САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Н. Н. Поляхов
С. А. Зегжда
М. П. Юшков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНИК

1 ОБЩИЕ ВОПРОСЫ теоретической механики

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда,
М. П. Юшков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том I
Общие вопросы теоретической механики

Учебник

Под редакцией проф. *П. Е. Товстика*

4-е издание,
переработанное и расширенное

ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 531
ББК 22.21
П347

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *В. В. Александров* (Моск. гос. ун-т); член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. *А. М. Кривцов* (С.-Петерб. гос. политехн. ун-т)

Авторы: Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков, П. Е. Товстик, Ш. Х. Солтаханов, С. Б. Филиппов, В. И. Петрова

Рекомендовано к публикации
УМК по УГСН 01.00.00 математика и механика
Санкт-Петербургского государственного университета

Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.

П347 Теоретическая и прикладная механика. В 2 т. Том I: Общие вопросы теоретической механики: учебник / Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков, П. Е. Товстик, Ш. Х. Солтаханов, С. Б. Филиппов, В. И. Петрова; под ред. П. Е. Товстика. 4-е изд., перераб. и расшир. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2022. — 560 с.
ISBN 978-5-288-06213-1 (общий)
ISBN 978-5-288-06214-8 (1-й том)

В основу двухтомного учебника «Теоретическая и прикладная механика» были положены лекции, продолжительное время читавшиеся авторами на математико-механическом факультете, а также специальные курсы, разработанные сотрудниками кафедры, отражающие новые научные результаты. Первый том содержит основной расширенный курс теоретической механики. В разделе «Кинематика» подробно рассмотрены элементы теории криволинейных координат, которые активно используются в разделе «Динамика», в частности, в теории несвободного движения и вариационных принципах в механике. Для описания движения системы точек применяется понятие изображающей точки Герца, а понятие касательного пространства применяется для исследования движения произвольной механической системы. В заключительных главах теория Гамильтона — Якоби применяется для интегрирования уравнений движения, представлены элементы специальной теории относительности.

Учебник предназначен для студентов университетов, обучающихся по специальностям «математика» и «механика». Он может быть интересен и для аспирантов и специалистов по аналитической механике.

УДК 531
ББК 22.21

ISBN 978-5-288-06213-1 (общий)
ISBN 978-5-288-06214-8 (1-й том)

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ. ДИНАМИКА

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

I. Несвободное движение системы материальных точек

II. Несвободное движение механических систем общего вида

ПРЕДИСЛОВИЕ

Написание учебника «Теоретическая механика» для студентов классических университетов, четвертое, уже двухтомное издание которого предлагается читателю, было инициировано известным ученым-механиком заслуженным деятелем науки РСФСР, доктором технических наук, профессором Николаем Николаевичем Пóляховым (1906–1987).

После окончания Московского университета в 1929 г. Н. Н. Пóляхов работал в Центральном аэродинамическом институте им. Н. Е. Жуковского (ЦАГИ) под руководством С. А. Чаплыгина, по заданию которого он совместно с В. П. Ветчинкиным разработал математическую теорию винта, в 1940 г. опубликованную ими в монографии «Теория и расчет воздушного гребного винта». Книга эта не потеряла актуальности до настоящего времени.

В 1933 г. Н. Н. Поляхов переехал в Ленинград и стал преподавать на кафедре гидроаэродинамики Ленинградского политехнического института. В 1953 г. по предложению академика В. И. Смирнова Николай Николаевич стал заведовать кафедрой аналитической механики (позже теоретической и прикладной механики) математико-механического факультета Ленинградского университета. В связи с этим ему пришлось читать новый для него весьма обширный курс «Теоретическая механика». В течение длительного времени он создавал и непрерывно совершенствовал свой курс этой дисциплины, не только улучшая методически, но и постоянно наполняя его новыми научными результатами, что естественно для фундаментальных университетских курсов. Здесь специально хочется выделить циклы работ Николая Николаевича по уравнениям неголономной механики и вариационным принципам механики. В частности, в них он впервые ввел в научный оборот обобщенный оператор Гамильтона (его справедливо можно было бы назвать оператором Поляхова), который позволяет описать геометрически реакцию идеальных неголономных связей.

В 1975 г. (то есть через 22 года после начала работы над курсом!) Н. Н. Поляхов пригласил своих учеников С. А. Зегжду и М. П. Юшкова, читавших общие курсы того же названия на других отделениях факультета, написать вместе с ним университетский учебник по теоретической механике. После десяти лет работы этот учебник был выпущен в свет Из-

дательством Ленинградского университета и в 1987 г. был удостоен Первой премии Университета. В дальнейшем учебник выдержал второе и третье издания (2000, 2012 гг.).

После кончины Николая Николаевича С. А. Зегжда и М. П. Юшков со своими учениками продолжали работу в области аналитической механики. Эти результаты были отражены в трех монографиях (в соавторстве с Ш. Х. Солтахановым), причем книга «Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления» была переведена на китайский язык, а монография «Неголономная механика. Теория и приложения» была опубликована издательством *Springer* на английском языке. Этот цикл работ по неголономной механике в 2011 г. получил премию Санкт-Петербургского университета «За научные труды».

Следуя примеру Николая Николаевича, С. А. Зегжда и М. П. Юшков приступили к написанию более полного по содержанию учебника, отражающего новые научные результаты, опубликованные в упомянутых выше монографиях. Очень важно, что к работе над новой редакцией учебника были привлечены и другие сотрудники кафедры, написавшие главы, отражающие их научные интересы и созданные ими специальные курсы. Эти главы составили второй том учебника, в то время как первый том содержит основной расширенный курс теоретической механики для студентов математико-механических факультетов университетов. В связи с этим авторами решено было дать учебнику новое название — «Теоретическая и прикладная механика», которое совпадает с названием их кафедры.

Хочется подчеркнуть особую роль в работе над книгой П. Е. Товстика, возглавившего кафедру в 1977 г. после перехода Николая Николаевича на заведование кафедрой гидромеханики. Петр Евгеньевич не только ответственный редактор трех изданий учебника, но и автор большого количества глав.

Нет сомнения, что учебник Н. Н. Пóляхова, П. Е. Товстика, С. А. Зегжды, М. П. Юшкова и соавторов «Теоретическая и прикладная механика» будет не только необходим студентам и аспирантам классических университетов, но и полезен специалистам в области теоретической, аналитической и прикладной механики.

Заведующий отделением механики
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета
академик РАН *Н. Ф. Морозов*

Санкт-Петербург, 4 сентября 2019 г.

ВВЕДЕНИЕ

Данный двухтомный курс теоретической механики[1] является четвертым значительно переработанным и расширенным изданием книги «Теоретическая механика», выпущенной впервые издательством Ленинградского университета в 1985 г. В основу этого курса были положены лекции, длительное время читавшиеся авторами на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. Учебник предназначен для классических университетов, чем и объясняется широкий круг рассматриваемых в нем вопросов. Измененное название книги соответствует названию кафедры, на которой работают авторы, и по их мнению оно больше соответствует излагаемому содержанию.

Материал учебника разбит на три раздела. Первый раздел посвящен кинематике, второй — общим вопросам теоретической механики. Эти два раздела составляют содержание первого тома. Во второй том включен третий раздел курса, отражающий некоторые специальные вопросы теоретической механики, имеющие прикладное значение.

Первый раздел «КИНЕМАТИКА» состоит из трех глав. **В главе I «Кинематика точки»** большое внимание уделяется ко- и контравариантным составляющим векторов скоростей и ускорений, что в дальнейшем оказывается необходимым при изучении ряда вопросов динамики.

Последовательное применение криволинейных координат делает методически единым подход к курсу. Однако авторы стремились к простоте изложения и вводили соответствующий математический аппарат лишь по мере необходимости.

В главе II «Кинематика твердого тела» при выводе выражения для вектора мгновенной угловой скорости используется правило диффе-

[1] В учебнике *Болотин С. В., Карапетян А. В., Кугушев Е. И., Трещев Д. В.* Теоретическая механика. М.: Издательский центр «Академия», 2010 г. на с. 3 справедливо отмечено, что «Термин “теоретическая механика” является стандартным, но чрезвычайно неудачным. Он создает впечатление, что остальная механика — “практическая”, тогда как на самом деле другими ее разделами являются механика сплошной среды, статистическая, квантовая и релятивистская. Несколько лучше отражает суть дела термин “классическая механика”, но и он не вполне удовлетворителен, так как его противоположностью, как правило, считается “квантовая механика”».

ренцирования сложной функции для случая нескольких переменных. При изучении проекций угловой скорости на неподвижные оси координат показывается, что они являются квазискоростями, так как их нельзя рассматривать как производные от некоторых новых координат, определяющих ориентацию твердого тела в пространстве. Вводится понятие тензора поворота.

В главе III «Сложное движение» первоначально излагается сложное движение точки, а затем — теория сложения движений твердого тела.

Второй раздел «ДИНАМИКА. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ» содержит девять глав. В **главе IV «Динамика точки»** рассматриваются общие теоремы, подробно изучаются колебание точки, относительное движение и движение точки в центральном силовом поле. Уравнения Лагранжа второго рода выводятся на основе результатов, полученных при изучении кинематики точки в криволинейных координатах. Эти уравнения, а также полученные в этой же главе канонические уравнения в дальнейшем естественным образом обобщаются на случай механических систем общего вида.

Глава V «Динамика системы» знакомит с понятием изображающей точки по Герцу и уравнениями ее движения как в декартовых, так и в криволинейных координатах в форме уравнений Лагранжа второго рода. Введение изображающей точки делает методически единым построение динамики точки и системы точек.

Глава VI «Движение при наличии связей» является в книге центральной и содержит ряд новых результатов. Несвободное движение материальной точки и точки, изображающей движение системы точек, рассматривается в ней на основе понятия идеальных связей, то есть связей, имеющих минимальную по величине реакцию. Для одной материальной точки, находящейся на поверхности, минимальной по величине является реакция, направленная по нормали к данной поверхности. В общем же случае идеальность связей означает, что обобщенные реакции, соответствующие свободным координатам, равны нулю. Показывается, что уравнения Лагранжа второго рода и формулы для обобщенных реакций представляют собой результат линейного преобразования уравнений Лагранжа первого рода.

Таким образом, теория несвободного движения построена без привлечения принципа Даламбера — Лагранжа, который подробно излагается в главе IX, посвященной вариационным принципам механики.

Несвободное движение при наличии как линейных, так и нелинейных неголономных связей исследуется путем введения преобразования в пространстве скоростей и последующего применения той же логической схемы, которая была использована в случае голономных систем.

Уравнения Аппеля получены скалярным умножением основного векторного уравнения Ньютона на координатные векторы, выраженные через производные от вектора ускорения. При этом как следствие установлено, что уравнения движения являются необходимым условием минимальности принуждения по Гауссу.

При переходе от движения механических систем, состоящих из конечного числа точек, к механическим системам общего вида уравнения Лагранжа второго рода записываются в виде одного векторного равенства в касательном пространстве. Это равенство имеет форму второго закона Ньютона и позволяет исследовать несвободное движение механических систем общего вида при наличии как голономных, так и неголономных связей теми же методами, что и несвободное движение одной точки в произвольных криволинейных координатах.

Используемый общий подход к несвободному движению дает возможность рассматривать уравнения связей как уравнения некоторой программы движения, а реакции связей — как управляющие силы.

В предпоследнем параграфе этой главы показывается, что основные виды уравнений движения неголономных систем (уравнения Чаплыгина, Воронца — Гамеля, Гамеля — Новосёлова, Пуанкаре — Четаева, Удвадиа — Калабы) могут быть получены из уравнений Маджи, которые справедливы для неголономных связей любого вида, в том числе и нелинейных.

В последнем параграфе рассматривается управление движением с помощью связей, зависящих от параметров.

Глава VI содержит решение ряда задач, которые иллюстрируют удобство использования уравнений Лагранжа второго рода для голономных систем и уравнений Маджи — для неголономных.

В главе VII уравнения малых колебаний получены сначала путем линеаризации контравариантной формы уравнений движения в криволинейных координатах, что методически связывает эту главу с предыдущими. После изучения малых колебаний при отсутствии сил сопротивления вводятся главные (нормальные) координаты системы. Излагаются малые колебания при наличии сил сопротивления и гироскопических сил и вынужденные колебания механических систем. Обсуждаются минимально-максимальные свойства собственных частот.

В главе VIII «Динамика твердого тела» используются различные подходы к изучению свойств тензора инерции, позволяющие более

подробно раскрыть его физическое содержание. При кратком изложении уравнения статики выводятся на основе анализа уравнений динамики, более подробно этот раздел теоретической механики рассматривается в главе X. Исследование вращения твердого тела вокруг неподвижной оси и около неподвижной точки ведется классическими методами. В конце главы приводится новая специальная форма уравнений движения твердого тела, которая оказывается удобной при изучении динамики системы твердых тел. Эти дифференциальные уравнения используются во втором томе в главе, посвященной динамике нагруженной платформы Стюарта.

В **главе IX** дифференциальные **вариационные принципы** Даламбера — Лагранжа, Суслова — Журдена и Гаусса получаются из соответствующих скалярных уравнений движения, записанных для касательного пространства. Обсуждаются связи типа Четаева и связь обобщенного принципа Даламбера — Лагранжа с принципом Суслова — Журдена. Из полученных дифференциальных вариационных принципов выводятся основные формы уравнений движения несвободных механических систем. Дифференциальные вариационные принципы традиционно применяются при выводе уравнений движения неголономных систем. Этот подход иллюстрируется на примере исследования движения регулятора Новосёлова.

Интегральные вариационные принципы Гамильтона — Остроградского и Лагранжа, отражающие экстремальные свойства кривых, по которым происходит движение под действием сил, имеющих потенциал, выводятся из принципа переменного действия Гамильтона. Показано, что из этого же принципа вытекает и уравнение Гамильтона — Якоби.

При сравнении дифференциальных и интегральных принципов подчеркивается, что в них по существу вводятся различные определения вариации.

Краткое изложение **статики** твердого тела и системы твердых тел содержится в **главе X**. Приводятся два определения эквивалентности систем сил и доказывается их равносильность. Приведены примеры составления уравнений равновесия механических систем различными методами. Кратко излагаются основы аналитической статики. Рассмотрены задачи об определении положения центров масс твердых тел, о равновесии фермы и гибкой нерастяжимой нити. Описаны свойства сил трения, приведено решение задачи Эйлера о равновесии нити, намотанной на цилиндр.

В главе XI при исследовании общих вопросов **теории интегрирования уравнений механики** используется тесная связь свойств функции действия по Гамильтону с принципом переменного действия. При установлении оптико-механической аналогии принцип Мопертюи — Лагранжа, характеризующий движение точки, и принцип Ферма, описывающий рас-

пространение света, записываются в безразмерных переменных. Оптико-механическую аналогию удается связать с уравнением Шредингера, для которого в случае гармонического осциллятора собственными функциями являются полиномы Эрмита.

В главе XII излагаются **элементы специальной теории относительности**. В кинематических соотношениях рассматривается четырехмерная квадратичная форма Пуанкаре и обсуждается сложное движение точки. При выводе уравнений динамики используется обобщенный закон Ньютона, доказывается теорема об изменении кинетической энергии, приводятся уравнения Лагранжа второго рода.

Третий раздел курса «ДИНАМИКА. НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ», посвященный специальным аспектам теоретической механики, имеющим практическое значение, выделен во второй том. Здесь излагаются главы, описывающие вопросы устойчивости движения, нелинейных колебаний, динамики и статики платформы Стюарта, движения механических систем при действии случайных сил, элементов теории управления, связи неголономной механики с теорией управления, колебаний и балансировки роторных систем, физической теории удара, статики и динамики тонкого стержня, динамики полета и т. п. Материал этих глав отражает основное содержание ряда специальных курсов, читаемых на кафедре теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского университета.

При изложении материала в каждой главе ведется своя двойная нумерация формул, при этом первая цифра указывает номер параграфа. Для рисунков и примеров используется самостоятельная нумерация в каждой главе. В учебнике приводятся решения большого количества примеров[2], при выборе преимущество отдавалось задачам, требующим аналитического исследования.

Параллельно с подготовкой текста учебника на русском языке осуществлялся перевод его на английский язык. Для первого тома материал первого раздела «Кинематика» перевела О. С. Букашкина, перевод второго раздела «Динамика. Общие вопросы теоретической механики. Основы аналитической механики» осуществили Г. А. Синильщикова (главы IV, V,

[2]Условия многих примеров заимствованы из широко известного задачника И. В. Мещерского, выдержавшего большое количество переизданий (см., например, *Мещерский И. В.* Сборник задач по теоретической механике (36-издание). М.: Наука, 1986. 447 с. или *Мещерский И. В.* Задачи по теоретической механике (49-е издание). СПб.: Изд-во «Лань», 2008. 448 с.).

VII, VIII, XI) и А. Р. Алимов (главы VI, IX, X, XII). Часть английского текста взята из статей и монографий авторов, изданных на английском языке. Общее редактирование перевода осуществили А. Р. Алимов, Е. Л. Белькинд и Г. А. Синильщикова. Саму идею перевода учебника на английский язык предложил еще в 1987 г. профессор Дж. Папаставридис (США).

Считаем своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность нашим коллегам О. С. Букашкиной, Л. А. Венатовской, Д. Н. Иванову, Г. А. Кутеевой, Н. В. Наумовой, В. И. Сергеевой, Г. А. Синильщиковой, А. Л. Смирнову, Ф. Ф. Родюкову, К. К. Твереву и студентам и аспирантам нашей кафедры С. О. Бондаренко, С. Н. Бурьяну, А. П. Дериглазову, А. В. Зелинской, Д. Д. Кварацхелии, А. С. Козловой, В. Э. Кондрёнкиной, Д. Г. Корытникову, Е. А. Косякову, И. А. Кулаковскому, Д. Б. Кулижникову, А. С. Максимову, Г. А. Нестерчуку, Д. Ю. Никитину, А. А. Пашкиной, В. И. Петровой, О. И. Ритенман, Л. А. Соболеву, П. П. Степановой, К. М. Фазлыевой, Е. А. Шатрову, В. А. Шелковиной, Т. С. Шугайло за большую помощь при подготовке книги к печати. Отметим, что исключительно большую работу при окончательном редактировании двухтомного учебника и при обработке корректур оказал В. В. Додонов.

Особую благодарность приносим заведующему кафедрой теоретической и прикладной механики Петербургского университета, лауреату Государственной премии РФ, заслуженному деятелю науки РФ, доктору физ.-мат. наук, профессор у П. Е. Товстику за непрерывное внимание к созданию учебника. Его постоянные научные консультации неизменно способствовали улучшению книги, к тому же, в первом томе имеется большое количество очень важных дополнений, написанных Петром Евгеньевичем, а во втором томе он является одним из авторов. Петр Евгеньевич взял на себя труд ответственного редактора трех изданий учебника.

Авторы будут весьма признательны всем, кто пришлет свои замечания по данному учебнику.

С. А. Зегжда,

М. П. Юшков
yushkovmp@mail.ru

Раздел первый

КИНЕМАТИКА

Геометрия, как известно, рассматривает такие объекты, как точка, линия, поверхность, объем. Она изучает длину отрезка, кривизну кривой, площадь поверхности и другие элементы, связанные с измерением. Все они являются пространственными метрическими характеристиками геометрических объектов.

Свойства геометрических объектов не зависят от физических характеристик материала тех моделей, которые можно было бы построить для указанных объектов. В геометрии при построениях нигде не привлекается понятие времени и не рассматривается, например, такое понятие, как движение точки, под которым подразумевается изменение положения последней в пространстве с течением времени.

Изучением движения как такового занимается часть механики, называемая *кинематикой*. Иначе говоря, кинематика исследует пространственно-временные характеристики движения, такие, как скорость, ускорение и некоторые другие, которые более подробно будут рассмотрены далее.

Следует отметить, что размерности различных кинематических характеристик представляют собой комбинации единиц измерения пространства и времени. Так, скорость имеет размерность единицы длины, деленной на единицу времени, а ускорение — единицы длины, деленной на единицу времени в квадрате. Таким образом, размерность кинематических характеристик движения не могут иметь такие величины, как масса, или какие-нибудь другие, определяющие физические свойства вещества. Вследствие указанных особенностей кинематики точки ее иногда называют геометрией четырех измерений, в которой роль четвертого измерения играет время.

Множество точек, в котором движение каждой точки зависит от положения и движения остальных, называется *механической системой.* Если расстояния между точками системы неизменны, то такая система называется неизменяемой, или *абсолютно твердым телом.* В соответствии со сказанным кинематика подразделяется на кинематику точки и кинематику твердого тела. Если тело представляет собой непрерывно распределенное множество точек, то есть континуум, и форма его изменяется с течением времени, то ему соответствует кинематика сплошной деформируемой среды, например, кинематика жидкого тела.

Глава I
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Авторы: *Н. Н. Пóляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков*

В данной главе выведены выражения для скорости и ускорения при основных способах задания движения точки. Полученные формулы в дальнейшем могут быть обобщены на случай движения механических систем, положение которых описывается конечным числом независимых параметров. При рассмотрении криволинейных координат вводятся некоторые понятия из динамики, чтобы показать, как используемый аппарат дифференциальной геометрии может быть естественным образом получен из задач механики.

§ 1. Скорость и ускорение точки в декартовой системе координат

Положение точки относительно ортогональной декартовой системы координат $Oxyz$ задается тремя числами x, y, z, которые можно рассматривать как проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты декартовой системы координат. Заметим, что они могут быть представлены в виде

$$\mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\,, \qquad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\,, \qquad \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\,. \tag{1.2}$$

Если положение точки с течением времени изменяется, то есть ее координаты являются некоторыми функциями времени

$$x = f_1(t)\,, \qquad y = f_2(t)\,, \qquad z = f_3(t)\,, \tag{1.3}$$

то говорят, что задается *закон движения точки* в декартовых координатах.

По самой природе движения функции $f_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, должны быть однозначны, так как в заданный момент времени точка может находиться только в одном положении. Будем их считать также по крайней мере дважды дифференцируемыми. Уравнения (1.3) можно рассматривать как параметрическую форму уравнений некоторой пространственной кривой, которая называется *траекторией точки*.

Пусть за время Δt точка перешла из положения M в положение M_1 (см. рис. 1). Вектор $\Delta\mathbf{r}$, соединяющий положение M с положением M_1, будем называть *вектором перемещения*. Отношение $\mathbf{v}^* = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ называется *средней скоростью* за промежуток времени Δt. Назовем *истинной скоростью точки* в данный момент времени предел, к которому стремится отношение $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, то есть

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\,.$$

Этот предел будем называть производной от вектора $\mathbf{r}$ по аргументу t и обозначать $d\mathbf{r}/dt$ или $\dot{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}\,, \tag{1.4}$$

то есть истинная скорость точки в данный момент времени есть первая производная от радиус-вектора по времени, взятая для этого момента.

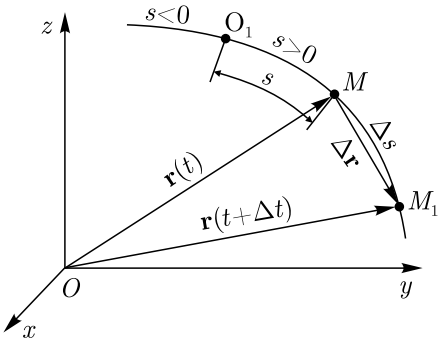

Рис. 1. Траектория точки

Радиус-вектор $\mathbf{r}$, как следует из выражения (1.1), является функцией переменных x, y, z, которые, в свою очередь, являются функциями времени t. Поэтому производная $\dot{\mathbf{r}}$ может быть вычислена по правилу

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,.$$

Отсюда и из выражений (1.2) вытекает, что

$$\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}\,. \tag{1.5}$$

Величины

$$v_x = \dot{x} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{i}\,, \qquad v_y = \dot{y} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{j}\,, \qquad v_z = \dot{z} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$$

являются проекциями вектора $\mathbf{v}$ соответственно на оси $x,\ y,\ z$. Они могут быть вычислены также по формулам

$$v_x = v\cos\alpha_x\,, \qquad v_y = v\cos\alpha_y\,, \qquad v_z = v\cos\alpha_z\,,$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,.$$

Здесь v — модуль вектора скорости, $\alpha_x,\ \alpha_y,\ \alpha_z$ — углы, образуемые этим вектором с положительными направлениями соответственно осей $x,\ y,\ z$.

Ускорением точки в данный момент времени назовем вектор $\mathbf{w}$, равный производной от вектора скорости $\mathbf{v}$ по времени. В соответствии с выражениями (1.4) и (1.5) имеем

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k}\,. \tag{1.6}$$

Отсюда следует, что модуль w вектора ускорения и углы $\beta_x,\ \beta_y,\ \beta_z$, образуемые этим вектором с положительными направлениями осей координат, вычисляются по формулам

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\,,$$
$$\cos\beta_x = \frac{\ddot{x}}{w}\,, \qquad \cos\beta_y = \frac{\ddot{y}}{w}\,, \qquad \cos\beta_z = \frac{\ddot{z}}{w}\,.$$

Пример 1. Закон движения точки задан в виде

$$x = a\cos\omega t\,, \qquad y = b\sin\omega t\,, \qquad z = 0\,,$$

где $a,\ b,\ \omega$ — постоянные величины. Найти траекторию, скорость и ускорение точки.

Для определения траектории исключаем время. Имеем

$$x/a = \cos\omega t\,, \qquad y/b = \sin\omega t\,,$$

откуда $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ (эллипс).

Для нахождения скорости и ускорения вычисляем производные:

$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t\,, \qquad \dot{y} = b\omega\cos\omega t\,,$$
$$\ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x\,, \qquad \ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y\,.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\,y^2 + \frac{b^2}{a^2}\,x^2}\,,$$
$$\mathbf{w} = -\omega^2\mathbf{r}\,, \qquad w = \omega^2 r\,, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Отметим, что при $a = b = R$ точка движется по окружности со скоростью $v = \omega R$ и ускорением $w = \omega^2 R$. Вектор скорости направлен по касательной к окружности, а вектор ускорения — к ее центру.

В дальнейшем в динамике системы будет введена изображающая точка, принадлежащая $3n$-мерному евклидову пространству (n — число точек системы). Для того чтобы в кинематике изображающей точки можно было легко воспользоваться результатами, полученными в этой главе, целесообразно для обозначения однородных по смыслу величин использовать один символ, снабжая его индексами. Учитывая это обстоятельство, положим

$$x_1 = x\,, \qquad x_2 = y\,, \qquad x_3 = z\,.$$

Основные соотношения данного параграфа при этом запишутся в виде

$$\begin{gathered}
\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{3} x_k\,\mathbf{i}_k\,, \qquad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{3} \dot{x}_k\,\mathbf{i}_k\,, \qquad \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{3} \ddot{x}_k\,\mathbf{i}_k\,, \\
r = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} x_k^2}\,, \qquad v = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} \dot{x}_k^2}\,, \qquad w = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} \ddot{x}_k^2}\,, \\
\cos\alpha_k = \frac{\dot{x}_k}{v}\,, \quad \cos\beta_k = \frac{\ddot{x}_k}{w}\,, \qquad k = 1,\,2,\,3.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Эти формулы будут соответствовать изображающей точке, если верхний предел суммирования по k считать равным $3n$.

§ 2. Разложение скорости и ускорения точки по осям натурального трехгранника Френе

Формулы предыдущего параграфа, выражающие вектор скорости и вектор ускорения точки через закон ее движения в декартовых координатах (1.3), исключительно просты. Эта простота объясняется тем, что оси декартовых координат ортогональны и постоянны по направлению. Недостатком данных простых выражений является то, что из них, в частности, непосредственно не видно того, как векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ связаны с формой кривой, по которой движется точка. Более того, они зависят и от расположения данной кривой в пространстве $Oxyz$.

Ясно, что скорость и ускорение точки определяются, во-первых, тем, как длина пройденного точкой пути зависит от времени, и, во-вторых, формой траектории, по которой происходит движение. Чтобы описать первый фактор, некоторую точку O_1 на траектории примем за начало отсчета дуговой координаты s (см. рис. 1). Необходимо также задать положительное

направление отсчета этой координаты, однозначно определяющей положение точки M на траектории. Задание траектории точки, то есть вектор-функции $\mathbf{r}(s)$, и закона движения по ней $s = f(t)$ называется *естественным (натуральным) способом задания движения.* Вектор скорости $\mathbf{v}$ при этом способе описания движения найдется по формуле

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}\, \boldsymbol{\tau}\,. \tag{2.1}$$

Вектор $\Delta \mathbf{r}/\Delta s$ в пределе при $\Delta s \to 0$ направлен по касательной к кривой в точке M в сторону возрастания дуговой координаты. Так как величины $|\Delta \mathbf{r}|$ и $|\Delta s|$ являются эквивалентными бесконечно малыми, то вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

является *единичным касательным вектором.* Отсюда

$$d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}\, ds\,,$$

и так как, с другой стороны,

$$d\mathbf{r} = dx\, \mathbf{i} + dy\, \mathbf{j} + dz\, \mathbf{k}\,,$$

то

$$ds^2 = (d\mathbf{r})^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sum_{k=1}^{3} (dx_k)^2\,. \tag{2.2}$$

Рассмотрим теперь вектор ускорения. В соответствии с определением (1.6) и формулой (2.1) имеем

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{s}\, \boldsymbol{\tau} + \dot{s}\, \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s}\, \boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2\, \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\,. \tag{2.3}$$

Вектор $\boldsymbol{\tau}$ является единичным, то есть

$$\boldsymbol{\tau}^2 = 1\,.$$

Дифференцируя это выражение по s, получаем

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{\tau}^2) = 2\, \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0\,.$$

Отсюда следует, что вектор $d\boldsymbol{\tau}/ds$ или равен нулю, или ортогонален орту $\boldsymbol{\tau}$. По определению этот вектор равен

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\boldsymbol{\tau}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\tau}}{\Delta s}\,. \tag{2.4}$$

Согласно рис. 2 при $d\mathbf{r}/ds \neq 0$ вектор $\Delta\boldsymbol{\tau}/\Delta s$ лежит в плоскости, проходящей через вектор $\boldsymbol{\tau}(s)$ и вектор $\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)$, перенесенный в точку M. Предельное положение этой плоскости при $\Delta s \to 0$ называется *соприкасающейся плоскостью*. В ней и лежит вектор $d\boldsymbol{\tau}/ds$, причем он направлен в сторону вогнутости кривой. Единичный вектор этого направления $\mathbf{n}$ называется *главной нормалью кривой в данной точке*, поэтому исследуемый вектор $d\boldsymbol{\tau}/ds$ может быть представлен в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = K\mathbf{n}\,, \tag{2.5}$$

где K — модуль вектора $d\boldsymbol{\tau}/ds$.

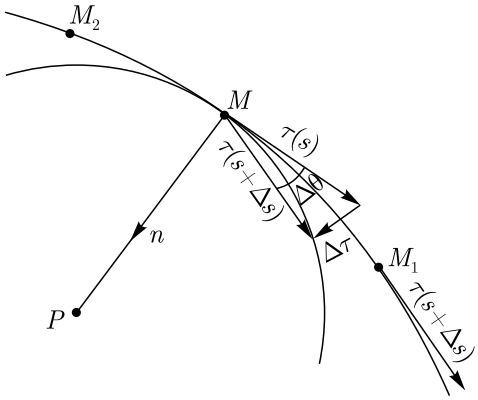

Рис. 2. Соприкасающаяся плоскость

Отметим, что вектор $\mathbf{n}$ может быть введен по формуле (2.5), если $K \neq 0$. При $K = 0$ вектор $\boldsymbol{\tau}(s)$ в окрестности рассматриваемой точки с точностью до малых второго порядка относительно Δs является постоянным. Это означает, что траектория в окрестности данной точки может быть аппроксимирована отрезком прямой.

Рассмотрим теперь более подробно случай, когда $K \neq 0$. Введем *угол смежности* $\Delta\theta$ между векторами $\boldsymbol{\tau}(s)$ и $\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)$ (рис. 2) и будем считать, что бесконечно малые величины Δs и $\Delta\theta$ имеют один знак. Введение угла $\Delta\theta$ позволяет предел (2.4) представить в виде произведения двух пределов:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta\theta}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\,. \tag{2.6}$$

Из треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)$, $\Delta\boldsymbol{\tau}$, видно, что

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}| = 2\sin\frac{|\Delta\theta|}{2}\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{|\Delta\theta|}=1\,.$$

Отсюда и из выражений (2.5) и (2.6) вытекает, что

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta\theta}=\mathbf{n}\,,\qquad \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=K\,.$$

Построим окружность, лежащую в соприкасающейся плоскости и имеющую радиус $\rho=1/K$. Ее центр поместим в точке P на луче, который задается вектором $\mathbf{n}$ (на рис. 2 расстояние $MP=\rho$). Эта окружность называется *соприкасающейся окружностью*, или *кругом кривизны*, величина K — *кривизной кривой*, а ρ — *радиусом кривизны*. Содержание этих терминов разъясняет другое геометрическое определение соприкасающейся окружности. В окрестности точки M возьмем на кривой две близкие точки M_1 и M_2 и через эти три точки проведем окружность. В пределе при $M_1\to M$ и $M_2\to M$ эта окружность и перейдет в соприкасающуюся окружность. Таким образом, при $K\neq 0$ траектория движения в окрестности рассматриваемой точки может быть аппроксимирована дугой соприкасающейся окружности.

Подставляя выражение (2.5) в формулу (2.3) и учитывая, что $K=1/\rho$, получаем

$$\mathbf{w}=\ddot{s}\,\boldsymbol{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\mathbf{n}\,. \tag{2.7}$$

В частности, если точка движется по окружности, то соприкасающаяся окружность во всех точках окружности будет совпадать с самой траекторией. Следовательно, в формуле (2.7) величина ρ будет постоянна и равна радиусу окружности.

Отметим, что для случая движения точки по окружности формулу (2.7) можно получить более простым способом. Рассматриваемое движение можно задать в виде

$$\mathbf{r}=\rho\cos\psi(t)\,\mathbf{i}+\rho\sin\psi(t)\,\mathbf{j}\,. \tag{2.8}$$

Вычисляя скорость и ускорение, получаем

$$\mathbf{v}=-\rho\dot{\psi}\sin\psi\,\mathbf{i}+\rho\dot{\psi}\cos\psi\,\mathbf{j}\,,$$
$$\mathbf{w}=-\rho\ddot{\psi}\sin\psi\,\mathbf{i}+\rho\ddot{\psi}\cos\psi\,\mathbf{j}-\rho\dot{\psi}^2\left(\cos\psi\,\mathbf{i}+\sin\psi\,\mathbf{j}\right).$$

Эти выражения запишутся соответственно в виде (2.1) и (2.7), если положить

$$s=\rho\psi\,,\quad \boldsymbol{\tau}=-\sin\psi\,\mathbf{i}+\cos\psi\,\mathbf{j}\,,\quad \mathbf{n}=-\cos\psi\,\mathbf{i}-\sin\psi\,\mathbf{j}=-\mathbf{r}/\rho\,.$$

Таким образом, формулы (2.1) и (2.7), выведенные здесь для общего случая криволинейного движения точки, можно рассматривать как естественное обобщение формул, справедливых для движения точки по окружности. Это обобщение стало возможным за счет специального выбора единичных векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$. Орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ декартовых осей координат таковы, что, в частности, $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$. Учитывая это, положим $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$. Вектор $\mathbf{b}$ называется *вектором бинормали*.

Векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ образуют *натуральную систему осей*. Как следует из сказанного выше, через векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ проходит *соприкасающаяся плоскость кривой*, через векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ проходит *нормальная плоскость*, в которой расположены все нормали к траектории, а векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{b}$ задают *спрямляющую плоскость*. Тем самым орты $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ образуют так называемый *натуральный*, или *естественный трехгранник Френе*. Введенный трехгранник называется натуральным или естественным по той причине, что векторы скорости и ускорения при разложении по ортам $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ имеют свое естественное представление. Отметим, что трехгранник Френе перемещается вместе с рассматриваемой точкой и потому иногда называется также *подвижным* (*сопровождающим*).

Из выражения (2.7) следует, что проекции вектора ускорения на оси натурального трехгранника таковы:

$$w_\tau = \ddot{s}\,, \qquad w_n = \dot{s}^2/\rho = v^2/\rho\,, \qquad w_b = 0\,. \tag{2.9}$$

Вектор $w_\tau \boldsymbol{\tau}$ называется *касательной составляющей ускорения*, а вектор $w_n \mathbf{n}$ — его *нормальной составляющей*. Проекция вектора ускорения на бинормаль равна нулю. Это означает, что вектор ускорения всегда лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории. Из приведенных рассуждений видно, что касательная составляющая вектора ускорения появляется за счет изменения величины вектора скорости, а нормальная — за счет изменения направления этого вектора.

Пример 2. Рассмотрим вопрос о том, как найти единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ и величины w_τ и w_n, если движение точки задано в декартовых координатах.

Из формул (2.1) и (1.7) следует, что

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{\dot{s}} = \pm\,\frac{1}{v}\sum_{k=1}^{3} \dot{x}_k\,\mathbf{i}_k\,, \tag{2.10}$$

причем знак плюс имеем тогда, когда в данной точке вектор скорости направлен в сторону возрастания дуговой координаты s, а минус — в противоположном

случае. Используя выражения (1.7), а также (2.7), (2.9), (2.10), получаем

$$w_\tau = \mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\tau} = \pm\frac{1}{v}\sum_{k=1}^{3}\dot{x}_k\,\ddot{x}_k\,, \qquad w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}\,, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{w} - w_\tau\boldsymbol{\tau}}{w_n}\,,$$

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{w_n}{v^2} = \frac{\sqrt{w^2 - w_\tau^2}}{v^2}\,.$$

Величины v и w и вектор $\mathbf{w}$ здесь считаются заданными в виде (1.7).

Отметим, что выписанные здесь формулы будут соответствовать движению точки в $3n$-мерном евклидовом пространстве, если считать, что в них верхний предел суммирования по k равен $3n$.

§ 3. Скорость точки в цилиндрических координатах

Выбор того или иного способа описания движения точки зависит от характера рассматриваемой задачи. Например, если необходимо исследовать движение точки по окружности, то целесообразно радиус-вектор $\mathbf{r}$ считать заданным в виде (2.8). Обобщим эту формулу, считая, что расстояние ρ до начала координат может быть переменным. Величины ρ, ψ, однозначно определяющие положение точки на плоскости, называются *полярными координатами.*

При пространственном движении точки радиус-вектор $\mathbf{r}$ будем считать заданным в виде

$$\mathbf{r} = \rho\cos\psi\,\mathbf{i} + \rho\sin\psi\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,.$$

Величины ρ, ψ, z называются *цилиндрическими координатами* (см. рис. 3). Предполагается, что они заданы как функции времени.

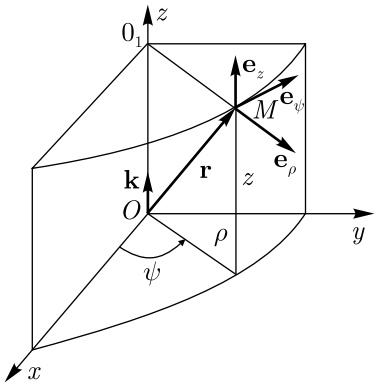

Рис. 3. Цилиндрическая система координат

Используя при вычислении вектора скорости правило дифференцирования сложной функции для случая нескольких переменных, получаем

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\,\dot{\rho} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi}\,\dot{\psi} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\,\dot{z}\,. \tag{3.1}$$

Векторы

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos\psi\,\mathbf{i} + \sin\psi\,\mathbf{j}\,,$$

$$\mathbf{e}_\psi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = -\rho\sin\psi\,\mathbf{i} + \rho\cos\psi\,\mathbf{j}\,,$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

образуют основной базис цилиндрической системы координат (см. рис. 3). Они ортогональны друг другу, причем векторы $\mathbf{e}_\rho$ и $\mathbf{e}_z$ единичны, а $|\mathbf{e}_\psi| = \rho$.

Введем ортонормированный базис

$$\mathbf{e}^0_\rho = \mathbf{e}_\rho\,, \qquad \mathbf{e}^0_\psi = \mathbf{e}_\psi/\rho\,, \qquad \mathbf{e}^0_z = \mathbf{k}\,. \tag{3.2}$$

В соответствии с выражением (3.1) разложение вектора скорости по этому базису таково:

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\dot{\psi}\,\mathbf{e}^0_\psi + \dot{z}\,\mathbf{k}\,.$$

Отсюда

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2 + \dot{z}^2\,. \tag{3.3}$$

Единичные векторы $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}^0_\psi$, $\mathbf{k}$ образуют правую тройку, поэтому, в частности,

$$\mathbf{e}^0_\psi = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_\rho\,.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = \rho\,\mathbf{e}^0_\psi = \mathbf{k} \times \rho\,\mathbf{e}_\rho\,.$$

Учитывая, что $\rho\,\mathbf{e}_\rho = \mathbf{r} - z\,\mathbf{k}$, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}\,. \tag{3.4}$$

Эта формула дает простое и полезное представление для частной производной от радиус-вектора $\mathbf{r}$ по углу ψ. Она показывает, что для того,

чтобы найти эту производную, необходимо задать единичный вектор $\mathbf{k}$. Орт $\mathbf{k}$ лежит на той оси, вокруг которой вращается радиус-вектор $\mathbf{r}$ при возрастании угла ψ. Отметим, что наблюдатель, смотрящий с конца вектора $\mathbf{k}$, видит вращение, происходящим против часовой стрелки.

Умножая выражение (3.4) на $\dot{\psi}$, получим скорость точки при фиксированных ρ, z. Представим ее в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,, \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{k}$. Координаты ρ, z будут постоянными, если величины ρ, ψ, z являются цилиндрическими координатами произвольной точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z. У различных точек будут, конечно, различные углы ψ. Однако скорость изменения угла ψ, то есть угловая скорость $\omega = \dot{\psi}$, будет у всех точек одной и той же.

Из формулы (3.5) следует, что в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси скорость произвольной точки тела, а следовательно, и все поле его скоростей определяются заданием вектора $\boldsymbol{\omega}$. Он называется *вектором угловой скорости*. Вектором $\boldsymbol{\omega}$ одновременно задается и ось вращения, и угловая скорость. Наблюдатель, смотрящий с его конца, видит вращение тела, происходящим против часовой стрелки.

Введение полярных координат, как было показано в § 2, дало возможность получить такие выражения для скорости и ускорения точки при ее движении по окружности, которые допускают обобщение на случай произвольного криволинейного движения точки. Формула (3.5) этого параграфа, относящаяся уже к кинематике твердого тела, получена также на основе структуры полярных координат. Существенно, что выражение (3.5) будет иметь эту же форму и при произвольном движении твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Наиболее просто это можно показать, используя выражение для скорости в сферических координатах.

§ 4. Скорость точки в сферических координатах

Сферическими координатами точки называются три величины r, ψ, φ, имеющие следующий геометрический смысл (рис. 4):
а) r — длина радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки M;
б) φ — угол, составляемый этим радиус-вектором с плоскостью Oxy, принимаемой за плоскость отсчета, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$;
в) ψ — угол, образуемый проекцией ρ радиус-вектора $\mathbf{r}$ на плоскость Oxy с осью x, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$.

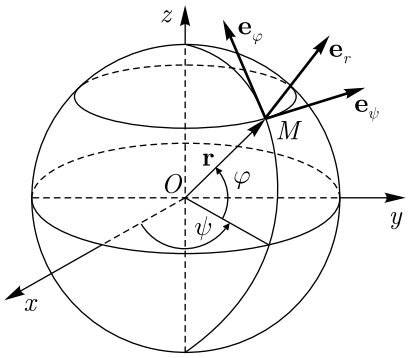

Рис. 4. Сферическая система координат

Из рис. 4 видно, что декартовы координаты точки связаны со сферическими формулами:

$$x = \rho\cos\psi = r\cos\varphi\cos\psi\,,$$
$$y = \rho\sin\psi = r\cos\varphi\sin\psi\,,$$
$$z = r\sin\varphi\,.$$

Вектор скорости $\mathbf{v}$ по аналогии с выражением (3.1) следует вычислять по формуле

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi}\,\dot\psi + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\,\dot\varphi + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\,\dot r = \dot\psi\,\mathbf{e}_\psi + \dot\varphi\mathbf{e}_\varphi + \dot r\,\mathbf{e}_r\,. \tag{4.1}$$

В соответствии с определением частной производной каждое слагаемое этой суммы представляет собой скорость движения точки M по той кривой, по которой она стала бы перемещаться, исходя из данной точки при закрепленных других координатах. Эта кривая называется *координатной линией*, соответствующей той координате, которая изменяется при движении по ней. В случае координаты ψ будем иметь окружность радиуса ρ. Скорость $\dot\psi\,\mathbf{e}_\psi$ движения по ней по величине равна $\rho\,\dot\psi$. Следовательно, вектор $\mathbf{e}_\psi$ направлен по касательной к данной окружности, а его модуль равен ρ. Аналогично показывается, что вектор $\mathbf{e}_\varphi$ направлен по касательной к окружности радиуса r, а $|\mathbf{e}_\varphi| = r$. Координатной линией, соответствующей координате r, является луч, исходящий из начала координат и проходящий через точку M. Следовательно, вектор $\mathbf{e}_r$ направлен по этому лучу, а $|\mathbf{e}_r| = 1$. Из рис. 4 видно, что векторы $\mathbf{e}_\psi$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_r$ ортогональны.

Введем ортонормированный базис

$$\mathbf{e}^0_\psi = \mathbf{e}_\psi/\rho\,, \qquad \mathbf{e}^0_\varphi = \mathbf{e}_\varphi/r\,, \qquad \mathbf{e}^0_r = \mathbf{e}_r\,, \quad \rho = r\cos\varphi\,, \tag{4.2}$$

позволяющий вектор $\mathbf{v}$ представить в виде

$$\mathbf{v} = \rho\dot{\psi}\,\mathbf{e}_{\psi}^{0} + r\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_{\varphi}^{0} + \dot{r}\,\mathbf{e}_{r}^{0}\,.$$

Отсюда

$$v^2 = r^2\cos^2\varphi\,\dot{\psi}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\,. \tag{4.3}$$

Рассмотрим твердое тело, которое имеет одну неподвижную точку, совпадающую с началом неподвижной системы координат $Oxyz$. Пусть положение произвольно выбранной точки этого тела относительно системы $Oxyz$ задается ее сферическими координатами ψ, φ, r. По предположению тело считается абсолютно твердым, поэтому координата r будет постоянной, а координаты ψ и φ при движении тела будут изменяться. Оператор (3.4) применим как к углу ψ, так и к углу φ. Угол ψ сферических координат аналогичен по своему смыслу углу ψ цилиндрических координат. Поэтому единичный вектор $\mathbf{k}$ в формуле (3.4) в сферической системе координат будет также совпадать с единичным ортом оси z. При изменении угла φ радиус-вектор $\mathbf{r}$ будет поворачиваться вокруг оси, положительное направление вращения вокруг которой задается единичным вектором $(-\mathbf{e}_{\psi}^{0})$. Следовательно,

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = -\mathbf{e}_{\psi}^{0}\times\mathbf{r}\,. \tag{4.4}$$

Из выражений (4.1), (3.4) и (4.4) следует, что скорость произвольной точки твердого тела, имеющего неподвижную точку, может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,, \tag{4.5}$$

где $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\,\mathbf{k} - \dot{\varphi}\,\mathbf{e}_{\psi}^{0}$.

Таким образом, формула (3.5) действительно допускает обобщение на случай произвольного вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Формула (4.5) была получена Эйлером и носит его имя (*формула Эйлера*). Вектор $\boldsymbol{\omega}$, входящий в нее, называется *мгновенной угловой скоростью*. Здесь он был выражен через сферические координаты конца того вектора $\mathbf{r}$, скорость изменения которого ищется. Можно поэтому подумать, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ зависит от вектора $\mathbf{r}$, в то время как ранее в формуле (3.5) он от него не зависел. В действительности вектор $\boldsymbol{\omega}$ не связан, конечно, с выбором вектора $\mathbf{r}$. В этом заключается недостаток данного простого вывода формулы (4.5), не позволяющего дать конструктивное представление для вектора $\boldsymbol{\omega}$. В кинематике твердого тела будет поэтому дан другой вывод формулы Эйлера, лишенный этого недостатка.

§ 5. Произвольные криволинейные координаты точки. Основной базис

Положение точки относительно системы координат $Oxyz$ проще всего, конечно, задавать ее декартовыми координатами. Однако если рассматривается, например, движение точки по поверхности цилиндра или сферы, то, как видно из материала двух предыдущих параграфов, целесообразно использовать соответственно цилиндрическую и сферическую системы координат. Другими словами, выбор системы координат определяется природой самой задачи. Но для того, чтобы иметь возможность решать различные задачи, необходимо иметь достаточно общую теорию. С этой целью и перейдем к изучению кинематики точки в произвольных криволинейных координатах. Разработанный при этом математический аппарат будет в дальнейшем использоваться в основном в динамике системы и, в частности, в динамике упомянутой выше изображающей точки. Имея это в виду, в дальнейшем для обозначения координат будем использовать одну букву с индексами. Так же одной буквой с индексами будем обозначать и компоненты всех вводимых векторов. Это позволит переход от обычной точки к изображающей свести к замене пределов изменения индексов.

Итак, пусть положение точки определяется заданием криволинейных координат, под которыми подразумевают три величины q^1, q^2, q^3, через которые однозначно выражаются декартовы координаты точки:

$$x_k = F_k(q^1, q^2, q^3)\,, \quad k = 1, 2, 3, \qquad \text{или} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)\,,$$

причем предполагается, что эти уравнения разрешимы относительно q^1, q^2, q^3 и решения их однозначны. Таким образом,

$$q^k = f^k(x_1, x_2, x_3)\,, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Из этих равенств непосредственно видно, что приравнивание какой-либо координаты q^k постоянной величине приводит к уравнению поверхности, которая называется *координатной поверхностью*, соответствующей координате q^k. Пересечение двух координатных поверхностей дает *координатную линию*, вдоль которой изменяется только одна координата. Например, пересечение поверхностей $q^1 = f^1(x_1, x_2, x_3) = C_1$, $q^2 = f^2(x_1, x_2, x_3) = C_2$ дает координатную линию, вдоль которой изменяется координата q^3.

Пересечение трех координатных поверхностей (рис. 5) дает точку M, положение которой требовалось определить. Если через эту точку провести касательные к координатным линиям в направлении возрастания

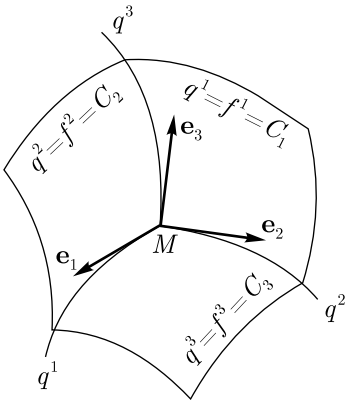

Рис. 5. Координатные поверхности и основной базис

величин $q^1,\ q^2,\ q^3$, то получим *оси криволинейных координат.* Направления этих осей могут образовывать как ортогональную систему (например, системы осей сферических и цилиндрических координат), так и неортогональную (*косоугольную*). Для задания движения в криволинейных координатах величины $q^1,\ q^2,\ q^3$ следует задать как функции времени.

Рассмотрим дифференциал вектор-функции $\mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$. В соответствии с определением дифференциала функции нескольких переменных имеем

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}\, dq^i\,.$$

Вектор $d\mathbf{r}$ называется *элементарным перемещением.* Обозначая $\partial\mathbf{r}/\partial q^i = \mathbf{e}_i$, получаем

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} dq^i\, \mathbf{e}_i\,.$$

В дальнейшем для сокращения записи условимся считать, что по дважды встречающимся индексам производится суммирование (*правило немого индекса*). В соответствии с этим предыдущая формула может быть записана в виде

$$d\mathbf{r} = dq^i\, \mathbf{e}_i\,. \tag{5.1}$$

Индекс, по которому ведется суммирование, называется *немым.* Это название объясняется тем, что этот индекс не имеет никакого отношения к той величине, которая получается в результате суммирования, — он о ней ничего «не говорит».

Векторы $\mathbf{e}_i$, направленные по касательным к координатным линиям в стороны возрастания соответствующих координат, образуют *основной базис* рассматриваемой системы криволинейных координат (рис. 5). Модули векторов базиса могут быть не равны единице, но при этом всегда можно положить $\mathbf{e}_i = H_i \mathbf{e}_i^0$, где $H_i = |\mathbf{e}_i|$, $|\mathbf{e}_i^0| = 1$. Базис $\{\mathbf{e}_i^0\}$ называется *нормированным*, а величины H_i — *коэффициентами Ламе*.

Следует помнить, что векторы $\mathbf{e}_i$ основного базиса являются вектор-функциями точки пространства, поэтому базис $\{\mathbf{e}_i\}$ называется также *местным*, или *локальным*.

Заметим, что для того чтобы элементарное перемещение $d\mathbf{r}$, которое по самой своей природе должно задаваться совокупностью величин dq^i, можно было представить в виде (5.1), должен быть введен основной базис. Другими словами, введение вектора элементарного перемещения означает одновременное введение и основного базиса. Эта связь вектора элементарного перемещения с основным базисом носит общий характер и в дальнейшем будет использоваться применительно к механическим системам.

§ 6. Элементарная работа. Взаимный базис

С элементарным перемещением $d\mathbf{r}$ непосредственно связано понятие об элементарной работе. Это одно из основных понятий в курсе теоретической механики. По определению *элементарной работой* δA силы $\mathbf{F}$ на элементарном перемещении $d\mathbf{r}$ называется скалярное произведение $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Если сила $\mathbf{F}$ задана ее проекциями на оси декартовых координат, то есть в виде $\mathbf{F} = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k}$, то

$$\delta A = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\,.$$

Отметим, что использование символа δ, а не обозначения полного дифференциала d в этой формуле связано с тем, что дифференциальный трехчлен $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ не всегда является полным дифференциалом некоторой функции.

Элементарная работа является линейной функцией компонент вектора $d\mathbf{r}$ или, как говорят, *линейной формой вектора* $d\mathbf{r}$. Число δA не зависит от того, в какой системе координат задается вектор $d\mathbf{r}$. Другими словами, элементарная работа является инвариантной линейной формой вектора $d\mathbf{r}$. Следовательно, если в криволинейных координатах $\{q^i\}$ вектор $d\mathbf{r}$ будет задан в своем естественном представлении (5.1), то элементарная работа δA будет линейной функцией компонент dq^i вектора $d\mathbf{r}$, то есть запишется в виде

$$\delta A = Q_i\,dq^i\,. \tag{6.1}$$

Выясним, что представляют собой коэффициенты Q_i этой линейной формы. В соответствии с определением элементарной работы имеем

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i \, dq^i \,,$$

откуда

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i = H_i F \cos(\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{e}_i}) \,, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6.2}$$

Таким образом, величины Q_i пропорциональны ортогональным проекциям силы $\mathbf{F}$ на направления координатных осей. Ясно, что сила $\mathbf{F}$ как вектор будет однозначно определяться этими тремя своими ортогональными проекциями. Естественно возникает вопрос, нельзя ли, используя величины $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$, представить вектор $\mathbf{F}$ в виде

$$\mathbf{F} = Q_j \, \mathbf{e}^j \,, \tag{6.3}$$

где $\mathbf{e}^1,\ \mathbf{e}^2,\ \mathbf{e}^3$ — тройка неизвестных векторов. Подставляя выражение (6.3) в формулы (6.2), получаем

$$Q_i = Q_j \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i \,.$$

Искомые векторы $\mathbf{e}^j$ должны быть такими, что

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \,, & i = j \,, \\ 0 \,, & i \neq j \,. \end{cases} \tag{6.4}$$

Формулы (6.4) позволяют по основному базису $\{\mathbf{e}_i\}$ построить новую тройку векторов $\mathbf{e}^1,\ \mathbf{e}^2,\ \mathbf{e}^3$. Величины δ_i^j называются *символами Кронекера*, а тройка построенных векторов $\mathbf{e}^j$ — *взаимным*, или *дуальным базисом*.

Рассмотрим этот базис более подробно. Возьмем, например, вектор $\mathbf{e}^1$. Он ортогонален векторам $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, лежащим в касательной плоскости к координатной поверхности, соответствующей координате q^1. Следовательно, вектор $\mathbf{e}^1$ направлен по нормали к этой поверхности. Аналогично векторы $\mathbf{e}^2$ и $\mathbf{e}^3$ будут направлены по нормалям соответственно к поверхностям $f^2(x_1, x_2, x_3) = C_2$ и $f^3(x_1, x_2, x_3) = C_3$ (см. рис. 5).

Зададим элементарное перемещение в виде $dq^1 \mathbf{e}_1$, то есть положим $dq^2 = dq^3 = 0$. На этом перемещении совершит работу только составляющая $Q_1 \mathbf{e}^1$ силы $\mathbf{F}$, так как две другие ее составляющие $Q_2 \mathbf{e}^2$ и $Q_3 \mathbf{e}^3$ ортогональны перемещению $dq^1 \mathbf{e}_1$.

Таким образом, введение взаимного базиса позволяет вектор силы представить в виде суммы таких составляющих, каждая из которых совершает работу только на одном элементарном перемещении, задаваемом дифференциалом соответствующей координаты.

Поясним на примере целесообразность введения взаимного базиса[1]. Простейший механизм, позволяющий вращательное движение перевести в прямолинейное, состоит из кривошипа OA, шатуна AB и ползуна B (см. рис. 6). Кривошип OA, вращаясь вокруг точки O, за счет шатуна AB приводит в движение ползун B, скользящий по направляющим, параллельным оси Ox. Предполагается, что шатун в точках A и B связан посредством цилиндрических шарниров соответственно с кривошипом и ползуном. При движении шатуна по направляющим возникает сила сухого трения, которую приближенно можно считать пропорциональной нормальному давлению ползуна на направляющие. В дальнейшем будет показано, что для того чтобы учесть влияние направляющих на движение данного механизма, необходимо мысленно убрать сами направляющие и их действие заменить силами трения и нормального давления. При отсутствии направляющих точка B получит возможность перемещаться как вдоль оси Ox, так и вдоль оси Oy. Учитывая специфику данной задачи, в качестве криволинейных координат, однозначно определяющих положение точки B, примем угол поворота кривошипа φ и ординату y точки B. Координатной линией, соответствующей координате φ, является прямая, параллельная оси Ox ($y = \mathrm{const}$). Базисный вектор $\mathbf{e}_\varphi$ направлен в сторону, противоположную направлению оси Ox, так как положительным принято вращение кривошипа OA против часовой стрелки (рис. 6). При закрепленной координате φ шатун AB будет поворачиваться вокруг точки A, как вокруг неподвижной точки. Следовательно, координатной линией, соответствующей координате y, будет окружность радиуса AB с центром в точке A. Базисный вектор $\mathbf{e}_y$ направлен по касательной к этой окружности. Введем взаимный базис, по определению задаваемый формулами

$$\mathbf{e}^\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = 1\,, \qquad \mathbf{e}^\varphi \cdot \mathbf{e}_y = 0\,, \qquad \mathbf{e}^y \cdot \mathbf{e}_y = 1\,, \qquad \mathbf{e}^y \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0\,,$$

и изобразим его на рис. 6.

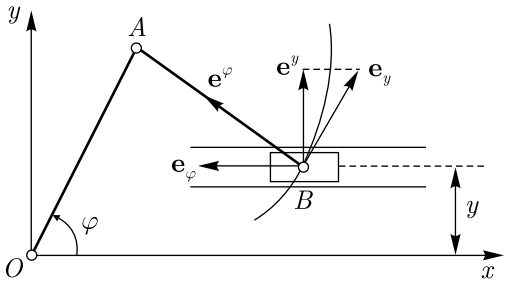

Рис. 6. Кривошипно-шатунный механизм

Заметим, что для выполнения условия $y = \mathrm{const}$ при изменении угла φ достаточно к точке B приложить силу, направленную по вектору $\mathbf{e}^y$. Более того,

[1]Этот пример связывает изложение кинематики и динамики, поэтому к нему полезно вернуться после изучения главы VI. При первоначальном чтении он может быть опущен без ущерба для понимания дальнейшего материала.

эта сила, не совершая работы, вообще никак не влияла бы на закон изменения угла φ при $y = \mathrm{const}$, если бы не было сухого трения.

Предположим теперь, что у данного механизма точка B, начиная с некоторого момента времени, становится свободной, и требуется определить, какую силу к ней надо приложить, чтобы угол φ стал изменяться по заданному закону $\varphi = f(t)$. В дальнейшем (в главе VI) будет показано, что для этого достаточно приложить силу, направленную по вектору $\mathbf{e}^\varphi$. В этом смысле можно сказать, что сила $Q_\varphi \mathbf{e}^\varphi$ управляет движением по φ, и точно так же сила $Q_y \mathbf{e}^y$ — движением по y.

Выражение (6.1) для элементарной работы носит общий характер. Действие всех сил, приложенных к механической системе, характеризуется той работой, которую они совершают при переходе системы из одного положения в другое. Выражение (6.1) является поэтому наиболее общим способом описания силы, и приводит оно к разложению силы по взаимному базису.

Таким образом, если речь идет о некоторой механической системе, положение которой задается координатами q^i, то введение для нее элементарного перемещения как объекта, имеющего векторную структуру, означает введение основного базиса, а введение понятия силы влечет за собой введение взаимного базиса.

§ 7. Ко- и контравариантные компоненты вектора скорости. Правило поднимания и опускания индексов

Компоненты вектора $\mathbf{a}$ по основному базису будем снабжать индексами вверху, а по взаимному базису — внизу, то есть будем писать

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i \,, \qquad \mathbf{a} = a_j \mathbf{e}^j \,.$$

Из выражений (6.4) следует, что

$$a^k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^k \,, \qquad a_k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k \,. \tag{7.1}$$

Введем новые криволинейные координаты q^i_* и векторы $\mathbf{e}^*_j = \partial \mathbf{r} / \partial q^j_*$ нового основного базиса. Учитывая, что новые и старые координаты связаны соотношениями

$$q^j_* = q^j_*(q^1, q^2, q^3) \,, \qquad q^i = q^i(q^1_*, q^2_*, q^3_*) \,,$$

получаем

$$\mathbf{e}^*_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial q^j_*} = \frac{\partial q^i}{\partial q^j_*} \mathbf{e}_i \,, \qquad \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j_*} \frac{\partial q^j_*}{\partial q^i} = \frac{\partial q^j_*}{\partial q^i} \mathbf{e}^*_j \,. \tag{7.2}$$

Отсюда и из выражений (7.1) найдем, что

$$a_j^* = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_j^* = \frac{\partial q^i}{\partial q_*^j}\, a_i\,, \qquad a_i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i = \frac{\partial q_*^j}{\partial q^i}\, a_j^*\,. \tag{7.3}$$

Эти формулы позволяют записать следующую цепочку равенств

$$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}^i = \frac{\partial q_*^j}{\partial q^i}\, a_j^*\mathbf{e}^i = a_j^*\mathbf{e}_*^j = \frac{\partial q^i}{\partial q_*^j}\, a_i\mathbf{e}_*^j\,,$$

из которой вытекают соотношения

$$\mathbf{e}_*^j = \frac{\partial q_*^j}{\partial q^i}\,\mathbf{e}^i\,, \qquad \mathbf{e}^i = \frac{\partial q^i}{\partial q_*^j}\,\mathbf{e}_*^j\,.$$

Следовательно

$$a_*^j = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_*^j = \frac{\partial q_*^j}{\partial q^i}\, a^i\,, \qquad a^i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^i = \frac{\partial q^i}{\partial q_*^j}\, a_*^j\,. \tag{7.4}$$

Сравнивая выражения (7.2) и (7.3), видим, что компоненты a_j^*, a_i разложения вектора $\mathbf{a}$ по новому и старому взаимным базисам преобразуются так же, как и векторы основных базисов. Поэтому их называют *ковариантными компонентами*. Величины же a_*^j и a^i называются *контравариантными компонентами вектора* $\mathbf{a}$, так как при их преобразовании по формулам (7.4) для перехода, например, от старых компонент a^i к новым a_*^j используются те коэффициенты, которые в преобразованиях (7.2) применялись, наоборот, для перехода от нового базиса к старому.

Рассмотрим вектор скорости точки. В соответствии с определением (1.4) и выражением (5.1) имеем контравариантные компоненты вектора скорости

$$\mathbf{v} = \dot q^i\mathbf{e}_i = v^i\mathbf{e}_i\,. \tag{7.5}$$

Таким образом, производные $\dot q^i$ являются контравариантными компонентами вектора скорости точки. Они называются *обобщенными скоростями*.

Из выражения (7.5) следует, что

$$\mathbf{e}^i = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot q^i} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i}\,, \tag{7.6}$$

и потому

$$v_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i = \mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot q^i} = \frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot q^i}\,. \tag{7.7}$$

Величина $T = mv^2/2$, где m — масса точки, называется ее *кинетической энергией*, а вектор $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — *количеством движения точки*, или *импульсом*. Формула (7.7) говорит о том, что импульс может быть найден по выражению для кинетической энергии, причем в результате получится его разложение по взаимному базису. Итак, имеем

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\mathbf{e}^i\,.$$

Существенно то, что это выражение, как и выражение (6.1) для элементарной работы, допускает обобщение на случай механической системы. Кратко пока скажем здесь и о том, что данные обобщения позволяют закон движения любой механической системы, положение которой однозначно определяется заданием параметров q^i, записать в той форме, в которой он был сформулирован И. Ньютоном для одной точки, то есть в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\mathbf{e}^i\right) = Q_i\mathbf{e}^i\,. \tag{7.8}$$

Особо отметим то обстоятельство, что придание второму закону И. Ньютона обобщенной формулировки непосредственно связано с введением ковариантных компонент векторов импульса и силы. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в главе VI.

Вернемся к формуле (7.7). Из выражения (7.5) следует, что

$$v^2 = \dot{q}^i\mathbf{e}_i \cdot \dot{q}^j\mathbf{e}_j = \mathrm{g}_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\,, \tag{7.9}$$

где

$$\mathrm{g}_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\,. \tag{7.10}$$

Учитывая, что $v^2 = ds^2/(dt)^2$, получаем

$$d\mathbf{r}^2 = ds^2 = \mathrm{g}_{ij}\,dq^i\,dq^j\,. \tag{7.11}$$

Коэффициенты g_{ij} этой инвариантной квадратичной формы от компонент dq^i вектора элементарного перемещения $d\mathbf{r}$ называются *метрическими коэффициентами*, так как они по компонентам вектора $d\mathbf{r}$ позволяют определить квадрат его длины. Заметим, что найти величины g_{ij} можно по выражению для кинетической энергии, так как она в соответствии с выражением (7.9) может быть записана в виде

$$T = \frac{m}{2}\,\mathrm{g}_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\,. \tag{7.12}$$

Из формул (7.1) и (7.10) вытекает, что задание метрических коэффициентов эквивалентно заданию векторов основного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, причем в их ковариантном представлении, то есть в виде

$$\mathbf{e}_i = \mathrm{g}_{ij}\,\mathbf{e}^j\,. \tag{7.13}$$

Отсюда и из выражений (7.1) следует, что ковариантные и контравариантные компоненты любого вектора $\mathbf{a}$ связаны соотношениями

$$a_i = \mathrm{g}_{ij} a^j\,. \tag{7.14}$$

В частности, для ковариантных компонент вектора скорости имеем

$$v_i = \mathrm{g}_{ij}\dot{q}^j\,.$$

Известно, что определитель $|\mathrm{g}_{ij}|$, составленный из коэффициентов положительно-определенной квадратичной формы (7.11), не равен нулю, и поэтому система (7.14) разрешима относительно a^j, так что

$$a^j = \mathrm{g}^{jk} a_k\,, \tag{7.15}$$

где g^{jk} — элементы матрицы, обратной матрице с элементами g_{ij}. Используя выражение (7.1), соотношение (7.15) можно представить в виде

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^j = \mathrm{g}^{jk}\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k\,.$$

Отсюда

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{e}^j - \mathrm{g}^{jk}\mathbf{e}_k) = 0\,.$$

Так как это справедливо для любого вектора $\mathbf{a}$, то

$$\mathbf{e}^j = \mathrm{g}^{jk}\mathbf{e}_k\,. \tag{7.16}$$

Формулы (7.13)–(7.16) позволяют переходить от величин с индексами наверху к величинам с индексами внизу и наоборот. Принято поэтому говорить, что ими задается *правило опускания и поднимания индексов*.

§ 8. Ко- и контравариантные компоненты вектора ускорения. Оператор Лагранжа

В предыдущем параграфе было показано, что векторы основного базиса и вектор скорости могут быть найдены по выражению для кинетической энергии. Покажем, что это относится и к вектору ускорения.

Используя формулы (7.1) и (7.6), получаем

$$w_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}\right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}\,. \tag{8.1}$$

Из соотношений (7.5) и (7.6) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i\,\partial q^j}\,\dot{q}^j = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^j\,\partial q^i}\,\dot{q}^j = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i}\,.$$

Следовательно, выражение (8.1) может быть записано в виде

$$w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial (v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial (v^2/2)}{\partial q^i}\,. \tag{8.2}$$

Отсюда имеем ковариантные компоненты вектора ускорения:

$$m w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}\,. \tag{8.3}$$

Таким образом, ковариантные компоненты вектора ускорения могут быть найдены по выражению для кинетической энергии. Это исключительно важное их представление было получено Лагранжем. Если ввести в рассмотрение *оператор Лагранжа*

$$L_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial q^i}\,,$$

то выражение (8.3) запишется в виде

$$m w_i = L_i(T)\,.$$

Подставляя в формулу (8.2) выражение (7.9), получаем

$$w_i = \mathrm{g}_{ij}\,\ddot{q}^j + \frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial q^k}\,\dot{q}^j \dot{q}^k - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{g}_{jk}}{\partial q^i}\,\dot{q}^j \dot{q}^k\,. \tag{8.4}$$

В сумме

$$\frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial q^k}\,\dot{q}^j \dot{q}^k \tag{8.5}$$

индексы j и k являются немыми, то есть по ним ведется суммирование. Немые индексы могут быть любыми, в частности, их можно поменять местами и записать выражение (8.5) в виде

$$\frac{\partial \mathrm{g}_{ik}}{\partial q^j}\,\dot{q}^k \dot{q}^j\,,$$

а тогда эту двойную сумму можно представить и в такой форме:

$$\frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial q^k}\,\dot{q}^j\dot{q}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathrm{g}_{ik}}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j\dot{q}^k\,.$$

Подставляя это соотношение в выражение (8.4), получаем ковариантные компоненты вектора ускорения

$$w_i = \mathrm{g}_{ij}\,\ddot{q}^j + \Gamma_{i,jk}\,\dot{q}^j\dot{q}^k\,, \tag{8.6}$$

где

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathrm{g}_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial \mathrm{g}_{jk}}{\partial q^i}\right)\,. \tag{8.7}$$

Величины $\Gamma_{i,jk}$ называются *символами Кристоффеля первого рода.* Они при учете выражений (7.10) могут быть представлены также в виде

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} + \mathbf{e}_j\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} + \mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} + \mathbf{e}_k\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} - \mathbf{e}_j\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^i} - \mathbf{e}_k\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i}\right)\,.$$

Учитывая, что в выражениях $\partial\mathbf{e}_j/\partial q^k$ индексы j и k обладают свойством перестановочности, так как

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q^j\partial q^k} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q^k\partial q^j} = \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}\,,$$

будем иметь

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}\cdot\mathbf{e}_i\,. \tag{8.8}$$

Отсюда виден геометрический смысл символов Кристоффеля первого рода: они являются ковариантными компонентами вектора $\partial\mathbf{e}_j/\partial q^k$.

Первое слагаемое в правой части выражения (8.2), как следует из формулы (7.7), равно производной по времени от ковариантной компоненты вектора скорости. Это позволяет величину w_i представить также в виде

$$w_i = \dot{v}_i - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{g}_{jk}}{\partial q^i}\,\dot{q}^j\dot{q}^k\,.$$

Пользуясь опять тем, что в двойных суммах вида (8.5) индексы суммирования можно менять местами, получаем

$$w_i = \dot{v}_i - \Gamma_{j,ik}\,\dot{q}^j\dot{q}^k\,.$$

Учитывая, что $\dot{q}^j = \mathrm{g}^{jl}v_l$, будем иметь

$$w_i = \dot{v}_i - \Gamma^l_{ik}\,v_l\dot{q}^k\,. \tag{8.9}$$

Здесь $\Gamma^l_{ik} = \mathrm{g}^{lj}\,\Gamma_{j,ik}$ — *символы Кристоффеля второго рода*, которые при учете выражений (8.8) и (7.16) могут быть представлены также в виде

$$\Gamma^l_{ik} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} \cdot \mathbf{e}^l\,. \tag{8.10}$$

Следовательно, символы Кристоффеля второго рода являются контравариантными компонентами вектора $\partial \mathbf{e}_i / \partial q^k$.

Отметим, что если известным является выражение для кинетической энергии, то заданным оказывается метрический тензор $\{\mathrm{g}_{ij}\}$, через который по формулам (8.7) найдутся символы $\Gamma_{i,jk}$, а затем и символы $\Gamma^l_{ik} = \mathrm{g}^{lj}\,\Gamma_{j,ik}$. Такой способ введения символов Кристоффеля через кинетическую энергию допускает обобщение на случай механической системы.

Полученная формула (8.9) имеет общий характер и позволяет указать правило, применимое для вычисления производной по времени от любого вектора $\mathbf{a}$, задаваемого его представлением в виде $a_i\mathbf{e}^i$, в случае, когда взаимный базис $\{\mathbf{e}^i\}$ перемещается вместе с точкой. В формуле (8.9) слагаемые, пропорциональные $\dot{q}^k$, как раз и характеризуют влияние на вектор ускорения подвижности взаимного базиса. Осуществляется учет этого влияния с помощью символов Кристоффеля второго рода. Следовательно, обозначая $\mathbf{b} = \dot{\mathbf{a}}$, в соответствии с выражением (8.9) будем иметь

$$b_i = \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e}_i = \dot{a}_i - \Gamma^l_{ik}\, a_l \dot{q}^k\,. \tag{8.11}$$

В справедливости этой формулы можно убедиться и непосредственно. Действительно, по определению производной имеем

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{a}_j \mathbf{e}^j + a_j \dot{\mathbf{e}}^j\,.$$

Отсюда

$$\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e}_i = \dot{a}_i + a_j \dot{\mathbf{e}}^j \cdot \mathbf{e}_i\,. \tag{8.12}$$

Дифференцируя выражение (6.4) по времени, получаем

$$\dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}^j + \mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}^j = 0\,,$$

следовательно,

$$\dot{\mathbf{e}}^j \cdot \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}^j \cdot \dot{\mathbf{e}}_i = -\mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k}\, \dot{q}^k\,.$$

Подставляя это выражение в формулу (8.12) и заменяя немой индекс j на индекс l, будем иметь

$$\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e}_i = \dot{a}_i - \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} \cdot \mathbf{e}^l\, a_l \dot{q}^k\,.$$

Эта формула при учете соотношения (8.10), как и требовалось показать, запишется в виде (8.11).

Рассмотрим теперь контравариантные компоненты вектора ускорения. Используя правило поднимания индексов, получаем

$$w^i = \mathrm{g}^{il} w_l \,.$$

Отсюда и из выражения (8.6) следует, что

$$w^i = \mathrm{g}^{il} \mathrm{g}_{lj} \ddot{q}^j + \mathrm{g}^{il} \Gamma_{l,jk}\, \dot{q}^j \dot{q}^k \,.$$

Так как $\mathrm{g}^{il}\, \Gamma_{l,jk} = \Gamma^i_{jk}$, и, как будет показано ниже,

$$\mathrm{g}^{il} \mathrm{g}_{lj} \ddot{q}^j = \ddot{q}^{\,i} \,, \tag{8.13}$$

то окончательно будем иметь контравариантные компоненты вектора ускорения

$$w^i = \ddot{q}^{\,i} + \Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j \dot{q}^k \,. \tag{8.14}$$

Соотношение (8.13) вытекает из того, что символы Кронекера при использовании формул (7.13) и (7.16) могут быть представлены в виде

$$\delta^i_j = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \mathrm{g}^{il} \mathbf{e}_l \cdot \mathrm{g}_{jk} \mathbf{e}^k = \mathrm{g}^{il} \mathrm{g}_{lj} \,.$$

Отметим, что размерность ко- и контравариантных компонент как вектора скорости, так и вектора ускорения может, вообще говоря, не совпадать с размерностью соответственно скорости (м/с) и ускорения (м/с^2). Это объясняется тем, что координаты q^i могут в системе СИ измеряться не в метрах. В этом случае удобно ввести в рассмотрение единичные векторы $\mathbf{e}_i/|\mathbf{e}_i|$ и $\mathbf{e}^i/|\mathbf{e}^i|$.

Ортогональные проекции, например, вектора ускорения на эти орты будут иметь размерность м/с^2 и вычисляться по формулам

$$\widetilde{w}_i = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} = \frac{w_i}{H_i} \,, \qquad \widetilde{w}^i = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}^i}{|\mathbf{e}^i|} = \frac{w^i}{|\mathbf{e}^i|} \,. \tag{8.15}$$

Введенные величины $\widetilde{w}_i$ и $\widetilde{w}^i$ называются *физическими компонентами вектора ускорения.*

В частности, если система координат ортогональна, то ортонормированные основной и взаимный базисы совпадут, и потому в этом случае

$\widetilde{w}_i = \widetilde{w}^i$. Ортогональными являются цилиндрическая и сферическая системы координат. В цилиндрической системе координат в соответствии с формулами (3.2), (3.3), (8.2) и (8.15) будем иметь

$$\widetilde{w}_\rho = w_\rho = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{\rho}} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial\rho} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\psi}^2\,,$$
$$\widetilde{w}_\psi = \frac{w_\psi}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial\psi}\right] = \rho\ddot{\psi} + 2\dot{\rho}\dot{\psi}\,,$$
$$\widetilde{w}_z = w_z = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{z}} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial z} = \ddot{z}\,.$$

Аналогичные вычисления для сферической системы координат, выполненные при учете выражений (4.2) и (4.3), приведут к следующим результатам:

$$\widetilde{w}_r = \ddot{r} - r\cos^2\varphi\cdot\dot{\psi}^2 - r\dot{\varphi}^2\,,$$
$$\widetilde{w}_\psi = r\cos\varphi\cdot\ddot{\psi} + 2\cos\varphi\cdot\dot{r}\dot{\psi} - 2r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\dot{\psi}\,,$$
$$\widetilde{w}_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\psi}^2\cos\varphi\sin\varphi\,.$$

Отметим конструктивность применения оператора Лагранжа, позволяющую сравнительно просто получить эти формулы.

Глава II
КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Авторы: *Н. Н. Пóляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков*

В этой главе излагается способ описания движения абсолютно твердого тела, выводятся формулы для скоростей и ускорений любых точек тела в общем случае его движения. Анализируются важные частные случаи движения твердого тела (поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, вращение вокруг неподвижной точки, плоское движение). Вводится понятие тензора поворота.

§ 1. Координаты твердого тела. Углы Эйлера

Напомним, что тело называется *абсолютно твердым*, если расстояния между его точками не изменяются.

Введем ортогональную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами $\mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2,\ \mathbf{i}_3$, неизменно связанную с телом, а также ортогональную систему отсчета $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ с ортами $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3$, относительно которой будем изучать движение твердого тела. Систему $Ox_1x_2x_3$ принято называть *подвижной*, а систему $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ — *неподвижной* (рис. 1). Положение какой-либо точки M твердого тела относительно подвижной и неподвижной систем определяется заданием соответственно радиус-векторов $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\rho}$. Эти векторы связаны соотношением

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_o + \mathbf{r}\,. \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}_o$ — радиус-вектор той точки твердого тела, которая принята за начало отсчета подвижной системы. Эта точка называется *полюсом*.

Векторы $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\rho}_o$ разложим по неподвижному базису $\{\boldsymbol{\varepsilon}_s\}$, а вектор $\mathbf{r}$ — по подвижному $\{\mathbf{i}_k\}$. При этом соотношение (1.1) запишется в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \xi_s\boldsymbol{\varepsilon}_s = \xi_{os}\boldsymbol{\varepsilon}_s + x_k\mathbf{i}_k\,. \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что, для того чтобы по координатам $x_1,\ x_2,\ x_3$ любой точки твердого тела относительно подвижной системы отсчета $Ox_1x_2x_3$ можно было найти ее координаты относительно неподвижной системы, необходимо задать координаты полюса $\xi_{o1},\ \xi_{o2},\ \xi_{o3}$ и положение подвижного базиса $\{\mathbf{i}_k\}$ относительно неподвижного $\{\boldsymbol{\varepsilon}_s\}$. Перейдем к рассмотрению описания ориентации подвижной системы координат относительно неподвижной.

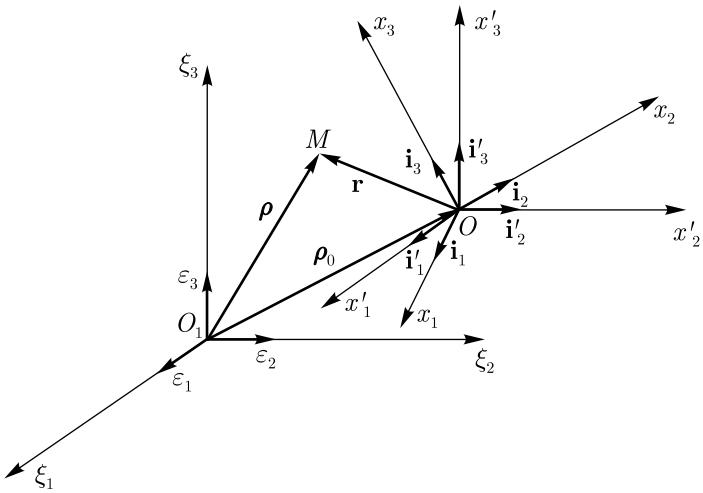

Рис. 1. Движение твердого тела

В каждый заданный момент времени оси $x_1,\ x_2,\ x_3$ составляют с осями $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ углы, направляющие косинусы которых $\alpha_{sk} = \boldsymbol{\varepsilon}_s \cdot \mathbf{i}_k$ удобно записать в виде таблицы:

	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{i}'_1$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{i}'_2$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \mathbf{i}'_3$	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Строки этой таблицы составлены из компонент ортов $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ неподвижных осей (см. рис. 1) относительно подвижного базиса $\{\mathbf{i}_k\}$, а столбцы — из компонент ортов $\mathbf{i}_k$ относительно базиса $\{\boldsymbol{\varepsilon}_s\}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{i}'_s = \alpha_{sk}\mathbf{i}_k\,, \qquad \mathbf{i}_k = \alpha_{sk}\boldsymbol{\varepsilon}_s\,. \tag{1.3}$$

Введем новую систему координат $O'x'_1x'_2x'_3$, оси которой параллельны осям $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$, а начало O' совпадает с началом O, и рассмотрим преобразование координат при переходе от одной системы к другой.

Орты $\mathbf{i}'_s$ новых осей будут совпадать с ортами $\boldsymbol{\varepsilon}_s$. Учитывая соотношения (1.3), для произвольного вектора $\mathbf{r}$ имеем

$$\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k = x_k \alpha_{sk} \mathbf{i}'_s = x'_s \mathbf{i}'_s = x'_s \alpha_{sk} \mathbf{i}_k \,. \tag{1.4}$$

Из равенств (1.4) получаем формулы для преобразования координат

$$x'_s = \alpha_{sk} x_k \,, \qquad x_k = \alpha_{sk} x'_s \,, \qquad s = 1, 2, 3, \qquad k = 1, 2, 3,$$

которые удобно записать в матричной форме:

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Ax \,, \tag{1.5}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A^* x' = A^{-1} x' \,.$$

Отметим, что матрица A направляющих косинусов обладает замечательным свойством: обратная матрица A^{-1} равна транспонированной матрице A^*, которую получают заменой строк на столбцы.

Так как системы координат, по предположению, ортогональны, а орты являются единичными векторами, то должны выполняться условия ортонормированности:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j = \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \begin{cases} 1 \,, & i = j \,, \\ 0 \,, & i \neq j \,. \end{cases}$$

Таких условий будет шесть, поскольку индексы i и j пробегают значения 1, 2, 3, и, следовательно, из девяти косинусов независимыми являются только три. Вместо этих трех независимых косинусов можно выбрать три любых независимых параметра. Обычно в качестве таких параметров выбирают три *угла Эйлера*, с помощью которых выражаются все α_{ik} (рис. 2). Эти углы вводятся следующим образом.

Рассмотрим линию пересечения Ox''_1 (называемую *линией узлов*) плоскости Ox_1x_2 с плоскостью $Ox'_1x'_2$. Направление орта $\mathbf{i}''_1$ этой оси выбираем в ту сторону, глядя с которой поворот от оси Ox'_3 к оси Ox_3 на наименьший угол, обозначаемый через θ, виден происходящим против часовой стрелки. Угол между осями Ox'_1 и Ox''_1 обозначим через ψ, а между осями Ox''_1 и Ox_1 — через φ. Положительные направления отсчета этих углов показаны на рис. 2. Углы ψ, θ, φ называются соответственно *углами прецессии,*

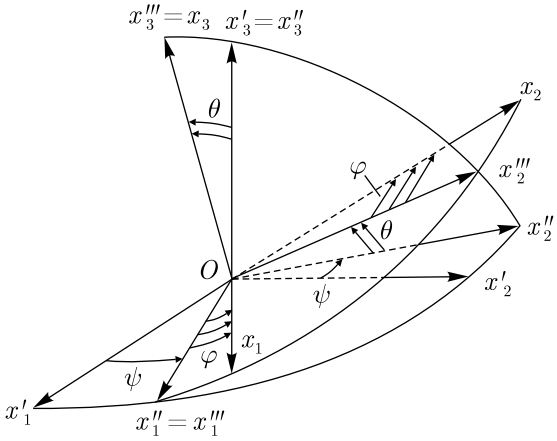

Рис. 2. Углы Эйлера

нутации и *собственного вращения (ротации)*. Эти названия пришли из астрономии.

Следует отметить, что углы Эйлера широко используются в теории гироскопов[1], однако, например, в динамике полета предпочтительнее оказывается другая система углов (см. главу X второго тома учебника).

При $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ подвижная плоскость Ox_1x_2 совпадает с неподвижной $Ox_1'x_2'$, и углы ψ и φ оказываются неопределенными, однако их сумма равна углу между осями Ox_1' и Ox_1. В окрестностях этих двух особых значений угла нутации появляются вычислительные трудности. Поэтому при необходимости исследования тех движений, при которых оси Ox_3 и Ox_3' могут оказаться коллинеарными, обычно пользуются другими характеристиками положения твердого тела с неподвижной точкой, в частности, параметрами Родрига или Кэли — Клейна.

Для совмещения системы $Ox_1'x_2'x_3'$ с системой $Ox_1x_2x_3$ достаточно:

1) повернуть систему $Ox_1'x_2'x_3'$ вокруг оси Ox_3' на угол ψ, в результате чего получаем систему $Ox_1''x_2''x_3''$, причем $x_3'' = x_3'$;

2) повернуть систему $Ox_1''x_2''x_3''$ вокруг оси Ox_1'' на угол θ, в результате чего имеем систему $Ox_1'''x_2'''x_3'''$, при этом $x_1''' = x_1''$;

3) повернуть систему $Ox_1'''x_2'''x_3'''$ вокруг оси $Ox_3''' = Ox_3$ на угол φ, в результате чего приходим к системе $Ox_1x_2x_3$.

[1]См., например, монографию: *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.

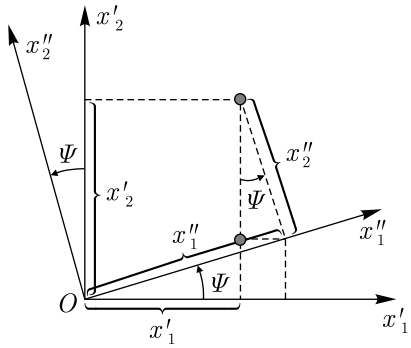

Рис. 3. Связь координат x'_k с x''_k

Произвольный вектор $\mathbf{r}$ можно задать в четырех системах координат:

$$\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k = x'_k \mathbf{i}'_k = x''_k \mathbf{i}''_k = x'''_k \mathbf{i}'''_k \,.$$

Координаты x'_k и x''_k, как видно из рис. 3, связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x'_1 &= x''_1 \cos\psi - x''_2 \sin\psi + 0\,, \\ x'_2 &= x''_1 \sin\psi + x''_2 \cos\psi + 0\,, \\ x'_3 &= 0 + 0 + x''_3\,, \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$x' = A_3(\psi)\, x''\,. \tag{1.6}$$

Матрица

$$A_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

описывает поворот вокруг третьей оси на угол ψ.

Переход от системы $Ox''_1x''_2x''_3$ к системе $Ox'''_1x'''_2x'''_3$ происходит путем поворота на угол θ вокруг первой из координатных осей. Формулы преобразования координат, как видно из рис. 4, при этом таковы:

$$\begin{aligned} x''_1 &= x'''_1 + 0 + 0\,, \\ x''_2 &= 0 + x'''_2 \cos\theta - x'''_3 \sin\theta\,, \\ x''_3 &= 0 + x'''_2 \sin\theta + x'''_3 \cos\theta\,, \end{aligned}$$

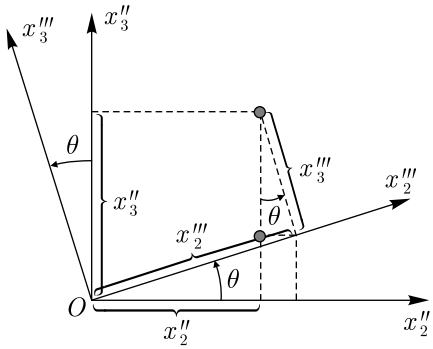

Рис. 4. Связь координат x_k'' с x_k'''

или в матричной форме:

$$x'' = A_1(\theta)\, x''' \,, \tag{1.8}$$

где

$$A_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Наконец, система $Ox_1'''x_2'''x_3'''$ переводится в систему $Ox_1x_2x_3$ поворотом на угол φ вокруг третьей оси, и потому

$$x''' = A_3(\varphi)\, x \,, \tag{1.9}$$

причем матрица A_3 имеет вид матрицы (1.7).

Подставляя в соотношение (1.6) соотношение (1.8), в котором x''' представлен в виде (1.9), получаем

$$x' = A_3(\psi)\, A_1(\theta)\, A_3(\varphi) x \,. \tag{1.10}$$

Сравнивая выражения (1.5) и (1.10), находим, что искомая матрица A с компонентами α_{sk} является произведением трех матриц поворота:

$$A(\psi,\theta,\varphi) = A_3(\psi)\, A_1(\theta)\, A_3(\varphi) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix}(\cos\psi\cos\varphi - \\ -\sin\psi\cos\theta\sin\varphi)\end{matrix} & \begin{matrix}(-\cos\psi\sin\varphi - \\ -\sin\psi\cos\theta\cos\varphi)\end{matrix} & \sin\psi\sin\theta \\ \begin{matrix}(\sin\psi\cos\varphi + \\ +\cos\psi\cos\theta\sin\varphi)\end{matrix} & \begin{matrix}(-\sin\psi\sin\varphi + \\ +\cos\psi\cos\theta\cos\varphi)\end{matrix} & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (1.11)$$

Вернемся к выражению (1.2). Соотношения (1.3) позволяют записать его в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_o + \mathbf{r} = \xi_s\,\boldsymbol{\varepsilon}_s = [\xi_{os} + x_k\alpha_{sk}(\psi,\theta,\varphi)]\,\boldsymbol{\varepsilon}_s\,. \qquad (1.12)$$

Это векторное равенство можно представить и в матричной форме:

$$\xi = \xi_o + A(\psi,\theta,\varphi)\,x\,.$$

Таким образом, для того чтобы определить положение любой выбранной точки твердого тела относительно системы отсчета $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$, необходимо задать шесть величин: $\xi_{o1},\ \xi_{o2},\ \xi_{o3},\ \psi,\ \theta,\ \varphi$. Поэтому говорят, что эти величины являются *координатами твердого тела*, однозначно определяющими его положение по отношению к неподвижной системе отсчета.

§ 2. Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае его движения

Как следует из формулы (1.12), для того чтобы задать закон движения произвольной точки твердого тела, необходимо задать как функции времени координаты полюса $\xi_{o1},\ \xi_{o2},\ \xi_{o3}$ и углы Эйлера ψ, θ, φ. Скорость $\mathbf{v}$ точки M твердого тела по определению равна производной по времени от радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}$ (см. рис. 1). Используя при вычислении этой производной выражение (1.12), а также правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных, получаем

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\xi_{o1}}\,\dot\xi_{o1} + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\xi_{o2}}\,\dot\xi_{o2} + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\xi_{o3}}\,\dot\xi_{o3} + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\psi}\,\dot\psi + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\theta}\,\dot\theta + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\varphi}\,\dot\varphi\,.$$

Так как

$$\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\xi_{os}} = \boldsymbol{\varepsilon}_s\,, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\psi} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi}\,, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\theta} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\,, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\,,$$

то

$$\mathbf{v} = \dot\xi_{o1}\,\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dot\xi_{o2}\,\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dot\xi_{o3}\,\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi}\,\dot\psi + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\,\dot\theta + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\,\dot\varphi\,. \qquad (2.1)$$

Каждое из этих слагаемых можно рассматривать как скорость данной точки в том частном случае, когда изменяется только одна выбранная координата, а все остальные являются постоянными величинами. Например, пусть изменяется только координата ξ_{o1}. В этом случае твердое тело будет двигаться вдоль оси $O_1\xi_1$ (см. рис. 1) и все его точки будут иметь одну и ту же скорость $\dot{\xi}_{o1}\boldsymbol{\varepsilon}_1$, равную скорости полюса. Пусть теперь изменяется только угол ψ, то есть пусть полюс является неподвижным и углы θ и φ постоянны. При этих предположениях тело будет вращаться вокруг неподвижной оси Ox_3' (см. рис. 1 и 2). Как было показано в § 3 главы I, в этом случае будем иметь

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}\,, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{k}$ — орт той оси, вокруг которой поворачивается тело при изменении угла ψ, то есть оси Ox_3'. Следовательно, $\mathbf{k} = \mathbf{i}_3'$. Аналогично показывается, что (см. рис. 2)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{i}_1'' \times \mathbf{r}\,, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{r}\,. \tag{2.3}$$

Из выражений (2.1)–(2.3) следует, что при неподвижном полюсе будем иметь

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\psi}\mathbf{i}_3' \times \mathbf{r} + \dot{\theta}\mathbf{i}_1'' \times \mathbf{r} + \dot{\varphi}\mathbf{i}_3 \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,, \tag{2.4}$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{i}_3' + \dot{\theta}\mathbf{i}_1'' + \dot{\varphi}\mathbf{i}_3\,. \tag{2.5}$$

Данный вывод формулы Эйлера (2.4) показывает, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора вектора $\mathbf{r}$. В выражении (2.4) векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ инвариантны относительно выбора системы координат. Следовательно, вектор $\boldsymbol{\omega}$ также не будет зависеть от того, какие координаты принять для описания вращения твердого тела. Покажем, что он не будет зависеть и от выбора полюса.

Сумма первых трех слагаемых в выражении (2.1) равна скорости полюса $\mathbf{v}_o = d\boldsymbol{\rho}_o/dt$. Следовательно, в общем случае движения будем иметь

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,. \tag{2.6}$$

Возьмем два различных полюса O_1 и O_2. При этом скорость произвольной точки M запишется как в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{o1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1\,, \tag{2.7}$$

так и в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{o2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2\,. \tag{2.8}$$

Отметим, что в этих выражениях угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ хотя и предполагаются различными, однако они не зависят от выбора точки M.

Учитывая, что векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ связаны соотношением

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{O_1O_2} + \mathbf{r}_2\,,$$

будем иметь

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{o1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\overrightarrow{O_1O_2} + \mathbf{r}_2) = \mathbf{v}_{o2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2\,. \tag{2.9}$$

В соответствии с выражением (2.7) скорость второго полюса может быть представлена в виде

$$\mathbf{v}_{o2} = \mathbf{v}_{o1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1O_2}\,, \tag{2.10}$$

поэтому, сравнивая формулы (2.8) и (2.9), видим, что

$$(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_2 = 0\,.$$

Это равенство должно быть выполнено при любом векторе $\mathbf{r}_2$, что возможно лишь в случае, когда

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}\,,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, угловая скорость оказывается инвариантной относительно выбора полюса.

Выражение (2.10), в котором следует положить $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}$, показывает, что при переходе от одного полюса к другому изменяется только составляющая вектора скорости полюса, которая перпендикулярна вектору $\boldsymbol{\omega}$. Другими словами, инвариантным является и скалярное произведение $\mathbf{v}_o \cdot \boldsymbol{\omega}$, так как

$$(\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{O_1O_2}) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

при любом векторе $\overrightarrow{O_1O_2}$.

Скорость полюса O представим в виде

$$\mathbf{v}_o = \mathbf{v}_o^* + \mathbf{v}_o^{**}\,,$$

где $\mathbf{v}_o^{**} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, а $\mathbf{v}_o^* = \lambda\,\boldsymbol{\omega}$ — инвариантный вектор. Полюс O', скорость которого равна $\mathbf{v}_o^*$, согласно формуле (2.6) найдется из уравнения

$$\overrightarrow{OO'} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_o - \mathbf{v}_o^*\,. \tag{2.11}$$

Это есть векторное уравнение прямой, на которой лежат искомые точки O'.

Таким образом, в общем случае движения твердого тела при $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ в теле существует прямая, все точки которой в данный момент времени имеют одну и ту же скорость, равную $\mathbf{v}_o^*$. В частности, эта скорость может быть равна нулю.

Найдем теперь ускорение точки M. Из формул (2.6) и (2.4) следует, что

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w}_o + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \,, \tag{2.12}$$

где $\mathbf{w}_o = d\mathbf{v}_o/dt$ — ускорение полюса. Обычно вводят вектор $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ и называют его *угловым ускорением*. Формула (2.12) отражает содержание *теоремы Ривальса*.

§ 3. Простейшие виды движения твердого тела

Поступательное движение. Предположим, что любая прямая, проведенная в теле, а следовательно, и оси Ox_1, Ox_2, Ox_3, во все время движения перемещаются параллельно самим себе. В этом случае вектор $\boldsymbol{\omega}$ тождественно равен нулю, и потому, как следует из формул (2.6) и (2.12), у всех точек скорости и ускорения в данный момент времени одинаковы:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o \,, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{w}_o \,. \tag{3.1}$$

Такое движение называется *поступательным*.

Вращение вокруг неподвижной оси. Пусть скорость полюса равна нулю, а направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ неизменно и совпадает с направлением оси Ox_3. Тогда

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{i}_3 \,, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\varphi}\mathbf{i}_3 \,. \tag{3.2}$$

Траекториями точек являются окружности, центры которых лежат на оси Ox_3 (рис. 5). Радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки в данном случае удобно представить в виде

$$\mathbf{r} = x_3\mathbf{i}_3 + R\,\mathbf{R}^0 \,, \qquad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \,, \qquad |\mathbf{R}^0| = 1 \,, \tag{3.3}$$

где R — радиус окружности, по которой движется точка M.

Единичный вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{R}^0 \tag{3.4}$$

направлен по касательной к окружности.

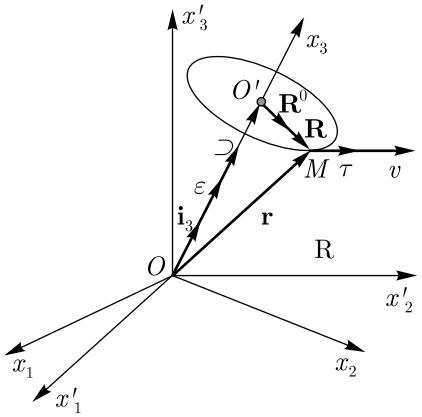

Рис. 5. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Учитывая соотношения (3.2)–(3.4), а также то, что $\mathbf{v}_o = \mathbf{w}_o = 0$, общие формулы (2.6) и (2.12) представляем в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{v} = \dot{\varphi} R \boldsymbol{\tau}\,, \qquad v = |\mathbf{v}| = |\boldsymbol{\omega}| R\,, \\ \mathbf{w} = \ddot{\varphi} R \boldsymbol{\tau} + \dot{\varphi}^2 R (\mathbf{i}_3 \times \boldsymbol{\tau}) = \ddot{\varphi} R \boldsymbol{\tau} - \dot{\varphi}^2 R \mathbf{R}^0\,, \\ w = |\mathbf{w}| = R\sqrt{\ddot{\varphi}^{\,2} + \dot{\varphi}^4}\,. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Скорость направлена по касательной к окружности и равна $|\boldsymbol{\omega}|R$.

Вектор ускорения состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое $\ddot{\varphi} R \boldsymbol{\tau} = \mathbf{w}_\tau$ называется *касательным ускорением*, а величина $\ddot{\varphi}$ — *угловым ускорением*. Второе слагаемое $-\dot{\varphi}^2 R \mathbf{R}^0 = -\dot{\varphi}^2 \mathbf{R} = \mathbf{w}_n$, $\mathbf{R} = \overrightarrow{O'M}$, направлено к центру окружности и называется *центростремительным ускорением*.

Винтовое движение. Пусть скорость полюса $\mathbf{v}_o$ и вектор $\boldsymbol{\omega}$ совпадают по направлению, и это направление не изменяется. Такое *движение* называется *винтовым*. Угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ будем считать заданной в виде (3.2), а движение полюса является таким, что

$$\mathbf{v}_o = v_{o3} \mathbf{i}_3\,, \qquad \mathbf{w}_o = w_{o3} \mathbf{i}_3\,.$$

Эти векторы ортогональны соответственно векторам скорости и ускорения, задаваемым выражениями (3.5), поэтому суммы (2.6) и (2.12) находятся просто.

В предыдущем параграфе было показано, что в общем случае движения твердого тела в каждый фиксированный момент времени в теле имеется ось, в точках которой скорости одинаковы и параллельны вектору $\boldsymbol{\omega}$.

Следовательно, в данный момент времени у твердого тела поле скоростей будет таким же, как и в случае винтового движения. Поэтому оно называется *мгновенным винтовым движением*, а ось, соответствующая этому движению, — *мгновенной винтовой осью*.

Отметим, что в общем случае движения векторы $d\boldsymbol{\omega}/dt$ и $\mathbf{w}_o$ не коллинеарны соответственно векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_o$, поэтому поле ускорений твердого тела в общем случае его движения не будет таким простым, как при обычном винтовом движении.

Геометрические места мгновенных винтовых осей в неподвижном и подвижном пространствах называются соответственно *неподвижным* и *подвижным аксоидами*. Эти аксоиды являются линейчатыми поверхностями. Согласно распределению скоростей точек твердого тела, описанному в предыдущем параграфе, общий случай движения твердого тела можно интерпретировать как перекатывание вокруг общей образующей подвижного аксоида по неподвижному с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ с одновременным скольжением вдоль мгновенной винтовой оси со скоростью $\mathbf{v}_o^*$.

§ 4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

Из формул (2.6) и (2.12) для скоростей и ускорений твердого тела в общем случае его движения и из формул (3.1) для случая поступательного движения можно сделать следующий вывод: движение свободного твердого тела происходит так, как если бы оно двигалось поступательно вместе с полюсом и одновременно вращалось бы вокруг полюса как вокруг неподвижной точки. Другими словами, движение свободного твердого тела распадается на два движения, которые с точки зрения кинематики можно изучать независимо. Поэтому изучение вращения твердого тела вокруг неподвижной точки является важным не только в связи с задачами, возникающими при исследовании работы роторов и гироскопов, но и при исследовании всех движений твердых тел, отличных от поступательного.

Скорости и ускорения точек твердого тела при его вращении вокруг неподвижной точки, как следует из выражений (2.6) и (2.12), вычисляются по формулам

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,, \qquad \mathbf{w} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\,. \tag{4.1}$$

Эти выражения показывают, что рассматриваемое движение твердого тела определяется заданием вектор-функции $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$. Поступательное движение также определяется заданием одной вектор-функции $\mathbf{v}_o = \mathbf{v}_o(t)$. С этой точки зрения эти два движения не различаются. Принципиальная

разница между ними наиболее ярко проявится при составлении дифференциальных уравнений движения твердого тела. Обнаруживается оно и на стадии определения закона движения соответственно по функциям $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\mathbf{v}_o(t)$. Рассмотрим этот вопрос.

В случае поступательного движения закон движения по функции $\mathbf{v}_o(t)$, заданной в виде

$$\mathbf{v}_o(t) = \dot{\xi}_{os}(t)\,\boldsymbol{\varepsilon}_s\,,$$

находится непосредственным интегрированием функций $\dot{\xi}_{os}(t)$:

$$\xi_{os}(t) = \xi_{os}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{\xi}_{os}(t')\,dt'\,, \qquad s = 1, 2, 3.$$

Предположим теперь, что известной является мгновенная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}(t)$, представленная в виде

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega'_s(t)\,\boldsymbol{\varepsilon}_s = \omega'_s(t)\,\mathbf{i}'_s\,, \tag{4.2}$$

и требуется определить углы Эйлера как функции времени.

Вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ через производные от углов Эйлера выражается по формуле (2.5). Векторы $\mathbf{i}''_1$ и $\mathbf{i}_3$, входящие в эту формулу, разложим по базису $\{\mathbf{i}'_s\}$. Из рис. 3 видно, что орт $\mathbf{i}''_1$ можно представить в виде

$$\mathbf{i}''_1 = \cos\psi\mathbf{i}'_1 + \sin\psi\mathbf{i}'_2\,. \tag{4.3}$$

Используя формулы (1.3) и (1.11), найдем, что

$$\mathbf{i}_3 = \alpha_{s3}\mathbf{i}'_s = \sin\psi\sin\theta\mathbf{i}'_1 - \cos\psi\sin\theta\mathbf{i}'_2 + \cos\theta\mathbf{i}'_3\,. \tag{4.4}$$

Подставляя выражения (4.3) и (4.4) в формулу (2.5), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{i}'_3 + \dot{\theta}(\cos\psi\mathbf{i}'_1 + \sin\psi\mathbf{i}'_2) + \dot{\varphi}(\sin\psi\sin\theta\mathbf{i}'_1 - \cos\psi\sin\theta\mathbf{i}'_2 + \cos\theta\mathbf{i}'_3)\,.$$

Отсюда и из формулы (4.2) следует, что

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi\,, \\ \omega'_2 &= -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi\,, \\ \omega'_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Эта система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ при произвольных функциях $\omega'_1(t)$, $\omega'_2(t)$, $\omega'_3(t)$

может быть проинтегрирована только численно. Заметим, что при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ производные $\dot\varphi$, $\dot\psi$, $\dot\theta$ нельзя однозначно выразить через значения ω_1', ω_2', ω_3'. Это означает, что случай, когда твердое тело при своем движении начинает приближаться к положению, в котором угол θ равен 0 или π, как уже отмечалось, требует особого рассмотрения.

Обратимся снова к выражениям (4.5). Запишем их в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned}
\omega_1'\,dt &= \sin\psi\sin\theta\,d\varphi + \cos\psi\,d\theta\,,\\
\omega_2'\,dt &= -\cos\psi\sin\theta\,d\varphi + \sin\psi\,d\theta\,,\\
\omega_3'\,dt &= \cos\theta\,d\varphi + d\psi\,.
\end{aligned}$$

Покажем, что величины $\omega_s'\,dt$ нельзя рассматривать как дифференциалы новых углов q^σ $(\sigma = 1, 2, 3)$, однозначно связанных с углами Эйлера. Действительно, если, например, величина $\omega_1'\,dt$ является полным дифференциалом функции $q^1(\varphi, \psi, \theta)$, то из выражения

$$dq^1 = \frac{\partial q^1}{\partial\varphi}\,d\varphi + \frac{\partial q^1}{\partial\psi}\,d\psi + \frac{\partial q^1}{\partial\theta}\,d\theta$$

следует, что

$$\frac{\partial^2 q^1}{\partial\varphi\,\partial\psi} = \frac{\partial^2 q^1}{\partial\psi\,\partial\varphi}\,, \qquad \frac{\partial^2 q^1}{\partial\theta\,\partial\varphi} = \frac{\partial^2 q^1}{\partial\varphi\,\partial\theta}\,, \qquad \frac{\partial^2 q^1}{\partial\theta\,\partial\psi} = \frac{\partial^2 q^1}{\partial\psi\,\partial\theta}\,.$$

Коэффициенты при дифференциалах $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$ в выражении для $\omega_1'\,dt$ не обладают этими свойствами, так как

$$\frac{\partial}{\partial\psi}(\sin\psi\sin\theta) \neq \frac{\partial}{\partial\varphi}(0)\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\psi\sin\theta) \neq \frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\psi)\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}(0) \neq \frac{\partial}{\partial\psi}(\sin\psi)\,.$$

Таким образом, величина $\omega_1'\,dt$, как и требовалось показать, не является дифференциалом некоторого нового угла q^1. Этим принципиально отличаются проекции мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на неподвижные оси от проекций скорости полюса $\mathbf{v}_o$ на эти же оси. По данной причине и возникают трудности при переходе от вектора $\boldsymbol{\omega}$ к закону движения.

В разделе «Динамика» будет показано, что в дифференциальных уравнениях, описывающих рассматриваемый случай движения твердого тела, неизвестными функциями целесообразно считать проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси x_1, x_2, x_3, неизменно связанные с телом. Обозначая эти проекции соответственно через ω_1, ω_2, ω_3, будем иметь

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_k \mathbf{i}_k\,.$$

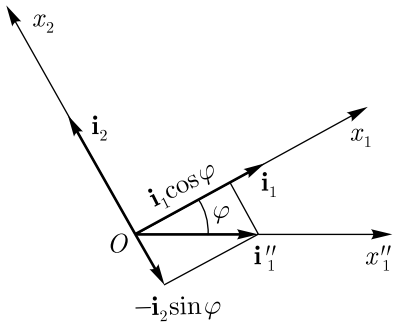

Рис. 6. Разложение вектора $\mathbf{i}_1''$

Отсюда и из формулы (2.5) следует, что для того чтобы выразить величины ω_k через углы Эйлера, необходимо разложить векторы $\mathbf{i}_3'$ и $\mathbf{i}_1''$ по базису $\{\mathbf{i}_k\}$. Из формул (1.3) и (1.11) следует, что

$$\mathbf{i}_3' = \alpha_{3k}\mathbf{i}_k = \sin\theta\sin\varphi\mathbf{i}_1 + \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i}_2 + \cos\theta\mathbf{i}_3\,.$$

Орт $\mathbf{i}_1''$, как видно из рис. 6, можно представить в виде

$$\mathbf{i}_1'' = \cos\varphi\mathbf{i}_1 - \sin\varphi\mathbf{i}_2\,.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.5), получаем

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi\,,\\
\omega_2 &= \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi\,,\\
\omega_3 &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi\,.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Проекции вектора скорости произвольной точки тела на оси подвижной системы координат найдем, используя формулу (4.1) и представление векторного произведения через определитель

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}\,.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
v_1 &= \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2\,,\\
v_2 &= \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3\,,\\
v_3 &= \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1\,.
\end{aligned} \tag{Формулы Эйлера}$$

Скорость, равную нулю, будут иметь точки, лежащие на мгновенной оси вращения, то есть точки, у которых $\mathbf{r} = \lambda\boldsymbol{\omega}$. Следовательно, уравнения

мгновенной оси относительно соответственно подвижной и неподвижной систем координат будут иметь вид

$$\frac{x_1}{\omega_1} = \frac{x_2}{\omega_2} = \frac{x_3}{\omega_3} = \lambda\,, \qquad \frac{x_1'}{\omega_1'} = \frac{x_2'}{\omega_2'} = \frac{x_3'}{\omega_3'} = \lambda\,, \qquad -\infty < \lambda < \infty\,.$$

Пусть угловая скорость известна как функция времени. Тогда уравнения можно рассматривать как параметрическое задание неподвижного и подвижного аксоидов, где в роли параметра выступает время t. При вращении твердого тела вокруг неподвижной точки аксоиды оказываются коническими поверхностями с вершиной в начале координат. Движение твердого тела в этом случае можно рассматривать как перекатывание без проскальзывания подвижного аксоида по неподвижному.

Тензор поворота[2]**.** В заключение параграфа обратим внимание на возможность пояснения полученной ранее формулы с помощью понятия тензора. Введенная выше матрица третьего порядка $\mathbf{A}$ с компонентами α_{ks} называется матрицей *тензора поворота*. Она позволяет описать изложенный в этом параграфе материал на векторно-матричном языке. Введем векторы-столбцы (1.5) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', x_3')^T$, составленные из компонент радиус-вектора точки в старой и в новой системах координат. Тогда соотношения (1.5) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\,, \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{x}'\,. \tag{4.7}$$

Ряд свойств матрицы $\mathbf{A}$, вытекающих из соотношений $\alpha_{ks} = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_s'$, был сформулирован ранее — сумма квадратов элементов в каждой строке и в каждом столбце матрицы $\mathbf{A}$ равна единице, строки и столбцы попарно ортогональны. Обратная матрица $\mathbf{A}$ совпадает с транспонированной:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}\,. \tag{4.8}$$

Из соотношения (4.8) следует, что определитель матрицы $\mathbf{A}$ равен единице. Действительно,

$$1 = \mathrm{Det}[\mathbf{E}] = \mathrm{Det}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}] = \mathrm{Det}[\mathbf{A}] \cdot \mathrm{Det}[\mathbf{A}^T] = (\mathrm{Det}[\mathbf{A}])^2\,, \tag{4.9}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Вообще говоря, из (4.9) получаем, что $\mathrm{Det}[\mathbf{A}] = \pm 1$. Однако следует принять $\mathrm{Det}[\mathbf{A}] = 1$, ибо в начальном положении при $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ имеем $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathrm{Det}[\mathbf{A}] = 1$, и при движении величина $\mathrm{Det}[\mathbf{A}]$ меняется непрерывно.

[2]Пункт «Тензор поворота» написан П. Е. Товстиком.

Если $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, то новое положение тела может быть получено из старого путем поворота вокруг некоторой оси на некоторый угол. Положение оси можно определить из условия, что она неподвижна: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Эта линейная система имеет ненулевое решение, ибо одно из собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ равно единице. Это следует из цепочки равенств:

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{A}^T) \quad \to \quad \mathrm{Det}[\mathbf{A} - \mathbf{E}] = \mathrm{Det}[\mathbf{A}] \cdot \mathrm{Det}[\mathbf{E} - \mathbf{A}]\,.$$

Повороты тела образуют некоммутативную группу. Выполнение двух последовательных поворотов с матрицами $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ дает поворот с матрицей $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1$. Это обстоятельство было использовано при выводе соотношений (1.11).

Найдем производную по времени тензора поворота. Считая в первом равенстве (4.7) вектор $\mathbf{x}$ постоянным, продифференцируем это равенство по времени: $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}$. С другой стороны, по формуле Эйлера $\mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'$. Запишем последнюю формулу в матричном виде

$$\mathbf{v}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}'\,, \qquad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Кососимметричная матрица $\mathbf{S}$, связанная с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, называется *матрицей спина*. Имеем также

$$\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}'\,. \tag{4.11}$$

Сравнивая выражения (4.10) и (4.11) при произвольном $\mathbf{x}$, получаем $\mathbf{S} = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^T$, или

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}\,.$$

Последнее равенство называется *уравнением Пуассона*. Это уравнение при заданной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ позволяет путем численного интегрирования найти компоненты тензора поворота в любой момент времени. Оно выгодно отличается от системы уравнений (4.6) тем, что не имеет особых точек. Как уже отмечалось, уравнения (4.6) имеют особые точки при $\theta = 0, \pi$.

§ 5. Плоское движение

Плоским (плоскопараллельным) движением твердого тела называется такое его движение, при котором расстояния точек этого тела до некоторой заданной плоскости π сохраняются неизменными. Отсюда следует, что век-

торы скоростей точек твердого тела должны быть параллельны плоскости π, а вектор угловой скорости — перпендикулярен ей, так как только в этом случае второе слагаемое в формуле (2.6) будет всегда вектором, параллельным плоскости π (рис. 7).

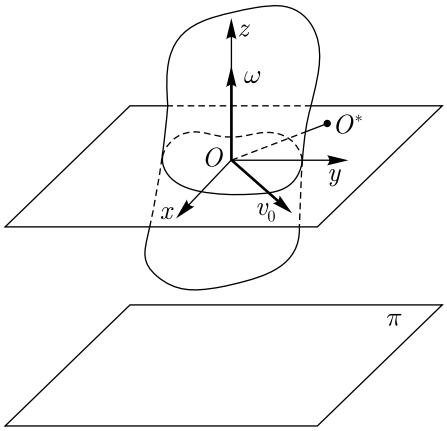

Рис. 7. Плоское движение твердого тела

Выберем систему координат $Oxyz$, связанную с телом, так, чтобы ось z была перпендикулярна плоскости π. При этом формула (2.6) при использовании представления векторного произведения через определитель запишется в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} .$$

Отсюда

$$v_x = v_{ox} - \omega_z y \,, \qquad v_y = v_{oy} + \omega_z x \,, \qquad v_z = 0 \,.$$

Из этих формул видно, что в любом сечении тела плоскостью $z = \mathrm{const}$ распределение скоростей будет одним и тем же. Поэтому в дальнейшем речь будет идти только о сечении тела плоскостью $z = 0$. Отметим, что если за полюс взять точку O^*, скорость которой равна нулю, то распределение скоростей будет таким, как если бы тело в данный момент вращалось вокруг оси, проходящей через точку O^* (рис. 7). Эта точка называется *мгновенным центром скоростей*. Ее координаты найдем из уравнения (2.11), полагая в нем $\mathbf{v}_o^* = 0$ и $O' = O^*$. Пусть $\overrightarrow{OO^*} = x^*\mathbf{i} + y^*\mathbf{j}$, тогда

уравнение (2.11) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x^* & y^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega_z \end{vmatrix} = v_{ox}\mathbf{i} + v_{oy}\mathbf{j}\,,$$

откуда

$$x^* = -\frac{v_{oy}}{\omega_z}\,, \qquad y^* = \frac{v_{ox}}{\omega_z}\,. \tag{5.1}$$

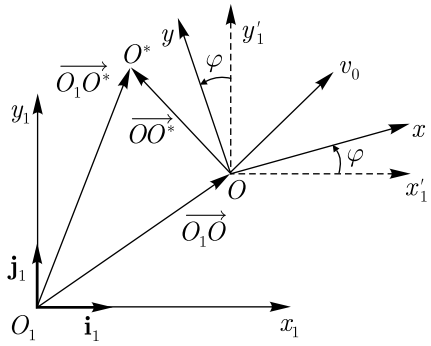

Рис. 8. Мгновенный центр скоростей в неподвижной системе координат

Определим положение мгновенного центра скоростей относительно неподвижной системы $O_1x_1y_1$ (рис. 8). Имеем

$$\overrightarrow{O_1O^*} = x_1^*\mathbf{i}_1 + y_1^*\mathbf{j}_1 = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OO^*} = x_{o1}\mathbf{i}_1 + y_{o1}\mathbf{j}_1 + \overrightarrow{OO^*}\,.$$

Проекции вектора $\overrightarrow{OO^*}$ на неподвижные оси найдем из уравнения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ x_1'^* & y_1'^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega_z \end{vmatrix} = \dot{x}_{o1}\mathbf{i}_1 + \dot{y}_{o1}\mathbf{j}_1\,.$$

Таким образом,

$$x_1^* = x_{o1} - \frac{\dot{y}_{o1}}{\omega_z}\,, \qquad y_1^* = y_{o1} + \frac{\dot{x}_{o1}}{\omega_z}\,. \tag{5.2}$$

Если на неподвижной $O_1x_1y_1$ и подвижной Oxy плоскостях отмечать положения мгновенного центра скоростей для разных моментов, то получим две кривые, называемые соответственно *неподвижной* и *подвижной центроидами*. Их уравнения находят из систем (5.1) и (5.2).

Рассмотрим две произвольные точки A и B. Пусть заданы направление и скорость точки A. Относительно точки B известно, вдоль какой прямой направлена ее скорость. Восставим перпендикуляры к направлениям скоростей в точках A и B (рис. 9). Тогда если направление скорости в точкеA не перпендикулярно отрезку AB и не параллельно направлению скорости в точке B, то эти перпендикуляры пересекутся в мгновенном центре скоростей. Модуль ω_z найдем как отношение v_A/O^*A. Если направления скоростей в точках A и B параллельны отрезку AB, то $O^*A = \infty$, а $\omega_z = 0$. Это означает, что в данный момент тело движется поступательно, и скорость произвольной точки M равна скорости точки A.

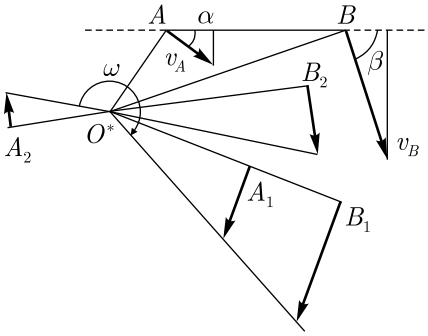

Рис. 9. Нахождение мгновенного центра скоростей

При решении задач на плоское движение часто бывает удобно пользоваться тем, что проекции скоростей точек A и B на направление отрезка AB равны между собой. Действительно, принимая точку A за полюс, устанавливаем, что скорость точки B согласно формуле (2.6) такова:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}\,. \tag{5.3}$$

Умножая обе части равенства скалярно на единичный вектор $\overrightarrow{AB}/AB$ и учитывая, что вектор $\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ перпендикулярен $\overrightarrow{AB}$, получаем

$$(\mathbf{v}_A \cdot \overrightarrow{AB})/AB = (\mathbf{v}_B \cdot \overrightarrow{AB})/AB\,,$$

то есть $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$ (см. рис. 9).

Рассмотрим теперь случай, когда скорости точек A_1 и B_1 перпендикулярны отрезку A_1B_1 и направлены в одну сторону (см. рис. 9). Положение

мгновенного центра и модуль угловой скорости находим из пропорции

$$\frac{v_{A_1}}{O^*A_1} = \frac{v_{B_1}}{O^*B_1} = \frac{v_{B_1} - v_{A_1}}{A_1B_1} = |\omega_z| \,.$$

Если же скорости точек A_2 и B_2 перпендикулярны отрезку A_2B_2 и направлены в разные стороны, то мгновенный центр лежит на отрезке A_2B_2, причем

$$\frac{v_{A_2}}{O^*A_2} = \frac{v_{B_2}}{O^*B_2} = \frac{v_{A_2} + v_{B_2}}{A_2B_2} = |\omega_z| \,.$$

Направление вращения определяется непосредственно по направлению скоростей точек A_2 и B_2.

Ускорение произвольной точки M при плоскопараллельном движении твердого тела, как следует из общей формулы (2.12), складывается из ускорения полюса и ускорения во вращательном движении вокруг полюса. Примем за полюс произвольную точку A. Тогда в соответствии с формулами (2.12) и (3.5) ускорения точек A и B оказываются связанными соотношением

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \varepsilon_z AB\,\boldsymbol{\tau} - \omega_z^2 \overrightarrow{AB} \,, \tag{5.4}$$

где $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$ — угловое ускорение, а $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, перпендикулярный вектору $\overrightarrow{AB}$. Если начало вектора $\boldsymbol{\tau}$ поместить в точку B, то он будет ориентирован в направлении поворота отрезка AB вокруг точки A против часовой стрелки (рис. 10).

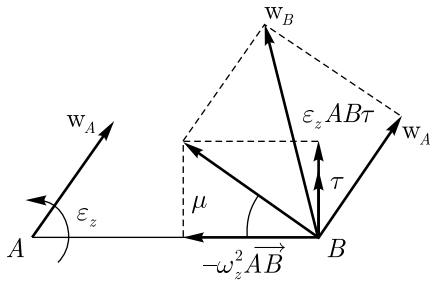

Рис. 10. Ускорение точки при плоском движении

Из выражения (5.4) следует, что точка B может совпасть с такой точкой Q, для которой $\mathbf{w}_Q = 0$. Положение точки Q, называемой *мгновенным центром ускорений*, определяется из уравнения

$$\mathbf{w}_A = \omega_z^2 \overrightarrow{AQ} - \varepsilon_z AQ\,\boldsymbol{\tau} \,, \tag{5.5}$$

в котором заданными являются величины $\mathbf{w}_A$, ε_z и ω_z^2.

Рассматривая уравнение (5.5) как разложение вектора $\mathbf{w}_A$ по двум взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 11), находим, что

$$|\overrightarrow{AQ}| = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon_z^2 + \omega_z^4}}\,.$$

Направление вектора $\overrightarrow{AQ}$ определяем, поворачивая вектор $\mathbf{w}_A$ вокруг точки A на угол $\mu = \operatorname{arctg}(\varepsilon/\omega_z^2)$ $(-\pi/2 < \mu < \pi/2)$ и считая, как обычно, поворотом в положительном направлении поворот против часовой стрелки.

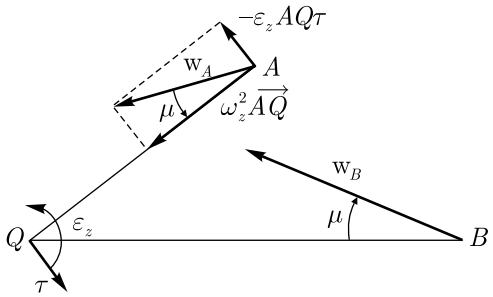

Рис. 11. Нахождение мгновенного центра ускорений

Ускорение произвольной точки B пропорционально расстоянию до мгновенного центра ускорения Q и равно $QB\sqrt{\varepsilon_z^2 + \omega_z^4}$. Вектор $\mathbf{w}_B$ направлен под углом μ к вектору $\overrightarrow{BQ}$ в соответствии со знаком ε_z (рис. 11).

Таким образом, поле ускорений при плоскопараллельном движении по строению соответствует полю ускорений при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Различие состоит в том, что ось, вдоль которой ускорение равно нулю, и в твердом теле, и в пространстве в каждый момент занимает новое положение. Эта ось, вообще говоря, не совпадает с осью, точки которой в данный момент имеют скорости, равные нулю. Мгновенный центр скоростей O^* и мгновенный центр ускорений Q представляют собой, вообще говоря, две разные точки, совпадающие во все время движения только при вращении тела вокруг неподвижной оси.

Глава III
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Авторы: *Н. Н. Пóляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков*

Глава начинается с изучения сложного движения точки. Показывается, что описание абсолютного движения точки можно связать с описанием более простых движений — относительного и нескольких переносных. Результаты, полученные для сложного движения точки, применяются для изучения сложения движений твердого тела. Рассматривается сложение поступательных и вращательных движений твердого тела, пара вращений, кинематический винт.

§ 1. Сложное движение точки

Пусть даны две системы отсчета: неподвижная $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ и подвижная $Ox_1x_2x_3$ (см. рис. 1 главы II). В этом случае движение точки M относительно системы $Ox_1x_2x_3$ называется *относительным*, а относительно системы $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ — *абсолютным*. Абсолютное движение точки M называется иногда еще *сложным движением*, так как его можно рассматривать как происходящее от движения точки по отношению к подвижному пространству $Ox_1x_2x_3$ и от движения этого пространства вместе с точкой относительно системы $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$.

Если мысленно в данный момент точку M лишить относительного движения, то она все же будет двигаться относительно системы $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ вследствие движения самой системы $Ox_1x_2x_3$. Это воображаемое для данного момента времени движение точки M называется *переносным движением*. Оно совпадает с движением той точки подвижной системы, с которой в данный момент совпадает точка M. Следовательно, скорость и ускорение точки при ее переносном движении могут быть вычислены соответственно по формулам (2.6), (2.12) главы II. Таким образом, имеем

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_o + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\,. \tag{1.2}$$

Эти векторы снабжены индексом e от французского слова *entraîner* — переносить, увлекать с собой.

При вычислении скорости и ускорения точки как при ее относительном, так и при ее абсолютном движении воспользуемся заданием этих движений в декартовых системах координат. Тогда в соответствии с рис. 1 гла-

вы II и формулами (1.5), (1.6) главы I будем иметь:

$$\mathbf{v}_r = \dot{x}_1\mathbf{i}_1 + \dot{x}_2\mathbf{i}_2 + \dot{x}_3\mathbf{i}_3\,, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{w}_r = \ddot{x}_1\mathbf{i}_1 + \ddot{x}_2\mathbf{i}_2 + \ddot{x}_3\mathbf{i}_3\,, \quad \mathbf{v}_a = \dot{\xi}_1\mathbf{i}'_1 + \dot{\xi}_2\mathbf{i}'_2 + \dot{\xi}_3\mathbf{i}'_3\,, \quad \mathbf{w}_a = \ddot{\xi}_1\mathbf{i}'_1 + \ddot{\xi}_2\mathbf{i}'_2 + \ddot{\xi}_3\mathbf{i}'_3\,. \tag{1.4}$$

Индексы r и a происходят соответственно от французских слов *relative* — относительная и *absolue* — абсолютная.

Рассмотрим вопрос о том, как связаны друг с другом векторы $\mathbf{v}_a$, $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_e$. По определению скорости в системе $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ имеем

$$\mathbf{v}_a = \dot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\rho}_o + \mathbf{r}\right) = \mathbf{v}_o + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,. \tag{1.5}$$

Вектор $\mathbf{r}$ изменяется во времени как за счет того, что изменяются его координаты относительно подвижной системы отсчета, так и за счет движения подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_k\mathbf{i}_k\right) = \dot{x}_k\mathbf{i}_k + x_k\,\frac{d\mathbf{i}_k}{dt}\,.$$

Так как в соответствии с формулой Эйлера (2.4) главы II

$$\frac{d\mathbf{i}_k}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}_k\,,$$

то

$$x_k\,\frac{d\mathbf{i}_k}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times x_k\mathbf{i}_k = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,.$$

Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}_k\mathbf{i}_k + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,. \tag{1.6}$$

Эта формула может быть применена не только к вектору $\mathbf{r}$, но и к любому вектору $\mathbf{a}$, изучаемому в двух системах координат, одна из которых заданным образом движется относительно другой. Применительно к вектору $\mathbf{a}$ формула (1.6) может быть записана в виде

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}\,. \tag{1.7}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость той системы координат, которая считается подвижной, $d\mathbf{a}/dt$ — *полная*, или *абсолютная производная* по времени, то есть производная в той системе, которая является неподвижной. Соответственно $d^*\mathbf{a}/dt$ — *локальная*, или *относительная производная*

по времени, то есть производная в той системе, которая рассматривается как подвижная.

