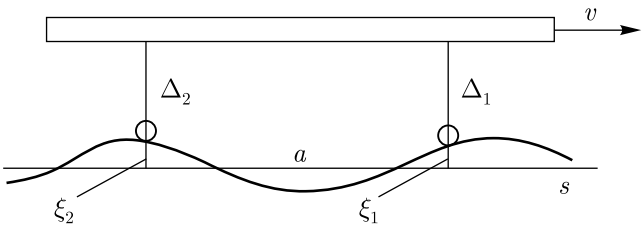

Рис. 7. Схема движения двухколесного транспортного средства по дороге со случайными неровностями

При движении со скоростью v следует считать $\xi_1(t) = \xi(vt)$, $\xi_2(t) = \xi(vt - a)$, где a — расстояние между колесами.

Запишем систему (11.3) в виде (11.1) при $n = 2$. Тогда

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} m_1 & m_{12} \\ m_{12} & m_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \bar{n} & 0 \\ c & \bar{n} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n}\dot{\xi}_1 + c\xi_1 \\ \bar{n}\dot{\xi}_2 + c\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы воспользоваться формулой (11.2), нужно вычислить матрицу спектральных плотностей возмущения $\boldsymbol{S}_Q(\omega)$. Найдем сначала

$$s_{\xi_1}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_{\xi_1}(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_{\xi}(v\tau)e^{i\omega\tau}d\tau =$$
$$= \frac{1}{2\pi v}\int_{-\infty}^{\infty} k_{\xi}(\lambda)e^{i\lambda(\omega/v)}d\lambda = \frac{1}{v}s_r(\omega/v)\,.$$

Здесь введена спектральная характеристика дороги

$$s_r(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_{\xi}(\lambda)e^{i\lambda p}d\lambda\,.$$

Оба колеса едут по одной и той же дороге, поэтому $s_{\xi_2}(\omega) = s_{\xi_1}(\omega)$. Вычисления, аналогичные проделанным, дают $s_{\xi_1\xi_2}(\omega) = s_{\xi_1}(\omega)e^{i\omega a/v}$, $s_{\xi_2\xi_1}(\omega) = \overline{s_{\xi_1\xi_2}(\omega)}$.

Пользуясь спектральным разложением, описанным в § 9, получаем окончательно

$$\boldsymbol{S}_Q(\omega) = \frac{1}{v}s_r(\omega/v)(\bar{n}^2\omega^2 + c^2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega a/v} \\ e^{-i\omega a/v} & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.4}$$

Формула (11.4) позволяет судить о зависимости возмущения от скорости движения v и вместе с формулой (11.2) найти спектральную матрицу решения.

§ 12. Нелинейные и статистически нелинейные задачи

До сих пор рассматривались линейные задачи механических колебаний под действием случайных сил. Для этих задач были построены решения на корреляционном уровне описания, то есть по заданным математическим ожиданиям и корреляционным функциям возмущения были найдены те же вероятностные характеристики решения. При этом информация о функциях распределения как заданного возмущения, так и искомого решения не используется. В нелинейных и статистически нелинейных задачах результаты зависят от информации (или предположения) о функциях распределения.

Достаточно общий вид нелинейной системы с n степенями свободы при случайном возбуждением таков:

$$m_k\ddot{x}_k = F_k(x_j, \dot{x}_j, \xi_p(t), t)\,, \qquad k, j = \overline{1, n}\,, \quad p = \overline{1, P}\,. \tag{12.1}$$

Здесь F_k — произвольные нелинейные функции своих аргументов, $\xi_p(t)$ — случайные функции времени с заданными вероятностными характеристиками. Требуется найти вероятностные характеристики неизвестных функций $x_k(t)$.

Статистически нелинейные задачи — это линейные задачи при случайном параметрическом возбуждении, например уравнение Хилла

$$\ddot{x} + \xi_1(t)x = 0 \tag{12.2}$$

или более общее уравнение

$$\ddot{x} + (a + b\xi_1(t))\dot{x} + (c + d\xi_2(t))\dot{x} = \xi_3(t) \tag{12.3}$$

со случайными функциями $\xi_j(t)$. Название «статистическая нелинейность» связано с тем, что в записи уравнений (12.2) и (12.3) участвуют произведения двух случайных функций. Для решения задач (12.1)–(12.3) корреляционный уровень решения неприменим.

Обсуждение способов решения указанных задач выходит за рамки этого учебника[2]. Здесь остановимся лишь на двух приближенных методах решения: на методе статистической линеаризации и на методе численного моделирования. В § 13 для марковских случайных процессов будет рассмотрен способ построения точного решения.

Метод статистической линеаризации. Рассмотрим этот метод на примере уравнения

$$\ddot{x} + n\dot{x} + f(x) = \xi(t)\,, \tag{12.4}$$

где $f(x)$ — нелинейная функция. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ стационарен и нам известны его математическое ожидание m_ξ и спектральная плотность $s_\xi(\omega)$.

Идея метода статистической линеаризации состоит в следующем. Представим неизвестную функцию в виде $x(t) = m_x + x^0(t)$, где m_x — ее математическое ожидание. Положим приближенно $f(x) = k_0 m_x + k_1 x^0$, где коэффициенты k_0 и k_1 (называемые коэффициентами усиления по полезному сигналу и по флуктуациям[3]) подлежат определению. Для стационарного решения линеаризованной задачи находим

$$m_x = \frac{m_\xi}{k_0}\,, \quad s_x(\omega, k_1) = \frac{s_\xi(\omega)}{(\omega^2 - k_1^2)^2 + n^2\omega^2}\,.$$

Следующим этапом решения является определение коэффициентов k_0 и k_1 из условия минимума дисперсии отклонения $f(x)$ от $k_0 m_x + k_1 x^0$:

$$\min_{k_0, k_1} \boldsymbol{E}\{(f(x) - k_0 m_x - k_1 x^0)^2\}\,.$$

[2] С решением этих задач можно познакомиться по первым трем монографиям, приведенным в предыдущем примечании.

[3] См. первую монографию в предыдущем примечании.

Получаем

$$k_0 = \frac{\boldsymbol{E}\{f(x)\}}{m_x}\,, \qquad k_1 = \frac{\boldsymbol{E}\{f(x)(x-m_x)}{D_x(k_0,k_1)}\,,$$

$$D_x = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)d\omega\,.$$

Для завершения вычислений необходимо принять гипотезу о плотности $p(x, m_x, \sigma_x)$ одномерного распределения случайной величины x с пока неизвестными математическим ожиданием m_x и среднеквадратичным отклонением σ_x. Чаще всего берут нормальный закон распределения (1.4), хотя в некоторых случаях, в которых известно точное решение, другие законы распределения приводят к более точному результату. Теперь задача сводится к системе четырех алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} k_0 m_x = m_f\,, \quad k_0 m_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x,m_x,\sigma_x)dx\,, \\ k_1\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-m_x)p(x,m_x,\sigma_x)dx\,, \\ \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega,k_1)d\omega \end{gathered} \tag{12.5}$$

относительно неизвестных $k_0,\ k_1,\ m_x,\ \sigma_x$.

Рассмотрим частный случай, в котором задача имеет явное решение. Пусть процесс $\xi(t)$ — это белый шум с $m_\xi = 0$, $s_\xi(\omega) = S_0$, а нелинейная функция $f(x) = x - x^3$. Тогда $k_0 = m_x = 0$, и в системе (12.5) остаются только третье и четвертое уравнения, причем интегралы вычисляются в явном виде. Эти уравнения дают

$$\sigma_x^2 = \frac{\pi S_0}{k_1^2 n}\,, \qquad k_1\sigma_x^2 = \sigma_x^2 - 3\sigma_x^4\,,$$

откуда для k_1 получаем кубическое уравнение

$$k_1^2(1-k_1) = a\,, \qquad a = \frac{3\pi S_0}{n}\,. \tag{12.6}$$

Имеют смысл лишь корни этого уравнения, лежащие в интервале $I = 0 < k_1 < 1$. Левая часть этого уравнения имеет максимум при $k_1 = k_1^* = 2/3$, равный $a_* = 4/27$. При $a < a_*$ уравнение (12.6) имеет два корня $k_1^{(1)}$, $k_1^{(2)}$ в интервале I, причем $1 > k_1^{(1)} > k_1^* > k_1^{(2)} > 0$. Этим корням соответствуют стандартные отклонения $\sigma_x^{(j)} = \sqrt{a/3}/k_1^{(j)}$, $j = 1, 2$, причем $\sigma_x^{(1)} < \sigma_x^{(2)}$. В зависимости от начальных условий реализуется тот или другой тип движения.

Если же $a > a_*$, то стационарных решений нет. Это и понятно, ибо при достаточно большом уровне возмущения (по сравнению с силами сопротивления) решение попадает в область $|x| > 1$, а решения однородного уравнения (12.4) при $|x| > 1$ неограниченно возрастают.

Разумеется, построенное решение является приближенным. Оно правильно предсказывает наличие ограничений на уровень возмущений, при которых существует стационарное решение. Определенные сомнения вызывает возможность появления двух стационарных решений. Этот вопрос может быть разрешен, в частности, методом численного моделирования, к обсуждения которого мы переходим.

Моделирование движений механических систем при случайном возбуждении. Пусть нужно промоделировать решение системы (12.1) при определенных начальных условиях под действием случайных возмущений $\xi_p(t)$ с заданными вероятностными характеристиками. Первым этапом решения является построение реализаций $\xi_p^{(j)}(t)$ случайных процессов $\xi_p(t)$. Далее система (12.1) численно интегрируется, и находится реализация $x_k^{(j)}(t)$. Эта процедура повторяется вплоть до получения необходимого числа реализаций $j = 1, \dots, J$, которые затем обрабатываются методами математической статистики и при этом находятся оценки вероятностных характеристик решения. Оценки $\widehat{m}_x(t)$ математического ожидания и $\widehat{k}_x(t_1, t_2)$ корреляционной функции решения могут быть найдены по формулам типа

$$\widehat{m}_x(t) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} x_k^{(j)}(t)\,,$$

$$\widehat{k}_x(t_1, t_2) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} (x_k^{(j)}(t_1) - \widehat{m}_x(t_1))(x_k^{(j)}(t_2) - \widehat{m}_x(t_2))\,.$$

Если ожидается получение стационарного эргодичного решения, то достаточно ограничиться построением одной реализации, отбросив начальный интервал времени, на котором сказывается влияние начальных условий, и провести его статистическую обработку по формулам типа (7.1), (7.2).

Методы моделирования случайных процессов весьма разнообразны и зависят от их вероятностных характеристик[4]. Остановимся здесь на моделировании стационарного центрированного случайного процесса $\xi(t)$ с заданной спектральной плотностью $s_\xi(\omega)$.

[4]См. литературу, приведенную в первой сноске данной главы.

Пусть $[\Omega_0, \Omega_1]$ — частотный интервал, внутри которого лежат учитываемые частоты. Интервал $[\Omega_0, \Omega_1]$ выбирается таким образом, чтобы воздействием на систему слагаемых (12.7) с более низкими и более высокими частотами можно было бы пренебречь. Моделирование процесса $\xi(t)$ осуществляется по формуле

$$\begin{aligned} &\xi(t) = \textstyle\sum_{n=1}^{N} \sqrt{2 s_\xi(\omega_n)\Delta\omega}(\eta_n \cos\omega_n t + \zeta_n \sin\omega_n t)\,, \\ &\Delta\omega = \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{N}\,, \quad \omega_n = \Omega_0 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta\omega\,. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Здесь ω_n — равномерно распределенные частоты на интервале $[\Omega_0, \Omega_1]$, η_n и ζ_n — независимые случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Существуют датчики независимых случайных чисел, равномерно распределенных на промежутке (0,1). Пусть α_n и β_n — два таких числа. Тогда числа

$$\eta_n = \sqrt{-2\log\alpha_n}\,\cos 2\pi\beta_n\,, \quad \zeta_n = \sqrt{-2\log\alpha_n}\,\sin 2\pi\beta_n$$

независимы, имеют нормальное распределение, нулевое среднее и единичную дисперсию.

§ 13. Марковские процессы. Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК)

Рассмотрим значения $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{X}^{(k-1)}, \boldsymbol{X}^{(k)}$ n-мерного векторного процесса $\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ в моменты времени $t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k$. В общем случае значение $\boldsymbol{X}^{(k)}$ процесса $\boldsymbol{X}$ зависит от всех значений $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{X}^{(k-1)}$.

Определение. Процесс $X(t)$ называется *марковским*, если значение $\boldsymbol{X}^{(k)}$ процесса $\boldsymbol{X}$ зависит только от $\boldsymbol{X}^{(k-1)}$ и не зависит от предыдущих значений.

Вероятностные характеристики марковского процесса полностью определяются плотностью $p(\boldsymbol{Y}, \tau, \boldsymbol{X}, t)$ вероятности перехода от значения процесса $\boldsymbol{Y}(\tau)$ к значению $\boldsymbol{X}(t)$.

Рассмотрим задачу Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_j, t) + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(x_j, t)\xi_k(t)\,, \quad x_i(\tau) = y_i\,, \quad i, j = \overline{1, n}\,, \tag{13.1}$$

где $\xi_k(t)$ — независимые стандартные процессы белый шум с корреляционной функцией $k_{xi_k}(t_1, t_2) = \delta(t_2 - t_1)$ ($\delta(t)$ — дельта-функция). Задача

(13.1) определяет векторный марковский процесс с плотностью вероятности перехода $p(y_1, \dots, y_n, \tau, x_1, \dots, x_n, t)$, удовлетворяющей уравнению ФПК в частных производных[5]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i p) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_{ij} p)\,, \quad x_i(\tau) = y_i\,.$$

Для стационарного процесса искомой является плотность $p_0(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющая уравнению

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i p_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_{ij} p_0) = 0\,. \tag{13.2}$$

Применим изложенное к уравнению (12.4), которое сначала перепишем в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2\,, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -nx_2 - f(x_1) + 2\pi S_0 \xi(t)\,. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Уравнение ФПК (13.2) имеет вид

$$-x_2 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}((nx_2 + f(x_1))p) + \pi S_0 \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0\,. \tag{13.4}$$

Интегрируя (13.4), получаем

$$p(x_1, x_2) = C \exp\left\{-\frac{n}{\pi S_0}\left(\frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} f(x)dx\right)\right\}\,, \tag{13.5}$$

где константа C находится из условия нормировки

$$\iint_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1\,. \tag{13.6}$$

В частности, дисперсия установившихся колебаний находится по формуле

$$\sigma_x^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1^2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2\,.$$

[5] См. третью монографию в литературе, приведенной в первой сноске данной главы.

После подстановки выражения (13.5) и интегрирования по x_2 получаем

$$\sigma_x^2 = \pi C \sqrt{\frac{2S_0}{n}} \iint_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \exp\left\{-\frac{n}{\pi S_0} \int_0^{x_1} f(x_1) dx_1\right\} dx_1 \,. \tag{13.7}$$

Дальнейшее зависит от вида функции $f(x)$. Если, например, $f(x) = x + ax^3$, $a > 0$, то вычисления по формулам (13.6) и (13.7) могут быть выполнены. Если же $a < 0$, то интегралы в этих формулах расходятся, и уравнение ФПК неприменимо для построения установившегося решения.

В системе (13.1) процессы $\xi_k(t)$ являются белыми шумами, что является серьезным ограничением. Однако в ряде случаев это ограничение можно обойти за счет увеличения порядка системы уравнений.

Проиллюстрируем сказанное на примере уравнения (12.4), в котором $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью $S_\xi(\omega)$. Возьмем

$$S_\xi(\omega) = \frac{S_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \nu^2\omega^2} \,.$$

При малых ν функция $S_\xi(\omega)$ имеет максимум вблизи $\omega = \omega_0$. Функция $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \nu\frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2\xi = 2\pi S_0 \xi_0(t) \,, \tag{13.8}$$

где $\xi_0(t)$ — стандартный белый шум. Присоединяя уравнение (13.3) к системе (13.8), получим систему четвертого порядка вида (13.1):

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = x_2 \,, && \frac{dx_3}{dt} = x_4 \,, \\ &\frac{dx_2}{dt} = -nx_2 - f(x_1) + x_3 \,, && \frac{dx_4}{dt} = -\nu x_4 - \omega_0^2 x_3 + 2\pi S_0 \xi_0(t) \,. \end{aligned}$$

Соответствующее стационарное уравнение ФПК имеет вид

$$\begin{gathered} -x_2\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial(nx_2 + f(x_1) - x_3)p}{\partial x_2} - x_4\frac{\partial p}{\partial x_3} + \\ + \frac{\partial(\nu x_4 + \omega_0^2 x_3)p}{\partial x_4} + \pi S_0 \frac{\partial^2 p}{\partial x_4^2} = 0 \,. \end{gathered} \tag{13.9}$$

В отличие от уравнения (13.4) решить уравнение (13.9) в явном виде не удается. Поэтому описываемый метод редко используется в приложениях.

Глава VIII
ФИЗИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

Автор: *С. А. Зегжда*

Глава посвящена классической теории удара, хотя начинается она с изложения теории Герца соударения упругих шаров. Делается это для того, чтобы яснее очертить круг тех вопросов, при решении которых основные предпосылки классической теории удара являются оправданными. Подробно обсуждается понятие коэффициента восстановления, введенное Ньютоном. Дается новый вывод алгебраической системы уравнений Лагранжа первого и второго рода, соответствующих классической теории удара механических систем с идеальными связями. Существенно, что эта система уравнений в ряде задач приобретает особо простую форму при использовании квазискоростей. В качестве примера рассматривается удар по прямолинейной цепочке стержней и по цепочке, расположенной на дуге окружности. В этих задачах уравнения Лагранжа, записанные в квазискоростях, по форме совпадают с уравнениями в конечных разностях. Применение хорошо разработанных методов решения уравнений в конечных разностях позволило построить аналитическое решение двух данных задач. Рассматриваются и другие важные примеры применения изложенных методов классической теории удара[1].

§ 1. Центральный удар двух тел

Теория Герца соударения шаров. Соударение тел — это сложный процесс, определяющими факторами которого являются форма тела и скорость соударения. Наиболее простая и совершенная форма тела — шар. Поэтому из всех известных в настоящее время теорий удара самой простой и совершенной является теория Герца соударения шаров. Рассмотрим эту теорию.

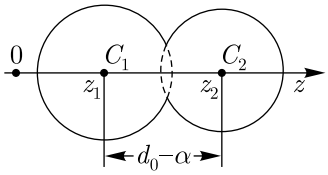

Рис. 1. Соударение шаров

[1] Более подробно о различных аспектах теории удара см. в монографии: *Зегжда С. А.* Соударение упругих тел. Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. 316 с.

Предположим, что до удара шары движутся поступательно со скоростями, направленными по прямой, соединяющей их центры. Будем считать, что эта прямая совпадает с неподвижной осью z (рис. 1), причем координата z_1 центра масс первого шара всегда меньше координаты z_2 центра масс второго. Если скорость $v_1 = \dot{z}_1$ первого шара с радиусом R_1 больше скорости $v_2 = \dot{z}_2$ второго шара с радиусом R_2, то в некоторый момент $t_0 = 0$, когда шары коснутся друг друга в одной точке, произойдет соударение. Развивающуюся при ударе контактную силу обозначим через $P(t)$. Силу $P(t)$ называют *ударной силой*. В принятых обозначениях уравнения движения центров масс шаров имеют вид

$$m_1\ddot{z}_1 = -P(t)\,, \quad m_2\ddot{z}_2 = P(t)\,.$$

Отсюда

$$\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)P(t) = -\frac{1}{m}P(t)\,, \tag{1.1}$$

где $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ — приведенная масса.

Расстояние $d = z_2 - z_1$ между центрами масс шаров, равное $d_0 = R_1 + R_2$ в момент их контакта в одной точке, при соударении равно $d_0 - \alpha$, то есть $\alpha = d_0 + z_1 - z_2$.

Уравнение (1.1) с учетом сказанного принимает вид

$$m\ddot{\alpha} = -P(t)\,. \tag{1.2}$$

Величину α, равную относительному смещению центров масс шаров, принято называть *местным смятием*. Термин «смятие» употребляется здесь не потому, что деформации предполагаются пластическими, а потому, что относительное перемещение шаров при силовом контакте происходит в основном вследствие деформации (смятия) их в зоне контакта.

Задача о статическом сжатии шаров в рамках классической теории упругости была решена Герцем в 1881 г. Решение это очень красиво, но сложно. Задача сводится к рассмотрению некоторого интегрального уравнения, решение которого удается построить с помощью теории потенциала. Полученное решение показывает, что деформации быстро затухают по мере удаления от места контакта. Установленная Герцем зависимость между контактной силой P и смещением α имеет вид

$$P = K\alpha^{3/2}, \quad K = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-1}\frac{4}{3}\sqrt{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}\,. \tag{1.3}$$

Здесь $\nu_1,\ \nu_2$ — коэффициенты Пуассона, а $E_1,\ E_2$ — модули Юнга соответственно первого и второго шаров.

Формула (1.3), строго говоря, является приближенной, так как получена в предположении, что в зоне контакта шары деформируются как плоские упругие полупространства. Однако поскольку радиус площадки контакта значительно меньше радиусов шаров, это допущение, существенно упрощающее решение задачи, приводит к достаточно точным результатам, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными. Более того, как показали новейшие теоретические и экспериментальные исследования, формулой (1.3) можно пользоваться и при переменной силе $P(t)$, то есть в динамике (например, при соударении шаров), при условии, что время пробега поперечной волны по радиусу площадки контакта существенно меньше времени нарастания силы. При скоростях соударения шаров, при которых еще не возникают пластические деформации, это условие всегда выполняется. Таким образом, при упругом ударе шаров можно считать, что в уравнении (1.2) величины P и α связаны соотношением (1.3), то есть

$$m\ddot{\alpha} = -K\alpha^{3/2}\,. \tag{1.4}$$

Отметим, что к такому же уравнению сводится решение задачи о падении тела с массой m со скоростью $v_0 = \dot{\alpha}(0) = \dot{z}_1(0) - \dot{z}_2(0) = v_1 - v_2$ на неподвижную безмассовую нелинейную пружину, восстанавливающая сила которой пропорциональна смещению в степени $3/2$.

Нелинейное уравнение (1.4), являющееся уравнением вида $\ddot{x} = -f(x)$, допускает существование интеграла энергии

$$\frac{1}{2}m(\dot{\alpha}^2 - v_0^2) = -K\int_0^{\alpha}\alpha^{3/2}d\alpha = -\frac{2}{5}K\alpha^{5/2}\,. \tag{1.5}$$

В момент обращения скорости относительного смещения $\dot{\alpha}$ в нуль величина α достигает максимального значения $\alpha_{\max}$, поэтому

$$\alpha_{\max} = \left(\frac{5mv_0^2}{4K}\right)^{2/5}, \tag{1.6}$$

$$P_{\max} = K\alpha_{\max}^{3/2} = K\left(\frac{5mv_0^2}{4K}\right)^{3/5}. \tag{1.7}$$

На первой стадии удара, когда величина α возрастает во времени, уравнение (1.5) можно записать в виде

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{4K}{5m}\alpha^{5/2}} = v_0\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}}\right)^{5/2}}. \tag{1.8}$$

Интегрируя его, получаем

$$t = \frac{\alpha_{\max}}{v_0} \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^{5/2}}}\,, \quad \eta = \frac{\alpha}{\alpha_{\max}}\,.$$

Неопределенный интеграл от функции $(1-\eta^{5/2})^{-1/2}$ не выражается через известные функции. Поэтому зависимость t от η может быть найдена только путем численного интегрирования. Определенный же интеграл при $\eta = 1$ вычисляется через функцию $\Gamma(x)$. В результате имеем

$$I = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^{5/2}}} = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{2}{5})}{5\Gamma(\frac{9}{10})} = 1.4716\,.$$

Время нарастания контактной силы $P(t)$ равно времени ее спада, поэтому время соударения t_* выражается через вычисленный интеграл I по формуле

$$t_* = \frac{2I\alpha_{\max}}{v_0} = \frac{2.9432\,\alpha_{\max}}{v_0}\,. \tag{1.9}$$

Для определения в безразмерных переменных

$$\tau = \frac{t}{t_*}\,, \quad y = \frac{P}{P_{\max}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}}\right)^{3/2}, \quad \eta = y^{2/3}$$

зависимости ударной силы от времени обратимся к уравнению (1.8). В новых переменных имеем

$$\frac{dy}{d\tau} = 3Iy^{1/3}\sqrt{1-y^{5/3}}\,, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Функция $y(\tau)$, построенная путем численного интегрирования этого уравнения, приведена на рис. 2. Характерной особенностью функции является то, что ее производная при $\tau = 0$ и $\tau = 1$ обращается в нуль.

Отметим, что формулы (1.6), (1.7) и (1.9) могут быть применены и к случаю соударения тел, которые имеют сферические закругления с радиусами R_1 и R_2 соответственно только в окрестности точки их первоначального контакта.

Полагая, что соударяются два одинаковых шара и $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, для основных параметров удара $P_{\max}$, t_*, $\alpha_{\max}$ получаем

$$\begin{gathered} P_{\max} = 1.37ER^2\left(\frac{v_0}{a}\right)^{6/5}, \quad t_* = \frac{5.63R}{a}\left(\frac{a}{v_0}\right)^{1/5}, \\ \alpha_{\max} = 1.91R\left(\frac{v_0}{a}\right)^{4/5}. \end{gathered} \tag{1.10}$$

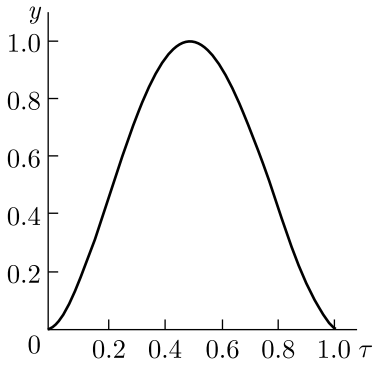

Рис. 2. График контактной силы

Здесь $a = \sqrt{E/\rho}$ (ρ — плотность) — скорость распространения продольной волны в тонком стержне из того же материала, что и шары. Для стали $E = 2.05 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $a = 5.13 \cdot 10^3$ м/с. При $R = 1$ см ($m = 32.7$ г) и $v_0 = 5.13$ см/с получаем $P_{\max} = 28.2$ Н, $t_* = 110 \cdot 10^{-6}$ с $= 110$ мкс, $\alpha_{\max} = 1.91 \cdot 10^{-6}$ м $= 1.91 \cdot 10^{-3}$ мм.

Для сравнения проследим, как изменятся эти величины при увеличении скорости в 10, а затем и в 100 раз. В первом случае имеем $v_0 = 0.513$ м/с, $P_{\max} = 446$ Н, $t_* = 69.5$ мкс, $\alpha_{\max} = 1.21 \cdot 10^{-2}$ мм, во втором — $v_0 = 5.13$ м/с, $P_{\max} = 7.1$ кН, $t_* = 44$ мкс, $\alpha_{\max} = 0.076$ мм.

При больших скоростях теорию Герца используют только для приближенной оценки основных параметров удара, так как даже у закаленных шаров, изготовленных из высококачественной стали, при скоростях соударения примерно 5–8 м/с начинают наблюдаться местные пластические деформации.

Как видно из формул (1.10), время соударения, а также максимальное относительное перемещение шаров пропорционально их радиусу, максимальное же значение ударной силы пропорционально квадрату радиуса. Приведенные значения величин $P_{\max}$, t_*, $\alpha_{\max}$ получены при $R = 1$ см, поэтому по ним легко можно найти соответствующие значения и для шаров произвольного радиуса.

Рассматривая формулы (1.10) и вычисленные по ним значения, обратим внимание на то, что перемещения шаров за время удара, измеренные в долях их радиусов (точнее, величины $\alpha_{\max}/R$), имеют порядок 10^{-3}–10^{-4}. Следовательно, для удара характерно, что шары, практически не изменяя положения, приобретают в конце удара новые скорости. Для нахождения этих скоростей проинтегрируем уравнения движения шаров в пределах от

$t = 0$ до $t = t_*$. При этом получим

$$m_1 v_1' - m_1 v_1 = -\widehat{P}\,, \quad m_2 v_2' - m_1 v_2 = -\widehat{P}\,, \tag{1.11}$$

где $v_k' = \dot{z}(t_*)$ — скорости шаров после удара, $\widehat{P} = \int_0^{t_*} P(t)dt$ — *импульс ударной силы.*

Интегрируя в тех же пределах уравнение (1.2), имеем

$$m(\dot{\alpha}(t_*) - \dot{\alpha}(0)) = -\widehat{P}\,. \tag{1.12}$$

Вследствие симметрии кривой $P(t)$ относительно прямой $t = t_*/2$ (рис. 2) имеем

$$\dot{\alpha}(t_*) = -\dot{\alpha}(0) = -v_0\,,$$

и, следовательно,

$$\widehat{P} = 2mv_0\,.$$

Подставляя это значение $\widehat{P}$ в формулы (1.11), находим

$$v_1' = v_1 - \frac{2m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}\,, \qquad v_2' = v_2 + \frac{2m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}\,.$$

В частности, если $m_1 = m_2$, то

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1\,.$$

Шары в данном случае обмениваются скоростями.

Выразим импульс $\widehat{P}$ через произведение $P_{\max} t_*$. В соответствии с формулами (1.9),(1.6) и (1.7) имеем

$$P_{\max} t_* = \frac{2I}{v_0} P_{\max} \alpha_{\max} = 2.5\, Imv_0 = 3.68\, mv_0\,. \tag{1.13}$$

Отсюда

$$\widehat{P} = 2\, mv_0 = \frac{P_{\max} t_*}{1.25I} = 0.544\, P_{\max} t_*\,.$$

Эти выражения позволяют по значению $\alpha_{\max}$, вычисленному по формуле (1.6), определить параметры удара $P_{\max}$ и t_* из простых соотношений (1.13).

Ударный импульс. Теорема Кельвина. Как было показано на примере соударения шаров, самым характерным для удара является то, что система, почти не изменяя положения, приобретает новые скорости. Достигается это благодаря действию сил, имеющих конечный импульс. Рассмотрим такие силы более подробно.

Предположим, что сила $\mathbf{F}(t)$, приложенная к телу с массой m, действует столь короткий промежуток времени t_*, что перемещениями его за это время можно пренебречь. Пусть далее импульс этой силы

$$\widehat{\mathbf{P}} = \int_0^{t_*} \mathbf{F}(t)dt$$

является конечным. Так как приложить такую силу $\mathbf{F}$ практически можно в основном благодаря удару по данному телу другого тела, то импульс $\widehat{\mathbf{P}}$ принято называть *ударным импульсом.*

Интегрируя уравнение движения центра масс рассматриваемого тела, получаем

$$m\mathbf{v}' - m\mathbf{v} = \widehat{\mathbf{P}}\,. \tag{1.14}$$

Здесь $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ — скорость центра масс до и после приложения ударного импульса соответственно.

Умножая равенство (1.14) скалярно на вектор $(\mathbf{v}' + \mathbf{v})/2$, имеем

$$\frac{m(\mathbf{v}')^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \widehat{\mathbf{P}} \cdot \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{v}}{2}\,.$$

Вместе с тем по теореме об изменении кинетической энергии находим

$$\frac{m(\mathbf{v}')^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \int_0^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \equiv A\,. \tag{1.15}$$

Сравнивая эти два равенства, видим, что работа силы $\mathbf{F}$ за время t_* связана с импульсом $\widehat{\mathbf{P}}$ следующим соотношением:

$$A = \widehat{\mathbf{P}} \cdot \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{v}}{2}\,. \tag{1.16}$$

Данное равенство является аналитическим выражением *теоремы Кельвина.* Оно справедливо при любой силе $\mathbf{F}(t)$.

Здесь следует сделать следующее замечание. Соотношение (1.16) является, с одной стороны, следствием теоремы импульсов (1.14), а с другой — следствием теоремы об изменении кинетической энергии (1.15). Выражение (1.14) применимо к любой механической системе, если под $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ подразумевать скорости центра масс системы. Соотношение же (1.15) справедливо в том случае, когда рассматриваемое тело с массой m является абсолютно твердым и движется поступательно.

Рассмотрим теперь возможность применения теоремы Кельвина к явлению удара. Предположим, что ударная сила $\mathbf{F}(t)$ приложена к телу массой m по линии, которая проходит через его центр масс. В этом случае

говорят, что *удар центральный*. При этом если тело до удара двигалось поступательно, то оно будет двигаться поступательно и после него.

Отметим, что непосредственно в окрестности приложения ударного импульса могут возникнуть пластические деформации. Однако область, в которой развиваются значительные деформации, будем считать малой по сравнению с объемом всего тела. Только в этом случае при вычислении кинетической энергии тела в момент $t = t_*$ наличием относительных скоростей, связанных с его деформацией, можно пренебречь, то есть считать, что кинетическая энергия тела после приложения импульса равна $m(\mathbf{v}')^2/2$.

Теорема об изменении кинетической энергии, записанная в виде (1.15), является следствием теоремы о движении центра масс, поэтому в правой части формулы (1.15) при вычислении работы сила $\mathbf{F}$ считается приложенной к центру масс. В окончательном же равенстве (1.16) импульс можно считать приложенным непосредственно в точке соударения, так как скорость ее до и после удара в рамках принятой модели равна соответственно $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$.

Существенно, что работа импульса $\widehat{\mathbf{P}}$ оказывается вычисленной без определения перемещений тела за время удара. Это означает, что при изучении удара возможен такой подход, при котором он считается мгновенным, а перемещения — отсутствующими. Очевидно, что в рамках данного подхода могут изучаться только вопросы, связанные с изменением поля скоростей под действием ударных импульсов. Вопросы эти являются предметом исследования *классической теории удара*.

Прямой центральный удар двух тел. Коэффициент восстановления. Выясним, как решается задача о соударении двух массивных тел согласно классической теории. Предположим, что точка A первоначального контакта тел лежит на прямой, соединяющей их центры масс. Удар в этом случае является центральным. Если же, кроме того, тела до удара двигались поступательно и скорости лежали на прямой, соединяющей их центры, то удар называется *прямым центральным*.

Нами уже был рассмотрен такой удар двух шаров и найдена зависимость ударной силы от времени. В рамках классической теории удара задача ставится гораздо проще. В ней не учитывается изменение ударной силы во времени и требуется определить только скорость тел после соударения и импульс ударной силы. При решении данной задачи воспользуемся теми же обозначениями, что и в задаче о соударении шаров.

Будем теперь рассматривать рис. 1 как схему, понимая под z_1 и z_2 координаты центров масс соответственно первого и второго тел. Исход-

ные уравнения (1.1) и (1.2) при этом имеют тот же вид, что и для шаров. Для определения интересующих нас неизвестных v_1', v_2' и $\widehat{P}$ воспользуемся уравнениями (1.11) и (1.12). Третье уравнение указанной системы содержит скорость $\dot{\alpha}(t_*)$, с которой центры масс разлетаются после удара. В теории Герца эта скорость равна $-v_0$. В общем же случае она неизвестна.

Отношение скорости $-\dot{\alpha}(t_*)$ к скорости $\dot{\alpha}(0) = v_0$ как важная характеристика процесса соударения двух тел было впервые введено Ньютоном. Считая, что это отношение, определяемое формулой

$$k = \frac{-\dot{\alpha}(t_*)}{\dot{\alpha}(0)} = \frac{\dot{z}_2(t_*) - \dot{z}_1(t_*)}{\dot{z}_1(0) - \dot{z}_2(0)} = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}\,, \tag{1.17}$$

является заданным, имеем

$$\begin{gathered} \widehat{P} = (1+k)mv_0 = \frac{(1+k)m_1m_2v_0}{m_1+m_2}\,, \\ v_1' = v_1 - \frac{(1+k)mv_0}{m_1} = \frac{(m_1 - km_2)v_1 + (1+k)m_2v_2}{m_1+m_2}\,, \\ v_2' = v_2 + \frac{(1+k)mv_0}{m_2} = \frac{(1+k)m_1v_1 + (m_2 - km_1)v_2}{m_1+m_2}\,. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Величина k называется *коэффициентом восстановления*. Она имеет простой и ясный физический смысл и представляет собой отношение скорости, с которой тела разлетаются после удара, к скорости их сближения до него. Если $k = 1$, то удар называется *абсолютно упругим*, при $0 < k < 1$ — *неупругим* или *несовершенно упругим*, и, наконец, при $k = 0$ — *абсолютно неупругим*.

Названия первого и последнего случаев ($k = 1$ и $k = 0$) точно отражают характер наблюдаемого явления. Термин же «неупругий удар» требует дополнительного разъяснения. Дело в том, что коэффициент восстановления может быть отличен от единицы не только вследствие того, что удар сопровождается необратимыми деформациями, а также потому, что в телах при соударении возбуждаются упругие колебания. Энергия послеударных вибраций, в частности, существенно влияет на коэффициент восстановления, если одно из тел имеет форму тонкого стержня. Очевидно, например, что энергия таких вибраций значительна при ударе массивного шара о длинный стержень, когда ось, вдоль которой перемещается центр шара, перпендикулярна оси стержня (поперечный удар). Если же размеры тел по всем трем направлениям являются величинами одного порядка, то энергией упругих колебаний, оставшихся в телах после удара, можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией системы до него. В простейшем случае соударения двух одинаковых шаров соотношение между

указанными энергиями, как показал Рэлей, таково:

$$\frac{T}{T_0} = 0.02\,\frac{v_0}{a}\,.$$

Здесь T — максимальная кинетическая энергия вибрации шаров, $T_0 = mv_0^2/2$, m — масса шара, v_0 — скорость соударения, a — скорость распространения продольной волны в материале шаров (для стали $a = 5.13 \cdot 10^3$ м/с). Местные деформации являются упругими только при таких скоростях соударения, когда отношение v_0/a имеет порядок 10^{-2}–10^{-3}. При этом отношение T/T_0 является величиной порядка 10^{-4}–10^{-5}.

Следовательно, для шаров и тел, все три размера которых имеют один порядок, величина k отлична от единицы в основном вследствие того, что удар сопровождается пластическими деформациями, и поэтому при $0 < k < 1$ его естественно назвать *неупругим*. Здесь следует также указать, что величина k очень чувствительна к чистоте обработки поверхностей соударяющихся тел. Наличие микронеровностей в зоне контакта приводит к появлению локальных пластических деформаций, которые очень трудно измерить и оценить. В целом форма соударяющихся тел даже в окрестности точки соударения по грубым измерениям не изменяется. Однако значение k отлично от единицы вследствие необратимых локальных деформаций.

Первые опыты по определению коэффициента восстановления, проведенные Ньютоном для шаров из различных материалов, дали следующие результаты: для шерсти, пробки и железа $k = 5/9$, для слоновой кости $k = 8/9$, для стекла $k = 15/16$. Эти значения k соответствуют скорости соударения, равной приблизительно 2.8 м/с. Дальнейшие эксперименты показали, что значение k зависит не только от материала, но и от других факторов: скорости соударения, формы тел, качества обработки их поверхностей в окрестности точки соударения.

В процессе соударения двух тел различают две фазы, или периода. В первой фазе центры тяжести тел сближаются, а во второй — удаляются друг от друга. Первая фаза заканчивается в момент $t = t_{**}$, когда относительное перемещение α достигает максимального значения $\alpha = \alpha_{\max}$, вторая же фаза завершается в момент окончания удара.

Интегрируя уравнение (1.2) в пределах от $t = 0$ до $t = t_{**}$, а затем в пределах от $t = t_{**}$ до $t = t_*$ и учитывая, что $\dot\alpha(t_{**}) = 0$, получаем

$$m\dot\alpha(0) = \int_0^{t_{**}} P(t)dt = \widehat{P}_1\,, \quad -m\dot\alpha(t_*) = \int_{t_{**}}^{t_*} P(t)dt = \widehat{P}_2\,. \tag{1.19}$$

По определению коэффициент восстановления k равен отношению $-\dot{\alpha}(t_*)/\dot{\alpha}(0)$. Из формул (1.19) следует, что величина k может быть представлена в виде

$$k = \widehat{P}_2/\widehat{P}_1\,. \tag{1.20}$$

Отсюда

$$\widehat{P} = (1+k)\widehat{P}_1 = (1+k)mv_0\,.$$

Как видно из этой формулы, импульс P при абсолютно упругом ударе ($k=1$) в два раза больше, чем при абсолютно неупругом ($k=0$).

Зависимость ударной силы от времени, вообще говоря, определяется не только местными, но и общими деформациями соударяющихся тел. При существенном влиянии общих деформаций момент, в который ударная сила достигает максимального значения $P = P_{\max}$, отличается от момента $t = t_{**}$, когда $\alpha = \alpha_{\max}$. Сближение центров масс соударяющихся тел продолжается при этом некоторое время и при спаде ударной силы. Отметим, что в подобном случае значение коэффициента восстановления может быть определено по известной функции $P(t)$ из формул (1.11) и (1.17). Таким образом, формулой (1.20) удобно пользоваться только при условии, что общими деформациями соударяющихся тел можно пренебречь, то есть когда $P(t_{**}) = P_{\max}$ (рис. 3).

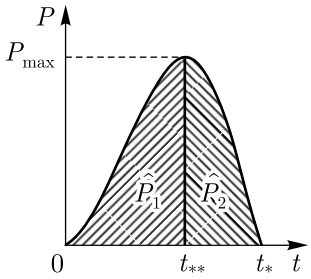

Рис. 3. График ударной силы

До сих пор мы анализировали случай соударения двух свободных твердых тел. Остановимся теперь на случае удара тела с массой m о преграду. Если эту преграду рассматривать как абсолютно твердое тело всюду, кроме малой области, где происходит удар, то его можно считать частным случаем соударения двух тел при $m_1 = m$ и $m_2 = \infty$. Полагая, что преграда неподвижна ($v_2 = v_2' = 0$), и вводя для простоты обозначения $v = v_1 \equiv v_0$ (скорость падения), $v' = v_1'$ (скорость отскока), в соответствии с формулами (1.17), (1.18) имеем

$$v' = -kv\,, \quad \widehat{P} = (1+k)mv\,.$$

В частности, при падении тела с массой m с высоты h на неподвижную горизонтальную плоскость скорость удара равна $\sqrt{2gh}$. При скорости отскока $v' = -kv$ оно поднимается на высоту $h' = (v')^2/(2g)$. Отсюда следует, что коэффициент восстановления может быть найден по формуле

$$k = \sqrt{h'/h}\,,$$

которая обычно используется для экспериментального определения величины k.

Изменение кинетической энергии при соударении тел. Теорема Карно. Применяя теорему Кельвина (1.15), (1.16) к первому, а затем ко второму телу, получаем

$$\Delta T_1 = \frac{m_1(v_1')^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} = -\widehat{P}\,\frac{v_1' + v_1}{2}\,,$$
$$\Delta T_2 = \frac{m_2(v_2')^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \widehat{P}\,\frac{v_2' + v_2}{2}\,,$$

откуда

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{\widehat{P}(v_2' - v_1' - v_1 + v_2)}{2}\,. \tag{1.21}$$

Учитывая соотношения

$$\widehat{P} = (1+k)mv_0, \quad v_2' - v_1' = k(v_1 - v_2) = kv_0\,, \tag{1.22}$$

имеем

$$\Delta T = \frac{(1+k)mv_0(k-1)}{2} = -\frac{(1-k^2)mv_0}{2}\,.$$

Установим физический смысл энергии $mv_0^2/2$. В момент $t = t_{**}$, когда $\dot\alpha(t_{**}) = 0$, центры масс первого и второго тел имеют одинаковую скорость, равную скорости v_c центра масс всей системы. Интегрируя уравнения движения тел в пределах от $t = 0$ до $t = t_{**}$, получаем

$$m_1(v_c - v_1) = -\widehat{P}_1, \quad m_2(v_c - v_2) = \widehat{P}_1\,,$$

где в соответствии с формулой (1.19)

$$\widehat{P}_1 = m\dot\alpha(0) = m(v_1 - v_2) = mv_0\,.$$

Используя эти выражения, находим, что кинетическая энергия системы при движении ее относительно системы, перемещающейся поступательно

вместе с центром масс системы обоих тел со скоростью v_c, до удара равна

$$T_r = \frac{m_1(v_1 - v_c)^2}{2} + \frac{m_2(v_2 - v_c)^2}{2} = \frac{\widehat{P}_1^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) =$$
$$= \frac{\widehat{P}_1^2}{2m} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_1 - v_2)^2}{2}\,.$$

Аналогично можно показать, что

$$T_r' = \frac{m_1(v_1' - v_c)^2}{2} + \frac{m_2(v_2' - v_c)^2}{2} = \frac{m(v_2' - v_1')^2}{2}\,.$$

Отсюда следует, что коэффициент восстановления может быть представлен также в виде

$$k = \sqrt{T_r'/T_r}\,.$$

Для выражения ΔT не через T_r, а через кинетическую энергию потерянных скоростей, то есть с помощью величины

$$T_* = \frac{m_1(v_1 - v_1')^2}{2} + \frac{m_2(v_2 - v_2')^2}{2}\,,$$

воспользуемся соотношениями (1.11). Из них непосредственно следует, что

$$T_* = \widehat{P}(v_2' - v_2 - v_1' + v_1)/2\,.$$

На основании этой формулы, а также формул (1.21), (1.22) находим, что

$$\frac{\Delta T}{T_*} = \frac{v_2' - v_1' - v_1 + v_2}{v_2' - v_1' + v_1 - v_2} = \frac{k-1}{k+1}\,.$$

Соотношение

$$|\Delta T| = \frac{1-k}{1+k}T_*\,,$$

связывающее потерю кинетической энергии при ударе с кинетической энергией потерянных скоростей, является аналитическим выражением *теоремы Карно*.

Косой удар. Рассмотрим теперь случай, когда удар является центральным, но скорости поступательно движущихся тел до удара не лежат на одной прямой z (рис. 4). Такой удар называется *косым центральным*.

Предположим для простоты, что скорости v_1 и v_2 лежат в одной плоскости yz. Представим их в виде

$$\mathbf{v}_1 = v_{1\tau}\boldsymbol{\tau} + v_{1n}\mathbf{n}\,, \quad \mathbf{v}_2 = v_{2\tau}\boldsymbol{\tau} + v_{2n}\mathbf{n}\,,$$

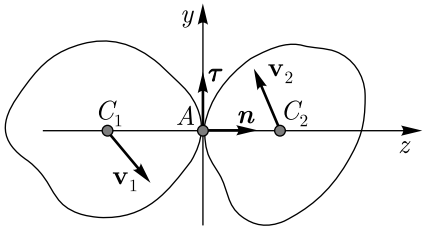

Рис. 4. Косой центральный удар

где $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — единичные орты соответственно осей y и z.

Сила соударения, развивающаяся при косом ударе, вообще говоря, имеет не только нормальную, но и касательную составляющую. Пусть сила соударения, приложенная ко второму телу, имеет вид

$$\mathbf{P}(t) = P_\tau(t)\boldsymbol{\tau} + P_n(t)\mathbf{n}\,.$$

Тогда уравнения движения центров масс соответственно первого и второго тел записываем в виде

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 &= -P_\tau(t)\,, \quad m_2\ddot{y}_2 = P_\tau(t)\,,\\ m_1\ddot{z}_1 &= -P_n(t)\,, \quad m_2\ddot{z}_2 = P_n(t)\,. \end{aligned}$$

Здесь (y_k, z_k) — координаты точек C_k, $k = 1, 2$. Интегрируя эти уравнения в пределах от $t = 0$ до $t = t_*$, получаем

$$\begin{aligned} m_1(v'_{1\tau} - v_{1\tau}) &= -\widehat{P}_\tau\,, \quad m_2(v'_{2\tau} - v_{2\tau}) = \widehat{P}_\tau\,,\\ m_1(v'_{1n} - v_{1n}) &= -\widehat{P}_n\,, \quad m_2(v'_{2n} - v_{2n}) = \widehat{P}_n\,, \end{aligned} \tag{1.23}$$

где

$$\widehat{P}_\tau = \int_0^{t_*} P_\tau(t)dt\,, \quad \widehat{P}_n = \int_0^{t_*} P_n(t)dt\,.$$

Введем коэффициент восстановления k формулой

$$k = \frac{v'_{2n} - v'_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}}\,, \tag{1.24}$$

и будем рассматривать его как заданную величину. Для замыкания системы пяти уравнений (1.23), (1.24) относительно шести неизвестных $v'_{1\tau}$, $v'_{2\tau}$, v'_{1n}, v'_{2n}, $\widehat{P}_\tau$, $\widehat{P}_n$ ее необходимо дополнить еще одним соотношением относительно неизвестных $v'_{1\tau}$, $v'_{2\tau}$, $\widehat{P}_\tau$.

Существует несколько теорий косого удара, основанных на различных предположениях относительно зависимости указанных неизвестных от других параметров удара. Эти теории, тесно связанные с задачей о вибротранспортировании, носят полуэмпирический характер. Остановимся на простейшей модели косого удара. В этой модели исходят из предположения, что силой P_τ, обусловленной трением тел друг о друга в окрестности точки A, можно пренебречь по сравнению с силой P_n. При этом поступательное движение тел по нормали $\mathbf{n}$ можно рассматривать независимо от их движения по касательной $\boldsymbol{\tau}$. Решая систему (1.23), (1.24) при $\widehat{P}_\tau = 0$, получаем

$$v'_{1\tau} = v_{1\tau}\,, \quad v'_{2\tau} = v_{2\tau}\,,$$
$$\widehat{P}_n = \frac{(1+k)m_1m_2(v_{1n}-v_{2n})}{m_1+m_2}\,,$$
$$v'_{1n} = \frac{(m_1-km_2)v_{1n}+(1+k)m_2v_{2n}}{m_1+m_2}\,,$$
$$v'_{2n} = \frac{(1+k)m_1v_{1n}+(m_2-km_1)v_{2n}}{m_1+m_2}\,.$$

В частности, при косом ударе тела с массой $m_1 = m$ о неподвижную плоскую преграду ($v_{2n} = 0,\ m_2 = \infty$) имеем

$$v'_{1\tau} = v_{1\tau}\,, \quad \widehat{P}_n = (1+k)mv_{1n}\,, \quad v_{1n} = -kv_{1n}\,.$$

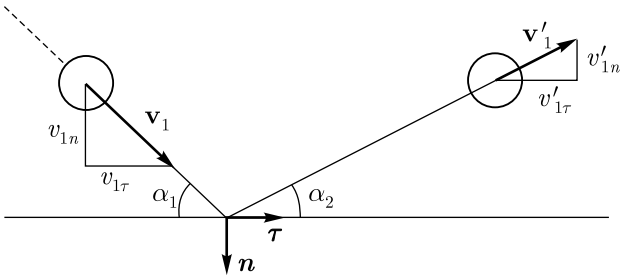

Рис. 5. К определению коэффициента восстановления

Рассмотрим угол падения α_1 и угол отражения α_2 (рис. 5), определив их соответственно по формулам

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \left|\frac{v_{1n}}{v_{1\tau}}\right|, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \left|\frac{v'_{1n}}{v'_{1\tau}}\right|.$$

Поскольку $v'_{1\tau} = v_{1\tau}$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \left|\frac{v'_{1n}}{v_{1n}}\right| = k\,.$$

Таким образом, коэффициент восстановления можно рассматривать и как $\operatorname{tg}\alpha_2/\operatorname{tg}\alpha_1$.

§ 2. Применение общих теорем динамики к исследованию соударения твердых тел

Теорема импульсов и теорема моментов в случае удара. Нами уже было рассмотрено взаимодействие двух твердых тел в случае центрального удара. При этом для определения поля скоростей системы после удара было достаточно воспользоваться одной теоремой о движении центра масс каждого тела. Для анализа же влияния удара в более сложных механических системах необходимо принимать во внимание обе основные теоремы динамики — теорему импульсов и теорему моментов — одновременно.

Теорему импульсов можно сформулировать как теорему об изменении количества движения системы, записав ее в виде

$$\frac{dK}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}\,, \quad \mathbf{K} = \sum_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu\,, \quad \mathbf{F}^{(e)} = \sum_\nu \mathbf{F}^{(e)}_\nu\,. \tag{2.1}$$

Помимо этого, используем теорему о движении центра масс системы:

$$M\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}\,, \quad M = \sum_\nu m_\nu\,, \quad M\mathbf{v}_c = \sum_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu\,. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{F}^{(e)}_\nu$ — равнодействующая всех внешних сил, приложенных к массе m_ν.

При формулировании теоремы моментов вводится некоторая точка O, относительно которой вычисляют момент количества движения системы $\mathbf{l} = \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu$ и главный момент всех внешних сил $\mathbf{L} = \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}^{(e)}_\nu$. При условии, что точка O неподвижна, имеем (теорема моментов)

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L}\,. \tag{2.3}$$

Интегрируя уравнения (2.1)–(2.3) в пределах от $t = 0$ до $t = t_*$, получаем *теорему импульсов при ударе*:

$$M\Delta\mathbf{v}_c = M\mathbf{v}_c\,\Big|_0^{t_*} = \mathbf{K}\,\Big|_0^{t_*} = \widehat{\mathbf{F}}^{(e)}\,, \tag{2.4}$$

и *теорему моментов при ударе*:

$$\Delta \mathbf{l} = \mathbf{l}\,\Big|_0^{t_*} = \widehat{\mathbf{L}}\,. \tag{2.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\widehat{\mathbf{F}}^{(e)} = \int_0^{t_*} \mathbf{F}^{(e)} dt = \sum_\nu \int_0^{t_*} \mathbf{F}_\nu^{(e)} dt = \sum_\nu \widehat{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}\,, \quad \widehat{\mathbf{L}} = \int_0^{t_*} \mathbf{L} dt\,. \tag{2.6}$$

В такой интегральной форме теорему импульсов и теорему моментов можно записать для любой механической системы. Если же для рассматриваемого процесса характерно, что за время $\Delta t = t_*$ система, почти не изменяя положения, приобретает новые скорости, то формулы (2.4), (2.5) можно воспринимать как основные соотношения классической теории удара. Напомним, что предположение неизменяемости положения системы за время $\Delta t = t_*$ является основным исходным моментом этой теории. Поле скоростей изменяется в том же положении вследствие того, что некоторые силы $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$ за время $\Delta t = t_*$ имеют конечный импульс $\widehat{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}$. Такие силы называются *ударными*. Силы, импульсом которых за время $\Delta t = t_*$ можно пренебречь, называются *конечными силами*.

Отметим, что вектор $\widehat{\mathbf{L}}$, входящий в теорему моментов (2.5), в классической теории удара может быть представлен в виде

$$\widehat{\mathbf{L}} = \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \widehat{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}\,, \tag{2.7}$$

причем суммирование ведется только по точкам приложения ударных импульсов $\widehat{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}$. Такое простое представление вектора $\widehat{\mathbf{L}}$ оказывается возможным благодаря тому, что радиус-вектор $\mathbf{r}_\nu$ точки приложения внешней ударной силы $\widehat{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}$ считается постоянным. И, следовательно,

$$\int_0^{t_*} (\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)}) dt = \mathbf{r}_\nu \times \int_0^{t_*} \mathbf{F}_\nu^{(e)} dt = \mathbf{r}_\nu \times \widehat{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}\,.$$

Приложение ударных импульсов к свободному твердому телу. Теорема импульсов (2.4) и теорема моментов (2.5) позволяют решать разные задачи, связанные с изменением поля скоростей твердого тела под действием приложенных к нему ударных импульсов. Будем для простоты считать тело свободным. Как было показано в «Кинематике», поле скоростей твердого тела определяется заданием двух векторов — вектора скорости центра масс $\mathbf{v}_c$ и вектора мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

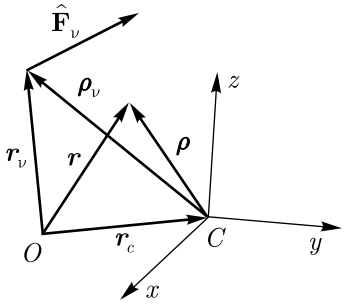

Рис. 6. Определение вектора кинетического момента при ударе

Выразим вектор кинетического момента $\mathbf{l}$ относительно произвольной точки O с помощью векторов $\mathbf{v}_c$ и $\boldsymbol{\omega}$. По определению (рис. 6, см. также § 1 главы VIII первого тома учебника) имеем

$$\mathbf{l} = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm\,.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}\,, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}\,,$$
$$\int_m \boldsymbol{\rho} dm = 0\,, \quad M\mathbf{r}_c = \int_m \mathbf{r} dm\,, \quad M = \int_m dm\,,$$

получаем

$$\mathbf{l} = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v}_c dm + \int_m (\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}) \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm = \mathbf{r}_c \times M\mathbf{v}_c + \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm\,,$$

или окончательно

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}_c \times M\mathbf{v}_c + \{J_{ik}\}\boldsymbol{\omega}\,, \tag{2.8}$$

где

$$\{J_{ik}\}\boldsymbol{\omega} = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm\,.$$

В динамике твердого тела тензор инерции $\{J_{ik}\}$ относительно точки C задается обычно в подвижной системе координат $Cxyz$, жестко связанной с твердым телом. Существенно, что величины J_{ik} при этом не изменяются. Поскольку тензор $\{J_{ik}\}$ задается в подвижной системе, в той же системе следует задавать и векторы $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{l}$, хотя это и не всегда удобно.

В классической теории удара принято, что положение тела при ударе не изменяется. Именно это позволяет считать соотношение (2.8) записанным в единой абсолютной системе координат как до удара, так и после него. Отсюда вытекает, что изменение вектора $\mathbf{l}$ за время удара может быть представлено в виде

$$\Delta\mathbf{l} = \mathbf{r}_c \times M\Delta\mathbf{v}_c + \{J_{ik}\}\Delta\boldsymbol{\omega}\,. \tag{2.9}$$

Подставляя соотношения (2.6), (2.7) и (2.9) в формулы (2.4), (2.5), получаем

$$M\Delta\mathbf{v}_c = \sum_\nu \widehat{\mathbf{F}}_\nu\,,\ \ \mathbf{r}_c \times M\Delta\mathbf{v}_c + \{J_{ik}\}\Delta\boldsymbol{\omega} = \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \widehat{\mathbf{F}}_\nu\,. \tag{2.10}$$

Анализируемая система состоит из одного твердого тела. Внутренними силами в такой системе являются силы внутренних напряжений, которые здесь не рассматриваются. Приложенные к телу ударные импульсы, безусловно, относятся к внешним силам, но так как речь идет только о них, индекс (e) у $\mathbf{F}_\nu$ можно опустить, как это делалось при записи системы (2.10). В частности, если точка O совпадает с точкой C (рис. 6), то $\mathbf{r}_c = 0$, $\boldsymbol{\rho}_\nu = \mathbf{r}_\nu$. И, следовательно, систему (2.10) в данном случае можно записать в виде

$$M\Delta\mathbf{v}_c = \sum_\nu \widehat{\mathbf{F}}_\nu\,, \quad \{J_{ik}\}\Delta\boldsymbol{\omega} = \sum_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu \times \widehat{\mathbf{F}}_\nu\,. \tag{2.11}$$

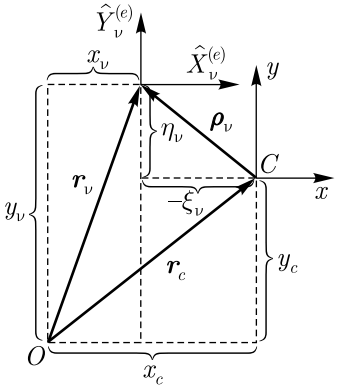

Рис. 7. Случай плоского движения системы

Если оси x, y, z, относительно которых вычисляют моменты инерции J_{ik}, являются главными центральными осями инерции, то величину

$\{J_{ik}\}\Delta\boldsymbol{\omega}$, входящую в системы (2.10) и (2.11), находят по формуле

$$\{J_{ik}\}\Delta\boldsymbol{\omega} = A\Delta\omega_x\mathbf{i} + B\Delta\omega_y\mathbf{j} + C\Delta\omega_z\mathbf{k}\,,$$

где

$$A = J_{11} = J_{xx}\,, \quad B = J_{22} = J_{yy}\,, \quad C = J_{33} = J_{zz}\,.$$

В простейшем случае плоского движения системы (2.10), (2.11) принимают вид

$$\begin{gathered} M\Delta\dot{x}_c = \sum_\nu \widehat{X}_\nu\,, \quad M\Delta\dot{y}_c = \sum_\nu \widehat{Y}_\nu\,, \\ M(x_c\Delta\dot{y}_c - y_c\Delta\dot{x}_c) + J_c\Delta\omega = \sum_\nu (x_\nu\widehat{Y}_\nu - y_\nu\widehat{X}_\nu)\,, \end{gathered} \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} M\Delta\dot{x}_c = \sum_\nu \widehat{X}_\nu\,, \quad M\Delta\dot{y}_c = \sum_\nu \widehat{Y}_\nu\,, \\ J_c\Delta\omega = \sum_\nu (\xi_\nu\widehat{Y}_\nu - \eta_\nu\widehat{X}_\nu)\,, \end{gathered} \tag{2.13}$$

где $J_c = J_{zz} = J_{33}$, $\Delta\omega = \Delta\omega_z$, $\omega_x = \omega_y = 0$. Остальные обозначения пояснены на рис. 1.

Отметим, что переход от систем (2.10), (2.11) к системам (2.12), (2.13) возможен при следующих предположениях: все ударные импульсы лежат в плоскости xy; ось z, перпендикулярная плоскости движения, является осью динамической симметрии, то есть при любом выборе осей x и y имеем

$$J_{xz} = J_{yz} = 0\,.$$

В частности, если к твердому телу приложен только один ударный импульс $\widehat{\mathbf{F}}_1 = \widehat{\mathbf{F}} = \widehat{X}\mathbf{i} + \widehat{Y}\mathbf{j}$, точка приложения которого совпадает с точкой O, то $\mathbf{r}_1 = 0$, и поэтому систему (2.12) записываем в виде

$$\begin{gathered} M\Delta\dot{x}_c = \widehat{X}\,, \quad M\Delta\dot{y}_c = \widehat{Y}\,, \\ M(x_c\Delta\dot{y}_c - y_c\Delta\dot{x}_c) + J_c\Delta\omega = 0\,. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Рассмотрим примеры использования системы (2.14).

Пример 1. Однородный куб массой M со стороной a движется поступательно со скоростью v по горизонтальной плоскости. В некоторый момент он ударяется об упор O (рис. 8). Поступательное движение при этом переходит во вращательное вокруг точки O. Определить импульс ударной силы, приложенной к кубу со стороны упора.

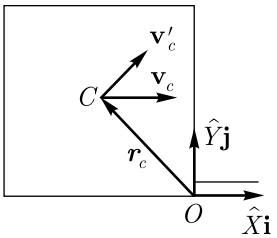

Рис. 8. Удар куба об упор

В данной задаче определены поле скоростей до удара, а также характер поля скоростей после него. Неизвестными являются угловая скорость после удара $\omega' = \Delta\omega$ и ударный импульс $\widehat{\mathbf{F}} = \widehat{X}\mathbf{i}+\widehat{Y}\mathbf{j}$, приложенный в точке O. Три уравнения системы (2.14) позволяют найти неизвестные величины ω', $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$.

Скорость центра масс после удара

$$v'_c = \frac{a\sqrt{2}}{2}|\omega'|\,.$$

Куб после удара вращается по часовой стрелке, и, следовательно, ω' отрицательна, а значит, v'_c может быть представлена в виде

$$v'_c = -\frac{a\sqrt{2}}{2}\omega'\,.$$

Непосредственно из рис. 8 видно, что

$$\Delta\dot{x}_c = v'_c\cos 45^\circ - v = -\frac{a}{2}\omega' - v\,,$$
$$\Delta\dot{y}_c = v'_c\sin 45^\circ = -\frac{a}{2}\omega'\,,$$
$$x_c = -a/2, \quad y_c = a/2\,.$$

Подставляя эти значения в последнее уравнение системы (2.14), получаем

$$M\left(\frac{a^2}{4}\omega' + \frac{a^2}{4}\omega' + \frac{a}{2}v\right) + J_c\omega' = 0\,.$$

Учитывая, что $J_c = Ma^2/6$, имеем

$$a\omega' = -\frac{3}{4}v\,.$$

Отсюда

$$\Delta\dot{x}_c = -\frac{5}{8}\,v, \quad \Delta\dot{y}_c = \frac{3}{8}v\,,$$

и, следовательно,

$$\widehat{X} = -\frac{5}{8}\,Mv\,, \quad \widehat{Y} = \frac{3}{8}\,Mv\,.$$

Пример 2. Однородный стержень, находящийся в плоскопараллельном вертикальном движении, ударяется концом O о неподвижную плоскость, нормаль к которой лежит в плоскости движения (рис. 9). Предполагая, что конец O стержня после удара не отделяется от плоскости и ударный импульс, приложенный к стержню, направлен по нормали к плоскости, определить скорость центра масс стержня и его угловую скорость после удара, а также ударный импульс. Длина стержня l, его масса M и движение до удара считаются заданными.

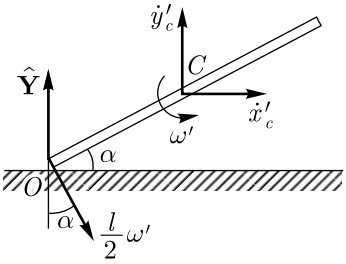

Рис. 9. Удар стержня о неподвижную плоскость

Неизвестными в данной задаче являются скорости $\dot{x}'_c$, $\dot{y}'_c$, ω' и импульс $\widehat{\mathbf{Y}}$. Для определения этих четырех неизвестных воспользуемся тремя уравнениями системы (2.14). Применительно к рассматриваемому случаю их можно записать в виде

$$\dot{x}'_c = \dot{x}_c\,, \quad \widehat{X} = 0\,, \quad \widehat{Y} = M(\dot{y}'_c - \dot{y}_c)\,,$$
$$M\frac{1}{2}\cos\alpha\dot{y}'_c + J_c\omega' = M\frac{1}{2}\cos\alpha\dot{y}_c + J_c\omega\,.$$

Четвертым уравнением является условие, в соответствии с которым скорость конца O стержня в направлении оси y после удара равна нулю, то есть

$$\dot{y}'_c - \frac{l}{2}\omega'\cos\alpha = 0\,,$$

откуда

$$\dot{y}'_c = \frac{l}{2}\cos\alpha\left(\omega + \frac{6\cos\alpha\dot{y}_c}{l}\right)\Big/(1 + 3\cos^2\alpha)\,,$$
$$\omega' = \left(\omega + \frac{6\cos\alpha\dot{y}_c}{l}\right)\Big/(1 + 3\cos^2\alpha)\,,$$
$$\widehat{Y} = M\left(\frac{l}{2}\omega\cos\alpha - \dot{y}_c\right)\Big/(1 + 3\cos^2\alpha)\,.$$

Приложение ударных импульсов к телу, вращающемуся вокруг неподвижной точки. Точка O, относительно которой вычислялся момент $\mathbf{l}$, до сих пор считалась произвольной точкой пространства

(см. рис. 6). Предположим теперь, что она является неподвижной точкой тела. Тогда вектор $\mathbf{l}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{l} = \{J_{ik}\}_O\, \boldsymbol{\omega}\,, \tag{2.15}$$

где J_{ik} — моменты инерции относительно системы $Oxyz$.

Обозначим ударный импульс сил реакции, приложенных к телу в точке O, через $\widehat{\mathbf{R}}$. Добавляя этот импульс к внешним ударным импульсам $\widehat{\mathbf{F}}_\nu$, тело можно формально считать свободным и пользоваться уравнениями (2.10). Учитывая выражение (2.15), а также то, что в данном случае $\Delta\mathbf{v}_c = \Delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c$, представляем систему (2.10) в виде

$$\begin{aligned} M(\Delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) &= \widehat{\mathbf{R}} + \sum_\nu \widehat{\mathbf{F}}_\nu\,, \\ \{J_{ik}\}_O\, \Delta\boldsymbol{\omega} &= \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \widehat{\mathbf{F}}_\nu\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Второе уравнение этой системы позволяет определить изменение угловой скорости $\Delta\boldsymbol{\omega}$ по заданным импульсам $\widehat{\mathbf{F}}_\nu$. Вычислив $\Delta\boldsymbol{\omega}$, из первого уравнения находим импульс сил реакции $\widehat{\mathbf{R}}$.

Воспользуемся системой (2.16), в частности, для выяснения, при каких условиях импульс $\widehat{\mathbf{R}}$ отсутствует. Решение данной задачи в общем случае громоздко. Поэтому ограничимся рассмотрением частного случая, когда к телу в точке с координатами $(x,\, y,\, z)$ приложен один внешний ударный импульс $\widehat{\mathbf{F}}$ и прямая OC является главной осью инерции. Примем прямую OC за ось z и оси x, y также будем считать главными. Вторе уравнение системы (2.16) в этом случае при переходе к скалярной форме записи примет вид

$$\begin{aligned} \Delta\omega_x &= (y\widehat{F}_z - z\widehat{F}_y)/J_{xx}\,, \\ \Delta\omega_y &= (z\widehat{F}_x - x\widehat{F}_z)/J_{yy}\,, \\ \Delta\omega_z &= (x\widehat{F}_y - y\widehat{F}_x)/J_{zz}\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Так как $\mathbf{r}_c = z_c\mathbf{k}$, то

$$\Delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c = \Delta\omega_y z_c\mathbf{i} - \Delta\omega_x z_c\mathbf{j}\,,$$

поэтому из первого уравнения системы (2.16) следует, что

$$\begin{aligned} \widehat{R}_x &= -\widehat{F}_x + M\Delta\omega_y z_c\,, \\ \widehat{R}_y &= -\widehat{F}_y - M\Delta\omega_x z_c\,, \\ \widehat{R}_z &= -\widehat{F}_z\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Как видно из последнего равенства, вектор $\widehat{\mathbf{R}}$ может быть равен нулю только в случае, если внешний импульс $\widehat{\mathbf{F}}$ перпендикулярен оси z.

Подставляя выражения (2.17) в соотношения (2.18) и полагая $\widehat{R}_z = \widehat{F}_z = 0$, получаем

$$\widehat{R_x} = -\widehat{F}_x + Mz_c\frac{z\widehat{F}_x}{J_{yy}}\,, \quad \widehat{R_y} = -\widehat{F}_y + Mz_c\frac{z\widehat{F}_y}{J_{xx}}\,.$$

Отсюда следует, что $\widehat{\mathbf{R}} = 0$ при любых $\widehat{F}_x$, если

$$z = z_1 = J_{yy}/(Mz_c)\,, \quad \widehat{F}_y = \widehat{F}_z = 0\,, \quad J_{xx} \neq J_{yy}\,,$$

и при любых $\widehat{F}_y$, если

$$z = z_2 = J_{xx}/(Mz_c)\,, \quad \widehat{F}_x = \widehat{F}_z = 0\,, \quad J_{xx} \neq J_{yy}\,.$$

Если $J_{xx} = J_{yy}$, то $\widehat{\mathbf{R}} = 0$ при любых $\widehat{F}_x$ и $\widehat{F}_y$ одновременно, то есть при любом импульсе $\widehat{\mathbf{F}}$, лежащем в плоскости $z = J_{xx}/(Mz_c)$.

Пример 3. Рассмотрим однородный прямоугольный параллелепипед, подвешенный за центр одной из граней. В обозначениях, приведенных на рис. 10, имеем

$$\begin{gathered} z_c = \frac{c}{2}\,, \quad J_{xx} = \frac{M}{12}(b^2+4c^2)\,, \quad J_{yy} = \frac{M}{12}(a^2+4c^2)\,, \\ z_1 = \frac{J_{yy}}{Mz_c} = \frac{a^2+4c^2}{6c}\,, \quad z_2 = \frac{b^2+4c^2}{6c}\,. \end{gathered} \tag{2.19}$$

На гранях, параллельных оси OC, проведены линии, задаваемые формулами (2.19). Импульс $\widehat{\mathbf{F}}$, приложенный перпендикулярно соответствующей грани и проходящий через эти линии, не передается в точку подвеса O.

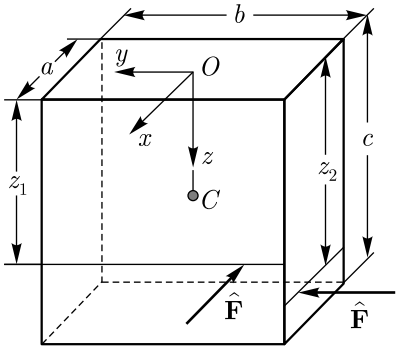

Рис. 10. Удар по параллелепипеду

Если параллелепипед переходит в куб ($a = b = c$), то любой импульс, перпендикулярный оси OC, не передается в точку подвеса, если он лежит в плоскости $z = 5a/6$.

При переходе параллелепипеда в тонкий стержень ($a \to 0$, $b \to 0$) имеем

$$z_1 = z_2 = 2l/3\,, \quad l \equiv c\,.$$

Это означает, что при ударе по тонкому стержню, подвешенному за конец, ударный импульс, если он приложен на расстоянии 1/3 длины от другого конца, в точку подвеса не передается.

Приложение ударных импульсов к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Центр удара. Если тело закреплено в двух точках O и O_1, то под действием ударных импульсов $\widehat{\mathbf{F}}_\nu$ возникают два реактивных импульса $\widehat{\mathbf{R}}$ и $\widehat{\mathbf{R}}_1$, приложенных соответственно в тех же точках.

Будем рассматривать точку O как неподвижную, а импульс $\widehat{\mathbf{R}}_1$ отнесем к внешним импульсам. При этом можно воспользоваться системой (2.16). При дополнении правых частей этой системы импульсом $\widehat{\mathbf{R}}_1$ она принимает вид

$$\begin{gathered} M(\Delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) = \widehat{\mathbf{R}} + \widehat{\mathbf{R}}_1 + \sum_\nu \widehat{\mathbf{F}}_\nu\,, \\ \{J_{ik}\}_O \Delta\boldsymbol{\omega} = \overrightarrow{OO_1} \times \widehat{\mathbf{R}}_1 + \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \widehat{\mathbf{F}}_\nu\,. \end{gathered} \tag{2.20}$$

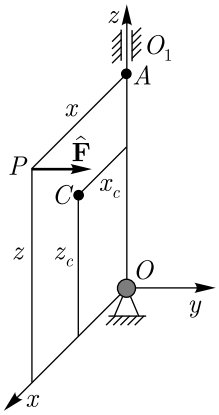

Рис. 11. Удар по вращающемуся телу

Отметим, что в данном случае векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\Delta\boldsymbol{\omega}$ лежат на прямой OO_1. Примем ее за ось z (рис. 11). Для упрощения последующих вычислений

направим ось x так, чтобы центр тяжести тела лежал в плоскости xz. При этом имеем

$$\Delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \Delta\omega \\ x_c & 0 & z_c \end{vmatrix} = x_c \Delta\omega \mathbf{j}\,. \tag{2.21}$$

Шесть скалярных уравнений системы (2.20) содержат семь скалярных величин $\Delta\omega$, $\widehat{R}_x$, $\widehat{R}_y$, $\widehat{R}_z$, $\widehat{R}_{1x}$, $\widehat{R}_{1y}$, $\widehat{R}_{1z}$. Недостающее седьмое уравнение должно отражать характер закрепления тела в точках O и O_1. Наиболее простым является случай, когда в точке O находится сферический шарнир, а в точке O_1 — цилиндрический. При таком способе закрепления $\widehat{R}_{1z} = 0$. Остальные шесть неизвестных определяем из системы (2.20), которая при наличии одного внешнего импульса $\widehat{\mathbf{F}}$ с учетом соотношения (2.21) принимает вид

$$\begin{gathered} M x_c \Delta\omega \mathbf{j} = \widehat{\mathbf{R}} + \widehat{\mathbf{R}}_1 + \widehat{\mathbf{F}}\,, \\ \{J_{ik}\}_0\, \Delta\boldsymbol{\omega} = \overrightarrow{OO_1} \times \widehat{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{r} \times \widehat{\mathbf{F}}\,. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Так как в соответствии с формулой (1.18) в данном случае

$$\{J_{ik}\}_0\, \Delta\boldsymbol{\omega} = -J_{xz}\Delta\omega \mathbf{i} - J_{yz}\Delta\omega \mathbf{j} + J_{zz}\Delta\omega \mathbf{k}\,,$$

$$\overrightarrow{OO_1} \times \widehat{\mathbf{R}}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & l \\ \widehat{R}_{1x} & \widehat{R}_{1y} & 0 \end{vmatrix} = -l\widehat{R}_{1y}\mathbf{i} + l\widehat{R}_{1x}\mathbf{j}\,,$$

$$\mathbf{r} \times \widehat{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \widehat{F}_x & \widehat{F}_y & \widehat{F}_z \end{vmatrix}\,,$$

то система (2.22) эквивалентна следующим шести скалярным уравнениям:

$$\begin{gathered} \widehat{R}_x + \widehat{R}_{1x} + \widehat{F}_x = 0\,, \\ \widehat{R}_y + \widehat{R}_{1y} + \widehat{F}_y = M x_c \Delta\omega\,, \\ \widehat{R}_z + \widehat{F}_z = 0\,, \\ -J_{xz}\Delta\omega = -l\widehat{R}_{1y} + y\widehat{F}_z - z\widehat{F}_y\,, \\ -J_{yz}\Delta\omega = l\widehat{R}_{1x} + z\widehat{F}_x - x\widehat{F}_z\,, \\ J_{zz}\Delta\omega = x\widehat{F}_y - y\widehat{F}_z\,. \end{gathered}$$

Последнее уравнение этой системы позволяет определить мгновенное изменение угловой скорости $\Delta\omega$, после чего из остальных уравнений находим импульсы $\widehat{\mathbf{R}}$ и $\widehat{\mathbf{R}}_1$. Установим, при каких условиях они отсутствуют.

Полагая $\widehat{\mathbf{R}} = \widehat{\mathbf{R}}_1 = 0$, имеем

$$\widehat{F}_x = \widehat{F}_z = 0\,, \quad \widehat{F}_y = Mx_c\Delta\omega\,,$$
$$-J_{xz}\Delta = -z\widehat{F}_y\,, \quad -J_{yz}\Delta\omega = 0\,, \quad J_{zz}\Delta\omega = x\widehat{F}_y\,.$$

Как видно из этой системы, импульсы в шарнирах отсутствуют, если внешний импульс $\widehat{\mathbf{F}}$ перпендикулярен плоскости xz, в которой лежит центр тяжести, причем линия его действия пересекает эту плоскость в точке P с координатами

$$x = \frac{J_{zz}\Delta\omega}{\widehat{F}_y} = \frac{J_{zz}}{Mx_c}\,, \quad z = \frac{J_{xz}}{Mx_c}\,.$$

Кроме того, должно быть $J_{yz} = 0$. Точка P, удовлетворяющая этим условиям, называется *центром удара*.

Внецентренный удар. До сих пор рассматривалось соударение двух тел, которые до удара двигаются поступательно и у которых точка встречи тел при ударе лежит на прямой, соединяющей их центры масс. Если тела до удара вращаются и точка встречи не лежит на линии, проходящей через их центры масс, то анализ удара даже в рамках классической теории удара становится исключительно сложным. Задача существенно упрощается, если тела в окрестности точки первоначального контакта ограничены гладкими поверхностями и их скорости в окрестности этой точки в процессе удара направлены по общей нормали. В этом случае можно считать, что при достаточно малых скоростях соударения деформации в точке контакта развиваются в соответствии с теорией Герца. Характерным примером такого удара является поперечный удар шаром по произвольной точке свободного стержня (рис. 12). Возможность применения к указанным случаям теории удара Герца существенно зависит от того, насколько можно пренебречь общими деформациями тел по сравнению с местными их деформациями. Очевидно, например, что при поперечном ударе по свободному стержню его упругими колебаниями можно пренебречь при условии, что длина стержня соизмерима с размерами его поперечного сечения.

Покажем на примере соударения шара со стержнем, как определяется в подобных случаях приведенная масса m, входящая в формулы (1.6), (1.7) теории Герца.

Пусть центр шара и центр масс стержня лежат в плоскости симметрии стержня. Пусть, кроме того, стержень до удара находится в состоянии покоя, а шар имеет скорость v_0, направленную перпендикулярно оси стержня. Импульс ударной силы, соответствующий первой фазе, как и ранее, обозначим через $\widehat{P}_1$. В конце этой фазы шар и точка A стержня имеют

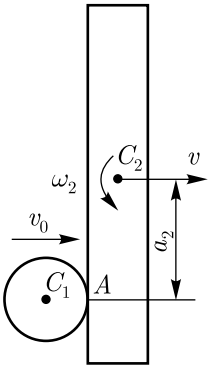

Рис. 12. Внецентренный удар шара по стержню

одинаковую скорость v_A. Угловую скорость стержня и скорость его центра масс в данный момент обозначим через ω_2 и v_2. Применяя теорему импульсов и теорему моментов, получаем

$$m_1 v_A - m_1 v_0 = -\widehat{P}_1\,, \quad m_2 v_2 = \widehat{P}_1\,, \quad J_2\omega_2 = \widehat{P}_1 a_2\,. \tag{2.23}$$

Здесь J_2 — момент инерции стержня относительно центра масс, а a_2 — расстояние от центра масс до линии удара по стержню.

Вводя радиус инерции стержня ρ_2 формулой

$$\rho_2^2 = J_2/m_2\,,$$

и учитывая, что скорость v_A связана со скоростями v_2 и ω_2 соотношением

$$v_A = v_2 + \omega_2 a_2\,,$$

имеем

$$v_A = \frac{\widehat{P}_1}{m_2} + \frac{\widehat{P}_1 a_2^2}{J_2} = \frac{\widehat{P}_1}{m_2}\left(1 + \frac{a_2^2}{\rho_2^2}\right), \tag{2.24}$$

или

$$\lambda_2 m_2 v_A = \widehat{P}_1\,, \qquad \lambda_2 = \rho_2^2/(a_2^2 + \rho_2^2)\,.$$

Подставляя найденное значение скорости v_A в первое уравнение системы (2.23), получаем

$$\widehat{P}_1 = \frac{\lambda_2 m_1 m_2}{m_1 + \lambda_2 m_2}\, v_0\,. \tag{2.25}$$

Сравнивая это выражение с выражением (1.19), видим, что приведенная масса m в данном случае такова:

$$m = \frac{m_1 m_2^*}{m_1 + m_2^*}\,, \quad m_2^* = \lambda_2 m_2\,.$$

Масса m_2^* называется *приведенной массой стержня*. Удар по стержню, как следует из формулы (2.24), эквивалентен удару по массе m_2^*.

Аналогично может быть определена приведенная масса и при ударе по телам более сложной формы, чем стержень. Например, при плоском движении тел, изображенных на рис. 13, приведенная масса системы равна

$$m = \frac{\lambda_1 \lambda_2 m_1 m_2}{\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2}\,, \quad \lambda_j = \frac{\rho_j^2}{a_j^2 + \rho_j^2}\,, \quad j = 1, 2\,.$$

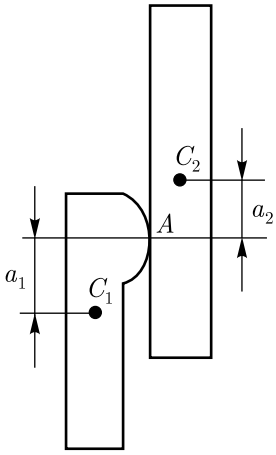

Рис. 13. Удар двух сложных тел

Отметим, что скорость $v_0 = \dot{\alpha}(0)$ в формуле (2.25) есть не что иное, как скорость соударения тел в точке контакта. Так, например, если до удара шар находился в состоянии покоя, а стержень вращался вокруг своего центра масс, то $v_0 = a_2\omega$.

Определив приведенную массу m и скорость v_0 и вычислив затем величину K по формуле (1.3), в которой теперь R_1 и R_2 следует рассматривать как радиусы закругления тел в окрестности точки контакта, найдем все исходные величины для вычисления по выражениям (1.6), (1.7) и (1.9) основных параметров удара α_{max}, P_{max}, t_*.

Если удар сопровождается местными пластическими деформациями, то, вводя коэффициент восстановления по формуле (1.20), полный импульс ударной силы представляем в виде

$$\widehat{P} = (1 + k) m v_0\,.$$

Определив $\widehat{P}$ по формулам (2.14), найдем движение каждого тела после удара.

§ 3. Теория удара механических систем с идеальными связями

Обобщенные скорости и обобщенные ударные импульсы. Рассмотрим сначала свободную механическую систему, состоящую из n материальных точек. Пусть уравнения движения точек системы имеют вид

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,. \tag{3.1}$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{r}_\nu = x_{3\nu-2}\mathbf{i} + x_{3\nu-1}\mathbf{j} + x_{3\nu}\mathbf{k}\,,$$
$$\mathbf{F}_\nu = X_{3\nu-2}\mathbf{i} + X_{3\nu-1}\mathbf{j} + X_{3\nu}\mathbf{k}\,,$$
$$m_\mu = m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu}\,,$$

представляем систему (3.1) в виде

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu\,, \quad \mu = \overline{1,3n}\,. \tag{3.2}$$

Предположим, что силы X_μ действуют в течение столь короткого промежутка времени τ, что изменением положения системы за это время можно пренебречь. Интегрируя уравнения (3.2) в пределах от 0 до τ и вводя обозначения $\widehat{X}_\mu = \int_0^\tau X_\mu dt$, получаем

$$m_\mu \dot{x}_\mu\big|_0^\tau = \widehat{X}_\mu\,, \quad \mu = \overline{1,3n}\,. \tag{3.3}$$

Выражая импульсы $m_\mu \dot{x}_\mu$ через кинетическую энергию системы

$$T = \sum_{\mu=1}^{3n} \frac{m_\mu \dot{x}_\mu^2}{2}\,,$$

уравнения (3.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\mu}\bigg|_0^\tau = \widehat{X}_\mu\,, \quad \mu = \overline{1,3n}\,. \tag{3.4}$$

Предположим, что скорости $\dot{x}_\mu$ можно однозначно задать новым набором скоростей $\widehat{v}^\sigma$ формулами

$$\dot{x}_\mu = a_{\mu\sigma}\widehat{v}^\sigma + a_{\mu 0}\,, \quad \mu,\sigma = \overline{1,3n}\,. \tag{3.5}$$

Это линейное преобразование будем считать невырожденным, и поэтому можно записать

$$\widehat{v}^\sigma = b^{\sigma\mu}x_\mu + b^{\sigma 0}\,, \quad \mu,\sigma = \overline{1,3n}\,. \tag{3.6}$$

В классической теории удара нет необходимости рассматривать скорости как производные от соответствующих координат. Достаточно говорить только об изменении поля скоростей системы в фиксированном положении. Поэтому и переход к новым скоростям можно не связывать с переходом к новым координатам. Последнее очень важно, так как позволяет существенно упростить решение многих конкретных задач. Естественно, если переход к новым координатам известен и задается в виде

$$x_\mu = x_\mu(t,\, q)\,, \quad q^\sigma = q^\sigma(t,\, x)\,, \quad \mu, \sigma = \overline{1, 3n}\,,$$

то, вводя новые скорости формулами

$$\widehat{v}^\sigma = \dot{q}^\sigma = \frac{\partial q^\sigma}{\partial x_\mu}\dot{x}_\mu + \frac{\partial q^\sigma}{\partial t}\,, \tag{3.7}$$

имеем

$$\dot{x}_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma + \frac{\partial x_\mu}{\partial t} = \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma}\,\widehat{v}^\sigma + \frac{\partial x_\mu}{\partial t}\,. \tag{3.8}$$

Следовательно, в данном случае

$$a_{\mu\sigma} = \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma}\,, \quad a_{\mu 0} = \frac{\partial x_\mu}{\partial t}\,, \quad b^{\sigma\mu} = \frac{\partial q^\sigma}{\partial x_\mu}\,, \quad b^{\sigma 0} = \frac{\partial q^\sigma}{\partial t}\,.$$

Формулы (3.5), (3.6) можно рассматривать как обобщение преобразований (3.7), (3.8) на случай, когда положение системы фиксировано и не обязательно знать, как оно изменяется во времени. Другими словами, речь идет о фиксированном касательном пространстве и линейных преобразованиях в нем.

Назовем скорости $\widehat{v}^\sigma$ *обобщенными скоростями*. Скорости точек системы выразим через эти скорости по формулам (3.5). Отметим, что

$$a_{\mu\sigma} = \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}^\sigma}\,, \quad b^{\sigma\mu} = \frac{\partial \widehat{v}^\sigma}{\partial \dot{x}_\mu}\,.$$

Умножая уравнения (3.4) на $\partial \dot{x}_\mu / \partial \widehat{v}^\sigma$ и суммируя по μ, получаем

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \widehat{v}^\sigma}\right|_0^\tau = \widehat{V}_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \quad s \equiv 3n\,. \tag{3.9}$$

Здесь

$$\widehat{V}_\sigma = \widehat{X}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}^\sigma}\,. \tag{3.10}$$

Величину $\widehat{V}_\sigma$ назовём *обобщенным ударным импульсом*, соответствующим обобщенной скорости $\widehat{v}^\sigma$.

Уравнения (3.9), в которых кинетическая энергия T рассматривается как функция обобщенных скоростей, заданная в виде

$$T = \frac{M}{2}(\mathrm{g}_{\rho\sigma}\widehat{v}^{\rho}\widehat{v}^{\sigma} + 2\mathrm{g}_{\sigma 0}\widehat{v}^{\sigma} + \mathrm{g}_{00})\,, \tag{3.11}$$

представляют собой систему линейных алгебраических уравнений

$$M\mathrm{g}_{\sigma\rho}\Delta\widehat{v}^{\rho} = \widehat{V}_{\sigma}\,, \quad \rho, \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{3.12}$$

относительно приращений $\Delta\widehat{v}^{\rho}$ обобщенных скоростей за время удара. Определитель этой системы отличен он нуля, так как выражение $(1/2)\mathrm{g}_{\rho\sigma}\widehat{v}^{\rho}\widehat{v}^{\sigma}$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму.

Система дифференциальных уравнений движения (3.2) при задании движения в обобщенных координатах q^{σ} переходит в систему уравнений Лагранжа второго рода. В теории удара задача сводится не к дифференциальным, а к алгебраическим уравнениям. Существенно, что для указанных линейных алгебраических уравнений удалось найти такую форму записи, которая, как это видно из сравнения выражений (3.4), (3.9), не зависит от выбора системы обобщенных скоростей.

Дифференциальные уравнения движения, записанные через оператор Лагранжа от кинетической энергии, являются уравнениями Лагранжа второго рода. По аналогии со сказанным и уравнения (3.9) будем называть *алгебраическими уравнениями Лагранжа второго рода в теории удара.* Пока эти уравнения были выведены только для свободной механической системы. Красота и общность уравнений Лагранжа второго рода проявляются в том, что они сохраняют форму и при наличии голономных идеальных связей. Существенно, что указанное обобщение распространяется и на механические системы общего вида, состоящие не только из материальных точек, но и из материальных тел. В данном общем случае обобщенные координаты q^{σ} представляют собой параметры, однозначно определяющие положение механической системы. Аналогично и уравнения (3.9), как будет показано далее, распространяются на механические системы общего вида. Обобщенные скорости $\widehat{v}^{\sigma}$ играют при этом роль параметров, посредством которых могут быть определены скорости всех точек системы в данном фиксированном ее положении. Отметим, что указанные параметры должны быть такими, чтобы кинетическую энергию системы можно было представить в виде (3.11).

Алгебраические системы уравнений Лагранжа первого и второго рода в теории удара. В § 3 главы VI первого тома учебника урав-

нения Лагранжа первого и второго рода для голономных систем с идеальными связями были получены как следствие основного положения, состоящего в том, что движение, при котором одна из обобщенных координат является заданной функцией времени, может быть обеспечено только одной дополнительной обобщенной силой, соответствующей этой координате. В теории удара существует аналогичное основное утверждение, выражаемое следующей теоремой.

Для того чтобы в случае приложения к системе ударных импульсов обобщенная скорость $\widehat{v}^\rho$ осталась неизменной (или чтобы она получила заданное приращение), к заданным обобщенным ударным импульсам $\widehat{V}_1$, $\widehat{V}2$, $\ldots$, $\widehat{V}_s$ достаточно добавить только один обобщенный ударный импульс $\widehat{\Lambda}^*_\rho$, соответствующий скорости $\widehat{v}^\rho$.

Пусть для простоты $\rho = s$ и импульсы $\widehat{V}_\lambda$, $\lambda = \overline{1, s-1}$, остаются без изменения, $\Delta\widehat{v}^s$ — заданная величина. Тогда первые $s-1$ уравнений системы (3.12) могут быть представлены в виде

$$M\mathrm{g}_{\lambda\mu}\Delta\widehat{v}^\mu = \widehat{V}_\lambda - M\mathrm{g}_{\lambda s}\Delta\widehat{v}^s, \quad \lambda,\, \mu = \overline{1, s-1}\,.$$

Определитель этой системы относительно приращений $\Delta\widehat{v}^\mu$ не равен нулю, так как выражение $(1/2)\mathrm{g}_{\lambda\mu}\widehat{v}^\lambda\widehat{v}^\mu$ является положительно определенной квадратичной формой (сумма $(1/2)\mathrm{g}_{\rho\sigma}\widehat{v}^\rho\widehat{v}^\sigma$ при $\widehat{v}^\lambda \neq 0$ и $\widehat{v}^s = 0$ может быть только положительной). Отсюда следует, что приращения $\Delta\widehat{v}^\mu$ могут быть найдены однозначно. Подставляя вычисленные значения $\Delta\widehat{v}^\mu$ в последнее уравнение системы (3.12)

$$M\mathrm{g}_{s\mu}\Delta\widehat{v}^\mu = \widehat{V}_s + \widehat{\Lambda}^*_s - M\mathrm{g}_{ss}\Delta\widehat{v}^s\,,$$

находим значение $\widehat{\Lambda}^*_s$, которое следует добавить к обобщенному ударному импульсу $\widehat{V}_s$, чтобы скорость $\widehat{v}^s$ получила заданное приращение. Таким образом, теорема доказана.

Прямым следствием этой теоремы является более общее утверждение о том, что заданные приращения обобщенных скоростей $\widehat{v}^{l+1}$, $\widehat{v}^{l+2}$, $\ldots$, $\widehat{v}^s$, где $l = s-k$ и $k \leqslant s$, могут быть обеспечены дополнительными обобщенными ударными импульсами $\widehat{\Lambda}_\varkappa = \widehat{\Lambda}^*_{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1, k}$, соответствующими указанным скоростям. Система уравнений, с помощью которой решается данная задача, в компактной форме может быть записана в виде

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \widehat{v}^\lambda}\right|_0^\tau = \widehat{V}_\lambda\,, \quad \lambda = \overline{1, l}\,, \quad l = s-k\,, \tag{3.13}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \widehat{v}^{l+\varkappa}}\right|_0^\tau = \widehat{V}_{l+\varkappa} + \widehat{\Lambda}_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{3.14}$$

Для рассмотрения удара по несвободным системам воспользуемся теперь уравнениями (3.13), (3.14). Начнем с систем с голономными связями.

Пусть система состоит из n точек и уравнения связей заданы в виде

$$f^{\varkappa}(t,\, x) = 0\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

В этом случае при приложении внешних ударных импульсов $\widehat{X}_\mu$ возникают ударные импульсы $\widehat{R}_\mu$ сил реакций R_μ, поэтому вместо уравнений (3.4), (3.9) имеем следующие уравнения:

$$m_\mu \dot{x}_\mu\Big|_0^\tau = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\mu}\Big|_0^\tau = \widehat{X}_\mu + \widehat{R}_\mu\,, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \widehat{v}^\sigma}\Big|_0^\tau = \widehat{V}_\sigma + \widehat{\Lambda}^*_\sigma\,, \tag{3.16}$$

где $\widehat{\Lambda}^*_\sigma$ — обобщенные ударные импульсы сил реакций, которые вычисляют по формуле

$$\widehat{\Lambda}^*_\sigma = \widehat{R}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}^\sigma}\,. \tag{3.17}$$

Формулы обратного перехода от импульсов $\widehat{V}_\sigma$ и $\widehat{\Lambda}^*_\sigma$ к импульсам $\widehat{X}_\mu$ и $\widehat{R}_\mu$, вследствие равноправности скоростей $\dot{x}_\mu$ и $\widehat{v}^\sigma$ обладают той же структурой, что и формулы (3.10), (3.17), то есть

$$\widehat{X}_\mu = \widehat{V}_\sigma \frac{\partial \widehat{v}^\sigma}{\partial \dot{x}_\mu}\,, \quad \widehat{R}_\mu = \widehat{\Lambda}^*_\sigma \frac{\partial \widehat{v}^\sigma}{\partial \dot{x}_\mu}\,. \tag{3.18}$$

Предположим теперь, что связи отсутствуют и система свободна. Это предположение вводится здесь для того, чтобы уравнения (3.13), (3.14) можно было применить к случаю, когда обобщенные скорости $\widehat{v}^{l+\varkappa}$ задают в виде

$$\widehat{v}^{\,l+\varkappa} = \dot{q}^{\,l+\varkappa} = \frac{\partial f^\varkappa}{\partial x_\mu}\dot{x}_\mu + \frac{\partial f^\varkappa}{\partial t}\,, \quad l = s-k\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,$$

а остальные скорости $\widehat{v}^\lambda$ выбирают произвольно, но так, чтобы набор скоростей $\widehat{v}^\sigma$ позволял однозначно определить скорости всех точек системы.

При наложении на систему связей, задаваемых уравнениями $f^\varkappa = 0$, обобщенные скорости $\widehat{v}^{l+\varkappa}$ равны нулю как до приложения внешних ударных импульсов $\widehat{X}_\mu$, так и после их приложения. Дополнительные обобщенные ударные импульсы, достаточные для того, чтобы скорости $\widehat{v}^{l+\varkappa}$ сохраняли нулевые значения при ударе, находят при этом из уравнений

(3.13), (3.14). Сравнивая систему (3.16) с уравнениями (3.13), (3.14), видим, что $\widehat{\Lambda}^*_\lambda = 0,\ \lambda = \overline{1,l}$. Поэтому импульсы сил реакций, достаточные для удовлетворения уравнений связей в соответствии с формулами (3.18), таковы:

$$\widehat{R}_\mu = \widehat{\Lambda}^*_{l+\varkappa}\frac{\partial \widehat{v}^{\,l+\varkappa}}{\partial \dot{x}_\mu} = \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial f^\varkappa}{\partial x_\mu}\,. \tag{3.19}$$

Этим ударным импульсам соответствуют силы реакции, заданные в виде

$$R_\mu = \Lambda_\varkappa \frac{\partial f^\varkappa}{\partial x_\mu}\,.$$

Напомним, что связи, реакции которых могут быть представлены в таком виде, являются идеальными.

Уравнения (3.13), не содержащие импульсов реакций, позволяют определить поле скоростей системы после удара по заданным внешним ударным импульсам $\widehat{X}_\mu$. Эти уравнения содержат только независимые скорости $\widehat{v}^\lambda$ и имеют ту же структуру, что и уравнения (3.9) для свободной системы. Поэтому их называют *алгебраическими уравнениями Лагранжа второго рода*. Но, строго говоря, для несвободной системы они являются только первой частью уравнений Лагранжа второго рода. Второй их частью являются уравнения (3.14), которые позволяют найти обобщенные ударные реакции $\widehat{\Lambda}_\varkappa$. Искомые импульсы $\widehat{R}_\mu$ при этом получают по формулам (3.19). Отметим, что для использования уравнений (3.14) следует, формально считая, что связи отсутствуют, выразить кинетическую энергию через все скорости $\widehat{v}^\sigma$, то есть представить ее в виде (3.11). Уравнения (3.14), как следует из выражений (3.12), в развернутом виде имеют вид

$$M g_{l+\varkappa,\,\sigma}\Delta\widehat{v}^\sigma = \widehat{V}_{l+\varkappa} + \widehat{\Lambda}_\varkappa\,.$$

Здесь $\Delta\widehat{v}^{\,l+\varkappa} = 0$, а $\Delta\widehat{v}^\lambda$ следует рассматривать как величины, которые найдены из уравнений (3.13), и, значит,

$$\widehat{\Lambda}_\varkappa = M g_{l+\varkappa,\,\lambda}\Delta\widehat{v}^\lambda - \widehat{V}_{l+\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{3.20}$$

Для вычисления входящих сюда величин $\widehat{V}_{\lambda+\varkappa}$, которые в соответствии с определением (3.10) задают в виде

$$\widehat{V}_{l+\varkappa} = \widehat{X}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}^{\,l+\varkappa}}\,,$$

следует, формально считая, что связи отсутствуют, выразить скорости $\dot{x}_\mu$ через все обобщенные скорости $\widehat{v}^\sigma$.