Из формул (1.5), (1.6), (1.3) и (1.1) следует, что

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e\,, \tag{1.8}$$

то есть абсолютная скорость точки равна сумме векторов относительной и переносной скоростей.

Рассмотрим теперь *абсолютное ускорение* $\mathbf{w}_a$. По определению оно равно полной производной от вектора абсолютной скорости $\mathbf{v}_a$. При вычислении данной производной воспользуемся выражением (1.8), представив его в виде

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r\,. \tag{1.9}$$

Отсюда при учете формулы (1.7) получаем

$$\mathbf{w}_a = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{w}_o + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right) + \frac{d^*\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r\,.$$

Так как в соответствии с выражениями (1.3) и (1.4)

$$\frac{d^*\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_r\,, \qquad \frac{d^*\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{w}_r\,,$$

то

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_o + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{w}_r\,.$$

Учитывая формулу (1.2), имеем

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c\,, \qquad \mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r\,. \tag{1.10}$$

Таким образом, *абсолютное ускорение* складывается из *относительного* $\mathbf{w}_r$, *переносного* $\mathbf{w}_e$ и *добавочного* $\mathbf{w}_c$ ускорений. Последнее называется также *ускорением Кориолиса*.

Равенство (1.8) выражает *теорему сложения скоростей*, а соотношение (1.10) — *теорему сложения ускорений* при сложном движении точки.

Пример 1. *Разложение скорости и ускорения точки по осям полярной системы координат.* Рассмотрим плоское движение точки M, задаваемое в полярной системе координат уравнениями движения

$$\rho = \rho(t)\,, \quad \psi = \psi(t)\,.$$

Полярная система координат задает основной базис $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\psi\}$. Найдем проекции скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{w}$ точки на оси полярной системы координат, исходя из теории сложного движения точки.

Обычно при решении практических задач на сложное движение точки систему координат $Ox_1x_2x_3$ связывают с некоторым твердым телом, по которому перемещается точка, причем движение этого тела относительно системы $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ задается. В нашем случае мысленно можно представить себе тонкую трубочку, вдоль которой движется точка M по закону $\rho = \rho(t)$. С этой трубочкой свяжем систему координат Ox_1x_2, которая будет вращаться в системе координат $O_1\xi_1\xi_2$ вокруг оси $O_1\xi_3$ по закону $\psi = \psi(t)$ (см. рис. 1).

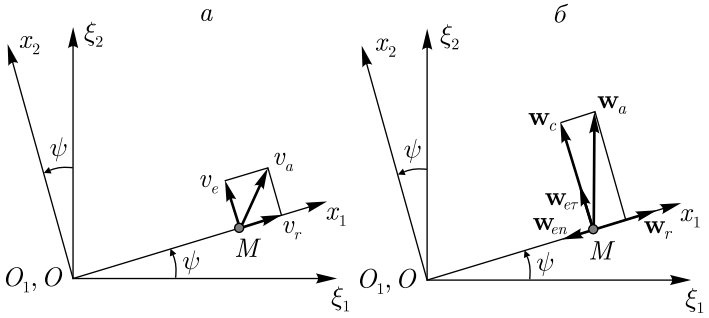

Рис. 1. Проекции скорости и ускорения точки на оси полярной системы координат

Тогда относительная скорость будет равна $v_r = \dot{\rho}$, а ее вектор будет направлен по оси Ox_1. В свою очередь переносная скорость точки M равна скорости той точки трубочки, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M. При вращении трубочки по закону $\psi = \psi(t)$ эта скорость равна $v_e = \dot{\psi}\rho$, а ее вектор направлен перпендикулярно оси Ox_1 (см. рис. 1, *а*).

Проектируя формулу (1.8) на оси полярной системы координат, имеем

$$\begin{gathered} pr_{\mathbf{e}_\rho}\mathbf{v} = \dot{\rho}\,, \quad pr_{\mathbf{e}_\psi}\mathbf{v} = \dot{\psi}\rho\,, \\ v \equiv |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\psi}^2\rho^2}\,. \end{gathered} \tag{1.11}$$

При использовании формулы (1.10) следует иметь в виду, что ускорения $\mathbf{w}_r$ и $\mathbf{w}_e$ могут иметь как касательную, так и нормальную составляющие. В нашем случае из-за прямолинейности относительного движения $w_{rn} = 0$, поэтому

$$w_r \equiv w_{r\tau} = \ddot{\rho}\,.$$

В отличие от этого переносное ускорение имеет обе составляющие, при этом (так как переносное движение характеризуется вращением точки трубочки по закону $\psi = \psi(t)$) имеем

$$w_{e\tau} = \ddot{\psi}\rho\,, \quad w_{en} = \dot{\psi}^2\rho\,.$$

Векторы $\mathbf{w}_{e\tau}$ и $\mathbf{w}_{en}$ показаны на рис. 1, *б*.

Движение системы Ox_1x_2 относительно системы $O_1\xi_1\xi_2$ является вращением первой системы вокруг оси $O_1\xi_3$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\,\mathbf{k}_3$. Поэтому из формулы $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ имеем

$$w_c = 2\dot{\psi}\dot{\rho}\,,$$

причем вектор $\mathbf{w}_c$ направлен так же, как и вектор $\mathbf{w}_{e\tau}$. Проектируя вектор

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_{e\tau} + \mathbf{w}_{en} + \mathbf{w}_c$$

на оси полярной системы координат, имеем (см. рис. 1, *б*):

$$\begin{gathered} pr_{\mathbf{e}_\rho}\mathbf{w} = \ddot{\rho} - \dot{\psi}^2\rho\,, \quad pr_{\mathbf{e}_\psi}\mathbf{w} = \ddot{\psi}\rho + 2\dot{\psi}\dot{\rho}\,, \\ w \equiv |\mathbf{w}| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \dot{\psi}^2\rho)^2 + (\ddot{\psi}\rho + 2\dot{\psi}\dot{\rho})^2}\,. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Отметим, что на рис. 1 направления векторов соответствуют случаю, когда

$$\dot{\rho} > 0\,, \quad \ddot{\rho} > 0\,, \quad \dot{\psi} > 0\,, \quad \ddot{\psi} > 0\,.$$

Формулы (1.11) и (1.12) совпадают с формулами, полученными в § 3, 8 главы I для случая цилиндрической системы координат, частным случаем которой является рассматриваемая в данном примере полярная система координат.

Обратим внимание на то, что благодаря использованию теории сложного движения точки удалось любое произвольное плоское движение точки представить как суперпозицию двух простейших движений — прямолинейного и вращения точки по окружности.

§ 2. Скорость точки при нескольких переносных движениях

Пусть точка M движется относительно системы $O_1x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}$, перемещающейся относительно системы $O_2x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(2)}$, которая, в свою очередь, перемещается относительно системы $O_3x_1^{(3)}x_2^{(3)}x_3^{(3)}$, и т. д. Как будет выражаться скорость точки M относительно системы $O_{n+1}x_1^{(n+1)}x_2^{(n+1)}x_3^{(n+1)}$, принимаемой за абсолютную, через относительную скорость $\mathbf{v}_r^{(1)}$ относительно $O_1x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}$ и скорости переносных движений, число которых равно n?

На основании формулы (1.9), которая выражает абсолютную скорость точки через ее относительную и переносную скорости в случае одной подвижной системы, для скорости точки относительно системы $O_2x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(2)}$ (рис. 2) имеем

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_r^{(1)}, \qquad \mathbf{r}_1 = \overrightarrow{O_1M},$$

где $\mathbf{v}_1$ — скорость начала O_1 относительно системы $O_2x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(2)}$, а $\boldsymbol{\omega}_1$ — угловая скорость поворота осей $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ относительно осей $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$.

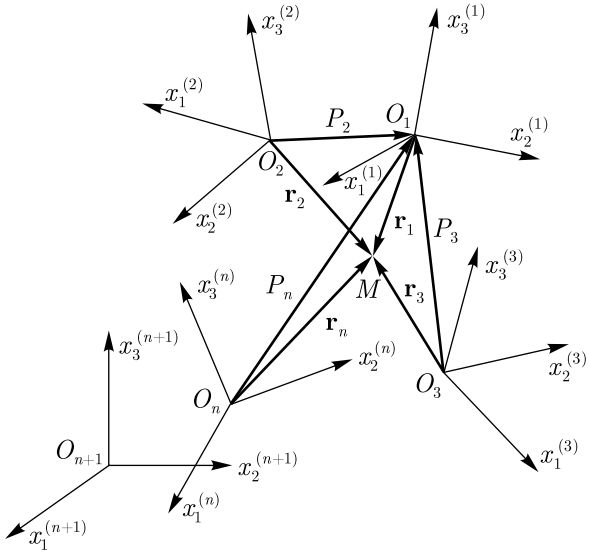

Рис. 2. Скорость точки при нескольких переносных движениях

Совершенно аналогично выражение для скорости точки M относительно системы $O_3x_1^{(3)}x_2^{(3)}x_3^{(3)}$ можно записать в виде

$$\mathbf{v}_r^{(3)} = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_r^{(2)}\,, \qquad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{O_2M}\,,$$

где $\mathbf{v}_2$ — скорость начала O_2 относительно системы $O_3x_1^{(3)}x_2^{(3)}x_3^{(3)}$, а $\boldsymbol{\omega}_2$ — угловая скорость поворота осей $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ относительно осей $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$.

Устанавливая закономерность, имеем

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r^{(n+1)} = \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_r^{(n)}\,, \qquad \mathbf{r}_n = \overrightarrow{O_nM}\,.$$

Выражая последовательно $\mathbf{v}_r^{(k)}$ через $\mathbf{v}_r^{(k-1)}$, $k = n, n-1, \ldots, 2$, получаем

$$\mathbf{v}_a = \sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{v}_\nu + \boldsymbol{\omega}_\nu \times \mathbf{r}_\nu) + \mathbf{v}_r^{(1)}\,. \tag{2.1}$$

Учитывая, что $\mathbf{r}_\nu = \boldsymbol{\rho}_\nu + \mathbf{r}_1$, где $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор, проведенный из начала O_ν в начало O_1 (рис. 2), выражение (2.1) можно представить в виде

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_r^{(1)}\,, \tag{2.2}$$

где

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_\nu\,, \qquad \mathbf{V} = \sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{v}_\nu + \boldsymbol{\omega}_\nu \times \boldsymbol{\rho}_\nu)\,, \qquad \boldsymbol{\rho}_\nu = \overrightarrow{O_\nu O_1}\,.$$

Векторы $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{V}$ никак не связаны с относительным движением точки в системе $O_1 x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$, и поэтому они характеризуют суммарное переносное движение.

Формула (2.2) полностью идентична формуле (1.9) и является выражением абсолютной скорости точки M. Система $O_1 x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$ вращается вокруг начала O_1 с мгновенной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, а начало O_1 движется со скоростью $\mathbf{V}$.

§ 3. Сложение движений твердого тела

Пусть дано n подвижных систем координат $O_k x_1^{(k)} x_2^{(k)} x_3^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$ (см. рис. 2). Можно считать, что с каждой из них связано абсолютно твердое тело. Движение k-го тела относительно $(k+1)$-го предполагаем известным. Оно задается скоростью поступательного движения этого тела $\mathbf{v}_k$ вместе с полюсом O_k и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_k$ вращения вокруг того же полюса. Требуется определить, каким будет движение первого тела относительно $(n+1)$-го, то есть относительно системы координат $O_{n+1} x_1^{(n+1)} x_2^{(n+1)} x_3^{(n+1)}$.

Воспользуемся результатами, полученными в предыдущем параграфе. Скорость $\mathbf{v}$ произвольной точки M первого тела относительно $(n+1)$-го находим по формуле (2.2), в которой скорость $\mathbf{v}_r^{(1)}$ той же точки относительно системы $O_1 x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$ равна нулю. В результате имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_1\,, \qquad \mathbf{r}_1 = \overrightarrow{O_1 M}\,, \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{V} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\rho}_k)\,, \qquad \mathbf{\Omega} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_k\,, \qquad \boldsymbol{\rho}_k = \overrightarrow{O_k O_1}\,. \tag{3.2}$$

Таким образом, скорость точки M такова, как если бы первое тело двигалось поступательно со скоростью $\mathbf{V}$, вращаясь вокруг полюса O_1 с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$.

Система координат $O_k x_1^{(k)} x_2^{(k)} x_3^{(k)}$, связанная с k-м телом, выбирается произвольно. Свяжем с каждым телом новую систему координат $O'_k x_1^{(k)'} x_2^{(k)'} x_3^{(k)'}$. Угловая скорость твердого тела, как было показано в главе II, не зависит от выбора полюса. Следовательно, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}'_k$

системы $O'_k x_1^{(k)'} x_2^{(k)'} x_3^{(k)'}$ относительно системы $O'_{k+1} x_1^{(k+1)'} x_2^{(k+1)'} x_3^{(k+1)'}$ будет равна угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_k$. Скорость $\mathbf{v}$ точки M относительно $(n+1)$-го тела инвариантна относительно выбора системы координат. Поэтому при выборе новых осей получим ту же скорость, которая теперь по аналогии с выражениями (3.1) и (3.2) и при учете того, что $\boldsymbol{\omega}'_k = \boldsymbol{\omega}_k$, запишется в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_1 \,, \qquad \mathbf{r}'_1 = \overrightarrow{O'_1 M} \,, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{V}' = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{v}'_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\rho}'_k) \,, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_k \,, \qquad \boldsymbol{\rho}'_k = \overrightarrow{O'_k O'_1} \,. \tag{3.4}$$

Здесь $\mathbf{v}'_k$ — скорость нового полюса O'_k относительно $(k+1)$-го тела. Со скоростью $\mathbf{v}_k$ старого полюса она связана соотношением

$$\mathbf{v}'_k = \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \overrightarrow{O_k O'_k} \,. \tag{3.5}$$

Сравнивая выражение (3.3) с выражением (3.1) и учитывая, что

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{O_1 O'_1} + \mathbf{r}'_1 \,,$$

получаем

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{O_1 O'_1} \,. \tag{3.6}$$

Отметим, что эта формула аналогична формуле (3.5).

Таким образом, угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ инвариантна относительно выбора системы координат, а скорость поступательного движения при переходе к новому полюсу O'_1 вычисляется по формуле (3.6).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Сложение поступательных движений. Пусть все тела движутся поступательно относительно друг друга, то есть все $\boldsymbol{\omega}_k = 0$. Тогда и суммарное движение является поступательным, причем его скорость, как следует из формул (3.1), (3.2), такова:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k \,.$$

Сложение вращений вокруг пересекающихся осей. Пусть все $\mathbf{v}_k = 0$ и пусть все $\boldsymbol{\omega}_k$, проходящие через точки O_k, пересекаются в одной

точке O. Начала всех подвижных систем координат удобно переместить в эту точку, положив $O'_k = O,\ k = \overline{1,n}$. Тогда (рис. 3)

$$\overrightarrow{O_k O'_k} = \lambda_k \boldsymbol{\omega}_k\,, \qquad \boldsymbol{\rho}'_k = \overrightarrow{O'_k O'_1} = 0\,,$$

и поэтому в соответствии с формулами (3.5), (3.4)

$$\mathbf{v}'_k = \mathbf{v}_k = 0\,, \qquad \mathbf{V}' = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\rho}'_k = 0\,, \qquad k = \overline{1,n}\,.$$

При этом согласно формуле (3.3) скорость произвольной точки тела можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}\,, \qquad \mathbf{r} = \overrightarrow{OM}\,.$$

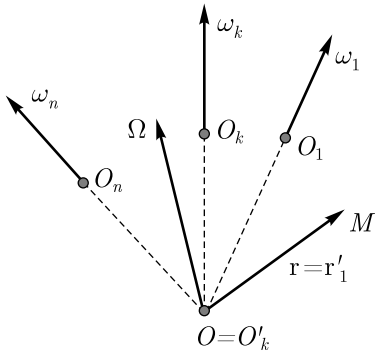

Рис. 3. Сложение вращений вокруг пересекающиеся осей

Таким образом, при одновременном вращении твердого тела вокруг мгновенных осей, пересекающихся в одной точке, получаем результирующее вращение с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, равной геометрической сумме мгновенных угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_k$. Направление результирующей мгновенной оси есть направление вектора $\boldsymbol{\Omega}$, а точка пересечения O является неподвижной точкой. Наиболее простым примером такого сложения вращений является случай двух вращений вокруг осей, пересекающихся в одной точке (рис. 4).

Случай пары вращений. Пусть $\boldsymbol{\Omega} = 0$. Тогда

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\rho}_k)\,, \qquad \boldsymbol{\rho}_k = \overrightarrow{O_k O_1}\,,$$

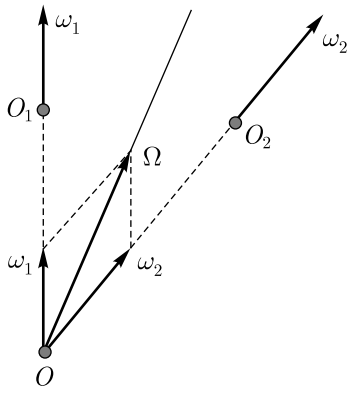

Рис. 4. Сложение вращений вокруг двух пересекающихся осей

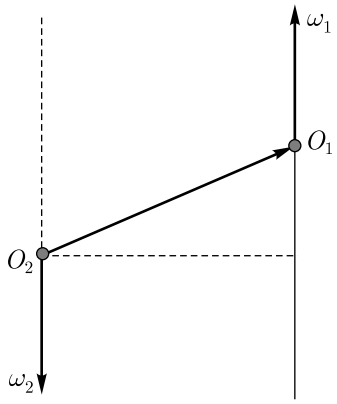

Рис. 5. Пара вращений

то есть скорости всех точек тела между собой равны и, следовательно, тело совершает поступательное движение.

Особенно интересен случай *пары вращений*, под которой подразумевается совокупность двух векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, имеющих параллельные линии действия и таких, что $\boldsymbol{\omega}_2 = -\boldsymbol{\omega}_1$ (рис. 5).

Считая для простоты $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$, получаем

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = 0\,,$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{O_2O_1} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_2O_1} \times \boldsymbol{\omega}_1\,.$$

Векторное произведение $\overrightarrow{O_2O_1} \times \boldsymbol{\omega}_1 = \overrightarrow{O_1O_2} \times \boldsymbol{\omega}_2$ называется *моментом пары вращений*. Таким образом, пара вращений создает поступательное движение со скоростью, равной моменту пары. Скорость эта равна ωp, где $\omega = |\omega_1|$, а p — кратчайшее расстояние между линиями действия векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ (*плечо пары*), и направлена перпендикулярно плоскости пары по правилу правого винта.

Эквивалентность пары вращений поступательному движению позволяет утверждать, что вращение тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O', эквивалентно вращению с той же угловой скоростью вокруг оси, проходящей через точку O параллельно первой, и поступательному движению со скоростью $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{O'O}$. Справедливость данного утверждения следует непосредственно из рис. 6. Действительно, если в точке O поместить эквивалентную нулю систему векторов $\boldsymbol{\omega}$, $-\boldsymbol{\omega}$, то вектор $\boldsymbol{\omega}(O')$ будет эквивалентен $\boldsymbol{\omega}(O)$ и паре $\{\boldsymbol{\omega}(O'), -\boldsymbol{\omega}(O)\}$ с моментом $\mathbf{v} = \overrightarrow{OO'} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{O'O}$.

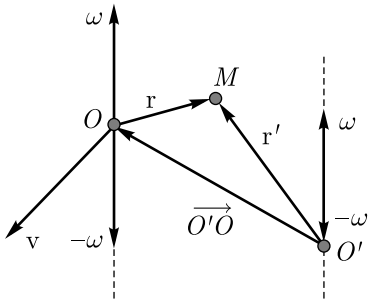

Рис. 6. Эквивалентность пары вращений поступательному движению

В этом можно убедиться также, рассмотрев скорость произвольной точки M. При вращении тела вокруг оси, проходящей через точку O', скорость точки M такова:

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \qquad \mathbf{r}' = \overrightarrow{O'M}.$$

Представив $\mathbf{r}'$ в виде $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'O} + \mathbf{r}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, получим

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{O'O} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

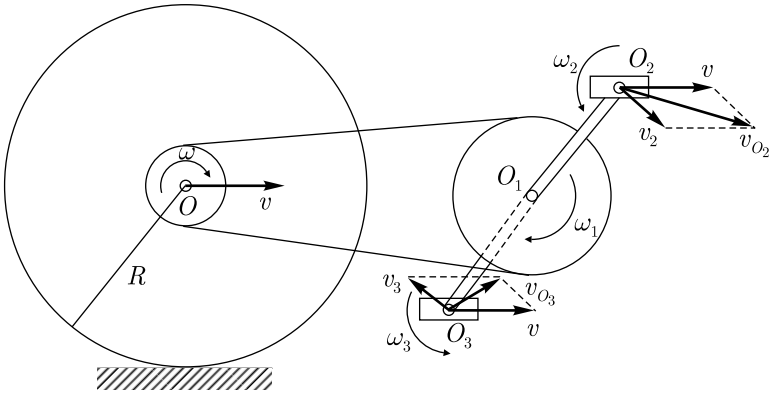

Рис. 7. Движение педалей велосипеда

что соответствует переходу к вращению вокруг параллельной оси благодаря введению пары вращений.

Пример 2. Рассмотрим движение велосипедной педали с точки зрения сложения движений. Пусть рама велосипеда движется со скоростью $\mathbf{v}$ (см. рис. 7), с такой же скоростью будет двигаться центр O заднего колеса велосипеда. Если колесо радиуса R катится без проскальзывания, то в его нижней точке находится мгновенный центр скоростей, поэтому оно вращается по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega = v/R$. При движении велосипедиста без использования свободного хода угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ создается за счет вращения кривошипов O_1O_2 и O_1O_3 с угловой скоростью $\omega_1 = \omega\, z/z_1$, где z и z_1 — количества зубцов малого и большого зубчатых колес, насаженных на оси O и O_1. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_1$ соответствует вращению кривошипов по часовой стрелке. По отношению к кривошипам велосипедист вращает педали против часовой стрелки с угловыми скоростями $\omega_2 = \omega_1$ и $\omega_3 = \omega_1$. Таким образом, относительно рамы каждая педаль участвует в паре вращений: в переносном движении во вращении кривошипа вокруг точки O_1 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, и в относительном движении во вращении вокруг точки O_2 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2 = -\boldsymbol{\omega}_1$ (или вокруг точки O_3 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_3 = -\boldsymbol{\omega}_1$). Как было показано, пара вращений эквивалентна поступательному движению со скоростью $\mathbf{v}_k = \overrightarrow{O_1O_k} \times \boldsymbol{\omega}_k$. Здесь $k = 2$ для верхней педали и $k = 3$ для нижней педали. В результате можно считать, что по отношению к неподвижной системе координат для педалей имеет место сложение двух поступательных движений: переносного движения вместе с рамой со скоростью $\mathbf{v}$ и относительного движения по отношению к раме со скоростью $\mathbf{v}_k$, $k = 2, 3$. При сложении поступательных движений скорости векторно складываются, результаты этих сложений показаны на рис. 7. Поэтому в данный момент все точки верхней педали двигаются относительно неподвижной системы координат со скоростями $\mathbf{v}_{O_2} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_2$, а все точки нижней педали — со скоростями $\mathbf{v}_{O_3} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_3$.

§ 4. Кинематический винт

Вернемся к формуле (3.1)[1]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}\,, \qquad \mathbf{r} = \overrightarrow{OM}\,. \tag{4.1}$$

Пусть векторы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Omega}$, не равные нулю, образуют в точке O угол α (рис. 8).

Разложим вектор $\mathbf{V}$ на вектор $\mathbf{V}^*$, направленный по линии действия $\mathbf{\Omega}$, и вектор $\mathbf{V} - \mathbf{V}^*$, перпендикулярный $\mathbf{\Omega}$. Вектор $\mathbf{V}^*$ можно представить в виде

$$\mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{\Omega}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Omega})}{\Omega^2} = \frac{V\cos\alpha\,\mathbf{\Omega}}{\Omega} = \frac{\Omega_k \mathbf{i}_k (V_\nu \Omega_\nu)}{\Omega^2}\,. \tag{4.2}$$

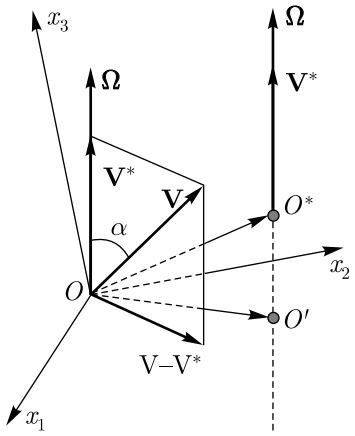

Рис. 8. Построение мгновенной винтовой оси

При переходе к новому полюсу O', как было показано, вектор $\mathbf{\Omega}$ не изменяется, а к вектору $\mathbf{V}$ добавляется вектор $\mathbf{\Omega}\times\overrightarrow{OO'}$ (см. формулу (3.6)), перпендикулярный вектору $\mathbf{\Omega}$, а значит, и вектору $\mathbf{V}^*$. Отсюда следует, что вектор $\mathbf{V}^*$, как и вектор $\mathbf{\Omega}$, не зависит от выбора полюса. При переходе к новому полюсу изменяется только вектор $\mathbf{V} - \mathbf{V}^*$, причем

$$\mathbf{V}' - \mathbf{V}^* = \mathbf{V} - \mathbf{V}^* + \mathbf{\Omega} \times \overrightarrow{OO'}\,.$$

[1] В данном параграфе для упрощения записи у всех обозначений, относящихся к первому телу, индекс 1 опускаем.

Выбором точки O' всегда можно добиться выполнения равенства $\mathbf{V}' = \mathbf{V}^*$. В векторной форме уравнение линии, вдоль которой $\mathbf{V}' = \mathbf{V}^*$, таково:

$$\overrightarrow{OO'} \times \mathbf{\Omega} = \mathbf{V} - \mathbf{V}^* \,. \tag{4.3}$$

Если полюс O' лежит на этой прямой, то формула (3.3) принимает вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}^* + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}' \,, \qquad \mathbf{r}' = \overrightarrow{O'M} \,.$$

Отсюда видно, что распределение скоростей в теле таково, как будто оно в данный момент вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ вокруг указанной прямой и одновременно движется поступательно вдоль нее со скоростью $\mathbf{V}^*$. Напомним, что такое движение твердого тела называется *мгновенным винтовым движением.*

Таким образом, в самом общем случае совокупность нескольких поступательных и вращательных движений по распределению скоростей для заданного момента времени эквивалентна мгновенному винтовому движению, характеризуемому векторами $\mathbf{V}^*$ и $\mathbf{\Omega}$, направленными вдоль мгновенной винтовой оси. Совокупность векторов $\mathbf{V}^*$ и $\mathbf{\Omega}$, лежащих на одной прямой, образует так называемый *кинематический винт.*

Уравнение мгновенной винтовой оси в канонической форме таково:

$$\frac{x_1 - x_1^*}{\Omega_1} = \frac{x_2 - x_2^*}{\Omega_2} = \frac{x_3 - x_3^*}{\Omega_3} = \lambda \,, \qquad -\infty < \lambda < +\infty \,.$$

Здесь $x_1,\ x_2,\ x_3$ — координаты текущей точки O', а $x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*$ — координаты той точки O^* этой прямой, для которой

$$\mathbf{\Omega} \cdot \overrightarrow{OO^*} = 0 \,. \tag{4.4}$$

Из уравнения (4.3) следует, что

$$\mathbf{\Omega} \times (\overrightarrow{OO^*} \times \mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{V} - \mathbf{V}^*) = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} \,.$$

Используя представление двойного векторного произведения в виде

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \,,$$

а также учитывая соотношение (4.4), найдем, что координаты искомой точки O^* могут быть найдены по формуле

$$\overrightarrow{OO^*} = \frac{\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}}{\Omega^2} = x_k^* \mathbf{i}_k = \frac{1}{\Omega^2} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \,.$$

Часто используется уравнение мгновенной винтовой оси не в канонической, а в другой форме, которую получаем, исходя из определения мгновенной винтовой оси как геометрического места точек твердого тела, скорости которых в данный момент равны $\mathbf{V}^*$. Следовательно, искомый радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки, принадлежащей винтовой оси, согласно общей формуле (4.1) должен удовлетворять уравнению

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}\,.$$

Учитывая представление вектора $\mathbf{V}^*$ в виде (4.2), в системе координат, связанной с телом, имеем

$$p\,\Omega_k \mathbf{i}_k = V_k \mathbf{i}_k + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}, \tag{4.5}$$

где $p = V\cos\alpha/\Omega$ — *параметр кинематического винта.*

Из векторного равенства (4.5) следует, что прямые, являющиеся проекциями винтовой оси на координатные плоскости, задаются в указанных плоскостях уравнениями

$$\begin{aligned} V_1 + \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2 &= \Omega_1 p\,, \\ V_2 + \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3 &= \Omega_2 p\,, \\ V_3 + \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1 &= \Omega_3 p\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Каждое из этих трех уравнений задает в пространстве плоскость, параллельную соответствующей координатной оси. Поскольку прямая в пространстве является пересечением двух плоскостей, то одно из уравнений (4.6) можно не рассматривать. Если прямая параллельна одной из координатных осей, то ее проекция на координатную плоскость, перпендикулярную данной оси, вырождается в точку, а соответствующее уравнение системы (4.6) переходит в тождество. В случае, когда прямая перпендикулярна одной из осей, две из плоскостей (4.6) сливаются в одну, перпендикулярную этой оси. Во всех остальных случаях винтовую ось можно рассматривать как пересечение двух любых плоскостей (4.6).

Систему уравнений (4.6) обычно записывают в виде цепочки равенств

$$\frac{V_1 + \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2}{\Omega_1} = \frac{V_2 + \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3}{\Omega_2} = \frac{V_3 + \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1}{\Omega_3} = p\,. \tag{4.7}$$

Если опустить параметр p, то из первых трех равенств получим уравнения трех плоскостей общего вида. Все три плоскости пересекаются по винтовой оси.

Очевидно, что если вектор $\mathbf{V}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{\Omega}$, то $\mathbf{V}^* = 0$, и во всех точках мгновенной оси (4.4) получаем только вектор $\mathbf{\Omega}$, то есть скорости точек твердого тела таковы, как если бы тело в данный момент вращалось вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Примером указанных систем является совокупность векторов $\boldsymbol{\omega}_k$, расположенных в одной плоскости, а также совокупность параллельных векторов $\boldsymbol{\omega}_k$, если $\mathbf{\Omega} \neq 0$. Это непосредственно следует из общей формулы (3.2).

Действительно, если $\boldsymbol{\omega}_k$ лежат в одной плоскости, то векторы $\boldsymbol{\rho}_k$ также лежат в этой плоскости, а векторы $\boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\rho}_k$ и $\mathbf{V} = \sum\limits_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\rho}_k$ перпендикулярны ей. Итак, плоская система векторов $\boldsymbol{\omega}_k$ эквивалентна одному вращению с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ вокруг оси $O'O^*$.

Если все $\boldsymbol{\omega}_k$ параллельны друг другу, то можно записать

$$\boldsymbol{\omega}_k = \omega_k \, \boldsymbol{\omega}^0 \, ,$$

значит, векторы $\boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\rho}_k = \omega_k(\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{\rho}_k)$ перпендикулярны $\boldsymbol{\omega}^0$, и, следовательно, вектор $\mathbf{V} = \sum\limits_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\rho}_k$ перпендикулярен вектору $\mathbf{\Omega} = \Omega \, \boldsymbol{\omega}^0$.

Раздел второй

ДИНАМИКА

Общие вопросы теоретической механики. Основы аналитической механики

Раздел механики, изучающий движение материальных тел на основе физических постулатов, учитывающих как причины, изменяющие движение (силы), так и массу движущегося тела, называется *кинетикой*, или *динамикой*, частным случаем которой является учение о равновесии — *статика*.

В динамике появляются понятия: масса, количество движения, сила. Ньютон определяет *массу* как количество материи. Будучи атомистом, он считал количество вещества пропорциональным числу неделимых однородных атомов и поэтому пропорциональным их объему. На основании опытов с маятниками он установил, что масса тела пропорциональна его весу и, следовательно, может быть измерена с помощью последнего.

Следующим основным понятием динамики является понятие *количества движения тела*, или его *импульс*, под которым понимается векторная величина $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, где m — масса тела, $\mathbf{v}$ — вектор его скорости при поступательном движении. Применительно к этому случаю условимся говорить о материальной точке массой m. Для общего случая движения тела импульс будем определять по формуле

$$\mathbf{p} = \int\limits_{\tau} \mathbf{v}\, dm = m\mathbf{v}^* ,$$

где $\mathbf{v}^*$ — величина, найденная согласно теореме о среднем. Этой величине соответствует точка с радиус-вектором $\mathbf{r}_c = (\int_\tau \mathbf{r}\, dm)/m$, которую будем называть *центром масс*.

Третьим основным понятием динамики является понятие *силы*. По Ньютону, приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. Таким образом, сила оценивается по ее действию, которое проявляется в изменении движения тела.

Наряду с динамическим эффектом силы можно рассматривать силу как действие, приводящее к изменению формы тела, или его деформации. На этом принципе основано измерение силы пружинным динамометром.

Введенные определения позволили Ньютону постулировать следующие законы движения.

Первый закон: «Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние»[1].

Второй закон, обобщающий данные экспериментов, формулируется следующим образом: «Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует»[2]. Под изменением количества движения следует понимать производную $d\mathbf{p}/dt$. Таким образом, второй закон Ньютона должен быть записан в виде

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}\,. \tag{1}$$

Отметим особо, что массу m, входящую в это уравнение, в случаях, когда точка движется со скоростями, близкими к скоростям света, следует рассматривать как переменную величину. С этим мы встречаемся в специальной теории относительности[3]. В классической же механике масса движущейся материальной точки считается постоянной, и уравнение (1) принимает вид

$$m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}\,. \tag{2}$$

Величину m будем называть *инертной массой*.

---

[1] *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии // Собрание трудов академика А. Н. Крылова: в 12 т. Т. 7. М.; Л., 1936. С. 39.

[2] Там же. С. 40.

[3] Анализируя запись основного закона динамики в форме (1), известный физик А. Зоммерфельд отмечает, что «масса не всегда постоянна; например, она не постоянна в теории относительности, в которой ньютоновская формулировка закона (уравнение (1)) определялась прямо-таки пророчески» (см. *Зоммерфельд А.* Механика. М., 1947. С. 10).

В теоретической механике существует раздел «Динамика точки переменной массы», в котором второй закон Ньютона применяется фактически не к одной точке, а к системе точек. В результате оказывается, что в правой части уравнения (2) появляется дополнительное слагаемое, содержащее dm/dt, при этом масса, стоящая в левой части, есть мгновенное ее значение в данный момент. Подобные задачи обсуждаются в главе X «Динамика полета» второго тома учебника.

Простые эксперименты позволяют измерить как ускорение, так и силу, действующую на движущееся тело. Силу измеряют динамометром, а ускорение рассчитывают по изменению пройденного пути в зависимости от времени. Так как массу однородного тела можно вычислить по его объему, то в правильности соотношения (2) можно убедиться экспериментально.

Следуя принципам «индуктивизма», Ньютон считал, что «в опытной физике предложения, выведенные из совершающихся явлений с помощью наведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности, или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточнятся или же окажутся подверженными исключениям»[4]. Исходя из этих принципов, он ввел соотношение (1) как аксиому или закон движения тела вообще. Этот закон позволяет, измерив две из трех входящих в него величин, третью определять из уравнения (2). Поскольку непосредственно проще всего измерить скорости и ускорения, то уравнение (2) можно использовать для определения массы или силы. Так, например, исходя из законов Кеплера, основанных на наблюдениях, Ньютон установил, что ускорение планеты при движении по орбите обратно пропорционально квадрату ее расстояния от Солнца. Умножая полученное ускорение на массу планеты, он вывел *закон всемирного тяготения*.

Кирхгоф вообще предложил рассматривать силу по определению как производную от импульса. Такой подход оказался удобным при построении более общей механики, сходной, однако, по форме с механикой Ньютона.

Обсудим, наконец, в какой системе отсчета сформулирован второй закон Ньютона, содержащий производную по времени от количества движения (импульса). Рассмотрим способ измерения времени.

Каждый отчетливо представляет, что такое промежуток времени (например, секунда, измеряемая с помощью часов). Для точного его измерения одинаковым отрезкам на циферблате должны соответствовать одинаковые промежутки времени. Иначе говоря, требуется, чтобы время текло равномерно. Гарантировать же, что часы показывают равномерно теку-

[4] *Ньютон И.* Указ. соч. С. 504.

щее время, невозможно. Это можно только предположить. Такое предположение позволяет математизировать время, поставив ему в соответствие временную числовую прямую. Тогда промежутку времени Δt будет соответствовать разность координат двух точек этой прямой или, как говорят, двух моментов времени. Если, кроме того, потребовать, чтобы промежуток времени Δt не зависел от того, движутся ли сами часы, а также от массы тел, окружающих их, то получим абстракцию, которую Ньютон назвал «истинным математическим», или абсолютным временем. По Ньютону «абсолютное, истинное математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью».

«Относительное, кажущееся или обыденное время есть или точная, или изменчивая, постигаемая чувствами, внешняя, совершаемая при посредстве какого-либо движения, мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного математического времени, как-то: час, день, месяц, год»[5].

В повседневной жизни мы отчетливо представляем себе, что такое размеры тела. Пусть это тело движется относительно какой-либо системы отсчета, которая в свою очередь также может двигаться относительно другой системы отсчета, и т. д. В классической механике размеры тела не зависят от характера движения систем отсчета, а также масс, окружающих данное тело.

Согласно Ньютону движущееся тело является ограниченной подвижной частью некоторого абсолютного пространства: «Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным.

Относительное есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами по положению его относительно некоторых тел и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное ...»[6].

Таким образом, по Ньютону абсолютное время и абсолютное пространство — это понятия, основываясь на которых можно ввести две инвариантные величины: промежуток времени и длину отрезка. Причем после выбора системы отсчета перемещений и единиц измерения времени и длины эти величины выражаются через разности моментов времени и координат концов отрезка. Понятия промежутка времени и длины отрезка в соответствии с основными положениями дифференциального и интеграль-

[5]Там же. С. 30.
[6]Там же.

ного исчисления позволяют определить, что такое скорость и ускорение в данный момент времени, а также что такое пройденный путь.

Ньютон рассматривает абсолютное и относительное движение. Абсолютное движение порождается и изменяется силами, приложенными к самому телу. Относительное, или кажущееся, порождается движением системы отсчета. Отсюда следует, что второй закон динамики сформулирован относительно системы отсчета $Ox_1x_2x_3$, в которой существуют и могут быть измерены приложенные к телу силы. Следует, однако, особо подчеркнуть, что указанная система координат не является единственной.

Введем новую систему координат $O'x_1'x_2'x_3'$, оси которой параллельны осям x_1, x_2, x_3. Предположим, что эта система движется относительно исходной равномерно и поступательно со скоростью $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Тогда координаты движущейся точки в обеих системах оказываются связанными преобразованием

$$x_i' = x_i - v_i(t - t_0)\,, \quad i = 1, 2, 3, \quad t' - t_0' = t - t_0\,, \tag{3}$$

называемым *преобразованием Галилея*. Из формул (3) непосредственно видно, что ускорения $\mathbf{w}$ и $\mathbf{w}'$ в обеих системах оказываются одинаковыми, то есть $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$. На основании этого заключаем, что второй закон Ньютона в новой системе координат имеет тот же вид, что и в исходной, иначе говоря, уравнение Ньютона инвариантно относительно группы преобразований, задаваемых формулами (3). Очевидно, что таких систем бесчисленное множество. Будем называть их *инерциальными системами*.

Классическая механика строится на предположении, что источником силы, действующей на тело, всегда является некоторое другое тело. Таким образом, согласно Ньютону сила возникает как результат взаимодействия по крайней мере двух тел.

Третий закон Ньютона (о взаимодействии) формулируется так: «Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны»[7].

В примечании к указанным законам Ньютон рассматривает совместное действие сил. Он утверждает: «При силах совокупных тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как его стороны — при раздельных»[8]. Это утверждение получило название *закона параллелограмма сил*.

[7] Там же. С. 41.
[8] Там же.

Поясним его примером. Если силы постоянны, то при нулевых начальных условиях для прямолинейных перемещений имеем

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_1 t^2/(2m)\,, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_2 t^2/(2m)\,,$$

откуда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)\, t^2/(2m)$. Так как перемещения складываются по правилу параллелограмма, то и силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ складываются по тому же правилу. Из указанной формулы видно, что результирующее перемещение совершается по диагонали, длина которой пропорциональна диагонали параллелограмма, построенного на векторах сил.

Вид правой части уравнения Ньютона (2) обычно задается в результате исследования силы в ее статическом проявлении. Так, например, для статически растянутой пружины согласно закону Гука можно установить, что сила ее натяжения пропорциональна растяжению последней. В соответствии с этим в динамической задаче о колебании тяжелой точки, подвешенной к пружине, можно считать, что упругая сила также пропорциональна деформации.

Аналогично, если в статических условиях испытывается сила сопротивления, действующая со стороны воздушного потока на помещенное в него тело, то в определенном диапазоне скоростей (примерно от 10 до 100 м/с) она оказывается пропорциональной квадрату скорости. На основании сказанного можно решать и динамическую задачу о движении тела в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости.

Следует отметить, что экспериментальные исследования тел, движущихся в сопротивляющейся среде с ускорением, помимо упомянутых сил, пропорциональных квадрату скорости, позволяют обнаружить и силу, пропорциональную ускорению. Появление этой силы можно объяснить, опираясь на законы Ньютона. Так, тело, движущееся в жидкости с ускорением, сообщает ее частицам ускорение, различное в разных точках. Наличие ускорения позволяет утверждать, что со стороны тела на частицы жидкости действуют силы. По третьему закону Ньютона появляется сила, действующая на рассматриваемое тело со стороны жидкости. Подробные расчеты и эксперименты показывают, что эта сила пропорциональна ускорению тела.

На основе интегрирования уравнения (2) для кругового математического маятника можно, следуя Ньютону, установить пропорциональность инертной массы тела m его весу P и этим самым предложить способ ее измерения. Действительно, уравнение Ньютона в проекции на касательную к траектории груза маятника имеет вид

$$m\,\frac{dv}{dt} = -P\sin\varphi\,,$$

где φ — угол отклонения нити от вертикали. Так как при круговом движении $v = l\dot{\varphi}$ (l — длина нити маятника), то при малых φ получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{P}{ml}\,\varphi = 0\,.$$

Интегрируя его, имеем

$$\varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t\,,$$

где $\omega = \sqrt{P/(ml)}$, A и B — произвольные постоянные. Отсюда следует, что период колебания T маятника выражается формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{P}}\,. \tag{4}$$

В экспериментах с маятником величина l задана, а период колебания T достаточно точно определяется из наблюдений.

Из формулы (4) вытекает, что

$$\frac{P}{m} = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \equiv k\,.$$

Опыты, выполненные с большой точностью, показали, что во всех случаях величина $4\pi^2 l/T^2$ одинакова. Самым существенным результатом этих опытов является то, что постоянная k, имеющая размерность ускорения, точно равна ускорению свободного падения $\mathrm{g} = 9.81\,\text{м/с}^2$, и, следовательно, инертная масса m может быть вычислена через вес P по формуле

$$m = P/\mathrm{g}\,.$$

Условимся измерять вес тела P пружинным динамометром и величину $m_{\mathrm{g}} = P/\mathrm{g}$ считать *гравитационной массой* тела. Использование для измерения силы тяжести P весов есть по сути дела использование закона всемирного тяготения для тела, находящегося на поверхности Земли. Этим оправдывается термин *гравитационная*, или *тяготеющая, масса.*

Равенство $m = m_{\mathrm{g}}$ называется *постулатом эквивалентности* инертной и гравитационной масс.

Отметим особо, что отнюдь не очевидно, что измеренный статически вес тела, отнесенный к постоянной k, совпадает с инертной массой, которая входит как множитель пропорциональности во второй закон Ньютона, введенный аксиоматически.

Постулат эквивалентности инертной и гравитационной масс равносилен утверждению, что все тела, помещаемые в одну и ту же точку гравитационного поля, получают одинаковое ускорение.

Справедливость этого постулата проверялась во многих лабораториях мира. Обнаружить отклонения от указанного равенства пока никому не удалось.

Изложение динамики делится на два раздела — в первом разделе рассматриваются общие вопросы теоретической и аналитической механики, а во втором — специальные вопросы теоретической механики, имеющие прикладное значение.

Глава IV
ДИНАМИКА ТОЧКИ

Авторы: *Н. Н. Пóляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков*

В данной главе приводятся наиболее распространенные формы дифференциальных уравнений движения точки, доказываются основные теоремы динамики точки, изучается консервативное силовое поле. Получение уравнений Лагранжа второго рода и канонических уравнений для точки позволяет в дальнейшем обобщить их с помощью понятия изображающей точки на движение системы материальных точек. Подробно разбираются важные случаи колебательного движения точки, движения точки под действием центральных сил и динамика относительного движения материальной точки.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в разных системах координат

Согласно второму закону Ньютона

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}\,. \tag{1.1}$$

В декартовой системе координат это уравнение можно представить следующим образом:

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i\,, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.2}$$

В криволинейной системе координат $q^1(t), q^2(t), q^3(t)$ для контра- и ковариантных составляющих ускорения в соответствии с формулами (8.14), (8.2) и (8.6) главы I имеем

$$w^i = \ddot{q}^{\,i} + \Gamma^i_{jk}\,\dot{q}^j\dot{q}^k\,, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

$$w_i = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial v^2/2}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial v^2/2}{\partial q^i} = \mathrm{g}_{ij}\ddot{q}^{\,j} + \Gamma_{i,jk}\,\dot{q}^j\dot{q}^k\,, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.4}$$

где Γ^i_{jk}, $\Gamma_{i,jk}$ — символы Кристоффеля второго и первого рода. При разложении правой и левой частей уравнения (1.1) по основному базису $\mathbf{e}_i$ следует воспользоваться формулой (1.3). При этом получаем систему уравнений

$$m(\ddot{q}^{\,i} + \Gamma^i_{jk}\,\dot{q}^j\dot{q}^k) = Q^i\,, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $Q^i = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}^i$ — контравариантная компонента вектора $\mathbf{F} = Q^i\mathbf{e}_i$.

Скалярное умножение уравнения (1.1) на векторы взаимного базиса $\mathbf{e}^i$, сразу приводящее к системе уравнений, разрешенных относительно вторых производных $\ddot{q}^{\,i}$, не всегда удобно, особенно в случае косоугольной системы координат, когда орты основного и взаимного базисов не совпадают. Наиболее трудоемким при записи уравнений в таком виде является нахождение символов Кристоффеля второго рода.

Формула (1.4) позволяет определить $w_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_i$ без предварительного вычисления символов Кристоффеля, непосредственно по выражению $v^2/2$. Таким образом, скалярное умножение уравнения (1.1) на векторы основного базиса $\mathbf{e}_i$ приводит к системе уравнений, которая может быть записана в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i\,, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.5}$$

где

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \sum_{\nu=1}^{3} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q^i}\,, \quad T = \frac{mv^2}{2}\,.$$

Ковариантная компонента Q_i вектора силы $\mathbf{F} = Q_i \mathbf{e}^i$ называется *обобщенной силой*, соответствующей обобщенной координате q^i, а величина T — *кинетической энергией точки* массой m. Уравнения движения, записанные в виде (1.5), называются *уравнениями Лагранжа второго рода*.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Подставляя в уравнения системы (1.5) выражение для кинетической энергии T и дифференцируя, получаем

$$m(\mathrm{g}_{ij}\ddot{q}^{\,j} + \Gamma_{i,jk}\,\dot{q}^j\dot{q}^k) = Q_i\,, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Здесь g_{ij} и $\Gamma_{i,jk}$ можно рассматривать как коэффициенты перед $\ddot{q}^{\,j}$ и $\dot{q}^j\dot{q}^k$ соответственно. Эти коэффициенты согласно формуле (8.6) главы I являются метрическими коэффициентами $\mathrm{g}_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ и символами Кристоффеля первого рода $\Gamma_{i,jk}$.

Таким образом, задание кинетической энергии T в виде функции обобщенных координат и обобщенных скоростей позволяет определить как метрические коэффициенты g_{ij}, так и символы Кристоффеля первого рода $\Gamma_{i,jk}$.

Спроектируем теперь обе части уравнения (1.1) на орты $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ натурального трехгранника. В этом случае получим *уравнения Эйлера*:

$$m\ddot{s} = F_\tau\,, \quad m\,\frac{v^2}{\rho} = F_n\,, \quad 0 = F_b\,.$$

Здесь s — дуговая координата, ρ — радиус кривизны траектории. Напомним, что вектор $\boldsymbol{\tau}$ направлен в сторону положительного отсчета дуговой координаты s.

Отметим, что из всех приведенных форм второго закона механики самой общей является запись вида (1.5). Все они представляют собой системы дифференциальных уравнений второго порядка, где неизвестными функциями служат координаты точки. Правая часть этих уравнений содержит по предположению непрерывные и достаточно гладкие функции от времени, координат, скоростей и иногда ускорений. Будем считать, что дифференциальные уравнения дополнены начальными данными и выполнены все условия, обеспечивающие существование и единственность решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи динамики точки могут быть разделены на два типа. *Прямая задача динамики* состоит в определении сил, действующих на точку, по ее заданной массе и известному закону движения. Очевидно, что в этом случае ответ легко удается получить дифференцированием. Значительно сложнее оказывается *обратная задача динамики*[1], когда по заданным функциям, стоящим в правых частях дифференциальных уравнений и представляющим собой проекции сил, с помощью интегрирования системы дифференциальных уравнений, например (1.2), требуется установить закон движения точки. Так как это система трех уравнений второго порядка, то в случае ее решения удается определить каждую координату x_i как функцию времени и шести произвольных постоянных:

$$x_i = x_i(t, C_1, C_2, \dots, C_6)\,, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

Найдем $C_1, C_2, \dots, C_6$, используя начальные условия, то есть решим задачу Коши. По уравнениям движения (1.6) легко вывести закон изменения проекций скорости движущейся точки:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(t, C_1, C_2, \dots, C_6)\,, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.7}$$

Возьмем начальное значение времени $t = t_0$, для которого известны значения координат и проекций скорости $x_{i0},\ \dot{x}_{i0},\ i = 1, 2, 3$. Тогда, используя (1.6) и (1.7), можно записать

$$\begin{gathered} x_{i0} = x_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6)\,, \quad \dot{x}_{i0} = \dot{x}_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6)\,, \\ i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{1.8}$$

[1]Некоторые авторы под прямой и обратной задачами механики понимают определения, противоположные введенным здесь.

Будем считать, что для системы уравнений (1.8) выполнены условия разрешимости. В этом случае можно найти интересующие нас произвольные постоянные C_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$, как функции начальных данных:

$$C_j = \Phi_j(t_0, x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}), \quad j = 1, 2, \ldots, 6.$$

На этом можно было бы завершить рассмотрение механики точки, так как решение конкретных задач теперь сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений типа (1.2). Отметим, что аналитическое решение этой системы при решении практических задач удается построить в редких случаях, обычно интегрирование выполняется численно с достаточной степенью точности с помощью современных компьютеров. Однако часто не требуется полного определения движения точки, а для аналитического исследования характера движения бывает достаточно знать только несколько интегралов движения.

§ 2. Общие теоремы динамики точки

Как уже отмечалось, обратная задача динамики сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений движения

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) = X_i(t, x, \dot{x}), \quad i = 1, 2, 3,$$

где под x подразумевается совокупность всех координат x_1, x_2, x_3. Аналогично, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$. Иначе говоря, задача состоит в нахождении шести интегралов следующей нормальной системы:

$$\frac{dp_i}{dt} = X_i(t, x, p), \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $p_i = mv_i$, а $p = (p_1, p_2, p_3)$. *Интегралом* этой системы называется функция $\Phi(t, x, p) = C = \text{const}$, которая в процессе движения сохраняет постоянное значение, определяемое начальными условиями. Интегралы уравнений движения иногда могут быть найдены на основе общих теорем динамики, которые являются следствием основного уравнения, выражающего второй закон Ньютона. Рассмотрим эти теоремы.

Теорема импульсов является следствием основного закона Ньютона

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(t, x, p), \quad \mathbf{F} = (X_1, X_2, X_3), \tag{2.1}$$

где вектор $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — *количество движения*, или *импульс*. Сила $\mathbf{F}$ может зависеть от времени t, координат x_i и скоростей $\dot{x}_i$. В этом случае

для существования и единственности решения при начальных условиях $x_i(t_0) = x_{i0},\ \dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_{i0}$, достаточно, чтобы сила $\mathbf{F}$ была непрерывна в окрестности начальных значений и чтобы выполнялись условия Липшица для всех функций $X_1,\ X_2,\ X_3$ по всем аргументам $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3$.

Если сила $\mathbf{F}$ задана как функция времени, то переменные в уравнении (2.1) разделяются, и после интегрирования получаем

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{F}(t)dt \equiv \mathbf{I}(t)\,. \tag{2.2}$$

Назовем интеграл $\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\,dt$ *импульсом силы* за промежуток времени $t - t_0$. Тогда формула (2.2) означает, что изменение импульса за время $t - t_0$ равно соответствующему импульсу силы.

В силу основной теоремы интегрального исчисления имеем

$$\mathbf{I}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{F}(t)dt = \mathbf{S}(t) - \mathbf{S}(t_0)\,,$$

где $\mathbf{S}(t)$ — первообразная. Следовательно, формулу (2.2) можно записать в виде

$$\mathbf{p}(t) - \mathbf{S}(t) = \mathbf{p}(t_0) - \mathbf{S}(t_0) = \mathbf{C}\,.$$

Эта формула представляет собой *интеграл импульсов* в векторной форме. В проекциях на оси декартовой системы координат имеем три скалярных интеграла:

$$p_i(t) - S_i(t) = C_i\,, \quad i = 1, 2, 3,$$

где C_i, S_i — составляющие векторов $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$ соответственно. В частности, если $\mathbf{F} \equiv 0$, то $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(t_0)$, что выражает *закон сохранения импульса*. В самом общем случае, когда $\mathbf{F}$ зависит от $t,\ x_i,\ p_i$, для вычисления первообразной $\mathbf{S}$ необходимо знать изменение x_i в зависимости от t. Однако если известны функции $x_i(t)$, то нами уже решена вторая задача динамики, и интегралы ее уравнений также известны. В этом случае можно записать

$$\mathbf{p}(t_0) - \mathbf{p}(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{F}(t, x(t), p(t))dt\,. \tag{2.3}$$

Это равенство является аналитическим выражением *теоремы импульсов* в интегральной форме.

Применяя к интегралу (2.3) теорему о среднем из интегрального исчисления при $\mathbf{p}_0 = 0$, можно записать

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}^* \tau \,,$$

где $\tau = t - t_0$, а $\mathbf{F}^*$ — среднее значение силы $\mathbf{F}$ в промежутке τ. Если устремить τ к нулю, увеличивая при этом $\mathbf{F}^*$ так, чтобы величина $\mathbf{p}$ оставалась все время ограниченной, то получим представление о мгновенно действующей силе, имеющей «бесконечно большую» величину. Такая сила называется *ударной силой*. Интегрируя формулу (2.3) от 0 до τ и полагая, что $v_0 = 0$, получаем

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \int\limits_0^\tau \frac{\mathbf{I}}{m}\, dt = \frac{\mathbf{I}^*}{m}\, \tau \,,$$

где $\mathbf{I}^*$ — среднее значение импульса в промежутке τ.

Устремляя τ к нулю и учитывая, что $\mathbf{I}^*$ при этом остается конечным, находим, что при ударе

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = 0 \,.$$

Теорема моментов. Умножая обе части основного уравнения (2.1) векторно слева на $\mathbf{r}$, находим

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \,,$$

или

$$\frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \,. \tag{2.4}$$

Но $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0 \,.$$

На основании этого формула (2.4) приводится к виду

$$\frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \,.$$

Векторные произведения $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ называются соответственно *моментом импульса* и *моментом силы* относительно полюса O, являющегося началом вектора $\mathbf{r}$. Итак,

$$d\mathbf{l}/dt = \mathbf{L} \,. \tag{2.5}$$

Это равенство является аналитическим выражением *теоремы моментов*. Из уравнения (2.5) видно, что если момент силы $\mathbf{L} = 0$, то

$$\mathbf{l} = \mathbf{C}' \,, \tag{2.6}$$

и получаем *интеграл моментов*. Этот интеграл имеет место в тривиальных случаях, когда $\mathbf{r} = 0$ или $\mathbf{F} = 0$, а также когда вектор $\mathbf{r}$ коллинеарен $\mathbf{F}$, то есть когда сила $\mathbf{F}$ направлена на центр O. В этом случае говорят, что *сила центральная*. Умножив (2.6) скалярно на $\mathbf{r}$, находим

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{C}' = 0 \,,$$

или в декартовых координатах, имеющих начало в точке O,

$$C_1' x_1 + C_2' x_2 + C_3' x_3 = 0 \,. \tag{2.7}$$

Это уравнение плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{C}'$. В данной плоскости лежит траектория, описываемая точкой под действием центральной силы.

Векторное произведение

$$\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r} = 2\,\Delta\boldsymbol{\sigma} \,, \tag{2.8}$$

где $\Delta\mathbf{r}$ — перемещение точки, есть вектор, равный по величине удвоенной площади треугольника, построенного на векторах $\mathbf{r}$ и $\Delta\mathbf{r}$. Разделив равенство (2.8) на промежуток времени Δt, за который происходит перемещение, и перейдя к пределу, имеем

$$2\,\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \,.$$

Вектор $d\boldsymbol{\sigma}/dt$, являющийся пределом отношения вектора $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, характеризующего приращение площади криволинейного сектора, описываемого радиус-вектором $\mathbf{r}$, к соответствующему приращению времени, естественно назвать *секторной скоростью*. Из сказанного следует, что если существует интеграл моментов, то

$$2\,\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \frac{1}{m}\,\mathbf{C}' = \mathbf{C}^* \,,$$

откуда вытекает

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{C}^*}{2}\,t + \boldsymbol{\sigma}_0 \,.$$

Так как в этом случае движение совершается в плоскости, заданной уравнением (2.7), то с учетом выражения для $\mathbf{v}$ в полярных координатах

$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r^0 + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi^0$ получаем $\mathbf{l}/m = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r^2\dot{\varphi}\mathbf{l}^0 = \mathbf{C}^*$, где $\mathbf{l}^0 = \mathbf{e}_r^0 \times \mathbf{e}_\varphi^0$, или в скалярной форме

$$r^2\dot{\varphi} = C^* \,,$$

что представляет собой *интеграл площадей.*

Векторный интеграл (2.6) эквивалентен трем скалярным интегралам:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{i}_1 = l_1 = (\mathbf{r} \times m\mathbf{v})_1 = m(x_2v_3 - x_3v_2) = C_1' \,,$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{i}_2 = l_2 = (\mathbf{r} \times m\mathbf{v})_2 = m(x_3v_1 - x_1v_3) = C_2' \,,$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{i}_3 = l_3 = (\mathbf{r} \times m\mathbf{v})_3 = m(x_1v_2 - x_2v_1) = C_3' \,.$$

Проекции вектора $\mathbf{l}$ на оси координат называются соответственно *моментами импульса относительно осей* x_1, x_2 и x_3.

Формула (2.5) в проекциях на оси координат приводит к выражениям

$$\frac{dl_i}{dt} = L_i \,, \quad i = 1, 2, 3,$$

где L_i называются моментами вектора силы относительно осей x_1, x_2, x_3. Как проекции векторного произведения они выражаются формулами

$$L_1 = x_2X_3 - x_3X_2 \,, \quad L_2 = x_3X_1 - x_1X_3 \,, \quad L_3 = x_1X_2 - x_2X_1 \,.$$

Теорема об изменении кинетической энергии. Как и ранее, будем исходить из основного уравнения механики (2.1)

$$m\, d\mathbf{v} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\, dt \,.$$

Умножая обе его части скалярно на $\mathbf{v}$, получаем

$$m\, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\, dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,,$$

где $d\mathbf{r}$ — элементарное перемещение точки. Это выражение можно записать, кроме того, так:

$$d\,\frac{mv^2}{2} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds = F_\tau\, ds = F \cos\alpha\, ds \,, \tag{2.9}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к траектории и ориентированный в направлении отсчета дуговой координаты s, а α — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 1). Величина $\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, как отмечалось в § 6 главы I, называется *элементарной работой силы* $\mathbf{F}$ *на перемещении* $d\mathbf{r}$.

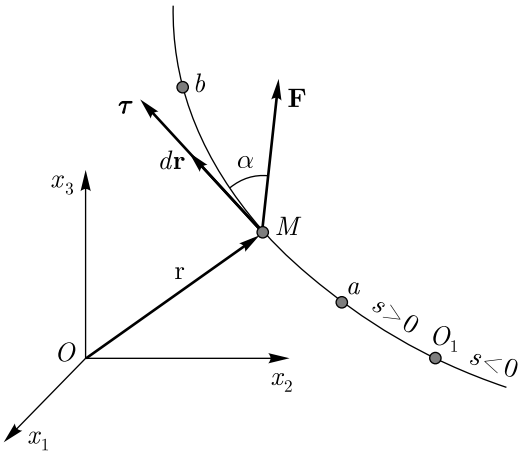

Рис. 1. Вычисление элементарной работы силы

Равенство (2.9) выражает *теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме*: дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе равнодействующей сил, приложенных к точке.

При перемещении точки по траектории от точки a до точки b (рис. 1) сила $\mathbf{F}$ совершает работу

$$A = \int\limits_{\smile ab} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{\smile ab} F_\tau \, ds = \int\limits_{\smile ab} F \cos\alpha \, ds \, .$$

Так как скалярное произведение $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ можно представить в виде

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 \, ,$$

то выражение для работы можно записать так:

$$A = \int\limits_{\smile ab} (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3) \, .$$

Интегралы вида $\int_{\smile ab} X_i \, dx_i$ называются *криволинейными интегралами второго типа*. Особо отметим, что эти интегралы изменяют знак при движении по тому же пути, но в обратном направлении, то есть

$$\int\limits_{\smile ab} X_i \, dx_i = - \int\limits_{\smile ba} X_i \, dx_i \, .$$

Интегрируя выражение (2.9), получаем *теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме*:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int\limits_{\smile ab} F\cos\alpha\, ds = \int\limits_{\smile ab} (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3)\,. \qquad (2.10)$$

Здесь v_0 — скорость материальной точки в исходном положении a, v — скорость в конечной точке b. Формула (2.10) показывает, что приращение кинетической энергии материальной точки на участке пути равно работе силы на этом участке.

Если тангенциальная составляющая силы F_τ задана как функция дуги траектории, то есть $F_\tau = F_\tau(s)$, то вычисление криволинейного интеграла, выражающего работу, сводится к вычислению обыкновенного определенного интеграла

$$A = \int\limits_{s_0}^{s_1} F_\tau(s)\, ds\,.$$

Аналогично, если известен закон движения точки $x_k = x_k(t)$, то можно записать

$$A = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_\tau(t, x(t), \dot{x}(t)) \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t)}\, dt\,,$$

или

$$A = \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{t_0}^{t_1} X_k(t, x(t), \dot{x}(t))\, \dot{x}_k(t)\, dt\,,$$

то есть опять получаем обыкновенные интегралы.

В частном случае, когда трехчлен элементарной работы

$$\delta A = \sum_{k=1}^{3} X_k dx_k = dU(x_1, x_2, x_3) \equiv dU(x)$$

есть полный дифференциал некоторой скалярной функции U от координат точки, работа на участке пути выражается так:

$$A = \int\limits_a^b (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3) = \int\limits_a^b dU = U(b) - U(a)\,,$$

и потому формула (2.10) принимает вид

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U(b) - U(a)\,,$$

или

$$\frac{mv^2}{2} - U(b) = \frac{mv_0^2}{2} - U(a) = \mathrm{const}\,. \tag{2.11}$$

Это выражение представляет собой интеграл дифференциальных уравнений движения. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае работа A не зависит от формы пути, а определяется разностью значений функции U в конечной и начальной точках пути. Функция U, являющаяся функцией координат точки, называется *силовым потенциалом*, или *силовой функцией*. Функция $\Pi = -U$ называется *потенциальной энергией* точки. Если воспользоваться данной функцией, то интеграл (2.11) принимает вид

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = \mathrm{const}\,. \tag{2.12}$$

Выражение (2.12) называется *интегралом энергии*, а сумма $T + \Pi = E$ — *полной механической энергией точки*.

На основании изложенного интеграл энергии существует далеко не всегда, а лишь при выполнении условия

$$F(s)\cos\alpha(s)\,ds = \sum_{k=1}^{3} X_k\,dx_k = dU(x_1, x_2, x_3)\,,$$

которое можно записать также в виде

$$\sum_{k=1}^{3} X_k\,dx_k = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_k}\,dx_k\,.$$

Отсюда имеем

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_k}\,\mathbf{i}_k\,. \tag{2.13}$$

Вектор, заданный в виде (2.13), называется *градиентом скалярной функции* $U(x)$. Вводя символический оператор (*оператор Гамильтона*[2]) $\boldsymbol{\nabla} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\,\mathbf{i}_k$, его можно представить в виде

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_k}\,\mathbf{i}_k \equiv \boldsymbol{\nabla} U = \mathrm{grad}\,U\,.$$

[2]Оператор $\boldsymbol{\nabla}$ иногда называют оператором *набла*.

§ 3. Потенциальное силовое поле

Назовем область пространства, в точках которого определена функция $U(x_1, x_2, x_3)$, *стационарным потенциальным полем.* Предполагая, что такая функция имеет вторые производные, можно построить векторное поле для силы $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} U$, при этом составляющие $X_k = \partial U/\partial x_k$ непрерывны. Очевидно, что уравнение

$$U(x_1, x_2, x_3) = C = \text{const} \tag{3.1}$$

есть уравнение семейства поверхностей, зависящих от параметра C. На каждой поверхности, то есть при фиксированном C, потенциал $U(x)$ сохраняет постоянное значение, поэтому семейство (3.1) называется *семейством поверхностей равного потенциала*, или *эквипотенциальных поверхностей.* Очевидно, если вектор $d\mathbf{r}$ принадлежит касательной плоскости к этой поверхности, то выполняется равенство

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \boldsymbol{\nabla} U \cdot d\mathbf{r} = dU = 0\,,$$

то есть вектор $\boldsymbol{\nabla} U$ ортогонален поверхности равного потенциала в точке, для которой он вычисляется. Назовем линию, касательная в каждой точке которой совпадает по направлению с силой, соответствующей этой точке, *силовой линией.* Дифференциальные уравнения таких линий имеют вид

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3}\,.$$

Из изложенного следует, что семейство силовых линий потенциального поля ортогонально семейству эквипотенциальных поверхностей, так как вектор $d\mathbf{r}$ коллинеарен вектору $\mathbf{F}$, направленному по нормали к поверхности равного потенциала.

Как уже отмечалось, если $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} U(x_1, x_2, x_3)$, то работа не зависит от формы пути, по которому перемещается точка. Докажем обратное: если работа в силовом поле, под которым подразумевается область пространства, каждой точке которого соотнесен вектор силы $\mathbf{F}$, не зависит от формы пути, то поле потенциально.

Выберем в силовом поле кривую, соединяющую точки a и b, и вычислим работу на этом участке:

$$A = \int\limits_{\smile ab} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{\smile ab} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds = \int\limits_{\smile ab} F_\tau\, ds\,.$$

Так как по предположению интеграл не зависит от формы пути, то при фиксированной точке a он является функцией координат (x_1, x_2, x_3) точки b:

$$A = \int\limits_{\smile ab} F_\tau \, ds = U(\mathbf{r}) \,, \quad \mathbf{r} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3 \,.$$

Перемещая точку b в положение b' с координатами $x_k + \Delta x_k$, имеем

$$A(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = \int\limits_{\smile ab'} F_\tau \, ds = U(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \,.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\smile bb'} F_\tau \, ds = U(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) \,.$$

Применяя к данному интегралу теорему о среднем, находим

$$F_\tau(\mathbf{r} + \lambda\Delta\mathbf{r}) \, \Delta s = U(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) \,, \quad 0 < \lambda < 1 \,.$$

Деля обе части этого равенства на Δs и устремляя Δs к нулю, имеем *производную по направлению* s:

$$\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} = F_\tau = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial s} \,.$$

Данное направление характеризуется вектором $\boldsymbol{\tau} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} (\Delta\mathbf{r}/\Delta s)$. Заменяя последовательно Δs величинами $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, получаем

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \,, \quad X_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} \,, \quad X_3 = \frac{\partial U}{\partial x_3} \,,$$

или

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} U \,.$$

Это выражение и доказывает сформулированное ранее утверждение.

И, наконец, следствием независимости интеграла A от формы пути является утверждение, что интеграл $A = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, взятый по замкнутому контуру, равен нулю, если функция U однозначна.

Отметим, что производная $\partial U/\partial s$ может быть получена по формуле

$$F_\tau = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial s} \,,$$

где $\partial x_k/\partial s$ — направляющие косинусы направления $\boldsymbol{\tau}$.

Найдем теперь условия, необходимые для того, чтобы работа по замкнутому контуру, проведенному в силовом поле, была равна нулю. С этой целью вычислим сначала работу по контуру треугольника, изображенного на рис. 2. Направление обхода по контуру показано стрелками. Работа по всему контуру представляется в виде суммы трех интегралов:

$$\Delta A_{23} = \int\limits_{\smile OB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int\limits_{\smile BC} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int\limits_{\smile CO} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} =$$

$$= \int\limits_{\smile OB} X_2\,dx_2 + \int\limits_{\smile BC} (X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3) + \int\limits_{\smile CO} X_3\,dx_3 =$$

$$= \int\limits_0^{\varepsilon_2} X_2(x_2,0)\,dx_2 + \int\limits_{\varepsilon_2}^0 X_2(x_2,x_3)\,dx_2 + \int\limits_0^{\varepsilon_3} X_3(x_2,x_3)\,dx_3 +$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon_3}^0 X_3(0,x_3)\,dx_3 = \int\limits_0^{\varepsilon_3} (X_3(x_2,x_3) - X_3(0,x_3))\,dx_3 -$$

$$- \int\limits_0^{\varepsilon_2} (X_2(x_2,x_3) - X_2(x_2,0))\,dx_2. \tag{3.2}$$

Здесь для простоты X_2 и X_3 представлены как функции только двух независимых переменных x_2 и x_3. Выписанные аргументы $(x_2,0)$, (x_2,x_3) и $(0,x_3)$ являются одновременно координатами текущих точек на прямых OB, BC и CO соответственно.

Предполагая, что функции $X_2(x_2,x_3)$ и $X_3(x_2,x_3)$ разложимы в ряды Тейлора в окрестности точки O, и ограничиваясь рассмотрением линейных членов, то есть выбирая размеры треугольника достаточно малыми, при фиксированном x_2 получаем

$$X_2(x_2,x_3) - X_2(x_2,0) = \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\,x_3\,, \tag{3.3}$$

а при фиксированном x_3

$$X_3(x_2,x_3) - X_3(0,x_3) = \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\,x_2\,. \tag{3.4}$$

Напомним, что производные $\partial X_2/\partial x_3$ и $\partial X_3/\partial x_2$ вычисляем в точке O, хотя для простоты это никак не отмечается.

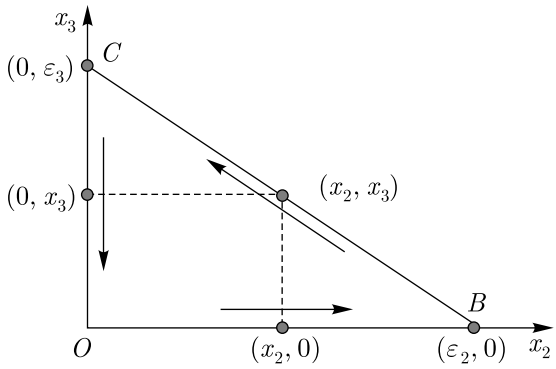

Рис. 2. Малый треугольник

В криволинейный интеграл (3.2) входит разность значений функции X_2 в точке (x_2, x_3), лежащей на прямой BC, и в точке $(x_2, 0)$, лежащей на прямой OB (см. рис. 2). При подстановке разности (3.3) в интеграл (3.2) следует учесть, что x_3 удовлетворяет уравнению прямой BC

$$\frac{x_2}{\varepsilon_2} + \frac{x_3}{\varepsilon_3} = 1\,. \tag{3.5}$$

Аналогично, при интегрировании по x_3 с использованием формулы (3.4) следует помнить, что x_2 удовлетворяет уравнению (3.5), причем

$$\int\limits_0^{\varepsilon_2} x_3\,dx_2 = \int\limits_0^{\varepsilon_3} x_2\,dx_3 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_2\varepsilon_3 = \Delta S_{23}\,.$$

Таким образом, если треугольник OBC достаточно мал, то

$$\Delta A_{23} = \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right)\Delta S_{23} = R_1\,\Delta S_{23}.$$

Используя круговую подстановку, получаем

$$\Delta A_{31} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right)\Delta S_{31} = R_2\,\Delta S_{31}\,,$$

$$\Delta A_{12} = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)\Delta S_{12} = R_3\,\Delta S_{12}\,.$$

Здесь R_1, R_2, R_3 — компоненты вектора $\mathbf{R}$, который называется *ротацией вектора* $\mathbf{F}$. С помощью оператора $\boldsymbol{\nabla}$ он может быть представлен в виде

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{F}\,.$$

Рассмотрим тетраэдр $OBCD$ (рис. 3), построенный на площадках ΔS_{ij}. Пусть площадь его грани BCD равна ΔS. Тогда

$$\Delta S_{23} = \Delta S \cos\alpha_1\,, \quad \Delta S_{31} = \Delta S \cos\alpha_2\,, \quad \Delta S_{12} = \Delta S \cos\alpha_3\,.$$

Здесь $\cos\alpha_k = \mathbf{n}\cdot\mathbf{i}_k$ — компоненты единичного вектора $\mathbf{n}$ внешней нормали к грани BCD.

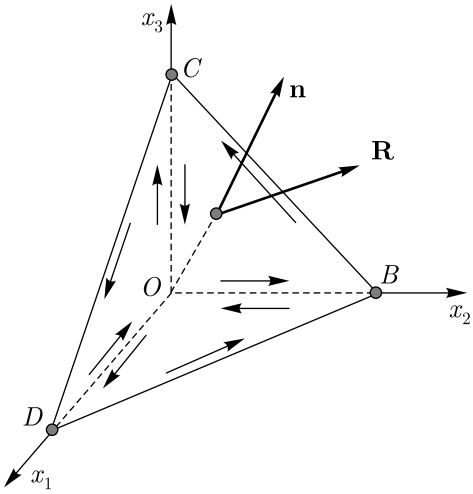

Рис. 3. Малый тетраэдр

Суммируя работу вдоль контуров треугольников OBC, OCD и ODB по направлениям, показанным стрелками, и предполагая, что размеры тетраэдра достаточно малы, получаем

$$\Delta A = \Delta A_{23} + \Delta A_{31} + \Delta A_{12} = (R_1\cos\alpha_1 + R_2\cos\alpha_2 + R_3\cos\alpha_3)\,\Delta S =$$
$$= (\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})\,\Delta S = R_n\,\Delta S\,. \tag{3.6}$$

При вычислении ΔA каждое из боковых ребер OB, OC и OD обходим дважды, но в прямо противоположных направлениях, и поэтому сумма работ по катетам указанных треугольников равна нулю. Работа сохраняется только по гипотенузам. Поэтому ΔA представляет собой работу вдоль контура треугольника BCD бóльшей грани, причем обход контура производится против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{n}$. Равенство (3.6) является приближенным. Оно тем точнее, чем меньше размеры

тетраэдра. В пределе при $\Delta S \to 0$ получаем следующее точное равенство:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta S} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = R_n \,. \tag{3.7}$$

Точка O, в которой определяется вектор $\mathbf{R}$, для простоты вычислений была помещена в начало координат. Окончательная формула (3.7) справедлива для любой точки пространства. Она записана в виде, который никак не связан с выбором системы координат, и можно показать, что она выполняется не только для треугольной, но и для площади ΔS любой формы.

Рассмотрим теперь гладкую поверхность, ограниченную гладким замкнутым контуром. Приближенно ее можно заменить многогранником с гранями в виде треугольников с площадями ΔS_k. Применяя к каждой из этих площадок формулу (3.6) и суммируя по k, получаем

$$A = \sum_{k=1}^{N} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{C_k} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{N} R_{nk}\, \Delta S_k \,. \tag{3.8}$$

Сумма интегралов, взятых вдоль отрезков, по которым граничат соседние треугольники, равна нулю, так как работа при этом суммируется в прямо противоположных направлениях. Отсюда следует, что левая часть формулы (3.8) приводится к сумме интегралов, взятых по отрезкам внешнего контура:

$$A = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\smile a_j b_j} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j^* \cdot \Delta \mathbf{r}_j \,,$$

где $\mathbf{F}_j^*$ — значение $\mathbf{F}$ в некоторой точке отрезка $\Delta \mathbf{r}_j$. На основании сказанного формула (3.8) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j^* \cdot \Delta \mathbf{r}_j = \sum_{k=1}^{N} R_{nk}\, \Delta S_k \,.$$

Устремляя n и N к ∞ и предполагая, что при этом $\max\limits_k \Delta S_k \to 0$, находим

$$A = \oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\limits_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \,. \tag{3.9}$$

Криволинейный интеграл, входящий в левую часть формулы (3.9), называется в векторном анализе *циркуляцией вектора* $\mathbf{F}$ *по контуру* C. В правой части выражения (3.9) стоит поверхностный интеграл, взятый по любой гладкой поверхности, ограниченной контуром C. Интеграл такого вида, содержащий проекцию некоторого вектора на нормаль к поверхности,

называется *потоком этого вектора сквозь поверхность*. Таким образом, формула (3.9) означает, что в векторном поле циркуляция вектора равна потоку ротации данного вектора через любую гладкую поверхность, опирающуюся на этот контур (*теорема Стокса*). Из этой теоремы следует, что если $\mathbf{R} = \operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$, то работа в силовом поле не зависит от пути интегрирования, и, следовательно, оно является потенциальным[3].

Примеры потенциальных сил

1. *Центральная сила, зависящая от расстояния* r. Если центр поместить в начало координат и через $F(r)$ обозначить проекцию силы $\mathbf{F}$ на направление $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$, то данная сила может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{F(r)}{r}\,\mathbf{r}\,.$$

При этом элементарная работа имеет вид

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{F(r)\,\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}}{r} = \frac{F(r)\,d(r^2/2)}{r} = F(r)\,dr = dU\,,$$

откуда $U = \int F(r)\,dr$.

В частном случае, когда $F(r) = -c_1 r$ (квазиупругая сила),

$$U = -c_1 r^2/2 + \mathrm{const}\,,$$

где c_1 — жесткость.

Если $F(r) = -\gamma mM/r^2$ (притяжение по закону всемирного тяготения), то

$$U = \gamma mM/r + \mathrm{const}\,.$$

Здесь m — масса точки, M — масса притягивающего центра, γ — гравитационная постоянная.

2. *Плоское центральное поле*. Пусть сила $\mathbf{F}$ является функцией расстояния ρ от точки ее приложения до оси x_3, а ее направление коллинеарно вектору $\boldsymbol{\rho}^0 = \boldsymbol{\rho}/\rho$, то есть

$$\mathbf{F} = F(\rho)\,\boldsymbol{\rho}/\rho\,, \quad \boldsymbol{\rho} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2\,,$$

при этом

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\rho} = F(\rho)\,d\rho = dU\,.$$

Так как свойства данного поля одинаковы во всех плоскостях, перпендикулярных оси x_3, то можно ограничиться рассмотрением одной из них — плоскости Ox_1x_2. Примером плоского центрального поля является поле, для которого

$$F(\rho) = C/\rho\,, \quad U = \int F(\rho)\,d\rho = C\ln\rho + \mathrm{const}\,, \quad C = \mathrm{const}\,.$$

[3]Отметим, что некоторые изложенные в этом параграфе результаты справедливы только для односвязных областей (например, см. пример 3 ниже).

Поверхностями равного потенциала служат окружности, силовыми линиями — прямые, определяемые дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2}\,, \quad X_k = \frac{F(\rho)\,x_k}{\rho}\,, \quad k = 1, 2,$$

или $dx_1/x_1 = dx_2/x_2$, откуда $x_2/x_1 = \mathrm{const}$.

Такое силовое поле можно создать, если на бесконечно длинной прямой, совпадающей с осью x_3, непрерывно распределить электрические заряды $de = (C/2)\,dx_3$ и просуммировать их действие на единичный заряд, помещенный в точку с координатами $(x_1, x_2, 0)$, с учетом закона Кулона.

Нетрудно убедиться, что все рассмотренные потенциалы однозначны.

3. *Плоское силовое поле с многозначным потенциалом.* Для данного случая характерным является поле, в котором

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{C\sin\theta}{\rho} = -\frac{Cx_2}{\rho^2}\,, \qquad X_3 = 0\,, \\ X_2 &= \frac{C\cos\theta}{\rho} = \frac{Cx_1}{\rho^2}\,, \qquad |\mathbf{F}| = \frac{|C|}{\rho}\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где θ — полярный угол (рис. 4).

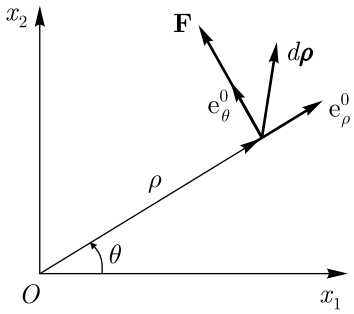

Рис. 4. Плоское силовое поле с многозначным потенциалом

Силовые линии находим из уравнения

$$\frac{dx_1}{x_2} = -\frac{dx_2}{x_1}, \quad \text{или} \quad d(x_1^2 + x_2^2) = 0\,,$$

откуда $x_1^2 + x_2^2 = \rho^2 = \mathrm{const}$, то есть получили уравнения окружностей.

Линиями равного потенциала вследствие условия ортогональности являются прямые, выходящие из начала координат.

Как видно из рис. 4, радиальная составляющая силы $\mathbf{F}$ равна нулю, а трансверсальная представима формулой

$$F_\rho = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta^0 = C/\rho\,.$$

На основании этого работа силы $\mathbf{F}$ на перемещении $d\boldsymbol{\rho}$ такова:

$$\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\rho} = \frac{C}{\rho}\,\mathbf{e}_\theta^0 \cdot (\mathbf{e}_\rho^0\,d\rho + \mathbf{e}_\theta^0 \rho\,d\theta) = C\,d\theta = dU\,,$$

откуда $U = C\,\theta + \mathrm{const}$, что представляет собой многозначную функцию. При обходе по замкнутому контуру вокруг начала координат n раз работа выражается формулой

$$A = 2\pi C n.$$

Вычислим ротацию $\mathbf{R} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$. Тогда получим

$$R_1 = R_2 = 0\,,$$

$$R_3 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{C}{\rho^2} - \frac{2Cx_1^2}{\rho^4} + \frac{C}{\rho^2} - \frac{2Cx_2^2}{\rho^4} = \frac{2C}{\rho^2}\left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\rho^2}\right) = 0\,.$$

Отсюда видно, что вектор $\mathbf{R} = 0$ всюду, за исключением начала координат. Сила $\mathbf{F}$ при $\rho \to 0$ неограниченно возрастает. Иначе говоря, в начале координат имеем особую точку. Если условиться не причислять эту точку к полю, то последнее становится двусвязным потенциальным полем с многозначным потенциалом.

Рассмотренное поле физически может быть реализовано, если представить, что вдоль оси x_3 от $-\infty$ до $+\infty$ течет электрический ток I. Тогда напряженность магнитного поля

$$\mathbf{F} = \frac{C}{\rho^2}\,(\mathbf{e}_3^0 \times \boldsymbol{\rho})\,, \tag{3.11}$$

где $C = I/c$, причем c есть постоянная, зависящая от выбора единиц, а $\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Из (3.11) имеем

$$X_1 = -\frac{Cx_2}{\rho^2}\,, \quad X_2 = \frac{Cx_1}{\rho^2}\,, \quad X_3 = 0\,,$$

что совпадает с формулами (3.10).

До сих пор мы рассматривали потенциальное поле $U(x)$, которое явно не зависело от времени t. Такое поле называется *стационарным*. Если функция U, кроме того, явно зависит от t, то поле называют *нестационарным*. В этом случае

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_k}\,dx_k = dU - \frac{\partial U}{\partial t}\,dt\,,$$

и, следовательно,

$$A = U(t,x) - U(t_0,x_0) - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial U}{\partial t'} dt' \,,$$

и формула (2.10) принимает вид

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi(t,x) = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi(t_0,x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial \Pi(t',x)}{\partial t'}\, dt' \,.$$

Для вычисления квадратуры необходимо знать функции $x_k(t)$, то есть закон движения точки.

§ 4. Вывод уравнений Лагранжа второго рода при нестационарном базисе

В § 1 было установлено, что если положение точки задается криволинейными координатами q^σ, $\sigma = 1,2,3$, то есть если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q)$, то уравнения динамики могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа второго рода (1.5).

Рассмотрим теперь более общий случай, когда радиус-вектор $\mathbf{r}$ зависит не только от q^σ, но и явно от времени t, то есть является функцией вида $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t,q)$. Это, в частности, возможно, когда криволинейные координаты q^σ задают положение точки относительно системы координат, которая определенным образом перемещается относительно неподвижной (абсолютной) системы координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ (рис. 5). Тогда радиус-вектор $\mathbf{r}$ даже при фиксированных значениях q^σ меняется в зависимости от времени вследствие переносного движения системы $Ox_1x_2x_3$.

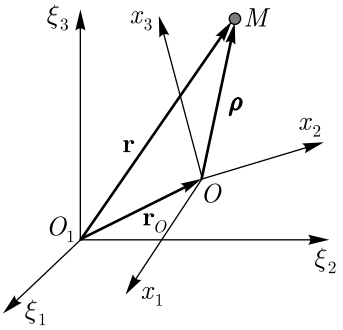

Рис. 5. Случай задания радиус-вектора в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t,q)$

В рассматриваемом случае абсолютную скорость $\mathbf{v}$ вычисляем по формуле

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma\,. \tag{4.1}$$

Вводя для краткости записи обозначение $q^0 = t$, получаем возможность выразить (4.1) следующим образом:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}\,\dot{q}^\alpha\,, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad \dot{q}^0 = 1\,. \tag{4.2}$$

Подчеркнем, что такое представление вводится лишь для краткости записи и поэтому не переводит нас в четырехмерное пространство. Координатными векторами по-прежнему являются векторы

$$\mathbf{e}_\sigma(t, q) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Таким образом, нестационарный базис меняется не только при переходе от точки к точке, но и в каждой точке с течением времени.

Вычислим ковариантную составляющую ускорения $\mathbf{w}$:

$$w_\sigma = \mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_\sigma = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\right) - \mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\,. \tag{4.3}$$

Дифференцируя выражение (4.1) по $\dot{q}^\rho$, а затем по q^ρ, $\rho = 1, 2, 3$, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^\rho} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\rho}\,, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^\rho} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q^\rho} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\sigma \partial q^\rho}\,\dot{q}^\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\rho}\,.$$

Отсюда следует, что слагаемые, входящие в выражение (4.3), могут быть представлены в виде

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma} = \mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}^\sigma}\,,$$

$$\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma} = \mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial T_1}{\partial q^\sigma}\,,$$

поэтому для w_σ окончательно получаем

$$w_\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T_1}{\partial q^\sigma}\,, \quad T_1 = \frac{v^2}{2}\,. \tag{4.4}$$

Таким образом, лагранжева форма представления ковариантной составляющей w_σ не изменяется и для нестационарного базиса.

Кинетическая энергия точки в соответствии с выражением (4.2) имеет вид

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta}\,\dot q^\alpha \dot q^\beta = \frac{m}{2}\,\mathrm{g}_{\alpha\beta}\,\dot q^\alpha \dot q^\beta\,, \quad \alpha,\beta = 0,1,2,3. \tag{4.5}$$

Если в данном выражении выделить слагаемые, явно содержащие $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$, то можно записать

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}\,,$$

где

$$T^{(2)} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\rho}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\right)\dot q^\rho \dot q^\sigma = \frac{m}{2}\,\mathrm{g}_{\rho\sigma}\,\dot q^\rho \dot q^\sigma\,,$$

$$T^{(1)} = m\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\right)\dot q^\sigma = m\mathrm{g}_{0\sigma}\,\dot q^\sigma\,,$$

$$T^{(0)} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)^2 = \frac{m}{2}\,\mathrm{g}_{00}\,.$$

Отметим, что метрическими коэффициентами в данном случае являются только величины, входящие в выражение для $T^{(2)}$.

Из формул (4.4) и (4.5) следует, что, умножая обе части уравнения Ньютона $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$ скалярно на $\mathbf{e}_\sigma$, получаем уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma\,, \quad Q_\sigma = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_\sigma\,, \quad \sigma = 1,2,3. \tag{4.6}$$

Если векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{e}_\sigma$ заданы своими компонентами в декартовых координатах, то Q_σ приобретает вид

$$Q_\sigma = X_i\,\frac{\partial x_i}{\partial q^\sigma}\,.$$

На практике для нахождения Q_σ удобно пользоваться следующим приемом. Введем вектор $\delta\mathbf{r}$, определяемый следующим образом:

$$\delta\mathbf{r} = \delta q^\sigma\,\mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\,\delta q^\sigma\,,$$

где δq^σ — произвольные изменения координат q^σ, называемые вариациями q^σ. Отсюда видно, что $\delta\mathbf{r}$ есть дифференциал функции $\mathbf{r}(t,q)$, вычисляемый при фиксированном t и называемый *вариацией вектор-функции* $\mathbf{r}(t,q)$. Составляя элементарную работу δA силы $\mathbf{F}$ на перемещении $\delta\mathbf{r}$, имеем

$$\delta A = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_\sigma\,\delta q^\sigma = Q_\sigma\,\delta q^\sigma\,.$$

Это выражение представляет собой *элементарную работу*, вычисленную в криволинейных координатах. Каждое слагаемое данной суммы, например $Q_1\,\delta q^1$, есть работа силы $\mathbf{F}$ на перемещении $\delta\mathbf{r}_1 = \delta q^1\,\mathbf{e}_1$. Последнее позволяет рассматривать обобщенную силу Q_σ как коэффициент при вариации δq^σ в выражении элементарной работы δA.

Если силовое нестационарное поле потенциально, то есть если при любом t

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} U(t,x)\,,$$

то обобщенная сила Q_σ принимает вид

$$Q_\sigma = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}(t,q)}{\partial q^\sigma} = \boldsymbol{\nabla} U(t,x)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}(t,q)}{\partial q^\sigma} =$$

$$= \frac{\partial U(t,x)}{\partial x_k}\,\frac{\partial x_k}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial U(t,q)}{\partial q^\sigma}\,.$$

Отметим, что градиент $\boldsymbol{\nabla} U$, как это следует из приведенных равенств, может быть записан следующим образом:

$$\boldsymbol{\nabla} U(t,q) = Q_\sigma\mathbf{e}^\sigma = \frac{\partial U(t,q)}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma\,.$$

Установим теперь явный вид уравнений Лагранжа второго рода при нестационарном базисе. Подставляя выражение (4.5) в уравнения (4.6), получаем

$$m\,(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\,\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta) = Q_\sigma\,,\quad \sigma,\tau = 1,2,3,\quad \alpha,\beta = 0,1,2,3, \tag{4.7}$$

где

$$\Gamma_{\sigma,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathrm{g}_{\sigma\alpha}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial\mathrm{g}_{\sigma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial\mathrm{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^\sigma}\right).$$

Суммы $\Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta$ в уравнениях (4.7) могут быть записаны в следующем виде:

$$\Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = \Gamma_{\sigma,\rho\tau}\,\dot{q}^\rho\dot{q}^\tau + 2\,\Gamma_{\sigma,0\tau}\,\dot{q}^\tau + \Gamma_{\sigma,00}\,.$$

Двойная сумма, стоящая в правой части этого выражения, встречается в случае стационарного базиса. Сумма $2\,\Gamma_{\sigma,0\tau}\,\dot{q}^\tau$ и слагаемое $\Gamma_{\sigma,00}$ появляются вследствие нестационарности базиса. Отметим, что символами Кристоффеля первого рода являются только величины $\Gamma_{\sigma,\rho\tau}$.

§ 5. Получение интеграла энергии и интеграла Якоби из уравнений Лагранжа второго рода

Если силы, действующие на точку, имеют потенциал, явно не зависящий от времени, то, как было показано в § 2, уравнения движения имеют интеграл энергии (2.12). Покажем, что этот интеграл может быть получен непосредственно из уравнений Лагранжа второго рода в предположении, что базис является стационарным. При этом $Q_\sigma = \partial U/\partial q^\sigma$, а кинетическая энергия T представляет собой однородную квадратичную форму скоростей

$$T = \frac{m}{2}\,\mathrm{g}_{\sigma\tau}\dot{q}^\sigma\dot{q}^\tau\,,$$

причем $g_{\sigma\tau}$ являются функциями только координат q^σ. Умножая уравнения Лагранжа второго рода на $\dot{q}^\sigma$ и суммируя по σ, получаем

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\right)\dot{q}^\sigma - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma = \frac{\partial U}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma\,,$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\dot{q}^\sigma\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\ddot{q}^{\,\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma = \frac{\partial U}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma\,. \tag{5.1}$$

Так как T и U по предположению явно от времени не зависят, то выполняются равенства

$$\frac{dT(q,\dot{q})}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\ddot{q}^{\,\sigma}\,, \qquad \frac{dU(q)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma\,.$$

На основании этого формулу (5.1) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\dot{q}^\sigma - T - U\right) = 0\,.$$

Поскольку по теореме Эйлера об однородных функциях $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\dot{q}^\sigma = 2T$, окончательно получаем

$$\frac{d(T-U)}{dt} = 0\,,$$

откуда

$$E \equiv T + \Pi = \mathrm{const}\,. \tag{5.2}$$

Таким образом, как и ранее, в случае стационарного потенциального поля получаем *интеграл энергии*.

В общем случае нестационарной задачи имело бы место выражение

$$\frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\ddot{q}^{\,\sigma} = \frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial t}\,,$$

где

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}\,.$$

Обращаясь к формуле (5.1), рассмотрим входящее в нее выражение $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\dot{q}^\sigma\right)$. Применяя теорему Эйлера к функциям $T^{(2)}$ и $T^{(1)}$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\dot{q}^\sigma\right) = \frac{d}{dt}(2T^{(2)} + T^{(1)})\,.$$

В результате формула (5.1) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(2T^{(2)}+T^{(1)})-\frac{dT^{(2)}}{dt}-\frac{dT^{(1)}}{dt}-\frac{dT^{(0)}}{dt}+$$

$$+\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{dU}{dt}+\frac{\partial U}{\partial t}=0\,,$$

или

$$\frac{d(T^{(2)}-T^{(0)}-U)}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial t}\,.$$

Отсюда видно, что если функции U и T явно не содержат t, то справедливо выражение

$$T^{(2)}-T^{(0)}+\Pi=\mathrm{const}\,, \tag{5.3}$$

называемое *интегралом Якоби*. Этот интеграл наиболее часто используется при решении специальных задач небесной механики.

§ 6. Канонические уравнения

Уравнения Лагранжа второго рода, записанные в явном виде (4.7), представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. Число этих уравнений равно трем. Известно, что для теоретического исследования поведения решений дифференциальных уравнений весьма удобны *уравнения в нормальной форме*. Под этой формой подразумевается система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных.

Для замены системы дифференциальных уравнений второго порядка (4.7) системой шести уравнений, каждое из которых имеет первый порядок, достаточно положить

$$\dot{q}^{\sigma}=\widehat{v}^{\sigma}\,,\quad \sigma=1,2,3, \tag{6.1}$$

и записать уравнения (4.7) в виде

$$m\,(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\,\dot{\widehat{v}}^{\tau}+\Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta})=Q_{\sigma}\,,\quad \sigma=1,2,3. \tag{6.2}$$

Разрешая систему (6.2) относительно $\dot{\widehat{v}}^{\tau}$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\widehat{v}}^{\tau}&=\frac{\mathrm{g}^{\tau\sigma}\,Q_{\sigma}}{m}-\mathrm{g}^{\tau\sigma}\,\Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}=\frac{Q^{\tau}}{m}-\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}=\\&=\frac{Q^{\tau}}{m}-\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}\,\widehat{v}^{\rho}\widehat{v}^{\sigma}-2\Gamma^{\tau}_{0\sigma}\,\widehat{v}^{\sigma}-\Gamma^{\tau}_{00}\,.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Здесь, как и в § 7 главы I, через $\mathrm{g}^{\tau\sigma}$ обозначены коэффициенты матрицы, обратной матрице с коэффициентами $\mathrm{g}_{\sigma\tau}$. Система уравнений (6.1) и (6.3) представляет собой систему шести дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных.

Если силы, действующие на точку, имеют потенциал, система уравнений (4.7) может быть приведена к *уравнениям в канонической форме*. Уравнения Лагранжа второго рода при наличии силового потенциала могут быть представлены в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\,, \quad \sigma = 1, 2, 3, \tag{6.4}$$

где функция $L = T + U$ называется *кинетическим потенциалом*, или *функцией Лагранжа*. Предполагая, что U зависит только от координат и времени, и, следовательно, $\partial U/\partial \dot{q}^\sigma = 0$, можно записать

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\,, \quad \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial U}{\partial q^\sigma}\,,$$

поэтому уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial U}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = 1, 2, 3,$$

и могут быть выражены в форме (6.4).

При снижении порядка дифференциальных уравнений механики вместо $\widehat{v}^\sigma$ удобно использовать переменные

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma}\left(\frac{m}{2}\,\mathrm{g}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\right) = m\left(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\,\dot{q}^\tau + \mathrm{g}_{\sigma 0}\right), \quad \sigma = 1, 2, 3. \tag{6.5}$$

Введенные величины p_σ в дальнейшем будем называть *обобщенными импульсами*. Линейная система (6.5) всегда может быть разрешена относительно $\dot{q}^\tau$, $\tau = 1, 2, 3$, так как коэффициенты $\mathrm{g}_{\sigma\tau}$ являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы. Разрешая эту систему, получаем

$$\dot{q}^\tau = \mathrm{g}^{\tau\sigma}\,p_\sigma/m - \mathrm{g}^{\tau\sigma}\,\mathrm{g}_{\sigma 0}\,, \quad \sigma, \tau = 1, 2, 3. \tag{6.6}$$

Введем функцию

$$H(t, q, p) = p_\tau \dot{q}^\tau - L(t, q, \dot{q})\,. \tag{6.7}$$

В правой части этого выражения обобщенные скорости $\dot{q}^\tau$ считаются выраженными через обобщенные импульсы p_σ по формулам (6.6). Переход от функции $L(t,q,\dot{q})$ к функции $H(t,q,p)$ по формуле (6.7) называется *преобразованием Лежандра*, а сама функция H называется *функцией Гамильтона*. Непосредственным вычислением производных можно убедиться, что

$$\frac{\partial H}{\partial q^\sigma} = p_\tau \frac{\partial \dot{q}^\tau}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\tau}\frac{\partial \dot{q}^\tau}{\partial q^\sigma}\,.$$

Однако согласно формулам (6.5) $\partial L/\partial \dot{q}^\tau = p_\tau$ и, значит,

$$\frac{\partial H}{\partial q^\sigma} = -\frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = 1,2,3. \tag{6.8}$$

На основании этих формул уравнения Лагранжа (6.4) можно записать в виде

$$\dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q^\sigma}\,.$$

Аналогично

$$\frac{\partial H}{\partial p_\sigma} = \dot{q}^\sigma + p_\tau \frac{\partial \dot{q}^\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\tau}\frac{\partial \dot{q}^\tau}{\partial p_\sigma}\,.$$

Используя (6.5), получаем

$$\dot{q}^\sigma = \frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p_\sigma}\,. \tag{6.9}$$

Система уравнений

$$\dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q^\sigma}\,, \quad \dot{q}^\sigma = \frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p_\sigma}\,, \quad \sigma = 1,2,3, \tag{6.10}$$

называется *канонической системой уравнений в форме Гамильтона (уравнениями Гамильтона)*.

Из системы (6.10) следует, что если какая-либо из координат q^ρ не входит в выражение для функции H, то производная $\partial H/\partial q^\rho = 0$ и, следовательно, получаем интеграл

$$p_\rho = \mathrm{const}\,.$$

Такие координаты носят название *циклических координат*, а соответствующие им интегралы — *циклических интегралов*.

Полная производная от H по времени имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q^\tau}\,\dot{q}^\tau + \frac{\partial H}{\partial p_\tau}\,\dot{p}_\tau\,.$$

Подставляя вместо $\dot{q}^\tau$ и $\dot{p}_\tau$ их значения (6.10), находим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}\,.$$

Поэтому в случае стационарной системы имеем интеграл

$$H = \mathrm{const}\,.$$

Нетрудно убедиться, что это интеграл энергии. Действительно, в случае стационарного базиса сумма

$$p_\tau\,\dot{q}^\tau = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\tau}\,\dot{q}^\tau$$

на основании теоремы Эйлера об однородных функциях равна $2T$, и выражение для H принимает вид

$$H = 2T - L = T - U = T + \Pi\,,$$

следовательно, в стационарном случае функция Гамильтона равна полной механической энергии системы:

$$H = T + \Pi = E\,.$$

Если среди сил, действующих на точку, кроме сил, обладающих потенциалом, существуют непотенциальные обобщенные силы Q^*_σ, то уравнения Лагранжа приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q^*_\sigma\,, \quad \sigma = 1, 2, 3,$$

откуда получаем

$$\dot{p}_\sigma = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} + Q^*_\sigma\,. \tag{6.11}$$

Из формулы (6.7), определяющей функцию H, видно, что соотношения (6.8) и (6.9) не зависят от Q^*_σ, поэтому они справедливы и для рассматриваемого случая. В результате в соответствии с формулами (6.11), (6.8) и (6.9) имеем

$$\dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q^\sigma} + Q^*_\sigma\,, \quad \dot{q}^\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\,, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

§ 7. Колебательное движение материальной точки

Свободные колебания материальной точки. Рассмотрим простейший пример движения тела массой m по гладкой горизонтальной плоскости, когда оно крепится к концу горизонтальной пружины, другой конец которой неподвижен. При поступательном движении данного тела достаточно проследить за движением лишь одной его точки, например точки M, совпадающей с местом крепления подвижного конца пружины. Предположим, что начальная скорость поступательного движения тела направлена вдоль пружины. Тогда дальнейшее движение точки M будет совершаться по прямой, с которой удобно связать ось x. Начало координат O этой оси поместим в точку M, положение которой соответствует недеформированной пружине. Очевидно, что $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i}$.

Пусть для удлинения пружины на 1 м следует приложить силу в c Ньютонов. В этом случае говорят, что жесткость пружины равна c Н/м. Очевидно, что если к такой пружине прикреплено исследуемое тело, то на него со стороны пружины действует сила упругости $F = cr$. Так как эта сила стремится вернуть сдвинутое тело в начало координат, то ее векторное выражение можно записать в виде

$$\mathbf{F} = -c\mathbf{r} = -cx\mathbf{i}\,.$$

В реальных условиях наряду с упругой силой действуют и различные силы сопротивления (демпфирования). Рассмотрим случай, когда можно считать, что сила сопротивления $\mathbf{R}$ пропорциональна первой степени скорости. Так как эта сила всегда ориентирована в сторону, противоположную скорости, то ее можно представить в виде

$$\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v} = -\mu\dot{x}\mathbf{i}\,,$$

где μ — коэффициент пропорциональности.

Помимо сил упругости и сопротивления на тело действуют сила тяжести и сила нормального давления гладкой плоскости. Но так как последние являются вертикальными, а сила сухого трения по предположению отсутствует, то уравнение движения материальной точки вдоль горизонтальной оси x таково:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}\,,$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{7.1}$$

где

$$\omega^2 = \frac{c}{m}\,, \quad n = \frac{\mu}{2m}\,. \tag{7.2}$$

Характеристический полином для дифференциального уравнения (7.1) имеет вид

$$\lambda^2 + 2n\lambda + \omega^2 = 0\,. \tag{7.3}$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка (7.1) можно представить в виде

$$x = C_1 x_I + C_2 x_{II}\,, \tag{7.4}$$

где x_I и x_{II} — частные линейно-независимые решения исследуемого уравнения. В зависимости от соотношения между величинами n и ω корни характеристического полинома (7.3) могут быть комплексными ($0 < n < \omega$), вещественными одинаковыми ($n = \omega$) и разными ($n > \omega$).

При $n < \omega$ (при малом сопротивлении) частные решения имеют вид

$$x_I = e^{-nt}\cos\sqrt{\omega^2 - n^2}\,t\,, \quad x_{II} = e^{-nt}\sin\sqrt{\omega^2 - n^2}\,t\,, \tag{7.5}$$

поэтому общее решение (7.4) можно представить следующим образом:

$$x = e^{-nt}(C_1\cos\sqrt{\omega^2 - n^2}\,t + C_2\sin\sqrt{\omega^2 - n^2}\,t)\,. \tag{7.6}$$

Часто общее решение (7.6) бывает удобно представить в другой форме, заменив произвольные постоянные C_1 и C_2 на новые постоянные a и α по формулам

$$C_1 = a\sin\alpha, \quad C_2 = a\cos\alpha\,.$$

При этом выражение (7.6) запишется в виде

$$x = e^{-nt} a\sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}\,t + \alpha)\,, \tag{7.7}$$

где величины a и α можно вычислить через C_1 и C_2:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,; \quad \alpha = \operatorname{arcctg}\frac{C_2}{C_1}\,, \quad C_1 > 0\,; \quad \alpha = \pi + \operatorname{arcctg}\frac{C_2}{C_1}\,, \quad C_1 < 0;$$

$$\alpha = 0\,, \quad C_1 = 0\,, \quad C_2 > 0\,; \qquad \alpha = \pi\,, \quad C_1 = 0\,, \quad C_2 < 0\,.$$

Если заданы начальные условия

$$(x)_{t=0} = x_0\,, \quad (\dot{x})_{t=0} = \dot{x}_0\,, \tag{7.8}$$

то произвольные постоянные можно найти по формулам

$$C_1 = x_0\,, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}\,, \tag{7.9}$$

или

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{\omega^2 - n^2}}\,; \quad \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{x_0\sqrt{\omega^2 - n^2}}\,, \quad x_0 > 0\,;$$

$$\alpha = \pi + \operatorname{arcctg} \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{x_0\sqrt{\omega^2 - n^2}}\,, \quad x_0 < 0\,; \tag{7.10}$$

$$\alpha = 0\,, \quad x_0 = 0\,, \quad \dot{x}_0 + nx_0 > 0\,; \quad \alpha = \pi\,, \quad x_0 = 0\,, \quad \dot{x}_0 + nx_0 < 0\,.$$

Остановимся на частном случае, когда $n = 0$, то есть на идеализированном случае полного отсутствия сопротивлений движению. Тогда согласно формулам (7.6) и (7.7) общее решение можно представить в виде

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t\,, \tag{7.11}$$

или

$$x = a \sin(\omega t + \alpha)\,. \tag{7.12}$$

Значения C_1, C_2 и a, α, выделяющие частное решение, соответствующее начальным данным (7.8), можно вычислить по выражениям (7.9) или (7.10), полагая в них $n = 0$.

Очевидно, что движение, описываемое уравнением (7.11) или (7.12), является периодическим с периодом $T = 2\pi/\omega$. Величины a, ω и α называются соответственно *амплитудой*, *круговой (циклической) частотой* и *начальной фазой*. Отметим, что так как согласно формуле (7.2) $\omega = \sqrt{c/m}$, то частота, а следовательно, и период колебаний не зависят от начальных условий. Описанное явление называется *изохронностью*, или *таутохронностью гармонических колебаний*. Оно характерно для линейного дифференциального уравнения (7.1) при $n = 0$ и отсутствует при колебаниях, описываемых нелинейными уравнениями (более подробно об этом см. в главе II второго тома учебника). Отметим, что круговая частота ω называется также *частотой свободных колебаний* или *собственной частотой*.

Вернемся к случаю малого сопротивления ($0 < n < \omega$). Как видно из полученного выше решения (7.7), в этом случае имеем периодическое изменение знака координаты x исследуемой точки. Множитель e^{-nt} показывает, что амплитуда колебаний со временем уменьшается, то есть мы имеем дело с затухающими колебаниями. Хотя функция (7.7) и непериодическая, обычно при подобном движении условно вводится понятие периода

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}\,,$$

под которым подразумевается промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки через положение равновесия в одном и том же направлении.

Рассмотренные затухающие колебания обладают интересным свойством: если построить последовательность x_1, x_2, x_3, ... из всех экстремальных отклонений точки в одну и ту же сторону, то окажется, что она представляет собой геометрическую прогрессию. Действительно, эти экстремальные отклонения наблюдаются при обращении скорости точки в нуль:

$$\dot{x} = e^{-nt} a[\sqrt{\omega^2 - n^2}\cos(\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \alpha) - n\sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \alpha)] = 0\,.$$

Если это трансцендентное уравнение удовлетворяется при $t = t_i$, то следующий его корень, соответствующий очередному экстремальному отклонению точки в ту же сторону, окажется равным $t_{i+1} = t_i + T_1$. Тем самым последовательность t_1, t_2, t_3, ... будет арифметической прогрессией с разностью, равной величине введенного условного периода T_1 затухающих колебаний. Два последовательных экстремальных отклонения в одну и ту же сторону вычисляются по формулам

$$x_i = e^{-nt} a\sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t_i + \alpha)\,,$$

$$x_{i+1} = e^{-n(t_i + T_1)} a\sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}\,(t_i + T_1) + \alpha) = e^{-nT_1} x_i\,,$$

и поэтому их отношение действительно оказывается постоянным:

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} = e^{-nT_1} = D\,. \tag{7.13}$$

Знаменатель D этой геометрической прогрессии называется *декрементом колебаний*, а натуральный логарифм от него $\ln D = -nT_1$ — *логарифмическим декрементом колебаний*. Отметим, что использование формулы (7.13) позволяет по экспериментально снятым величинам x_i и x_{i+1} определить значение коэффициента $\mu = 2mn$ (см. формулы (7.2)).

При движении с большим сопротивлением ($n \geqslant \omega$) корни характеристического уравнения (7.3) оказываются вещественными. При $n = \omega$ общее решение уравнения (7.1) можно записать в виде

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2\, t)\,,$$

а при $n > \omega$ следующим образом:

$$x = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2 - \omega^2}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - \omega^2}\, t})\,.$$

С помощью гиперболических функций последнюю формулу можно представить иначе:

$$x = e^{-nt}(A \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - \omega^2}\, t + B \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - \omega^2}\, t)\,,$$

или

$$x = e^{-nt} a \operatorname{sh}(\sqrt{n^2 - \omega^2}\, t + \beta)\,.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 или A, B, а также α, β могут быть определены из начальных условий (7.8). При $n = \omega$, например, имеем

$$C_1 = x_0\,, \quad C_2 = \dot{x}_0 + n x_0\,,$$

а при $n > \omega$ следует воспользоваться формулами

$$C_1 = \frac{x_0(\sqrt{n^2 - \omega^2} + n) + \dot{x}_0}{2\sqrt{n^2 - \omega^2}}\,, \quad C_2 = \frac{x_0(\sqrt{n^2 - \omega^2} - n) - \dot{x}_0}{2\sqrt{n^2 - \omega^2}}\,.$$

Из приведенных решений видно, что при $n \geqslant \omega$ движения носят явно неколебательный характер и поэтому называются *апериодическими*.

Вынужденные колебания материальной точки. Рассмотрим теперь *вынужденные колебания точки*, когда помимо рассматриваемых сил упругости и сопротивления на нее действует сила $\mathbf{Q}(t)$, называемая *возмущающей*. Считаем, что $\mathbf{Q}/m = f(t)\mathbf{i}$. В этом случае движение материальной точки описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = f(t)\,. \tag{7.14}$$

Будем отыскивать решение неоднородного дифференциального уравнения (7.14) методом вариации произвольных постоянных. Согласно этому методу решение ищется в виде решения (7.4) однородного уравнения (7.1), в котором произвольные постоянные считаются неизвестными функциями времени $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Дифференцируя при этом предположении выражение (7.4), получим

$$\dot{x} = \dot{C}_1 x_I + \dot{C}_2 x_{II} + C_1 \dot{x}_I + C_2 \dot{x}_{II}\,.$$

Так как для отыскания двух неизвестных функций имеется лишь одно уравнение (7.14), то эти функции можно подчинить дополнительному условию. В качестве такого условия примем

$$\dot{C}_1 x_I + \dot{C}_2 x_{II} = 0\,. \tag{7.15}$$

Условие (7.15) удобно тем, что при его выполнении выражение для $\dot{x}$ имеет такой же вид, как и при постоянных C_1 и C_2:

$$\dot{x} = C_1\dot{x}_I + C_2\dot{x}_{II}\,. \tag{7.16}$$

Дифференцируя соотношение (7.16) еще раз по времени, получаем

$$\ddot{x} = \dot{C}_1\dot{x}_I + \dot{C}_2\dot{x}_{II} + C_1\ddot{x}_I + C_2\ddot{x}_{II}\,. \tag{7.17}$$

Подставляя выражения (7.4), (7.16) и (7.17) в уравнение (7.14) и учитывая, что решение (7.4) удовлетворяет соответствующему однородному дифференциальному уравнению (7.1), получим

$$\dot{C}_1\dot{x}_I + \dot{C}_2\dot{x}_{II} = f(t)\,. \tag{7.18}$$

Это уравнение и условие (7.15) составляют систему дифференциальных уравнений, после интегрирования которой можно найти неизвестные функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$, и тем самым построить и общее решение неоднородного уравнения (7.14) в виде (7.4).

Остановимся подробнее на получении общего решения методом вариации произвольных постоянных для случая малого сопротивления. При $n < \omega$ частные решения x_I и x_{II} имеют вид (7.5), поэтому дополнительное условие (7.15) перепишется следующим образом:

$$\dot{C}_1 e^{-nt}\cos\sqrt{\omega^2-n^2}\,t + \dot{C}_2 e^{-nt}\sin\sqrt{\omega^2-n^2}\,t = 0\,. \tag{7.19}$$

Уравнение (7.18) примет вид

$$\begin{gathered}-\dot{C}_1 e^{-nt}(n\cos\sqrt{\omega^2-n^2}\,t + \sqrt{\omega^2-n^2}\sin\sqrt{\omega^2-n^2}\,t)+\\ +\dot{C}_2 e^{-nt}(\sqrt{\omega^2-n^2}\cos\sqrt{\omega^2-n^2}\,t - n\sin\sqrt{\omega^2-n^2}\,t) = f(t)\,.\end{gathered} \tag{7.20}$$

Система дифференциальных уравнений (7.19)–(7.20) и позволяет после интегрирования найти интересующие нас неизвестные функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Обратим внимание на то, что уравнение (7.20) в силу выполнения (7.19) можно переписать короче:

$$-\dot{C}_1\sin\sqrt{\omega^2-n^2}\,t + \dot{C}_2\cos\sqrt{\omega^2-n^2}\,t = \frac{f(t)e^{nt}}{\sqrt{\omega^2-n^2}}\,.$$

Решая его совместно с уравнением (7.19), умноженным на e^{nt}, получим

$$\dot{C}_1 = -\frac{f(t)e^{nt}}{\sqrt{\omega^2-n^2}}\sin\sqrt{\omega^2-n^2}\,t\,,\quad \dot{C}_2 = \frac{f(t)e^{nt}}{\sqrt{\omega^2-n^2}}\cos\sqrt{\omega^2-n^2}\,t,$$

или

$$C_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \int_0^t f(\xi) e^{n\xi} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2}\, \xi d\xi + D_1\,,$$

$$C_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \int_0^t f(\xi) e^{n\xi} \cos \sqrt{\omega^2 - n^2}\, \xi d\xi + D_2\,,$$

где D_1 и D_2 являются произвольными постоянными. Теперь общее решение уравнения (7.14) при $n < \omega$ согласно представлениям (7.4) и (7.5) может быть записано в виде

$$\begin{gathered} x = D_1 e^{-nt} \cos \sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + D_2 e^{-nt} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2} t + \\ + \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \int_0^t f(\xi) e^{-n(t-\xi)} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2} (t - \xi)\, d\xi\,. \end{gathered} \tag{7.21}$$

Здесь согласно формуле (7.6) первые два слагаемых являются общим решением соответствующего однородного дифференциального уравнения (7.1), а последнее слагаемое, называемое *интегралом Дюамеля*, является частным решением исследуемого неоднородного дифференциального уравнения (7.14). Отметим, что частное решение, представленное в виде интеграла Дюамеля, удовлетворяет нулевым начальным условиям. Поэтому решение уравнения (7.14), удовлетворяющее начальным данным (7.8), можно записать в виде

$$\begin{gathered} x = e^{-nt} (x_0 \cos \sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2}\, t) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \int_0^t f(\xi) e^{-n(t-\xi)} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2} (t - \xi)\, d\xi\,, \quad n < \omega\,. \end{gathered} \tag{7.22}$$

В случае отсутствия сопротивления (n=0) оно представится следующим образом:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega\, t + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\xi) \sin(t - \xi)\, d\xi\,, \quad n = 0\,. \tag{7.23}$$

Аналогичным образом можно получить решения уравнения (7.14), удовлетворяющие начальным условиям (7.8), и для случаев $n = \omega$ и $n > \omega$:

$$x = e^{-nt} [x_0 + (\dot{x}_0 + n x_0)\, t] + \int_0^t f(\xi) e^{-n(t-\xi)} (t - \xi)\, d\xi\,, \quad n = \omega\,, \tag{7.24}$$

$$\begin{gathered} x = e^{-nt} (x_0 \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - \omega^2}\, t + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\sqrt{n^2 - \omega^2}} \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - \omega^2}\, t) + \\ + \frac{1}{\sqrt{n^2 - \omega^2}} \int_0^t f(\xi) e^{-n(t-\xi)} \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - \omega^2}\, (t - \xi)\, d\xi\,, \quad n > \omega\,. \end{gathered} \tag{7.25}$$

Рассмотрим воздействие гармонической возмущающей силы

$$\mathbf{Q}(t) = H \sin \nu t \, \mathbf{i}. \tag{7.26}$$

Тогда $f(t) = h \sin \nu t, \ h = H/m$.

В случае отсутствия сопротивления ($n = 0$) интеграл Дюамеля в (7.23) при $\nu \neq \omega$ сводится к табличным интегралам

$$\frac{h}{\omega} \int_0^t \sin \nu\xi \sin \omega(t-\xi)\, d\xi = \frac{h}{2\omega} \int_0^t \{\cos[(\nu+\omega)\xi - \omega t] - \cos[(\nu-\omega)\xi + \omega t]\}\, d\xi$$

и поэтому легко вычисляется:

$$\frac{h}{\omega} \int_0^t \sin \nu\xi \sin \omega(t-\xi)\, d\xi = \frac{h\nu}{\omega(\nu^2-\omega^2)} \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2-\nu^2} \sin \nu t\,, \quad \nu \neq \omega\,. \tag{7.27}$$

При $\nu = \omega$ будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{h}{\omega} \int_0^t \sin \omega\xi \sin \omega(t-\xi)\, d\xi &= \frac{h}{2\omega} \int_0^t [\cos(2\omega\xi - \omega t) - \cos \omega t]\, d\xi = \\ &= \frac{h}{2\omega^2} \sin \omega t - \frac{ht}{2\omega} \cos \omega t\,. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Первое слагаемое в формуле (7.27) и первые два слагаемых формулы (7.23) отражают колебания, совершаемые точкой с собственной частотой ω. Эти слагаемые не затухают лишь в идеализированном случае полного отсутствия сопротивления ($n = 0$). Во всех же реальных системах, в которых присутствует хотя бы незначительное сопротивление, как увидим ниже, упомянутые слагаемые с течением времени затухают. Поэтому специальный интерес представляет второе слагаемое в формуле (7.27), характеризующее так называемые *вынужденные колебания точки*, происходящие с частотой ν возмущающей силы (7.26). Амплитуда $h/(\omega^2-\nu^2)$ этих вынужденных колебаний неограниченно увеличивается при $\nu \to \omega$. Развитие этих колебаний во времени при $\nu = \omega$ характеризует второе слагаемое формулы (7.28). Это явление носит название *резонанса*. Иногда слагаемое $-(ht\cos\omega t)/(2\omega)$ называется *вековым членом.*. Этот термин пришел из астрономии, где подобные выражения характеризуют отклонения в движениях планет, накапливающиеся в течение столетий (веков).

В радиотехнике стремятся возможно точнее настроить собственную частоту ω колебательного контура на частоту передатчика ν, в случае же механических колебаний резонанс обычно оказывается опасным и часто

приводит к разрушению конструкции[4]. Однако в настоящее время в целом ряде и механических конструкций, например в вибрационных машинах, основой рабочего процесса является настройка системы на резонанс. Кстати, опытные звонари еще с давних времен знали, что при раскачивании тяжелого языка колокола нужно тянуть за веревку с частотой, совпадающей с собственной частотой языка.

Если $n \neq 0$, то, подставляя функцию $f(t) = h \sin \nu t$ в формулу (7.22), после сравнительно кропотливых выкладок можно получить

$$\begin{gathered} x = e^{-nt}(x_0 \cos \sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2}\, t) + \\ + e^{-nt} A \left(\sin \gamma \cos \sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \frac{n \sin \gamma - \nu \cos \gamma}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - n^2}\, t\right) + \\ + A \sin(\nu t - \gamma)\,, \end{gathered} \tag{7.29}$$

где

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4n^2\nu^2}}\,, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2n\nu}{\omega^2 - \nu^2}\,. \tag{7.30}$$

Из формулы (7.29) отчетливо видно, что слагаемые, содержащие множители e^{-nt}, с течением времени затухают. Движение, при котором они должны учитываться, называется *переходным процессом*. После его окончания колебания достаточно точно характеризуются слагаемым $A \sin(\nu t - \gamma)$, описывающим установившиеся в системе вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы. Зависимость амплитуды A этих колебаний от частоты возмущающей силы ν называется *амплитудно-частотной характеристикой* данной системы.

Интересно сравнить амплитуду A установившихся вынужденных колебаний при переменной возмущающей силе (7.26), имеющей амплитуду H,

[4]Вот как описывает Алексей Николаевич Крылов некоторые трагические последствия резонанса в книге «Вибрация судов» (ОНТИ. Л.; М., 1936. С. 7): «Кажется, во времена наполеоновских войн в Испании через какой-то мост шел отряд войска, твердо отбивая шаг (вероятно, на мосту или за мостом стояло какое-нибудь важное начальство). Мост был цепной, лихо отбиваемый шаг как раз пришелся в такт с периодом колебаний моста, размахи увеличились настолько, что цепи оборвались, и мост обрушился в реку. После того во всех армиях держалось правило — при переходе через мост не идти “в ногу” и “шаг не отбивать”; но лет тридцать тому назад в тогдашнем Петербурге был через Фонтанку цепной мост, который назывался Египетским, шел через него эскадрон гвардейской кавалерии не помню какого полка, лошади хорошо обученные, особенно стройному церемониальному маршу, шли в ногу, отбивая шаг, который и совпал в такт с колебаниями моста, — цепи лопнули, мост обрушился в воду, погибло чуть ли не 40 человек».

со статическим удлинением пружины A_0 при постоянной силе H. Отношение $\eta = A/A_0$ называется *коэффициентом динамичности*. Этот коэффициент при учете того, что

$$A_0 = \frac{H}{c} = \frac{hm}{c} = \frac{h}{\omega^2}\,,$$

в соответствии с первой из формул (7.30) может быть представлен в виде

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\nu^2}{\omega^2})^2 + \frac{4n^2}{\omega^2}\cdot\frac{\nu^2}{\omega^2}}}\,.$$

Значения коэффициента динамичности в зависимости от отношения ν/ω при различных значениях величины $\delta = 2n/\omega$ приведены на рис. 6, *а*. Из рисунка видно, что если частота силы мала по сравнению с собственной частотой колебаний системы, то коэффициент близок к единице. Это означает, что в подобных случаях удлинение пружины в любой момент может быть с достаточной точностью вычислено в предположении, что возмущающая сила $H\sin\nu t$ действует статически.

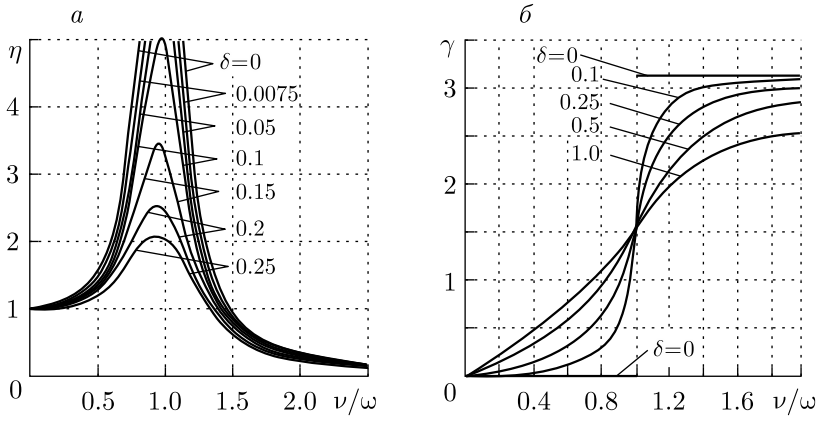

Рис. 6. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики

В другом крайнем случае, когда частота ν велика по сравнению с собственной частотой ω, коэффициент динамичности становится весьма малым. В обоих крайних случаях кривые, соответствующие различным значениям величины δ, сходятся очень близко. Это означает, что в этих

случаях силы демпфирования мало влияют на амплитуду вынужденных колебаний. Если же частота возмущающей силы приближается к частоте собственных колебаний, то коэффициент динамичности быстро увеличивается и, как видно из рис. 6, *а*, его величина становится весьма чувствительной к изменению демпфирования, особенно если оно мало. Приравнивая нулю производную коэффициента динамичности, взятую по аргументу ν/ω, видим, что величина η достигает максимума при

$$\frac{\nu^2}{\omega^2} = 1 - \frac{2\,n^2}{\omega^2},$$

причем

$$\eta_{max} = \frac{\omega}{2n}\left(1 - \frac{n^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}.$$

Для исследования *фазочастотной характеристики*, представляющей собой зависимость сдвига фазы γ от частоты возмущающей силы ν, вторую формулу в (7.30) удобно переписать следующим образом:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\frac{n}{\omega}\cdot\frac{\nu}{\omega}}{1 - \nu^2/\omega^2}.$$

Отсюда, в частности, видно, что при резонансе ($\nu = \omega$) сдвиг фазы $\gamma = \pi/2$. Зависимость γ от ν/ω при различных значениях $\delta = 2n/\omega$ представлена на рис. 6, *б*.

Предельные кривые на рис. 6, имеющие разрывы, соответствуют случаю $n = 0$ и согласуются с результатами, полученными выше.

§ 8. Динамика относительного движения материальной точки

Основные понятия. Дифференциальное уравнение относительного движения точки. Исследуем относительное движение материальной точки.

Пусть дана система координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$, относительно которой движется материальная точка M с ускорением $\mathbf{w}$ (рис. 7). Тогда согласно второму закону Ньютона можно записать

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}\,, \tag{8.1}$$

где $\mathbf{F}$ — действующая на точку сила. Выберем другую систему координат $Ox_1x_2x_3$. Будем считать, что движение ее относительно исходной системы

$O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ известно, то есть заданы скорость движения $\mathbf{v}_o$ центра вспомогательной системы координат и ее угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращения относительно первой. Тогда, как известно из кинематики, абсолютная скорость точки M относительно системы $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ выражается формулой

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r\,,$$

где

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,.$$

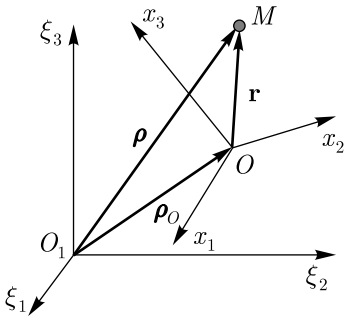

Рис. 7. Движение точки в двух системах координат

Аналогично, по теореме о сложении ускорений абсолютное ускорение точки складывается из векторов переносного, относительного и кориолисова ускорений

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c\,, \tag{8.2}$$

где

$$\mathbf{w}_c = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r\,. \tag{8.3}$$

Ускорение $\mathbf{w}$, входящее в (8.1), равно $\mathbf{w}_a$. На основании (8.2) второй закон Ньютона (8.1) можно записать в форме

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + (-m\mathbf{w}_e) + (-m\mathbf{w}_c)\,, \tag{8.4}$$

которая представляет собой уравнение движения точки, находящейся под воздействием сил $\mathbf{F}$, $-m\mathbf{w}_e$, $-m\mathbf{w}_c$. Условимся в дальнейшем называть *силой инерции* произведение массы на ускорение, взятое со знаком минус[5].

[5]Более глубоко и всесторонне вопрос о силах инерции рассматривается в монографии: *Ишлинский А. Ю.* Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.

Поэтому выражения

$$\mathbf{J}_e = -m\mathbf{w}_e\,, \quad \mathbf{J}_c = -m\mathbf{w}_c \tag{8.5}$$

будем называть соответственно *силами инерции от переносного* и *кориолисова ускорений*. Таким образом, наблюдатель, находящийся в системе $Ox_1x_2x_3$, может утверждать, что помимо силы $\mathbf{F}$ на точку воздействуют силы инерции $\mathbf{J}_e$ и $\mathbf{J}_c$. С точки зрения наблюдателя, находящегося в системе $Ox_1x_2x_3$, силы инерции представляются обычными силами, вызывающими дополнительные ускорения $-\mathbf{w}_e$ и $-\mathbf{w}_c$.

Уравнение (8.4) с учетом обозначений (8.5), являющееся *дифференциальным уравнением относительного движения точки*, записываем в виде

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c\,. \tag{8.6}$$

Силы инерции характерны тем, что вызывают одинаковое ускорение точек с разной массой, то есть являются силами, пропорциональными этим массам. Подобным свойством обладают также силы тяготения, что в известном смысле роднит их с силами инерции. Кроме того, силы инерции обладают свойством, отличающим их от сил, удовлетворяющих третьему закону Ньютона: для них нельзя указать непосредственно конкретные тела, являющиеся их источниками[6].