Учитывая выражения (3.10), а также то, что

$$\frac{\partial T}{\partial \widehat{v}^\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\mu}\frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}^\sigma}\,, \quad \widehat{R}_\mu = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\mu}\bigg|_0^\tau - \widehat{X}_\mu\,,$$

представляем уравнения (3.13), (3.14) следующим образом:

$$\widehat{R}_\mu = \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}^\lambda} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s - k\,,$$

$$\widehat{R}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}^{\,l+\varkappa}} = \widehat{\Lambda}_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Совокупность этих уравнений рассматриваем как систему алгебраических уравнений относительно $\widehat{R}_\mu$. Решение ее в соответствии с формулами (3.18) таково:

$$\widehat{R}_\mu = \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial \widehat{v}^{l+\varkappa}}{\partial \dot{x}_\mu}\,.$$

Последние формулы можно переписать более подробно:

$$m_\mu(\dot{x}_{\mu 1} - \dot{x}_{\mu 0}) = \widehat{X}_\mu + \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial f^\varkappa}{\partial x_\mu}\,. \tag{3.21}$$

Здесь $\dot{x}_{\mu 0}$ и $\dot{x}_{\mu 1}$ — скорости точек системы соответственно до и после удара.

Уравнения (3.21), которые следует дополнить уравнениями связей

$$\frac{\partial f^\varkappa}{\partial x_\mu}(\dot{x}_{\mu 1} - \dot{x}_{\mu 0}) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,$$

называются *алгебраическими уравнениями Лагранжа первого рода*. В них неизвестными являются скорости $\dot{x}_{\mu 1}$ после удара и множители $\widehat{\Lambda}_\varkappa$.

Как показал данный вывод системы (3.21), алгебраические уравнения Лагранжа первого и второго рода можно рассматривать как следующие две взаимно обратные системы алгебраических уравнений:

$\widehat{\Lambda}^*_\sigma \frac{\partial \widehat{v}^\sigma}{\partial \dot{x}_\mu} = \widehat{R}_\mu$ — алгебраические уравнения Лагранжа первого рода,

$\widehat{R}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}^\sigma} = \widehat{\Lambda}^*_\sigma$ — алгебраические уравнения Лагранжа второго рода,

в которых в соответствии с предположением идеальности связей

$$\widehat{\Lambda}^*_\lambda = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,.$$

Основное уравнение теории удара. Как уже было показано, идеальность связей проявляется в том, что обобщенные ударные импульсы $\widehat{\Lambda}^*_\lambda$ реакций связей, соответствующие свободным скоростям, равны нулю.

Существование независимых обобщенных скоростей $\widehat{v}^\lambda$, с помощью которых по линейным формулам

$$\dot{x}_\mu = a_{\mu\lambda}\widehat{v}^\lambda + a_{\mu 0} \tag{3.22}$$

могут быть однозначно найдены скорости всех точек системы, означает, что в дифференциальных формах

$$\delta\dot{x}_\mu = a_{\mu\lambda}\delta\widehat{v}^\lambda = \frac{\partial\dot{x}_\mu}{\partial\widehat{v}^\lambda}\,\delta\widehat{v}^\lambda \tag{3.23}$$

все дифференциалы $\delta\widehat{v}^\lambda$ являются независимыми. Следовательно, условие идеальности связей, выражающееся в том, что величины $\widehat{\Lambda}^*_\lambda$, соответствующие $\widehat{v}^\lambda$, равны нулю, может быть записано в виде одного равенства

$$\widehat{\Lambda}^*_\lambda\,\delta\widehat{v}^\lambda = 0\,. \tag{3.24}$$

Учитывая, что по определению

$$\widehat{\Lambda}^*_\lambda = \widehat{R}_\mu\frac{\partial\dot{x}_\mu}{\partial\widehat{v}^\lambda}\,,$$

имеем выражение

$$\widehat{R}_\mu\frac{\partial\dot{x}_\mu}{\partial\widehat{v}^\lambda}\,\delta\widehat{v}^\lambda = 0\,,$$

которое в соответствии с формулами (3.23), (3.15) может быть представлено также в виде

$$\sum_\mu \widehat{R}_\mu\delta\dot{x}_\mu = \sum_\mu(m_\mu(\dot{x}_{\mu 1} - \dot{x}_{\mu 0}) - \widehat{X}_\mu)\,\delta\dot{x}_\mu = 0\,. \tag{3.25}$$

Это равенство, где $\delta\dot{x}_\mu$ являются вариациями (дифференциалами) скоростей, допускаемых связями, может быть принято за основное исходное соотношение в теории удара механических систем с идеальными связями. Оно называется также *основным уравнением теории удара*. Действительно, из него непосредственно вытекает равенство (3.24), которое в свою очередь может быть выражено в виде алгебраических уравнений Лагранжа как первого, так и второго рода.

Принцип наименьшего принуждения в теории удара. Покажем теперь, что прямым следствием основного уравнения (3.25) является следующее утверждение.

Выражение

$$G = \frac{1}{2}\sum_{\mu} m_\mu \left(\dot{x}_\mu - \dot{x}_{\mu 0} - \frac{\widehat{X}_\mu}{m_\mu}\right)^2 ,$$

определенное на множестве значений $\dot{x}_\mu$, допускаемых связями, имеет минимум при тех значениях $\dot{x}_\mu = \dot{x}_{\mu 1}$, которые на самом деле приобретает система под действием внешних ударных импульсов $\widehat{X}_\mu$.

Это положение, аналогичное принципу Гаусса, может быть названо *принципом наименьшего принуждения в теории удара.* Доказывается оно следующим образом.

Представим произвольные значения скоростей $\dot{x}_\mu$, допускаемые связями, в виде

$$\dot{x}_\mu = \dot{x}_{\mu 1} + \delta\dot{x}_\mu \,.$$

Составим разность

$$\delta G = \frac{1}{2}\sum_{\mu} m_\mu \left\{ \left(\dot{x}_{\mu 1} - \delta\dot{x}_\mu - \dot{x}_{\mu 0} - \frac{\widehat{X}_\mu}{m_\mu}\right)^2 - \left(\dot{x}_{\mu 1} - \dot{x}_{\mu 0} - \frac{\widehat{X}_\mu}{m_\mu}\right)^2 \right\} =$$

$$= \sum_{\mu} (m_\mu(\dot{x}_{\mu 1} - \dot{x}_{\mu 0}) - \widehat{X}_\mu)\delta\dot{x}_\mu + \frac{1}{2}\sum_{\mu} m_\mu (\delta\dot{x}_\mu)^2 \,.$$

Отсюда видно, что в соответствии с основным уравнением (3.25)

$$\delta G = \frac{1}{2}\sum_{\mu} m_\mu (\delta\dot{x}_\mu)^2 > 0 \,,$$

если $\dot{x}_\mu \neq \dot{x}_{\mu 1}$. Это и означает, что функция G имеет минимум при $\dot{x}_\mu = \dot{x}_{\mu 1}$.

Из приведенного выражения для δG следует также, что функция G имеет минимум при $\dot{x}_\mu = \dot{x}_{\mu 1}$ только в том случае, когда справедливо основное уравнение (3.25). Это означает, что данный принцип может быть положен в основу теории удара механических систем с идеальными связями. Вместе с тем алгебраические уравнения Лагранжа второго и первого рода, основное уравнение удара и, наконец, последний принцип были получены ранее как следствие основной теоремы, доказанной в данном параграфе. Следовательно, можно утверждать, что эта теорема лежит в основе принципа наименьшего принуждения и раскрывает его физическое содержание.

Теория удара механических систем общего вида. Самым характерным примером голономной связи между материальными точками является связь, выражаемая условием, по которому расстояние между двумя

любыми точками не изменяется. Как было показано в параграфе § 3 главы VI первого тома учебника, такие связи являются идеальными, если силы реакции, позволяющие сохранить расстояние между точками неизменным, направлены по прямой, соединяющей эти точки. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как механическую систему, состоящую из бесконечного множества точек, расстояния между которыми не изменяются. При приложении ударных сил к твердому телу, естественно, возникают и силы реакции, которые позволяют телу сохранить форму и не разрушиться. Это силы внутренних напряжений. Определить их можно только при подходе к твердому телу как к сплошной среде. Поскольку природа этих сил соответствует предположению идеальности связей между частицами тела, то абсолютно твердое тело, как уже отмечалось в главе VI первого тома учебника, можно рассматривать как характерную механическую систему общего вида, имеющую шесть степеней свободы.

Поле скоростей твердого тела определяется двумя векторами: скоростью полюса $\mathbf{v}_0$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, которая не зависит от выбора полюса. Скорость произвольной точки тела выражается через $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ по формуле

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,. \tag{3.26}$$

Обобщенными скоростями $\widehat{v}^\lambda$ в данном случае являются три компоненты вектора $\mathbf{v}_0$ и три компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$. Формулу Эйлера (3.26) можно рассматривать как обобщение формулы (3.22) на случай твердого тела.

Рассмотрим другой возможный способ выбора обобщенных скоростей для твердого тела. Пусть в точках A и B тело шарнирно связано с другими телами. При этом в качестве обобщенных скоростей удобно взять три компоненты скорости тела в точке A (рис. 14), направив $\widehat{v}^3$ по вектору $\overrightarrow{AB}$. Поскольку расстояние $|\overrightarrow{AB}|$ не изменяется, проекция скорости точки B на вектор $\overrightarrow{AB}$ равна $\widehat{v}^3$. Поэтому точка B имеет только две независимые скорости $\widehat{v}^4$ и $\widehat{v}^5$. Недостающей, шестой, скоростью является угловая скорость вращения тела вокруг оси $\overrightarrow{AB}$.

В полной системе алгебраических уравнений Лагранжа второго рода (3.13), (3.14) уравнения (3.13) можно рассматривать независимо от системы (3.14). В этом и заключается красота и преимущество уравнений Лагранжа второго рода по сравнению с теми же уравнениями первого рода. Для абсолютно твердого тела, когда число связей бесконечно велико, это преимущество приобретает особое значение. Задачу удается свести к решению системы (3.13), которая имеет ту же структуру, что и система (3.9) для свободной системы. Исследование удара по абсолютно твердому телу становится, таким образом, аналогичным исследованию удара по

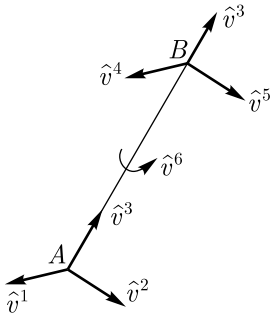

Рис. 14. Способ выбора обобщенных скоростей для твердого тела

свободной системе. То же можно сказать и о любой механической системе общего вида с l степенями свободы.

Остановимся теперь на вычислении обобщенных ударных импульсов $\widehat{V}_\lambda$ для механических систем общего вида. В соответствии с определением (3.10) имеем

$$\widehat{V}_\lambda = \widehat{X}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}^\lambda}\,. \tag{3.27}$$

В данном случае суммирование по μ означает суммирование по точкам приложения ударных импульсов $\widehat{X}_\mu$. Скорость $\dot{x}_\mu$ здесь следует рассматривать как скорость в направлении действия ударного импульса $\widehat{X}_\mu$ той точки системы, к которой приложен этот импульс. Напомним, что в одной точке импульс может быть приложен в трех разных направлениях. Отметим, что в данном случае скорости точек приложения импульсов не обязательно связывать с одной системой координат $Oxyz$, как это было в случае системы из n точек. В каждой точке, где приложен ударный импульс, целесообразно выбрать свою систему координат, направив оси так, чтобы число ударных импульсов $\widehat{X}_\mu$ было минимальным. Выразив затем через $\widehat{v}^\lambda$ скорости $\dot{x}_\mu$, направленные вдоль $\widehat{X}_\mu$, найдем сомножители $\partial \dot{x}_\mu / \partial \widehat{v}^\lambda$ в сумме (3.27).

Перейдем теперь к рассмотрению механических систем общего вида с дополнительными связями. Пусть число степеней свободы данной системы без дополнительных связей равно s и поле ее скоростей в данном фиксированном положении определяется обобщенными скоростями $\widehat{u}^\rho$, $\rho = \overline{1, s}$.

Связи, задаваемые уравнениями

$$\varphi^\varkappa = b_\rho^{l+\varkappa} \widehat{u}^\rho + b_0^{l+\varkappa} = 0\,, \quad l = s - k, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \tag{3.28}$$

считаем идеальными, а их уравнения линейно независимыми. Это означает, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов $b_\rho^{l+\varkappa}$, равен k.

В данном случае, пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \widehat{v}^{\lambda} &= b^{\lambda}_{\rho}\widehat{u}^{\rho} + b^{\lambda}_{0}, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \\ \widehat{v}^{l+\varkappa} &= b^{l+\varkappa}_{\rho}\widehat{u}^{\rho} + b^{l+\varkappa}_{0}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \end{aligned} \tag{3.29}$$

и подбирая соответствующим образом величины b^{λ}_{ρ}, можно перейти к новым обобщенным скоростям $\widehat{v}^{\sigma}$.

Алгебраическая система уравнений Лагранжа второго рода в новых скоростях $\widehat{v}^{\sigma}$ совпадает с системами (3.13), (3.14). Для записи уравнений (3.13) в явном виде необходимо предварительно выразить кинетическую энергию системы через независимые скорости $\widehat{v}^{\lambda}$, а величины $\widehat{V}_{\lambda}$ вычислить по формулам (3.27).

Будем считать, что выражение для кинетической энергии в исходных скоростях $\widehat{u}^{\rho}$ известно:

$$T = \frac{M}{2}\left(\widetilde{\mathrm{g}}_{\rho\sigma}\widehat{u}^{\rho}\widehat{u}^{\sigma} + 2\widetilde{\mathrm{g}}_{\rho 0}\widehat{u}^{\rho} + \widetilde{\mathrm{g}}_{00}\right). \tag{3.30}$$

Разрешая систему (3.29) относительно $\widehat{u}^{\rho}$, получаем

$$\widehat{u}^{\rho} = a^{\rho}_{\sigma}\widehat{v}^{\sigma} + a^{\rho}_{0}\,. \tag{3.31}$$

При наличии связей, задаваемых уравнениями (3.28), имеем

$$\widehat{u}^{\rho} = a^{\rho}_{\lambda}\widehat{v}^{\lambda} + a^{\rho}_{0}\,.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.30), находим искомое выражение для кинетической энергии.

Величины $\widehat{V}_{\lambda}$, как следует из выражений (3.27), (3.31), могут быть представлены в виде

$$\widehat{V}_{\lambda} = \widehat{X}_{\mu}\frac{\partial\dot{x}_{\mu}}{\partial\widehat{u}^{\rho}}\frac{\partial\widehat{u}^{\rho}}{\partial\widehat{v}^{\lambda}} = \widehat{X}_{\mu}\frac{\partial\dot{x}_{\mu}}{\partial\widehat{u}^{\rho}}\,a^{\rho}_{\lambda}\,.$$

Составив и решив систему (3.13), по формулам (3.20) найдем обобщенные ударные импульсы $\widehat{\Lambda}_{\varkappa}$ реакций связей. Для вычисления входящих в эту формулу коэффициентов $\mathrm{g}_{l+\varkappa,\,\lambda}$ необходимо, используя выражения (3.31) и (3.30), представить кинетическую энергию в виде (3.11). Величины же $\widehat{V}_{l+\varkappa}$ следует вычислить по формулам

$$\widehat{V}_{l+\varkappa} = \widehat{X}_{\mu}\frac{\partial\dot{x}_{\mu}}{\partial\widehat{u}^{\rho}}\,a^{\rho}_{l+\varkappa}\,.$$

Рассмотрим теперь, как импульсы реакций данной связи, приложенные к точкам системы, охватываемым этой связью, можно выразить через величину $\widehat{\Lambda}_\varkappa$.

Для механической системы, состоящей из конечного числа точек, в соответствии с формулами (3.18) имеем

$$\widehat{R}_\mu = \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial \widehat{v}^{\,l+\varkappa}}{\partial \dot{x}_\mu} = \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \dot{x}_\mu}\,. \tag{3.32}$$

В данной формуле уравнения связей в обозначениях, принятых в формулах (3.6), следует считать заданными в виде

$$\varphi^\varkappa = b^{l+\varkappa,\,\mu}\dot{x}_\mu + b^{l+\varkappa,\,0}\,. \tag{3.33}$$

Правая часть выражения (3.32) представляет собой сумму по $\varkappa$ от 1 до k. Это означает, что на данную точку одновременно действуют все связи. Однако в первую очередь необходимо выделить одну из них и установить, к каким реакциям она приводит. Поэтому в дальнейшем будем считать, что в выражениях для импульсов реакций связей суммирование по $\varkappa$ не производится. Другими словами, вместо выражения (3.32) будем рассматривать выражение (по $\varkappa$ не суммировать!)

$$\widehat{R}_\mu = \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \dot{x}_\mu}\,. \tag{3.34}$$

Здесь $\widehat{R}_\mu$ и $\dot{x}_\mu$ — ортогональные проекции соответственно импульса реакции связи и скорости точки его приложения на одну и ту же координатную ось, на одно и то же направление, причем $\widehat{R}_\mu$ появляется только в том случае, когда $\dot{x}_\mu$ входит в уравнение связи. Обобщить формулу (3.34), исходя из этого ее физического смысла, можно просто и естественно при следующем условии. Обобщенные скорости $\widehat{u}^\rho$, входящие в уравнение связи, равны ортогональным составляющим скоростей тех точек системы, которые охватываются данной связью. При этом в соответствии с формулой (3.34) получаем (по $\varkappa$ не суммировать!)

$$\widehat{R}^u_\rho = \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \widehat{u}^\rho}\,. \tag{3.35}$$

Здесь $\widehat{R}^u_\rho$ — ортогональная проекция импульса реакции связи на направление скорости $\widehat{u}^\rho$ точки его приложения.

При переходе от обобщенных скоростей $\widehat{u}^\rho$ к обобщенным скоростям $\widehat{v}^\sigma$ по формулам (3.29) функция $\varphi^\varkappa$ как функция новых обобщенных скоростей $\widehat{v}^\sigma$ имеет следующий простейший вид:

$$\varphi^\varkappa = \widehat{v}^{\,l+\varkappa}\,. \tag{3.36}$$

Вследствие равноправности обобщенных скоростей $\widehat{u}^\rho$ и $\widehat{v}^\sigma$ структура основной формулы (3.35) в новых скоростях такая же, и, следовательно, с учетом уравнения (3.36) находим

$$\widehat{R}^v_{l+\varkappa} = \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \widehat{v}^{\,l+\varkappa}} = \widehat{\Lambda}_\varkappa \,. \tag{3.37}$$

Отсюда следует, что если величина $\widehat{v}^{l+\varkappa}$ равна скорости по некоторому направлению точки, к которой приложена связь, заданная уравнением $\varphi^\varkappa = 0$, то $\widehat{\Lambda}_\varkappa$ — ударный импульс, приложенный к этой точке со стороны связи. Здесь уместно отметить, что как обобщенные скорости $\widehat{v}^\sigma$, так и обобщенные скорости $\widehat{u}^\rho$ могут иметь различный физический смысл. В частности, это могут быть и абсолютные, и относительные скорости некоторых точек системы. Основное требование, которое следует учитывать при выборе как $\widehat{u}^\rho$, так и $\widehat{v}^\sigma$, заключается в том, что с их помощью необходимо однозначно определить поле скоростей всей системы и тем самым представить ее кинетическую энергию в виде (3.11). С учетом этого замечания важный частный случай связи, когда расстояние между двумя точками не изменяется, может быть исследован таким образом.

Рассмотрим скорость $\widehat{v}^{l+\varkappa}$ точки B относительно точки A в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$. Условие нахождения точки B все время на заданном расстоянии от точки A запишем в виде

$$\varphi^\varkappa = \widehat{v}^{\,l+\varkappa} = 0 \,.$$

Величина $\widehat{\Lambda}_\varkappa$ при этом, как следует из формулы (3.37), представляет собой ударный импульс реакции связи, приложенный к точке B в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$. На основании третьего закона Ньютона ударный импульс, приложенный к точке A, направлен в противоположную сторону.

Изложенный подход может быть использован, в частности, при рассмотрении удара по системе твердых тел, связанных друг с другом как сферическими или цилиндрическими шарнирами, так и невесомыми нерастяжимыми стержнями с шарнирами на концах (рис. 15). Размерами шарниров и трением в них пренебрегаем, то есть считаем, что связь в шарнире выражается в том, что два разных тела имеют одну общую точку, и поэтому их скорости в данной точке совпадают. Очевидно, что при подобной постановке связь является идеальной.

Совокупность обобщенных скоростей $\widehat{u}^\rho$ рассматриваемой системы при освобождении ее от всех связей в шарнирах целесообразно выбрать равной набору тех скоростей, которые для каждого из тел приведены на рис. 14. Напомним, что точки A и B на рис. 14 соответствуют точкам, в которых

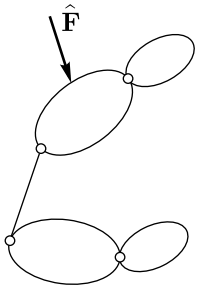

Рис. 15. Удар по системе твердых тел

находятся шарниры. При отсутствии другого шарнира вторую точку можно выбирать произвольно. При этом ее целесообразно расположить в теле так, чтобы выражение для кинетической энергии данного тела получилось наиболее простым.

При указанном выборе обобщенных скоростей формально свободной системы твердых тел величины $\widehat{u}^\rho$, входящие в уравнение связей (3.28), равны компонентам скоростей точек, в которых приложены импульсы реакций связи. Это означает, что ударные импульсы в шарнирах могут быть определены по формулам (3.35). Ударные же импульсы в тонких нерастяжимых стержнях следует находить по формуле (3.37).

В качестве примера рассмотрим удар по цепочке стержней. Для простоты будем считать, что движение плоское.

Удар по прямолинейной цепочке стержней. Предположим, что к нижней точке шарнирно подвешенной и сначала неподвижной цепочки стержней прикладывается ударный импульс S, направленный перпендикулярно прямой, на которой расположены стержни (рис. 16). Цепочку будем считать состоящей из n тонких однородных стержней, связанных между собой шарнирно. Длину стержня массой M примем равной $2a$. Требуется определить поле скоростей системы после удара и ударные импульсы, передаваемые вверх по цепочке через шарниры.

Использование аппарата алгебраических уравнений Лагранжа второго рода (3.13) в рассматриваемой задаче при соответствующем выборе обобщенных скоростей $\widehat{v}^\lambda$ позволяет построить компактное аналитическое решение для любого числа стержней. Зная зависимость поля скоростей от n и S, легко найти импульсы в шарнирах. Следовательно, для определения реакций в данном случае нет необходимости обращаться к уравнениям (3.14). Независимые обобщенные скорости $\widehat{v}^\lambda$ в подобных задачах следует выбирать так, чтобы кинетическая энергия каждого тела цепочки обла-

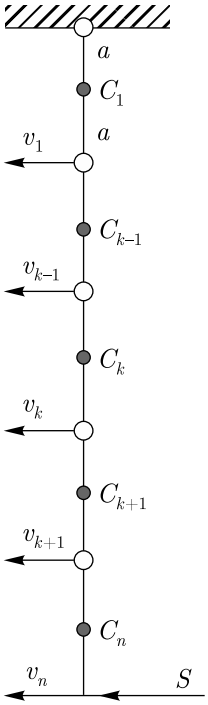

Рис. 16. Удар по прямолинейной цепочке стержней

дала одинаковой структурой и зависела от минимального числа обобщенных скоростей. Этим требованиям удовлетворяют обобщенные скорости $\widehat{v}^{\lambda}$, равные скоростям шарниров v_{λ}. Значениям $\lambda = 0$ и $\lambda = n$ соответствуют скорости концов цепочки. При шарнирном закреплении верхнего конца $v_0 = 0$. Если верхний конец свободен, то v_0 — независимая обобщенная скорость.

Кинетическая энергия k-го стержня

$$T_k = \frac{M}{2}\left(\frac{v_{k-1} + v_k}{2}\right)^2 + \frac{J\omega_k^2}{2}\,,$$

где

$$J = \frac{Ma^2}{3}\,, \quad \omega_k = \frac{v_k - v_{k-1}}{2a}\,.$$

Отсюда следует, что

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(v_{k-1} + v_k)^2}{8} + \sum_{k=1}^{n} \frac{M(v_k - v_{k-1})^2}{24}\,. \tag{3.38}$$

Скорость точки приложения импульса S равна скорости v_n, поэтому в соответствии с формулой (3.27) в данном случае $\widehat{V}_\lambda = 0$, $\lambda = \overline{1, n-1}$, и $\widehat{V}_n = S$. Подставляя выражение (3.38), получаем

$$v_0 = 0\,, \tag{3.39}$$

$$v_{\lambda-1} + 4v_\lambda + v_{\lambda+1} = 0, \quad \lambda = \overline{1, n-1}\,, \tag{3.40}$$

$$v_{n-1} + 2v_n = 6S/M\,. \tag{3.41}$$

Здесь уместно отметить, что рассматриваемая цепочка состоит из однородных стержней, то есть из однородных элементов. Число этих элементов и размеры их конечны. Исследование поведения многих механических систем, состоящих из однородных конечных элементов, при соответствующем выборе величин v_λ, характеризующих состояние данной системы, сводится к уравнениям типа (3.40). Поэтому особенно важно освоить метод решения системы уравнений (3.39)–(3.41).

Уравнения (3.40) относятся к уравнениям в конечных разностях, или линейным разностным уравнениям. Они встречаются также при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Производные в этих уравнениях выражаются через конечные разности.

Частное решение уравнения (3.40) ищем в виде

$$v_\lambda = z^\lambda\,.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.40), обнаруживаем, что значения z должны удовлетворять уравнению

$$z^2 + 4z + 1 = 0\,.$$

Отсюда $z_1 = -2 - \sqrt{3}$, $z_2 = -2 + \sqrt{3} = 1/z_1$.

Общее решение уравнения (3.40), зависящее от произвольных постоянных C_1 и C_2, таково:

$$v_\lambda = C_1 z_1^\lambda + C_2 z_2^\lambda\,. \tag{3.42}$$

Значения C_1 и C_2 находим из уравнений (3.39), (3.41), которые играют роль граничных условий. Из первого условия (3.39) следует

$$C_1 + C_2 = 0\,.$$

Полагая $2 + \sqrt{3} = e^x$, $2 - \sqrt{3} = e^{-x}$, $\operatorname{ch} x = 2$, $\operatorname{sh} x = \sqrt{3}$, $C_1 = -C_2 = C/2$, имеем

$$v_\lambda = (-1)^\lambda \frac{C}{2}(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}) = C(-1)^\lambda \operatorname{sh} \lambda x\,.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.41) и учитывая, что $\operatorname{sh}(n-1)x = \operatorname{sh} nx \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} nx \operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh} nx - \sqrt{3}\operatorname{ch} nx$, получаем

$$C = \frac{2\sqrt{3}(-1)^n S}{M \operatorname{ch} nx}\,.$$

Тогда окончательно

$$v_\lambda = \frac{2\sqrt{3}(-1)^{n+\lambda} S \operatorname{sh} \lambda x}{M \operatorname{ch} nx}\,. \tag{3.43}$$

Если второй конец цепочки стержней свободен, то уравнение относительно v_0 таково:

$$2v_0 = v_1 = 0\,.$$

Подставляя сюда выражение (3.42), находим

$$C_1 = C_2 = C/2\,.$$

Выполняя далее вычисления, аналогичные предыдущим, получаем

$$v_\lambda = \frac{2\sqrt{3}\,(-1)^{n+\lambda} S \operatorname{ch} \lambda x}{M \operatorname{sh} nx}\,.$$

Из решения (3.43) следует, в частности, что импульс $S = S_n$, приложенный к системе из n стержней, связан со скоростью v_n соотношением

$$v_n = \frac{2\sqrt{3}}{M}\, n \operatorname{th} nx\,. \tag{3.44}$$

Отсюда вытекает, что импульс S_λ, передаваемый через шарнир, имеющий скорость v_λ, может быть представлен в виде

$$S_\lambda = \frac{M v_\lambda}{2\sqrt{3}\operatorname{th} \lambda x} = \frac{(-1)^{n+\lambda}\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} nx}\, S_n\,.$$

Так как второй конец цепочки свободен, то

$$S_\lambda = \frac{(-1)^{n+\lambda}\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} nx}\, S_n\,, \quad v_n = \frac{2\sqrt{3}}{M}\, S_n \operatorname{cth} nx\,. \tag{3.45}$$

Наличие зависимостей (3.44), (3.45) позволяет подойти к задаче об ударе по произвольному стержню прямолинейной цепочки следующим образом.

Пусть шарнирно подвешенная цепочка состоит из $n+m+1$ стержней. Ударный импульс S прикладывается к $(n+1)$-му стержню на расстоянии

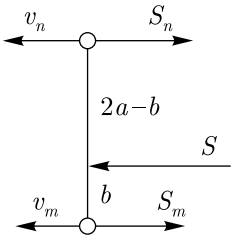

Рис. 17. Стержень с номером $(n+1)$

b от конца, к которому шарнирно подвешено еще m стержней (рис. 17). Скорости концов этого стержня обозначим через v_n и v_m. Индексы n и m указывают на число стержней, присоединенных к данному концу. Импульсы S_n и S_m, как следует из формул (3.44), (3.45), связаны со скоростями v_n и v_m соотношениями

$$S_n = \frac{Mv_n}{2\sqrt{3}}\,\operatorname{cth} nx\,, \quad S_m = \frac{Mv_m}{2\sqrt{3}}\,\operatorname{th} mx\,. \tag{3.46}$$

Применим к выделенному стержню уравнения Лагранжа второго рода (3.13), рассматривая S_n и S_m как заданные внешние импульсы. Так как они направлены в стороны, противоположные направлению скоростей точек их приложения, то соответствующие им обобщенные импульсы равны $(-S_n)$ и $(-S_m)$.

Скорость v точки приложения импульса S такова:

$$v = v_m + \frac{(v_n - v_m)b}{2a}\,. \tag{3.47}$$

Из формул (3.27), (3.47) следует, что уравнения Лагранжа (3.13) в данном случае записываются в виде

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial T}{\partial v_n}\right|_0^\tau &= -S_n + S\frac{\partial v}{\partial v_n} = -S_n + \frac{Sb}{2a}\,, \\ \left.\frac{\partial T}{\partial v_m}\right|_0^\tau &= -S_m + S\frac{\partial v}{\partial v_m} = -S_m + \frac{S(2a-b)}{2a}\,. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Кинетическая энергия стержня T, как видно из выражения (3.38),

$$T = \frac{M\,(v_m + v_n)^2}{8} + \frac{M\,(v_m - v_n)^2}{24}\,. \tag{3.49}$$

Система (3.48) относительно неизвестных v_n и v_m с учетом соотношений (3.46) и (3.49) может быть представлена в виде

$$(2+\sqrt{3}\,\mathrm{cth}\,nx)\,v_n + v_m = \frac{3bS}{Ma}\,,$$
$$v_n + (2+\sqrt{3}\,\mathrm{th}\,mx)\,v_m = \frac{3(2a-b)S}{Ma}\,,$$

откуда

$$v_n = \frac{3S}{M\,a\Delta}\,(\sqrt{3}\;b\;(\sqrt{3}+\mathrm{th}\,mx)-2a)\,,$$
$$v_m = \frac{3S}{M\,a\Delta}\,(\sqrt{3}(2a-b)(\sqrt{3}+\mathrm{cth}\,nx)-2a)\,,$$

где $\Delta = 3+2\sqrt{3}\,(\mathrm{th}\,mx+\mathrm{cth}\,nx)+3\,\mathrm{th}\,mx\,\mathrm{cth}\,nx$.

Для цепочки, свободной с обоих концов, в этих формулах $\mathrm{cth}\,nx$ следует заменить на $\mathrm{th}\,nx$.

Выразив скорости v_n и v_m через внешний импульс S и параметры цепочки, по формулам (3.46) найдем импульсы S_n и S_m. По импульсам же S_n и S_m можно определить все интересующие нас величины.

Удар по цепочке стержней с шарнирами, расположенными по дуге окружности. Предположим теперь, что в момент удара по однородной цепочке стержней их концы расположены на окружности (рис. 18). Выразим кинетическую энергию j-го стержня через скорости u_j, v_j, w_j его концов, которые направлены так, как показано на рис. 18. Скорость центра масс стержня вдоль него равна v_j, а направленная перпендикулярно — $(u_j-w_j)/2$. Угловая скорость равна $(u_j+w_j)/(2a)$. Поэтому

$$T_j = \frac{Mv_j^2}{2} + \frac{M(u_j-w_j)^2}{8} + \frac{Ma^2}{6}\left(\frac{u_j+w_j}{2a}\right)^2 = \\ = \frac{M}{6}\,(u_j^2 - u_jw_j + w_j^2 + 3v_j^2)\,. \tag{3.50}$$

Если цепочка состоит из n стержней, то общее число s скоростей u_j, v_j, w_j равно $3n$. Цепочка со свободными концами имеет $n-1$ шарнир. Каждому шарниру соответствуют две связи ($k=2n-2$). Следовательно, число степеней свободы $l=s-k$ равно $n+2$.

Скорости v_{j-1} и v_{j+1} двух стержней, которые шарнирно связаны с j-м стержнем, выразим через скорости u_j, v_j и w_j. Непосредственно из рис. 18 видно, что

$$v_{j-1} = v_j\cos\alpha - u_j\sin\alpha\,,\\ v_{j+1} = v_j\cos\alpha - w_j\sin\alpha\,. \tag{3.51}$$

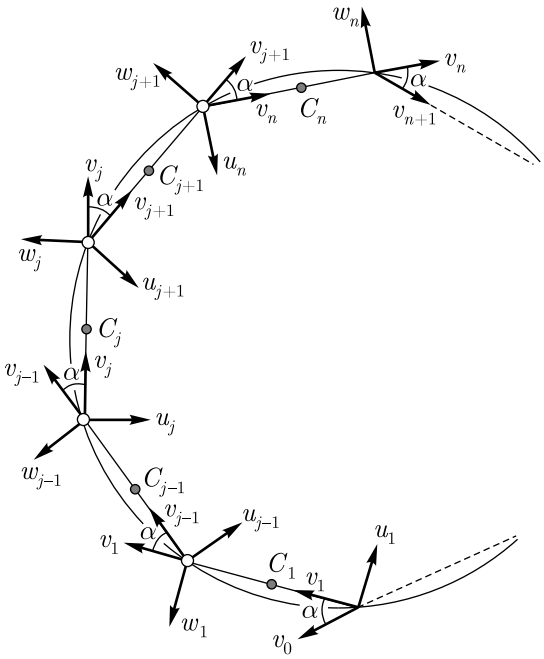

Рис. 18. Удар по цепочке стержней, расположенных по дуге окружности

Присоединим мысленно к концам цепочки по невесомому стержню и, как и для остальных стержней, введем скорости v_0 и v_{n+1}. При этом на основании уравнения (3.51) скорости u_j и w_j для всех стержней найдем по формулам

$$u_j = \frac{v_j \cos\alpha - v_{j-1}}{\sin\alpha}\,, \quad w_j = \frac{v_j \cos\alpha - v_{j+1}}{\sin\alpha}\,. \tag{3.52}$$

Отсюда следует, что в качестве независимых обобщенных скоростей $\widehat{v}^\lambda$ в данном случае могут быть приняты скорости v_0, v_1, …, v_{n+1}.

Кинетическую энергию системы с учетом соотношений (3.50), (3.52) запишем в виде

$$T = \sum_{j=1}^{n} \frac{M}{6}\left[\left(\frac{v_j\cos\alpha - v_{j-1}}{\sin\alpha}\right)^2 - \frac{(v_j\cos\alpha - v_{j-1})(v_j\cos\alpha - v_{j+1})}{\sin^2\alpha} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{v_j\cos\alpha - v_{j+1}}{\sin\alpha}\right)^2 + 3v_j^2\right]. \tag{3.53}$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial v_0} = \frac{M}{6\sin^2\alpha}\left(2v_0 - v_1\cos\alpha - v_2\right), \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = \frac{M}{6\sin^2\alpha}\left(-v_0\cos\alpha + 4v_1(1+\sin^2\alpha) - 2v_2\cos\alpha - v_3\right), \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial v_\lambda} = \frac{M}{6\sin^2\alpha}\big(&-v_{\lambda-2} - 2v_{\lambda-1}\cos\alpha + v_\lambda(6+4\sin^2\alpha) - \\ &- 2v_{\lambda+1}\cos\alpha - v_{\lambda+2}\big), \quad \lambda = \overline{2, n-1}\,,\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial T}{\partial v_n} = \frac{M}{6\sin^2\alpha}\left(-v_{n-2} - 2v_{n-1}\cos\alpha + 4v_n(1+\sin^2\alpha) - v_{n+1}\cos\alpha\right), \tag{3.57}$$

$$\frac{\partial T}{\partial v_{n+1}} = \frac{M}{6\sin^2\alpha}\left(-v_{n-1} - v_n\cos\alpha + 2v_{n+1}\right). \tag{3.58}$$

Из формулы (3.56) следует, что однородные алгебраические уравнения Лагранжа, аналогичные уравнениям (3.40), в данном случае имеют вид

$$-v_{\lambda-2} - 2v_{\lambda-1}\cos\alpha + v_\lambda(6+4\sin^2\alpha) - 2v_{\lambda+1}\cos\alpha - v_{\lambda+2} = 0\,. \tag{3.59}$$

Полагая, как и ранее, $v_\lambda = z^\lambda$, приходим к уравнению

$$z^2 + 2z\cos\alpha - (6+4\sin^2\alpha) + 2z^{-1}\cos\alpha + z^{-2} = 0\,. \tag{3.60}$$

Отметим, что если z является корнем этого уравнения, то и $1/z$ также является его корнем.

Уравнение (3.60) после замены $z = e^x$ примет вид

$$e^{2x} + 2e^x\cos\alpha - (6+4\sin^2\alpha) + 2e^{-x}\cos\alpha + e^{-2x} = 0\,.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{ch} 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = 2\operatorname{ch}^2 x - 1\,,$$

получаем

$$\operatorname{ch}^2 x + \cos\alpha\operatorname{ch} x - (2+\sin^2\alpha) = 0\,.$$

Отсюда

$$\operatorname{ch} x_1 = (\sqrt{9+3\sin^2\alpha} - \cos\alpha)/2 > 1\,,$$
$$\operatorname{ch} x_2^* = -(\sqrt{9+3\sin^2\alpha} + \cos\alpha)/2 < 0\,.$$

Полагая $x_2^* = x_2 + \pi i$, имеем

$$-\operatorname{ch} x_2^* = \operatorname{ch} x_2 = (\sqrt{9+3\sin^2\alpha} + \cos\alpha)/2\,.$$

Общее решение уравнения (3.59) таково:

$$v_\lambda = C_1 e^{x_1\lambda} + C_2 e^{-x_1\lambda} + C_3 e^{x_2^*\lambda} + C_4 e^{-x_2^*\lambda}\,.$$

Учитывая, что $e^{\pm\pi i\lambda} = (-1)^\lambda$, получаем

$$v_\lambda = C_1 e^{x_1\lambda} + C_2 e^{-x_1\lambda} + C_3(-1)^\lambda e^{x_2\lambda} + C_4(-1)^\lambda e^{-x_2\lambda}\,. \tag{3.61}$$

Произвольные постоянные $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ находим из условия закрепления концов цепочки или из уравнений Лагранжа относительно скоростей v_0, $v_1,\ v_n,\ v_{n+1}$. Эти уравнения легко составить, учитывая выражения (3.54)–(3.58).

Покажем, как общее решение (3.61) можно применить к следующей задаче. Внешний ударный импульс P прикладывается к какому-нибудь стержню цепочки перпендикулярно его оси. При этом, если линия удара является осью симметрии системы, то скорость самого стержня вдоль его оси равна нулю. При отсутствии полной симметрии данную скорость приближенно можно принять равной нулю. Следовательно, целесообразно предварительно решить такую задачу.

Конец первого стержня цепочки перемещается так, что скорость $v_0 = 0$. Это условие рассматривается как идеальная связь, реакция которой направлена вдоль v_0. Активным ударным импульсом является импульс S, приложенный к концу первого стержня в направлении его возможной скорости v (рис. 19). Другой конец цепочки может быть свободен или шарнирно закреплен. Решение данной вспомогательной задачи в общем случае громоздко. Поэтому ограничимся рассмотрением частного случая, когда число стержней достаточно велико. Другими словами, считаем, что $v_\lambda \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Как следует из выражения (3.61), это возможно только тогда, когда $C_1 = C_3 = 0$.

Далее из граничного условия $v_0 = 0$ находим, что

$$C_2 + C_4 = 0, \quad C_2 = -C_4 = C\,.$$

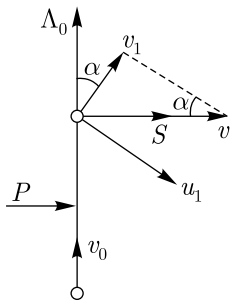

Рис. 19. Первый стержень цепочки

Таким образом,

$$v_\lambda = C(e^{-x_1\lambda} - (-1)^\lambda e^{-x_2\lambda})\,. \tag{3.62}$$

Постоянную C определяем из уравнения Лагранжа относительно скорости v_1. Скорость точки приложения импульса S равна $v_1/\sin\alpha$ (рис. 19). Следовательно, на основании формул (3.27) соответствующий обобщенный импульс равен $S/\sin\alpha$. Принимая во внимание это, а также соотношение (3.55), имеем

$$4v_1(1+\sin^2\alpha) - 2v_2\cos\alpha - v_3 = 6\sin\alpha S/M\,.$$

Подставляя сюда выражение (3.62), получаем

$$\begin{gathered} C = 6\sin\alpha S/(\eta M)\,, \\ \eta = 4\,(1+\sin^2\alpha)(e^{-x_1}+e^{-x_2}) - \\ -2\cos\alpha(e^{-2x_1}-e^{-2x_2}) - e^{-3x_1} - e^{-3x_2}\,. \end{gathered}$$

Из найденного решения (3.62) следует, в частности, что импульс S связан со скоростью $v = v_1/\sin\alpha$ точки его приложения следующим соотношением:

$$M_* v = S\,, \quad M_* = \frac{\eta M}{6\,(e^{-x_1}+e^{-x_2})}\,. \tag{3.63}$$

Вернемся к задаче об ударе по цепочке внешним импульсом P. Для простоты предположим, что импульс P прикладывается к середине стержня (см. рис. 19). Мысленно выделяя этот стержень из цепочки и применяя к нему теорему импульсов, получаем

$$Mv = P - 2S\,.$$

Учитывая, что S и v связаны соотношением (3.63), имеем

$$(M+2M_*)\,v = P\,, \quad S = \frac{M_* P}{2M_* + M}\,.$$

Как непосредственно следует из этого выражения, масса $2M_*+M$ является приведенной массой достаточно длинной цепочки стержней. Она может быть применена, в частности, при использовании теории Герца в случае удара шаром по цепочке стержней.

Выразив S через заданный внешний импульс P, по формуле (3.62) можно найти поле скоростей.

Рассмотрим теперь, как по известному полю скоростей найти импульсы в шарнирах. Вычислим, во-первых, импульс Λ_0 реакции связи $v_0 = 0$. В уравнении Лагранжа

$$\left.\frac{\partial T}{\partial v_0}\right|_0^\tau = V_0 + \Lambda_0\,, \tag{3.64}$$

содержащем этот импульс, обобщенный импульс V_0, соответствующий внешнему импульсу S, следует вычислять по выражению (3.10), формально считая, что связь $v_0 = 0$ отсутствует.

Проекцию скорости точки приложения импульса S на направление его действия обозначим через v. Как следует из рис. 19,

$$v = v_1 \sin\alpha + u_1 \cos\alpha\,.$$

Учитывая, что согласно (3.52) $u_1 = (v_1 \cos\alpha - v_0)/\sin\alpha$, имеем

$$v = \frac{v_1}{\sin\alpha} - \frac{v_0 \cos\alpha}{\sin\alpha}\,,$$

и, следовательно,

$$V_0 = S\frac{\partial v}{\partial v_0} = -S \operatorname{ctg}\alpha\,. \tag{3.65}$$

Из уравнения (3.64) с учетом выражений (3.54) и (3.65) находим

$$\Lambda_0 = S \operatorname{ctg}\alpha - \frac{M}{6\sin^2\alpha}\,(v_1 \cos\alpha + v_2)\,.$$

Импульсы реакций связей в последующих шарнирах определим по формулам (3.35). Если бы стержни не были связаны шарнирами, то система имела бы $3n$ степеней свободы. Ее обобщенные скорости введем следующим образом:

$$\begin{gathered}
\widehat{v}^{\,\lambda} = v_{\lambda-1}\,, \quad \lambda = \overline{1, n+2}\,, \quad n+2 = l\,,\\
\widehat{v}^{\,l+2j-1} = u_{j+1} - \frac{v_{j+1}\cos\alpha - v_j}{\sin\alpha}\,,\\
\widehat{v}^{\,l+2j} = w_j - \frac{v_j \cos\alpha - v_{j+1}}{\sin\alpha}\,,\\
j = \overline{1, n-1}\,.
\end{gathered} \tag{3.66}$$

При этом уравнения двух связей в j-м шарнире, соединяющем j-й стержень с $(j+1)$-м, имеют вид

$$\begin{gathered}
\varphi^{2j-1} = u_{j+1} - \frac{v_{j+1}\cos\alpha - v_j}{\sin\alpha} = 0\,,\\
\varphi^{2j} = w_j - \frac{v_j \cos\alpha - v_{j+1}}{\sin\alpha} = 0\,,\\
j = \overline{1, n-1}\,.
\end{gathered}$$

Обозначим через $\widehat{\mathbf{R}}_j$ импульс, который приложен к концу $(j+1)$-го стержня через j-й шарнир. Ортогональная проекция импульса $\widehat{\mathbf{R}}_j$ на направление скорости u_{j+1} в соответствии с формулой (3.35) равна обобщенному импульсу $\widehat{\Lambda}_{2j-1}$, так как $\partial\varphi^{2j-1}/\partial u_{j+1} = 1$. Аналогично можно показать, что $\widehat{\Lambda}_{2j}$ — проекция на направление w_j импульса (-$\widehat{\mathbf{R}}_j$). Вектор $\widehat{\mathbf{R}}_j$ находим простым геометрическим построением по заданным проекциям $\widehat{\Lambda}_{2j-1}$ и $(-\widehat{\Lambda}_{2j})$ (рис. 20).

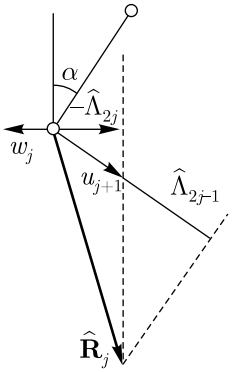

Рис. 20. $(j+1)$-й стержень

Значения $\widehat{\Lambda}_{2j-1}$ и $\widehat{\Lambda}_{2j}$, по определению равные

$$\widehat{\Lambda}_{2j-1} = \frac{\partial T}{\partial \widehat{v}^{\,l+2j-1}}\,, \quad \widehat{\Lambda}_{2j} = \frac{\partial T}{\partial \widehat{v}^{\,l+2j}}\,, \quad j = \overline{1, n-1}\,, \tag{3.67}$$

в развернутом виде задаются выражениями (3.20). Однако в данном случае проще воспользоваться непосредственно определениями (3.67).

Рассматривая кинетическую энергию, заданную в виде

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{6}\left(u_i^2 - u_i w_i + w_i^2 + 3v_i^2\right),$$

как сложную функцию новых скоростей $\widehat{v}^{\sigma}$, введенных по формулам (3.66), имеем

$$\widehat{\Lambda}_{2j-1} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial \widehat{v}^{\,l+2j-1}} + \frac{\partial T}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial \widehat{v}^{\,l+2j-1}} + \frac{\partial T}{\partial w_i}\frac{\partial w_i}{\partial \widehat{v}^{\,l+2j-1}}\right) =$$
$$= \frac{\partial T}{\partial u_{j+1}} = \frac{M}{6}\left(2u_{j+1} - w_{j+1}\right) = \frac{M(v_{j+1}\cos\alpha - 2v_j + v_{j+2})}{6\sin\alpha}\,.$$

Аналогично можно показать, что

$$\widehat{\Lambda}_{2j} = \frac{\partial T}{\partial w_j} = \frac{M(v_j \cos\alpha - 2v_{j+1} + v_{j-1})}{6\sin\alpha}\,.$$

Импульсные связи. До сих пор мы считали, что связи существуют как до удара, так и после него. Рассмотрим теперь случай, когда связи накладываются на систему мгновенно. Самым простым примером такой связи является связь, соответствующая предположению об абсолютно неупругом ударе материальной точки о плоскость. Ее можно задать уравнением $\dot{y} = 0$, если считать, что ось y направлена по прямой, по которой точка падает на плоскость. Импульс реакции этой связи $\widehat{R}$ очевидно равен количеству движения mv точки перед ударом. Удар точки о плоскость можно, таким образом, рассматривать как внезапное наложение связи, заданной уравнением $\dot{y} = 0$.

Переходя от этого примера к общему случаю, считаем, что обобщенные скорости $\widehat{v}^\sigma$ данной механической системы в момент $t = 0$ независимы, а при $t = \tau$ удовлетворяют уравнениям

$$\varphi^\varkappa = a_\sigma^{l+\varkappa}\widehat{v}^\sigma + a_0^{\lambda+\varkappa} = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad l = s - k\,. \tag{3.68}$$

Если перемещениями системы за время τ можно пренебречь, будем считать, что на систему накладываются *импульсные связи*.

Обобщенные скорости, соответствующие моменту $t = 0$, обозначим через $\widehat{v}_0^\sigma$, чтобы тем самым отличать их от скоростей, связанных уравнениями (3.68). Введем новые скорости формулами

$$\widehat{v}_*^{\,\lambda} = a_\sigma^\lambda \widehat{v}^{\,\sigma} + a_0^\lambda\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,,$$
$$\widehat{v}_*^{\,l+\varkappa} = a_\sigma^{l+\varkappa}\widehat{v}^{\,\sigma} + a_0^{l+\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

По предположению это взаимно однозначное соответствие между $\widehat{v}^{\,\sigma}$ и $\widehat{v}_*^{\,\rho}$, поэтому можно также записать

$$\widehat{v}^{\,\sigma} = b_\rho^\sigma \widehat{v}_*^{\,\rho} + b_0^\sigma\,, \quad \rho, \sigma = \overline{1,s}\,.$$

Новые скорости $v_*^{\,l+\varkappa}$ в результате наложения связей (3.68) получают приращения

$$\Delta\widehat{v}_*^{\,l+\varkappa} = -a_\sigma^{l+\varkappa}\widehat{v}_0^{\,\sigma} - a_0^{l+\varkappa}\,.$$

Как было показано, для обеспечения этих заданных приращений обобщенных скоростей $\widehat{v}_*^{\,l+\varkappa}$ к системе достаточно приложить соответствующие им дополнительные обобщенные импульсы $\widehat{\Lambda}_\varkappa$. Импульсные связи, заданные

уравнениями (3.68), наложение которых эквивалентно приложению обобщенных импульсов $\widehat{\Lambda}_\varkappa$, будем называть *идеальными*. Самой характерной импульсной идеальной связью является связь, которая выражается в том, что расстояние между двумя точками системы мгновенно становится постоянным. Ударные импульсы, обеспечивающие такую связь, направлены по прямой, соединяющей эти точки.

При идеальности связей алгебраические уравнения Лагранжа относительно новых скоростей имеют вид

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \widehat{v}_*^{\lambda}}\right|_0^\tau = \widehat{V}_\lambda^*\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s-k\,,$$
$$\left.\frac{\partial T}{\partial \widehat{v}_*^{l+\varkappa}}\right|_0^\tau = \widehat{V}_{l+\varkappa}^* + \widehat{\Lambda}_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Возвращаясь к исходным скоростям $\widehat{v}^{\,\sigma}$, то есть переходя от алгебраических уравнений Лагранжа второго рода к тем же уравнениям первого рода, получаем

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \widehat{v}^{\,\sigma}}\right|_0^\tau = \widehat{V}_\sigma + \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \widehat{v}^{\,\sigma}}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{3.69}$$

Внешние ударные импульсы $\widehat{V}_\sigma$ при внезапном наложении связей, как правило, отсутствуют, и уравнения (3.69) принимают вид

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \widehat{v}^{\,\sigma}}\right|_0^\tau = \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \widehat{v}^{\,\sigma}}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{3.70}$$

Неизвестными являются обобщенные импульсы $\widehat{\Lambda}_\varkappa$ реакций связей и скорости $\widehat{v}^{\,\sigma}$ в момент $t = \tau$. Дополняя систему (3.70) уравнениями связей (3.68), получаем замкнутую систему уравнений относительно неизвестных $\widehat{\Lambda}_\varkappa$ и $\widehat{v}^{\,\sigma}$.

Напомним, что в соответствии с определением (3.17) обобщенный импульс $\widehat{\Lambda}_\varkappa$ связан с импульсами $\widehat{R}_\mu$, приложенными к точкам системы, соотношением

$$\widehat{\Lambda}_\varkappa = \widehat{R}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}_*^{l+\varkappa}}\,. \tag{3.71}$$

Суммирование по μ означает суммирование по точкам, к которым в действительности приложены ударные импульсы со стороны связи, выраженной уравнением $\varphi^\varkappa = 0$.

Если обобщенная скорость $\widehat{v}^{\,\rho}$, входящая в уравнение связи $\varphi^\varkappa = 0$, представляет собой проекцию на некоторое направление скорости той точки, которая охватывается этой связью, то проекция на указанное направление импульса реакции связи, приложенного к этой точке, по аналогии с

выражением (3.35) может быть вычислена по формуле (по $\varkappa$ не суммировать!)

$$\widehat{R}^v_\rho = \widehat{\Lambda}_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \widehat{v}^\rho}\,. \tag{3.72}$$

В качестве примеров применения уравнения (3.70) и формул (3.71) и (3.72) рассмотрим следующие две задачи.

Задача 1. Тренога с однородными равными ножками, расположенными под прямым углом друг к другу, падает со скоростью v_0 и всеми ими ударяется о гладкий неупругий пол. Показать, что если ножки соединены в верхней точке шаровым шарниром, то скорость центра масс треноги уменьшится при ударе вдвое.

Трение в шарнире, которое удерживает ножки под прямым углом друг к другу до момента их соприкосновения с полом, несомненно, имеется и при ударе. Однако импульсом сил трения при приближенном подходе к этой задаче можно пренебречь и связь в шаровом шарнире в процессе удара можно считать идеальной. Движение всех трех ножек по предположению одинаково. Поэтому достаточно рассмотреть одну ножку AB (рис. 21,*а*). Считая ее тонким однородным стержнем, кинетическую энергию системы можно представить в виде

$$T = 3\left(\frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}\right), \quad J_c = \frac{ml^2}{3}\,.$$

Здесь m — масса стержня, $2l$ — его длина, v_c — скорость центра масс стержня AB, ω — его угловая скорость.

Скорость верхней точки B, направленную вертикально вниз, обозначим через v. Ее и угловую скорость ω будем рассматривать как обобщенные скорости. Квадрат скорости центра масс стержня AB, как непосредственно видно из рис. 21,*б*, равен

$$v_c^2 = v^2 - 2l\,\omega v\cos\alpha + l^2\omega^2\,,$$

и значит

$$T = \frac{3m}{2}\left(v^2 - 2l\,\omega v\cos\alpha + \frac{4}{3}\,l^2\omega^2\right).$$

Проекция скорости точки A на ось y такова:

$$v_* = 2l\,\omega\cos\alpha - v\,. \tag{3.73}$$

По предположению пол является неупругим. Это означает, что ножки не отделяются от пола. Следовательно, уравнение связи приобретает вид

$$\varphi = 2l\,\omega\cos\alpha - v = 0\,. \tag{3.74}$$

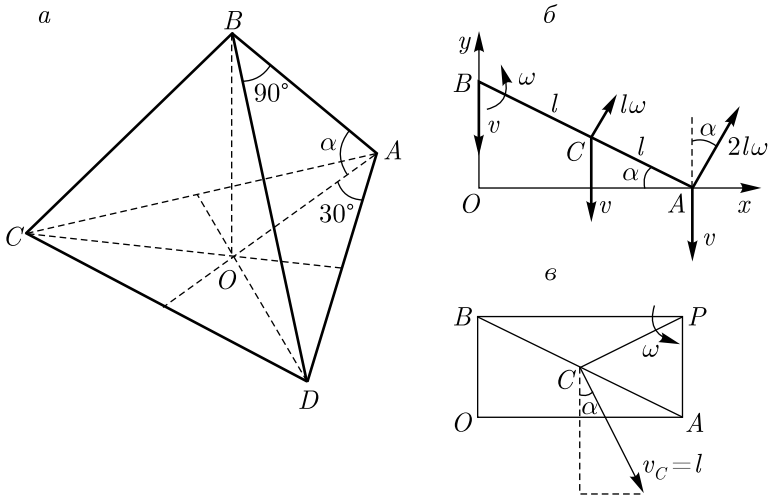

Рис. 21. Падение треноги

Применяя к данной задаче уравнения (3.70), имеем

$$\left.\frac{\partial T}{\partial v}\right|_0^\tau = \Lambda\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial \omega}\right|_0^\tau = \Lambda\frac{\partial\varphi}{\partial \omega}\,,$$

или в явном виде

$$\begin{gathered} 3m(v - l\,\omega\cos\alpha) - 3mv_0 = -\Lambda\,, \\ 3m\left(\frac{4}{3}\,l^2\omega - lv\cos\alpha\right) + 3mlv_0\cos\alpha = 2l\,\Lambda\cos\alpha\,. \end{gathered} \tag{3.75}$$

При записи этих уравнений учтено, что при $t = 0$ скорость $v = v_0$, а $\omega = 0$.

Рассматривая систему (3.75) совместно с уравнениями (3.74), находим, что

$$v = \frac{3}{2}\,v_0\cos^2\alpha\,, \quad \omega = \frac{3}{4}\frac{v_0\cos\alpha}{l}\,, \quad \Lambda = 3mv_0\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha\right).$$

Скорость центра масс треноги равна проекции скорости центра масс стержня AB на вертикаль. Мгновенный центр скоростей P стержня AB находим в вершине прямоугольника с диагональю AB (рис. 21,*в*). Отсюда следует, что скорость v_c центра масс стержня равна ωl и образует угол α с вертикалью. И, следовательно, искомая скорость v' центра масс треноги равна

$$v' = \omega l\cos\alpha = \frac{3}{4}\,v_0\cos^2\alpha\,.$$

Непосредственно из рис. 21,*а* видно, что

$$\cos\alpha = \frac{OA}{2l} = \frac{DA}{2\cos 30^\circ \cdot 2l} = \frac{2l\sqrt{2}}{2\cos 30^\circ \cdot 2l} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Отсюда

$$v' = \frac{3}{4}\, v_0 \cos^2\alpha = \frac{v_0}{2}\,.$$

Таким образом, действительно скорость v' в два раза меньше скорости v_0.

Установим теперь физический смысл обобщенного импульса Λ. Связь, выраженная уравнением (3.74), приводит к появлению трех равных импульсов $\widehat{R}_\mu = R$, приложенных со стороны пола к концам ножек. Эти импульсы направлены вертикально вверх. Скорости $\dot{x}_\mu$ точек их приложения равны скорости v_*, введенной по формуле (3.73). Отсюда следует, что в соответствии с выражением (3.71)

$$\Lambda = \sum_{\mu=1}^{3} \widehat{R}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial v_*} = 3R\,.$$

Отсюда

$$R = \frac{1}{3}\,\Lambda = mv_0\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha\right) = \frac{mv_0}{2}\,.$$

З а д а ч а 2. Четыре однородных тонких стержня массой M и длиной l соединены друг с другом и образуют раму. Две противоположные вершины A и B этой рамы соединены невесомой гибкой нерастяжимой нитью длиной $l\sqrt{2}$. В момент, когда рама, перемещаясь произвольно по плоскости, принимает форму квадрата, нить мгновенно натягивается. Определить импульс S силы натяжения нити.

До натяжения нити система имеет четыре степени свободы. В качестве обобщенных скоростей можно взять составляющие скоростей вершин A и B. В тот момент, когда рама имеет форму квадрата, скорости двух других вершин очень просто выражаются через скорости вершин A и B (рис. 22).

Учитывая обозначения, принятые на рисунках 18 и 22, а также формулу (3.50), находим, что кинетическая энергия системы в данном случае такова:

$$T = \frac{M}{6}\,\left[5(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2) - 2(v_1v_3 + v_2v_4)\right].$$

Скорость точки B относительно точки A вдоль AB:

$$v_* = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(v_2 - v_3 - v_1 + v_4)\,. \tag{3.76}$$

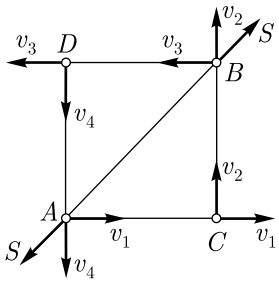

Рис. 22. Движение рамы

При натяжении нити $v_* = 0$, поэтому уравнение импульсной связи в данном случае имеет вид

$$\varphi = v_2 - v_3 - v_1 + v_4 = 0\,. \tag{3.77}$$

Применяя к данной задаче уравнения (3.70), получаем

$$\left.\frac{\partial T}{\partial v_\sigma}\right|_0^\tau = \Lambda \frac{\partial \varphi}{\partial v_\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,4}\,,$$

или в явном виде

$$5v_1 - v_3 - (5v_{10} - v_{30}) = -3\Lambda/M\,,$$

$$5v_2 - v_4 - (5v_{20} - v_{40}) = 3\Lambda/M\,,$$

$$5v_3 - v_1 - (5v_{30} - v_{10}) = -3\Lambda/M\,,$$

$$5v_4 - v_2 - (5v_{40} - v_{20}) = 3\Lambda/M\,.$$

Значения скоростей при $t = 0$ обозначим здесь через $v_{\sigma 0}$. Тогда находим

$$\Lambda = M(v_{10} - v_{20} + v_{30} - v_{40})/3 = -M\sqrt{2}\; v_{*0}/3\,,$$

$$v_1 = v_{10} + \frac{\sqrt{2}}{4}\; v_{*0}\,, \quad v_3 = v_{30} + \frac{\sqrt{2}}{4}\; v_{*0}\,,$$

$$v_2 = v_{20} - \frac{\sqrt{2}}{4}\; v_{*0}\,, \quad v_4 = v_{40} - \frac{\sqrt{2}}{4}\; v_{*0}\,.$$

Определим теперь импульс S натяжения нити. В обозначениях (3.76) уравнение связи (3.77) перепишем в виде

$$\varphi = \sqrt{2}\; v_* = 0\,.$$

При этом в соответствии с формулой (3.72) импульс R, приложенный к точке B в направлении скорости v_*, равен

$$R = \Lambda \frac{\partial \varphi}{\partial v_*} = \sqrt{2}\ \Lambda\,.$$

Этот импульс приложен к точке B со стороны нити. По третьему закону Ньютона интересующий нас импульс $S = -R$, то есть

$$S = -\sqrt{2}\ \Lambda = 2\,M v_{*0}/3\,.$$

Применение теории удара к управляемому движению. Уравнения импульсных связей можно рассматривать и как заданную программу движения. Задача при этом формулируется следующим образом: *За время τ, в течение которого система почти не перемещается, к ней требуется приложить такие управляющие импульсы $\widehat{\mathbf{R}}_\mu$, чтобы к моменту $t = \tau$ скорости ее удовлетворяли соотношениям* (3.68). Импульсами всех остальных сил X_μ за время τ пренебрегаем. Как следует из основной теоремы теории удара, достаточные для этого управляющие импульсы $\widehat{R}_\mu$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \widehat{R}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}_*^{\,l+\varkappa}} = \widehat{\Lambda}_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \\ \widehat{R}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \widehat{v}_*^{\lambda}} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,. \end{gathered} \tag{3.78}$$

Отметим, что принуждение

$$G = \frac{1}{2} \sum_\mu m_\mu (\dot{x}_{\mu 1} - \dot{x}_{\mu 2})^2$$

при этом минимально. Если до приложения импульсов $\widehat{R}_\mu$ система находилась в состоянии покоя ($\dot{x}_{\mu 0} = 0$ при всех μ), то принуждение G равно кинетической энергии системы. Следовательно, в рассматриваемом случае управление, удовлетворяющее условиям (3.78), оптимально в том смысле, что кинетическая энергия минимальна, то есть минимальны энергетические затраты.

Глава IX
СТАТИКА И ДИНАМИКА ТОНКОГО СТЕРЖНЯ

Авторы: *А. К. Беляев, Н. Ф. Морозов, П. Е. Товстик, Т. П. Товстик*

В этой главе излагаются классические результаты Эйлера о нелинейном статическом деформировании продольно сжатого стержня, результаты работы М. А. Лаврентьева и А. Ю. Ишлинского о потере устойчивости при динамическом продольном сжатии и современные результаты, связанные в основном с исследованием взаимодействия продольных и поперечных колебаний. Глава знакомит читателей с основными методами исследования — с методами Даламбера и Фурье, с методами исследования параметрических резонансов, с асимптотическим методом двухмасштабных разложений.

§ 1. Введение

Глава содержит краткий обзор цикла работ по статическому и динамическому продольному сжатию тонкого стержня. При статическом продольном осевом сжатии стержень может потерять устойчивость прямолинейной формы, переходя в смежные формы равновесия. Это классическая задача Эйлера, которой он начал заниматься еще в 1744 году[1]. При динамическом продольном нагружении задача значительно сложнее. При строгой постановке по стержню распространяются продольные упругие волны, которые, в свою очередь, могут порождать интенсивные поперечные колебания. Однако в связи с тем, что время распространения продольной волны по длине стержня существенно меньше наименьшего периода поперечных колебаний, первоначально использовалась приближенная модель, согласно которой считается, что продольная волна распространяется по стержню мгновенно, а осевая сжимающая сила постоянна по длине. При такой постановке М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским[2] решена задача для сжимающей силы, существенно превосходящей критическое значение в статике. Обнаружено, что при потере устойчивости наиболее быстро могут расти прогибы по старшим формам потери устойчивости.

---

[1] *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или Решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 600 с.

[2] *Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Доклады АН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 776–782.

В работах авторов этой главы[3] задача решается в более строгой постановке, при которой учитывается конечная скорость распространения продольных волн в стержне. Рассматриваются как кратковременный продольный удар по концу стержня, так и внезапно приложенная продольная нагрузка, которая затем остается постоянной. При этом постоянно действующая нагрузка предполагается меньше Эйлеровой. Задача заключается в последовательном решении двух линейных задач. Сначала рассматриваются продольные волны, порождающие периодическую систему продольных напряжений в стержне. Эти напряжения могут приводить к возбуждению поперечных колебаний, связанных с появлением параметрических резонансов. Отмечен недостаток линейного подхода, согласно которому силы сопротивления в ряде случаев не могут предотвратить неограниченный рост амплитуды поперечных колебаний.

Поэтому был предложен квазилинейный подход, учитывающий влияние поперечных колебаний на продольные. Для решения полученной нелинейной системы уравнений в частных производных сначала был использован метод Бубнова — Галёркина, приводящий к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих лишь численное решение. Затем был применен метод двухмасштабных разложений, в результате которого был проведен качественный анализ. Оказалось, что движение носит характер биений, при которых энергия продольных колебаний переходит в поперечные и обратно. При учете сопротивлений биения с течением времени затухают.

Если внезапно приложенная нагрузка, превосходящая Эйлерову критическую, затем остается постоянной, параметрические резонансы также возникают, однако их анализ отходит на второй план, ибо скорость роста их амплитуды меньше, чем у форм Эйлеровой потери устойчивости. Поэтому особый интерес представляет более подробное рассмотрение неустойчивости в случаях, когда внезапно приложенная нагрузка меньше Эйлеровой. Установлено, что области неустойчивости занимают сравнительно небольшую часть на плоскости параметров. При квазилинейном подходе получена оценка максимальной амплитуды изгибных колебаний.

Вопрос о том, какую конечную форму примет стержень под действием продольных сил, превосходящих Эйлерову критическую нагрузку, был решен самим Л. Эйлером. Это так называемые *эластики Эйлера*. Ниже рассматривается вопрос об эволюции формы прогиба с течением времени. Интересно отметить, что с течением времени стержень последователь-

[3]Обзор указанных работ см. в статье: *Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Тонкий стержень при продольном динамическом сжатии // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 19–34.

но принимает формы, близкие к предсказанным в классической работе М. А. Лаврентьева и А. Ю. Ишлинского (см. сноску выше), а затем принимает форму одного из эластиков Эйлера.

Далее рассматривается задача в более реальной постановке, чем выше, — продольный удар по концу стержня твердым телом, подлетающим к стержню с заданной скоростью, а затем отскакивающим от него. В простейшей постановке эта задача решена Сен-Венаном[4], а в более точной постановке, учитывающей местные деформации в зоне контакта, — Сирсом[5]. Ниже приводится решение этой задачи, и обсуждается вопрос о возбуждении поперечных параметрических резонансов, вызванных ударом тела[6].

§ 2. Продольные колебания стержня. Линейное приближение

Рассмотрим тонкий однородный упругий стержень длины L с постоянным поперечным сечением S. Пусть правый конец стержня $x = L$ закреплен, а к левому концу $x = 0$ приложена зависящая от времени сила $f(t)$. Начальные условия считаем нулевыми. Тогда уравнение движения и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,, \quad ES \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -f(t)\,, \quad u(L,t) = 0\,. \tag{2.1}$$

Здесь $u(x,t)$ — продольное перемещение сечения x стержня, $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в материале стержня, E — модуль Юнга, ρ — плотность материала.

Перейдем к безразмерным переменным (со значком $\widehat{\ }$), в которых длина стержня и скорость звука равны единице:

$$\widehat{x} = \frac{x}{L}\,, \quad \widehat{t} = \frac{tc}{L}\,, \quad \widehat{f}(\widehat{t}) = \frac{f(t)}{ES}\,.$$

[4] *Saint-Venant A.* Sur le choc longitudinal de deux barres elastiques // J. de Math. (Liouville) Ser. 2. T. 12. 1867.

[5] *Sears J. E.* On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1908. Vol. 14.

[6] *Беляев А. К., Ма Ч.-Ч., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Шурпатов А. О.* Динамика стержня при продольном ударе телом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). № 3. С. 506–515.

Далее значок $\widehat{\ }$ опускаем. Тогда уравнение движения, граничные и начальные условия запишутся в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -f(t)\,, \\ u(1,t) = 0\,, \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0\,.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Известны два метода построения решения задачи (2.2) — *метод Даламбера* и *метод Фурье*. Опишем их, ибо оба эти метода будут использованы ниже.

Метод Даламбера связан с распространением волн. Общее решение представляется в виде суперпозиции волн, бегущих в положительном и отрицательном направлениях. Функция $u(x,t) = g(x-t)+h(x+t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) при любых функциях g и h. Остается найти эти функции так, чтобы удовлетворить граничным и начальным условиям. Для рассматриваемой задачи перемещение левого конца стержня имеет вид интеграла свертки:

$$u(0,t) = \int_0^t G(t-\tau) f(\tau)\, d\tau\,,$$

где $G(t)$ — реакция на единичный импульс $f(t) = \delta(t)$. Функция $G(t)$ — это периодичная кусочно-постоянная функция с периодом 4 $(G(t+4) = G(t))$. Это связано с тем, что при отражении от закрепленного конца $x = 1$ не меняется знак величины u, а при отражении от свободного конца $x = 0$ знак меняется на противоположный:[7]

$$G(t) = \begin{cases} +1\,, & 0 < t < 2\,, \\ -1\,, & 0 < 2 < 4\,, \end{cases} \qquad \text{или} \quad G(t) = (-1)^{[t/2]}\,, \tag{2.3}$$

где $[z]$ означает целую часть числа z.

Метод Фурье заключается в разложении решения в ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\varphi_k(t) \tag{2.4}$$

по собственным функциям $u_k(x)$ краевой задачи

$$\frac{d^2 u_k}{dx^2} + \nu^2 u_k = 0\,, \quad \left.\frac{du_k}{dx}\right|_{x=0} = 0\,, \quad u_k(1) = 0\,.$$

[7] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 656 с.

Решения этой задачи суть

$$u_k(x) = \cos \nu_k x\,, \quad \nu_k = (k - 0.5)\pi\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Функции $\varphi_k(t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2\varphi_k}{dt^2} + \nu_k^2 \varphi_k = 2f(t)\,, \qquad \varphi_k(0) = 0\,, \quad \left.\frac{d\varphi_k}{dt}\right|_{t=0} = 0\,,$$

из которого находим

$$\varphi_k(t) = \frac{2}{\nu_k} \int_0^t f(t) \sin(\nu_k(t - \tau)) d\tau\,.$$

Нас интересует (безразмерная) продольная сила сжатия стержня

$$\varepsilon(x, t) = \frac{P}{ES} = -\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \sin \nu_k x\, \varphi_k(t)\,. \tag{2.5}$$

Отметим важное для дальнейшего обстоятельство, состоящее в том, что функции $\varphi_k(t)$, а вместе с ними и функция $\varepsilon(x, t)$ периодичны по t с периодом 4 после прекращения действия удара (при $t > T$, где $f(t) \equiv 0$ при $t > T$). Действительно, в этом случае при $t > T$

$$\varphi_k(t) = a_k \cos \nu_k t + b_k \sin \nu_k t\,,$$

где постоянные числа a_k и b_k равны

$$a_k = -\frac{2}{\nu_k} \int_0^T f(t) \sin \nu_k t\, dt\,, \quad b_k = \frac{2}{\nu_k} \int_0^T f(t) \cos \nu_k t\, dt\,.$$

Периодичность следует из того, что $\nu_k = (k - 0.5)\pi$.

§ 3. Изгиб и поперечные колебания стержня

Рассмотрим тот же стержень, что и в § 2, и предположим, что его концы $x = 0$ и $x = L$ шарнирно оперты. Малые поперечные колебания стержня, сжатого осевой силой P, описываются уравнением

$$\begin{gathered} \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(P \frac{\partial w}{\partial x}\right) + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0\,, \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,, \quad x = 0, L\,, \end{gathered} \tag{3.1}$$

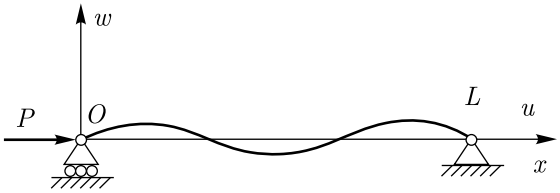

Рис. 1. Деформация стержня при осевом сжатии

где $w(x,t)$ — прогиб, J — момент инерции поперечного сечения в плоскости наименьшей жесткости на изгиб (см. рис. 1).

В безразмерных переменных (2.1) задача (3.1) переписывается в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\mu^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0\,,\\ w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\,,\quad x=0,1,\end{gathered}\tag{3.2}$$

где

$$\varepsilon=\frac{P}{ES}\,,\quad \mu=\frac{r}{L}\,,\quad J=r^2S\,,$$

r — радиус инерции поперечного сечения, μ — малый параметр толщины. Далее используется также $\ell=1/\mu$ — большой параметр длины.

§ 4. Классические решения Эйлера и Лаврентьева — Ишлинского

Статическая задача бифуркации равновесия первоначально сжатого постоянной силой ($\varepsilon(x,t)=\varepsilon_0=\mathrm{const}$) стержня с шарнирно опертыми концами была решена Эйлером. Форме потери устойчивости с m полуволнами $w(x)=W\sin m\pi x$ соответствует деформация сжатия $\varepsilon_m=\mu^2m^2\pi^2$. При $m=1$ получаем классическую Эйлерову критическую нагрузку

$$\varepsilon_{cr}=\mu^2\pi^2\,.$$

При достаточно большом значении начальной деформации ε_0 возможна одновременная потеря устойчивости по нескольким первым формам, точнее, при $m\leqslant m_0=[\sqrt{\varepsilon_0/(\mu\pi)^2}]$, где через $[z]$ обозначена целая часть числа z.

М. А. Лаврентьев и А. Ю. Ишлинский обратили внимание на то, что при $m_0>1$ скорость роста амплитуды при потере устойчивости максимальна для одной из старших форм потери устойчивости ($m\approx m_0\sqrt{2}$).

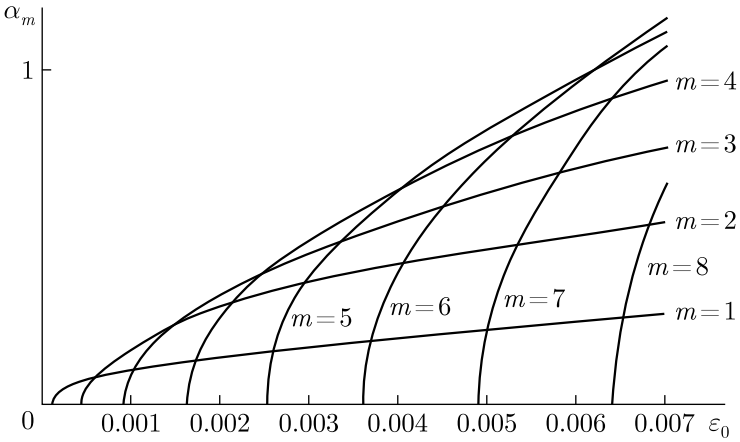

Рис. 2. Зависимость скорости роста прогиба стержня по m-й форме от осевой деформации

Действительно, частное решение уравнения (3.2) при $m \leqslant m_0$, $\delta_w = 0$ имеет вид

$$w(x,t) = w_{0m} \sin m\pi x \, e^{\alpha_m t}, \quad \alpha_m = \sqrt{\varepsilon_0 m^2 \pi^2 - \mu^2 m^4 \pi^4},$$

где w_{0m} зависит от начальной погиби $w_0(x)$, а параметр α_m характеризует скорость роста амплитуды m-й формы потери устойчивости. На рис. 2 показаны графики функций $\alpha_m(\varepsilon_0)$ для $m = 1, 2, \ldots, 8$.

С ростом деформации сжатия ε_0 растут как максимальная скорость роста амплитуды, так и номер соответствующей формы.

К вопросу о скорости роста форм потери устойчивости стержня мы вернемся в § 10 при рассмотрении нелинейной задачи о его больших послекритических деформациях.

Выбор наиболее быстро растущей формы важен для ряда динамических задач потери устойчивости, в частности, для различных задач устойчивости оболочек, для которых характерна возможность потери устойчивости по многим формам.

§ 5. Продольно-поперечные колебания. Линейное приближение

В § 4 предполагалось, что продольное сжатие ε_0 постоянно. Здесь переходим к более строгой постановке задачи, при которой учитывается распространение продольных волн. В линейном приближении в уравнении (3.2) согласно (2.5) полагаем $\varepsilon = \varepsilon(x,t) = -\partial u/\partial x$, где $u(x,t)$ — решение задачи

(2.2). В результате задача сводится к последовательному решению двух линейных краевых задач.

Перепишем уравнение для поперечных колебаний:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon(x.t)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\mu^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0\,,\\ \varepsilon(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\sin\nu_k x\,\varphi_k(t)\,.\end{gathered}\tag{5.1}$$

Коэффициенты $\varphi_k(t)$ зависят от формы силы $f(t)$.

В частности, для П-образного импульса длительности T

$$f(t)=\begin{cases}\varepsilon_0\,, & t\leqslant T\,,\\ 0\,, & t>T\,,\end{cases}\qquad\to$$

$$\to\quad \nu_k^2\varphi_k(t)=\begin{cases}1-\cos(\nu_k t)\,, & t\leqslant T\,,\\ \cos\nu_k(t-T)-\cos\nu_k t\,, & t>T\,,\end{cases}$$

и для внезапно приложенного длительного импульса

$$f(t)=\varepsilon_0\,,\quad t<T\quad\to\quad \nu_k^2\varphi_k(t)=1-\cos(\nu_k t)\,.$$

Перейдем к рассмотрению поперечных колебаний. Решение уравнения (5.1) ищем в виде ряда

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin n\pi x\,.\tag{5.2}$$

Функции $T_m(t)$ удовлетворяют системе уравнений, которая получается после подстановки (5.2) в (5.1), умножения результата на $\sin m\pi x$ и интегрирования по x в пределах (0,1):

$$\begin{aligned}&\frac{d^2T_m}{dt^2}+\omega_m^2T_m(t)-\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}(t)T_n(t)=0\,,\\ &m=1,2,\ldots\,,\qquad \omega_m=\mu m^2\pi^2\,,\\ &a_{mn}(t)=2mn\pi^2\int_0^1\varepsilon(x,t)\,\cos m\pi x\,\cos n\pi x\,dx\,.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Для кратковременного импульса после прекращения его действия функции $a_{mn}(t)$ периодичны с периодом $T=2\pi/\nu_1=4$ и имеют нулевое среднее значение.

Для длительного импульса среднее значение деформации $\varepsilon(x,t)$ равно ε_0. Выделяя его, запишем уравнения (5.3) в виде

$$\frac{d^2T_m}{dt^2} + (\omega_m^2 - m^2\pi^2\varepsilon_0)T_m(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{a}_{mn}(t)T_n(t) = 0\,,$$
$$m = 1, 2, \dots\,,$$

где коэффициенты $\widehat{a}_{mn}(t) = a_{mn}(t) - \varepsilon_0\delta_{mn}m^2\pi^2$ имеют нулевое среднее значение (δ_{mn} — символ Кронекера). При $a_{mn}(t) = 0$ возможна статическая потеря устойчивости по m-й форме при $\omega_m^2 - m^2\pi^2\varepsilon_0 < 0$ или при $\varepsilon_0 > m^2\varepsilon_{cr}$. Наличие периодических функций $a_{mn}(t)$ приводит к тому, что потеря устойчивости по m-й форме может произойти и при меньших значениях ε_0, в частности, при $\varepsilon_0 < \varepsilon_{cr}$, то есть при нагрузке, меньшей Эйлеровой (см. § 7).

§ 6. Параметрические резонансы

Рассмотрим устойчивость нулевого решения системы (5.3). Эта система содержит два безразмерных параметра: малую амплитуду продольной деформации ε_0 и малый параметр μ — относительную толщину стержня или обратную ей большую относительную длину $\ell = \mu^{-1}$.

При $\varepsilon_0 = 0$ частоты собственных колебаний системы (5.3) равны $\omega_m = \mu\, m^2\pi^2$, а частота параметрического возбуждения равна $\nu_1 = \pi/2$. Методы исследования параметрических колебаний хорошо известны[8]. При малых ε_0 области неустойчивости возможны лишь в окрестностях значений

$$|\omega_m \pm \omega_n| = k\nu_1\,, \quad m, n, k = 1, 2, \dots\,.$$

На плоскости параметров (ℓ, ε_0) (при отсутствии сопротивлений) области параметрической неустойчивости примыкают к оси $\varepsilon_0 = 0$ при

$$\ell_{mnk} = \frac{2\pi(m^2 \pm n^2)}{k}\,, \quad m, n, k = 1, 2, \dots\,. \tag{6.1}$$

Множество критических длин, определяемое формулой (6.1), является всюду плотным, а сами резонансы возбуждаются с различными скоростями роста амплитуд колебаний. При $m = n$, $k = 1$ получаем главные резонансы, при $m \neq n$ — комбинационные резонансы и при $k > 1$ — резонансы на обертоне.

[8] См., например, монографию: *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.

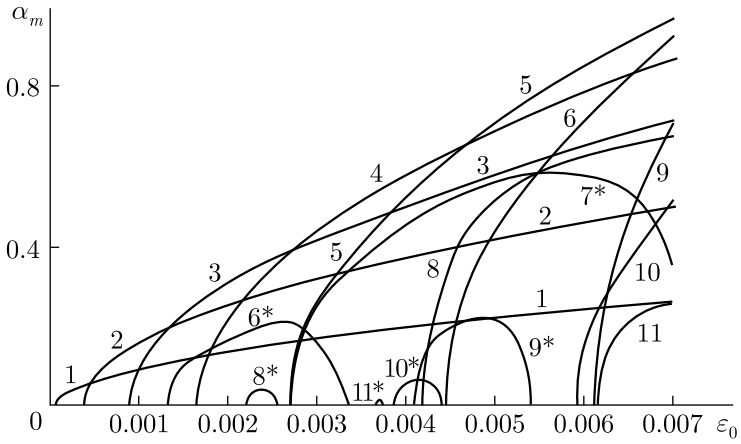

Рис. 3. Зависимость скорости роста прогиба стержня от осевой деформации по m-й форме при эйлеровой потере устойчивости и при параметрических резонансах (со значком *)

Рассмотрение главных резонансов при $\ell_m = 4\pi m^2$ сводится к уравнениям Хилла

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \left(\omega_m^2 - \varepsilon_0 a_{mm}(t)\right) T_m(t) = 0\,, \quad m = 1, 2, \dots\,, \tag{6.2}$$

в которых взаимодействием форм колебаний пренебрегается. При сохранении в ряду (5.2) лишь одного слагаемого уравнение (6.2) переходит в уравнение Матье. В § 9 будет показано, что такой подход для главных резонансов дает первое приближение по ε_0 для границ области неустойчивости на плоскости (ℓ, ε_0). В результате численного интегрирования уравнения (6.2) находятся характеристические показатели ρ_j матрицы монодромии[8]. Скорость роста прогиба α_m^*, введенная в § 4, связана с ними по формуле $\alpha_m^* = (1/4)\ln(\max_j |\rho_j|)$.

На рис. 3 для стержня с безразмерной длиной $\ell = 100\,\pi$ при внезапно приложенном длительном нагружении с $0 < \varepsilon_0 \leqslant 0.007$ показаны скорости роста амплитуд $\alpha_m(\varepsilon_0)$ для Эйлеровых форм потери устойчивости (те же, что и на рис. 2) и для параметрических резонансов (со значком *). Видим, что Эйлеровы формы растут быстрее параметрических. Взятая длина равна критической для $m = 5$, поэтому параметрические резонансы при $m \leqslant 5$ не возбуждаются.

Проведем анализ областей неустойчивости на плоскости (ℓ, ε_0). На рис. 4 показаны характерные области. При отсутствии сопротивлений эти области примыкают к оси $\varepsilon_0 = 0$, а при их наличии — отделены от этой оси

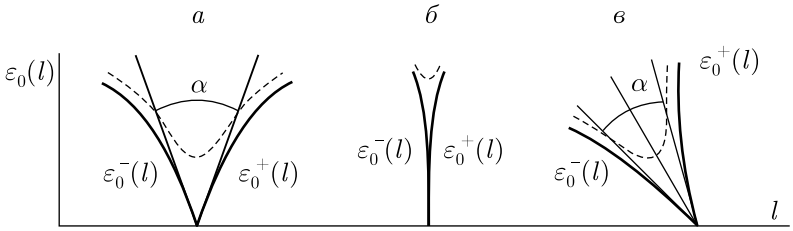

Рис. 4. Широкие (*а, в*) и узкая (*б*) области неустойчивости при параметрических резонансах

(штриховая линия). Кратковременный импульс порождает симметричные относительно вертикальной прямой области (рис. 4,*а* и рис. 4,*б*), а для длительного сжатия области наклонены влево (рис. 4,*в*). Главные и некоторые комбинационные резонансы являются «широкими», то есть касательные к границе области устойчивости, проведенные из точки $\varepsilon_0 = 0$, образуют ненулевой угол α (рис. 4,*а* и рис. 4,*в*), а для «узкой» области касательные совпадают (рис. 4,*б*).

§ 7. Потеря устойчивости при нагрузке, меньшей Эйлеровой

Внезапное приложение сжимающей нагрузки, меньшей Эйлеровой критической, порождает продольные колебания, которые, в свою очередь, могут привести к параметрическим резонансам и неустойчивости. Расчеты показали, что потеря устойчивости возможна лишь в узких интервалах длин $\ell_m^* < \ell < \ell_m = 4m^2\pi$. В частности, при $m = 2$ указанным интервалом является $40.6 < \ell < 50.3$. Возьмем стержень длиной $\ell = 0.45$ и сжатие

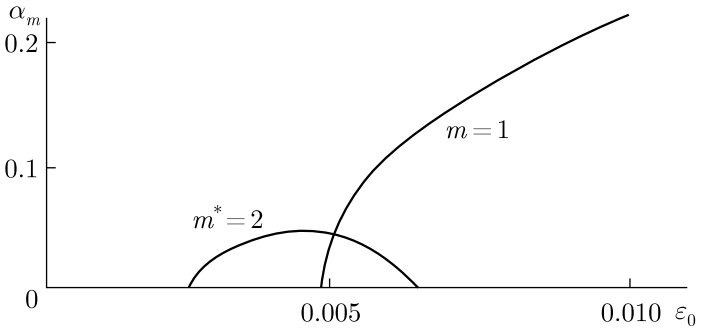

Рис. 5. Иллюстрация потери устойчивости при нагрузке, меньшей Эйлеровой критической

$\varepsilon_0 = 0.0035$, тогда $\varepsilon_{cr} = \pi^2/\ell^2 = 0.00487 > \varepsilon_0$. На рис. 5 для этого стержня показан параметр α_m скорости роста амплитуды при Эйлеровой потере устойчивости ($m = 1$) и при параметрическом резонансе ($m^* = 2$).

Параметрические резонансы при отсутствии сопротивлений приводят к неограниченному росту амплитуды поперечных колебаний, что противоречит консервативному характеру задачи. Проведенные расчеты показали, что силы сопротивления могут лишь уменьшить область неустойчивости. Поэтому переходим к более точной квазилинейной постановке задачи.

§ 8. Квазилинейное приближение

Причина неограниченного роста амплитуды при параметрических резонансах в линейном приближении заключается в том, что для роста амплитуды поперечных колебаний энергия черпается из продольных колебаний. Амплитуда же продольных колебаний остается неизменной. При квазилинейном подходе учитывается также влияние поперечных колебаний на продольные. В безразмерной форме уравнения движения и граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0\,, \quad \varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\,, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -f(t)\,, \quad u(1,t) = 0\,,\end{gathered} \tag{8.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mu^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0\,, \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,, \quad x = 0, 1\,.\end{gathered} \tag{8.2}$$

Уравнение (8.1) отличается от уравнения (2.2) тем, что принято более точное выражение $\varepsilon = -u_x - (1/2)w_x^2$ для продольной деформации. Уравнение (8.2) идентично уравнению (3.2).

Система нелинейных уравнений (8.1), (8.2) точно не интегрируется. Ее приближенное решение можно найти с использованием метода Бубнова — Галёркина. Представляя неизвестные функции в виде

$$u(x,t) = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\cos(\nu_k x)\,,$$

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t)\sin(m\pi x)\,,$$

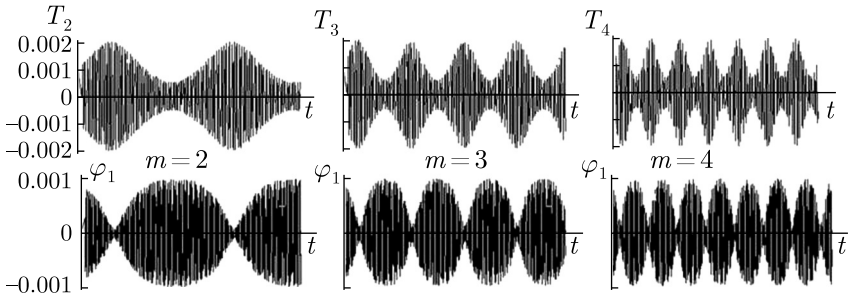

Рис. 6. Перекачка энергии продольных и поперечных колебаний при параметрических резонансах, порожденных кратковременным ударным импульсом

для неизвестных коэффициентов $\varphi_k(t)$ и $T_m(t)$ приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую интегрируем численно. Характерные результаты для кратковременного ударного импульса при отсутствии сопротивлений представлены на рис. 6. Рассмотрены параметрические резонансы при $m = 2, 3, 4$.

Движение представляет собой биения с последовательной перекачкой энергии продольных колебаний в поперечные и обратно.

При действии внезапно приложенной нагрузки, меньшей Эйлеровой критической, параметрический резонанс переходит в биения. На рис. 7 представлено развитие колебаний для стержня, рассмотренного в § 7, при отсутствии (слева) и при наличии малого сопротивления (справа). Здесь $u(x,t) = a_1(t)\sin\nu_1 x$, $w(x,t) = b_2(t)\sin 2\pi x$.

Здесь в отличие от рис. 6 продольные колебания накладываются на постоянное сжатие, которое при наличии сопротивлений не затухает.

§ 9. Асимптотическое интегрирование квазилинейных уравнений движения стержня

Характер кривых на рис. 6 и рис. 7 наводит на мысль о целесообразности использования здесь двухмасштабных разложений[9], удобных для рассмотрения быстро колеблющихся функций с медленно меняющимися амплитудами. Изложим метод в случае m-го главного параметрического резонанса для кратковременного ударного импульса.

[9]См. монографию: *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

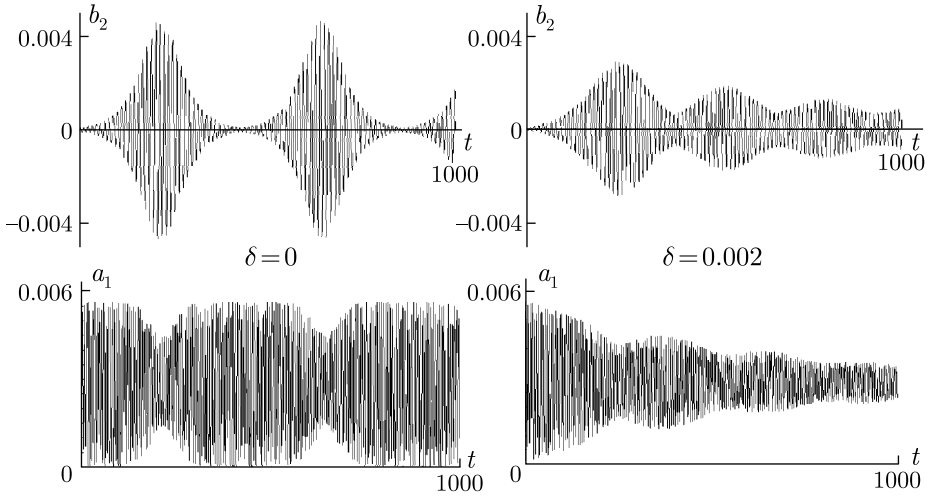

Рис. 7. Перекачка энергии колебаний при длительном сжатии без учета и с учетом затухания

Решение ищем в виде

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\cos(\nu_k x)\,, \\
w(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t)\sin(m\pi x)\,.
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

Умножая уравнения (3.1), (3.2) на функции $\cos(\nu_k x)$ и $\sin(m\pi x)$ соответственно и интегрируя по x в пределах (0,1), получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\varphi_k}{dt^2} + \nu_k^2\varphi_k + \sum_{m,n=1}^{\infty} D_{mnk}T_mT_n = 0\,, \quad k = 1,2,\dots\,, \\
&\frac{d^2T_m}{dt^2} + \omega_m^2 T_m - L_{mn}(T) - \sum_{k,n=1}^{\infty} c_{mnk}T_n\varphi_k = 0\,, \\
&m = 1,2,\dots\,.
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

При $\varepsilon_0 \ll 1$ ищем решение системы (9.2) с медленно меняющимися амплитудами

$$
\begin{aligned}
\varphi_k &= \varepsilon_0\varphi_k^{(0)}(t,\theta) + \varepsilon_0^2\varphi_k^{(1)}(t,\theta) + \dots\,, \\
T_m &= \varepsilon_0 T_m^{(0)}(t,\theta) + \varepsilon_0^2 T_m^{(1)}(t,\theta) + \dots\,,
\end{aligned}
$$

где медленное время $\theta = \varepsilon_0 t$. Тогда в системе (9.2)

$$
\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\theta}\,.
$$

Кроме того, положим $\omega_m^2 = \nu_1^2/4 + \varepsilon_0\delta$, где δ — параметр расстройки частоты при параметрическом резонансе. Слагаемое $L_{mn}(T)$ в (9.2) имеет порядок ε_0^3 и не входит в рассматриваемые приближения.

В нулевом приближении получаем

$$\varphi_k^{(0)}(t,\theta) = a_{kc}(\theta)\cos(\nu_k t) + a_{ks}(\theta)\sin(\nu_k t)\,,$$
$$T_m^{(0)}(t,\theta) = b_{mc}(\theta)\cos(\nu_1 t/2) + b_{ms}(\theta)\sin(\nu_1 t/2)\,,$$

где неизвестные функции $a_{kc}(\theta), a_{ks}(\theta), b_{mc}(\theta), b_{ms}(\theta)$ находятся из условий совместности уравнений первого приближения

$$\begin{aligned}
&2\nu_1\frac{da_{1c}}{d\theta} - D_{1m}b_{mc}b_{ms} = 0\,,\\
&-2\nu_1\frac{da_{1s}}{d\theta} - \frac{1}{2}D_{1m}\left(b_{mc}^2 - b_{ms}^2\right) = 0\,,\\
&2\frac{da_{kc}}{d\theta} = 0\,,\quad 2\frac{da_{ks}}{d\theta} = 0\,,\quad k = 2,3,\dots\,,\\
&\nu_1\frac{db_{mc}}{d\theta} - \delta\, b_{ms} + \frac{1}{2}\widehat{C}_{1m}\left(b_{mc}a_{1s} - b_{ms}a_{1c}\right) = 0\,,\\
&-\nu_1\frac{db_{ms}}{d\theta} - \delta\, b_{mc} + \frac{1}{2}\widehat{C}_{1m}\left(b_{mc}a_{1c} + b_{ms}a_{1s}\right) = 0\,.
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Из этой системы следует, что в нулевом приближении (которым мы и ограничимся) функции $a_{kc}(\theta)$, $a_{ks}(\theta)$, $k \geqslant 2$, не входят в последние два уравнения. При отсутствии сопротивлений эти функции постоянны, а при их наличии они медленно затухают. Таким образом, задача свелась к уравнениям (9.3) относительно четырех неизвестных функций a_{1c}, a_{1s}, b_{mc}, b_{ms}.

Рассмотрим начальные условия для системы (9.3). В качестве начального возьмем момент времени, в который действие ударного импульса прекратилось, и пусть $a_{1c}(0) = a$, $a_{1s}(0) = 0$, а начальные значения $b_{mc}(0)$ и $b_{ms}(0)$ пренебрежимо малы.

Из системы (9.3) может быть получена приближенная формула для границ области неустойчивости

$$|\ell - \ell_m| < \ell_m\, k\varepsilon_0 a\,,\quad k \approx 4m^2\,,\quad \ell_m = 4\pi m^2\,,$$

из которой следует, что область неустойчивости расширяется с ростом m.