Рассмотрим пример, из которого видно, что в частных случаях постоянное поле силы тяжести может быть уравновешено действием сил инерции. Определим силу давления груза на пол лифта, движущегося вертикально вверх с постоянным ускорением $\mathbf{a}$. Очевидно, что

$$m\mathbf{a} = \mathbf{N} + \mathbf{P}\,,$$

откуда сила инерции, равная давлению пола на тело, выражается формулой

$$\mathbf{N} = m\mathbf{a} - \mathbf{P} = -m(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = -m\mathbf{g}'.$$

Итак, можно считать, что тело находится в поле силы тяжести с ускорением $\mathbf{g}'$.

[6] В теоретической физике существует мнение, что силы инерции удовлетворяют третьему закону Ньютона и их источником является совокупность материальных космических тел. Подобное объяснение является по существу попыткой обосновать первый и второй законы Ньютона. Отметим, что сам Ньютон постулирует следующее положение: «Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

Если бы лифт падал с ускорением $\mathbf{a} = k\,\mathbf{g}$ $(k > 0)$, то получили бы

$$\mathbf{N} = -m\mathbf{g}(1-k) = -m\mathbf{g}'.$$

Ясно, что при свободном падении лифта $(k = 1)$ имеем $\mathbf{g}' = 0$, и в относительной системе отсчета вес исчезает: как говорят, наступает *невесомость*. Разумеется, что то же происходит и с космонавтом, летящим в спутнике по круговой орбите. Можно сказать, что относительно кабины он находится в покое, поэтому все силы уравновешиваются, то есть сила тяжести компенсируется силой инерции. Не следует думать, основываясь на рассмотренном примере, что любое поле тяготения, например центральное поле сил тяготения Ньютона, во всем пространстве можно уравновесить полем сил инерции, порождаемым движением системы отсчета, единственной для всего пространства.

Отметим, что если, в частности, движение системы отсчета $Ox_1x_2x_3$ таково, что $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_c = 0$, то уравнения (8.4) и (8.1) полностью совпадают. Это указывает на то, что в данной системе силы инерции отсутствуют. Такие системы называются *инерциальными системами отсчета*.

Следовательно, для определения, является заданная система отсчета инерциальной или неинерциальной, необходимо установить, имеются ли в ней кроме активных сил, возникающих под действием конкретных тел, силы, которые вызывают одинаковое ускорение у всех материальных точек. Последним свойством, как уже отмечалось, наряду с силами инерции обладают и силы тяготения.

Рассмотрим случай, когда относительное движение отсутствует $(\mathbf{v}_r = 0,\ \mathbf{w}_r = 0)$. При этом уравнение (8.6) с учетом формул (8.3) и (8.5) принимает вид

$$\mathbf{F} + \mathbf{J}_e = 0\,, \tag{8.7}$$

что соответствует *относительному равновесию точки*.

Перейдем к изложению ряда задач о равновесии и движении точки относительно неинерциальной системы координат $Ox_1x_2x_3$, неизменно связанной с Землей. За инерциальную систему координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ примем систему, начало которой находится в центре Земли, а оси ориентированы на звезды, кажущиеся нам неподвижными. Правда, эта система координат, строго говоря, не является инерциальной, потому что точными физическими экспериментами в ней можно было бы обнаружить инерционные силы, появляющиеся вследствие движения Земли вокруг Солнца.

Направление отвесной линии вблизи поверхности Земли. Рассмотрим сначала равновесие точки M, подвешенной на нити и находящейся в покое относительно вращающейся Земли (рис. 8). Обозначая широту

места через φ, силу инерции переносного движения можно записать в виде

$$J_e = m\omega^2 R\cos\varphi\,, \tag{8.8}$$

где R — радиус Земли, ω — ее угловая скорость вращения. Уравнение (8.7) в данном случае принимает вид

$$\mathbf{P}^* + \mathbf{N} + \mathbf{J}_e = 0, \tag{8.9}$$

где $\mathbf{N}$ — натяжение нити, $\mathbf{P}^*$ — сила притяжения данной точки Землей. Выразим P^* следующим образом:

$$P^* = m\mathrm{g}^*. \tag{8.10}$$

Здесь множитель пропорциональности g^* учитывает только притяжение Земли.

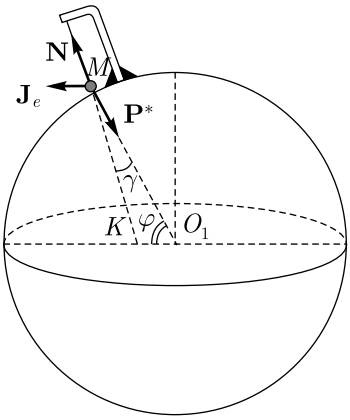

Рис. 8. Направление отвесной линии вблизи поверхности Земли

Равенство нулю векторной суммы (8.9) эквивалентно замкнутости векторного треугольника, построенного на векторах $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{J}_e$. Очевидно, что этот треугольник подобен треугольнику O_1KM, выделенному на рис. 8. Поэтому, используя теорему синусов, можно записать

$$\frac{\sin(\varphi+\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{P^*}{J_e}\,,$$

откуда с учетом (8.8) и (8.10) получаем

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega^2 R\sin 2\varphi}{2(\mathrm{g}^* - \omega^2 R\cos^2\varphi)}\,. \tag{8.11}$$

Угловую скорость Земли легко вычислить: $\omega = 0.0000727\,1/c$. Из-за малости этой величины угол γ отклонения отвесной линии от нормали к поверхности (рис. 8), вычисляемый по формуле (8.11), оказывается также малым. Максимальное его значение, как следует из зависимости (8.11), соответствует $\varphi = 45^0$ и равно $11'$. Подобным же образом вращением Земли вокруг своей оси можно объяснить изменение веса тела в зависимости от места: вес тела вблизи экватора почти на 1/290 меньше веса того же объекта у полюсов.

Исходя из приведенных соображений, наблюдаемую силу тяжести $\mathbf{P}$, являющуюся векторной суммой сил $\mathbf{P}^*$ и $\mathbf{J}_e$, представляем в виде $P = m\mathrm{g}$, где g — местное ускорение силы тяжести, зависящее от широты места φ.

Отклонение падающего тела вблизи поверхности Земли. Рассмотрим свободное падение точки вблизи поверхности Земли на широте φ. Для решения данной задачи удобно ввести неинерциальную систему координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 9, *а*). Поместим начало координат в исходном положении точки. Ось x_3 направим по отвесной линии вниз. Напомним, что эта линия не совпадает с нормалью к поверхности Земли в данном месте. Ось x_1 направлена на восток, а ось x_2 — на юг.

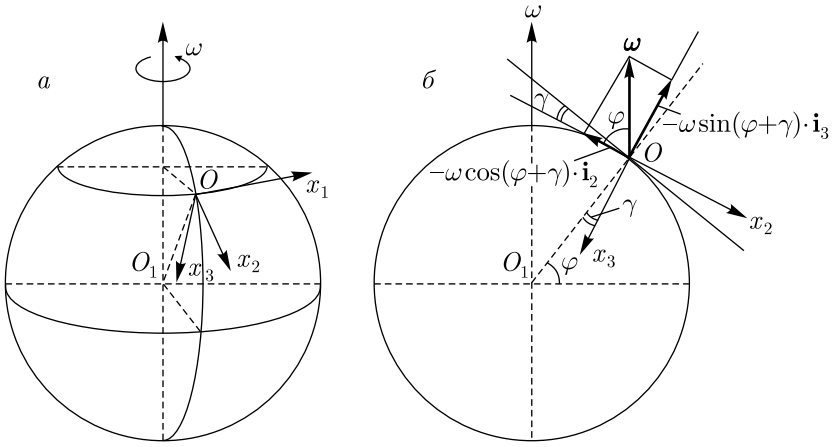

Рис. 9. Отклонение падающего тела вблизи поверхности Земли

Уравнение (8.6) запишем в виде

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{P} + \mathbf{J}_c\,, \tag{8.12}$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{P}^* + \mathbf{J}_e$. Здесь, как и ранее, $\mathbf{P}^* = \mathbf{F}$ — сила притяжения Земли. Для проектирования этого уравнения на оси координат вычислим предварительно составляющие вектора угловой скорости вращения Земли. Как

следует из рис. 9, *б*, представляющего собой меридиональное сечение Земли, можно записать

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega\cos(\varphi+\gamma)\,\mathbf{i}_2 - \omega\sin(\varphi+\gamma)\,\mathbf{i}_3\,. \tag{8.13}$$

Теперь при использовании формул (8.3) и (8.13) из уравнения относительного движения (8.12) после сокращения на массу m получаем

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= 2\,\omega\left(\dot{x}_3\,\cos(\varphi+\gamma) - \dot{x}_2\,\sin(\varphi+\gamma)\right),\\
\ddot{x}_2 &= 2\,\dot{x}_1\omega\,\sin(\varphi+\gamma)\,,\\
\ddot{x}_3 &= \mathrm{g} - 2\,\dot{x}_1\omega\,\cos(\varphi+\gamma)\,.
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Интегрируя данные дифференциальные уравнения при нулевых начальных условиях, имеем

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 2\,\omega\left(x_3\,\cos(\varphi+\gamma) - x_2\,\sin(\varphi+\gamma)\right),\\
\dot{x}_2 &= 2\,x_1\omega\,\sin(\varphi+\gamma)\,,\\
\dot{x}_3 &= \mathrm{g}t - 2\,x_1\omega\,\cos(\varphi+\gamma)\,.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Дальнейшее интегрирование полученной системы дифференциальных уравнений можно было бы продолжать обычным способом. Для выявления же основных закономерностей движения воспользуемся методом последовательных приближений. Полагая в (8.15) $\omega = 0$, получим известное решение, описывающее свободное падение точки на неподвижную Землю:

$$x_1 = 0\,,\quad x_2 = 0\,,\quad x_3 = \mathrm{g}t^2/2\,. \tag{8.16}$$

Функции (8.16) принимаем за нулевое приближение и подставляем в правую часть системы (8.15):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= t^2\omega\,\mathrm{g}\,\cos(\varphi+\gamma)\,,\\
\dot{x}_2 &= 0\,,\\
\dot{x}_3 &= \mathrm{g}t\,.
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Интегрируя систему (8.17) при тех же нулевых начальных условиях, находим первое приближение для рассматриваемой системы (8.15):

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{t^3}{3}\,\omega\mathrm{g}\,\cos(\varphi+\gamma)\,,\\
x_2 &= 0\,,\\
x_3 &= \mathrm{g}t^2/2\,.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Подставляя (8.18) в правую часть системы (8.15) и интегрируя полученные уравнения при нулевых начальных условиях, имеем второе приближение в виде

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{t^3}{3}\,\omega \mathrm{g}\,\cos(\varphi+\gamma)\,,\\
x_2 &= \frac{t^4}{6}\,\omega^2 \mathrm{g}\,\sin(\varphi+\gamma)\,\cos(\varphi+\gamma)\,,\\
x_3 &= \frac{\mathrm{g}t^2}{2} - \frac{t^4}{6}\,\omega^2 \mathrm{g}\,\cos^2(\varphi+\gamma)\,.
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

Нахождение решения методом последовательных приближений можно было бы продолжить. В результате удастся построить решение системы (8.15) в виде ряда, расположенного по степеням малой величины ω ($\omega = 0.0000727\,1/c$). Но уже из первого приближения (8.18) видно, что наряду с падением вдоль отвесной линии по обычному закону $x_3 = \mathrm{g}t^2/2$ наблюдается отклонение точки к востоку, пропорциональное величине ω. Если же рассматривать второе приближение (8.19), то помимо некоторого уточнения падения вдоль оси x_3 можно обнаружить отклонение точки и к югу. Правда, оно оказывается значительно меньше отклонения ее к востоку, так как пропорционально квадрату величины ω.

Закон Бэра. Вращением Земли можно объяснить и *закон Бэра*, согласно которому реки, текущие в меридиональном направлении, в северном полушарии подмывают правый берег, а в южном полушарии — левый берег. Действительно, если река течет в северном полушарии со скоростью $\mathbf{v}_r$ относительно Земли, то составляющая кориолисова ускорения $\mathbf{w}_c = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$, лежащая в горизонтальной плоскости, направлена перпендикулярно потоку в левую сторону, если смотреть по направлению течения реки. Поэтому на частицы воды действует кориолисова сила инерции, направленная в противоположную сторону; тем самым вода будет размывать правый берег реки.

На рис. 10 для удобства изображения представлена река, текущая в северном направлении, например Печора, Обь, Енисей. В случае, если река течет на юг, например Волга, то с изменением направления вектора $\mathbf{v}_r$ изменятся на противоположные и направления векторов $\mathbf{w}_c$ и $\mathbf{J}_c$, но река опять будет подмывать свой правый берег. Для рек, находящихся в южном полушарии, происходит изменение взаиморасположения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$, поэтому векторы $\mathbf{w}_c$ и $\mathbf{J}_c$ имеют противоположные направления по сравнению с северным полушарием, следовательно, реки подмывают левые берега (см. рис. 10).

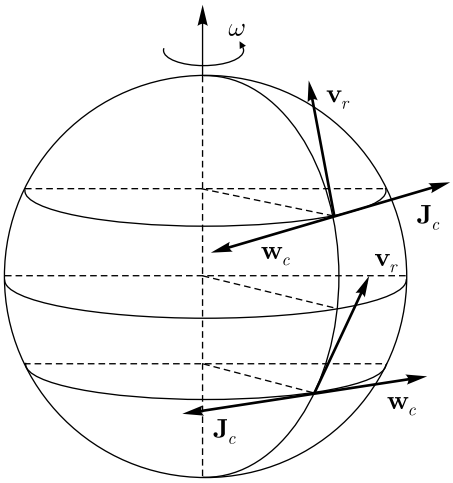

Рис. 10. Пояснение закона Бэра

Заметим, что в местах резкого изменения направления течения реки в подмывании берега более существенную роль по сравнению с силами инерции Кориолиса будет играть инерция частиц воды. Поэтому при правом повороте реки разрушается левый берег, а при левом — правый.

§ 9. Движение точки под действием центральных сил

Пусть на материальную точку с массой m, положение которой относительно системы $Oxyz$ определяется заданием радиус-вектора $\mathbf{r}$, действует сила $\mathbf{F}$, коллинеарная вектору $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{F} = \lambda\,\mathbf{r}\,,$$

где $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$ — скалярная функция координат точки и времени.

Если к рассматриваемой материальной точке приложена только указанная сила, то согласно второму закону Ньютона уравнение ее движения имеет вид

$$m\mathbf{w} \equiv m\ddot{\mathbf{r}} = \lambda\,\mathbf{r}\,. \tag{9.1}$$

Сила $\mathbf{F}$, линия действия которой всегда проходит через одну и ту же точку O, называется *центральной силой*. При $\lambda > 0$ масса m отталкивается от неподвижного центра, а при $\lambda < 0$ притягивается к нему.

Для центральной силы, как было отмечено в § 2 данной главы, всегда существует интеграл моментов $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{const} = \mathbf{C}$, из которого

следует, что траекторией движения материальной точки под действием центральной силы является плоская кривая. При $\mathbf{C} = 0$ она вырождается в прямую, так как при этом вектор скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ коллинеарен вектору $\mathbf{r}$.

Для простоты будем считать, что вектор $\mathbf{C}$ направлен по оси Oz. Интеграл моментов при этом записываем в виде

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = c\,\mathbf{k}\,, \qquad \text{где} \qquad c > 0\,. \tag{9.2}$$

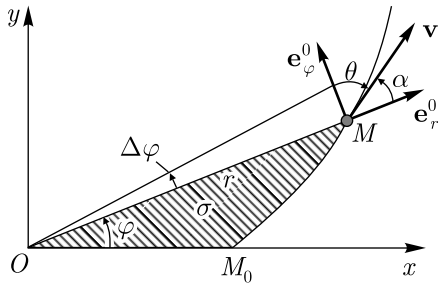

Рис. 11. Пояснение интеграла площадей

Интеграл площадей. На плоскости Oxy, в которой происходит движение, удобно ввести полярную систему координат r, φ (рис. 11). При этом уравнение (9.2) в проекции на ось z принимает вид

$$r^2\dot{\varphi} = c = \text{const}\,.$$

Это соотношение называется *интегралом площадей*, так как производная по времени от площади σ криволинейного сектора OM_0M вычисляется по формуле

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}\,r^2\dot{\varphi}\,. \tag{9.3}$$

Действительно, приращение $\Delta\sigma$ площади σ, соответствующее приращению $\Delta\varphi$ угла φ, с точностью до малых второго порядка равно

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}\,r^2\Delta\varphi\,,$$

откуда после деления на Δt и перехода к пределу получаем выражение (9.3). Если ввести в рассмотрение углы α и θ между вектором скорости $\mathbf{v}$ и ортами полярной системы координат $\mathbf{e}^0_r$ и $\mathbf{e}^0_\varphi$, как показано на рис. 11,

то, учитывая, что $v\sin\alpha = v\cos\theta = r\dot\varphi$, $v = |\mathbf{v}|$, постоянную c можно представить в виде

$$c = rv\sin\alpha = rv\cos\theta\,.$$

Таким образом, интеграл площадей, имеющий большое значение при изучении движения под действием центральной силы, может быть представлен в виде следующей цепочки равенств:

$$r^2\dot\varphi = rv\sin\alpha = rv\cos\theta = 2\,\frac{d\sigma}{dt} = c\,. \tag{9.4}$$

Формулы Бинэ. Напомним выражения для компонент скорости и ускорения в полярной системе координат:

$$pr_{\mathbf{e}_r}\mathbf{v} = \dot r\,, \qquad pr_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{v} = r\dot\varphi\,, \qquad T_1 = \frac{v^2}{2} = \frac{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}{2}\,, \tag{9.5}$$

$$pr_{\mathbf{e}_r}\mathbf{w} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial\dot r} - \frac{\partial T_1}{\partial r} = \ddot r - r\dot\varphi^2\,, \tag{9.6}$$

$$pr_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{w} = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial T_1}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi)\,. \tag{9.7}$$

Уравнение Ньютона (9.1) в проекциях на оси полярной системы координат принимает вид

$$m\;pr_{\mathbf{e}_r}\mathbf{w} = \lambda\, r\,, \tag{9.8}$$

$$m\;pr_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{w} = 0\,. \tag{9.9}$$

Из равенства (9.9) с учетом соотношения (9.7) следует, что

$$r^2\dot\varphi = \mathrm{const} = c\,.$$

Интеграл площадей (9.4), таким образом, можно получить непосредственно из уравнений Лагранжа второго рода, не прибегая к теореме о моменте импульса.

Наличие интеграла площадей дает возможность заменить оператор дифференцирования по времени оператором дифференцирования по переменной φ:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\,\frac{d}{d\varphi} = \frac{c}{r^2}\,\frac{d}{d\varphi}\,.$$

Обозначая $u = 1/r$, получаем

$$\frac{d}{dt} = c\,u^2\,\frac{d}{d\varphi}\,.$$

Это соотношение и интеграл площадей позволяют выражения (9.5)–(9.7) для компонент скорости и ускорения представить в виде

$$pr_{\mathbf{e}_r}\mathbf{v} = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -c\,\frac{du}{d\varphi}\,, \tag{9.10}$$

$$pr_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{v} = r\,\dot{\varphi} = c\,u\,, \tag{9.11}$$

$$pr_{\mathbf{e}_r}\mathbf{w} = \frac{dv_r}{dt} - u^{-1}c^2u^4 = c\,u^2\frac{d}{d\varphi}\left(-c\frac{du}{d\varphi}\right) - c^2u^3 = -c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right), \tag{9.12}$$

$$pr_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{w} = 0\,.$$

Из выражений (9.10)–(9.12) можно получить соотношения

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right], \tag{9.13}$$

$$pr_{\mathbf{e}_r}\mathbf{w} = -c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right), \tag{9.14}$$

называемые соответственно *первой* и *второй формулами Бинэ.*

Отметим особо, что формулы Бинэ, позволяющие определять скорость и ускорение в любой точке траектории из уравнения траектории в полярных координатах $r = r(\varphi)$, имеют место при движении материальной точки в любом центральном силовом поле, то есть при любой функции $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$.

Интеграл энергии. Признаком центральности силового поля является наличие интеграла площадей. Признаком же существования интеграла энергии является независимость работы от формы пути. Поэтому если поле центральное, то интеграл площадей существует всегда, а интеграл энергии только в некоторых случаях.

В важном частном случае, когда величина центральной силы зависит только от расстояния r, то есть когда $\lambda = \lambda(r)$, элементарная работа может быть представлена в виде

$$\delta A = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F_r(r)\,dr = \lambda(r)\,r\,dr = -d\Pi\,,$$

где

$$\Pi = -\int F_r\,dr = -\int \lambda(r)\,r\,dr. \tag{9.15}$$

Следовательно, при $\lambda = \lambda(r)$ интеграл энергии существует, причем потенциальная энергия может быть вычислена по формуле (9.15).

Движение точки в центральном потенциальном поле. Подставляя в интеграл энергии $mv^2/2 + \Pi(r) = E_0 = \text{const}$ выражение (9.13) для квадрата скорости, получаем

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2}{mc^2}\left(E_0 - \Pi(u) - \frac{mc^2u^2}{2}\right).$$

Переходя от u к r, имеем

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2\,r^4}{mc^2}\,P(r)\,, \tag{9.16}$$

где $P(r) = E_0 - \Pi(r) - mc^2/(2\,r^2)$.

Пусть в начальный момент $dr/d\varphi \neq 0$. Тогда функция $P(r)$ при $r = r_0$ положительна. Вследствие непрерывности данная функция положительна и в некоторой окрестности точки $r = r_0$. От размеров этой окрестности зависит характер траектории движения.

Выделим следующие четыре случая, в которых уравнение $P(r) = 0$:

1) имеет два разных положительных корня r_1 и r_2, таких, что $P(r) > 0$, $r_1 < r < r_2$;

2) имеет положительный корень $r_1 < r_0$, такой, что $P(r) > 0$, $r_1 < r < +\infty$;

3) имеет корень $r_2 > r_0$, такой, что $P(r) > 0$, $0 < r < r_2$;

4) не имеет положительных корней: $P(r) > 0$, $0 < r < +\infty$.

В первом случае движение происходит между двумя концентрическими окружностями с радиусами r_1 и r_2. Для простоты будем считать, что угол φ отсчитывается от положения, в котором $r = r_1$, а $dr/d\varphi = 0$. При переходе из этой точки на окружность с бóльшим радиусом $r = r_2$ величина r возрастает с увеличением φ, и потому дифференциальное уравнение (9.16) на этом участке может быть представлено в виде

$$d\varphi = f(r)\,dr, \qquad \text{где} \qquad f(r) = \frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{2}\,r^2\,\sqrt{P(r)}}\,.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\varphi = I(r) = \int\limits_{r_1}^{r} f(r)\,dr\,, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \Delta\varphi = I(r_2)\,, \qquad r_1 \leqslant r \leqslant r_2\,. \tag{9.17}$$

После касания окружности с бóльшим радиусом величина r с возрастанием φ убывает, и, следовательно, $d\varphi = -f(r)\,dr$, а значит,

$$\varphi = \Delta\varphi - \int\limits_{r_2}^{r} f(r)\,dr = \Delta\varphi - \int\limits_{r_2}^{r_1} f(r)\,dr - \int\limits_{r_1}^{r} f(r)\,dr = 2\Delta\varphi - I(r)\,, \qquad (9.18)$$
$$\Delta\varphi \leqslant \varphi \leqslant 2\,\Delta\varphi\,.$$

При дальнейшем увеличении угла φ, рассуждая, как и ранее, имеем

$$\varphi = 2\,\Delta\varphi + I(r)\,, \qquad 2\,\Delta\varphi \leqslant \varphi \leqslant 3\,\Delta\varphi\,,$$
$$\varphi = 4\,\Delta\varphi - I(r)\,, \qquad 3\,\Delta\varphi \leqslant \varphi \leqslant 4\,\Delta\varphi\,.$$

Сравнивая эти два равенства с соотношениями (9.17) и (9.18), видим, что функция $r = r(\varphi)$ периодическая, а угол $2\,\Delta\varphi$ является ее периодом. Построение функции $r = r(\varphi)$ сводится, таким образом, к вычислению интеграла (9.17).

Если угол $2\,\Delta\varphi$, соответствующий возвращению на окружность, с которой началось движение, может быть представлен в виде

$$2\,\Delta\varphi = 2\,\pi k/n\,,$$

где k и n — целые числа, то при n-м возвращении угол φ изменится на $2\,\pi k$. Это означает, что точка возвратилась в исходное положение. Траектория движения является в этом случае замкнутой кривой. Как показали исследования интеграла (9.17), это возможно при произвольном c только при $\Pi = -\mu/r$, $\Pi = k\,r^2/2$, где μ и k — некоторые положительные постоянные.

Отметим одно важное свойство функции $r = r(\varphi)$. Если произвести замену $\varphi_1 = -\varphi$, то есть изменить направление положительного отсчета угла φ, то исходное дифференциальное уравнение сохранит форму, так как $(dr/d\varphi)^2 = (dr/d\varphi_1)^2$. Остальные рассуждения при построении функции $r = r(\varphi_1)$ аналогичны приведенным, и поэтому $r(\varphi_1) = r(\varphi)$, то есть

$$r(\varphi) = r(-\varphi)\,. \qquad (9.19)$$

Таким образом, функция $r = r(\varphi)$ является четной и, следовательно, легко продолжается в область отрицательных значений угла φ.

Рассмотрим теперь движение точки по построенной траектории. Начальными данными в рассматриваемой задаче являются величины φ_0, $\dot\varphi_0$, r_0, $\dot r_0$. Постоянные E_0 и c, которые определяют форму траектории, характеризуются значениями $\dot\varphi_0$, r_0, $\dot r_0$. Величина φ_0 зависит от выбора начала

отсчета угла φ. Выбор этот является произвольным, поэтому числовое значение угла φ_0 не является существенным в данной задаче. Напомним, что для удобства построения кривой $r = r(\varphi)$ было принято, что угол φ отсчитывается от точки, в которой $r = r_1$, а $dr/d\varphi = 0$. Наличие интеграла площадей указывает на то, что величина $\dot{\varphi}$ при движении имеет тот же знак, что и $\dot{\varphi}_0$. Будем считать, что выбранное направление отсчета угла φ таково, что при движении угол φ возрастает. При таком подходе начальная точка на кривой $r = r(\varphi)$ определяется значением r_0 и знаком $\dot{r}_0$.

Отметим точки пересечения кривой $r = r(\varphi)$ с окружностью $r = r_0$. В одних из них $\dot{r} > 0$, а в других — $\dot{r} < 0$. Любая из данных точек, знак $\dot{r}$ которой совпадает со знаком $\dot{r}_0$, может быть принята за начальную точку траектории. Для определенности при $\dot{r}_0 > 0$ начальной считаем точку, которая соответствует наименьшему значению угла φ_0. Обозначим этот угол через φ_0^*. Так как $r(\varphi) = r(-\varphi)$, то $\dot{r}(\varphi) = -\dot{r}(-\varphi)$. Поэтому при $\dot{r}_0 < 0$ начальной можно считать точку, соответствующую углу $\varphi = -\varphi_0^*$.

Рассмотрим второй случай, когда $P(r_1) = 0$, $r_1 < r_0$, $P(r) > 0$, $r_1 < r < +\infty$. Кривая $r = r(\varphi)$, построенная по формулам (9.17) и (9.19), имеет в данном случае только две точки пересечения с окружностью $r = r_0$: при $\varphi = \varphi_0^*$ и $\varphi = -\varphi_0^*$ соответственно. Если $\dot{r}_0 > 0$, то точка монотонно удаляется в бесконечность. В случае $\dot{r}_0 < 0$ при выходе из точки $(r_0, -\varphi_0^*)$ величина r сначала убывает с возрастанием φ, затем точка касается окружности $r = r_1$ и далее монотонно удаляется в бесконечность.

В третьем случае, когда $P(r_2) = 0$, $r_0 < r_2$, $P(r) > 0$, $0 < r < r_2$, начало отсчета угла φ целесообразно связать с точкой, в которой $r = r_2$, а $dr/d\varphi = 0$. Кривая $r = r(\varphi)$ при этом задается соотношениями

$$\varphi = \int\limits_r^{r_2} f(r)\,dr\,, \qquad \varphi \geqslant 0\,, \qquad r \leqslant r_2\,, \qquad r(\varphi) = r(-\varphi)\,, \qquad \varphi \leqslant 0\,.$$

При $\dot{r}_0 > 0$ точка в процессе движения касается окружности $r = r_2$, а затем начинает монотонно приближаться к центру. При $\dot{r}_0 < 0$ приближение начинается сразу. В полях, на которые при некоторых начальных данных распространяется третий случай, возможно падение точки на центр.

Четвертый случай, когда уравнение $P(r) = 0$ не имеет положительных корней, не является характерным, и поэтому на нем останавливаться не будем.

Движение точки под действием силы, пропорциональной расстоянию. Простейшим примером центрального потенциального поля является поле, в котором сила задается в виде $\mathbf{F} = -k\,\mathbf{r}$, $\lambda = -k = \mathrm{const}$.

При $k > 0$ материальная точка притягивается к неподвижному центру, а при $k < 0$ — отталкивается от него. Как следует из формулы (9.15), потенциальная энергия в данном случае $\Pi = k\,r^2/2$.

Рассмотрим уравнение $P(r) = 0$. Имеем

$$E_0 - \frac{k\,r^2}{2} - \frac{mc^2}{2\,r^2} = 0\,,$$

или

$$k\,r^4 - 2\,E_0 r^2 + mc^2 = 0\,, \tag{9.20}$$

откуда

$$r_{1,2}^2 = \frac{E_0 \mp \sqrt{E_0^2 - mc^2 k}}{k}\,.$$

Как известно, при любых a и b справедливо неравенство

$$(a+b)^2 \geqslant 4\,ab\,, \tag{9.21}$$

поэтому, учитывая, что

$$v^2 \geqslant r^2\dot{\varphi}^2 = c^2/r^2\,, \tag{9.22}$$

при $k > 0$ имеем

$$E_0^2 = \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{k\,r^2}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{mc^2}{2\,r^2} + \frac{k\,r^2}{2}\right)^2 \geqslant mc^2 k\,.$$

Отсюда следует, что в случае притяжения точки к центру ($k > 0$) величины r_1^2 и r_2^2 являются действительными положительными числами.

Траектория движения, лежащая между концентрическими окружностями с радиусами r_1 и r_2, строится по формуле (9.17). В данном случае получаем

$$\varphi = c\sqrt{m}\int\limits_{r_1}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{2\,r^2 E_0 - k\,r^4 - mc^2}} = \frac{c\sqrt{m}}{2}\int\limits_{r_1^2}^{r^2} \frac{d(r^2)}{r^2\sqrt{2\,r^2 E_0 - k\,r^4 - mc^2}}\,.$$

Известно, что

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + b\,x + c\,x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\,\arcsin\frac{2a + b\,x}{x\sqrt{b^2 - 4\,ac}}\,, \qquad a < 0\,, \quad b^2 - 4\,ac > 0\,, \tag{9.23}$$

поэтому

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\arcsin\frac{E_0 r^2 - m\,c^2}{r^2\,\sqrt{E_0^2 - m\,c^2 k}}\,\Bigg|_{r_1^2}^{r^2}. \tag{9.24}$$

Учитывая свойства корней уравнения (9.20)

$$r_1^2 r_2^2 = \frac{mc^2}{k}\,, \qquad r_1^2 + r_2^2 = \frac{2\,E_0}{k}\,, \qquad r_2^2 - r_1^2 = \frac{2\,\sqrt{E_0^2 - m\,c^2 k}}{k}\,,$$

выражение (9.24) представляем в виде

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\arcsin\,\frac{r^2\,(r_1^2 + r_2^2) - 2\,r_1^2 r_2^2}{r^2\,(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{\pi}{4}\,.$$

Отсюда следует, что

$$-\cos 2\varphi = \frac{r^2(r_1^2 + r_2^2) - 2\,r_1^2 r_2^2}{r^2(r_2^2 - r_1^2)},$$

или

$$r^2(r_2^2 - r_1^2)\sin^2\varphi - r^2(r_2^2 - r_1^2)\cos^2\varphi = r^2(r_1^2 + r_2^2) - 2\,r_1^2 r_2^2\,,$$

откуда окончательно получаем

$$\frac{r^2\cos^2\varphi}{r_1^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{r_2^2} = 1\,.$$

Учитывая формулы $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, связывающие полярные координаты с декартовыми, имеем

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = 1\,. \tag{9.25}$$

Таким образом, при притяжении к центру с силой, пропорциональной расстоянию, траекторией движения при любых начальных данных является эллипс с полуосями r_1 и r_2. При $c \to 0$, когда $r_1 \to 0$, данный эллипс вырождается в отрезок длиной $2\,r_2$.

Если $k < 0$, то первый корень r_1^2 уравнения (9.20), рассматриваемого как квадратное уравнение относительно r^2, положителен, а второй r_2^2 — отрицателен. Отсюда следует, что уравнение $P(r) = 0$ при $k < 0$ имеет один положительный корень $r = r_1$, причем такой, что $P(r) > 0$ при $r > r_1$. Как уже было показано, в этом случае траектория является кривой, уходящей в бесконечность. Уравнение данной кривой задается той же формулой (9.24), только теперь при переходе в этой и в следующих

формулах к r_1^2 и r_2^2 следует помнить, что в данном случае величина r_2^2 отрицательна.

В обозначениях $r_1^2 = a^2$, $r_2^2 = -b^2$ уравнение (9.25) записываем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Следовательно, при отталкивании от центра с силой, пропорциональной расстоянию, траекторией движения является гипербола, а точнее, ее правая ветвь, так как $r = r_1$ при $\varphi = 0$.

Общие свойства кеплеровского движения. Излагаемая теория движения материальных тел в центральном потенциальном поле создавалась и развивалась в основном в связи с изучением движения небесных тел под действием сил их взаимного притяжения. В соответствии с законом всемирного тяготения любые два материальных тела действуют друг на друга силами, пропорциональными их массам и обратно пропорциональными квадрату их взаимного расстояния. Коэффициент этой пропорциональности для всех тел одинаков. Другими словами, сила F взаимодействия масс m_1 и m_2 может быть представлена в виде

$$F = \gamma\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,, \tag{9.26}$$

где γ — гравитационная постоянная, равная $6.67 \cdot 10^{-11}$ Нм^2/кг^2, r — расстояние между массами. Этот закон формулируется для двух точечных, или сосредоточенных, масс.

Применим теперь данный закон к точечной массе m и массе M, которая непрерывно распределена внутри сферы. Предположим, что в каждом сферическом слое распределение массы является равномерным. Считается, что такое сферически симметричное распределение масс имеют многие небесные тела. Массу M представим в виде суммы элементарных масс Δm_ν, каждая из которых действует на массу m в соответствии с законом (9.26). Суммируя силы, приложенные к массе m со стороны масс Δm_ν, то есть интегрируя по объему внутри сферы, получаем силу $\mathbf{F}$, которая, как можно показать, такова:

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu\, m}{r^3}\,\mathbf{r}\,, \qquad \mu = \gamma M\,.$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий центр сферы с массой m, $r = |\mathbf{r}|$. Постоянная μ называется *гравитационным параметром притягивающего центра.*

Таким образом, вокруг массы M образуется центральное гравитационное поле. Его потенциал Π, как следует из формулы (9.15),

$$\Pi = \mu\, m \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{\mu\, m}{r}\,.$$

Все приведенные общие формулы, характеризующие движение массы m в центральном потенциальном поле, были установлены в предположении, что центр поля является неподвижной точкой. Неподвижность системы координат $Oxyz$, начало которой совпадает с центром поля, позволяет не вводить силы инерции и записывать закон движения в этой системе в виде (9.1). В действительности к массе M приложена сила $-\mathbf{F}$, и, следовательно, система $Oxyz$ движется поступательно с некоторым ускорением. Однако если масса m существенно меньше массы M, то движением массы M можно пренебречь. Это фактически означает, что действие силы $-\mathbf{F}$ на массу M не учитывается. Другими словами, рассматривается задача о движении «непритягивающей» точки в поле тяготения притягивающей. В небесной механике такая задача называется *ограниченной задачей двух тел*. Рассмотрим эту задачу более подробно.

Центральное поле, в котором электростатическая сила обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра, в соответствии с законом Кулона создается вокруг заряженного тела, имеющего сферическую форму. Помещенная в это поле частица с зарядом того же знака, что и тело, отталкивается от центра, а частица с зарядом противоположного знака притягивается к нему. Поэтому в дальнейшем для возможности применения всех полученных результатов к движению не только небесных тел, но и заряженных частиц, постоянную μ, характеризующую поле, будем считать не только положительной (притяжение), но и отрицательной (отталкивание).

Как было показано, характер траектории движения определяется корнями уравнения $P(r) = 0$. В данном случае это уравнение имеет вид

$$E_0 + \frac{\mu\, m}{r} - \frac{mc^2}{2\, r^2} = 0,$$

или

$$hr^2 + 2\mu r - c^2 = 0\,, \tag{9.27}$$

где

$$\frac{2E_0}{m} \equiv h = v^2 - \frac{2\mu}{r} = \mathrm{const}\,, \tag{9.28}$$

откуда

$$r_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + hc^2}}{h}\,. \tag{9.29}$$

Если $h > 0$, то независимо от знака μ имеется только один положительный корень $r_1 = (-\mu + \sqrt{\mu^2 + hc^2}\,)/h$, причем такой, что $P(r) > 0$, $r > r_1$. Следовательно, при $h > 0$ траектория удаляется в бесконечность.

При $h < 0$, что возможно только при $\mu > 0$, оба корня положительны, так как

$$\mu^2 \geqslant -hc^2\,, \qquad h < 0\,. \tag{9.30}$$

Чтобы показать, что это неравенство выполняется при $h < 0$, находим выражение для μ, используя формулу (9.28):

$$\mu = \frac{r}{2}\,(v^2 - h)\,.$$

Учитывая неравенства (9.21) и (9.22), имеем

$$\mu^2 \geqslant \frac{r^2}{4}\left(\frac{c^2}{r^2} - h\right)^2 \geqslant -hc^2\,.$$

Таким образом, при $h < 0$ траектория движения всегда является ограниченной (финитной) кривой, лежащей между окружностями с радиусами r_1 и r_2.

При $h = 0$ уравнение (9.27) становится линейным:

$$2\mu r - c^2 = 0\,, \qquad \text{откуда} \qquad r_1 = c^2/(2\mu)\,,$$

причем $P(r) > 0$ при $r > r_1$.

Чтобы более наглядно представить геометрический и физический смысл в случае $h = 0$, следует рассмотреть значения h, близкие к нулю, а затем перейти к пределу при $h \to 0$. Из формул (9.27), (9.29) при $h \to -0$ следует, что

$$\lim_{h\to 0} r_1 = \frac{c^2}{2\mu}\,, \qquad \lim_{h\to -0} r_2 = +\infty\,.$$

Таким образом, при $h \to -0$ финитная траектория переходит в инфинитную.

Для определения уравнения траектории обратимся к выражению (9.17). В данном случае, учитывая обозначение (9.28), имеем

$$\varphi = \int\limits_{r_1}^{r} \frac{c\,dr}{r\sqrt{hr^2 + 2\mu r - c^2}}\,.$$

Используя формулу (9.23), получаем

$$\varphi = \arcsin \frac{\mu r - c^2}{r\sqrt{\mu^2 + hc^2}} + \frac{\pi}{2}\,,$$

откуда

$$r = \frac{c^2}{\mu + \sqrt{\mu^2 + hc^2}\cos\varphi}\,. \tag{9.31}$$

Данное уравнение справедливо при любых значениях параметров c и μ, отличных от нуля. Параметр h, который характеризует полную механическую энергию, как следует из соотношений (9.28), (9.30), изменяется в пределах

$$-\mu^2/c^2 \leqslant h < +\infty\,, \quad \mu > 0\,; \qquad 0 < h < +\infty\,, \quad \mu < 0\,.$$

Если $\mu > 0$, то, вводя обозначения

$$p = c^2/\mu\,, \qquad e = \sqrt{1 + hc^2/\mu^2}\,, \tag{9.32}$$

можно записать

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}\,. \tag{9.33}$$

Это уравнение конического сечения в полярных координатах. Величина p называется *фокальным параметром*, а e — *эксцентриситетом*.

Минимальное значение полной механической энергии при заданных c и μ соответствует значению $e = 0$. Траекторией движения в этом случае является окружность с радиусом $r = p = c^2/\mu$. Скорость при движении по окружности, или *круговая скорость* $v_{\text{кр}}$, перпендикулярна радиус-вектору, поэтому $\sqrt{\mu r} = c = v_{\text{кр}} r$, откуда

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\mu/r}\,. \tag{9.34}$$

Круговая скорость непосредственно у поверхности небесного тела, имеющего форму шара с радиусом R, называется *первой космической скоростью* v_{I} относительно этого небесного тела. Такую скорость можно выразить через ускорение свободного падения тела g у его поверхности. В соответствии со вторым законом Ньютона $m\,\text{g} = \mu m/R^2$, поэтому

$$\mu = \text{g}\,R^2\,, \qquad v_{\text{I}} = \sqrt{\text{g}R}\,.$$

Для Земли величина R принимается равной среднему радиусу Земли: $R_{\text{З}} = 6371\,\text{км}$. Этому значению $R_{\text{З}}$ соответствует ускорение $\text{g} = 9.820\,\text{м/с}^2$. При этом $v_{\text{I}} = 7.910\,\text{км/с}^2$.

Интересно еще рассмотреть движение так называемого *стационарного спутника Земли*, вращающегося по круговой орбите в экваториальной плоскости Земли с ее угловой скоростью $\omega_З = 2\,\pi/(24\cdot 3600)\,\text{с}^{-1}$. Такой спутник будет находиться над одной и той же точкой экватора. Запустив несколько таких спутников, можно обеспечить телевизионную и радиосвязь практически для всех точек Земли, за исключением небольших зон вблизи ее полюсов. Для стационарного спутника, находящегося на расстоянии $R_{\text{стац}}$ и имеющего постоянную скорость $v_{\text{стац}}$, должно выполняться:

$$\frac{m\,v_{\text{стац}}^2}{R_{\text{стац}}} = \frac{\gamma\,M_З\,m}{R_{\text{стац}}^2}\,, \qquad 2\,\pi\,R_{\text{стац}} = v_{\text{стац}} 24\cdot 3600\,.$$

Отсюда имеем $v_{\text{стац}} = 3.075\,\text{км/с}$, $R_{\text{стац}} = 42\,164\,\text{км}$. Очевидно, что стационарный спутник находится на расстоянии $h_{\text{стац}}$ от поверхности Земли:

$$h_{\text{стац}} = R_{\text{стац}} - R_З = 35\,793\,\text{км}\,.$$

При изменении величины h от $-\mu^2/c^2$ до 0, то есть при $0 < e < 1$, траекторией движения является эллипс. Большая полуось этого эллипса a, равная $(r_1 + r_2)/2$, как следует из теоремы Виета о свойствах корней уравнения (9.27), может быть представлена в виде

$$a = -\mu/h\,. \tag{9.35}$$

Движение по эллипсу при $h \to -0$, когда $e \to 1 - 0$, а $a \to +\infty$, приближается к движению по параболе, причем тем точнее, чем меньше r. Предельное движение по параболе замечательно тем, что скорость при этом, называемая *параболической скоростью* $v_{\text{пар}}$, в любой точке траектории, как следует из интеграла энергии (9.28), может быть представлена в виде

$$v_{\text{пар}} = \sqrt{2\mu/r}\,. \tag{9.36}$$

Точка траектории (орбиты), наиболее близкая к притягивающему центру, называется *перицентром*. В принятой системе отсчета перицентр имеет координаты ($r = r_1$, $\varphi = 0$). Параболическая скорость в перицентре при r_1, равном среднему радиусу R рассматриваемого небесного тела, называется *второй космической скоростью* v_{II} относительно этого тела. Это та минимальная скорость спутника у поверхности небесного тела, при которой он может покинуть сферу его притяжения. Как следует из формул (9.34) и (9.36), первая и вторая космические скорости связаны соотношением $v_{\text{II}} = \sqrt{2}\,v_{\text{I}}$. Для Земли $v_{\text{II}} = 11.19\,\text{км/с}$.

При дальнейшем увеличении полной механической энергии, когда $0 < h < +\infty$, $1 < e < +\infty$, траекторией движения является гипербола. Угол φ при этом, как следует из уравнения (9.33), изменяется в пределах $-\varphi_{\max} < \varphi < \varphi_{\max}$, где $\varphi_{\max} = \arccos(-1/e)$, $\pi/2 < \varphi_{\max} < \pi$.

Траектория при удалении в бесконечность приближается к лучам асимптот гиперболы, которые задаются углами $\varphi = \pm\varphi_{\max}$. Скорость при этом, монотонно уменьшаясь, стремится к значению $v = v_\infty$, которое, как следует из формулы (9.28), таково: $v_\infty = \sqrt{h}$.

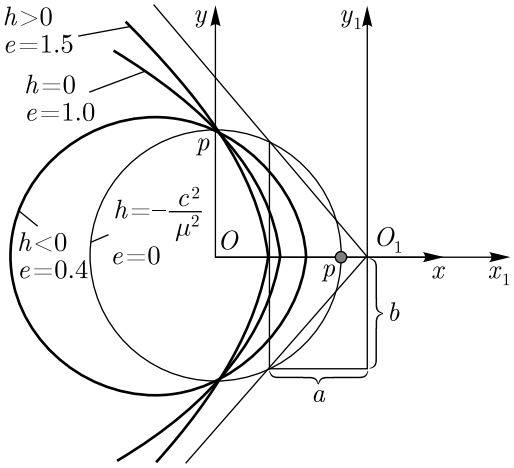

Рис. 12. Формы траектории при действии притягивающей центральной силы

Чтобы нагляднее представить изменение формы траектории в зависимости от h во всем возможном диапазоне изменения этого параметра, на рис. 12 приведены кривые $r = r(\varphi)$ для некоторых характерных значений h при фиксированных $c > 0$ и $\mu > 0$. При построении траектории, соответствующей заданным значениям c, μ и h, целесообразно бывает пользоваться одновременно уравнением траектории в полярных и в декартовых координатах. Из формул

$$\cos\varphi = x/r\,, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

следует, что уравнение (9.33) в декартовых координатах имеет вид

$$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = p - ex\,, \qquad 0 \leqslant e < +\infty\,, \tag{9.37}$$

или

$$x^2(1 - e^2) + 2\,p\,ex + y^2 = p^2\,,$$

откуда при $e = 1$ и $e \neq 1$ соответственно находим

$$y^2 = 2\,p\left(\frac{p}{2} - x\right), \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{1-e^2}{|1-e^2|}\,\frac{y_1^2}{b^2} = 1\,, \tag{9.38}$$

где

$$x_1 = x - \frac{ep}{e^2-1}\,, \qquad y_1 = y\,, \qquad a = \frac{p}{|1-e^2|}\,, \qquad b = a\sqrt{|1-e^2|}\,. \tag{9.39}$$

Гипербола, задаваемая уравнением (9.38), имеет две ветви. Как следует из исходного уравнения (9.37), движение происходит по той из них, у которой величина r убывает с возрастанием x. Указанным свойством обладает левая ветвь, на оси симметрии которой находится центр силы.

На правой ветви гиперболы, расположенной в полуплоскости $x_1 > 0$, величина r возрастает с увеличением x, поэтому для нее исходным является уравнение

$$r \equiv \sqrt{x^2+y^2} = ex - p\,, \qquad e > 1\,,$$

или в полярных координатах

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\varphi}\,, \qquad e > 1\,. \tag{9.40}$$

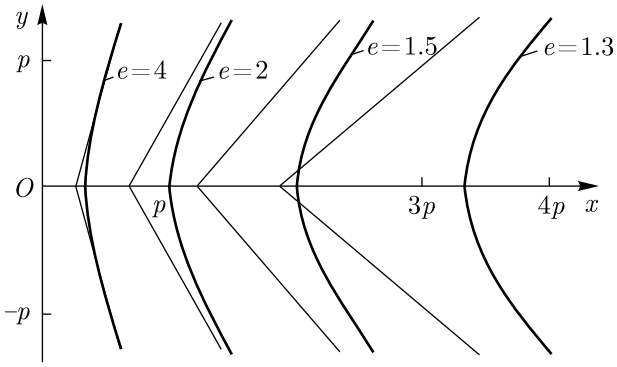

Рис. 13. Формы траектории при действии отталкивающей центральной силы

Мы упомянули об этом уравнении правых ветвей гиперболы в связи с тем, что уравнение (9.31) при $\mu < 0$ после введения обозначений $p = -c^2/\mu$, $e = \sqrt{1 + hc^2/\mu^2}$, $h > 0$, $e > 1$ принимает вид (9.40). Таким образом, единственно возможной формой траекторий при отталкивании заряженных частиц от центра по закону Кулона являются правые ветви гиперболы. На рис. 13 показано изменение формы этих траекторий в зависимости от e.

В уравнения траекторий (9.33) и (9.40) входят параметры p и e. Величина p может быть принята за единицу измерения длины. В безразмерных координатах $\bar{x} = x/p$, $\bar{y} = y/p$ уравнения траекторий зависят от одного безразмерного параметра e. Таким образом, параметр p задает размеры траектории, а параметр e определяет ее форму и расположение на плоскости $O\bar{x}\bar{y}$.

Рассмотрим теперь, как протекает во времени движение по построенным траекториям. Связь между углом φ и временем t можно установить, используя интеграл площадей (9.4). Исследуем сначала случай, когда $\mu > 0$. Подставляя в соотношение $r^2\dot{\varphi} = c$ уравнение траектории (9.33), получаем

$$c\,dt = \frac{p^2\,d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2}\,. \tag{9.41}$$

Для простоты время будем отсчитывать от момента, когда точка находится в перицентре, то есть когда $\varphi = 0$. Интегрируя уравнение (9.41), при этих начальных условиях имеем

$$ct = \int\limits_0^{\varphi} r^2\,d\varphi = p^2 \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2}\,. \tag{9.42}$$

Выписанный определенный интеграл выражается через элементарные функции. Аналитическая форма этого выражения существенно зависит от величины e. Для движения по эллипсу, когда $0 \leqslant e < 1$, используя таблицы интегралов, получаем

$$ct = \frac{2p^2}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{p^2 e\sin\varphi}{(1-e^2)(1+e\cos\varphi)}\,, \tag{9.43}$$
$$0 \leqslant e < 1\,.$$

Найденное выражение для времени t как функции φ обращается трудно. При заданном t величину φ находим как решение трансцендентного уравнения (9.43). Это уравнение является сложным и в конечном виде не решается. Следовательно, применение соотношения (9.43) к движению небесных тел, когда бывает необходимо с большой степенью точности установить, где в данный момент находится рассматриваемое небесное тело, связано с определенными вычислительными трудностями. Данная задача существенно упрощается, если при ее решении воспользоваться параметрическим уравнением эллипса. В координатах x_1 и y_1, которые были введены формулами (9.39), уравнение (9.38) в параметрической форме при

$0 \leqslant e < 1$ может быть задано в виде

$$x_1 = a\,\cos E\,, \qquad y_1 = b\,\sin E\,.$$

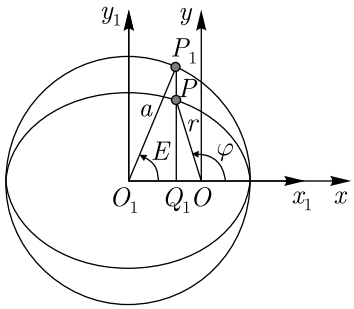

Рис. 14. Эксцентрическая и истинная аномалии

Для выяснения геометрического смысла параметра E построим окружность с радиусом a и центром в начале координат системы $O_1x_1y_1$ (рис. 14). Из точки P_1 этой окружности, которая задается углом E, опустим перпендикуляр P_1Q_1 на ось O_1x_1. Точка P пересечения этого перпендикуляра с эллипсом имеет полярные координаты (r, φ). В астрономии угол E называется *эксцентрической аномалией*, а угол φ — *истинной аномалией*. Для определения r и φ как функций E воспользуемся соотношениями

$$\begin{gathered} x = r\cos\varphi = a(\cos E - e)\,, \qquad y = r\sin\varphi = b\sin E\,, \\ 0 \leqslant e < 1\,, \qquad a = \frac{p}{1-e^2}\,, \qquad b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}\,, \end{gathered} \tag{9.44}$$

которые непосредственно вытекают из формул (9.39), откуда

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos E - e)^2 + a^2(1-e^2)(1-\cos^2 E) = a^2(1 - e\cos E)^2\,,$$

или

$$r = a(1 - e\cos E)\,. \tag{9.45}$$

Рассматривая его совместно с равенством $r\cos\varphi = a(\cos E - e)$, находим

$$\begin{aligned} r(1-\cos\varphi) &= a(1+e)(1-\cos E)\,, \\ r(1+\cos\varphi) &= a(1-e)(1+\cos E)\,. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\operatorname{tg}^2(x/2) = (1-\cos x)/(1+\cos x)$, имеем

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,. \tag{9.46}$$

Подставляя это выражение в формулу (9.43), а также принимая во внимание соотношения (9.33), (9.44) и (9.32), получаем

$$nt = E - e\sin E\,, \tag{9.47}$$

где

$$n = \sqrt{\mu}\,/a^{3/2}\,. \tag{9.48}$$

Теперь, задавая t, приходим к уравнению

$$E - e\sin E = N\,, \qquad N = nt \tag{9.49}$$

относительно параметра E. Трансцендентное уравнение (9.49) называется *уравнением Кеплера*. Определив из него величину E, по формулам (9.45) и (9.46) находим r и φ. Таким образом, задача решена до конца.

Если движущаяся точка полностью описывает эллипс, то φ и E изменяются на 2π. Отсюда следует, что время полного оборота $T = 2\pi/n$, откуда

$$n = 2\pi/T\,. \tag{9.50}$$

Следовательно, n есть средняя угловая скорость поворота радиус-вектора $\mathbf{r}$. Поэтому в астрономии величина n называется *средним движением*.

Формулы (9.48), (9.50) позволяют представить постоянную μ в виде

$$\mu = a^3n^2 = 4\pi^2a^3/T^2\,. \tag{9.51}$$

Рассмотрим теперь движение по гиперболе. Вычисление интеграла, входящего в выражение (9.42), при $e > 1$ приводит к еще более сложному соотношению между t и φ, чем то, которое было выписано для $e < 1$. Поэтому сразу обратимся к параметрической форме задания гиперболы. Как уже было отмечено, при $\mu > 0$ и $e > 1$ движение происходит по левой ветви гиперболы (9.38). На этой ветви координата x_1 отрицательна, поэтому в параметрической форме кривая задается уравнениями

$$x_1 = -a\operatorname{ch}H\,, \qquad a = \frac{p}{e^2-1}\,,$$
$$y_1 = b\operatorname{sh}H\,, \qquad b = a\sqrt{e^2-1}\,,$$

откуда в соответствии с формулами (9.39)

$$\begin{aligned} x = r\cos\varphi = a(e - \operatorname{ch} H)\,, \\ y = r\sin\varphi = b\operatorname{sh} H\,, \end{aligned} \tag{9.52}$$

и, следовательно,

$$r = a(e\operatorname{ch} H - 1)\,. \tag{9.53}$$

Используя эту формулу и формулу (9.52), получаем

$$\begin{aligned} r(1 - \cos\varphi) = a(e+1)(\operatorname{ch} H - 1)\,, \\ r(1 + \cos\varphi) = a(e-1)(\operatorname{ch} H + 1)\,, \end{aligned} \tag{9.54}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\operatorname{th}\frac{H}{2}\,. \tag{9.55}$$

Для перехода в интеграле (9.42) от переменной φ к новой переменной H необходимо выразить величину $d\varphi$ через dH. Вычисляя дифференциалы правой и левой частей выражения (9.55), получаем

$$\frac{d\varphi}{\cos^2(\varphi/2)} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\frac{dH}{\operatorname{ch}^2(H/2)}\,.$$

Учитывая соотношения (9.54), имеем

$$d\varphi = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\frac{1+\cos\varphi}{1+\operatorname{ch} H}\,dH = \frac{a\sqrt{e^2-1}}{r}\,dH\,. \tag{9.56}$$

Подставляя выражения (9.53) и (9.56) в интеграл (9.42), находим

$$ct = \int\limits_0^{\varphi} r^2\,d\varphi = a^2\sqrt{e^2-1}\int\limits_0^{H}(e\operatorname{ch} H - 1)\,dH = a^2\sqrt{e^2-1}(e\operatorname{sh} H - H)\,,$$

или

$$nt = e\operatorname{sh} H - H\,, \tag{9.57}$$

где n, как и при $e < 1$, вычисляем по формуле (9.48).

Задавая t, приходим к уравнению (9.57), которое аналогично уравнению Кеплера. Решая это уравнение, находим параметр H, а затем по формулам (9.53), (9.55) определяем r и φ.

Методика построения функций $r(t)$ и $\varphi(t)$ для гиперболического движения при таком подходе полностью соответствует методике построения

таких функций для эллиптического движения. При значениях e, близких к единице, данная методика усложняется в обоих случаях, так как при этом в окрестности перицентра правые части уравнений (9.47) и (9.57) представляют собой разности двух близких по значению величин. Поэтому случай параболического движения, когда $e = 1$, следует рассматривать особо.

Параболическое движение является предельным случаем эллиптического или гиперболического движений и на практике никогда не осуществляется. Однако в астрономии нередко наблюдаются случаи движения комет по весьма вытянутым эллиптическим орбитам, а метеоритов — по весьма вытянутым гиперболическим. В обоих случаях эксцентриситет орбиты весьма близок к единице, а следовательно, движение светила, по крайней мере вблизи перицентра (то есть вблизи Солнца), мало отличается от параболического движения, и поэтому может быть рассчитано по формулам, соответствующим этому движению.

Интеграл (9.42) при $e = 1$ имеет вид

$$ct = p^2 \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{4} \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^4(\varphi/2)} = \frac{p^2}{2}\Big(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\Big),$$

или

$$n_1 t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\,, \qquad \text{где} \qquad n_1 = \frac{2\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}\,.$$

Определение истинной аномалии φ, соответствующей заданному значению t, сводится в данном случае к решению кубического уравнения

$$\sigma^3 + 3\sigma = 3n_1 t\,, \qquad \text{где} \qquad \sigma = \operatorname{tg}(\varphi/2)\,.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu < 0$. При этом, как уже было показано, движение происходит по правой ветви гиперболы. В параметрической форме она задается уравнениями

$$x_1 = a\operatorname{ch} H\,, \qquad p = -c^2/\mu = a\,(e^2-1)\,,$$
$$y_1 = b\operatorname{sh} H\,, \qquad b = a\sqrt{e^2-1}\,.$$

Вычисления, которые полностью аналогичны вычислениям для гиперболического движения при $\mu > 0$, приводят к следующим результатам:

$$r = a(e\operatorname{ch} H + 1)\,, \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\,\operatorname{th}\frac{H}{2}\,, \quad nt = e\operatorname{sh} H + H\,, \quad n = \frac{\sqrt{-\mu}}{a^{3/2}}\,.$$

Вывод закона всемирного тяготения из законов Кеплера. Основные свойства движения планет были установлены Кеплером в 1609–1619 гг. Они были сформулированы им в виде следующих трех законов:

1. Гелиоцентрическое движение каждой планеты происходит в неподвижной плоскости, проходящей через центр Солнца, притом так, что площадь сектора, описываемого радиус-вектором планеты, изменяется пропорционально времени.

2. Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

3. Квадраты времен обращений планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Эти законы, называемые *законами Кеплера*, приведены здесь в порядке, данном самим Кеплером. Позднее порядок был изменен: первый закон стали называть вторым, а второй — первым. Несколько изменены были и формулировки.

На основании законов Кеплера Ньютон в 1666 г. установил закон всемирного тяготения, позволивший создать стройную математическую теорию движения небесных тел, основные элементы которой уже рассмотрены в данном параграфе.

При выводе закона всемирного тяготения из законов Кеплера Ньютон пользовался сложным геометрическим методом. При аналитическом подходе рассуждения существенно упрощаются. Особенно простыми они становятся при использовании приведенных ранее формул.

Из первого закона Кеплера следует, что существует интеграл площадей. Как было установлено, наличие такого интеграла является признаком центральности силового поля. Уравнение (9.8) в соответствии с формулой Бинэ (9.14) может быть представлено в виде

$$mw_r \equiv -mc^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right) = -F\,, \qquad u=\frac{1}{r}\,, \tag{9.58}$$

где F — сила притяжения к Солнцу планеты с массой m.

Аналитическим выражением второго закона Кеплера является уравнение эллипса в полярных координатах (9.33). Учитывая, что $u = 1/r$, имеем

$$u = (1 + e\cos\varphi)/p\,. \tag{9.59}$$

Подставляя это выражение в уравнение (9.58), получаем

$$F = \frac{mc^2}{p\,r^2}\,. \tag{9.60}$$

Первый и второй законы Кеплера приводят к уравнению Кеплера (9.47) и позволяют тем самым определить, как происходит во времени

движение по эллипсу, задаваемому уравнением (9.59). При переходе от уравнения (9.43) к уравнению Кеплера (9.47) в выражение для n в соответствии с обозначением (9.32) была введена величина μ. Если же считать заданными только параметры движения p, c и a, то из формул (9.48) и (9.32) следует

$$n = \frac{c}{\sqrt{p}\, a^{3/2}}\,.$$

Учитывая, что среднее движение n связано с периодом T обращения планеты вокруг Солнца соотношением (9.50), получаем

$$\frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\,. \tag{9.61}$$

Поскольку согласно третьему закону Кеплера отношение a^3/T^2 постоянно для всех планет солнечной системы, то из этого закона и равенства (9.61) следует, что величина c^2/p, входящая в выражение (9.60), есть величина постоянная. Обозначая ее через μ, имеем

$$F = \frac{\mu m}{r^2}\,. \tag{9.62}$$

Из пропорциональности силы взаимодействия планеты и Солнца F массе планеты m следует, что постоянная μ должна быть пропорциональна массе Солнца M. Следовательно, она может быть представлена в виде $\mu = k^2 M$, где k — новая постоянная для всех планет солнечной системы, называемая *постоянной Гаусса*. Выражение для силы взаимодействия при этом принимает вид

$$F = k^2\,\frac{mM}{r^2}\,. \tag{9.63}$$

Для проверки того, что постоянная Гаусса k одинакова не только для планет и Солнца, но и для любых двух тел, Ньютон применил открытый им закон всемирного тяготения (9.63) к Земле и Луне.

В соответствии с формулой (9.61) величина μ для Земли может быть вычислена по периоду обращения Луны вокруг Земли. Подставляя это выражение для μ в формулу (9.62), находим, что ускорение g тела с массой m на поверхности Земли, то есть при $r = R_З = 6.371 \cdot 10^6$ м, может быть представлено в виде

$$\mathrm{g} = \frac{\mu}{R^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 R^2}\,. \tag{9.64}$$

Учитывая, что для Луны $T = 27.3$ дня $= 2.358 \cdot 10^6$ с, $a = 3.844 \cdot 10^8$ м, получаем $\mathrm{g} = 9.93$ м/с.

Несколько завышенное значение для g объясняется тем, что рассмотрение ведется в рамках ограниченной задачи двух тел. Поправка, которая приводит к более точному результату, будет внесена в формулу (9.64) далее.

Данные о расстоянии от Луны до Земли, которыми пользовался Ньютон в 1666 г., были недостаточно точны, поэтому значение g, полученное по формуле (9.64), не совпадало со значением g, найденным по периоду колебаний маятника. В связи с этим открытый Ньютоном закон всемирного тяготения был опубликован им через 20 лет после повторных вычислений с более точными данными.

Таким образом, величина k^2 в формуле (9.63), как показали исследования Ньютона, а затем и многих других ученых, действительно является универсальной постоянной. В формуле (9.26), с которой началось рассмотрение кеплеровского движения, она была обозначена через γ.

Переход с одной круговой орбиты на другую по эллипсу Гомана. Методы исследования движения небесных тел, разработанные Ньютоном, Эйлером, Даламбером, Лагранжем, Лапласом и другими учеными, широко применяются при изучении движения искусственных небесных тел. С развитием космонавтики в задачах динамики, связанных с движением тел в поле тяготения, появился существенно новый фактор — управление движением космического аппарата. Управление это осуществляется включением реактивной тяги. Можно считать, что необходимое изменение вектора скорости космического аппарата происходит при этом мгновенно в том смысле, что изменением положения космического аппарата за время работы тяги можно пренебречь (точнее, путь, пройденный телом за это время, пренебрежимо мал по сравнению с расстоянием от него до притягивающего центра). В таком случае говорят, что произошло импульсное изменение вектора скорости космического аппарата — *импульсный орбитальный маневр*. Величину $\Delta\mathbf{v}$, которой характеризуется маневр, в космодинамике принято называть *импульсом скорости*, или просто *импульсом*. Переход с одной орбиты на другую, осуществляемый при k-кратном импульсном изменении скорости, называется *k-импульсным переходом*.

Среди двухимпульсных переходов особое значение имеет маневр, в результате которого космический аппарат переходит с одной круговой орбиты на другую, лежащую в той же плоскости. Импульсы скорости $\Delta\mathbf{v}_1$, $\Delta\mathbf{v}_2$ прикладываются соответственно на окружностях с радиусами r_1 и r_2. В результате приложения первого импульса $\Delta\mathbf{v}_1$ круговая орбита переходит в эллиптическую. В точке касания этого эллипса с окружностью радиусом r_2 прикладывается второй импульс, который и переводит кос-

мический аппарат на новую круговую орбиту (рис. 15). Можно показать, что подобный маневр, предложенный Гоманом, с точки зрения энергетических затрат оказывается наиболее целесообразным. Рассмотрим его более подробно.

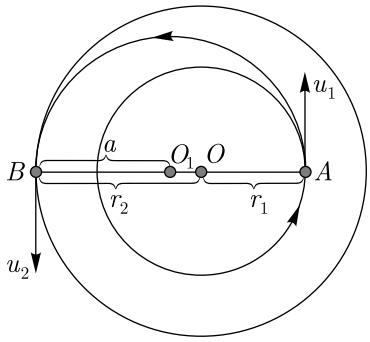

Рис. 15. Перелет по эллипсу Гомана

Точки касания эллипса с окружностями радиусами r_1 и r_2 обозначим соответственно через A и B. Импульсы, приложенные в этих точках, зададим скалярными величинами u_1 и u_2. При переходе космического корабля на орбиту с бóльшим радиусом он разгоняется в точках A и B ($u_1 > 0$, $u_2 > 0$) и тормозится соответственно, если $r_2 < r_1$ ($u_1 < 0$, $u_2 < 0$).

До приложения первого импульса космический корабль имеет круговую скорость v_1, вычисляемую по формуле (9.34): $v_1 = \sqrt{\mu/r_1}$. После приложения импульса u_1 и выхода на эллиптическую орбиту величина скорости v в любой точке этой орбиты может быть найдена из интеграла энергии, который в соответствии с выражениями (9.28), (9.35) записывается в виде

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}\,, \qquad a = \frac{r_1 + r_2}{2}\,.$$

Отсюда следует, что скорости в точках A и B эллиптической орбиты таковы:

$$v_A \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{2\mu}{r_1 + r_2}} = v_1 \sqrt{\frac{2\rho}{1+\rho}}\,,$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2\mu}{r_2} - \frac{2\mu}{r_1 + r_2}} = v_1 \sqrt{\frac{2}{\rho(1+\rho)}}\,,$$

где $\rho = r_2/r_1$. Вместе с тем

$$v_A = v_1 + u_1\,, \qquad v_2 = v_B + u_2\,,$$

где $v_2 = \sqrt{\mu/r_2}$, поэтому

$$\frac{u}{v_1} = \frac{\rho - 1}{\rho}\sqrt{\frac{2\rho}{1+\rho}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} - 1 \equiv f(\rho)\,. \tag{9.65}$$

Здесь $u = u_1 + u_2$ — суммарный импульс. Функция, соответствующая выражению (9.65), приведена на рис. 16. При $\rho = 15.58$ функция $f(\rho)$ имеет максимум, равный 0.539. Предельное значение $f(\rho)$ при $\rho \to +\infty$ равно $\sqrt{2} - 1 = 0.414$. Тогда

$$v_A \to \sqrt{2}\,v_1\,, \qquad u_1 \to (\sqrt{2} - 1)v_1\,,$$

что соответствует приложению импульса только в точке A и выходу на параболическую орбиту. Другое предельное значение $f(+0) = -\infty$ означает, что энергетические затраты неограниченно возрастают при стремлении облететь непосредственно вокруг притягивающего центра.

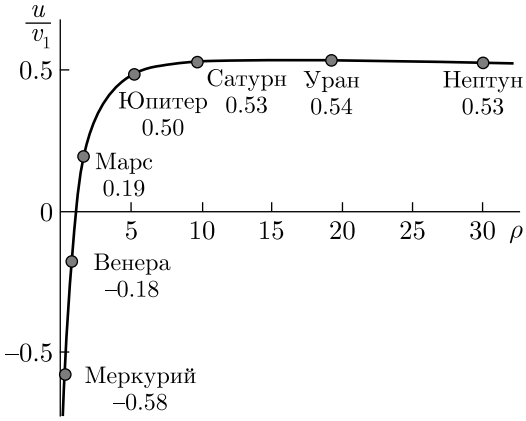

Рис. 16. Энергетические затраты космического корабля

Как известно, орбита Земли почти компланарна орбитам всех планет, кроме Плутона, поэтому рис. 16 можно использовать для приближенной оценки энергетических затрат на переход космического корабля с орбиты Земли на орбиты других планет солнечной системы. Здесь приведены значения функции $f(\rho)$, соответствующие определенным планетам. Напомним, что средняя скорость движения Земли вокруг Солнца $v_1 = 29.765$ км/с.

Задача двух тел. При рассмотрении движения массы m в центральном поле, создаваемом силами тяготения или силами Кулона вокруг мас-

сы M, движение массы M под действием силы, приложенной к ней со стороны массы m, до сих пор не учитывалось.

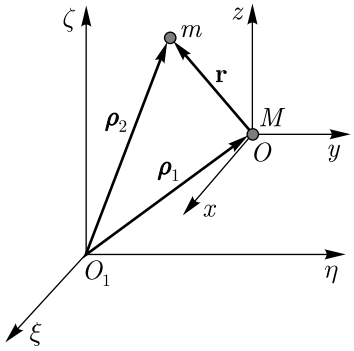

Рис. 17. Учет движения массы M в задаче двух тел

Пусть в декартовой системе координат $O_1\xi\eta\zeta$ к массам M и m приложены только силы их взаимодействия (рис. 17). В этом случае уравнения движения центров масс рассматриваемых тел имеют вид

$$M\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 = -\mathbf{F}\,, \qquad m\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 = \mathbf{F}\,,$$

где $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ — радиус-векторы центров масс тел с массой M и m соответственно, а $\mathbf{F}$ — сила, приложенная к массе m со стороны массы M. Будем считать, что вектор $\mathbf{F}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{F} = \lambda\,\mathbf{r}\,, \qquad \text{где} \qquad \mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1\,.$$

Дифференцируя это соотношение дважды по времени и подставляя в него ускорения $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1$ и $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2$, выраженные через силу $\mathbf{F}$, получаем

$$\ddot{\mathbf{r}} = (1/M + 1/m)\,\mathbf{F}\,,$$

или

$$m_*\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\,, \qquad m_* = \frac{mM}{m+M} = m\Big(1 + \frac{m}{M}\Big)^{-1}\,. \tag{9.66}$$

Величина m_* называется *приведенной массой.*

Сравнивая уравнение (9.66) с уравнением (9.1), видим, что поступательное движение системы $Oxyz$ (рис. 17), начало которой совпадает с центром масс тела массой M и оси которой во время движения параллельны осям системы $O_1\xi\eta\zeta$, учитывается очень просто. Для этого нужно только массу m заменить приведенной массой m_*. В частности, если сила

$$\mathbf{F} = -\gamma\,\frac{mM}{r^3}\,\mathbf{r}\,,$$

то уравнение движения массы m в системе $Oxyz$ в соответствии с равенством (9.66) записывается в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_* \mathbf{r}}{r^3} = 0\,, \qquad \mu_* = \gamma\,(M + m)\,. \tag{9.67}$$

Если движение массы M не учитывать, то соответствующее уравнение таково:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} = 0\,, \qquad \mu = \gamma M\,.$$

Из сравнения этих уравнений следует, что, заменяя во всех предыдущих формулах величину μ величиной $\mu_* = \mu\,(1 + m/M)$, учитываем тем самым движение массы M под действием силы $-\mathbf{F}$.

Соотношение (9.51), выражающее третий закон Кеплера, при замене μ на μ_* принимает вид

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu\left(1 + \frac{m}{M}\right). \tag{9.68}$$

Отсюда следует, что отношение a^3/T^2 для всех планет неодинаково и зависит от их массы. Однако это уточнение третьего закона Кеплера очень незначительно, так как даже для Юпитера, который обладает самой большой массой, отношение $m/M \approx 0.001$.

Указанную поправку следует учитывать при выводе закона всемирного тяготения из законов Кеплера. Однако такое уточнение формулы (9.51) должно проводиться одновременно с уточнением уравнения (9.58) и равенства (9.60) заменой в них массы m приведенной массой m_*. Соотношение (9.61), непосредственно вытекающее из уравнения Кеплера, остается справедливым и при новом подходе. Величину же c^2/p в формуле (9.60) в соответствии с поправкой (9.68) следует обозначить через $\mu\,(1 + m/M)$, где μ — величина постоянная. Но поскольку теперь в формуле (9.60) m заменено на m_*, то окончательные выражения (9.62) и (9.63) остаются без изменений.

Формула (9.64), использованная Ньютоном для проверки закона всемирного тяготения, с учетом поправки (9.68) записывается в виде

$$\mathrm{g} = \frac{\mu}{R^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 R^2 (1 + m/M)}\,.$$

Как известно, отношение массы Луны m к массе Земли M равно $1.23 \cdot 10^{-2}$. Уточняя вычисления по формуле (9.64), получаем $\mathrm{g} = 9.82\,\text{м/с}^2$, что почти точно соответствует значению p для среднего радиуса Земли $R_З$.

В действительности на движение рассматриваемой планеты вокруг Солнца влияет не только ее взаимодействие с Солнцем, но и со всеми остальными телами солнечной системы. Эти дополнительные влияния называются в небесной механике *возмущениями.* Движение, описываемое дифференциальным уравнением (9.67), не учитывающим этих возмущений, называется *невозмущенным кеплеровским движением.* Необходимость учета возмущений со стороны других планет приводит к появлению следующей задачи.

Будем считать, что в системе $O\xi\eta\zeta$, в которой рассматривается движение n тел, можно ограничиться учетом только сил их взаимодействия по закону всемирного тяготения. Исследование движения этих тел в данной системе называется *задачей n тел.* При $n = 2$ задача сводится к уравнению (9.67). При $n \geqslant 3$ данная задача не имеет решения в конечном виде. Поэтому в небесной механике широко применяются различные качественные и численные методы исследования решений дифференциальных уравнений.

Глава V
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

Авторы: *Н. Н. Пóляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков*

С помощью введения понятия изображающей точки основные виды уравнений движения, полученные ранее для одной материальной точки, в данной главе обобщаются на случай движения системы, состоящей из n материальных точек. Доказываются общие теоремы динамики, позволяющие в ряде случаев получить интегрируемые комбинации уравнений движения системы.

§ 1. Изображающая точка. Уравнения ее движения

Изображающая точка. Множество взаимодействующих друг с другом материальных точек называется *механической системой*. Взаимодействие точек проявляется в изменении их движения по сравнению с тем, которое они совершали бы, будучи изолированными. Так как изменение движения происходит под влиянием сил, то следует допустить, что между точками системы действуют силы, которые будем называть *внутренними силами*.

Если координаты и скорости точек системы не связаны между собой какими-либо наперед заданными ограничениями, то система называется *свободной*. Так как положение каждой точки, принадлежащей свободной системе, определяется тремя независимыми координатами, то система, состоящая из n точек, характеризуется $3n$ координатами. Свободной системой материальных точек является, например, солнечная система.

Закон Ньютона для точки, принадлежащей системе, состоящей из n точек, имеет вид

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu\,, \quad \mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^{(i)} + \mathbf{F}_\nu^{(e)}\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,, \tag{1.1}$$

где ν — номер материальной точки, $\mathbf{r}_\nu$ — ее радиус-вектор, $\mathbf{F}_\nu^{(i)}$ — внутренняя сила, приложенная к ней, являющаяся равнодействующей всех сил взаимодействия рассматриваемой точки с остальными точками системы, $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$ — равнодействующая всех внешних сил. Будем считать, что силы $\mathbf{F}_\nu^{(i)}$ и $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$ являются функциями от $t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n$. Таким образом, дифференциальными уравнениями движения системы являются n векторных уравнений второго порядка, содержащих n неизвестных вектор-функций $\mathbf{r}_\nu$.

Уравнения (1.1) в проекциях на оси декартовых координат могут быть записаны в виде

$$m_\nu \ddot{x}_{\nu k} = X_{\nu k}(t, x, \dot{x}), \quad X_{\nu k}(t, x, \dot{x}) = X^{(i)}_{\nu k}(t, x, \dot{x}) + X^{(e)}_{\nu k}(t, x, \dot{x}), \\ \nu = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{1.2}$$

где $x_{\nu k}$, $X_{\nu k}$, $X^{(i)}_{\nu k}$, $X^{(e)}_{\nu k}$ — проекции соответственно векторов $\mathbf{r}_\nu$, $\mathbf{F}_\nu$, $\mathbf{F}^{(i)}_\nu$, $\mathbf{F}^{(e)}_\nu$ на ось x_k. Напомним, что здесь, как и ранее, при записи аргументов функции многих переменных буквой без индекса обозначена вся совокупность переменных, введенных тем же символом с индексами.

Условимся в дальнейшем считать, что функции, стоящие в правой части дифференциальных уравнений, непрерывны в окрестности начальных значений $x_{\nu k}(t_0)$, $\dot{x}_{\nu k}(t_0)$ и имеют в указанной окрестности ограниченные по величине частные производные по $x_{\nu k}$ и $\dot{x}_{\nu k}$. Эти условия, как доказывается в теории дифференциальных уравнений, являются достаточными для существования и единственности решения системы (1.2) при заданных начальных условиях.

Решениями системы дифференциальных уравнений (1.2) являются $3n$ функций времени t и $6n$ произвольных постоянных

$$x_{\nu k} = x_{\nu k}(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n}),$$

причем для определения C_j, $j = 1, 2, \dots, 6n$, следует использовать начальные условия

$$x_{\nu k}(t_0) = x_{\nu k}(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6n}), \quad \dot{x}_{\nu k}(t_0) = \dot{x}_{\nu k}(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6n}),$$

позволяющие выразить C_j через начальные координаты $x_{\nu k}(t_0)$ и начальные скорости $\dot{x}_{\nu k}(t_0)$.

Систему $3n$ дифференциальных уравнений (1.2) удобно также записывать в виде, содержащем сквозную нумерацию координат, осуществляемую следующим образом. Обозначим $x_{\nu k} = x_\mu$, где $\mu = 3(\nu - 1) + k$, $\nu = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, 3$. Тогда получаем соответствие

$$x_{11} = x_1, \;\; x_{12} = x_2, \;\; x_{13} = x_3,$$

$$x_{21} = x_4, \;\; x_{22} = x_5, \;\; x_{23} = x_6,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n1} = x_{3n-2}, \;\; x_{n2} = x_{3n-1}, \;\; x_{n3} = x_{3n}.$$

Эту же операцию можно выполнить и над величинами $X_{\nu k}$. Следовательно, систему (1.2) можно записать в виде

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu\,, \quad \mu = \overline{1, 3n}\,. \tag{1.3}$$

Так как в системе (1.2) одна и та же масса m_ν умножается последовательно на $\ddot{x}_{\nu k}$, $k = 1, 2, 3$, то в системе (1.3) массу m_μ полагаем равной m_ν при $\mu = 3\nu - 2,\ 3\nu - 1,\ 3\nu$.

Введем $3n$-мерные векторы $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{3n})$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{3n})$, такие, что

$$y_\mu = x_\mu \sqrt{\widetilde{m}_\mu}\,, \quad Y_\mu = \frac{X_\mu}{\sqrt{\widetilde{m}_\mu}}\,, \tag{1.4}$$

где

$$\widetilde{m}_\mu = \frac{m_\mu}{M}\,, \quad M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\,. \tag{1.5}$$

Под длиной вектора $\mathbf{y}$ условимся понимать

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{3n} y_\mu^2} = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{3n} m_\mu x_\mu^2}\,,$$

а направление его будем характеризовать с помощью величин $\cos\alpha_\mu = y_\mu / |\mathbf{y}|$. Аналогично поступаем и с вектором $\mathbf{Y}$.

Если ввести единичные векторы $\mathbf{i}_\mu$, соответствующие $3n$-мерной ортогональной системе декартовых координат y_μ, то векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{Y}$ представим в виде

$$\mathbf{y} = y_\mu \mathbf{i}_\mu\,, \quad \mathbf{Y} = Y_\mu \mathbf{i}_\mu\,.$$

На основании сказанного система дифференциальных уравнений (1.3), которая в новых координатах имеет форму

$$M\ddot{y}_\mu = Y_\mu\,, \quad \mu = \overline{1, 3n}\,,$$

может быть записана в виде векторного уравнения для одной точки с массой M, движущейся в $3n$-мерном евклидовом пространстве. Эта точка называется *изображающей точкой по Герцу*. Уравнение ее движения имеет вид

$$M\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}\,, \quad \text{или} \quad M\mathbf{W} = \mathbf{Y}\,, \quad \text{где} \quad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{y}_\mu \mathbf{i}_\mu\,. \tag{1.6}$$

Отметим, что если кинетическую энергию системы определить как сумму кинетических энергий ее точек, то нетрудно убедиться, что эта энергия равна кинетической энергии изображающей точки. Действительно, согласно определению

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3n} m_\mu \dot{x}_\mu^2 = \frac{M}{2}\sum_{\mu=1}^{3n} \widetilde{m}_\mu \dot{x}_\mu^2 = \frac{M}{2}\sum_{\mu=1}^{3n} \dot{y}_\mu^2 = \frac{MV^2}{2}\,. \quad (1.7)$$

Если вместо декартовых координат y_μ ввести криволинейные координаты q^σ с базисными векторами $\mathbf{e}_\sigma = \partial\mathbf{y}(t,q)/\partial q^\sigma$, $\sigma = \overline{1,3n}$, то вектор скорости изображающей точки можно представить в виде

$$\mathbf{V} = \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma = \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial q^\alpha}\,\dot{q}^\alpha\,, \quad \alpha = \overline{0,3n}\,, \quad q^0 = t\,. \quad (1.8)$$

Сравнивая это выражение с выражением (4.2) главы IV для скорости материальной точки при нестационарном базисе, замечаем, что отличие состоит только в том, что суммирование ведется не до 3, а до $3n$. Это же утверждение, очевидно, относится и к ускорению $\mathbf{W}$ изображающей точки, сравниваемому с ускорением $\mathbf{w}$ материальной. Отсюда следует, что формулы, характеризующие кинематику точки в произвольных криволинейных координатах, могут быть использованы при исследовании движения изображающей точки. Общие вопросы динамики точки в произвольных криволинейных координатах были рассмотрены в § 4–6 главы IV. Основное векторное уравнение движения изображающей точки (1.6) и ее кинетическая энергия (1.7) полностью аналогичны соответствующим выражениям для одной материальной точки, и поэтому все результаты и формулы, полученные в указанных параграфах, обобщаются на случай изображающей точки. Для этого массу m следует заменить массой системы M, а векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ — соответственно векторами $\mathbf{y}$ и $\mathbf{Y}$ и считать, что суммирование по дважды встречающимся индексам ведется до $3n$.

Уравнения Лагранжа второго рода и канонические уравнения. Для того чтобы уравнения Лагранжа второго рода (4.6) главы IV записать в явном виде

$$M\,(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta) = Q_\sigma\,, \quad \sigma,\tau = \overline{1,3n}\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,3n}\,, \quad (1.9)$$

необходимо найти кинетическую энергию T и вычислить обобщенные силы Q_σ. Для свободной механической системы, состоящей из n точек, имеем

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}\,,$$

где

$$T^{(2)} = \frac{M}{2}\, \mathrm{g}_{\rho\sigma}\dot{q}^{\rho}\dot{q}^{\sigma}\,, \quad T^{(1)} = M\, \mathrm{g}_{0\sigma}\dot{q}^{\sigma}\,, \quad T^{(0)} = \frac{M}{2}\, \mathrm{g}_{00}\,.$$

Из формул (1.8), (1.4) и (1.5) следует, что

$$T^{(2)} = \frac{M}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^{\rho}}\cdot\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^{\sigma}}\right)\dot{q}^{\rho}\dot{q}^{\sigma} = \frac{M}{2}\sum_{\mu=1}^{3n}\frac{\partial y_{\mu}}{\partial q^{\rho}}\frac{\partial y_{\mu}}{\partial q^{\sigma}}\,\dot{q}^{\rho}\dot{q}^{\sigma} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{3n}\frac{m_{\mu}}{2}\,\frac{\partial x_{\mu}}{\partial q^{\rho}}\frac{\partial x_{\mu}}{\partial q^{\sigma}}\,\dot{q}^{\rho}\dot{q}^{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_{\nu}}{2}\,\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^{\rho}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^{\sigma}}\,\dot{q}^{\rho}\dot{q}^{\sigma}\,,$$

$$T^{(1)} = M\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^{\sigma}}\right)\dot{q}^{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} m_{\nu}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^{\sigma}}\right)\dot{q}^{\sigma}\,,$$

$$T^{(0)} = \frac{M}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}\right)^{2} = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_{\nu}}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t}\right)^{2}.$$

Рассмотрим обобщенные силы. По определению

$$Q_{\sigma} = \mathbf{Y}\cdot\mathbf{e}_{\sigma} = \mathbf{Y}\cdot\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^{\sigma}}\,, \quad \sigma = \overline{1,3n}\,.$$

Учитывая формулы (1.4), получаем

$$Q_{\sigma} = \sum_{\mu=1}^{3n} Y_{\mu}\,\frac{\partial y_{\mu}}{\partial q^{\sigma}} = \sum_{\mu=1}^{3n} X_{\mu}\,\frac{\partial x_{\mu}}{\partial q^{\sigma}} = \sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}_{\nu}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^{\sigma}}\,. \tag{1.10}$$

Умножая уравнения (1.9) на элементы $\mathrm{g}^{\sigma\rho}$ матрицы, обратной к матрице с элементами $\mathrm{g}_{\sigma\tau}$, и суммируя по σ, имеем

$$M\,(\ddot{q}^{\,\rho} + \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}) = Q^{\rho}\,, \quad \rho = \overline{1,3n}\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,3n}\,. \tag{1.11}$$

Здесь

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \mathrm{g}^{\sigma\rho}\,\Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,, \quad Q^{\rho} = \mathrm{g}^{\sigma\rho}\,Q_{\sigma}\,.$$

Из уравнений (1.11) следует, что векторы $\mathbf{W}$ и $\mathbf{Y}$ в уравнении (1.6) в контравариантном представлении задаются в виде

$$\mathbf{W} = (\ddot{q}^{\,\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta})\,\mathbf{e}_{\sigma}\,, \quad \mathbf{Y} = Q^{\sigma}\mathbf{e}_{\sigma}\,. \tag{1.12}$$

Из уравнений Лагранжа второго рода путем тех же рассуждений, что и для одной точки, в нестационарном случае может быть получен *интеграл Якоби* $T^{(2)} - T^{(0)} + \Pi = \mathrm{const}$, а в стационарном случае — *интеграл энергии* $T + \Pi = \mathrm{const}$.

Аналогично, система уравнений Лагранжа второго рода при движении изображающей точки в потенциальном поле приводится к системе *канонических уравнений*:

$$\dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q^\sigma}\,, \quad \dot{q}^\sigma = \frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p_\sigma}\,,$$
$$\sigma = \overline{1,3n}\,, \quad H = p_\sigma \dot{q}^\sigma - L\,, \quad L = T - \Pi\,.$$

Таким образом, введение изображающий точки позволяют рассматривать уравнение динамики свободной системы (1.9) как уравнения движения одной точки, масса которой равна массе всей системы и которая движется в $3n$-мерном евклидовом пространстве.

До сих пор мы предполагали, что в потенциальном поле силовая функция U зависит только от координат и времени и обобщенные силы Q_σ выражаются через U по формулам

$$Q_\sigma = \frac{\partial U}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,3n}\,.$$

Однако существуют такие силовые поля, в которых обобщенные силы могут быть представлены в виде

$$Q_\sigma = \frac{\partial U}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,3n}\,,$$

где U — функция времени, координат и скоростей. Она называется *обобщенным силовым потенциалом.* Таким силовым полем является, в частности, поле силы Лоренца, с которой электромагнитное поле действует на движущийся в нем электрический заряд.

Отметим, что если функция U зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}^\sigma$ линейно, то обобщенные силы Q_σ не зависят от ускорения.

Очевидно, что уравнения Лагранжа второго рода в таких обобщенных потенциальных полях будут иметь прежний вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} = 0\,, \quad L = T + U\,.$$

Уравнения движения изображающей точки в проекциях на касательную и нормаль к траектории. Установим еще одну возможную форму уравнений движения изображающей точки. Вектор скорости изображающей точки $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{y}}$ естественно считать направленным по касательной к траектории и, как в случае одной точки, представить в виде

$$\mathbf{V} = V_\tau \boldsymbol{\tau}\,, \tag{1.13}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательного направления. Дифференцируя это выражение, получаем

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}} = \frac{dV_\tau}{dt}\,\boldsymbol{\tau} + V_\tau\,\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\,.$$

Вектор $d\boldsymbol{\tau}/dt$ направлен перпендикулярно $\boldsymbol{\tau}$, так как $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau} = 1$, и, следовательно, $\boldsymbol{\tau}\cdot d\boldsymbol{\tau} = 0$, откуда видно, что векторы $d\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}$ действительно ортогональны. Как и в случае одной точки в трехмерном пространстве, записываем

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\,, \tag{1.14}$$

подразумевая под ds по аналогии с трехмерным пространством величину, квадрат которой определяется формулой

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^{3n} dy_\mu^2\,.$$

В соответствии с этим выражением квадрат скорости изображающей точки представляем в виде

$$V^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{3n} \dot{y}_\mu^2,\,, \quad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{d\mathbf{y}}{ds}\,.$$

Сравнивая данное выражение с формулой (1.13), получаем

$$V_\tau = \dot{s}\,, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{y}}{ds}\,.$$

Назовем кривизной $3n$-мерной кривой величину

$$K = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\mathbf{y}}{ds^2}\right| = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{3n}\left(\frac{d^2y_\mu}{ds^2}\right)^2}\,.$$

Тогда выражение (1.14) примет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = KV_\tau\mathbf{n}\,,$$

где вектор $\mathbf{n} = \frac{1}{K}\,\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ условимся называть *вектором главной нормали кривой*. Таким образом, ускорение можно выразить формулой

$$\mathbf{W} = \dot{V}_\tau\boldsymbol{\tau} + V^2\,K\mathbf{n}\,, \quad \text{или} \quad \mathbf{W} = \ddot{s}\,\boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2\,K\mathbf{n}\,,$$

и соответственно уравнение движения изображающей точки можно записать в форме

$$M\,(\dot{V}_\tau \boldsymbol{\tau} + V^2\,K\mathbf{n}) = Y_\tau \boldsymbol{\tau} + Y_n \mathbf{n}\,.$$

В частности, если $Y_\tau = 0$, то $\dot{V}_\tau = \ddot{s} = 0,\ V = \mathrm{const}$, и кривизна кривой

$$K = \frac{|\mathbf{Y}|}{M}\,\frac{1}{V^2}\,.$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений движения изображающей точки независимо от того, в какой системе координат они записаны, представляет собой весьма сложную задачу. В некоторых случаях, однако, оказывается возможным получить интегрируемые комбинации с помощью общих теорем динамики. Рассмотрим эти теоремы.

§ 2. Теорема импульсов и теорема о движении центра масс системы

Будем называть сумму

$$\mathbf{K} = \sum_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu$$

импульсом или *количеством движения системы*. Тогда на основании уравнений (1.1) получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(i)} + \sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(e)}\,. \tag{2.1}$$

Так как внутренние силы должны подчиняться третьему закону Ньютона, то их геометрическая сумма равна нулю: $\sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(i)} = 0$. Поэтому формулу (2.1) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}\,, \quad \text{или} \quad \mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt\,, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{F} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(e)}$ — геометрическая сумма всех внешних сил, которая называется *главным вектором* этих сил.

Соотношение между векторами $\mathbf{K}$ и $\mathbf{F}$, задаваемое уравнениями (2.2), называется *теоремой импульсов*.

Очевидно, что сумму $\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu$ можно представить в виде

$$\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_c \sum_\nu m_\nu = M\mathbf{r}_c\,,$$

где

$$\mathbf{r}_c = \sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu / M\,. \tag{2.3}$$

Точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_c$, определяемым формулой (2.3), будем называть *центром масс* или *центром инерции системы*. Из формулы (2.3) следует, что

$$M\mathbf{v}_c = \sum_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu = \mathbf{K}\,,$$

поэтому уравнение (2.2) может быть записано в виде

$$M\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(e)}\,, \quad \text{или} \quad M\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F}\,. \tag{2.4}$$

Это выражение имеет вид уравнения движения материальной точки с массой M, находящейся под действием силы $\mathbf{F}$. Иначе говоря, при движении системы ее центр масс движется как материальная точка, масса которой равна массе системы, и к которой приложена сила, равная главному вектору $\mathbf{F}$ всех внешних сил (*теорема о движении центра масс системы*). Если $\mathbf{F} = 0$, то центр масс системы движется равномерно и прямолинейно.

Отметим, что теорема импульсов и теорема о движении центра масс могут быть распространены и на случай движения непрерывно распределенного множества точек, то есть на континуум или на сплошную среду. В этом случае все выписанные выше суммы следует рассматривать как интегралы. Силы взаимодействия между частицами сплошной среды рассматриваются при этом как внутренние силы.

Данные теоремы могут быть применены и к механическим системам, которые состоят из разнородных частей, например к механизмам, встречающимся в робототехнике, а также к любым объектам живой и неживой природы. Применение этих теорем к движению летательных аппаратов с реактивными двигателями будет использовано в главе X «Динамика полета» второго тома учебника.

Частным случаем сплошной среды является абсолютно твердое тело. Силы, обеспечивающие постоянство расстояний между его точками, можно рассматривать как внутренние силы. Другой подход к абсолютно твердому телу будет изложен в главе VI «Движение при наличии связей».

Выше отмечалось, что главный вектор внутренних сил не входит в теорему о движении центра масс (2.4). Не следует, однако, думать, что внутренние силы не влияют вообще на движение центра масс. От внутренних сил часто зависят и внешние. Например, от напряжения мышц

спортсмена зависит сила, с которой он отталкивается от земли при прыжке в высоту. Внутренними силами определяется также и сила, с которой электровоз, отталкиваясь от рельс, тянет поезд.

§ 3. Теоремы моментов

Теорема моментов для случая неподвижного полюса. Для каждой точки, принадлежащей системе, можно записать теорему моментов (см. формулу (2.5) главы IV):

$$\frac{d\mathbf{l}_\nu}{dt} = \mathbf{L}_\nu\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,,$$

или в развернутом виде

$$\frac{d(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{p}_\nu)}{dt} = \mathbf{r}_\nu \times (\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{F}_\nu^{(i)})\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,, \tag{3.1}$$

где, как обычно при рассмотрении материальной системы, через $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$ и $\mathbf{F}_\nu^{(i)}$ обозначены соответственно равнодействующие всех внешних и внутренних сил, приложенных к изучаемой точке. Через $\mathbf{r}_\nu$ обозначены радиус-векторы этих точек относительно начала координат O неподвижной системы $Ox_1x_2x_3$.

Суммируя все равенства (3.1), получаем

$$\frac{d\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{p}_\nu\right)}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(i)}\,. \tag{3.2}$$

Выражение $\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(i)}$ называется *главным моментом внутренних сил.* Согласно третьему закону Ньютона силы взаимодействия любых двух точек системы равны по величине и противоположно направлены. Если они, кроме того, имеют одну линию действия, то момент $\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(i)}$ обращается в нуль. Действительно, для каждой пары точек при этом предположении силы их взаимодействия создают относительно любого полюса моменты, равные по величине и противоположно направленные. Силы взаимодействия двух точек, как уже отмечалось, согласно третьему закону Ньютона равны по величине и прямо противоположно направлены. Линии их действия могут быть параллельными, а в частном случае совпадать. В классической механике рассматривается случай, при котором главный момент внутренних сил всегда равен нулю. В задачах электродинамики

встречаются взаимодействия, которым соответствует момент внутренних сил, не равный нулю.

Оставшаяся сумма из правой части (3.2) $\mathbf{L}_O = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)}$ называется *главным моментом внешних сил*, а выражение $\mathbf{l}_O = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{p}_\nu$ — *главным моментом количества движения системы*, или ее *кинетическим моментом*. Поэтому согласно (3.2) *теорему об изменении главного момента количества движения системы* окончательно можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{l}_O}{dt} = \mathbf{L}_O\,, \tag{3.3}$$

то есть производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного полюса равна главному моменту внешних сил. Эта формулировка отражает содержание *теоремы моментов для случая неподвижного полюса*.

Уравнение (3.3) допускает существование интегралов движения в случае, когда $\mathbf{L}_O$ есть заданная функция времени или, в частном случае, постоянно. В еще более частном случае, когда $\mathbf{L}_O = 0$, имеем *закон сохранения кинетического момента*

$$\mathbf{l}_O = \mathbf{l}_O(0) = \mathbf{C}\,,$$

то есть при отсутствии момента внешних сил кинетический момент постоянен по величине и направлению.

Теорема моментов, как и теорема импульсов, может быть распространена на любую механическую систему, в том числе и на сплошную среду.

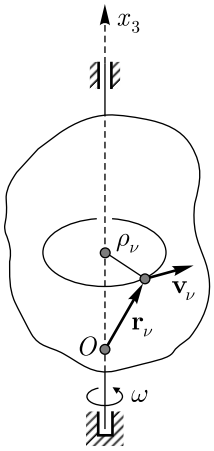

Рис. 1. Вращение тела вокруг неподвижной оси

В качестве примера применения теоремы (3.3) рассмотрим вращение твердого тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг неподвижной оси x_3 (рис. 1). В этом случае момент импульса точки с номером ν можно представить в виде

$$\mathbf{l}_\nu = \mathbf{r}_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = \mathbf{r}_\nu \times m_\nu(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu) = m_\nu[\boldsymbol{\omega} r_\nu^2 - \mathbf{r}_\nu(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_\nu)]\,.$$

Поэтому проекция его на ось вращения x_3 (или момент импульса этой точки относительно оси x_3) равна

$$l_{\nu x_3} = m_\nu \omega_{x_3}(x_{\nu 1}^2 + x_{\nu 2}^2) = m_\nu \omega_{x_3} \rho_\nu^2\,.$$

Проекция главного момента количества движения всей системы

$$l_{Ox_3} = \omega_{x_3} \sum_\nu m_\nu \rho_\nu^2\,.$$

Выражение $J_{x_3} = \sum_\nu m_\nu \rho_\nu^2$ называется *моментом инерции системы материальных точек относительно оси* x_3. Отметим, что он может быть представлен в виде $J_{x_3} = MR_{x_3}^2$. Величина R_{x_3} называется *радиусом инерции системы относительно оси* x_3. При непрерывном распределении массы сумма переходит в соответствующий объемный интеграл. Уравнение (3.3) в проекции на ось вращения в рассматриваемом случае имеет вид

$$J_{x_3} \frac{d\omega_{x_3}}{dt} = L_{Ox_3}\,. \tag{3.4}$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси* x_3.

Уравнение (3.4) в некоторых случаях допускает существование интеграла. В частности, если $L_{Ox_3} = f(t)$, то можно записать

$$J_{x_3}(\omega - \omega_0) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt\,.$$

При $f(t) \equiv 0$ имеем $\omega = \omega(0) = \text{const}$, то есть тело вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью.

Теорема моментов относительно подвижного центра. Введем подвижную систему координат $Cx_1'x_2'x_3'$, движущуюся поступательно относительно неподвижной системы $Ox_1x_2x_3$. Начало координат подвижной системы совпадает с центром инерции системы C (рис. 2). Очевидно, что

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_\nu'\,, \quad \mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_\nu'\,. \tag{3.5}$$

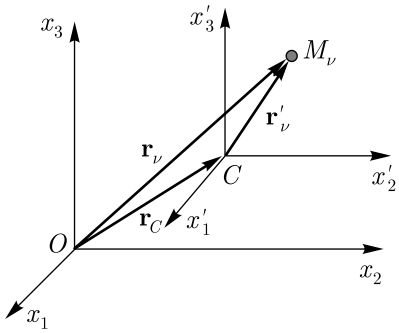

Рис. 2. Чертеж для теоремы моментов относительно подвижного центра масс

Поэтому кинетический момент системы можно записать в виде

$$\mathbf{l}_O = \sum_\nu (\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_\nu') \times m_\nu (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_\nu')$$

или, раскрывая скобки,

$$\mathbf{l}_O = \sum_\nu \mathbf{r}_c \times m_\nu \mathbf{v}_c + \sum_\nu \mathbf{r}_c \times m_\nu \mathbf{v}_\nu' + \sum_\nu \mathbf{r}_\nu' \times m_\nu \mathbf{v}_c + \sum_\nu \mathbf{r}_\nu' \times m_\nu \mathbf{v}_\nu' \,. \quad (3.6)$$

Обозначим первую сумму через

$$\mathbf{l}_C = \sum_\nu \mathbf{r}_c \times m_\nu \mathbf{v}_c = \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c \,, \quad (3.7)$$

где $M = \sum_\nu m_\nu$ — масса всей системы. Вторую сумму можно представить следующим образом:

$$\sum_\nu \mathbf{r}_c \times m_\nu \mathbf{v}_\nu' = \mathbf{r}_c \times \sum_\nu m_\nu \frac{d\mathbf{r}_\nu'}{dt} = \mathbf{r}_c \times \frac{d}{dt} \sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu' \,.$$

Однако из определения центра инерции (2.3) и формул (3.5) вытекает, что

$$\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu' = 0 \,,$$

и, следовательно, вторая сумма в выражении (3.6) равна нулю.

Аналогично обращается в нуль и третья сумма, ибо ее можно переписать в виде

$$\sum_\nu \mathbf{r}_\nu' \times m_\nu \mathbf{v}_c = \sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu' \times \mathbf{v}_c = 0 \,.$$

Оставшуюся последнюю сумму в (3.6) обозначим через $\mathbf{l}'_C = \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \mathbf{v}'_\nu$. Это главный момент количества движения системы относительно точки C в ее относительном движении в подвижной системе координат $Cx'_1x'_2x'_3$ (в дальнейшем для краткости вектор $\mathbf{l}'_C$ будем называть *кинетическим моментом системы при движении ее относительно центра масс*).

Итак, формула (3.6) окончательно перепишется в виде

$$\mathbf{l}_O = \mathbf{r}_c \times M\mathbf{v}_c + \mathbf{l}'_C\,,$$

то есть кинетический момент системы относительно неподвижной точки O равен векторной сумме момента количества движения относительно точки O материальной точки массы M, находящейся в центре масс системы C, и кинетического момента системы при движении ее относительно центра масс.

Из полученных результатов следует, что теорему моментов (3.3) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{l}_C}{dt} + \frac{d\mathbf{l}'_C}{dt} = \sum_\nu \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}^{(e)}_\nu + \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}^{(e)}_\nu\,,$$

или

$$\frac{d\mathbf{l}_C}{dt} + \frac{d\mathbf{l}'_C}{dt} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{F} + \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}^{(e)}_\nu\,, \tag{3.8}$$

где $\mathbf{F} = \sum_\nu \mathbf{F}^{(e)}_\nu$ — главный вектор внешних сил.

Умножая обе части уравнения (2.4), выражающего теорему о движении центра масс, векторно на $\mathbf{r}_c$, получаем

$$\mathbf{r}_c \times M\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}\,.$$

Отсюда с учетом выражения (3.7) можно записать

$$\frac{d\mathbf{l}_C}{dt} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}\,,$$

так как $(d\mathbf{r}_c/dt) \times M\mathbf{v}_c = 0$. Поэтому после приведения подобных членов в формуле (3.8) окончательно имеем

$$\frac{d\mathbf{l}'_C}{dt} = \mathbf{L}'_C\,. \tag{3.9}$$

Это равенство является аналитическим выражением *теоремы об изменении кинетического момента системы при движении ее относительно*

центра масс. Отметим, что по форме записи эта теорема совпадает с теоремой моментов (3.3) относительно неподвижного центра O.

Аналогично дифференциальному уравнению вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (3.4) и в данном случае при вращении твердого тела только вокруг оси x_3' получаем

$$J_{x_3'}\frac{d\omega_{x_3'}}{dt} = L_{Cx_3'}\,.$$

Рассмотрим частный случай существования интеграла уравнения (3.9). Пусть, например, $L_{Cx_i'} = 0$. Тогда, записывая уравнение (3.9) в проекции на ось x_i', получаем $l_{Cx_i'} = \mathrm{const}$. При отсутствии вращения точек системы вокруг оси x_i' в начальный момент эта постоянная равна нулю.

Для сохранения нулевого значения часть точек системы должна поворачиваться в одну сторону, а часть других с соответствующей угловой скоростью — в другую. Этим свойством пользуется кошка при падении спиной вниз: поворачивая хвост и голову вокруг своей продольной оси в одну сторону, она тем самым поворачивает остальную часть туловища, включая лапы, в противоположную.

Остановимся теперь на более сложном случае[1], когда учитывается относительное движение системы материальных точек относительно поступательно движущейся системы $O'x_1'x_2'x_3'$, начало которой O' не совпадает с центром масс C (рис. 3).

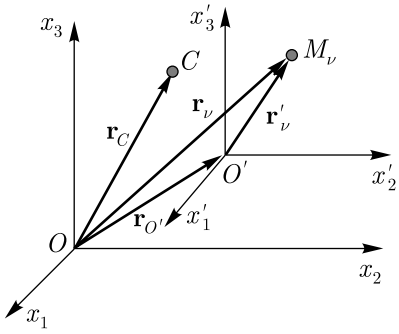

Рис. 3. Чертеж для теоремы моментов относительно подвижного центра O'

[1]Приводимая ниже теорема и доказательство взяты из лекций П. Е. Товстика.

Имеем очевидные соотношения

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{o'} + \mathbf{r}'_\nu\,, \quad \mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_{o'} + \mathbf{v}'_\nu\,. \tag{3.10}$$

Введем векторы

$$\mathbf{l}'_{O'} = \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \mathbf{v}'_\nu\,, \quad \mathbf{L}'_{O'} = \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu\,. \tag{3.11}$$

Тогда, учитывая второй закон Ньютона

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu$$

и формулы (3.10), (3.11), можем написать цепочку равенств:

$$\frac{d\mathbf{l}'_{O'}}{dt} = \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \frac{d\mathbf{v}'_\nu}{dt} = \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \left(\frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_{o'}}{dt}\right) =$$
$$= \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu - \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \mathbf{w}_{o'} = \mathbf{L}_{O'} - \overrightarrow{O'C} \times M\mathbf{w}_{o'}\,.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\mathbf{l}'_{O'}}{dt} = \mathbf{L}_{O'} + \overrightarrow{CO'} \times M\mathbf{w}_{o'}\,. \tag{3.12}$$

Формула (3.12) является аналитическим выражением *теоремы об изменении главного момента количества движения системы при движении по отношению к подвижному полюсу* O', не совпадающему с центром масс C. При C, совпадающем с O', формула (3.12) принимает вид (3.9).

§ 4. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия системы, как уже отмечалось, представляет собой сумму кинетических энергий всех входящих в нее элементарных масс: $T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_\nu^2$. В соответствии с уравнением движения отдельной материальной точки системы

$$m_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} = \mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{F}_\nu^{(i)}\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,, \tag{4.1}$$

изменение квадрата ее скорости происходит как вследствие действия результирующей $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$ всех внешних сил, так и вследствие действия результирующей $\mathbf{F}_\nu^{(i)}$ всех внутренних сил, приложенных к данной точке.

Умножая скалярно равенства (4.1) на элементарные перемещения точек $d\mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu dt$, получаем

$$m_\nu \mathbf{v}_\nu \cdot d\mathbf{v}_\nu = \mathbf{F}_\nu^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_\nu + \mathbf{F}_\nu^{(i)} \cdot d\mathbf{r}_\nu\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,,$$

или

$$d\left(\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}\right) = \mathbf{F}_\nu^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_\nu + \mathbf{F}_\nu^{(i)} \cdot d\mathbf{r}_\nu\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,. \tag{4.2}$$

Суммируя правые и левые части в равенствах (4.2), имеем

$$dT = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}\,, \tag{4.3}$$

где

$$\delta A^{(e)} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_\nu, \quad \delta A^{(i)} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(i)} \cdot d\mathbf{r}_\nu$$

представляют собой элементарные работы, совершаемые соответственно внешними и внутренними силами. Равенство (4.3) является выражением *теоремы об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.*

Отметим особо, что в то время как главный вектор и главный момент всех внутренних сил равны нулю, сумма работ внутренних сил, вообще говоря, нулю не равна. Если точки системы движутся относительно друг друга, то расстояния между ними при этом изменяются, что приводит к появлению работы внутренних сил.

При движении системы каждая точка с номером ν переместится из положения $M_{0\nu}$ в положение M_ν. В соответствии с этим полную работу следует записать в виде

$$A = A^{(e)} + A^{(i)} = \sum_\nu \int\limits_{\smile M_{0\nu}M_\nu} \mathbf{F}_\nu^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_\nu + \sum_\nu \int\limits_{\smile M_{0\nu}M_\nu} \mathbf{F}_\nu^{(i)} \cdot d\mathbf{r}_\nu\,. \tag{4.4}$$

На основании этого в результате интегрирования соотношения (4.3) приходим к выражению

$$T - T_0 = A\,. \tag{4.5}$$

Здесь T_0 — кинетическая энергия системы в момент времени t_0.

Равенство (4.5) есть *теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме*: приращение кинетической энергии равно сумме работ всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

Следует отметить, что криволинейные интегралы (4.4), через которые выражается работа A, вообще говоря, зависят не только от начального и конечного положений $M_{0\nu}$ и M_ν материальных точек системы, но и от формы траекторий, соответствующих истинному движению.

Уравнение движения изображающей точки (1.6) в $3n$-мерном пространстве по форме совпадает с уравнением Ньютона для одной точки

в трехмерном пространстве. Поэтому, как и для одной точки, получаем

$$d\left(\frac{MV^2}{2}\right) = \mathbf{Y}\cdot d\mathbf{y}\,.$$

Левая часть данного равенства представляет собой дифференциал кинетической энергии системы, поскольку ее кинетическая энергия равна кинетической энергии изображающей точки. Покажем теперь, что правая часть этого равенства соответствует элементарной работе всех сил, приложенных к точкам системы. Действительно, из формул (1.4) следует, что

$$\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{y} = \sum_{\mu=1}^{3n} Y_\mu dy_\mu = \sum_{\mu=1}^{3n} \frac{X_\mu}{\sqrt{\widetilde{m}_\mu}}\sqrt{\widetilde{m}_\mu}\,dx_\mu = \sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}_\nu\cdot d\mathbf{r}_\nu =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}_\nu^{(e)}\cdot d\mathbf{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}_\nu^{(i)}\cdot d\mathbf{r}_\nu = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)} = \delta A\,.$$

Таким образом, теорему об изменении кинетической энергии системы в результате введения уравнения движения изображающей точки можно записать в форме

$$\frac{MV^2}{2} - \frac{MV_0^2}{2} = \int\limits_{\smile ab}\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{y}\,,$$

которая совпадает с формулой (2.10), полученной нами в динамике одной точки.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда величина сил взаимодействия точек системы (то есть внутренних сил) зависит только от расстояния между соответствующими точками, а сами они направлены по соединяющей их прямой. Покажем, что в этом случае внутренние силы имеют потенциал, то есть $\delta A^{(i)}$ может быть представлена в виде $dU^{(i)}$.

Расстояние между точками с радиус-векторами $\mathbf{r}_\mu$ и $\mathbf{r}_\nu$ обозначим через $\rho_{\mu\nu}$. Очевидно, что $\rho_{\mu\nu}^2 = (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)^2$, и поэтому

$$\rho_{\mu\nu}d\rho_{\mu\nu} = (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)\cdot d(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)\,. \tag{4.6}$$

Проекция силы, с которой точка M_ν действует на точку M_μ, на направление $(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)/\rho_{\mu\nu}$ является, по предположению, функцией только от расстояния $\rho_{\mu\nu}$. Обозначим эту функцию через $f_{\mu\nu}(\rho_{\mu\nu})$. При этом саму силу записываем в виде

$$f_{\mu\nu}(\rho_{\mu\nu})(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)/\rho_{\mu\nu}\,. \tag{4.7}$$

Очевидно, что силу, с которой точка M_μ действует на точку M_ν, получаем при перестановке индексов μ и ν в выражении (4.7). Так как при этом

на основании третьего закона Ньютона имеем вектор, равный выражению (4.7) с обратным знаком, а $\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu = -(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)$ и $\rho_{\mu\nu} = \rho_{\nu\mu}$, то

$$f_{\mu\nu}(\rho_{\mu\nu}) = f_{\nu\mu}(\rho_{\nu\mu})\,. \tag{4.8}$$

Элементарная работа сил взаимодействия точек M_ν и M_μ при введенных обозначениях с учетом соотношений (4.8) и (4.6) записывается в виде

$$\delta A_{\mu\nu} = \frac{f_{\mu\nu}(\rho_{\mu\nu})[(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)\cdot d\mathbf{r}_\mu + (\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu)\cdot d\mathbf{r}_\nu]}{\rho_{\mu\nu}} =$$
$$= -\frac{f_{\mu\nu}(\rho_{\mu\nu})(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)\cdot d(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)}{\rho_{\mu\nu}} = -f_{\mu\nu}(\rho_{\mu\nu})\,d\rho_{\mu\nu}\,.$$

Двойная сумма $\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\delta A_{\mu\nu}$ учитывает работу каждой из рассматриваемых сил дважды. Поэтому

$$\delta A^{(i)} = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\delta A_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} f_{\mu\nu}(\rho_{\mu\nu})\,d\rho_{\mu\nu} = dU^{(i)}\,, \tag{4.9}$$

где выражение $U^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\int f_{\mu\nu}(\rho_{\mu\nu})\,d\rho_{\mu\nu}$ называется *силовой функцией внутренних сил.*

Из соотношения (4.9) следует, что

$$A^{(i)} = U^{(i)} - U_0^{(i)} = \Pi_0^{(i)} - \Pi^{(i)}\,, \tag{4.10}$$

где $\Pi^{(i)} = -U^{(i)}$ и $\Pi_0^{(i)} = -U_0^{(i)}$ — потенциальные энергии внутренних сил соответственно в моменты времени t и t_0.

Допустим, что внешние силы также потенциальны, то есть $\delta A^{(e)} = -d\Pi^{(e)}$, где $\Pi^{(e)}$ — потенциальная энергия внешних сил. Тогда

$$A^{(e)} = \Pi_0^{(e)} - \Pi^{(e)}\,. \tag{4.11}$$

Следовательно, если внутренние и внешние силы потенциальны, то их работа не зависит от формы пути и выражается разностью потенциальных энергий (см. формулы (4.10) и (4.11)).

Подставляя выражения (4.10) и (4.11) в соотношение (4.5), получаем *интеграл энергии*

$$E \equiv T + \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)} = T_0 + \Pi_0^{(e)} + \Pi_0^{(i)} = \mathrm{const}\,,$$

где E — *полная механическая энергия системы.* Механическая система, для которой имеет место интеграл энергии, называется *консервативной.*

Если расстояния между точками системы не меняются, то такая система называется *неизменяемой*. При этом $d\rho_{\mu\nu} = 0$, и в соответствии с соотношением (4.9) работа внутренних сил равна нулю. К неизменяемым системам относится и абсолютно твердое тело. Как следует из сказанного, оно отличается от реального тела, которое может деформироваться, тем, что работа приложенных к нему внешних сил целиком расходуется на изменение его кинетической энергии. Таким образом, модель абсолютно твердого тела может быть использована только в случае, когда работой, затрачиваемой на деформацию тела, можно пренебречь по сравнению с изменением его кинетической энергии.

Теорема Кёнига. Величина кинетической энергии системы существенно зависит от того, в какой системе измеряются скорости ее точек. При формулировании теоремы об изменении кинетической энергии как в дифференциальной, так и в интегральной форме была зафиксирована определенная система отсчета. Обозначим эту систему через $Ox_1x_2x_3$.

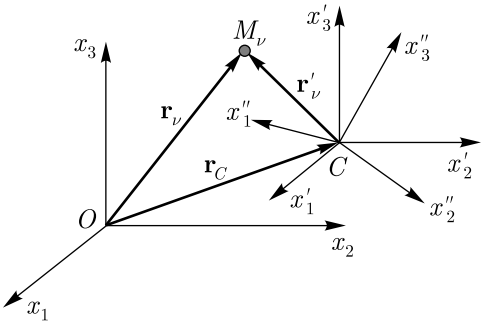

Рис. 4. Чертеж для теоремы Кёнига

Введем новую систему отсчета $Cx_1''x_2''x_3''$, начало которой поместим в центр масс рассматриваемой механической системы (рис. 4). По отношению к исходной системе отсчета $Ox_1x_2x_3$ положение центра масс определяется заданием радиус-вектора

$$\mathbf{r}_c = \sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu / M\,, \quad M = \sum_\nu m_\nu\,.$$

Обозначим через $\mathbf{r}_\nu'$ радиус-вектор точки M_ν в новой системе. Так как начало ее совпадает с центром масс, то

$$M\mathbf{r}_c' = \sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu' = 0\,. \tag{4.12}$$

Если мгновенная угловая скорость системы $Cx_1''x_2''x_3''$ относительно системы $Ox_1x_2x_3$ равна $\boldsymbol{\omega}$, то производные по времени от радиус-вектора $\mathbf{r}_\nu'$ в неподвижной и подвижной системах, как было показано в § 1 главы III, связаны соотношением

$$\frac{d\mathbf{r}_\nu'}{dt} = \frac{d^*\mathbf{r}_\nu'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu' \,. \tag{4.13}$$

Скорость точки M_ν относительно подвижной системы, равную $d^*\mathbf{r}_\nu'/dt$, обозначим через $\mathbf{v}_\nu''$.

Дифференцируя равенство $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_\nu'$ и учитывая соотношение (4.13), получаем

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_\nu'' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu' \,,$$

или

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_\nu' \,, \quad \mathbf{v}_\nu' = \mathbf{v}_\nu'' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu' \,, \tag{4.14}$$

где $\mathbf{v}_\nu' = d\mathbf{r}_\nu'/dt$ — скорость точки M_ν относительно вспомогательной системы отсчета $Cx_1'x_2'x_3'$, оси которой параллельны осям исходной. Дифференцируя равенство (4.12), находим, что

$$\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu' = \sum_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu'' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu' \right) = \sum_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu'' = 0 \,. \tag{4.15}$$

Подставляя скорости $\mathbf{v}_\nu$, представленные в виде (4.14), в выражение для кинетической энергии системы, получаем

$$T = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \mathbf{v}_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu [\mathbf{v}_c^2 + 2\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_\nu' + (\mathbf{v}_\nu')^2] \,.$$

Учитывая соотношение (4.15), а также то, что $M = \sum_\nu m_\nu$ — масса всей системы, окончательно имеем

$$T = \frac{M v_c^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu (v_\nu')^2 \,. \tag{4.16}$$

Это равенство представляет собой *теорему Кёнига*, которая формулируется следующим образом: кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии центра масс в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии системы в ее движении относительно системы отсчета, которая перемещается поступательно вместе с центром масс.

Если рассматриваемая система представляет собой твердое тело, движение которого определяется скоростью $\mathbf{v}_c$ его центра масс и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вращения относительно последнего, то скорость v'_ν элементарной массы m_ν равна $\omega\rho_\nu$, где ρ_ν — расстояние до мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс. Отсюда следует, что второе слагаемое в формуле (4.16) принимает вид

$$\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu (v'_\nu)^2 = \frac{J_\omega \omega^2}{2}\,.$$

Здесь $J_\omega = \sum_\nu m_\nu \rho_\nu^2$ — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс. Масса в твердом теле считается непрерывно распределенной, поэтому, строго говоря, суммирование следует заменить интегрированием. Из сказанного следует, что кинетическую энергию твердого тела следует вычислять по формуле

$$T = \frac{M v_c^2}{2} + \frac{J_\omega \omega^2}{2}\,. \tag{4.17}$$

Подставляя кинетическую энергию системы в виде (4.16) в равенство (4.3), получаем

$$\begin{gathered} d\left(\frac{M v_c^2}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu (v'_\nu)^2\right) = \left(\sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(e)}\right)\cdot d\mathbf{r}_c + \\ + \sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(e)}\cdot d\mathbf{r}'_\nu + \left(\sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(i)}\right)\cdot d\mathbf{r}_c + \sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(i)}\cdot d\mathbf{r}'_\nu\,. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Из уравнения движения центра масс (2.4) следует, что

$$d\left(\frac{M v_c^2}{2}\right) = \left(\sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(e)}\right)\cdot d\mathbf{r}_c\,. \tag{4.19}$$

Равенство (4.18) с учетом соотношения (4.19), а также того, что по третьему закону Ньютона $\sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(i)} = 0$, записывается в виде

$$d\left(\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu (v'_\nu)^2\right) = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(e)}\cdot d\mathbf{r}'_\nu + \sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(i)}\cdot d\mathbf{r}'_\nu\,. \tag{4.20}$$

Уравнение (4.20) есть *теорема об изменении кинетической энергии системы при движении ее относительно системы отсчета, которая перемещается поступательно вместе с центром масс.* Иначе эту теорему можно сформулировать так: дифференциал кинетической энергии системы при движении ее относительно центра масс равен сумме элементарных работ всех внутренних и внешних сил на перемещениях их точек приложения относительно последнего.

§ 5. Условия равновесия точки и системы

Если в заданной системе отсчета скорость точки в некотором интервале времени равна нулю, то говорят, что точка находится в *состоянии равновесия*, или *покоя*. Это будет лишь в том случае, когда действующая на точку сила $\mathbf{F} = 0$.

Если сила $\mathbf{F}$ представляет собой сумму k сил, приложенных к точке, то при равновесии имеем

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i = 0\,.$$

В этом случае говорят, что силы, приложенные к точке, уравновешивают друг друга. Очевидно, что равенство нулю вектора $\mathbf{F}$ влечет за собой равенство нулю его составляющих по осям выбранной системы координат. В частности, в декартовой системе координат условия равновесия имеют вид

$$X_j = \sum_{i=1}^{k} X_{ij} = 0\,, \quad j = 1, 2, 3.$$

Аналогично можно убедиться, что в криволинейной системе координат условия равновесия можно записать следующим образом:

$$Q_\sigma = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma} = X_j \frac{\partial x_j}{\partial q^\sigma} = 0\,, \quad \sigma = 1, 2, 3. \tag{5.1}$$

Если точку, находящуюся в состоянии покоя, переместить в новое положение и сообщить ей начальную скорость, то она начнет двигаться. При этом возможны два случая. В одном из них точка при движении не выходит за границы некоторой окрестности положения равновесия. В частности, она может совершать колебания вокруг него или по истечении некоторого промежутка времени вернуться в это положение. В другом случае при любых сколь угодно малых отклонениях от положения равновесия точка

всегда выходит за границы некоторой окрестности положения равновесия. В первом случае равновесие называется *устойчивым*, а во втором — *неустойчивым*.

Математически устойчивое положение равновесия, задаваемое координатами $q^\sigma = 0$, можно определить следующим образом: равновесие точки называется устойчивым, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое положительное число $\delta > 0$, что при

$$|q^\sigma(t_0)| < \delta\,, \;\; |\dot{q}^\sigma(t_0)| < \delta\,, \;\; \sigma = 1, 2, 3,$$

для всех $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|q^\sigma(t_0)| < \varepsilon, \;\; |\dot{q}^\sigma(t_0)| < \varepsilon\,, \;\; \sigma = 1, 2, 3.$$

Здесь предполагается, что время и обобщенные координаты являются безразмерными переменными.

Если точка находится в потенциальном силовом поле, то обобщенные силы вычисляют по формуле

$$Q_\sigma = -\partial\Pi/\partial q^\sigma\,.$$

Из уравнений (5.1) следует, что в положении равновесия потенциальная энергия Π имеет стационарное значение. Докажем, что если в положении равновесия потенциальная энергия стационарного силового поля имеет изолированный минимум, то равновесие устойчиво. Это утверждение составляет содержание *теоремы Лагранжа*.

Для простоты будем считать, что в положении равновесия $q^\sigma = 0$ и $\Pi(0) = 0$. В рассматриваемом случае существует интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi(q) = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi(q_0) = \mathrm{const}\,, \tag{5.2}$$

откуда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - \Delta\Pi\,, \tag{5.3}$$

где $\Delta\Pi = \Pi(q) - \Pi(q_0)$.

Из формулы (5.3) следует, что наибольшее значение, которого может достигнуть $\Delta\Pi$ в окрестности положения равновесия, получаем при $\mathbf{v} = 0$.

Пусть это условие выполняется в некоторой точке q^*, для которой

$$\Pi(q^*) = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi(q_0) = C^*\,. \tag{5.4}$$

Так как по предложению потенциальная энергия Π в положении равновесия имеет изолированный минимум, равный нулю, то $\Pi(q_0) > 0$ и $\Pi(q) > 0$, поэтому в соответствии с выражениями (5.2) и (5.4) имеем

$$\Pi(q^*) > \Pi(q_0) > 0\,, \quad \Pi(q^*) > \Pi(q) > 0\,, \quad v \neq 0\,.$$

Уравнению $\Pi(q) = C^*$ соответствует некоторая эквипотенциальная поверхность S^*, за границу которой при заданных q_0^σ и $\dot{q}_0^\sigma$ точка выйти не может. Другие эквипотенциальные поверхности, соответствующие $\Pi(q) = C < C^*$, лежат внутри S^*. Это и означает, что положение равновесия устойчиво.

Теорему Лагранжа можно пояснить следующим образом. Вектор $\boldsymbol{\nabla}\Pi$ ориентирован по нормали к эквипотенциальной поверхности в направлении возрастания функции $\Pi(q)$. Так как при удалении от положения равновесия функция $\Pi(q)$ возрастает, то сила $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\Pi$ направлена внутрь поверхности $\Pi(q) = C$, то есть стремится возвратить точку в положение равновесия.

В качестве примера рассмотрим груз с массой m, закрепленный на пружине с жесткостью c и находящийся в положении равновесия. Ось y направим вертикально вниз, а начало поместим в положение статического равновесии. При отклонения груза на величину y на него действует сила $-cy$, стремящаяся возвратить его в положение равновесия. Потенциальная энергия этой силы $\Pi = cy^2/2$. Выведем груз из положения равновесия, сообщив ему начальную скорость $\dot{y}_0 = v_0$. Формула (5.3) в данном случае принимает вид

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{cy^2}{2}\,,$$

откуда $\frac{dy}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{c}{m}y^2}$, или

$$\frac{d\left(\frac{y}{v_0}\sqrt{\frac{c}{m}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{c}{m}\left(\frac{y}{v_0}\right)^2}} = dt\,\sqrt{\frac{c}{m}}\,,$$

и, следовательно,

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\frac{y}{v_0}\right) = \sqrt{\frac{c}{m}}\,t + C_1\,.$$

Так как при $t = 0 \quad y = 0$, то $C_1 = 0$ и

$$y = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{c}{m}}}\,\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\,,$$

то есть точка совершает гармонические колебания около положения устойчивого равновесия $y = 0$, в котором функция $\Pi(y)$ имеет минимум.

Если теперь перейти к рассмотрению равновесия системы материальных точек, то удобно воспользоваться понятием изображающей точки. Очевидно, что тогда все сказанное относительно одной точки переносится на систему точек, в последнем случае, однако, следует помнить, что индексы j и σ принимают значения от 1 до $3n$.

Более подробно вопросы статики и уравнения равновесия будут обсуждаться в главе X.

Глава VI
ДВИЖЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗЕЙ

Авторы: *Н. Н. Пóляхов, С. А. Зегжда, Ш. Х. Солтаханов, М. П. Юшков*

Уравнения движения механических систем при наличии как голономных, так и неголономных связей выводятся в этой главе не из вариационных принципов, как это обычно принято, а непосредственно из анализа тех ограничений, которые накладываются уравнениями связей на ускорения точек системы. Сначала подробно рассматривается несвободное движение одной материальной точки. Затем с помощью понятия изображающей точки полученные результаты естественным образом распространяются на движение системы материальных точек. Далее они обобщаются на механические системы, состоящие из материальных тел. При этом обобщении используется понятие дифференцируемого многообразия и касательного пространства к нему.

Большое внимание уделяется обсуждению условий идеальности неголономных связей. В рассмотрение вводится линейное преобразование сил, которое оказывается весьма конструктивным как при выводе уравнений движения, так и при определении сил, обеспечивающих выполнение уравнений связей в случае их идеальности.

Дается обзор основных известных видов уравнений движения неголономных систем. Показывается, что наиболее общими и удобными уравнениями являются уравнения Маджи. Приводятся уравнения движения систем, подчиненных линейным неголономным связям второго порядка. Теория несвободного движения распространяется на изучение управляемого движения, программа которого задается связями, зависящими от параметров. Изложение теории сопровождается решением ряда задач как голономной, так и неголономной механики.

Для удобства материал главы разбит на две части. В I части излагается несвободное движение системы материальных точек, во II — механических систем общего вида.

I. НЕСВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 1. Несвободное движение точки

Движение материальной точки, которое мы до сих пор рассматривали, может быть названо движением *свободной точки* в том смысле, что для любых действующих сил, пользуясь произволом при выборе начальных условий, можно потребовать, чтобы точка в заданный момент времени t в заданном положении с координатами x_1, x_2, x_3 имела заданную скорость с проекциями $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$. Это ясно из того, что интегралы уравнений движения имеют вид

$$\Phi_j(t, x, \dot{x}) = C_j\,, \quad x = (x_1, x_2, x_3)\,, \;\; \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)\,, \quad j = \overline{1,6}\,,$$

откуда следует, что для любых заданных $t, x, \dot{x}$ можно найти соответствующие им C_j. Иначе говоря, на координаты и скорость свободной точки никакие дополнительные условия заранее не налагаются.

Будем считать, что точка является *несвободной*, если ее координаты и проекции скорости должны удовлетворять некоторым заранее заданным условиям. Например, точка должна все время находиться на поверхности или на линии, которую можно рассматривать как пересечение двух поверхностей. Такие условия называются *связями*, наложенными на точку. Они обычно выражаются в виде некоторых равенств или неравенств, то есть в виде соотношений

$$\varphi(t, x, \dot{x}) \geqslant 0\,. \tag{1.1}$$

Если во время движения выполняется равенство

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = 0\,, \tag{1.2}$$

то связь называют *удерживающей* и говорят, что точка во все моменты времени должна оставаться на связи. Если в некоторый момент равенство нарушается, то говорят, что точка покидает связь. В таком случае связь называют *неудерживающей* или *освобождающей*. Происхождение этих терминов можно пояснить следующим примером.

Допустим, что точка находится на поверхности, задаваемой уравнением

$$f(t, x) = 0\,. \tag{1.3}$$

Тогда координаты ее должны удовлетворять уравнению поверхности, и можно сказать, что поверхность «удерживает» точку. Если для координат точки выполняется условие $f(t, x) \geqslant 0$, то это значит, что она может покинуть поверхность. Примером подобной связи является, в частности, обращенная выпуклостью вверх поверхность, у вершины которой свободно покоится тяжелый шарик (рис. 1). При определенных значениях начальной скорости v_0 и в зависимости от формы поверхности возможен случай, когда шарик сначала катится по поверхности, а затем в некоторый момент покидает ее. Точно так же выражения (1.1) и (1.2) можно рассматривать в шестимерном пространстве переменных $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ и пользоваться введенной терминологией.

Если время t входит явно в формулу (1.3), то связь называется *нестационарной* (или *реономной*). Ей соответствует образ деформирующейся и перемещающейся во времени поверхности. В противном случае связь называется *стационарной* (или *склерономной*).

Связи, выражаемые формулой (1.2), содержащей координаты и первые производные от них, являются *дифференциальными связями первого*

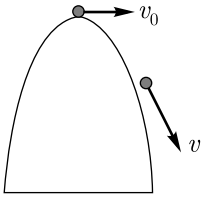

Рис. 1. Движение по освобождающей связи

порядка. Они могут быть интегрируемыми или неинтегрируемыми в том смысле, что могут или не могут быть приведены к уравнению, заданному в виде (1.3). Так, связь вида $a_1\dot{x}_1 + a_2\dot{x}_2 + a_3\dot{x}_3 + a_0 = 0$, или в дифференциальной форме $a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 + a_0dt = 0$, где a_i — функции координат x_i и времени t, может или не может быть приведена к полному дифференциалу в зависимости от того, удовлетворяют или не удовлетворяют функции $a_i(t,x)$ некоторым условиям. Например, если

$$a_0 = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\,, \quad a_1 = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x_1}\,, \quad a_2 = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x_2}\,, \quad a_3 = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x_3}\,,$$

то уравнение связи приобретает вид

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\,dt + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x_j}\,dx_j = 0\,,$$

откуда имеем, что $f(t,x) = \mathrm{const}$, то есть связь интегрируема. В дальнейшем будем пользоваться понятием «немого индекса», позволяющим не писать знака суммы.

Связи вида (1.3) называются *геометрическими*, *конечными* или *голономными* связями. Дифференциальные связи (1.2) в том случае, когда их нельзя проинтегрировать, то есть свести к связям вида (1.3), называются *неголономными связями первого порядка.* Неголономная связь называется *линейной*, если ее уравнение линейно зависит от скоростей. В общем случае уравнение связи (1.2) может нелинейно зависеть как от координат, так и от скоростей.

Если связь (1.2) неголономна, то любые два положения материальной точки можно соединить кусочно-гладкой кривой конечной длины, при движении по которой удовлетворяется уравнение связи[1]. В том случае, когда уравнение (1.2) получено посредством дифференцирования по времени выражения $f(t,x) = \mathrm{const}$, тогда, не нарушая связи (1.2), из любой точки

[1]Подробнее об этом см. в § 5 данной главы. Одновременно с этим отметим, что термины «голономная» и «неголономная связи» впервые были введены Г. Герцем.

уже нельзя попасть в любую другую точку. Действительно, за счет выбора произвольной постоянной исходная точка может быть любой. Однако из нее можно попасть только в ту точку, которая удовлетворяет уравнению $f(t,x) = \mathrm{const}$.

Очевидно, что всякая голономная связь, выражаемая дифференцируемой функцией, может быть представлена в дифференциальной форме

$$\varphi(t,x,\dot{x}) \equiv \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\dot{x}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,\dot{x}_3 = 0\,, \tag{1.4}$$

или

$$\varphi(t,x,\dot{x}) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathbf{v} = 0\,.$$

В общем случае ускорение $\mathbf{w}^*$, которое сообщает исходной точке сила $\mathbf{F}(t,x,\dot{x})$, не совпадает с ускорением $\mathbf{w}$, которое получает точка под влиянием той же силы при наличии связи. Иначе говоря, связь действует на точку как некоторая сила $\mathbf{R}$, которую будем называть *реакцией связи*. Отсюда следует, что уравнение Ньютона для несвободной точки должно иметь вид

$$m\,\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}\,. \tag{1.5}$$

Если предположить, что сила $\mathbf{R}$ найдена, то движение несвободной точки должно совпасть с движением свободной точки, находящейся под действием заданных сил $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$. В этом и состоит содержание *принципа освобождаемости* от связи. Отметим, что для такого свободного движения уравнение связи является интегралом уравнений движения.

Рассмотрим уравнение связи общего вида (1.2). Предполагая, что функция $\varphi(t,x,\dot{x})$ дифференцируема по всем аргументам, можно записать

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\dot{x}_j + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_j}\,\ddot{x}_j = 0\,, \quad j = \overline{1,3}\,,$$

или

$$\boldsymbol{\nabla}'\varphi \cdot \mathbf{w} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \mathbf{v}\,, \tag{1.6}$$

где

$$\boldsymbol{\nabla}' = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}\,\mathbf{i}_j\,, \quad j = \overline{1,3}\,.$$

Умножая уравнение (1.5) скалярно на $\boldsymbol{\nabla}'\varphi$, а уравнение (1.6) на m, получаем

$$m\,\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nabla}'\varphi = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}'\varphi + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\nabla}'\varphi\,,$$

$$m\,\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nabla}'\varphi = -m\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \mathbf{v}\right),$$

откуда

$$\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\varphi = -\left(m\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + m\,\boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\mathbf{v} + \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\varphi\right). \tag{1.7}$$

Решая это уравнение относительно $\mathbf{R}$, можно записать

$$\mathbf{R} = -\left(m\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + m\,\boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\mathbf{v} + \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\varphi\right)\frac{\boldsymbol{\nabla}'\varphi}{|\boldsymbol{\nabla}'\varphi|^2} + \mathbf{T}_0\,,$$

где $\mathbf{T}_0$ — произвольный вектор, ортогональный вектору $\boldsymbol{\nabla}'\varphi$. Эту формулу удобно также представить в виде

$$\mathbf{R} = \Lambda\,\boldsymbol{\nabla}'\varphi + \mathbf{T}_0 = \mathbf{N} + \mathbf{T}_0\,, \quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{T}_0 = 0\,.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.7) относительно вектора $\mathbf{R}$, видим, что вектор $\mathbf{T}_0$ может быть исключен из него. Следовательно, связь (1.2) может быть удовлетворена при любом векторе $\mathbf{T}_0$. В частности, для решения задачи достаточно считать $\mathbf{T}_0 = 0$. Связи, обладающие этим свойством, будем называть *идеальными связями*. Однако физический способ реализации связи обычно приводит к появлению составляющей $\mathbf{T}_0$, которая в большинстве случаев существенно зависит от $\mathbf{N}$. Иначе говоря, физически осуществленная связь оказывается неидеальной, и для окончательного решения задачи кроме уравнения связи необходимо знать физический закон, описывающий задание вектора $\mathbf{T}_0$.

Приведенное выше аналитическое выражение для реакции $\mathbf{N}$ идеальной связи (1.2) было получено здесь на основе анализа тех ограничений (1.6), которые накладываются данной связью на вектор ускорения $\mathbf{w}$. Обсуждение этих ограничений с других позиций будет изложено в § 5 и 7 данной главы.

Рассмотрим частный случай голономной связи (1.3). Представим ее в виде (1.2):

$$\varphi \equiv \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\dot{x}_j = 0\,.$$

Следовательно, в данном случае

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}\,,$$

и поэтому для голономной связи (1.3) введенный выше вектор $\boldsymbol{\nabla}'\varphi$ совпадает с обычным вектором $\boldsymbol{\nabla}f$.[2] Теперь вектор $\mathbf{N} = \Lambda\boldsymbol{\nabla}f$ направлен по

[2]Использованный в данном параграфе вектор $\boldsymbol{\nabla}'\varphi$ был введен Н. Н. Пóляховым (см. статью *Поляхов Н. Н.* Уравнения движения механических систем при нелинейных, него-

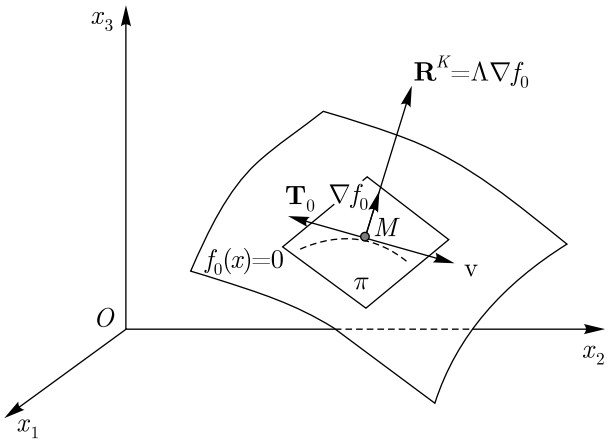

Рис. 2. Движение по стационарной неидеальной связи

нормали к поверхности, задаваемой уравнением (1.3), а вектор $\mathbf{T}_0$ лежит в касательной плоскости π к этой поверхности. Особенно наглядно это демонстрируется для стационарной связи (см. рис. 2, пунктиром изображена траектория точки, лежащая на поверхности $f(x) = 0$. Отметим, что на рисунке вектор $\mathbf{N}$ помечен как $\mathbf{R}^K$, именно такое обозначение будет применяться в данной главе ниже). В частности, если уравнением стационарной голономной связи задается некоторая материальная поверхность, по которой должна двигаться точка M, то при идеально отполированной поверхности имеем $\mathbf{T}_0 = 0$. В противном случае приходится указывать правило формирования вектора $\mathbf{T}_0$, например задавать закон трения Кулона (подробнее об этом см. в следующем параграфе).

§ 2. Движение материальной точки по поверхности и линии

Движение по поверхности. Пусть точка вынуждена находиться на поверхности, задаваемой уравнением (1.3). Согласно предыдущему сила реакции $\mathbf{R}$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{R} = \Lambda\, \boldsymbol{\nabla} f + \mathbf{T}_0 = \mathbf{N} + \mathbf{T}_0\,, \quad \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathbf{T}_0 = 0\,, \tag{2.1}$$

лономных связях в общем случае // Вестн. Ленингр. ун-та. 1972. № 1. С. 124–132). Этот вектор можно назвать *обобщенным оператором Гамильтона*, так как из него в виде частного случая получается классический оператор Гамильтона (оператор «набла»). Понятие обобщенного оператора Гамильтона легко распространяется на неголономные связи любого порядка.

и, следовательно, уравнение движения точки таково:

$$m\,\mathbf{w} = \mathbf{F} + \Lambda\,\boldsymbol{\nabla} f + \mathbf{T}_0\,, \tag{2.2}$$

причем векторы $\mathbf{T}_0$ и $\boldsymbol{\nabla} f$ перпендикулярны.

Если поверхность (1.3) неподвижна и материальна, то при движении по ней всегда возникает сила трения, направленная в сторону, противоположную направлению вектора скорости. Это и есть сила $\mathbf{T}_0$ (см. рис. 2). Опыт показывает, что сила трения скольжения пропорциональна величине нормальной составляющей $\mathbf{N} = \Lambda\,\boldsymbol{\nabla} f$ вектора реакции связи, то есть $|\mathbf{T}_0| = k\,|\mathbf{N}| = k\,|\Lambda\,\boldsymbol{\nabla} f|$, где k — множитель пропорциональности, называемый *коэффициентом динамического трения*. Этот коэффициент существенно зависит от материала скользящих относительно друг друга поверхностей, от обработки этих поверхностей и в меньшей мере от скорости. Пропорциональность силы трения величине нормального давления была установлена Кулоном. Это является содержанием *закона трения Кулона*.

На основании сказанного уравнение (2.2) при стационарной связи можно записать в виде

$$m\,\mathbf{w} = \mathbf{F} + \Lambda\,\boldsymbol{\nabla} f - k\,|\Lambda\,\boldsymbol{\nabla} f|\,\mathbf{v}/|\mathbf{v}|\,, \tag{2.3}$$

или

$$m\,\mathbf{w} = \mathbf{F} + N_{n_1}\,\mathbf{n}_1 - k\,|\mathbf{N}|\,\mathbf{v}/|\mathbf{v}|\,, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{n}_1$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности. Предполагается, что вектор $\mathbf{n}_1$ направлен перпендикулярно касательной плоскости в ту сторону, где расположена близлежащая часть поверхности.

Уравнение (2.3) в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$m\,\ddot{x}_i = X_i + \Lambda\,\frac{\partial f}{\partial x_i} - k\,|\Lambda\,\boldsymbol{\nabla} f|\,\frac{\dot{x}_i}{|\mathbf{v}|}\,, \quad i = \overline{1,3}\,. \tag{2.5}$$

Для получения системы четырех уравнений, позволяющей определить неизвестные x_1, x_2, x_3 и Λ, к этим уравнениям следует добавить уравнение связи $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Дифференциальные уравнения движения в форме (2.5) неудобны тем, что неизвестная величина Λ входит во все три уравнения. Более удобную форму получаем, записывая уравнение (2.4) в проекциях на направления ортов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{p} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}_1$, где $\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательной к траектории точки.

При этом имеем

$$
\begin{aligned}
m\,\ddot{s} &= F_\tau - k\,|N_{n_1}|\,\dot{s}/|\mathbf{v}|\,,\\
\frac{m\,v^2}{\rho}\,\cos\theta &= F_{n_1} + N_{n_1}\,,\\
\frac{m\,v^2}{\rho}\,\sin\theta &= F_p\,,
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

где s — длина дуги, ρ — радиус кривизны траектории, θ — угол между единичной нормалью $\mathbf{n}_1$ к поверхности и главной нормалью $\mathbf{n}$ траектории.

Если $\mathbf{F} = 0$, то уравнения (2.6) приобретают вид

$$
\begin{aligned}
m\,\ddot{s} &= -k\,|N_{n_1}|\,\dot{s}/|\mathbf{v}|\,,\\
\frac{m\,v^2}{\rho}\,\cos\theta &= N_{n_1}\,,\\
\frac{m\,v^2}{\rho}\,\sin\theta &= 0\,.
\end{aligned}
$$

В силу указанного выше выбора направления вектора $\mathbf{n}_1$ угол θ меньше $\pi/2$, поэтому в этих уравнениях $\theta = 0$. Следовательно они запишутся следующим образом:

$$
m\,\ddot{s} = -k\,|N_{n_1}|\,\dot{s}/|\mathbf{v}|\,, \quad m\,v^2/\rho = N_{n_1}\,.
$$

Кривая, проведенная на поверхности и обладающая тем свойством, что во всех точках ее главная нормаль $\mathbf{n}$ совпадает с нормалью к поверхности $\mathbf{n}_1$, называется *геодезической линией*. Таким образом, при $\mathbf{F} = 0$ материальная точка движется по геодезической линии. В этом случае

$$
\ddot{s} = -k\,v^2/\rho\,.
$$

Обозначая $v = \dot{s}$ и учитывая, что

$$
\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\,\frac{dv}{ds}\,,
$$

получаем

$$
v\,\frac{dv}{ds} = \ddot{s} = -k\,\frac{v^2}{\rho}\,,
$$

откуда $dv/v = -k\,ds/\rho$, и, следовательно,

$$
\ln\frac{v}{v_0} = -k\int\limits_{s_0}^{s}\frac{ds}{\rho(s)} = -k\,\psi(s)\,,
$$

то есть $v = v_0\, e^{-k\,\psi(s)}$. Из этой формулы видно, что скорость точки при движении уменьшается.

Если связь (1.3) осуществлена без трения, то предыдущие формулы при $\mathbf{F} = 0$ принимают вид

$$m\,\dot{v} = 0\,, \quad v = \mathrm{const}\,, \quad N_{n_1} = m\,v^2/\rho\,.$$

Рассмотрим теперь движение по неподвижной поверхности без трения в криволинейных координатах. Выберем на поверхности, которую будем считать гладкой, то есть имеющей непрерывно вращающуюся касательную плоскость, систему ортогональных гауссовых координатных линий q^1, q^2. Третью координату q^3 предполагаем заданной в виде $q^3 = f(x_1, x_2, x_3)$, где $f(x_1, x_2, x_3)$ — функция, приравнивание которой к нулю дает уравнение поверхности. Иначе говоря, будем предполагать, что точка движется по координатной поверхности. Для простоты ограничимся рассмотрением частного случая, когда основной базис $\{\mathbf{e}_i\}$, соответствующий выбранной системе криволинейных координат, является ортогональным во всех точках поверхности, по которой происходит движение.

Если точка свободна, то уравнения ее движения (4.7) главы IV с учетом ортогональности и стационарности базиса имеют вид

$$m\,(\mathrm{g}_{\rho\rho}\,\ddot{q}^{\,\rho} + \Gamma_{\rho,\sigma\tau}\,\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau}) = Q_{\rho}\,, \quad \rho, \sigma, \tau = \overline{1,3}\,. \tag{2.7}$$

Движение, подчиненное условиям $q^3 = 0$, $\dot{q}^3 = 0$, $\ddot{q}^{\,3} = 0$, можно найти из первых двух уравнений системы (2.7), полагая в них $q^3 \equiv 0$, то есть из уравнений

$$\begin{gathered} m\,(\mathrm{g}_{11}\,\ddot{q}^{\,1} + \Gamma_{1,\sigma\tau}\,\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau}) = Q_1\,, \\ m\,(\mathrm{g}_{22}\,\ddot{q}^{\,2} + \Gamma_{2,\sigma\tau}\,\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau}) = Q_2\,, \quad \sigma, \tau = 1, 2\,. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Интегрирование этих уравнений дает решение

$$q^{\sigma} = q^{\sigma}(t, C_1, C_2, C_3, C_4)\,, \quad \sigma = 1, 2\,,$$

которое позволяет вычислить выражения $\Gamma_{3,\sigma\tau}\,\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau}$, $\sigma, \tau = 1, 2$, входящие в левую часть третьего уравнения системы (2.7). Оно может быть и не равно $Q_3 = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_3$. В этом случае третье уравнение следует записать в виде

$$m\,\Gamma_{3,\sigma\tau}\,\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau} - Q_3 = Q_{N_3}\,, \tag{2.9}$$

где Q_{N_3} представляет собой обобщенную реакцию.

Покажем, что обобщенная реакция Q_{N_3} равна множителю Λ, входящему в исходное уравнение (2.2). Действительно, так как по предположению $\mathbf{T}_0 = 0$, то из уравнений (2.2) и (2.9) следует, что

$$Q_{N_3} = \Lambda\, \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathbf{e}_3 = \Lambda\, \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathbf{e}_3^0\, H_3\,.$$

Проекция градиента на направление $\mathbf{e}_3^0$ есть производная по этому направлению, то есть

$$\boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathbf{e}_3^0 = \frac{\partial f}{\partial s_3} = \frac{1}{H_3}\,\frac{\partial f}{\partial q^3}\,.$$

Принимая во внимание, что $f(x_1, x_2, x_3) = q^3$, получаем $Q_{N_3} = \Lambda$, и формула (2.9) может быть записана в виде

$$\Lambda = m\,\Gamma_{3,\sigma\tau}\,\dot{q}^\sigma \dot{q}^\tau - Q_3\,, \quad \sigma = 1, 2. \tag{2.10}$$

Формулы (2.8) представляют собой дифференциальные уравнения движения материальной точки по идеально отполированной поверхности, а формула (2.10) определяет обобщенную реакцию Λ, обеспечивающую это движение.

Таким образом, движение точки по удерживающей поверхности определяется двумя независимыми координатами q^1, q^2. Поэтому говорят, что данная точка имеет две степени свободы.

Если считать, что $\mathbf{T}_0 \neq 0$, то для определенности задачи следует задать физическую зависимость $\mathbf{T}_0 = -k\,|\mathbf{N}|\,\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Наличие этой силы приводит к появлению в уравнениях (2.8) обобщенных сил

$$Q_{T_0 1} = \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = -k\,|\Lambda\, \boldsymbol{\nabla} f|\,\mathbf{v}/|\mathbf{v}| \cdot \mathbf{e}_1\,,$$
$$Q_{T_0 2} = \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{e}_2 = -k\,|\Lambda\, \boldsymbol{\nabla} f|\,\mathbf{v}/|\mathbf{v}| \cdot \mathbf{e}_2\,.$$

Формула (2.10), однако, не изменяется, и ее можно использовать для исключения Λ.

Выше было показано, что при $\mathbf{F} = 0$ и $\mathbf{T}_0 = 0$ точка движется по геодезической линии с постоянной скоростью. Фактически же, как следует из уравнений (2.6), для получения движения по геодезической линии достаточно полагать равной нулю не всю силу $\mathbf{F}$, а потребовать обращения в нуль лишь ее составляющей, лежащей в касательной плоскости к поверхности.

При использовании криволинейных координат, если сила $\mathbf{F}$ действует лишь по нормали к поверхности связи, имеем

$$Q_1 = 0\,, \quad Q_2 = 0\,, \quad \mathbf{F} = Q_3\,\mathbf{e}^3\,.$$

Отсюда следует, что дифференциальные уравнения геодезических линий можно получить из (2.8), полагая в них $Q_1 = 0,\ Q_2 = 0$:

$$\mathrm{g}_{11}\,\ddot{q}^{\,1} + \Gamma_{1,\sigma\tau}\,\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau} = 0\,,$$
$$\mathrm{g}_{22}\,\ddot{q}^{\,2} + \Gamma_{2,\sigma\tau}\,\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau} = 0\,, \quad \sigma,\tau = 1,2\,.$$

Именно эти уравнения выводятся в дифференциальной геометрии для определения геодезических линий в параметрической форме.

Движение по линии. Если заданы две поверхности, представляемые уравнениями

$$f^{\varkappa}(t, x_1, x_2, x_3) = 0\,, \quad \varkappa = 1,2, \tag{2.11}$$

и точка должна находиться на линии их пересечения, то, рассуждая, как и ранее, получаем

$$\begin{aligned} \varphi^{\varkappa} &= \dot{f}^{\varkappa}(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial x_\alpha}\,\dot{x}_\alpha = \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} f\cdot\mathbf{v} = 0\,, \\ \dot{\varphi}^{\varkappa} &= \frac{\partial \varphi^{\varkappa}}{\partial x_\alpha}\,\dot{x}_\alpha + \frac{\partial \varphi^{\varkappa}}{\partial \dot{x}_i}\,\ddot{x}_i = \frac{\partial \varphi^{\varkappa}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\varphi^{\varkappa}\cdot\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa}\cdot\mathbf{w} = 0\,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

причем $\alpha = \overline{0,3},\ i = \overline{1,3},\ x_0 = t,\ \boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa} = \boldsymbol{\nabla} f^{\varkappa}$.

Дифференциальное уравнение движения по-прежнему имеет вид

$$m\,\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}\,. \tag{2.13}$$

Это соотношение позволяет исключить из выражений (2.12) для $\dot{\varphi}^{\varkappa}$ вектор $\mathbf{w}$ и записать их в виде

$$\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa} \equiv R^{\varkappa} = -\Big(m\frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial t} + m\boldsymbol{\nabla}\varphi^{\varkappa}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa}\Big)\,, \qquad \varkappa = 1,2.$$

Отсюда следует, что если вектор $\mathbf{R}$ записать как сумму

$$\mathbf{R} = \Lambda_{\varkappa}\boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa} + \mathbf{T}_0\,,$$

где $\mathbf{T}_0$ — некоторый неизвестный вектор, ортогональный векторам $\boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa} = \boldsymbol{\nabla} f^{\varkappa},\ \varkappa = 1,2$, то коэффициенты $\Lambda_{\varkappa}$ найдутся из системы уравнений

$$\Lambda_1|\boldsymbol{\nabla}'\varphi^1|^2 + \Lambda_2\boldsymbol{\nabla}'\varphi^1\cdot\boldsymbol{\nabla}'\varphi^2 = R^1\,,$$
$$\Lambda_1\boldsymbol{\nabla}'\varphi^2\cdot\boldsymbol{\nabla}'\varphi^1 + \Lambda_2|\boldsymbol{\nabla}'\varphi^2|^2 = R^2\,.$$

Таким образом, при неравенстве нулю определителя этой системы составляющие $\Lambda_{\varkappa}\boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa}$ вектора $\mathbf{R}$ однозначно определяются уравнениями связей и силой $\mathbf{F}$.

Линией пересечения касательных плоскостей к поверхностям $f^1 = 0$ и $f^2 = 0$ является прямая, касающаяся в рассматриваемой точке кривой, которая задается как пересечение этих поверхностей. Отсюда следует, что единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ к этой кривой перпендикулярен как вектору $\boldsymbol{\nabla} f^1$, так и вектору $\boldsymbol{\nabla} f^2$, поэтому составляющая $\mathbf{T}_0$ реакции $\mathbf{R}$ может быть представлена в виде $\mathbf{T}_0 = T_0\,\boldsymbol{\tau}$. Здесь T_0 имеет смысл проекции вектора $\mathbf{T}_0$ на выбранное направление вектора $\boldsymbol{\tau}$.

Если связи физически осуществлены так, что $\mathbf{T}_0 = 0$, то реакции полностью определяются только своими «градиентными» составляющими:

$$\mathbf{N}_1 = \Lambda_1\,\boldsymbol{\nabla} f^1\,, \quad \mathbf{N}_2 = \Lambda_2\,\boldsymbol{\nabla} f^2\,,$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 = \Lambda_1\,\boldsymbol{\nabla} f^1 + \Lambda_2\,\boldsymbol{\nabla} f^2\,.$$

Такие связи условились называть *идеальными*. Если связи не идеальны, то для решения задачи необходимо дополнительно задать физическую зависимость $\mathbf{T}_0$ прежде всего от $\mathbf{N}$.

Введенное выше определение идеальности голономных связей более четко можно сформулировать следующим образом. Голономная связь (1.3) является *идеальной*, если ее реакция не имеет составляющей, лежащей в касательной плоскости к поверхности, на которой может находиться точка в данный момент времени. Точно так же система голономных связей (2.11) является *идеальной*, если их реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ не имеют составляющих, направленных по касательной к кривой, на которой может находиться точка в данный момент времени. Если связи стационарны, то эта кривая совпадает с траекторией точки, в общем же случае она отличается от нее.

Отметим, что эти определения сформулированы в такой форме, чтобы в дальнейшем их легко можно было бы обобщить на случай изображающей точки, то есть на случай механической системы, состоящей из конечного числа материальных точек.

Уравнение (2.13) в декартовой системе координат при $\mathbf{T}_0 = 0$ записывается следующим образом:

$$m\,\ddot{x}_j = X_j + \Lambda_1\,\frac{\partial f^1}{\partial x_j} + \Lambda_2\,\frac{\partial f^2}{\partial x_j}\,, \quad j = \overline{1,3}\,.$$

Эти уравнения называются *уравнениями Лагранжа первого рода* для материальной точки. Добавляя к ним уравнения связей $f^1(t, x_1, x_2, x_3) = 0$, $f^2(t, x_1, x_2, x_3) = 0$, получаем пять уравнений для определения пяти неизвестных x_1, x_2, x_3, Λ_1, Λ_2.

В случае идеальных стационарных связей, когда траектория точки задается уравнениями связей, уравнение Ньютона (2.13) целесообразно задать в проекциях на оси натурального трехгранника $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. При этом

имеем

$$m\,\ddot{s} = F_\tau\,, \quad \frac{m\,v^2}{\rho} = F_n + N_n\,, \quad 0 = F_b + N_b\,. \tag{2.14}$$

Напомним, что вектор $\boldsymbol{\tau}$ направлен в сторону положительного отсчета дуговой координаты s. Интегрируя первое уравнение, не содержащее реакции $\mathbf{N}$, в результате определим функцию $v(t)$, что и позволит из двух следующих формул найти составляющие N_n и N_b вектора $\mathbf{N}$. Как указывалось в § 1 главы IV, уравнения (2.14) называются *уравнениями Эйлера.*

При рассмотрении движения точки по заданной линии могут быть использованы и криволинейные координаты. Пусть первая координата является параметром траектории, а другие две (в предположении стационарности связей) заданы в виде

$$q^2 = f^1(x_1, x_2, x_3)\,, \quad q^3 = f^2(x_1, x_2, x_3)\,.$$

Предположим для простоты, что основной базис данной системы координат является ортогональным во всех точках траектории. При этом, учитывая, что свободное движение в указанных координатах описывается уравнениями (2.7), при несвободном движении ($q^2 \equiv 0,\ q^3 \equiv 0$) будем иметь

$$\begin{gathered} m\,(\mathrm{g}_{11}\,\ddot{q}^{\,1} + \Gamma_{1,11}\,(\dot{q}^1)^2) = Q_1\,, \\ m\,\Gamma_{2,11}\,(\dot{q}^1)^2 - Q_2 = \Lambda_1\,, \\ m\,\Gamma_{3,11}\,(\dot{q}^1)^2 - Q_3 = \Lambda_2\,. \end{gathered}$$

Если координату q^1 принять равной длине дуги s, то $\mathrm{g}_{11} = 1$, $\Gamma_{1,11} = 0$. Поэтому уравнение движения приобретает вид

$$m\,\ddot{s} = F_\tau\,,$$

что можно было предвидеть заранее.

Математический маятник. Будем называть *круговым математическим маятником* тяжелую точку, которая движется в вертикальной плоскости по окружности. Такое движение, в частности, будет совершать груз с массой m, подвешенный на невесомом нерастяжимом стержне длиной l. Уравнением связи является уравнение окружности $x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0$. Данную связь можно считать идеальной, так как ее реакция $\mathbf{R} = \mathbf{N}$ направлена по нормали к этой окружности и равна натяжению стержня. Уравнение движения в векторной форме в случае идеальной связи и при отсутствии сопротивления таково:

$$m\,\mathbf{w} = m\,\mathbf{g} + \mathbf{N}\,,$$

где $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, направленный вертикально вниз. Запишем это уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории, то

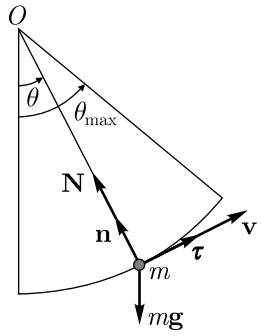

Рис. 3. Математический маятник

есть воспользуемся уравнениями Эйлера (2.14). Представляя длину дуги в виде $s = l\,\theta$, где θ — угол поворота маятника (см. рис. 3), и учитывая, что $\rho = l$, получаем

$$\ddot{\theta} = -\frac{\mathrm{g}}{l}\,\sin\theta\,, \quad m\,l\,\dot{\theta}^2 = -m\,\mathrm{g}\,\cos\theta + N\,. \tag{2.15}$$

Обозначая $\dot{\theta}$ через ω, имеем

$$\dot{\omega} = -n^2\,\sin\theta\,, \quad n^2 = \mathrm{g}/l\,,$$

или

$$\dot{\omega} = \omega\,\frac{d\omega}{d\theta} = -n^2\,\sin\theta\,,$$

поэтому

$$\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} = n^2\,(\cos\theta - \cos\theta_0)\,.$$

Математический маятник может совершать как круговые, так и колебательные движения. Ограничимся рассмотрением колебательных движений и будем считать, что $\theta_0 = \theta_{\max}$ и $\omega_0 = 0$. Тогда

$$\omega^2 = 2\,n^2\,(\cos\theta - \cos\theta_{\max})\,,$$

откуда

$$\dot{\theta} = \omega = \pm\,n\sqrt{2\,(\cos\theta - \cos\theta_{\max})}\,, \tag{2.16}$$

причем верхний знак соответствует движению, при котором угол θ возрастает, а нижний — движению, при котором он убывает. Предположим, что при $t = 0$ угол $\theta = 0$, а $\dot{\theta} > 0$. Тогда, интегрируя уравнение (2.16), получаем

$$\begin{aligned} nt = \int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2\,(\cos\theta - \cos\theta_{\max})}} &= \int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\theta_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = \\ &= \int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{2k\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta/2)}{k^2}}}\,, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где $k = \sin(\theta_{\max}/2) > \sin(\theta/2)$.

Переходя от переменной θ к переменной α по формуле

$$\sin(\theta/2)/k = \sin\alpha\,,$$

получаем

$$\frac{1}{2k}\,\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \cos\alpha\,d\alpha\,,$$

откуда

$$\frac{1}{2k}\,\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\theta = \cos\alpha\,d\alpha\,.$$

Теперь формула (2.17) принимает вид

$$\tau \equiv nt = \int\limits_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\,\sin^2\,\alpha}}\,. \tag{2.18}$$

Полученный интеграл есть эллиптический интеграл первого рода, который не выражается через элементарные функции. При фиксированном k и различных задаваемых значениях α можем путем вычисления интеграла (2.18) найти функцию $\tau = F(\alpha, k)$, а затем построить обратную ей функцию $\alpha = \psi(\tau, k)$, а также функцию

$$\sin\alpha = \sin\psi(\tau, k) = \mathrm{sn}(\tau, k)\,, \tag{2.19}$$

которая называется *эллиптической функцией Якоби*. Отметим, что она является периодической функцией τ.

Так как $\sin\frac{\theta}{2}/\sin\frac{\theta_{\max}}{2} = \sin\alpha$, то, принимая во внимание формулу (2.19), получаем закон движения маятника в форме

$$\sin\frac{\theta(t)}{2} = \sin\frac{\theta_{\max}}{2}\,\sin\alpha = \sin\frac{\theta_{\max}}{2}\,\mathrm{sn}(nt, k)\,. \tag{2.20}$$

При малых k можно приближенно принять $\sqrt{1-k^2\,\sin^2\,\alpha} \approx 1$ и, следовательно, согласно интегралу (2.18) $\tau \approx \alpha$, поэтому

$$\sin\alpha = \mathrm{sn}(\tau, k) \approx \sin\tau\,,$$

то есть при малых k эллиптическая функция $\mathrm{sn}(\tau, k)$ не зависит от k и совпадает с $\sin\tau$. В этом приближении формула (2.20) принимает вид

$$\theta(t) = \theta_{\max}\,\sin nt\,.$$

Последнее выражение можно было бы получить и непосредственно, записав уравнение движения для малых θ в виде

$$\ddot{\theta} + n^2\,\theta = 0\,.$$

Возвращаясь к общему случаю, отмечаем, что при $\theta = \theta_{\max}$

$$\sin\alpha = 1\,, \quad \alpha = \pi/2\,,$$

поэтому находим

$$nt_* = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\,\sin^2\alpha}} = \int\limits_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{k^2}{2}\,\sin^2\alpha + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,k^4\,\sin^4\alpha + \ldots\right] d\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\right].$$

Величина t_* есть время, в течение которого маятник движется из исходного положения ($\theta = 0$) в положение, при котором $\theta = \theta_{\max}$ и $\omega = 0$. После этого он начинает двигаться в обратном направлении, подчиняясь закону (2.16). Отсюда вытекает, что $t_* = T_*/4$, где

$$T_* = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{\mathrm{g}}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\right]$$

— период колебаний маятника. Так как $k = \sin(\theta_{\max}/2)$, то при малых $\theta_{\max}$ получаем

$$T_* \approx 2\,\pi\,\sqrt{l/\mathrm{g}}\,,$$

то есть период не зависит от $\theta_{\max}$. Это свойство носит название *таутохронности (изохронности) малых колебаний маятника.*

Циклоидальный маятник. Предположим, что тяжелая точка движется без сопротивления в вертикальной плоскости по циклоиде, обращенной вогнутостью вверх (см. рис. 4). В этом случае первое уравнение (2.14) запишется следующим образом:

$$m\,\ddot{s} = -m\mathrm{g}\sin\vartheta\,,$$

где s — длина дуги OM, а ϑ — угол, составленный касательной к центроиде с осью x. Уравнение циклоиды в декартовых координатах, как известно, имеет вид

$$x = a\,(\varphi + \sin\varphi)\,, \quad y = a\,(1 - \cos\varphi)\,, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi\,, \tag{2.21}$$

где φ — угол, на который поворачивается диаметр круга, катящегося без скольжения по неподвижной прямой AB, относительно начального вертикального положения, а a — радиус круга. Из уравнений (2.21) получаем

$$dx = a\,(1 + \cos\varphi)\,d\varphi\,, \quad dy = a\,\sin\varphi\,d\varphi\,, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi\,. \tag{2.22}$$

Тогда

$$ds = \pm\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2a\,\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\,,$$

$$s = 4a\,\sin\frac{\varphi}{2} = \pm\,4a\,\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \pm\,\sqrt{8ay}\,, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi\,.$$

Кроме того, из уравнений (2.22) имеем

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = dy/dx = \mathrm{tg}(\varphi/2)\,, \quad \vartheta = \varphi/2\,,$$

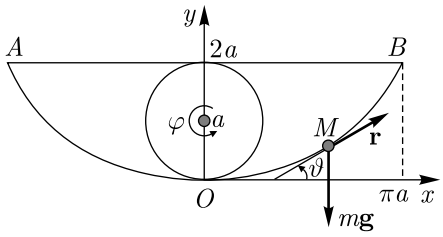

Рис. 4. Циклоидальный маятник

а следовательно

$$ds = 4a\,\cos\vartheta\,d\vartheta = l_0\,\cos\vartheta\,d\vartheta\,, \quad l_0 = 4a\,,$$
$$\rho = ds/d\vartheta = 4a\,\cos\vartheta = l_0\,\cos\vartheta\,,$$
$$s = 4a\,\sin\vartheta = l_0\,\sin\vartheta\,.$$

Здесь ρ — радиус кривизны циклоиды, а l_0 — его максимальное значение. На основании сказанного уравнение движения принимает вид

$$\ddot{s} + \frac{\mathrm{g}}{l_0}\,s = 0\,.$$

Интегрируя, получаем

$$s = C_1\,\cos nt + C_2\,\sin nt\,, \quad n = \sqrt{\mathrm{g}/l_0}\,.$$

Пусть начальные условия таковы: при $t = 0$ $\quad s(0) = s_0 = 0,\ \dot{s}(0) = v_0 \neq 0$. Тогда

$$s = \frac{v_0}{n}\,\sin nt\,, \quad \dot{s} = v_0\,\cos nt\,.$$

При движении точки M по дуге OB пройденный путь s и угол ϑ увеличиваются, а скорость $v = \dot{s}$ уменьшается. В некоторой точке, которой соответствуют угол $\vartheta_{\max} < \pi/2$ и момент t_*, скорость обращается в нуль. Для такой точки имеем

$$t = t_* = \pi/(2n)\,, \quad s = s_{\max} = v_0/n\,, \quad v = 0\,,$$
$$\sin\vartheta_{\max} = s_{\max}/l_0 = v_0/(nl_0)\,.$$

Отсюда видно, что для того, чтобы $\vartheta_{\max}$ было меньше $\pi/2$, необходимо, чтобы выполнялось $v_0 < nl_0 = l_0\,\sqrt{\mathrm{g}/l_0} = \sqrt{\mathrm{g}l_0}$.

Итак, для циклоидального маятника окончательно получаем

$$s = s_{\max}\,\sin nt\,, \quad \sin\vartheta = \sin\vartheta_{\max}\,\sin nt\,.$$

Из последней формулы видно, что период колебаний циклоидального маятника не зависит от угла $\vartheta_{\max}$, и, следовательно, его движение строго таутохронно. Гюйгенс, выявивший это свойство, предложил способ осуществления колебаний

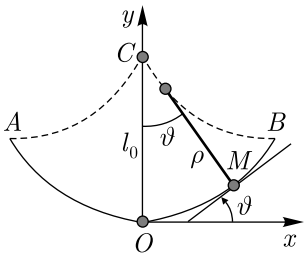

Рис. 5. Эволюта и эвольвента циклоидального маятника

циклоидального маятника. Он основан на том, что эволютой циклоиды является та же циклоида, сдвинутая вдоль оси x относительно эвольвенты на половину длины AB и поднятая вверх на высоту $2a$ (рис. 5). Поэтому, если нить длиной l_0 закрепить в точке C возврата ветвей циклоиды-эволюты, а на другом ее конце подвесить материальную точку, то при качании маятника нить будет огибать ветви эволюты, а материальная точка будет двигаться по циклоиде-эвольвенте с теми же параметрами. Натяжение нити при этом имеет величину

$$N = mg\,\cos\vartheta + \frac{mv^2}{\rho} = m\left(g\cos\vartheta + \frac{v_0^2\,\cos^2 nt}{l_0\cos\vartheta}\right).$$

Сферический маятник. Будем называть *сферическим маятником* тяжелую точку, которая вынуждена двигаться по сфере. Приближенно такое движение можно реализовать, взяв стержень, один конец которого закреплен неподвижно с помощью сферического шарнира, а другой (подвижный) несет на себе груз с массой m, во много раз превосходящей массу стержня, и размерами, весьма малыми по сравнению с длиной стержня l.

Исследование удобно проводить в сферических координатах $r,\ \theta,\ \psi$ (рис. 6), которые связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\psi\,,\quad y = r\,\sin\theta\,\sin\psi\,,\quad z = r\,\cos\theta\,. \tag{2.23}$$

Углы $\theta = q^1$ и $\psi = q^2$ являются свободными переменными, а величина $r = q^3$ подчинена условию $q^3 = l$, $\dot q^3 = \ddot q^3 = 0$. Базисные векторы $\mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_\psi,\ \mathbf{e}_r$ ортогональны, а связь является идеальной, так как ее реакция (натяжение стержня) направлена по нормали к поверхности сферы с радиусом l. Поэтому в данном случае можно воспользоваться уравнениями (2.8). Кинетическая энергия материальной точки в сферических координатах такова:

$$T = \frac{m}{2}\left(r^2\,\dot\theta^2 + (r^2\,\sin^2\theta)\,\dot\psi^2 + \dot r^2\right).$$

Отсюда следует, что уравнения (2.8) имеют вид

$$\begin{aligned} m\,(l^2\,\ddot\theta - l^2\,\sin\theta\,\cos\theta\,\dot\psi^2) &= Q_1\,,\\ m\,(l^2\,\sin^2\theta\,\ddot\psi + 2l^2\,\sin\theta\,\cos\theta\,\dot\theta\,\dot\psi) &= Q_2\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

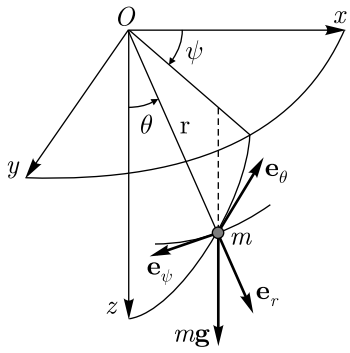

Рис. 6. Сферический маятник

Обобщенные силы Q_1 и Q_2 найдем по выражению для потенциальной энергии $\Pi = -mgz = -mgl\,\cos\theta$:

$$Q_1 = -\frac{\partial\Pi}{\partial q^1} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\theta} = -mgl\,\sin\theta\,, \quad Q_2 = -\frac{\partial\Pi}{\partial q^2} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = 0\,.$$

Подставив эти соотношения в уравнения (2.24), получим

$$\begin{gathered} l\,(\,\ddot\theta - \dot\psi^2\,\sin\theta\,\cos\theta\,) = -\mathrm{g}\,\sin\theta\,, \\ \ddot\psi\,\sin\theta + 2\dot\psi\dot\theta\,\cos\theta = 0\,. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Второе уравнение интегрируется, что видно, если переписать его в виде

$$\frac{d\dot\psi}{\dot\psi} = -2\,\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}\,,$$

и, следовательно,

$$\dot\psi\,\sin^2\theta = C = \mathrm{const} = \omega_0\,\sin^2\theta_0\,, \quad \text{где} \quad \omega_0 = \dot\psi\big|_{t=0}\,. \tag{2.26}$$

Это выражение представляет собой интеграл моментов относительно оси z. Исключив с его помощью $\dot\psi$ из первого уравнения системы (2.25), получим

$$\ddot\theta - C^2\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{\mathrm{g}}{l}\,\sin\theta = 0\,, \tag{2.27}$$

откуда

$$\dot\theta\,d\dot\theta - C^2\,\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin^3\theta} + \frac{\mathrm{g}}{l}\,\sin\theta\,d\theta = 0\,.$$

Интегрируя, имеем

$$\dot\theta^2 + \frac{C^2}{\sin^2\theta} - \frac{2\mathrm{g}}{l}\,\cos\theta = C'\,, \tag{2.28}$$

что является интегралом энергии, который можно было бы получить и непосредственно.

Введем обозначение $\cos\theta = u$. Тогда $\dot{u} = -\dot{\theta}\sin\theta$, и уравнение (2.28) можно представить в виде

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2\mathrm{g}}{l}\,u + C'\right)(1-u^2) - C^2\,, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dt} = \pm\sqrt{F(u)}\,,$$

где $F(u) = ((2\mathrm{g}/l)\,u + C')(1-u^2) - C^2$ — полином третьей степени. Полагая $t_0 = 0$, имеем

$$t = \pm\int\limits_{u_0}^{u} du/\sqrt{F(u)}\,. \tag{2.29}$$

Из курса математического анализа известно, что интегралы этого вида не выражаются, вообще говоря, через элементарные функции и приводятся к эллиптическим интегралам.

Рассмотрим теперь уравнение (2.26), которое перепишем в виде

$$(1-u^2)\,d\psi = C\,dt\,.$$

Используя формулу (2.29), имеем

$$(1-u^2)\,d\psi = \pm C\,\frac{du}{\sqrt{F(u)}}\,,$$

откуда следует, что

$$\psi = \pm\int\limits_{u_0}^{u} \frac{C\,du}{(1-u^2)\sqrt{F(u)}} + \psi_0\,.$$

Задав начальные условия, можем найти постоянные C' и C, затем, обратив эллиптические интегралы, найти u и ψ как функции времени.

Для более наглядного представления поведения сферического маятника зададим начальные условия в наиболее простой, но достаточно общей форме, охватывающей все принципиально возможные случаи движения маятника.

Начальное значение угла ψ зависит от выбора направления оси Ox. Так как этот выбор не имеет в данной задаче особого значения, то, не умаляя общности рассуждений, можно считать, что при $t = t_0 = 0$ угол $\psi = \psi_0 = 0$.

Закон изменения угла ψ во времени определяется интегралом моментов (2.26). Если $\omega_0 = 0$, то и $C = 0$, а это означает, что $\dot{\psi} = 0$ во все последующие моменты, так как $\sin^2\theta = 0$ при всех $t > 0$ только в случае покоя маятника. Таким образом, при $\omega_0 = 0$ сферический маятник вырождается в математический.

Из уравнения (2.26) следует, что величина угла $\psi(t)$ монотонно возрастает, если $\omega_0 > 0$, и монотонно убывает, если $\omega_0 < 0$.

Интеграл моментов (2.26) позволяет сделать также важное заключение и относительно характера изменения угла θ: если $C \neq 0$, то и $\sin^2\theta \neq 0$ во все время движения. Отсюда следует, что собственно сферический маятник при любых

начальных условиях не может пройти ни через крайнее нижнее положение на сфере, соответствующее $\theta = 0$, ни через крайнее верхнее ($\theta = \pi$). Более того, так как на основании физических соображений угловая скорость $\dot{\psi}(t) \neq 0$ может принимать только конечные значения с одним знаком, то из интеграла (2.26) можно сделать вывод, что изменение угла θ возможно только в некотором интервале

$$0 \neq \theta_{\min} \leqslant \theta \leqslant \theta_{\max} \neq \pi\,.$$

Рассмотрим координату $z = l\cos\theta$ сферического маятника. Изменение величины z в общем случае имеет колебательный характер. Предположим, что в момент, с которого мы начинаем рассматривать движение, то есть при $t = t_0 = 0$, координата z достигает максимального или минимального значения, равного z_0. При этом $\dot{z}_0 = -l\dot{\theta}_0 \sin\theta_0 = 0$. Поскольку $\sin\theta_0 \neq 0$, то это означает, что $\dot{\theta}_0 = 0$.

Интеграл энергии (2.28) при выбранных начальных условиях может быть представлен в виде

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\mathrm{g}}{l}\,(\cos\theta_0 - \cos\theta)\left[\frac{\omega_0^2\, l\sin^2\theta_0}{2\mathrm{g}\sin^2\theta}\,(\cos\theta_0 + \cos\theta) - 1\right].$$

Из этой формулы видно, что угловая скорость $\dot{\theta}$ может обращаться в нуль при $\theta = \theta_0$, а также при обращении в нуль выражения, стоящего в квадратных скобках. Последнее приводит к квадратному уравнению относительно $\cos\theta$:

$$f(\cos\theta) \equiv \cos^2\theta + \frac{\omega_0^2\, l\sin^2\theta_0}{2\mathrm{g}}\,\cos\theta - \left(1 - \frac{\omega_0^2\, l\sin^2\theta_0\cos\theta_0}{2\mathrm{g}}\right) = 0\,.$$

Обозначая $\cos\theta = u,\ \cos\theta_0 = u_0,\ \omega_0^2\, l\sin^2\theta_0/(4\mathrm{g}) = \alpha$, представляем его в виде

$$u^2 + 2\alpha u - 1 + 2\alpha u_0 = 0\,.$$

Корни этого уравнения $u_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha u_0 + 1}$ вещественны, так как из условий $-1 < u_0 < 1$ вытекают неравенства

$$0 \leqslant (\alpha - 1)^2 < (\alpha - u_0)^2 < \alpha^2 - 2\alpha u_0 + 1 < (\alpha + 1)^2\,.$$

Отсюда также следует, что

$$-u_0 = -\alpha + \alpha - u_0 < u_1 < -\alpha + \alpha + 1 = 1\,, \quad |u_2| > \alpha + |\alpha - 1|\,.$$

Пусть $\alpha > 1$. Тогда $|\alpha - 1| = \alpha - 1$, и $|u_2| > 2\alpha - 1 > 1$. Если же $\alpha \leqslant 1$, то $|\alpha - 1| = 1 - \alpha$ и

$$|u_2| > \alpha + 1 - \alpha = 1\,.$$

Таким образом,

$$-u_0 < u_1 < 1\,, \tag{2.30}$$

а $|u_2| > 1$ при всех значениях α, поэтому корень $u_2 = \cos\theta_2$ физического смысла не имеет.

Из сказанного следует, что груз движется по сфере, оставаясь между двумя параллельными горизонтальными кругами с радиусами $l\sin\theta_0$ и $l\sin\theta_1$. При достижении этих кругов скорость $\dot\theta$ обращается в нуль. Отметим, что средняя горизонтальная плоскость $z = l\,(u_0 + u_1)/2$ всегда проходит ниже центра сферы O, так как согласно неравенству (2.30) $u_0 + u_1 > 0$.

Плоскость $z = lu_0$ лежит ниже плоскости $z = lu_1$, если $u_0 > u_1$, то есть если $u_0 + \alpha > \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha u_0 + 1}$. Это неравенство выполняется при условии, что

$$\omega_0^2\, l\cos\theta_0 > \mathrm{g}\,. \tag{2.31}$$

Данное условие возможно только при $\cos\theta_0 > 0$, то есть при $0 < \theta_0 < \pi/2$.

Если $\cos\theta_0 < 0$, то при любой начальной угловой скорости ω_0 имеем

$$\omega_0^2\, l\cos\theta_0 < \mathrm{g}\,, \tag{2.32}$$

и, следовательно, плоскость $z = lu_0$ проходит над центром сферы, а плоскость $z = lu_1$ — под ее центром.

При $\cos\theta_0 > 0$, если угловая скорость ω_0 такова, что выполняется неравенство (2.31), нижним является круг с радиусом $l\sin\theta_0$, а если справедливо неравенство (2.32), то нижним становится круг с радиусом $l\sin\theta_1$. В частном случае, когда

$$\omega_0^2\, l\cos\theta_0 = \mathrm{g}\,, \tag{2.33}$$

круги сливаются, масса m движется по окружности с постоянной скоростью $v_0 = \omega_0\, l\sin\theta_0$, а стержень описывает конус. Получающийся при этом маятник называется *коническим*.

Время перехода с одного круга на другой выражается через интеграл (2.29), в котором верхний предел равен u_1. Интеграл берется со знаком плюс, если $u_1 > u_0$, и со знаком минус, если $u_1 < u_0$. Чтобы получить период T_* колебаний маятника вдоль вертикали, следует это время удвоить. Учитывая, что корни уравнения $f(u) = 0$ являются и корнями полинома $F(u) = 0$, получаем

$$T_* = \pm 2\sqrt{\frac{l}{2\mathrm{g}}}\int\limits_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{(u_0 - u)(u - u_1)(u - u_2)}}\,.$$

Данный интеграл выражается через эллиптический интеграл первого рода. Таким образом, в общем случае выражение для периода оказывается достаточно сложным.

Рассмотрим теперь случай близких значений θ_0 и θ_1 и при тех же начальных условиях будем искать решение в виде

$$\theta = \theta_0 + \widetilde\theta\,,$$

где $\widetilde\theta$ мало по сравнению с θ_0 и можно считать, что

$$\sin\theta \approx \sin\theta_0 + \widetilde\theta\cos\theta_0\,, \quad \cos\theta \approx \cos\theta_0 - \widetilde\theta\sin\theta_0\,.$$

Подставляя эти величины в дифференциальное уравнение (2.27), после отбрасывания величин, содержащих $\widetilde{\theta}$ в степени выше первой, получаем

$$\ddot{\widetilde{\theta}} + k^2\,\widetilde{\theta} + H = 0\,, \tag{2.34}$$

где

$$k^2 = \omega_0^2\,(3\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0) + \mathrm{g}\cos\theta_0/l\,, \tag{2.35}$$

$$H = \sin\theta_0\,(\mathrm{g} - \omega_0^2\,l\cos\theta_0)/l\,. \tag{2.36}$$

Из уравнения (2.34) имеем

$$\widetilde{\theta} = A\cos kt + B\sin kt - H/k^2\,. \tag{2.37}$$

При начальных условиях $(\widetilde{\theta})_{t=0} = 0$, $(\dot{\widetilde{\theta}})_{t=0} = 0$, соответствующих $\dot{\theta} = 0$ при $\theta = \theta_0$, получаем $A = H/k^2$, $B = 0$, и, следовательно,

$$\widetilde{\theta} = -\frac{H}{k^2}\,(1 - \cos kt) = -\frac{2H}{k^2}\,\sin^2\frac{kt}{2}\,,$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{2H}{k^2}\,\sin^2\frac{kt}{2} = \left(\theta_0 - \frac{H}{k^2}\right) + \frac{H}{k^2}\,\cos kt\,,$$

то есть маятник совершает малые колебания с периодом $2\pi/k$ и с амплитудой $\widetilde{A} = H/k^2$ около положения, характеризуемого углом $\theta_* = \theta_0 - H/k^2$. Плоскость качаний маятника при этом вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_0\,\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta} = \omega_0\,(1 - 2\widetilde{\theta}\,\operatorname{ctg}\theta_0) = \omega_0 + \frac{4H\omega_0}{k^2}\,\operatorname{ctg}\theta_0\,\sin^2\frac{kt}{2}\,.$$

Проекцию траекторий на плоскость Oxy представляем уравнением, следующим из формул (2.23):

$$x^2 + y^2 = l^2\,\sin^2\theta = l^2\,\sin^2\theta_0\,(1 + 2\,\widetilde{\theta}\,\operatorname{ctg}\theta_0) = l^2\,\sin^2\theta_0\left(1 - \frac{4H}{k^2}\,\operatorname{ctg}\theta_0\,\sin^2\frac{kt}{2}\right).$$

Решение (2.37) может быть использовано также для исследования движения сферического маятника, порождаемого движением конического, которому при $t = t_0 = 0$ сообщается незначительная скорость $\dot{\theta} = \dot{\widetilde{\theta}}_0$. Так как при этом выполняется соотношение (2.33), то согласно формуле (2.36) в данном случае $H = 0$, и решение (2.37), соответствующее начальным условиям $(\widetilde{\theta})_{t=0} = 0$, $(\dot{\widetilde{\theta}})_{t=0} = \dot{\widetilde{\theta}}_0$, таково:

$$\widetilde{\theta} = \frac{\dot{\widetilde{\theta}}_0}{k}\,\sin kt\,,$$

причем формулу (2.35) для круговой частоты с учетом соотношения (2.33) можно представить в виде

$$k^2 = \frac{\mathrm{g}}{l\cos\theta_0}\,(1 + 3\cos^2\theta_0) = \omega_0^2\,(1 + 3\cos^2\theta_0)\,.$$

Если угол θ_0 мал, то приближенно можно положить $\cos\theta_0 \approx 1$. При этом период обращения конического маятника $2\pi/\omega_0$ становится равным периоду T_1 малых колебаний математического маятника длиной l, то есть $T_1 = 2\pi\sqrt{l/g}$, а период T_2 малых вертикальных колебаний равен $T_2 = 2\pi/k = T_1/2$.

§ 3. Несвободное движение системы материальных точек. Несвободное движение изображающей точки. Уравнения Лагранжа

Несвободное движение изображающей точки. Если координаты и скорости точек механической системы помимо дифференциальных уравнений движения должны удовлетворять дополнительным равенствам или неравенствам вида

$$\varphi^{\varkappa}(t, x, \dot{x}) \geqslant 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,,$$

то такую систему будем называть *несвободной*. Здесь под $x = (x_1, \ldots, x_{3n})$ понимаем совокупность координат n точек системы, которая была введена в § 1 главы V.

Очевидно, что отдельная точка, принадлежащая несвободной системе, является несвободной, поэтому дифференциальное уравнение ее движения на основании рассуждений из § 1 должны быть записаны в виде

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}'_\nu\,, \tag{3.1}$$

где ν — номер точки, $\nu = \overline{1, n}$, $\mathbf{F}_\nu$ — равнодействующая всех внешних и внутренних сил, приложенных к точке, $\mathbf{R}'_\nu$ — равнодействующая реакций связей для данной точки. Вводя обозначения

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}_\nu = x_{3\nu-2}\mathbf{i}_1 + x_{3\nu-1}\mathbf{i}_2 + x_{3\nu}\mathbf{i}_3\,,\\
\mathbf{F}_\nu = X_{3\nu-2}\mathbf{i}_1 + X_{3\nu-1}\mathbf{i}_2 + X_{3\nu}\mathbf{i}_3\,,\\
\mathbf{R}'_\nu = R'_{3\nu-2}\mathbf{i}_1 + R'_{3\nu-1}\mathbf{i}_2 + R'_{3\nu}\mathbf{i}_3\,,\\
m_\mu = m_\nu \quad \text{при} \quad \mu = 3\nu - 2\,,\, 3\nu - 1\,,\, 3\nu\,,
\end{gathered}$$

представляем систему (3.1) в виде $3n$ скалярных уравнений:

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu + R'_\mu\,, \quad \mu = \overline{1, 3n}\,. \tag{3.2}$$

Чтобы воспользоваться при анализе несвободного движения системы аналитическим аппаратом, развитым применительно к несвободному движению одной точки, введем в $3n$-мерном евклидовом пространстве декартовую систему координат $Oy_1 \ldots y_{3n}$ с ортами $\mathbf{j}_1, \ldots, \mathbf{j}_{3n}$. В этой декартовой

системе можно ввести изображающую точку с координатами

$$y_\mu = \sqrt{\widetilde{m}_\mu}\, x_\mu\,, \quad \widetilde{m}_\mu = \frac{m_\mu}{M}\,, \quad M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \equiv \frac{1}{3}\sum_{\mu=1}^{3n} m_\mu\,, \qquad \mu = \overline{1,3n}\,.$$

Сопоставив силам $\mathbf{F}_\nu$ и реакциям $\mathbf{R}'_\nu$ многомерные векторы

$$\mathbf{Y} = Y_\mu\,\mathbf{j}_\mu\,, \quad Y_\mu = X_\mu/\sqrt{\widetilde{m}_\mu}\,, \quad \mathbf{R} = R_\mu\,\mathbf{j}_\mu\,, \quad R_\mu = R'_\mu/\sqrt{\widetilde{m}_\mu}\,,$$
$$\mu = \overline{1,3n}\,,$$

получим возможность записать систему скалярных уравнений (3.2) в виде одного векторного уравнения:

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}\,, \quad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{y}_\mu\,\mathbf{j}_\mu\,. \tag{3.3}$$

Если связи выражаются уравнениями

$$\varphi^\varkappa(t, y, \dot{y}) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad k < 3n\,, \tag{3.4}$$

то, рассуждая, как и в случае одной точки, получаем

$$\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa\,\boldsymbol{\nabla}'\varphi^\varkappa + \mathbf{T}_0 = \mathbf{N} + \mathbf{T}_0\,,$$

где $\boldsymbol{\nabla}' = \frac{\partial}{\partial \dot{y}_\mu}\,\mathbf{j}_\mu$, $\mathbf{N} = \Lambda_\varkappa\,\boldsymbol{\nabla}'\varphi^\varkappa$, $\mathbf{T}_0$ — произвольный вектор, ортогональный вектору $\mathbf{N}$. На основании сказанного уравнение (3.3) можно записать в виде

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{N} + \mathbf{T}_0\,. \tag{3.5}$$

Оно вместе с уравнениями связей (3.4) образует систему $3n + k$ скалярных дифференциальных уравнений, из которых нужно определить $3n + k$ неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_{3n}$, $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$.

Вектор $\mathbf{T}_0$ невозможно найти по виду уравнений связей. Для получения его следует дополнительно задать функциональную зависимость этого вектора, исходя из физической реализации связей. Наиболее простым случаем является случай, когда $\mathbf{T}_0 = 0$, которому соответствуют *идеальные связи*. Но физическая реализация таких связей не всегда возможна. Так, например, интегрируемые дифференциальные связи, реализуемые с помощью контакта, всегда обладают трением. Однако некоторые связи, встречающиеся в электромеханических системах, рассматриваются как идеальные.

Если связи голономны, то есть выражаются уравнениями $f^{\varkappa}(t,y)=0$, $\varkappa=\overline{1,k}$, то

$$\varphi^{\varkappa}\equiv\dot f^{\varkappa}=\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial t}+\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial y_\mu}\,\dot y_\mu\,,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial\dot y_\mu}=\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial y_\mu}\,,\quad \boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa}=\boldsymbol{\nabla}f^{\varkappa}\,,\quad \mathbf{N}=\Lambda_{\varkappa}\,\boldsymbol{\nabla}f^{\varkappa}\,.$$

Поэтому основное уравнение (3.5) принимает вид

$$M\mathbf{W}=\mathbf{Y}+\Lambda_{\varkappa}\,\boldsymbol{\nabla}f^{\varkappa}+\mathbf{T}_0\,. \tag{3.6}$$

Если связи идеальны, то $\mathbf{T}_0=0$. В этом случае трехмерные реакции $\mathbf{R}'_\nu$, которым соответствует многомерный вектор $\mathbf{R}=\mathbf{N}$, имеют составляющие

$$R'_{\nu j}\equiv R'_\mu=\sqrt{\widetilde m_\mu}\,R_\mu=\Lambda_{\varkappa}\sqrt{\widetilde m_\mu}\,\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial(\sqrt{\widetilde m_\mu}\,x_\mu)}=\Lambda_{\varkappa}\,\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial x_\mu}\,,$$
$$\mu=3(\nu-1)+j\,,\quad j=1,2,3,\quad \nu=\overline{1,n}\,,$$

или

$$R'_{\nu j}=\Lambda_{\varkappa}\,\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial x_{\nu j}}\,,\quad x_{\nu j}=x_\mu\,. \tag{3.7}$$

Пример 1. Важным примером голономной связи между двумя точками системы с номерами k и l является связь, которая задается условием, что расстояние s_{kl} между указанными точками меняется по заданному закону. Такая связь выражается уравнением

$$f(t,x)=(x_{k1}-x_{l1})^2+(x_{k2}-x_{l2})^2+(x_{k3}-x_{l3})^2-s^2_{kl}(t)=0\,. \tag{3.8}$$

Покажем, что эту связь можно считать идеальной, так как соответствующие ей реакции $\mathbf{R}'_\nu$ могут быть представлены в виде (3.7). Действительно, минимальные добавочные силы $\mathbf{R}'_k$ и $\mathbf{R}'_l$, которые следует прикладывать к массам m_k и m_l, чтобы удерживать их на заданном расстоянии, равны друг другу по величине, противоположны по направлению и действуют по прямой, соединяющей эти точки, то есть

$$\mathbf{R}'_k=-\mathbf{R}'_l=\Lambda_*\,(\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_l)\,, \tag{3.9}$$

где Λ_* — некоторая скалярная величина. Вместе с тем в соответствии с формулой (3.7) $R'_{\nu j}=\Lambda_{\varkappa}\,\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial x_{\nu j}}$, $j=1,2,3,$ и, следовательно, для связи, заданной уравнением (3.8), имеем

$$R'_{\nu j}=0\,,\quad \nu\neq k,l\,,$$
$$R'_{kj}=\Lambda\,\frac{\partial f}{\partial x_{kj}}=2\Lambda\,(x_{kj}-x_{lj})\,,$$
$$R'_{lj}=\Lambda\,\frac{\partial f}{\partial x_{lj}}=-2\Lambda\,(x_{kj}-x_{lj})\,,$$
$$j=1,2,3,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{R}'_k = -\mathbf{R}'_l = 2\Lambda\,(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)\,.$$

Сравнивая это выражение, являющееся следствием предположения идеальности связи, с выражением (3.9), которое было получено из условия минимальности добавочных сил, обеспечивающих выполнение уравнения связи, видим, что в данном случае предположение идеальности связи является физически оправданным.

Механическая система, расстояния между точками которой не изменяются, называется *жесткой*, или *неизменяемой*. В соответствии с результатами, полученными для двух произвольных точек системы, находящихся на заданном расстоянии относительно друг друга, заключаем, что предположение жесткости системы соответствует наложению идеальных связей.

Уравнения Лагранжа первого рода. Введение изображающей точки, как было показано, позволяет выразить трехмерные реакции $\mathbf{R}'_\nu$ через уравнения связей. При этом систему уравнений (3.2) для идеальных голономных связей с учетом выражений (3.7) записываем в виде

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f^\varkappa}{\partial x_\mu}\,, \quad \mu = \overline{1, 3n}\,. \tag{3.10}$$

Присоединяя к этой системе k уравнений связей $f^\varkappa(t, x) = 0$, получаем замкнутую систему уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{3n}$, $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$.

Для идеальных дифференциальных связей, задаваемых уравнениями (3.4), компоненты R'_μ реакций $\mathbf{R}'_\nu$ таковы:

$$R'_\mu = \sqrt{\widetilde{m}_\mu}\, R_\mu = \Lambda_\varkappa \sqrt{\widetilde{m}_\mu}\, \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial(\sqrt{\widetilde{m}_\mu}\, \dot{x}_\mu)} = \Lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \dot{x}_\mu}\,.$$

Поэтому в рассматриваемом случае уравнения (3.2) представляем в виде

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu + \Lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \dot{x}_\mu}\,, \quad \mu = \overline{1, 3n}\,. \tag{3.11}$$

Эти уравнения совместно с уравнениями связей (3.4) образуют замкнутую систему.

Системы уравнений (3.10) и (3.11) называются *уравнениями Лагранжа первого рода* соответственно для идеальных *голономных* и *неголономных систем*.

Важно отметить, что если функции $f^\varkappa$ нелинейно зависят от координат x_μ, то уравнения Лагранжа первого рода (3.10) удобно рассматривать

совместно с продифференцированными уравнениями связей

$$\varphi^{\varkappa}(t,x,\dot{x}) \equiv \dot{f}^{\varkappa}(t,x) = \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial t} + \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial x_{\mu}}\,\dot{x}_{\mu} = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Аналогично если функции $\varphi^{\varkappa}$ нелинейно зависят от скоростей, то к уравнениям (3.11) целесообразно присоединить соотношения

$$\psi^{\varkappa}(t,x,\dot{x},\ddot{x}) \equiv \dot{\varphi}^{\varkappa}(t,x,\dot{x}) = \frac{\partial \varphi^{\varkappa}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{\varkappa}}{\partial x_{\mu}}\,\dot{x}_{\mu} + \frac{\partial \varphi^{\varkappa}}{\partial \dot{x}_{\mu}}\,\ddot{x}_{\mu} = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Остановимся более подробно на случае, когда функции $\varphi^{\varkappa}$ линейно зависят от скоростей. Этот случай находит отражение во многих практических задачах. Он применим также к голономным связям, как линейно, так и нелинейно зависящим от координат.

Итак, предположим, что функции $\varphi^{\varkappa}$ имеют вид

$$\varphi^{\varkappa}(t,x,\dot{x}) \equiv a_{\mu}^{l+\varkappa}(t,x)\,\dot{x}_{\mu} + b^{l+\varkappa}(t,x) = 0\,, \quad l = 3n-k\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

При этом $\partial\varphi^{\varkappa}/\partial\dot{x}_{\mu} = a_{\mu}^{l+\varkappa}(t,x)$, и уравнения (3.11) принимают вид

$$m_{\mu}\ddot{x}_{\mu} = X_{\mu} + \Lambda_{\varkappa} a_{\mu}^{l+\varkappa}\,. \tag{3.12}$$

Здесь использование верхнего индекса $l+\varkappa$ связано с тем, что в дальнейшем это будет удобно.

Будем считать, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов $a_{\mu}^{l+\varkappa}$, равен k. Поэтому можно использовать k уравнений из системы (3.12) для исключения неизвестных $\Lambda_{\varkappa}$ из остальных ее уравнений. Уравнения, из которых исключены $\Lambda_{\varkappa}$, имеют структуру

$$(m_{\mu}\ddot{x}_{\mu} - X_{\mu})\,b_{\lambda\mu} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = 3n-k\,. \tag{3.13}$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения связей, получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x_{\mu}(t)$.

Уравнения (3.13) показывают, что в случае идеальных связей существует l таких линейных комбинаций уравнений Ньютона (3.2), которые не содержат реакций связей R'_{μ}.

Интеграл энергии. При несвободном движении одной материальной точки, если голономные связи идеальны и стационарны, любое элементарное перемещение $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ перпендикулярно реакции связи. Отсюда следует, что при движении точки реакция связи не совершает работы, и поэтому полная механическая энергия при несвободном движении в стационарном потенциальном силовом поле сохраняется. В качестве примера подобного движения можно назвать движение сферического маятника.

Переходя от рассмотрения движения одной точки к рассмотрению движения механических систем, состоящих из конечного числа материальных точек, как и раньше, введем изображающую точку. Для общности рассуждений предположим, что связи являются дифференциальными и задаются уравнениями (3.4). Покажем, что если эти связи идеальны ($\mathbf{T}_0 = 0$), а функции $\varphi^{\varkappa}$ — однородные функции относительно скоростей $\dot{y}_\mu$, то уравнение (3.5) допускает существование интеграла энергии, если сила $\mathbf{Y}$ имеет потенциал U, не зависящий от времени. Действительно, умножая обе части уравнения (3.5) на $d\mathbf{y} = \dot{\mathbf{y}}dt$, имеем

$$M\dot{\mathbf{y}} \cdot d\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y} \cdot d\mathbf{y} + \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{y}}dt + \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{y}}dt\,.$$

Так как по предположению $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\nabla} U$, то $\mathbf{Y} \cdot d\mathbf{y} = dU$, поэтому

$$d\left(\frac{M\mathbf{V}^2}{2}\right) = dU + \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{y}}dt + \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{y}}dt\,.$$

Однако

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{y}} = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa} \cdot \dot{\mathbf{y}} = \Lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi^{\varkappa}}{\partial \dot{y}_\mu}\,\dot{y}_\mu\,. \tag{3.14}$$

Поскольку функции $\varphi^{\varkappa}$ по предположению однородны относительно скоростей $\dot{y}_\mu$, то по теореме Эйлера об однородных функциях можно записать

$$\frac{\partial \varphi^{\varkappa}}{\partial \dot{y}_\mu}\,\dot{y}_\mu = p\,\varphi^{\varkappa}\,,$$

где p — показатель однородности рассматриваемой функции $\varphi^{\varkappa}$. Однако на основании уравнений связей $\varphi^{\varkappa} = 0$, а, значит, выражение (3.14) обращается в нуль. Тогда окончательно получаем

$$d\left(\frac{M\mathbf{V}^2}{2} - U\right) = \mathbf{T}_0 \cdot \dot{\mathbf{y}}dt\,,$$

откуда следует, что интеграл энергии $T - U = \mathrm{const}$ для данного вида связей будет существовать тогда, когда они являются идеальными ($\mathbf{T}_0 = 0$).

Уравнения Лагранжа второго рода. Остановимся теперь на выводе уравнений движения системы, не содержащих реакций, при наличии идеальных удерживающих голономных связей. Эта задача для изображающей точки решается так же, как и для одной изолированной точки.

При идеальных голономных связях ($\mathbf{T}_0 = 0$) уравнение (3.6) переписываем следующим образом:

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla} f^{\varkappa}\,. \tag{3.15}$$

Введем криволинейные координаты изображающей точки формулами

$$q^\sigma = q^\sigma(t, y)\,, \quad y = (y_1, \dots, y_{3n})\,, \quad \sigma = \overline{1, 3n}\,.$$

Предполагая, что условия разрешимости выполнены, можно записать

$$y_\rho = y_\rho(t, q)\,, \quad q = (q^1, \dots, q^{3n})\,, \quad \rho = \overline{1, 3n}\,.$$

Умножая уравнение (3.15) на векторы основного базиса введенной криволинейной системы координат

$$\mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial y_\rho}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{i}_\rho\,, \quad \rho, \sigma = \overline{1, 3n}\,,$$

получаем

$$MW_\sigma = Q_\sigma + \Lambda_\varkappa\,\boldsymbol{\nabla} f^\varkappa \cdot \mathbf{e}_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1, 3n}\,, \tag{3.16}$$

где

$$\begin{gathered} MW_\sigma = M\mathbf{W}\cdot\mathbf{e}_\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = M(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\ddot q^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot q^\alpha \dot q^\beta)\,, \\ \sigma, \tau = \overline{1, 3n}\,, \quad \alpha, \beta = \overline{0, 3n}\,, \quad q^0 = t\,, \quad \dot q^0 = 1\,, \\ Q_\sigma = \mathbf{Y}\cdot\mathbf{e}_\sigma = \sum_{\mu=1}^{3n} Y_\mu\,\frac{\partial y_\mu}{\partial q^\sigma} = \sum_{\mu=1}^{3n} X_\mu\,\frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^\sigma}\,. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Отметим, что эти формулы для обобщенных сил Q_σ совпадают с введенными ранее выражениями (1.10) главы V.

Пользуясь произволом в выборе функций q^σ, берем k таких функций в виде

$$q^{l+\varkappa} = f^\varkappa(t, y)\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,,$$

где $f^\varkappa(t, y)$ — функции, которые, будучи приравнены к нулю, дают уравнения k голономных связей:

$$f^\varkappa(t, y) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,.$$

При таком выборе криволинейных координат имеем

$$\boldsymbol{\nabla} f^\varkappa \cdot \mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial f^\varkappa}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial q^{l+\varkappa}}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial q^\sigma} = \delta_\sigma^{l+\varkappa} = \begin{cases} 0, & \sigma \neq l+\varkappa\,, \\ 1, & \sigma = l+\varkappa\,. \end{cases} \tag{3.18}$$

Систему уравнений (3.16) при этом записываем в виде *уравнений Лагранжа второго рода*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} = Q_\lambda\,, \quad \lambda = \overline{1, l}\,, \tag{3.19}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{l+\varkappa}} - \frac{\partial T}{\partial q^{l+\varkappa}} - Q_{l+\varkappa} = \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{3.20}$$

или в развернутом виде

$$M(\mathrm{g}_{\lambda\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\lambda,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta) = Q_\lambda\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \tag{3.21}$$

$$M(\mathrm{g}_{l+\varkappa,\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{l+\varkappa,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta) - Q_{l+\varkappa} = \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{3.22}$$

Здесь $\tau = \overline{1,l},\ \alpha,\beta = \overline{0,l}$.

Система уравнений (3.21) представляет собой систему l дифференциальных уравнений для определения l неизвестных функций $q^1, q^2, \ldots, q^l$. Формулы (3.22) позволяют найти обобщенные реакции $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, при этом следует учитывать, что $q^{l+\varkappa} = \dot{q}^{l+\varkappa} = \ddot{q}^{\,l+\varkappa}{=}0,\ \varkappa = \overline{1,k}$.

Координаты q^λ, задаваемые формулами

$$q^\lambda = q^\lambda(t,y)\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \tag{3.23}$$

выбираем произвольно. Однако функции $q^\lambda(t,y)$ должны быть такими, чтобы соотношения (3.23), рассматриваемые совместно с уравнениями связей

$$f^\varkappa(t,y) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{3.24}$$

позволяли однозначно выразить все координаты y_μ через независимые параметры q^λ. Эти параметры, однозначно определяющие положение голономной механической системы, называются *обобщенными лагранжевыми координатами*. Число таких координат называется *числом степеней свободы* рассматриваемой голономной механической системы. На практике при выборе координат q^λ, как правило, нет необходимости в выписывании явных выражений для функций $q^\lambda(t,y)$. Например, пусть точка находится на расширяющейся сфере с радиусом $r = r(t)$. В качестве обобщенных координат q^1, q^2 удобно принять углы φ и ψ сферической системы координат.

Отметим, что уравнения (3.19), в которые входят только независимые лагранжевы координаты q^λ, имеют форму *уравнений Лагранжа второго рода*, которые были установлены ранее для свободной точки. Их можно назвать также *уравнениями движения голономных механических систем.*

Таким образом, если имеем несвободную систему n точек, на которую наложено k идеальных голономных связей, то всегда можно найти систему криволинейных координат $q^1, q^2, \ldots, q^l, q^{l+1}, q^{l+2}, \ldots, q^{3n}$, в которой уравнения движения (3.19) не содержат неизвестных реакций. Проинтегрировав эти уравнения, то есть найдя координаты $q^1, q^2, \ldots, q^l$ как

функции времени и начальных данных, можно по формулам (3.20) найти и обобщенные реакции $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k$ как функции времени.

Сказанному можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Совокупность уравнений связей (3.24) является уравнением l-мерной поверхности в $3n$-мерном пространстве. Эти уравнения связей описывают поверхность, на которой должна находиться изображающая точка в данный момент времени. Из соотношений (3.23), (3.24), рассматриваемых совместно, следует, что координаты y_μ точек данной поверхности являются функциями параметров q^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, и, следовательно, величины q^λ можно рассматривать как ее гауссовы координаты. Отсюда также следует, что уравнение указанной поверхности в параметрической форме имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t, q^1, q^2, \dots, q^l)\,,$$

поэтому векторы $\mathbf{e}_\lambda = \partial\mathbf{y}/\partial q^\lambda$, $\lambda = \overline{1,l}$, лежат в плоскости, касательной к этой поверхности, а векторы $\boldsymbol{\nabla} f^\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, в соответствии с соотношениями (3.18) ортогональны данной плоскости. Отсюда вытекает, что вектор реакции идеальных голономных связей $\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla} f^\varkappa$ ортогонален касательной плоскости к поверхности, на которой должна находиться изображающая точка в данный момент.

В частном случае, когда обобщенные силы $Q_\lambda = 0$, $\lambda = \overline{1,l}$, изображающая точка движется по введенной l-мерной поверхности по инерции, и дифференциальные уравнения ее траектории, как следует из (3.21), имеют вид

$$\mathrm{g}_{\lambda\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\lambda,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = 0\,, \quad \lambda,\tau = \overline{1,l}\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,l}\,.$$

Если при этом связи стационарны, то предыдущие уравнения следует записать так:

$$\mathrm{g}_{\lambda\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\lambda,\sigma\tau}\,\dot{q}^\sigma\dot{q}^\tau = 0\,, \quad \lambda,\sigma,\tau = \overline{1,l}\,.$$

Данные уравнения совпадают с дифференциальными уравнениями геодезических линий, как они понимаются в многомерной дифференциальной геометрии.

Вывод уравнений Лагранжа первого и второго рода на основе решения прямой задачи механики. Покажем, что уравнения Лагранжа первого и второго рода можно получить и чисто аналитически, то есть без привлечения изображающей точки и уравнения ее движения. Это достигается решением прямой задачи механики о нахождении сил по заданному движению при условии, что рассмотрение ведется в криволинейных координатах.

Предположим, что положение свободной механической системы, состоящей из n материальных точек, однозначно определяется заданием обобщенных координат q^σ, которые связаны с декартовыми координатами x_μ точек системы

соотношениями

$$q^\sigma = f_*^\sigma(t,x)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad s = 3n\,. \tag{3.25}$$

Допустим, что движение системы задается набором функций q^σ. Требуется определить, какие силы R'_μ в уравнениях (3.2) необходимо добавить к силам X_μ, чтобы это движение осуществилось.

Самый простой способ определения сил R'_μ состоит в следующем. Из соотношений (3.25) находим координаты x_μ как сложные функции времени:

$$x_\mu = x_\mu(t, q(t))\,, \quad \mu = \overline{1,3n}\,.$$

Вычисляя по этим формулам ускорения $\ddot{x}_\mu$, получаем совокупность всех искомых добавочных сил:

$$R'_\mu = m_\mu \ddot{x}_\mu - X_\mu\,, \quad \mu = \overline{1,3n}\,. \tag{3.26}$$

Силы X_μ считаем заданными функциями времени, координат и скоростей точек системы.

Данное решение прямой задачи механики не объясняет, однако, какое влияние оказывает на силы R'_μ каждая функция $f_*^\sigma(t,x)$. Для нахождения формы решения, рационально учитывающей переход к новым координатам, обратимся сначала к силам X_μ. Предположим, что эти силы имеют потенциал, который задан в координатах q^σ. Тогда

$$X_\mu = \frac{\partial U}{\partial x_\mu} = Q_\sigma \frac{\partial q^\sigma}{\partial x_\mu}\,, \tag{3.27}$$

где

$$Q_\sigma = \frac{\partial U}{\partial q^\sigma} = X_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma}\,. \tag{3.28}$$

Линейные преобразования сил (3.27), (3.28), связывающие переход к новым переменным с переходом к новым силам, соответствуют случаю, когда силы имеют потенциал. Естественно распространить эти преобразования на случай любых сил, так как и потенциальные, и непотенциальные силы входят во второй закон Ньютона как равноправные слагаемые. Применяя указанные формулы к силам R'_μ, получаем

$$R'_\mu = \Lambda_\sigma^* \frac{\partial q^\sigma}{\partial x_\mu}\,, \tag{3.29}$$

$$\Lambda_\sigma^* = R'_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma}\,. \tag{3.30}$$

Величины Λ_σ^* рассматриваем как новые неизвестные, с помощью которых целесообразно выразить искомые силы R'_μ при условии, что движение задается в координатах q^σ. Учитывая равенства (3.26), систему уравнений (3.30) представляем в виде

$$\Lambda_\sigma^* = (m_\mu \ddot{x}_\mu - X_\mu) \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,3n}\,. \tag{3.31}$$

Для исключения из рассмотрения функций $x_\mu(t,q)$ и выражения величин Λ^*_σ через заданные функции $q^\sigma(t)$ и их производные, воспользуемся преобразованием

$$m_\mu \ddot{x}_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma} = \frac{d}{dt}\left(m_\mu \dot{x}_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma}\right) - m_\mu \dot{x}_\mu \frac{d}{dt}\frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma}\,. \tag{3.32}$$

Так как

$$\dot{x}_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial t} + \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\tau}\,\dot{q}^\tau\,, \quad \mu,\tau = \overline{1,3n}\,,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial q^\sigma \partial t} + \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial q^\sigma \partial q^\tau}\,\dot{q}^\tau = \frac{\partial}{\partial q^\sigma}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial t} + \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\tau}\,\dot{q}^\tau\right),$$

то

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \dot{q}^\sigma}\,, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial q^\sigma}\,.$$

Полученные формулы называются *соотношениями Лагранжа*. Теперь преобразования (3.32) можно записать в виде

$$\begin{gathered} m_\mu \ddot{x}_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma} = \frac{d}{dt}\left(m_\mu \dot{x}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \dot{q}^\sigma}\right) - m_\mu \dot{x}_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial q^\sigma} = \\ = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma}\left(\sum_{\mu=1}^{3n} \frac{m_\mu \dot{x}_\mu^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q^\sigma}\left(\sum_{\mu=1}^{3n} \frac{m_\mu \dot{x}_\mu^2}{2}\right) = \\ = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = M(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta)\,, \\ T = \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\,, \quad \mu,\sigma,\tau,= \overline{1,3n}\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,3n}\,. \end{gathered} \tag{3.33}$$

Уравнения (3.31) с учетом выражений (3.17), (3.33) записываем в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma + \Lambda^*_\sigma \tag{3.34}$$

или следующим образом:

$$M(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta) = Q_\sigma + \Lambda^*_\sigma\,. \tag{3.35}$$

Из уравнений (3.34) следует, что новые неизвестные Λ^*_σ представляют собой дополнительные обобщенные силы, которые в сочетании с обобщенными силами Q_σ обеспечивают движение по заданному закону $q^\sigma = q^\sigma(t)$.

Для более подробного анализа содержания понятия обобщенной силы сравним уравнения движения свободной механической системы в разных системах

координат: $x_\mu,\ y_\rho,\ q^\sigma$. Имеем

$$\begin{aligned} m_\mu \ddot{x}_\mu &\equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial x_\mu} = X_\mu\,, \\ M\ddot{y}_\rho &\equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_\rho} - \frac{\partial T}{\partial y_\rho} = Y_\rho\,, \\ MW_\sigma &\equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma\,, \\ &\mu,\rho,\sigma = \overline{1,3n}\,. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Силовое воздействие на систему в целом, которое задается правыми частями этих уравнений, то есть набором величин $X_\mu,\ Y_\rho,\ Q_\sigma$, рассматриваем как один объект. Обозначим его через $\mathbf{Y}$.

Величина $\mathbf{Y}$ по своей природе имеет векторную структуру, так как одновременное действие двух систем сил X_μ^{I} и X_μ^{II} эквивалентно действию одной системы сил, у которой $X_\mu = X_\mu^{\mathrm{I}} + X_\mu^{\mathrm{II}}$. В соответствии с этим можно записать

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\mathrm{I}} + \mathbf{Y}^{\mathrm{II}}\,.$$

Компоненты $X_\mu,\ Y_\rho,\ Q_\sigma$ одного и того же силового воздействия $\mathbf{Y}$ связаны между собой соотношениями

$$Y_\rho = X_\mu\,\frac{\partial x_\mu}{\partial y_\rho} \equiv \frac{X_\rho}{\sqrt{\widetilde{m}_\rho}}\,, \qquad Q_\sigma = X_\mu\,\frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma}\,. \tag{3.37}$$

Объект векторной природы, компоненты которого при переходе к новой системе координат преобразуются по закону (3.37), называется *ковариантным вектором* или сокращенно *ковектором*.

Установив, что совокупность правых частей уравнений движения (3.36) является ковектором, можно утверждать, что и совокупностью левых частей этих уравнений задается ковектор. Если его обозначить через $M\mathbf{W}$, то закон движения записывается в виде

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y}\,. \tag{3.38}$$

Здесь M — масса всей системы, $\mathbf{W}$ — ковектор, характеризующий ее ускорение. Для свободной механической системы, состоящей из конечного числа точек, как было показано, величины $\mathbf{W}$ и $\mathbf{Y}$ можно рассматривать как векторы $3n$-мерного евклидова пространства, в котором изображающая точка перемещается в соответствии с законом (3.38).

В дальнейшем закон движения механической системы (3.38), имеющий форму второго закона Ньютона для одной материальной точки, будем для удобства называть *законом Ньютона* или *уравнением Ньютона*.

Вернемся к уравнениям (3.35), позволяющим определить дополнительные обобщенные силы Λ_σ^*, обеспечивающие заданное движение. Отметим одно важное обстоятельство, отражающее взаимную связь, существующую между обобщенными координатами и обобщенными силами.

Теорема. *Движение, при котором одна из обобщенных координат является заданной функцией времени, можно обеспечить введением одной дополнительной обобщенной силы, соответствующей этой координате.*

Докажем это утверждение. Для определенности положим, что заданной функцией времени является координата q^{3n}. Полагая все величины Λ^*_σ (кроме Λ^*_{3n}) равными нулю, имеем

$$\begin{gathered} M(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta) = Q_\sigma\,, \\ \sigma = \overline{1,3n-1}\,, \quad \tau = \overline{1,3n}\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,3n}\,, \end{gathered} \tag{3.39}$$

$$M(\mathrm{g}_{3n,\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{3n,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta) = Q_{3n} + \Lambda^*_{3n}\,, \quad \tau = \overline{1,3n}\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,3n}\,. \tag{3.40}$$

Интегрируя систему уравнений (3.39), содержащую неизвестные функции $q^1(t)$, $q^2(t), \dots, q^{3n-1}(t)$, получаем все обобщенные координаты q^τ, $\tau = \overline{1,3n}$, как функции времени. Искомую дополнительную обобщенную силу Λ^*_{3n}, обеспечивающую заданное движение по координате q^{3n}, находим из выражения (3.40). Однако следует помнить, что, прикладывая к системе дополнительную обобщенную силу Λ^*_{3n}, мы тем самым оказываем влияние и на движение по всем остальным координатам, так как уравнения (3.39) содержат заданную функцию $q^{3n}(t)$.

Доказанное утверждение не означает, что задание движения по какой-либо одной координате не отражается на движении по всем остальным. Оно указывает только на то, что другие дополнительные силы, кроме силы, соответствующей выбранной координате, можно не прикладывать.

Прямым следствием этой теоремы является более общее утверждение, что движение, заданное по нескольким координатам, можно обеспечить тем же числом соответствующих дополнительных обобщенных сил.

Воспользуемся теперь линейными системами (3.29), (3.30) для исследования несвободного движения с голономными связями, которые заданы уравнениями $f^\varkappa(t,x) = 0$, $\varkappa = \overline{1,k}$. Функции $f^\varkappa(t,x)$ включим в систему функций $f^\varkappa_*(t,x)$, положив

$$q^{l+\varkappa} = f^{l+\varkappa}_*(t,x) = f^\varkappa(t,x) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad l = 3n-k\,. \tag{3.41}$$

Движение по координатам $q^{l+\varkappa}$, таким образом, оказывается заданным, причем наипростейшим образом. Как было показано, такое движение может быть обеспечено дополнительными обобщенными силами $\Lambda^*_{l+\varkappa} = \Lambda_\varkappa$. Система (3.29) с учетом уравнений (3.2) и (3.41) в этом случае принимает вид

$$m_\mu\ddot{x}_\mu = X_\mu + \Lambda_\varkappa\,\frac{\partial f^\varkappa}{\partial x_\mu}\,, \quad \mu = \overline{1,3n}\,.$$

Это уравнения Лагранжа первого рода.

Система уравнений (3.34) распадается на две подсистемы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} = Q_\lambda\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \tag{3.42}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\,l+\varkappa}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\,l+\varkappa}} - Q_{l+\varkappa} = \Lambda_{\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{3.43}$$

Это уравнения Лагранжа второго рода. Первая подсистема, не содержащая реакций, служит для определения независимых лагранжевых координат q^{λ}. Вторая позволяет определить обобщенные реакции $\Lambda_{\varkappa}$. При этом необходимо иметь в виду, что для вычисления $\Lambda_{\varkappa}$ кинетическую энергию T следует выразить через все координаты q^{σ} и все скорости $\dot{q}^{\sigma}$, формально считая, что связи отсутствуют. После вычисления левых частей уравнений (3.43) полагаем в них $q^{l+\varkappa} = \dot{q}^{\,l+\varkappa} = \ddot{q}^{\,l+\varkappa}{=}0$, $\varkappa = \overline{1,k}$.

Уравнения (3.30) можно рассматривать как решение системы линейных уравнений (3.29) относительно неизвестных Λ^*_{σ}, а уравнения (3.29) — как решение системы уравнений (3.30) относительно неизвестных R'_{μ}. Учитывая такую связь между этими системами, будем называть их *взаимными*. Уравнения Лагранжа первого и второго рода, вытекающие соответственно из уравнений (3.29) и (3.30) при $\Lambda^*_{\lambda}{=}0$, $\lambda = \overline{1,l}$, являются, таким образом, *взаимными системами*.

Движение, при котором выполняются уравнения связей, возможно не только при $\Lambda^*_{\lambda}{=}0$, $\lambda = \overline{1,l}$, но и при $\Lambda^*_{\lambda} \neq 0$. Однако если обобщенные силы Λ^*_{λ} не заданы, то задача становится неопределенной. Если же они каким-либо образом заданы, то их следует отнести к силам Q_{λ}.

Сравнивая данный вывод уравнений Лагранжа первого и второго рода с выводом тех же уравнений, основанным на введении изображающей точки, видим, что связи являются *идеальными*, если при наложении их не появляются дополнительные обобщенные силы, соответствующие свободным координатам. Таким образом, с новой, принципиально важной стороны раскрывается физическое содержание понятия идеальности голономных, но, вообще говоря, нестационарных связей.

Уравнения движения голономных систем под действием сил, имеющих потенциал. Канонические уравнения. Пусть силы X_{μ} имеют потенциал U, то есть

$$X_{\mu} = \frac{\partial U}{\partial x_{\mu}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_{\mu}}\,.$$

При этом

$$Q_{\lambda} = X_{\mu}\,\frac{\partial x_{\mu}}{\partial q^{\lambda}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_{\mu}}\,\frac{\partial x_{\mu}}{\partial q^{\lambda}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\lambda}}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,. \tag{3.44}$$

Введем функцию $L = T - \Pi$, которая называется *функцией Лагранжа*, или *кинетическим потенциалом системы*. Потенциальная энергия Π зависит только от координат и времени, поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\lambda}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\lambda}}\,. \tag{3.45}$$

Учитывая соотношения (3.44), (3.45), уравнения Лагранжа второго рода (3.42) представляем в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = 3n - k\,. \tag{3.46}$$

При практическом использовании этих уравнений, как правило, нет необходимости выписывать явные выражения для уравнений связей. Следует определить только число степеней свободы, а затем так подобрать параметры q^λ, чтобы функция Лагранжа L в этих координатах имела наиболее простой вид. Прежде всего необходимо установить, нельзя ли выбрать параметры q^λ так, чтобы некоторые из них не входили в функцию L, поскольку тогда уравнение Лагранжа по координате q^τ, не входящей явно в функцию L, имеет *циклический интеграл* $\partial L/\partial \dot{q}^\tau = \mathrm{const}$. Соответствующая криволинейная координата q^τ называется *циклической координатой*.

Как было показано в главе IV, система (6.4) может быть сведена к системе (6.10). Аналогично этому система (3.46) эквивалентна следующей системе *канонических уравнений*, или системе *уравнений Гамильтона*:

$$\dot{p}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial q^\lambda}\,, \quad \dot{q}^\lambda = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,,$$

где введена *функция Гамильтона*

$$H = p_\lambda \dot{q}^\lambda - L\,.$$

В заключение данного параграфа сделаем следующее **важное замечание**. Уравнения Лагранжа второго рода (3.46) были получены для механической системы, состоящей из конечного числа материальных точек. Учитывая, что функция Лагранжа L может быть введена для любой механической системы, состоящей как из абсолютно твердых, так и деформируемых тел, положения всех точек которых однозначно определяется заданием независимых лагранжевых координат q^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, естественно предположить, что динамика механической системы и в этом случае будет описываться уравнениями (3.46). Данное обобщение этих уравнений следует рассматривать как дополнительный постулат, аналогичный другим постулатам физики.

§ 4. Примеры применения уравнений Лагранжа второго рода[3]

Составление и интегрирование уравнений Лагранжа второго рода для исследования движения систем материальных точек

Пример 2. *Движение двух масс с пружиной по кольцу.* Две равные массы m, связанные пружиной с жесткостью c, движутся без трения по неподвижному кольцу с радиусом r, лежащему в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии l. Определить движение системы, если в начальный момент, когда пружина недеформирована, скорость первой массы $v_{1,0}$, а второй — $v_{2,0}$. Нумерация масс соответствует выбору положительного направления отсчета дуговой координаты (рис. 7).

Предположим, что массы малы по сравнению с радиусом кольца. При этом скорости всех точек каждой из масс можно считать приближенно одинаковыми и равными соответственно v_1 и v_2. Допустим также, что массой пружины можно пренебречь. При такой постановке задачи кинетическая энергия системы имеет следующее простое выражение:

$$T = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}\,.$$

Потенциальную энергию системы, равную потенциальной энергии деформации пружины, вычисляем по формуле $\Pi = c\Delta^2/2$, где Δ — удлинение пружины.

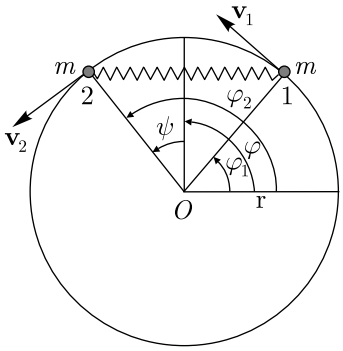

Рис. 7. Две массы с пружиной на кольце

[3]В данном параграфе условия некоторых примеров заимствованы из широко известного задачника И. В. Мещерского, выдержавшего большое количество переизданий (см., например: *Мещерский И. В.* Сборник задач по теоретической механике (36-е издание). М.: Наука, 1986. 447 с. или *Мещерский И. В.* Задачи по теоретической механике (49-е издание). СПб.: Изд-во «Лань», 2008. 448 с.).

Предположим, что потерями энергии на трение можно пренебречь, и, следовательно, связи можно считать идеальными. Уравнения движения в рассматриваемом случае имеют вид (3.46).

Система имеет две степени свободы. Ее положение однозначно определяется заданием углов φ_1 и φ_2, которые соответствуют положению на окружности первой и второй масс. Потенциальная энергия зависит от одного переменного параметра Δ, который выражается через разность $\varphi_2 - \varphi_1$. Поэтому для получения циклического интеграла перейдем к новым переменным

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\,, \quad \psi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\,,$$

или

$$\varphi_1 = \varphi - \psi\,, \quad \varphi_2 = \varphi + \psi\,.$$

Угол φ описывает положение центра тяжести, а угол ψ связан с расстоянием между массами $\rho = 2r\sin\psi$. Поэтому

$$\Delta = \rho - l = 2r\left(\sin\psi - \sin\psi_0\right),$$

где $\psi_0 = \arcsin(l/(2r))$.

Функцию Лагранжа L в новых переменных записываем в виде

$$L = \frac{mr^2\left(\dot\varphi - \dot\psi\right)^2}{2} + \frac{mr^2\left(\dot\varphi + \dot\psi\right)^2}{2} - 2cr^2\left(\sin\psi - \sin\psi_0\right)^2.$$

Уравнения Лагранжа второго рода, соответствующие данной функции L, таковы:

$$\ddot\varphi = 0\,, \quad \ddot\psi + \frac{2c}{m}\left(\sin\psi - \sin\psi_0\right)\cos\psi = 0\,.$$

Интегрируя первое уравнение, получаем

$$\varphi = \varphi_0 + \dot\varphi_0 t\,, \quad \text{где} \quad \dot\varphi_0 = \frac{v_{1,0} + v_{2,0}}{2r}\,.$$

При рассмотрении уравнения относительно угла ψ ограничимся анализом случая, когда разность $\alpha = \psi - \psi_0$ можно считать малой в том смысле, что можно положить $\sin\psi - \sin\psi_0 = \alpha\cos\psi_0$. Уравнение относительно α при этом имеет вид

$$\ddot\alpha + \omega^2\alpha = 0\,, \quad \omega^2 = \frac{2c}{m}\cos^2\psi_0 = \frac{c(4r^2 - l^2)}{2mr^2}\,.$$

Интегрируя это уравнение при начальных условиях $\alpha(0) = \alpha_0 = 0$, $\dot\alpha(0) = \dot\alpha_0 = \dot\psi_0 = (v_{2,0} - v_{1,0})/(2r)$, получаем

$$\psi = \psi_0 + \frac{v_{2,0} - v_{1,0}}{2r\omega}\sin\omega t\,.$$

Пример 3. *Движение трех масс с пружинами.* Три равные массы m, последовательно связанные друг с другом двумя одинаковыми пружинами с жесткостью c, без трения скользят по горизонтальной прямой Ox (см. рис. 8). Определить движение системы, если в начальный момент, когда пружины недеформированы, крайняя правая масса имеет скорость v_0, а скорости двух других масс равны нулю.

Система имеет три степени свободы. Ее положение определяется заданием координат x_1, x_2, x_3 центров масс соответственно первой, второй и третьей масс. Массы перенумерованы так, что в соответствии с заданными условиями (см. рис. 8)

$$x_{2,0} = x_{1,0} + l\,, \quad x_{3,0} = x_{2,0} + l\,, \quad \dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 0\,, \quad \dot{x}_{3,0} = v_0\,. \tag{4.1}$$

Здесь l — расстояния между центрами масс при отсутствии деформации пружин.

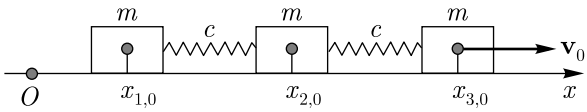

Рис. 8. Три массы с пружинами

Кинетическая и потенциальная энергии системы в этих координатах таковы:

$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m\dot{x}_3^2}{2}\,, \quad \Pi = \frac{c\,(x_2 - x_1 - l)^2}{2} + \frac{c\,(x_3 - x_2 - l)^2}{2}\,.$$

Рассматривая приведенное выражение для потенциальной энергии, видим, что в данном случае к новым координатам целесообразно перейти по формулам

$$x = x_2\,, \quad \delta_1 = x_2 - x_1 - l\,, \quad \delta_2 = x_3 - x_2 - l\,, \tag{4.2}$$

откуда $x_1 = x - \delta_1 - l$, $x_2 = x$, $x_3 = x + \delta_2 + l$. Функция Лагранжа L в координатах (4.2) имеет вид

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m(\dot{x} - \dot{\delta}_1)^2}{2} + \frac{m(\dot{x} + \dot{\delta}_2)^2}{2} - \frac{c\,\delta_1^2}{2} - \frac{c\,\delta_2^2}{2}\,.$$

Обратимся сначала к уравнению Лагранжа по координате x, от которой функция L не зависит. Имеем

$$3\ddot{x} - \ddot{\delta}_1 + \ddot{\delta}_2 = 0\,. \tag{4.3}$$

Интегрируя это уравнение при начальных условиях (4.1), получаем

$$3x - \delta_1 + \delta_2 = 3x_{2,0} + v_0 t\,.$$

Выпишем теперь уравнения относительно координат δ_1 и δ_2:

$$m(\ddot{\delta}_1 - \ddot{x}) + c\,\delta_1 = 0\,, \quad m(\ddot{\delta}_2 + \ddot{x}) + c\,\delta_2 = 0\,.$$

Складывая эти уравнения, а затем вычитая второе из первого, при наличии выражения (4.3) находим, что

$$\ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi = 0\,, \quad \ddot{\eta} + \omega_2^2 \eta = 0\,,$$

где $\xi = \delta_1 + \delta_2,\ \eta = \delta_1 - \delta_2,\ \omega_1^2 = c/m,\ \omega_2^2 = 3c/m$.

Интегрируя указанные уравнения и учитывая, что в соответствии с формулами (4.1), (4.2) начальные условия для координат ξ и η имеют вид $\xi_0 = 0$, $\dot{\xi}_0 = v_0,\ \eta_0 = 0,\ \dot{\eta}_0 = -v_0$, получаем

$$\xi = \frac{v_0}{\omega_1}\,\sin\omega_1 t\,, \quad \eta = -\frac{v_0}{\omega_2}\,\sin\omega_2 t\,.$$

В исходных координатах $x_1,\ x_2$ и x_3, полагая для простоты $x_{2,0} = 0$, окончательно получаем

$$x_1 = \frac{v_0 t}{3} - \frac{v_0}{2\omega_1}\,\sin\omega_1 t + \frac{v_0}{6\omega_2}\,\sin\omega_2 t - l\,,$$

$$x_2 = \frac{v_0 t}{3} - \frac{v_0}{3\omega_2}\,\sin\omega_2 t\,,$$

$$x_3 = \frac{v_0 t}{3} + \frac{v_0}{2\omega_1}\,\sin\omega_1 t + \frac{v_0}{6\omega_2}\,\sin\omega_2 t + l\,.$$

Пример 4. *Колебания трех масс на нерастяжимой нити.* На нерастяжимой нити длиной $4a$ подвешены три груза. Массы первого и третьего равны m, масса второго — M (рис. 9). Нить подвешена за концы так, что ее начальный и конечный участки в положении равновесия образуют угол α_0 с вертикалью, а средние — угол β_0. Составить уравнение Лагранжа для случая, когда масса M перемещается по вертикальной прямой. Полученное уравнение проинтегрировать, считая, что отклонения системы от положения равновесия малы.

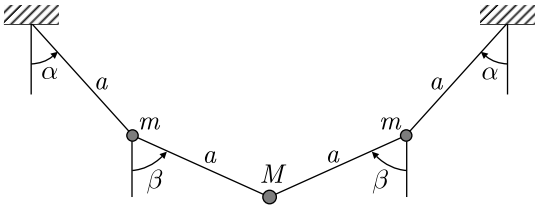

Рис. 9. Три груза на нити

Данная система, состоящая из трех материальных точек, при принятых предположениях имеет только одну степень свободы. В рассматриваемом случае можно ввести изображающую точку, записать все уравнения связей в виде $f^{\varkappa}(t, y),\ \varkappa = \overline{1,5}$, и провести исследование на основе уравнения (3.6). При решении поставленной задачи на практике целесообразнее воспользоваться уравнением Лагранжа второго рода. Тогда нет необходимости выписывать все уравнения

связей и рассматривать их реакции. Для составления уравнения Лагранжа достаточно найти кинетическую энергию и потенциальную энергию силы тяжести.

В качестве обобщенной координаты примем смещение q массы M, отсчитываемое от положения равновесия по вертикали вниз. Пусть в отклоненном положении углы участков нити с вертикалью равны соответственно α и β. Из рис. 9 видно, что эти углы как функции параметра q задаются соотношениями

$$\begin{gathered} a(\cos\alpha + \cos\beta) - a(\cos\alpha_0 + \cos\beta_0) = q\,, \\ \sin\alpha + \sin\beta - \sin\alpha_0 - \sin\beta_0 = 0\,. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Кинетическая энергия системы такова:

$$T = M\dot{q}^2/2 + ma^2\,\dot{\alpha}^2\,.$$

Чтобы выразить $\dot{\alpha}$ через $\dot{q}$, продифференцируем соотношения (4.4) по времени. При этом имеем

$$-a(\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\beta}\sin\beta) = \dot{q}\,, \quad \dot{\alpha}\cos\alpha + \dot{\beta}\cos\beta = 0\,. \tag{4.5}$$

Рассматривая выражения (4.5) как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\dot{\alpha}$ и $\dot{q}$ и решая ее, получаем

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{q}\cos\beta}{a\sin(\beta-\alpha)}\,, \quad \dot{\beta} = -\frac{\dot{q}\cos\alpha}{a\sin(\beta-\alpha)}\,. \tag{4.6}$$

Отсюда следует, что кинетическая энергия системы может быть представлена виде

$$T = \frac{M_*\dot{q}^2}{2}\,, \quad M_* = M + \frac{2m\cos^2\beta}{\sin^2(\beta-\alpha)}\,.$$

Здесь M_* является приведенной массой.

Найдем теперь обобщенную силу Q, соответствующую координате q. Активными силами в данном случае являются силы тяжести грузов, реакциями связей — натяжения нитей. По предположению нити являются нерастяжимыми, поэтому работа реакций связей равна нулю. Следовательно, связи идеальные. Потенциальная энергия силы тяжести равна весу, умноженному на смещение груза вертикально вверх. Следовательно, потенциальная энергия рассматриваемой системы такова:

$$\Pi = -Mgq - 2mga(\cos\alpha - \cos\alpha_0)\,.$$

Дифференцируя это выражение по q, находим

$$Q = -\frac{d\Pi}{dq} = Mg - 2mga\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dq}\,.$$

Из соотношений (4.6) следует, что

$$\frac{d\alpha}{dq} = \frac{\cos\beta}{a\sin(\beta-\alpha)}\,,$$

поэтому

$$Q = Mg - \frac{2mg\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\,. \tag{4.7}$$

В положении равновесия $Q = 0$, и, значит, выполняется соотношение

$$2m = \frac{M\sin(\beta_0-\alpha_0)}{\sin\alpha_0\cos\beta_0}\,. \tag{4.8}$$

Тригонометрические функции углов α и β, входящие в выражения для T и Q, как следует из выражений (4.4), довольно сложно зависят от параметра q. Поэтому в общем случае уравнение Лагранжа относительно координаты q нелинейно и громоздко. При достаточно малых q задачу можно линеаризовать. При малых q приведенную массу $M_*(q)$ можно считать постоянной и равной $M_*(0)$. Учитывая соотношение (4.8), получаем

$$M_*(q) \approx M_*(0) = 2m\left(\frac{M}{2m} + \frac{\cos^2\beta_0}{\sin^2(\beta_0-\alpha_0)}\right) =$$
$$= \frac{2m\cos\beta_0}{\sin^2(\beta_0-\alpha_0)}\left(\sin\alpha_0\sin(\beta_0-\alpha_0)+\cos\beta_0\right) =$$
$$= \frac{2m\cos\beta_0}{\sin^2(\beta_0-\alpha_0)}\left(-\frac{1}{2}\cos\beta_0 + \frac{1}{2}\cos(2\alpha_0-\beta_0)+\cos\beta_0\right) =$$
$$= \frac{2m\cos\beta_0\cos\alpha_0\cos(\beta_0-\alpha_0)}{\sin^2(\beta_0-\alpha_0)}\,.$$

Итак,

$$M_*(0) = \frac{2m\cos\beta_0\cos\alpha_0\cos(\beta_0-\alpha_0)}{\sin^2(\beta_0-\alpha_0)}\,.$$

Раскладывая обобщенную силу Q в ряд по степеням q и ограничиваясь малыми первого порядка, имеем

$$Q(q) \approx Q'_q(0)\,q\,.$$

Обобщенная сила Q, заданная в виде (4.7), является сложной функцией q. Ее производная по q может быть найдена по формуле

$$Q'_q = \frac{\partial Q}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dq} + \frac{\partial Q}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dq}\,. \tag{4.9}$$

Из соотношений (4.6) имеем:

$$\frac{d\alpha}{dq} = \frac{\cos\beta}{a\sin(\beta-\alpha)}\,, \qquad \frac{d\beta}{dq} = -\frac{\cos\alpha}{a\sin(\beta-\alpha)}\,.$$

Дифференцируя выражение (4.7) по α, получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial\alpha} = -2mg\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)} + \frac{\sin\alpha\cos\beta\cos(\beta-\alpha)}{\sin^2(\beta-\alpha)}\right) =$$
$$= -\frac{2mg\cos\beta(\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)+\sin\alpha\cos(\beta-\alpha))}{\sin^2(\beta-\alpha)} = -\frac{2mg\cos\beta\sin\beta}{\sin^2(\beta-\alpha)}\,.$$

Итак,

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = -\frac{2mg\cos\beta\sin\beta}{\sin^2(\beta-\alpha)}\,.$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \frac{2mg\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2(\beta-\alpha)}\,.$$

Подставляя эти выражения в (4.9), находим

$$-Q'_q(0) = C_*(0) = \frac{2mg(\cos^2\beta_0\sin\beta_0 + \cos^2\alpha_0\sin\alpha_0)}{a\sin^3(\beta_0-\alpha_0)}\,.$$

Уравнение Лагранжа второго рода, соответствующее данным приближенным выражениям для T и Q, имеет вид

$$M_*(0)\,\ddot{q} = -C_*(0)\,q\,, \tag{4.10}$$

или

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0\,, \quad \omega^2 = \frac{C_*(0)}{M_*(0)} = \frac{g(\cos^2\beta_0\sin\beta_0 + \cos^2\alpha_0\sin\alpha_0)}{a\cos\beta_0\cos\alpha_0\sin(\beta_0-\alpha_0)\cos(\beta_0-\alpha_0)}\,. \tag{4.11}$$

Решение уравнения (4.11) при начальных условиях

$$q(0) = q_0\,, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \tag{4.12}$$

таково:

$$q(t) = q_0\cos\omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega}\,\sin\omega t\,.$$

В действительности колебания данной системы затухающие. Рассеяние энергии происходит как вследствие сопротивления воздуха, так и вследствие внутреннего трения в нитях при их деформации. Поскольку второй фактор, указывающий на то, что связи можно считать идеальными только приближенно, на практике учесть сложно, ограничимся учетом только первого.

Предположим, что сила сопротивления воздуха при движении масс M и m пропорциональна первой степени скорости соответственно с коэффициентами k_1 и k_2. Рассмотрим сначала массу M. Приложенная к ней сила сопротивления, равная $-k_1\dot{q}$, при отклонении массы M на dq совершает работу[4]

$$\delta A_1 = -k_1\dot{q}\,dq\,.$$

Аналогично элементарную работу сил сопротивления, приложенных к массам m, записываем в виде

$$\delta A_2 = -2k_2a^2\dot{\alpha}\,d\alpha\,. \tag{4.13}$$

[4]Пояснение метода нахождения обобщенной силы с помощью составления выражения элементарной работы на возможном перемещении дается в главе IX в § 1.

Величины $d\alpha$ и dq связаны между собой так же, как и $\dot\alpha$ связано с $\dot q$. Поэтому выражение (4.13) при учете соотношения (4.6) может быть представлено в виде

$$\delta A_2 = -\frac{2k_2\cos^2\beta}{\sin^2(\beta-\alpha)}\,\dot q\,dq\,,$$

и поэтому обобщенная сила, соответствующая силам сопротивления воздуха, имеет вид $Q_* = -k(q)\dot q$, где

$$k(q) = k_1 + \frac{2k_2\cos^2\beta}{\sin^2(\beta-\alpha)}\,.$$

При малых колебаниях этот коэффициент можно считать постоянным:

$$k(q) \approx k(0) = k_1 + \frac{2k_2\cos^2\beta_0}{\sin^2(\beta_0-\alpha_0)}\,.$$

Добавляя в уравнении Лагранжа (4.10) к восстанавливающей силе $(-C_*(0)\,q)$ найденную силу сопротивления $Q_* = -k(0)\dot q$, получаем

$$\ddot q + 2n\dot q + \omega^2 q = 0\,, \quad 2n = k(0)/M_*(0)\,.$$

Решение этого уравнения при начальных условиях (4.12) имеет вид

$$q(t) = e^{-nt}\left(q_0\cot\omega_1 t + \frac{\dot q_0 + nq_0}{\omega_1}\,\sin\omega_1 t\right), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2-n^2}\,.$$

Пример 5. *Движение двух масс, соединенных нитью.* К концам A и B нити, пропущенной через отверстие O в гладкой горизонтальной плоскости стола, прикреплены две точечные массы m_1 и m_2 (рис. 10). Первая остается на поверхности стола, а вторая движется по вертикали, проходящей через точку O. В начальный момент $OA = r_0$, скорость массы m_2 равна нулю, а скорость v_0 массы m_1 направлена перпендикулярно начальному положению участка нити OA. Определить движение системы, если нить считать невесомой, нерастяжимой и абсолютно гибкой.

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных лагранжевых координат можно принять полярные координаты r и φ точки A. При этом кинетическая и потенциальная энергия системы запишутся в виде

$$T = \frac{(m_1+m_2)\,\dot r^2}{2} + \frac{m_1 r^2\dot\varphi^2}{2}\,, \quad \Pi = m_2\,\mathrm{g}\,(r-r_0)\,.$$

Система уравнений Лагранжа (3.46) в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dr}\,(m_1 r^2\dot\varphi) = 0\,, \quad (m_1+m_2)\,\ddot r - m_1 r\dot\varphi^2 = -m_2\,\mathrm{g}\,.$$

Из первого уравнения следует, что существует интеграл

$$r^2\dot\varphi = C = \mathrm{const}\,. \tag{4.14}$$

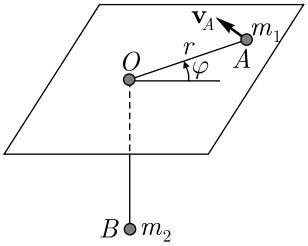

Рис. 10. Две массы, соединенные нитью

В начальный момент $r = r_0$, а $r_0\dot{\varphi}_0 = v_0$, поэтому $C = r_0 v_0$. Отметим, что полученный интеграл уравнений движения (4.14) является циклическим, так как функция Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{(m_1 + m_2)\,\dot{r}^2}{2} + \frac{m_1 r^2 \dot{\varphi}^2}{2} - m_2\,\mathrm{g}\,(r - r_0)$$

не содержит обобщенной координаты φ.

Второе уравнение Лагранжа с учетом интеграла (4.14), а также соотношения

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\,\frac{dr}{dt} = \frac{d(\dot{r}^2/2)}{dr} \tag{4.15}$$

сводятся к уравнению с разделяющими переменными

$$(m_1 + m_2)\,d\left(\frac{\dot{r}^2}{2}\right) = \left(m_1\,\frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - m_2\mathrm{g}\right) dr\,. \tag{4.16}$$

Интегрируя уравнение (4.16) и учитывая, что в начальный момент $\dot{r}(0) = \dot{r}_0 = 0$, имеем

$$\frac{(m_1 + m_2)\,\dot{r}^2}{2} = m_2\mathrm{g}(r_0 - r) + \frac{m_1 v_0^2}{2r^2}\,(r^2 - r_0^2)\,.$$

Раскладывая правую часть этого выражения на множители, получаем

$$\dot{r}^2 = \frac{2m_2\mathrm{g}}{r^2(m_1 + m_2)}\,(r_0 - r)(r - r_1)(r - r_2)\,, \tag{4.17}$$

где

$$r_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}}{4}\,r_0\,, \quad r_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}}{4}\,r_0 < 0\,, \quad \lambda = \frac{m_1 v_0^2}{r_0 m_2 \mathrm{g}}\,.$$

Из равенства (4.17) следует, что произведение $(r_0 - r)(r - r_1)(r - r_2)$ при значениях r, отличных от r_k, $k = 0, 1, 2$, должно быть положительно. Однако $r - r_2 > 0$, и поэтому величины $r_0 - r$ и $r - r_1$ должны быть одного знака. Отсюда вытекает, что радиус r лежит между r_0 и r_1, причем, как следует из неравенств

$$\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda} > 4\,, \quad \lambda > 1\,,$$
$$\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda} < 4\,, \quad \lambda < 1\,,$$

имеем

$$\begin{aligned} r_0 \leqslant r \leqslant r_1\,, \quad \lambda > 1\,, \\ r_1 \leqslant r \leqslant r_0\,, \quad \lambda < 1\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

При $\lambda = 1$, когда $r_1 = r = r_0$, точка A совершает круговое движение, а точка B не изменяет своего положения. В этом случае центробежная сила $m_1 v_0^2/r_0$, приложенная к массе m_1, равна силе тяжести $m_2\mathrm{g}$ второго груза. Если эти силы не равны, то ускорение точки B в начальный момент отлично от нуля. Используя соотношения (4.16), (4.15), находим, что

$$\ddot{r}_0 = \frac{m_2\mathrm{g}}{m_1 + m_2}\,(\lambda - 1)\,.$$

Отсюда и из неравенств (4.18) следует, что точка B при $t > 0$ движется соответственно вверх ($\lambda > 1$) или вниз ($\lambda < 1$) до остановки в положении, когда $r = r_1$. Затем начинается возвратное движение с остановкой при $r = r_0$. Далее картина движения повторяется. Следовательно, функция $r(t)$ является периодической функцией. Пусть ее период равен T_*. Так как при одном и том же значении r скорости $\dot{r}$ при движении вниз и вверх равны по величине, но противоположны по знаку, то в интервале $0 \leqslant t \leqslant T_*$ функция $r(t)$ симметрична относительно прямой $t = T_*/2$. Таким образом, периодическая функция $r(t)$ определяется значениями из интервала $0 \leqslant t \leqslant T_*/2$. Из уравнения (4.17) вытекает, что связь между r и t в этом интервале задается определенным интегралом

$$t = \pm\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2\,m_2\,\mathrm{g}}} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{r dr}{\sqrt{(r_0 - r)(r - r_1)(r - r_2)}}\,.$$

Знак плюс соответствует движению вверх ($r > r_0$), а знак минус — движению вниз ($r < r_0$). На основании таблиц интегралов[5] находим, что функция $t(r)$ при $r < r_0$ может быть представлена в виде

$$t(r) = \frac{2r_2}{\sqrt{r_0 - r_2}}\,F(x,p) + \frac{2r_0}{r_1}\,\sqrt{r_0 - r_2}\,E(x,p)\,,$$

где $F(x,p)$ и $E(x,p)$ — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода

$$F(x,p) = \int\limits_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - p^2\sin^2\alpha}}\,, \quad E(x,p) = \int\limits_0^x \sqrt{1 - p^2\sin^2\alpha}\,d\alpha\,.$$

Здесь

$$x = \arcsin\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 - r_1}}\,, \quad p = \sqrt{\frac{r_0 - r_1}{r_0 - r_2}} = \sqrt{\frac{4 - \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}}{4 - \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}}}\,.$$

[5]См. *Рыжик И. М., Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. Формула 3.1325.

В данной задаче, не умаляя общности рассуждений, можно считать, что время отсчитывается от момента, с которого начинается движение точки B вниз, поэтому можно утверждать, что функция $t(r)$, выраженная через эллиптические интегралы, полностью описывают колебательный процесс движения точки B. В частности, период ее колебаний

$$T_* = 2t(r_1) = \frac{2r_2}{\sqrt{r_0 - r_2}}\, F\left(\frac{\pi}{2}, p\right) + \frac{2r_0}{r_1}\, E\left(\frac{\pi}{2}, p\right) = \frac{2r_2}{\sqrt{r_0 - r_2}}\, K(p) + \frac{2r_0}{r_1}\, E(p)\,,$$

где $K(p)$ и $E(p)$ — полные эллиптические интегралы.

Составление и интегрирование уравнений Лагранжа второго рода, описывающих движение механических систем общего вида

Пример 6. *Качение цилиндра по плоскости.* Однородный цилиндр, поперечное сечение которого имеет форму эллипса с полуосями a и b, катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Пренебрегая силой трения качения, определить движение цилиндра, если скорость центра тяжести цилиндра в его крайнем нижнем положении равна v_0. Предполагается, что величина скорости такова, что цилиндр движется, не отрываясь от плоскости.

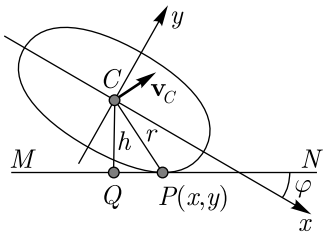

Рис. 11. Качение цилиндра по плоскости

Движение цилиндра является плоскопараллельным, и, следовательно, кинематически данная задача сводится к качению эллипса по прямой MN (рис. 11). Введем подвижную систему координат Cxy, в которой уравнение эллипса имеет канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{4.19}$$

Прямую MN, по которой катится эллипс, будем рассматривать как касательную к нему, проходящую через точку P с координатами (x, y). Точка P является мгновенным центром скоростей, поэтому ее скорость равна нулю. Угол наклона прямой MN к оси Cx обозначаем через φ. Если качение происходит без проскальзывания, то угол φ полностью задает положение цилиндра, и поэтому его можно принять за обобщенную лагранжеву координату.

По теореме Кёнига кинетическая энергия цилиндра равна

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{J_c\dot{\varphi}^2}{2}\,,$$

где M — масса цилиндра, v_c — скорость его центра масс C, $J_c = M(a^2+b^2)/4$ — момент инерции цилиндра относительно его оси.

Как указывалось, точка касания P с координатами (x, y) является мгновенным центром скоростей, и, следовательно,

$$v_c^2 = r^2\dot{\varphi}^2\,, \quad r^2 = x^2 + y^2\,.$$

Выразим r^2 через φ. Имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}\,, \quad \text{причем} \quad \frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0\,.$$

Отсюда

$$x^2b^4 - y^2a^4\operatorname{tg}^2\varphi = 0\,. \tag{4.20}$$

Рассматривая равенство (4.20) и уравнение эллипса (4.19) как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных x^2 и y^2 и решая ее, находим

$$r^2 = r^2(\sin^2\varphi) = \frac{(a^4-b^4)\sin^2\varphi + b^4}{(a^2-b^2)\sin^2\varphi + b^2}\,.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы может быть представлена в виде

$$T = M\mathrm{g}_{11}(\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2/2\,, \quad \text{где} \quad \mathrm{g}_{11}(\sin^2\varphi) = r^2(\sin^2\varphi) + (a^2+b^2)/4\,.$$

Потенциальная энергия равна $\Pi = Mgh$, где h — расстояние от центра тяжести до плоскости, по которой катится эллиптический цилиндр. Известно, что расстояние от начала координат до прямой, заданной уравнением

$$Ax' + By' + C = 0\,,$$

где $C < 0$, определяется по формуле

$$h = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\,. \tag{4.21}$$

Так как уравнение касательной к эллипсу в точке $P(x, y)$ имеет вид

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = 0\,,$$

то в соответствии с формулой (4.21) высота подъема центра тяжести цилиндра равна

$$h = 1\Big/\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}\,.$$

Подставляя в эту формулу значения x^2 и y^2, найденные из решения системы уравнений (4.19), (4.20), получаем

$$h = h(\sin^2\varphi) = \sqrt{(a^2-b^2)\,\sin^2\varphi + b^2}\,.$$

Уравнение Лагранжа в данном случае имеет интеграл энергии

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0\,, \tag{4.22}$$

где T_0 и Π_0 — кинетическая и потенциальная энергия цилиндра в момент $t_0 = 0$, когда центр тяжести цилиндра находится в крайнем нижнем положении, а его скорость равна v_0. При этом $\varphi(0) = 0,\ r(0) = h(0) = b,\ \dot\varphi(0) = v_0/b > 0$, так как всегда можно считать, что скорость v_0 совпадает по направлению с осью Cx. По приведенным начальным условиям находим

$$T_0 = M(5\,b^2 + a^2)\,v_0^2/(8b^2)\,, \quad \Pi_0 = Mgb\,.$$

Учитывая эти выражения, представляем интеграл энергии (4.22) в виде

$$\dot\varphi^2 = \frac{1}{f^2(\sin^2\varphi)} = \frac{(5b^2 + a^2)\,v_0^2 - 8gb^2(h(\sin^2\varphi) - b)}{4b^2 g_{11}(\sin^2\varphi)}\,. \tag{4.23}$$

Рассматривая это равенство как дифференциальное уравнение относительно функции $\varphi(t)$ и интегрируя его при условии, что $\dot\varphi > 0$, получаем

$$t = \int\limits_0^{\varphi} f(\sin^2\alpha)\,d\alpha\,, \quad \frac{dt}{d\varphi} = f(\sin^2\varphi) > 0\,. \tag{4.24}$$

Как следует из интеграла энергии (4.23), угловая скорость $\dot\varphi$ при $T_0 > Mg(a-b)$ в процессе движения не обращается в нуль, и, следовательно, знак $\dot\varphi$ при $t > 0$ совпадает со знаком $\dot\varphi$ при $t = 0$. По постановке задачи $\dot\varphi(0) > 0$, и, значит, равенство (4.24) в рассматриваемом случае выполняется при любом $\varphi > 0$.

Учитывая, что при любом целом n

$$f(\sin^2\alpha) = f(\sin^2(n\pi - \alpha)) = f(\sin^2(n\pi + \alpha))\,,$$

представляем интеграл (4.24) в виде

$$t = \int\limits_0^{\varphi} f(\sin^2\alpha)\,d\alpha = \int\limits_0^{n\pi} f(\sin^2\alpha)\,d\alpha + \int\limits_{n\pi}^{n\pi\pm\beta} f(\sin^2\alpha)\,d\alpha = 2nt_* \pm J(\beta)\,, \tag{4.25}$$

где $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2,\ n\pi = \varphi \mp \beta,\ J(\beta) = \int_0^\beta f(\sin^2\alpha)\,d\alpha,\ t_* = J(\pi/2)$ — время, в течение которого центр тяжести цилиндра переходит из крайнего нижнего положения в крайнее верхнее. Из соотношения (4.25) следует, что для определения закона движения, то есть задания функции $\varphi(t)$ при любом $t > 0$, достаточно задать ее при $0 \leqslant t \leqslant t_*$.