Рассмотрим функцию

$$V(\theta) = b_m^2 + \alpha a_1^2\,,$$
$$b_m^2 = b_{mc}^2 + b_{ms}^2\,,\quad a_1^2 = a_{1c}^2 + a_{1s}^2\,,\quad \alpha \approx 4\,.$$

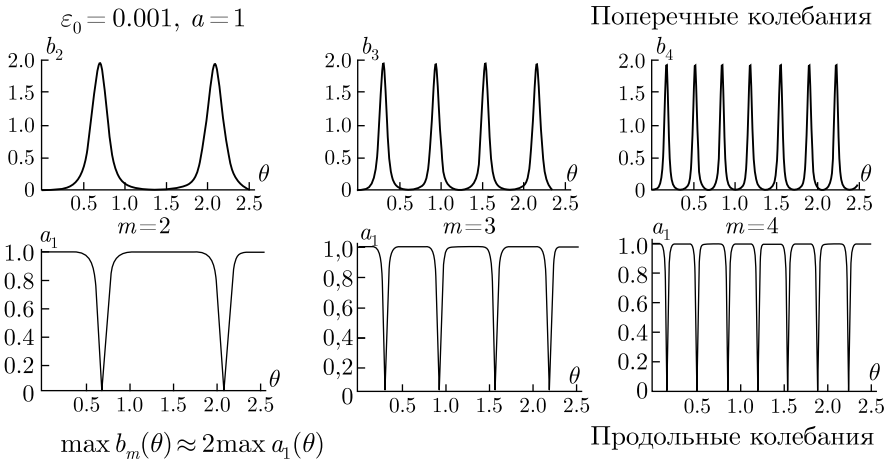

Рис. 8. Амплитуды колебаний при параметрических резонансах, полученные при двухмасштабном разложении

Из системы (9.3) следует, что

$$\frac{dV}{d\theta} = 0\,. \tag{9.4}$$

Следовательно, $V(\theta) \leqslant V(0) = \alpha\, a^2$. Отсюда имеем важный вывод о том, что амплитуда поперечных колебаний при биениях не превосходит удвоенной амплитуды породивших их продольных колебаний по первой форме (см. также рис. 8):

$$\max\{|w(x,t)|\} \leqslant 2a\,. \tag{9.5}$$

При численном интегрировании системы (9.3) получаем зависимость от времени амплитуд продольных и поперечных колебаний при биениях без учета сопротивлений (рис. 8), которая ранее была получена в § 8 (см. рис. 6).

Рассмотрение внезапно приложенной длительной нагрузки, меньшей Эйлеровой критической, приводит к системе, аналогичной (9.3). В частности, из этой системы с учетом равенства (9.4) может быть получена оценка для максимального прогиба при параметрическом резонансе $|w(x,t| < 16\varepsilon_0/\pi^2$. Учитывая, что $\varepsilon_0 < \varepsilon_{kr} = \mu^2\pi^2$, получаем оценку $|w(x,t)| < 16\mu^2$, или в размерных переменных $|\widetilde{w}| < 16r^2/L$, где r и L — радиус инерции поперечного сечения стержня и его длина. Плавность приложения нагрузки существенно снижает максимальный прогиб.

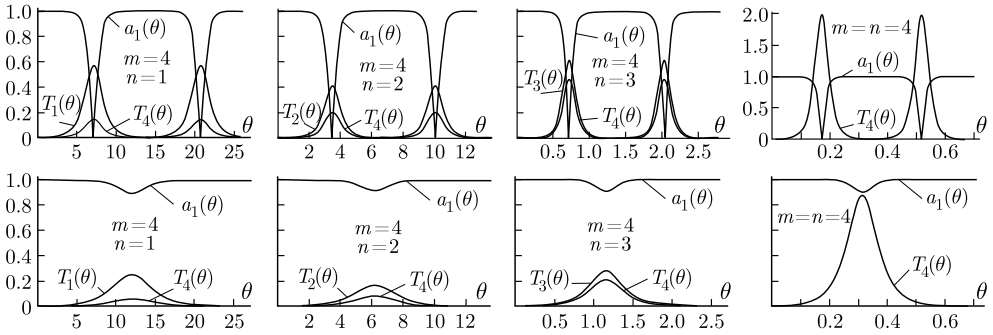

Рис. 9. Амплитуды колебаний при комбинационных параметрических резонансах, полученные при двухмасштабном разложении

Рассмотрение комбинационных резонансов проводится аналогично. Вместо системы четвертого порядка (9.3) приходим к системе шестого порядка относительно амплитуд $a_{kc}, a_{ks}, b_{mc}, b_{ms}, b_{nc}, b_{ns}$. Здесь ограничимся одним примером, в качестве которого рассмотрим главный резонанс при $m = 4$ и три комбинационных резонанса при $m = 4,\ n = 1, 2, 3$. Для амплитуды возбуждения продольных колебаний возьмем $a = 1$ и $\varepsilon_0 = 0.001$, функции $a_1(\theta)$, $T_m(\theta)$ и $T_n(\theta)$ приведены на рис. 9. Силы сопротивления не учитываются.

На четырех верхних графиках длина стержня равна критической и расстройка длины отсутствует ($\delta = 0$). При этом происходит полная передача энергии продольных колебаний поперечным и наоборот. Это следует из того, что в некоторые моменты времени амплитуда продольных колебаний равна нулю, а в другие моменты времени амплитуда поперечных колебаний обращается в нуль.

На четырех нижних графиках введена расстройка длины δ, равная 0.9 максимального значения. Как следует из рис. 9, лишь небольшая часть энергии продольных колебаний участвует в обмене с энергией поперечных колебаний, которые возбуждаются существенно меньше, чем при $\delta = 0$.

§ 10. Закритические деформации стержня

При продольной нагрузке, большей Эйлеровой критической, стержень теряет устойчивость. В § 4 обсуждалось развитие поперечных деформаций в линейном приближении. Здесь рассматривается нелинейная постановка задачи.

Рассматривается деформация стержня с шарнирно опертыми концами A и B, причем конец B неподвижен, а конец A может перемещаться по прямой AB. По этой же прямой направлена постоянная сила P (рис. 10).

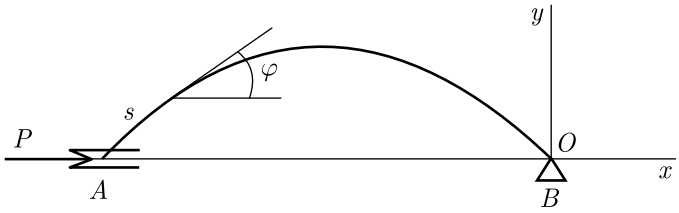

Рис. 10. Нелинейная форма прогиба стержня при сжатии

В безразмерных переменных для нерастяжимого стержня уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{d\varphi}{ds} + py = 0\,, \quad \frac{dx}{ds} = \cos\varphi\,, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi\,, \tag{10.1}$$

где длина стержня принята равной π, а сжимающая сила нормирована таким образом, чтобы критическое сжатие было равно $p = 1$.

Л. Эйлером построены возможные формы равновесия упругой линии под действием самоуравновешенной системы сил и моментов, приложенных к ее концам (эластики Эйлера). На рис. 11 показаны решения системы (10.1) при $p_1 = 1.02$, $p_2 = 1.1$, $p_3 = 1.5$, $p_4 = 2.184$, $p_5 = 3$, $p_6 = 10$. С ростом p конец A стержня приближается к неподвижному концу B, а при $p = p_4$ совпадает с ним. При $p > p_4$ образуется петля.

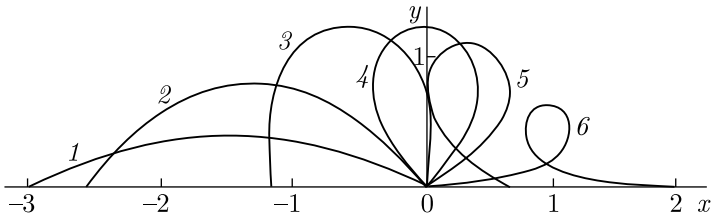

Рис. 11. Эластики Эйлера

Для одномерной динамической задачи, показанной на рис. 10, методом конечных элементов построено решение для трех значений сжимающей силы $p = 1.5$, $p = 10$ и $p = 20$. В начальный момент стержень равномерно сжат, и ему придано малое поперечное возмущение. На рис. 12 в последовательные моменты времени представлена форма упругой линии. При $p = 1.5$ возможна потеря устойчивости только по первой форме. Амплитуда растет и в пределе совпадает с эластикой Эйлера 3 на рис. 11. При $p = 10$ возможна потеря устойчивости по трем первым формам, причем наибольшую скорость роста амплитуды имеет вторая форма $w = \sin 2x$.

На рис. 12(2) в начале движения наблюдается рост этой формы. Точно также при $p = 20$ быстрее всего растет третья форма. При дальнейшем

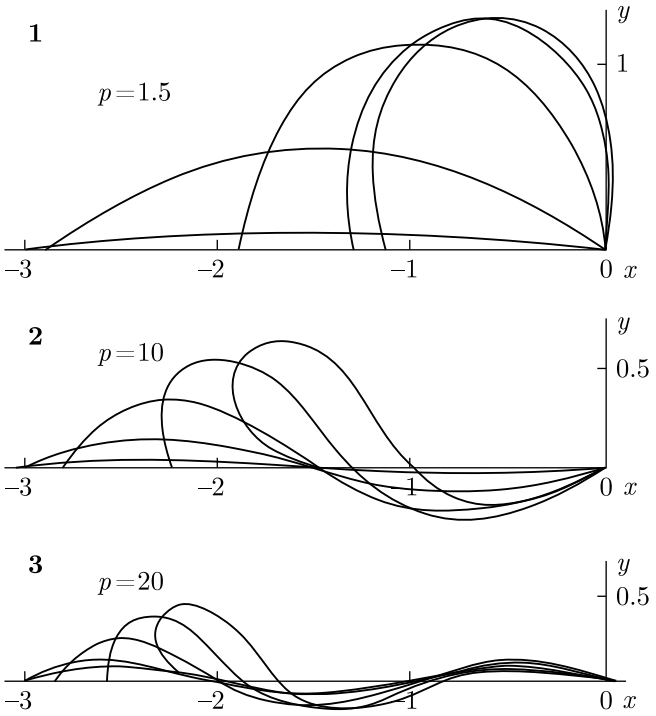

Рис. 12. Эволюция формы прогиба стержня при внезапном осевом сжатии

росте времени при $p = 10$ и при $p = 20$ точка A проходит неподвижную точку B с образованием петли (на рис. 12 не показано).

Заметим, кстати, что статические самоуравновешенные формы стержня типа $y = \sin mx$, $m \geqslant 2$ неустойчивы, ибо для устойчивых форм кривизна упругой линии должна сохранять знак. На рис. 10, 11 и 12(1) кривизна сохраняет знак, а на рис. 12(2) и 12(3) кривизна меняет знак в промежуточные моменты времени, однако в конечном положении (см. рис. 11(6)) знак кривизны не меняется.

§ 11. Продольный удар телом по стержню

Рассматривается[10] упругий стержень длиной L, правый конец которого закреплен (рис. 13). К левому концу в начальный момент времени со скоростью v_0 подлетает ударник массой m, в результате чего в системе воз-

[10]См. статью: *Беляев А. К., Ма Ч.-Ч., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Шурпатов А. О.* Динамика стержня при продольном ударе телом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). № 3. С. 506–515.

никает контактное взаимодействие. Ударник считаем абсолютно твердым телом, однако учитываем местное смятие α в зоне контакта. По стержню со скоростью c распространяются плоские волны (см. § 2). Сила тяжести не учитывается. Определяются величина контактной силы $P(t)$ и время соударения.

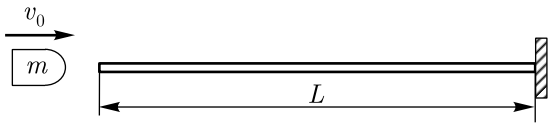

Рис. 13. Продольный удар телом по стержню

Это классическая задача удара тела по стержню. Запишем условие совпадения координат точек контакта[11,12]

$$u_0 - \alpha = u\,, \quad u_0 = v_0 t - \frac{1}{m}\int_0^t (t-\theta)P(\theta)d\theta\,, \qquad u = \int_0^t P(\theta)Y_1(t-\theta)d\theta\,. \tag{11.1}$$

Здесь u_0 — перемещение ударника, u — перемещение левого конца стержня,

$$Y(t) = \frac{c}{ES}\begin{cases} 1\,, & 0 < t < 2L/c\,, \\ -1\,, & 2L/c < t < 4L/c\,, \end{cases} \qquad Y(t+4L/c) = Y(t)\,,$$

$$P = k\alpha^{3/2}\,, \quad k = \left(\frac{3(1-\nu^2)}{4E} + \frac{3(1-\nu_0^2)}{4E_0}\right)^{-1}\sqrt{\varkappa}\,,$$

где $Y(t)$ — реакция стержня на приложенный к нему единичный импульс, контактная сила $P(t)$ связана с местным смятием α по формуле Герца[13], E_0, E и ν_0, ν — модули Юнга и коэффициенты Пуассона ударника и стержня соответственно, S — площадь поперечного сечения стержня, $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в стержне, ρ — плотность материала стержня, $\varkappa$ — сумма кривизн соударяющихся тел в точке контакта (предполагается, что в зоне контакта тела осесимметричны). Если тело ударяет по плоскому

[11] *Sears J. E.* On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1908. Vol. 14.

[12] *Зегжда С. А.* Соударение упругих тел. Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. 316 с.

[13] *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // Z. f. Math. (Crelle). 1881. Bd 92.

концу стержня и материал соударяющихся тел одинаковый, то

$$P = k\alpha^{3/2}, \qquad k = \frac{2E\sqrt{R}}{3(1-\nu^2)}\,,$$

где R — радиус кривизны ударника в точке контакта.

В результате уравнение (11.1) становится нелинейным интегральным уравнением относительно силы $P(t)$ вида

$$\begin{gathered}\frac{1}{m}\int_0^t P(\theta)(t-\theta)d\theta + \int_0^t P(\theta)Y(t-\theta)d\theta + \\ +(P(t)/k)^{2/3} = v_0 t\,.\end{gathered} \tag{11.2}$$

Удар заканчивается при обращении силы $P(t)$ в нуль.

Как и в § 2–9, перейдем к безразмерным переменным, считая длину стержня и скорость звука в нем равными единице и отнеся силу P к ES. Тогда уравнение (11.2) примет вид

$$\begin{gathered}\xi\int_0^{\widehat{t}} \widehat{P}(\tau)(\widehat{t}-\tau)d\tau + \int_0^{\widehat{t}} \widehat{P}(\tau)G(\widehat{t}-\tau)d\tau + \\ +r\widehat{P}(\widehat{t})^{2/3} = \widehat{v}_0\widehat{t}\,, \qquad G(t) = (-1)^{[t/2]}\,,\end{gathered} \tag{11.3}$$

где

$$\begin{gathered}\widehat{P} = \frac{P}{ES}\,, \quad \widehat{t} = \frac{ct}{L}\,, \quad \widehat{v}_0 = \frac{v_0}{c}\,, \\ \xi = \frac{M}{m}\,, \quad r = \frac{1}{L}\left(\frac{ES}{k}\right)^{2/3}.\end{gathered} \tag{11.4}$$

Здесь функция $G(t)$ совпадает с ранее введенной функцией (2.3), параметр ξ равен отношению массы стержня $M = \rho SL$ к массе ударника m, параметр r учитывает местное смятие. Далее значок $\widehat{\ }$ опускаем.

Уравнение (11.3) содержит три безразмерных параметра: ξ, v_0 и r. При $r = 0$ местное смятие не учитывается, уравнение (11.3) становится линейным, время удара зависит только от ξ, а сила $P(t)$ зависит от ξ и линейно зависит от v_0.

При $r > 0$ путем дополнительного изменения масштаба два параметра v_0 и r можно свести к одному. Положим $P = r^3\widetilde{P}$, $v_0 = r^3 V$. Тогда в уравнении (11.3) величины P и v_0 заменятся на $\widetilde{P}$ и $V = v_0/r^3$, а r заменится на 1.

Вернемся к уравнению (11.3). Дифференцирование по t дает (см. первую и вторую ссылки в данной главе):

$$\frac{d\widehat{P}}{d\tau} = \frac{3}{2r}\widehat{P}(\tau)^{1/3}\Bigg(\widehat{v}_0 - \xi\int_0^\tau \widehat{P}(\tau_1)d\tau_1 - \widehat{P}(\tau) + \\ +2\widehat{P}(\tau-2) - 2\widehat{P}(\tau-4) + \dots\Bigg). \tag{11.5}$$

В результате мы пришли к дифференциальному уравнению Сирса с запаздывающими аргументами, появление которых связано с распространением продольных волн по стержню и с их отражением от его концов.

Уравнение (11.5) интегрируем при условии $P(t) = 0$ при $t < 0$. Чтобы уйти от тривиального решения $P(t) \equiv 0$ при численном интегрировании, следует задать $P(0)$ малым положительным числом, например 10^{-10}. Интегрируем уравнение (11.5) последовательно на промежутках $(0, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$ и т. д., пользуясь тем, что на предыдущем промежутке значение функции $P(t)$ уже найдено. При этом учитываем непрерывность функции $P(t)$ при $t = 2, 4, \dots$ Заметим, что в ППП Wolfram Mathematica-9 возможно непосредственное интегрирование уравнения (11.5) без разбиения времени на интервалы.

Выше функция $G(t)$ и уравнение (11.5) были получены на основании анализа распространения продольных волн по стержню. Те же результаты могут быть получены из разложения Фурье (2.4) по собственным функциям $u_k(x) = \cos\nu_k x$ краевой задачи, описанной в § 2. Учитывая, что $u_k(0) = 1$, перемещение левого конца стержня можно представить в виде

$$u(0,t) = u(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\nu_k}\int_0^t P(\tau)\sin(\nu_k(t-\tau))d\tau = \\ = \int_0^t P(\tau)G(t-\tau)d\tau\,,$$

откуда вытекает представление функции $G(t)$ в виде медленно сходящегося ряда

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\nu_k}\sin\nu_k t\,. \tag{11.6}$$

На рис. 14 показана сумма 20 первых слагаемых ряда (11.6) при $0 \leqslant \tau \leqslant 6$. Видно замедление скорости сходимости ряда при приближении к точкам разрыва $t = 0, 2, 4, \dots$ функции $G(t)$ (*эффект Гиббса*).

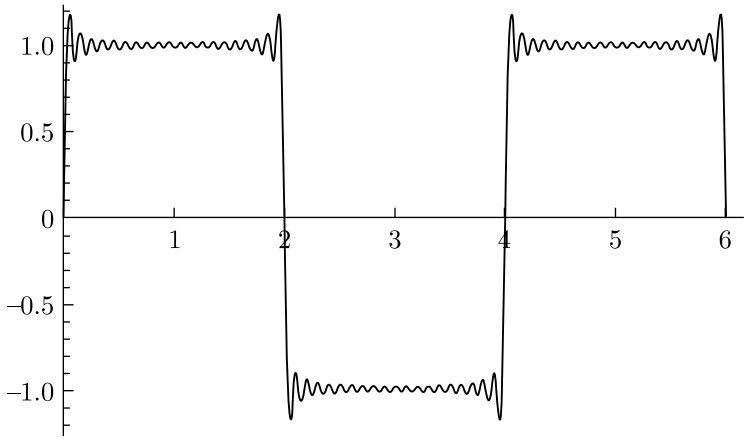

Рис. 14. Сумма медленно сходящегося ряда

Приведем пример расчета. Рассмотрим продольный удар стальным телом с радиусом закругления R по плоскому концу стержня из того же материала. Пусть $L = 0.5$ м, $S = 5 \cdot 10^{-5}$ м^2, $R = 0.01$ м, $m = 0.5$ кг, $v_0 = 1$ м/с, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\nu = \nu_0 = 0.3$, $\rho = \rho_0 = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Находим $c = 5189$ м/с, $M = 0.195$ кг и безразмерные параметры $v_0/c = 0.0001927$, $\xi = M/m = 0.39$, $r = 0.0155$, входящие в уравнение (11.5).

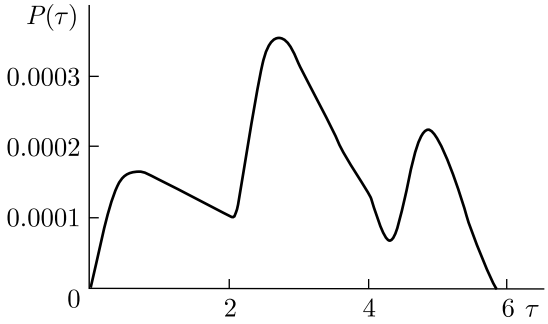

Рис. 15. Зависимость ударной силы от времени

Зависимость $P(\tau)$ в переменных (11.4) представлена на рис. 15. Кривая $P(\tau)$ имеет три максимума. Продолжительность удара примерно в 6 раз превосходит время пробега волны по длине стержня.

После отскока тела в момент T стержень совершает свободные периодические колебания с периодом 4, рассмотренные в § 2:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos \nu_k t + c_k \sin \nu_k t) \cos \nu_k x = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\nu_k t + \alpha_k) \cos \nu_k x \,,$$

где

$$b_k = -\frac{2}{\nu_k} \int_0^T P(t) \sin \nu_k t \, dt \,, \quad c_k = \frac{2}{\nu_k} \int_0^T P(t) \cos \nu_k t \, dt \,,$$

причем амплитуда k-й формы колебаний равна

$$a_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2} \,. \tag{11.7}$$

Безразмерная скорость отскока ударника v_T и коэффициент восстановления K равны

$$v_T = v_0 - \int_0^T P(t) dt \,, \quad K = \frac{|v_T|}{v_0} \,.$$

Безразмерная энергия U_0 тела до удара и его энергия U_T после отскока равны

$$U_0 = \frac{v_0^2}{2\xi} \,, \qquad U_T = \frac{v_T^2}{2\xi} = K^2 U_0 \,,$$

где энергия U отнесена к величине ESL.

Энергия U_s продольных колебаний стержня при $\tau > T$ постоянна и равна $U_s = \widehat{U}_0 - \widehat{U}_T = U_0(1 - K^2)$.

Найдем распределение энергии U_s колебаний стержня после завершения удара по формам его свободных колебаний $\cos \nu_k x$. В силу ортогональности форм колебаний имеем

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \,, \quad U_k = \frac{1}{4} \nu_k^2 a_k^2 \,, \quad k = 1, 2, \ldots \,.$$

Для контроля вычислений служит тождество

$$U_0 = U_T + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \,.$$

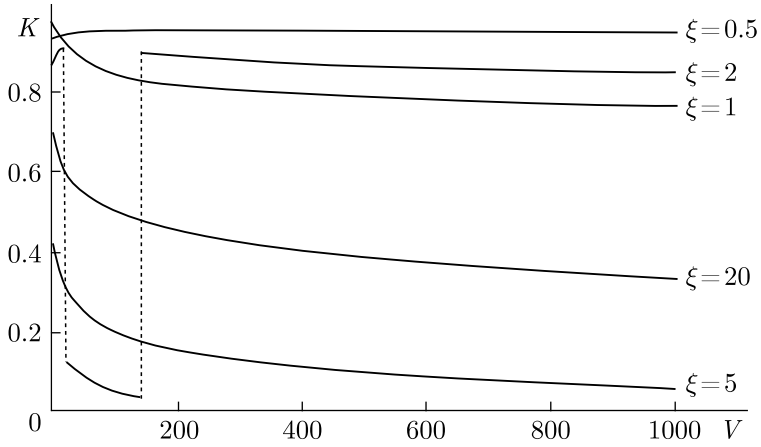

Рис. 16. Зависимость коэффициента восстановления от параметров задачи при продольном ударе телом по стержню

Продольные послеударные колебания могут породить параметрические поперечные колебания. Пользуясь формулой (9.5), несложно оценить максимально возможную амплитуду биений, возникающих при параметрическом резонансе

$$\max\{|w(x,t)|\} \leqslant 2a_1\,,$$

где амплитуда продольных колебаний a_1 вычисляется по формуле (11.7) (величины w и a_1 отнесены к длине стержня L).

Коэффициент восстановления K зависит от двух безразмерных параметров — соотношения масс тела и стержня ξ и совмещенного параметра V, описывающего скорость удара и местное смятие. Результаты расчетов функции $K(\xi, V)$ показаны на рис. 16.

Видим, что коэффициент восстановления K достаточно нерегулярно зависит от параметров ξ и V. Это объясняется тем, что число максимумов кривой $P(t)$ меняется скачком с изменением этих параметров, а вместе с ним меняются время удара и коэффициент восстановления.

Глава X
ДИНАМИКА ПОЛЕТА

Авторы: *Н. Н. Пóляхов, М. П. Юшков*

В главе вводятся основные координатные системы, используемые в динамике полета, исследуются уравнения движения летательного аппарата (ЛА) в связанной системе координат, обсуждаются силы, действующие на ЛА, рассматриваются вопросы, относящиеся к движению систем переменной массы, в том числе, приводится формула подсчета силы тяги реактивного двигателя, изучается движение летательного аппарата в начальной стартовой системе координат, применяются методы неголономной механики для наведения ЛА на цель. Отмечается, что динамика полета занимается изучением движения самолетов и ракет в атмосфере Земли, ее методы могут быть применены и к исследованию движения подводных лодок и надводных кораблей.

§ 1. Основные координатные системы, используемые в динамике полета. Кинематические уравнения движения

В динамике полета при решении ее основных задач инерциальной системой координат считается система, начало которой находится в центре Земли, а оси направлены на визуально неподвижные звезды. Целесообразным является использование и неинерциальных систем координат, жестко связанных с Землей. Среди этих систем весьма употребительной оказывается так называемая *стартовая система координат*, для которой начало $O_{\text{н}}$ помещается в точке старта, ось $y_{\text{ст}}$ идет по отвесной линии вверх, ось $x_{\text{ст}}$ направляется в горизонтальной плоскости на цель, а ось $z_{\text{ст}}$ выбирается так, чтобы получилась правая система координат[1].

Наряду со стартовой системой координат $O_{\text{н}}x_{\text{ст}}y_{\text{ст}}z_{\text{ст}}$ с Землей для ряда расчетов удобно связывать и *земную систему координат* $O_{\text{н}}x_{\text{З}}y_{\text{З}}z_{\text{З}}$. Начало ее помещается также в точке старта $O_{\text{н}}$, ось $y_{\text{З}}$ проходит через центр Земли и направлена вверх, ось $x_{\text{З}}$ лежит в меридиональной плоскости и направлена на север, а ось $z_{\text{З}}$ дополняет эти оси до правой системы. Угол φ_0 между осью $y_{\text{З}}$ и экваториальной плоскостью Земли равен *географиче-*

[1] Здесь и далее в этой главе направления осей принимаются такими, какими их задавали в Советском Союзе при изучении аэродинамики ракет и самолетов, см., например, учебники-монографии *Сихарулидзе Ю. Г.* Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука; Физматлит, 1982. 352 с. и *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983. 320 с. Отметим, что при изучении движения платформы Стюарта в главе III направления осей соответствовали принятым в Европе и в США.

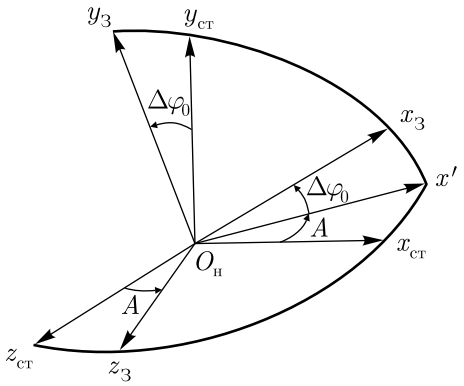

Рис. 1. Связь стартовой и земной систем координат

ской (геоцентрической) широте места старта (точки $O_н$), а угол между осью $y_{ст}$ и экваториальной плоскостью называется *геодезической широтой.* Очевидно, что между осями $y_З$ и $y_{ст}$ образуется угол $\Delta\varphi_0$, равный разности геодезической и геоцентрической широт в точке старта (рис. 1). Угол A между осью x', получающейся от пересечения плоскостей $O_н x_З y_З$ и $O_н x_{ст} z_{ст}$ и осью $x_{ст}$ называется *азимутом цели.*

Связь между координатами исследуемой точки $x_{ст}$, $y_{ст}$, $z_{ст}$ и $x_З$, $y_З$, $z_З$ соответственно в стартовой и земной системах координат удобно записать в матричной форме:

$$\bar{x}_{ст} = N\bar{x}_З\,, \qquad \bar{x}_З = N^{-1}\bar{x}_{ст}\,, \tag{1.1}$$

где

$$\bar{x}_{ст} = \begin{pmatrix} x_{ст} \\ y_{ст} \\ z_{ст} \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}_З = \begin{pmatrix} x_З \\ y_З \\ z_З \end{pmatrix}.$$

Напомним, что обратная матрица N^{-1} равна транспонированной N^T, и потому достаточно найти только матрицу N.

Систему $O_н x_{ст} y_{ст} z_{ст}$ можно совместить с системой $O_н x_З y_З z_З$ путем двух последовательных поворотов. Сначала систему $O_н x_{ст} y_{ст} z_{ст}$ следует повернуть вокруг оси $y_{ст}$ на угол A, совместив ее с системой $O_н x' y_{ст} z_З$, а затем систему $O_н x' y_{ст} z_З$ повернуть на угол $\Delta\varphi_0$ вокруг оси $z_З$ (см. рис. 1). Отсюда следует, что искомая матрица N по аналогии с формулой (1.10) главы II в первом томе учебника может быть представлена в виде

$$N = N_2(A)N_3(\Delta\varphi_0)\,.$$

Здесь

$$N_2(A) = \begin{pmatrix} \cos A & 0 & \sin A \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin A & 0 & \cos A \end{pmatrix},$$

$$N_3(\Delta\varphi_0) = \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi_0 & -\sin\Delta\varphi_0 & 0 \\ \sin\Delta\varphi_0 & \cos\Delta\varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$N = \begin{pmatrix} \cos A\cos\Delta\varphi_0 & -\cos A\sin\Delta\varphi_0 & \sin A \\ \sin\Delta\varphi_0 & \cos\Delta\varphi_0 & 0 \\ -sinA\cos\Delta\varphi_0 & \sin A\sin\Delta\varphi_0 & \cos A \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Как и в главе VIII первого тома учебника, с телом жестко связывают систему осей x, y, z, имеющих общее начало в центре масс исследуемого объекта (так называемая *связанная система координат*). Движущиеся тела, изучаемые в динамике полета, обладают характерной особенностью: они имеют плоскость симметрии (корабли, самолеты), а иногда и ось симметрии (баллистические ракеты). Обычно ось x направляют вдоль вытянутой оси тела в сторону движения, а ось y выбирают в плоскости симметрии тела перпендикулярно оси x таким образом, чтобы она смотрела вверх при естественном движении тела вдоль поверхности Земли. Ось z дополняет оси x и y до правой системы координат.

Для характеристики ориентации осей x, y, z относительно осей ξ', η', ζ', параллельных осям инерциальной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$ (см. рис. 1 главы VIII первого тома учебника), вместо классических углов Эйлера удобнее вводить *самолетные углы* следующим образом (рис. 2).

Пусть первоначально оси x, y, z совпадают с направлениями осей ξ', η', ζ'. Повернем связанную систему координат вокруг оси η'на *угол рыскания* ψ, тогда она займет положение $Ox'y'z'$. Следующий поворот на *угол танга́жа* θ осуществим вокруг оси z', теперь система координат примет положение $Ox''y''z''$. Последний поворот произведем вокруг оси x'' на *угол крена* γ; в результате связанная система координат займет окончательное положение $Oxyz$.

Отметим, что $\theta = \pm\pi/2$ являются особыми значениями угла тангажа, при которых отклонение по крену перестает отличаться от отклонения по рысканию (полезно сравнить эти случаи со значениями угла нутации, равными 0 или π, разобранными в § 1 главы II первого тома учебника).

Введенные самолетные углы весьма наглядны для описания положения тела при его движении: угол рыскания указывает отклонение в горизонтальной плоскости продольной оси тела от некоторого выбранного

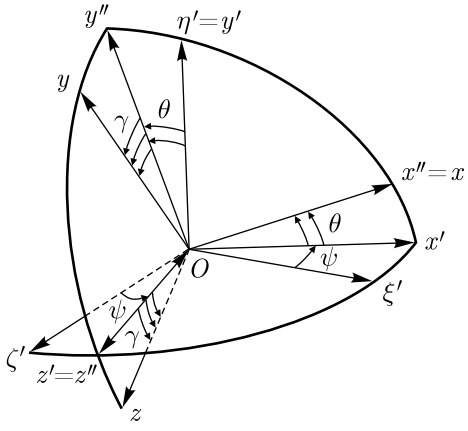

Рис. 2. Самолетные углы

направления, угол тангажа (в кораблестроении он называется *углом дифферента*) характеризует подъем продольной оси над плоскостью горизонта, а угол крена равен углу поворота тела вокруг продольной оси.

Приведем выражения направляющих косинусов между осями систем координат $Oxyz$ и $O\xi'\eta'\zeta'$ (для краткости записи используем обозначения $c_\psi = \cos\psi$, $s_\theta = \sin\theta$ и т. п.):

Оси	$O\xi'$	$O\eta'$	$O\zeta'$
Ox	$c_\psi\, c_\theta$	s_θ	$-s_\psi\, c_\theta$
Oy	$s_\psi\, s_\gamma - c_\psi\, s_\theta\, c_\gamma$	$c_\theta\, c_\gamma$	$c_\psi\, s_\gamma + s_\psi\, s_\theta\, c_\gamma$
Oz	$s_\psi\, c_\gamma + c_\psi\, s_\theta\, s_\gamma$	$-c_\theta\, s_\gamma$	$c_\psi\, c_\gamma - s_\psi\, s_\theta\, s_\gamma$

Эти формулы могут быть получены аналогично тому, как выводилась матрица (1.11) главы II первого тома. Другой вывод этих выражений может быть основан на том, что направляющие косинусы являются проекциями ортов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ осей связанной системы координат на направления осей $O\xi', O\eta', O\zeta'$, перемещающихся поступательно относительно начальной стартовой системы координат.

Угловая скорость исследуемого тела по аналогии с формулой (2.5) главы II первого тома может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{j}' + \dot{\theta}\mathbf{k}' + \dot{\gamma}\mathbf{i}\,, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{j}', \mathbf{k}', \mathbf{i}$ являются ортами соответственно осей $y' = \eta'$, $z' = z''$, $x = x''$.

Для получения проекций угловой скорости p, q, r на оси связанной системы координат удобно представить вектор $\dot{\psi}\mathbf{j}'$ разложенным на его

составляющие вдоль осей $x = x''$ и y'' с ортами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}''$:

$$\dot{\psi}\mathbf{j}' = \dot{\psi}\sin\theta\mathbf{i} + \dot{\psi}\cos\theta\mathbf{j}''\,.$$

Из формулы (1.3) при учете этого выражения, а также соотношений

$$\mathbf{j}'' = \cos\gamma\mathbf{j} - \sin\gamma\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{k}' = \sin\gamma\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

следует, что

$$\begin{array}{rcl} p & = & \dot{\psi}\sin\theta + \dot{\gamma}\,, \\ q & = & \dot{\psi}\cos\theta\cos\gamma + \dot{\theta}\sin\gamma\,, \\ r & = & -\dot{\psi}\cos\theta\sin\gamma + \dot{\theta}\cos\gamma\,. \end{array} \tag{1.4}$$

Эти уравнения, как и уравнения (2.7) главы II первого тома, называются *кинематическими уравнениями Эйлера.*

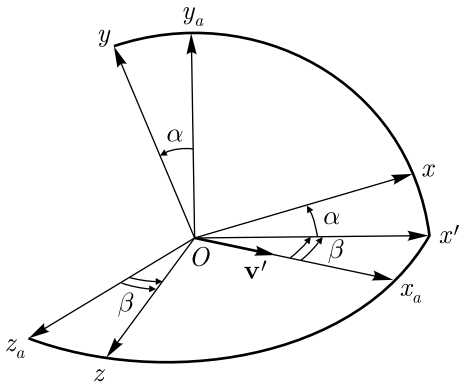

Рис. 3. Скоростная (аэродинамическая) система координат

В заключение параграфа остановимся на описании *скоростной (аэродинамической) системы координат* $Ox_ay_az_a$, используемой в основном для описания сил, действующих на движущееся тело со стороны набегающего на него потока воды или воздуха. Ось x_a направляется вдоль воздушной скорости $\mathbf{v}'$, то есть по вектору скорости тела относительно набегающей среды (рис. 3). Ось y_a, называемая *осью подъемной силы*, расположена в плоскости симметрии тела и направлена к его верхней части. Ось z_a, называемая *боковой осью*, образует с осями x_a и y_a правую систему координат. Плоскость симметрии тела, в которой лежат оси x, y , y_a, и перпендикулярная ей плоскость, проведенная через скорость $\mathbf{v}'$ и ось z, пересекаются по

оси x'. Угол α между осями x и x' называется *углом атаки*, он считается положительным, если проекция воздушной скорости на ось y отрицательна. Угол β, образуемый осями x_a и x', называется *углом скольжения*. Этот угол положителен, если проекция воздушной скорости на поперечную ось z положительна.

§ 2. Уравнения движения летательного аппарата в связанной системе координат

Нелинейные уравнения движения летательного аппарата. В дальнейшем под летательным аппаратом (ЛА) будем понимать любое твердое тело, движущееся в сопротивляющейся среде, то есть изучаемое в динамике полета. Движение ЛА описывается векторными дифференциальными уравнениями (2.1) в § 2 главы VIII первого тома. Второе из этих уравнений согласно формулам (2.3)–(2.5) может быть сведено к динамическим уравнениям Эйлера (2.6) (упомянутые здесь формулы из того же § 2 главы VIII первого тома):

$$\begin{gathered} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = L_x\,, \quad B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = L_y\,, \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)p\,q = L_z\,, \end{gathered} \tag{2.1}$$

однако при использовании самолетных углов вместо кинематических уравнений (2.7) упомянутого параграфа к уравнениям (2.1) следует добавлять кинематические уравнения движения (1.4) настоящей главы. Оси $x\,, y\,, z$ являются осями связанной системы координат, проведенной через центр масс ЛА, причем теперь считаем, что они совпадают с главными центральными осями инерции.

Согласно формуле (1.7) можно записать

$$\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \frac{d^*\mathbf{v}_c}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c\,,$$

поэтому первая из векторных формул (2.1) главы VIII первого тома, отражающая закон движения центра масс ЛА, в проекциях на оси связанной системы координат может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} M\left(\frac{dv_{cx}}{dt} + qv_{cz} - rv_{cy}\right) &= F_x\,, \\ M\left(\frac{dv_{cy}}{dt} + rv_{cx} - pv_{cz}\right) &= F_y\,, \\ M\left(\frac{dv_{cz}}{dt} + pv_{cy} - qv_{cx}\right) &= F_x\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Уравнения (2.1), (2.2), (1.4) данной главы и составляют систему дифференциальных уравнений движения ЛА в связанной системе координат. Эта система дифференциальных уравнений является нелинейной.

Остановимся на рассмотрении некоторого заданного (*программного*) движения ЛА в вертикальной плоскости. Иногда такое движение называют *опорным*. Будем считать, что оно совершается по закону:

$$\begin{gathered} v_{cx}^{\text{пр}} = v_{cx}^{\text{пр}}(t)\,, \quad v_{cy}^{\text{пр}} = v_{cy}^{\text{пр}}(t)\,, \quad v_{cz}^{\text{пр}} = 0\,, \\ \psi^{\text{пр}} = 0\,, \quad \theta^{\text{пр}} = \theta^{\text{пр}}(t)\,, \quad \gamma^{\text{пр}} = 0\,. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Согласно уравнениям (1.4) проекции угловой скорости программного движения должны меняться следующим образом:

$$p^{\text{пр}} = 0\,, \quad q^{\text{пр}} = 0\,, \quad r^{\text{пр}} = \dot{\theta}^{\text{пр}}(t)\,. \tag{2.4}$$

Рассматриваемому программному движению ЛА в вертикальной плоскости соответствуют уравнения

$$\begin{gathered} M\left(\frac{dv_{cx}^{\text{пр}}}{dt} - r^{\text{пр}} v_{cy}^{\text{пр}}\right) = F_x^{\text{пр}}\,, \quad M\left(\frac{dv_{cy}^{\text{пр}}}{dt} + r^{\text{пр}} v_{cx}^{\text{пр}}\right) = F_y^{\text{пр}}\,, \\ F_z^{\text{пр}} = 0\,, \quad L_x^{\text{пр}} = 0\,, \quad L_y^{\text{пр}} = 0\,, \quad C\frac{dr^{\text{пр}}}{dt} = L_z^{\text{пр}}\,. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Уравнения (2.5) решают прямую задачу динамики: они позволяют по заданному (в нашем случае программному) движению определить силы и моменты, его обеспечивающие.

Линеаризация уравнений возмущенного движения. Как указывалось, система дифференциальных уравнений движения ЛА является сугубо нелинейной. Найти ее аналитическое решение в практических задачах не представляется возможным, поэтому приходится прибегать к численному решению с помощью компьютеров. Однако даже подобный расчет наталкивается на большие трудности, связанные с существенными нелинейностями дифференциальных уравнений. Математически это проявляется в существовании особых точек системы дифференциальных уравнений, при наличии которых возможно несколько состояний равновесия ЛА. Реализация конкретного движения в окрестности особых точек зависит от предыстории движения. Поэтому важно уметь получить представление о возможных движениях ЛА, чтобы на основе этих сведений правильно строить численное интегрирование на компьютере. Для этого исходные дифференциальные уравнения путем пренебрежения второстепенными членами

упрощаются, что позволяет получить качественное представление о свойствах движения. После этого истинное движение уточняется численными расчетами по полным уравнениям. Подобный путь исследования особенно важен при изучении пространственных маневров самолетов[2].

Одним из весьма распространенных методов исследования нелинейной системы (2.1), (2.2), (1.4) является линеаризация дифференциальных уравнений возмущенного движения (подробнее об этом см. в главе I «Устойчивость движения» в данном томе учебника), позволяющая эффективно исследовать вопросы устойчивости и управляемости ЛА. За счет возмущений, создаваемых отклонениями начальных данных от заданных, а также силовых характеристик от значений, обеспечивающих программное движение, вместо исследуемого программного движения летательный аппарат будет совершать некоторое возмущенное движение. Именно для исследования отклонений возмущенного движения от программного движения и применяется обычно линеаризация дифференциальных уравнений.

В качестве примера рассмотрим уравнения возмущенного движения ЛА для программного движения, задаваемого формулами (2.3), (2.4). Пусть возмущенное движение, характеризующееся величинами

$$\begin{gathered} v_{cx} = v_{cx}^{\text{пр}} + \Delta v_{cx}\,, \quad v_{cy} = v_{cy}^{\text{пр}} + \Delta v_{cy}\,, \quad v_{cz} = \Delta v_{cz}\,, \\ p = \Delta p\,, \quad q = \Delta q\,, \quad r = r^{\text{пр}} + \Delta r\,, \end{gathered} \tag{2.6}$$

совершается при следующих значениях главного вектора и главного момента внешних сил:

$$\begin{gathered} F_x = F_x^{\text{пр}} + \Delta F_x\,, \quad F_y = F_y^{\text{пр}} + \Delta F_y\,, \quad F_z = \Delta F_z\,, \\ L_x = \Delta L_x\,, \quad L_y = \Delta L_y\,, \quad L_z = L_z^{\text{пр}} + \Delta L_z\,. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Подставляя выражения (2.6) и (2.7) в уравнения (2.1) и (2.2), получим

$$\begin{gathered} A\frac{d\Delta p}{dt} + (C-B)\Delta q\,(r^{\text{пр}} + \Delta r) = \Delta L_x\,, \\ B\frac{d\Delta q}{dt} + (A-C)\,(r^{\text{пр}} + \Delta r)\,\Delta p = \Delta L_y\,, \\ C\frac{d\,(r^{\text{пр}} + \Delta r)}{dt} + (B-A)\Delta p\,\Delta q = L_z^{\text{пр}} + \Delta L_z\,, \end{gathered} \tag{2.8}$$

[2]Как пример успешного применения методов качественной теории дифференциальных уравнений к исследованию особенностей пространственного движения самолета можно привести упомянутую выше монографию *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983. 320 с.

$$M\left[\frac{d\left(v_{cx}^{\text{пр}}+\Delta v_{cx}\right)}{dt}+\Delta q\Delta v_{cz}-\left(r^{\text{пр}}+\Delta r\right)\left(v_{cy}^{\text{пр}}+\Delta v_{cy}\right)\right]=F_x^{\text{пр}}+\Delta F_x\,,$$

$$M\left[\frac{d\left(v_{cy}^{\text{пр}}+\Delta v_{cy}\right)}{dt}+\left(r^{\text{пр}}+\Delta r\right)\left(v_{cx}^{\text{пр}}+\Delta v_{cx}\right)-\Delta p\,\Delta v_{cz}\right]=F_y^{\text{пр}}+\Delta F_y\,,$$

$$M\left[\frac{d\Delta v_{cz}}{dt}+\Delta p\left(v_{cy}^{\text{пр}}+\Delta v_{cy}\right)-\Delta q\left(v_{cx}^{\text{пр}}+\Delta v_{cx}\right)\right]=\Delta F_z\,.$$

При линеаризации полученных нелинейных уравнений предполагают, что возмущения Δv_{cx}, Δv_{cy}, Δv_{cz}, Δp, Δq, Δr много меньше соответствующих функций программного движения, и поэтому слагаемыми второго порядка малости и выше относительно этих величин и их производных по времени можно пренебречь. Помимо этого, в силу специфики движения ЛА угол $\theta^{\text{пр}}$ меняется медленно, а тем самым согласно формуле (2.4) малой является и величина $r^{\text{пр}}$. Из системы (2.8) при этих предположениях, а также при учете уравнений программного движения (2.5) будут вытекать следующие линеаризованные уравнения возмущенного движения:

$$A\frac{d\Delta p}{dt}=\Delta L_x\,,\quad B\frac{d\Delta q}{dt}=\Delta L_y\,, \tag{2.9}$$

$$C\frac{d\Delta r}{dt}=\Delta L_z\,, \tag{2.10}$$

$$M\left(\frac{d\Delta v_{cx}}{dt}-v_{cy}^{\text{пр}}\Delta r\right)=\Delta F_x\,, \tag{2.11}$$

$$M\left(\frac{d\Delta v_{cy}}{dt}+v_{cx}^{\text{пр}}\Delta r\right)=\Delta F_y\,, \tag{2.12}$$

$$M\left(\frac{d\Delta v_{cz}}{dt}+v_{cy}^{\text{пр}}\Delta p-v_{cx}^{\text{пр}}\Delta q\right)=\Delta F_z\,. \tag{2.13}$$

Линеаризуем теперь систему кинематических уравнений движения (1.4). Эту систему можно переписать в виде

$$\Delta p=\frac{d\Delta\psi}{dt}\left(\sin\theta^{\text{пр}}\cos\Delta\theta+\cos\theta^{\text{пр}}\sin\Delta\theta\right)+\frac{d\Delta\gamma}{dt}\,,$$

$$\Delta q=\frac{d\Delta\psi}{dt}\left(\cos\theta^{\text{пр}}\cos\Delta\theta-\sin\theta^{\text{пр}}\sin\Delta\theta\right)+\left(\dot\theta^{\text{пр}}+\frac{d\Delta\theta}{dt}\right)\sin\Delta\gamma\,,$$

$$r^{\text{pr}}+\Delta r=-\frac{d\Delta\psi}{dt}\left(\cos\theta^{\text{pr}}\cos\Delta\theta-\sin\theta^{\text{pr}}\sin\Delta\theta\right)\sin\Delta\gamma+$$
$$+\left(\dot\theta^{\text{pr}}+\frac{d\Delta\theta}{dt}\right)\cos\Delta\gamma\,.$$

Раскладывая в ряды Маклорена синусы и косинусы и сохраняя лишь линейные слагаемые относительно малых величин и их производных, при учете последней формулы из (2.4) получим

$$\Delta p = \frac{d\Delta\psi}{dt}\sin\theta^{\text{пр}} + \frac{d\Delta y}{dt}\,, \quad \Delta q = \frac{d\Delta\psi}{dt}\cos\theta^{\text{пр}}\,, \tag{2.14}$$

$$\Delta r = \frac{d\Delta\theta}{dt}\,. \tag{2.15}$$

Рассматриваемое программное движение ЛА в вертикальной плоскости задается величинами $v_{cx}^{\text{пр}}, v_{cy}^{\text{пр}}, r^{\text{пр}}, \theta^{\text{пр}}$, изменяющимися согласно зависимостям (2.3), (2.4). Отклонения $\Delta v_{cx}, \Delta v_{cy}, \Delta r, \Delta\theta$ от этих величин характеризуют так называемое *продольное возмущенное движение ЛА*. Отклонения же $\Delta v_{cz}, \Delta p, \Delta q, \Delta\psi, \Delta\gamma$ называются *поперечным (боковым) возмущенным движением*. Как следует из системы дифференциальных уравнений (2.9)–(2.15), эти линеаризованные уравнения движения распадаются на две независимые подсистемы: уравнения (2.9), (2.13), (2.14) описывают поперечное возмущенное движение, а уравнения (2.10)–(2.12), (2.15) являются уравнениями продольного возмущенного движения.

Как известно, решение линейной системы дифференциальных уравнений состоит из суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Второе из них для нашей системы (2.9)–(2.13) характеризует возмущенное движение, возникающее в результате отклонений внешних сил и моментов от значений, обеспечивающих программное движение. Это может быть вызвано различными возмущениями силовых факторов, например порывами ветра или приложением целенаправленных управляющих воздействий. Анализ такого вынужденного движения позволяет найти реагирование ЛА на управляющие воздействия и тем самым охарактеризовать его управляемость. Обычно для оценки управляемости принято рассматривать реакцию ЛА (прежде всего самолета) на скачкообразное (ступенчатое) отклонение органов управления и на изменение отклонений, совершаемых по гармоническому закону.

В отличие от этого решение соответствующей однородной системы (2.9)–(2.13) дифференциальных уравнений описывает собственное возмущенное продольное движение ЛА. Подобное движение возникает за счет наличия ненулевых начальных возмущений линейной и угловой скоростей. Исследование таких движений позволяет судить об устойчивости продольного программного движения (см. подробнее об этом в главе I «Устойчивость движения» в данном томе учебника).

Интересно отметить, что при исследовании установившегося горизонтального полета реального самолета характеристическое уравнение его системы дифференциальных уравнений возмущенного движения обычно имеет два комплексно-сопряженных корня, по модулю в десятки раз превосходящих другую пару комплексно-сопряженных корней. Благодаря этому собственное возмущенное движение оказывается суперпозицией быстро затухающих колебаний с большой частотой (короткопериодическое движение) и медленно затухающих колебаний с малой частотой (длиннопериодическое движение). Короткопериодическая и длиннопериодические составляющие как бы разделены во времени, что позволяет приближенно рассматривать их по отдельности, резко упрощая исследование возмущенного движения при горизонтальном полете. Отклонения от программного движения, вызванные длиннопериодическим движением, легко устраняются летчиком. В отличие от этого при возникновении короткопериодических движений пилот обычно не успевает их компенсировать правильным выбором положения органов управления, более того, он может даже непроизвольно своими действиями начать раскачивать самолет. Поэтому к устойчивости самолета при короткопериодическом движении предъявляются повышенные требования.

§ 3. Силы, действующие на ЛА

Главный вектор внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на ЛА, в основном складывается из действия силы притяжения к Земле $\mathbf{G}$, силы тяги $\mathbf{P}$, аэродинамической силы $\mathbf{R}^a$, сил управления $\mathbf{F}^{\text{упр}}$, а также возможно и от некоторых других сил, например электромагнитных. Остановимся на краткой характеристике основных сил, влияющих на движение ЛА.

В зависимости от точности, предъявляемой к решению задачи, принимаются различные модели притяжения движущегося тела к Земле. Простейшая из них предполагает однородное плоскопараллельное гравитационное поле, когда в формуле

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g}$$

величина вектора ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$ не зависит от высоты, направлено как вектор по отвесной линии и, например, для широты в 60° принимается равным $9.81\,\text{м/с}^2$. Подобная грубая модель гравитационного поля оказывается приемлемой в задачах стрельбы на дальности порядка сотен километров, движения ЛА относительно центра масс, построения итерационных алгоритмов наведения и т. п.

В более точной теории земного притяжения Землю принимают в виде *геоида*, под которым понимают тело, ограниченное свободной невозмущенной поверхностью гипотетического Мирового океана, продолженного мысленно под или над поверхностью материков. Следует учесть, что в силе тяжести, являющейся равнодействующей силы земного притяжения и центробежной силы инерции от вращения Земли, эти две силы экспериментально не удается разделить. Если к тому же учесть, что сила тяжести зависит и от неоднородности внутреннего строения Земли, то становится понятным, что геоид имеет весьма сложную форму.

Хорошей аппроксимацией геоида оказывается *общий земной эллипсоид*, или *сфероид*, являющийся эллипсоидом вращения, полученным от вращения эллипса вокруг малой оси. Его центр совпадает с центром Земли, а плоскость экватора — с плоскостью земного экватора. Размеры общего земного эллипсоида выбирают из условия минимальности суммы квадратов разностей расстояний от центра до поверхностей сфероида и геоида. Международным астрономическим союзом в 1964 г. были приняты, а позднее несколько уточнены следующие параметры сфероида: большая полуось (являющаяся экваториальным радиусом) равна $a = 6378137$ м, сжатие $\alpha = (a - c)/a = 1/298.25$, где c — малая полуось. В Советском Союзе с 1946 г. использовался земной эллипсоид Красовского с $a = 6378245$ м, $\alpha = 1/298.3$. Интересно, что первым понятие сфероида ввел еще в начале XIX столетия Даламбер, принявший $a = 6375653$ м, $\alpha = 1/334.0$.

На основании измерений, использовавшихся при создании земного эллипсоида Красовского, можно было бы аппроксимировать Землю и трехосным эллипсоидом, предложенным Центральным научно-исследовательским институтом геодезии, аэросъемки и картографии. Он имеет полуоси $a = 6378351.50$ м, $b = 6378137.70$ м, $c = 6356863.02$ м[3].

Можно показать[4], что с приемлемой для баллистических расчетов точностью проекции ускорения силы тяжести g_r и g_φ, создаваемого сфероидом (r — геоцентрический радиус, φ — широта) могут быть представлены формулами

$$\begin{gathered}
\mathrm{g}_r = -\mathrm{g}_{\text{ср}} \left(R_{\text{ср}}/r\right)^2 \left[1 + \left(R_{\text{ср}}/r\right)^2 (\alpha - q/2) \left(1 - 3\sin^2\varphi\right)\right] , \\
\mathrm{g}_\varphi = -\mathrm{g}_{\text{ср}} \left(R_{\text{ср}}/r\right)^4 (\alpha - q/2) \sin 2\varphi , \qquad (3.1) \\
R_{\text{ср}} = a\,(1 - \alpha/3) , \quad \mathrm{g}_{\text{ср}} = \mu/R_{\text{ср}}^2 , \quad q = \omega_3^2 a^3/\mu .
\end{gathered}$$

[3]См. монографию *Загребин Д. В.* Введение в теоретическую гравиметрию. М.: Наука, 1976.

[4]См. монографию *Лахтин Л. М.* Свободное движение в поле земного сфероида. М.: Физматгиз, 1963.

Здесь μ — гравитационный параметр притягивающего сфероида, $\omega_З$ — угловая скорость вращения Земли.

Понятие сфероида обычно используют при расчете глобальных баллистических задач, когда длина траектории соизмерима с размерами Земли. При необходимости расчета с повышенной точностью движения на значительно меньшие расстояния требуется еще более совершенное локальное описание гравитационного поля и фигуры Земли. Для этой цели используется понятие *референц-эллипсоида*, под которым понимается эллипсоид, часть поверхности которого в заданной области (например, на территории одного или нескольких государств) наилучшим образом совпадает с выделенной поверхностью геоида. При таком подборе эллипсоида его центр может не совпадать с центром Земли, но оси их вращений должны быть параллельны.

Весьма точная модель гравитационного поля Земли часто задается либо в виде большого количества членов ряда геопотенциала по сферическим функциям, либо в виде суммы потенциала общего земного эллипсоида вращения с равномерно распределенной массой и потенциала системы точечных масс. Отметим, что в конце 2013 года удалось построить сверхточную модель геоида[5].

В случае сферической модели Земли ее радиус обычно принимают равным 6 371 110 м, что соответствует объему сферы, равному объему сфероида. Такой модели соответствует центральное, или ньютоновское гравитационное поле, подробно обсуждавшееся в § 9 главы IV первого тома учебника. Эта модель позволяет достаточно точно рассчитывать траектории космических аппаратов, удаленных от Земли на расстояния порядка тысяч километров, а также проводить предварительные баллистические расчеты полета ЛА вблизи поверхности Земли.

---

[5]С этой целью 17 марта 2009 г. с космодрома Плесецк ракетой-носителем «Рокот» в рамках европейской программы Earth Explorer (Исследователь Земли) был запущен космический аппарат GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer). Аппарат весом в 1 тонну был выведен на низкую орбиту в 260 км над поверхностью Земли (что примерно на 500 км ниже обычных орбит научных спутников). Это обеспечивало наиболее точное картографирование гравитационного поля Земли с учетом неравномерного распределения массы внутри нашей планеты. Для уточнения результатов измерений было проведено несколько запланированных маневров, вплоть до снижения орбиты до 235 км над поверхностью Земли. На этих высотах приходилось учитывать сопротивление разреженных слоев атмосферы. Результаты измерений после их обработки позволили получить упоминавшуюся выше сверхточную модель геоида. После израсходования топлива в ноябре 2013 г. спутник вошел в верхние слои атмосферы и сгорел над западной частью Тихого океана.

Силу тяги $\mathbf{P}$ ЛА могут создавать двигатели двух классов. Первые из них работают лишь в атмосфере, так как для их функционирования необходим кислород воздуха. Энергия топлива в этих двигателях преобразуется либо непосредственно в силу тяги через реакцию струи продуктов сгорания, либо используется для вращения винта. Ко второму классу относятся реактивные двигатели, сила тяги которых получается независимо от внешней среды. Подобные двигатели могут работать на твердом или жидком топливе. Следует отметить, что существуют так же ионные и ядерные двигатели, создающие наиболее высокие удельные тяги, однако ионные двигатели обеспечивают лишь незначительные перегрузки, поэтому применяются только для аппаратов, стартующих с орбиты.

Характеристики силы тяги $\mathbf{P}$ обычно определяются при проведении стендовых испытаний и зависят от условий работы. На возможности аналитического выражения силы тяги реактивного двигателя остановимся в следующем параграфе (см. уравнение (4.1) и формулу (4.18) в § 4).

Со стороны набегающего потока воздуха или воды на движущееся тело действует распределенная по корпусу и оперению аэро(гидро)динамическая сила. Обычно ее приводят к центру масс тела и заменяют главным вектором $\mathbf{R}^a$ и главным моментом $\mathbf{L}^a$, называемыми в динамике полета *полной аэродинамической силой* и *полным аэродинамическим моментом*. Величины этих векторов представляют в исторически сложившемся виде:

$$R^a = c_R S\rho v^2/2\,, \qquad L^a = c_m l S\rho v^2/2\,. \tag{3.2}$$

Здесь c_R, c_m — безразмерные аэродинамические коэффициенты, l — характерная длина (например, длина ракеты или крыла самолета), S — характерная площадь (например, площадь *миделя*[6] корпуса ракеты или площадь крыла самолета), ρ — плотность среды, в которой происходит движение, v — скорость набегающего потока.

При изучении движения ЛА в связанной системе координат вектор $\mathbf{R}^a$ задают с помощью его компонент, величины которых

$$R_1^a = c_x S\rho v^2/2\,, \quad R_2^a = c_y S\rho v^2/2\,, \quad R_3^a = c_z S\rho v^2/2$$

соответствуют так называемым *продольной*, *нормальной* и *поперечной аэродинамическим силам*. Отметим, что при положительных углах атаки и скольжения сила $\mathbf{R}_2^a$ направлена в положительном направлении оси y, а

[6]Мидель — наибольшее поперечное сечение (от голландского слова *middel*, означающего согласно морской терминологии среднюю, самую широкую часть корабля от борта до борта; здесь полезно вспомнить и английское слово *middle* — середина).

силы $\mathbf{R}_1^a$ и $\mathbf{R}_3^a$ — в отрицательных направлениях соответственно осей x и z. Аналогично момент раскладывают на аэродинамические моменты крена, рыскания и тангажа, характеризуемые величинами проекций вектора $\mathbf{L}^a$:

$$L_1^a = c_{mx} l S \rho v^2/2\,, \quad L_2^a = c_{my} l S \rho v^2/2\,, \quad L_3^a = c_{mz} l S \rho v^2/2.$$

Следует отметить, что аэродинамические силы, действующие на корпус и оперение ЛА, имеют сложную зависимость от углов атаки и скольжения, от числа Маха, равного отношению скорости набегающего потока к скорости звука, от вязкости среды, высоты полета, конфигурации ЛА и от ряда других дополнительных факторов. Эта зависимость отражается с помощью соответствующего функционального задания аэродинамических коэффициентов. В подавляющем большинстве случаев эти коэффициенты удается найти лишь по результатам экспериментальных продувок в специальных аэродинамических трубах или по данным летных испытаний. В силу технических условий при проведении подобных экспериментов измеряют силы в так называемой *полусвязанной системе координат*, оси которой $x_{\text{псв}}$, $y_{\text{псв}}$, $z_{\text{псв}}$ совпадают с осями x', y_a, z, обозначенными на рис. 3 (очевидно, что при $\beta = 0$ полусвязанная система координат совпадает со скоростной). Соответствующие силы, называемые *силой лобового сопротивления*, *подъемной силой* и *боковой силой*, характеризуются формулами

$$R_{1,\text{псв}}^a = c_x^{\text{псв}} S \rho v^2/2\,, \quad R_{2,\text{псв}}^a = c_y^{\text{псв}} S \rho v^2/2\,, \quad R_{3,\text{псв}}^a = c_z^{\text{псв}} S \rho v^2/2\,.$$

Согласно рис. 3 может быть установлена следующая связь между аэродинамическими коэффициентами:

$$c_x = c_x^{\text{псв}} \cos\alpha - c_y^{\text{псв}} \sin\alpha\,,$$
$$c_y = c_x^{\text{псв}} \sin\alpha + c_y^{\text{псв}} \cos\alpha\,, \quad c_z = c_z^{\text{псв}}\,.$$

Движение ЛА по заданной программе осуществляется за счет создания управляющих сил $\mathbf{F}^{\text{упр}}$ и моментов $\mathbf{L}^{\text{упр}}$, возникающих в результате действий пилота или системы управления. Они могут изменять величину и направление силы тяги и аэродинамической силы. Технически это достигается изменением режима работы двигателей, применением поворотных маршевых двигателей и специальных управляющих двигателей, а также поворотных сопел, дополнительным вдувом газа или впрыскиванием жидкости в вытекающую струю продуктов сгорания, изменением конфигурации ЛА (выпуск щитков, закрылков, поворот стабилизатора), изменением положения воздушных и газовых[7] рулей и т. д.

[7] Газовые рули подобны воздушным, но устанавливаются в потоке газов, вытекающих из двигателей, и поэтому могут функционировать и в безвоздушном пространстве.

§ 4. Движение систем переменной массы. Сила тяги реактивного двигателя

Движение точки переменной массы. Под *точкой переменной массы* будем понимать материальную точку, размерами которой можно пренебречь и масса которой изменяется с течением времени. Для того чтобы иметь возможность применять теоремы классической механики, введем в рассмотрение систему, состоящую из материальной точки массы m и присоединяющейся к ней за время dt элементарной массы dm. Пусть абсолютные скорости масс m и dm перед моментом соединения равны соответственно $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$, а после их соединения скорость общей массы $(m + dm)$ стала равной $(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Тогда согласно теореме об изменении количества движения рассматриваемой системы можем записать

$$(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - (m\mathbf{v} + dm\mathbf{u}) = \mathbf{F}dt\,,$$

где $\mathbf{F}$ есть главный вектор действующих внешних сил. Переходя к пределу при $dt \to 0$, получим

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v})\,. \tag{4.1}$$

Это уравнение обычно называется *уравнением Мещерского*[8]. Оно описывает движение точки переменной массы $m(t)$. Отметим, что при $dm > 0$ уравнение характеризует движение точки с увеличивающейся массой, а при $dm < 0$ — случай движения с уменьшением массы.

Второе слагаемое в правой части уравнения (4.1) называется *реактивной силой*. Очевидно, что $\mathbf{v}_r = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ является относительной скоростью элементарной частицы по отношению к основной массе. Таким образом, при движении точки переменной массы наряду с силой $\mathbf{F}$ на нее действует и реактивная сила $\mathbf{v}_r dm/dt$.

Пример 1. Рассмотрим вертикальный подъем ракеты в однородном поле силы тяжести при постоянной скорости истечения газов $\mathbf{v}_r = \mathrm{const}$ (так называемая *вторая задача Циолковского*)[9]. В проекции на направление движения согласно

[8] Это уравнение было опубликовано И. В. Мещерским (1859–1935) в его магистерской диссертации, защищенной в 1897 г. Согласно исследованиям Г. К. Михайлова впервые подобное уравнение получил в 1812–1814 гг. чешский ученый Георг Букуа (Иржи Буквой). Его работы по динамике тел переменной массы намного опередили актуальные задачи того времени, но оказались совершенно забытыми.

[9] К. Э. Циолковский (1857–1935) был известным пропагандистом возможности космических полетов. Им были решены некоторые теоретические задачи и предложен ряд оригинальных идей, например, целесообразность использования многоступенчатых ракет для достижения высоких скоростей, построение околоземных космических станций и т. п.

уравнению (4.1) будем иметь

$$m\frac{dv}{dt} = -m\mathrm{g} - v_r\frac{dm}{dt}\,,$$

или

$$m\frac{d(v+\mathrm{g}t)}{dt} = -\frac{v_r}{m}\frac{dm}{dt}\,.$$

Считая, что $\mathbf{v}(0) = 0$, $m(0) = m_o$, получим

$$v = v_r \ln\frac{m_o}{m(t)} - \mathrm{g}t\,.$$

Для значения конечной скорости v_k, приобретаемой в конце разгона ракеты при $t = t_k$, сможем записать

$$v_k = \nu_r\,\ln\frac{m_o}{m_k} - \mathrm{g}t_k\,, \quad m_k = m(t_k)\,. \tag{4.2}$$

В частном случае движения без воздействия внешних сил (*первая задача Циолковского*) имеем

$$v_k = v_r \ln\frac{m_o}{m_k}\,. \tag{4.3}$$

Из этой формулы следует, что величина v_k прямо пропорциональна v_r, не зависит от закона изменения массы и увеличивается с ростом значения $Z = m_o/m_k$. Это отношение называется *числом Циолковского*, оно используется в современных баллистических расчетах.

Формула (4.2) уточняет эти выводы, показывая, что для создания той же величины v_k, что и в формуле (4.3), при учете постоянного поля тяготения требуется уменьшить величину m_k. Помимо этого из формулы (4.2) видно, что увеличение v_r и уменьшение t_k оказывают бóльшее влияние на увеличение конечной скорости, чем увеличение числа Циолковского, так как логарифмическая функция растет медленнее, чем линейная функция.

Основные теоремы для системы точек переменных масс. Количество движения $\widetilde{\mathbf{K}}$ системы точек переменных масс имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \sum_k m_k(t)\,\mathbf{v}_k\,,$$

поэтому

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{K}}}{dt} = \sum_k \frac{dm_k}{dt}\,\mathbf{v}_k + \sum_k m_k\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\,.$$

Заменяя здесь слагаемые $m_k d\mathbf{v}_k/dt$ согласно уравнению Мещерского (4.1), получаем *теорему об изменении количества движения системы точек переменных масс*:

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{K}}}{dt} = \mathbf{F} + \sum_k \frac{dm_k}{dt}\,\mathbf{u}_k\,,$$

где $\mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k$ является главным вектором внешних сил, действующих на систему, а сумма, стоящая справа, характеризует главный вектор сил, возникающих за счет переменности масс.

Рассмотрим теперь положение центра масс C системы точек переменного состава, которое в данный момент определяется из привычной формулы

$$m(t)\mathbf{r}_c = \sum_k m_k(t)\,\mathbf{r}_k\,, \quad m(t) = \sum_k m_k(t)\,.$$

Дифференцируя эту формулу дважды по времени, получим

$$\frac{d^2m}{dt^2}\,\mathbf{r}_c + 2\frac{dm}{dt}\,\mathbf{v}_c + m\,\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} =$$

$$= \sum_k \frac{d^2m_k}{dt^2}\,\mathbf{r}_k + 2\sum_k \frac{dm_k}{dt}\,\mathbf{v}_k + \sum_k m_k\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\,.$$

Заменяя здесь слагаемые в последней сумме по формуле Мещерского (4.1), будем иметь *теорему о движении центра масс системы материальных точек переменных масс*:

$$m\,\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F} + \sum_k \frac{dm_k}{dt}\,(\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k) +$$

$$+2\left(\sum_k \frac{dm_k}{dt}\,\mathbf{v}_k - \frac{dm}{dt}\,\mathbf{v}_c\right) + \sum_k \frac{d^2m_k}{dt^2}\,\mathbf{r}_k - \frac{d^2m}{dt^2}\,\mathbf{r}_c\,.$$

Здесь $\mathbf{F}$ есть главный вектор внешних сил, действующих на систему, $\sum_k (dm_k/dt)\,(\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k)$ является главным вектором реактивных сил, приложенных к точкам с переменными массами, а остальные слагаемые характеризуют дополнительные силы, обусловленные переменностью масс точек системы.

Перейдем к рассмотрению кинетического момента $\widetilde{\mathbf{l}}_o$ системы точек переменных масс относительно начала координат:

$$\widetilde{\mathbf{l}}_o = \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k(t)\,\mathbf{v}_k\,.$$

Производная от него имеет вид

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{l}}_o}{dt} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \frac{dm_k}{dt}\,\mathbf{v}_k + \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k\,\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\,. \tag{4.4}$$

Умножим уравнение Мещерского (4.1), записанное для k-й точки, векторно слева на $\mathbf{r}_k$ и полученные выражения просуммируем по всем точкам системы. Тогда будем иметь

$$\sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum_k \mathbf{r}_k \times \frac{dm_k}{dt} (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k) .$$

Выделяя здесь согласно формуле (4.4) выражение $d\widetilde{\mathbf{l}}_o/dt$, получим *теорему об изменении кинетического момента системы точек переменных масс относительно неподвижного начала координат*:

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{l}}_o}{dt} = \mathbf{L} + \sum_k \mathbf{r}_k \times \frac{dm_k}{dt} \mathbf{u}_k .$$

Отсюда видно, что на изменение кинетического момента системы точек переменных масс влияет не только главный момент внешних сил $\mathbf{L} = \sum\limits_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k$, но и главный момент сил $\sum\limits_k \mathbf{r}_k \times (dm_k/dt)\, \mathbf{u}_k$, порожденных переменностью масс точек системы.

Остановимся, наконец, на теореме об изменении кинетической энергии. Умножая скалярно уравнение Мещерского (4.1) на элементарное перемещение $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\, dt$, получаем

$$m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + v^2\, dm = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, dm .$$

Учитывая, что

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + \frac{v^2}{2}\, dm ,$$

будем иметь

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) + \frac{v^2}{2}\, dm = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, dm . \tag{4.5}$$

Эта формула отражает содержание *теоремы об изменении кинетической энергии для точки переменной массы.*

Обратим внимание на то, что второе слагаемое в правой части уравнения (4.5) можно представить в виде

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, dm = \frac{dm}{dt}\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, dt = \frac{dm}{dt}\, \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} ,$$

что характеризует элементарную работу на перемещении $d\mathbf{r}$ силы $(dm/dt)\, \mathbf{u}$, которая появляется при переменности массы $m(t)$.

Записывая выражение (4.5) для k-й точки системы, а затем, суммируя по k, получим *теорему об изменении кинетической энергии системы точек переменных масс*:

$$d\widetilde{T} + \sum_k dm_k \frac{v_k^2}{2} = \sum_k \delta A_k + \sum_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k \, dm_k \,, \tag{4.6}$$

где

$$\widetilde{T} = \sum_k m_k(t) \frac{v_k^2}{2} \,, \quad \delta A_k = \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k \,.$$

Формула (4.6) утверждает, что сумма дифференциала кинетической энергии системы точек переменных масс и кинетической энергии приращений их масс равна сумме элементарных работ сил, приложенных к точкам системы, и сумме элементарных работ сил, зависящих от изменения масс точек системы.

Теоремы об изменении количества движения и о движении центра масс тела переменной массы с твердой оболочкой. Принцип затвердевания. Во многих практических задачах приходится рассматривать не движение системы конечного числа точек переменных масс и даже не движение сплошной среды, а движение некоторого тела с твердой оболочкой, через которую движется поток материальных частиц. Такая постановка задачи относится прежде всего к изучению движения тел типа ракет или реактивных самолетов, когда исследователя в основном интересует движение самой твердой оболочки (корпуса), а не движение выбрасываемой струи сгоревшего топлива и не движение центра масс сложной системы, состоящей из движущегося тела и выброшенных из него газообразных частиц. Поэтому будем изучать движение некоторого тела с переменной массой, ограниченного замкнутой поверхностью S_o[10]. Внутри этой поверхности, совпадающей с твердой оболочкой исследуемого тела (ракеты, самолета и т. п.), находятся элементы конструкции, полезный груз, двигатели, насосы и т. д., а также движущиеся с большими скоростями внутренние потоки газа, приближающиеся к поверхности S_o и затем выбрасываемые через нее. Отметим, что наряду с отбрасыванием частиц через поверхность S_o могут проникать и внутрь тела потоки газа. Так, например, через воздухозаборник для самолетов с турбореактивными двигателями поступает воздух, кислород которого используется для сжигания топлива.

[10] См., например, книгу: *Абгарян К. А., Рапопорт И. М.* Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1969. 379 с.

Введем в рассмотрение систему переменного состава $\widetilde{\Omega}$, находящуюся внутри замкнутой поверхности S_o и содержащую твердые, жидкие и газообразные части. С течением времени эта система меняется по составу: ее могут покидать некоторые частицы или к ней могут присоединяться другие частицы. Помимо этого будем следить за движением масс, составляющих систему $\widetilde{\Omega}$ в данный момент времени. Эту механическую систему постоянного состава будем обозначать через Ω.

В том случае, когда механическая система состоит из конечного числа материальных точек, теорема об изменении количества движения и теорема о движении центра масс, рассматриваемые одновременно, приводят к следующей цепочке равенств:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{\nu} m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu} m_\nu \mathbf{w}_\nu = M\,\mathbf{w}_c = \mathbf{F}\,. \tag{4.7}$$

Заметим, что число точек системы предполагается постоянным, и потому соотношения (4.7) могут быть распространены только на систему Ω, но не на систему $\widetilde{\Omega}$.

Обобщая равенства (4.7) на систему Ω, рассмотрим прежде всего уравнение

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{w}\,dm\,. \tag{4.8}$$

Так как все массы системы Ω в рассматриваемый момент времени t находятся внутри твердой оболочки, интеграл, входящий в уравнение (4.8), может быть представлен в виде

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{w}\,dm = \iiint\limits_{V} \mathbf{w}(t,x,y,z)\,\rho(t,x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Здесь ρ — плотность, V — постоянный объем, заключенный внутри поверхности S_o, x, y, z — координаты рассматриваемой точки в связанной системе координат $Cxyz$. Эта система вводится следующим образом. Рассмотрим некоторое фиктивное тело S, которое получилось бы из системы $\widetilde{\Omega}$ в случае ее мгновенного затвердевания в момент времени t. Систему $Cxyz$ будем считать соответствующей данному фиктивному телу S . Движение частиц системы Ω относительно системы $Cxyz$ будем рассматривать как относительное движение, а движение самой системы $Cxyz$ как переносное. При таком подходе к движению частиц системы Ω вектор $\mathbf{w}$, входящий в выражение (4.8), в соответствии с теоремой Кориолиса (см. формулу (1.10) главы III первого тома) запишется в виде суммы:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_{Cor}\,, \quad \mathbf{w}_{Cor} = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r\,, \tag{4.9}$$

где $\mathbf{w}_e$, $\mathbf{w}_r$, $\mathbf{w}_{Cor}$ — соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения.

Выражение (4.8) при учете формул (4.7) и (4.9) может быть представлено следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{w}_e \, dm = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{Cor} - \int\limits_{\Omega} \mathbf{w}_r \, dm \,, \quad \mathbf{F}_{Cor} = -\int\limits_{\Omega} \mathbf{w}_{Cor} \, dm \,. \tag{4.10}$$

Здесь $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_{Cor}$ — главные векторы соответственно всех внешних сил и сил инерции Кориолиса, приложенных к системе Ω. Заметим, что силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_{Cor}$ фактически можно рассматривать как силы, приложенные к фиктивному телу S, так как в момент времени t, для которого записано уравнение (4.10), тело S и система Ω совпадают.

Все точки фиктивного тела имеют только переносное ускорение $\mathbf{w}_e$. Следовательно, ускорение его центра масс в соответствии с выражением (4.7) может быть представлено в виде

$$M^s \frac{d\mathbf{v}_c^s}{dt} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{w}_e \, dm \,. \tag{4.11}$$

Здесь $\mathbf{v}_c^s$ — скорость центра масс фиктивного тела, а M^s — его масса, равная массе системы Ω в рассматриваемый момент времени t.

Из выражения (4.11) следует, что уравнение (4.10) можно рассматривать как уравнение движения центра масс фиктивного твердого тела. Для того чтобы им воспользоваться, осталось выяснить, что представляет собой третье слагаемое в правой части уравнения (4.10).

Наблюдатель, который находится в системе $Cxyz$ (то есть в корпусе ракеты или самолета), может заметить только относительное движение частиц системы Ω. Поэтому уравнение (4.8), записанное применительно к системе $Cxyz$, будет иметь вид

$$\frac{d^*\mathbf{K}_r}{dt} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{w}_r \, dm \,. \tag{4.12}$$

Напомним, что символ звездочки у производной означает, что она берется в системе $Cxyz$, то есть производная является локальной.

Введем в рассмотрение интеграл

$$\widetilde{\mathbf{K}}_r = \iiint\limits_{V} \mathbf{v}_r \, \rho \, dx \, dy \, dz$$

и его локальную производную по времени

$$\frac{d^*\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt} = \frac{d^*}{dt}\iiint\limits_V \mathbf{v}_r\,\rho\,dx\,dy\,dz\,. \tag{4.13}$$

Составим разность:

$$\frac{d^*\mathbf{K}_r}{dt} - \frac{d^*\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt} = \frac{d^*\Delta\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt}\,, \tag{4.14}$$

где

$$\Delta\widetilde{\mathbf{K}}_r(t+\Delta t) = \mathbf{K}_r(t+\Delta t) - \widetilde{\mathbf{K}}_r(t+\Delta t)\,.$$

Разность (4.14) появляется за счет того, что в выражении $\mathbf{K}_r(t+\Delta t)$ должно учитываться количество движения тех частиц, которые за время Δt или вошли в объем V, или покинули его.

Рассмотрим элемент $d\sigma$ поверхности S_o. Элементарная масса Δm, которая за время Δt покинет объем V через поверхность $d\sigma$, равна $\rho\,v_{rn}\,d\sigma\,\Delta t$. Здесь ρ — плотность вытекающего через поверхность S_o вещества, а v_{rn} — проекция относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S_o. Изменение $\Delta\widetilde{\mathbf{K}}_r$ количества движения за время Δt, связанное с выходом элементарных масс Δm через всю поверхность S_o, таково:

$$\Delta\widetilde{\mathbf{K}}_r = \left(\iint\limits_{S_o} \mathbf{v}_r\,\rho\,v_{rn}\,d\sigma\right)\Delta t\,.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d^*\Delta\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\widetilde{\mathbf{K}}_r}{\Delta t} = \iint\limits_{S_o} \mathbf{v}_r\,\rho\,v_{rn}\,d\sigma\,.$$

Применяя теорему о среднем, получаем

$$\frac{d^*\Delta\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt} = m_{\text{сек}}\mathbf{v}_r^{\text{ср}}\,. \tag{4.15}$$

Здесь $m_{\text{сек}} = \int_{s_o}\!\!\int \rho\,v_{rn}\,d\sigma$ — секундный расход массы через поверхность S_o, а $\mathbf{v}_r^{\text{ср}}$ — средняя относительная скорость сплошной среды, протекающей через оболочку.

Из выражений (4.11), (4.10), (4.12), (4.14) следует, что *уравнение движения центра масс фиктивного тела S* может быть представлено в виде

$$M^s\,\frac{d\mathbf{v}_c^s}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{Cor} + \left(-\frac{d^*\Delta\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt}\right) + \left(-\frac{d^*\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt}\right)\,. \tag{4.16}$$

Третье слагаемое в правой части уравнения (4.16) в соответствии с выражением (4.15) представляет собой *главный вектор реактивных сил*, действующих на тело S. Последнее слагаемое в правой части уравнения (4.16), как это видно из формулы (4.13), будет присутствовать в том случае, когда относительная скорость частиц $\mathbf{v}_r$ и плотность ρ изменяются (варьируются) в течение времени. Поэтому это слагаемое называется *главным вектором вариационных сил*, действующих на тело S.

Отметим, что в том случае, когда ракету можно рассматривать как точку переменной массы, второе и четвертое слагаемые в правой части уравнения (4.16) пропадут, и оно перейдет в уравнение Мещерского (4.1), так как при этом в выражении (4.15) $m_{\text{сек}} = -dm/dt$, а $\mathbf{v}_r^{\text{ср}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Приведенный вывод уравнения (4.16) позволяет сформулировать следующий *принцип затвердевания* для тела переменного состава с твердой оболочкой: уравнение поступательного движения тела переменного состава $\widetilde{\Omega}$ с твердой оболочкой S_o в данный момент времени можно записать в виде уравнения движения центра масс некоторого твердого тела постоянного состава, если считать, что система переменного состава $\widetilde{\Omega}$ в данный момент времени затвердела и что к полученному таким образом фиктивному твердому телу S приложены внешние силы, действующие на систему $\widetilde{\Omega}$, силы инерции Кориолиса, реактивные силы и вариационные силы.

Сила тяги реактивного двигателя. Рассмотрим стендовые испытания реактивного двигателя. Как обычно жестко свяжем систему координат $Cxyz$ с оболочкой, которая теперь оказывается неподвижной. В силу неподвижности оболочки имеем $\mathbf{v}_c^s \equiv 0$, $\mathbf{F}_{Cor} \equiv 0$, а поэтому согласно формуле (4.16) получим

$$\mathbf{F} + \left(-\frac{d^*\Delta\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt}\right) + \left(-\frac{d^*\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt}\right) = 0\,. \tag{4.17}$$

Здесь главный вектор внешних сил $\mathbf{F}$ включает в себя силу тяжести двигателя, реакцию опор стенда, силу атмосферного давления, силу давления газов в сопле. В случае горизонтального расположения двигателя при его испытании силу тяжести можно исключить из рассмотрения, так как она уравновешивается вертикальной составляющей реакции опор. Приборы стенда измеряют горизонтальную составляющую $\mathbf{P}$ реакции опор, равную силе тяги двигателя. Согласно формуле (4.17) тяга двигателя $\mathbf{P}$ будет равна

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{\text{давл}} + \left(-\frac{d^*\Delta\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt}\right) + \left(-\frac{d^*\widetilde{\mathbf{K}}_r}{dt}\right)\,, \tag{4.18}$$

где величина $F^{\text{давл}}$ результирующей сил атмосферного давления и сил давления газов такова:

$$F^{\text{давл}} = S_c\,(p_c - p_{\text{н}})\,.$$

Здесь S_c — площадь выходного сечения сопла, p_c — давление в выходном сечении сопла, $p_{\text{н}}$ — атмосферное давление.

При использовании введенного понятия силы тяги двигателя уравнение (4.16) движения центра масс фиктивного тела S можно переписать в виде

$$M^s \frac{d\mathbf{v}_c^s}{dt} = \mathbf{F}^* + \mathbf{P} + \mathbf{F}_{Cor}\,, \tag{4.19}$$

где теперь $\mathbf{F}^*$ обозначает главный вектор внешних сил, за исключением сил атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла.

Теорема об изменении главного момента количества движения тела переменной массы с твердой оболочкой относительно центра масс. Первоначально для простоты рассмотрим эту теорему применительно к случаю, когда введенная выше система Ω состоит из конечного числа материальных точек.

В соответствии с формулой (3.9) главы V первого тома учебника имеем

$$\frac{d\mathbf{l}'}{dt} = \mathbf{L}'\,, \tag{4.20}$$

где

$$\mathbf{l}' = \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \mathbf{v}'_\nu\,, \quad \mathbf{L}' = \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)}\,.$$

Напомним, что здесь $\mathbf{r}'_\nu$ — радиус-вектор точки M_ν относительно центра масс, то есть $\mathbf{r}'_\nu = \overrightarrow{CM}_\nu$, а $\mathbf{v}'_\nu$ — скорость точки M_ν относительно подвижной системы $Cx'_1x'_2x'_3$ (см. рис. 2 главы V первого тома учебника), оси которой во все время движения параллельны осям той системы координат, которая в данной задаче считается инерциальной.

Дифференцируя по времени вектор $\mathbf{l}'$, получаем

$$\frac{d\mathbf{l}'}{dt} = \sum_\nu \frac{d\mathbf{r}'_\nu}{dt} \times m_\nu \mathbf{v}'_\nu + \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \frac{d\mathbf{v}'_\nu}{dt}\,.$$

Обозначая $\mathbf{w}'_\nu = d\mathbf{v}'_\nu/dt$ и учитывая, что $d\mathbf{r}'_\nu/dt = \mathbf{v}'_\nu$, будем иметь

$$\frac{d\mathbf{l}'}{dt} = \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \mathbf{w}'_\nu\,. \tag{4.21}$$

Обобщая выражения (4.20), (4.21) на случай, когда система Ω представляет собой сплошную среду, получаем

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}' dm = \mathbf{L}' \,. \tag{4.22}$$

Движение связанной системы $Cxyz$ относительно системы $Cx_1'x_2'x_3'$ (см. рис. 2 главы V первого тома учебника) будем рассматривать как переносное, а движение частиц по отношению к системе $Cxyz$ — как относительное. Теорема моментов (4.22) при таком подходе может быть представлена в виде

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_e' dm = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{Cor} - \int\limits_{\Omega} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_r dm \,, \tag{4.23}$$

где $\mathbf{L}_{Cor} = -\int_{\Omega} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_{Cor} dm$ — главный момент сил инерции Кориолиса относительно центра масс.

По аналогии с выражениями (4.12)–(4.14) третье слагаемое в правой части уравнения (4.23) представим следующим образом:

$$-\int\limits_{\Omega} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_r \, dm = -\frac{d^* \Delta \widetilde{\mathbf{l}}_r}{dt} - \frac{d^* \widetilde{\mathbf{l}}_r}{dt} \,, \tag{4.24}$$

где

$$\frac{d^* \mathbf{l}_r}{dt} = \frac{d^*}{dt} \iiint\limits_{V} \mathbf{r}' \times \mathbf{v}_r \, \rho \, dx \, dy \, dz \,.$$

Первое и второе слагаемые в правой части выражения (4.24) равны главным моментам соответственно реактивных и вариационных сил относительно центра масс.

Рассмотрим теперь левую часть уравнения (4.23). Прежде всего заметим, что она может быть представлена в виде

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_e' \, dm = \iiint\limits_{V} \mathbf{r}' \times \mathbf{w}_e' \, \rho \, dx \, dy \, dz \,, \tag{4.25}$$

так как в момент времени t, для которого записано уравнение (4.23), система Ω совпадает с фиктивным твердым телом. Ускорение $\mathbf{w}_e'$ появляется за счет того, что это тело с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вращается вокруг центра масс. Следовательно,

$$\mathbf{w}_e' = \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) . \tag{4.26}$$

С другой стороны, для этого же фиктивного твердого тела в соответствии с выражениями (4.21) и (4.26) будем иметь

$$\frac{d\mathbf{l}'}{dt} = \iiint\limits_V \mathbf{r}' \times \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\right] \rho\, dx\, dy\, dz\,, \tag{4.27}$$

где

$$\mathbf{l}' = \iiint\limits_V \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\, \rho\, dx\, dy\, dz\,.$$

Так как оси связанной системы координат $Cxyz$ являются главными центральными осями инерции, то в соответствии с формулами (2.4) и (2.5) главы VIII первого тома учебника имеем

$$\begin{gathered} \mathbf{l}' = A\,p\,\mathbf{i} + B\,q\,\mathbf{j} + C\,r\,\mathbf{k}\,, \\ \frac{d\mathbf{l}'}{dt} = A\,\dot{p}\,\mathbf{i} + B\,\dot{q}\,\mathbf{j} + C\,\dot{r}\,\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}'\,. \end{gathered} \tag{4.28}$$

Отметим, что в справедливости последней из этих формул можно убедиться путем непосредственного вычисления правой части выражения (4.27).

Из соотношений (4.25)–(4.28) следует, что уравнение (4.23) может быть представлено в форме динамических уравнений Эйлера:

$$\begin{gathered} A\,\dot{p} + (C - B)\,q\,r = L_x\,, \quad B\,\dot{q} + (A - C)\,r\,p = L_y\,, \\ C\,\dot{r} + (B - A)\,p\,q = L_z\,. \end{gathered} \tag{4.29}$$

Здесь

$$L_x = \mathbf{L} \cdot \mathbf{i}\,, \quad L_y = \mathbf{L} \cdot \mathbf{j}\,, \quad L_z = \mathbf{L} \cdot \mathbf{k}\,,$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{Cor} + \left(-\frac{d^*\Delta\widetilde{\mathbf{l}}_r}{dt}\right) + \left(-\frac{d^*\widetilde{\mathbf{l}}_r}{dt}\right)\,.$$

Включая по аналогии с формулой (4.19) в момент силы тяги $\mathbf{L}_P$ моменты $(-d^*\Delta\widetilde{\mathbf{l}}_r/dt)$, $(-d^*\widetilde{\mathbf{l}}_r/dt)$ и моменты относительно центра масс атмосферного давления и сил давления в выходном сечении сопла, получаем

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^* + \mathbf{L}_P + \mathbf{L}_{Cor}\,,$$

где $\mathbf{L}^*$ — момент внешних сил, действующих на тело переменного состава, за исключением упомянутых сил атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла.

К уравнениям (4.29) следует добавить кинематические уравнения Эйлера (1.4), которые после их разрешения относительно производных по времени от самолетных углов можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (q\cos\gamma - r\sin\gamma)/\cos\theta\,, \\ \dot{\theta} &= q\sin\gamma + r\cos\gamma\,, \\ \dot{\gamma} &= p + (r\sin\gamma - q\cos y)\,\mathrm{tg}\,\theta\,. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Нелинейная система дифференциальных уравнений (4.29), (4.30) допускает численное интегрирование.

Здесь уместно обратить внимание на следующее обстоятельство. Дело в том, что уравнения (4.29), записанные согласно принципу затвердевания, справедливы для данного момента времени. В процессе же движения ЛА из-за изменения его массы центр инерции изучаемого тела и его главные центральные оси инерции перемещаются. Однако эти перемещения по сравнению с размерами траектории являются ничтожными. Поэтому в практических расчетах ими обычно пренебрегают, считая, что центр масс и главные центральные оси инерции остаются неподвижными относительно корпуса движущегося тела.

§ 5. Движение летательного аппарата в начальной стартовой системе координат

Движение центра масс ЛА. Введем в рассмотрение инерциальную систему координат, оси которой совпадают с первоначальными направлениями осей стартовой системы координат. Эту систему назовем *начальной стартовой инерциальной системой координат*. Для сохранения направления этих осей в пространстве в ЛА создают с помощью трехосного гироскопического стабилизатора так называемую *гиростабилизированную платформу (гироплатформу)*[11]. Такая платформа при любом движении ЛА перемещается поступательно, поэтому достаточно в начальный момент времени направить ее приборные оси параллельно осям начальной стартовой системы координат. Движение ЛА в инерциальной системе координат называют *инерциальной навигацией*.

[11] См. монографии *Ишлинский А. Ю.* Инерциальное управление баллистическими ракетами. Некоторые теоретические вопросы. М.: Наука, 1968. 142 с.; *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.; *Климов Д. М.* Инерциальная навигация на море. М.: Наука, 1984. 111 с.; *Сихарулидзе Ю. Г.* Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука, 1982. 352 с.

Уравнение движения центра масс ЛА согласно формуле (4.19) можно записать в виде

$$M\,\mathbf{w}_c = \mathbf{G} + \mathbf{P} + \mathbf{R}^{\mathrm{a}} + \mathbf{F}^{\text{упр}}\,. \tag{5.1}$$

Здесь для краткости записи опущен значок «s» и учтено, что при движении в инерциальной системе $\mathbf{F}_{Cor} = 0$.

В технике часто применяют прибор *акселерометр*, который схематически представляет собой прикрепленную к пружине массу. Эта масса может перемещаться вдоль пружины, вызывая ее деформацию. По деформации пружины измеряют силу, действующую на массу, или согласно второму закону Ньютона соответствующее этой силе ускорение массы. В настоящее время акселерометры доведены до высокой степени совершенства и могут осуществлять весьма точные измерения.

В летательных аппаратах укрепляются три подобных акселерометра, расположенных вдоль приборных осей гироплатформы. В случае прикладывания к ЛА сил $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}^{\mathrm{a}}$, $\mathbf{F}^{\text{упр}}$ произойдут соответствующие деформации пружин акселерометров, и они измерят три составляющие вдоль осей начальной стартовой инерциальной системы координат так называемого в динамике полета *кажущегося ускорения* $\mathbf{w}^*$:

$$\begin{aligned} w^*_{x\,\text{ст}} &= (P_{x\,\text{ст}} + R^{\mathrm{a}}_{x\,\text{ст}} + F^{\text{упр}}_{x\,\text{ст}})/M\,, \\ w^*_{y\,\text{ст}} &= (P_{y\,\text{ст}} + R^{\mathrm{a}}_{y\,\text{ст}} + F^{\text{упр}}_{y\,\text{ст}})/M\,, \\ w^*_{z\,\text{ст}} &= (P_{z\,\text{ст}} + R^{\mathrm{a}}_{z\,\text{ст}} + F^{\text{упр}}_{z\,\text{ст}})/M\,. \end{aligned}$$

Но если уравнение (5.1) переписать в виде

$$M\,(\mathbf{w}_c - \mathbf{g}) = \mathbf{P} + \mathbf{R}^{\mathrm{a}} + \mathbf{F}^{\text{упр}}\,,$$

то очевидно, что по кажущемуся ускорению $\mathbf{w}^*$ можно определить интересующее нас ускорение центра масс

$$\mathbf{w}_c = \mathbf{w}^* + \mathbf{g}\,,$$

если известно ускорение силы тяжести $\mathbf{g}$. Таким образом, подробнее для ускорения $\mathbf{w}_c = (w_{x\,\text{ст}},\, w_{y\,\text{ст}},\, w_{z\,\text{ст}})$ можно записать

$$\begin{gathered} w_{x\,\text{ст}} = w^*_{x\,\text{ст}} + \mathrm{g}_{x\,\text{ст}}\,, \quad w_{y\,\text{ст}} = w^*_{y\,\text{ст}} + \mathrm{g}_{y\,\text{ст}}\,, \\ w_{z\,\text{ст}} = w^*_{z\,\text{ст}} + \mathrm{g}_{z\,\text{ст}}\,. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Здесь значения $w^*_{x\,\text{ст}}$, $w^*_{y\,\text{ст}}$, $w^*_{z\,\text{ст}}$ измеряют акселерометры, а величины $\mathrm{g}_{x\,\text{ст}}$, $\mathrm{g}_{y\,\text{ст}}$, $\mathrm{g}_{z\,\text{ст}}$ могут быть вычислены согласно принятой модели притяжения летательного аппарата Землей (см. § 3). Поэтому если вводить

все эти известные величины в бортовой компьютер, то при учете начальных данных после интегрирования уравнений (5.2) удается решить задачу инерциальной навигации, то есть определить координаты и скорость ЛА в начальной стартовой инерциальной системе координат. По найденным величинам можно найти любые характеристики движения, например траекторию движения и составляющие скорости ЛА относительно Земли. При необходимости изменения величин $w_{x\,\text{ст}}$, $w_{y\,\text{ст}}$, $w_{z\,\text{ст}}$, получаемых из уравнений (5.2), можно с помощью уравнения (5.1) подбирать потребное для этого управление $\mathbf{F}^{\text{упр}}$. Отметим, что для возможности пересчета составляющих сил, заданных в одной системе координат, в проекции сил в другой системе координат можно воспользоваться формулами преобразований (1.1) и (1.2).

Инерциальные системы навигации работают на ракетах десятки минут, на самолетах — несколько часов, на морских судах — сутками и даже месяцами, поэтому к точности и к стабильности работы последних предъявляются наиболее высокие требования.

Остановимся несколько подробнее на вычислении величин $\mathrm{g}_{x\,\text{ст}}$, $\mathrm{g}_{y\,\text{ст}}$, $\mathrm{g}_{z\,\text{ст}}$, входящих в правые части уравнений (5.2). Будем считать, что Земля представляется сфероидом (общим земным эллипсоидом). В этом случае проекции ускорения силы тяжести g_r и g_φ на направления осей y_3 и x_3 (на направление z_3 проекция равна нулю) могут быть подсчитаны по формулам (3.1), а тогда для пересчета по ним интересующих нас проекций гравитационного ускорения в начальной стартовой инерциальной системе координат следует воспользоваться формулами (1.1):

$$\mathrm{g}_{x\,\text{ст}} = \mathrm{g}_\varphi \cos A \cos \Delta\varphi_0 - \mathrm{g}_r \cos A \sin \Delta\varphi_0 \,,$$

$$\mathrm{g}_{y\,\text{ст}} = \mathrm{g}_\varphi \sin \Delta\varphi_0 + \mathrm{g}_r \cos \Delta\varphi_0 \,,$$

$$\mathrm{g}_{z\,\text{ст}} = -\mathrm{g}_\varphi \sin A \cos \Delta\varphi_0 + \mathrm{g}_r \sin A \sin \Delta\varphi_0 \,.$$

Но чтобы иметь возможность производить подсчеты по формулам (3.1), требуется знать для данного момента времени расстояние r центра масс ЛА до центра сфероида и его широту φ. Эти величины можно подсчитать следующим образом:

$$r = \sqrt{x_3^2 + (R_0 + y_3)^2 + z_3^2} \,, \quad \varphi = \arcsin(\boldsymbol{\omega}_3^0 \cdot \mathbf{r}^0) \,, \tag{5.3}$$

где R_0 — расстояние точки старта от центра сфероида; $\boldsymbol{\omega}_3^0$ — орт вектора угловой скорости вращения Земли; $\mathbf{r}^0$ — орт радиус-вектора центра масс

ЛА относительно центра общего земного эллипсоида. Орт $\boldsymbol{\omega}_З^0$ может быть представлен своими проекциями через широту φ_0 точки старта:

$$\boldsymbol{\omega}_З^0 = (\cos\varphi_0,\, \sin\varphi_0,\, 0)\ ,$$

а координаты центра масс ЛА можно подсчитать через известные величины $x_{ст}, y_{ст}, z_{ст}$ с помощью формул (1.1), (1.2) при учете, что $N^{-1} = N^*$:

$$\begin{gathered} x_З = x_{ст}\cos\Delta\varphi_0\cos A + y_{ст}\sin\Delta\varphi_0 - z_{ст}\cos\Delta\varphi_0\sin A\,, \\ y_З = -x_{ст}\sin\Delta\varphi_0\cos A + y_{ст}\cos\Delta\varphi_0 + z_{ст}\sin\Delta\varphi_0\sin A\,, \\ x_З = x_{ст}\sin A + z_{ст}\cos A\,. \end{gathered}$$

Отметим, что расстояния R точек сфероида от его центра могут быть определены из формулы

$$R^2 = \frac{a^2\left(1-e^2\right)}{1-e^2\cos^2\varphi}\,, \tag{5.4}$$

где a — большая полуось, а e — эксцентриситет эллипса, от вращения которого вокруг малой оси и получается эллипсоид вращения, принимаемый за сфероид. Величину R_0 получаем из выражения (5.4) при $\varphi = \varphi_0$. Теперь по формулам (5.3) можно найти интересующие нас значения r и φ, так как скалярное произведение $\boldsymbol{\omega}_З^0 \cdot \mathbf{r}^0$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega}_З^0 \cdot \mathbf{r}^0 = \left[x\cos\varphi_0 + (y+R_0)\sin\varphi_0\right]/r\,.$$

В частности, после вычисления величин r и R для данного момента времени можно найти высоту h летательного аппарата над поверхностью сфероида:

$$h = r - R\,.$$

Движение ЛА относительно центра масс. Благодаря изучению движения ЛА относительно центра масс удается найти его ориентацию в пространстве, что, в частности, совместно со сведениями о скорости центра масс позволяет определить многие характеристики сил, действующих на движущееся тело. При учете переменности массы используем принцип затвердевания. В результате, как следует из последнего пункта предыдущего параграфа, исследование сведется к интегрированию динамических и кинематических уравнений Эйлера (4.29), (4.30). Как уже отмечалось, эта система дифференциальных уравнений в реальных задачах динамики полета допускает лишь численное интегрирование.