Рассмотрим случай, когда $T_0 < Mg(a-b)$. При этом, как следует из интеграла энергии (4.23), угловая скорость $\dot\varphi$ обращается в нуль при значении φ, удовлетворяющем уравнению

$$(5\,b^2 + a^2)\,v_0^2 - 8gb^2\left(\sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2\varphi + b^2} - b\right) = 0\,. \tag{4.26}$$

Движение в данном случае является периодическим, причем период T_* вычисляем по формуле

$$T_* = 4 \int\limits_0^{\varphi_{\max}} f(\sin^2 \alpha)\, d\alpha\,,$$

где $\varphi_{\max}$ — наименьший положительный корень уравнения (4.26). Соотношение между t и φ в первой четверти периода задается интегралом (4.24). Построив функцию $\varphi(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T_*/4$, ее можно продолжить, если учесть, что в данном случае, как и для математического маятника, функция φ в интервале $0 \leqslant t \leqslant T_*/2$ симметрична относительно прямой $t = T_*/4$, а

$$\varphi(t + T_*/2) = -\varphi(t)\,.$$

При малых колебаниях данной системы соотношение между t и φ, задаваемое интегралом (4.24), можно упростить, но сделать это довольно сложно. Гораздо проще в рассматриваемом случае воспользоваться уравнением Лагранжа, составленным по приближенным выражениям для кинетической энергии и обобщенной силы. Полагая в формуле для кинетической энергии метрический коэффициент $\mathrm{g}_{11}(\sin^2 \varphi)$ постоянным и равным $\mathrm{g}_{11}(0)$, имеем

$$T = M(5b^2 + a^2)\dot{\varphi}^2/8\,.$$

Обобщенную силу

$$Q_\varphi = -\frac{d\Pi}{d\varphi} = -\frac{M\mathrm{g}(a^2 - b^2)\sin 2\varphi}{2\sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 \varphi + b^2}}$$

при малых углах φ представляем в виде $Q_\varphi = -M\mathrm{g}(a^2 - b^2)\varphi/b$. При этом уравнение Лагранжа записываем в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0\,, \quad \omega^2 = \frac{4\mathrm{g}(a^2 - b^2)}{(5b^2 + a^2)b}\,.$$

Учитывая, что при $t = 0$ угол $\varphi = 0$, а $\dot{\varphi}(0) = v_0/b$, имеем

$$\varphi(t) = \frac{v_0}{b\,\omega}\, \sin \omega t\,.$$

Пример 7. *Скатывание двух цилиндров с нитью по наклонным плоскостям.* Два цилиндрических вала весом P_1 и P_2 скатываются по двум наклонным плоскостям, образующим с горизонтом углы α и β соответственно (рис. 12). Валы соединены нерастяжимой нитью, концы которой закреплены на них. Определить натяжение нити и ее ускорение при движении по наклонным плоскостям. Валы считать однородными круглыми цилиндрами. Весом нити можно пренебречь.

Система имеет три степени свободы. В качестве обобщенных лагранжевых координат можно принять перемещение нити s и углы поворота φ_1 и φ_2 цилиндров весом P_1 и P_2 соответственно. Положительные направления отсчета этих координат показаны стрелками.

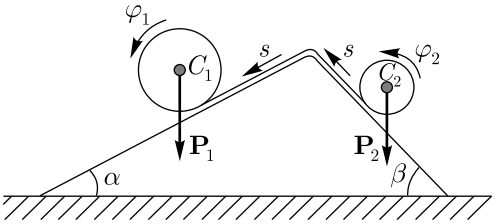

Рис. 12. Два цилиндра на наклонных плоскостях

В соответствии с теоремой Кёнига кинетическая энергия данной системы может быть представлена в виде

$$T = \frac{P_1 v_1^2}{2\mathrm{g}} + \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{P_2 v_2^2}{2\mathrm{g}} + \frac{J_2 \dot{\varphi}_2^2}{2}\,.$$

Здесь v_1, v_2 — скорости центров масс цилиндров, J_1, J_2 — их моменты инерции

$$J_k = P_k r_k^2/(2\mathrm{g})\,, \quad k = 1, 2,$$

где r_k — радиус цилиндра. Скорость v_1 складывается из скорости нити $\dot{s}$ и скорости центра цилиндра $r_1\dot{\varphi}_1$ относительно нее. Аналогично, для второго цилиндра $v_2 = \dot{s} + r_2\dot{\varphi}_2$. Отсюда

$$T = \frac{P_1(\dot{s} + r_1\dot{\varphi}_1)^2}{2\mathrm{g}} + \frac{P_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2}{4\mathrm{g}} + \frac{P_2(\dot{s} + r_2\dot{\varphi}_2)^2}{2\mathrm{g}} + \frac{P_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2^2}{4\mathrm{g}}\,.$$

Определим теперь потенциальную энергию сил тяжести первого и второго цилиндров[6]. У первого при перемещении нити на s и при угле его поворота на φ_1 центр тяжести опустится на величину $(s + r_1\varphi_1)\sin\alpha$, а у второго — поднимется соответственно на величину $(s + r_2\varphi_2)\sin\beta$. Следовательно, потенциальная энергия в данной задаче такова:

$$\Pi = -P_1\,(s + r_1\varphi_1)\,\sin\alpha + P_2\,(s + r_2\varphi_2)\,\sin\beta\,.$$

Из полученных выражений для кинетической и потенциальной энергий следует, что уравнения Лагранжа второго рода для координат s, φ_1 и φ_2 запишутся в виде

$$\frac{P_1}{\mathrm{g}}\,(\ddot{s} + r_1\ddot{\varphi}_1) + \frac{P_2}{\mathrm{g}}\,(\ddot{s} + r_2\ddot{\varphi}_2) = P_1\sin\alpha - P_2\sin\beta\,, \tag{4.27}$$

$$\frac{P_1}{\mathrm{g}}\,(\ddot{s} + r_1\ddot{\varphi}_1) + \frac{P_1 r_1}{2\mathrm{g}}\,\ddot{\varphi}_1 = P_1\sin\alpha\,, \tag{4.28}$$

$$\frac{P_2}{\mathrm{g}}\,(\ddot{s} + r_2\ddot{\varphi}_2) + \frac{P_2 r_2}{2\mathrm{g}}\,\ddot{\varphi}_2 = -P_2\sin\beta\,. \tag{4.29}$$

[6]Другой более общий способ определения обобщенных сил в этой задаче рассмотрен в примере 1 главы IX.

Вычитая из уравнения (4.27) уравнения (4.28), (4.29), находим

$$P_1 r_1 \ddot{\varphi}_1 + P_2 r_2 \ddot{\varphi}_2 = 0\,.$$

Из уравнения (4.27) с учетом этого соотношения следует, что искомое ускорение нити равно

$$\ddot{s} = \frac{(P_1 \sin\alpha - P_2 \sin\beta)\mathrm{g}}{P_1 + P_2}\,. \tag{4.30}$$

Подставляя значение $\ddot{s}$ в уравнение (4.28), получаем

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2\mathrm{g}}{3r_1}\left(\sin\alpha - \frac{P_1 \sin\alpha - P_2 \sin\beta}{P_1 + P_2}\right). \tag{4.31}$$

Аналогично может быть вычислено угловое ускорение $\ddot{\varphi}_2$ второго цилиндра.

Для определения натяжения нити F воспользуемся уравнением движения центра масс первого цилиндра. В проекции на направление движения оно имеет вид

$$\frac{P_1}{\mathrm{g}}\,(\ddot{s} + r_1\ddot{\varphi}_1) = P_1 \sin\alpha - F\,,$$

откуда, учитывая выражения (4.30), (4.31), находим

$$F = \frac{P_1 P_2(\sin\alpha + \sin\beta)}{3(P_1 + P_2)}\,.$$

Таким образом, применение к решению самых разнообразных задач голономной механики аппарата уравнений Лагранжа второго рода является эффективным и позволяет ответить на основные вопросы, связанные с характером движения рассматриваемой механической системы.

§ 5. Уравнения движения неголономной системы материальных точек в обобщенных координатах. Уравнения Ма́джи

Квазискорости. Неголономные базисы. Идеальность неголономных связей. Введение обобщенных лагранжевых координат, как было показано, удобно как в практическом, так и в теоретическом отношении. Оно позволяет подойти к описанию силового воздействия на систему материальных точек с общей точки зрения и в соответствии с этим записать второй закон Ньютона в наиболее совершенной аналитической форме — форме уравнений Лагранжа второго рода, которые были выведены для механических систем с голономными связями. Переходя теперь к системам материальных точек с неголономными связями, будем пользоваться также обобщенными координатами.

Пусть положение механической системы, состоящей из n материальных точек, однозначно может быть определено заданием обобщенных координат $q^1, q^2, \dots, q^{3n}$. Отметим, что их можно рассматривать как криволинейные координаты изображающей точки. Число обобщенных координат, равное в данном случае $3n$, обозначим через s.

Наложим на движение системы k связей, которые в обобщенных координатах выражаются уравнениями

$$\varphi^{\varkappa}(t, q, \dot{q}) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{5.1}$$

Будем считать эту систему связей неголономной, то есть будем предполагать, что уравнения (5.1) нельзя проинтегрировать ни по отдельности, ни в целом. В этом случае любые два положения механической системы можно соединить кусочно-гладкой кривой конечной длины, при движении по которой удовлетворяются уравнения связей. Эта теорема[7] позволяет дифференциальные связи первого порядка, заданные в общем случае в виде (5.1), различать по тому признаку, уменьшается или не уменьшается при их наличии размерность множества тех положений, в которые система может перейти из данного положения. Если все связи (5.1) голономны, то размерность этого множества уменьшается на k единиц по сравнению со случаем, когда связи отсутствуют. В отличие от этого связи (5.1) являются неголономными, если эта размерность не изменяется. Термин «голономный», введенный, как указывалось выше, Г. Герцем, происходит от греческих слов $o'\lambda o\zeta$ (целый, что здесь по смыслу означает интегрируемый) и $\nu o'\mu o\zeta$ (закон). Применение этого термина к соотношениям (5.1) в голономном случае указывает на то обстоятельство, что тогда дифференциальные законы (5.1) приводят к уменьшению числа независимых параметров, однозначно определяющих положение механической системы, на k единиц.

Предположим, что неголономные связи (5.1) являются идеальными. Тогда, как было показано в § 3, уравнение движения изображающей точки в векторной форме имеет вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_{\varkappa}\,\boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa}\,, \quad \boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa} = (\partial\varphi^{\varkappa}/\partial\dot{q}^{\sigma})\,\mathbf{e}^{\sigma}\,. \tag{5.2}$$

Введем функции

$$v_*^{\rho} = v_*^{\rho}(t, q, \dot{q})\,, \quad \rho = \overline{1, s}\,, \tag{5.3}$$

[7] См. работы: *Парс Л.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. С. 31–32; *Рашевский П. К.* О соединении любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук. 1938. № 2. С. 83–94; *Chow W. L.* Systeme von linearen partiellen differentialen Gleichungen erster Ordnung // Math. Ann. 1939. Bd. 117. S. 98–105.

и будем рассматривать значения v_*^ρ как новые переменные относительно переменных $\dot q^\sigma$, считая переменные t и q параметрами. Предполагая, что условия разрешимости выполнены, получаем

$$\dot q^\sigma = \dot q^\sigma(t, q, v_*)\,, \quad v_* = (v_*^1, v_*^2, \dots, v_*^s)\,. \tag{5.4}$$

Таким образом, наряду с обобщенными скоростями $\dot q = (\dot q^1, \dots, \dot q^s)$ введены новые переменные $v_* = (v_*^1, \dots, v_*^s)$, имеющие смысл новых обобщенных скоростей. Однако, если обобщенным скоростям $\dot q^\sigma$, $\sigma = \overline{1, s}$, соответствовали обобщенные координаты q^σ, $\sigma = \overline{1, s}$, то новым переменным v_*^ρ, $\rho = \overline{1, s}$, могут не соответствовать какие-либо новые обобщенные координаты. Поэтому v_*^ρ, $\rho = \overline{1, s}$, называются *квазискоростями* (*псевдоскоростями*). Например, при изучении вращения твердого тела вокруг неподвижной точки удобно ввести углы Эйлера ψ, θ, φ, являющиеся обобщенными координатами для задания положения твердого тела. Этим обобщенным координатам соответствуют обобщенные скорости $\dot\psi, \dot\theta, \dot\varphi$. Но, с другой стороны, для задания угловой скорости вращения твердого тела $\boldsymbol{\omega}$ можно ввести проекции этого вектора $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на подвижные оси. Однако этим величинам нельзя сопоставить производные от некоторых углов поворота. Поэтому введенные характеристики скорости вращения $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ приходится называть не обобщенными скоростями, а квазискоростями, или псевдоскоростями. Разница в этих наименованиях обусловлена использованием в первом случае латинского языка, а во втором — греческого.

Вычисляя частные дифференциалы этих функций при фиксированных t и q^σ, находим

$$\delta' v_*^\rho = \frac{\partial v_*^\rho(t, q, \dot q)}{\partial \dot q^\sigma}\,\delta'\dot q^\sigma\,, \quad \delta'\dot q^\sigma = \frac{\partial \dot q^\sigma(t, q, v_*)}{\partial v_*^\tau}\,\delta' v_*^\tau\,,$$
$$\rho, \sigma, \tau = \overline{1, s}\,,$$

откуда

$$\delta' v_*^\rho = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma}\,\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\tau}\,\delta' v_*^\tau = \delta_\tau^\rho\,\delta' v_*^\tau\,,$$

где

$$\delta_\tau^\rho = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma}\,\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\tau} = \begin{cases} 1\,, & \rho = \tau\,, \\ 0\,, & \rho \neq \tau\,. \end{cases} \tag{5.5}$$

Предположение о том, что функции (5.3), (5.4) имеют непрерывные частные производные, позволяет ввести две системы линейно независимых векторов

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\tau = \frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\tau}\,\mathbf{e}_\sigma\,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^\rho = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\tau}\,\mathbf{e}^\tau\,, \quad \rho, \sigma, \tau = \overline{1, s}\,. \tag{5.6}$$

Первая система вводится с помощью основного базиса, а вторая — с помощью взаимного базиса исходной криволинейной системы координат q^σ.

Напомним, что векторы $\mathbf{e}_\sigma$ и $\mathbf{e}^\tau$ для изображающей точки задаются формулами

$$\mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial y_\mu}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{i}_\mu\,, \quad \mathrm{g}_{\sigma\tau} = \mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}_\tau\,, \quad \mathbf{e}^\tau = \mathrm{g}^{\tau\sigma}\,\mathbf{e}_\sigma\,,$$

которые полностью аналогичны формулам, подробно рассмотренным в кинематике одной точки. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, представленных соответственно через ковариантные и контравариантные составляющие $\mathbf{a} = a_\tau \mathbf{e}^\tau$, $\mathbf{b} = b^\sigma \mathbf{e}_\sigma$, имеет вид

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_\sigma b^\sigma\,. \tag{5.7}$$

Учитывая эту формулу, а также соотношения (5.5), (5.6), получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\rho \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\tau = \delta^\rho_\tau = \begin{cases} 1\,, & \rho = \tau\,, \\ 0\,, & \rho \neq \tau\,. \end{cases}$$

Отсюда следует, что систему векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^\rho$ можно рассматривать как взаимный базис относительно базиса, задаваемого векторами $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau$. Векторы (5.6) называются *векторами неголономных базисов*.

Пользуясь произволом в выборе функций $v^\rho_*(t, q, \dot q)$, берем за переменные $v^{l+\varkappa}_*$ функции связей $\varphi^\varkappa(t, q, \dot q)$, то есть полагаем

$$v^{l+\varkappa}_* = \varphi^\varkappa(t, q, \dot q)\,, \quad l = s - k\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,.$$

В данном случае в соответствии с формулами (5.6) имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \dot q^\tau}\,\mathbf{e}^\tau = \boldsymbol{\nabla}'\varphi^\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{5.8}$$

Дифференцируя уравнения связей (5.1), находим

$$\frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial q^\sigma}\,\dot q^\sigma + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot q^\sigma}\,\ddot q^{\,\sigma} = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{5.9}$$

В соответствии с выражением (1.12) главы V вектор ускорения $\mathbf{W}$ в контравариантном представлении имеет вид

$$\mathbf{W} = (\ddot q^{\,\sigma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,\dot q^\alpha \dot q^\beta)\,\mathbf{e}_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \quad \alpha, \beta = \overline{0, s}\,, \tag{5.10}$$

где $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \mathrm{g}^{\sigma\tau}\,\Gamma_{\tau,\alpha\beta}$, $q^0 = t$. Из соотношений (5.7), (5.8), (5.10) следует, что

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\cdot\mathbf{W} = \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial\dot{q}^{\sigma}}\,(\ddot{q}^{\,\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta})\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Отсюда, учитывая равенства (5.9), получаем

$$\begin{gathered}\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \chi^{\,l+\varkappa}(t,q,\dot{q})\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,\\ \chi^{\,l+\varkappa}(t,q,\dot{q}) = -\frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial q^{\sigma}}\,\dot{q}^{\sigma} + \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial\dot{q}^{\sigma}}\,\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\,.\end{gathered} \tag{5.11}$$

Совокупность k скалярных величин $\chi^{\,l+\varkappa}$ определяет в подпространстве с базисом $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{l+1}, \boldsymbol{\varepsilon}^{l+2}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^{l+k}\}$ некоторый вектор $\mathbf{W}^K$. Разлагая полное ускорение $\mathbf{W}$ на вектор $\mathbf{W}^K$ и ортогональный ему вектор $\mathbf{W}_L$, можно записать

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_L + \mathbf{W}^K\,, \quad \mathbf{W}_L\cdot\mathbf{W}^K = 0\,, \tag{5.12}$$

где $\mathbf{W}_L = \widetilde{W}^{\lambda}_{L}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}$, $\lambda = \overline{1,l}$, $\mathbf{W}^K = \widetilde{W}^{K}_{l+\varkappa}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$. Здесь значок «волна» подчеркивает, что компоненты вектора ускорения вычисляются для неголономных базисов. Данное разложение вектора $\mathbf{W}$ условно может быть проиллюстрировано рис. 13. Индексы L и K векторов $\mathbf{W}_L$ и $\mathbf{W}^K$ указывают соответственно на размерность l и k подпространств, которым они принадлежат.

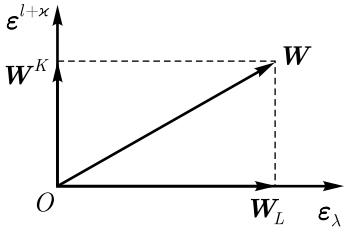

Рис. 13. Разложение ускорения по векторам неголономных базисов

Для вычисления величин $\widetilde{W}^{\lambda}_{L}$ умножим левую и правую части равенства (5.12) скалярно на $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu}$, $\mu = \overline{1,l}$. При этом получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\widetilde{W}^{\lambda}_{L}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu} = \mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu}\,, \quad \lambda,\mu = \overline{1,l}\,,$$

относительно неизвестных $\widetilde{W}^{\lambda}_{L}$. Применяя к решению этой системы формулы Крамера, выражаем величины $\widetilde{W}^{\lambda}_{L}$ через скалярные произведения

$\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\mu,\ \mu=\overline{1,l}$. Отсюда следует принципиально важное для наших рассуждений утверждение, что вектор $\mathbf{W}_L$ полностью определяется набором величин $\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\mu,\ \mu=\overline{1,l}$. Аналогично показываем, что вектор $\mathbf{W}^K$ определяется совокупностью величин $\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa},\ \varkappa=\overline{1,k}$. Значения же $\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$, как следует из соотношений (5.11), при заданных $t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma$ находим с помощью коэффициентов $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$, которые вычисляются через элементы $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$, и уравнений связей. На основании этого можно сказать, что вектор $\mathbf{W}^K$ принадлежит тому подпространству, где вектор ускорения как функция времени, положения системы и ее скоростей полностью определяется коэффициентами $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$ и уравнениями связей. В то же время ничего определенного о влиянии связей на вектор $\mathbf{W}_L$ сказать нельзя, так как его можно исключить из соотношений (5.11) и записать последние в виде

$$\mathbf{W}^K\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}=\chi^{\,l+\varkappa}(t,q,\dot{q})\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,.$$

Рассмотрим закон Ньютона применительно к вектору $\mathbf{W}^K$:

$$M\mathbf{W}^K=\mathbf{Y}^K+\mathbf{R}^K\,. \tag{5.13}$$

Здесь

$$\mathbf{Y}^K=\widetilde{Y}^K_{l+\varkappa}\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,,\quad \mathbf{R}^K=\widetilde{R}^K_{l+\varkappa}\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,.$$

Вектор $\mathbf{R}^K$ добавляем к активной силе $\mathbf{Y}^K$ для того, чтобы получить в сумме вектор $M\mathbf{W}^K$, который полностью задается уравнениями связей.

Ускорению $\mathbf{W}_L$, вообще говоря, соответствует уравнение Ньютона

$$M\mathbf{W}_L=\mathbf{Y}_L+\mathbf{R}_L\,, \tag{5.14}$$

где

$$\mathbf{Y}_L=\widetilde{Y}^\lambda_L\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda\,,\quad \mathbf{R}_L=\widetilde{R}^\lambda_L\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda\,,\quad \lambda=\overline{1,l}\,.$$

Поскольку влияние связей на вектор $\mathbf{W}_L$ с помощью лишь математического задания их уравнений определено быть не может, так как вектор $\mathbf{W}_L$, как было показано выше, можно исключить из уравнений (5.11), то уравнение (5.14) выполняется при любом $\mathbf{R}_L$, и, в частности, при $\mathbf{R}_L=0$. Тогда вектор $\mathbf{W}_L$, перпендикулярный вектору $\mathbf{W}^K$, не зависит от связей, и закон Ньютона в соответствующем подпространстве имеет вид

$$M\mathbf{W}_L=\mathbf{Y}_L\,. \tag{5.15}$$

Связи, не влияющие на вектор $\mathbf{W}_L$, называются *идеальными*. Они вполне определяются своими аналитическими представлениями и позволяют записать второй закон Ньютона в том же виде (5.15), что и для свободной

системы. При этом, однако, существенно, что этот закон записывается применительно к подпространству, ортогональному подпространству реакций, в котором ускорение полностью определяется уравнениями связей.

Складывая уравнения (5.13) и (5.15), получаем

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}^K\,.$$

Сравнивая уравнение в этой форме с уравнением (5.2), видим, что при идеальных неголономных связях

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa\, \boldsymbol{\nabla}'\varphi^\varkappa\,.$$

Уравнения движения неголономных систем. Уравнения Ма́джи. Вернемся к векторному равенству (5.15). Так как составляющая $\mathbf{a}_L = a_L^\lambda\, \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$ произвольного вектора $\mathbf{a}$ полностью задается набором величин $\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$, $\lambda = \overline{1,l}$, то одно уравнение (5.15) эквивалентно системе l уравнений

$$(M\mathbf{W} - \mathbf{Y})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,. \tag{5.16}$$

Эти уравнения, являющиеся скалярной формой выражения второго закона Ньютона (5.15), будем называть *уравнениями динамики при несвободном движении*. Подставляя в уравнения (5.16) векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$, выраженные через векторы $\mathbf{e}_\sigma$ основного базиса, с учетом (5.7) записываем

$$(MW_\sigma - Q_\sigma)\,\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,. \tag{5.17}$$

Полученные уравнения движения (5.17) называются *уравнениями Ма́джи*[8].

Как было показано, при идеальных связях имеем

$$M\mathbf{W} - \mathbf{Y} = \mathbf{R} = \mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa\, \boldsymbol{\nabla}'\varphi^\varkappa = \Lambda_\varkappa\, \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,.$$

Отсюда следует, что

$$(M\mathbf{W} - \mathbf{Y})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{l+\varkappa} = \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

[8]Уравнения в этой форме были получены Маджи в 1896 г. для случая линейных неголономных связей первого порядка при помощи обобщенного принципа Даламбера — Лагранжа. В 1931 г. эти уравнения были получены А. Пшеборским для случая нелинейных связей первого порядка и линейных связей второго порядка при помощи того же обобщенного принципа.

Учитывая соотношения (5.6), (5.7), эти уравнения можно записать в виде

$$(MW_\sigma - Q_\sigma)\,\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^{l+\varkappa}} = \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{5.18}$$

Уравнения (5.17), (5.18), рассматриваемые совместно, представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных обобщенных сил

$$R_\sigma = MW_\sigma - Q_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,,$$

при добавлении которых к силам Q_σ движение удовлетворяет уравнениям связей. Представим данную систему в форме

$$\beta_\rho^\sigma R_\sigma = \Lambda_\rho^*\,, \quad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,,$$

где

$$\beta_\rho^\sigma = \frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\rho}\,, \quad \Lambda_\rho^* = \begin{cases} 0\,, & \rho = \overline{1,l}\,, \\ \Lambda_{\rho-l}\,, & \rho = \overline{l+1,s}\,. \end{cases}$$

Учитывая полную аналогию этой системы с системой (3.30), имеем

$$R_\sigma = \Lambda_\rho^* \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma} = \Lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \dot q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,.$$

Это система *уравнений Лагранжа первого рода в криволинейных координатах для неголономных систем*

$$MW_\sigma = Q_\sigma + \Lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi^\varkappa}{\partial \dot q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,.$$

Часто ее называют и системой *уравнений Лагранжа второго рода с множителями для неголономных систем.*

Выражениями (5.16), (5.17) задается вектор $M\mathbf{W}_L$. Вектор $\mathbf{W}^K$ на основании соотношений (5.9), (5.10) и (5.11) находим дифференцированием уравнений связей. Следовательно, присоединяя к уравнениям (5.17) уравнения связей, получаем замкнутую систему уравнений относительно вектора $M\mathbf{W}$. Так как вектор $\mathbf{W}$ может быть представлен в виде (5.10), то задача о движении, удовлетворяющем уравнениям связей, может быть сведена к получению системы дифференциальных уравнений, разрешенных относительно обобщенных ускорений:

$$\ddot q^\sigma = F^\sigma(t,q,\dot q)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,.$$

Для приведения задачи к системе такого вида прежде всего необходимо найти частные производные $\partial\dot{q}^\sigma/\partial v_*^\rho = \beta_\rho^\sigma$ как функции t, q и $\dot{q}$. Для этого к системе функций $v_*^{l+\varkappa} = \varphi^\varkappa(t,q,\dot{q})$ следует присоединить l функций $v_*^\lambda(t,q,\dot{q})$, которые выбираем так, чтобы они имели физический смысл скоростей, характерных для рассматриваемой задачи. Введя функции $v_*^\rho(t,q,\dot{q}),\ \rho=\overline{1,s}$, вычисляем их производные

$$\frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot{q}^\sigma} = \alpha_\sigma^\rho(t,q,\dot{q})\,, \quad \rho,\sigma=\overline{1,s}\,.$$

Коэффициенты матрицы $[\beta_\rho^\sigma]$, обратной к матрице $[\alpha_\sigma^\rho]$, находим при этом по формулам Крамера. Таким образом, для определения функций $\beta_\rho^\sigma\ (t,q,\dot{q})$ достаточно знать только исходные функции $v_*^\rho(t,q,\dot{q}),\ \rho=\overline{1,s}$. Это очень существенно, так как при нелинейной зависимости уравнений связей от обобщенных скоростей вычисление самих функций $\dot{q}^\sigma(t,q,v_*)$ может оказаться достаточно сложным. Определив коэффициенты β_λ^σ, входящие в уравнения (5.17), с учетом того, что выражения MW_σ вычисляем по формулам

$$MW_\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = M(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\ddot{q}^\tau + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta)\,,$$
$$\sigma,\tau=\overline{1,s}\,, \quad \alpha,\beta=\overline{0,s}\,,$$

имеем

$$(M(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\ddot{q}^\tau + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta) - Q_\sigma)\,\beta_\lambda^\sigma\ (t,q,\dot{q}) = 0\,, \quad \lambda=\overline{1,l}\,. \tag{5.19}$$

Присоединив к этой системе k уравнений связей (5.1), получаем замкнутую систему s дифференциальных уравнений для нахождения функций $q^\sigma(t)$, $\sigma=\overline{1,s}$.

Специальный вид задания квазискоростей. Во многих случаях целесообразным является следующий выбор новых переменных v_*^ρ:

$$v_*^\lambda = \dot{q}^\lambda\,, \quad v_*^{l+\varkappa} = \varphi^\varkappa(t,q,\dot{q})\,, \quad \lambda=\overline{1,l}\,, \quad \varkappa=\overline{1,k}\,. \tag{5.20}$$

При этом предполагается, что условия, позволяющие разрешить уравнения (5.20) относительно $\dot{q}^\sigma$, выполнены. Из соотношений (5.20) непосредственно следует, что

$$\beta_\rho^\lambda = \begin{cases} 1\,, & \lambda=\rho\,, \\ 0\,, & \lambda\neq\rho\,, \end{cases} \quad \lambda=\overline{1,l}\,, \quad \rho=\overline{1,s}\,. \tag{5.21}$$

Для определения остальных коэффициентов $\beta_{\rho}^{\,l+i}$ вычислим частный дифференциал функции φ^i при фиксированных t и q^σ:

$$\delta' v_*^{l+i} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial \dot q^\lambda}\,\delta'\dot q^\lambda + \frac{\partial \varphi^i}{\partial \dot q^{\,l+j}}\,\delta'\dot q^{\,l+j}\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad i,j = \overline{1,k}\,.$$

Рассматривая данные соотношения как систему k линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\delta'\dot q^{\,l+j}$ и решая ее по формулам Крамера, получаем

$$\delta'\dot q^{\,l+j} = \frac{A_i^j}{\det[a_j^i]}\left(\delta' v_*^{l+i} - \frac{\partial \varphi^i}{\partial \dot q^\lambda}\,\delta' v_*^\lambda\right),$$

где $a_j^i = \partial\varphi^i/\partial\dot q^{\,l+j}$ $(i,j = \overline{1,k})$, а A_i^j — алгебраическое дополнение элемента a_j^i в определителе $\det[a_j^i]$. Вместе с тем, поскольку в соответствии с принятым обозначением $\delta'\dot q^{\,l+j} = \beta_\rho^{l+j}\,\delta' v_*^\rho$, то

$$\beta_\lambda^{l+j} = -\frac{A_i^j\,\frac{\partial\varphi^i}{\partial\dot q^\lambda}}{\det[a_j^i]}\,, \quad \beta_{l+i}^{l+j} = \frac{A_i^j}{\det[a_j^i]}\,. \tag{5.22}$$

Подставляя в систему уравнений (5.19) вычисленные значения коэффициентов β_λ^σ и учитывая, что часть из них равна нулю и единице, получаем

$$M(\mathrm{g}_{\lambda\sigma} + \mathrm{g}_{l+j,\sigma}\,\beta_\lambda^{l+j})\,\ddot q^{\,\sigma} + M(\Gamma_{\lambda,\alpha\beta} + \Gamma_{l+j,\alpha\beta}\,\beta_\lambda^{l+j})\,\dot q^{\,\alpha}\dot q^{\,\beta} = Q_\lambda + Q_{l+j}\,\beta_\lambda^{l+j}\,,$$

или

$$M(\widetilde{\mathrm{g}}_{\lambda\sigma}\,\ddot q^{\,\sigma} + \widetilde\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}\,\dot q^{\,\alpha}\dot q^{\,\beta}) = \widetilde Q_\lambda\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,. \tag{5.23}$$

Точно так же формулы (5.18) приводим к виду

$$M(\widetilde{\mathrm{g}}_{l+i,\sigma}\,\ddot q^{\,\sigma} + \widetilde\Gamma_{l+i,\alpha\beta}\,\dot q^{\,\alpha}\dot q^{\,\beta}) - \widetilde Q_{l+i} = \Lambda_i\,, \quad i = \overline{1,k}\,, \tag{5.24}$$

где

$$\begin{gathered}
\widetilde{\mathrm{g}}_{\lambda\sigma} = \mathrm{g}_{\lambda\sigma} + \mathrm{g}_{l+j,\sigma}\,\beta_\lambda^{l+j}\,, \quad \widetilde\Gamma_{\lambda,\alpha\beta} = \Gamma_{\lambda,\alpha\beta} + \Gamma_{l+j,\alpha\beta}\,\beta_\lambda^{l+j}\,,\\
\widetilde{\mathrm{g}}_{l+i,\sigma} = \mathrm{g}_{l+j,\sigma}\,\beta_{l+i}^{l+j}\,, \quad \widetilde\Gamma_{l+i,\alpha\beta} = \Gamma_{l+j,\alpha\beta}\,\beta_{l+i}^{l+j}\,,\\
\widetilde Q_\lambda = Q_\lambda + Q_{l+j}\,\beta_\lambda^{l+j}\,, \quad \widetilde Q_{l+i} = Q_{l+j}\,\beta_{l+i}^{l+j}\,,\\
\lambda = \overline{1,l}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,, \quad i,j = \overline{1,k}\,.
\end{gathered}$$

Таким образом, в случае неголономных связей первого порядка форма уравнений движения та же, что и для голономных связей, с той лишь разницей, что функции $\widetilde{\mathrm{g}}_{\lambda\sigma}$ и $\widetilde\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}$ отличны от $\mathrm{g}_{\lambda\sigma}$ и $\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}$. Если связи

линейны относительно обобщенных скоростей, то $\widetilde{g}_{\lambda\sigma}$ и $\widetilde{\Gamma}_{\lambda,\alpha\beta}$ не зависят от $\dot{q}^\sigma$.

Для полного решения механической задачи необходимо добавить к системе (5.23) k уравнений связей (5.1). В результате получаем систему s дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций q^σ, $\sigma = \overline{1,s}$.

В случае нелинейности связей относительно $\dot{q}^\sigma$ уравнения этих связей удобно представить следующим образом:

$$\dot{\varphi}^{\varkappa} = \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^{\,\sigma} + \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial\dot{q}^{\,\sigma}}\,\ddot{q}^{\,\sigma} = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Добавляя эти соотношения к системе (5.23) и разрешая полученную совокупность уравнений относительно $\ddot{q}^{\,\sigma}$, имеем систему дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{q}^{\,\sigma} = F^\sigma(t,q,\dot{q})\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{5.25}$$

Обозначая $\dot{q}^\sigma = \widehat{v}^\sigma$, записываем систему уравнений в нормальной форме

$$\frac{d\widehat{v}^\sigma}{dt} = F^\sigma(t,q,\widehat{v})\,, \quad \frac{dq^\sigma}{dt} = \widehat{v}^\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{5.26}$$

эквивалентной системе (5.25). Здесь неизвестными функциями являются q^σ, $\widehat{v}^\sigma$, $\sigma = \overline{1,s}$. Такая форма выражения весьма удобна как при качественном исследовании задачи, так и при численном ее решении.

Отметим, что начальные условия при решении системы (5.26) должны удовлетворять уравнениям связей $\varphi^{\varkappa}(t_0,q_0,\widehat{v}_0) = 0$.

Определив из системы (5.26) функции $q^\sigma(t)$ и подставив их в уравнения (5.24), найдем обобщенные реакции $\Lambda_i(t)$.

Пример 8. *Движение двухмассовой системы при наличии голономной и неголономной связей* (применение уравнений Маджи). Рассмотрим движение в горизонтальной плоскости Oxy двух точек $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, имеющих массы m и соединенных невесомым нерастяжимым стержнем длиной $2l$ (рис. 14,*а*). Посередине стержня в точке C перпендикулярно к нему горизонтально прикреплен короткий полоз с загнутыми краями (конек). Полоз имеет острую кромку, благодаря чему он допускает перемещение без трения вдоль кромки, но препятствует движению в перпендикулярном направлении. Предполагается, что из-за достаточно малой длины полоза и закругленности его концов система может свободно вращаться вокруг своего центра.

На движение точек наложена голономная связь

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (2l)^2\,,$$

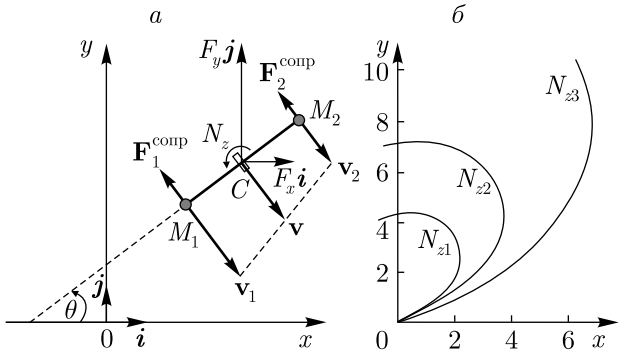

Рис. 14. Двухмассовая система при неголономной связи

поэтому положение системы однозначно определяется тремя параметрами. Примем за обобщенные координаты декартовы координаты x, y середины стержня и угол поворота θ стержня относительно оси Oz:

$$q^1 = x\,, \qquad q^2 = \theta\,, \qquad q^3 = y\,. \tag{5.27}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} + \dot{\theta} l \sin\theta\,, \qquad & \dot{y}_1 &= \dot{y} - \dot{\theta} l \cos\theta\,, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x} - \dot{\theta} l \sin\theta\,, \qquad & \dot{y}_2 &= \dot{y} + \dot{\theta} l \cos\theta\,. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Остановимся на выводе уравнения неголономной связи. Точка C середины стержня из-за наличия в ней полоза может иметь только скорость, перпендикулярную оси стержня. В § 5 главы II было показано, что проекции скоростей двух любых точек твердого тела на проходящую через них прямую равны друг другу. Из-за наличия конька скорость середины стержня $\mathbf{v}$ не имеет проекции на ось стержня, поэтому не будут иметь этой проекции и скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ точек M_1 и M_2. Условие этого можно записать в виде

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2}\,.$$

Отсюда, используя формулы (5.28), получаем

$$\dot{\theta}\,(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) = 0\,.$$

Это уравнение выполняется при $\dot{\theta} = 0$ или при

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta = 0\,. \tag{5.29}$$

В случае $\dot{\theta} = 0$ угол θ оказывается постоянным, поэтому имеем поступательное движение при прямолинейном перемещении точки C. Такое движение осуществляется при длинном полозе, препятствующем повороту системы вокруг точки C.

Так как в примере рассматривается случай короткого полоза, то остановимся на задании неголономной связи в виде (5.29). (Отметим, что система, представленная на рис. 9,*а*, при наличии неголономной связи (5.29) может, в частности, интерпретировать движение на одном коньке вертикально стоящего фигуриста, а в случае $\dot\theta = 0$ — движение конькобежца на беговых коньках.)

Обратим внимание на то, что связь (5.29) выполняется как при $\dot\theta = 0$, так и при $\dot\theta \neq 0$. Поэтому нельзя считать, что уравнение $\dot\theta(\dot x\cos\theta + \dot y\sin\theta) = 0$ является более общим, чем уравнение (5.29), и, следовательно, нельзя трактовать его как пример нелинейной неголономной связи. Поэтому в классической неголономной механике считается, что связи, отражающие отсутствие проскальзывания рассматриваемого тела при его перекатывании по неподвижной поверхности, выражаются линейными относительно обобщенных скоростей функциями.

Для составления уравнений движения напишем вначале выражение кинетической энергии T. В нашем случае при учете формул (5.28) получим

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot x_2^2 + \dot y_2^2\right) = m\left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot\theta^2 l^2\right).$$

Используя это выражение, имеем

$$MW_1 = 2m\ddot x\,, \qquad MW_2 = 2ml^2\ddot\theta\,, \qquad MW_3 = 2m\ddot y\,, \tag{5.30}$$

где $M = 2m$ — масса изображающей точки.

В соответствии с общей теорией новые скорости v_*^1, v_*^2, v_*^3 введем по формулам $v_*^1 = \dot q^1 \equiv \dot x$, $v_*^2 = \dot q^2 \equiv \dot\theta$, $v_*^3 = \dot x\cos\theta + \dot y\sin\theta$, откуда получаем

$$\dot x \equiv \dot q^1 = v_*^1\,, \qquad \dot\theta \equiv \dot q^2 = v_*^2\,, \qquad \dot y \equiv \dot q^3 = \frac{v_*^3 - v_*^1\cos\theta}{\sin\theta}\,. \tag{5.31}$$

Из выражений (5.30), (5.31) следует, что уравнения Маджи (5.17) в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{gathered} 2m\ddot x - Q_1 + (2m\ddot y - Q_3)(-\operatorname{ctg}\theta) = 0\,, \\ 2ml^2\ddot\theta - Q_2 = 0\,. \end{gathered} \tag{5.32}$$

Отметим, что здесь второе уравнение совпадает с обычным уравнением Лагранжа второго рода, соответствующим обобщенной координате θ, так как в уравнении неголономной связи (5.29) отсутствует скорость $\dot\theta$.

Система уравнений (5.32) должна быть дополнена уравнением связи (5.29). Дифференцируя его по времени, получаем

$$\ddot x\cos\theta - \dot x\dot\theta\sin\theta + \ddot y\sin\theta + \dot y\dot\theta\cos\theta = 0\,. \tag{5.33}$$

Разрешая систему уравнений (5.32) и (5.33) как систему алгебраических линейных неоднородных уравнений относительно $\ddot x$, $\ddot y$, $\ddot\theta$ и записывая полученные результаты как систему шести дифференциальных уравнений первого порядка,

имеем

$$\dot{x} = v_x\,, \quad \dot{y} = v_y\,, \quad \dot{\theta} = \omega_z\,,$$
$$\dot{v}_x = \omega_z(v_x \sin\theta - v_y \cos\theta)\cos\theta + (Q_1 \sin\theta - Q_3 \cos\theta)\sin\theta/(2m)\,,$$
$$\dot{v}_y = \omega_z(v_x \sin\theta - v_y \cos\theta)\sin\theta - (Q_1 \sin\theta - Q_3 \cos\theta)\cos\theta/(2m)\,,$$
$$\dot{\omega}_z = Q_2/(2ml^2)\,.$$

Эта нормальная форма системы дифференциальных уравнений удобна для применения численных методов ее интегрирования.

Для вычисления обобщенной реакции неголономной связи согласно формуле (5.18) имеем

$$\Lambda = (2m\ddot{y} - Q_3)/\sin\theta\,.$$

Рассмотрим движение системы под действием силы $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$, приложенной к точке C, и при наличии момента $\mathbf{N} = N_z\mathbf{k}$. Помимо этого учтем силы сопротивления $\mathbf{F}_1^{\text{сопр}} = -\mu\mathbf{v}_1$, $\mathbf{F}_2^{\text{сопр}} = -\mu\mathbf{v}_2$ ($\mu = \text{const}$), приложенные к точкам M_1, M_2 (рис. 14,*а*). При этом обобщенным координатам (5.27) будут соответствовать следующие обобщенные силы:

$$Q_1 \equiv Q_x = F_x - 2\mu\dot{x}\,, \quad Q_2 \equiv Q_\theta = N_z - 2\mu l^2\dot{\theta}\,, \quad Q_3 \equiv Q_y = F_y - 2\mu\dot{y}\,.$$

При проведении конкретных расчетов принималось $m = 7$ кг, $l = 1$ м, $\mu = 0.6$ Н·с/м, $F_x = F_y = 2$ Н. На рис. 14,*б* представлены три траектории, прочерчиваемые точкой C в течение 15 с при $N_{z1} = 1$ Н·м, $N_{z2} = 0.65$ Н·м, $N_{z3} = 0.3$ Н·м. Начальные данные приняты нулевыми.

§ 6. Уравнения Аппеля для системы материальных точек

Уравнения Аппеля. Рассмотрим еще одну возможную форму уравнений (5.17). При выводе этих уравнений будут использоваться преобразования (5.20).

Координатные векторы $\mathbf{e}_\sigma$ могут быть представлены в виде

$$\mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \ddot{q}^\sigma}\,, \tag{6.1}$$

так как

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma\,, \quad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q^\sigma}\,\dot{q}^\sigma + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\ddot{q}^{\,\sigma}\,.$$

На основании (6.1) выражение для MW_σ можно записать так:

$$MW_\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = M\mathbf{W}\cdot\mathbf{e}_\sigma = M\mathbf{W}\cdot\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \ddot{q}^\sigma} = \frac{\partial S(t,q,\dot{q},\ddot{q})}{\partial \ddot{q}^\sigma}\,. \tag{6.2}$$

Здесь $S = M\mathbf{W}^2/2$ — *функция Аппéля*. Из последней формулы следует, что уравнения Лагранжа второго рода (3.19), (3.20), справедливые лишь для голономных систем, эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^\lambda} = Q_\lambda\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \qquad \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^{\,l+\varkappa}} = Q_{l+\varkappa} + \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,$$

которые называются *уравнениями Аппéля*. Отметим, что функцию $S(t,q,\dot{q},\ddot{q})$ удобно находить по формуле

$$\begin{gathered} S(t,q,\dot{q},\ddot{q}) = \frac{M\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}}{2} = \frac{M}{2}\,W_\sigma W^\sigma = \\ = \frac{M}{2}\,(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta)\,(\ddot{q}^{\,\sigma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta)\,, \\ \sigma,\tau = \overline{1,s}\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,, \quad q^0 = t\,, \quad \dot{q}^0 = 1\,. \end{gathered}$$

Если связи неголономны и первого порядка, то на основании (6.2) уравнения (5.17) можно записать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}\,\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v^\lambda_*} = Q_\sigma\,\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v^\lambda_*}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{6.3}$$

Напомним, что функции $\partial\dot{q}^\sigma/\partial v^\lambda_* = \beta^\sigma_\lambda(t,q,\dot{q})$ при введении преобразований (5.20) вычисляем по формулам (5.21), (5.22), которые были получены дифференцированием соотношений (5.20).

К уравнениям (6.3) следует добавить уравнения связей

$$\varphi^\varkappa(t,q,\dot{q}) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{6.4}$$

Рассматривая систему уравнений (6.3) совместно с уравнениями связей, получаем замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $q^\sigma(t)$, общее число которых $s = l + k$ равно числу уравнений.

Определив функции $q^\sigma(t)$ из решения системы (6.3), (6.4), по формулам (5.18) находим обобщенные реакции

$$\Lambda_\varkappa = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^\sigma}\,\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v^{l+\varkappa}_*} - Q_\sigma\,\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v^{l+\varkappa}_*}\,.$$

Уравнениям Аппеля (6.3) при неголономных связях первого порядка можно придать более общую форму, которая, как будет показано, справедлива и для линейных неголономных связей второго порядка.

Дифференцируя соотношения (5.20) по t, получаем

$$\dot v_*^\lambda = \ddot q^\lambda\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,,$$
$$\dot v_*^{l+\varkappa} = \psi^\varkappa(t,q,\dot q,\ddot q) = \dot\varphi^\varkappa(t,q,\dot q) = \frac{\partial\varphi^\varkappa}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^\varkappa}{\partial q^\sigma}\,\dot q^\sigma + \frac{\partial\varphi^\varkappa}{\partial\dot q^\sigma}\,\ddot q^{\,\sigma}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Введем функции w_*^ρ формулами

$$w_*^\lambda = \ddot q^{\,\lambda}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,,$$
$$w_*^{l+\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q) = \frac{\partial\varphi^\varkappa}{\partial\dot q^\sigma}\,\ddot q^{\,\sigma} = \psi^\varkappa(t,q,\dot q,\ddot q) - \psi^\varkappa(t,q,\dot q,0)\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{6.5}$$

Так как из сравнения соотношений (5.20) и (6.5) следует, что

$$\frac{\partial w_*^\rho}{\partial\ddot q^{\,\sigma}} = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial\dot q^\sigma}\,, \quad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,,$$

то и

$$\frac{\partial\ddot q^{\,\sigma}}{\partial w_*^\rho} = \frac{\partial\dot q^\sigma}{\partial v_*^\rho} = \beta_\rho^\sigma(t,q,\dot q)\,, \quad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,.$$

Следовательно, уравнения (6.3) можно представить в виде

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot q^{\,\sigma}}\,\frac{\partial\ddot q^{\,\sigma}}{\partial w_*^\lambda} = Q_\sigma\,\frac{\partial\ddot q^{\,\sigma}}{\partial w_*^\lambda}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,.$$

Левые части этих формул можно рассматривать как частные производные $\partial S/\partial w_*^\lambda$ от функции Аппеля

$$S = S(t,q,\dot q(t,q,v_*),\ddot q(t,q,v_*,w_*))\,,$$

которая является сложной функцией от w_*^λ.

Таким образом, имеем более общую форму *уравнений Аппеля*

$$\frac{\partial S}{\partial w_*^\lambda} = Q_\lambda^*\,, \quad Q_\lambda^* = Q_\sigma\,\frac{\partial\ddot q^{\,\sigma}}{\partial w_*^\lambda}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,. \tag{6.6}$$

Связь уравнений Аппеля с принципом Гаусса[9]**.** Напомним, что вектор $\mathbf{W}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{W} = (\ddot q^{\,\sigma} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma\,\dot q^\alpha\dot q^\beta)\,\mathbf{e}_\sigma\,.$$

Учитывая, что поэтому выполняются соотношения

$$\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial w_*^\lambda} = \frac{\partial\ddot q^{\,\sigma}}{\partial w_*^\lambda}\,\mathbf{e}_\sigma\,, \quad \mathbf{Y} = Q_\sigma\,\mathbf{e}^\sigma\,,$$

[9]Исходя из других позиций принцип Гаусса будет обсуждаться в главе IX.

величину Q^*_λ можно переписать в виде

$$Q^*_\lambda = \mathbf{Y}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial w^\lambda_*} = \frac{\partial(\mathbf{Y}\cdot\mathbf{W})}{\partial w^\lambda_*}\,. \tag{6.7}$$

Подставляя выражения (6.7) в уравнения Аппеля (6.6), получаем

$$\frac{\partial\left(\frac{M\mathbf{W}^2}{2}-\mathbf{Y}\cdot\mathbf{W}\right)}{\partial w^\lambda_*} = 0\,,\quad \lambda=\overline{1,l}\,.$$

Введем вместо функции $R = M\mathbf{W}^2/2 - \mathbf{Y}\cdot\mathbf{W}$ функцию

$$Z = \frac{M\mathbf{W}^2}{2} - \mathbf{Y}\cdot\mathbf{W} + \frac{1}{2M}\,\mathbf{Y}^2 = \frac{M}{2}\left(\mathbf{W}-\frac{\mathbf{Y}}{M}\right)^2 > 0\,,$$

для которой

$$\frac{\partial Z}{\partial w^\lambda_*} = \frac{\partial R}{\partial w^\lambda_*}\,,$$

так как $\partial\mathbf{Y}^2/\partial w^\lambda_* = 0$. В этих обозначениях уравнения движения (6.6) принимают вид

$$\frac{\partial Z}{\partial w^\lambda_*} = \frac{\partial Z}{\partial\ddot{q}^\sigma}\,\frac{\partial\ddot{q}^\sigma}{\partial w^\lambda_*} = 0\,,\quad \lambda=\overline{1,l}\,.$$

Данные уравнения можно записать как скалярные произведения

$$\boldsymbol{\nabla}''Z\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda = 0\,,\quad \lambda=\overline{1,l}\,, \tag{6.8}$$

где

$$\boldsymbol{\nabla}''Z = \frac{\partial Z}{\partial\ddot{q}^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma\,,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda = \frac{\partial\ddot{q}^\sigma}{\partial w^\lambda_*}\,\mathbf{e}_\sigma = \beta^\sigma_\lambda\,\mathbf{e}_\sigma\,.$$

Сравнивая уравнения (6.8) с уравнениями (5.16), видим, что

$$M\mathbf{W} - \mathbf{Y} = \boldsymbol{\nabla}''Z\,.$$

Покажем, что из уравнений (6.8) следует, что функция $Z(\mathbf{W})$ при значении $\mathbf{W}$, соответствующем действительному движению, имеет значение, минимальное по сравнению со значениями Z_1, получаемыми для любых других ускорений $\mathbf{W}_1$, которые при тех же самых $t, q, \dot{q}$ также кинематически возможны.

В § 5 было показано, что вектор ускорения может быть представлен в виде суммы

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_L + \mathbf{W}^K\,,\quad \mathbf{W}_L = \widetilde{W}^\lambda_L\,\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda\,,\quad \mathbf{W}^K = \widetilde{W}^K_{l+\varkappa}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,,$$

причем при фиксированных $t, q, \dot{q}$ вектор $\mathbf{W}^K$ полностью определяется уравнениями связей, а вектор $\mathbf{W}_L$ остается произвольным. Другими словами, любое ускорение $\mathbf{W}_L$ является кинематически возможным. На основании этого разность между кинематически возможным $\mathbf{W}_1$ и действительным $\mathbf{W}$ ускорениями может быть представлена в виде

$$\mathbf{W}_1 - \mathbf{W} = \mathbf{W}_{1L} + \mathbf{W}^K - \mathbf{W}_L - \mathbf{W}^K = \widetilde{W}^\lambda_\Delta \, \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \,, \quad \lambda = \overline{1, l} \,,$$

где $\widetilde{W}^\lambda_\Delta$ могут иметь любые значения. Подставляя это выражение для $\mathbf{W}_1$ в функцию Z и учитывая соотношения (6.8), получаем

$$\begin{aligned} Z_1 = \frac{M}{2}\left(\mathbf{W} - \frac{\mathbf{Y}}{M} + \widetilde{W}^\lambda_\Delta \, \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda\right)^2 = Z + \boldsymbol{\nabla}'' Z \cdot \widetilde{W}^\lambda_\Delta \, \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda + \frac{M}{2}\,(\widetilde{W}^\lambda_\Delta \, \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda)^2 = \\ = Z + \frac{M}{2}\,(\widetilde{W}^\lambda_\Delta \, \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda)^2 > Z \,, \quad \mathbf{W}_1 \neq \mathbf{W} \,. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Условие $Z_1 > Z$ получено здесь из уравнений несвободного движения (6.8). Отметим, что из выражений (6.9) следует также, что функция $Z(\mathbf{W}_1)$, определенная на множестве кинематически допустимых ускорений, имеет минимум при ускорении $\mathbf{W}$, которое удовлетворяет уравнениям (6.8) или (5.16).

Функции $Z(\mathbf{W})$ может быть дана интересная интерпретация. Введем некоторый промежуток времени τ и умножим $Z(\mathbf{W})$ на $\tau^4/4$, при этом

$$Z_g = \frac{\tau^4}{4}\, Z = \frac{\tau^4}{4}\,\frac{M}{2}\left(\mathbf{W} - \frac{\mathbf{Y}}{M}\right)^2 .$$

Выражая $3n$-мерные векторы $\mathbf{W}$ и $\mathbf{Y}$ через их декартовы координаты, в соответствии с формулами (1.4), (1.5) главы V получаем

$$\begin{aligned} Z_g = \frac{\tau^4}{4}\sum_{\mu=1}^{3n}\frac{M}{2}\left(\ddot{y}_\mu - \frac{Y_\mu}{M}\right)^2 = \frac{\tau^4}{4}\sum_{\mu=1}^{3n}\frac{M}{2}\left(\sqrt{\widetilde{m}_\mu}\ddot{x}_\mu - \frac{X_\mu}{M\sqrt{\widetilde{m}_\mu}}\right)^2 = \\ = \frac{\tau^4}{4}\sum_{\mu=1}^{3n}\frac{M\widetilde{m}_\mu}{2}\left(\ddot{x}_\mu - \frac{X_\mu}{M\widetilde{m}_\mu}\right)^2 = \frac{\tau^4}{4}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu}{2}\left(\mathbf{w}_\nu - \frac{\mathbf{F}_\nu}{m_\nu}\right)^2 , \end{aligned}$$

или

$$Z_g = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu}{2}\,\Delta\mathbf{g}_\nu^2 \,, \quad \Delta\mathbf{g}_\nu = \left(\mathbf{w}_\nu - \frac{\mathbf{F}_\nu}{m_\nu}\right)\frac{\tau^2}{2} \,.$$

Если бы материальная точка с массой m_ν была свободной, то под действием силы $\mathbf{F}_\nu$ она получила бы ускорение $\mathbf{w}^*_\nu = \mathbf{F}_\nu/m_\nu$. Имея в данный

момент t скорость $\mathbf{v}_\nu$ и ускорение $\mathbf{w}^*_\nu$, эта точка совершает перемещение, которое при достаточно малом τ приближенно может быть представлено в виде

$$\mathbf{g}^*_\nu = \mathbf{v}_\nu \tau + \frac{\mathbf{F}_\nu}{m_\nu}\,\frac{\tau^2}{2}\,.$$

Ускорение данной точки при наличии связей равно $\mathbf{w}_\nu$, поэтому действительное перемещение выражается формулой

$$\mathbf{g}_\nu = \mathbf{v}_\nu \tau + \mathbf{w}_\nu\,\frac{\tau^2}{2}\,.$$

Вычисляя разность $\mathbf{g}_\nu - \mathbf{g}^*_\nu$, получаем вектор $\Delta\mathbf{g}_\nu$, который характеризует отклонение несвободного движения от свободного в данный момент.

Из изложенного видно, что функция Z_g равна сумме величин, пропорциональных квадратам отклонений точек системы. По форме эта функция совпадает с выражением, которое по предложению Гаусса легло в основу теории обработки наблюдений методом наименьших квадратов. В механику функция Z_g была введена так же Гауссом и названа им *принуждением*[10]. Им же было выдвинуто положение (принцип), согласно которому «движение системы материальных точек, связанных между собой произвольным образом и подверженных любым влияниям, в каждое мгновение происходит в наиболее совершенном, какое только возможно, согласии с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы все они стали свободными, то есть оно происходит с наименьшим возможным принуждением, если в качестве меры принуждения, примененного в течение бесконечно малого мгновения, принять сумму произведений массы каждой точки на квадрат величины ее отклонения от того положения, которое она заняла бы, если бы была свободной»[11].

Принципу Гаусса может быть дана и геометрическая интерпретация. Движение механической системы, состоящей из n материальных точек, как было показано в § 1 главы V, может быть представлено в виде движения одной изображающей точки в $3n$-мерном евклидовом пространстве. Вектор ускорения изображающей точки, как и вектор ускорения материальной точки, может быть записан в виде суммы касательного и нормального ускорений:

---

[10] В обозначении принуждения буква Z соответствует немецкому слову *der Zwang*, что переводится как *принуждение, насилие*.

[11] См.: *Gauss K.* Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik // Grelle's Journal für die reine Mathematik. 1829. Vol. IV. S. 233. Перевод статьи см. в книге: Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 170–172.

$$\mathbf{W} = \ddot{s}\,\boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2 K\mathbf{n}\,.$$

Здесь s — дуговая координата, K – кривизна траектории. Отсюда следует, что функция Гаусса Z при $\mathbf{Y} = 0$ может быть представлена в виде

$$Z = \frac{M}{2}\,\mathbf{W}^2 = \frac{M}{2}\,(\ddot{s}^{\,2} + K^2\dot{s}^4)\,.$$

Предположим теперь, что на движение системы наложено k голономных стационарных идеальных связей. Изображающая точка при этом совершает движение по $(3n-k)$-мерной поверхности. Реакция идеальных связей $\mathbf{R} = \mathbf{N}$ направлена по нормали к поверхности, и, значит, вектор $\mathbf{R}$ ортогонален единичному касательному вектору $\boldsymbol{\tau}$. Следовательно, уравнение несвободного движения $M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}$ в проекции на касательную к траектории имеет вид

$$M\ddot{s} = Y_\tau\,, \quad Y_\tau = \mathbf{Y}\cdot\boldsymbol{\tau}\,.$$

При отсутствии активных сил ($Y_\tau = 0$) имеем $\dot{s}^2 = |\mathbf{V}|^2 = \mathrm{const}$, а функция Гаусса равна

$$Z = \frac{M}{2}\,K^2\,|\mathbf{V}|^4\,, \quad |\mathbf{V}| = \mathrm{const}\,.$$

Отсюда вытекает, что минимальному значению Z соответствует минимальная кривизна K. Таким образом, при отсутствии активных сил изображающая точка движется с постоянной скоростью по кривой, имеющей минимальную кривизну.

II. НЕСВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

§ 7. Использование касательного пространства при исследовании несвободного движения механических систем общего вида

Векторное уравнение движения свободной механической системы общего вида. Пусть в обобщенных координатах q^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, движение свободной механической системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma\,, \qquad T = \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\,,\\ \sigma = \overline{1,s}\,, \qquad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,, \qquad q^0 = t\,, \qquad \dot{q}^0 = 1\,,\end{gathered} \tag{7.1}$$

где Q_σ — обобщенная сила, соответствующая координате q^σ, а M — масса всей системы. Найдем векторное представление этих дифференциальных уравнений.

Введем в рассмотрение многообразие всех тех положений изучаемой механической системы, которые она может иметь в данный момент времени t. Зафиксируем некоторую точку этого многообразия, задаваемую координатами q^σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Пусть старые и новые q_*^ρ, $\rho = \overline{1,s}$, координаты этой точки выражаются друг через друга формулами

$$q^\sigma = q^\sigma(t, q_*)\,, \quad q_*^\rho = q_*^\rho(t, q)\,, \qquad \rho, \sigma = \overline{1,s}\,,$$

или в дифференциальной форме

$$\delta q^\sigma = \frac{\partial q^\sigma}{\partial q_*^\rho}\,\delta q_*^\rho\,, \quad \delta q_*^\rho = \frac{\partial q_*^\rho}{\partial q^\sigma}\,\delta q^\sigma\,, \qquad \rho, \sigma = \overline{1,s}\,.$$

Величины δq^σ и δq_*^ρ, связанные этими соотношениями, называются *контравариантными компонентами касательного вектора* $\delta\mathbf{y}$, а все множество векторов $\delta\mathbf{y}$ — *касательным пространством* к введенному выше многообразию в данной точке[12]. Вектор $\delta\mathbf{y}$ целесообразно представить в виде

$$\delta\mathbf{y} = \delta q^\sigma\,\mathbf{e}_\sigma = \delta q_*^\rho\,\mathbf{e}_\rho^*\,, \qquad \rho, \sigma = \overline{1,s}\,,$$

и совокупности векторов $\mathbf{e}_\sigma$ и $\mathbf{e}_\rho^*$ рассматривать как основные базисы касательного пространства в системах координат q^σ и q_*^ρ.

Евклидову структуру в касательном пространстве введем, используя инвариантность положительно определенной квадратичной формы

$$(\delta\mathbf{y})^2 = \mathrm{g}_{\sigma\tau}\,\delta q^\sigma\,\delta q^\tau = \mathrm{g}^*_{\sigma_*\tau_*}\,\delta q_*^{\sigma_*}\,\delta q_*^{\tau_*}\,, \qquad \sigma, \tau, \sigma_*, \tau_* = \overline{1,s}\,.$$

Здесь $\mathrm{g}_{\sigma\tau}$ и $\mathrm{g}^*_{\sigma_*\tau_*}$ — коэффициенты, входящие в выражение кинетической энергии соответственно в координатах q^σ и q_*^ρ $(\rho, \sigma = \overline{1,s})$. Ими, таким образом, задается метрический тензор, позволяющий скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = a^\sigma\mathbf{e}_\sigma = a_*^{\sigma_*}\mathbf{e}^*_{\sigma_*}$ и $\mathbf{b} = b^\tau\mathbf{e}_\tau = b_*^{\tau_*}\mathbf{e}^*_{\tau_*}$ представить в виде

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathrm{g}_{\sigma\tau}\,a^\sigma b^\tau = \mathrm{g}^*_{\sigma_*\tau_*}\,a_*^{\sigma_*}b_*^{\tau_*}\,, \quad \mathrm{g}_{\sigma\tau} = \mathbf{e}_\sigma\cdot\mathbf{e}_\tau\,, \quad \mathrm{g}^*_{\sigma_*\tau_*} = \mathbf{e}^*_{\sigma_*}\cdot\mathbf{e}^*_{\tau_*}\,,$$
$$\sigma, \tau, \sigma_*, \tau_* = \overline{1,s}\,.$$

Компоненты δq^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, касательного вектора $\delta\mathbf{y}$ называются также *вариациями координат* q^σ или же *возможными (виртуальными) перемещениями*. Обобщенные силы Q_σ, входящие в систему уравнений (7.1), по

[12]См. монографию *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.

определению представляют собой коэффициенты при вариациях координат δq^σ в выражении для возможной элементарной работы δA. Используя сквозную нумерацию $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ для обозначения как декартовых координат точек приложения сил, так и для проекций этих сил, можем записать

$$\delta A = X_\mu \, \delta x_\mu \, .$$

Учитывая, что

$$\delta x_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma} \, \delta q^\sigma = \frac{\partial x_\mu}{\partial q_*^\rho} \, \delta q_*^\rho \, ,$$

получаем

$$\delta A = Q_\sigma \, \delta q^\sigma = Q_\rho^* \, \delta q_*^\rho \, , \tag{7.2}$$

где

$$Q_\sigma = X_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial q^\sigma} \, , \qquad Q_\rho^* = X_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial q_*^\rho} = Q_\sigma \frac{\partial q^\sigma}{\partial q_*^\rho} \, .$$

Выражение (7.2) представляет собой линейную инвариантную дифференциальную форму от вектора $\delta \mathbf{y}$. Ее коэффициенты Q_σ и Q_ρ^* при использовании координат q^σ и q_*^ρ соответственно являются *компонентами ковариантного вектора* $\mathbf{Y}$ (см. предыдущую сноску). Воспользовавшись евклидовой структурой касательного пространства, представим величину δA в виде скалярного произведения

$$\delta A = \mathbf{Y} \cdot \delta \mathbf{y} \, , \quad \mathbf{Y} = Q_\sigma \mathbf{e}^\sigma \, , \qquad \sigma = \overline{1, s} \, ,$$

где $\mathbf{e}^\sigma$, $\sigma = \overline{1, s}$, — векторы взаимного базиса, задаваемые соотношениями

$$\mathbf{e}^\sigma \cdot \mathbf{e}_\tau = \delta_\tau^\sigma = \begin{cases} 0, & \sigma \neq \tau \, , \\ 1, & \sigma = \tau \, . \end{cases}$$

Отсюда и из выражений $\mathrm{g}_{\sigma\tau} = \mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}_\tau$ следует, что

$$\mathbf{e}_\tau = \mathrm{g}_{\sigma\tau} \mathbf{e}^\sigma \, , \qquad \mathbf{e}^\sigma = \mathrm{g}^{\sigma\tau} \mathbf{e}_\tau \, .$$

Коэффициенты $\mathrm{g}^{\sigma\tau}$ являются элементами матрицы, обратной к матрице с элементами $\mathrm{g}_{\sigma\tau}$.

Введение ковариантного вектора $\mathbf{Y}$ по выражению для возможной элементарной работы δA позволяет рассматривать систему уравнений (7.1) как одно векторное равенство

$$M \mathbf{W} = \mathbf{Y} \, . \tag{7.3}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\mathbf{W} = W_\sigma \mathbf{e}^\sigma = \frac{1}{M}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\right)\mathbf{e}^\sigma = \\ = \left(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\ddot q^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot q^\alpha \dot q^\beta\right)\mathbf{e}^\sigma = W^\sigma \mathbf{e}_\sigma = \left(\ddot q^{\,\sigma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,\dot q^\alpha \dot q^\beta\right)\mathbf{e}_\sigma\,, \\ \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \mathrm{g}^{\sigma\tau}\Gamma_{\tau,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{\sigma\tau}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{\tau\beta}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \mathrm{g}_{\tau\alpha}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial \mathrm{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^\tau}\right), \\ \tau,\sigma = \overline{1,s}\,, \qquad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,.\end{gathered} \tag{7.4}$$

Таким образом, формулы (7.3) и (7.4) позволяют в касательном пространстве ввести вектор ускорения $\mathbf{W}$ для произвольной механической системы с s степенями свободы.

Движение несвободной механической системы общего вида. Идеальность связей. Перейдем теперь к изучению несвободного движения. В соответствии с принципом освобождаемости наложение связей приводит к появлению силы реакции $\mathbf{R}$, поэтому второй закон Ньютона запишется следующим образом:

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}\,.$$

Сила реакции связана с наличием ускорения, создаваемого связями. Поэтому прежде всего необходимо выяснить, как связи влияют на формирование вектора $\mathbf{W}$.

Рассмотрим сначала нелинейные неголономные связи первого порядка, заданные в виде

$$\varphi^\varkappa(t,q,\dot q) = 0\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Дифференцируя эти связи по времени, получаем

$$\begin{gathered}\psi^\varkappa(t,q,\dot q,\ddot q) \equiv a^{l+\varkappa}_\sigma(t,q,\dot q)\,\ddot q^{\,\sigma} + a^{l+\varkappa}_0(t,q,\dot q) = 0\,, \\ \varkappa = \overline{1,k}\,, \qquad l = s-k\,.\end{gathered} \tag{7.5}$$

Отметим, что в таком виде могут быть заданы и линейные неголономные связи второго порядка. Голономные связи приводят к соотношениям (7.5) после двукратного дифференцирования их по времени.

Введение касательного пространства и в нем вектора $\mathbf{W}$, задаваемого формулами (7.4), позволяет записать систему уравнений (7.5) в векторной форме:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\cdot\mathbf{W} = \chi^\varkappa(t,q,\dot q)\,, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = a^{l+\varkappa}_\sigma \mathbf{e}^\sigma\,, \qquad \chi^\varkappa = -a^{l+\varkappa}_0 + a^{l+\varkappa}_\sigma\,\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,\dot q^\alpha \dot q^\beta\,, \\ \varkappa = \overline{1,k}\,, \qquad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Векторы $\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, соответствующие связям (7.5), предполагаются линейно независимыми. Это дает возможность в s-мерном касательном пространстве ввести в рассмотрение подпространство $\mathbb{R}^K$ с базисом из этих векторов (K-пространство). Тогда все пространство можно представить в виде прямой суммы этого подпространства и его ортогонального дополнения $\mathbb{R}_L$ с базисом $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$, $\lambda = \overline{1,l}$ (L-пространство), притом

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = 0\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{7.7}$$

Здесь формирование векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$, $\lambda = \overline{1,l}$, можно пояснить следующим образом.

Для произвольной механической системы со связями (7.5) выбор величин w_*^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, выражаемых через обобщенные ускорения $\ddot{q}^{\,\sigma}$, $\sigma = \overline{1,s}$, соотношениями

$$w_*^\lambda = a_\sigma^\lambda(t,q,\dot{q})\,\ddot{q}^{\,\sigma}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,,$$

является свободным. Дополняя их уравнениями

$$w_*^{l+\varkappa} = a_\sigma^{l+\varkappa}(t,q,\dot{q})\,\ddot{q}^{\,\sigma}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,$$

получаем замкнутую систему уравнений относительно ускорений $\ddot{q}^{\,\sigma}$, $\sigma = \overline{1,s}$. Предполагая, что условия разрешимости для этой системы уравнений выполнены, записываем

$$\ddot{q}^{\,\sigma} = \beta_\rho^\sigma(t,q,\dot{q})\,w_*^\rho\,, \quad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,.$$

Тогда векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$, заданные в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda = \frac{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}{\partial w_*^\lambda}\,\mathbf{e}_\sigma = \beta_\lambda^\sigma\,\mathbf{e}_\sigma\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \tag{7.8}$$

удовлетворяют условиям (7.7). Действительно, так как величины $w_*^{l+\varkappa}$ и w_*^λ независимы, то можем записать

$$\frac{\partial w_*^{l+\varkappa}}{\partial w_*^\lambda} = \frac{\partial w_*^{l+\varkappa}}{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}\,\frac{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}{\partial w_*^\lambda} = a_\sigma^{l+\varkappa}\,\beta_\lambda^\sigma = \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,.$$

Отметим, что полученное разбиение касательного пространства уравнениями связей соответствует фиксированным значениям переменных $t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma$ $(\sigma = \overline{1,s})$. Введенные базисы назовем *неголономными*.

Подставляя ускорение $\mathbf{W}$, заданное в виде (далее значок «волны» над компонентами векторов подчеркивает, что они записаны для введенных неголономных базисов)

$$\begin{gathered} \mathbf{W} = \mathbf{W}_L + \mathbf{W}^K\,, \\ \mathbf{W}_L = \widetilde{W}^\lambda\,\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda\,, \qquad \mathbf{W}^K = \widetilde{W}_{l+\varkappa}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,, \qquad \mathbf{W}_L\cdot\mathbf{W}^K = 0\,, \end{gathered} \tag{7.9}$$

в уравнения (7.6), получаем

$$\widetilde{W}_{l+\varkappa^*} = h_{\varkappa^*\varkappa}\,\chi^{\varkappa}(t,q,\dot{q})\,, \qquad \varkappa,\varkappa^* = \overline{1,k}\,,$$

где $h_{\varkappa^*\varkappa}$ — элементы матрицы, обратной матрице с элементами $h^{\varkappa\varkappa^*}$, задаваемыми выражениями

$$h^{\varkappa\varkappa^*} = \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa^*}, \qquad \varkappa,\varkappa^* = \overline{1,k}\,.$$

Векторы $\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, линейно независимы, и поэтому

$$|h^{\varkappa\varkappa^*}| \neq 0\,. \tag{7.10}$$

Воспользовавшись выражениями (7.9), представим второй закон Ньютона двумя уравнениями:

$$\begin{gathered} M\mathbf{W}_L = \mathbf{Y}_L + \mathbf{R}_L\,, \\ \mathbf{Y}_L = \widetilde{Q}^{\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}\,, \qquad \mathbf{R}_L = \mathcal{R}^{\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,, \\ M\mathbf{W}^K = \mathbf{Y}^K + \mathbf{R}^K, \\ \mathbf{Y}^K = \widetilde{Q}_{l+\varkappa}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}, \qquad \mathbf{R}^K = \Lambda_{\varkappa}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,. \end{gathered} \tag{7.11}$$

Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{R}_L + \mathbf{R}^K$ — реакция связей, причем составляющие $\mathcal{R}_{l+\varkappa}$ вектора $\mathbf{R}^K$ специально обозначены через $\Lambda_{\varkappa}$, так как именно они оказываются множителями Лагранжа. При выполнении условия (7.10) вектор $\mathbf{W}^K$, как следует из выражений (7.9)–(7.10), однозначно определяется уравнениями связей как функция переменных $t, q^{\sigma}, \dot{q}^{\sigma}$. Таким образом, в K-пространстве закон движения предписывается уравнениями связей и выражается в виде (7.6). Возникающая при этом составляющая реакции $\mathbf{R}^K$ вычисляется по второму уравнению из системы (7.11).

На вектор $\mathbf{W}_L$ непосредственно математическое задание уравнений связей влиять не может, так как этот вектор может быть исключен из уравнений (7.6). Поэтому возможно только косвенное воздействие связей на составляющую ускорения $\mathbf{W}_L$ через вектор $\mathbf{R}_L$. В частности, уравнения связей могут выполняться и при $\mathbf{R}_L = 0$. Такие связи называются *идеальными*. Таким образом, *влияние идеальных связей на ускорение* $\mathbf{W}$ *полностью определяется их аналитическими представлениями.*

Обратим внимание на то, что для выяснения того, как связи влияют на создание силы реакции, необходимо было представить все виды связей в единой дифференциальной форме (7.5). Именно благодаря такой форме

записи уравнений связей удалось показать, что всё пространство уравнениями связей разбивается на два ортогональных подпространства. При этом были найдены аналитические выражения реакций связей[13].

В заключение параграфа отметим, что в случае задания неголономных связей $\varphi^{\varkappa}(t, q, \dot{q}) = 0,\ \varkappa = \overline{1, k}$, коэффициенты $a_{\sigma}^{l+\varkappa}$ в формулах (7.5) равны

$$a_{\sigma}^{l+\varkappa} = \frac{\partial \varphi^{\varkappa}}{\partial \dot{q}^{\sigma}}\,,$$

поэтому введенные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$ оказываются равными обобщенным операторам Гамильтона, примененным к функциям $\varphi^{\varkappa}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \frac{\partial \varphi^{\varkappa}}{\partial \dot{q}^{\sigma}}\,\mathbf{e}^{\sigma} = \boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{7.12}$$

В свою очередь при задании голономных связей $f^{\varkappa}(t, q) = 0,\ \varkappa = \overline{1, k}$, после их двойного дифференцирования по времени имеем

$$a_{\sigma}^{l+\varkappa} = \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial q^{\sigma}}\,,$$

и поэтому

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} \equiv \mathbf{e}_{*}^{l+\varkappa} = \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial q^{\sigma}}\,\mathbf{e}^{\sigma} = \boldsymbol{\nabla} f^{\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{7.13}$$

Перейдем теперь к одному из важнейших вопросов неголономной механики — к вопросу о формировании реакции связей.

§ 8. Реакция идеальных связей

Определение минимальной добавочной силы, обеспечивающей заданные условия движения. При исследовании несвободного движения, то есть движения при наложенных связях, возможны две постановки задачи. В соответствии с первой механическая система общего вида, находящаяся под действием активной силы $\mathbf{Y}$, движется таким образом, что

[13] Впервые эти результаты для неголономных связей были опубликованы в статье *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Уравнения динамики как необходимые условия минимальности принуждения по Гауссу // Колебания и устойчивость механических систем. Прикл. механика. Вып. 5. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. С. 9–16, а затем в 1985 г. они были приведены в первом издании данного учебника. В 1992 г. эти же результаты с помощью матричного исчисления были получены в статье *Udwadia F. E., Kalaba R. E.* A new perspective on constrained motion // Proceedings of the Royal Society. London, 1992. Vol. A439. № 1906. P. 407–410. Аналитические представления множителей Лагранжа как функций времени и обобщенных координат и скоростей для голономных систем были выведены в начале прошлого века Г. К. Сусловым и А. М. Ляпуновым.

удовлетворенными оказываются уравнения идеальных связей. Требуется определить характер движения системы, соответствующего заданным начальным условиям. При такой постановке основной целью является отыскание системы дифференциальных уравнений движения, которая не содержала бы неизвестных реакций связей.

Возможна, однако, и другая постановка задачи. Допустим, например, что по некоторым соображениям необходимо, чтобы материальная точка, находящаяся под действием силы $\mathbf{Y}$, двигалась по поверхности заданного вида. Указанная поверхность не обязательно должна создаваться прямым контактом. При этом возникает необходимость в определении дополнительной к $\mathbf{Y}$ силы $\mathbf{R}$, при которой движение, удовлетворяющее поставленному требованию, осуществлялось бы. При таком подходе силу $\mathbf{R}$ называют *управляющей* силой, а само движение — *управляемым*.

Естественно, что данная постановка задачи, описанная на примере одной точки, может быть обобщена на случай механических систем общего вида. Подчеркнем, что при таком подходе к движению уравнения, которые ранее назывались уравнениями связей, теперь выступают как математическое выражение условий, которым должно подчиняться движение. Уравнения эти принято называть *уравнениями программы движения*.

Итак, предположим, что имеется механическая система общего вида, то есть система, состоящая не только из материальных точек, но и из материальных тел. Пусть уравнения программы движения заданы в виде

$$\begin{gathered}\psi^{\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q) = a_\sigma^{l+\varkappa}(t,q,\dot q)\,\ddot q^{\,\sigma} + a_0^{l+\varkappa}(t,q,\dot q) = 0\,,\\ \varkappa = \overline{1,k}\,,\quad l = s-k\,.\end{gathered} \tag{8.1}$$

Напомним, что в таком виде могут быть представлены и неголономные связи после их дифференцирования по времени, и голономные связи после их двойного дифференцирования по времени. Требуется определить, какие управляющие силы R_σ необходимо добавить к заданным силам Q_σ, чтобы движение соответствовало программе, задаваемой уравнениями (8.1). Силы R_σ необходимо определить как функции времени, положения системы и ее скоростей.

Поставим дополнительное требование о минимальности величины вектора $\mathbf{R}$, как вектора, принадлежащего касательному пространству, метрика которого задается по выражению для кинетической энергии системы. Покажем, что в этом случае искомые функции $R_\sigma(t,q,\dot q)$ могут быть найдены, причем единственным образом.

Действительно, если программу движения (8.1) рассматривать как идеальную неголономную связь, то искомая управляющая сила может

быть интерпретирована как сила реакции $\mathbf{R}$ уравнений связей (8.1). Но

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^K + \mathbf{R}_L\,,$$

причем при идеальности связей $\mathbf{R}_L = 0$, и поэтому $\mathbf{R} = \mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$, то есть реакция (управляющая сила) имеет минимальную величину. В этом случае векторное уравнение движения имеет вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,.$$

Так как $M\mathbf{W}$ равно вектору $\mathbf{Y} + \mathbf{R}$, то отсюда получаем

$$\begin{gathered}\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,,\\ \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = M\chi^\varkappa(t,q,\dot q) - \mathbf{Y}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.\end{gathered}$$

Подставляя в эти уравнения векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$, заданные соответственно в виде (7.8) и (7.6), имеем

$$\begin{gathered}R_\sigma\beta^\sigma_\lambda(t,q,\dot q) = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,,\\ R^\tau a^{l+\varkappa}_\tau(t,q,\dot q) = M\chi^\varkappa(t,q,\dot q) - Q^\tau a^{l+\varkappa}_\tau(t,q,\dot q)\,,\\ \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad \tau = \overline{1,s}\,,\end{gathered} \tag{8.2}$$

где $R^\tau = \mathbf{R}\cdot\mathbf{e}^\tau$, $Q^\tau = \mathbf{Y}\cdot\mathbf{e}^\tau$. Учитывая, что $R^\tau = \mathrm{g}^{\tau\sigma}R_\sigma$, $Q^\tau = \mathrm{g}^{\tau\sigma}Q_\sigma$, систему (8.2) представляем в виде

$$\begin{gathered}\beta^\sigma_\lambda R_\sigma = 0\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s-k\,,\\ a^{l+\varkappa}_\tau \mathrm{g}^{\tau\sigma}R_\sigma = b^\varkappa\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad \sigma,\tau = \overline{1,s}\,.\end{gathered} \tag{8.3}$$

Здесь $b^\varkappa = M\chi^\varkappa - a^{l+\varkappa}_\tau \mathrm{g}^{\tau\sigma}Q_\sigma$.

Система (8.3) является системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных R_σ. Решить эту систему можно следующим образом.

Остановимся на следующем случае задания псевдоускорений:

$$\begin{gathered}w^\lambda_* = \ddot q^{\,\lambda}\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,,\\ w^{l+\varkappa}_* = a^{l+\varkappa}_\sigma\,\ddot q^{\,\sigma}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\beta^\mu_\lambda = \begin{cases}0, & \mu \neq \lambda\,,\\ 1, & \mu = \lambda\,,\end{cases}\\ \lambda,\mu = \overline{1,l}\,,\end{gathered}$$

и поэтому первые l уравнений из системы (8.3) перепишутся следующим образом:

$$R_\lambda = -\beta_\lambda^{l+\varkappa^*} R_{l+\varkappa^*}\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad \varkappa^* = \overline{1,k}\,. \tag{8.4}$$

Подставляя выражения (8.4) в последние k уравнений системы (8.3), получаем

$$r^{\varkappa\varkappa^*} R_{l+\varkappa^*} = b^\varkappa\,, \quad \varkappa, \varkappa^* = \overline{1,k}\,, \tag{8.5}$$

где $r^{\varkappa\varkappa^*} = a_\tau^{l+\varkappa}(\mathrm{g}^{\tau,l+\varkappa^*} - \beta_\lambda^{l+\varkappa^*}\mathrm{g}^{\tau\lambda})$. В свою очередь решение системы (8.5) выражается формулами Крамера

$$R_{l+\varkappa^*} = \frac{A_{\varkappa\varkappa^*} b^\varkappa}{\det[r^{\varkappa\varkappa^*}]}\,, \quad \varkappa, \varkappa^* = \overline{1,k}\,. \tag{8.6}$$

Здесь $A_{\varkappa\varkappa^*}$ — алгебраическое дополнение элемента $r^{\varkappa\varkappa^*}$ в определителе $\det[r^{\varkappa\varkappa^*}]$.

Таким образом, величины R_σ найдены как функции t, q и $\dot q$, так как согласно формулам (8.4) и (8.6) они выражаются через известные коэффициенты $\mathrm{g}_{\alpha\beta}(t,q)$, $a_\alpha^{l+\varkappa}(t,q,\dot q)$, $\alpha,\beta = \overline{0,s}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, и обобщенные силы $Q_\sigma(t,q,\dot q)$.

§ 9. Уравнения несвободного движения механических систем общего вида

В данном параграфе для голономных, неголономных связей и для неголономных связей второго порядка приняты обозначения $f_0^\varkappa(t,q) = 0$, $f_1^\varkappa(t,q,\dot q) = 0$, $f_2^\varkappa(t,q,\dot q,\ddot q) = 0$.

Уравнения движения голономных систем. Движение механической системы общего вида с s степенями свободы будем описывать криволинейными координатами $q = (q^1, \dots, q^s)$, задающими основной и взаимный базисы

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s\}\,, \quad \{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^s\}\,. \tag{9.1}$$

Для векторов этих базисов, очевидно, выполняются соотношения

$$\mathbf{e}^\rho \cdot \mathbf{e}_\sigma = \delta_\sigma^\rho = \begin{cases} 1\,, & \rho = \sigma\,, \\ 0\,, & \rho \neq \sigma\,. \end{cases} \tag{9.2}$$

Пусть на движение системы наложены идеальные голономные связи

$$f_0^\varkappa(t,q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{9.3}$$

Тогда векторное уравнение движения в касательном пространстве согласно формулам (7.13) имеет вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_{\varkappa}\boldsymbol{\nabla} f_0^{\varkappa}\,. \tag{9.4}$$

Введем в рассмотрение новую систему криволинейных координат $q_* = (q_*^1, \dots, q_*^s)$ и зададим формулы перехода между двумя рассматриваемыми системами:

$$q_*^{\rho} = q_*^{\rho}(t, q)\,, \qquad q^{\sigma} = q^{\sigma}(t, q_*)\,, \quad \rho, \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{9.5}$$

Опираясь на формулы (9.5), построим две системы векторов

$$\mathbf{e}_*^{\rho} = \frac{\partial q_*^{\rho}}{\partial q^{\sigma_*}}\,\mathbf{e}^{\sigma_*}\,, \quad \mathbf{e}_{\sigma}^{*} = \frac{\partial q^{\tau}}{\partial q_*^{\sigma}}\,\mathbf{e}_{\tau}\,, \quad \rho, \sigma, \sigma_*, \tau = \overline{1, s}\,. \tag{9.6}$$

Эти векторы создают взаимный и обратный базисы новой системы координат $q_* = (q_*^1, \dots, q_*^s)$, так как согласно формулам (9.2) справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{e}_*^{\rho} \cdot \mathbf{e}_{\sigma}^{*} = \frac{\partial q_*^{\rho}}{\partial q^{\sigma_*}}\,\mathbf{e}^{\sigma_*} \cdot \frac{\partial q^{\tau}}{\partial q_*^{\sigma}}\,\mathbf{e}_{\tau} = \frac{\partial q_*^{\rho}}{\partial q^{\tau}}\frac{\partial q^{\tau}}{\partial q_*^{\sigma}} = \delta_{\sigma}^{\rho} = \begin{cases} 1\,, & \rho = \sigma\,, \\ 0\,, & \rho \neq \sigma\,. \end{cases}$$

Конкретизируем формулы перехода (9.5), задавая

$$\begin{gathered} q_*^{\lambda} = q_*^{\lambda}(t, q)\,, \quad \lambda = \overline{1, l}\,, \quad l = s - k\,, \\ q_*^{l+\varkappa} = q_*^{l+\varkappa}(t, q) \equiv f_0^{\varkappa}(t, q)\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \end{gathered} \tag{9.7}$$

Обратим внимание на то, что здесь функции от (t, q) в первых формулах при $\lambda = \overline{1, l}$, выбираются исследователем, а следующие при $l + \varkappa$, $\varkappa = \overline{1, k}$, учитывают уравнения связей (9.3), и потому координаты $q_*^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1, k}$, в процессе движения равны нулю.

Согласно формулам (9.6) и (9.7) уравнения связей (9.3) задают k векторов

$$\mathbf{e}_*^{l+\varkappa} = \frac{\partial q_*^{l+\varkappa}}{\partial q^{\sigma}}\,\mathbf{e}^{\sigma} = \frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial q^{\sigma}}\,\mathbf{e}^{\sigma} = \boldsymbol{\nabla} f_0^{\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \tag{9.8}$$

образующих взаимный базис K-пространства, а согласно соотношениям (9.6) ортогональное к нему L-пространство формируется векторами основного базиса

$$\mathbf{e}_{\lambda}^{*} = \frac{\partial q^{\tau}}{\partial q_*^{\lambda}}\,\mathbf{e}_{\tau}\,, \quad \lambda = \overline{1, l}\,.$$

Учитывая формулы (9.8), уравнение движения (9.4) перепишем в виде

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa \mathbf{e}_*^{l+\varkappa}\,. \tag{9.9}$$

Умножая его на векторы $\mathbf{e}_\sigma^*$, $\sigma = \overline{1,s}$, получаем две группы *уравнений Лагранжа второго рода*:

$$MW_\lambda^* = Q_\lambda^*\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s - k\,, \tag{9.10}$$

$$MW_{l+\varkappa}^* = Q_{l+\varkappa}^* + \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Напомним, что

$$MW_\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{9.11}$$

Используя формулы (9.8), уравнение (9.9) можно переписать следующим образом:

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\tau}\,\mathbf{e}^\tau\,.$$

Умножая его на векторы $\mathbf{e}_\sigma$, $\sigma = \overline{1,s}$, запишем

$$MW_\sigma = Q_\sigma + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{9.12}$$

Система s скалярных уравнений (9.12) содержит $s + k$ неизвестных $q^1, \dots, q^s, \Lambda_1, \dots, \Lambda_k$. Дополнить её следует уравнениями связей (9.3). Эта процедура аналогична случаю уравнений Лагранжа первого рода для движения системы материальных точек. Поэтому систему уравнений (9.12) можно назвать *уравнениями Лагранжа первого рода в криволинейных координатах*. В литературе часто называют её системой *уравнений Лагранжа второго рода с множителями*.

Уравнения движения неголономных систем. Пусть теперь на движение механической системы общего вида, описываемой криволинейными координатами $q = (q^1, \dots, q^s)$ с базисами (9.1), наложены идеальные неголономные связи

$$f_1^\varkappa(t, q, \dot q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{9.13}$$

Тогда согласно формулам (7.12) векторное уравнение несвободного движения имеет вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla}' f_1^\varkappa\,. \tag{9.14}$$

Поясним появление векторов $\boldsymbol{\nabla}' f_1^{\varkappa}$ с несколько других позиций. В случае несвободного движения механической системы при наложении неголономных связей (9.13) недостаточно введения новой системы криволинейных координат, а приходится наряду с вектором обобщенных скоростей $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s)$ вводить новый вектор псевдоскоростей (квазискоростей) $v_* = (v_*^1, \dots, v_*^s)$. Зададим формулы перехода между ними, считая, что при этом t и q являются параметрами:

$$v_*^{\rho} = v_*^{\rho}(t, q, \dot{q}), \quad \dot{q}^{\sigma} = \dot{q}^{\sigma}(t, q, v_*), \quad \rho, \sigma = \overline{1, s}. \tag{9.15}$$

По преобразованиям (9.15) можно построить две системы векторов

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\rho} = \frac{\partial v_*^{\rho}}{\partial \dot{q}^{\sigma_*}} \mathbf{e}^{\sigma_*}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma} = \frac{\partial \dot{q}^{\tau}}{\partial v_*^{\sigma}} \mathbf{e}_{\tau}, \quad \rho, \sigma, \sigma_*, \tau = \overline{1, s}. \tag{9.16}$$

Обратим внимание на то, что эти векторы вычисляются для конкретного положения системы $q = (q^1, \dots, q^s)$, занимаемого ею в данный момент времени t, имеющей обобщенные скорости $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s)$. Иными словами, векторы (9.16) вычисляются при фазовом состоянии механической системы, имеющемся в момент времени t.

Введенные векторы (9.16) можно назвать векторами *неголономных базисов*, так как они, благодаря формулам (9.2), обладают свойством:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\rho} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma} = \frac{\partial v_*^{\rho}}{\partial \dot{q}^{\sigma_*}} \mathbf{e}^{\sigma_*} \cdot \frac{\partial \dot{q}^{\tau}}{\partial v_*^{\sigma}} \mathbf{e}_{\tau} = \frac{\partial v_*^{\rho}}{\partial \dot{q}^{\tau}} \frac{\partial \dot{q}^{\tau}}{\partial v_*^{\sigma}} = \delta_{\sigma}^{\rho} = \begin{cases} 1, & \rho = \sigma, \\ 0, & \rho \neq \sigma. \end{cases}$$

Если в преобразованиях (9.15) учитывать уравнения связей (9.13) формулами

$$v_*^{\lambda} = v_*^{\lambda}(t, q, \dot{q}), \quad \lambda = \overline{1, l}, \quad l = s - k,$$
$$v_*^{l+\varkappa} = v_*^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}) \equiv f_1^{\varkappa}(t, q, \dot{q}), \quad \varkappa = \overline{1, k},$$

то последние векторы взаимного неголономного базиса примут вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \frac{\partial v_*^{l+\varkappa}}{\partial \dot{q}^{\sigma}} \mathbf{e}^{\sigma} = \frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial \dot{q}^{\sigma}} \mathbf{e}^{\sigma} = \boldsymbol{\nabla}' f_1^{\varkappa}(t, q, \dot{q}), \quad \varkappa = \overline{1, k}. \tag{9.17}$$

Векторы (9.17) образуют в s-мерном касательном пространстве k-мерное K-пространство, а ортогональное ему l-мерное пространство L согласно формулам (9.16) задается векторами

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} = \frac{\partial \dot{q}^{\tau}}{\partial v_*^{\lambda}} \mathbf{e}_{\tau}, \quad \lambda = \overline{1, l}.$$

Подчеркнём, что полученное разбиение исходного s-мерного касательного пространства на прямую сумму подпространств K и L задается при фиксированных t, q и $\dot{q}$.

Теперь векторное уравнение (9.14) согласно формулам (9.17) принимает вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_{\varkappa}\boldsymbol{\varepsilon}^{\,l+\varkappa}\,.$$

Умножая это уравнение на векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_\rho = \frac{\partial \dot{q}^\tau}{\partial v_*^\rho}\,\mathbf{e}_\tau$, $\rho = \overline{1,s}$, получаем две системы *уравнений Ма́джи*:

$$(MW_\sigma - Q_\sigma)\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s - k\,, \tag{9.18}$$

$$(MW_\sigma - Q_\sigma)\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^{l+\varkappa}} = \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{9.19}$$

Напомним, что здесь выражения MW_σ можно представить в виде (9.11).

В l уравнений (9.18) войдут, вообще говоря, все обобщенные координаты $q^1, \ldots, q^s$, поэтому их интегрировать приходится совместно с уравнениями связей (9.13). Для численного интегрирования последние удобно продифференцировать по времени. После задания начальных условий может быть получено решение этой замкнутой системы дифференциальных уравнений

$$q^\sigma = q^\sigma(t)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{9.20}$$

Подставляя решение (9.20) в формулы (9.19), найдём изменение обобщенных реакций

$$\Lambda_\varkappa = \Lambda_\varkappa(t)\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

По этим формулам, в частности, можно находить условия освобождения от связей (9.13).

Подчеркнём, что, как следует из изложенного, при движении неголономных систем число $l = s - k$ не является количеством степеней свободы механической системы. В зависимости от задания начальных условий после интегрирования уравнений Маджи (9.18) совместно с уравнениями связей (9.13) механическая система для заданного момента времени t может занять любое положение $q^1, \ldots, q^s$. Поэтому для неголономных систем число степеней свободы равно s, а l определяет количество независимых квазискоростей $v_*^1, \ldots, v_*^l$.

Перепишем теперь векторное уравнение движения при использовании формул (9.17) в виде

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot{q}^\tau}\,\mathbf{e}^{\,\tau}\,.$$

Умножая его на векторы $\mathbf{e}_\sigma$, $\sigma = \overline{1,s}$, получим *уравнения Лагранжа первого рода в криволинейных координатах для неголономных систем*:

$$MW_\sigma = Q_\sigma + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{9.21}$$

Эти уравнения называются также и *уравнениями Лагранжа второго рода с множителями для неголономных систем.*

Уравнения движения неголономных систем общего вида при наличии линейных неголономных связей второго порядка. Пусть на движение механической системы общего вида, движение которой описывается криволинейными координатами $q = (q^1, \dots, q^s)$ с базисами (9.1), наложены линейные неголономные связи второго порядка[14]:

$$f_2^\varkappa(t,q,\dot q,\ddot q) \equiv a_{2\sigma}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q)\,\ddot q^{\,\sigma} + a_{2,0}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q) \;=\; 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{9.22}$$

Считая $t, q, \dot q$ параметрами, введём между обобщенными ускорениями $\ddot q = (\ddot q^{\,1}, \dots, \ddot q^{\,s})$ и *квазиускорениями* (*псевдоускорениями*) $w_* = (w_*^1, \dots, w_*^s)$ формулы преобразований

$$w_*^\rho = w_*^\rho(t,q,\dot q,\ddot q)\,, \quad \ddot q^{\,\sigma} = \ddot q^{\,\sigma}(t,q,\dot q,w_*)\,, \quad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,. \tag{9.23}$$

По формулам перехода (9.23) построим две системы векторов

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\rho = \frac{\partial w_*^\rho}{\partial \ddot q^{\,\sigma_*}}\,\mathbf{e}^{\sigma_*} = a_{2\sigma_*}^{l+\varkappa}\,\mathbf{e}^{\,\sigma_*}\,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma = \frac{\partial \ddot q^{\,\tau}}{\partial w_*^\sigma}\,\mathbf{e}_\tau\,, \quad \rho,\sigma,\sigma_*,\tau = \overline{1,s}\,. \tag{9.24}$$

Векторы (9.24) образуют взаимный и основной *неголономные базисы*, так как в силу формул (9.2) выполняются соотношения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\rho \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma = \frac{\partial w_*^\rho}{\partial \ddot q^{\,\sigma_*}}\,\mathbf{e}^{\sigma_*} \cdot \frac{\partial \ddot q^{\,\tau}}{\partial w_*^\sigma}\,\mathbf{e}_\tau = \frac{\partial w_*^\rho}{\partial \ddot q^{\,\tau}}\frac{\partial \ddot q^{\,\tau}}{\partial w_*^\rho} = \delta_\sigma^\rho = \begin{cases} 1\,, & \rho = \sigma\,, \\ 0\,, & \rho \neq \sigma\,. \end{cases}$$

Зададим формулы перехода (9.23) в виде

$$\begin{gathered} w_*^\lambda = w_*^\lambda(t,q,\dot q,\ddot q)\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s-k\,, \\ w_*^{l+\varkappa} = f_2^\varkappa(t,q,\dot q,\ddot q)\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \end{gathered} \tag{9.25}$$

[14] В настоящее время известен единственный механический пример связи второго порядка при движении тяжёлой точки, находящейся на конце нити, навивающейся на вертикальный круговой цилиндр (см. статью: *Kitzka F.* An example for the application of a nonholonomic constraint of 2nd order in particle mechanics // ZAMM. 1986. Vol. 66. № 7. S. 312–314). Однако класс обсуждаемых задач значительно расширяется, если в виде (9.22) задается программа движения.

Из-за выполнения связей (9.22) последние квазискорости $w_*^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, в процессе движения оказываются равными нулю. Формулы (9.25) формируют векторы

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \frac{\partial w_*^{l+\varkappa}}{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}\,\mathbf{e}^\sigma = \frac{\partial f_2^{\varkappa}}{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}\,\mathbf{e}^\sigma = \boldsymbol{\nabla}''f_2^{\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{9.26}$$

являющиеся взаимным базисом для K-пространства, выделяемого в s-мерном касательном пространстве уравнениями связей (9.22). Ортогональное к нему дополнение в виде L-пространства создается согласно формулам (9.24) векторами его основного базиса

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda = \frac{\partial \ddot{q}^{\,\tau}}{\partial w_*^\lambda}\,\mathbf{e}_\tau\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,.$$

В силу формул (9.26) векторное уравнение движения при идеальных неголономных связях второго порядка (9.22) имеет вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa\,\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,. \tag{9.27}$$

Умножая его на векторы

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\rho = (\partial \ddot{q}^{\,\tau}/\partial w_*^\rho)\,\mathbf{e}_\tau\,, \quad \rho = \overline{1,s}\,,$$

получаем две группы *обобщенных уравнений Ма́джи*[15]:

$$(MW_\sigma - Q_\sigma)\,\frac{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}{\partial w_*^\lambda} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s - k\,, \tag{9.28}$$

$$(MW_\sigma - Q_\sigma)\,\frac{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}{\partial w_*^{l+\varkappa}} = \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{9.29}$$

Напомним, что для развернутого представления левых частей этих уравнений можно воспользоваться формулами (9.11).

Интегрируя при заданных начальных условиях уравнения (9.28) совместно с уравнениями связей (9.22), получим уравнения движения рассматриваемой механической системы общего вида

$$q^\sigma = q^\sigma(t)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{9.30}$$

[15]Эти уравнения впервые были опубликованы в статьях: *Przeborski A.* Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik // Math. Zeitschrift. 1931–1932. Bd. 36. H. 2. S. 184–194; *Hamel G.* Nichtholonome Systeme höherer Art // Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft. 1938. Bd. 37. S. 41–52.

Подставляя найденные функции (9.30) в формулы (9.29), найдём закон изменения обобщенных реакций

$$\Lambda_{\varkappa} = \Lambda_{\varkappa}(t)\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{9.31}$$

Полученные функции (9.31) позволяют, в частности, находить условия освобождения механической системы от связей (9.22).

Обратим внимание на то, что аналогично предыдущему пункту при связях (9.22) число $l = s - k$ равно числу независимых квазиускорений w_*^{λ}, $\lambda = \overline{1,l}$, а не количеству степеней свободы рассматриваемой неголономной механической системы общего вида.

Если теперь переписать уравнение (9.27) в виде

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_{\varkappa}\frac{\partial f_2^{\varkappa}}{\partial \ddot{q}^{\,\tau}}\,\mathbf{e}^{\,\tau} \tag{9.32}$$

и умножить уравнение (9.32) на векторы $\mathbf{e}_{\sigma}$, $\sigma = \overline{1,s}$, то в силу выполнения формул (9.2) получим *уравнения Лагранжа первого рода в криволинейных координатах при связях второго порядка (уравнения Лагранжа второго рода с множителями при связях второго порядка)*[16]:

$$MW_{\sigma} = Q_{\sigma} + \Lambda_{\varkappa}\frac{\partial f_2^{\varkappa}}{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{9.33}$$

Интегрируя при заданных начальных условиях уравнения (9.33) совместно с уравнениями связей (9.22), получаем уравнения движения механической системы.

В заключение ещё раз подчеркнем, что в изучаемом случае система векторов основного и взаимного неголономных базисов определяется при конкретном фазовом состоянии системы $(q, \dot{q})$, имеющемся при рассматриваемом моменте времени t.

Пример 9. *Движение фигуриста* (составление уравнений Маджи). Рассмотрим движение, осуществляемое наклонившимся фигуристом, стоящим на коротком коньке A (рис. 15). Отметим, что исторически первоначально подобная задача ставилась С. А. Чаплыгиным для нахождения плоско-параллельного движения саней, имеющих тонкий изогнутый полоз, вокруг нижней точки которого они могли поворачиваться (*сани Чаплыгина*).

Введем подвижную $Axyz$ и неподвижную $O\xi\eta\zeta$ системы координат. Движение происходит при наличии силы сопротивления $\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -\kappa_1\mathbf{v}_C$ и момента сопротивления $\mathbf{N}_{\text{сопр}} = -\kappa_2\,\boldsymbol{\omega}$, C — центр масс фигуриста.

[16] См. статью *Г. Гамеля* в предыдущей ссылке.

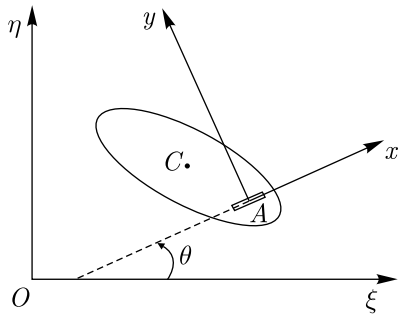

Рис. 15. Движение наклонившегося фигуриста (саней Чаплыгина)

Так как фигурист может перемещаться только вдоль конька, одновременно вращаясь на нем, то связь, наложенная на рассматриваемую систему, состоит в том, что скорость точки A всегда направлена по подвижной оси Ax, то есть ее проекция v_{Ay} на ось Ay равна нулю в каждый момент времени. Обозначим орты неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ через $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$, а координаты центра тяжести в неподвижной системе координат — через ξ_C, η_C. Координаты центра тяжести в подвижной системе координат $Axyz$ обозначим следующим образом: $x_C = \alpha$, $y_C = \beta$.

За обобщенные координаты системы примем координаты точки A и угол между осями Ax и $O\xi$:

$$q^1 = \xi\,, \qquad q^3 = \eta\,, \qquad q^2 = \theta\,.$$

Найдем уравнение связи. Выразим связь в проекциях вектора $\mathbf{v}_A$ на неподвижные оси $O\xi\eta$, учитывая, что

$$\mathbf{v}_A = v_{A\xi}\,\mathbf{i}_1 + v_{A\eta}\,\mathbf{j}_1 = \dot{\xi}\,\mathbf{i}_1 + \dot{\eta}\,\mathbf{j}_1\,.$$

Проекция вектора $\mathbf{v}_A$ на ось Ay имеет вид

$$v_{Ay} = -\dot{\xi}\sin\theta + \dot{\eta}\cos\theta\,,$$

поэтому уравнение связи $v_{Ay} = 0$ запишется следующим образом:

$$f_1(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3) \equiv -\dot{\xi}\sin\theta + \dot{\eta}\cos\theta = 0\,. \tag{9.34}$$

Кинетическая энергия определяется по теореме Кёнига и выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}M\left[(\dot{\xi} - \dot{\theta}(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta))^2 + (\dot{\eta} + \dot{\theta}(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta))^2 + k_C^2\dot{\theta}^2\right], \tag{9.35}$$

где k_C — радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости движения, а M — масса системы.

Обобщенные силы, действующие на систему, таковы:

$$Q_\xi = -\kappa_1\dot\xi\,, \qquad Q_\eta = -\kappa_1\dot\eta\,, \qquad Q_\theta = -\kappa_2\dot\theta\,. \tag{9.36}$$

Уравнение связи (9.34) можно переписать в виде

$$\dot\xi\,\mathrm{tg}\,\theta - \dot\eta = 0\,. \tag{9.37}$$

Введем квазискорости следующим образом:

$$v_*^1 = \dot\xi\,, \qquad v_*^2 = \dot\theta\,, \qquad v_*^3 = \dot\xi\,\mathrm{tg}\,\theta - \dot\eta\,.$$

Выразив через них обобщенные скорости, получим обратное преобразование:

$$\dot\xi = v_*^1\,, \qquad \dot\theta = v_*^2\,, \qquad \dot\eta = v_*^1\,\mathrm{tg}\,\theta - v_*^3\,.$$

По этим формулам можно вычислить производные:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\dot q^1}{\partial v_*^1} = 1\,, && \frac{\partial\dot q^2}{\partial v_*^1} = 0\,, && \frac{\partial\dot q^3}{\partial v_*^1} = \mathrm{tg}\,\theta\,,\\
&\frac{\partial\dot q^1}{\partial v_*^2} = 0\,, && \frac{\partial\dot q^2}{\partial v_*^2} = 1\,, && \frac{\partial\dot q^3}{\partial v_*^2} = 0\,,\\
&\frac{\partial\dot q^1}{\partial v_*^3} = 0\,, && \frac{\partial\dot q^2}{\partial v_*^3} = 0\,, && \frac{\partial\dot q^3}{\partial v_*^3} = 1\,.
\end{aligned}$$

Используя вычисленные коэффициенты в уравнениях Маджи (9.18) и проводя некоторые упрощения, записываем дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы:

$$\begin{gathered}
\ddot\xi + \ddot\eta\,\mathrm{tg}\,\theta - \ddot\theta\frac{\beta}{\cos\theta} - \dot\theta^2\frac{\alpha}{\cos\theta} = -\frac{\kappa_1}{M}(\dot\xi + \dot\eta\,\mathrm{tg}\,\theta)\,,\\
\gamma^2\ddot\theta + \ddot\eta(\alpha\,\mathrm{tg}\,\theta - \beta\sin\theta) - \ddot\xi(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) = -\frac{\kappa_2}{M}\dot\theta\,.
\end{gathered} \tag{9.38}$$

Эти уравнения следует интегрировать совместно с уравнением связи (9.37).

На рис. 16 представлены результаты численного интегрирования системы дифференциальных уравнений в течение 10 секунд. При расчетах принято

$$\begin{gathered}
\gamma^2 = 0.07\ \text{м}^2\,, \quad \kappa_1/M = 1\ \text{с}^{-1}\,, \quad \kappa_2/M = 0.02\ \text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}\,,\\
\xi(0) = 0\,, \quad \dot\xi(0) = 5\ \text{м}\cdot\text{с}^{-1}\,, \quad \eta(0) = 0\,, \quad \dot\eta(0) = 0\,,\\
\theta(0) = 0\,, \quad \dot\theta(0) = 12.5\ \text{с}^{-1}\,, \quad \alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,.
\end{gathered}$$

Помимо этого, согласно уравнениям (9.19) легко записывается и выражение обобщенной реакции неголономной связи:

$$\frac{\Lambda}{M} = \ddot\xi\,\mathrm{tg}\,\theta + \dot\xi\dot\theta\frac{1}{\cos^2\theta} + \ddot\theta(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta) - \dot\theta^2(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) + \frac{\kappa_1}{M}\dot\xi\,\mathrm{tg}\,\theta\,.$$

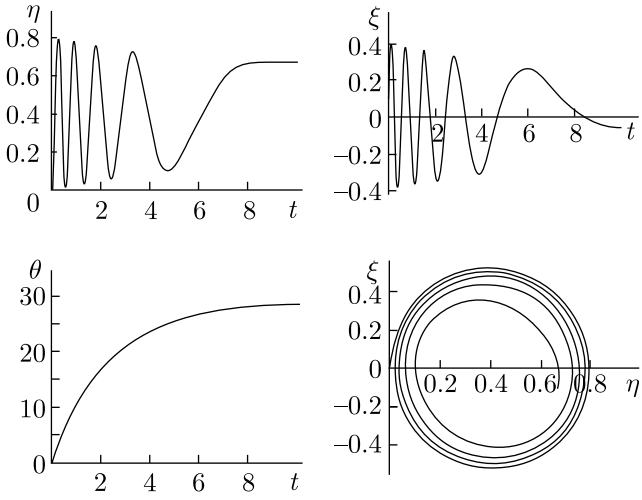

Рис. 16. Графики движения наклонившегося фигуриста

Подставляя в правую часть этой формулы найденные выше уравнения движения, получим выражение обобщенной реакции как функцию времени. По ней, в частности, можно определять моменты возможного освобождения механической системы от наложенной неголономной связи.

Пример 10. *Движение колесного робота* (составление уравнений Маджи и уравнений Лагранжа первого рода). Рассмотрим движение колесного робота (рис. 17), состоящего из корпуса массой M_1 и передней оси массой M_2. Пусть они имеют моменты инерции J_1 и J_2 относительно вертикальных осей, проходящих через их центры масс. Передняя ось может поворачиваться вокруг своей вертикальной оси, проходящей через ее центр. Массами колес и задней оси как отдельными частями пренебрегаем. Робот приводится в движение силой $F_1(t)$, действующей вдоль его продольной оси Cx, и моментом $L_1(t)$, поворачивающим переднюю ось, причем $F_1(t)$, $L_1(t)$ — заданные функции времени. Кроме того, учитываются сила сопротивления $F_2(v_C)$, действующая в противоположную сторону скорости $\mathbf{v}_C$ центра масс C корпуса, момент сопротивления $L_2(\dot\theta)$, приложенный к передней оси и противоположный угловой скорости ее вращения, и восстанавливающий момент $L_3(\theta)$.

Составим уравнения Маджи для исследования движения этой системы.

Движение робота в горизонтальной плоскости будем изучать относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$. Его положение будем задавать обобщенными координатами: $q^1 = \varphi$ — углом между продольной осью корпуса Cx и осью $O\xi$, $q^2 = \theta$ — углом между передней осью и перпендикуляром к оси Cx, $q^3 = \xi_C$, $q^4 = \eta_C$ — координатами точки C.

На движение робота наложены две неголономные связи, выражающие отсутствие боковых скольжений задней и передней осей экипажа. Их уравнения

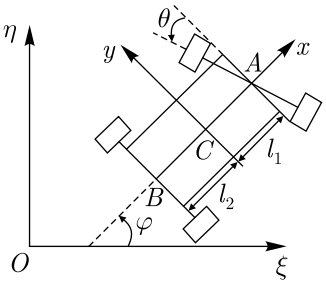

Рис. 17. Схема колесного робота

можно записать аналогично формуле (9.34) из примера 9:

$$\begin{gathered} -\dot{\xi}_B \sin\varphi + \dot{\eta}_B \cos\varphi = 0\,, \\ -\dot{\xi}_A \sin(\varphi+\theta) + \dot{\eta}_A \cos(\varphi+\theta) = 0\,. \end{gathered} \tag{9.39}$$

Здесь $\xi_A, \eta_A, \xi_B, \eta_B$ являются координатами центров масс передней и задней осей робота. Пусть расстояния центров масс этих осей от центра тяжести корпуса робота равны l_1 и l_2. Тогда уравнения неголономных связей (9.39) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} f_1^1 \equiv -\dot{\xi}_C \sin\varphi + \dot{\eta}_C \cos\varphi - l_2\dot{\varphi} = 0\,, \\ f_1^2 \equiv -\dot{\xi}_C \sin(\varphi+\theta) + \dot{\eta}_C \cos(\varphi+\theta) + l_1\dot{\varphi}\cos\theta = 0\,. \end{gathered} \tag{9.40}$$

Кинетическая энергия системы состоит из кинетических энергий корпуса и передней оси и вычисляется по формуле

$$\begin{gathered} 2T = M^*(\dot{\xi}_C^2 + \dot{\eta}_C^2) + J^*\dot{\varphi}^2 + J_2\dot{\theta}^2 + 2J_2\dot{\varphi}\dot{\theta} + 2M_2 l_1\dot{\varphi}(-\dot{\xi}_C\sin\varphi + \dot{\eta}_C\cos\varphi)\,, \\ M^* = M_1 + M_2\,, \qquad J^* = J_1 + J_2 + M_2 l_1^2\,. \end{gathered} \tag{9.41}$$

Обобщенные силы, действующие на робот, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} &Q_1 \equiv Q_\varphi = 0\,, \\ &Q_2 \equiv Q_\theta = L_1(t) - L_2(\dot{\theta}) - L_3(\theta)\,, \\ &Q_3 \equiv Q_{\xi_C} = F_1(t)\cos\varphi - F_2(v_C)\dot{\xi}_C/v_C\,, \\ &Q_4 \equiv Q_{\eta_C} = F_1(t)\sin\varphi - F_2(v_C)\dot{\eta}_C/v_C\,, \quad v_C = \sqrt{\dot{\xi}_C^2 + \dot{\eta}_C^2}\,. \end{aligned} \tag{9.42}$$

Введем квазискорости по формулам

$$\begin{gathered} v_*^1 = \dot{\varphi}\,, \qquad v_*^2 = \dot{\theta}\,, \\ v_*^3 = -l_2\dot{\varphi} - \dot{\xi}_C\sin\varphi + \dot{\eta}_C\cos\varphi\,, \\ v_*^4 = l_1\dot{\varphi}\cos\theta - \dot{\xi}_C\sin(\varphi+\theta) + \dot{\eta}_C\cos(\varphi+\theta)\,, \end{gathered}$$

и запишем обратное преобразование

$$\begin{aligned} &\dot q^1 \equiv \dot\varphi = v_*^1\,, \qquad \dot q^2 \equiv \dot\theta = v_*^2\,,\\ &\dot q^3 \equiv \dot\xi_C = \beta_1^3 v_*^1 + \beta_3^3 v_*^3 + \beta_4^3 v_*^4\,,\\ &\dot q^4 \equiv \dot\eta_C = \beta_1^4 v_*^1 + \beta_3^4 v_*^3 + \beta_4^4 v_*^4\,, \end{aligned} \tag{9.43}$$

где

$$\begin{aligned} &\beta_1^3 = (l_1\cos\varphi\cos\theta + l_2\cos(\varphi+\theta)/\sin\theta\,,\\ &\beta_3^3 = \cos(\varphi+\theta)/\sin\theta\,, \qquad \beta_4^3 = -\cos\varphi/\sin\theta\,,\\ &\beta_1^4 = (l_1\sin\varphi\cos\theta + l_2\sin(\varphi+\theta))/\sin\theta\,,\\ &\beta_3^4 = \sin(\varphi+\theta)/\sin\theta\,, \qquad \beta_4^4 = -\sin\varphi/\sin\theta\,. \end{aligned} \tag{9.44}$$

Первое уравнение Маджи в нашем случае имеет вид:

$$(MW_1 - Q_1)\frac{\partial\dot q^1}{\partial v_*^1} + (MW_3 - Q_3)\frac{\partial\dot q^3}{\partial v_*^1} + (MW_4 - Q_4)\frac{\partial\dot q^4}{\partial v_*^1} = 0. \tag{9.45}$$

Так как в уравнения связей не входит скорость $\dot\theta$, то второе уравнение Маджи превращается в уравнение Лагранжа второго рода:

$$MW_2 - Q_2 = 0\,. \tag{9.46}$$

Выражения MW_σ могут быть вычислены через кинетическую энергию (9.41) по формулам

$$MW_\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,, \qquad \sigma = \overline{1,4}.$$

В результате, пользуясь формулами (9.41), (9.42), (9.43), (9.44), уравнения движения робота (9.45), (9.46) можно записать в следующем развернутом виде:

$$\begin{gathered} \big[J^* + M_2 l_1(l_1 - \beta_1^3\sin\varphi + \beta_1^4\cos\varphi)\big]\ddot\varphi + J_2\ddot\theta + (M^*\beta_1^3 - M_2 l_1\sin\varphi)\ddot\xi_C +\\ +(M^*\beta_1^4 + M_2 l_1\cos\varphi)\ddot\eta_C = M_2 l_1\dot\varphi^2(\beta_1^3\cos\varphi + \beta_1^4\sin\varphi) +\\ +\big[F_1(t)\cos\varphi - F_2(v_C)\dot\xi_C/v_C\big]\beta_1^3 + \big[F_1(t)\sin\varphi - F_2(v_C)\dot\eta_C/v_C\big]\beta_1^4\,,\\ J_2(\ddot\theta + \ddot\varphi) = L_1(t) - L_2(\dot\theta) - L_3(\theta)\,. \end{gathered} \tag{9.47}$$

Если заданы начальные условия и аналитические представления функций $F_1(t)$, $F_2(v_C)$, $L_1(t)$, $L_2(\dot\theta)$, $L_3(\theta)$, то после численного интегрирования нелинейной системы дифференциальных уравнений (9.40), (9.47) можно найти закон движения робота:

$$\varphi = \varphi(t)\,, \qquad \theta = \theta(t)\,, \qquad \xi_C = \xi_C(t)\,, \qquad \eta_C = \eta_C(t)\,. \tag{9.48}$$

Обратим внимание на то, что рассмотренное движение робота может рассматриваться и как упрощенная математическая модель движения автомобиля

на повороте[17]. Поэтому в качестве числового примера рассмотрим движение гипотетического легкового малолитражного автомобиля, имеющего

$$M_1 = 1000 \text{ кг}\,, \quad M_2 = 110 \text{ кг}\,, \quad J_1 = 1500 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\,,$$
$$J_2 = 30 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\,, \qquad l_1 = 0.75 \text{ м}\,, \qquad l_2 = 1.65 \text{ м}\,,$$

при следующих силовых характеристиках:

$$F_1(t) = 2500 \text{ Н}\,, \quad F_2(v_C) = \kappa_2 v_C\,, \quad \kappa_2 = 100 \text{ Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^{-1}\,,$$
$$L_1(t) = 15 \text{ Н}\cdot\text{м}\,, \quad L_2(\dot\theta) = \kappa_1\dot\theta\,, \quad \kappa_1 = 0.5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}\,,$$
$$L_3(\theta) = \kappa_3\theta\,, \quad \kappa_3 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}\,.$$

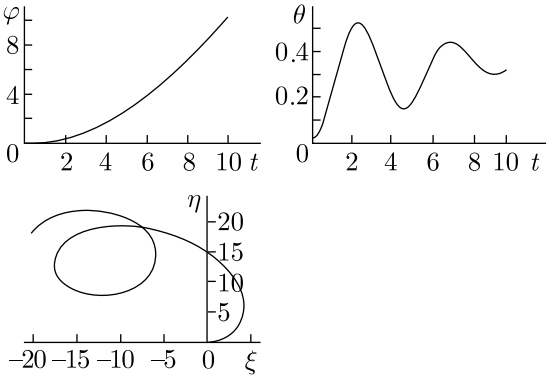

Рис. 18. Графики движения колесного робота

Результаты численного решения нелинейной системы дифференциальных уравнений (9.40), (9.47) приведены на рис. 18. При расчете приняты следующие начальные данные:

$$\varphi(0) = 0\,,\ \dot\varphi(0) = 0\,,\ \theta(0) = \pi/180 \text{ рад}\,,\ \dot\theta(0) = 0\,,\ \xi_C(0) = 0\,,$$
$$\dot\xi_C(0) = 0.00176856 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}\,,\ \eta_C(0) = 0\,,\ \dot\eta_C(0) = 0.000018008 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}\,.$$

Перейдем теперь к определению обобщенных реакций. Вторая группа уравнений Маджи (9.19) запишется следующим образом:

$$\Lambda_1 = (MW_3 - Q_3)\frac{\partial\dot q^3}{\partial v_*^3} + (MW_4 - Q_4)\frac{\partial\dot q^4}{\partial v_*^3}\,,$$
$$\Lambda_2 = (MW_3 - Q_3)\frac{\partial\dot q^3}{\partial v_*^4} + (MW_4 - Q_4)\frac{\partial\dot q^4}{\partial v_*^4}\,,$$

[17]Именно такая схема вводилась в статье: *Линейкин П. С.* О качении автомобиля // Тр. Саратовского автомоб.-дор. ин-та. 1939. № 5. С. 3–22.

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 =&[M^*\ddot{\xi}_C - M_2 l_1(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) - F_1(t)\cos\varphi + F_2(v_C)\dot{\xi}_C/v_C]\beta_3^3 + \\ &+[M^*\ddot{\eta}_C + M_2 l_1(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - F_1(t)\sin\varphi + F_2(v_C)\dot{\eta}_C/v_C]\beta_3^4, \\ \Lambda_2 =&[M^*\ddot{\xi}_C - M_2 l_1(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) - F_1(t)\cos\varphi + F_2(v_C)\dot{\xi}_C/v_C]\beta_4^3 + \\ &+[M^*\ddot{\eta}_C + M_2 l_1(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - F_1(t)\sin\varphi + F_2(v_C)\dot{\eta}_C/v_C]\beta_4^4.\end{aligned}$$

Подставляя в эти формулы выражения (9.48), находим закон изменения обобщенных реакций $\Lambda_i = \Lambda_i(t),\ i = 1, 2$. Эти функции позволяют исследовать возможность выполнения неголономных связей (9.40). Если силы реакций окажутся равными силам трения Кулона, то эти связи могут не выполняться, и робот (автомобиль) может начать скользить вдоль осей своих колес.

Изучение возможности бокового скольжения колес, сопровождающееся обычно возникновением аварийной ситуации, особенно важно при рассмотрении движения автомобиля на повороте. Поясним возможные типы движения исследуемой механической модели автомобиля. На рис. 19 в фазовом пространстве переменных $q^\sigma,\ \dot{q}^\sigma,\ \sigma = \overline{1,4}$, условно изображены две поверхности. Первая соответствует связи, задаваемой первым уравнением из (9.40), а вторая — вторым уравнением.

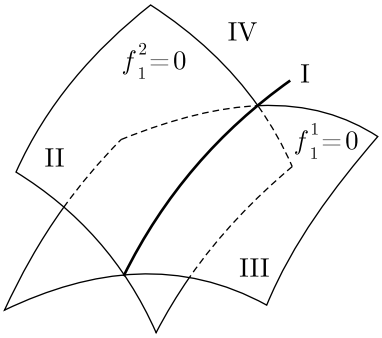

Рис. 19. Возможные типы движения колесного робота

При одновременном выполнении этих неголономных связей точка фазового пространства должна находиться на линии пересечения этих поверхностей. Этому соответствует I тип движения автомобиля (жирная кривая I на рис. 19). Если первая связь нарушается, а вторая связь выполняется, то изображающая точка находится на поверхности $f_1^2 = 0$ (II тип движения). Если освобождается вторая связь, но продолжает выполняться первая связь $f_1^1 = 0$, то изображающая точка принадлежит поверхности $f_1^1 = 0$ (III тип движения). В случае освобождения системы от обеих связей изображающая точка находится вне поверхностей, при этом автомобиль движется при наличии боковых сил трения, действующих на

переднюю и заднюю оси (IV тип движения). Из каждого типа движения изображающая точка может перейти в любой другой тип движения[18].

Можно было бы составлять и уравнения Лагранжа первого рода в криволинейных координатах для неголономных систем (см. уравнения (9.21)). В нашей задаче они имеют вид:

$$
\begin{gathered}
J^*\ddot{\varphi} + J_2\ddot{\theta} - M_2 l_1 \ddot{\xi}_C \sin\varphi + M_2 l_1 \ddot{\eta}_C \cos\varphi = -\Lambda_1 l_2 + \Lambda_2 l_1 \cos\theta\,, \\
J_2(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) = L_1(t) - L_2(\dot{\theta}) - L_3(\theta)\,, \\
M^*\ddot{\xi}_C - M_2 l_1 \ddot{\varphi}\sin\varphi - M_2 l_1 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi = \\
= F_1\cos\varphi - L_2(\dot{\theta}) - \Lambda_1 \sin\varphi - \Lambda_2 \sin(\varphi+\theta)\,, \\
M^*\ddot{\eta}_C + M_2 l_1 \ddot{\varphi}\cos\varphi - M_2 l_1 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = \\
= F_1\sin\varphi - k_2\dot{\eta}_C + \Lambda_1\cos\varphi + \Lambda_2\cos(\varphi+\theta)\,.
\end{gathered}
$$

Приведенные четыре уравнения содержат четыре неизвестные обобщенные координаты и два неизвестных множителя Лагранжа, поэтому их приходится решать совместно с уравнениями связей (9.40). Это является характерным именно для уравнений Лагранжа первого рода. Если уравнения связей продифференцировать по времени и с их помощью из приведенных уравнений Лагранжа исключить обобщенные реакции, то получим уравнения движения Маджи (9.47), а так же формулы для определения Λ_1 и Λ_2.

Пример 11. *Качение эллипсоида по шероховатой плоскости* (составление уравнений Маджи). Отметим, что конкретный вид уравнений Маджи существенно зависит от выбора переменных v_*^ρ. При удачном их выборе можно значительно упростить выкладки, связанные с приведением задачи к системе дифференциальных уравнений, записанных в нормальной форме.

Рассмотрим в качестве примера качение по неподвижной плоскости однородного твердого тела, имеющего форму эллипсоида. Центр эллипсоида, совпадающий с центром тяжести, примем за начало подвижной системы координат $Cxyz$, оси которой жестко связаны с его осями (рис. 20). Пусть плоскость π, по которой катится эллипсоид, совпадает с плоскостью $O\xi\eta$ неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$. Обозначим через ξ, η, ζ координаты центра эллипсоида относительно неподвижной системы отсчета. Скорость точки касания P может быть вычислена по формуле

$$
\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CP}\,.
$$

При качении без проскальзывания скорость точки P равна нулю, и, следовательно, уравнение связи может быть записано в виде

$$
\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CP} = \dot{\xi}\,\mathbf{i}_\xi + \dot{\eta}\,\mathbf{i}_\eta + \dot{\zeta}\,\mathbf{i}_\zeta + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_\xi & \mathbf{i}_\eta & \mathbf{i}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{9.49}
$$

[18] Подробно эти типы движения для переднеприводного и заднеприводного автомобилей рассмотрены в Приложении E в монографии: *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.*. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука, Физматлит, 2009. 344 с.

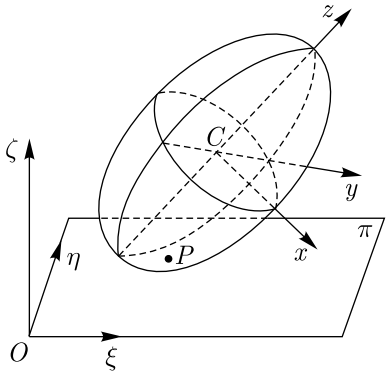

Рис. 20. Эллипсоид на плоскости

Здесь ξ_0, η_0, ζ_0 — координаты точки P относительно системы отсчета $C\xi_1\eta_1\zeta_1$, оси которой ξ_1, η_1, ζ_1 параллельны соответственно осям ξ, η, ζ неподвижной системы координат. Можно показать, что значения ξ_0, η_0, ζ_0 могут быть вычислены по формулам

$$-\xi_0\zeta = (a^2 - b^2)\sin\theta\cos\psi\sin\varphi\cos\varphi + (c^2 - a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)\sin\psi\cos\theta\sin\theta\,,$$
$$-\eta_0\zeta = (a^2 - b^2)\sin\psi\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi + (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi - c^2)\cos\psi\cos\theta\sin\theta\,,$$
$$\zeta_0 = -\zeta = -\sqrt{a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + b^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + c^2\cos^2\theta}\,,$$

где a, b, c — полуоси эллипсоида, ψ, θ, φ — углы Эйлера, позволяющие определить ориентацию системы координат $Cxyz$ относительно системы отсчета $C\xi_1\eta_1\zeta_1$.

Векторное уравнение (9.49) эквивалентно трем скалярным уравнениям, определяющим в нашей задаче неголономные связи:

$$\begin{aligned} f_1^1 &\equiv \dot\xi + \omega_\eta\zeta_0 - \omega_\zeta\eta_0 = 0\,,\\ f_1^2 &\equiv \dot\eta + \omega_\zeta\xi_0 - \omega_\xi\zeta_0 = 0\,,\\ f_1^3 &\equiv \dot\zeta + \omega_\xi\eta_0 - \omega_\eta\xi_0 = 0\,. \end{aligned} \tag{9.50}$$

В качестве обобщенных лагранжевых координат в данной задаче можно принять координаты ξ, η, ζ центра масс и углы Эйлера ψ, θ, φ. Для вычисления кинетической энергии эллипсоида в этих координатах воспользуемся теоремой Кёнига. Тогда имеем

$$T = \frac{M}{2}(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2) + \frac{J_\omega\omega^2}{2}\,.$$

Величина $J_\omega\omega^2$ может быть представлена в виде

$$J_\omega\omega^2 = A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2\,,$$

где A, B, C — моменты инерции эллипсоида относительно осей x, y, z соответственно. Эллипсоид по предположению является однородным твердым телом, поэтому

$$A = \frac{M(b^2+c^2)}{5}\,, \qquad B = \frac{M(c^2+a^2)}{5}\,, \qquad C = \frac{M(a^2+b^2)}{5}\,.$$

Проекции ω_x, ω_y, ω_z вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси подвижной системы координат $Cxyz$ таковы:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi\,,\\
\omega_y &= \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi\,,\\
\omega_z &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi\,.
\end{aligned}$$

Приведенные формулы позволяют вычислить ковариантные компоненты вектора $M\mathbf{W}$:

$$\begin{aligned}
&MW_\xi = M\ddot\xi\,, && MW_\eta = M\ddot\eta\,, && MW_\zeta = M\ddot\zeta\,,\\
&MW_\varphi = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial\varphi}\,, && MW_\psi = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi} - \frac{\partial T}{\partial\psi}\,, && MW_\theta = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial\theta}\,.
\end{aligned}$$

Ввиду громоздкости явных выражений для W_φ, W_ψ и W_θ они здесь не приведены.