§ 6. Применение методов неголономной механики для наведения летательного аппарата на цель

В динамике полета часто ставится задача наведения ЛА на цель как для ее поражения, так и для возможной доставки на цель полезного груза (например, для дозаправки в процессе полета, встречи корабля и дрейфующей льдины и т. п.).

В настоящее время используется большое количество разнообразных методов наведения на цель. Остановимся для конкретности на одном из классических методов наведения по *кривой погони*. В этом методе обеспечивается направление скорости движущегося ЛА на цель. Подобным образом движется, например, гончая собака, преследующая зайца.

Пусть движение ЛА в горизонтальной плоскости Oxy характеризуется точкой $M(x, y)$, а движение цели в той же плоскости — точкой $M_1(\xi, \eta)$. Предполагается, что

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t) \tag{6.1}$$

являются заданными функциями времени.

Очевидно, что при выбранном способе наведения должно выполняться условие

$$\frac{\dot{x}}{x - \xi} = \frac{\dot{y}}{y - \eta}\,,$$

или

$$(y - \eta)\,\dot{x} - (x - \xi)\,\dot{y} = 0\,. \tag{6.2}$$

Таким образом, задачу наведения ЛА на цель можно рассматривать как задачу неголономной механики, когда на движение точки наложена неголономная связь (6.2), причем ее нестационарность определяется заданием закона движения цели (6.1). Применим для решения этой задачи уравнения Маджи (см. § 5 главы VI первого тома учебника), являющиеся наиболее общими уравнениями неголономной механики[12].

Примем за обобщенные координаты точки M ее декартовые координаты ($s = 2$):

$$q^1 = x\,, \quad q^2 = y\,. \tag{6.3}$$

[12] Одним из первых методы неголономной механики к задачам преследования применил В. И. Киргетов (см., например, его статью: О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями) // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3.). Для наведения на цель в случае плоского движения Н. А. Кильчевский составлял обобщенные уравнения Чаплыгина и уравнения Схоутена (см. его учебник: Курс теоретической механики. Т. II. М.: Наука, 1977. 544 с.).

Движение точки подчинено одному ($k = 1$) уравнению неголономной связи (6.2). Введем новые переменные $v_*^1,\ v_*^2$, связанные с обобщенными скоростями $\dot q^1 = \dot x,\ q^2 = \dot y$ соотношениями ($l = s - k = 1$)

$$v_*^1 = \dot x\,, \quad v_*^2 = (y - \eta)\,\dot x - (x - \xi)\,\dot y\,.$$

Отсюда легко найти обратное преобразование:

$$\dot x = v_*^1\,, \quad \dot y = (y - \eta)\,v_*^1/(x - \xi) - v_*^2/(x - \xi)\,. \tag{6.4}$$

Для нашей задачи уравнения Маджи будут иметь вид (m — масса ЛА)

$$(mw_1 - Q_1)\,\frac{\partial \dot x}{\partial v_*^1} + (mw_2 - Q_2)\,\frac{\partial \dot y}{\partial v_*^1} = 0\,, \tag{6.5}$$

$$(mw_1 - Q_1)\,\frac{\partial \dot x}{\partial v_*^2} + (mw_2 - Q_2)\,\frac{\partial \dot y}{\partial v_*^2} = \Lambda\,. \tag{6.6}$$

Закон наведения (6.2) будем рассматривать как идеальную неголономную связь. Напомним, что согласно теории, изложенной в § 5 главы VI первого тома учебника, уравнения Маджи удобны тем, что в них выделяется собственно уравнение движения (6.5), которое следует интегрировать совместно с уравнением связи (6.2), и отдельно от этой системы второе уравнение (6.6), из которого после отыскания движения точки можно определить обобщенную реакцию Λ. С точки зрения наведения на цель эта реакция оказывается управляющей силой, которую следует добавить к заданным силам, чтобы осуществить закон преследования (6.2).

Кинетическая энергия ЛА, рассматриваемого как материальная точка, равна

$$T = m\,\frac{\dot x^2 + \dot y^2}{2}\,,$$

поэтому

$$mw_1 = m\ddot x\,, \quad mw_2 = m\ddot y\,.$$

Учитывая преобразования (6.4), уравнения (6.5) и (6.6) перепишем в виде

$$m\ddot x - Q_1 + (m\ddot y - Q_2)(y - \eta)/(x - \xi) = 0\,, \tag{6.7}$$

$$(m\ddot y - Q_2)/(\xi - x) = \Lambda\,. \tag{6.8}$$

При движении ЛА в горизонтальной плоскости будем учитывать действие на него силы тяги $\mathbf{P}$, направленной вдоль его скорости $\mathbf{v}$, и действующую в противоположном направлении силу аэродинамического сопротивления $\mathbf{R}^{\mathrm{a}}$. При нашем выборе обобщенных координат (6.1) имеем

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, и поэтому получим

$$\begin{aligned} Q_1 &= (\mathbf{P} + \mathbf{R}^{\mathrm{a}}) \cdot \mathbf{i} = P_x + R^{\mathrm{a}}_x = (P - R^{\mathrm{a}})\, \dot{x} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,, \\ Q_2 &= (\mathbf{P} + \mathbf{R}^{\mathrm{a}}) \cdot \mathbf{j} = P_y + R^{\mathrm{a}}_y = (P - R^{\mathrm{a}})\, \dot{y} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Напомним,что величина силы аэродинамического сопротивления R^{a} может быть представлена первой из формул (3.2).

Как уже отмечалось, движение ЛА можно получить после интегрирования уравнения Маджи (6.7) совместно с уравнением связи (6.2). Для их численного интегрирования удобно эту систему записать в нормальной форме. С этой целью продифференцируем уравнение связи (6.2), тогда получим

$$\ddot{x}\,(y - \eta) + \ddot{y}\,(\xi - x) = \dot{\eta}\,\dot{x} - \dot{\xi}\,\dot{y}\,. \tag{6.10}$$

Уравнение (6.7) с учетом выражений (6.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \ddot{y}\,(y - \eta)/(x - \xi) = (P - R^{\mathrm{a}})\,\dot{x}\,/(m\,\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}) + \\ &+ (P - R^{\mathrm{a}})\,\dot{y}\,(y - \eta)\,/[m\,\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,(x - \xi)]\,. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Решая уравнения (6.10) и (6.11) как систему линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{(\dot{\eta}\,\dot{x} - \dot{\xi}\,\dot{y})\,(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} + \frac{(P - R^{\mathrm{a}})\,[\dot{x}\,(x - \xi) + \dot{y}\,(y - \eta)]\,(x - \xi)}{m\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}\,, \\ \ddot{y} &= \frac{(\dot{\xi}\,\dot{y} - \dot{\eta}\,\dot{x})\,(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} + \frac{(P - R^{\mathrm{a}})\,[\dot{x}\,(x - \xi) + \dot{y}\,(y - \eta)]\,(y - \eta)}{m\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\;[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}\,. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Систему (6.12) можно записать в виде нормальной формы как систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка и затем проинтегрировать численно.

После интегрирования системы (6.12) из уравнения (6.8) может быть определена обобщенная реакция Λ. Зная ее величину, можно найти составляющие реакции неголономной связи, или, другими словами, управляющие силы, обеспечивающие закон (6.2) наведения на цель. Действительно, в общем случае реакция неголономной связи $\varphi(t, q, \dot{q}) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{R} = \Lambda \boldsymbol{\nabla}' \varphi + \mathbf{T}_0\,.$$

Напомним, что связь (6.2) была принята идеальной, то есть $\mathbf{T}_0 = 0$. Поэтому интересующая нас реакция может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{R} = \Lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}}\,\mathbf{j} \right)\,,$$

то есть получаем

$$R_x = \Lambda(y - \eta)\,, \quad R_y = -\Lambda(x - \xi)\,. \tag{6.13}$$

Обратим внимание на определенное удобство использования именно уравнений Маджи, а не других видов уравнений неголономной механики (см. § 10 главы VI первого тома учебника) при решении задач преследования в динамике полета. Действительно, составление уравнений Маджи имеет сравнительно простую и единообразную методику получения уравнений движения, их использование позволяет легко находить реакцию связи (управляющую силу), при этом на вид неголономной связи (закона преследования) не накладывается никаких дополнительных ограничений, в частности, связь может быть и нелинейной относительно обобщенных скоростей. В последнем случае рекомендуется продифференцировать уравнение связи по времени, в результате чего получится линейное относительно обобщенных ускорений выражение типа (6.10), что позволит легко записать в нормальной форме систему дифференциальных уравнений, определяющих движение ЛА[13].

[13]Более подробно о применении методов аналитической механики в задачах наведения ЛА на цель см. в монографии: *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука; Физматлит, 2009. 344 с.

Глава XI
ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О МАЯТНИКЕ КАПИЦЫ

Авторы: *А. К. Беляев, Н. Ф. Морозов, П. Е. Товстик, Т. М. Товстик, Т. П. Товстик, В. В. Додонов*

В данной главе исследуется устойчивость вертикального положения перевернутого обобщенного маятника Капицы при различных вертикальных вибрациях опоры. Рассматривается вертикальный деформируемый стержень со свободным верхним концом и зажатым или шарнирно опертым нижним концом при гармонических или стационарных случайных колебаниях опоры. Гибкий стержень моделируется системой с несколькими степенями свободы. Найдены условия устойчивости верхнего вертикального положения маятника. Учитываются как изгибные, так и продольные колебания стержня. Найдены области притяжения в устойчивом вертикальном положении. Для удобства изложения материал главы разбит на две части, включающие исследования как для твердого, так и для деформируемого стержня.

§ 1. Введение

Интерес к задаче колебаний маятника зародился 300 лет назад в работах Галилея, который изучал периоды колебаний маятника. А. Стефенсон[1] в 1908 году впервые обратил внимание на один из интересных типов колебаний маятника, а именно, на устойчивость маятника в гравитационном поле в верхнем положении при вертикальных колебаниях опоры.

С развитием физики высоких энергий проблемы, связанные с колебательным поведением объектов с различными временными масштабами, получили практическое применение и привлекли пристальное внимание исследователей. В 1951 году П. Л. Капица[2,3] провел различные теоретические и экспериментальные исследования колебаний перевернутого маятника. Известно, что задачи о колебаниях маятника с вибрирующей опорой приводят к уравнению Матье, которое может быть решено только в терминах эллиптических функций. Капица сделал дополнительное предположение о малой амплитуде колебаний опоры и рассмотрел тип движения, при котором период колебаний опоры намного меньше периода колебаний самого маятника. При этих предположениях маятник может стоять, не падая, в верхнем положении, что было подтверждено рядом эксперимен-

[1] *Stephenson A.* On an induced stability // Phil. Mag. 1908. Vol. 15.

[2] *Капица П. Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. Т. 44. № 1. С. 7–20.

[3] *Kapitsa P. L.* Collected papers of P. L. Kapitsa edited by D. TerHaar. Pergamon, no Y. **2**, 714–726, 1965.

тов. В работах Капицы можно найти теорию расчета периода колебаний маятника, восстанавливающего момента, действующего на маятник, отклонение от верхнего положения равновесия на конечный угол, а также само условие равновесия и оценку точности в предположении малой амплитуды колебаний точки подвеса. Состояние равновесия возникает при достаточно интенсивных колебаниях опоры.

Задача маятника Капицы, а также аналогичные красивые и поучительные явления динамической устойчивости и неустойчивости, связанные с вибрациями, были включены в монографии И. И. Блехмана[4,5].

В настоящей главе методом двухмасштабного асимптотического разложения найдены границы области притяжения верхнего устойчивого положения маятника. Исследуются решения обобщенной задачи о колебаниях маятника Капицы, поскольку они также важны для практического применения. Еще П. Л. Капица в своей работе обратил внимание на параметры маятника, пригодные для практических экспериментов, и предсказал, что изгибные колебания на резонансных частотах могут расти для тонкого стержня.

В главе уделяется внимание обобщенным формулировкам задачи, в которых стержень маятника не является абсолютно твердым телом. Предполагается, что гибкий маятник представляет собой однородный стержень, который подчиняется гипотезам, принятым для балки Бернулли — Эйлера. Для анализа решения задачи используется разложение в ряд по собственным формам вспомогательной краевой задачи, связанной со свободными поперечными колебаниями стержня, сжатого продольной силой. Условие устойчивости находится из системы уравнений, полученной методом двухмасштабных асимптотических разложений.

Рассматривается маятник в виде вертикального упругого стержня, который может быть неустойчивым не только в случае шарнирной опоры нижнего конца, но и в случае жесткой фиксации (при условии, что стержень достаточно длинный). Исследовано влияние распространения продольных волн по стержню и найдены области притяжения[6].

Обобщенная задача Капицы также рассматривается в случае, когда колебания вертикальной опоры являются стационарным случайным про-

---

[4] *И. И. Блехман.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 400 с.

[5] *И. И. Блехман.* Вибрационная механика и вибрационная реология (теория и приложения). М.: Физматлит, 2018. 752 с.

[6] *Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. M., Tovstik T. P.* Classical Kapitsa's problem of stability of an inverted pendulum and some generalizations // Acta Mechanica **232**, 1743–1759 (2021).

цессом[7]. Как и в случае высоких уровней вибрации, вертикальное положение стержня устойчиво, и мы определяем соответствующую область притяжения.

I. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАЯТНИКА КАПИЦЫ

Первая часть главы посвящена задачам с классической моделью маятника Капицы, когда маятник является однородным жестким стержнем. В расширение классической постановки рассматривается маятник Капицы со случайными колебаниями опоры и задача с упругим основанием.

Изложение начинается с классической задачи, где находится условие устойчивости перевернутого положения маятника на вибрирующем основании. Далее идут новые исследования, связанные с определением области притяжения устойчивого положения равновесия. В ходе решения читатель знакомится с асимптотическим методом двухмасштабных разложений, который в многомерной постановке применяется и во второй части данной главы.

Поставленные задачи решаются как аналитически приближенно, так и численно. В наглядной форме даются сравнения решений и обсуждаются результаты.

§ 2. Устойчивость маятника Капицы

Напомним, что маятник с вибрирующей точкой подвеса рассматривался ранее в § 7 главы I. Но для полноты изложения материала в текущей главе обсудим классический маятник Капицы еще раз, причем с более широких позиций.

Будем рассматривать маятник как тонкий однородный жесткий стержень длиной L (см. рис. 1,a). Его движение в подвижной системе координат описывается уравнением

$$J\frac{d^2\varphi}{d\tilde{t}^2} + n_1\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} - m\frac{L}{2}(\mathrm{g} - a\omega^2\sin(\omega\tilde{t} + \beta))\sin\varphi = 0\,, \tag{2.1}$$

где $\varphi(\tilde{t})$ — угол между стержнем и вертикальной осью, $\tilde{t}$ — время; n_1, $J = mL^2/3$, m, g — коэффициент демпфирования, момент инерции стержня, его масса и ускорение свободного падения соответственно; a, ω, β — амплитуда, частота и начальная фаза вибрации опоры.

Введено ограничение малой амплитуды $a \ll L$ вибрации опоры. Известно (см. § 1), что для фиксированных значений L и a условие реализации эффекта Капицы выполняется для достаточно высокой частоты

[7] *Tovstik T. M., Belyaev A. K., Kulizhnikov D. B., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P.* On an attraction basin of the generalized Kapitsa's problem // 7th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering. 2019. https://2019.compdyn.org/proceedings/

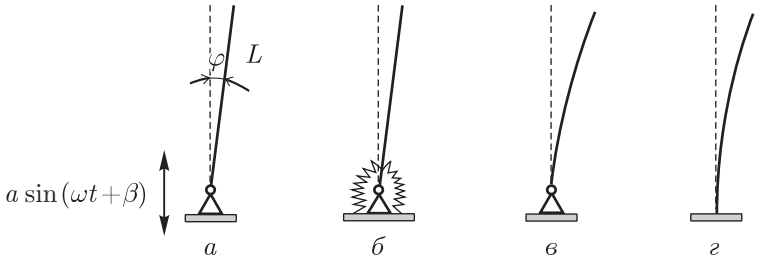

Рис. 1. Маятник Капицы (*а*) и его обобщенные модели (*б, в, г*)

$\omega \gg 1$. По этой причине для последующего анализа удобно записать уравнение (2.1) в безразмерной форме

$$\ddot{\varphi} + \varepsilon n \dot{\varphi} - (\varepsilon^2 q - \varepsilon \sin(t+\beta)) \sin\varphi = 0\,, \tag{2.2}$$

где

$$t = \omega \tilde{t}\,, \quad n = \frac{2n_1}{mLa\omega}\,, \quad q = \frac{2Lg}{3a^2\omega^2}\,, \quad \varepsilon = \frac{3\delta}{2}\,, \quad \delta = \frac{a}{L}\,. \tag{2.3}$$

Здесь q — параметр нагрузки, ε — малый параметр. Производная по времени t обозначается точкой. Введем относительное ускорение вибрации опоры κ в качестве критического параметра, обеспечивающего устойчивость маятника:

$$\kappa = \frac{a\omega^2}{\mathrm{g}} = \frac{2}{3\delta q}\,. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.2) мы будем использовать при решении задачи Капицы в различных постановках, а сейчас проведем оценку устойчивости решения уравнения в простейшей линейной постановке, когда данное уравнение превращается в уравнение Матье.

Границы устойчивости решения уравнения Матье можно найти в справочнике по специальным функциям[8]. А именно, для уравнения

$$\ddot{\varphi} - (q_1 - \varepsilon \sin t)\varphi = 0 \tag{2.5}$$

границы области устойчивости в интересующей нас области показаны на диаграмме Айнса — Стретта (рис. 2) и для малых положительных значений q_1 могут быть записаны неравенствами

$$\frac{\varepsilon^2}{2} > q_1 > 0.595\,(\varepsilon - 0.454)\,. \tag{2.6}$$

[8] Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

Правая часть неравенства выполнена для всех положительных значений q_1 и малых значений ε из рассматриваемой нами области, а левая часть неравенства является определяющей.

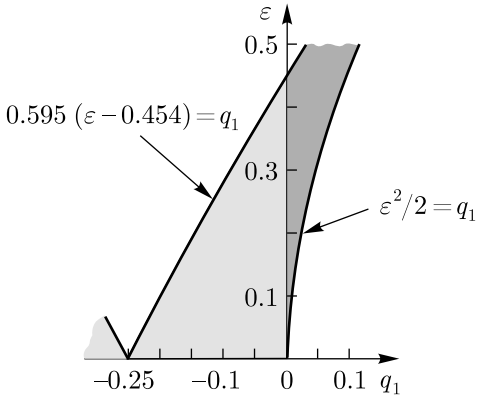

Рис. 2. Фрагмент диаграммы Айнса — Стретта

В наших обозначениях, при отсутствии трения, условие устойчивости нулевого решения $\varphi \equiv 0$ линеаризированного уравнения (2.2) (а именно, для $\sin\varphi \approx \varphi$) примет вид

$$q < \frac{1}{2}\,, \quad \text{или} \quad \kappa > \frac{4}{3\delta}\,. \tag{2.7}$$

§ 3. Область притяжения решения маятника Капицы

Теперь перейдем к нахождению области притяжения этого решения, и рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.2) при начальных условиях

$$\varphi(0) = \varphi_0\,, \qquad \dot\varphi(0) = 0\,. \tag{3.1}$$

Будем искать асимптотическое решение уравнения (2.2) в виде двухмасштабного разложения[9]

$$\varphi(t,\theta,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty}(U_m(\theta) + V_m(t,\theta))\varepsilon^m\,, \qquad \int_0^{2\pi} V_m(t,\theta)dt = 0\,, \quad m = 0.1,\,\ldots\,. \tag{3.2}$$

Здесь $\theta = \varepsilon t$ — медленное время и

$$\dot\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,, \quad \ddot\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\theta} + \varepsilon^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\,. \tag{3.3}$$

[9] *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1958. 408 с.

Разложение уравнения (2.2) по степеням ε последовательно дает

$$V_0(t,\theta)=0\,,\quad V_1(t,\theta)=\sin U_0\sin(t+\beta)\,,\quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}+H(\theta,t)=0\,, \tag{3.4}$$

где

$$H=2\frac{\partial^2 V_1}{\partial t\partial\theta}+\frac{d^2U_0}{d\theta^2}+n\frac{dU_0}{d\theta}-q\sin U_0+(U_1+V_1)\cos U_0\sin(t+\beta)\,. \tag{3.5}$$

Согласно (3.2) среднее значение по t функции $H(t,\theta)$ должно быть равно нулю, что позволяет записать уравнение для функции $U_0(\theta)$:

$$\frac{d^2U_0}{d\theta^2}+n\frac{dU_0}{d\theta}+F(U_0)=0\,,\quad F(U_0)=((1/2)\cos U_0-q)\sin U_0\,. \tag{3.6}$$

Благодаря соотношению $\dot\varphi=\varepsilon(dU_0/d\theta+\partial V_1/\partial t)+O(\varepsilon^2)=0$ решается уравнение (3.6) с начальными условиями

$$U_0=\varphi_0\,,\quad U_0'=dU_0/d\theta=-\sin\varphi_0\cos\beta\quad \text{для}\quad \theta=0\,. \tag{3.7}$$

Задача (3.6), (3.7) является нулевым асимптотическим приближением точной задачи (2.2), (3.1).

Для определенности берем $\alpha=0.01$, $n=0.1$ и для некоторых значений φ_0 и β находим такие $q_*(\varphi_0,\beta)$, что для $q<q_*(\varphi_0,\beta)$ предельное равенство

$$\varphi(t)\to 0\quad \text{при}\quad t\to\infty \tag{3.8}$$

выполняется, тогда как в противоположном случае при $q>q_*(\varphi_0,\beta)$ выражение (3.8) не выполняется. Граница $q_*(\varphi_0,\beta)$ зависит от начальной фазы β, которая в общем случае неизвестна. Вот почему вводим (см. рис. 3) две области притяжения в плоскости параметров (φ_0,q):

$$\begin{aligned} &G_a(\varphi_0):\quad q<q_*^-(\varphi_0)\,, && q_*^-(\varphi_0)=\min_{\beta\in[0.2\pi)} q_*(\varphi_0,\beta)\,,\\ &G_p(\varphi_0):\quad q_*^-(\varphi_0)<q<q_*^+(\varphi_0)\,, && q_*^+(\varphi_0)=\max_{\beta\in[0.2\pi)} q_*(\varphi_0,\beta)\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

В области G_a стремление к нулю (3.8) выполняется для всех значений начальной фазы β, в области G_p устойчивость наступает лишь при некоторых значениях β, а в области G_0 плоскости (φ_0,q) условие (3.8) никогда не выполняется.

Границы $q_*^-(\varphi_0)$ и $q_*^+(\varphi_0)$ находятся путем численного решения точной задачи (2.2), (3.1). Решение приближенной задачи (3.6), (3.7) дает близкие

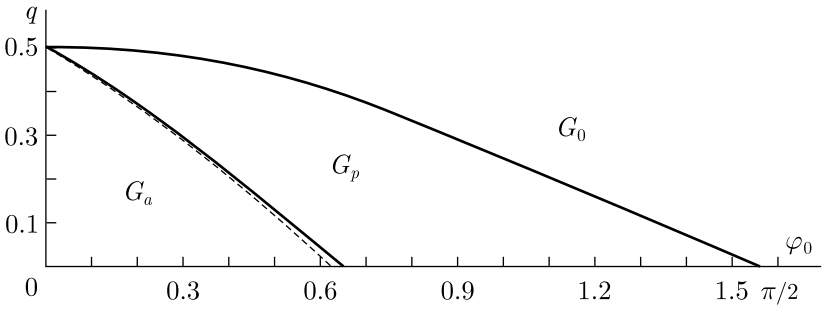

Рис. 3. Области притяжения

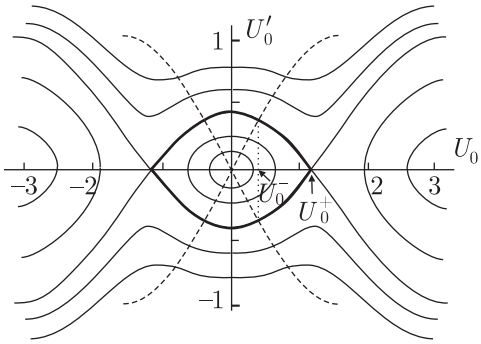

Рис. 4. Области притяжения на фазовой плоскости (U_0, U_0') при $q = 0.3$

результаты (соответствующая кривая $q_*^-(\varphi_0)$ на рис. 3 отображается как штриховая линия, и для $q_*^+(\varphi_0)$ разность точной и приближенной кривых настолько мала, что ее невозможно увидеть на рисунке).

Уравнение (3.6) удобно для качественного анализа на фазовой плоскости (U_0, U_0'). Траектории $U_0(\theta), U_0'(\theta)$ для $q = 0.3$, $n = 0$ показаны на рис. 4. Жирная кривая разделяет область притяжения, в то время как возможные значения $|U_0'| \leqslant |\sin U_0|$ отмечены пунктирными линиями.

§ 4. Области притяжения решения задачи маятника Капицы со случайным возбуждением

Пусть вертикальная вибрация опор $x_e(t) = \xi(t)$ случайна (рис. 1,*а*), а $\xi(t)$ — стационарный процесс с нулевым возбуждением и спектральной плотностью $S_\xi(\lambda)$. Рассмотрим задачи § 3 для случая случайного возбуждения.

Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$J\frac{d^2\varphi}{d\tilde{t}^2}+n_1\frac{d\varphi}{d\tilde{t}}-\frac{mL}{2}\left(\mathrm{g}+\frac{d^2\tilde{\xi}}{d\tilde{t}^2}\right)\sin\varphi=0\,. \tag{4.1}$$

Перепишем (4.1) в безразмерной форме, связав время $\tilde{t}$ с $1/\omega$ (ω — типичная частота вибрации опоры), а возбуждение $\tilde{\xi}(\tilde{t})$ — со средней амплитудой вибрации опоры $\sigma_{\tilde{\xi}}$:

$$\ddot{\varphi}+\varepsilon n\dot{\varphi}-\left(\varepsilon^2 q+\varepsilon\ddot{\xi}\right)\sin\varphi=0\,, \tag{4.2}$$

где производная по t обозначается точкой, и

$$t=\omega\tilde{t}\,,\quad \tilde{\xi}(\tilde{t})=\sigma_{\tilde{\xi}}\xi(t)\,,\quad \sigma^2_{\tilde{\xi}}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\tilde{\xi}}(\tilde{\lambda})d\tilde{\lambda}\,,\quad \varepsilon=\frac{3\sigma_{\tilde{\xi}}}{2L}\,,\quad q=\frac{3Lg}{2\sigma^2_{\tilde{\xi}}\omega^2}\,. \tag{4.3}$$

Здесь ε — малый параметр, пропорциональный средней амплитуде вибрации опоры $\sigma_{\tilde{\xi}}$, а $\xi(t)$ — нормализованный процесс с единичной дисперсией. Спектральные плотности дисперсии $\xi(t)$ и ее производных следующие:

$$S_\xi(\lambda)=\frac{S_{\tilde{\xi}}(\tilde{\lambda}\omega)}{\sigma^2_{\tilde{\xi}}}\,,\quad S_{\dot{\xi}}(\lambda)=\lambda^2 S_\xi(\lambda)\,,\quad S_{\ddot{\xi}}(\lambda)=\lambda^4 S_\xi(\lambda)\,, \tag{4.4}$$

$$\sigma^2_{\dot{\xi}}=\int_{-\infty}^{\infty}S_\xi(\lambda)\lambda^2 d\lambda\,.$$

Для решения уравнения (4.2) с начальными условиями $\varphi(0)=\varphi_0$, $\dot{\varphi}(0)=0$ используем два способа решения задачи. Одним из них является статистическое моделирование[10,11]. В этом методе случайный процесс $\xi(t)$ представляем как сумму гармонических слагаемых со случайными амплитудами и фазами. Для этой цели выбираем Λ так, чтобы частью частот $\lambda>\Lambda$ можно было пренебречь, и делим интервал $0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda$ на точки $\lambda_n,\ n=1,\ldots,N$. Получить реализацию случайного процесса $\xi(t)$ со спектральной плотностью $S_\xi(\lambda)$ при достаточно большом N можно с помощью формулы

$$\xi_N(t)=\sum_{n=1}^{N}p_n(\eta_n\cos(\hat{\lambda}_n t)+\kappa_n\sin(\hat{\lambda}_n t))\,, \tag{4.5}$$

[10] *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматлит, 1960. 883 с.

[11] *Товстик П. Е., Товстик Т. М., Шеховцов В. А.* Моделирование колебаний морской стационарной платформы при случайном волнении // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2005. Вып. 4. С. 61–69.

$$p_n = \sqrt{2S_\xi(\hat{\lambda}_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})}\,, \qquad \hat{\lambda}_n = (\lambda_n + \lambda_{n-1})/2\,,$$

где η_n и κ_n являются случайными независимыми стандартными гауссовыми величинами ($\mathbf{E}\eta_n = \mathbf{E}\kappa_n = 0$, $\mathbf{E}\eta_n^2 = \mathbf{E}\kappa_n^2 = 1$, а $\mathbf{E}$ обозначает математическое ожидание). Затем численное решение (4.2) с начальными условиями (3.1) дает реализацию случайного процесса $\varphi(t)$.

В качестве примера рассмотрим случайный процесс $\tilde{\xi}(\tilde{t})$ со спектральной плотностью

$$S_{\tilde{\xi}}(\tilde{\lambda}) = \frac{\tilde{c}}{(\tilde{\lambda}^4 + 2(\tilde{\alpha}^2 - \omega^2)\tilde{\lambda}^2 + (\tilde{\alpha}^2 + \omega^2)^2)(\tilde{\lambda}^2 + \omega^2)}\,. \tag{4.6}$$

Согласно (4.3), (4.4) для безразмерного процесса $\xi(t)$ спектральная плотность имеет вид

$$S_\xi(\lambda) = \frac{c}{(\lambda^4 + 2(\alpha^2 - 1)\lambda^2 + (\alpha^2 + 1)^2)(\lambda^2 + 1)}\,, \quad \lambda = \tilde{\lambda}/\omega\,, \quad \alpha = \tilde{\alpha}/\omega\,, \tag{4.7}$$

где константа c должна быть найдена из условия $\sigma_\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\lambda)d\lambda = 1$. В результате получаем $\sigma_{\dot{\xi}}^2 = (1 + \tilde{\alpha}^2)/(1 + 2\alpha)$.

Возьмем значения $\varepsilon = 0.01$, $n = 0.1$, $\alpha = 0.2$, $N = 200$ и рассмотрим случай $\varphi_0 > 0$. Спектральная плотность $S_\xi(\lambda)$ нормализованного процесса $\xi(t)$ показана на рис. 5. Максимум $S_\xi(\lambda)$ близок к $\lambda = 1$ и $\sigma_\xi = 1$. Области притяжения G_a и G_p, полученные численным решением уравнения (4.2), показаны на рис. 5. В каждом численном эксперименте мы брали 10 независимых реализаций процесса $\varphi(t)$. Точка (φ_0, q) включается в G_p, если по крайней мере одна реализация сходится к нулю при $t \to \infty$ и по крайней мере одна реализация сходится к $\pm\pi$. Следовательно, в областях G_p и G_0 все 10 реализаций стремятся к нулю и к $\pm\pi$ при $t \to \infty$ соответственно. Границы G_p обозначаются как $\hat{q}^-$ и $\hat{q}^+$.

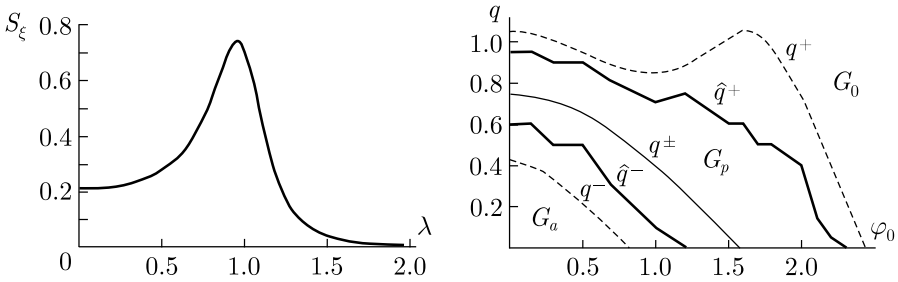

Рис. 5. Спектральная плотность (слева). Области притяжения (справа)

Второй способ анализа уравнения (4.2) применяет двухмасштабное разложение (3.2)

$$\varphi(t,\theta,\varepsilon) = U(\theta,\varepsilon) + V(t,\theta,\varepsilon)\,, \tag{4.8}$$

$$U(\theta,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(\theta)\varepsilon^m\,, \quad V(t,\theta,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(t,\theta)\varepsilon^m\,,$$

где среднее значение V равно нулю

$$\langle V\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V(t,\theta,\varepsilon)dt = 0\,, \quad T = O(\varepsilon^{-1})\,. \tag{4.9}$$

Повторяя расчеты § 3, последовательно получаем

$$V_0(t,\theta) = 0\,, \quad V_1(t,\theta) = \xi(t)\sin U_0\,, \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} + H(t,\theta) = 0\,, \tag{4.10}$$

причем

$$H = 2\frac{\partial^2 V_1}{\partial t\partial\theta} + \frac{d^2U_0}{\partial\theta^2} + n\frac{dU_0}{\partial\theta} - q\sin U_0 - (U_1+V_1)\frac{d^2\xi}{dt^2}\cos U_0\,. \tag{4.11}$$

Условие $\langle H\rangle = 0$ приводит к уравнению для функции $U_0(\theta)$:

$$U_0'' + nU_0' + (\chi\cos U_0 - q)\sin U_0 = 0\,, \quad \chi = -\left\langle \xi(t)\ddot{\xi}(t)\right\rangle\,, \qquad U_0(0) = \varphi_0\,. \tag{4.12}$$

Второе начальное условие $\dot{\varphi}(0) = 0$ с учетом (3.3) и (4.10) дает

$$U_0'(0) = -\dot{\xi}(0)\sin\varphi_0\,. \tag{4.13}$$

Задача (4.12), (4.13) содержит два случайных значения χ и $\dot{\xi}(0)$. Найдем области притяжения для данной задачи. Отметим, что для гауссовских случайных величин χ и $\dot{\xi}(0)$ с вероятностью 0.95 справедливы следующие неравенства:

$$\mathbf{E}(\chi)-2\sigma_\chi \leqslant \chi \leqslant \mathbf{E}(\chi)+2\sigma_\chi\,, \quad -2(\mathbf{E}(\chi)-2\sigma_\chi)^{1/2} \leqslant \dot{\xi}(0) \leqslant 2(\mathbf{E}(\chi)+2\sigma_\chi)^{1/2}\,, \tag{4.14}$$

где $\mathbf{E}(\chi)$ — математическое ожидание χ, а σ_χ — среднеквадратичное значение.

Для случайного процесса (4.5) получаем

$$\mathbf{E}(\chi) \approx -\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\ddot{\xi}(t)dt \approx \frac{1}{T}\int_0^T \left(\dot{\xi}(t)\right)^2 dt \approx \sigma_{\dot{\xi}}^2 = 0.743\,. \tag{4.15}$$

Из уравнения (4.5) имеем

$$\chi \approx \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} p_n \hat{\lambda}_n^2(\eta_n^2 + \kappa_n^2)\,. \tag{4.16}$$

Взяв большое количество (скажем, 10000) случайных величин (η_n, κ_n, $n = 1, \ldots, N$) и используя выражение (4.16), получаем величину среднеквадратичного значения $\sigma_\chi = 0.157$.

Подставляя верхнюю и нижнюю границы значений χ и $\dot{\varphi}(0)$ в выражения (4.14), получаем из (4.12) границы $q^-(\varphi_0)$ и $q^+(\varphi_0)$ областей притяжения, которые показаны на рис. 5. Для сравнения здесь показана и кривая $q^\pm(\varphi_0)$, соответствующая значениям $\chi = \sigma_{\dot{\xi}}^2$, $\dot{\xi}(0) = 0$.

В частности, из уравнения (4.12) следует, что вертикальное положение (с вероятностью 0.95) является устойчивым при условии

$$q < \sigma_{\dot{\xi}}^2 - 2\sigma_\chi \tag{4.17}$$

и при выполнении $q < q^-(0) = 0.429$.

§ 5. Маятник Капицы на гибкой опоре

Рассматривается недеформируемый стержень с упруго закрепленным нижним концом. Движение стержня при наличии колебаний основания характеризуется дифференциальным уравнением

$$J\ddot{\varphi} + n\dot{\varphi} + b_0\varphi - (mL/2)(\mathrm{g} - a\omega^2\sin(\omega t + \beta))\sin\varphi = 0\,, \tag{5.1}$$

где b_0 — угловая жесткость закрепления нижнего конца, а остальные обозначения те же, что и в уравнении (2.1).

В безразмерных обозначениях уравнение (5.1) имеет вид

$$\ddot{\varphi} + n\alpha\dot{\varphi} + \alpha^2(b\varphi - q\sin\varphi) + \alpha\sin\varphi\sin(t+\beta) = 0\,, \quad b = \frac{4b_0L}{3ma^2\omega^2}\,. \tag{5.2}$$

При $b < q$ при отсутствии вибраций основания вертикальное положение стержня неустойчиво. Устойчивым является положение, при котором стержень отклонен от вертикали на угол φ_0, определяемый из уравнения

$$b\varphi_0 = q\sin\varphi_0\,, \quad \text{или} \quad b = kq\,, \quad k = \frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} < 1\,. \tag{5.3}$$

Нас интересует выяснение условий, при которых вибрации основания переведут стержень в вертикальное положение.

Ищем решение уравнения (5.2), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot\varphi(0) = 0$. Угол $\varphi_0 < \pi$ считаем ведущим параметром задачи, а параметр жесткости считаем равным $b = kq$. Как и в § 3, двухмасштабное разложение вида (3.2) в нулевом приближении для медленно меняющейся функции $U_0(\theta)$ приводит к задаче Коши

$$U_0'' + n\,U_0' + F(U_0) = 0\,, \quad U_0(0) = \varphi_0\,, \quad U_0'(0) = -\sin\varphi_0 \sin\beta\,, \tag{5.4}$$

где $F(U_0) = kqU_0 + ((1/2)\cos U_0 - q)\sin U_0$. При $n > 0, q < q_*^+ = 1/(2(1-k))$ решение $U_0(\theta) \equiv 0$ асимптотически устойчиво. Как и в § 3, нашей задачей является найти область притяжения этого решения. Поэтому анализ проводим при $q < q_*^+$.

Траектории

$$U_0'^2 + 2\int_0^{U_0} F(U)dU = C\,, \tag{5.5}$$

где C — произвольная постоянная, на фазовой плоскости (U_0, U_0') симметричны по отношению к осям OU_0 и OU_0', поэтому рассмотрим четверть плоскости $U_0, U_0' \geqslant 0$. При отсутствии трения ($n = 0$) движение осуществляется по траекториям, а при $n > 0$ происходит переход с траектории с бóльшим значением C на траекторию с меньшим значением. Точки покоя определяем из уравнения $F(U) = 0$. При $q < q_*$ имеется устойчивая точка покоя $U_0 = 0$. Пусть $\varphi_0 < \pi/2$. При $q^- < q < q_*^+$ других точек покоя нет, а при $q < q^-$ появляются неустойчивая точка покоя U_1 и устойчивая точка покоя U_2 (например, при $\varphi_0 = 1$, $q = 0.15$ будет $U_1 = 1.706$, $U_2 = 2.535$). При $q = q^-$ корни уравнения $F(U) = 0$ совпадают ($U_1 = U_2$), а значение q^- находим из системы уравнений $F(U) = F'(U) = 0$ (например, при $\varphi_0 = 1$ будет $q^- = 0.245$, $U_1 = U_2 = 2.02$).

На рис. 6 показана фазовая плоскость при $\varphi_0 = 1$, $q = 1$. В этом случае $U_0 = 0$ — единственная точка покоя. Направление убывания константы C показано стрелкой. Множество возможных значений производной $|\dot U^0| \leq \sin\varphi_0$ изображено жирной вертикальной линией. Эта линия целиком лежит в области притяжения точки покоя $U_0 = U_0' = 0$, поэтому при всех значениях начальной фазы возмущения β решение стремится к ней.

На рис. 7 рассмотрен случай $\varphi_0 = 1$, $q = 0.1$, в котором кроме начала координат есть еще две точки покоя. Через точку $(0, U_1)$ проходит сепаратриса, выделяющая области притяжения точек $(0, 0)$ и $(U_2, 0)$. Видим, что множество возможных значений величины $|\dot U_0'|$ лишь частично лежит в

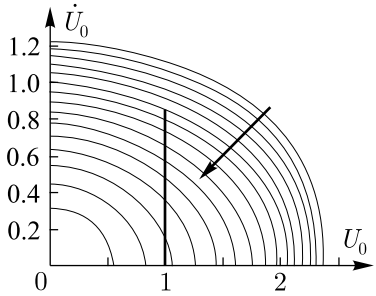

Рис. 6. Фазовая плоскость при $\varphi_0 = 1,\ q = 1$

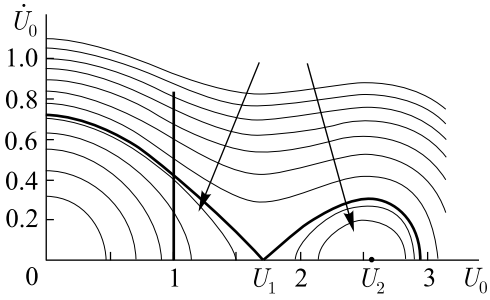

Рис. 7. Фазовая плоскость при $\varphi_0 = 1,\ q = 0.1$

области притяжения начала координат, поэтому выполнение условия (3.8) зависит от величины β.

Области притяжения нулевого решения определялись в результате численного интегрирования точного уравнения (5.2) и приближенного уравнения (5.4) при $\alpha = 0.01$ и $n = 0.1$. При $q < 3$ результаты, полученные из точного уравнения (5.2), представлены на рис. 8. Приближенное уравнение (5.4) дает близкие результаты. На плоскости параметров (φ_0, q) представлена область абсолютного притяжения G_a, в которой сходимость (3.8) имеет место независимо от начальной фазы β, область относительного притяжения G_p, в которой сходимость реализуется лишь при части значений β, и область G_0, в которой сходимость не имеет места. Область G_a лежит в части плоскости $\varphi_0 < \pi/2$, а область G_p — при $\varphi_0 < 2.48$.

При $q > 1.5$ границы области G_p сближаются, и с уменьшением φ_0 величины q^- и q^+ растут. В таблице 1 приведены эти величины при $q > 3$, полученные как из точного уравнения (5.2), так и из приближенного урав-

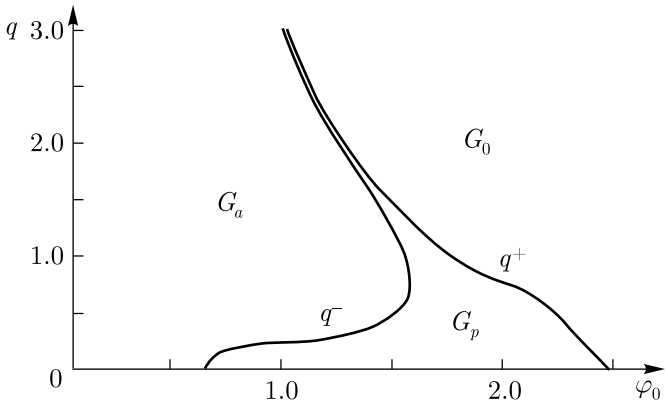

Рис. 8. Области притяжения на плоскости (φ_0, q)

нения (5.4) (в скобках). Большие значения q^- и q^+ при малых углах φ_0 связаны с тем, что в силу (2.4) перегрузка $\kappa = a\omega^2/\mathrm{g}$ мала.

Таблица 1. **Точные и приближенные координаты верхнего конца стержня**

φ_0	q^-	q^+	q_*^+
0.1	303.142 (303.119)	303.665 (303.172)	300.015
0.2	75.335 (75.332)	75.610 (75.533)	75.150
0.3	33.512 (33.508)	33.614 (33.589)	33.484
0.4	18.896 (19.032)	18.897 (18.955)	18.901
0.5	12.142 (12.142)	12.243 (12.182)	12.151
0.6	8.474 (8.475	8.517 (8.508)	8.585
0.7	6.264 (6.264)	6.297 (6.296)	6.274
0.8	4.830 (4.831)	4.849 (4.846)	4.840
0.9	3.849 (3.849)	3.870 (3.862)	3.857
1.0	3.146 (3.146)	3.162 (3.161)	3.154

Из результатов таблицы 1 следует, что в силу узости соответствующей части области G_p ею можно пренебречь. Таблица 1 позволяет оценить погрешность приближенного уравнения (5.4). Кроме того, здесь приведены значения границы $q_*^+ = 1/(2(1 - \sin\varphi_0/\varphi_0))$, полученные выше. Заметное различие величин q_*^+ и q^+ связано с тем, что последние были получены при наличии сопротивления $n = 0.1$.

II. ОБОБЩЕННЫЙ МАЯТНИК КАПИЦЫ. ГИБКИЙ СТЕРЖЕНЬ

Вторая часть главы посвящена обобщению задачи Капицы, когда стержень считаем упругим деформируемым телом — балкой Бернулли — Эйлера[12,13]. Так же, как и в предыдущих параграфах, остановимся на исследовании устойчивости и областей притяжения вертикального положения равновесия гибкого стержня с нижней точкой опоры, находящегося под действием собственного веса и вибраций. При этом верхний конец стержня считаем свободным, а на нижнем конце гибкого стержня возможны две постановки задачи: жесткая заделка и шарнирная опора. Еще из трудов Л. Эйлера известен подход, позволяющий теоретически проверить очевидный факт, что достаточно длинный стержень неустойчив, даже если он жестко закреплен снизу. Ниже показано, что при наличии вертикальных гармонических вибраций основания неустойчивое положение может стать устойчивым. В линейном приближении задача сводится к поперечным колебаниям стержня под действием периодического осевого сжатия. Задачи этого класса были предметом исследований авторов статьи[14,15], посвященных задаче Лаврентьева — Ишлинского о динамическом сжатии стержня[16]. В них существенное влияние на движение оказывали параметрические резонансы[17], возникающие при определенных соотношениях между частотами продольных и поперечных колебаний. Задачи решаются в двух вариантах — без учета и с учетом распространения продольных волн в стержне.

§ 6. Интегрирование уравнений движения гибкого растяжимого маятника под действием вибраций основания

Будем рассматривать поведение гибкого перевернутого маятника в случае гармонической вертикальной вибрации опоры по закону

$$z_0(t) = a\sin(\omega t + \beta).$$

Малые поперечные колебания продольно сжатого гибкого стержня длиной L относительно вертикального положения в системе координат, связанной с опорой, описываются уравнением

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\,. \tag{6.1}$$

[12] *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 876 с.

[13] *Илюхин А. А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наукова Думка, 1979. 216 с.

[14] *Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Параметрические резонансы в задаче о продольном ударе по тонкому стержню // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2016. № 1. С. 77–94.

[15] *Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Тонкий стержень при продольном динамическом сжатии // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 19–34.

[16] *Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Доклады АН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 776–782.

[17] *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.

Здесь $w(x,t)$ — прогиб, $D = EI$ — жесткость на изгиб, ρ — плотность материала, S — площадь поперечного сечения, $P = P(x,t)$ — осевая сила в стержне. Верхний конец стержня $x = L$ свободен ($w_{xx} = w_{xxx} = 0$), а нижний конец зажат ($w = w_x = 0$), см. рис. 1,*г*.

Осевая сила P состоит из двух слагаемых, первое из которых $P_w(x) = P_0(L-x)/L$ связано с весом стержня $P_0 = \rho g S L$, а второе обусловлено вибрациями опоры и для случая несжимаемого стержня имеет вид $P_v(x,t) = -\rho a \omega^2 S(L-x)\sin(\omega t + \beta)$. Для растяжимого стержня осевая сила $P_v(x,t)$ зависит от распространения продольных волн по стержню[18].