Величины ω_ξ, ω_η, ω_ζ, входящие в уравнения связей (9.50), выражаются формулами

$$\begin{aligned}
\omega_\xi &= \dot\varphi\sin\psi\sin\theta + \dot\theta\cos\psi\,,\\
\omega_\eta &= \dot\varphi\cos\psi\sin\theta + \dot\theta\sin\psi\,,\\
\omega_\zeta &= \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi\,.
\end{aligned}$$

Поэтому если принять $v_*^1 = \dot\xi$, $v_*^2 = \dot\eta$, $v_*^3 = \dot\zeta$, $v_*^{3+\varkappa} = f_1^\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,3}$, то в данной задаче из-за сложной зависимости функций $f_1^\varkappa$ от скоростей $\dot q^\sigma$ выражения $\partial\dot q^\sigma/\partial v_*^\lambda$ оказываются весьма громоздкими, а, значит, сложными будут и окончательные уравнения Маджи. Задача значительно упрощается, если в качестве свободных переменных v_*^λ выбрать угловые скорости ω_ξ, ω_η, ω_ζ. Можно показать, что при задании квазискоростей v_*^ρ формулами

$$\begin{aligned}
&v_*^1 = \omega_\xi\,, && v_*^2 = \omega_\eta\,, && v_*^3 = \omega_\zeta\,,\\
&v_*^4 = \dot\xi + \omega_\eta\zeta_0 - \omega_\zeta\eta_0\,, && v_*^5 = \dot\eta + \omega_\zeta\xi_0 - \omega_\xi\zeta_0\,, && v_*^6 = \dot\zeta + \omega_\xi\eta_0 - \omega_\eta\xi_0
\end{aligned}$$

имеем

$$\frac{\partial\dot\xi}{\partial\omega_\xi} = 0\,, \quad \frac{\partial\dot\eta}{\partial\omega_\xi} = \zeta_0\,, \quad \frac{\partial\dot\zeta}{\partial\omega_\xi} = -\eta_0\,,$$

$$\frac{\partial\dot\varphi}{\partial\omega_\xi} = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\,, \quad \frac{\partial\dot\psi}{\partial\omega_\xi} = -\frac{\sin\psi\cos\theta}{\sin\theta}\,, \quad \frac{\partial\dot\theta}{\partial\omega_\xi} = \cos\psi\,,$$

$$\frac{\partial\dot\xi}{\partial\omega_\eta} = -\zeta_0\,, \quad \frac{\partial\dot\eta}{\partial\omega_\eta} = 0\,, \quad \frac{\partial\dot\zeta}{\partial\omega_\eta} = \xi_0\,,$$

$$\frac{\partial\dot\varphi}{\partial\omega_\eta}=-\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\,,\quad \frac{\partial\dot\psi}{\partial\omega_\eta}=\frac{\cos\psi\cos\theta}{\sin\theta}\,,\quad \frac{\partial\dot\theta}{\partial\omega_\eta}=\sin\psi\,,$$

$$\frac{\partial\dot\xi}{\partial\omega_\zeta}=\eta_0\,,\quad \frac{\partial\dot\eta}{\partial\omega_\zeta}=-\xi_0\,,\quad \frac{\partial\dot\zeta}{\partial\omega_\zeta}=0\,,\quad \frac{\partial\dot\varphi}{\partial\omega_\zeta}=0\,,\quad \frac{\partial\dot\psi}{\partial\omega_\zeta}=1\,,\quad \frac{\partial\dot\theta}{\partial\omega_\zeta}=0\,.$$

Подставляя эти выражения в уравнения Маджи, последние можно записать в явном виде.

Данный пример показывает, насколько сложными являются задачи, связанные с качением одного тела по поверхности другого, даже в предположении, что связь, задаваемая уравнением (9.49), идеальна[19].

§ 10. Вывод наиболее употребительных форм записи уравнений движения неголономных систем из уравнений Маджи

Имеется целый ряд различных видов уравнений движения неголономных систем. Рассмотрим основные из них и покажем, что они могут быть получены из уравнений Маджи.

Уравнения Чаплыгина и Воронца. Пусть на рассматриваемую систему наложены стационарные линейные неголономные связи, уравнения которых можно представить в виде

$$\dot q^{l+\varkappa}=\beta^{l+\varkappa}_\lambda(q)\,\dot q^\lambda\,,\qquad \lambda=\overline{1,l}\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,. \tag{10.1}$$

Тогда, полагая

$$v^\lambda_*=\dot q^\lambda\,,\quad \lambda=\overline{1,l}\,,\quad v^{l+\varkappa}_*=\dot q^{l+\varkappa}-\beta^{l+\varkappa}_\lambda(q)\,\dot q^\lambda\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,,$$

будем иметь

$$\frac{\partial\dot q^\mu}{\partial v^\lambda_*}=\delta^\mu_\lambda=\begin{cases}1\,, & \mu=\lambda\,,\\ 0\,, & \mu\neq\lambda\,,\end{cases}\qquad \lambda,\mu=\overline{1,l}\,,$$

$$\frac{\partial\dot q^{l+\varkappa}}{\partial v^\lambda_*}=\beta^{l+\varkappa}_\lambda\,,\qquad \lambda=\overline{1,l}\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,.$$

Из этих выражений следует, что при неголономных связях, заданных в виде (10.1), уравнения Маджи (9.18) могут быть записаны в форме:

$$\begin{gathered}MW_\lambda+MW_{l+\varkappa}\,\beta^{l+\varkappa}_\lambda=Q_\lambda+Q_{l+\varkappa}\,\beta^{l+\varkappa}_\lambda\,,\\ \lambda=\overline{1,l}\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,.\end{gathered} \tag{10.2}$$

[19] Динамике тел, соприкасающихся с твердой поверхностью, посвящена монография: *Маркеев А. П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с. Новая теория взаимодействия катящегося твердого тела с деформируемой поверхностью предложена в статье: *Журавлёв В. Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // Прикл. мат и мех. 1998. Том 62. Вып. 5. С. 762–767.

Предположим, что кинетическая энергия T не зависит от обобщенных координат $q^{l+\varkappa}$ и $Q_{l+\varkappa} = 0$ ($\varkappa = \overline{1,k}$). Тогда уравнения (10.2) могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} + \beta_\lambda^{l+\varkappa}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}} = Q_\lambda\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,. \tag{10.3}$$

Преобразуем уравнения (10.3). Исключим из выражения для кинетической энергии T все скорости $\dot q^{l+\varkappa}$, используя уравнения связей (10.1), и обозначим полученное выражение для кинетической энергии через T_*. В этом случае справедливы равенства

$$\frac{\partial T_*}{\partial \dot q^\lambda} = \frac{\partial T}{\partial \dot q^\lambda} + \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\frac{\partial \dot q^{l+\varkappa}}{\partial \dot q^\lambda} = \frac{\partial T}{\partial \dot q^\lambda} + \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\beta_\lambda^{l+\varkappa}\,, \tag{10.4}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_*}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\frac{\partial \dot q^{l+\varkappa}}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\frac{\partial \beta_\mu^{l+\varkappa}}{\partial q^\lambda}\dot q^\mu\,,\\ \lambda,\mu = \overline{1,l}\,.\end{gathered} \tag{10.5}$$

Предположим, что коэффициенты $\beta_\lambda^{l+\varkappa}$ не зависят от $q^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$. Тогда, дифференцируя выражение (10.4) по времени, получаем

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T_*}{\partial \dot q^\lambda} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\lambda} + \beta_\lambda^{l+\varkappa}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}} + \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\frac{d\beta_\lambda^{l+\varkappa}}{dt} =\\ = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\lambda} + \beta_\lambda^{l+\varkappa}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}} + \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\frac{\partial \beta_\lambda^{l+\varkappa}}{\partial q^\mu}\dot q^\mu\,,\\ \lambda,\mu = \overline{1,l}\,.\end{gathered} \tag{10.6}$$

Вычислив с помощью формул (10.6) и (10.5) значения $d(\partial T/\partial \dot q^\lambda)/dt$ и $\partial T/\partial q^\lambda$ и подставив их в уравнения (10.3), будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T_*}{\partial \dot q^\lambda} - \frac{\partial T_*}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\left(\frac{\partial \beta_\lambda^{l+\varkappa}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial \beta_\mu^{l+\varkappa}}{\partial q^\lambda}\right)\dot q^\mu = Q_\lambda\,,\\ \varkappa = \overline{1,k}\,, \qquad \lambda,\mu = \overline{1,l}\,.\end{gathered} \tag{10.7}$$

Эти уравнения были получены *С. А. Чаплыгиным*[20].

Если в уравнениях (10.7), используя уравнения связей (10.1), в выражениях $\partial T/\partial \dot q^{l+\varkappa}$ исключить зависимые скорости $\dot q^{l+1}, \dot q^{l+2}, \ldots, \dot q^{l+k}$,

[20] См.: *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Тр. отд. физ. наук Общ-ва люб. естествозн. 1897. Т. 9. Вып. 1. (См. Собр. соч. Т. 1. 1948).

то получим систему l уравнений относительно неизвестных функций $q^1, q^2, \dots, q^l$. Таким образом, уравнения Чаплыгина позволяют независимо от связей (10.1) найти $q^1(t), q^2(t), \dots, q^l(t)$, после чего можно из уравнений (10.1) определить остальные $q^{l+1}(t), q^{l+2}(t), \dots, q^{l+k}(t)$.

Пусть коэффициенты $\beta_\lambda^{l+\varkappa}$ удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial \beta_\mu^{l+\varkappa}}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial \beta_\lambda^{l+\varkappa}}{\partial q^\mu} = 0\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,, \qquad \lambda, \mu = \overline{1,l}\,. \tag{10.8}$$

Отсюда, а также из предположения, что коэффициенты $\beta_\lambda^{l+\varkappa}$ не зависят от $q^{l+\varkappa}$, $(\varkappa = \overline{1,k})$, следует, что они могут быть представлены в виде

$$\beta_\lambda^{l+\varkappa} = \frac{\partial G^{l+\varkappa}}{\partial q^\lambda}\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{10.9}$$

Здесь $G^{l+\varkappa}$ — функции координат $q^1, q^2, \dots, q^l$. Подставляя выражения (10.9) в уравнения (10.1), получим

$$q^{l+\varkappa} = G^{l+\varkappa}(q^1, q^2, \dots, q^l)\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Координаты $q^{l+\varkappa}$ являются, таким образом, следствием остальных. И потому при выполнении условий (10.8) движение описывается обычными уравнениями Лагранжа.

Теперь выведем уравнения движения в форме, полученной П.В. Воронцом[21]. Рассмотрим механическую систему со связями, заданными в виде (10.1), не делая тех дополнительных предположений, которые приводят к уравнениям Чаплыгина. Уравнения Маджи (10.2) в случае, когда кинетическая энергия T зависит от всех координат, запишутся в виде

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}} - \frac{\partial T}{\partial q^{l+\varkappa}}\right)\beta_\lambda^{l+\varkappa} = Q_\lambda + Q_{l+\varkappa}\,\beta_\lambda^{l+\varkappa}\,,\\ \varkappa = \overline{1,k}\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,.\end{gathered} \tag{10.10}$$

Для того, чтобы привести эти уравнения к уравнениям Воронца, поступим аналогично предыдущему. Соотношения (10.5) сохраняют свою форму, а выражения (10.6) при учете того, что теперь коэффициенты $\beta_\lambda^{l+\varkappa}$ зависят от всех q^σ, принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T_*}{\partial \dot q^\lambda} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\lambda} + \beta_\lambda^{l+\varkappa}\,\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}} + \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\,\frac{\partial \beta_\lambda^{l+\varkappa}}{\partial q^\mu}\,\dot q^\mu +\\ + \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\,\frac{\partial \beta_\lambda^{l+\varkappa}}{\partial q^{l+\nu}}\,\beta_\mu^{l+\nu}\,\dot q^\mu\,, \qquad \varkappa, \nu = \overline{1,k}\,, \quad \lambda, \mu = \overline{1,l}\,.\end{gathered} \tag{10.11}$$

[21] См.: *Воронец П. В.* Об уравнениях движения для неголономных систем // Матем. сб. Моск. Матем. общ-ва. 1901. Т. 22. Вып. 4.

В данном случае наряду с соотношениями (10.5) и (10.11) необходимо учесть также равенства

$$\beta_\lambda^{l+\varkappa}\frac{\partial T_*}{\partial q^{l+\varkappa}} = \beta_\lambda^{l+\varkappa}\left(\frac{\partial T}{\partial q^{l+\varkappa}} + \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\nu}}\frac{\partial \beta_\mu^{l+\nu}}{\partial q^{l+\varkappa}}\dot q^\mu\right).$$

Это выражение, а также соотношения (10.5) и (10.11) позволяют уравнения (10.10) представить в виде

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T_*}{\partial \dot q^\lambda} - \frac{\partial T_*}{\partial q^\lambda} - \beta_\lambda^{l+\varkappa}\frac{\partial T_*}{\partial q^{l+\varkappa}} - \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\beta_{\lambda\mu}^{l+\varkappa}\dot q^\mu = \\ = Q_\lambda + Q_{l+\varkappa}\beta_\lambda^{l+\varkappa}, \quad \lambda,\mu = \overline{1,l}, \quad \varkappa = \overline{1,k},\end{gathered} \tag{10.12}$$

где

$$\beta_{\lambda\mu}^{l+\varkappa} = \frac{\partial \beta_\lambda^{l+\varkappa}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial \beta_\mu^{l+\varkappa}}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial \beta_\lambda^{l+\varkappa}}{\partial q^{l+\nu}}\beta_\mu^{l+\nu} - \frac{\partial \beta_\mu^{l+\varkappa}}{\partial q^{l+\nu}}\beta_\lambda^{l+\nu}.$$

Уравнения (10.12) называются *уравнениями Воронца*. Присоединяя к уравнениям движения (10.12) уравнения связей (10.1), получим систему дифференциальных уравнений для определения функций $q^\sigma(t)$, $\sigma = \overline{1,s}$.

Уравнения (10.12) в случае движения несвободной системы под действием сил, имеющих потенциал U, принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T_*}{\partial \dot q^\lambda} - \frac{\partial (T_* + U)}{\partial q^\lambda} - \beta_\lambda^{l+\varkappa}\frac{\partial (T_* + U)}{\partial q^{l+\varkappa}} - \frac{\partial T}{\partial \dot q^{l+\varkappa}}\beta_{\lambda\mu}^{l+\varkappa}\dot q^\mu = 0, \\ \lambda,\mu = \overline{1,l}, \quad \varkappa = \overline{1,k}.\end{gathered}$$

В частном случае, когда координаты $q^{l+1}, q^{l+2}, \dots, q^{l+k}$, соответствующие исключенным скоростям, не входят явно в выражения для кинетической и потенциальной энергии, а также в уравнения связей, уравнения Воронца (10.12) совпадают с уравнениями Чаплыгина (10.7).

Уравнения в квазикоординатах (уравнения Гамеля — Новосёлова, Воронца — Гамеля, Пуанкаре — Четаева). Как известно, проекции вектора мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на неподвижные оси нельзя рассматривать как производные от некоторых новых углов, однозначно определяющих положение твердого тела. Точно так же может оказаться, что величины v_*^ρ, взаимно-однозначно связанные с обобщенными скоростями $\dot q^\sigma$, нельзя рассматривать как производные от некоторых новых координат q_*^ρ. Поэтому величины v_*^ρ называются *квазискоростями*, а переменные

π^ρ, вводимые по формулам

$$\pi^\rho = \int\limits_t^{t_0} v_*^\rho dt$$

— *квазикоординатами.*

В выражении для кинетической энергии T обобщенные скорости $\dot{q}^\sigma$ заменим на квазискорости v_*^ρ. Полученную при этом функцию обозначим через T^*. Выясним, какую форму можно придать уравнениям Маджи, записанным в виде

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} - Q_\sigma\right)\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = 0\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \tag{10.13}$$

при использовании функции T^*.

Учитывая соотношения

$$\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\,, \qquad \frac{\partial T^*}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\rho}\frac{\partial \dot{q}^\rho}{\partial q^\sigma}\,,$$
$$\rho, \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,,$$

будем иметь

$$\begin{gathered}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\right)\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\right) - \\ -\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\,,\end{gathered} \tag{10.14}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\left(\frac{\partial T^*}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\rho}\frac{\partial \dot{q}^\rho}{\partial q^\sigma}\right) = \\ = \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\frac{\partial T^*}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\rho}\frac{\partial \dot{q}^\rho}{\partial q^\sigma}\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\,.\end{gathered} \tag{10.15}$$

В правой части выражения (10.15) в двойной сумме поменяем местами индексы суммирования ρ и σ. В результате получим

$$\frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\frac{\partial T^*}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma}\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial q^\rho}\frac{\partial \dot{q}^\rho}{\partial v_*^\lambda}\,. \tag{10.16}$$

Введем в рассмотрение оператор

$$\frac{\partial}{\partial \pi^\rho} = \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\rho}\frac{\partial}{\partial q^\sigma}\,, \qquad \rho, \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{10.17}$$

который в том случае, когда можно положить $v_*^\rho = \dot\pi^\rho = \dot q_*^\rho$, переходит в оператор частной производной по новой координате q_*^ρ, так как при этом

$$\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\rho}\,\frac{\partial}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial \dot q_*^\rho}\,\frac{\partial}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial q^\sigma}{\partial q_*^\rho}\,\frac{\partial}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial}{\partial q_*^\rho}\,.$$

Соотношение (10.16) при учете выражения (10.17) запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = \frac{\partial T^*}{\partial \pi^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma}\,\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial \pi^\lambda}\,.$$

Отсюда и из выражения (10.14) следует, что уравнения Маджи (10.13) могут быть представлены в форме

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial \pi^\lambda}\right) = Q_\lambda^*\,,\\ \sigma = \overline{1,s}\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,.\end{gathered} \tag{10.18}$$

Здесь

$$Q_\lambda^* = Q_\sigma\,\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\,. \tag{10.19}$$

Уравнения (10.18) иногда называются *уравнениями типа Чаплыгина*[22].

Рассмотрим частный случай, когда обобщенные скорости $\dot q^\sigma$ связаны с квазискоростями v_*^ρ линейными, однородными, стационарными соотношениями

$$\begin{gathered}v_*^\rho = \alpha_\sigma^\rho(q)\,\dot q^\sigma\,, \qquad \dot q^\sigma = \beta_\rho^\sigma(q)\,v_*^\rho\,,\\ \rho,\sigma = \overline{1,s}\,,\end{gathered} \tag{10.20}$$

а уравнения связей таковы:

$$v_*^{l+\varkappa} \equiv \alpha_\sigma^{l+\varkappa}(q)\,\dot q^\sigma = 0\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{10.21}$$

В этом случае, используя выражения (10.20) и оператор (10.17), а также учитывая, что после выполнения операций дифференцирования можно положить $v_*^{l+\varkappa} = 0$ ($\varkappa = \overline{1,k}$), будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = \frac{d}{dt}\beta_\lambda^\sigma(q) = \frac{\partial \beta_\lambda^\sigma}{\partial q^\rho}\,\dot q^\rho = \frac{\partial \beta_\lambda^\sigma}{\partial q^\rho}\,\beta_\mu^\rho\,v_*^\mu =\\ = v_*^\mu\,\frac{\partial \dot q^\rho}{\partial v_*^\mu}\,\frac{\partial \beta_\lambda^\sigma}{\partial q^\rho} = v_*^\mu\,\frac{\partial \beta_\lambda^\sigma}{\partial \pi^\mu}\,, \qquad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,, \quad \lambda,\mu = \overline{1,l}\,;\\ \frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial \pi^\lambda} = \frac{\partial \dot q^\rho}{\partial v_*^\lambda}\,\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial q^\rho} = \frac{\partial \dot q^\rho}{\partial v_*^\lambda}\,\frac{\partial \beta_\mu^\sigma}{\partial q^\rho}\,v_*^\mu =\\ = v_*^\mu\,\frac{\partial \beta_\mu^\sigma}{\partial \pi^\lambda}\,, \qquad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,, \qquad \lambda,\mu = \overline{1,l}\,.\end{gathered}$$

[22] См.: *Новосёлов В. С.* Применение нелинейных неголономных координат в аналитической механике // Уч. зап. ЛГУ. 1957. № 217. Вып. 31. С. 50–83.

Следовательно, уравнения (10.18) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma}\left(\frac{\partial \beta_\lambda^\sigma}{\partial \pi^\mu} - \frac{\partial \beta_\mu^\sigma}{\partial \pi^\lambda}\right) v_*^\mu = Q_\lambda^*\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,, \qquad \lambda,\mu = \overline{1,l}\,. \tag{10.22}$$

Эти уравнения обычно называются *уравнениями Чаплыгина в квазикоординатах*[23]. Отметим, что уравнения (10.18) и (10.22) следует рассматривать совместно с уравнениями неголономных связей.

В уравнения (10.18) и (10.22) входят как функция T^*, так и функция T. Приведем теперь уравнения Маджи (10.13) к виду, содержащему только функцию T^*. Из соотношений

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} = \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho}\frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma}\,, \qquad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,,$$

следует, что

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma}\right)\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = \frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho}\frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma}\right) = \\ = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho}\right)\frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma}\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda} + \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho}\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\frac{d}{dt}\frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma}\,.$$

Так как

$$\frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma}\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = \delta_\lambda^\rho = \begin{cases} 1\,, & \rho = \lambda\,, \\ 0\,, & \rho \neq \lambda\,, \end{cases}$$

то

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma}\right)\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} + \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho}\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\frac{d}{dt}\frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma}\,. \tag{10.23}$$

Учитывая также выражения

$$\frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial T^*}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho}\frac{\partial v_*^\rho}{\partial q^\sigma}$$

и оператор (10.17), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = \frac{\partial T^*}{\partial \pi^\lambda} + \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho}\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\frac{\partial v_*^\rho}{\partial q^\sigma}\,.$$

[23] См. в предыдущем примечании работу В. С. Новосёлова и монографию: *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, Физматлит, 1967. 520 с.

Отсюда и из формул (10.19) и (10.23) вытекает, что уравнения Маджи (10.13) могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi^\lambda} + \frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho}\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial v_*^\rho}{\partial q^\sigma}\right) = Q_\lambda^*\,, \qquad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,, \qquad \lambda = \overline{1,l}\,. \tag{10.24}$$

Уравнения (10.18) и (10.24) могут быть применены и к голономным, и к неголономным системам, причем как с линейными, так и с нелинейными по скоростям идеальными связями. Для случая, когда время явно не входит ни в кинетическую энергию, ни в уравнения связей, уравнения (10.18) и (10.24) были получены Г. Гамелем, а для общего случая — В. С. Новосёловым[24]. Поэтому эти уравнения будем называть *уравнениями Гамеля — Новосёлова.*

В том случае, когда квазискорости вводятся по формулам (10.20), а связи задаются уравнениями (10.21), имеем

$$\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\frac{d}{dt}\frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma} = \beta_\lambda^\sigma\frac{d\alpha_\sigma^\rho}{dt} = \beta_\lambda^\sigma\frac{\partial \alpha_\sigma^\rho}{\partial q^\tau}\dot q^\tau = \beta_\lambda^\sigma\beta_\mu^\tau\frac{\partial \alpha_\sigma^\rho}{\partial q^\tau}v_*^\mu\,,$$
$$\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\frac{\partial v_*^\rho}{\partial q^\sigma} = \beta_\lambda^\sigma\frac{\partial \alpha_\tau^\rho}{\partial q^\sigma}\dot q^\tau = \beta_\lambda^\sigma\beta_\mu^\tau\frac{\partial \alpha_\tau^\rho}{\partial q^\sigma}v_*^\mu\,,$$
$$\rho,\sigma,\tau = \overline{1,s}\,, \qquad \lambda,\mu = \overline{1,l}\,.$$

Следовательно, в этом случае уравнения (10.24) принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi^\lambda} + c_{\lambda\mu}^\rho v_*^\mu\frac{\partial T^*}{\partial v_*^\rho} = Q_\lambda^*\,,\\ c_{\lambda\mu}^\rho = \left(\frac{\partial \alpha_\sigma^\rho}{\partial q^\tau} - \frac{\partial \alpha_\tau^\rho}{\partial q^\sigma}\right)\beta_\lambda^\sigma\beta_\mu^\tau\,,\\ \rho,\sigma,\tau = \overline{1,s}\,, \qquad \lambda,\mu = \overline{1,l}\,.\end{gathered} \tag{10.25}$$

Для случая $l = s$ эти уравнения, а также выражения для коэффициентов $c_{\sigma\tau}^\rho$ впервые были получены П. В. Воронцом в 1901 г. (см. сноску выше). В 1904 г. эти результаты для $l < s$ вновь получает Г. Гамель[25]. Поэтому эти уравнения принято называть *уравнениями Воронца — Гамеля*, хотя

[24] См.: *Hamel G.* Nichtholonome Systeme höherer Art // Sitzungberichte der Berliner Mathemat. Gesellschaft. 1938. Bd. 37. S. 41–52; *Новосёлов В. С.* Применение нелинейных неголономных координат в аналитической механике // Ученые записки ЛГУ. Серия мат. наук. 1957. Вып. 31. № 217. С. 50–83; *Он же.* Расширенные уравнения движения нелинейных неголономных систем // *Там же.* С. 84–89.

[25] См.: *Hamel G.* Die Lagrange — Eulerischen Gleichungen der Mechanik // Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1904. Bd. 50. S. 1–50.

сам Г. Гамель назвал их уравнениями Эйлера — Лагранжа. Отметим, что в литературе их называют также *уравнениями Гамеля — Больцмана.*

Одновременно с работами П. В. Воронца появилась статья А. Пуанкаре[26], который получил уравнения, весьма близкие к уравнениям (10.25). *Уравнения Пуанкаре* соответствуют случаю, когда в уравнениях (10.25) при $l = s$ коэффициенты $c^{\rho}_{\sigma\tau}$ постоянны, а силы выражаются через силовую функцию U:

$$Q^*_\tau = \beta^\sigma_\tau \frac{\partial U}{\partial q^\sigma}\,, \qquad \sigma, \tau = \overline{1, s}\,.$$

В этом случае уравнения (10.25) могут быть записаны в форме, предложенной А. Пуанкаре:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial v^\tau_*} = c^\rho_{\sigma\tau}\, v^\sigma_* \frac{\partial L^*}{\partial v^\rho_*} + \beta^\sigma_\tau \frac{\partial L^*}{\partial q^\sigma}\,, \qquad L^*(q, v_*) = T^* + U\,, \qquad \rho, \sigma, \tau = \overline{1, s}\,. \tag{10.26}$$

При выводе уравнений движения (10.26) А. Пуанкаре использовал теорию групп. Подход Пуанкаре в дальнейшем был развит в работах Н. Г. Четаева, Л. М. Мархашова, В. В. Румянцева, Фама Гуена. Они распространили уравнения Пуанкаре на случай, когда коэффициенты $c^\rho_{\sigma\tau}$ непостоянны и движение происходит под действием как потенциальных, так и непотенциальных сил. Отметим, что помимо этого, В.В. Румянцев рассмотрел случай нелинейных неголономных связей первого порядка. Полученные ими уравнения (10.26), описывающие движение неголономных систем, называются *уравнениями Пуанкаре — Четаева — Румянцева*[27].

Уравнения Удвадиа — Калабы. Ф. Удвадиа и Р. Калаба в матричном виде с помощью обобщенной инверсии Мора(Мура) — Пенроуза вывели уравнения динамики относительно всех обобщенных координат, при этом не содержащих множителей Лагранжа[28]. Отметим, что применение обобщенной инверсии Мора(Мура) — Пенроуза при матричном выводе

[26] См.: *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique // Comptes Rendus. 1901. Vol. 132. P. 369–371.

[27] См.: *Четаев Н. Г.* Об уравнениях Пуанкаре // Прикладная математика и механика. Том V. 1941. Вып. 2. С. 253–262; *Румянцев В. В.* Общие уравнения аналитической механики // Прикл. мат. и мех. 1994. Том 58. Вып. 3. С. 3–16.

[28] См. статьи: *Udwadia F. E., Kalaba R. E.* A new perspective on constrained motion // Proceedings of the Royal Society. London. 1992. Vol. A439. № 1906. P. 407–410; *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bidl. Am. math. Soc. 1920. Vol. 26. P. 394–395; *Penrose R.* A generalized inverse of matrices // Proc. Camb. phil. Soc. 1955. Vol. 51. P. 406–413.

уравнений движения играет такую же важную роль, как и разбиение уравнениями связей

$$f_1^{\varkappa}(t,q,\dot q)=0\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,, \tag{10.27}$$

всего s-мерного пространства на прямую сумму K-пространства и L-пространства. Как было показано выше, данное разбиение привело к выражениям (9.19) для обобщенных реакций. Подставляя их в уравнения Лагранжа второго рода с множителями (9.21), получим

$$A_{\sigma\tau}(t,q,\dot q)\,\ddot q^{\,\tau}=B_\sigma(t,q,\dot q)\,,$$
$$A_{\sigma\tau}=M\left(\mathrm{g}_{\sigma\tau}-\mathrm{g}_{\sigma^*\tau}\,\frac{\partial\dot q^{\sigma^*}}{\partial v_*^{l+\varkappa}}\,\frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial\dot q^{\sigma}}\right),$$
$$B_\sigma=Q_\sigma-Q_{\sigma^*}\,\frac{\partial\dot q^{\sigma^*}}{\partial v_*^{l+\varkappa}}\,\frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial\dot q^{\sigma}}+M\,\Gamma_{\sigma^*,\alpha\beta}\dot q^\alpha\dot q^\beta\,\frac{\partial\dot q^{\sigma^*}}{\partial v_*^{l+\varkappa}}\,\frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial\dot q^{\sigma}}-$$
$$-M\,\Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\dot q^\alpha\dot q^\beta\,,\qquad \sigma,\sigma^*,\tau=\overline{1,s}\,,\quad \varkappa=\overline{1,k}\,.$$

Из этих формул и вытекают *уравнения Удвадиа — Калабы*

$$\ddot q^{\,\tau}=A^{\tau\sigma}(t,q,\dot q)\,B_\sigma(t,q,\dot q)\,,\qquad \sigma,\tau=\overline{1,s}\,,$$

где $A^{\tau\sigma}$ — элементы матрицы, обратной к матрице $(A_{\sigma\tau})$.

Приведенные уравнения Удвадиа — Калабы здесь были получены для случая классических нелинейных неголономных связей (10.27). Привлекая выражения обобщенных реакций (9.29), выведенные в обобщенных уравнениях Маджи, можно было бы записать аналогичные уравнения и для случая линейных неголономных связей второго рода. Именно такие уравнения были получены в матричном виде в статье, приведенной в первой сноске в данном пункте. Заметим так же, что эти уравнения можно получить и исключением обобщенных реакций $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa=\overline{1,k}$, из обобщенных уравнений Лагранжа второго рода с множителями (9.33)[29].

Пример 12. *Движение наклонившегося фигуриста (саней Чаплыгина)* (применение уравнений Чаплыгина). Вернемся к исследованию движения, рассмотренного в примере 9 в § 9. Будем сохранять прежние обозначения и пользоваться рис. 15, но составим не уравнения Маджи (9.18), а уравнения Чаплыгина (10.7).

[29] См. статью: *Зегжда С. А., Наумова Н. В., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Связь уравнений Ф. Удвадиа — Р. Калабы с обобщенными уравнениями Лагранжа и Маджи // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2014. Сер. 1. Т. 3 (61). Вып. 1. С. 134–138.

Как и прежде, примем за обобщенные координаты механической системы координаты ξ, η точки A (конька) и угол θ поворота фигуриста (саней) относительно системы $O\xi\eta$:

$$q^1 = \xi\,, \quad q^2 = \theta\,, \quad q^3 = \eta\,. \tag{10.28}$$

Выбранный порядок нумерации обобщенных координат обсудим ниже.

На движение системы наложена неголономная связь (9.34):

$$\dot\eta = \dot\xi \operatorname{tg}\theta\,. \tag{10.29}$$

При записи этой связи видно удобство выбора нумерации обобщенных координат в обозначениях (10.28), так как тогда сохраняется правило использования индексов и пределов их изменения, принятые в формулах (10.1)–(10.7). Действительно, имеем: $s = 3,\ k = 1,\ l = 2$, при этом связь (10.29) имеет вид записи (10.1), если положить $\beta_1^3(q) = \operatorname{tg}\theta,\ \beta_2^3(q) = 0$.

Очевидно, что для предотвращения движения фигуриста (саней) в направлении оси Ay к коньку со стороны неподвижной плоскости $O\xi\eta$ должна быть приложена соответствующая сила $\mathbf{R}_A$, перпендикулярная его острой кромке. Эта сила является реакцией рассматриваемой нами связи (10.29). Если плоскость $O\xi\eta$ действует на конек только силой $\mathbf{R}_A$, то связь является идеальной.

Кинетическая энергия системы по теореме Кёнига имеет вид (см. формулу (9.35)):

$$\begin{aligned} T = \frac{M}{2}\,\{&[\dot\xi - \dot\varphi(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)]^2 + \\ &+[\dot\eta + \dot\varphi(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)]^2 + k_C^2\dot\varphi\}\,. \end{aligned} \tag{10.30}$$

Напомним, что здесь M — масса саней, $k_C^2 = J_C/M$ — радиус инерции саней относительно оси, параллельной оси $Q\zeta$ и проходящей через центр масс C, α и β — координаты центра масс в системе координат Axy.

Как и требуется в общей теории, кинетическая энергия в данной задаче не зависит от $q^3 = \eta$, и принимается, что $Q_3 = 0$. Исключая поэтому с помощью уравнения связи (10.29) из выражения кинетической энергии T обобщенную скорость $\dot q^3 = \dot\eta$, получим

$$\begin{aligned} T_* = \frac{M}{2}\,\{&[\dot\xi - \dot\theta(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)]^2 + \\ &+[\dot\xi\operatorname{tg}\theta + \dot\theta(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)]^2 + k_C^2\dot\theta\}\,. \end{aligned} \tag{10.31}$$

Теперь с помощью выражений (10.30) и (10.31) можно составить уравнения Чаплыгина (10.7) (ниже использовано обозначение $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + k_C^2$):

$$\begin{aligned} &\frac{\ddot\xi}{\cos^2\theta} + \frac{2\dot\xi\dot\theta\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\ddot\theta\beta}{\cos\theta} - \frac{\beta\dot\theta^2\sin\theta}{\cos^2\theta} - \\ &-[\dot\xi\operatorname{tg}\theta + \dot\theta(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta]\,\frac{\dot\theta}{\cos^2\theta} = \frac{Q_1}{M}\,, \\ &-\frac{\beta\ddot\xi}{\cos\theta} + \gamma^2\ddot\theta + \frac{\alpha\dot\xi\dot\theta}{\cos\theta}\,\sin^2\theta - \frac{\beta\dot\xi\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{Q_2}{M}\,. \end{aligned} \tag{10.32}$$

Здесь в производной $\partial T/\partial\dot\eta$ обобщенная скорость $\dot\eta$ была выражена через $\dot\xi$ с помощью уравнения связи (10.29). Обобщенные силы задаются формулами (9.36). После некоторых упрощений систему (10.32) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\ddot\xi - \ddot\theta\beta\cos\theta + \dot\xi\dot\theta\operatorname{tg}\theta - \dot\theta^2\alpha\cos\theta = (Q_1\cos^2\theta)/M\,,\\ -\ddot\xi\beta\cos\theta + \ddot\theta\gamma^2\cos^2\theta + \dot\xi\dot\theta(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta) = (Q_2\cos^2\theta)/M\,.\end{gathered}\tag{10.33}$$

Уравнения Чаплыгина (10.33) позволяют найти ξ и θ как функции времени, после этого из уравнения связи (10.29) можно определить закон изменения координаты η. Отметим, что получение уравнений Чаплыгина потребовало проведения бóльшего количества выкладок, чем составление уравнений Маджи для этой же задачи в § 9.

Для численного интегрирования полезно записать уравнение связи, продифференцированное по времени:

$$\ddot\xi\operatorname{tg}\theta - \ddot\eta + \dot\xi\dot\theta/\cos^2\theta = 0\,.\tag{10.34}$$

Рассматривая это уравнение и систему (10.33) как алгебраическую систему относительно неизвестных $\ddot\xi$, $\ddot\eta$, $\ddot\theta$, можно привести уравнения (10.33), (10.34) к нормальной форме, что позволяет применять хорошо разработанные численные методы решения.

В заключение рассматриваемого примера сравним между собой уравнения, полученные в форме Чаплыгина (10.33) и в форме Маджи (9.38). Пользуясь методом Чаплыгина, заменим в системе (9.38) величины $\dot\eta$ и $\ddot\eta$ их выражениями из уравнения неголономной связи (10.29). Тогда сможем записать

$$\begin{gathered}\ddot\xi + \operatorname{tg}\theta\left(\ddot\xi\operatorname{tg}\theta + \dot\xi\dot\theta\frac{1}{\cos^2\theta}\right) - \ddot\theta\frac{\beta}{\cos\theta} - \dot\theta^2\frac{\alpha}{\cos\theta} = -\frac{\kappa_1}{M}(\dot\xi + \dot\xi\operatorname{tg}^2\theta)\,,\\ \gamma^2\ddot\theta + \left(\ddot\xi\operatorname{tg}\theta + \dot\xi\dot\theta\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta) -\\ -\ddot\xi(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) = -\frac{\kappa_2}{M}\dot\theta\,.\end{gathered}$$

После преобразований приходим к системе

$$\begin{gathered}\ddot\xi\frac{1}{\cos^2\theta} + \dot\xi\dot\theta\frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta} - \ddot\theta\frac{\beta}{\cos\theta} - \dot\theta^2\frac{\alpha}{\cos\theta} = -\frac{\kappa_1}{M}\dot\xi\,,\\ \gamma^2\ddot\theta - \ddot\xi\frac{\beta}{\cos\theta} + \dot\xi\dot\theta\frac{(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)}{\cos^2\theta} = -\frac{\kappa_2}{M}\dot\theta\,.\end{gathered}$$

Нетрудно заметить, что домножив эти уравнения на $\cos^2\theta$, получим уравнения Чаплыгина (10.33).

Пример 13. *Движение колесного робота* (применение уравнений Гамеля — Больцмана). Составим уравнения Гамеля — Больцмана (10.25), описывающие движение колесного робота, рассмотренного в § 9 в примере 10 (см. рис. 17). На движение системы наложены связи (9.40), кинетическая энергия и обобщенные силы задаются формулами (9.41) и (9.42).

Введем квазискорости по формулам

$$
\begin{gathered}
v_*^1 = \dot\varphi\,, \qquad v_*^2 = \dot\theta\,, \\
v_*^3 = -\dot\xi_C \sin\varphi + \dot\eta_C \cos\varphi - l_2\dot\varphi\,, \\
v_*^4 = -\dot\xi_C \sin(\varphi+\theta) + \dot\eta_C \cos(\varphi+\theta) + l_1\dot\varphi\cos\theta\,,
\end{gathered}
\tag{10.35}
$$

то есть в формулах (10.20) коэффициенты $\alpha_\sigma^\rho(q)$, $\rho,\sigma=\overline{1,4}$, имеют вид

$$
\begin{gathered}
\alpha_1^1 = 1\,, \quad \alpha_2^2 = 1\,, \quad \alpha_1^3 = -l_2\,, \quad \alpha_3^3 = -\sin\varphi\,, \quad \alpha_4^3 = \cos\varphi\,, \\
\alpha_2^4 = l_1\cos\theta\,, \quad \alpha_3^4 = -\sin(\varphi+\theta)\,, \quad \alpha_4^4 = \cos(\varphi+\theta)\,.
\end{gathered}
$$

Формулам (10.35) соответствует обратное преобразование

$$
\begin{gathered}
\dot q^1 \equiv \dot\varphi = v_*^1, \qquad \dot q^2 \equiv \dot\theta = v_*^2\,, \\
\dot q^3 \equiv \dot\xi_C = \beta_1^3 v_*^1 + \beta_3^3 v_*^3 + \beta_4^3 v_*^4\,, \\
\dot q^4 \equiv \dot\eta_C = \beta_1^4 v_*^1 + \beta_3^4 v_*^3 + \beta_4^4 v_*^4\,,
\end{gathered}
\tag{10.36}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\beta_1^3 = (l_1\cos\varphi\cos\theta + l_2\cos(\varphi+\theta)/\sin\theta\,, \\
&\beta_3^3 = \cos(\varphi+\theta)/\sin\theta\,, \qquad \beta_4^3 = -\cos\varphi/\sin\theta\,, \\
&\beta_1^4 = (l_1\sin\varphi\cos\theta + l_2\sin(\varphi+\theta))/\sin\theta\,, \\
&\beta_3^4 = \sin(\varphi+\theta)/\sin\theta\,, \qquad \beta_4^4 = -\sin\varphi/\sin\theta\,.
\end{aligned}
$$

Остальные коэффициенты α_σ^ρ и β_ρ^σ равны нулю.

Таким образом, матрицы (α_σ^ρ) и (β_ρ^σ) в преобразованиях (10.20) нами получены. Теперь можно вычислить коэффициенты неголономности $c_{\lambda\mu}^\rho$ по формулам (10.25):

$$
\begin{aligned}
&c_{13}^3 = -c_{31}^3 = \beta_3^3\cos\varphi + \beta_3^4\sin\varphi\,, \\
&c_{14}^3 = -c_{41}^3 = \beta_4^3\cos\varphi + \beta_4^4\sin\varphi\,, \\
&c_{21}^4 = -c_{12}^4 = l_1\sin\theta + \beta_1^3\cos(\varphi+\theta) + \beta_1^4\sin(\varphi+\theta)\,, \\
&c_{13}^4 = -c_{31}^4 = c_{23}^4 = -c_{32}^4 = \beta_3^3\cos(\varphi+\theta) + \beta_3^4\sin(\varphi+\theta)\,, \\
&c_{14}^4 = -c_{41}^4 = c_{24}^4 = -c_{42}^4 = \beta_4^3\cos(\varphi+\theta) + \beta_4^4\sin(\varphi+\theta)\,.
\end{aligned}
\tag{10.37}
$$

Остальные величины $c_{\lambda\lambda^*}^{l+\varkappa}$ равны нулю.

Согласно формулам (10.19) имеем

$$
\begin{aligned}
&Q_1^* = (F_1(t)\cos\varphi - F_2(v_C)\dot\xi_C/v_C)\beta_1^3 + (F_1(t)\sin\varphi - F_2(v_C)\dot\eta_C/v_C)\beta_1^4\,, \\
&Q_2^* = L_1 - L_2 - L_3\,, \\
&Q_3^* = (F_1(t)\cos\varphi - F_2(v_C)\dot\xi_C/v_C)\beta_3^3 + (F_1(t)\sin\varphi - F_2(v_C)\dot\eta_C/v_C)\beta_3^4\,, \\
&Q_4^* = (F_1(t)\cos\varphi - F_2(v_C)\dot\xi_C/v_C)\beta_4^3 + (F_1(t)\sin\varphi - F_2(v_C)\dot\eta_C/v_C)\beta_4^4\,.
\end{aligned}
\tag{10.38}
$$

Пользуясь формулами (10.36) и (9.41), составляем выражение для T^*:

$$
\begin{aligned}
2T^* = (v_*^1)^2\Big(M^*\big((\beta_1^3)^2+(\beta_1^4)^2\big)+J^*+M_2l_1^2+2M_2l_1\big(\beta_1^4\cos\varphi-\beta_1^3\sin\varphi\big)\Big)+\\
+(v_*^2)^2\,J_2+(v_*^3)^2\,M^*\big((\beta_3^3)^2+(\beta_3^4)^2\big)+(v_*^4)^2\,M^*\big((\beta_4^3)^2+(\beta_4^4)^2\big)+\\
+v_*^1\,v_*^2\,2\,J_2+v_*^1\,v_*^3\Big(2M^*\big(\beta_1^3\beta_3^3+\beta_1^4\beta_3^4\big)+2M_2l_1\big(\beta_3^4\cos\varphi-\beta_3^3\sin\varphi\big)\Big)+\\
+v_*^1\,v_*^4\Big(2M^*\big(\beta_1^3\beta_4^3+\beta_1^4\beta_4^4\big)+2M_2l_1\big(\beta_4^4\cos\varphi-\beta_4^3\sin\varphi\big)\Big)+\\
+v_*^3\,v_*^4\,2M^*\big(\beta_3^3\beta_4^3-\beta_3^4\beta_4^4\big)\,.
\end{aligned}
$$

Опуская утомительные выкладки, приведем составленные с помощью формул (10.17), (10.37), (10.38) уравнения Гамеля — Больцмана (10.25) для нашей задачи:

$$
\begin{gathered}
\left[J^*+M_2l_1^2+2M_2l_1l_2+M^*\left(\frac{l_2^2+l_1^2\cos^2\theta+2l_1l_2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\right]\ddot\varphi+J_2\,\ddot\theta-\\
-\frac{(l_1+l_2)^2M^*\cos\theta}{\sin^3\theta}\,\dot\varphi\,\dot\theta=\left(F_1(t)\cos\varphi-\frac{F_2(v_C)\dot\xi_C}{v_C}\right)\beta_1^3+\\
+\left(F_1(t)\sin\varphi-\frac{F_2(v_C)\dot\eta_C}{v_C}\right)\beta_1^4\,,\\
J_2(\ddot\varphi+\ddot\theta)=L_1(t)-L_2(\dot\theta)-L_3(\theta)\,.
\end{gathered}
\tag{10.39}
$$

Отметим, что данную систему уравнений приходится решать совместно с уравнениями связей (9.40).

Интересно теперь сравнить полученные уравнения Гамеля — Больцмана (10.39) с выведенными ранее уравнениями Маджи (9.47). Как видно, вторые уравнения этих систем совпадают. Если же из уравнений связей определить выражения $\ddot\xi_C$ и $\ddot\eta_C$ и подставить их в первое уравнение системы (9.47), то получим первое уравнение системы (10.39).

Обратим внимание на то обстоятельство, что составление уравнений Гамеля — Больцмана требует значительно бóльшего количества выкладок по сравнению с применением уравнений Маджи.

Из сравнения примеров 9, 10 и 12, 13 заключаем, что при решении практических задач использование уравнений Маджи имеет несомненные преимущества по сравнению с использованием других возможных форм записи уравнений движения неголономных систем. Как видно, уравнения Маджи могут быть составлены почти так же легко, как и уравнения Лагранжа второго рода. При идеальных неголономных связях уравнения Маджи распадаются на две группы. Первая группа совместно с уравнениями связей после задания начальных условий позволяет найти закон движения неголономной системы, после чего из второй группы могут быть найдены обобщенные реакции.

В уравнениях Чаплыгина, Гамеля — Больцмана и в других, подобных им, авторы стремились выделить оператор Лагранжа. Тогда оставшиеся слагаемые в левых частях уравнений характеризуют неголономность системы. Поэтому в случае интегрируемости связей дифференциальные уравнения переходят в обычные уравнения Лагранжа второго рода голономной механики. Уравнения (10.7), (10.25) и аналогичные им разрабатывались для конкретных видов обычно линейных неголономных связей типа (10.1), (10.21) и удобны при решении соответствующих задач. Как правило, такие уравнения давали возможность получить наименьшее число уравнений движения. Так, например, уравнения Чаплыгина (10.7) содержат в левой части лишь неизвестные $q^1, \ldots, q^l$, и после интегрирования этих уравнений оставшиеся координаты $q^{l+1}, \ldots, q^s$ могут быть найдены из уравнений связей (10.1).

В отличие от этого уравнения Маджи, как указывалось, справедливы при любых неголономных связях, в том числе и нелинейных относительно обобщенных скоростей. Важно при этом, что составление дифференциальных уравнений движения (9.18) требует применения единой, однотипной для всех задач, методики: после выбора обобщенных координат $q^1, \ldots, q^s$ находятся обобщенные силы $Q_1, \ldots, Q_s$ и составляются выражения левых частей обычных уравнений Лагранжа второго рода; вводятся формулы перехода от обобщенных скоростей к квазискоростям, причем последние из них учитывают выражения неголономных связей; находится обратное преобразование и после его дифференцирования по квазискоростям составляются уравнения движения (9.18), являющиеся линейной комбинацией уравнений Лагранжа второго рода. Здесь можно сделать два полезных с вычислительной точки зрения замечания.

Во-первых, при численном интегрировании системы (9.18) совместно со связями (9.13) последние рекомендуется предварительно продифференцировать по времени и получить уравнения, линейные относительно обобщенных ускорений. Эти уравнения и уравнения Маджи представляют собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно $\ddot{q}^1, \ldots, \ddot{q}^s$, разрешив которую, получим систему дифференциальных уравнений, подготовленную для численного интегрирования.

Во-вторых, в случае нелинейных неголономных связей (9.13) получение из первой группы формул (9.15) обратного преобразования, то есть второй группы формул в (9.15), может представить определенные трудности. Чтобы избежать этого, рекомендуется с помощью первой группы формул (9.15) составить матрицу производных $(\partial v_*^\rho / \partial \dot{q}^\sigma)$, $\rho, \sigma = \overline{1, s}$, а затем найти обратную матрицу $(\partial \dot{q}^\sigma / \partial v_*^\rho)$, $\rho, \sigma = \overline{1, s}$, элементы которой и используются для составления уравнений Маджи.

§ 11. Управление движением с помощью связей, зависящих от параметров

Как было показано выше, наложение неголономных связей на систему, ранее рассматривавшуюся как свободная, эквивалентно приложению к ней силы реакции $\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla}' \varphi^\varkappa + \mathbf{T}_0$, причем решению задачи можно было удовлетворить с помощью «минимальной» реакции

$$\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla}' \varphi^\varkappa\,, \quad \mathbf{T}_0 = 0\,.$$

Возможен, однако, более общий подход к исследованию движения при наличии связей. Представим, что заданы уравнения вида

$$\varphi^\varkappa(t, q, \dot q, u, \dot u) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,,$$

где $u = \{u^1, \dots, u^m\}$ и $u^1, \dots, u^m$ — некоторые параметры. При данных условиях возможна следующая постановка задачи: подобрать параметры $u^1, u^2, \dots, u^m$ как функции времени так, чтобы движение системы подчинялось уравнениям вида

$$\pi^\mu(t, q, \dot q) = 0\,, \quad \mu = \overline{1, m}\,. \tag{11.1}$$

При этом предполагается, что никакие дополнительные силы, кроме силы $\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla}' \varphi^\varkappa$, в уравнениях не появляются.

Поставленная задача не всегда имеет решение. Действительно, если уравнения (11.1) рассматривать как обычные уравнения связей, то для их удовлетворения следует ввести в уравнение Ньютона силу вида

$$\mathbf{\Pi} = \Lambda^*_\mu \boldsymbol{\nabla}' \pi^\mu, \quad \mu = \overline{1, m}\,.$$

Если здесь положить $\Lambda^*_\mu = 0,\ \mu = \overline{1, m}$, то это будет означать, что управление движением осуществляется только благодаря действию обобщенных сил $\Lambda_\varkappa,\ \varkappa = \overline{1, k}$. Каждая из них непосредственно влияет на значение функции $\varphi^\varkappa$ и косвенно может влиять на значение функции $\pi^\varkappa$, если $\boldsymbol{\nabla}' \pi^\mu \cdot \boldsymbol{\nabla}' \varphi^\varkappa \neq 0$. Следовательно, при невыполнении условий

$$\boldsymbol{\nabla}' \pi^\mu \cdot \boldsymbol{\nabla}' \varphi^\varkappa \neq 0, \quad \mu = \overline{1, m}\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,,$$

нельзя гарантировать возможность решения данной задачи.

В рассматриваемом случае понятие связи приобретает более широкое, чем ранее, содержание. Для более четкого отличия функций $\varphi^\varkappa$ и π^μ от функций, которыми задавались уравнения обычных связей, воспользуемся следующей терминологией.

Уравнения (11.1) будем называть *уравнениями программы движения*, функции $\varphi^{\varkappa}$ — *управляющими функциями*, соответствующие им силы $\mathbf{R} = \Lambda_{\varkappa}\boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa}$ — *управляющими силами*, осуществляемыми при помощи связей, а параметры $u^1, u^2, \dots, u^m$ — *параметрами управления*. Движение, подчиняющееся сформулированным ранее условиям, естественно назвать *управляемым движением*.

При более общей постановке задачи об управляемом движении параметры u^μ и их производные $\dot{u}^\mu$ могут быть введены и в выражения для программы движения. Эту программу можно записать в виде

$$\pi^\mu(t, q, \dot{q}, u, \dot{u}) = 0\,, \quad \mu = \overline{1, m}\,.$$

Отметим особо, что число уравнений, выражающих программу движения, должно быть таким, чтобы число уравнений задачи соответствовало числу неизвестных. Для этого достаточно потребовать, чтобы число параметров $u^1, u^2, \dots, u^m$ равнялось числу уравнений, выражающих программу. Если число управляющих параметров взять бóльшим, чем число уравнений, выражающих программу движения, то необходимые для решения поставленной задачи дополнительные уравнения можно получить, введя некоторые условия, которые, в частности, могут представлять собой требования экстремальности отдельных характеристик движения.

Управление движением можно осуществлять и через силу $\mathbf{Y}$, если считать, что она зависит от u^μ, $\dot{u}^\mu$, $\ddot{u}^\mu$, то есть $\mathbf{Y}$ — заданная функция вида

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t, q, \dot{q}, u, \dot{u}, \ddot{u}).$$

Вторые производные от управляющих параметров введены в функцию $\mathbf{Y}$ с тем, чтобы учесть случай, когда параметрами u^μ задается движение подвижной системы, то есть когда управляющими силами являются и силы инерции.

Таким образом, в общем случае подобная задача об управляемом движении сводится к решению системы уравнений

$$\begin{gathered} M\mathbf{W} = \mathbf{Y}(t, q, \dot{q}, u, \dot{u}, \ddot{u}) + \Lambda_{\varkappa}\boldsymbol{\nabla}'\varphi^{\varkappa}\,, \\ \varphi^{\varkappa}(t, q, \dot{q}, u, \dot{u}) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \\ \pi^\mu(t, q, \dot{q}, u, \dot{u}) = 0\,, \quad \mu = \overline{1, m}\,. \end{gathered}$$

Здесь неизвестными являются $q^1, q^2, \dots, q^s, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k, u^1, u^2, \dots, u^m$, то есть имеется всего $s + k + m$ неизвестных. Число уравнений также равно $s + k + m$.

Если требуется определить характер движения системы и управляющие параметры как функции времени, то неизвестные $\Lambda_{\varkappa}$ можно исключить, записывая уравнения Ньютона в проекциях на направления:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda = \beta^\sigma_\lambda \mathbf{e}_\sigma\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s-k\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,,$$

где коэффициенты β^σ_λ вычисляем по формулам (5.21), (5.22), в которые u^μ и $\dot u^\mu$ входят как параметры.

Уравнения движения (5.19), не содержащие неизвестных $\Lambda_{\varkappa}$, в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{gathered}(M\,(\mathrm{g}_{\sigma\tau}\,\ddot q^{\,\tau} + \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}\,\dot q^\alpha \dot q^\beta) - Q_\sigma(t,q,\dot q,u,\dot u,\ddot u))\,\beta^\sigma_\lambda(t,q,\dot q,u,\dot u) = 0\,,\\ \lambda = \overline{1,l}\,, \quad \sigma,\tau = \overline{1,s}\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,s}\,.\end{gathered}$$

Эти уравнения можно также привести к уравнениям вида (5.23), то есть представить их в форме

$$M\,(\widetilde{\mathrm{g}}_{\lambda\sigma}\,\ddot q^{\,\sigma} + \widetilde\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}\,\dot q^\alpha \dot q^\beta) = \widetilde Q_\lambda\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s-k\,. \tag{11.2}$$

Для получения замкнутой системы относительно неизвестных $q^\sigma(t)$ и $u^\mu(t)$ необходимо к системе (11.2) присоединить уравнения управляющих связей

$$\varphi^{\varkappa}(t,q,\dot q,u,\dot u) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{11.3}$$

и уравнения программы движения

$$\pi^\mu(t,q,\dot q,u,\dot u) = 0\,, \quad \mu = \overline{1,m}\,. \tag{11.4}$$

Если функции $\varphi^{\varkappa}$ и π^μ нелинейны относительно $\dot q^\sigma$ и $\dot u^\mu$, то уравнения (11.3), (11.4) следует продифференцировать по времени, а затем присоединить к системе (11.2). Дифференцируя, имеем

$$\begin{gathered}\dot\varphi^{\varkappa} = \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial q^\sigma}\,\dot q^\sigma + \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial \dot q^\sigma}\,\ddot q^{\,\sigma} + \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial u^\gamma}\,\dot u^\gamma + \frac{\partial\varphi^{\varkappa}}{\partial \dot u^\gamma}\,\ddot u^\gamma = 0\,,\\ \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \gamma = \overline{1,m}\,,\end{gathered} \tag{11.5}$$

$$\begin{gathered}\dot\pi^\mu = \frac{\partial\pi^\mu}{\partial t} + \frac{\partial\pi^\mu}{\partial q^\sigma}\,\dot q^\sigma + \frac{\partial\pi^\mu}{\partial \dot q^\sigma}\,\ddot q^{\,\sigma} + \frac{\partial\pi^\mu}{\partial u^\gamma}\,\dot u^\gamma + \frac{\partial\pi^\mu}{\partial \dot u^\gamma}\,\ddot u^\gamma = 0\,,\\ \gamma,\mu = \overline{1,m}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,.\end{gathered} \tag{11.6}$$

Предположим, что величины $\widetilde Q_\lambda$ линейно зависят от $\ddot u^\gamma$. Тогда совокупность уравнений (11.2), (11.5) и (11.6) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\ddot q^{\,\sigma}$ и $\ddot u^\gamma$.

Решая данную систему, состоящую из $s+m$ уравнений, по формулам Крамера или последовательно исключая неизвестные, что на практике иногда бывает удобнее, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{q}^{\,\sigma} &= F^{\sigma}(t,q,\dot{q},u,\dot{u})\,, \quad \sigma=\overline{1,s}\,,\\ \ddot{u}^{\gamma} &= \Phi^{\gamma}(t,q,\dot{q},u,\dot{u})\,, \quad \gamma=\overline{1,m}\,. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Отметим, что если бы поставленная задача не имела решения, то рассматриваемая система линейных алгебраических уравнений не имела бы единственного решения, и, следовательно, систему уравнений (11.2), (11.5) и (11.6) нельзя было бы привести к системе вида (11.7).

Обозначая $\dot{q}^{\sigma}=\widehat{v}^{\,\sigma}$, $\sigma=\overline{1,s}$, $\dot{u}^{\gamma}=\widehat{v}^{\,s+\gamma}$, $\gamma=\overline{1,m}$, записываем систему уравнений (11.7) в нормальной форме:

$$\begin{aligned} &\frac{d\widehat{v}^{\,\sigma}}{dt}=F^{\sigma}(t,q,u,\widehat{v})\,, \quad \frac{dq^{\sigma}}{dt}=\widehat{v}^{\,\sigma}\,, \quad \widehat{v}=(\widehat{v}^{\,1},\widehat{v}^{\,2},\,\dots\,,\widehat{v}^{\,s+m})\,,\\ &\frac{d\widehat{v}^{\,s+\gamma}}{dt}=\Phi^{\gamma}(t,q,u,\widehat{v})\,, \quad \frac{du^{\gamma}}{dt}=\widehat{v}^{\,s+\gamma}\,, \quad \sigma=\overline{1,s}\,, \quad \gamma=\overline{1,m}\,. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Напомним, что начальные условия при решении системы (11.8) должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} \varphi^{\varkappa}(t_0,q_0,u_0,\widehat{v}_0)&=0\,, \quad \varkappa=\overline{1,k}\,,\\ \pi^{\mu}(t_0,q_0,u_0,\widehat{v}_0)&=0\,, \quad \mu=\overline{1,m}\,. \end{aligned}$$

Уравнения (11.4) в соответствии с современной терминологией называются *программой движения*. По А. Бегену[30] это — *уравнения сервосвязей*. В. И. Киргетовым[31] уравнения (11.4) было предложено называть *условными связями*. А. Беген, П. Аппель[32] и другие исследователи при решении данных задач исходили из принципа Даламбера — Лагранжа. Выше было показано, что всякое управляемое движение может быть исследовано на основе закона Ньютона и уравнений, которыми задаются управляющие связи и программа движения.

Рассмотрим решение двух примеров. Эти задачи впервые были изучены А. Бегеном (см. сноску выше).

---

[30] См. *Беген А.* Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями. М.: Наука, 1967. 172 с.

[31] См. *Киргетов В. И.* О движении управляемых систем с условными связями // Прикл. мат. и механика. 1967. Вып. 3. С. 433–446.

[32] *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 488 с.

Пример 14. *Управление движением диска с пластинкой.* Пластинка $\sum$, расположенная в неподвижной горизонтальной плоскости, шарнирно соединена в точке C с круглым диском $\sum_1$, вращающимся в той же плоскости вокруг неподвижного центра O (рис. 21). В точке A, лежащей на прямой, соединяющей точку C с центром тяжести G пластинки $\sum$, на пластинку действует постоянная сила F, параллельная неподвижной прямой Ox. Движение диска $\sum_1$ автоматически регулируется таким образом, что линии OC и CA остаются перпендикулярными друг другу.

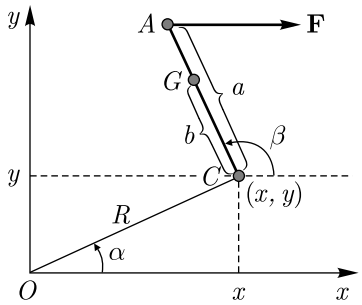

Рис. 21. Управление движением диска с пластинкой

В данной задаче объектом, управляемое движение которого рассматривается, является пластинка $\sum$. В качестве обобщенных координат принимаем угол β между осью Ox и линией CA и координаты (x, y) точки C. Параметром управления является угол поворота α диска $\sum_1$.

Таким образом, вводим следующие обобщенные обозначения:

$$q^1 = \beta\,, \quad q^2 = x\,, \quad q^3 = y\,, \quad u^1 = \alpha\,, \quad s = 3\,, \quad m = 1\,.$$

Управляющей связью является шарнирное соединение диска $\sum_1$ и пластинки $\sum$ в точке C. Эта связь задается уравнениями

$$x = R\cos\alpha\,, \quad y = R\sin\alpha\,, \tag{11.9}$$

из которых вытекает, что точка C пластинки движется только по окружности радиуса R. Считаем, что трение в шарнире отсутствует, при этом рассматриваемая связь идеальна.

Дифференцируя уравнения (11.9), получаем

$$\varphi^1 = \dot{x} + \dot{\alpha}R\sin\alpha = 0\,,$$
$$\varphi^2 = \dot{y} - \dot{\alpha}R\cos\alpha = 0\,.$$

По условию задачи требуется определить, при каком законе изменения $\alpha = \alpha(t)$ движение пластинки $\sum$ будет соответствовать программе $\beta = \alpha - \pi/2$.

Кинетическая энергия пластинки такова:

$$T = \frac{Mv_G^2}{2} + \frac{Mk^2\dot\beta^2}{2}\,.$$

Здесь M — масса пластинки, v_G — скорость центра тяжести пластинки, Mk^2 — момент инерции пластинки относительно точки G. Квадрат скорости точки G, как следует из рис. 21, может быть представлен в виде

$$v_G^2 = (\dot x - b\dot\beta\sin\beta)^2 + (\dot y + b\dot\beta\cos\beta)^2\,.$$

Подставляя это соотношение в выражение для кинетической энергии, получаем

$$T = \frac{M}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + (k^2+b^2)\dot\beta^2 + 2\dot y b\dot\beta\cos\beta - 2\dot x b\dot\beta\sin\beta)\,.$$

Уравнение движения пластинки в касательном пространстве записываем в виде

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_1\boldsymbol{\nabla}'\varphi^1 + \Lambda_2\boldsymbol{\nabla}'\varphi^2\,,$$

где $\mathbf{Y}$ — вектор, соответствующий силе F;

$$\boldsymbol{\nabla}'\varphi^1 = \frac{\partial\varphi^1}{\partial\widehat{v}^{\,2}}\,\mathbf{e}^2 = \frac{\partial\varphi^1}{\partial\dot x}\,\mathbf{e}^2\,,$$
$$\boldsymbol{\nabla}'\varphi^2 = \frac{\partial\varphi^2}{\partial\widehat{v}^{\,3}}\,\mathbf{e}^3 = \frac{\partial\varphi^2}{\partial\dot y}\,\mathbf{e}^3\,.$$

Сила F имеет потенциал $\Pi = -Fx_A = -F(x + a\cos\beta)$, следовательно, вектор $\mathbf{Y}$ может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{Y} = -\boldsymbol{\nabla}\Pi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\beta}\,\mathbf{e}^1 - \frac{\partial\Pi}{\partial x}\,\mathbf{e}^2 = -Fa\sin\beta\,\mathbf{e}^1 + F\mathbf{e}^2 = Y_1\mathbf{e}^1 + Y_2\mathbf{e}^2\,.$$

Неголономный базис в соответствии с общей методикой вводим с помощью функций

$$v_*^1 = \dot q^1 = \dot\beta\,,$$
$$v_*^2 = \varphi^1 = \dot q^2 + \dot\alpha R\sin\alpha\,,$$
$$v_*^3 = \varphi^2 = \dot q^3 - \dot\alpha R\cos\alpha\,.$$

В данном случае

$$\beta_\rho^\sigma = \frac{\partial\dot q^\sigma}{\partial v_*^\rho} = \begin{cases} 1\,, & \sigma = \rho\,,\\ 0\,, & \sigma \neq \rho\,,\end{cases}$$

и значит неголономный базис совпадает с голономным базисом $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$.

Система (11.2) в рассматриваемом примере состоит из одного уравнения, которое может быть записано в виде

$$MW_1 = Y_1\,, \tag{11.10}$$

где

$$MW_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\beta} - \frac{\partial T}{\partial \beta}\,, \quad Y_1 = -Fa\sin\beta\,.$$

Подставляя в уравнение (11.10) выражение для кинетической энергии, получаем

$$\begin{gathered} M(k^2+b^2)\ddot\beta + Mb\frac{d}{dt}(\dot y\cos\beta - \dot x\sin\beta) + \\ +Mb(\dot y\dot\beta\sin\beta + \dot x\dot\beta\cos\beta) = -Fa\sin\beta\,. \end{gathered} \tag{11.11}$$

Для получения замкнутой системы к этому уравнению следует добавить уравнения управляющей связи

$$x = R\cos\alpha\,, \quad y = R\sin\alpha\,, \tag{11.12}$$

и уравнение программы движения

$$\beta = \alpha - \pi/2\,. \tag{11.13}$$

Из соотношений (11.12), (11.13) следует, что

$$\dot x = -\dot\beta R\cos\beta\,, \quad \dot y = -\dot\beta R\sin\beta\,,$$

поэтому

$$\dot y\cos\beta - \dot x\sin\beta = 0\,, \quad \dot y\dot\beta\sin\beta + \dot x\dot\beta\cos\beta = -R\dot\beta^2\,. \tag{11.14}$$

Уравнение (11.11) с учетом выражений (11.14), (11.13) записываем как уравнение относительно параметра управления α:

$$M(k^2+b^2)\,\ddot\alpha - MbR\,\dot\alpha^2 - Fa\cos\alpha = 0\,. \tag{11.15}$$

Учитывая, что

$$\ddot\alpha = \frac{d\dot\alpha}{dt} = \frac{d\dot\alpha}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot\alpha^2)}{d\alpha}\,,$$

получаем линейное уравнение относительно $\dot\alpha^2$

$$\frac{d(\dot\alpha^2)}{d\alpha} - \lambda\,\dot\alpha^2 = \mu\cos\alpha\,, \tag{11.16}$$

где

$$\lambda = \frac{2bR}{k^2+b^2}\,, \quad \mu = \frac{2Fa}{M(k^2+b^2)}\,.$$

Частное решение уравнения (11.16) следует искать в виде

$$\dot\alpha^2 = A\cos\alpha + B\sin\alpha\,.$$

Подставляя это выражение в уравнение (11.16), находим, что

$$A = -\frac{\lambda\mu}{1+\lambda^2}\,, \quad B = \frac{\mu}{1+\lambda^2}\,.$$

Общее решение уравнения (11.16) таково:

$$\dot{\alpha}^2 = C_1 e^{\lambda\alpha} + \frac{\mu}{1+\lambda^2}\sin\alpha - \frac{\lambda\mu}{1+\lambda^2}\cos\alpha\,,$$

где C_1 — произвольная постоянная, которую определяем по начальным условиям. Принимая для простоты, что

$$t_0 = 0\,, \quad \alpha(0) = \alpha_0 = 0\,, \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0 > 0\,,$$

имеем

$$\dot{\alpha} = \sqrt{f(\alpha)}\,, \quad f(\alpha) > 0\,,$$

где

$$f(\alpha) = \dot{\alpha}_0^2\, e^{\lambda\alpha} + \frac{\mu}{1+\lambda^2}(\lambda(e^{\lambda\alpha} - \cos\alpha) + \sin\alpha)\,.$$

Если функция $f(\alpha)$ такова, что $f(\alpha) > 0$ при любых α, то искомая функция $\alpha = \alpha(t)$ определяется интегралом

$$t = \int\limits_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)}}\,. \tag{11.17}$$

Очевидно, что функция $f(\alpha)$ положительна при всех α в том случае, если второе ее слагаемое, пропорциональное функции $f_1(\alpha) = \lambda(e^{\lambda\alpha} - \cos\alpha) + \sin\alpha$, положительно при всех $\alpha > 0$.

Так как $e^{\lambda\alpha} - \cos\alpha > 0$ при $\alpha > 0$, а $\sin\alpha > 0$ при $0 < \alpha < \pi$, то функция $f_1(\alpha)$, заданная в интервале $[0, 2\pi]$, может иметь вещественные корни только в интервале $[\pi, 2\pi]$.

Если величина λ настолько мала, что $\lambda(e^{\lambda\alpha} - \cos\alpha) < 1$ при $\pi < \alpha < 2\pi$, то функция$f_1(\alpha)$ в интервале $[\pi, 2\pi]$ имеет два корня. И наоборот, если параметр λ настолько велик, что $\lambda(e^{\lambda\alpha} - \cos\alpha) > 1$ при $\alpha > \pi$, то функция $f_1(\alpha)$ при $\alpha > 0$ не имеет вещественных корней.

Значение $\lambda = \lambda_*$, при котором функция $f_1(\alpha)$ имеет двойной корень $\alpha = \alpha_*$ в интервале $[\pi, 2\pi]$, находим из условий

$$f_1(\alpha_*)\Big|_{\lambda=\lambda_*} = 0\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\Big|_{a=a_*,\lambda=\lambda_*} = 0\,,$$

или в развернутом виде

$$\lambda_*(e^{\lambda_*\alpha_*} - \cos\alpha_*) + \sin\alpha_* = 0\,,$$
$$\lambda_*(\lambda_* e^{\lambda_*\alpha_*} + \sin\alpha_*) + \cos\alpha_* = 0\,.$$

Умножая первое уравнение на $(-\lambda_*)$ и складывая результат со вторым уравнением, получаем

$$(\lambda_*^2 + 1)\cos\alpha_* = 0\,.$$

Отсюда следует, что $\alpha_* = 3\pi/2$, а λ_* удовлетворяет уравнению

$$\lambda_* e^{3\pi\lambda_*/2} = 1\,,$$

решая которое, находим $\lambda_* = 0.2744$.

При $\lambda > \lambda_*$ искомая функция $\alpha = \alpha(t)$ задается интегралом (11.17) при любых $\dot\alpha_0 > 0$ и μ. Если $\lambda < \lambda_*$, а $\dot\alpha_0$ и μ таковы, что имеются значения α, при которых $f(\alpha) < 0$, то задача существенно усложняется. Этот более сложный случай рассматривать не будем.

Предполагая, что $\lambda > \lambda_*$, определяем момент L, который следует приложить к диску $\sum_1$, чтобы он вращался по закону, задаваемому соотношением (11.17).

Систему диск — пластинка при выполнении условия $\beta = \alpha - \pi/2$ можно рассматривать как единое твердое тело, которое вращается вокруг оси, проходящей через точку O. Внешними силами, приложенными к указанной системе, являются момент L и сила F, поэтому уравнение движения этой системы может быть записано в виде

$$(J_1 + M(k^2 + b^2 + R^2))\,\ddot\alpha = L - (R\sin\alpha - a\cos\alpha)F\,,$$

где J_1 — момент инерции диска относительно точки O.

Так как функция $\alpha = \alpha(t)$ удовлетворяет уравнению (11.15), которое может быть представлено в виде (11.16), то

$$\ddot\alpha = \frac{1}{2}\,\lambda\,\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}\,\mu\cos\alpha = \frac{1}{2}\,\lambda f(\alpha) + \frac{1}{2}\,\mu\cos\alpha\,.$$

Искомый момент L как функция угла α при выбранных начальных условиях определяется, таким образом, соотношением

$$L = \frac{1}{2}\,(J_1 + M(k^2 + b^2 + R^2))\,(\lambda f(\alpha) + \mu\cos\alpha) + (R\sin\alpha - a\cos\alpha)\,F\,.$$

Пример 15. *Управление движением шара по плоскости.* Материальная плоскость P скользит поступательно по неподвижной горизонтальной плоскости Oxy. По ней катится без скольжения однородный шар $\sum$ с радиусом R_0. Движение плоскости P автоматически регулируется таким образом, что центр шара равномерно движется относительно неподвижной системы $Oxyz$ по окружности с радиусом a и центром на оси z со скоростью $v = \omega\,a$ (см. рис. 22).

В данной задаче объектом управления является шар, центр которого может перемещаться только в плоскости, параллельной плоскости Oxy. При этом он имеет пять степеней свободы. В качестве обобщенных координат можно выбрать координаты ξ и η центра шара вдоль осей x и y соответственно и углы Эйлера ψ, θ и φ, определяющие его ориентацию.

Движение центра шара по заданной программе осуществляется в задаче благодаря связи шара $\sum$ с плоскостью P. По предположению шар катится по плоскости P без скольжения, и, следовательно, совпадающие в данный момент t материальные элементы шара и плоскости имеют одинаковые скорости. Эта связь

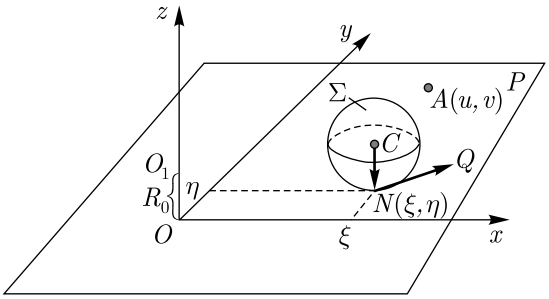

Рис. 22. Управление движением шара по плоскости

между движением шара и плоскости является в рассматриваемой задаче управляющей связью. Плоскость P по условию может двигаться только поступательно, поэтому ее движение зависит только от двух параметров, которые представляют собой параметры управления. Пусть u и v — координаты точки A плоскости P относительно осей x и y. Величины u и v удобно принять за параметры управления.

Сила реакции, приложенная к шару $\sum$ со стороны плоскости P, имеет составляющую, направленную по оси z, которая уравновешивается силой тяжести шара, и составляющую, лежащую в плоскости Oxy. Обозначим последнюю через $\mathbf{Q}$. Управляющая сила, рассматриваемая как вектор касательного пространства, ранее была обозначена через $\mathbf{R}$. В данной задаче вектор $\mathbf{R}$ — это вектор пятимерного касательного пространства. В реальном пространстве ему соответствует сила $\mathbf{Q}$. Чтобы подчеркнуть различие между векторами, принадлежащими разным пространствам, обозначаем их по-разному.

Движение шара складывается из поступательного движения вместе с центром шара и вращательного вокруг его центра. Вращательное движение полностью задается тремя углами Эйлера как функциями времени. Однако если при описании вращательного движения шара ограничиться заданием вектора $\mathbf{\Omega}$ мгновенной угловой скорости шара с составляющими p, q и r по осям x, y и z, то задача существенно упрощается. Вместо уравнений динамики, записанных для касательного пространства, воспользуемся уравнением движения центра масс

$$\begin{gathered} M\mathbf{w}_c = \mathbf{Q}\,, \\ \mathbf{w}_c = \ddot{\xi}\mathbf{i} + \ddot{\eta}\mathbf{j}\,, \quad \mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j}\,, \end{gathered} \tag{11.18}$$

где M — масса шара, и уравнением моментов относительно центра шара

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L}\,. \tag{11.19}$$

Здесь $\mathbf{L}$ — момент управляющей силы $\mathbf{Q}$ относительно центра шара

$$\mathbf{L} = \overrightarrow{CN} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -R_0 \\ Q_x & Q_y & 0 \end{vmatrix} = Q_y R_0 \mathbf{i} - Q_x R_0 \mathbf{j}\,.$$

Вектор кинетического момента шара равен

$$\mathbf{l} = J\mathbf{\Omega} = J(p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k})\,, \quad J = \frac{2}{5}MR_0^2\,.$$

Скорость нижней точки шара, касающейся в данный момент плоскости P, такова:

$$\mathbf{v}_N = \mathbf{v}_C + \mathbf{\Omega} \times \overrightarrow{CN} = \dot{\xi}\mathbf{i} + \dot{\eta}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ 0 & 0 & -R_0 \end{vmatrix} = (\dot{\xi} - R_0 q)\mathbf{i} + (\dot{\eta} + R_0 p)\mathbf{j}\,.$$

Вместе с тем скорость произвольной точки плоскости P равна

$$\mathbf{v} = \dot{u}\mathbf{i} + \dot{v}\mathbf{j}\,,$$

и, следовательно, условие качения шара без скольжения может быть описано уравнением

$$\mathbf{v}_N = \mathbf{v}\,. \tag{11.20}$$

По условию задачи необходимо подобрать такое движение плоскости P, при котором центр шара будет совершать круговое движение по окружности с радиусом a и центром на неподвижной оси z со скоростью $v = \omega a$. Пусть при $t = 0$ координата η точки C равна нулю. Тогда уравнения программы движения могут быть записаны в виде

$$\xi = a\cos\omega t\,, \quad \eta = a\sin\omega t\,. \tag{11.21}$$

Таким образом, полная система уравнений, которая описывает управляемое движение шара, состоит из уравнений динамики (11.18), (11.19), уравнения управляющей связи (11.20) и уравнений программы движения (11.21). Эту систему уравнений в скалярной форме можно представить следующим образом:

уравнения динамики:

$$M\ddot{\xi} = Q_x\,, \quad M\ddot{\eta} = Q_y\,, \quad J\dot{p} = Q_y R_0\,, \quad J\dot{q} = -Q_x R_0\,, \quad J\dot{r} = 0\,;$$

уравнения управляющей связи:

$$\dot{\xi} - R_0 q = \dot{u}\,, \quad \dot{\eta} + R_0 p = \dot{v}\,;$$

уравнения программы движения:

$$\xi = a\cos\omega t\,, \quad \eta = a\sin\omega t\,.$$

Всего имеется девять уравнений и соответственно девять неизвестных ξ, η, p, q, r, u, v, Q_x, Q_y.

Исключая из уравнений динамики Q_x и Q_y, получаем

$$\frac{2}{5}R_0\dot{p} = \ddot{\eta}\,, \quad -\frac{2}{5}R_0\dot{q} = \ddot{\xi}\,, \quad \dot{r} = 0\,. \tag{11.22}$$

Эти уравнения соответствуют уравнениям, которые в общем случае были записаны в виде (11.2).

Дифференцируя уравнения управляющей связи по времени, имеем

$$\ddot{\xi} - \dot{q}R_0 = \ddot{u}\,, \quad \ddot{\eta} + \dot{p}R_0 = \ddot{v}\,.$$

Отсюда, учитывая уравнения (11.22), находим

$$2\ddot{u} = 7\ddot{\xi}\,, \quad 2\ddot{v} = 7\ddot{\eta}\,. \tag{11.23}$$

Соотношение между ускорением плоскости P и центра шара выполняется при любой программе движения.

Интегрируя уравнения (11.23) при условии, что программа движения задается уравнениями (11.21), получаем

$$u = u_0 + \dot{u}_0 t - \frac{7a}{2}\,(1 - \cos\omega t)\,, \quad v = v_0 + \dot{v}_0 t - \frac{7a}{2}\,(\omega t - \sin\omega t)\,,$$

где u_0, v_0, $\dot{u}_0$, $\dot{v}_0$ — соответственно координаты и составляющие скорости точки A в начальный момент $t = 0$. Полагая для простоты, что рассматриваемая точка A плоскости P в начальный момент находится в начале координат, то есть совпадает с точкой O и обладает нулевой скоростью, имеем

$$u = -\frac{7a}{2}\,(1 - \cos\omega t)\,, \quad v = -\frac{7a}{2}\,(\omega t - \sin\omega t)\,.$$

Это уравнения циклоиды в параметрической форме.

Итак, для того чтобы центр шара совершал движение по окружности, точка A плоскости P должна перемещаться по циклоиде.

Координаты x_1, y_1 точки C в системе координат Ax_1y_1, жестко связанной с плоскостью P, таковы:

$$x_1 = \xi - u = \frac{7a}{2}\,(1 - \frac{5}{7}\,\cos\omega t)\,, \quad y_1 = \eta - v = \frac{7a}{2}\,(\omega t - \frac{5}{7}\,\sin\omega t)\,.$$

Это уравнения укороченной циклоиды. Следовательно, центр шара совершает движение относительно наблюдателя, который перемещается вместе с плоскостью P, по укороченной циклоиде.

Вернемся к уравнениям динамики (11.22). Интегрируя их, получаем

$$p = p_0 - \frac{5}{2}\,\frac{a\omega}{R_0}\,(1 - \cos\omega t)\,, \quad q = q_0 + \frac{5}{2}\,\frac{a\omega}{R_0}\,\sin\omega t\,, \quad r = r_0\,,$$

где p_0, q_0, r_0 — проекции вектора мгновенной угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ на неподвижные оси при $t = 0$.

Таким образом, при данной простой программе движения легко найти как движение плоскости, так и движение шара.

Глава VII
МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

Авторы: *П. Е. Товстик, М. П. Юшков*

Рассматриваются малые колебания механических систем около положения равновесия. Соответствующие линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами получаются либо непосредственной линеаризацией исходной нелинейной системы уравнений, либо соответствующим предварительным сведением выражений для кинетической и потенциальной энергий к квадратичным формам с постоянными коэффициентами. Находятся общие решения уравнений малых колебаний, вводятся понятия собственных частот и главных форм колебаний и изучаются их свойства. С помощью нормальных координат исследуются случаи нулевой частоты и совпадения нескольких собственных частот. Доказываются теоремы Рэлея и Куранта. Рассматриваются свободные малые колебания системы при наличии сопротивлений. Приводятся теоремы Томсона и Тета о влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость положения равновесия. Рассматриваются вынужденные колебания под действием произвольных и периодических сил. Установлена связь между импульсной переходной функцией и передаточной функцией.

§ 1. Дифференциальные уравнения малых движений и их интегрирование

Рассмотрим некоторую голономную систему. В соответствии с формулой (5.1) главы V условия равновесия имеют вид

$$Q_\rho = 0\,, \quad \rho = \overline{1,s}\,. \tag{1.1}$$

Будем отсчитывать обобщенные координаты от этого положения. Тогда равенства (1.1) перепишем следующим образом:

$$(Q_\rho)_0 = 0\,, \quad \rho = \overline{1,s}\,. \tag{1.2}$$

Если системе придать начальные отклонения или сообщить начальные скорости, то она начнет двигаться. Движение ее описывается уравнениями Лагранжа второго рода, которые в стационарном случае в развернутом виде таковы:

$$M\left(\sum_{\sigma=1}^{s} \mathrm{g}_{\rho\sigma}\ddot{q}^{\,\sigma} + \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} \Gamma_{\rho,\sigma\tau}\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau}\right) = Q_\rho\,, \quad \rho = \overline{1,s}\,. \tag{1.3}$$

Ранее при записи уравнений Лагранжа второго рода использовалось правило суммирования по дважды встречающимся индексам. В данной

главе это правило нигде использоваться не будет, так как здесь возможны случаи, когда индекс встречается дважды, а по нему суммирование не производится. Будем считать, что скорости $\dot{q}^\sigma$ настолько малы, что в уравнениях (1.3) слагаемыми, пропорциональными произведениям $\dot{q}^\sigma \dot{q}^\tau$, можно пренебречь по сравнению с остальными. Предположим, кроме того, что в разложениях

$$\mathrm{g}_{\rho\sigma}(q) = \mathrm{g}_{\rho\sigma}(0) + \sum_{\tau=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathrm{g}_{\rho\sigma}}{\partial q^\tau} \right)_0 q^\tau + \ldots$$

вторые и последующие слагаемые малы по сравнению с первым, так что можно положить $\mathrm{g}_{\rho\sigma} \approx \mathrm{g}_{\rho\sigma}(0)$.

Предположим также, что обобщенные силы Q_ρ представляют собой аналитические функции обобщенных координат и обобщенных скоростей. Ограничиваясь первыми степенями разложения, можно записать

$$Q_\rho(q, \dot{q}) = (Q_\rho)_0 + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial Q_\rho}{\partial q^\sigma} \right)_0 q^\sigma + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial Q_\rho}{\partial \dot{q}^\sigma} \right)_0 \dot{q}^\sigma \,, \tag{1.4}$$

где $(Q_\rho)_0$ соответствуют положению равновесия и согласно (1.2) должны быть приняты равными нулю.

На основании изложенного уравнения (1.3) можно представить в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{s} (a_{\rho\sigma} \ddot{q}^\sigma + b_{\rho\sigma} \dot{q}^\sigma + c_{\rho\sigma} q^\sigma) = 0 \,, \quad \rho = \overline{1, s} \,, \tag{1.5}$$

где

$$a_{\rho\sigma} = M \mathrm{g}_{\rho\sigma}(0) \,, \quad b_{\rho\sigma} = -\left(\frac{\partial Q_\rho}{\partial \dot{q}^\sigma} \right)_0 \,, \quad c_{\rho\sigma} = -\left(\frac{\partial Q_\rho}{\partial q^\sigma} \right)_0$$

и подобно $\mathrm{g}_{\rho\sigma}(0)$ являются постоянными величинами.

В матричной форме систему уравнений (1.5) можно записать так:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0 \,, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — квадратные матрицы ($\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ являются симметричными положительно определенными матрицами), а $\mathbf{q}$ — вектор-столбец.

Система уравнений движения (1.5), или матричное уравнение (1.6), представляет собой систему линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Интегрирование такой системы осуществляется путем представления отыскиваемых частных решений в виде

$$q^\sigma = H_\sigma e^{\lambda t} \,, \tag{1.7}$$

где σ пробегает значения $1, 2, \dots, s$, а величины H_σ и λ постоянны. Подставляя выражения (1.7) для q^σ в уравнения (1.5), получаем следующую систему уравнений, содержащих $s+1$ неизвестных $H_1, H_2, \dots, H_s$ и λ:

$$\sum_{\sigma=1}^{s}(a_{\rho\sigma}\lambda^2 + b_{\rho\sigma}\lambda + c_{\rho\sigma})H_\sigma = 0\,, \quad \rho = \overline{1, s}\,. \tag{1.8}$$

Данная система представляет собой систему s линейных алгебраических однородных уравнений относительно H_σ. Такие системы удовлетворяются тривиальным решением

$$H_\sigma = 0\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{1.9}$$

и имеют отличные от нуля решения, для существования которых необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при H_σ, обращался в нуль. Приравнивая нулю определитель системы, находим

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11}, \dots, a_{1s}\lambda^2 + b_{1s}\lambda + c_{1s} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}\lambda^2 + b_{s1}\lambda + c_{s1}, \dots, a_{ss}\lambda^2 + b_{ss}\lambda + c_{ss} \end{vmatrix} = 0\,, \tag{1.10}$$

или сокращенно

$$\Delta(\lambda) = |a_{\rho\sigma}\lambda^2 + b_{\rho\sigma}\lambda + c_{\rho\sigma}| = 0\,.$$

Раскрывая этот определитель, имеем алгебраическое уравнение степени $2s$ относительно λ:

$$\lambda^{2s} + h_1\lambda^{2s-1} + \dots + h_{2s-1}\lambda + h_{2s} = 0\,. \tag{1.11}$$

Последнее уравнение называется *характеристическим уравнением*, а определитель (1.10) — *характеристическим определителем*.

Обозначим решения характеристического уравнения через λ_1, $\lambda_2, \dots$, λ_{2s} и будем предполагать, что среди этих корней нет кратных и нулевых. Подставляя один из указанных корней λ_k, $k = \overline{1, 2s}$, в формулы (1.8), получаем следующую систему однородных уравнений для определения неизвестных $H_\sigma^{(k)}$:

$$\sum_{\sigma=1}^{s}(a_{\rho\sigma}\lambda_k^2 + b_{\rho\sigma}\lambda_k + c_{\rho\sigma})H_\sigma^{(k)} = 0\,, \quad \rho = \overline{1, s}\,. \tag{1.12}$$

Определителем данной системы служит определитель (1.10), обращающийся в нуль при $\lambda = \lambda_k$. Это означает, что уравнения системы (1.12) не независимы. Если все корни λ_k разные, то только одно уравнение является

следствием других, а оставшиеся $s-1$ уравнений независимы, и, следовательно, ранг матрицы, составленной из коэффициентов этих уравнений, равен $s-1$.

Пусть для определенности уравнением, являющимся следствием всех остальных, оказывается последнее уравнение системы (1.12), которому соответствует $\rho = s$. Тогда система независимых уравнений может быть записана в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{s-1} G_{\rho\sigma}(\lambda_k)\frac{H_\sigma^{(k)}}{H_s^{(k)}} = -G_{\rho s}(\lambda_k)\,, \quad \rho = \overline{1, s-1}\,, \tag{1.13}$$

где $G_{\rho\sigma}(\lambda_k) = a_{\rho\sigma}\lambda_k^2 + b_{\rho\sigma}\lambda_k + c_{\rho\sigma}$, и предполагается, что $H_s^{(k)} \neq 0$.

Решая неоднородную систему (1.13), согласно формулам Крамера имеем

$$\frac{H_\sigma^{(k)}}{H_s^{(k)}} = \frac{\Delta_\sigma(\lambda_k)}{\Delta_s(\lambda_k)}\,, \quad \sigma = \overline{1, s-1}\,. \tag{1.14}$$

Здесь через $\Delta_\sigma(\lambda_k)$, $\sigma = \overline{1, s}$, обозначены алгебраические дополнения элементов $G_{s\sigma}$ последней строки определителя (1.10), иначе говоря, $\Delta_\sigma(\lambda_k)$ равно произведению $(-1)^{s+\sigma}$ на определитель, который получаем из определителя $\Delta(\lambda_k)$ вычеркиванием последних строки и столбца с индексом σ.

Формулы (1.14) можно переписать в виде

$$\frac{H_1^{(k)}}{\Delta_1(\lambda_k)} = \frac{H_2^{(k)}}{\Delta_2(\lambda_k)} = \ldots = \frac{H_s^{(k)}}{\Delta_s(\lambda_k)} = C_k\,. \tag{1.15}$$

Из изложенного видно, что согласно формулам (1.14) можно получить строго определенные числовые значения только для отношений $H_\sigma^{(k)}/H_s^{(k)}$, $\sigma = \overline{1, s-1}$. Решение системы (1.12) может быть найдено с точностью до произвольного множителя C_k по формулам

$$H_\sigma^{(k)} = C_k\Delta_\sigma(\lambda_k)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{1.16}$$

получаемым на основании (1.15). Отсюда следует, что частное решение (1.7), соответствующее корню λ_k, может быть представлено в виде

$$q_k^\sigma = C_k\Delta_\sigma(\lambda_k)e^{\lambda_k t}\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{1.17}$$

или в векторных обозначениях

$$\mathbf{q}_k = C_k\mathbf{H}^{(k)}e^{\lambda_k t}, \quad \mathbf{H}^{(k)} = (\Delta_1(\lambda_1), \ldots, \Delta_s(\lambda_s))^T\,, \tag{1.17'}$$

где $\mathbf{H}^{(k)}$ — *амплитудный вектор*, соответствующий корню λ_k уравнения (1.11).

Общее решение рассматриваемой линейной системы дифференциальных уравнений (1.5) теперь можно записать в виде линейной комбинации частных решений (1.17):

$$q^\sigma = \sum_{k=1}^{2s} q_k^\sigma = \sum_{k=1}^{2s} C_k \Delta_\sigma(\lambda_k) e^{\lambda_k t}\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{1.18}$$

или

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^{2s} \mathbf{q}_k = \sum_{k=1}^{2s} C_k \mathbf{H}^{(k)} e^{\lambda_k t}\,. \tag{1.18'}$$

Оно содержит $2s$ произвольных постоянных C_k, что соответствует числу произвольных постоянных, которое должно получаться при интегрировании s линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Значения этих произвольных постоянных определяем путем задания начальных значений $q^\sigma(0)$ и $\dot{q}^\sigma(0)$, $\sigma = \overline{1,s}$.

Отметим, что тривиальное решение (1.9) порождает тривиальное решение системы (1.5) $q^\sigma(t) = 0$, $\sigma = \overline{1,s}$, соответствующее состоянию покоя механической системы. Оно отбрасывается, поскольку соответствует решению задачи Коши только при нулевых начальных условиях. Общее решение (1.18) системы (1.5), в котором вместо формул (1.9) используются соотношения (1.16), позволяет решить задачу Коши при любых начальных условиях, в том числе и при нулевых.

Возвращаясь к общему решению системы (1.5), отметим, что форма записи его в виде (1.18) удобна лишь в случае, когда все λ_k, $k = \overline{1,2s}$, являются действительными числами.

Если часть корней характеристического уравнения (1.11) оказываются комплексными числами, то эти корни являются комплексно-сопряженными, поэтому число их всегда четно и равно $2l$. Для определенности присвоим им первые $2l$ номеров. Комплексно-сопряженные корни обозначим следующим образом:

$$\begin{gathered} \lambda_\varkappa = \alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa\,, \\ \lambda_{\varkappa+l} = \alpha_\varkappa - i\beta_\varkappa\,, \\ i = \sqrt{-1}\,, \\ \varkappa = \overline{1,l}\,. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Напомним, что соответствующие им выражения $H_\sigma^{(\varkappa)}$ и $H_\sigma^{(\varkappa+l)}$ определяем согласно формулам (1.15):

$$\begin{gathered}\frac{H_1^{(\varkappa)}}{\Delta_1(\lambda_\varkappa)} = \frac{H_2^{(\varkappa)}}{\Delta_2(\lambda_\varkappa)} = \ldots = \frac{H_s^{(\varkappa)}}{\Delta_s(\lambda_\varkappa)} = C_\varkappa\,,\\ \frac{H_1^{(\varkappa+l)}}{\Delta_1(\lambda_{\varkappa+l})} = \frac{H_2^{(\varkappa+l)}}{\Delta_2(\lambda_{\varkappa+l})} = \ldots = \frac{H_s^{(\varkappa+l)}}{\Delta_s(\lambda_{\varkappa+l})} = C_{\varkappa+l}\,.\end{gathered} \tag{1.20}$$

Так как в полиноме $\Delta_\sigma(\lambda)$ коэффициенты при всех степенях λ — действительные числа, то $\Delta_\sigma(\lambda_\varkappa)$ является комплексно-сопряженным числу $\Delta_\sigma(\lambda_{\varkappa+l})$.

Представим комплексное число $\Delta_\sigma(\lambda_\varkappa)$ в показательной форме:

$$\Delta_\sigma(\lambda_\varkappa) = |\Delta_\sigma(\lambda_\varkappa)|e^{i\varphi_{\sigma\varkappa}}\,. \tag{1.21}$$

Тогда

$$\Delta_\sigma(\lambda_{\varkappa+l}) = |\Delta_\sigma(\lambda_\varkappa)|e^{-i\varphi_{\sigma\varkappa}}\,. \tag{1.22}$$

Здесь $|\Delta_\sigma(\lambda_\varkappa)|$ и $\varphi_{\sigma\varkappa}$ — известные вещественные числа, равные соответственно модулю и аргументу комплексного числа $\Delta_\sigma(\lambda_\varkappa)$.

С помощью формул (1.19)–(1.22) интересующую нас сумму

$$\sum_{\varkappa=1}^{l}(q_\varkappa^\sigma + q_{\varkappa+l}^\sigma) = \sum_{\varkappa=1}^{l}\left(C_\varkappa\Delta_\sigma(\lambda_\varkappa)e^{\lambda_\varkappa t} + C_{\varkappa+l}\Delta_\sigma(\lambda_{\varkappa+l})e^{\lambda_{\varkappa+l}t}\right) \tag{1.23}$$

можно переписать в виде

$$\sum_{\varkappa=1}^{l}(q_\varkappa^\sigma + q_{\varkappa+l}^\sigma) = \sum_{\varkappa=1}^{l}e^{\alpha_\varkappa t}|\Delta_\sigma(\lambda_\varkappa)|\left(C_\varkappa e^{i(\beta_\varkappa t+\varphi_{\sigma\varkappa})} + C_{\varkappa+l}e^{-i(\beta_\varkappa t+\varphi_{\sigma\varkappa})}\right).$$

Выделим в комплексных произвольных постоянных вещественную и мнимую части. Тогда, используя формулы Эйлера, получаем

$$\begin{gathered}\sum_{\varkappa=1}^{l}(q_\varkappa^\sigma + q_{\varkappa+l}^\sigma) = \sum_{\varkappa=1}^{l}e^{\alpha_\varkappa t}|\Delta_\sigma(\lambda_\varkappa)|\Big((\mathrm{Re}C_\varkappa + i\mathrm{Im}C_\varkappa)\big(\cos(\beta_\varkappa t+\varphi_{\sigma\varkappa})+\\ +i\sin(\beta_\varkappa t+\varphi_{\sigma\varkappa})\big) + (\mathrm{Re}C_{\varkappa+l} + i\mathrm{Im}C_{\varkappa+l})\big(\cos(\beta_\varkappa t+\varphi_{\sigma\varkappa})-\\ -i\sin(\beta_\varkappa t+\varphi_{\sigma\varkappa})\big)\Big)\,.\end{gathered}$$

После приведения подобных членов последнее выражение можно представить в следующей форме:

$$\sum_{\varkappa=1}^{l}(q_{\varkappa}^{\sigma}+q_{\varkappa+l}^{\sigma})=\sum_{\varkappa=1}^{l}e^{\alpha_{\varkappa}t}|\Delta_{\sigma}(\lambda_{\varkappa})|\big((\mathrm{Re}C_{\varkappa}+\mathrm{Re}C_{\varkappa+l})\cos(\beta_{\varkappa}t+\varphi_{\sigma\varkappa})+$$
$$+(\mathrm{Im}C_{\varkappa+l}-\mathrm{Im}C_{\varkappa})\sin(\beta_{\varkappa}t+\varphi_{\sigma\varkappa})\big)+$$
$$+i\sum_{\varkappa=1}^{l}e^{\alpha_{\varkappa}t}|\Delta_{\sigma}(\lambda_{\varkappa})|\big((\mathrm{Im}C_{\varkappa}+\mathrm{Im}C_{\varkappa+l})\cos(\beta_{\varkappa}t+\varphi_{\sigma\varkappa})+$$
$$+(\mathrm{Re}C_{\varkappa}-\mathrm{Re}C_{\varkappa+l})\sin(\beta_{\varkappa}t+\varphi_{\sigma\varkappa})\big)\,. \tag{1.24}$$

Если комплексное решение $\sum_{\varkappa=1}^{l}(q_{\varkappa}^{\sigma}+q_{\varkappa+l}^{\sigma})$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1.5) с действительными коэффициентами, то решением являются как вещественная, так и мнимая части решения (1.24). Поэтому вместо суммы (1.23) в общее решение (1.18) можно подставлять выражение

$$\sum_{\varkappa=1}^{l}(q_{\varkappa}^{\sigma}+q_{\varkappa+l}^{\sigma})=\sum_{\varkappa=1}^{l}e^{\alpha_{\varkappa}t}|\Delta_{\sigma}(\lambda_{\varkappa})|\big(D_{\varkappa}\cos(\beta_{\varkappa}t+\varphi_{\sigma\varkappa})+$$
$$+D_{\varkappa+l}\sin(\beta_{\varkappa}t+\varphi_{\sigma\varkappa})\big)\,, \tag{1.25}$$

где действительные произвольные постоянные $D_{\varkappa}$ и $D_{\varkappa+l}$ связаны с произвольными постоянными $C_{\varkappa}$ и $C_{\varkappa+l}$ формулами вида

$$D_{\varkappa}=\mathrm{Re}C_{\varkappa}+\mathrm{Re}C_{\varkappa+l}\,,\quad D_{\varkappa+l}=\mathrm{Im}C_{\varkappa+l}-\mathrm{Im}C_{\varkappa}\,,$$

либо

$$D_{\varkappa}=\mathrm{Im}C_{\varkappa}+\mathrm{Im}C_{\varkappa+l}\,,\quad D_{\varkappa+l}=\mathrm{Re}C_{\varkappa}-\mathrm{Re}C_{\varkappa+l}$$

в зависимости от того, реальная или мнимая часть решения (1.24) используется при записи решения в виде (1.25).

Вместо произвольных постоянных $D_{\varkappa}$ и $D_{\varkappa+l}$ часто вводят новые произвольные постоянные $a_{\varkappa}$ и $\varepsilon_{\varkappa}$ по формулам

$$D_{\varkappa}=a_{\varkappa}\sin\varepsilon_{\varkappa}\,,\quad D_{\varkappa+l}=a_{\varkappa}\cos\varepsilon_{\varkappa}\,.$$

В этом случае решение (1.25) можно переписать в виде

$$\sum_{\varkappa=1}^{l}(q_{\varkappa}^{\sigma}+q_{\varkappa+l}^{\sigma})=\sum_{\varkappa=1}^{l}a_{\varkappa}e^{\alpha_{\varkappa}t}|\Delta_{\sigma}(\lambda_{\varkappa})|\sin(\beta_{\varkappa}t+\varphi_{\sigma\varkappa}+\varepsilon_{\varkappa})\,. \tag{1.26}$$

Если среди комплексных корней $\lambda_\varkappa$ встречаются чисто мнимые, то есть при некоторых $\varkappa$ формулы (1.19) принимают вид

$$\lambda_\varkappa = i\beta_\varkappa\,, \quad \lambda_{\varkappa+l} = -i\beta_\varkappa\,,$$

то в выражении (1.26) при соответствующих $\varkappa$ множители $e^{\alpha_\varkappa t}$ обращаются в единицу.

§ 2. Исследование характера малых колебаний системы

Изложенный в предыдущем параграфе метод линеаризации и интегрирования уравнений движения голономных систем с s степенями свободы широко используется при решении многих практических задач. Простой вид общего решения задачи в линейной постановке позволяет исследовать характер движения как качественно, так и количественно.

Некоторые выводы относительно характера движения можно сделать непосредственно, исходя из структуры дифференциальных уравнений (1.5), полученных на основе линеаризации уравнений Лагранжа второго рода.

Первые слагаемые уравнений (1.5) соответствуют слагаемым $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\rho}$ уравнений Лагранжа при условии, что кинетическая энергия T приближенно представлена в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} a_{\rho\sigma}\dot q^\rho \dot q^\sigma\,, \quad a_{\rho\sigma} = M g_{\rho\sigma}(0)\,, \tag{2.1}$$

откуда следует, что матрица $\mathbf{A}$ симметричная и положительно определенная.

Матрица $\mathbf{C}$ в уравнении (1.6) в общем случае несимметрична. Это хотя и не влияет на способ интегрирования системы уравнений (1.5), но затрудняет качественное исследование характера искомых движений. Рассмотрим поэтому более простой случай, когда матрица $\mathbf{C}$ симметрична, то есть выполняется условие

$$c_{\rho\sigma} = c_{\sigma\rho}\,, \quad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,.$$

В данном случае можно утверждать, что линейные комбинации $\sum_{\sigma=1}^{s} c_{\rho\sigma} q^\sigma$ представляют собой производные от квадратичной формы

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} c_{\rho\sigma} q^\rho q^\sigma\,, \tag{2.2}$$

то есть

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^\rho} = \sum_{\sigma=1}^{s} c_{\rho\sigma} q^\sigma \,. \tag{2.3}$$

Эту квадратичную форму можно рассматривать как приближенное выражение для потенциальной энергии системы. Ранее мы определяли потенциальную энергию силового поля в криволинейных координатах как функцию $\Pi(t, q)$, производные от которой по координатам q^ρ, взятые с обратным знаком, дают соответствующие составляющие обобщенных сил. На основании этого определения слагаемые $\sum_{\sigma=1}^{s} c_{\rho\sigma} q^\sigma$ в выражении (1.5), взятые с обратным знаком, можно рассматривать как обобщенные силы $Q_{\rho 1}$, соответствующие потенциальной энергии Π.

Точно так же, предполагая, что матрица $\mathbf{B}$ симметрична, то есть $b_{\rho\sigma} = b_{\sigma\rho}$, $\rho, \sigma = \overline{1, s}$, можно утверждать, что линейные комбинации $\sum_{\sigma=1}^{s} b_{\rho\sigma} \dot{q}^\sigma$ являются производными от квадратичной формы

$$D = \frac{1}{2} \sum_{\rho,\sigma=1}^{s} b_{\rho\sigma} \dot{q}^\rho \dot{q}^\sigma \,. \tag{2.4}$$

Введем обозначение

$$Q_{\rho 2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}^\rho} \,, \quad \rho = \overline{1, s} \,. \tag{2.5}$$

Если функция D является положительной квадратичной формой, то силы $Q_{\rho 2}$ называют *диссипативными силами*, а функцию D — *диссипативной функцией*.[1] Если же форма D — положительно определенная, тогда *диссипация* называется *полной*, в противном случае — *неполной*. Приведенные названия обусловливаются тем, что указанные силы способствуют рассеянию полной механической энергии системы, так что интеграла энергии в этом случае не существует.

Действительно, уравнения Лагранжа при наличии как потенциальных, так и диссипативных сил имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^\sigma} \,, \quad \sigma = \overline{1, s} \,. \tag{2.6}$$

Умножая эти уравнения на $\dot{q}^\sigma$ и суммируя, получаем

$$\sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} \right) \dot{q}^\sigma = -\sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \dot{q}^\sigma \,,$$

[1] От лат. *dissipare* — рассеивать.

откуда вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma}\,\dot q^\sigma\right)-\left(\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma}\,\ddot q^{\,\sigma}+\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,\dot q^\sigma\right)+\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial \Pi}{\partial q^\sigma}\,\dot q^\sigma=-\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial D}{\partial \dot q^\sigma}\,\dot q^\sigma\,. \tag{2.7}$$

Выражение в скобках из левой части равенства (2.7) представляет собой полную производную по времени $dT(q,\dot q)/dt$. То же можно сказать и о сумме

$$\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial \Pi}{\partial q^\sigma}\,\dot q^\sigma=\frac{d\Pi}{dt}\,.$$

Так как функции T и D являются квадратичными формами относительно $\dot q^\sigma$, то по теореме Эйлера об однородных функциях можно записать

$$\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma}\,\dot q^\sigma=2\,T\,,\quad \sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial D}{\partial \dot q^\sigma}\,\dot q^\sigma=2\,D\,,$$

вследствие чего формула (2.7) может быть выражена как

$$\frac{d}{dt}(2\,T)-\frac{d}{dt}(T-\Pi)=-2\,D\,,$$

или окончательно в виде

$$\frac{d(T+\Pi)}{dt}=-2\,D<0\,. \tag{2.8}$$

Таким образом, в процессе движения полная механическая энергия $E=T+\Pi$ убывает, то есть рассеивается.

Рассмотрим случай, когда потенциальная энергия Π представляет собой положительно определенную квадратную форму. При этом для любого решения системы уравнений (1.5) вследствие того, что кинетическая энергия T может быть только положительно определенной квадратичной формой, имеем

$$0\leqslant \Pi\leqslant E\,,\quad 0\leqslant T\leqslant E\,. \tag{2.9}$$

Если $D>0$ при $\dot q\neq 0$, то, как следует из соотношения (2.8), полная механическая энергия E монотонно убывает с течением времени. Отсюда и из неравенств (2.9) вытекает, что в рассматриваемом случае в общем решении (1.18) все действительные значения $\lambda_\varkappa$ могут быть только отрицательными. Если же $\lambda_\varkappa$ и $\lambda_{\varkappa+l}$ — комплексные числа (1.19), то из вида вещественных решений (1.26) и неравенств (2.8), (2.9) можно сделать вывод, что вещественные части $\alpha_\varkappa$ корней уравнения (1.11) отрицательны.

Данный частный случай имеет большое практическое значение, так как ему соответствуют колебания упругих систем с s степенями свободы относительно положения устойчивого равновесия. В этом случае при колебаниях полная механическая энергия E рассеивается под действием сил внутреннего трения, возникающих в упругих элементах, а также под действием сил сопротивления движению элементов упругой конструкции, создаваемых телами, не принадлежащими данной упругой системе, то есть сил внешнего трения. И те и другие силы трения могут быть учтены с помощью функции рассеяния D.

Отметим, что наличие сил сопротивления несколько усложняет исследование движения системы. Поэтому в следующем параграфе рассмотрим колебания системы при отсутствии сил сопротивления. Анализ подобного простейшего случая позволяет установить некоторые основные свойства, присущие данной механической системе.

§ 3. Малые колебания системы при отсутствии сил сопротивления

Если в выражениях (1.4) для обобщенных сил Q_ρ коэффициенты при $\dot{q}^\sigma$ равны нулю, то система дифференциальных уравнений малых колебаний (1.5) принимает вид

$$\sum_{\sigma=1}^{s}(a_{\rho\sigma}\ddot{q}^{\,\sigma} + c_{\rho\sigma}q^\sigma) = 0\,, \quad \rho = \overline{1,s}\,. \tag{3.1}$$

Эти уравнения были получены линеаризацией системы (1.3).

Рассмотрим теперь другой метод составления линейных дифференциальных уравнений (3.1). С этой целью преобразуем предварительно выражения кинетической T и потенциальной Π энергий.

Если кинетическая энергия не зависит явно от времени, то она имеет вид

$$T = \frac{M}{2}\sum_{\sigma,\tau=1}^{s} \mathrm{g}_{\sigma\tau}(q)\,\dot{q}^\sigma\dot{q}^\tau\,.$$

Разложим коэффициенты $\mathrm{g}_{\sigma\tau}(q)$ в ряды Маклорена:

$$\mathrm{g}_{\sigma\tau}(q) = (\mathrm{g}_{\sigma\tau})_0 + \sum_{\rho=1}^{s}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{\sigma\tau}}{\partial q^\rho}\right)_0 q^\rho + \ldots \tag{3.2}$$

Очевидно, что если требуется получить линейные дифференциальные уравнения из уравнений Лагранжа второго рода, то в разложениях (3.2)

следует сохранить лишь первые члены. В этом случае кинетическая энергия принимает вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} a_{\sigma\tau} \dot{q}^{\sigma} \dot{q}^{\tau} \,, \tag{3.3}$$

где $a_{\sigma\tau} = M(\mathrm{g}_{\sigma\tau})_0$, и поэтому левая часть уравнений (2.6) содержит лишь линейные слагаемые.

Обратимся теперь к потенциальной энергии упругих деформаций системы

$$\Pi = \Pi(q) \,. \tag{3.4}$$

Как известно, она определяется всегда с точностью до постоянного слагаемого. Для определенности отсчитываем значение потенциальной энергии от положения устойчивого равновесия системы, в окрестности которого изучаются колебания, то есть полагаем

$$\Pi(0) = 0 \,. \tag{3.5}$$

Разложим функцию (3.4) в ряд Маклорена, учитывая соотношение (3.5):

$$\Pi(q) = \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\sigma}} \right)_0 q^{\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^{\sigma} \partial q^{\tau}} \right)_0 q^{\sigma} q^{\tau} + \ldots \tag{3.6}$$

Так как по предположению при $q = 0$ система находится в равновесии, то согласно формулам (1.2) имеем

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\sigma}} \right)_0 = 0 \,, \quad \sigma = \overline{1, s} \,.$$

Для получения из уравнений Лагранжа (2.6) линейных дифференциальных уравнений в разложении (3.6) следует ограничиться малыми второго порядка. Тогда потенциальная энергия может быть представлена в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} c_{\sigma\tau} q^{\sigma} q^{\tau} \,, \tag{3.7}$$

где через $c_{\sigma\tau}$ обозначены постоянные $c_{\sigma\tau} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^{\sigma} \partial q^{\tau}} \right)_0$. Вследствие непрерывности вторых производных от потенциальной энергии $c_{\tau\sigma} = c_{\sigma\tau}$.

Обращаем внимание, что выражения кинетической и потенциальной энергий (3.3), (3.7) в виде квадратичных форм с постоянными коэффициентами совпадают с полученными ранее представлениями (2.1), (2.2).

Отметим при этом, что кинетическая энергия по определению является положительно определенной квадратичной формой.

Теперь из уравнений Лагранжа второго рода (2.6) действительно получаем дифференциальные уравнения малых колебаний системы в виде (3.1).

Будем отыскивать частное решение дифференциальных уравнений (3.1), соответствующее колебанию механической системы, в виде

$$q^\sigma = H_\sigma \sin(\omega t + \varepsilon)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{3.8}$$

После подстановки (3.8) в (3.1) для неизвестных $H_1,\ H_2, \dots,\ H_s$ имеем следующую систему алгебраических линейных однородных уравнений:

$$\sum_{\sigma=1}^{s} (c_{\rho\sigma} - \omega^2 a_{\rho\sigma}) H_\sigma = 0\,, \quad \rho = \overline{1, s}\,, \tag{3.9}$$

или

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A})\mathbf{H} = 0\,. \tag{3.9'}$$

Для существования нетривиального решения этой системы определитель из ее коэффициентов должен обращаться в нуль:

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11}, \dots, c_{1s} - \omega^2 a_{1s} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{s1} - \omega^2 a_{s1}, \dots, c_{ss} - \omega^2 a_{ss} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{3.10}$$

Разворачивая этот определитель, получаем *уравнение частот*

$$(\omega^2)^s + h_1(\omega^2)^{s-1} + \dots + h_{s-1}\omega^2 + h_s = 0\,, \tag{3.11}$$

из которого могут быть найдены s корней:

$$\omega_1^2,\ \omega_2^2, \dots,\ \omega_s^2\,. \tag{3.12}$$

Отметим, что представление определителя (3.10) в виде полинома (3.11) при достаточно большом s вызывало до появления компьютеров некоторые трудности, поэтому в высшей алгебре было разработано большое количество методов разворачивания характеристического определителя в полином. Наиболее эффективные из них применимы к определителям, в которых ω^2 встречаются лишь в диагональных членах. Такой определитель получаем, когда система дифференциальных уравнений (3.1) оказывается разрешенной относительно обобщенных ускорений (так называемая *прямая форма дифференциальных уравнений малых колебаний*). Подобная запись системы дифференциальных уравнений возможна,

если квадратичную форму (3.3), представляющую собой выражение кинетической энергии системы, предварительно привести к каноническому виду. Аналогичное упрощение вычислений достигается, если к каноническому виду привести квадратичную форму (3.7). В этом случае уравнения колебаний оказываются разрешенными относительно обобщенных координат (*обратная форма дифференциальных уравнений малых колебаний*), а характеристический определитель приводится к определителю, содержащему $1/\omega^2$ лишь по диагонали.

Вернемся к решению алгебраической системы (3.9). При любом из чисел (3.12) ω_k^2, $k = \overline{1, s}$, определитель (3.10) обращается в нуль. Будем считать, что все корни уравнения (3.11) разные. В данном случае одно из уравнений (3.9) является следствием остальных. Пусть таким уравнением является последнее. Отбросим его. Тогда оставшуюся систему $s-1$ уравнений можно рассматривать как неоднородную систему относительно неизвестных $H_1^{(k)}/H_s^{(k)}$, $H_2^{(k)}/H_s^{(k)}, \ldots$, $H_{s-1}^{(k)}/H_s^{(k)}$:

$$\sum_{\sigma=1}^{s-1} (c_{\rho\sigma} - \omega_k^2 a_{\rho\sigma}) \frac{H_\sigma^{(k)}}{H_s^{(k)}} = \omega_k^2 a_{\rho s} - c_{\rho s}\,, \quad \rho = \overline{1, s-1}\,. \tag{3.13}$$

Здесь индекс k указывает, что решение системы (3.9) отыскивается при подстановке вместо ω^2 конкретного значения ω_k^2. Так как числа (3.12) являются разными, то определитель неоднородной системы (3.13) отличен от нуля, а значит, существует единственное решение, которое с помощью формул Крамера может быть представлено в виде

$$\frac{H_\sigma^{(k)}}{H_s^{(k)}} = \frac{\Delta_\sigma(\omega_k^2)}{\Delta_s(\omega_k^2)}\,, \quad \sigma = \overline{1, s-1}\,. \tag{3.14}$$

Выражение $\Delta_\sigma(\omega_k^2)$, как легко убедиться, является алгебраическим дополнением элемента последней строки определителя (3.10) из столбца σ.

Соотношения (3.14) показывают, что решение системы (3.9) может быть получено с точностью до общего постоянного множителя. Если решение (3.14) переписать в симметричной форме

$$\frac{H_1^{(k)}}{\Delta_1(\omega_k^2)} = \frac{H_2^{(k)}}{\Delta_2(\omega_k^2)} = \ldots = \frac{H_s^{(k)}}{\Delta_s(\omega_k^2)}\,,$$

то произвольной постоянной C_k оказывается равным любое из отношений

$$\frac{H_1^{(k)}}{\Delta_1(\omega_k^2)} = \frac{H_2^{(k)}}{\Delta_2(\omega_k^2)} = \ldots = \frac{H_s^{(k)}}{\Delta_s(\omega_k^2)} = C_k\,. \tag{3.15}$$

Таким образом, решение системы (3.9) при подстановке в нее значения ω_k^2 может быть представлено в виде

$$H_\sigma^{(k)} = C_k \Delta_\sigma(\omega_k^2)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{3.16}$$

Согласно этому частное решение (3.8) записываем следующим образом:

$$q_k^\sigma = C_k \Delta_\sigma(\omega_k^2) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{3.17}$$

Общее же решение системы (3.1) может быть получено как линейная комбинация частных решений

$$q^\sigma = \sum_{k=1}^{s} C_k \Delta_\sigma(\omega_k^2) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{3.18}$$

или

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^{s} C_k \mathbf{H}^{(k)} \sin(\omega_k t + \varepsilon_k)\,, \quad \mathbf{H}^{(k)} = (\Delta_\sigma(\omega_1^2), \ldots, \Delta_s(\omega_s^2))^T\,. \tag{3.18'}$$

Значения произвольных постоянных C_k и ε_k, $k = \overline{1,s}$, могут быть найдены из начальных условий. Вследствие произвольности выбора постоянных C_k и ε_k безразлично, какой знак стоит перед радикалом при извлечении квадратного корня из выражений (3.12). Величины ω_k принято считать положительными числами.

Общее решение (3.18) получаем в виде линейной комбинации частных решений (3.17). Механическую систему легко заставить совершать движение согласно любому частному решению (3.17) путем подбора начальных условий. При этом все координаты q^σ колеблются с одной частотой ω_k и имеют одинаковую начальную фазу ε_k, а амплитуды этих колебаний $H_\sigma^{(k)}$ связаны соотношениями (3.15). Такие *колебания* называются *собственными*, или *главными*, а соотношения между амплитудами при собственных колебаниях определяют *главную (собственную) форму колебаний*. Частоты ω_k, $k = \overline{1,s}$, называются *собственными частотами системы*. Любое движение системы получаем как линейную комбинацию s собственных колебаний.

Покажем теперь, что в предположении положительной определенности потенциальной энергии (3.7) квадраты собственных частот (3.12) оказываются положительными числами. Именно это делает возможным отыскание частных решений в виде (3.8). С указанной целью при конкретном

значении ω_k умножим каждое уравнение системы (3.9) на $H_\rho^{(k)}$. После сложения всех полученных выражений имеем

$$\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} \left(c_{\rho\sigma} - \omega_k^2 a_{\rho\sigma}\right) H_\rho^{(k)} H_\sigma^{(k)} = 0\,,$$

или

$$\omega_k^2 = \sum_{\rho,\sigma=1}^{s} c_{\rho\sigma} H_\rho^{(k)} H_\sigma^{(k)} \Big/ \sum_{\rho,\sigma=1}^{s} a_{\rho\sigma} H_\rho^{(k)} H_\sigma^{(k)}\,. \tag{3.19}$$

Здесь числитель и знаменатель представляют собой квадратичные формы, имеющие в качестве коэффициентов коэффициенты удвоенных потенциальной и кинетической энергий соответственно, которые в рассматриваемом случае являются положительно определенными формами. Таким образом, согласно формуле (3.19) все квадраты частот ω_k^2, $k = \overline{1, s}$, действительно оказываются положительными числами.

Рассмотрим две главные формы, соответствующие собственным частотам

$$\omega_k \neq \omega_l\,. \tag{3.20}$$

Очевидно, что эти формы должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{\sigma=1}^{s} (c_{\rho\sigma} - \omega_k^2 a_{\rho\sigma}) H_\sigma^{(k)} = 0\,, \quad \rho = \overline{1, s}\,, \tag{3.21}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{s} (c_{\rho\sigma} - \omega_l^2 a_{\rho\sigma}) H_\sigma^{(l)} = 0\,, \quad \rho = \overline{1, s}\,, \tag{3.22}$$

соответственно. Умножив уравнения системы (3.21) на $H_\rho^{(l)}$ и просуммировав по ρ, получим

$$\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} \left(c_{\rho\sigma} - \omega_k^2 a_{\rho\sigma}\right) H_\sigma^{(k)} H_\rho^{(l)} = 0\,. \tag{3.23}$$

Аналогично из системы (3.22) можно вывести уравнение

$$\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} \left(c_{\rho\sigma} - \omega_l^2 a_{\rho\sigma}\right) H_\sigma^{(l)} H_\rho^{(k)} = 0\,. \tag{3.24}$$

Вычтя из этого уравнения предыдущее и учитывая симметричность матриц $(a_{\rho\sigma})$ и $(c_{\rho\sigma})$, найдем

$$\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} \left(\omega_k^2 - \omega_l^2\right) a_{\rho\sigma} H_\sigma^{(k)} H_\rho^{(l)} = 0\,,$$

откуда на основании неравенства (3.20) заключим, что

$$\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} a_{\rho\sigma} H_\sigma^{(k)} H_\rho^{(l)} = 0\,, \quad k \neq l\,. \tag{3.25}$$

Очевидно, что вследствие этого соотношения из уравнения (3.23) (или из (3.24)) можно установить справедливость и равенства

$$\sum_{\rho,\sigma=1}^{s} c_{\rho\sigma} H_\sigma^{(k)} H_\rho^{(l)} = 0\,, \quad k \neq l\,. \tag{3.26}$$

Формулы (3.25) и (3.26) выражают *ортогональность главных форм колебаний*. В матричной форме записи эти формулы имеют вид

$$\mathbf{H}^{(k)^T}\mathbf{A}\mathbf{H}^{(l)} = 0\,, \quad \mathbf{H}^{(k)^T}\mathbf{C}\mathbf{H}^{(l)} = 0\,, \qquad \omega_k^2 \neq \omega_l^2\,. \tag{3.27}$$

§ 4. Главные координаты

В предыдущем параграфе мы получили общее решение системы дифференциальных уравнений в виде (3.18), показывающее, что все обобщенные координаты, описывающие состояние механической системы, оказываются линейной комбинацией одних и тех же гармонических функций $C_k \sin(\omega_k t + \varepsilon_k)$, $k = \overline{1,s}$. Представляет интерес установить, нельзя ли вместо обобщенных координат $q^1, q^2, \dots, q^s$ подобрать такую систему обобщенных координат $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^s$, каждая из которых являлась бы не суперпозицией указанных гармонических функций, а равнялась соответствующей единственной гармонической функции, то есть

$$\theta^k = C_k \sin(\omega_k t + \varepsilon_k)\,, \quad k = \overline{1,s}\,. \tag{4.1}$$

Обобщенные координаты, обладающие подобным свойствам, называются *главными*, или *нормальными координатами* механической системы.

Следует отметить, что выбрать изначально обобщенные координаты так, чтобы они оказались главными, бывает трудно. Однако если задача о колебаниях механической системы решена в некоторых обобщенных координатах q^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, и получено общее решение (3.18), то его структура позволяет легко найти систему главных координат θ^ρ, $\rho = \overline{1,s}$. Действительно, так как нормальные координаты должны изменяться по закону (4.1), то согласно виду общего решения (3.18) между ними и обобщенными координатами $q^1, q^2, \dots, q^s$ должна существовать связь

$$q^\sigma = \sum_{k=1}^{s} \Delta_\sigma(\omega_k^2)\,\theta^k\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{4.2}$$

Соотношения (4.2) являются не чем иным, как формулами преобразования главных координат θ^k в обобщенные q^σ. Для удобства обозначим

$$\Delta_{\sigma k} = \Delta_\sigma(\omega_k^2)\,, \quad \sigma, k = \overline{1, s}\,, \tag{4.3}$$

и перепишем формулы (4.2) в виде

$$q^\sigma = \sum_{k=1}^{s} \Delta_{\sigma k}\, \theta^k\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{4.4}$$

Очень важно, что в главных координатах квадратичные формы, выражающие кинетическую и потенциальную энергию, одновременно приводятся к каноническому виду, то есть содержащему только члены с квадратами переменных (иногда именно это свойство координат θ^1, $\theta^2, \dots, \theta^s$ кладется в основу определения главных координат системы). Действительно, из формул (3.3), (3.7) получаем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} \sum_{\mu,\nu=1}^{s} a_{\sigma\tau} \Delta_{\sigma\mu} \Delta_{\tau\nu} \dot\theta^\mu \dot\theta^\nu\,, \\ \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} \sum_{\mu,\nu=1}^{s} c_{\sigma\tau} \Delta_{\sigma\mu} \Delta_{\tau\nu} \theta^\mu \theta^\nu\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Однако согласно соотношениям (3.16) и обозначениям (4.3) условия ортогональности главных форм колебаний (3.25), (3.26) могут быть переписаны в виде

$$\sum_{\sigma,\tau=1}^{s} a_{\sigma\tau} \Delta_{\sigma\mu} \Delta_{\tau\nu} = 0\,, \quad \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} c_{\sigma\tau} \Delta_{\sigma\mu} \Delta_{\tau\nu} = 0\,, \qquad \mu \neq \nu\,.$$

Поэтому в двойных относительно индексов μ и ν суммах (4.5) остаются лишь члены, содержащие квадраты переменных:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu (\dot\theta^\nu)^2\,, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{s} c_\nu (\theta^\nu)^2\,, \tag{4.6}$$

где

$$a_\nu = \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} a_{\sigma\tau} \Delta_{\sigma\nu} \Delta_{\tau\nu}\,, \quad c_\nu = \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} c_{\sigma\tau} \Delta_{\sigma\nu} \Delta_{\tau\nu}\,, \quad \nu = \overline{1, s}\,. \tag{4.7}$$

Из выражений (4.6) следует, что система уравнений Лагранжа второго рода (2.6) в главных координатах такова:

$$\ddot{\theta}^k + \frac{c_k}{a_k}\,\theta^k = 0\,, \quad k = \overline{1, s}\,, \tag{4.8}$$

где в соответствии с формулами (4.7), (4.3), (3.16) и (3.19)

$$\frac{c_k}{a_k} = \frac{\sum_{\sigma,\tau=1}^{s} c_{\sigma\tau}\Delta_{\sigma k}\Delta_{\tau k}}{\sum_{\sigma,\tau=1}^{s} a_{\sigma\tau}\Delta_{\sigma k}\Delta_{\tau k}} = \frac{\sum_{\sigma,\tau=1}^{s} c_{\sigma\tau}H_\sigma^{(k)}H_\tau^{(k)}}{\sum_{\sigma,\tau=1}^{s} a_{\sigma\tau}H_\sigma^{(k)}H_\tau^{(k)}} = \omega_k^2\,.$$

Естественно, что решение независимых уравнений (4.8) в отличие от решения системы дифференциальных уравнений (3.1) не вызывает никаких затруднений. Оно задается простыми формулами (4.1). Однако замена обобщенных координат главными с помощью преобразования (4.2), как уже отмечалось, предполагает предварительное решение задачи о колебаниях. Правда, последнее может быть заменено постановкой задачи об отыскании преобразования, сводящего к сумме квадратов выражения кинетической и потенциальной энергии одновременно. Подобная задача, как известно, всегда разрешима, если одна из квадратичных форм является знакоопределенной. В рассматриваемом случае это условие выполняется, так как кинетическая энергия по определению является положительно определенной квадратичной формой. Можно проследить, что операция одновременного сведения двух квадратичных форм к каноническому виду фактически повторяет операции, выполняемые при решении системы дифференциальных уравнений в прямой или обратной форме.

Главные координаты играют важную роль. При неограниченном увеличении числа степеней свободы, то есть при переходе к рассмотрению упругих колебаний сплошных тел (струна, стержень, пластина и т. п.), такой путь отыскания собственных форм колебаний позволяет свести задачу к системе независимых уравнений. При конечном числе степеней свободы главные координаты используются при теоретических исследованиях. Применим их к анализу случаев, когда характеристическое уравнение (3.11) имеет нулевой и кратные корни.

Корню $\omega_1^2 = 0$, как следует из системы (4.8), соответствует уравнение $\ddot{\theta}^1 = 0$, общее решение которого имеет вид $\theta^1 = C_1 + C_0 t$. Как следует из формул (4.4), система (3.1) имеет при этом такое частное решение, при котором некоторые координаты q^σ являются линейными функциями времени. При рассмотрении колебаний упругой системы этому может соответствовать, в частности, ее поступательное перемещение с постоянной скоростью.