Найдем выражение для продольной силы P в сжимаемом стержне из уравнения продольных колебаний в подвижной системе координат для подстановки в уравнение (6.1):

$$\rho S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathrm{g} - a\omega^2 \sin(\omega t + \beta)\right) = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = 0, \quad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=L} = 0. \tag{6.2}$$

Здесь $u(x,t)$ — продольное перемещение. Искомая сила связана с продольной деформацией стержня соотношением $P(x,t) = -ES\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Перейдем к безразмерным переменным по координате и по времени $\hat{x} = x/L$, $\hat{t} = \omega t$ и представим решение краевой задачи (6.2) в виде

$$u(\hat{x},\hat{t}) = \frac{P_0 L}{ES}\left(\frac{\hat{x}^2}{2} - \hat{x}\right) + U(\hat{x})\sin(\hat{t} + \beta).$$

Для функции $U(\hat{x})$ получаем краевую задачу

$$\frac{d^2U}{d\hat{x}^2} + \nu^2(U + a) = 0, \quad U(0) = 0, \quad \left.\frac{dU}{d\hat{x}}\right|_{\hat{x}=1} = 0, \qquad \nu^2 = \frac{\omega^2 L^2}{c^2},$$

где $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в материале стержня. Находим решение $U(\hat{x})$ этой краевой задачи

$$U(\hat{x}) = -a(1 - \cos\nu\hat{x} - \sin\nu\hat{x}\,\mathrm{tg}\,\nu)$$

и осевую силу

$$P(\hat{x},\hat{t}) = -\frac{ES}{L}\frac{\partial u}{\partial \hat{x}} = P_0(1-\hat{x}) - \frac{ES}{L}\nu a(\cos\nu\hat{x}\,\mathrm{tg}\,\nu - \sin\nu\hat{x})\sin(\hat{t} + \beta).$$

[18] *Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Устойчивость гибкого вертикального стержня на вибрирующем основании // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 477–488.

Подставляя силу $P(\hat{x},\hat{t})$ в уравнение поперечных колебаний (6.1), переписанное в безразмерном виде, и опуская значок $\hat{}$, получаем

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P_* \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1 - x + \frac{\mathrm{g}_a}{\nu}(\cos\nu x \tan\nu - \sin\nu x)\sin(t+\beta)\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \\ + P_* \mathrm{g}_L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (6.3)$$

где

$$P_* = \frac{P_0 L^2}{D}\,, \qquad \mathrm{g}_a = a\omega^2/\mathrm{g}, \qquad \mathrm{g}_L = L\omega^2/\mathrm{g}.$$

Уравнение (6.3) может быть записано в общем виде, пригодном как для растяжимого, так и для нерастяжимого стержня

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P_* \frac{\partial}{\partial x}\left((1 - x - \mathrm{g}_a p_v(x)\sin(t+\beta))\frac{\partial w}{\partial x}\right) + P_* \mathrm{g}_L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\,, \qquad (6.4)$$

причем составляющая силы p_v принимает вид

$p_v(x) = (\cos\nu x \operatorname{tg}\nu - \sin\nu x)/\nu$ — для растяжимого стержня,

$p_v(x) = 1 - x$ — для нерастяжимого стержня,

последнее выражение следует из предыдущего при $\nu \to 0$.

Решение (6.4) ищется в виде ряда

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \Psi_k(x) w_k(t)\,, \qquad (6.5)$$

где $\Psi_k(x)$ — собственные функции краевой задачи

$$\frac{d^4\Psi}{dx^4} + \lambda \frac{d}{dx}\left((1-x)\frac{d\Psi}{dx}\right) = 0\,, \quad \Psi(0) = \Psi_x(0) = \Psi_{xx}(1) = \Psi_{xxx}(1) = 0\,. \qquad (6.6)$$

Эта задача относится к задачам бифуркации статического равновесия стержня под действием силы тяжести со свободным верхним концом и зажатым нижним концом. Задача (6.6) интегрируется в функциях Эри, при этом могут быть получены первые собственные значения $\lambda_1 = 7.8373$, $\lambda_2 = 55.98$, $\lambda_3 = 148.5$, $\lambda_4 = 285.4$. При $P_* > \lambda_1$ кроме вертикальной формы равновесия стержня появляется изогнутая форма равновесия, а вертикальная форма равновесия становится неустойчивой — стержень изгибается под действием силы тяжести.

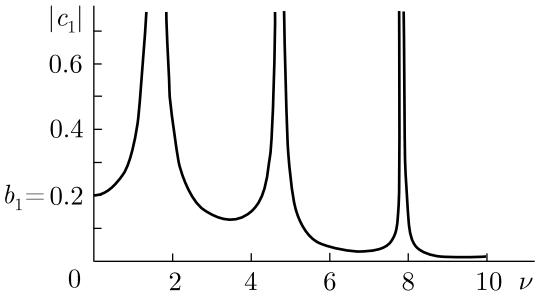

Рис. 9. Зависимость коэффициента $|c_1(\nu)|$ от ν

Используя соотношения ортогональности $\int_0^1 (1-x)\Psi_k'\Psi_n'\,dx = 0$ для функций $\Psi_k(x)$, получаем систему для неизвестных функций $w_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^N a_{nk}\frac{d^2 w_k}{dt^2} + \varepsilon\left(\frac{b_n}{\mathrm{g}_a}\left(\frac{p_n}{P_*} - 1\right) + c_n \sin(t+\beta)\right) w_n = 0\,, \quad n = 1, ..., N,$$
$$\varepsilon = \frac{a}{L} \ll 1\,, \tag{6.7}$$

где $a_{kn} = \int_0^1 \Psi_k \Psi_n dx$, $b_n = \int_0^1 (1-x)(\Psi_n')^2 dx$, $c_n = \int_0^1 p_v(x)(\Psi_n')^2 dx$, причем для нерастяжимого стержня $c_n = b_n$.

Первые коэффициенты равны $a_{11} = 0.128$, $b_1 = 0.202$. Для растяжимого стержня зависимость величины $|c_1(\nu)|$ от ν показана на рис. 9. При $\nu = \pi/2 + n\pi$, $n = 0.1, ...$, имеем $c_1(\nu) \to \infty$, что соответствует резонансам продольной вибрации стержня.

§ 7. Условия устойчивости верхнего вертикального положения гибкого маятника

Введенный малый параметр ε позволяет использовать двухмасштабные разложения. Полагаем $\mathrm{g}_a = \zeta/\varepsilon$ и записываем систему уравнений (6.7) в матричной форме

$$\mathbf{A}\cdot\frac{d^2\mathbf{W}}{dt^2} + \frac{\varepsilon^2}{\zeta}\mathbf{P}\cdot\mathbf{W} + \varepsilon\mathbf{C}\cdot\mathbf{W}\sin t = 0\,, \tag{7.1}$$

где $\mathbf{W} = \{w_k\}_{k=1,N}^T$ — вектор неизвестных функций, $\mathbf{A} = \{a_{kn}\}_{k,n=1,N}$ — симметричная матрица, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{C}$ — диагональные матрицы с элементами $\{b_k(\lambda_k/P_* - 1)\}_{k=1,N}$ и $\{b_k\}_{k=1,N}$ соответственно.

Аналогично подходу в части I данной главы ищем неизвестную функцию $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t, \theta, \varepsilon)$, $\theta = \varepsilon\, t$ в виде

$$W(t,\theta,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} (\mathbf{U}_m(\theta) + \mathbf{V}_m(t,\theta))\varepsilon^m, \qquad \int_0^{2\pi} \mathbf{V}_m(t,\theta))dt = 0, \quad m = 0.1, \ldots . \tag{7.2}$$

Затем из уравнения (7.1) получаем последовательно

$$\begin{gathered} \mathbf{V}_0(t,\theta) \equiv 0\,, \qquad \mathbf{V}_1(t,\theta) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_0 \sin t\,, \\ \mathbf{A} \cdot \frac{d^2\mathbf{U}_0}{d\theta^2} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_0 = 0\,, \qquad \mathbf{D} = \frac{\mathbf{P}}{\zeta} + \frac{1}{2}\,\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C}\,. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Из (7.3) следует, что верхнее вертикальное положение гибкого стержня устойчиво, если матрица $\mathbf{D}$ положительно определенная, это позволяет найти критическое значение ζ_* параметра нагрузки $\zeta = a^2\omega^2/(Lg)$.

Для одномодового приближения ($N = 1$)

$$\zeta_* = \frac{2a_{11}b_1}{c_1^2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{P_*}\right) = \frac{0.0517}{c_1^2}\left(1 - \frac{7.84}{P_*}\right), \tag{7.4}$$

и для нерастяжимого стержня

$$\zeta_* = \frac{2a_{11}}{b_1}\left(1 - \frac{\lambda_1}{P_*}\right) = 1.27\left(1 - \frac{7.84}{P_*}\right). \tag{7.5}$$

Расчет матрицы $\mathbf{D}$ показывает, что одномодовое приближение дает приемлемую точность для критического значения ζ_*. Одномодовые ($\zeta_*^{(1)}$) и двухмодовые ($\zeta_*^{(2)}$) критические значения ζ приведены для некоторых значений P_* в таблице 2 для нерастяжимого стержня.

Таблица 2. **Зависимость приближений $\zeta_*^{(1)}$ и $\zeta_*^{(2)}$ от P_***

P_*	$\leqslant \lambda_1$	8	10	25	50	100	∞
$\zeta_*^{(1)}$	0	0.02	0.27	0.87	1.06	1.16	1.26
$\zeta_*^{(2)}$	0	0.02	0.25	0.85	1.06	1.17	1.29

Замечание 1. В случае шарнирной опоры нижнего конца ($w = w_{xx} = 0$ при $x = 0$, см. рис. 1,*в*) имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25.64$, $a_{11} = 1/3$, $b_1 = 0.5$, и формула (7.5) дает $\zeta_* = 4/3$ независимо от значения P_*, которое точно соответствует критическому значению ($q = 1$) для жесткого стержня (см. часть I данной главы). Следующие приближения в (6.5) показывают, что

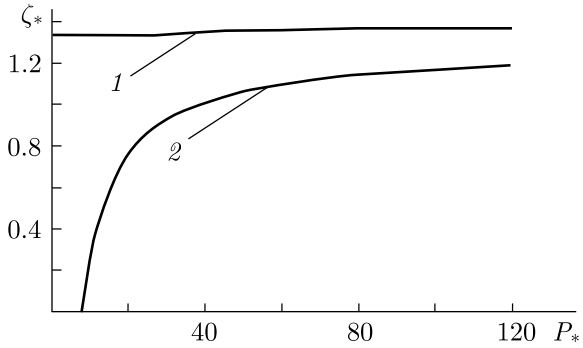

Рис. 10. Функции $\zeta_*(P_*)$ для шарнирного (*1*) и для жестко защемленного (*2*) нижнего конца стержня

значение ζ_* немного превышает $\zeta_* = 4/3$, а именно $\zeta_* = 1.37$ при $P_* = 120$. Зависимость $\zeta_*(P_*)$ для шарнирного и жестко защемленного нижнего конца стержня показана на рис. 10.

Для растяжимого стержня неравенство $|c_1(\nu)| > b_1$ выполняется на некоторых интервалах параметра ν (см. рис. 9 при $|c_1(0)| = b_1$), поэтому согласно уравнениям (7.4) и (7.5) влияние продольных волн в стержне приводит к снижению критического уровня ζ_* колебаний опоры[19].

Интересно еще рассмотреть колебания гибкого маятника Челомея[20]. Им были найдены стационарные положения и исследована устойчивость гибкого маятника Челомея при вибрации опоры, причем методы исследования были близки к подходу, принятому в данной главе[21]. Однако в отличие от уравнения (6.1) осевая сила сжатия, вызванная весом стержня, не учитывалась при описании деформации при изгибе стержня. Это различие в постановках задач не позволяет провести сравнение полученных результатов.

[19] Численный пример представлен в статье *Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Устойчивость вертикального стержня на вибрирующей опоре // Доклады Академии наук, 2018. Т. 482. № 2. С. 155–159.

[20] *Thomsen J. J., Tcherniak D. M.* Chelomei's pendulum explained // The Royal Society. 10.1098/rspa 2001.0793.

[21] *Челомей С. В.* Парадоксы в механике, называемые вибрациями // Доклады АН СССР. 1983. Т. 270. № 1.

§ 8. Формы равновесия стержня, изогнутого под действием собственного веса, в геометрически нелинейной постановке задачи

Рассмотрим вертикальный гибкий нерастяжимый стержень с зажатым нижним концом и свободным верхним концом[22]. Длинный стержень прогибается под действием веса при силе, большей первой Эйлеровой критической нагрузки $P_* > \lambda_* = 7.84$ (см. рис. 11), однако стержень снова занимает устойчивое вертикальное положение при высоком уровне вибрации опоры, а именно при $\zeta > \zeta_*$ (см. формулу (7.4)). Найдем область притяжения вертикального положения равновесия.

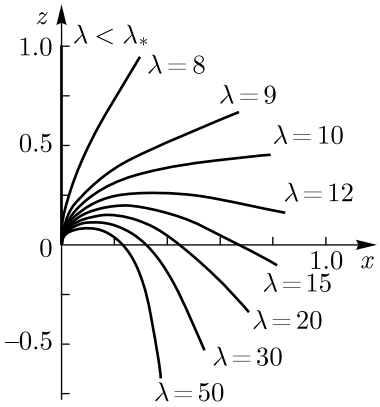

Рис. 11. Равновесные формы изогнутого стержня

При вертикальных колебаниях опоры движение растяжимого стержня в случае учета действия веса описывается уравнениями равновесия[23]

$$
\begin{gathered}
D\frac{\partial\varphi}{\partial s} = M(s,t) = \int_s^L (F_x(s_1)(z(s_1)-z(s)) - F_z(s_1)(x(s_1)-x(s)))ds_1\,,\\
E\,e(s,t) = \sin\varphi(s)\int_s^L F_x(s_1)ds_1 + \cos\varphi(s)\int_s^L F_z(s_1)ds_1\,,
\end{gathered}
\tag{8.1}
$$

где

$$
\begin{gathered}
x(s) = \int_0^s \sin\varphi(1+e)\,ds, \quad z(s) = \int_0^s \cos\varphi(1+e)\,ds\,,\\
F_x = -S\rho\ddot{x}, \quad F_z = -S\rho(\mathrm{g} + a\omega^2\sin(\omega t+\beta) + \ddot{z})\,.
\end{gathered}
\tag{8.2}
$$

[22] *Кулижников Д. Б., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Области притяжения в обобщенной задаче Капицы // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Том 6(64), Вып. 3, 2019. С. 482–492.

[23] *Светлицкий В. А.* Механика абсолютно гибких стержней. М.: Изд. МАИ, 2001.

Здесь s $(0 \leqslant s \leqslant L)$ — длина дуги оси стержня, $\varphi(s,t)$ — угол между касательной к оси стержня и вертикалью, $e(s,t)$ — продольная деформация оси стержня. Для нерастяжимого стержня $e = 0$.

Для формулировки краевой задачи в статическом случае (при $a = 0$) для нерастяжимого стержня можно упростить уравнение (8.1):

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + P_*(1-s)\sin\varphi = 0\,, \quad \varphi(0) = 0\,,\ \varphi'(1) = 0\,, \tag{8.3}$$

где s отнесено к L. Формы изогнутого стержня, изображенные на рис. 11, получены из уравнения (8.3).

Для приближенного анализа области притяжения в окрестности вертикального положения стержня используем одномодовые приближения для неизвестных функций $\varphi(s,t)$ и $e(s,t)$:

$$\begin{aligned} &\varphi(s,t) = \Phi(s)u(t)\,, \quad \Phi(s) = s - 0.200383s^2 - 0.81018s^3 + 0.457827s^4\,, \\ &e(s,t) = e(s)v(t)\,, \quad e(s) = 1 - s\,, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1\,. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Функция $e(s) = 1 - s$ дает первую собственную частоту 1.58 продольной вибрации вместо точного значения $\pi/2 = 1.57$. Функция $\Phi(s)$ близка к первой собственной функции $\Phi_1(x)$ задачи (6.6).

В таблице 3 показаны точные координаты x^e, z^e конца стержня $s = 1$, полученные из (8.3). Они сравниваются с приближенными значениями x^a, z^a, вычисленными с помощью формул (8.4) и показанными на рис. 11. Здесь u_* соответствует состоянию равновесия стержня без вибрации при заданном P_*. В дальнейшем будем использовать формулы (8.4) для приближенных вычислений при $|u| \leqslant 6$.

Таблица 3. **Точные и приближенные координаты верхнего конца стержня**

P_*	u_*	x^e	x^a	z^e	z^a
8	0.942	0.298	0.293	0.946	0.947
9	2.432	0.674	0.672	0.667	0.668
10	3.206	0.793	0.788	0.456	0.457
11	3.760	0.838	0.829	0.292	0.292
12	4.195	0.850	0.836	0.162	0.181
13	4.555	0.845	0.825	0.057	0.054
14	4.863	0.831	0.804	−0.030	−0.034
15	5.133	0.812	0.777	−0.102	−0.108

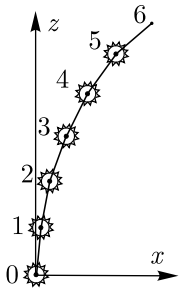

Рис. 12. Дискретная модель гибкого стержня

Замечание 2. Другая возможность решения задачи, которая здесь может быть использована, состоит в замене гибкого стержня системой N жестких стержней, соединенных шарнирами с угловыми пружинами (рис. 12).

Для задачи Капицы случай $N = 1$ рассматривался в § 5 данной главы.

§ 9. Применение уравнений Лагранжа второго рода

Формулы (8.4) предполагают, что стержень должен быть сведен к системе с двумя степенями свободы, это наталкивает на мысль воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода. Введем обозначения:

$$\begin{gathered}\{s, x, z, a\} = L\{\hat{s}, \hat{x}, \hat{z}, \varepsilon\}\,, \quad \omega t = \hat{t}\,,\\ P_* = \frac{PL^2}{D}\,, \quad \mathrm{g}_L = \frac{L\omega^2}{\mathrm{g}}\,, \quad \hat{T} = \frac{T}{PL}\,, \quad \hat{\Pi} = \frac{\Pi}{PL}\,,\end{gathered} \tag{9.1}$$

а затем опустим знак $\hat{}$. Здесь T и Π — кинетическая и потенциальная энергии:

$$\begin{gathered}T = \frac{\mathrm{g}_L}{2}\int_0^1 \left(\dot{x}^2 + (\dot{z} + \varepsilon\cos(t+\beta))^2\right) ds\,, \quad (\,)' = \frac{d(\,)}{du}\,,\\ \Pi = \int_0^1 \left(\frac{(\varphi')^2}{2P_*} ds + z + \frac{c^2e^2}{2gL}\right) ds\,,\end{gathered} \tag{9.2}$$

где $x(s,t)$ и $z(s,t)$ задаются формулами (8.2).

Сначала с помощью формул (8.2) и (8.4) записываем выражения

$$x(s,t) = X(u,s) + vX_1(u,s)\,, \quad z(s,t) = Z(u,s) + vZ_1(u,s)\,. \tag{9.3}$$

Здесь

$$X = \sum_{k=0}^{K} \frac{(-1)^k u^{2k+1} I_{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad X_1 = \sum_{k=0}^{K} \frac{(-1)^k u^{2k+1} J_{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

$$Z = \textstyle\sum_{k=0}^{K} \dfrac{(-1)^k u^{2k} I_{2k}}{(2k)!}\,, \quad Z_1 = \sum_{k=0}^{K} \dfrac{(-1)^k u^{2k} J_{2k}}{(2k)!}\,,$$

$$I_n(s) = \textstyle\int_0^s \Phi^n(\sigma)d\sigma\,, \quad J_n(s) = \int_0^s \Phi^n(\sigma)e(\sigma)d\sigma$$

и

$$\dot{x}(s,t) = (X'(u,s) + vX_1'(u,s))\dot{u} + X_1(u,s)\dot{v}\,,$$
$$\dot{z}(s,t) = (Z'(u,s) + vZ_1'(u,s))\dot{u} + Z_1(u,s)\dot{v}\,.$$

Тогда кинетическую и потенциальную энергии можно записать в виде

$$T = \mathrm{g}_L \left[\left(\frac{F_{00}}{2} + F_{01}v + \frac{F_{02}v^2}{2} \right) \dot{u}^2 + (F_{10} + F_{11}v)\dot{u}\dot{v} + \frac{F_{20}\dot{v}^2}{2} + \varepsilon G \cos(t+\beta) \right],$$
$$G = (G_{00} + G_{01}v)\dot{u} + G_{10}\dot{v}\,,$$
$$\Pi = \frac{c_0 u^2}{2P_*} + \int_0^1 (Z + vZ_1)ds + \frac{c^2 v^2}{2gL} \int_0^1 e^2 ds\,, \quad c_0 = \int_0^1 (\Phi')^2 ds = 0.3184\,, \tag{9.4}$$

где

$$F_{00} = \int_0^1 (X'^2 + Z'^2)ds\,, \quad F_{01} = \int_0^1 (X'X_1' + Z'Z_1')ds\,,$$
$$F_{10} = \int_0^1 (X'X_1 + Z'Z_1)ds\,, \quad F_{11} = \int_0^1 (X_1'X_1 + Z_1'Z_1)ds\,,$$
$$F_{02} = \textstyle\int_0^1 (X_1'^2 + Z_1'^2)ds\,, \quad F_{20} = \int_0^1 (X_1^2 + Z_1^2)ds\,,$$
$$G_{00} = \int_0^1 Z'ds\,, \quad G_{01} = \int_0^1 Z_1'ds\,, \quad G_{10} = \int_0^1 Z_1 ds\,.$$

Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0\,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0\,, \qquad \mathcal{L} = T - \Pi\,. \tag{9.5}$$

Будем искать решения уравнений (9.5) с использованием двухмасштабных разложений и сохраним только следующие первые приближения:

$$\begin{aligned} &u(t) = U(\theta) + \varepsilon u_1(\theta,t) + \varepsilon^2 u_2(\theta,t)\,, \quad v(t) = v_0(\theta) + \varepsilon v_1(\theta,t)\,, \\ &\langle u_1 \rangle = \langle u_2 \rangle = \langle v_1 \rangle = 0\,, \end{aligned} \tag{9.6}$$

где $\theta = \varepsilon t$ — медленное время. Тогда производные по времени вычисляются по формулам

$$\dot{u} = \varepsilon \dot{u}_1 + \varepsilon U_{,\theta} + \varepsilon^2 \dot{u}_2 + O(\varepsilon^3)\,, \qquad \ddot{u} = \varepsilon \ddot{u}_1 + \varepsilon^2 U_{,\theta\theta} + \varepsilon^2 \ddot{u}_2 + 2\varepsilon^2 \dot{u}_{1,\theta} + O(\varepsilon^3)\,,$$

где записи θ, $\theta\theta$ в нижнем индексе после запятой означают, соответственно, первую и вторую производную функции по θ.

В первом и втором уравнениях системы (9.5) пренебрегаем слагаемыми с величинами меньше ε^2 и ε соответственно. Тогда получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{g}_L[\,F_{00}\ddot{u} + 2F_{01}(\dot{u}\dot{v} + \ddot{u}v) + F'_{00}\dot{u}^2/2 + F_{10}\ddot{v} - F'_{20}\dot{v}^2/2 - G_{00}\varepsilon\sin(t+\beta)\,] + \\ &\qquad + \frac{c_0 u}{P_*} + G_{00} = 0\,, \\ &\mathrm{g}_L[F_{10}\ddot{u} + F_{20}\ddot{v} - G_{10}\varepsilon\sin(t+\beta)] + G_{10}(u) + \frac{c^2 v}{3gL} = 0\,. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Здесь все функции F_{ij}, G_{ij} зависят от u.

Теперь находим $v_0 = -3gL/c^2 G_{10}(U_0)$ и составляем $u_1 = \hat{u}_1(\theta)\sin(t+\beta)$, $v_1 = \hat{v}_1(\theta)\sin(t+\beta)$. Тогда члены порядка ε в уравнении (9.7) дают уравнения для функций $\hat{u}_1(\theta)$, $\hat{v}_1(\theta)$:

$$\begin{aligned} &F_{00}(U)\hat{u}_1 + F_{10}(U)\hat{v}_1 + G_{00}(U) = 0\,, \\ &\nu^2\left(F_{10}(U)\hat{u}_1 + F_{20}(U)\hat{v}_1 + G_{10}(U)\right) - \hat{v}_1/3 = 0\,, \quad \nu = \frac{L\omega}{c}\,. \end{aligned} \tag{9.8}$$

В дальнейшем знак $\hat{}$ опускаем.

После усреднения по времени членов порядка ε^2 в первом уравнении системы (9.7) получаем уравнение для функции $U(\theta)$:

$$\begin{aligned} &\zeta\left(F_{00}U_{,\theta\theta} + 1/2F'_{00}\left(U_{,\theta}^2 - 1/2u_1^2\right) - 1/2F'_{10}u_1 v_1 - \right. \\ &\qquad \left. - 1/4F'_{20}v_1^2 - 1/2G'_{00}u_1\right) + \frac{c_0 U}{P_*} + G_{00} = 0\,, \quad \text{где } \zeta = \varepsilon^2 \mathrm{g}_L. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Здесь все функции F_{ij} и G_{00} зависят от U.

Уравнение (9.9) является основным уравнением для последующего анализа области притяжения. Перепишем его в виде

$$\begin{aligned} &F_{00}U_{,\theta\theta} + 1/2F'_{00}U_{,\theta}^2 + nU_{,\theta} + F(U) = 0\,, \\ &F(U) = -1/4F'_{00}u_1^2 - 1/2F'_{10}u_1 v_1 - 1/4F'_{20}v_1^2 - 1/2G'_{00}u_1 + \zeta^{-1}\left(\frac{c_0 U}{P_*} + G_{00}\right), \end{aligned} \tag{9.10}$$

где введено сопротивление $nU_{,\theta}$.

§ 10. Области притяжения для нерастяжимого стержня

Для нерастяжимого стержня полагаем $\nu = 0$, $v_1 = 0$, $u_1 = -G_{00}/F_{00}$, тогда формула (9.10) запишется следующим образом:

$$F(U) = -1/4\, F'_{00} u_1^2 - 1/2\, G'_{00} u_1 + \zeta^{-1} \left(\frac{c_0 U}{P_*} + G_{00} \right) \tag{10.1}$$

при

$$F_{00}(u) = 0.02565 - 0.000221 u^2 + 0.00000117 u^4\,,$$
$$G_{00}(u) = -0.0406 u + 0.00093 u^3 - 0.00000736 u^5\,.$$

Функция $F(U)$ является нечетной. Условие $F'(0) > 0$ дает границу устойчивости вертикального положения маятника при вибрации опоры $\zeta_* = 1.26(1 - 7.84/P_*)$, что очень близко к результату (7.5).

В соответствии с выражениями (3.3) начальные условия для уравнения (9.10) имеют вид

$$U = u_0\,, \quad \frac{dU}{d\theta} = -u_1(u_0)\cos\beta \quad \text{при} \quad \theta = 0\,, \tag{10.2}$$

где β — начальная фаза возбуждения вибрации.

На рис. 13 в плоскости $\{u_0, \zeta\}$ показаны области притяжения для нерастяжимого стержня при различных значениях параметра P_*. Берется коэффициент сопротивления $n = 0.1$. Для $P_* \leqslant 12$ границы $\zeta_*(u_0)$ приблизительно постоянны и не зависят от β. В результате абсолютная (G_a) и частичная (G_p) области притяжения совпадают. Для этих значений P_* точки равновесия u_* (см. таблицу 3), отмеченные жирными точками на рис. 13, лежат в пределах областей притяжения. Случай $P_* = 13$ является переходным. Для $P_* \geqslant 14$ точки u_* лежат за пределами областей притяжения, а области G_a и G_p отличаются друг от друга. Границы g^- областей $(G_a : \ \zeta \geqslant \zeta_*(u_0))$ изображены непрерывными линиями, а границы g^+ областей G_p обозначены штриховыми линиями.

Для $P_* \geqslant 14$ области притяжения лежат на уровне $u_0 < 6$, поэтому одномодовое приближение (8.4) приемлемо для их приближенного построения.

Для $P_* \leqslant 13$ стержень занимает криволинейное положение равновесия $u = u_*$ (см. рис. 11 при $\lambda = P_*$). Для колебаний с $\zeta > \zeta_*$ стержень принимает вертикальное положение. Для $P_* \geqslant 14$ начальное условие $u_0 = u_*$ при вибрации стержня переходит в другое (невертикальное) положение $U(\theta) \to u_\infty$ при $\theta \to \infty$ с $F(u_\infty) = 0$. Устойчивое вертикальное положение может быть достигнуто, если исходное положение стержня u_0 находилось в пределах области притяжения (см. пример ниже).

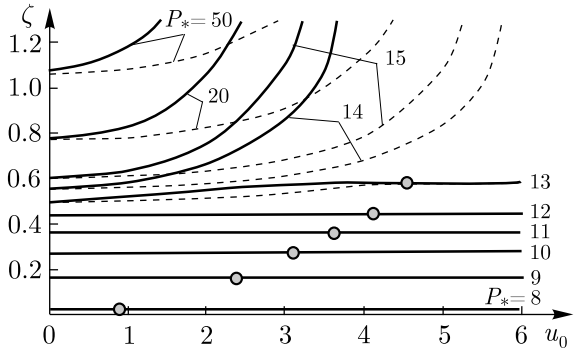

Рис. 13. Области притяжения для нерастяжимого стержня

Рассмотрим, например, случай $P_* = 15$, $\zeta = 0.7$. Тогда имеем $u_* = 5.133$, $u_\infty = 3.157$, $u^- = 1.654$, $u^+ = 3.301$, где точки u^- и u^+ лежат на границах g^- и g^+ соответственно. При $\theta \to \infty$ действительны следующие предельные соотношения:

$$\beta = 0: \qquad U(\theta) \to 0 \ \text{ при } \ u_0 < u^-, \qquad U(\theta) \to u_\infty \ \text{ при } \ u_0 > u^-,$$

$$\beta = \pi: \qquad U(\theta) \to 0 \ \text{ при } \ u_0 < u^+, \qquad U(\theta) \to u_\infty \ \text{ при } \ u_0 > u^+.$$

§ 11. Влияние продольных волн на устойчивость вертикального положения и на области притяжения растяжимого стержня

Исследуем уравнение (9.10), в котором функции $u_1(U)$ и $v_1(U)$ удовлетворяют линейной системе (9.8).

Из уравнения (9.10) получаем условие устойчивости вертикального положения $F'(0) > 0$, или

$$F'(0) = -(1/2)F'_{10}u'_1v_1 - (1/4)F''_{20}v_1^2 - (1/2)G'_{00}u'_1 + \zeta^{-1}\left(\frac{c_0}{P_*} + G'_{00}\right) > 0, \tag{11.1}$$

где все функции должны быть рассчитаны при $U = 0$,

$$\begin{gathered} v_1(0) = \frac{(5/2)\nu^2}{(5/2)-\nu^2}, \qquad u'_1(0) = -\frac{F'_{10}(0)v_1(0)+G'_{00}(0)}{F_{00}(0)}, \\ \nu^2 = f\,\zeta, \quad f = \frac{Lg}{c^2\varepsilon^2} = \frac{L^3\mathrm{g}}{c^2a^2}, \\ F_{00}(0) = 0.02565, \quad F'_{10}(0) = -0.005847, \\ F''_{20}(0) = -0.00408, \quad G'_{00}(0) = -0.04062. \end{gathered} \tag{11.2}$$

Одномодовое приближение (8.4) $e(s,t) = (1-s)v(t)$ недостаточно для полного анализа растяжимого стержня, поскольку не учитываются более высокие продольные резонансы (см. рис. 9). Рассматриваем только случаи при $\nu \leqslant \pi$. Для фиксированных значений параметра f неравенства

$$\zeta \leqslant \frac{\pi^2}{f}, \qquad \text{или} \qquad \omega \leqslant \frac{\pi c}{L}, \tag{11.3}$$

должны быть выполнены.

Рис. 14 отображает область вертикальной устойчивости (область S между линиями b_0 и b_1) при вибрации опоры для двух значений параметра P_*: $P_* = 9$ и $P_* = 20$. Значение $f = 0$ соответствует нерастяжимому стержню. Нижняя граница уменьшается с ростом f. Линии c_1 и c_2 соответствуют первому продольному резонансу $\nu = \pi/2$ и кривой $\nu = \pi$ соответственно. Зона неустойчивости (U_1) находится выше линии c_1. Что же касается области выше c_2, то результаты выполненного анализа оказываются недостаточно надежными, поскольку для увеличения точности решения необходимо учитывать влияние второго резонанса (см. рис. 9).

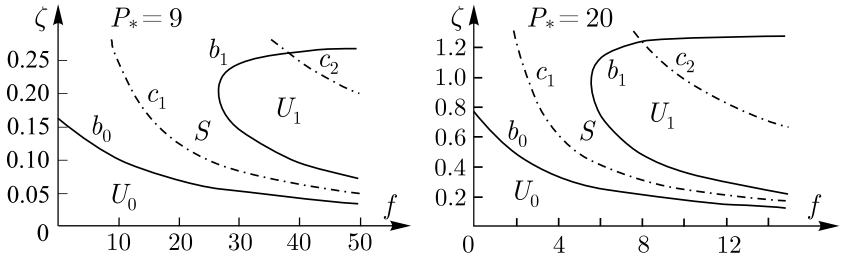

Рис. 14. Области устойчивости вертикального положения

Для построения области притяжения вертикального положения стержня численно решаем усредненное уравнение (9.10), в котором функции $u_1(U)$ и $v_1(U)$ находятся из уравнения (9.8) при начальных условиях $U(0) = u_0$, $U_{,\theta}(0) = -u_1(u_0)\cos\beta$. Для трех значений параметра P_* результаты показаны на рис. 15. Результаты для растяжимого стержня в основном повторяют результаты для нерастяжимого стержня (см. рис. 13), однако появляется дополнительный параметр f, описывающий растяжение. Во всех изученных случаях границы g^- и g^+ уменьшаются с ростом f. Для малых значений P_* (см. случай $P_* = 9$ на рис. 15) в исследуемом интервале $0 \leqslant u_0 \leqslant 5$ границы g^- и g^+ совпадают и не зависят от u_0. В промежуточном случае $P_* = 13$ влияние начальной фазы β существенно и $\mathrm{g}^- \leqslant \mathrm{g}^+$.

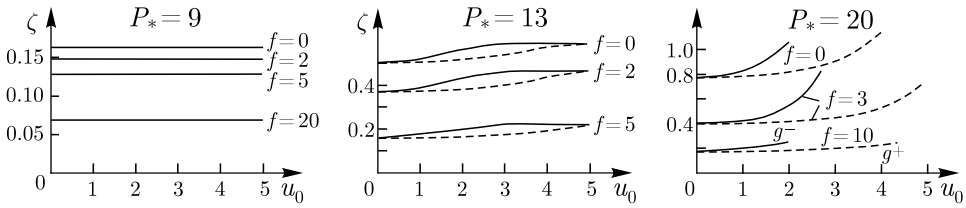

Рис. 15. Области притяжения для растяжимого стержня

В случае $P_* = 20$ области притяжения занимают площади ме́ньшие, чем при $u_0 \leqslant 5$, потому что уравнение (9.10) имеет особую точку при резонансе (при $\zeta = 2.5/f$). В результате могут возникнуть три различных вида поведения решения уравнения (9.10) в зависимости от параметров $(P_*, f, \zeta, u_0, \beta)$:

(i) $U(\theta) \to 0$ при $\theta \to \infty$, тогда точка лежит в области притяжения;

(ii) $U(\theta) \to u_* \neq 0$ при $\theta \to \infty$ с $F(u_*) = 0$, $F'(u_*) > 0$, затем точка переходит в состояние равновесия $u = u_*$;

(iii) $U(\theta) \to \infty$ при $\theta \to \theta_* < \infty$, затем точка приближается к особой точке уравнения (9.10).

§ 12. Обсуждение результатов и выводы

Обсуждение результатов. В главе найдены условия устойчивости и построены области притяжения вертикального положения маятника Капицы при различных постановках задачи. Выбор метода решения зависит от исследуемой модели маятника. Точные численные решения сравниваются с приближенными решениями, проводится анализ границ их применимости.

Используется двухмасштабное асимптотическое разложение и показывается, что усредненное движение маятника зависит от медленного времени. Особенностью задачи является то, что усредненное движение маятника чувствительно к начальному (положительному или отрицательному в начальный момент времени) импульсу, который зависит от начальной фазы возбуждения. В результате область притяжения состоит из двух частей: в так называемой абсолютной области G_a маятник приходит в вертикальное положение при любой начальной фазе, тогда как в так называемой частичной области G_p он приходит в вертикальное положение только для части начальных фаз. Усредненная система уравнений И. И. Блехмана (см. ссылки в § 1), полученная в результате введения вибрационной силы, правильно определяет условия устойчивости, однако она не позволяет построить

область притяжения, поскольку не учитывает начальный импульс, генерируемый начальной фазой возмущения.

Движение маятника Капицы при случайной стационарной вибрации опоры в основном аналогично полигармоническим колебаниям со следующими отличиями. Полученные области притяжения не являются определенными, их можно описать только с некоторой вероятностью. При этом построены три вида областей притяжения:

(i) теоретические области притяжения. Исследование основано исключительно на свойствах спектральной плотности возбуждения;

(ii) области притяжения, полученные путем аппроксимации случайного процесса суммой периодических слагаемых со случайными амплитудами и фазами. В пределе (ii) стремится к (i) в среднеквадратичном смысле с неограниченным увеличением числа слагаемых. При конечном (хотя и большом) числе слагаемых результаты заметно различаются, что также упоминается в настоящей главе;

(iii) области притяжения, полученные путем вероятностной оценки численного решения задачи со случайным процессом в качестве возбуждения. Исследование основано на численном моделировании случайных величин и последующем численном решении уравнения (4.1). Исследовано поведение решения с течением времени. При решении численное моделирование повторяется много раз, и результаты обрабатываются методами математической статистики для построения границы области притяжения.

Движение гибкого стержня с зажатым нижним концом и свободным верхним концом при гармонической вертикальной вибрации опоры описывается системой нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Точное решение построить не удается. Предложена приближенная модель с двумя степенями свободы, которая приемлема, если отклонение стержня от вертикального положения невелико, а частота возбуждения меньше второй собственной частоты продольных колебаний стержня. Используются также двухмасштабные разложения для этой приближенной модели.

Для нерастяжимого стержня безразмерные уравнения содержат универсальный параметр P_*, который зависит от веса, длины и жесткости на изгиб стержня. Для $P_* < 7.84$ вертикальное положение стержня устойчиво (без вибрации опоры), поэтому случаи $P_* > 7.84$ представляют особый интерес. Для растяжимого стержня оказывается важным дополнительный волновой параметр f, поскольку он описывает влияние продольной вибрации стержня.

Для нерастяжимого стержня найдены условия $P_* \leqslant 13$, при которых стержень с некоторым начальным статическим криволинейным равновес-

ным состоянием (см. рис. 11) достигает вертикального положения при вибрации опоры высокой интенсивности ζ. В этих случаях положение статического равновесия находится в пределах области притяжения. При $P_* \geqslant 14$ равновесие находится за пределами области притяжения, и стержень с теми же начальными условиями при наличии вибрации приходит к другому, не вертикальному положению равновесия. Для получения вертикального предельного положения необходимо сдвинуть начальное положение стержня в область притяжения ближе к вертикали (см. рис. 13).

Исследовано влияние продольной вибрации растяжимого стержня на его устойчивость. Область устойчивого вертикального положения имеет верхнюю границу, которая лежит выше первого резонанса продольных колебаний стержня (см. рис. 14). Что касается нерастяжимого стержня, то нижние границы g^- и g^+ областей притяжения при $P_* \leqslant 13$ в исследуемом интервале $0 \leqslant u_0 \leqslant 5$ слабо зависят от u_0 и существенно зависят от волнового параметра f (см. рис. 15). Как для нерастяжимых (рис. 13), так и для растяжимых (рис. 15) стержней при малом весовом параметре $P_* \leqslant 12$ области притяжения занимают весь изученный интервал начального положения $u_0 \leqslant 6$, в то время как для $P_* \geqslant 14$ правые границы областей притяжения в плоскости (u_0, ζ) перемещаются влево, приближаясь к вертикальному положению. Уровень ζ колебаний опоры, приводящих стержень в вертикальное положение, для растяжимого стержня ниже, чем для нерастяжимого маятника.

Чтобы продемонстрировать, насколько широкими могут быть области притяжения, сошлемся на эксперимент, описанный в монографии И. И. Блехмана «Вибрационная механика и вибрационная реология» (см. § 1), дающий наглядное подтверждение теоретического анализа, проведенного в настоящей главе. В эксперименте, проведенном В. Б. Васильковым, мягкая веревка длиной около 10 см и диаметром 1 см зажимается на нижнем конце, в то время как верхний конец свободен. Веревка имеет такую низкую жесткость на изгиб, что верхний конец лежит на опоре. При интенсивной вертикальной вибрации опоры в некоторой полосе частот канат занимает устойчивое положение вверх независимо от начальной формы. Представленное здесь теоретическое исследование объясняет существование устойчивого вертикального положения, однако оно не способно описать движение каната из исходного состояния в устойчивое вертикальное положение, поскольку наш анализ ограничен случаем небольших отклонений ($u \leqslant 6$) веревки от вертикали.

Выводы. Последовательно рассмотрены области притяжения верхнего вертикального положения маятника, которое, как известно, неустойчи-

во без вибрации опоры. Получены области притяжения для верхнего положения маятника в случае гармонической и случайной вибраций опоры. Построены области притяжения для вертикального гибкого нерастяжимого и растяжимого стержня со свободным верхним концом. Аналитические решения строятся для классической задачи Капицы, в то время как для гибкого стержня приходится ограничиваться приближенным решением систем с одной или двумя степенями свободы. Используется метод двухмасштабных разложений. Во всех случаях область притяжения состоит из двух частей: абсолютной и частичной. В первой из них притяжение происходит для всех начальных фаз возмущения, а во второй — только для некоторых начальных фаз.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПОЛЯХОВ Николай Николаевич (1906–1987), доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РСФСР. После окончания Московского государственного университета в 1929 г. работал в Центральном аэродинамическом институте им. Н. Е. Жуковского (ЦАГИ) под руководством академика С. А. Чаплыгина, по заданию которого совместно с В. П. Ветчинкиным разработал математическую теорию винта (см. монографию «Теория и расчет воздушного гребного винта»; эта книга не потеряла актуальности до настоящего времени). В 1933 г. переехал в Ленинград и стал преподавать на кафедре гидроаэродинамики Ленинградского политехнического института. В 1953–1977 гг. заведовал кафедрой теоретической и прикладной механики, а в 1977–1987 гг. — кафедрой гидромеханики математико-механического факультета Ленинградского (Санкт-Петербургского) университета. Во все это время руководил отделением «Механика» факультета. Был награжден рядом орденов и медалей Советского Союза, в том числе двумя орденами Ленина. Николай Николаевич являлся инициатором написания учебника для университетов «Теоретическая механика» (1985), отмеченного Первой премией Ленинградского университета. Учебник выдержал два переиздания (2000, 2012).

ТОВСТИК Петр Евгеньевич (1935–2020), доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ. В 1958 г. с отличием окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ) и был оставлен в аспирантуре. После защиты в 1963 г. кандидатской диссертации работал в лаборатории вибраций НИИ математики и механики ЛГУ. Защитив в 1968 г. докторскую диссертацию, стал доцентом, а затем профессором кафедры теоретической и прикладной механики. С 1977 до 2020 г. заведовал этой кафедрой. Петр Евгеньевич являлся кавалером ордена Почета, лауреатом Государственной премии РФ, лауреатом премии имени М. А. Лаврентьева РАН, двух первых университетских премий за научные труды. Ему были присвоены звания «Почетный работник высшего профессионального образования» и «Почетный профессор СПбГУ».

ЗЕГЖДА Сергей Андреевич (1935–2015), доктор физико-математических наук, профессор. Окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета в 1958 г. и аспирантуру при кафедре теоретической и прикладной механики. С 1958 г. по 2015 г. работал на этой кафедре. В 1987 г. стал лауреатом Первой премии Ленинградского университета и в 2011 г. был удостоен премии Санкт-Петербургского университета «За научные труды». Имел почетное звание «Заслуженный работник высшей школы РФ».

ЮШКОВ Михаил Петрович, доктор физико-математических наук, профессор. Окончил с отличием математико-механический факультет Ленинградского государственного университета в 1957 г. и аспирантуру при кафедре теоретической и прикладной механики. С 1960 г. по настоящее время работает на этой кафедре. В 1987 г. стал лауреатом Первой премии Ленинградского университета и в 2011 г. был удостоен премии Санкт-Петербургского университета «За научные труды». Награжден несколькими медалями, в том числе медалью «За оборону Ленинграда», и Почетной грамотой Президента РФ. Имеет звание «Почетный профессор СПбГУ».

МОРОЗОВ Никита Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, заведующий кафедрой теории упругости и отделением «Механика» математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), имеет звание «Почетный профессор СПбГУ». Заместитель председателя Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике. Председатель Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела. Лауреат Государственной премии РФ, премии имени М. А. Лаврентьева РАН, двух премий Ленинградского — Санкт-Петербургского университета. Награжден медалью Блеза Паскаля Европейской академии наук и рядом орденов и медалей СССР и РФ, в том числе орденом «За заслуги перед Отечеством» IV степени и медалью «За оборону Ленинграда». Удостоен благодарности Президента РФ.

БЕЛЯЕВ Александр Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, иностранный член Австрийской академии наук, почетный доктор университета им. Иоганна Кеплера. Окончил с отличием кафедру механики и процессов управления физико-механического факультета Ленинградского политехнического института в 1975 г. Заведующий лабораторией мехатроники Института проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН) и

директор Высшей школы механики и процессов управления Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (СПбПУ). Член президиума Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, IUTAM и EUROMECH. Лауреат премии М. А. Лаврентьева РАН и премии П. Л. Чебышёва правительства Санкт-Петербурга.

СОЛТАХАНОВ Шервани Хусаинович, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Академии наук Чеченской Республики. Окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета в 1982 г., а также аспирантуру и докторантуру при кафедре теоретической и прикладной механики того же факультета. Работает в Чеченском государственном университете и в Грозненском государственном нефтяном техническом университете им. М. Д. Миллионщикова. Заведует отделом физико-математических и химических наук Академии наук Чеченской Республики и является главным научным сотрудником лаборатории прикладной математики и механики Комплексного научно-исследовательского института имени Х. И. Ибрагимова РАН. В 2011 г. был удостоен премии Санкт-Петербургского университета «За научные труды». Имеет почетное звание «Заслуженный деятель науки Чеченской Республики».

БЫКОВ Владимир Григорьевич, кандидат физико-математических наук, доцент. Окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ) в 1977 г. и заочную аспирантуру при кафедре теоретической и прикладной механики в 1986 г. С 1977 по 1991 г. работал в лаборатории вибраций НИИ математики и механики ЛГУ, а с 1991 г. — на кафедре теоретической и прикладной механики. С 2016 г. работает консультантом проректора по научной работе СПбГУ. Имеет звание «Почетный работник высшего профессионального образования».

НАУМОВА Наталья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ). В 1998 г. с отличием окончила СПбГУ по специальности «Прикладная математика, механика». С 1999 г. и по настоящее время работает в СПбГУ. Автор более 60 научных статей и 4 учебно-методических пособий для студентов. Читает курсы лекций и проводит практические занятия по следующим дисциплинам: «Теоретическая механика», «Экстремальные задачи в механике», «Компьютерное моделирование и пакеты прикладных программ», «Метод конечных элементов».

ТОВСТИК Татьяна Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент. В 1960 г. окончила математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ). С 1960 г. работала научным сотрудником в НИИ математики и механики ЛГУ, затем перешла на кафедру статистического моделирования математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, где работает по настоящее время.

КОВАЧЕВ Александр Светославович, кандидат физико-математических наук. Окончил магистратуру математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета в 2012 г. и аспирантуру при кафедре теоретической и прикладной механики в 2015 г. С 2016 по 2021 г. работал на кафедре теоретической и прикладной механики.

ТОВСТИК Татьяна Петровна, кандидат физико-математических наук. С отличием окончила математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ) по специальности «Механика». В 1991 г. окончила аспирантуру ЛГУ по специальности «Теория упругости». В 1992–2001 гг. работала ассистентом кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского политехнического университета (СПбГПУ). С 2001 г. работает научным сотрудником лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург (ИПМаш РАН).

ДОДОНОВ Виктор Владимирович окончил с отличием в 2021 г. магистратуру математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета и поступил в аспирантуру при кафедре теоретической и прикладной механики того же факультета, одновременно был зачислен ассистентом этой кафедры.

ПЕТРОВА Виктория Игоревна окончила в 2021 г. магистратуру математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета и поступила в аспирантуру при кафедре теоретической и прикладной механики того же факультета.

Научное издание

ПОЛЯХОВ Николай Николаевич,
ТОВСТИК Петр Евгеньевич,
ЗЕГЖДА Сергей Андреевич,
ЮШКОВ Михаил Петрович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том II

Учебник

Редактор *Т. В. Семенова*
Корректор *Н. Е. Абарникова*
Компьютерная верстка *А. М. Вейшторт*
Обложка *Е. Р. Куныгина*

Подписано в печать 15.12.2021. Формат $70 \times 100^1/_{16}$. Усл. печ. л. 44,52.
Тираж 1000 экз. Print-on-Demand. Заказ № .

Издательство Санкт-Петербургского университета.
199004, Санкт-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11.
Тел./факс +7(812) 328-44-22
publishing@spbu.ru

publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5.

Книги Издательства СПбГУ можно приобрести
по издательским ценам в Доме университетской книги СПбГУ
Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5
Тел. (812) 329-24-71
Часы работы: 10.00–20.00 пн. — сб.,
а также на сайте publishing.spbu.ru