Из структуры общего решения при $\omega_1 = 0$ следует, что некоторые обобщенные координаты с течением времени могут неограниченно возрастать. Покажем, что в таком случае при линейной постановке задачи потенциальная энергия Π в начале координат не имеет изолированного минимума[2]. Действительно, при $\omega_1 = 0$ характеристический определитель (3.10) имеет вид

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix} = 0\,,$$

что обеспечивает существование такого решения алгебраической системы

$$\sum_{\sigma=1}^{s} c_{\rho\sigma} q_*^\sigma = 0\,, \quad \rho = \overline{1, s}\,, \tag{4.9}$$

в котором $q_*^\sigma \neq 0$ одновременно при всех σ. Умножая уравнения (4.9) на q_*^ρ и суммируя, получаем

$$2\Pi = \sum_{\rho,\sigma=1}^{s} c_{\rho\sigma} q_*^\rho q_*^\sigma = 0\,,$$

то есть потенциальная энергия в окрестности положения равновесия системы обращается в нуль. Следовательно, при $\omega_1 = 0$ потенциальная энергия системы действительно не имеет изолированного минимума при $q^\sigma = 0,\ \ \sigma = \overline{1, s}$.

Рассмотрим теперь случай, когда две (или более) собственные частоты системы равны между собой: $\omega_\nu = \omega_{\nu+1} = \omega$. Тогда получаем два одинаковых уравнения в системе (4.8):

$$\ddot{\theta}^\nu + \omega^2 \theta^\nu = 0\,, \quad \ddot{\theta}^{\nu+1} + \omega^2 \theta^{\nu+1} = 0\,.$$

Решения этих уравнений

$$\theta^\nu = C_\nu \sin(\omega t + \varepsilon_\nu)\,, \quad \theta^{\nu+1} = C_{\nu+1} \sin(\omega t + \varepsilon_{\nu+1})$$

показывают, что ν-е и $(\nu+1)$-е колебания имеют одинаковую частоту, но при этом оказываются линейно независимыми.

Применительно к системе уравнений (3.9) существование среди чисел (3.12) r равных квадратов частот ω_ν^2 означает, что при подстановке этого

[2]Напомним, что в соответствии с теоремой Лагранжа достаточным условием устойчивости положения равновесия является существование изолированного минимума потенциальной энергии.

значения в систему (3.9) ранг матрицы ее коэффициентов равен $s-r$. Следовательно, $s-r$ неизвестных величин $H_\sigma^{(\nu)}$, $\sigma=\overline{1,s-r}$, можно выразить через оставшиеся произвольные r величин $H_\rho^{(\nu)}$, $\rho=s-r+1,\ s-r+2,\dots,\ s$. Задавая r различных комбинаций указанных произвольных постоянных, можно составить r линейно независимых решений, соответствующих частоте ω_ν кратности r. Обычно для удобства вычислений эти формы подбирают ортогональными друг другу, обеспечивая выполнение равенств (3.25) или (3.26).

Случай кратных частот при исследовании малых колебаний системы в окрестности положения устойчивого равновесия долгое время оставался неисследованным. Создатель аналитической механики Лагранж неоднократно возвращался к нему. Считая, как это обычно делается в дифференциальных уравнениях, что при равенстве частот для получения линейно независимых решений следует вводить в качестве множителей целые степени времени t, он в то же время ясно отдавал себе отчет в том, что «упомянутые переменные не могут содержать в себе времени t вне знаков синуса и косинуса, так как в подобном случае они могли бы возрасти до бесконечности»[3]. Объяснить правильность структуры общего решения с помощью квадратичных форм кинетической и потенциальной энергий удалось лишь спустя почти 100 лет независимо друг от друга К. Вейерштрассу и профессору Петербургского университета академику О.И. Сомову.

§ 5. Минимально-максимальные свойства собственных частот

Функция Рэлея. Теорема Рэлея. Рассмотрим *функцию Рэлея*, равную отношению двух квадратичных форм

$$R(H)=R(H_1,H_2,\dots,H_s)=\frac{\widehat{\Pi}(H)}{\widehat{T}(H)}\,,$$
$$\widehat{\Pi}(H)=\sum_{\sigma,\tau=1}^{s}c_{\sigma\tau}H_\sigma H_\tau\,,\quad \widehat{T}(H)=\sum_{\sigma,\tau=1}^{s}a_{\sigma\tau}H_\sigma H_\tau\,, \tag{5.1}$$

где $H_\sigma, \sigma=\overline{1,s}$, — введенные в § 3 амплитуды колебаний, а квадратичные формы $\widehat{\Pi}(H)$ и $\widehat{T}(H)$ связаны с максимальными значениями потенциальной и кинетической энергии при гармонических колебаниях с частотой ω формулами

$$\max_t \Pi=2\,\widehat{\Pi}(H)\,,\quad \max_t T=2\,\omega^2\,\widehat{T}(H)\,.$$

[3] *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. М.; Л., 1938. С. 264.

Найдем минимум по переменным H_σ функции Рэлея (5.1). Для его вычисления удобно искать минимум функции $\widehat{\Pi}(H)$ при условии $\widehat{T}(H) = 1$. Ищем минимум функции $\widehat{\Pi}(H) - \lambda(\widehat{T}(H) - 1)$, введя множитель Лагранжа λ. Дифференцирование этой функции по переменным H_ρ приводит к системе уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^{s}(c_{\rho\sigma} - \lambda\, a_{\rho\sigma})H_\sigma = 0\,, \quad \rho = \overline{1, s}\,, \tag{5.2}$$

которая при $\lambda = \omega^2$ совпадает с системой (3.9). Корни определителя (3.10) этой системы дают частоты собственных колебаний (3.12). Поэтому естественно, что наименьший из этих корней дает минимум функции Рэлея. Упорядочим частоты собственных колебаний в порядке возрастания

$$\omega_1^2 \leqslant \omega_2^2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_s^2\,, \tag{5.3}$$

причем случай кратных корней не исключается из рассмотрения.

Тогда можно сформулировать *теорему Рэлея*: квадрат наименьшей частоты собственных колебаний равен минимуму функции Рэлея:

$$\omega_1^2 = \min_H R(H)\,, \quad H = \{H_\sigma\}\,. \tag{5.4}$$

Теорему Рэлея можно использовать для приближенного определения величины ω_1^2, если задать взятый наудачу амплитудный вектор H. При этом согласно формуле (5.4) получаем оценку сверху для величины ω_1^2.

Процесс построения приближенных оценок может быть продолжен и для старших частот. Пусть нам известен амплитудный вектор $H^{(1)} = \{H_\sigma^{(1)}\}$, соответствующий частоте ω_1. Тогда величина ω_2^2 равна минимуму функции Рэлея при условии ортогональности (3.25) искомого вектора H и вектора $H^{(1)}$:

$$\omega_2^2 = \min_{H,\,(H,H^{(1)})=0} R(H)\,, \quad \text{где} \quad (H, H^{(1)}) = \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} a_{\sigma\tau}\, H_\sigma H_\tau^{(1)}\,. \tag{5.5}$$

Точно так же аналогично формуле (5.5) величина ω_3^2 равна минимуму функции Рэлея при двух условиях $(H, H^{(1)}) = 0$ и $(H, H^{(2)}) = 0$, и т. д.

Описанный процесс построения частот имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что для определения величины ω_{k+1}^2 нужно знать амплитудные векторы $H^{(1)},\ H^{(2)}, \ldots, H^{(k)}$. Ниже рассматривается способ, свободный от этого недостатка.

Теорема Куранта. Будем искать минимум функции Рэлея (5.1) при условии, что на амплитудный вектор H наложено k линейных однородных связей

$$L^{(\varkappa)}H = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{\sigma=1}^{s} l_\sigma^{(\varkappa)} H_\sigma = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{5.6}$$

Справедлива *теорема Куранта*

$$\omega_{k+1}^2 = \max_{L^{(\varkappa)},\,\varkappa=\overline{1,k}} \min_H R(H)\,, \qquad L^{(\varkappa)}H = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{5.7}$$

которая сразу определяет величину ω_{k+1}^2. Здесь максимум по связям $L^{(\varkappa)}$ означает, что ищется максимум по всем коэффициентам $l_\sigma^{(\varkappa)}$, входящим в (5.6).

Для доказательства аналогично формулам (4.2) свяжем величины H_σ с амплитудами U_k главных координат соотношениями

$$H_\sigma = \sum_{k=1}^{s} \Delta_{\sigma k} U_k\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{5.8}$$

Теперь, используя формулы (5.8), преобразуем выражения $\widehat{\Pi}$ и $\widehat{T}$. Тогда эти квадратичные формы аналогично формуле (4.6) станут суммами квадратов:

$$\widehat{\Pi} = \sum_{\nu=1}^{s} c_\nu U_\nu^2\,, \quad \widehat{T} = \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu U_\nu^2\,, \tag{5.9}$$

где коэффициенты c_ν и a_ν определены формулами (4.7). Сделаем еще одну замену переменных $V_\nu = U_\nu\sqrt{a_\nu}$, $\nu = \overline{1,s}$. Тогда функция Рэлея (5.1) при учете выражений (5.9) примет вид

$$R(V) = \frac{\omega_1^2 V_1^2 + \omega_2^2 V_2^2 + \dots + \omega_s^2 V_s^2}{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_s^2}\,, \quad V = \{V_\sigma\}\,. \tag{5.10}$$

Представление (5.10) делает теорему Рэлея очевидной, ибо с учетом неравенств (5.3) имеем

$$\min_V R(V) = \omega_1^2 + \min_V \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)V_2^2 + \dots + (\omega_s^2 - \omega_1^2)V_s^2}{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_s^2} = \omega_1^2\,.$$

Запишем формулу (5.7) в главных координатах, обозначив правую часть через Z:

$$\omega_{k+1}^2 = \max_{L^{(\varkappa)},\,\varkappa=\overline{1,k}} \min_V R(V) = Z\,, \qquad L^{(\varkappa)}V = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{5.11}$$

Переходим к доказательству равенства (5.11). Рассмотрим частный случай связей $V_1 = V_2 = \dots = V_k = 0$. Тогда из формулы (5.11) получаем

$$\min_V R(V) = \min_V \frac{\omega_{k+1}^2 V_{k+1}^2 + \dots + \omega_s^2 V_s^2}{V_{k+1}^2 + \dots + V_s^2} = \omega_{k+1}^2 \,,$$

откуда следует, что

$$\omega_{k+1}^2 \geqslant Z \,, \tag{5.12}$$

ибо максимум не меньше одного из возможных значений рассматриваемой величины.

Рассмотрим систему уравнений связей

$$\sum_{\sigma=1}^{s} l_\sigma^{(\varkappa)} V_\sigma = 0 \,, \quad \varkappa = \overline{1,k} \,, \tag{5.13}$$

и возьмем ее частное решение, при котором $V_{k+2} = \dots = V_s = 0$. Тогда уравнения (5.13) перепишутся следующим образом:

$$\sum_{\sigma=1}^{s} l_\sigma^{(\varkappa)} V_\sigma = 0 \,, \quad \varkappa = \overline{1,k} \,. \tag{5.14}$$

Система алгебраических уравнений (5.14) является линейной и однородной, причем число ее уравнений больше числа неизвестных, поэтому она всегда имеет ненулевое решение. При нашем выборе вектора V имеем

$$\max_{L^{(\varkappa)},\, \varkappa=\overline{1,k}} \frac{\omega_1^2 V_1^2 + \dots + \omega_{k+1}^2 V_{k+1}^2}{V_1^2 + \dots + V_{k+1}^2} = \omega_{k+1}^2 \,,$$

откуда следует, что

$$\omega_{k+1}^2 \leqslant Z \,, \tag{5.15}$$

ибо минимум не больше одного из возможных значений рассматриваемой величины.

Одновременное выполнение неравенств (5.12) и (5.15) доказывает теорему Куранта.

Выше рассматривался случай малых колебаний, при котором обе квадратичные формы $\widehat{\Pi}(H)$ и $\widehat{T}(H)$ в (5.1) положительно определенны. Для справедливости сказанного выше в этом параграфе достаточно лишь предположения о положительной определенности формы $\widehat{T}(H)$, а форма $\widehat{\Pi}(H)$ может быть любой. При этом корни λ определителя системы (5.2) могут быть нулевыми или отрицательными. В этих случаях положение равновесия неустойчиво. При нулевых корнях

решение может линейно расти со временем, а при $\lambda < 0$ возможен экспоненциальный рост решения вида $e^{\sqrt{-\lambda}\,t}$. Тем не менее при упорядочивании корней $\lambda_\sigma = \omega_\sigma^2$ по формуле (5.3) теоремы Рэлея и Куранта сохраняют свой вид с учетом того, что величины ω_σ^2 могут быть нулевыми или отрицательными.

Следствия из теоремы Куранта. Если теорема Рэлея может быть использована для приближенной оценки частот колебаний, то теорема Куранта для этих целей непригодна, ибо операция перебора возможных связей неконструктивна. Однако теорема Куранта важна своими двумя следствиями, рассматриваемыми ниже.

Следствие 1. Зависимость частот колебаний от масс и жесткостей системы. Пусть рассматриваются две консервативные механические системы с одним и тем же числом степеней свободы. Напишем квадратичные формы этих систем:

$$\widehat{\Pi}^{(m)}(H) = \sum_{\sigma,\tau=1}^{s} c_{\sigma\tau}^{(m)} H_\sigma H_\tau\,, \quad \widehat{T}^{(m)}(H) = \sum_{\sigma,\tau=1}^{n} a_{\sigma\tau}^{(m)} H_\sigma H_\tau\,, \quad m = 1, 2\,.$$

Если при любых H одновременно выполнены неравенства

$$\widehat{\Pi}^{(2)}(H) \geqslant \widehat{\Pi}^{(1)}(H)\,, \quad \widehat{T}^{(2)}(H) \leqslant \widehat{T}^{(1)}(H)\,, \tag{5.16}$$

то все частоты второй системы не меньше соответствующих частот первой системы:

$$\left(\omega_\nu^{(2)}\right)^2 \geqslant \left(\omega_\nu^{(1)}\right)^2\,, \quad \nu = \overline{1, s}\,. \tag{5.17}$$

Действительно, в силу (5.16) при любых H имеет место неравенство $R^{(2)}(H) \geqslant R^{(1)}(H)$, и теорема Куранта приводит к неравенствам (5.17).

В частности, если система состоит из масс, соединенных пружинами, то увеличение жесткости одной из пружин ведет к (нестрогому) увеличению всех частот, а увеличение одной из масс ведет к (нестрогому) уменьшению всех частот.

Следствие 2. Зависимость частот от налагаемых связей. Рассмотрим систему с s степенями свободы и с собственными частотами, удовлетворяющими неравенствам (5.3). Пусть на систему наложена линейная связь

$$L_* H = \sum_{\sigma=1}^{s} l_{\sigma *} H_\sigma = 0\,.$$

В результате получится система с $s-1$ степенями свободы и с частотами свободных колебаний $\bar{\omega}_\sigma$, $\sigma = \overline{1, s-1}$. Тогда частоты колебаний новой системы расположатся между частотами первоначальной системы:

$$\omega_\sigma^2 \leqslant \bar{\omega}_\sigma^2 \leqslant \omega_{\sigma+1}^2\,, \quad \sigma = \overline{1, s-1}\,. \tag{5.18}$$

Действительно, в силу теоремы Куранта неравенства (5.18) сразу следуют из цепочки соотношений

$$\begin{aligned}
\omega_k^2 &= \max_{L^{(\varkappa)},\,\varkappa=\overline{1,k-1}} \min_{H} R(H) \;\leqslant \\
&\qquad (\text{при}\quad L^{(\varkappa)}H=0,\,\varkappa=\overline{1,k-1}) \\
&\leqslant \bar{\omega}_k^2 = \max_{L^{(\varkappa)},\,\varkappa=\overline{1,k-1}} \min_{H} R(H) \;\leqslant \\
&\qquad (\text{при}\quad L^{(\varkappa)}H=0,\,\varkappa=\overline{1,k-1},\,L_*H=0) \\
&\leqslant \omega_{k+1}^2 = \max_{L^{(\varkappa)},\,\varkappa=\overline{1,k-1},\,L_*} \min_{H} R(H) \\
&\qquad (\text{при}\quad L^{(\varkappa)}H=0,\,\varkappa=\overline{1,k-1},\,L_*H=0)\,.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Неравенство $\omega_k^2 \leqslant \bar{\omega}_k^2$ в (5.18) связано с тем, что минимум для $\bar{\omega}_k^2$ ищется по более узкому множеству значений H, и поэтому он (нестрого) больше. В свою очередь неравенство $\bar{\omega}_k^2 \leqslant \omega_{k+1}^2$ в (5.18) связано с тем, что максимум для ω_{k+1}^2 ищется по более узкому множеству связей, и поэтому он (нестрого) больше.

Следствие 2 допускает обобщение, заключающееся в том, что если на систему наложено r независимых связей, то получаем систему с $s-r$ степенями свободы, а неравенства (5.18) заменяются на

$$\omega_k^2 \leqslant \bar{\omega}_k^2 \leqslant \omega_{k+r}^2, \quad k=\overline{1,s-r}\,. \tag{5.20}$$

Обобщение на случай систем с распределенными параметрами. Теоремы Рэлея и Куранта допускают обобщение на системы с распределенными параметрами. Рассмотрим, например, свободные колебания балки Бернулли — Эйлера с постоянным поперечным сечением. Эти колебания описываются уравнением

$$EJ\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho\,S\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\,,$$

где $w(x,t)$ — прогиб, EJ — жесткость на изгиб, ρS — масса единицы длины балки. Проводим разделение переменных $w(x,t)=\varphi(x)\sin(\omega t)$. Функция Рэлея для балки имеет вид

$$R(\varphi) = \frac{\displaystyle\int_0^a EJ\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_0^a \rho S\varphi^2 dx}\,,$$

где a — длина балки.

Рассмотрим балку со свободными концами. У этой балки есть две нулевые частоты $\omega_1=\omega_2=0$, которым соответствуют перемещения балки как твердого тела (собственные функции имеют вид $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)=x$) и бесконечный

спектр ненулевых частот $\omega_3 < \omega_4 < \ldots$, которым соответствуют изгибные формы колебаний. Если опереть балку в двух точках, то перемещения балки как твердого тела становятся невозможными и у нее будет наименьшая частота собственных колебаний $\bar{\omega}_1 > 0$. Поставим задачу: найти положение точек x_1 и x_2, при опоре на которые частота $\bar{\omega}_1$ будет наибольшей. Опоры на точки можно рассматривать как две связи $\varphi(x_1) = 0$ и $\varphi(x_2) = 0$. Воспользуемся Следствием 2 из теоремы Куранта в формулировке (5.20) при $k = 1,\ r = 2$. Получаем

$$0 \leqslant \bar{\omega}_1 \leqslant \omega_3\,,$$

где ω_3 — первая ненулевая частота свободных колебаний балки. Следовательно, самое лучшее, на что можно рассчитывать, это $\bar{\omega}_1 = \omega_3$. Первая форма колебаний $\varphi_3(x)$ имеет две узловые точки, в которых $\varphi_3(x) = 0$. Пусть это x_1 и x_2. Если опереть балку в этих точках, то опоры не будут препятствовать колебаниям по форме $\varphi_3(x)$, и мы получаем искомый результат $\bar{\omega}_1 = \omega_3$. Задача построения функции $\varphi_3(x)$ несложная, однако она выходит за рамки настоящего изложения.

§ 6. Малые колебания при наличии сил сопротивления и гироскопических сил

Исследование линейных колебаний при наличии сил сопротивления в общем случае сводится к рассмотрению системы дифференциальных уравнений (1.5) или (1.6). Сделаем замечание, касающееся сил сопротивления. При анализе характера движения (см. § 2) матрица $\mathbf{B}$ уравнения (1.6) для простоты была предположена симметричной. Естественно, что подобное ограничение не всегда справедливо. Обычно если элементы некоторой матрицы несимметричны $b_{\rho\sigma} \neq b_{\sigma\rho}$, то ее разбивают на две: $\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}''$, из которых первая оказывается симметричной, а вторая — асимметричной. Элементами таких матриц являются числа

$$b'_{\rho\sigma} = b'_{\sigma\rho} = \frac{1}{2}(b_{\rho\sigma} + b_{\sigma\rho})\,, \quad b''_{\rho\sigma} = -b''_{\sigma\rho} = \frac{1}{2}(b_{\rho\sigma} - b_{\sigma\rho})\,.$$

Положим $\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}''$, где $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{B}''$ — симметричная и антисимметричная части матрицы $\mathbf{B}$. В результате система уравнений (1.5) может быть представлена в виде

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}'\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}''\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0\,. \tag{6.1}$$

Слагаемому $\mathbf{B}'\dot{\mathbf{q}}$, как и ранее, можно сопоставить функцию D (см. формулы (2.4), (2.5)). Слагаемое $\mathbf{B}''\dot{\mathbf{q}}$ описывает *гироскопические силы*. Такие силы встречаются, в частности, в системах, содержащих гироскопы. Легко проверить, что и при существовании гироскопических сил выполняется неравенство (2.8).

Общее решение системы (6.1) при наличии гироскопических сил, то есть при несимметричной матрице $\mathbf{B}$, может быть построено по методу, который был применен в § 1.

Исследуем возможность использования главных координат в случае симметричной матрицы $\mathbf{B}$.

Прежде всего отметим, что одновременное сведение трех квадратичных форм T, Π, D к каноническому виду в общем случае осуществить не удается. Действительно, переходя от обобщенных координат $q^1, q^2, \dots, q^s$ к координатам $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^s$ по формулам (4.4), получаем

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{s} a_\nu (\dot\theta^\nu)^2\,, \quad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{s} c_\nu (\theta^\nu)^2\,, \tag{6.2}$$

$$D = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{s} b^*_{\mu\nu}\dot\theta^\mu\dot\theta^\nu\,, \tag{6.3}$$

где

$$b^*_{\mu\nu} = \sum_{\rho,\sigma=1}^{s} b_{\rho\sigma}\Delta_{\rho\mu}\Delta_{\sigma\nu}\,. \tag{6.4}$$

Из выражений (6.2), (6.3) следует, что уравнения (2.6) в координатах θ^ρ таковы:

$$a_\rho\ddot\theta^\rho + \sum_{\sigma=1}^{s} b^*_{\rho\sigma}\dot\theta^\sigma + c_\rho\theta^\rho = 0\,, \quad \rho = \overline{1,s}\,. \tag{6.5}$$

Эта система, вообще говоря, не распадается на s самостоятельных уравнений. Однако если между коэффициентами матриц кинетической и потенциальной энергий и диссипативной функции существует зависимость

$$b_{\rho\sigma} = aa_{\rho\sigma} + cc_{\rho\sigma}\,, \quad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,, \tag{6.6}$$

где $a = \mathrm{const}$, $c = \mathrm{const}$, то уравнения (6.5) оказываются независимыми. В этом случае формулы (6.4) в соответствии с выражениями (4.7) принимают вид

$$b^*_{\mu\nu} = \sum_{\rho,\sigma=1}^{s}(aa_{\rho\sigma}\Delta_{\rho\mu}\Delta_{\sigma\nu} + cc_{\rho\sigma}\Delta_{\rho\mu}\Delta_{\sigma\nu}) = \begin{cases} aa_\nu + cc_\nu\,, & \mu = \nu\,, \\ 0\,, & \mu \neq \nu, \end{cases}$$

и, следовательно, уравнения (6.5) можно записать следующим образом:

$$a_\rho\ddot\theta^\rho + b_\rho\dot\theta^\rho + c_\rho\theta^\rho = 0\,, \quad \rho = \overline{1,s}\,, \tag{6.7}$$

где $b_\rho = aa_\rho + cc_\rho$.

Установим, при каких условиях могут быть приняты соотношения (6.6).

Пусть силы сопротивления воздуха, действующие на каждую материальную точку системы, линейно зависят от скоростей их движения:

$$\mathbf{F}_i = -k_i \mathbf{v}_i\,, \quad i = \overline{1, n}\,.$$

Обобщенные силы при этом таковы:

$$Q_\rho = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\rho} = -\sum_{i=1}^{n} k_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\rho}\,. \tag{6.8}$$

Так как

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\rho}\, \dot{q}^\sigma\,, \quad \text{то} \qquad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}^\rho} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\rho}\,,$$

поэтому формулу (6.8) можно переписать следующим образом:

$$Q_\rho = -\sum_{i=1}^{n} k_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}^\rho} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\rho} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i v_i^2}{2}\,.$$

Полагая, что коэффициенты сопротивления k_i пропорциональны массам m_i, получаем

$$Q_\rho = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\rho} \sum_{i=1}^{n} \frac{a m_i v_i^2}{2} = -a \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\rho} = -a \sum_{\sigma=1}^{s} a_{\rho\sigma} \dot{q}^\sigma = -\sum_{\sigma=1}^{s} b_{\rho\sigma} \dot{q}^\sigma\,.$$

Отсюда $b_{\rho\sigma} = a a_{\rho\sigma}$. Таким образом, первое слагаемое в формуле (6.6) учитывает силы сопротивления, пропорциональные по предположению массам m_i.

Рассеяние энергии при колебаниях упругой системы связано не только с трением ее элементов о воздух (*внешнее трение*), но и с трением, которое сопутствует деформации (*внутреннее трение*). Пусть в системе имеется n упругих элементов с жесткостями c_k. Потенциальная энергия деформации при этом

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k \Delta_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\rho,\sigma=1}^{s} c_{\rho\sigma} q^\rho q^\sigma\,,$$

где Δ_k — деформация (сжатие или растяжение) k-го упругого элемента. Восстанавливающая сила отдельного упругого элемента равна $c_k \Delta_k$. Сила внутреннего сопротивления в нем приближенно может быть принята

пропорциональной скорости $\dot{\Delta}_k$ и жесткости c_k. Диссипативная функция, характеризующая потери энергии в этом элементе, такова:

$$D_k = cc_k\dot{\Delta}_k/2\,.$$

Считая, что коэффициент пропорциональности c одинаков для всех упругих элементов, получаем

$$D = \sum_{k=1}^{n} D_k = c\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k\dot{\Delta}_k^2}{2} = c\sum_{\rho,\sigma=1}^{s}\frac{c_{\rho\sigma}\dot{q}^\rho\dot{q}^\sigma}{2}\,.$$

Отсюда

$$Q_\rho = -\frac{\partial D}{\partial\dot{q}^\rho} = -c\sum_{\sigma=1}^{s}c_{\rho\sigma}\dot{q}^\sigma = -\sum_{\sigma=1}^{s}b_{\rho\sigma}\dot{q}^\sigma\,.$$

Второе слагаемое в формуле (6.6) связано, таким образом, с силами внутреннего трения, которые предполагаются пропорциональными скорости деформации и жесткости данной упругой системы.

Общие решения уравнений (6.7) в соответствии с формулами (7.1), (7.5) главы IV имеют вид

$$\theta^\rho = e^{-\frac{b_\rho t}{2a_\rho}}\left(E_\rho\cos\sqrt{\frac{c_\rho}{a_\rho}-\frac{b_\rho^2}{4a_\rho^2}}\;t + F_\rho\sin\sqrt{\frac{c_\rho}{a_\rho}-\frac{b_\rho^2}{4a_\rho^2}}\;t\right)\,, \qquad \rho=\overline{1,s}\,. \tag{6.9}$$

Здесь E_ρ и F_ρ — произвольные постоянные.

Запись общего решения в обобщенных координатах $q^1, q^2, \dots, q^s$ может быть осуществлена с помощью линейного преобразования (4.2).

Теоремы Томсона и Тета о влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость положения равновесия механической системы. Вернемся к системе уравнений (6.1) и будем считать, что матрица $\mathbf{A}$ симметричная и положительно определенная, матрица $\mathbf{B}'$ (нестрого) положительная, матрица $\mathbf{C}$ симметричная. Предметом обсуждения будут корни характеристического уравнения

$$|\lambda^2\mathbf{A} + \lambda(\mathbf{B}' + \mathbf{B}'') + \mathbf{C}| = 0\,. \tag{6.10}$$

Наличие хотя бы одного корня с положительной вещественной частью говорит о неустойчивости.

Приведем без доказательства четыре теоремы Томсона и Тета, которые суммируют результаты анализа[4].

Теорема 1. Пусть $\mathbf{C}$ положительно определенная матрица. Тогда при отсутствии диссипативных и гироскопических сил (при $\mathbf{B} = 0$) все корни уравнения (6.10) чисто мнимые и положение равновесия устойчиво. Добавление диссипативных и гироскопических сил не нарушает устойчивость положения равновесия.

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 матрица $\mathbf{B}'$ положительно определенна (то есть силы сопротивления с полной диссипацией), то все корни уравнения (6.10) имеют отрицательные вещественные части и положение равновесия асимптотически устойчиво.

Прежде чем формулировать теоремы 3 и 4 введем понятие *степень неустойчивости.* Рассмотрим уравнение

$$|\mathbf{C} - \mu\mathbf{A}| = 0\,. \tag{6.11}$$

Все корни μ этого уравнения вещественны. Положительным корням μ соответствуют чисто мнимые $\lambda = \pm\sqrt{-\mu}$, а отрицательным μ соответствуют значения λ, одно из которых положительно, что соответствует появлению неограниченно растущего со временем решения. Степенью k неустойчивости системы называется число отрицательных корней уравнения (6.11). При этом предполагается, что нулевых корней это уравнение не имеет.

Теорема 3. Если степень неустойчивости четная, то существуют гироскопические силы, при добавлении которых положение равновесия становится устойчивым (все корни уравнения (6.10) становятся чисто мнимыми). Если степень неустойчивости нечетная, то добавление гироскопических сил не может изменить неустойчивость положения равновесия.

Теорема 4. Если в условиях теоремы 3 при четной степени неустойчивости за счет добавления гироскопических сил была достигнута устойчивость, то добавление сил сопротивления с полной диссипацией снова превращает положение равновесия в неустойчивое.

В связи с этим для устойчивости, достигнутой за счет добавления гироскопических сил, вводится термин *временная устойчивость.* Эта устойчивость разрушается силами сопротивления.

В качестве примера, иллюстрирующего теоремы 3 и 4, рассмотрим движение волчка, вращающегося в поле силы тяжести вокруг вертикаль-

[4]Подробнее см., например, в монографии: *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.

ной оси. Имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} A\ddot{q}_1 + n\dot{q}_1 + C\omega\dot{q}_2 - PLq_1 = 0, \\ A\ddot{q}_2 + n\dot{q}_2 - C\omega\dot{q}_1 - PLq_2 = 0\,, \end{aligned} \tag{6.12}$$

где q_1, q_2 — углы отклонения оси волчка от вертикали, A, C — моменты инерции, ω — угловая скорость волчка, P — вес волчка, L — расстояние от центра тяжести до точки опоры, n — коэффициент сопротивления.

Характеристическое уравнение системы (6.12) имеет вид

$$(A\lambda^2 + n\lambda - PL)^2 + C^2\omega^2\lambda^2 = 0\,. \tag{6.13}$$

При $\omega = n = 0$ уравнение (6.11) имеет отрицательный корень $\mu = -PL/A$ второй кратности, поэтому степень неустойчивости равна двум. У уравнения (6.13) при $n = 0$ все корни будут чисто мнимыми, если $C^2\omega^2 > 4APL$, то есть при достаточно большой угловой скорости вращения волчка.

Рассмотрим уравнение (6.13) при наличии сопротивления ($n > 0$). Разворачивая многочлен (6.13) по степеням λ, находим, что коэффициент при λ в первой степени равен $-2APL$. Следовательно, нарушено необходимое условие устойчивости, согласно которому все коэффициенты многочлена должны быть положительными.

§ 7. Вынужденные колебания механической системы

Рассмотрим колебания механической системы, в которой помимо консервативных сил и сил сопротивления действуют силы, зависящие лишь от времени. Возникающие при этом колебания носят название *вынужденных*. При составлении уравнений Лагранжа второго рода получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\sum_{\tau=1}^{s}(a_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\tau} + b_{\sigma\tau}\dot{q}^{\tau} + c_{\sigma\tau}q^{\tau}) = Q_\sigma(t)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{7.1}$$

Общее решение этой неоднородной линейной системы с постоянными коэффициентами складывается из общего решения (1.18) однородной системы (1.5) и любого частного решения неоднородной системы (7.1). Последнее может быть определено методом вариации произвольных постоянных.

Остановимся теперь несколько подробнее на случае, когда коэффициенты $b_{\sigma\tau}$ могут быть представлены в виде (6.6).

В главе VI было показано, что если даны уравнения Лагранжа второго рода, записанные в координатах q^σ, то для получения уравнения в новых

координатах $\tilde{q}^\tau$ исходные уравнения следует умножить на коэффициенты преобразования $\partial q^\sigma/\partial\tilde{q}^\tau$ и просуммировать по σ. Отсюда вытекает, что уравнения (7.7) можно считать полученными в результате преобразования

$$\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\sum_{\tau=1}^{s}(a_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\,\tau}+b_{\sigma\tau}\dot{q}^\tau+c_{\sigma\tau}q^\tau)\right)\frac{\partial q^\sigma}{\partial\theta^\rho}=a_\rho\ddot{\theta}^\rho+b_\rho\dot{\theta}^\rho+c_\rho\theta^\rho=0\,,\qquad \rho=\overline{1,s}\,, \tag{7.2}$$

где в соответствии с формулами (4.4) $\partial q^\sigma/\partial\theta^\rho=\Delta_{\sigma\rho}$. Равенство (7.2) показывает, что, умножив уравнения (7.1) на $\Delta_{\sigma\rho}$ и просуммировав по σ, получим

$$a_\rho\ddot{\theta}^\rho+b_\rho\dot{\theta}^\rho+c_\rho\theta^\rho=\Theta_\rho(t)\,, \tag{7.3}$$

где

$$\Theta_\rho=\sum_{\sigma=1}^{s}\Delta_{\sigma\rho}Q_\sigma\,. \tag{7.4}$$

Общее решение каждого из уравнений (7.3) в соответствии с формулой (7.20) главы IV таково:

$$\begin{gathered}\theta^\rho=e^{-\frac{b_\rho t}{2a_\rho}}\left(E_\rho\cos\sqrt{\frac{c_\rho}{a_\rho}-\frac{b_\rho^2}{4a_\rho^2}}\;t+F_\rho\sin\sqrt{\frac{c_\rho}{a_\rho}-\frac{b_\rho^2}{4a_\rho^2}}\;t\right)+\\ +\frac{1}{a_\rho\sqrt{\frac{c_\rho}{a_\rho}-\frac{b_\rho^2}{4a_\rho^2}}}\int_0^t\Theta_\rho(\xi)e^{-\frac{b_\rho(t-\xi)}{2a_\rho}}\sin\left(\sqrt{\frac{c_\rho}{a_\rho}-\frac{b_\rho^2}{4a_\rho^2}}\,(t-\xi)\right)d\xi\,,\\ \rho=\overline{1,s}\,.\end{gathered} \tag{7.5}$$

Здесь E_ρ, F_ρ, $\rho=\overline{1,s}$, — произвольные постоянные. При отсутствии сопротивления это решение принимает вид

$$\begin{gathered}\theta^\rho=E_\rho\cos\sqrt{\frac{c_\rho}{a_\rho}}\;t+F_\rho\sin\sqrt{\frac{c_\rho}{a_\rho}}\;t+\\ +\frac{1}{\sqrt{a_\rho c_\rho}}\int_0^t\Theta_\rho(\xi)\sin\left(\sqrt{\frac{c_\rho}{a_\rho}}\,(t-\xi)\right)d\xi\,,\quad \rho=\overline{1,s}\,.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Значения произвольных постоянных легко определить по начальным условиям $\theta^\rho(0)=\theta_0^\rho$, $\dot{\theta}^\rho(0)=\dot{\theta}_0^\rho$, $\rho=\overline{1,s}$, связанным с начальными условиями q_0^σ, $\dot{q}_0^\sigma$, $\sigma=\overline{1,s}$, формулами (4.4).

Рассмотрим случай, когда все обобщенные силы изменяются по гармоническим законам с одной и той же частотой и начальной фазой:

$$Q_\sigma=B_\sigma\sin(p\,t+\gamma)\,,\quad \sigma=\overline{1,s}\,. \tag{7.7}$$

Тогда согласно формулам (7.4) и (7.7) обобщенные силы таковы:

$$\Theta_\rho = H_\rho \sin(p\,t + \gamma)\,, \quad \rho = \overline{1, s}\,,$$

где

$$H_\rho = \sum_{\sigma=1}^{s} \Delta_{\sigma\rho} B_\sigma\,. \tag{7.8}$$

Теперь в решении (7.6) можно выделить слагаемое

$$H_\rho \sin(p\,t + \gamma)/(c_\rho - a_\rho p^2)\,, \quad p \neq (c_\rho/a_\rho)^{1/2}\,,$$

или

$$-tH_\rho \cos(p\,t + \gamma)/(2\,p\,a_\rho)\,, \quad p = (c_\rho/a_\rho)^{1/2}\,.$$

Последний член описывает явление *резонанса*, при котором частота возмущающей силы совпадает с одной из собственных частот системы. В этом случае отклонения системы, пропорциональные времени t, могут оказаться сколь угодно большими. С учетом сопротивления, когда решение задается формулами (7.5), отклонения системы являются ограниченными при любой частоте p.

Отметим, что если коэффициенты B_σ обобщенных сил (7.7) при некотором ρ удовлетворяют уравнению

$$\sum_{\sigma=1}^{s} \Delta_{\sigma\rho} B_\sigma = 0\,,$$

то в соответствии с формулами (7.8) $H_\rho = 0$. Последнее означает, что форма колебаний, соответствующая частоте ω_ρ, не возбуждается.

Обратимся теперь к общему случаю, когда путем перехода к главным координатам не удается расщепить систему на отдельные уравнения. Запишем систему (7.1) в матричных обозначениях

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \tag{7.9}$$

и представим ее общее решение в виде

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^{2s} C_k \mathbf{U}_k(t) + \mathbf{q}_*(t)\,, \tag{7.10}$$

где $\mathbf{U}_k(t)$ — построенные выше линейно независимые частные решения однородной системы (7.9), C_k —произвольные постоянные, $\mathbf{q}_*(t)$ — частное решение неоднородного матричного уравнения.

Займемся построением частного решения $\mathbf{q}_*(t)$, удовлетворяющего нулевым начальным условиям

$$\mathbf{q}_*(0) = \dot{\mathbf{q}}_*(0) = 0 \tag{7.11}$$

в предположении, что $|\mathbf{A}| \neq 0$. На постоянные матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ никаких ограничений пока не накладываем. Решение поставленной задачи представимо в виде

$$\mathbf{q}_*(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau)Q(\tau)d\tau\,, \quad \mathbf{G}(t-\tau) = \{g_{ij}(t-\tau)\}_{i,j=1,\ldots,s}\,. \tag{7.12}$$

Здесь $\mathbf{G}(t-\tau)$ — *матрица импульсных переходных функций*, а ее элементы $g_{ij}(t-\tau)$ — реакции i-й обобщенной координаты на единичный импульс, приложенный вместо j-й обобщенной силы. Формула (7.12) является обобщением известного *интеграла Дюамеля* на многомерный случай.

Рассмотрим важный частный случай, когда внешние силы являются периодическими функциями времени

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t}\,, \tag{7.13}$$

где $\mathbf{Q}_0$ — заданный постоянный вектор, а ω — частота возмущения. Будем искать периодическое частное решение в виде

$$\mathbf{q}_*(t) = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t}\,. \tag{7.14}$$

Подстановка в уравнение (7.9) дает

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{S}(\omega)\mathbf{Q}_0\,, \quad \mathbf{S}(\omega) = (\mathbf{A}(i\omega)^2 + \mathbf{B}i\omega + \mathbf{C})^{-1}\,. \tag{7.15}$$

Здесь $\mathbf{S}(\omega)$ — матрица *передаточных функций* системы.

Решение (7.14) имеет реальный смысл лишь в том случае, когда свободные колебания, удовлетворяющие однородной системе (7.9), с течением времени затухают. Это будет иметь место, если все три матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ положительно определенны, что мы и предположим. Решение (7.14), (7.15) является комплексным. Для получения вещественных решений следует отделить вещественную и мнимую части. Рассмотрим перемещения по k-й обобщенной координате

$$q_{*k}(t) = |q_{0k}(\omega)|\cos(\omega t + \alpha_k)\,,$$

где α_k — аргумент величины q_{0k}, а

$$|q_{0k}(\omega)| = |\mathbf{S}(\omega)\mathbf{Q}_0|_k = |(\mathbf{A}(i\omega)^2 + \mathbf{B}i\omega + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{Q}_0|_k = A_k(\omega) \tag{7.16}$$

дает *амплитудно-частотную характеристику* $A_k(\omega)$ для k-й обобщенной координаты.

Если сопротивление отсутствует ($\mathbf{B} = 0$), то при частоте возмущения ω, совпадающей с одной из частот собственных колебаний $\omega = \omega_j$, будет $A_k(\omega) = \infty$. В случае малого сопротивления в силу формулы (7.16) вблизи $\omega = \omega_j$ функция $A_k(\omega)$ будет иметь локальный максимум (это явление называется *резонансом*).

Связь импульсной переходной функции и передаточной функции. В предположении, что матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ положительно определённы, рассмотрим решение (7.12) в случае периодического возмущения (7.13). В отличие от (7.11) зададим начальные условия в момент времени $t = -\infty$. Тогда начальные возмущения затухают, и мы получаем периодическое решение (7.14):

$$\int_{-\infty}^{t} \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{Q}_0 e^{i\omega\tau} d\tau = \mathbf{S}(\omega)\mathbf{Q}_0 e^{i\omega t}\,. \tag{7.17}$$

В силу произвольности вектора $\mathbf{Q}_0$ отсюда следует

$$\int_{-\infty}^{t} \mathbf{G}(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \mathbf{S}(\omega) e^{i\omega t}\,. \tag{7.18}$$

Замена переменных $t - \tau = u$ дает

$$\mathbf{S}(\omega) = \int_{0}^{\infty} \mathbf{G}(u) e^{-i\omega u}\, du\,. \tag{7.19}$$

Обратное преобразование Фурье

$$\mathbf{G}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega) e^{i\omega u}\, d\omega \tag{7.20}$$

может быть использовано для вычисления функции $\mathbf{G}(u)$.

Глава VIII
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Автор: *М. П. Юшков*

Изучаются количество движения, кинетический момент, кинетическая энергия и тензор инерции твердого тела. Динамические уравнения Эйлера выводятся из теоремы об изменении кинетичекого момента. Исследуются преобразования силовых систем, приложенных к твердому телу, уравнения статики рассматриваются как частный случай уравнений динамики. Излагаются случаи Эйлера и Лагранжа вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Элементарная теория гироскопа строится на основе результатов, полученных для псевдорегулярной прецессии тяжелого гироскопа. Приводится новая специальная форма дифференциальных уравнений движения системы твердых тел, удобная для использования численных методов.

§ 1. Динамические характеристики твердого тела

Плотность тела. Количество движения твердого тела. Пусть имеется система материальных точек, расстояния между любыми двумя точками которой оказываются неизменными. Такая система называется *жесткой*. При исследовании движения материального тела будем рассматривать его как жесткую систему, точки которой образуют континуум. Эту модель реального тела принято называть *абсолютно твердым*, или *твердым телом*. Как было показано в главе III, данная модель позволяет задать положение тела шестью параметрами, то есть считать, что оно имеет шесть степеней свободы. Представление о твердом теле как о континууме можно получить, мысленно увеличивая число точек жесткой системы и считая, что они сплошь заполняют некоторый объем.

Масса M твердого тела считается непрерывно распределенной по объему τ, занимаемому этим телом. Значит в любом элементарном объеме тела $\Delta\tau$ заключена отличная от нуля масса Δm. Данное предположение позволяет ввести понятие плотности тела в точке A. Для математического описания этого понятия вырежем мысленно в теле вокруг точки A некоторый объем $\Delta\tau$ с массой Δm и опишем вокруг него некоторую замкнутую поверхность, не выходящую за границы тела. Изменяя форму указанной поверхности так, что все ее точки стремятся совпасть с точкой A, всегда остающейся внутри поверхности, рассмотрим предел отношения $\mu(x, y, z) = \lim\limits_{\Delta\tau\to 0}(\Delta m/\Delta\tau)$. Положим, что данный предел существует и является непрерывной функцией координат точки A. Величина $\mu(x, y, z)$ называется *плотностью тела* в данной точке. Вводя понятие плотности

как непрерывной функции координат точек тела, мы отвлекаемся от молекулярного строения вещества. На практике же величина μ, которую удается вычислить или измерить, представляет собой среднюю плотность в окрестности точки A, причем размеры этой окрестности малы по сравнению с размерами тела, но велики по сравнению с расстоянием между молекулами.

Будем исследовать движение твердого тела в предположении, что к нему применимы все теоремы, установленные для системы материальных точек, а именно: теорема импульсов

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{F}\, dt\,,$$

теорема об изменении кинетического момента

$$d\mathbf{l}/dt = \mathbf{L}\,,$$

теорема об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = A$$

и теорема о движении центра масс

$$M\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F}\,.$$

Количество движения системы $\mathbf{K}$, ее кинетический момент $\mathbf{l}$ и кинетическая энергия T, а также скорость центра масс $\mathbf{v}_c$, являющиеся основными динамическими характеристиками механической системы, входят в формулировки перечисленных теорем. Следовательно, для использования этих теорем применительно к твердому телу необходимо прежде всего исследовать основные его динамические характеристики.

Для системы, состоящей из конечного числа точек,

$$\mathbf{K} = \sum_{\nu} m_\nu \mathbf{v}_\nu\,. \tag{1.1}$$

При распространении понятия количества движения на случай, когда имеются и непрерывно распределенные массы, в выражении (1.1) сумму следует заменить интегралом

$$\mathbf{K} = \int\limits_{\tau} \mathbf{v}\, dm \tag{1.2}$$

по мере dm от функции $\mathbf{v}$. Интеграл считается распространенным по объему τ, который занимают тела, входящие в систему. Для использования выражения (1.2) применительно к конкретной системе тел необходимо раскрыть более подробно, что понимается под мерой dm в данном случае. Прежде всего отметим, что само понятие меры множества тесно связано с понятием распределения масс в пространстве. Характерной мерой элемента $d\tau$ трехмерного евклидова пространства является его масса dm. Для удобства в дальнейшем объем рассматриваемого элемента будем обозначать через $dxdydz$.

Если элемент $d\tau$ содержит одну сосредоточенную массу m_ν, то его мерой является масса m_ν. Такую меру принято называть мерой Дирака. Если во всем объеме τ содержатся только сосредоточенные массы, то интеграл в выражении (1.2) представим в виде суммы (1.1). Если же в элементарном объеме $d\tau$ масса распределена непрерывно, то можно записать

$$dm = \mu\, d\tau = \mu\, dxdydz\,,$$

где μ — средняя плотность в объеме $d\tau$.

Таким образом, если сплошное твердое тело занимает объем τ, то выражение (1.2) преобразуется в обычный трехмерный интеграл

$$\mathbf{K} = \int\limits_{\tau} \mathbf{v}\mu\, dxdydz\,. \tag{1.3}$$

Если же оно состоит из масс, непрерывно распределенных по поверхности S, то элементарная масса dm выражается как

$$dm = \mu_s\, dS\,,$$

где dS — площадь элементарной части поверхности S, а μ_s — *поверхностная плотность распределения масс*. В рассматриваемом случае вектор количества движения выражается через поверхностный интеграл:

$$\mathbf{K} = \int\limits_{S} \mathbf{v}\mu_s\, dS\,. \tag{1.4}$$

В таком виде можно записать, например, импульс тонкой оболочки.

Если рассматривается тонкий стержень, то его массу можно считать распределенной по линии. Тогда мера dm может быть представлена в виде

$$dm = \mu_l\, dl\,,$$

где dl — длина элементарной части линии l, μ_l — *погонная плотность*. Вектор $\mathbf{K}$ в данном случае записываем через криволинейный интеграл

$$\mathbf{K} = \int\limits_l \mathbf{v}\mu_l \, dl \,. \tag{1.5}$$

Формулы (1.3)–(1.5) характеризуют способ вычисления количества движения системы $\mathbf{K}$, построенный на введении понятий объемной, поверхностной и линейной плотностей распределения масс. Это позволяет наглядно проиллюстрировать понятие меры.

Вектор количества движения тесно связан с понятием *центра масс системы*. Напомним, что при конечном числе сосредоточенных масс радиус-вектор центра масс определяем по формуле

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum\limits_\nu \mu_\nu \mathbf{r}_\nu}{\sum\limits_\nu \mu_\nu} = \frac{\sum\limits_\nu \mu_\nu \mathbf{r}_\nu}{M} \,,$$

где M — масса всей системы. При переходе к системам, содержащим непрерывно распределенные массы, конечные суммы аналогично предыдущему переходят в интегралы

$$\mathbf{r}_c = \frac{\int\limits_\tau \mathbf{r}\, dm}{\int\limits_\tau dm} = \frac{\int\limits_\tau \mu\mathbf{r}\, d\tau}{\int\limits_\tau \mu d\tau} = \frac{\int\limits_\tau \mu\mathbf{r}\, d\tau}{M} \,. \tag{1.6}$$

Поэтому вектор импульса системы также может быть представлен в виде

$$\mathbf{K} = \int\limits_\tau \mathbf{v}\, dm = M\mathbf{v}_c \,,$$

где $\mathbf{v}_c = d\mathbf{r}_c/dt$ — скорость центра масс.

Кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела. В кинематике твердого тела было установлено, что если точку O тела принять за полюс, то скорость $\mathbf{v}$ любой другой его точки N связана со скоростью полюса $\mathbf{v}_o$ соотношением

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \,, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из полюса O в точку N, $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость (рис. 1).

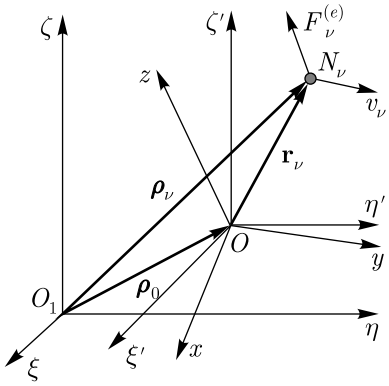

Рис. 1. Введение трех систем координат для твердого тела

Скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_o$ в формуле (1.7) — это скорости двух точек тела относительно неподвижной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Скорость же $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ является скоростью точки N относительно системы координат $O\xi'\eta'\zeta'$, которая перемещается поступательно вместе с полюсом.

Введем еще одну систему координат $Oxyz$, которая жестко связана с телом. Кинетический момент и кинетическую энергию твердого тела относительно систем координат $O_1\xi\eta\zeta$ и $O\xi'\eta'\zeta'$ будем обозначать соответственно через $\mathbf{l}_{o_1}, T_{o_1}$ и $\mathbf{l}, T$. Если твердое тело с плотностью μ занимает объем τ, то имеем

$$\mathbf{l}_{o_1} = \int\limits_\tau \boldsymbol{\rho}\times(\mathbf{v}_o+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\,\mu d\tau\,, \qquad \mathbf{l} = \int\limits_\tau \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\,\mu d\tau\,,$$
$$T_{o_1} = \tfrac{1}{2}\int\limits_\tau (\mathbf{v}_o+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2\,\mu d\tau\,, \qquad T = \tfrac{1}{2}\int\limits_\tau (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2\,\mu d\tau\,.$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор, соединяющий точки O_1 и N.

Движение системы координат $O\xi'\eta'\zeta'$ будем рассматривать как переносное. При этом T_{o_1} есть кинетическая энергия твердого тела при абсолютном его движении, а T — при относительном. Отметим, что относительным движением является вращение твердого тела вокруг точки O. Так как $(\mathbf{v}_o+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2 = \mathbf{v}_o^2 + 2\,\mathbf{v}_o\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2$ и $\int\limits_\tau \mathbf{r}\mu\,d\tau = M\mathbf{r}_c$, то величины T_{o_1} и T связаны соотношением

$$T_{o_1} = \frac{1}{2}M(\mathbf{v}_o^2 + 2\,\mathbf{v}_o\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_c)) + T\,. \tag{1.8}$$

Формулой (1.8), в частности, удобно пользоваться при вычислении кинетической энергии звеньев манипулятора, движение которого в целом описывается системой уравнений Лагранжа второго рода.

Установим также связь между векторами $\mathbf{l}_{o_1}$ и $\mathbf{l}$. Учитывая, что $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_o + \mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}_o = \overrightarrow{O_1O}$, можно записать

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}_{o_1} &= \int\limits_\tau (\boldsymbol{\rho}_o + \mathbf{r}) \times \mu(\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, d\tau = \int\limits_\tau (\boldsymbol{\rho}_o \times \mu \mathbf{v}_o)\, d\tau + \\
&+ \int\limits_\tau \boldsymbol{\rho}_o \times (\boldsymbol{\omega} \times \mu \mathbf{r})\, d\tau + \int\limits_\tau \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}_o\, d\tau + \int\limits_\tau \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mu \mathbf{r})\, d\tau = \\
&= \boldsymbol{\rho}_o \times M\mathbf{v}_o + [\,\boldsymbol{\rho}_o \times (\boldsymbol{\omega} \times \int\limits_\tau \mu \mathbf{r}\, d\tau)] + \int\limits_\tau \mu \mathbf{r}\, d\tau \times \mathbf{v}_o + \mathbf{l}\,.
\end{aligned}$$

В соответствии с выражением (1.6) для радиус-вектора центра масс в системе $Oxyz$ получаем

$$\mathbf{l}_{o_1} = \boldsymbol{\rho}_o \times M\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\rho}_o \times (\boldsymbol{\omega} \times M\mathbf{r}_c) + \mathbf{r}_c \times M\mathbf{v}_o + \mathbf{l}\,.$$

Вектор $\mathbf{l}$ представляет собой *кинетический момент твердого тела относительно точки O* при вращении его вокруг этой точки. На основании известного свойства двойного векторного произведения его можно представить в виде

$$\mathbf{l} = \boldsymbol{\omega} \int\limits_\tau r^2 \mu\, d\tau - \int\limits_\tau \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mu\, d\tau\,. \tag{1.9}$$

Из этой формулы следует, что проекция вектора $\mathbf{l}$ на направление $\boldsymbol{\omega}$ выражается как

$$l_\omega = \omega \int\limits_\tau r^2 \mu\, d\tau - \omega \int\limits_\tau r^2 \cos^2 \alpha \mu\, d\tau = \omega \int\limits_\tau p^2 \mu\, d\tau = J_\omega \omega\,, \tag{1.10}$$

где α — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\omega}$, $p = r \sin \alpha$ — кратчайшее расстояние от точки N до оси $\boldsymbol{\omega}$. Величина $J_\omega = \int\limits_\tau p^2 \mu\, d\tau$ называется *моментом инерции твердого тела относительно оси* с направлением $\boldsymbol{\omega}$.

Учитывая, что $\omega^2 p^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2$, получаем

$$T = \frac{\omega^2}{2} \int\limits_\tau p^2 \mu\, d\tau = J_\omega \frac{\omega^2}{2}\,. \tag{1.11}$$

Из формул (1.10) и (1.11) видно, что

$$\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = J_\omega \omega^2 = 2T\,. \tag{1.12}$$

Предполагая в дальнейшем для простоты использовать суммирование по дважды встречающимся индексам, обозначаем $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1$, $\mathbf{j} = \mathbf{i}_2$, $\mathbf{k} = \mathbf{i}_3$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i}_k = \omega_k$, $\mathbf{l} \cdot \mathbf{i}_k = l_k$, $k = 1, 2, 3$. Из формулы (1.9) следует, что

$$\begin{aligned} l_1 &= \omega_1 \int\limits_\tau (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\mu \, d\tau - \int\limits_\tau \mu x_1(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) \, d\tau = \\ &= J_{11}\,\omega_1 + J_{12}\,\omega_2 + J_{13}\,\omega_3 = J_{1k}\,\omega_k\,, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$J_{11} = \int\limits_\tau \mu(x_2^2 + x_3^2)\, d\tau\,, \quad J_{12} = -\int\limits_\tau \mu x_1 x_2 \, d\tau\,, \quad J_{13} = -\int\limits_\tau \mu x_1 x_3 \, d\tau\,.$$

Аналогично находим

$$l_2 = J_{21}\,\omega_1 + J_{22}\,\omega_2 + J_{23}\,\omega_3 = J_{2k}\,\omega_k\,, \tag{1.14}$$

$$l_3 = J_{31}\,\omega_1 + J_{32}\,\omega_2 + J_{33}\,\omega_3 = J_{3k}\,\omega_k\,, \tag{1.15}$$

при этом

$$\begin{aligned} &J_{22} = \int\limits_\tau \mu(x_3^2 + x_1^2)\, d\tau\,, && J_{21} = J_{12} = -\int\limits_\tau \mu x_2 x_1 \, d\tau\,, \\ &J_{31} = J_{13} = -\int\limits_\tau \mu x_3 x_1 \, d\tau\,, && J_{32} = J_{23} = -\int\limits_\tau \mu x_3 x_2 \, d\tau\,, \\ &J_{33} = \int\limits_\tau (x_1^2 + x_2^2)\mu \, d\tau\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Формулы (1.13)–(1.15) при использовании суммирования по дважды встречающемуся индексу могут быть записаны в виде

$$l_j = J_{jk}\,\omega_k\,, \quad j, k = 1, 2, 3\,. \tag{1.17}$$

Величины J_{11}, J_{22}, J_{33} называют *моментами инерции* тела соответственно *относительно осей* x_1, x_2, x_3, а величины J_{12}, J_{23}, J_{31}, взятые с обратными знаками, — *центробежными моментами инерции*.

Тензор инерции. Если ввести симметричную матрицу

$$\widehat{J} = (J_{jk}) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}\,,$$

то совокупность выражений (1.17) можно представить в виде

$$\mathbf{l} = \widehat{J}\boldsymbol{\omega} = l_j \mathbf{i}_j = J_{jk}\,\omega_k \mathbf{i}_j\,. \tag{1.18}$$

Удвоенная кинетическая энергия в соответствии с формулами (1.12) и (1.17) такова:

$$\begin{gathered} 2T = \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\omega} = \widehat{J}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = J_{jk}\,\omega_j\omega_k = \\ = J_{11}\,\omega_1^2 + J_{22}\,\omega_2^2 + J_{33}\,\omega_3^2 + 2J_{12}\,\omega_1\omega_2 + 2J_{23}\,\omega_2\omega_3 + 2J_{31}\,\omega_3\omega_1\,. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Если от системы координат $Ox_1x_2x_3$ перейти к системе $Ox_1'x_2'x_3'$, то в последней имеем

$$\begin{aligned} &l_m' = J_{mn}'\,\omega_n'\,, \\ &2T' = J_{mn}'\,\omega_m'\,\omega_n' = J_{jk}\omega_j\omega_k = 2T = \mathrm{inv}\,. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Величины ω_j и ω_k связаны здесь с ω_m' и ω_n' формулами перехода

$$\omega_j = \omega_m'\cos\alpha_{jm}\,, \qquad \omega_k = \omega_n'\cos\alpha_{kn}\,, \tag{1.21}$$

где α_{jm} — угол между осями x_j и x_m'. Из формул (1.20) н (1.21) следует, что элементы матрицы $\widehat{J}$ при переходе от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе $Ox_1'x_2'x_3'$ преобразуются по формулам

$$J_{mn}' = J_{jk}\cos\alpha_{jm}\cos\alpha_{kn}\,. \tag{1.22}$$

В общем случае матрица (a_{ij}), элементы которой при переходе от одной системы ортогональных координат к другой преобразуются по формулам

$$a_{mn}' = a_{jk}\cos\alpha_{jm}\cos\alpha_{kn}\,,$$

называется *тензором второго ранга*. Из формулы (1.22) следует, что симметричная матрица $\widehat{J}$ является тензором второго ранга. Она называется *тензором инерции*.

С точки зрения теории линейных операторов соотношение $\mathbf{l} = \widehat{J}\boldsymbol{\omega}$ устанавливает соответствие между вектором $\boldsymbol{\omega}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ и вектором $\mathbf{l}$ того же пространства. Следовательно, тензор $\widehat{J}$ является линейным оператором.

Поясним физический смысл тензора инерции. Будем считать для простоты точку O, выбранную в теле произвольно, неподвижной. Представим себе, что тело вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг некоторой оси, проходящей через данную точку. Вектор $\mathbf{l}$, соответствующий вращению вокруг этой оси, определяем по формуле (1.18). Особо отметим, что, несмотря на произвольность направления вектора $\boldsymbol{\omega}$, для вычисления вектора $\mathbf{l}$ достаточно знать только шесть величин J_{jk}, которые называются *компонентами тензора инерции* в выбранной системе координат $Ox_1x_2x_3$.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной точки заданием вектора мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ полностью определяется поле скоростей всех точек тела. Подставляя выражение (1.18) в теорему моментов, получаем

$$\frac{d}{dt}(\widehat{J}\boldsymbol{\omega}) = L\,.$$

Сравнивая эту запись с обычной записью второго закона Ньютона, видим, что в данном случае движение характеризуется вектором $\boldsymbol{\omega}$, а мерой инерции является тензор инерции.

Приведение тензора инерции к главным осям. Эллипсоид инерции. Из формулы (1.18) видно, что, вообще говоря, векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{l}$ не коллинеарны. Естественно установить, при каких условиях указанные векторы лежат на одной прямой. В этом случае имеем

$$\widehat{J}\boldsymbol{\omega} = \lambda\,\boldsymbol{\omega}\,, \tag{1.23}$$

где λ — неопределенный скалярный множитель. Данное уравнение можно записать также в виде

$$(\widehat{J} - \lambda\widehat{E})\,\boldsymbol{\omega} = 0\,,$$

где $\widehat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица.

Векторное соотношение (1.23) в проекциях на оси координат имеет вид

$$J_{jk}\omega_k - \lambda\,\omega_j = 0\,, \quad j = 1, 2, 3\,. \tag{1.24}$$

Отметим, что однородная линейная алгебраическая система уравнений (1.24) допускает нахождение решений лишь с точностью до произвольного постоянного множителя, поэтому полученные решения определяют не сами угловые скорости, удовлетворяющие условию (1.23), а направления осей вращения.

Необходимым и достаточным условием существования ненулевых решений системы (1.24) является равенство нулю определителя

$$|\widehat{J} - \lambda\widehat{E}| = \begin{vmatrix} J_{11} - \lambda & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} - \lambda & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Раскрывая этот определитель, получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0\,,$$

где коэффициенты A_1, A_2, A_3 — действительные величины.

Предположим, что все корни характеристического уравнения различны и λ_ν, $\nu = 1, 2, 3$, является одним из них. Подставляя этот корень в уравнение (1.23), находим $\widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\nu = \lambda_\nu \boldsymbol{\omega}_\nu$. Умножая обе части данного соотношения скалярно на $\boldsymbol{\omega}_\nu$, в соответствии с выражением (1.19) имеем

$$\lambda_\nu |\boldsymbol{\omega}_n u|^2 = \widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\nu \cdot \boldsymbol{\omega}_\nu = 2T\,.$$

Так как $2T$ и $|\boldsymbol{\omega}_\nu|^2$ — действительные величины, то действительным является и корень $\lambda_\nu > 0$.

Покажем, что если λ_ν и λ_μ — два разных корня, то соответствующие им векторы $\boldsymbol{\omega}_\nu$ и $\boldsymbol{\omega}_\mu$ ортогональны. Действительно, так как $\widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\nu = \lambda_\nu \boldsymbol{\omega}_\nu$ и $\widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\mu = \lambda_\mu \boldsymbol{\omega}_\mu$, то

$$\widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \boldsymbol{\omega}_\nu - \widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\nu \cdot \boldsymbol{\omega}_\mu = (\lambda_\mu - \lambda_\nu)(\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \boldsymbol{\omega}_\nu)\,. \tag{1.25}$$

Полагая $\boldsymbol{\omega}_\mu = \omega_{\mu k}\,\mathbf{i}_k$, в соответствии с формулой (1.18) имеем $\widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\mu = J_{jk}\omega_{\mu k}\,\mathbf{i}_j$. Отсюда

$$\widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \boldsymbol{\omega}_\nu = J_{jk}\omega_{\mu k}\omega_{\nu j}\,, \quad \widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\nu \cdot \boldsymbol{\omega}_\mu = J_{jk}\omega_{\nu k}\omega_{\mu j}\,.$$

Меняя в первой сумме местами индексы суммирования j и k и учитывая, что $J_{jk} = J_{kj}$, получаем

$$\widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \boldsymbol{\omega}_\nu = J_{jk}\omega_{\mu j}\omega_{\nu k} = J_{jk}\omega_{\nu k}\omega_{\mu j} = \widehat{J}\boldsymbol{\omega}_\nu \cdot \boldsymbol{\omega}_\mu\,.$$

Поэтому из равенства (1.25) следует, что

$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu)(\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \boldsymbol{\omega}_\nu) = 0\,. \tag{1.26}$$

Так как по предположению $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ и все корни λ_ν различны, то векторы $\boldsymbol{\omega}_\nu$ ортогональны.

При $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, как вытекает из равенства (1.26), имеем $\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_3 = 0$ и $\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_3 = 0$. Скалярное же произведение $\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$ может быть любым. Это означает, что $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ — два произвольных вектора, ортогональных третьему $\boldsymbol{\omega}_3$. Выберем их ортогональными друг другу, то есть положим $\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = 0$. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то все три вектора $\boldsymbol{\omega}_\nu$ могут быть любыми. Будем считать их ортогональными.

От системы координат $Ox_1x_2x_3$ перейдем к новой системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$, также связанной с телом. Орты ее $\mathbf{i}_\nu'$ будем считать коллинеарными векторам $\boldsymbol{\omega}_\nu$. Оси этой системы координат называются *главными осями инерции тела* в данной точке O. Если точка O совпадает с центром масс, то оси называются *главными центральными осями инерции*.

Так как орты $\mathbf{i}'_j$ удовлетворяют уравнениям

$$\widehat{J}\,\mathbf{i}'_j = \lambda_j \mathbf{i}'_j\,, \quad j = 1, 2, 3\,,$$

то в соответствии с формулой (1.18) имеем

$$\mathbf{l} = J'_{jk}\omega'_k \mathbf{i}'_j = \widehat{J}(\omega'_j \mathbf{i}'_j) = \omega'_j \widehat{J}\,\mathbf{i}'_j = \lambda_j \omega'_j \mathbf{i}'_j\,.$$

Отсюда $J'_{jk} = 0$ при $j \neq k$ и $J'_{jj} = \lambda_j$, и, следовательно, тензор инерции в главных осях имеет вид

$$\widehat{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что операция приведения тензора инерции к диагональному виду непосредственно связана с известной задачей алгебры о нахождении собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы. В рассматриваемом случае симметричная матрица составлена из компонент тензора инерции, и ее собственными значениями и собственными векторами являются соответственно λ_ν и $\boldsymbol{\omega}_\nu$, $\nu = 1, 2, 3$.

Исходные уравнения (1.24), позволяющие определить значения λ_ν и векторы $\boldsymbol{\omega}_\nu$, были получены ранее из условия коллинеарности векторов $\mathbf{l}$ и $\boldsymbol{\omega}$. Покажем, что эти же уравнения непосредственно отражают экстремальные свойства кинетической энергии $T = (1/2)J_{jk}\omega_j\omega_k$.

Будем считать угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ постоянной по модулю. Установим, при каких направлениях вектора $\boldsymbol{\omega}$ величина T при этом имеет экстремальные значения, то есть найдем экстремумы функции T при условии, что $2\widetilde{T} = \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \mathrm{const}$.

Известно, что уравнения, позволяющие решить данную задачу на условный экстремум, имеют вид

$$\frac{\partial(T - \lambda\widetilde{T})}{\partial\omega_j} = 0\,, \quad j = 1, 2, 3\,,$$

где λ — множитель Лагранжа. Эти уравнения совпадают с системой (1.24), так как

$$\frac{\partial T}{\partial\omega_j} = J_{jk}\omega_k\,, \quad \text{а} \quad \frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\omega_j} = \omega_j\,.$$

Из формулы (1.11) следует, что $2T = J_\omega\omega^2$. По предположению $\omega^2 = \mathrm{const}$, и поэтому величина J_ω при направлениях $\boldsymbol{\omega}_\nu$ имеет экстремальные значения, равные соответственно λ_ν.

В соответствии с формулами (1.12), (1.19) имеем

$$J_\omega \omega^2 = J_{jk}\omega_j\omega_k\,,$$

откуда вытекает, что

$$J_\omega = J_{jk}\cos\beta_j\cos\beta_k\,, \tag{1.27}$$

где $\cos\beta_j = \omega_j/\omega$, $j = 1, 2, 3$, являются направляющими косинусами оси, относительно которой вычисляется момент инерции J_ω. Вдоль этой оси отложим вектор

$$\mathbf{x} = \frac{\cos\beta_j}{\sqrt{J_\omega}}\,\mathbf{i}_j = x_j\mathbf{i}_j$$

длиной $1/\sqrt{J_\omega}$. Конец этого вектора описывает поверхность, уравнение которой в соответствии с выражением (1.27) таково:

$$J_{jk}x_jx_k = 1\,. \tag{1.28}$$

Так как $|\mathbf{x}| = 1/\sqrt{J_\omega} \neq \infty$, то эта поверхность есть эллипсоид. По расстоянию от центра эллипсоида до его поверхности определяем момент инерции $J_\omega = 1/\mathbf{x}^2$. Поэтому данная поверхность, характеризующая распределение моментов инерции относительно осей, проходящих через точку O, называется *эллипсоидом инерции*.

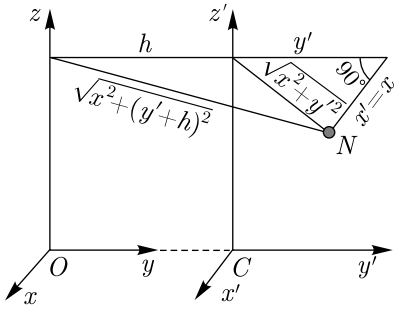

Рис. 2. Чертеж для теоремы Гюйгенса — Штейнера

Уравнение (1.28) в системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$, оси которой являются главными осями инерции, имеет вид

$$\lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \lambda_3(x_3')^2 = 1\,.$$

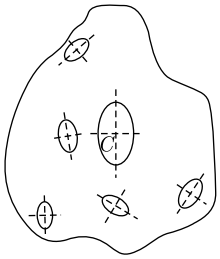

Рис. 3. Различные эллипсоиды инерции

Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные, например $\lambda_1 = \lambda_2$, то эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ эллипсоид инерции вырождается в поверхность шара.

Эллипсоид инерции, построенный для центра масс тела, называется *центральным*. Покажем, что он обладает бóльшими размерами по сравнению с эллипсоидами, построенными для других точек твердого тела. С этой целью сравним моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через точку C, а другая — через произвольную точку O. Введем две системы координат $Oxyz$ и $Cx'y'z'$, оси z и z' которых параллельны. По определению

$$J_{zz} = \int\limits_{\tau} (x^2 + y^2)\mu\, d\tau\,, \quad J_{z'z'} = \int\limits_{\tau} [(x')^2 + (y')^2]\mu\, d\tau\,.$$

Момент инерции J_{zz} не зависит от расположения точки O на оси z и выбора направления осей x и y. Поэтому для простоты будем считать, что оси y и y' лежат на одной прямой, причем $y = y' + h$, где h — расстояние между осями z и z' (рис. 2). При данном выборе осей координат момент инерции J_{zz} может быть представлен в виде

$$J_{zz} = \int\limits_{\tau} [x^2 + (y' + h)^2]\mu\, d\tau = J_{z'z'} + h^2 \int\limits_{\tau} \mu\, d\tau + 2h \int\limits_{\tau} y'\mu\, d\tau\,. \qquad (1.29)$$

Однако интеграл $\int\limits_{\tau} \mu\, d\tau = M$, а $\int\limits_{\tau} y'\mu\, d\tau = My'_c = 0$, так как начало координат совпадает с центром масс. Следовательно, формула (1.29) принимает вид

$$J_{zz} = J_{z'z'} + Mh^2\,. \qquad (1.30)$$

Это равенство является аналитическим выражением *теоремы Гюйгенса — Штейнера*.

Из выражения (1.30) следует

$$|\mathbf{x}| = 1/\sqrt{J_{zz}} < 1/\sqrt{J_{z'z'}}\,,$$

откуда и вытекает справедливость утверждения, что центральный эллипсоид инерции всегда имеет наибóльшие размеры по сравнению с размерами всех возможных эллипсоидов инерции, построенных для данного тела (рис. 3).

§ 2. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела

Положение твердого тела относительно неподвижной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$ (см. рис. 1) определяется заданием координат полюса O и углов Эйлера ψ, θ, φ, характеризующих ориентацию осей x, y, z, связанных с телом, относительно неподвижных осей ξ, η, ζ. Если на движение твердого тела не наложены никакие ограничения, то есть если оно перемешается свободно, то указанные шесть параметров могут принимать любые значения. Приняв данные параметры за обобщенные лагранжевы координаты и выразив с их помощью кинетическую и потенциальную энергии и обобщенные силы, можно составить шесть уравнений Лагранжа второго рода. Такая система шести уравнений второго порядка эквивалентна системе двенадцати уравнений первого порядка. В частности, если твердое тело движется под действием сил, имеющих потенциал, данные двенадцать уравнений могут быть записаны в виде системы канонических уравнений (6.10) главы IV. Для твердого тела этот путь составления уравнений движения оказывается более сложным, чем составление их непосредственно по теореме о движении центра масс и теореме моментов:

$$\begin{aligned} M\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} &= \textstyle\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu^{(e)} \equiv \mathbf{F}\,, \\ \frac{d\mathbf{l}_{o_1}}{dt} &= \textstyle\sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)} \equiv \mathbf{L}_{o_1}\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где n — число внешних сил, приложенных к телу. Каждое из этих двух векторных уравнений сводится к трем скалярным уравнениям второго порядка. Можно показать, что данные шесть скалярных уравнений эквивалентны системе уравнений Лагранжа второго рода.

Обозначив через ξ, η, ζ координаты центра масс относительно неподвижной системы отсчета, в соответствии с теоремой о движении центра масс получим

$$M\ddot{\xi} = F_\xi, \quad M\ddot{\eta} = F_\eta, \quad M\ddot{\zeta} = F_\zeta\,.$$

Эти три уравнения эквивалентны шести уравнениям первого порядка

$$\begin{aligned} &\dot\xi = v_\xi, && \dot\eta = v_\eta, && \dot\zeta = v_\zeta, \\ &\dot v_\xi = F_\xi/M, && \dot v_\eta = F_\eta/M, && \dot v_\zeta = F_\zeta/M\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Теорему моментов в данном случае целесообразно записать относительно системы координат $C\xi'\eta'\zeta'$, которая перемешается поступательно вместе с центром масс. Как следует из формулы (3.9) главы V, теорема моментов применительно к твердому телу записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L}\,, \quad \mathbf{L} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)}\,. \tag{2.3}$$

Будем считать, что оси системы координат $Oxyz$, связанной с телом, являются главными осями инерции. Тогда вектор $\mathbf{l}$ может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{l} = Ap\,\mathbf{i} + Bq\,\mathbf{j} + Cr\,\mathbf{k}\,, \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned} &J_{11} = J_{xx} = A\,, && J_{22} = J_{yy} = B\,, && J_{33} = J_{zz} = C\,, \\ &\omega_1 = \omega_x = p\,, && \omega_2 = \omega_y = q\,, && \omega_3 = \omega_z = r\,. \end{aligned}$$

Возможность записать вектор $\mathbf{l}$ в главных осях в простой форме (2.4) указывает на то, что и производную $d\mathbf{l}/dt$ целесообразно спроектировать на подвижные главные оси x, y, z. В соответствии с формулой (1.7) главы III имеем

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{l}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}\,, \quad \frac{d^*\mathbf{l}}{dt} = A\dot p\,\mathbf{i} + B\dot q\,\mathbf{j} + C\dot r\,\mathbf{k}\,, \tag{2.5}$$

откуда следует, что уравнение (2.3) в проекциях на главные оси x, y, z можно записать в виде

$$\begin{aligned} &A\dot p + (C - B)qr = L_x\,, \\ &B\dot q + (A - C)rp = L_y\,, \\ &C\dot r + (B - A)pq = L_z\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Эти уравнения называются *динамическими уравнениями Эйлера*. Проекции p, q, r угловой скорости ω в соответствии с формулой (4.6) главы II связаны с углами Эйлера следующим образом:

$$\begin{aligned} &p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi\,, \\ &q = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi\,, \\ &r = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

откуда находим

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)/\sin\theta = f_1(\psi,\theta,\varphi,p,q,r)\,,\\
&\dot{\varphi} = r - \operatorname{ctg}\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi) = f_2(\psi,\theta,\varphi,p,q,r)\,,\\
&\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi = f_3(\psi,\theta,\varphi,p,q,r)\,.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Соотношения (2.7) называются *кинематическими уравнениями Эйлера*.

Система уравнений (2.2), (2.6), (2.8) представляет собой 12 дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dot{v}_\xi, \dot{v}_\eta, \dot{v}_\zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}$. Интегрирование этой системы в общем случае на практике может быть выполнено только численно.

§ 3. Преобразование силовых систем, приложенных к абсолютно твердому телу[1]

Уравнения движения свободного твердого тела (2.1) не изменяются, если силы $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$ перенести вдоль линий их действия, так как главный вектор $\mathbf{F}$ и главный момент $\mathbf{L}_o$ внешних сил при этом остаются неизменными. Векторы, которые можно переносить вдоль линии их действия, не нарушая при этом движения тела, называются *скользящими векторами*. Системы сил, которые характеризуются одинаковыми главным вектором $\mathbf{F}$ и главным моментом $\mathbf{L}_{o_1}$, называются *эквивалентными*.

Особо отметим, что силу можно считать скользящим вектором только в случае, если не рассматриваются деформации, которые могут возникать в реальном твердом теле в результате приложения к нему системы сил. Так, например, железнодорожный состав можно разгонять, помещая локомотив как перед ним, так и сзади, поскольку перенос силы вдоль линии ее действия не изменяет характера движения системы. Однако внутреннее состояние ее зависит от точки приложения силы: если локомотив находится впереди состава, то он вызывает растяжение последнего, при размещении его сзади состав сжимается.

Рассмотрим параллельный перенос данной силы $\mathbf{F}_\nu$, проходящей через точку N_ν, в другую точку пространства M_ν (рис. 4 является пространственным чертежом). Для получения при этом эквивалентной системы сил в точке M_ν следует дополнительно приложить систему сил $\mathbf{F}_\nu$ и $(-\mathbf{F}_\nu)$, эквивалентную нулю. Новая система из трех сил является системой, эквивалентной исходной силе $\mathbf{F}$, приложенной в точке N_ν, так как она имеет те же главный вектор $\mathbf{F}$ и главный момент $\boldsymbol{\rho}_\nu \times \mathbf{F}_\nu$ относительно точки O_1. Теперь можно считать, что сила $\mathbf{F}_\nu$ перенесена параллельно из точки N_ν в

[1] Более компактно эти вопросы рассматриваются в главе X.

точку M_ν, однако при этом дополнительно возникает система сил, состоящая из двух параллельных и противоположно направленных векторов $\mathbf{F}_\nu$ и $(-\mathbf{F}_\nu)$, линии действия которых $A_\nu B_\nu$ и $C_\nu D_\nu$ не совпадают. Подобную систему из двух сил в дальнейшем будем называть *парой сил*.

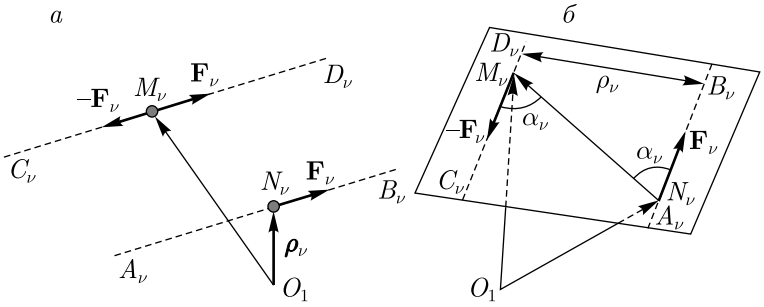

Рис. 4. Перенос силы и пара сил

Итак, при параллельном переносе силы $\mathbf{F}_\nu$ из точки N_ν в точку M_ν возникает пара сил $(\mathbf{F}_\nu, -\mathbf{F}_\nu)$.

Проанализируем некоторые свойства пары сил $(\mathbf{F}_\nu, -\mathbf{F}_\nu)$. Плоскость, в которой лежат векторы, составляющие пару, называется *плоскостью пары*. Расстояние p_ν между линиями действия сил пары называется *плечом пары*. Главный вектор пары сил равен нулю. Главный момент пары сил не зависит от выбора точки O_1. Действительно, как следует из рис. 4,*б*,

$$\overrightarrow{O_1N_\nu} \times \mathbf{F}_\nu + \overrightarrow{O_1M_\nu} \times (-\mathbf{F}_\nu) = (\overrightarrow{O_1N_\nu} - \overrightarrow{O_1M_\nu}) \times \mathbf{F}_\nu = \overrightarrow{M_\nu N_\nu} \times \mathbf{F}_\nu\,. \quad (3.1)$$

Отсюда видно, что главный момент пары сил является свободным вектором. Он называется *моментом пары*.

Таким образом, можно утверждать, что, не нарушая характера движения твердого тела, силу $\mathbf{F}_\nu$, приложенную в точке N_ν, можно перенести параллельно самой себе в точку M_ν, добавляя к этой силе пару, момент которой равен моменту исходной силы $\mathbf{F}_\nu$ относительно новой точки M_ν.

Величину момента пары можно представить выражением

$$F_\nu|\overrightarrow{M_\nu N_\nu}|\sin\alpha_\nu = F_\nu p_\nu\,, \quad (3.2)$$

а направление момента определяется векторным произведением (3.1). Как следует из формулы (3.1), момент пары направлен перпендикулярно плоскости пары, притом так, что, наблюдая с его конца, видим, что эта пара

вызывает вращение плоскости пары против хода часовой стрелки. Иначе говоря, для определения направления момента пары используется правило правого винта.

Отметим, что силы, составляющие пару, можно не только переносить вдоль линии их действия, но и поворачивать, изменяя при этом их модуль F_ν и плечо p_ν таким образом, что величина (3.2) и направление момента пары не изменяются. Кроме того, возможен перенос плоскости пары параллельно самой себе. В любом из этих случаев мы имеем нулевой главный вектор и тот же самый главный момент. Отсюда следует правило сложения пар, согласно которому суммой пар является пара, момент которой равен геометрической сумме моментов складываемых пар.

Рассмотрим теперь возможность замены заданной системы сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ простейшими эквивалентными системами.

Если линии действия указанных сил пересекаются в одной точке O, то главный момент относительно этой точки равен нулю, и система эквивалентна силе, равной главному вектору $\mathbf{F}$. Тогда говорят, что система сил сводится к *равнодействующей*. Ее линия действия проходит через точку O.

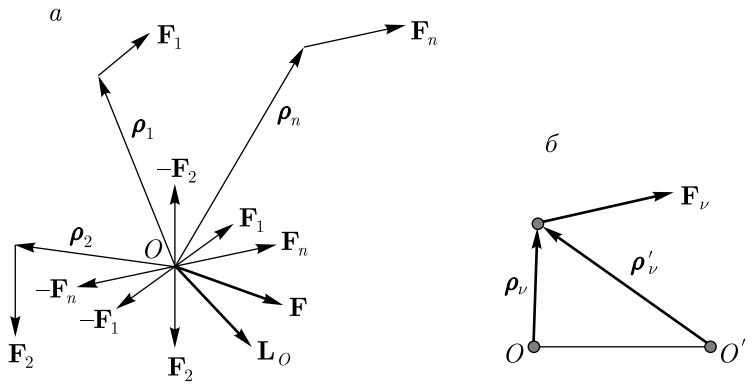

Рис. 5. Сложение пространственной системы сил

Если система сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ расположена в пространстве произвольно, то, выбирая некоторый полюс O, можно перенести все силы в эту точку; при этом возникает n пар (рис. 5,*а*). В результате исходная система сил оказывается эквивалентной *главному вектору* $\mathbf{F}$, представляющему собой геометрическую сумму всех сил, перенесенных в полюс O, и *главному моменту* $\mathbf{L}_o$, равному геометрической сумме моментов всех

возникающих пар:

$$\mathbf{F} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu \,, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{L}_o = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \mathbf{F}_\nu \,. \tag{3.4}$$

Таким образом, произвольно расположенная в пространстве система сил эквивалентна одной силе $\mathbf{F}$, линия действия которой проходит через точку O, и паре сил, момент которой равен $\mathbf{L}_o$. Это преобразование называется *приведением системы сил к одному центру*.

Установим, как влияет изменение центра приведения на векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{L}_o$. Пусть в качестве полюса вместо точки O принята точка O'. Тогда $\mathbf{F}' = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu$, что после сравнения с выражением (3.3) позволяет утверждать, что главный вектор системы сил при изменении центра приведения не изменяется.

Для главного момента системы сил относительно точки O' имеем (рис. 5,*б*)

$$\mathbf{L}_{o'} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{\rho}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{\rho}_\nu + \overrightarrow{O'O}) \times \mathbf{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{\rho}_\nu \times \mathbf{F}_\nu + \overrightarrow{O'O} \times \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu \,,$$

откуда в соответствии с формулами (3.3) и (3.4)

$$\mathbf{L}_{o'} = \mathbf{L}_o + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{F} \,. \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что главный момент системы сил при выборе нового центра приведения изменяется на величину момента главного вектора $\mathbf{F}$, линия действия которого проходит через точку O, относительно нового центра O'. Это, в частности, означает, что если главный вектор $\mathbf{F} = 0$, то $\mathbf{L}_o = \mathbf{L}_{o'} = \mathbf{L}$, то есть главный момент системы одинаков для всех точек пространства. Последнее вытекает также из того, что при $\mathbf{F} = 0$ система сил приводится к одной паре, момент которой, как было показано, не зависит от выбора точки приведения, то есть является свободным вектором.

Мы установили, что главный вектор $\mathbf{F}$ является *инвариантом (первым) относительно центра приведения*. Умножая равенство (3.5) скалярно на орт $\mathbf{F}^0$, получаем

$$\mathbf{L}_{o'} \cdot \mathbf{F}^0 = \mathbf{L}_o \cdot \mathbf{F}^0 \,, \qquad \mathbf{F}^0 = \mathbf{F}/|\mathbf{F}|,$$

так как $(\overrightarrow{O'O} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^0 = 0$. Следовательно, *вторым инвариантом системы сил относительно центра приведения* является проекция главного момента на направление главного вектора.

Существование второго инварианта системы сил означает, что главный момент имеет наименьшую величину, если его направление совпадает с направлением главного вектора. Найдем геометрическое место точек приведения, обладающих этим свойством.

В главе III было рассмотрено сложение движений твердого тела. Там же было показано, что суммарная угловая скорость $\mathbf{\Omega} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_k$ не зависит от выбора полюса, а вектор $\mathbf{V}$, характеризующий результирующее поступательное движение твердого тела, определяется выбором полюса. Зависимость эта выражается формулой (3.6) главы III. Сравнивая ее с формулой (3.5), видим, что существует полная аналогия между векторами $\mathbf{\Omega}, \mathbf{V}$ и $\mathbf{F}, \mathbf{L}_o$. Поэтому соответствующий материал будет изложен здесь кратко.

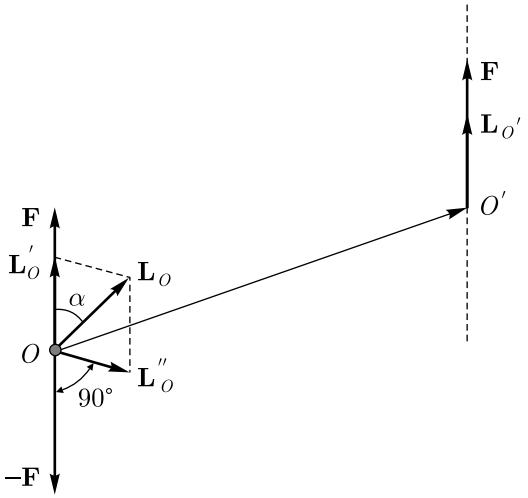

Рис. 6. Построение динамы

Пусть в точке O главный вектор $\mathbf{F}$ и главный момент $\mathbf{L}_o$ расположены под углом α (рис. 6). Разложим вектор $\mathbf{L}_o$ на две взаимно перпендикулярные составляющие: $\mathbf{L}_o = \mathbf{L}'_o + \mathbf{L}''_o$, из которых $\mathbf{L}'_o$ коллинеарна главному вектору $\mathbf{F}$. Построим точку O' с радиус-вектором $\overrightarrow{OO'}$, удовлетворяющим соотношению

$$\mathbf{L}''_o = \overrightarrow{OO'} \times \mathbf{F}\,. \tag{3.6}$$

Если теперь точку O' принять за новый центр приведения, то система сил сведется к главному вектору $\mathbf{F}$, являющемуся инвариантом, и главному

моменту, определяемому по формуле (3.5):

$$\mathbf{L}_{o'} = \mathbf{L}'_o + \mathbf{L}''_o + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{F}\,.$$

Отсюда с учетом соотношения (3.6) получаем

$$\mathbf{L}_{o'} = \mathbf{L}'_o\,.$$

Однако вектор $\mathbf{L}'_o$ по построению коллинеарен вектору $\mathbf{F}$, значит нами найдена такая точка O' пространства, для которой главный момент и главный вектор коллинеарны. Подобная совокупность главного вектора и главного момента называется *винтом*, или *динамой*. Очевидно, что к динаме сводится система сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ при расположении точек приведения на прямой, проходящей через точку O' параллельно вектору $\mathbf{F}$. Эта прямая называется *центральной осью системы сил*. В соответствии с формулой (4.7) главы III уравнение указанной оси имеет вид

$$\frac{L_x + F_y z - F_z y}{F_x} = \frac{L_y + F_z x - F_x z}{F_y} = \frac{L_z + F_x y - F_y x}{F_z}\,. \tag{3.7}$$

Если векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{L}_o$ ортогональны, то при приведении данной системы сил к точке O' главный момент равен нулю. Следовательно, в данном случае уравнение (3.7) является уравнением прямой, вдоль которой приложена равнодействующая исходной системы сил.

§ 4. Уравнения статики твердого тела[2]

Будем считать, что твердое тело находится в покое, или в равновесии, если скорости всех его точек в некотором промежутке времени тождественно равны нулю, то есть

$$\mathbf{v} \equiv 0\,. \tag{4.1}$$

Докажем, что для равновесия твердого тела необходимо и достаточно обращения в нуль в этом промежутке времени главного вектора и главного момента внешних сил относительно его центра масс, а также обращения в нуль в начальный момент скорости центра масс и угловой скорости, то есть

$$\mathbf{F} \equiv 0, \quad \mathbf{L} \equiv 0\,, \quad \mathbf{v}_c(0) = 0\,, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = 0\,. \tag{4.2}$$

Рассмотрим необходимость этих условий, то есть, предполагая равенство нулю скоростей всех точек тела, докажем выполнение равенств (4.2).

[2]Более подробно уравнения статики обсуждаются в главе X.

Для твердого тела согласно определению (1.6) скорость центра масс выражается формулой

$$\mathbf{v}_c = \int\limits_{\tau} \mu v \, d\tau / M \,,$$

откуда на основании выполнения условий (4.1) имеем $\mathbf{v}_c \equiv 0$, а значит, и $\mathbf{v}_c(0) = 0$. Из теоремы о движении центра масс (2.1) получаем, что $\mathbf{F} \equiv 0$. Если за полюс принять центр масс, то скорость любой точки тела может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \,, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки относительно полюса C. Однако $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_c$ обращаются в нуль, поэтому $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \equiv 0$. Так как рассматривается произвольная точка твердого тела, то последнее равенство позволяет заключить, что $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$, то есть и $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$.

Из динамических уравнений Эйлера (2.6) следует, что если угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ тождественно равна нулю в некотором промежутке времени, то $L_x = L_y = L_z \equiv 0$, то есть $\mathbf{L} \equiv 0$. Итак, необходимость условий (4.2) доказана.

Из теоремы о движении центра масс (2.1) и динамических уравнений Эйлера (2.6) следует, что при выполнении условий (4.2)

$$\mathbf{v}_c \equiv 0 \,, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv 0 \,,$$

а это согласно (4.3) означает, что выполняется соотношение (4.1). Тем самым доказана достаточность условий (4.2).

Формула (3.5) показывает, что при выполнении условий (4.2) главный момент внешних сил относительно произвольной точки O, принятой за полюс, обращается в нуль. Таким образом, при равновесии имеем

$$\mathbf{F} = 0 \,, \quad \mathbf{L}_o = 0 \,,$$

или в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu x}^{(e)} = 0 \,, && \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu y}^{(e)} = 0 \,, && \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu z}^{(e)} = 0 \,, \\ &\sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)})_x = 0 \,, && \sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)})_y = 0 \,, && \sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)})_z = 0 \,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Уравнения (4.4) называются *уравнениями статики твердого тела в декартовых координатах.*

Если на тело наложены связи, то в соответствии с принципом освобождаемости его можно рассматривать как свободное, относя реакции связей к внешним силам, действующим на тело. Как следует из уравнений (4.4), при действии на тело заданной системы внешних сил они позволяют определить не более шести неизвестных, характеризующих реакции связей.

§ 5. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси можно рассматривать как движение тела при наложенных на него связях. В этом случае тело имеет одну степень свободы, и дифференциальное уравнение его движения имеет вид (3.4) главы V.

Динамические реакции при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть тело закреплено в точках A и A' оси z (рис. 7) и вращается вокруг нее по закону $\varphi = \varphi(t)$. На тело действует заданная система сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, для которой главный вектор и главный момент относительно точки O, лежащей на оси вращения, равны соответственно $\mathbf{F}$ и $\mathbf{L}$. Требуется определить реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$, развиваемые в точках закрепления A и A'.

На основании принципа освобождаемости уравнения (2.1) в данном случае принимают вид

$$\begin{aligned} M\tfrac{d\mathbf{v}_c}{dt} &= \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{R}'\,, \\ \tfrac{d\mathbf{l}}{dt} &= \mathbf{L} + \overrightarrow{OA} \times \mathbf{R} + \overrightarrow{OA'} \times \mathbf{R}'\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Эти уравнения целесообразно спроектировать на оси подвижной системы координат $Oxyz$. Ось z направлена по оси вращения. Согласно формуле (1.7) главы III имеем

$$\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \frac{d^*\mathbf{v}_c}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c\,, \quad \frac{d^*\mathbf{v}_c}{dt} = \dot{v}_{c_x}\mathbf{i} + \dot{v}_{c_y}\mathbf{j} + \dot{v}_{c_z}\mathbf{k}\,,$$
$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{l}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}\,, \quad \frac{d^*\mathbf{l}}{dt} = \dot{l}_x\mathbf{i} + \dot{l}_y\mathbf{j} + \dot{l}_z\mathbf{k}\,.$$

Так как

$$\mathbf{v}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = -\dot{\varphi} y_c\,\mathbf{i} + \dot{\varphi}\, x_c\,\mathbf{j}\,,$$

то

$$\dot{v}_{c_x} = -\ddot{\varphi} y_c\,, \quad \dot{v}_{c_y} = \ddot{\varphi} x_c\,, \quad \dot{v}_{c_z} = 0\,.$$

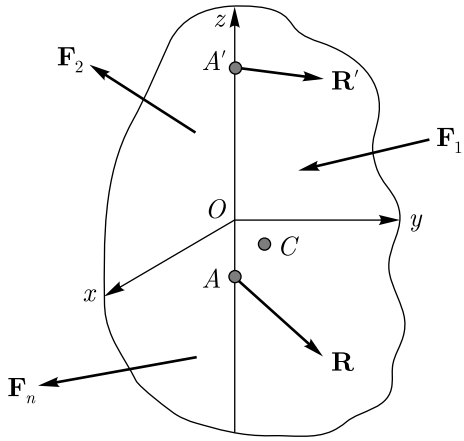

Рис. 7. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вектор $\mathbf{l}$ задается формулами (1.17). В данном случае $\omega_1 = \omega_2 = 0$, и поэтому

$$l_x = l_1 = J_{13}\omega_3\,, \quad l_y = l_2 = J_{23}\omega_3\,, \quad l_z = l_3 = J_{33}\omega_3\,.$$

Входящие сюда компоненты тензора инерции вычисляются по формулам (1.16). Обозначая

$$J_{13} = -J_{xz}\,, \quad J_{23} = -J_{yz}\,, \quad J_{33} = J_{zz}\,, \quad \omega_3 = \omega_z = \dot{\varphi}\,,$$

получаем

$$l_x = -J_{xz}\dot{\varphi}\,, \quad l_y = -J_{yz}\dot{\varphi}\,, \quad l_z = J_{zz}\dot{\varphi}\,.$$

Положим также $\overrightarrow{OA} = -a\,\mathbf{k}$ и $\overrightarrow{OA'} = a'\,\mathbf{k}$.

Из приведенных формул следует, что уравнения (5.1) в проекциях на подвижные оси x, y, z имеют вид

$$-M(\ddot{\varphi}y_c + \dot{\varphi}^2 x_c) = F_x + R_x + R'_x\,, \tag{5.2}$$

$$M(\ddot{\varphi}x_c - \dot{\varphi}^2 y_c) = F_y + R_y + R'_y\,, \tag{5.3}$$

$$0 = F_z + R_z + R'_z\,, \tag{5.4}$$

$$-J_{xz}\ddot{\varphi} + J_{yz}\dot{\varphi}^2 = L_x + a\,R_y - a'\,R'_y\,, \tag{5.5}$$

$$-J_{yz}\ddot{\varphi} - J_{xz}\ddot{\varphi}^{\,2} = L_y - a\,R_x + a'\,R'_x\,, \tag{5.6}$$

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = L_z\,. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.7) не содержит неизвестных реакций и является дифференциальным уравнением вращения. Оно совпадает с уравнением (3.4) главы V. Оставшиеся уравнения (5.2)–(5.6) позволяют найти неизвестные составляющие реакций R_x, R_y, R'_x, R'_y и определить из уравнения (5.4) сумму $R_z + R'_z$. Если в точке A допускается, а в точке A' не допускается перемещение тела вдоль оси z, то $R_z = 0$, а $R'_z = -F_z$. При этом реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ определяются однозначно.

Из уравнений (5.2), (5.3) видно, что их левые части обращаются в нуль, если центр масс лежит на оси вращения, то есть если $x_c = y_c = 0$ (случай *статической уравновешенности тела*). Такую ось будем называть *центральной осью*. Из уравнений (5.5), (5.6) следует, что если ось z является главной осью инерции и, следовательно, $J_{xz} = J_{yz} = 0$, то левые части этих уравнений также равны нулю. Итак, если ось вращения является главной центральной осью, то уравнения (5.2)–(5.6) приобретают вид

$$\begin{aligned}
&F_x + R_x + R'_x = 0\,,\\
&F_y + R_y + R'_y = 0\,,\\
&F_z + R_z + R'_z = 0\,,\\
&L_x + a\,R_y - a'\,R'_y = 0\,,\\
&L_y - a\,R_x + a'\,R'_x = 0\,.
\end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что в данном случае вращение твердого тела, характеризуемое угловой скоростью $\dot{\varphi}$ и угловым ускорением $\ddot{\varphi}$, никак не сказывается на величине реакций. Тело, вращающееся вокруг такой оси, называется *динамически уравновешенным*.

Физический маятник. Рассмотрим случай, когда твердое тело вращается вокруг горизонтальной оси z лишь под действием силы тяжести (рис. 8). Угол поворота φ будем отсчитывать от положения, при котором центр тяжести находится в крайней нижней точке. Расстояние от центра тяжести до оси вращения обозначим через a. Момент L_z, стремящийся вернуть маятник в положение, при котором $\varphi = 0$, равен

$$L_z = -Mga\sin\varphi\,.$$

При подстановке этого выражения в уравнение (5.7) получаем следующее дифференциальное уравнение движения физического маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\sin\varphi = 0\,, \tag{5.8}$$

где $k^2 = Mga/J_{zz}$. Интересно отметить, что это нелинейное дифференциальное уравнение совпадает с уравнением колебаний математического

маятника (2.15) главы VI

$$\ddot{\varphi} + k_1^2 \sin\varphi = 0\,, \quad \text{где} \quad k_1^2 = \mathrm{g}/l\,.$$

Длина математического маятника $l = J_{zz}/(Ma)$, соответствующая условию $k_1 = k$, называется *приведенной длиной физического маятника*. Математический маятник такой длины колеблется синхронно с исходным физическим маятником.

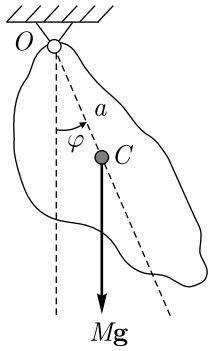

Рис. 8. Физический маятник

Если отклонения малы, то из уравнения (5.8) получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{M\mathrm{g}a}{J_{zz}}\,\varphi = 0\,,$$

из которого следует, что период малых колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{zz}}{M\mathrm{g}a}}\,,$$

откуда $J_{zz} = M\mathrm{g}aT^2/(4\pi^2)$.

Эта формула удобна для экспериментального определения осевого момента инерции. Данным способом можно пользоваться для нахождения моментов инерции неоднородных тел сложной формы. Определив момент инерции J_{zz}, по теореме Гюйгенса — Штейнера (1.30) найдем момент инерции $J_{z'z'}$ относительно оси, проходящей через центр масс. Тем самым по формуле (1.30) можно будет найти момент инерции относительно любой другой параллельной оси.

§ 6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

При вращении твердого тела вокруг неподвижной точки O дифференциальные уравнения его движения могут быть получены из теоремы моментов (2.3), записанной относительно точки O. Будем считать, что оси системы координат $Oxyz$, связанной с телом, являются главными осями инерции. При этом уравнение (2.3) в проекциях на подвижные оси записывается в виде (2.6). Присоединяя к уравнениям (2.6) кинематические уравнения Эйлера (2.7), получаем замкнутую систему уравнений (2.6), (2.8). Ее интегрирование сопряжено с большими трудностями. Достаточно сказать, что даже при движении под действием однородного поля силы тяжести общее решение этой системы удается получить только для классических случаев — Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Случай Эйлера. Рассматриваемому случаю соответствует предположение, что главный момент внешних сил, действующих на тело, равен нулю. Это может быть, в частности, осуществлено, если твердое тело, подверженное действию только однородного поля силы тяжести, закреплено в центре масс, то есть точка опоры совпадает с центром тяжести.

Начнем интегрирование уравнений движения с простого случая, когда $A = B$, что соответствует эллипсоиду инерции, являющемуся эллипсоидом вращения. Это условно выполняется для однородных тел с осью симметрии. Тогда интегрирование системы (2.6), (2.8) удается довести до конца в элементарных функциях.

Так как в рассматриваемой задаче $\mathbf{L} = 0$, то на основании теоремы моментов можно утверждать, что вектор кинетического момента не изменяется.

Направим неподвижную ось ζ вдоль вектора $\mathbf{l}$. Тогда $\mathbf{l} = l\mathbf{k}_o$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} l_x &\equiv Ap = l\sin\theta\sin\varphi\,, \\ l_y &\equiv Aq = l\sin\theta\cos\varphi\,, \\ l_z &\equiv Cr = l\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Поскольку $A = B$, а $L_z = 0$, из третьего уравнения системы (2.6) получаем $r = r_0 = \text{const}$, а из последнего уравнения системы (6.1) имеем $\theta = \theta_0 = \text{const}$. Отсюда и из системы (2.7) следует, что

$$p = \dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi\,,$$

поэтому первое уравнение системы (6.1) принимает вид

$$A\dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi = l\sin\theta_0\sin\varphi\,,$$

то есть угловая скорость прецессии постоянна: $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \mathrm{const}$.

Далее, из последнего уравнения системы (2.7) вытекает, что $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \mathrm{const}$. На основании полученного

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0\,, \quad \psi = \dot{\psi}_0 t + \psi_0\,, \quad \theta = \theta_0\,.$$

Такое движение называется *регулярной прецессией*. В частности, подобное движение совершает гироскоп. *Гироскопом* принято называть быстро вращающееся вокруг оси симметрии однородное тело. Технически гироскоп можно создать, применяя *карданов подвес* (рис. 9)[3].

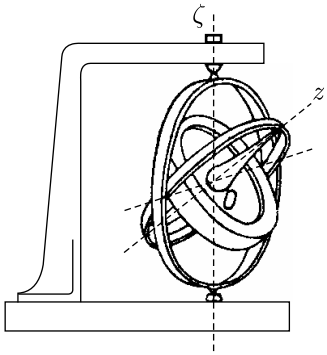

Рис. 9. Гироскоп

Перейдем к рассмотрению общего случая движения твердого тела при отсутствии внешних моментов, предполагая, что моменты инерции связаны неравенством $A > B > C$. Уравнения Эйлера (2.6) при $\mathbf{L} = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)\,qr &= 0\,,\\ B\dot{q} + (A - C)\,rp &= 0\,,\\ C\dot{r} + (B - A)\,pq &= 0\,. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Уравнения (6.2) заведомо должны допускать существование интеграла энергии и интеграла, выражающего постоянство кинетического момента

[3]Подробно теория гироскопов изложена в книге *Ишлинский А. Ю., Борзов В. И., Степаненко Н. П.* Лекции по теории гироскопов / Учебн. пособие для студентов высших учебных заведений. М.: Изд-во МГУ, 1983. 248 с.

системы:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h\,, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2\,. \tag{6.3}$$

Естественно, что интегралы (6.3) могут быть получены и непосредственно из уравнений (6.2). Для этого достаточно умножить эти уравнения соответственно на p, q, r (или на Ap, Bq, Cr), просуммировать и проинтегрировать полученные комбинации.

Определяя из уравнений (6.3) значения p^2 и r^2, имеем

$$p^2 = \frac{l^2 - Ch - Bq^2(B-C)}{A(A-C)}\,, \quad r^2 = \frac{Ah - l^2 - Bq^2(A-B)}{C(A-C)}\,.$$

Если ввести обозначения

$$\lambda_1^2 = \frac{l^2 - Ch}{B(B-C)}\,, \quad \lambda_2^2 = \frac{Ah - l^2}{B(A-B)}\,, \tag{6.4}$$

то последние выражения можно переписать в виде

$$p^2 = \frac{B(B-C)}{A(A-C)}\,(\lambda_1^2 - q^2)\,, \quad r^2 = \frac{B(A-B)}{C(A-C)}\,(\lambda_2^2 - q^2)\,. \tag{6.5}$$

Составим теперь дифференциальное уравнение для функции q. С этой целью подставим выражения (6.5) во второе уравнение системы (6.2). Тогда

$$\frac{dq}{dt} = \pm\sigma\sqrt{(\lambda_1^2 - q^2)(\lambda_2^2 - q^2)}\,, \quad \sigma = \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}\,.$$

После разделения переменных и интегрирования находим

$$\pm(\sigma t + \alpha) = \int\limits_0^q \frac{dq}{\sqrt{(\lambda_1^2 - q^2)(\lambda_2^2 - q^2)}}\,, \tag{6.6}$$

где α — произвольная постоянная. Полученная квадратура сводится к эллиптическому интегралу первого рода в форме Якоби. Действительно, пусть для определенности $\lambda_1 > \lambda_2$. Тогда, переходя к переменной $x = q/\lambda_2$, получаем

$$\int\limits_0^q \frac{dq}{\sqrt{(\lambda_1^2 - q^2)(\lambda_2^2 - q^2)}} = \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}\,,$$

где $k^2 = \lambda_2^2/\lambda_1^2 < 1$.

Для записи этого эллиптического интеграла в форме Лежандра следует выполнить еще одну замену, полагая $x = \sin\Phi$, в результате чего имеем

$$\int\limits_0^q \frac{dq}{\sqrt{(\lambda_1^2 - q^2)(\lambda_2^2 - q^2)}} = \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_0^\Phi \frac{d\Phi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\Phi)}}\,.$$

Интеграл

$$u = \int\limits_0^\Phi \frac{d\Phi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\Phi)}} \tag{6.7}$$

является функцией переменных k и Φ: $u = F(k, \Phi)$. При $\Phi = \pi/2$ эллиптический интеграл называется *полным*:

$$K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\Phi)}}\,.$$

Для функции (6.7) можно найти обратную, определяющую зависимость Φ от u. Она называется *амплитудой* и обозначается $\Phi = \operatorname{am} u$.

Якоби ввел еще три функции, называемые *эллиптическими функциями* u:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn} u = \sin\Phi = \sin(\operatorname{am} u)\,,\\ &\operatorname{cn} u = \cos\Phi = \cos(\operatorname{am} u)\,,\\ &\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2\sin^2\Phi} = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2 u}\,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Характер изменения эллиптических функций при разных значениях параметра k представлен на рис. 10.

Из определений (6.8) вытекает периодичность эллиптических функций:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn}(u + 4K) = \operatorname{sn} u\,, \quad \operatorname{cn}(u + 4K) = \operatorname{cn} u\,,\\ &\operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u\,, \quad \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1\,. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Вернемся к рассмотрению зависимости (6.6), которую теперь можно переписать в виде

$$u = \pm(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)\,, \quad \alpha_1 = \alpha\lambda_1\,.$$

Тогда функция Якоби $\operatorname{sn} u$ выражается следующим образом:

$$\operatorname{sn} u = \pm\operatorname{sn}(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)\,.$$

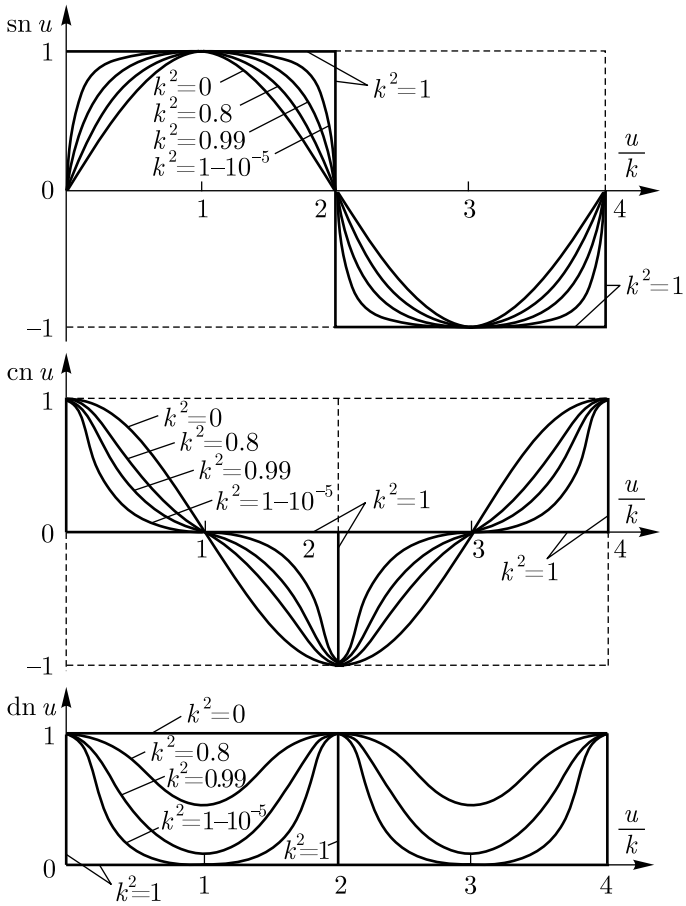

Рис. 10. Эллиптические функции Якоби

Но так как $\operatorname{sn} u = \sin\Phi$ и согласно формулам перехода $q = \lambda_2 \sin\Phi$, то это же соотношение можно представить в виде

$$q = \pm\lambda_2 \operatorname{sn}(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)\,. \tag{6.10}$$

Пользуясь формулами (6.5), (6.8), (6.9), для двух оставшихся проекций угловой скорости получаем

$$\begin{aligned} p &= \pm\lambda_1\sqrt{\tfrac{B(B-C)}{A(A-C)}}\operatorname{dn}(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)\,,\\ r &= \pm\lambda_2\sqrt{\tfrac{B(A-B)}{C(A-C)}}\operatorname{cn}(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)\,. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Если $\lambda_1 < \lambda_2$, то аналогично находим

$$\begin{aligned} p &= \pm\lambda_1\sqrt{\tfrac{B(B-C)}{A(A-C)}}\,\mathrm{cn}\,(\sigma\lambda_2 t + \alpha_2)\,, \\ q &= \pm\lambda_1\,\mathrm{sn}\,(\sigma\lambda_2 t + \alpha_2)\,, \\ r &= \pm\lambda_2\sqrt{\tfrac{B(A-B)}{C(A-C)}}\,\mathrm{dn}\,(\sigma\lambda_2 t + \alpha_2)\,. \end{aligned} \tag{6.12}$$

В этих решениях произвольными постоянными являются λ_1, λ_2 и α_1 (или α_2). Знаки в их правых частях определяются начальными условиями. На основании свойств эллиптических функций (6.9) полученные решения имеют период $4K$. Отметим, что здесь установлена периодичность угловой скорости относительно движущегося твердого тела, а не относительно абсолютного пространства.

Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае проекции угловой скорости p и r, как следует из формул (6.5), связаны линейным соотношением

$$p = \pm\sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}\,r\,.$$

Для определения функции q подставим величины p и r, взятые из (6.5), во второе уравнение системы (6.2), в результате чего имеем

$$\frac{dq}{dt} = \pm\sigma\,(\lambda^2 - q^2)\,, \quad \sigma = \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}\,.$$

Выполним замену $q = \lambda s$, где $0 \leqslant s \leqslant 1$. Тогда после разделения переменных

$$\frac{ds}{1-s^2} = \pm\sigma\lambda\,dt\,.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+s}{1-s} = \pm(\sigma\lambda t + \alpha)\,,$$

где α — произвольная постоянная. Отсюда можно определить функцию s:

$$s = \frac{e^{\pm 2(\sigma\lambda t+\alpha)} - 1}{e^{\pm 2(\sigma\lambda t+\alpha)} + 1} \equiv \pm\frac{e^{\sigma\lambda t+\alpha} - e^{-(\sigma\lambda t+\alpha)}}{e^{\sigma\lambda t+\alpha} + e^{-(\sigma\lambda t+\alpha)}}$$

или, пользуясь определением гиперболического тангенса, записать

$$s = \pm\mathrm{th}\,(\sigma\lambda t + \alpha)\,.$$

Теперь можно вернуться к анализу функции q. Воспользовавшись формулами (6.5), при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ получим следующий закон изменения во времени проекций угловой скорости:

$$\begin{aligned} q &= \pm\lambda \operatorname{th}(\sigma\lambda t + \alpha)\,, \\ p &= \pm\sqrt{\tfrac{B(B-C)}{A(A-C)}}\,\tfrac{\lambda}{\operatorname{ch}(\sigma\lambda t+\alpha)}\,, \\ r &= \pm\sqrt{\tfrac{B(A-B)}{C(A-C)}}\,\tfrac{\lambda}{\operatorname{ch}(\sigma\lambda t+\alpha)}\,. \end{aligned}$$

Очевидно, что при $t \to \infty$ имеем $q \to \pm\lambda,\ p \to 0,\ r \to 0$, то есть в пределе тело вращается вокруг оси y.

До сих пор мы считали, что λ_1 и λ_2 являются положительными числами. Рассмотрим случай, когда одно из них обращается в нуль. Покажем, что тогда тело будет равномерно вращаться вокруг одной из главных осей. Напомним, что величины λ_1 и λ_2 связаны соотношениями (6.4) с произвольными постоянными l и h, определяемыми начальными скоростями p_0, q_0, r_0 по формулам (6.3):

$$\begin{aligned} h &= Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2\,, \\ l^2 &= A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2\,. \end{aligned}$$

Проанализируем величину

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{h} = \frac{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2} &= \frac{A(Ap^2 + B\frac{B}{A}q^2 + C\frac{C}{A}r^2)}{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2} = \\ &= \frac{A(Ap_0^2 + B\frac{B}{A}q_0^2 + C\frac{C}{A}r_0^2)}{Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2}\,. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Из (6.4) видно, что $\lambda_2 = 0$ при $Ah - l^2 = 0$. Однако обращение в нуль этого выражения, как следует из (6.13), возможно лишь при $q = q_0 = 0$, $r = r_0 = 0$, $p = p_0 = \mathrm{const}$, то есть при равномерном вращении тела вокруг оси x.

Рассуждая аналогично в случае $\lambda_1 = 0$, имеем

$$\frac{l^2}{h} = \frac{C(A\frac{A}{C}p^2 + B\frac{B}{C}q^2 + Cr^2)}{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2} = \frac{C(A\frac{A}{C}p_0^2 + B\frac{B}{C}q_0^2 + Cr_0^2)}{Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2}\,,$$

откуда заключаем, что $\lambda_1 = 0$ при $l^2 - Ch = 0$, то есть при $p = p_0 = 0$, $q = q_0 = 0$, $r = r_0 = \mathrm{const}$, чему соответствует равномерное вращение вокруг оси z.

Можно убедиться, что обращение в нуль величины λ_1 или λ_2 является как необходимым, так и достаточным условием равномерного вращения тела вокруг соответствующих осей.

Отметим, что при наложении определенных ограничений на начальные условия, в частности при $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$, интегрирование динамических уравнений Эйлера значительно упрощается, и величины p, q, r удается выразить через элементарные функции.

Перейдем к нахождению углов Эйлера ψ, θ, φ как функций времени. После получения выражений для p, q, r удобно воспользоваться соотношениями (6.1), из которых можно определить углы φ и θ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Ap}{Bq}\,, \quad \cos\theta = \frac{Cr}{l}\,. \tag{6.14}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (2.8). Его правую часть можно выразить через функции p и q. Из соотношений (6.1) следует, что

$$\begin{aligned} &Ap^2 + Bq^2 = l\sin\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi)\,,\\ &A^2p^2 + B^2q^2 = l^2\sin^2\theta\,, \end{aligned}$$

откуда

$$\dot\psi = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta} = l\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\,.$$

Используя это выражение, угол ψ можно представить в виде квадратуры

$$\psi = l\int\limits_0^t \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\,dt + \psi_0\,, \tag{6.15}$$

для вычисления которой в подынтегральное выражение следует подставить найденные ранее функции p и q. Напомним, что при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$ они выражаются через элементарные функции. В случае $\lambda_1 > \lambda_2 \neq 0$ с использованием формул (6.10), (6.11) получаем ($k^2 = \lambda_2^2/\lambda_1^2$)

$$\begin{gathered} \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} = \\ = \frac{\lambda_1^2\frac{B(B-C)}{A-C}[1 - k^2\operatorname{sn}^2(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)] + B\lambda_2^2\operatorname{sn}^2(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)}{\lambda_1^2\frac{AB(B-C)}{A-C}[1 - k^2\operatorname{sn}^2(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)] + B^2\lambda_2^2\operatorname{sn}^2(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)} = \\ = \frac{B - C + (A-B)k^2\operatorname{sn}^2(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)}{A(B-C) + C(A-B)k^2\operatorname{sn}^2(\sigma\lambda_1 t + \alpha_1)}\,, \end{gathered}$$

что позволяет выразить угол ψ через интеграл, содержащий эллиптическую функцию $\operatorname{sn} u$, по формуле (6.15). Аналогично для случая $\lambda_2 > \lambda_1 \neq 0$ с помощью формул (6.12) имеем

$$\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} = \frac{B - C + (A-B)\operatorname{sn}^2(\sigma\lambda_2 t + \alpha_2)}{A(B-C) + C(A-B)\operatorname{sn}^2(\sigma\lambda_2 t + \alpha_2)}\,.$$

В общее решение системы шестого порядка (2.6), (2.8) входят четыре произвольные постоянные. Например, для случая $\lambda_1 > \lambda_2$ в формулах (6.10), (6.11), (6.14), (6.15) такими постоянными являются λ_1, λ_2, α_1, ψ_0. Величины ψ_0 и θ_0 не вошли в решение в связи с тем, что для простоты рассмотрения неподвижная ось ζ была направлена вдоль вектора $\mathbf{l}$.

Случай Лагранжа. Лагранжем рассмотрен случай, когда эллипсоид инерции тела, соответствующий неподвижной точке, есть эллипсоид вращения, а центр тяжести C лежит на его оси динамической симметрии (рис. 11). Эти условия выполняются, например, если однородное тело закреплено в одной из точек его оси симметрии.

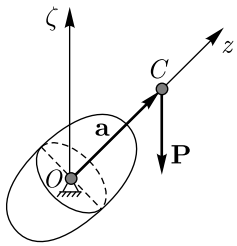

Рис. 11. Случай Лагранжа

Обозначим через $\mathbf{a}$ радиус-вектор центра тяжести тела относительно неподвижной точки O, а через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — направляющие косинусы единичного вектора $\mathbf{k}_o$ вертикальной оси ζ относительно подвижных осей x, y, z. В соответствии с выражениями (6.1) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin\theta \sin\varphi\,, \\ \gamma_2 &= \sin\theta \cos\varphi\,, \\ \gamma_3 &= \cos\theta\,. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Момент силы тяжести $\mathbf{P}$ относительно неподвижной точки можно представить в виде

$$\mathbf{L} = \mathbf{a} \times \mathbf{P} = -P \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & a \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = P \begin{vmatrix} \mathbf{i}_o & \mathbf{j}_o & \mathbf{k}_o \\ a_\xi & a_\eta & a_\zeta \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \tag{6.17}$$

где $\mathbf{i}_o$, $\mathbf{j}_o$, $\mathbf{k}_o$ — орты системы $O\xi\eta\zeta$.

По предположению, сделанному Лагранжем, моменты инерции относительно осей x и y равны: $A = B$. Поэтому динамические уравнения Эйлера (2.6) таковы:

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + (C - A)\, qr = Pa\gamma_2\,, \\ &A\dot{q} + (A - C)\, rp = -Pa\gamma_1\,, \\ &C\dot{r} = 0\,. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Из третьего уравнения этой системы

$$Cr = C_1\,. \tag{6.19}$$

Так как сила тяжести, действующая на тело, имеет потенциал, то существует интеграл энергии

$$T + \Pi = h\,, \tag{6.20}$$

где

$$\Pi = Pa\cos\theta\,, \tag{6.21}$$

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2 \equiv A(\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2\,. \tag{6.22}$$

Теорема моментов (2.3) в проекции па неподвижную ось ζ имеет вид $dl_\zeta/dt = L_\zeta$. Из формулы (6.17) следует, что $L_\zeta = 0$, и поэтому

$$\begin{aligned} &l_\zeta = \mathbf{l}\cdot\mathbf{k}_o = (Ap\,\mathbf{i} + Aq\,\mathbf{j} + Cr\,\mathbf{k})\cdot(\gamma_1\,\mathbf{i} + \gamma_2\,\mathbf{j} + \gamma_3\,\mathbf{k}) = \\ &= A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3 = C_2 = \mathrm{const}\,. \end{aligned}$$

Используя выражения (2.7) и (6.16), находим

$$A\dot{\psi}\sin^2\theta + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta = C_2\,. \tag{6.23}$$

Естественно, что интегралы (6.20), (6.23) можно было бы получить и непосредственно из рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (6.18).

Интересно отметить, что если вместо анализируемой системы составить уравнения Лагранжа второго рода, то интегралы (6.19) и (6.23) получаем как циклические интегралы, так как функция Лагранжа $L = T - \Pi$ в данной задаче не зависит от обобщенных координат φ и ψ, и поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \mathrm{const}\,, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = \mathrm{const}\,.$$

Покажем, что из полученных интегралов можно составить дифференциальное уравнение относительно угла нутации θ. С этой целью из формулы (6.23) с учетом интеграла (6.19) находим угловую скорость $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{C_2 - C_1\cos\theta}{A\sin^2\theta}\,. \tag{6.24}$$

Подставляя эту величину в интеграл энергии (6.20) и принимая во внимание соотношение (6.19) и выражения (6.21), (6.22), имеем

$$A^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta = A\sin^2\theta(h_1 - 2Pa\cos\theta) - (C_2 - C_1\cos\theta)^2\,, \tag{6.25}$$

где

$$h_1 = 2h - C_1^2/C\,. \tag{6.26}$$

Для удобства вычислений введем обозначение

$$u = \cos\theta\,. \tag{6.27}$$

Тогда

$$\dot{u} = -\dot{\theta}\sin\theta\,,$$

и уравнение (6.25) можно переписать в виде

$$A^2\dot{u}^2 = f(u)\,, \tag{6.28}$$

где

$$f(u) = A(1-u^2)(h_1 - 2Pau) - (C_2 - C_1u)^2\,, \tag{6.29}$$

откуда

$$dt = \pm A\,du/\sqrt{f(u)}\,. \tag{6.30}$$

Здесь знак выбираем в зависимости от знака величины $\dot{u}$.

Рассмотрим поведение функции $f(u)$. Из формулы (6.29) видно, что

$$\begin{array}{ll} f(u) \xrightarrow[u\to-\infty]{} -\infty, & f(u) \xrightarrow[u\to+\infty]{} +\infty, \\ f(-1) = -(C_2+C_1)^2 < 0, & f(+1) = -(C_2-C_1)^2 < 0. \end{array}$$

Переменная u, как следует из выражения (6.27), изменяется в пределах $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Кроме того, в соответствии с формулой (6.28) функция $f(u)$ на некотором отрезке этого интервала должна быть положительной. Характер изменения функции $f(u)$ представлен на рис. 12. Здесь через u_1, u_2, u_3 обозначены корни полинома $f(u)$. Действительное движение, которому должны соответствовать неравенства $\dot{u}^2 > 0$ и $|u| \leqslant 1$, происходит при изменении величины u в интервале $[u_1, u_2]$. Отсюда следует, что угол θ изменяется в переделах

$$\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \theta_1\,, \tag{6.31}$$

где $\cos\theta_1 = u_1$, $\cos\theta_2 = u_2$.

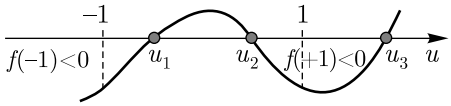

Рис. 12. График функции $f(u)$

Вернемся к уравнению (6.30). Разлагая многочлен $f(u)$ на множители и учитывая, что при действительном движении u удовлетворяет условиям $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, получаем

$$dt = \pm \frac{A du}{\sqrt{2PaA(u-u_1)(u_2-u)(u_3-u)}}\,.$$

Произведем замену переменной по формуле

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\, w^2\,, \quad -1 \leqslant w \leqslant 1\,. \tag{6.32}$$

Тогда получим

$$b\, dt = \pm \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}\,, \tag{6.33}$$

где

$$b = \sqrt{\frac{Pa\,(u_3-u_1)}{2A}}\,, \quad k^2 = \frac{u_2-u_1}{u_3-u_1} < 1\,.$$

Уравнение (6.28) по структуре полностью аналогично уравнению (4.17) главы VI, которое, как было установлено, описывает периодическое движение. Периодичность изменения функции $u(t)$ в пределах от u_1 до u_2 указывает па целесообразность введения наиболее характерной периодической функции — синуса. Для этого по формуле (6.32) и был осуществлен переход от переменной u к новой переменной w, которая, как и синус, изменяется в пределах от (–1) до (+1). Если теперь ввести еще одну замену

$$w = \sin\Phi\,, \tag{6.34}$$

то можно считать, что возрастанию t соответствует возрастание Φ, и поэтому при переходе от уравнения (6.33) к уравнению, связывающему t и Φ, получаем

$$b\, dt = \frac{d\Phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Phi}}\,. \tag{6.35}$$

Для простоты будем считать, что моменту $t = 0$ соответствует $\Phi = 0$. Как следует из формул (6.34), (6.32), (6.27), это означает, что отсчет

времени ведется с момента, когда $w = 0$, $u = u_1$, $\theta = \theta_1$. При этом в соответствии с уравнением (6.35) и выражением (6.7) имеем

$$bt = F(k, \Phi)\,,$$

или $\Phi = \operatorname{am} bt$.

Таким образом, переменная u изменяется по закону

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2 bt\,,$$

а угол нутации θ как функцию времени можно представить следующим образом:

$$\theta = \arccos[u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2 bt]\,. \tag{6.36}$$

Углы прецессии ψ и собственного вращения φ могут быть записаны через квадратуры от эллиптических функций. Действительно, из уравнения (6.24) для угла ψ получаем

$$\psi = \frac{1}{A}\int \frac{C_2 - C_1[u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2 bt]}{1 - [u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2 bt]^2}\,dt + C_2\,. \tag{6.37}$$

Угловую скорость собственного вращения $\dot\varphi$ можно найти из интеграла (6.19), поставив в него значение r из формул (2.7). В результате имеем

$$\dot\varphi = C_1/C - \dot\psi\cos\theta\,. \tag{6.38}$$

После подстановки в это уравнение выражения (6.24) можно записать

$$\dot\varphi = \frac{C_1}{C} - \frac{C_2 - C_1\cos\theta}{A\sin^2\theta}\cos\theta\,,$$

на основании чего интересующий нас угол φ может быть представлен следующим образом:

$$\varphi = C_4 + \frac{C_1}{C}\,t - \frac{1}{A}\int \frac{C_2 - C_1[u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2 bt]}{1 - [u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2 bt]^2}\,[u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2 bt]\,dt\,. \tag{6.39}$$

В полученных решениях (6.36), (6.37), (6.39) произвольными постоянными являются величины h, t_0, C_1, C_2, C_3, C_4. Напомним, что согласно обозначению (6.26) величина h_1, от которой зависят значения корней u_1, u_2, u_3, выражается через произвольные постоянные h и C_1.

Рассмотрим теперь качественную картину движения твердого тела в случае Лагранжа. Центр масс C системы перемещается по сфере с радиусом a, центр которой расположен в неподвижной точке. Интересующее нас положение оси Oz характеризуется углами θ и ψ.

Проанализируем сначала изменение угла нутации θ. Этот угол при действительном движении находится в границах, задаваемых неравенствами (6.31), причем согласно закону его изменения (6.36) он является периодической функцией времени с периодом

$$T = 2K(k)/b\,,$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода. Как следует из того же представления (6.36), возрастание угла от значения θ_2 до θ_1 и убывание его от значения θ_1 до θ_2 происходят монотонно за один и тот же промежуток времени, равный $K(k)/b$.

Таким образом, при движении твердого тела точка C описывает на сфере радиусом a волнистую линию, заключенную между двумя параллелями, образующимися при пересечении сферы конусами с углами раствором $2\theta_2$ и $2\theta_1$ (рис. 13). Эта точка через равные промежутки времени $K(k)/b$ поочередно попадает то на верхнюю, то на нижнюю параллель.

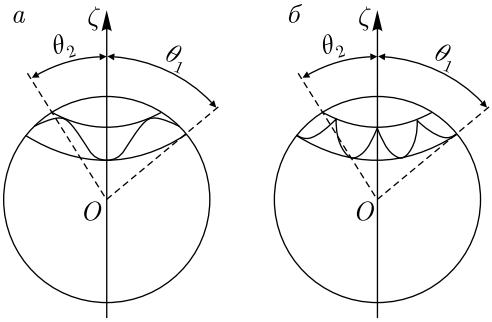

Рис. 13. Возможные движения точки C по сфере

Исследуем теперь изменение угла прецессии ψ. Угловая скорость $\dot{\psi}$ определяется формулой (6.24), поэтому знак ее зависит от знака величины $(C_2 - C_1\cos\theta)$. Пусть для простоты $C_1 > 0$. Напомним, что согласно неравенствам (6.31)

$$\cos\theta_1 \leqslant \cos\theta \leqslant \cos\theta_2\,. \tag{6.40}$$

Поэтому если выбор начальных условий обеспечивает выполнение неравенства

$$C_2 > C_1\cos\theta_2\,, \tag{6.41}$$

то согласно неравенствам (6.40) при движении имеем

$$C_2 > C_1\cos\theta\,,$$

и, следовательно, угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ положительна. Это означает, что при $\theta = \theta_1$ или $\theta = \theta_2$, когда $\dot{\theta} = 0$, величина $\dot{\psi}$ не обращается в нуль. Отсюда вытекает, что кривая, вычерчиваемая точкой C, касается параллелей, приведенных на рис. 13,*а*. Если вместо неравенства (6.41) выполняется неравенство

$$C_2 < C_1 \cos\theta_1 \,,$$

то при движении угловая скорость $\dot{\psi}$ отрицательна. В этом случае вид траектории точки C сохраняется, но тело прецессирует в направлении уменьшения угла ψ.

Если вместо последних неравенств выполняется равенство

$$C_2 = C_1 \cos\theta_2 \,,$$

то при достижении углом нутации значения θ_2 в нуль обращается не только величина $\dot{\theta}$, но и величина $\dot{\psi}$. Траектория точки C при этом напоминает вычерченную на сфере циклоиду, опирающуюся на верхнюю параллель (рис. 13,*б*). Можно показать, что на нижней параллели точка C не останавливается.

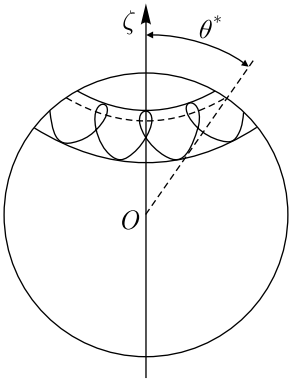

Рис. 14. Возможное движение точки C по сфере

Проанализируем теперь случай, когда выполняются неравенства

$$C_1 \cos\theta_1 < C_2 < C_1 \cos\theta_2 \,.$$

Тогда для углов θ, удовлетворяющих условиям

$$\cos\theta_1 \leqslant \cos\theta < C_2/C_1 \,,$$

угловая скорость $\dot{\psi}$ положительна, а при

$$C_2/C_1 < \cos\theta \leqslant \cos\theta_2$$

она отрицательна. Следовательно, при угле θ^*, удовлетворяющем уравнению

$$\cos\theta^* = C_2/C_1\,,$$

происходит изменение направления прецессионного движения твердого тела. В этом случае траектория точки C представляет собой петлеобразную сферическую кривую (рис. 14)[4].

Псевдорегулярная прецессия тяжелого гироскопа. Рассмотрим случай, когда первые два корня полинома (6.29) равны между собой:

$$u_1 = u_2\,. \tag{6.42}$$

Тогда согласно формуле (6.36) имеем $\theta = \arccos u_1$, то есть угол нутации при движении сохраняется постоянным и равным начальному отклонению:

$$\theta = \mathrm{const} = \theta_0\,, \tag{6.43}$$

а значит

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = 0\,. \tag{6.44}$$

Для углов прецессии и собственного вращения из формул (6.37), (6.39) при условии (6.42) получаем

$$\begin{gathered}\psi = C_3 + \frac{C_2 - C_1\cos\theta_0}{A\sin^2\theta_0}\,t\,,\\ \varphi = C_4 + \left(\frac{C_1}{C} - \frac{C_2 - C_1\cos\theta_0}{A\sin^2\theta_0}\right)t\,.\end{gathered} \tag{6.45}$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяем заданием начальных условий

$$t = 0, \quad \psi = \psi_0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0\,, \quad \varphi = \varphi_0\,, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0\,. \tag{6.46}$$

Тогда, используя формулы (2.7), (6.19), (6.23), (6.43)–(6.46), получаем

$$C_1 = C(\dot{\psi}_0\cos\theta_0 + \dot{\varphi}_0)\,, \quad C_2 = A\dot{\psi}_0\sin^2\theta_0 + C(\dot{\psi}_0\cos\theta_0 + \dot{\varphi}_0)\cos\theta_0\,,$$

[4]Как и в большинстве учебников по теоретической механике для университетов, на рисунках 13 и 14 для наглядности нарисовано большое количество касаний и петель. При реальном движении периодичность таких движений оказывается близкой к одному обороту по углу прецессии.

$$C_3 = \psi_0, \quad C_4 = \varphi_0 \,.$$

При этом согласно формуле (6.24) находим

$$\frac{C_2 - C_1 \cos\theta_0}{A \sin^2\theta_0} = \dot{\psi}_0 \,,$$

и, значит, можно записать

$$\frac{C_1}{C} - \frac{C_2 - C_1 \cos\theta_0}{A \sin^2\theta_0} \cos\theta_0 = \dot{\varphi}_0 \,.$$

Следовательно, уравнения движения при выполнении условия (6.42) имеют вид

$$\theta = \theta_0 = \mathrm{const} \,, \quad \psi = \psi_0 + \dot{\psi}_0 t \,, \quad \varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 t \,,$$

то есть тело совершает *регулярную прецессию* . В этом случае центр масс тела C равномерно движется вокруг оси $O\zeta$ по окружности с радиусом $a \sin\theta_0$ и угловой скоростью $\dot{\psi}_0$, а само тело равномерно вращается вокруг своей оси Oz с угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$.

Отметим, что регулярная прецессия в случае Лагранжа может возникать не при любых начальных условиях. Необходимым и достаточным условием существования кратного первого корня полинома (6.29), а значит и выполнения равенства (6.42), является обращение в нуль при $u = u_1$ производной от этого многочлена:

$$f'(u_1) = 0 \,,$$

или в развернутом виде,

$$2(C_1 C_2 - PaA) - 2u_1(C_1^2 + Ah_1) + 6PaAu_1^2 = 0 \,.$$

Подставляя сюда значения C_1 и C_2, учитывая формулу (6.26) и сокращая полученное после преобразований выражение на величину $1 - u_1^2$, получаем

$$(C - A)\dot{\psi}_0^2 \cos\theta_0 + C\dot{\psi}_0\dot{\varphi}_0 - Pa = 0 \,. \tag{6.47}$$

Таким образом, для возникновения регулярной прецессии в случае Лагранжа начальная угловая скорость нутации должна отсутствовать ($\dot{\theta}_0 = 0$), углы ψ_0 и φ_0 могут иметь любые значения, а начальные условия θ_0, $\dot{\psi}_0$, $\dot{\varphi}_0$ должны удовлетворять соотношению (6.47).

Если корни u_1 и u_2 не равны между собой, но мало отличаются друг от друга, то параллели на рис. 13 почти сливаются, а точка C вычерчивает

между ними сферическую кривую. В этом случае говорят, что тело совершает *псевдорегулярную прецессию*. При этом возможно приближенное интегрирование уравнений движения гироскопа. Обычно гироскоп выполняют таким образом, чтобы было справедливо неравенство

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{C} < 1\,.$$

Пусть начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &t = 0, \quad \dot{\psi} = 0\,, \quad \dot{\theta} = 0\,, \quad \dot{\varphi} = \Omega\,, \\ &\psi = \psi_0\,, \quad \theta = \theta_0\,, \quad \varphi = \varphi_0\,. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Тогда дифференциальное уравнение (6.25) согласно формулам (6.19), (6.23) и (6.26) записываем следующим образом:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2Pa}{A}\,(\cos\theta_0 - \cos\theta)\left[1 - \frac{C^2\Omega^2}{2PaA\sin^2\theta}\,(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right]. \tag{6.49}$$

Отметим, что в процессе движения должно выполняться условие

$$\cos\theta_0 \geqslant \cos\theta\,,$$

в противном случае правая часть уравнения (6.49) оказывается отрицательной.

Предположим, что искомый угол нутации θ отклоняется от начального значения θ_0 на малую величину ϑ:

$$\theta = \theta_0 + \vartheta\,. \tag{6.50}$$

Перейдем в уравнении (6.49) от переменной θ к переменной ϑ. Из соотношения (6.50) имеем

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\,.$$

Так как

$$\begin{aligned} &\cos\theta = \cos(\theta_0 + \vartheta) = \cos\theta_0\cos\vartheta - \sin\theta_0\sin\vartheta\,, \\ &\sin\theta = \sin(\theta_0 + \vartheta) = \sin\theta_0\cos\vartheta + \cos\theta_0\sin\vartheta\,, \end{aligned}$$

то при малых ϑ находим

$$\begin{aligned} &\cos\theta \approx \cos\theta_0 - \vartheta\sin\theta_0\,, \\ &\sin\theta \approx \sin\theta_0 + \vartheta\cos\theta_0, \\ &\sin^2\theta \approx \sin^2\theta_0 + 2\vartheta\sin\theta_0\cos\theta_0\,, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta} \approx \frac{\vartheta}{\sin\theta_0}\,.$$

Теперь вместо уравнения (6.49) можно записать следующее приближенное дифференциальное уравнение:

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{2Pa\sin\theta_0}{A}\,\vartheta\left(1 - \frac{C^2\Omega^2}{2PaA\sin\theta_0}\,\vartheta\right)\,.$$

Вводя обозначения $\alpha = C\Omega/A$, $\beta = 2PaA\sin\theta_0/(C^2\Omega^2)$, его можно переписать в виде

$$\dot{\vartheta}^2 = \alpha^2\,\vartheta(\beta - \vartheta)\,,$$

откуда после извлечения квадратного корня и разделения переменных получаем

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{\beta\vartheta - \vartheta^2}} = \pm\alpha\,dt\,.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальные условия (6.48), имеем

$$\begin{gathered}\arccos\left(1 - \frac{2\vartheta}{\beta}\right) = \pm\alpha t\,,\\ \vartheta = \frac{PaA\sin\theta_0}{C^2\Omega^2}\left(1 - \cos\frac{C\Omega t}{A}\right)\,.\end{gathered} \tag{6.51}$$

Отсюда видно, что приближенное решение в виде (6.50) может быть построено при условии

$$PaA \ll C^2\Omega^2\,. \tag{6.52}$$

При этом угол нутации изменяется по закону

$$\theta = \theta_0 + \frac{PaA\sin\theta_0}{C^2\Omega^2} - \frac{PaA\sin\theta_0}{C^2\Omega^2}\,\cos\frac{C\Omega t}{A}\,, \tag{6.53}$$

а угловая скорость нутации является функцией времени вида

$$\dot{\theta}_0 = \frac{Pa\sin\theta_0}{C\Omega}\,\sin\frac{C\Omega t}{A}\,. \tag{6.54}$$

Для величины $\dot{\psi}$ из соотношения (6.24) при начальных условиях (6.48) получаем

$$\dot{\psi} = \frac{C\Omega(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{A\sin^2\theta}\,, \tag{6.55}$$

или приближенно, с учетом закона (6.51)

$$\dot{\psi} = \frac{Pa}{C\Omega}\left(1 - \cos\frac{C\Omega t}{A}\right), \tag{6.56}$$

то есть угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ имеет тот же знак, что и величина Ω. При $\theta_2 = \theta_0$ она обладает нулевым значением, а при $\theta_1 = \theta_0 + 2PaA\sin\theta_0/(C^2\Omega^2)$ оказывается максимальной. На основании сказанного центр масс C гироскопа движется по сферической циклоиде, что совпадает с утверждением предыдущего пункта (см. рис. 13,*б*).

По формуле (6.56) можно вычислить значение средней угловой скорости прецессии за период $2\pi A/(C\Omega)$:

$$\widetilde{\dot{\psi}} = Pa/(C\Omega),$$

и закон изменения угла прецессии:

$$\psi = \psi_0 + \frac{Pa}{C\Omega}\,t - \frac{PaA}{C^2\Omega^2}\,\sin\frac{C\Omega t}{A}\,. \tag{6.57}$$

Если кинетический момент $C\Omega$ таков, что выполняется неравенство (6.52), то третьим слагаемым в формуле (6.57) можно пренебречь, поэтому

$$\psi = \psi_0 + \frac{Pa}{C\Omega}\,t\,,$$

что соответствует равномерному вращению с постоянной угловой скоростью $\widetilde{\dot{\psi}}$.

Выражение угловой скорости собственного вращения можно получить из формулы (6.38). При начальных условиях (6.48) имеем

$$C_1/C = r_0 = \Omega\,,$$

и поэтому

$$\dot{\varphi} = \Omega - \dot{\psi}\cos\theta\,.$$

Подставляя сюда выражение (6.55) и полагая $\sin\theta = \sin\theta_0$, $\cos\theta_0 - \cos\theta = \vartheta\sin\theta_0$, записываем

$$\dot{\varphi} = \Omega - \vartheta\,\frac{C\Omega}{A}\,\operatorname{ctg}\theta_0\,,$$

или на основании закона (6.51)

$$\dot{\varphi} = \Omega - \frac{Pa\cos\theta_0}{C\Omega} + \frac{Pa\cos\theta_0}{C\Omega}\,\cos\frac{C\Omega t}{A}\,. \tag{6.58}$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение при начальных условиях (6.48), имеем

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\Omega - \frac{Pa\cos\theta_0}{C\Omega}\right) t + \frac{PaA\cos\theta_0}{C^2\Omega^2} \sin\frac{C\Omega t}{A}\,. \tag{6.59}$$

Таким образом, псевдорегулярная прецессия характеризуется формулами (6.53), (6.57) и (6.59), в которых отброшены слагаемые, содержащие в знаменателе величину $C\Omega$ в степени выше второй. Из этого закона движения вытекает, что псевдорегулярную прецессию можно рассматривать как регулярную, задаваемую формулами

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta_0 + \frac{PaA\sin\theta_0}{C^2\Omega^2}\,, \\ \psi' &= \psi_0 + \frac{Pa}{C\Omega}\,t, \\ \varphi' &= \varphi_0 + \left(\Omega - \frac{Pa\cos\theta_0}{C\Omega}\right) t\,, \end{aligned} \tag{6.60}$$

на которую накладываются высокочастотные гармонические колебания с малой амплитудой

$$\begin{aligned} \theta'' &= -\frac{PaA\cos\theta_0}{C^2\Omega^2} \cos\frac{C\Omega t}{A}\,, \\ \psi'' &= -\frac{PaA}{C^2\Omega^2} \sin\frac{C\Omega t}{A}\,, \\ \varphi'' &= \frac{PaA\cos\theta_0}{C^2\Omega^2} \sin\frac{C\Omega t}{A}\,. \end{aligned}$$

Анализ псевдорегулярной прецессии был проведен в предположении, что выполняются начальные условия (6.48). При более общих начальных условиях, когда $\dot\psi_0$, $\dot\theta_0 \neq 0$, псевдорегулярная прецессия совершается не относительно регулярной прецессии, характеризуемой формулами (6.60), а относительно некоторой другой регулярной прецессии.

Элементарная теория гироскопа. Гироскопы широко используются в различных технических приборах. Это объясняется их особыми свойствами, которые позволяют создавать различные типы навигационных устройств (гирокомпасы, гирогоризонты и т. п.). Остановимся на элементарной теории гироскопов.

Анализируя формулы (6.54), (6.56) и (6.58), видим, что угловые скорости $\dot\varphi$, $\dot\psi$, $\dot\theta$, могут быть представлены в виде

$$\dot\varphi = \Omega + O\left(\frac{Pa}{C\Omega}\right), \quad \dot\psi = O\left(\frac{Pa}{C\Omega}\right), \quad \dot\theta = O\left(\frac{Pa}{C\Omega}\right),$$

где символом $O(Pa/(C\Omega))$ обозначена величина, имеющая порядок малости $Pa/(C\Omega)$. Тогда, как следует из формул (2.7),

$$p = O\left(\frac{Pa}{C\Omega}\right), \quad q = O\left(\frac{Pa}{C\Omega}\right), \quad r = \Omega + O\left(\frac{Pa}{C\Omega}\right).$$

Это означает, что вектор кинетического момента $\mathbf{l}$ в соответствии с формулами (6.1) приближенно может быть задан в виде $\mathbf{l} = C\Omega\,\mathbf{k}$. Теорему моментов (2.3) при этом можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = C\Omega\,\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{L}\,.$$

Так как $d\mathbf{k}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$, то

$$C\Omega\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \mathbf{L}\,. \tag{6.61}$$

Для определения вектора $\boldsymbol{\omega}$ воспользуемся формулами (6.60). Отбрасывая высокочастотные колебания с малой амплитудой, то есть полагая $\varphi = \varphi'$, $\psi = \psi'$, $\theta = \theta'$, в соответствии с формулой (2.5) главы II и формулами (6.60) имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\mathbf{k} + \dot{\psi}\,\mathbf{k}_o = \Omega\,\mathbf{k} + \frac{Pa}{C\Omega}\,\mathbf{k}_o\,.$$

Подставляя это выражение в формулу (6.61), получаем

$$\dot{\psi}\,\mathbf{k}_o \times C\dot{\varphi}\,\mathbf{k} = \mathbf{L}\,. \tag{6.62}$$

Уравнение (6.62) лежит в основе элементарной теории гироскопов. Оно позволяет при заданном моменте $\mathbf{L}$ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ определить угловую скорость прецессии $\dot{\psi}$. И наоборот, при заданных угловых скоростях $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ можно определить момент $\mathbf{L}$, который вызвал указанную прецессию. Уравнением (6.62) можно пользоваться при решении этих задач в случае, когда угловая скорость собственного вращения $\dot{\varphi}$ существенно больше угловой скорости прецессии $\dot{\psi}$.

Рассмотрим твердое тело, которое быстро вращается в подшипниках. Будем считать его гироскопом, находящимся под действием сил, приложенных к нему со стороны подшипников. По закону равенства действия и противодействия к подшипникам при этом прилагаются силы, момент которых равен $(-\mathbf{L})$. Вектор $\mathbf{L}_{\text{гир}} = -\mathbf{L}$ называется *гироскопическим моментом*. В соответствии с формулой (6.62) имеем

$$\mathbf{L}_{\text{гир}} = C\dot{\varphi}\,\mathbf{k} \times \dot{\psi}\,\mathbf{k}_o\,. \tag{6.63}$$

Пример 1. Применим элементарную теорию гироскопа к решению следующей технической задачи. Пусть турбовинтовой самолет поворачивается в горизонтальной плоскости. Пропеллер и связанные с ним быстро вращающиеся части турбины можно принять за гироскоп. Кинетический момент гироскопа $\mathbf{l} = C\dot{\varphi}\,\mathbf{k}$ будем считать ориентированным в направлении движения самолета. При этом если самолет поворачивается в горизонтальной плоскости влево, то пара сил $(\mathbf{F}_{\text{гир}}, -\mathbf{F}_{\text{гир}})$, приложенная со стороны гироскопа к подшипникам, действует так, как показано на рис. 15.

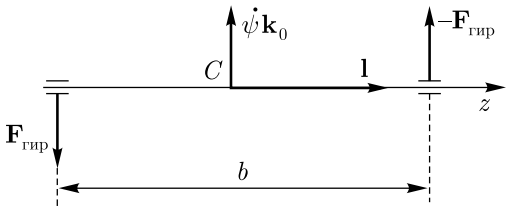

Рис. 15. Появление гироскопического момента в турбовинтовом самолете

Так как при движении самолета со скоростью v по окружности с радиусом R угловая скорость прецессии $\dot{\psi} = v/R$, а момент $L_{\text{гир}}$ при расстоянии между подшипниками, равном b, можно представить как $L_{\text{гир}} = F_{\text{гир}}\,b$, то из формулы (6.63) получаем, что на каждый подшипник турбины действует сила

$$F_{\text{гир}} = C\dot{\varphi}v/(Rb)\,.$$

Пара таких сил поднимает нос самолета вверх (так называемое кабрирование). Если при тех же условиях самолет поворачивается в горизонтальной плоскости вправо, то происходит опускание носа самолета (пикирование). Поворот самолета в вертикальной плоскости вызывает его рысканье влево или вправо. Для устранения гироскопического момента в комфортабельных лайнерах повышенной надежности на каждой оси устанавливаются два пропеллера, вращающихся в противоположных направлениях. Такая комбинация выгодна и с точки зрения аэродинамики, поскольку второй винт использует кинетическую энергию закрученной струи воздуха, создаваемой передним пропеллером.

§ 7. Уравнения движения системы твердых тел в избыточных координатах[5, 6]

В главе VI было показано, что математический аппарат теоретической механики, разработанный применительно к системе материальных точек, может быть применен к механическим системам, состоящим из твердых

[5]Параграф «Уравнения движения системы твердых тел в избыточных координатах» написан В. И. Петровой.

[6]Под избыточными координатами понимаем координаты, количество которых превосходит число степеней свободы.

тел. Это означает, что при исследовании динамики системы твердых тел могут быть использованы уравнения Лагранжа как первого, так и второго рода.

Особо отметим то обстоятельство, что уравнения Лагранжа первого рода, составленные для случая системы, состоящей из конечного числа материальных точек, будут иметь простейшую и при том одинаковую структуру по всем координатам, если эти координаты являются декартовыми координатами точек системы. Существенно также, что в данном случае уравнения Лагранжа первого рода являются уравнениями, разрешенными относительно вторых производных от искомых координат. Все это говорит о том, что обсуждаемые уравнения имеют форму, удобную для решения их на компьютере. В связи с этим возникает вопрос об отыскании такой формы записи уравнений движения системы твердых тел, которая также была бы удобной для применения компьютеров. Дело в том, что уравнения движения системы твердых тел, например манипулятора, записанные в форме уравнений Лагранжа второго рода, при большом количестве тел являются настолько сложными, что оказывается затруднительным не только их проинтегрировать, но даже записать.

Задача отыскания простейших по форме уравнений Лагранжа первого рода в криволинейных координатах для системы твердых тел, как будет видно из дальнейшего, сводится к отысканию новой формы записи уравнений движения одного твердого тела. Рассмотрим этот вопрос.

Введем неподвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$ и подвижную систему $Cxyz$ с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, направленными по главным центральным осям инерции тела. Пусть $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OC}$.

Положение твердого тела относительно неподвижной системы определяется заданием четырех векторов: $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Предположение о том, что тело при его движении не деформируется, то есть является абсолютно твердым, означает, что векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ при движении тела остаются ортогональными и единичными. Условия ортогональности и единичности векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ будем рассматривать как идеальные связи, задаваемые уравнениями

$$\begin{gathered} f^1 = \mathbf{i}^2 - 1 = 0\,, \quad f^2 = \mathbf{j}^2 - 1 = 0\,, \quad f^3 = \mathbf{k}^2 - 1 = 0\,, \\ f^4 = \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0\,, \quad f^5 = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0\,, \quad f^6 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0\,. \end{gathered} \tag{7.1}$$

Проекции векторов $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ на оси неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ примем за исходные координаты свободного твердого тела. Общее число этих координат, равное двенадцати, в два раза больше, чем число степеней свободы твердого тела. Поэтому эти координаты называются *из-*

быточными. Применительно к механической системе, состоящей из конечного числа материальных точек, избыточными при наличии голономных связей являются декартовы координаты точек системы.

Отметим, что в некоторых курсах по теоретической механике уравнениями Лагранжа первого рода принято называть только уравнения, записанные в декартовых координатах и содержащие множители Лагранжа. Уравнения же движения голономной механической системы в обобщенных лагранжевых координатах при избыточном их числе называются иногда *уравнениями Лагранжа с множителями.* В главе VI было показано, что уравнения Лагранжа первого и второго рода можно рассматривать как две взаимные системы линейных алгебраических уравнений относительно реакций связей. В соответствии с этим общим подходом к уравнениям Лагранжа первого рода для любой механической системы относятся те уравнения, каждое из которых содержит, вообще говоря, все множители Лагранжа.

Вернемся к вопросу об отыскании уравнений движения свободного твердого тела в избыточных координатах. Составим выражение для кинетической энергии. В соответствии с определением имеем

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau} v^2\mu\,d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau} (\dot{\boldsymbol{\rho}} + x\,\dot{\mathbf{i}} + y\,\dot{\mathbf{j}} + z\,\dot{\mathbf{k}})^2\mu\,d\tau\,.$$

Здесь, как и в § 1, τ — объем тела, $d\tau = dxdydz$, μ — плотность, x, y, z — текущие координаты точки твердого тела $Cxyz$.

Так как оси Cx, Cy, Cz являются главными центральными осями инерции тела, то

$$\int\limits_{\tau} x\mu\,d\tau = \int\limits_{\tau} y\mu\,d\tau = \int\limits_{\tau} z\mu\,d\tau = \int\limits_{\tau} xy\mu\,d\tau = \int\limits_{\tau} yz\mu\,d\tau = \int\limits_{\tau} zx\mu\,d\tau = 0\,,$$

и потому

$$T = \frac{M\dot{\boldsymbol{\rho}}^2}{2} + \frac{I_x\dot{\mathbf{i}}^2}{2} + \frac{I_y\dot{\mathbf{j}}^2}{2} + \frac{I_z\dot{\mathbf{k}}^2}{2}\,. \tag{7.2}$$

Здесь M — масса тела и

$$I_x = \int\limits_{\tau} x^2\mu\,d\tau\,, \quad I_y = \int\limits_{\tau} y^2\mu\,d\tau\,, \quad I_z = \int\limits_{\tau} z^2\mu\,d\tau\,. \tag{7.3}$$

Пусть к телу в точках $N_\nu = (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ приложены силы $\mathbf{F}_\nu$. Возможную элементарную работу этих сил можно записать в виде

$$\delta A = \sum_{\nu} \mathbf{F}_\nu \cdot (\delta\boldsymbol{\rho} + x_\nu\delta\mathbf{i} + y_\nu\delta\mathbf{j} + z_\nu\delta\mathbf{k}) =$$
$$= \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\rho}} \cdot \delta\boldsymbol{\rho} + \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} \cdot \delta\mathbf{i} + \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} \cdot \delta\mathbf{j} + \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{k}\,,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\rho}} &= \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}\,, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} = \sum_{\nu} x_{\nu}\mathbf{F}_{\nu}\,, \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} &= \sum_{\nu} y_{\nu}\mathbf{F}_{\nu}\,, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \sum_{\nu} z_{\nu}\mathbf{F}_{\nu}\,. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Рассматривая выражения для кинетической энергии и элементарной работы, а также форму записи уравнений связей (7.1), видим, что целесообразно уравнения движения, соответствующие трем компонентам каждого из векторов $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\rho}} &= \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\rho}}\,, \qquad \varkappa = \overline{1,6}\,, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{i}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{i}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} + \Lambda_{\varkappa}\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial \mathbf{i}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} + 2\Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_4\mathbf{j} + \Lambda_6\mathbf{k}\,, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{j}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{j}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} + \Lambda_{\varkappa}\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial \mathbf{j}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} + 2\Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_5\mathbf{k} + \Lambda_4\mathbf{i}\,, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{k}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{k}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} + \Lambda_{\varkappa}\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial \mathbf{k}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} + 2\Lambda_3\mathbf{k} + \Lambda_6\mathbf{i} + \Lambda_5\mathbf{j}\,, \end{aligned} \tag{7.5}$$

где принято обозначение

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial a_x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial a_y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial a_z}\,\mathbf{k}\,, \\ \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\,. \end{gathered}$$

Отметим, что это обозначение удобно тем, что при его использовании векторы, входящие в выражения (7.1) и (7.2), можно формально рассматривать как скалярные величины. Уравнения (7.5) при учете этого простого правила, а также обозначений (7.4) запишутся в виде

$$M\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}\,, \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned} I_x\ddot{\mathbf{i}} &= \sum_{\nu} x_{\nu}\mathbf{F}_{\nu} + 2\Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_4\mathbf{j} + \Lambda_6\mathbf{k}\,, \\ I_y\ddot{\mathbf{j}} &= \sum_{\nu} y_{\nu}\mathbf{F}_{\nu} + 2\Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_5\mathbf{k} + \Lambda_4\mathbf{i}\,, \\ I_z\ddot{\mathbf{k}} &= \sum_{\nu} z_{\nu}\mathbf{F}_{\nu} + 2\Lambda_3\mathbf{k} + \Lambda_6\mathbf{i} + \Lambda_5\mathbf{j}\,. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Заметим, что уравнение (7.6) является уравнением движения центра масс твердого тела.

Используя уравнения связей, исключим из уравнений Лагранжа первого рода (7.7) множители Лагранжа. С этой целью продифференцируем дважды по времени уравнения связей (7.1) и получим выражения

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{i}}^2 = -\ddot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{i}\,, \quad \dot{\mathbf{j}}^2 = -\ddot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{j}\,, \quad \dot{\mathbf{k}}^2 = -\ddot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{k}\,,\\ 2\dot{\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{j}} + \ddot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{i}\cdot\ddot{\mathbf{j}} = 0\,,\ 2\dot{\mathbf{j}}\cdot\dot{\mathbf{k}} + \ddot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{k} + \mathbf{j}\cdot\ddot{\mathbf{k}} = 0\,,\\ 2\dot{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{i}} + \ddot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{i} + \mathbf{k}\cdot\ddot{\mathbf{i}} = 0\,.\end{gathered} \tag{7.8}$$

Подставив в выведенные соотношения (7.8) вторые производные по времени из уравнений (7.7), запишем формулы для множителей Лагранжа $\Lambda_\varkappa$:

$$\begin{aligned}2\Lambda_1 &= -\sum_\nu x_\nu \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{i} - I_x\dot{\mathbf{i}}^2\,,\\ 2\Lambda_2 &= -\sum_\nu y_\nu \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{j} - I_y\dot{\mathbf{j}}^2\,,\\ 2\Lambda_3 &= -\sum_\nu z_\nu \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{k} - I_z\dot{\mathbf{k}}^2\,,\\ \Lambda_4 &= -\frac{2I_xI_y}{I_x+I_y}\dot{\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{j}} - \frac{I_y}{I_x+I_y}\sum_\nu x_\nu\mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{j} - \frac{I_x}{I_x+I_y}\sum_\nu y_\nu\mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{i}\,,\\ \Lambda_5 &= -\frac{2I_yI_z}{I_y+I_z}\dot{\mathbf{j}}\cdot\dot{\mathbf{k}} - \frac{I_z}{I_y+I_z}\sum_\nu y_\nu\mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{k} - \frac{I_y}{I_y+I_z}\sum_\nu z_\nu\mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{j}\,,\\ \Lambda_6 &= -\frac{2I_zI_x}{I_z+I_x}\dot{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{i}} - \frac{I_x}{I_z+I_x}\sum_\nu z_\nu\mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{i} - \frac{I_z}{I_z+I_x}\sum_\nu x_\nu\mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{k}\,.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Если теперь выражения (7.9) подставить в систему (7.5), то получим

$$\begin{aligned}M\ddot{\boldsymbol{\rho}} &= \sum_\nu \mathbf{F}_\nu\,,\\ \ddot{\mathbf{i}} &= -\dot{\mathbf{i}}^2\mathbf{i} - \frac{2I_y}{I_x+I_y}(\dot{\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{j}})\mathbf{j} - \frac{2I_z}{I_z+I_x}(\dot{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{i}})\mathbf{k} + \frac{L_z}{I_x+I_y}\mathbf{j} - \frac{L_y}{I_z+I_x}\mathbf{k}\,,\\ \ddot{\mathbf{j}} &= -\dot{\mathbf{j}}^2\mathbf{j} - \frac{2I_z}{I_y+I_z}(\dot{\mathbf{j}}\cdot\dot{\mathbf{k}})\mathbf{k} - \frac{2I_x}{I_x+I_y}(\dot{\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{j}})\mathbf{i} + \frac{L_x}{I_y+I_z}\mathbf{k} - \frac{L_z}{I_x+I_y}\mathbf{i}\,,\\ \ddot{\mathbf{k}} &= -\dot{\mathbf{k}}^2\mathbf{k} - \frac{2I_x}{I_z+I_x}(\dot{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{i}})\mathbf{i} - \frac{2I_y}{I_y+I_z}(\dot{\mathbf{j}}\cdot\dot{\mathbf{k}})\mathbf{j} + \frac{L_y}{I_z+I_x}\mathbf{i} - \frac{L_x}{I_y+I_z}\mathbf{j}\,.\end{aligned} \tag{7.10}$$

Здесь L_x, L_y, L_z — проекции главного момента активных сил

$$\mathbf{L} = \sum_\nu (x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j} + z_\nu\mathbf{k}) \times \mathbf{F}_\nu\,.$$

Чтобы убедиться в справедливости уравнений (7.10), покажем, что из них вытекают динамические уравнения Эйлера (2.6). Воспользуемся формулами

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = r\mathbf{j} - q\mathbf{k}\,, \qquad \dot{\mathbf{i}} \cdot \dot{\mathbf{j}} = -pq\,, \qquad \dot{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{i}} = -rp\,,$$
$$-\dot{\mathbf{i}}^2\mathbf{i} = -(q^2 + r^2)\mathbf{i}\,,$$
$$\ddot{\mathbf{i}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{i}} = \dot{r}\mathbf{j} - \dot{q}\mathbf{k} - (q^2 + r^2)\mathbf{i} + pq\mathbf{j} + pr\mathbf{k}\,.$$

Тогда при проектировании второго уравнения из системы (7.10) на ось x получим тождество, а при проектировании на ось y — соотношение

$$\dot{r} + p\,q = \frac{2I_y}{I_x + I_y} p\,q + \frac{L_z}{I_x + I_y}\,.$$

Учитывая, что согласно обозначениям (7.3) можно написать $A = I_y + I_z$, $B = I_z + I_x$, $C = I_x + I_y$, отсюда имеем третье динамическое уравнение Эйлера:

$$C\dot{r} - (A - B)\,p\,q = L_z\,.$$

При проектировании того же векторного уравнения на ось z приходим ко второму уравнению Эйлера

$$B\dot{q} - (C - A)\,r\,p = L_y\,.$$

Аналогично из третьего уравнения системы (7.10) могут быть получены третье и первое уравнения Эйлера, а четвертое уравнение системы (7.10) дает второе и первое динамические уравнения Эйлера[7].

Рассмотрим теперь систему твердых тел, последовательно связанных друг с другом шаровыми шарнирами. Предположим, что число шарниров s равно числу подвижных тел. Трением в шарнирах пренебрегаем, то есть связи считаем идеальными. Пусть шарнир с номером σ связывает тело $\sigma - 1$ с телом σ. При этом уравнения связей запишутся в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\rho}_\sigma + x_\sigma^\sigma\,\mathbf{i}_\sigma + y_\sigma^\sigma\,\mathbf{j}_\sigma + z_\sigma^\sigma\,\mathbf{k}_\sigma - \\ -\boldsymbol{\rho}_{\sigma-1} - x_{\sigma-1}^\sigma\,\mathbf{i}_{\sigma-1} - y_{\sigma-1}^\sigma\,\mathbf{j}_{\sigma-1} - z_{\sigma-1}^\sigma\,\mathbf{k}_{\sigma-1} = 0\,, \\ \sigma = \overline{1, s}\,.\end{gathered} \tag{7.11}$$

[7]Отметим, что если на векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ не накладывать связей (7.1), то рассматриваемое тело становится по терминологии Дж. Кейси псевдотвердым (см. *Casey J.* Pseudo-rigid continua: basic theory and a geometrical derivation of Lagrage's equations // Proceedings of the Royal Society. London, 2004. Vol. A460. P. 2021–2049). Динамику этого континуума Дж. Кейси, опираясь на аппарат монографии Трусделла (см. *Truesdell C.* A first course in rational continuum mechanics. Academic Press, Inc., 1991 или *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.), описывает так же уравнениями Лагранжа, число которых равно двенадцати.

Здесь векторы $\mathbf{i}_\sigma$, $\mathbf{j}_\sigma$, $\mathbf{k}_\sigma$, соответствующие телу σ, имеют тот же смысл, что и выше, x_ρ^σ, y_ρ^σ, z_ρ^σ — координаты шарнира с номером σ в системе $C_\rho x_\rho y_\rho z_\rho$. Нулевым считается неподвижное тело. Обозначим через $\mathbf{R}_\sigma$ силу, приложенную через шарнир к телу σ со стороны тела $\sigma-1$. Воспользуемся принципом освобождаемости. При этом уравнения движения тела σ будут содержать реакции $\mathbf{R}_\sigma$ и $\mathbf{R}_{\sigma+1}$. Отметим, что к телу s приложена одна реакция $\mathbf{R}_s$. Продифференцируем систему (7.11) дважды по времени, а затем исключим вторые производные, используя для каждого тела найденную новую форму уравнений его движения. При этом получим систему s уравнений относительно s неизвестных реакций $\mathbf{R}_\sigma$. Уравнение, соответствующее произвольному σ, неравному 1 и s, содержит реакции $\mathbf{R}_{\sigma-1}$, $\mathbf{R}_\sigma$, $\mathbf{R}_{\sigma+1}$. При $\sigma = 1$ и при $\sigma = s$ имеем уравнения соответственно относительно $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, и $\mathbf{R}_{s-1}$, $\mathbf{R}_s$. Из сказанного следует, что данная система уравнений имеет структуру, удобную для ее решения на компьютере методом последовательного исключения искомых реакций. Определив реакции и подставив их в уравнения движения, получим систему дифференциальных уравнений движения рассматриваемой цепочки тел. Эта система разрешена относительно вторых производных, то есть подготовлена для интегрирования ее на компьютере.

Теория векторных уравнений Лагранжа первого рода будет использована в главе III второго тома при изучении движения платформы Стюарта (в этой главе они носят название *специальной формы уравнений движения твердого тела*).

Глава IX
ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

Авторы: *Н. Н. Пóляхов, С. А. Зегжда, Ш. Х. Солтаханов, М. П. Юшков*

Дифференциальные вариационные принципы механики для механических систем с конечным числом степеней свободы при наложении связей получаются из соответствующих скалярных уравнений движения этих систем, записанных для касательного пространства к многообразию всех положений системы, которые она может иметь в данный момент времени. Для формулирования принципа Даламбера — Лагранжа вводится понятие возможного перемещения системы при наличии голономных связей, для получения принципа Суслова — Журдена рассматривается понятие возможной скорости механической системы при наложении неголономных связей первого порядка. Обсуждаются связи типа Четаева и связь обобщенного принципа Даламбера — Лагранжа с принципом Суслова — Журдена. Для формулирования принципа Гаусса вводится возможное ускорение системы, обусловленное наложением линейных неголономных связей второго порядка. Из полученных дифференциальных вариационных принципов выводятся основные формы уравнений движения несвободных механических систем.

Интегральные вариационные принципы Гамильтона — Остроградского и Лагранжа, отражающие экстремальные свойства кривых, по которым происходит движение под действием сил, имеющих потенциал, выводятся из принципа переменного действия Гамильтона. Из него же получается и уравнение Гамильтона — Якоби.

Для удобства изложения материал главы разбит на две части.

I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 1. Классификация принципов механики. Возможные перемещения механических систем

Классификация принципов механики. При создании любой области науки стремятся сформулировать основные положения, лежащие в ее основе. Такие положения называются *принципами*. При формулировке принципов пытаются не только в наиболее сжатой форме изложить фундамент данной науки, на основе которого можно будет вести дальнейшие исследования, но и стремятся к тому, чтобы введенные принципы имели эвристическую ценность, то есть чтобы на их основе удавалось бы познать новые явления в данной области знаний. Помимо этого, из новых принципов должны следовать и прежние основополагающие утверждения.

В развитии механики нахождение новых принципов играло исключительно важную роль. При этом удавалось не только получить новые ре-

зультаты именно в области механики, но и развить целые разделы в других науках, прежде всего, в математике. Особенно ярким примером этого является углубление вариационного исчисления, являющегося важным разделом математической физики.

В механике принципы делятся на *дифференциальные* и *интегральные*. Если принцип сформулирован для данного момента времени, то он называется *дифференциальным*, а если для конечного интервала времени — то *интегральным*. Так, например, классическая механика строится на справедливости второго закона Ньютона, выполняющегося в каждый момент времени. С точки зрения введенной терминологии он является дифференциальным принципом. Если же рассматривается стационарная консервативная система, то при ее движении имеет место закон сохранения полной механической энергии, который может быть положен в основу исследования ее поведения. Такой принятый принцип используется на конечном интервале времени и относится к интегральным принципам.

С другой стороны принципы механики можно разделить на *невариационные* и *вариационные*. Упомянутые выше два принципа относятся к невариационным. В отличие от них рассматриваемые далее в этой главе принципы Даламбера — Лагранжа и Гамильтона — Остроградского являются вариационными принципами, так как с их помощью выявляются свойства, присущие истинному движению механической системы в отличие от других возможных движений, допускаемых наложенными связями. При этом, как увидим ниже, принцип Даламбера — Лагранжа является в то же время дифференциальным, а принцип Гамильтона — Остроградского — интегральным.

Итак, второй закон Ньютона является дифференциальным невариационным принципом, закон сохранения полной механической энергии — интегральным невариационным принципом, принцип Даламбера — Лагранжа оказывается дифференциальным вариационным, и, наконец, принцип Гамильтона — Остроградского является интегральным вариационным принципом.

В рассматриваемой I части этой главы изучаются лишь дифференциальные вариационные принципы механики. Голономные, неголономные и линейные неголономные связи второго порядка обозначаются как $f_0^{\varkappa}$, $f_1^{\varkappa}$, $f_2^{\varkappa}$.

Возможные перемещения материальной точки. Остановимся первоначально на движении одной материальной точки в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Если точка свободна, то при заданных начальных условиях под действием заданных сил она будет двигаться по траек-

тории, характеризуемой радиус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = x_1(t)\,\mathbf{i}_1 + x_2(t)\,\mathbf{i}_2 + x_3(t)\,\mathbf{i}_3\,.$$

Действительное элементарное перемещение точки за бесконечно малый промежуток времени dt будет определяться вектором

$$d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, dx_3)\,, \quad dx_\sigma = \dot{x}_\sigma\,dt\,, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Вектор $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к траектории в данном положении точки.

Рассмотрим теперь случай наложения на движение материальной точки голономной связи

$$f_0(t, x) = 0\,, \quad x = (x_1, x_2, x_3)\,. \tag{1.1}$$

Тогда об эффекте наложения этой связи можно судить по совокупности всех тех элементарных перемещений, возможность совершать которые (без нарушения связи (1.1)) у точки сохраняется. Эти элементарные перемещения, в отличие от элементарного действительного перемещения $d\mathbf{r}$, не совершаются фактически за какой-то бесконечно малый промежуток времени, а представляют собой множество всех мыслимых элементарных перемещений, которые могли бы быть сообщены точке в данный момент времени. Эти перемещения зависят только от положения точки в данный момент и от связи (1.1), наложенной на движение точки.

Таким образом, приходим к определению: любое элементарное перемещение, которое может быть сообщено точке из занимаемого ею в данный момент времени положения при сохранении наложенных на нее связей, называется *возможным (виртуальным)*[1] *перемещением.*

В отличие от истинного элементарного перемещения точки $d\mathbf{r}$ введенные возможные перемещения точки будем обозначать через

$$\delta\mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3) = \delta x_1\,\mathbf{i}_1 + \delta x_2\,\mathbf{i}_2 + \delta x_3\,\mathbf{i}_3\,. \tag{1.2}$$

Здесь обозначение δ отражает тот факт, что от вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, x)$ берется частный дифференциал, при составлении которого время t считается зафиксированным постоянным параметром. Составляющие δx_σ, $\sigma = 1, 2, 3$, вектора $\delta\mathbf{r}$ называются также *вариациями координат* x_σ, $\sigma = 1, 2, 3$.

[1] От латинского слова *virtualis*, что означает *возможный.*

Пусть на движение точки наложена стационарная (склерономная) связь

$$f_0(x) = 0\,. \tag{1.3}$$

Если точке в положении $M(x)$ сообщить виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r} = \overrightarrow{M\widetilde{M}}$, то она переместится в положение $\widetilde{M}(x+\delta x)$. Так как на движение системы наложена неосвобождающая голономная связь (1.3), то новые координаты точки должны удовлетворять уравнению связи

$$f_0(x+\delta x) = 0\,. \tag{1.4}$$

Разложим функцию (1.4) в ряд Тейлора около исходного положения M:

$$f_0(x+\delta x) \equiv f_0(x) + \frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\,\delta x_\sigma + o(|\delta x_\sigma|) = 0\,, \tag{1.5}$$

где $o(|\delta x_\sigma|)$ выражают слагаемые выше первого порядка. Учитывая, что $f_0(x) = 0$ и откидывая слагаемые выше первого порядка, из разложения (1.5) получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\,\delta x_\sigma = 0\,. \tag{1.6}$$

Таким образом, вариации координат при наличии связи (1.3) должны удовлетворять соотношению (1.6). Это означает, что для задания возможного перемещения точки можно выбрать произвольно лишь две вариации координат, а третья вариация найдется из соотношения (1.6). Обратим внимание на то, что это соответствует числу степеней свободы $l = 2$, которое имеет точка при наложении на ее движение одной голономной связи (1.3).

Рассмотрим теперь случай наложения на движение точки нестационарной (реономной) голономной связи (1.1). Тогда для нового возможного положения $\widetilde{M}(x+\delta x)$ будет выполняться

$$f_0(t, x+\delta x) \equiv f_0(t, x) + \frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\,\delta x_\sigma + o(|\delta x_\sigma|) = 0\,,$$

откуда опять получаем условие (1.6). Таким образом, на вариации координат нестационарность связей дополнительных условий не налагает. Это объясняется тем, что при нахождении возможного перемещения точки время не вариируется.

Обсудим теперь истинное элементарное перемещение точки $d\mathbf{r} = \overrightarrow{MM_1}$ при наличии стационарной связи (1.3). Раскладывая опять выражение связи в ряд Тейлора, имеем

$$f_0(x+dx) \equiv f_0(x) + \frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\,dx_\sigma + o(|dx_\sigma|) = 0\,,$$

откуда получаем

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\, dx_\sigma = 0\,. \tag{1.7}$$

Сравнивая формулы (1.7) и (1.6), заключаем, что при склерономной связи (1.3) истинное элементарное перемещение принадлежит классу виртуальных.

Если же связь имеет вид (1.1), то есть является нестационарной, то следует учитывать, что действительному элементарному перемещению в точку M_1 соответствует момент времени $t+dt$, поэтому из уравнения связи получаем

$$f_0(t+dt, x+dx) \equiv f_0(t,x) + \frac{\partial f_0}{\partial t}\, dt + \frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\, dx_\sigma + o(|dt|, |dx_\sigma|) = 0\,,$$

откуда имеем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}\, dt + \frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\, dx_\sigma = 0\,. \tag{1.8}$$

То есть теперь проекции истинного элементарного перемещения удовлетворяют новому соотношению (1.8), не совпадающему с (1.6). Поэтому истинное элементарное перемещение при наложении нестационарной связи не принадлежит к числу виртуальных.

Для геометрического пояснения условия (1.6) перепишем его, воспользовавшись оператором Гамильтона:

$$\boldsymbol{\nabla} f_0 \cdot \delta\mathbf{r} = 0\,, \quad \boldsymbol{\nabla} f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\, \mathbf{i}_\sigma\,. \tag{1.9}$$

Запись (1.9) показывает, что возможные перемещения точки лежат в касательной плоскости $\mathbb{T}$, проведенной в точке M к двумерной поверхности, задаваемой уравнением (1.3). Отметим, что в этой же плоскости находится и вектор $d\mathbf{r}$, направленный по касательной к траектории, лежащей на поверхности (1.3). Тем самым при задании стационарной голономной связи вектор элементарного действительного перемещения точки действительно принадлежит классу возможных перемещений.

В случае задания нестационарной голономной связи (1.1) вектор $\boldsymbol{\nabla} f_0$ направлен по нормали к поверхности $f_0(t,x) = 0$, поэтому векторы возможных перемещений $\delta\mathbf{r}$ опять лежат в плоскости $\mathbb{T}$, касательной к этой поверхности в рассматриваемой точке M, а конец вектора $d\mathbf{r} = \overrightarrow{MM_1}$ оказывается вне этой касательной плоскости.

Если на движение точки наложены две голономные связи

$$f_0^{\varkappa}(t,x) = 0\,, \quad \varkappa = 1, 2\,, \tag{1.10}$$

то аналогично предыдущему получаем условия типа (1.6)

$$\frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial x_\sigma}\,\delta x_\sigma = 0\,, \quad \varkappa = 1,2\,, \tag{1.11}$$

или типа (1.9)

$$\boldsymbol{\nabla} f_0^{\varkappa}\cdot\delta\mathbf{r} = 0\,, \quad \varkappa = 1,2\,. \tag{1.12}$$

Условия (1.11) показывают, что при наличии связей (1.10) имеется лишь одна свободная вариация координаты (что опять соответствует числу степеней свободы $l = 1$ при наложении на движение точки двух голономных связей (1.10)), а остальные две будут выражаться через нее по формулам (1.11). В случае стационарных связей точка будет двигаться по одномерной кривой, задаваемой пересечением этих поверхностей. По касательной к кривой направлен вектор $d\mathbf{r}$, с нею же совпадает и одномерная область $\mathbb{T}$, в которой расположены векторы возможных перемещений точки (они могут различаться лишь длинами и направлением). Если же связи являются нестационарными, то вектор $d\mathbf{r}$ лежит вне области $\mathbb{T}$.

Обсуждаемое различие между векторами $d\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}$ поясним на примере математического маятника переменной длины $l(t)$ (см. рис. 1).

Координаты движущейся точки удовлетворяют уравнениям связей

$$x_3 = 0\,, \quad x_1^2 + x_2^2 - l^2(t) = 0\,.$$

Множество $\mathbb{V}$ всех возможных положений маятника в данный момент времени t есть окружность с радиусом $l(t)$. Пусть положению точки M на этой окружности соответствует угол φ, а точке $\widetilde{M}$ — угол $\varphi + \delta\varphi$. Если угол $\delta\varphi$ достаточно мал, то приближенно можно считать, что точки M и $\widetilde{M}$ лежат на одной прямой $\mathbb{T}(\varphi, \mathbb{V})$, которая касается окружности $\mathbb{V}$ в точке M.

Радиус-вектор точки M зависит от t и φ, то есть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \varphi)\,.$$

Возможное перемещение $\delta\mathbf{r}$ есть частный дифференциал этой функции, вычисленный при фиксированном t, поэтому

$$\delta\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\,\delta\varphi\,.$$

Этот вектор выражает отклонение точки $\widetilde{M}$ относительно положения M, взятое по прямой $\mathbb{T}(\varphi, \mathbb{V})$, так как базисный вектор $\mathbf{e}_r$ используемой полярной системы координат равен $\partial\mathbf{r}/\partial\varphi$.

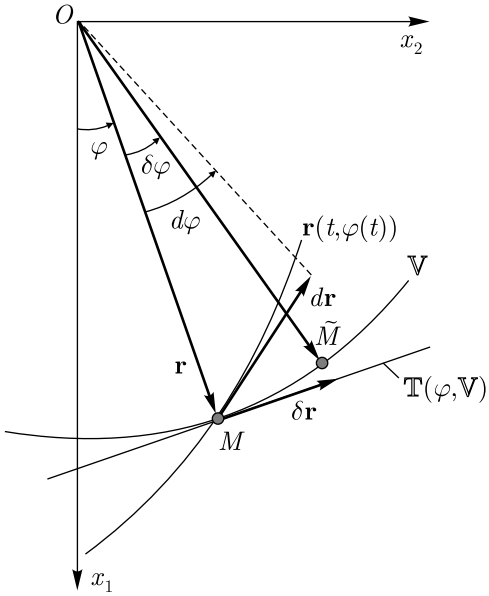

Рис. 1. Возможное перемещение точки при голономной нестационарной связи

Полный дифференциал

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\,d\varphi = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi}\right) dt = \dot{\mathbf{r}}\,dt\,,$$

соответствующий колебаниям маятника по закону $\varphi = \varphi(t)$, направлен по вектору скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, то есть по касательной к траектории, и с точностью до малых порядка выше первого равен действительному перемещению маятника за время dt.

Различие между возможным перемещением точки $\delta\mathbf{r}$ и элементарным действительным перемещением $d\mathbf{r}$ можно проследить на рис. 1.

Интересно рассмотреть вопрос о возможных перемещениях точки с позиций теории криволинейных координат.

Движение свободной точки можно описать как в декартовых координатах $x = (x_1, x_2, x_3)$, так и в криволинейных $q = (q^1, q^2, q^3)$. Зададим формулы прямого и обратного перехода между обеими системами координат:

$$q^\rho = q^\rho(t, x)\,, \quad \rho = 1, 2, 3\,, \tag{1.13}$$

$$x_\sigma = x_\sigma(t, q)\,, \quad \sigma = 1, 2, 3\,. \tag{1.14}$$

Введем две системы векторов, задаваемых этими формулами перехода:

$$\mathbf{e}^\rho = \frac{\partial q^\rho}{\partial x_\tau}\,\mathbf{i}_\tau\,, \quad \mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial x_{\tau_*}}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{i}_{\tau_*}\,, \quad \rho,\sigma,\tau,\tau_* = 1,2,3\,. \tag{1.15}$$

Эти две системы векторов образуют основной и взаимный базисы введенной криволинейной системы координат, так как выполняется следующая цепочка равенств:

$$\mathbf{e}^\rho\cdot\mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial q^\rho}{\partial x_\tau}\,\mathbf{i}_\tau\cdot\frac{\partial x_{\tau_*}}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{i}_{\tau_*} = \frac{\partial q^\rho}{\partial x_\tau}\,\frac{\partial x_\tau}{\partial q^\sigma} = \delta^\rho_\sigma = \begin{cases} 0, & \sigma\neq\rho\,,\\ 1, & \sigma=\rho\,.\end{cases}$$

Пусть теперь на движение точки наложена голономная связь (1.1). Конкретизируем формулы перехода (1.13) следующим образом:

$$q^\lambda = f^\lambda_*(t,x)\,, \quad \lambda = 1,2\,, \qquad q^3 = f_0(t,x)\,. \tag{1.16}$$

Здесь функции $f^\lambda_*(t,x)$, $\lambda = 1,2$, задаются исследователем. Тогда вектор $\mathbf{e}^3$ согласно формулам (1.15) оказывается равным

$$\mathbf{e}^3 = \frac{\partial q^3}{\partial x_\tau}\,\mathbf{i}_\tau = \frac{\partial f_0}{\partial x_\tau}\,\mathbf{i}_\tau = \boldsymbol{\nabla} f_0\,,$$

а ортогональные ему векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ определяются по формулам (1.15), (1.16), (1.14).

Из формул (1.16) следует, что вариации δq^λ, $\lambda = 1,2$, являются произвольными, а δq^3 в силу выполнения связи (1.1) равна нулю, причем

$$\delta q^3 \equiv \frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\,\delta x_\sigma = 0\,,$$

что соответствует полученному выше условию на вариации декартовых координат (1.6). Теперь вектор возможного перемещения точки может быть представлен в виде

$$\delta\mathbf{r}(t,q) = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^\lambda}\,\delta q^\lambda = \delta q^\lambda\,\mathbf{e}_\lambda\,. \tag{1.17}$$

Таким образом, наложение на движение голономной связи (1.1) задает поверхность $\mathbb{V}$, на которой должна находиться движущаяся точка, а ее возможное перемещение согласно формуле (1.17) лежит в плоскости $\mathbb{T}$, ортогональной вектору $\mathbf{e}^3 = \boldsymbol{\nabla} f_0$, то есть в касательной плоскости к поверхности $\mathbb{V}$, проведенной в рассматриваемой точке. Обратим внимание еще

на то обстоятельство, что согласно теории, изложенной в главе VI, введение в рассматриваемом случае голономной связи (1.1) выделяет в трехмерном пространстве одномерное $\mathbb{R}^K$-подпространство с базисным вектором $\mathbf{e}^3 = \boldsymbol{\nabla} f_0$ и ортогональное к нему двумерное $\mathbb{R}_L$-подпространство с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Итак, обсуждаемое выше касательное пространство $\mathbb{T}$, в котором находятся возможные перемещения точки, совпадает с $\mathbb{R}_L$-пространством.

Если на движение точки наложены две голономные связи (1.10), то вместо формул перехода (1.16) возьмем

$$q^1 = f_*(t,x)\,, \qquad q^{1+\varkappa} = f_0^{\varkappa}(t,x)\,, \quad \varkappa = 1,2\,,$$

где исследователем задается лишь функция $f_*(t,x)$. Теперь имеем два вектора

$$\mathbf{e}^{1+\varkappa} = \boldsymbol{\nabla} f_0^{\varkappa}\,, \quad \varkappa = 1,2\,,$$

выделяющие $\mathbb{R}^K$-подпространство, и ортогональный к ним вектор $\mathbf{e}_1$, характеризующий $\mathbb{R}_L$-подпространство.

Поверхности, задаваемые связями (1.10), определяют своим пересечением кривую (одномерную $\mathbb{V}$-поверхность), на которой должна находиться движущаяся точка, а по касательной к ней (в $\mathbb{T}$-пространстве, совпадающем с $\mathbb{R}_L$-подпространством) направлен вектор возможного перемещения

$$\delta\mathbf{r} = \delta q^1\,\mathbf{e}_1\,.$$

Возможные перемещения изображающей точки. Введенные выше понятия можно перенести на случай движения изображающей точки (см. § 3 главы VI). Вектор действительного элементарного перемещения изображающей точки $d\mathbf{y}$ в декартовой системе координат $Oy_1 \ldots y_{3n}$ может быть представлен в виде

$$d\mathbf{y} = dy_\mu\,\mathbf{j}_\mu\,, \quad dy_\mu = \dot{y}_\mu\,dt\,, \quad \mu = \overline{1,3n}\,,$$

он направлен по касательной к траектории изображающей точки.

Пусть теперь на движение изображающей точки наложены голономные связи

$$f_0^{\varkappa}(t,y) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \quad y = (y_1, \ldots, y_{3n})\,. \tag{1.18}$$

Тогда возможное перемещение изображающей точки $\delta\mathbf{y} = \overrightarrow{M\widetilde{M}}$, совместимое со связями (1.18), определяется как частный дифференциал, вычисляемый при фиксированном времени t. Координаты точки $\widetilde{M}(y+\delta y)$,

задаваемой этим вектором, должны удовлетворять уравнениям связей, поэтому аналогично формулам (1.4)-(1.6), (1.11), (1.12) можно записать

$$f_0^{\varkappa}(t, y + \delta y) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \tag{1.19}$$

$$f_0^{\varkappa}(t, y + \delta y) \equiv f_0^{\varkappa}(t, y) + \frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial y_\mu}\,\delta y_\mu + o(|\delta y_\mu|) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial y_\mu}\,\delta y_\mu = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f_0^{\varkappa} \cdot \delta \mathbf{y} = 0\,, \quad \boldsymbol{\nabla} f_0^{\varkappa} = \frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial y_\mu}\,\mathbf{j}_\mu\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{1.22}$$

Связи (1.18) задают в $3n$-мерном декартовом пространстве l-мерное подпространство, в котором при движении должна находиться изображающая точка. По аналогии с движением одной материальной точки в трехмерном пространстве это подпространство можно интерпретировать как l-мерную поверхность $\mathbb{V}(t, y)$, на которой в момент времени t должна находиться точка $M(y_1, \ldots, y_{3n})$ (здесь $l = 3n - k$ и отражает число степеней свободы изображающей точки). Если в этой точке к поверхности $\mathbb{V}(t, y)$ провести касательную плоскость $\mathbb{T}(y, \mathbb{V})$, то в ней согласно формулам (1.19)–(1.22) должны находиться векторы возможных перемещений $\delta \mathbf{y} = \overrightarrow{M\widetilde{M}}$.

Перейдем теперь от декартовых координат $y = (y_1, \ldots, y_{3n})$ к криволинейным координатам $q = (q^1, \ldots, q^{3n})$ по формулам

$$q^\rho = q^\rho(t, y)\,, \quad y_\mu = y_\mu(t, q)\,, \quad \mu, \rho = \overline{1, 3n}\,. \tag{1.23}$$

Формулами (1.23) задаются векторы основного и взаимного базисов введенной криволинейной системы координат:

$$\mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial y_\mu}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{j}_\mu\,, \quad \mathbf{e}^\rho = \frac{\partial q^\rho}{\partial y_\mu}\,\mathbf{j}_\mu\,, \quad \mu, \rho, \sigma = \overline{1, 3n}\,. \tag{1.24}$$

Если в формулах перехода (1.23) учесть уравнения связей (1.18) (функции $f_*^\lambda(t, y)$ при этом задаются исследователем по своему усмотрению непосредственно при формировании этого преобразования)

$$q^\lambda = f_*^\lambda(t, y)\,, \quad \lambda = \overline{1, l}\,, \quad l = 3n - k\,, \qquad q^{l+\varkappa} = f_0^{\varkappa}(t, y)\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,,$$

то согласно выражениям (1.24) получаем

$$\mathbf{e}^{l+\varkappa} = \boldsymbol{\nabla} f_0^{\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{1.25}$$

Таким образом, уравнениями связей в $3n$-мерном пространстве выделяется k-мерное подпространство $\mathbb{R}^K$ со взаимным базисом (1.25), и при этом ортогонально ему исследователь образует l-мерное подпространство $\mathbb{R}_L$ с основным базисом (см. формулы (1.24))

$$\mathbf{e}_\lambda = \frac{\partial y_\mu}{\partial q^\lambda}\,\mathbf{j}_\mu\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,.$$

Так как в силу выполнения связей $\delta q^{l+\varkappa} = 0$, $\varkappa = \overline{1,k}$, то при этом для возможного перемещения получим представление

$$\delta\mathbf{y} = \delta y_\mu\,\mathbf{j}_\mu = \frac{\partial y_\mu}{\partial q^\lambda}\,\delta q^\lambda\,\mathbf{j}_\mu = \delta q^\lambda\,\mathbf{e}_\lambda\,,$$

где векторы $\mathbf{e}_\lambda$, $\lambda = \overline{1,l}$, оказываются принадлежащими плоскости $\mathbb{T}(y,\mathbb{V})$.

Возможные перемещения механической системы произвольного вида. Рассуждения данного пункта будут во многом аналогичны рассуждениям из § 7 главы VI.

Пусть положение механической системы общего вида (то есть не состоящей из конечного числа материальных точек) описывается криволинейными координатами $q = (q^1, \ldots, q^s)$. Введем в рассмотрение дифференцируемое многообразие всех тех положений изучаемой механической системы, которые она может иметь в данный момент времени t. Зафиксируем некоторую точку этого многообразия, задаваемую координатами q^σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Наряду с введенной криволинейной системой координат будем рассматривать и другую систему $q_* = (q_*^1, \ldots, q_*^s)$, причем связь между ними задается формулами

$$q^\sigma = q^\sigma(t, q_*)\,, \quad q_*^\rho = q_*^\rho(t, q)\,, \qquad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,, \tag{1.26}$$

или в дифференциальной форме

$$\delta q^\sigma = \frac{\partial q^\sigma}{\partial q_*^\rho}\,\delta q_*^\rho\,, \quad \delta q_*^\rho = \frac{\partial q_*^\rho}{\partial q^\sigma}\,\delta q^\sigma\,, \qquad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,.$$

Величины δq^σ и δq_*^ρ, связанные этими соотношениями, называются контравариантными компонентами *касательного вектора* $\delta\mathbf{y}$, а все множество векторов $\delta\mathbf{y}$ — *касательным пространством* к введенному выше многообразию в данной точке[2]. Компоненты δq^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, и δq_*^ρ, $\rho = \overline{1,s}$,

[2]См. монографию: *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.

называются также *вариациями координат*. Вектор $\delta\mathbf{y}$ целесообразно представить в виде

$$\delta\mathbf{y} = \delta q^{\sigma}\mathbf{e}_{\sigma} = \delta q_*^{\sigma^*}\mathbf{e}^*_{\sigma^*}\,, \qquad \sigma, \sigma^* = \overline{1, s}\,, \tag{1.27}$$

и совокупности векторов $\mathbf{e}_{\sigma}$ и $\mathbf{e}^*_{\sigma^*}$ рассматривать как основные базисы касательного пространства в системах координат q и q_*. Основные метрические тензоры задаются матрицами $(\mathrm{g}_{\rho\sigma})$ и $(\mathrm{g}^*_{\rho^*\sigma^*})$, формируемыми коэффициентами положительно определенных квадратичных форм кинетической энергии в координатах q и q_* (через M обозначена масса всей системы):

$$T^{(2)} = \frac{M}{2}\,\mathrm{g}_{\rho\sigma}\,\dot{q}^{\rho}\dot{q}^{\sigma}\,, \quad \rho, \sigma = \overline{1, s}\,,$$
$$T^{(2)}_* = \frac{M}{2}\,\mathrm{g}^*_{\rho^*\sigma^*}\,\dot{q}^{\rho^*}_*\,\dot{q}^{\sigma^*}_*\,, \quad \rho^*, \sigma^* = \overline{1, s}\,.$$

Отметим попутно, что, опираясь на понятие вариаций координат, формулу (7.2) из главы VI можно рассматривать как общее правило нахождения обобщенных сил: с этой целью следует составить элементарную работу δA на возможном перемещении всех активных сил, действующих на систему, и тогда коэффициенты при δq^{σ}, $\sigma = \overline{1, s}$, будут равны обобщенным силам Q_{σ}, $\sigma = \overline{1, s}$.

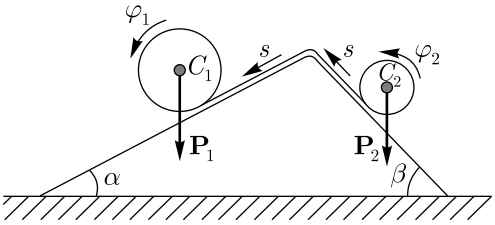

Рис. 12 главы VI. Два цилиндра на наклонных плоскостях

Пример 1. Найдем этим приемом обобщенные силы, соответствующие силам тяжести первого и второго цилиндров в примере 7 главы VI (для удобства рассуждений повторяем рис. 12 той же главы). Другие силы, совершающие работу при возможных отклонениях системы, по предположению отсутствуют. Закрепим сначала φ_1 и φ_2. При перемещении нити на δs центр тяжести первого цилиндра опустится на величину $\sin\alpha\,\delta s$, а центр тяжести второго цилиндра поднимется на величину $\sin\beta\,\delta s$, и, следовательно, суммарная работа равна

$$\delta A_s = (P_1 \sin\alpha - P_2 \sin\beta)\,\delta s = Q_s\,\delta s\,,$$

откуда $Q_s = P_1 \sin\alpha - P_2 \sin\beta$.

Если же, закрепив s и φ_2, повернуть цилиндр весом P_1 на угол $\delta\varphi_1$, то его центр тяжести опустится на величину $r_1 \sin\alpha\, \delta\varphi_1$. При этом будет совершена работа

$$\delta A_{\varphi_1} = P_1 r_1 \sin\alpha\, \delta\varphi_1 = Q_{\varphi_1}\, \delta\varphi_1\,,$$

и значит $Q_{\varphi_1} = P_1 r_1 \sin\alpha$.

Аналогично устанавливаем, что $Q_{\varphi_2} = -P_2 r_2 \sin\beta$. Знак минус в этом выражении указывает на то, что второй цилиндр при повороте на угол $\delta\varphi_2$ не опускается, а поднимается.

Напомним, что согласно материалу, изложенному в § 7 главы VI, введенному основному базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s\}$ соответствует взаимный базис $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^s\}$, векторы которого задаются соотношениями

$$\mathbf{e}^\rho \cdot \mathbf{e}_\sigma = \delta^\rho_\sigma = \begin{cases} 0, & \rho \neq \sigma\,, \\ 1, & \rho = \sigma\,. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь случай наложения на движение механической системы общего вида голономных связей

$$f_0^\varkappa(t, q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{1.28}$$

При возможном перемещении системы в данный момент времени t из положения $q = (q^1, \ldots, q^s)$ в положение $q + \delta q = (q^1 + \delta q^1, \ldots, q^s + \delta q^s)$ из требования удовлетворения этого нового положения системе уравнений связей (1.28) получим условия на величины $\delta q = (\delta q^1, \ldots, \delta q^s)$:

$$\frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\sigma}\, \delta q^\sigma = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{1.29}$$

Отсюда видно, что только $l = s - k$ величин (это число оказывается равным числу степеней свободы механической системы) среди $\delta q^1, \ldots, \delta q^s$ будут независимыми, а остальные будут выражаться через них по формулам (1.29). Указанное свойство можно было бы принять за определение числа степеней свободы.

Введем преобразование (1.26) между системами координат специальным образом, учитывая уравнения связей (1.28):

$$q_*^\lambda = f_*^\lambda(t, q)\,, \quad \lambda = \overline{1, l}\,, \quad l = s - k\,, \qquad q_*^{l+\varkappa} = f_0^\varkappa(t, q)\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,.$$

В этом случае в силу выполнения уравнений связей (1.28) вариации координат $\delta q_*^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1, k}$, оказываются тождественно равными нулю, а вариации δq_*^λ, $\lambda = \overline{1, l}$, будут произвольными. Поэтому вектор возможных перемещений запишется в виде

$$\delta\mathbf{y} = \delta q_*^\lambda\, \mathbf{e}^*_\lambda\,. \tag{1.30}$$

Согласно теории, изложенной в § 7 главы VI, в случае наложения голономных связей векторы (7.13) в главе VI формируют $\mathbb{R}^K$-подпространство, а ортогональное к нему подпространство $\mathbb{R}_L$ имеет основной базис $\{\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_l^*\}$. Таким образом, именно в $\mathbb{R}_L$-пространстве находятся векторы (1.30) возможных перемещений механической системы общего вида.

§ 2. Принцип Даламбера — Лагранжа

Принцип Даламбера — Лагранжа. Рассмотрим движение голономной механической системы общего вида с s степенями свободы в криволинейных координатах $q = (q^1, \ldots, q^s)$ с базисами

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s\}, \quad \{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^s\}. \tag{2.1}$$

Как показано в главе VI, в этой системе координат при наложении идеальных голономных связей

$$f_0^{\varkappa}(t, q) = 0, \quad \varkappa = \overline{1, k}, \tag{2.2}$$

движение описывается уравнениями Лагранжа первого рода в криволинейных координатах (уравнениями Лагранжа второго рода с множителями)

$$MW_\sigma \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial q^\sigma}, \quad \sigma = \overline{1, s}. \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение новую систему криволинейных координат $q_* = (q_*^1, \ldots, q_*^s)$ и зададим формулы перехода между двумя рассматриваемыми системами:

$$q_*^\rho = q_*^\rho(t, q), \quad q^\sigma = q^\sigma(t, q_*), \quad \rho, \sigma = \overline{1, s}. \tag{2.4}$$

Опираясь на формулы (2.4), построим две системы векторов

$$\mathbf{e}_*^\rho = \frac{\partial q_*^\rho}{\partial q^{\sigma_*}}\,\mathbf{e}^{\sigma_*}, \quad \mathbf{e}_\sigma^* = \frac{\partial q^\tau}{\partial q_*^\sigma}\,\mathbf{e}_\tau, \quad \rho, \sigma, \sigma_*, \tau = \overline{1, s}. \tag{2.5}$$

Эти векторы создают взаимный и обратный базисы новой системы координат $q_* = (q_*^1, \ldots, q_*^s)$.

Как и в главе VI, перейдем от системы координат $q = (q^1, \ldots, q^s)$ к системе $q_* = (q_*^1, \ldots, q_*^s)$ по формулам, учитывающим наложенные голономные связи (2.2):

$$\begin{gathered} q_*^\lambda = q_*^\lambda(t, q), \quad \lambda = \overline{1, l}, \quad l = s - k, \\ q_*^{l+\varkappa} = q_*^{l+\varkappa}(t, q) \equiv f_0^{\varkappa}(t, q), \quad \varkappa = \overline{1, k}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Тогда согласно формулам (2.5) и (2.6) уравнения связей (2.2) зададут k векторов

$$\mathbf{e}_*^{l+\varkappa} = \frac{\partial q_*^{l+\varkappa}}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma = \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma = \boldsymbol{\nabla} f_0^\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,$$

образующих взаимный базис K-пространства, а согласно соотношениям (2.5) ортогональное к нему L-пространство формируется векторами основного базиса

$$\mathbf{e}_\lambda^* = \frac{\partial q^\tau}{\partial q_*^\lambda}\,\mathbf{e}_\tau\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,.$$

Теперь в L-пространстве движение будет описываться системой уравнений Лагранжа второго рода

$$MW_\lambda^* \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_*^\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial q_*^\lambda} = Q_\lambda^*\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,. \tag{2.7}$$

Здесь через T^* обозначена кинетическая энергия системы, составленная в координатах q_*.

Как видим, запись дифференциальных уравнений движения зависит от выбранной системы координат. Найдем выражение, эквивалентное этим уравнениям, инвариантное относительно выбора координатной системы.

Используя формулы (2.4), при фиксированном t составим частные дифференциалы (вариации координат) δq_*^ρ и δq^σ:

$$\delta q_*^\rho = \frac{\partial q_*^\rho}{\partial q^\sigma}\,\delta q^\sigma\,, \quad \delta q^\sigma = \frac{\partial q^\sigma}{\partial q_*^\tau}\,\delta q_*^\tau\,, \qquad \rho,\sigma,\tau = \overline{1,s}\,. \tag{2.8}$$

При конкретизации формул перехода (2.4) в виде (2.6) за счет выполнения связей (2.2) формулы (2.8) перепишем следующим образом:

$$\delta q_*^\lambda = \frac{\partial q_*^\lambda}{\partial q^\sigma}\,\delta q^\sigma\,, \quad \delta q^\sigma = \frac{\partial q^\sigma}{\partial q_*^\lambda}\,\delta q_*^\lambda\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \tag{2.9}$$

причем

$$\delta q_*^{l+\varkappa} = \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\sigma}\,\delta q^\sigma = 0\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{2.10}$$

Таким образом, согласно формулам (2.9) и (2.10) вариации δq_*^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, оказываются свободными, вариации $\delta q_*^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, оказываются равными нулю, а вариации δq^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, связаны соотношениями (2.10) (то есть l из них можно задать произвольным образом, а остальные k по ним определятся из формул (2.10)).

Умножим теперь уравнения (2.3) на вариации координат δq^σ и сложим. Тогда получим

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} - Q_\sigma - \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\sigma}\right) \delta q^\sigma = 0\,. \tag{2.11}$$

Рассмотрим появившуюся здесь двойную сумму

$$\Lambda_\varkappa \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\sigma}\, \delta q^\sigma\,. \tag{2.12}$$

Умножим условия (2.10), наложенные на вариации, на величины $\Lambda_\varkappa$ и сложим. Тогда получим

$$\Lambda_\varkappa \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\sigma}\, \delta q^\sigma = 0\,. \tag{2.13}$$

Таким образом, двойная сумма (2.12) оказывается равной нулю, и поэтому уравнение (2.11) перепишется в виде

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} - Q_\sigma\right) \delta q^\sigma = 0\,. \tag{2.14}$$

Но полученное выражение (2.14) при использовании скалярного произведения двух векторов может быть записано как уравнение

$$\big(M\mathbf{W} - \mathbf{Y}\big) \cdot \delta\mathbf{y} = 0\,. \tag{2.15}$$

Здесь вектор

$$\delta\mathbf{y} = \delta q^\sigma\, \mathbf{e}_\sigma \tag{2.16}$$

является возможным перемещением системы, если δq^σ, $\sigma = \overline{1, s}$, удовлетворяют условиям (2.10).

Покажем теперь, что к этому же выражению (2.15) можно свести и уравнения (2.7). Действительно, умножая последние на δq_*^λ и складывая все полученные выражения, будем иметь

$$(MW_\lambda^* - Q_\lambda^*)\, \delta q_*^\lambda = 0\,. \tag{2.17}$$

Отсюда опять получим выражение (2.15), в котором теперь возможное перемещение представлено в виде

$$\delta\mathbf{y} = \delta q_*^\lambda\, \mathbf{e}_\lambda^*\,. \tag{2.18}$$

Таким образом, из уравнений движения (2.3) и (2.7) получено уравнение (2.15), не зависящее от выбора криволинейной системы координат.

Докажем теперь обратное утверждение о том, что если справедливо утверждение (2.15), то из него можно получить уравнения движения (2.3) и (2.7).

Действительно, переписывая скалярное произведение (2.15) в виде суммы произведений ковариантных и контравариантных компонент векторных сомножителей с учетом представления (2.18), получим формулу (2.17). А из этой формулы ввиду произвольности величин δq_*^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, получаем равенство нулю коэффициентов при этих множителях, то есть выполнение уравнений Лагранжа второго рода (2.7).

Несколько длиннее получаются из формулы (2.15) уравнения движения в форме (2.3). Теперь расписывать скалярное произведение (2.15) двух векторов будем, используя представление (2.16). Тогда из формулы (2.15) получим выражение (2.14). Вычитая из него нулевую двойную сумму (2.13), получим выражение (2.11). Имеющиеся в (2.11) s слагаемых разделим на две группы. В первую группу выделим слагаемые с δq^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, $l = s - k$, считая, что эти вариации являются независимыми. Остальные (зависимые) вариации $\delta q^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, можно выразить через них из условий (2.10). В этой второй группе слагаемых с $\delta q^{l+1}, \dots, \delta q^s$ в коэффициентах при них выберем такие $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, при которых будут обращаться в нули коэффициенты при них, то есть потребуем выполнения соотношений

$$MW_{l+\varkappa} - Q_{l+\varkappa} - \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^{l+\varkappa}} = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{2.19}$$

В оставшихся в сумме (2.11) первых l слагаемых величины $\delta q^1, \dots, \delta q^l$ являются независимыми, поэтому равенство нулю этой суммы может быть лишь при обращении в нули коэффициентов при них, то есть при выполнении соотношений

$$MW_\lambda - Q_\lambda - \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\lambda} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,. \tag{2.20}$$

Таким образом, из выполнения выражения (2.15) получены уравнения Лагранжа первого рода в криволинейных координатах (2.19), (2.20).

Итак, из основных форм уравнений динамики голономных систем (2.3), (2.7), с одной стороны, получена формула (2.15), а с другой стороны, оказывается, что при выполнении утверждения (2.15) имеют место дифференциальные уравнения движения голономных систем (2.3), (2.7). Поэтому запись (2.15) можно принять за принцип механики, свойственный движению голономных систем. Он называется *принципом Даламбера — Лагранжа* и утверждает, что при наложении идеальных голономных

удерживающих связей работа сил инерции и активных сил, действующих на механическую систему, на возможном перемещении системы равна нулю.

Так как векторное уравнение несвободного движения имеет вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}\,,$$

то принцип (2.15) можно записать и в виде

$$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{y} = 0\,, \tag{2.21}$$

что отражает ортогональность реакции $\mathbf{R}$ введенных идеальных связей (2.2) к возможному перемещению $\delta\mathbf{y}$. Сравнивая запись (2.21) с выражением (2.13), видим, что

$$\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma \equiv \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla} f_0^\varkappa\,,$$

то есть при идеальных связях ее реакция равна составляющей $\mathbf{R}^K$.

Принцип (2.15) может быть распространен и на неидеальные голономные связи (2.2), для которых $\mathbf{R}_L \neq 0$. В этом случае вектор $\mathbf{R}_L$ относят к активным силам и переписывают формулу (2.15) в виде

$$\big(M\mathbf{W} - \mathbf{Y} - \mathbf{R}_L\big) \cdot \delta\mathbf{y} = 0\,. \tag{2.22}$$

Принцип Даламбера — Лагранжа для системы материальных точек. Если воспользоваться для описания движения системы материальных точек понятием изображающей точки (см. главу VI), то принцип Даламбера — Лагранжа (2.15) в $3n$-мерном декартовом пространстве можно представить в виде

$$\big(M\ddot{y}_\mu - Y_\mu\big)\,\delta y_\mu = 0\,, \quad \mu = \overline{1, 3n}\,. \tag{2.23}$$

Перепишем формулу (2.23) для трехмерного пространства:

$$\big(m_\mu \ddot{x}_\mu - X_\mu\big)\,\delta x_\mu = 0\,, \quad \mu = \overline{1, 3n}\,. \tag{2.24}$$

Теперь голономные связи накладывают на координаты рассматриваемых n точек ограничения

$$f_0^\varkappa(t, x) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \qquad x = (x_1, \ldots, x_{3n})\,, \tag{2.25}$$

поэтому вариации координат, входящие в формулу (2.24), удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial x_\mu}\,\delta x_\mu = 0\,, \qquad \mu = \overline{1,3n}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{2.26}$$

Переходя в формуле (2.24) к нумерации точек с массами m_ν, $\nu = \overline{1,n}$, в векторном виде получим принцип возможных перемещений для системы материальных точек:

$$\left(m_\mu \ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu\right)\cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,. \tag{2.27}$$

В формуле (2.27) возможные перемещения материальных точек задаются формулами

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \delta x_{\nu 1}\mathbf{i}_1 + \delta x_{\nu 2}\mathbf{i}_2 + \delta x_{\nu 3}\mathbf{i}_3\,,$$

где вариации $\delta x_{\nu j}$ $(\nu = \overline{1,n},\ j = \overline{1,3})$ подчинены условиям (2.26), так как (см. введение понятия изображающей точки в главе VI)

$$\delta x_\mu = \delta x_{\nu j}\,, \quad \mu = 3(\nu - 1) + j\,, \qquad \nu = \overline{1,n}\,, \quad j = \overline{1,3}\,.$$

Обратимся теперь к понятию идеальности вводимых голономных связей (2.2). Напомним, что эти связи в случае движения n материальных точек переписываются в виде (2.25). Из условия идеальности связей следует справедливость следующей цепочки равенств (отказываемся от использования понятия «немого индекса» и пишем знаки сумм):

$$\mathbf{R}\cdot\delta\mathbf{y} = \sum_{\varkappa=1}^{k}\Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla} f_0^{\varkappa}\cdot\delta\mathbf{y} = \sum_{\varkappa=1}^{k}\Lambda_\varkappa\sum_{\mu=1}^{3n}\frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial y_\mu}\,\delta y_\mu =$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k}\Lambda_\varkappa\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial x_{\nu 1}}\,\delta x_{\nu 1} + \frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial x_{\nu 2}}\,\delta x_{\nu 2} + \frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial x_{\nu 3}}\,\delta x_{\nu 3}\right) = 0\,,$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{R}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0\,, \tag{2.28}$$

где $\mathbf{R}_\nu$ — сила реакции, приложенная к массе m_ν со стороны всех связей (2.25):

$$\mathbf{R}_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k}\Lambda_\varkappa\left(\frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial x_{\nu 1}}\,\mathbf{i}_1 + \frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial x_{\nu 2}}\,\mathbf{i}_2 + \frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial x_{\nu 3}}\,\mathbf{i}_3\right).$$

Соотношение (2.28) может быть принято за определение идеальности связей (2.25). Без введения понятия изображающей точки данное определение носит трудно объяснимый аксиоматический характер. Фактиче-

ски же, как было показано, условие (2.28) является простым обобщением обычного понятия идеальности связи для одной точки на случай изображающей точки.

§ 3. Принцип Суслова — Журдена. Связи типа Четаева. Обобщенный принцип Даламбера — Лагранжа

Принцип Суслова — Журдена. Перейдем к рассмотрению дифференциального вариационного принципа, свойственного неголономным системам. Логика рассуждений будет похожа на рассуждения, применявшиеся в предыдущем параграфе.

Пусть теперь на движение механической системы, описываемой по-прежнему криволинейными координатами $q = (q^1, \dots, q^s)$ с базисами (2.1), наложены идеальные неголономные связи

$$f_1^{\varkappa}(t, q, \dot q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{3.1}$$

Свяжем обобщенные скорости $\dot q = (\dot q^1, \dots, \dot q^s)$ и псевдоскорости (квазискорости) $v_* = (v_*^1, \dots, v_*^s)$ преобразованиями

$$v_*^\rho = v_*^\rho(t, q, \dot q)\,, \quad \dot q^\sigma = \dot q^\sigma(t, q, v_*)\,, \quad \rho, \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{3.2}$$

причем здесь t и q рассматриваются как параметры. Как было показано в главе VI, при этом можно ввести неголономные базисы

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\,\rho} = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^{\sigma_*}}\,\mathbf{e}^{\,\sigma_*}\,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma = \frac{\partial \dot q^\tau}{\partial v_*^\sigma}\,\mathbf{e}_\tau\,, \quad \rho, \sigma, \sigma_*, \tau = \overline{1, s}\,.$$

Напомним, что если в преобразованиях (3.2) учитывать неголономные связи, то касательное пространство разобьется на прямую сумму подпространств K и L.

Составим частные дифференциалы $\delta' v_*^\rho$ и $\delta' \dot q^\sigma$ преобразований (3.2), считая по-прежнему t и q параметрами:

$$\delta' v_*^\rho = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot q^\sigma}\,\delta' \dot q^\sigma\,, \quad \delta' \dot q^\sigma = \frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\rho}\,\delta' v_*^\rho\,, \qquad \rho, \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{3.3}$$

Если в преобразованиях (3.2) квазискорости $v_*^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1, k}$, приравнять функциям $f_1^{\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1, k}$, задаваемым уравнениями связей (3.1), то формулы (3.3) примут вид

$$\delta' v_*^\lambda = \frac{\partial v_*^\lambda}{\partial \dot q^\sigma}\,\delta' \dot q^\sigma\,, \quad \delta' \dot q^\sigma = \frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\,\delta' v_*^\lambda\,, \qquad \sigma = \overline{1, s}\,, \quad \lambda = \overline{1, l}\,, \tag{3.4}$$

и при этом будут выполняться условия

$$\delta' v_*^{l+\varkappa} = \frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial \dot{q}^\sigma}\, \delta' \dot{q}^\sigma = 0\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{3.5}$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\delta' \mathbf{V} = \delta' \dot{q}^\sigma \mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\, \delta' v_*^\lambda\, \mathbf{e}_\sigma = \delta' v_*^\lambda\, \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \tag{3.6}$$

и построим наряду с вектором $\mathbf{V}$, рассматриваемым как вектор-функция переменных $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s)$, новый вектор

$$\widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} + \delta' \mathbf{V} = (\dot{q}^\sigma + \delta' \dot{q}^\sigma)\, \mathbf{e}_\sigma\,.$$

Подставим переменные $\dot{q}^\sigma + \delta' \dot{q}^\sigma$ вектора скорости $\widetilde{\mathbf{V}}$ в уравнения связей (3.1) и разложим функции $f_1^{\varkappa}$ (как функции лишь переменных $\dot{q}^\sigma$) в ряды Тейлора в окрестности точки с координатами $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s)$, считая величины $q^1, \dots, q^s, t$ неизменными параметрами:

$$f_1^{\varkappa}(t, q, \dot{q} + \delta' \dot{q}) = f_1^{\varkappa}(t, q, \dot{q}) + \boldsymbol{\nabla}' f_1^{\varkappa} \cdot \delta' \mathbf{V} + o(|\delta' \mathbf{V}|) = 0\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{3.7}$$

Из этих равенств получаем, что если в момент t в имеющемся положении $(q^1, \dots, q^s)$ при имеющихся обобщенных скоростях $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s)$ кинематически возможна скорость $\mathbf{V}$, то с точностью до малых порядка выше первого кинематически возможна и скорость $\widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} + \delta' \mathbf{V}$ при условии, что

$$\boldsymbol{\nabla}' f_1^{\varkappa} \cdot \delta' \mathbf{V} = 0\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{3.8}$$

Таким образом, множество векторов $\delta' \mathbf{V}$, удовлетворяющих уравнениям (3.8), характеризует кинематически возможные изменения скорости $\mathbf{V}$, допускаемые неголономными связями в момент времени t, когда система находится в положении $(q^1, \dots, q^s)$. Произвольный вектор $\delta' \mathbf{V}$, удовлетворяющий соотношениям (3.8), называется *вариацией скорости* $\mathbf{V}$.

В главе VI были получены уравнения движения неголономных систем в форме уравнений Маджи:

$$(MW_\sigma - Q_\sigma) \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s - k\,, \tag{3.9}$$

и в форме уравнений Лагранжа первого рода в криволинейных координатах для неголономных систем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial \dot{q}^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{3.10}$$

Эти уравнения зависят от выбранной системы криволинейных координат. Построим соответствующее им выражение, инвариантное относительно выбора системы координат.

Начнем с уравнений Маджи (3.9). Умножим каждое уравнение на $\delta' v_*^\lambda$ и результаты сложим. Тогда окажется, что уравнениям Маджи (3.9) эквивалентно уравнение

$$\big(MW_\sigma - Q_\sigma\big)\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda}\,\delta' v_*^\lambda = 0\,, \tag{3.11}$$

которое согласно формулам (3.4) может быть записано в виде

$$\big(MW_\sigma - Q_\sigma\big)\,\delta'\dot{q}^\sigma = 0\,. \tag{3.12}$$

Если теперь учесть формулу вариации скорости (3.6), то выражение (3.12) может быть представлено в векторной форме:

$$\big(M\mathbf{W} - \mathbf{Y}\big)\cdot\delta'\mathbf{V} = 0\,. \tag{3.13}$$

Приведем теперь уравнения (3.10) к виду (3.13). Умножим эти уравнения на вариации $\delta'\dot{q}^\sigma$ и сложим. Тогда получим

$$\left(MW_\sigma - Q_\sigma - \Lambda_\varkappa\frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot{q}^\sigma}\right)\delta'\dot{q}^\sigma = 0\,. \tag{3.14}$$

Рассмотрим имеющуюся в этой формуле двойную сумму

$$\Lambda_\varkappa\frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\delta'\dot{q}^\sigma\,. \tag{3.15}$$

Но если умножить условия на вариации $\delta'\dot{q}^\sigma$ (3.5) на $\Lambda_\varkappa$ и сложить, то получим

$$\Lambda_\varkappa\frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\delta'\dot{q}^\sigma = 0\,, \tag{3.16}$$

то есть выражение (3.15) оказывается равным нулю, и формула (3.14) переписывается в виде

$$\left(MW_\sigma - Q_\sigma\right)\delta'\dot{q}^\sigma = 0\,. \tag{3.17}$$

При учете векторного представления вариации скорости (3.6) формулу (3.17) можно представать в виде (3.13), что и хотели показать.

Таким образом, из уравнений (3.9) и (3.10), являющихся выражением второго закона Ньютона при наличии идеальных неголономных связей

(3.1), получили справедливость записи выражения (3.13). Докажем теперь обратное утверждение: если принять выражение (3.13) за исходное, то из него будут следовать уравнения движения (3.9) и (3.10). Если это удастся сделать, то выражение (3.13) можно будет принять за принцип механики, справедливый при наложении идеальных неголономных связей.

Итак, за исходное положение механики принимаем утверждение (3.13). Если воспользоваться представлением вариации скорости (3.6), то скалярное произведение (3.13) можно переписать в виде (3.11). Из этой формулы ввиду независимости вариаций $\delta' v_*^\lambda$, $\lambda = \overline{1,l}$, приходим к уравнениям Маджи (3.9).

Получим теперь из (3.13) уравнения (3.10). Скалярное произведение (3.13) перепишем в виде (3.12) и вычтем из него нулевое выражение (3.16), получим запись (3.14). Будем считать вариации скоростей $\delta' \dot{q}^\lambda$, $\lambda = \overline{1,l}$, независимыми, а вариации $\delta' \dot{q}^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, выражающимися через них по формулам (3.5). Тогда, подбирая $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, в множителях последних k слагаемых таким образом, чтобы эти коэффициенты обращались в нули, и приравнивая нулю коэффициенты в первых l слагаемых при независимых вариациях, получим уравнения (3.10).

Таким образом, запись (3.13) выражает принцип механики, имеющий место при наличии идеальных неголономных связей (3.1). Будем называть его *принципом Суслова — Журдена*[3]. Этот принцип утверждает, что при наложении на движение системы идеальных удерживающих неголономных связей скалярное произведение сил инерции и активных сил, действующих на механическую систему, на вектор вариации обобщенной скорости равно нулю.

Связи типа Четаева. Обобщенный принцип Даламбера — Лагранжа. Многие исследователи вместо получения принципа в форме Суслова — Журдена пытались распространить принцип Даламбера — Лагранжа, справедливый исходно лишь для голономных связей, на случай наложения неголономных связей. Но для этого требовалось определить понятие возможных перемещений для неголономных систем[4]. С этой целью

[3]Этот принцип в 1908–1909 гг. предложил Ф. Журден, но почти на десять лет ранее, пользуясь другой терминологией, его сформулировал в своем учебнике и Г. К. Суслов. Поэтому принцип (3.13) справедливо называть принципом Суслова — Журдена (см. статью: *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.*. Принцип Суслова — Журдена как следствие уравнений динамики // Сб. научно-методич. статей по теорет. механике. Вып. 12. М.: Высшая школа, 1982. С. 72–79.).

[4]Вот, что пишет по этому поводу известный механик В. И. Киргетов (см. его статью: *Киргетов В. И.* О возможных перемещениях материальных систем с линейными дифференциальными связями второго порядка // Прикл. мат. и мех. 1959. Т. XXIII.

Н. Г. Четаев[5] постулятивно подчинил обсуждаемые возможные перемещения $\delta q = (\delta q^1, \ldots, \delta q^s)$ при неголономных связях (3.1) условиям

$$\frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial \dot{q}^{\sigma}}\,\delta q^{\sigma} = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{3.18}$$

Связи, удовлетворяющие этим условиям, стали называться *связями типа Четаева*. Можно отметить, что этим вопросом занимались многие видные ученые того времени, поэтому, например, Дж. Папаставридис[6] называет этот постулат определением Маурера — Аппеля — Четаева — Гамеля.

Но условия Четаева (3.18) на возможные перемещения совпадают с ограничениями (3.5), накладываемыми неголономными связями (3.1) на вариации скорости. Действительно[7], если уравнения (3.18) разделить на бесконечно малый промежуток времени τ_0, введенный Герцем, то появившиеся множители $\delta q^{\sigma}/\tau_0$ можно трактовать как возможные скорости $\delta' \dot{q}^{\sigma}$. Поэтому принцип Суслова — Журдена оказывается эквивалентным принципу Даламбера — Лагранжа (2.15), но в котором контравариантные компоненты возможного перемещения $\delta \mathbf{y} = \delta q^{\sigma}\,\mathbf{e}_{\sigma}$ удовлетворяют уравнениям (3.18). Принцип Даламбера — Лагранжа, распространенный для неголономных систем в случае наложения связей типа Четаева, получил название *обобщенного принципа Даламбера — Лагранжа*.

Пример 2. *Уравнения движения редуктора Новосёлова* (составление уравнений движения с помощью принципа Суслова — Журдена). Выведем уравнения движения фрикционного редуктора, впервые рассмотренного В. С. Новосёловым[8]. Редуктор (рис. 2) передает вращение от вала 1 к валу 2 и состоит из диска A, жестко укрепленного на валу 1, колесика B, свободно вращающегося

Вып. 4. С. 666): «Понятие “возможного перемещения” системы, без сомнения, является основным в аналитической механике. Это не просто одно из понятий аналитической механики, но понятие, на котором построено все здание аналитической механики, понятие, полностью обусловливающее характер аналитической механики, степень ее общности, границы ее приложения. Аналитическая механика распространяется только на те материальные системы, для которых установлено понятие “возможного перемещения” системы или, другими словами, указано определение “возможных перемещений” системы».

[5]См. классическую работу Н. Г. Четаева: *Четаев Н. Г.* О принципе Гаусса // Изв. физ.-мат. общества при Казанском ун-те. Т. 6. Сер. 3. 1932–1933. С. 68–71.

[6]См. учебник: *Papastavridis J. G.* Analytical Mechanics. Oxford: University Press, 2002. 1392 p.

[7]См. работу: *Поляхов Н. Н.* О дифференциальных принципах механики, получаемых из уравнений движения неголономных систем // Вестн. Ленингр. ун-та. 1974. Вып. 3. № 13. С. 106–116.

[8]См. статью: *Новосёлов В. С.* Пример нелинейной неголономной связи, не относящейся к типу Н. Г. Четаева // Вестн. Ленингр. ун-та. 1957. № 19. С. 106–111.

на валу 3, вала 2 с барабаном C, центробежного регулятора с массами K и N и пружиной жесткости c_1. Перемещение муфты D регулятора с помощью троса, перекинутого через неподвижные блоки O_1 и O_2, и пружины жесткости c_2 вызывает перемещение вала 3 с колесиком B и приводит к изменению расстояния ρ средней окружности колесика B от оси вала 1. Колесо B имеет радиус a. Даны размеры: $PN = NL = LK = KP = l$.

Положение фрикционного редуктора определяется следующими обобщенными координатами: углами поворота валов $q^1 = \varphi_1$ и $q^2 = \varphi_2$ и расстоянием $q^3 = x$ муфты D от шарнира L. Расстояние ρ, как следует из рис. 2, связано с x соотношением

$$x - \rho = c \equiv \text{const}\,.$$

На рассматриваемую систему наложена неголономная связь

$$f_1^1(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3) \equiv (x - c)\dot{\varphi}_1 - R\dot{\varphi}_2 = 0\,. \tag{3.19}$$

При отсутствии проскальзывания связь (3.19) выражает условие равенства окружных скоростей точек соприкосновения колесика B с диском A и барабаном C.

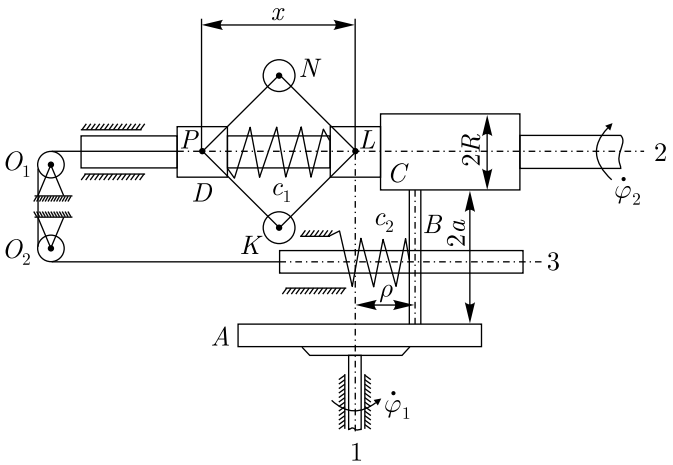

Рис. 2. Редуктор Новосёлова

Кинетическая и потенциальная энергии определяются соответственно выражениями

$$T = \frac{1}{2}\Bigg[J_A\dot{\varphi}_2^2 + J_C\dot{\varphi}_2^2 + m_D\dot{x}^2 + m_B\dot{\rho}^2 + J_B\frac{R^2}{a^2}\dot{\varphi}_2^2 +$$
$$+ 2m_N\left(\left(l^2 - \frac{x^2}{4}\right)\dot{\varphi}_2^2 + \frac{l^2\dot{x}^2}{4l^2 - x^2}\right)\Bigg],$$
$$\Pi = \frac{1}{2}c_1(\delta_1 + x - x_0)^2 + \frac{1}{2}c_2(\delta_2 + x_0 - x)^2\,.$$

Здесь $\delta_1,\ \delta_2$ — статические деформации пружин жесткостей c_1 и c_2, x_0 — статическое отклонение муфты D от шарнира L.

Запишем принцип Суслова — Журдена применительно к этой системе:

$$(MW_1 - Q_1)\,\delta'\dot\varphi_1 + (MW_2 - Q_2)\,\delta'\dot\varphi_2 + (MW_3 - Q_3)\,\delta'\dot x = 0\,. \tag{3.20}$$

Связь между вариациями скоростей имеет вид

$$\frac{\partial f_1^1}{\partial\dot\varphi_1}\,\delta'\dot\varphi_1 + \frac{\partial f_1^1}{\partial\dot\varphi_2}\,\delta'\dot\varphi_2 = 0\,, \tag{3.21}$$

следовательно, в уравнении (3.20) независимыми являются вариации $\delta'\dot\varphi_2$ и $\delta'\dot x$. Выражая из соотношения (3.21) вариацию $\delta'\dot\varphi_1$ через $\delta'\dot\varphi_2$, в результате из уравнения (3.20) получаем

$$(MW_1 - Q_1)\frac{R}{x-c} + (MW_2 - Q_2) = 0\,, \tag{3.22}$$

$$MW_3 - Q_3 = 0. \tag{3.23}$$

Здесь $Q_1 = M_1,\ Q_2 = -M_2$ — моменты сил, приложенных к валам 1 и 2 соответственно, а $Q_3 = -\partial\Pi/\partial x$.

Полученные уравнения, как следует из общей теории, совпадают с уравнениями Маджи. Отметим, что второе из них является обычным уравнением Лагранжа второго рода, так как координата x голономна.

Так как

$$MW_\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,, \qquad \sigma = \overline{1,3}\,,$$

то уравнения (3.22) и (3.23) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} J_A\frac{R}{x-c}\ddot\varphi_1 + J(x)\ddot\varphi_2 - m_N x\dot x\dot\varphi_2 = M_1\frac{R}{x-c} - M_2\,, \\ m(x)\ddot x + \frac{1}{2}m_N x\dot\varphi_2^2 + \frac{2l^2x}{(4l^2+x^2)^2}m_N\dot x^2 = c_1(-\delta_1 - x + x_0) + c_2(-x + x_0 + \delta_2)\,. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Здесь

$$J(x) = J_C + J_B\frac{R^2}{a^2} + \frac{1}{2}m_N(4l^2 - x^2)\,,$$

$$m(x) = m_B + m_D + \frac{2m_N l^2}{4l^2 - x^2}\,.$$

Уравнения движения (3.24) совместно с уравнением связи (3.19) образуют замкнутую систему для определения функций $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ x(t)$.

Отметим, что, если в первое уравнение системы (3.24) подставить продифференцированное по времени уравнение связи (3.19), то уравнения запишутся в форме уравнений Аппеля[9].

[9]Именно такие уравнения были выведены А. И. Лурье (см. монографию: *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.).

§ 4. Принцип Гаусса

Применим теперь логику предыдущих параграфов для вывода принципа Гаусса, справедливого при наложении идеальных линейных неголономных связей второго порядка

$$f_2^{\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q) \equiv a_{2\sigma}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q)\,\ddot q^{\,\sigma} + a_{2,0}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q) \;=\; 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{4.1}$$

при изучении движения механической системы в криволинейной системе координат $q = (q^1, \dots, q^s)$ с базисами (2.1). В этом случае будем опираться на обобщенные уравнения Маджи

$$(MW_\sigma - Q_\sigma)\,\frac{\partial \ddot q^{\,\sigma}}{\partial w_*^\lambda} = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s-k\,, \tag{4.2}$$

и на обобщенные уравнения Лагранжа второго рода с множителями

$$MW_\sigma = Q_\sigma + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_2^{\varkappa}}{\partial \ddot q^{\,\sigma}}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{4.3}$$

полученные в § 9 главы VI.

Свяжем обобщенные ускорения $\ddot q^{\,\sigma}$, $\sigma = \overline{1,s}$, с псевдоускорениями $w_* = (w_*^1, \dots, w_*^s)$ преобразованиями

$$w_*^\rho = w_*^\rho(t,q,\dot q,\ddot q)\,, \quad \ddot q^{\,\sigma} = \ddot q^{\,\sigma}(t,q,\dot q,w_*)\,, \quad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,, \tag{4.4}$$

задающими неголономные базисы (см. § 9 главы VI)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\,\rho} = \frac{\partial w_*^\rho}{\partial \ddot q^{\,\sigma_*}}\,\mathbf{e}^{\,\sigma_*}\,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma = \frac{\partial \ddot q^{\,\tau}}{\partial w_*^\sigma}\,\mathbf{e}_\tau\,, \quad \rho,\sigma,\sigma_*,\tau = \overline{1,s}\,.$$

В случае учета в формулах (4.4) уравнений связей (4.1)

$$\begin{gathered} w_*^\lambda = w_*^\lambda(t,q,\dot q,\ddot q)\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad l = s-k\,, \\ w_*^{l+\varkappa} = w_*^{l+\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q) \equiv f_2^{\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q)\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \end{gathered} \tag{4.5}$$

касательное пространство разбивается на прямую сумму подпространств K и L.

По преобразованиям (4.4) напишем вариации обобщенных ускорений и квазиускорений, считая $t, q, \dot q$ параметрами:

$$\delta'' w_*^\rho = \frac{\partial w_*^\rho}{\partial \ddot q^{\,\sigma}}\,\delta''\ddot q^{\,\sigma}\,, \quad \delta''\ddot q^{\,\sigma} = \frac{\partial \ddot q^{\,\sigma}}{\partial w_*^\rho}\,\delta'' w_*^\rho\,, \qquad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,. \tag{4.6}$$

В случае преобразований (4.5) формулы (4.6) перепишутся следующим образом:

$$\delta'' w_*^\lambda = \frac{\partial w_*^\lambda}{\partial \ddot{q}^\sigma}\,\delta''\ddot{q}^\sigma\,, \quad \delta''\ddot{q}^\sigma = \frac{\partial \ddot{q}^\sigma}{\partial w_*^\lambda}\,\delta'' w_*^\lambda\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \tag{4.7}$$

$$\delta'' w_*^{l+\varkappa} = \frac{\partial f_2^\varkappa}{\partial \ddot{q}^\sigma}\,\delta''\ddot{q}^\sigma = 0\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{4.8}$$

Введем теперь вектор

$$\delta''\mathbf{W} = \delta''\ddot{q}^\sigma \mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial \ddot{q}^\sigma}{\partial w_*^\lambda}\,\delta'' w_*^\lambda\,\mathbf{e}_\sigma = \delta'' w_*^\lambda\,\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \tag{4.9}$$

и построим наряду с вектором $\mathbf{W}$, рассматриваемым как вектор-функция переменных $\ddot{q} = (\ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^s)$, новый вектор

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} + \delta''\mathbf{W} = (\ddot{q}^\sigma + \delta''\ddot{q}^\sigma)\,\mathbf{e}_\sigma\,.$$

По аналогии с тем, как мы поступали с формулой (3.7), разложим в ряды Тейлора уравнения связей (4.1) в окрестности точки с координатами $(\ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^s)$, считая величины $q^1, \dots, q^s$, $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s$, t неизменными параметрами:

$$\begin{gathered} f_2^\varkappa(t, q, \dot{q}, \ddot{q} + \delta''\ddot{q}) = f_2^\varkappa(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) + \boldsymbol{\nabla}'' f_2^\varkappa \cdot \delta''\mathbf{W} + o(|\delta''\mathbf{W}|)\,, \\ \varkappa = \overline{1,k}\,. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Из равенств (4.10) следует, что если в момент t для точки, имеющей фазовое состояние $(q^1, \dots, q^s, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s)$, кинематически возможно ускорение $\mathbf{W}$, то с точностью до малых порядка выше первого кинематически возможно и ускорение $\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} + \delta''\mathbf{W}$ при условии, что

$$\boldsymbol{\nabla}'' f_2^\varkappa \cdot \delta''\mathbf{W} = 0\,, \qquad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{4.11}$$

Другими словами, множество векторов $\delta''\mathbf{W}$, удовлетворяющих уравнениям (4.11), характеризует кинематически возможные изменения ускорения $\mathbf{W}$, допускаемые неголономными связями (4.1) в момент времени t, когда система находится в фазовом состоянии $(q^1, \dots, q^s, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s)$. Произвольный вектор $\delta''\mathbf{W}$, удовлетворяющий соотношениям (4.11), называется *вариацией ускорения* $\mathbf{W}$.

Теперь, пользуясь полной аналогией с рассуждениями предыдущего параграфа, легко показать, что при векторном представлении вариации обобщенного ускорения (4.9) при произвольности его контравариантных компонент $\delta'' w_*^\lambda$, $\lambda = \overline{1,l}$, и в случае произвольности задания компонент $\delta''\ddot{q}^{\,1}, \ldots, \delta''\ddot{q}^{\,l}$ с последующим определением через них по формулам (4.8) оставшихся компонент $\delta''\ddot{q}^{\,l+1}, \ldots, \delta''\ddot{q}^{\,s}$, при использовании формул (4.7) из уравнений (4.2) и (4.3) может быть получено выражение

$$\big(M\mathbf{W} - \mathbf{Y}\big) \cdot \delta''\mathbf{W} = 0\,. \tag{4.12}$$

И наоборот, из формулы (4.12), принимаемой за исходную, могут быть получены уравнения движения (4.2) и (4.3).

Поэтому утверждение (4.12) можно принять за вариационный дифференциальный принцип механики. Он называется *принципом Гаусса* и утверждает, что при наложении на движение механической системы идеальных удерживающих линейных неголономных связей второго порядка скалярное произведение сил инерции и активных сил, действующих на систему, на вариацию ускорения равно нулю.

Обычно этот принцип записывают в виде

$$\delta'' Z = 0\,, \tag{4.13}$$

где введено обозначение

$$Z = \frac{M}{2}\left(\mathbf{W} - \frac{\mathbf{Y}}{M}\right)^2. \tag{4.14}$$

Использованная в формулах (4.13), (4.14) функция Z называется *принуждением по Гауссу*[10]. Поэтому принцип Гаусса иногда называют и *принципом наименьшего принуждения*. Интересно, что идея функции принуждения ранее использовалась Гауссом при создании им теории ошибок. Напомним, что два штриха в формуле (4.13) подчеркивают, что вариируются только вторые производные от обобщенных координат.

В главе VI второго тома учебника будет изложен *обобщенный принцип Гаусса*, справедливый при наложении неголономных связей любого порядка. Он оказывается весьма эффективным при решении одного из важнейших классов задач теории управления.

[10] От немецкого слова *der Zwang*, что означает *принуждение, насилие*.

§ 5. Единая векторная форма записи и геометрическая интерпретация вариационных дифференциальных принципов

Единая векторная форма записи дифференциальных принципов. Принцип возможных перемещений[11]**.** В предыдущих параграфах были получены вариационные дифференциальные принципы Даламбера — Лагранжа (2.15), Суслова — Журдена (3.13) и Гаусса (4.12). Исходя из их внешнего сходства, все эти принципы можно представить в виде одной векторной записи

$$(M\mathbf{W} - \mathbf{Y}) \cdot \delta\mathbf{x} = 0\,, \tag{5.1}$$

где вектор $\delta\mathbf{x}$ в случае голономных связей (2.2) является вектором возможных перемещений, представляемым в виде (2.16) или (2.18); при наложении неголономных связей (3.1) он является вариацией скорости (3.6); при задании линейных неголономных связей второго порядка (4.1) этот вектор будет вариацией ускорения (4.9). О важности контравариантной структуры этого вектора будет сказано в § 9. Здесь же остановимся на обсуждении следующих моментов.

При выводе дифференциальных принципов основным являлась двусторонняя связь между законами Ньютона и записью принципа: из двух наиболее характерных форм записи дифференциальных уравнений, отражающих справедливость второго закона Ньютона при наличии соответствующих связей, была получена векторная запись принципа, а затем, наоборот, из этого нулевого скалярного произведения, теперь уже постулируемого, выводили как следствие две исходные формы уравнений несвободного движения механической системы.

Получим по этой же логической схеме дифференциальные вариационные принципы непосредственно из векторного уравнения несвободного движения механической системы общего вида, записанного в касательном пространстве к многообразию всех возможных положений механической системы, которые она может иметь в данный момент времени (подробно об этом см. в главе VI):

$$M\mathbf{W} - \mathbf{Y} - \mathbf{R}^K - \mathbf{R}_L = 0\,. \tag{5.2}$$

При идеальных связях

$$\mathbf{R}_L \equiv 0\,, \tag{5.3}$$

[11] См. статью: *Солтаханов Ш. Х., Шугайло Т. С., Юшков М. П.*. К вопросу о векторной записи вариационных дифференциальных принципов механики // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия: Математика. Механика. Астрономия. 2018. Том 63. № 1. С. 141–147.

а вектор $\mathbf{R}^K$ при голономных связях (2.2) представляется в виде

$$\mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_0^\varkappa}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma \equiv \Lambda_\varkappa\,\boldsymbol{\nabla} f_0^\varkappa\,,$$

при неголономных связях первого порядка (3.1) в виде

$$\mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot{q}^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma \equiv \Lambda_\varkappa\,\boldsymbol{\nabla}' f_1^\varkappa\,,$$

при неголономных связях второго порядка (4.1) в виде

$$\mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa \frac{\partial f_2^\varkappa}{\partial \ddot{q}^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma \equiv \Lambda_\varkappa\,\boldsymbol{\nabla}'' f_2^\varkappa\,.$$

Умножая векторное уравнение (5.2) на вариацию вектора $\mathbf{x}$, получаем единую векторную форму записи дифференциальных вариационных принципов:

$$(M\mathbf{W} - \mathbf{Y} - \mathbf{R}^K - \mathbf{R}_L)\cdot\delta\mathbf{x} = 0\,. \tag{5.4}$$

Если теперь исходно считать справедливой запись (5.4), то из нее из-за произвольности вектора $\delta\mathbf{x}$ получаем уравнение движения (5.2). Поэтому нулевое скалярное произведение (5.4) является в зависимости от выбора вектора $\delta\mathbf{x}$ дифференциальным вариационным принципом Даламбера—Лагранжа, Суслова—Журдена или Гаусса.

В случае неидеальных связей обычно вектор $\mathbf{R}_L$ относят к активной силе $\mathbf{Y}$, если же связи идеальны, то выполняется условие (5.3). Из-за ортогональности $\mathbf{R}^K$ к $\delta\mathbf{x}$ теперь принцип (5.4) запишется в привычной форме (5.1).

Обратим особое внимание на удобство использования формы записи дифференциальных вариационных принципов в виде (5.4). Здесь сохраняется нулевое скалярное произведение

$$\mathbf{R}^K\cdot\delta\mathbf{x} = 0\,,$$

которое часто требуется использовать при решении практических задач. В виде примера этого утверждения запишем *принцип возможных перемещений*, справедливый в случае равновесия системы ($\mathbf{W} = 0$) при наличии идеальных голономных связей (2.2):

$$(\mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa\,\boldsymbol{\nabla} f_0^\varkappa)\cdot\delta\mathbf{y} = 0\,. \tag{5.5}$$

Этот принцип является необходимым и достаточным условием равновесия системы. Принцип возможных перемещений (5.5) является основой для

создания так называемой *аналитической статики* (об этом подробнее см. в главе X).

Обсудим еще следующее обстоятельство. Ранее при выводе принципов учитывались либо зависимости между контравариантными компонентами δx^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, задаваемыми наложенными связями, либо независимые вариации δx_*^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, $l = s - k$. В связи с этим из принципов при использовании вариаций δx_*^λ удавалось вывести лишь собственно уравнения движения, и представлялось, что из них не могут быть получены вторые группы уравнений Лагранжа второго рода, уравнений Маджи и обобщенных уравнений Маджи:

$$\begin{gathered} MW_{l+\varkappa}^* = Q_{l+\varkappa}^* + \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \\ (MW_\sigma - Q_\sigma)\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial v_*^{l+\varkappa}} = \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \\ (MW_\sigma - Q_\sigma)\,\frac{\partial \ddot q^{\,\sigma}}{\partial w_*^{l+\varkappa}} = \Lambda_\varkappa\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \\ MW_\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \end{gathered} \tag{5.6}$$

В связи с этим вернемся к векторному уравнению движения (5.2). По принципу освобождаемости его можно рассматривать как движение свободной механической системы под действием сил $\mathbf{Y}$, $\mathbf{R}^K$, $\mathbf{R}_L$. Но если система свободна, то все вариации δx_*^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, независимы, поэтому из равенства нулю коэффициентов при $\delta x_*^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, получаем интересующие нас уравнения (5.6), содержащие множители Лагранжа (обобщенные реакции идеальных связей). Знание этих величин позволяет выяснить, в частности, возможность освобождения механической системы от наложенных на ее движение голономных связей. Помимо этого, в случае рассмотрения равновесия системы при наложении голономных связей отсюда получаем уравнения аналитической статики.

Геометрическая интерпретация принципа Даламбера — Лагранжа. Принцип Даламбера — Лагранжа может быть записан в виде (2.21):

$$\mathbf{R}\cdot\delta\mathbf{y} = 0\,. \tag{5.7}$$

Сравнивая формулы (5.7) и (2.13), заключаем, что

$$\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla} f_0^\varkappa\,. \tag{5.8}$$

Формула (5.8) показывает, что вектор реакции идеальных голономных связей может быть разложен по векторам $\mathbf{e}_*^{l+\varkappa} = \boldsymbol{\nabla} f_0^\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, ба-

зиса K-пространства (при голономных связях это пространство можно назвать «подпространством реакций»). Уравнениями голономных связей в касательном пространстве задается l-мерная поверхность $\mathbb{V}(t,q)$, на которой должна в данный момент времени t находиться точка, соответствующая положению системы. Криволинейной системе координат $q_* = (q_*^1, \dots, q_*^l)$ соответствует базис $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_l^*$, расположенный в плоскости $\mathbb{T}(q,V)$, касательной к поверхности $\mathbb{V}(t,q)$. В этой плоскости лежат векторы $\delta\mathbf{y}$ возможных перемещений системы (при голономных связях это пространство можно назвать «подпространством возможных перемещений»). Таким образом, принцип Даламбера — Лагранжа в форме (5.7) утверждает, что для идеальных голономных связей подпространство реакций (K-пространство) ортогонально подпространству возможных перемещений (L-пространству).

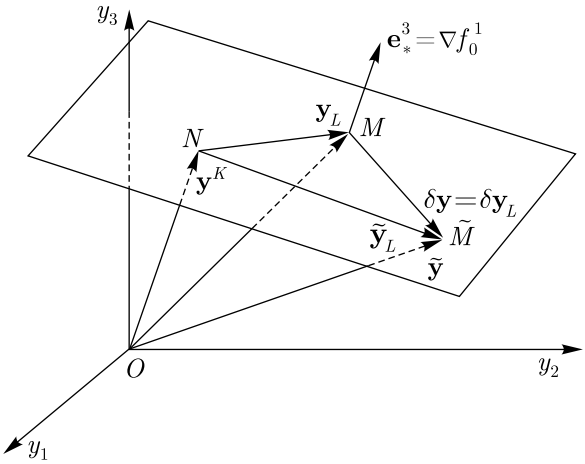

Рис. 3. Возможное перемещение точки при голономной связи

Приведенные рассуждения поясняются на примере движения одной материальной точки при наличии одной голономной связи. В данный момент t она находится на поверхности, задаваемой уравнением голономной связи $f_0^1(t, y_1, y_2, y_3) = 0$, в точке M, имеющей радиус-вектор $\mathbf{y}$. На рис. 3 изображена касательная плоскость, проведенная к этой поверхности в точке M (сама поверхность на рисунке не указана, она является аналогом двумерной поверхности $\mathbb{V}(t,q)$, а касательная плоскость соответствует плоскости $\mathbb{T}(q,\mathbb{V})$). В нашем примере декартовые координаты точки $y = (y_1, y_2, y_3)$ играют роль исходной криволинейной системы координат $q = (q^1, q^2, q^3)$. Так как декартовая система координат ортонормированная

с ортами $\mathbf{i}_\sigma$, $\sigma = \overline{1,3}$, то имеем $\mathbf{e}_\sigma = \mathbf{e}^\sigma = \mathbf{i}_\sigma$, $\sigma = \overline{1,3}$. Переходя от исходной системы координат $q = (q^1, q^2, q^3)$ к новой криволинейной системе координат $q_* = (q_*^1, q_*^2, q_*^3)$ по формулам

$$q_*^\lambda = q_*^\lambda(t, q)\,, \quad \lambda = 1, 2\,, \quad q_*^3 = f_0^1(t, y_1, y_2, y_3)\,, \tag{5.9}$$

где функции $q_*^\lambda(t, q)$ задаются исследователем при формировании преобразования (5.9), получим разбиение имеющегося трехмерного пространства на прямую сумму одномерного K-пространства с вектором $\mathbf{e}_*^3$ и двумерного L-пространства с основным базисом $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\}$. Последние два вектора зависят от выбора исследователем функций $q_*^\lambda(t, q)$, $\lambda = 1, 2$, и определяются из обратного к (5.9) преобразования

$$q^\sigma = q^\sigma(t, q_*)\,, \quad \sigma = \overline{1,3}\,,$$

по формулам

$$\mathbf{e}_\lambda^* = \frac{\partial q^\sigma}{\partial q_*^\lambda}\,\mathbf{e}_\sigma\,, \quad \lambda = 1, 2\,, \quad \sigma = \overline{1,3}\,.$$

Эти векторы лежат в плоскости, касательной к поверхности $f_0^1(t, y_1, y_2, y_3) = 0$ в точке M, и на рис. 3 не изображены.

Согласно рис. 3 материальная точка, находясь в положении M, может, не нарушая связи, получить возможное перемещение $\delta\mathbf{y}$ и переместиться в положение $\widetilde{M}$, характеризуемое радиус-вектором $\widetilde{\mathbf{y}}$. Ортогональность подпространств K и L из рисунка очевидна.

Геометрическая интерпретация принципа Суслова — Журдена. Так как

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}\,,$$

то принцип Суслова — Журдена (3.13) можно переписать в виде

$$\mathbf{R} \cdot \delta'\mathbf{V} = 0\,. \tag{5.10}$$

С другой стороны, из формулы (5.10) при учете выражений (3.6) и (3.16) получаем, что при идеальных неголономных связях их реакция имеет вид

$$\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa\, \boldsymbol{\nabla}' f_1^\varkappa\,. \tag{5.11}$$

Уравнениями связей s-мерное касательное пространство разбивается на прямую сумму двух подпространств K и L размерностей k и l. Эти пространства имеют неголономные базисы $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{l+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^s\}$ и $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_l\}$. Формула (5.11) показывает, что реакция идеальных неголономных связей находится в K-пространстве.

Уравнениям связей (3.1) в пространстве скоростей соответствует l-мерная поверхность $\mathbb{V}(t, q, \dot{q})$, для которой t и q являются заданными параметрами. В зависимости от действующих сил и начальных условий при рассматриваемых t и q система может иметь различные скорости $\mathbf{V}$, но концы этих векторов для выполнения связей (3.1) должны находиться на поверхности $\mathbb{V}(t, q, \dot{q})$. Обозначим точку, соответствующую имеющемуся вектору $\mathbf{V}$, через M. Проведем в этой точке плоскость $\mathbb{T}(\dot{q}, \mathbb{V})$, касательную к поверхности $\mathbb{V}(t, q, \dot{q})$. В этой плоскости расположены базисные векторы $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_l\}$. По ним согласно формуле (3.6) разлагается вектор вариации скорости. При этом принцип (3.13) утверждает равенство нулю скалярного произведения сил $(M\mathbf{W} - \mathbf{Y})$ на вариацию скорости $\delta'\mathbf{V}$, а формула (5.10) показывает ортогональность реакции $\mathbf{R} = \Lambda_{\varkappa} \boldsymbol{\nabla}' f_1^{\varkappa}$ идеальных неголономных связей (3.1) к этой вариации скорости.

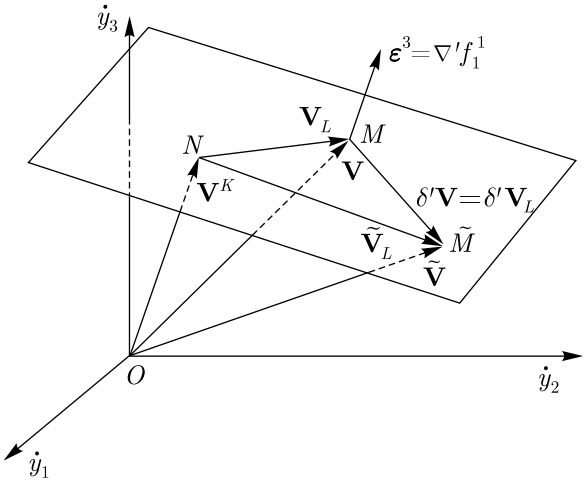

Рис. 4. Скорости точки при наличии неголономной связи

Рис. 4 дает геометрическую иллюстрацию сказанному на примере движения одной материальной точки при наличии одной идеальной неголономной связи $f_1^1(t, q, \dot{q}) = 0$. Как и в предыдущем пункте, роль исходной криволинейной системы координат $q = (q^1, q^2, q^3)$ играет декартовая система $Oy_1y_2y_3$. В данный момент времени t точка, находясь в положении $(q^1, q^2, q^3) \equiv (y_1, y_2, y_3)$, имеет скорость, вектор которой $\mathbf{V}$ оканчивается в точке M, находящейся на поверхности, задаваемой в пространстве скоростей $O\dot{y}_1\dot{y}_2\dot{y}_3$ уравнением неголономной связи $f_1^1 = 0$ (эта поверхность, обозначенная выше как $\mathbb{V}(t, q, \dot{q})$, на рис. 4 не указана; t и q считаются фиксированными параметрами). На рисунке изображена плоскость, являюща-

яся касательной плоскостью к рассматриваемой поверхности в точке M. В общем случае она обозначалась как $\mathbb{T}(t, \mathbb{V})$. В этой плоскости лежат векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2$ (на рисунке они не указаны) основного неголономного базиса L-пространства, по которым согласно формуле (3.6) разлагается вектор вариации скорости $\delta'\mathbf{V}$. Перпендикулярно к этой плоскости нарисован вектор $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = \boldsymbol{\nabla}' f_1^1$, являющийся вектором взаимного базиса K-пространства, вдоль этого вектора направлена реакция идеальной неголономной связи. Поэтому очевидна ортогональность пространств K и L, и, тем самым, наглядным становится выражение принципа Суслова — Журдена, записанного в виде (5.10).

Составляющая скорости $\mathbf{V}^K$ задается выражением неголономной связи $f_1^1(t, q, \dot{q}) = 0$ и по модулю равна расстоянию от начала координат до касательной плоскости. Она не участвует в вариировании, поэтому возможная скорость $\widetilde{\mathbf{V}}$ является суммой $\mathbf{V} + \delta'\mathbf{V}$ и равна вектору $\overrightarrow{O\widetilde{M}}$, удовлетворяющему с точностью до малых выше первого уравнению неголономной связи.

Если конфигурацию векторов перенести в конец вектора $\mathbf{y}$, то наглядным становится определение Четаева для «возможного перемещения» неголономной системы, когда принимается, что $\delta q^\sigma = \tau_0 \delta' \dot{q}^\sigma$, где τ_0 является бесконечно-малым промежутком времени, введенным Гауссом[12].

Геометрическая интерпретация принципа Гаусса. Похожим образом обсуждается и геометрическая интерпретация принципа Гаусса. Теперь уравнения линейных неголономных связей второго порядка (4.1) разбивают касательное пространство на два ортогональных подпространства K и L с неголономными базисами $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{l+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^s\}$ и $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_l\}$. Сами связи в пространстве ускорений задают l-мерную плоскость $\mathbb{T}(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$, для которой $t,\ q$ и $\dot{q}$ являются заданными параметрами. На этой плоскости должны находиться концы векторов ускорения $\mathbf{W}$ механической системы. В ней же находятся векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda,\ \lambda = \overline{1, l}$, по которым согласно формуле (4.9) раскладывается вектор вариации ускорения $\delta''\mathbf{W}$. Из формул (4.11) и (4.12) легко получить, что реакция идеальных неголономных связей второго порядка равна $\mathbf{R} = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla}'' f_2^\varkappa \equiv \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$, то есть принадлежит пространству K.

Запись принципа Гаусса в форме (4.13) показывает, что в случае наложения идеальных линейных неголономных связей второго порядка их реакция $\mathbf{R}/M = \mathbf{W} - \mathbf{Y}/M$ «принуждает» двигаться механическую систему с минимальным значением величины этой реакции.

[12] См. работу: *Поляхов Н. Н.* О дифференциальных принципах механики, получаемых из уравнений движения неголономных систем // Вестн. Ленингр. ун-та. 1974. Вып. 3. № 13. С. 106–116.

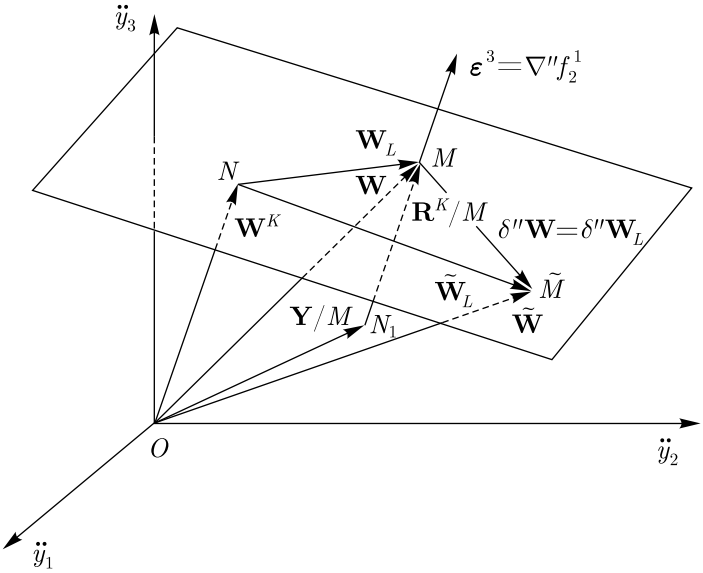

Рис. 5. Ускорения системы при наличии неголономной связи второго порядка

Все эти рассуждения в случае движения одной материальной точки при наложении идеальной неголономной связи

$$f_2^1(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv a_{2\sigma}^3(t, q, \dot{q})\, \ddot{q}^{\,\sigma} + a_{2,0}^3(t, q, \dot{q}) \;=\; 0\,, \quad \sigma = \overline{1,3}\,,$$

поясняются рисунком 5.

При обобщении условий Четаева (3.18) на связи второго порядка (4.1) в виде[13]

$$\frac{\partial f_2^{\varkappa}}{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}\, \delta q^{\sigma} = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,,$$

«возможные перемещения» можно воспринимать[14] как вариации возможных обобщенных ускорений с множителем $\tau_0^2/2$:

$$\delta q^{\sigma} = \frac{\tau_0^2}{2}\, \delta''\ddot{q}^{\,\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{5.12}$$

[13] Для случая одной связи такие условия впервые ввел Г. Гамель (см. статью: *Hamel G.* Nichtholonome Systeme höherer Art // Sitzungsbererichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. 1938. Bd 37. S. 41–52.).

[14] См. упомянутую выше работу Н. Н. Поляхова.

Здесь τ_0 является бесконечно малым промежутком времени, введенным Гауссом. «Возможные перемещения» неголономной системы, задаваемые формулами (5.12), удобно представлять себе приложенными к концу «радиус-вектора» $\mathbf{y}$ механической системы.

II. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 6. Принцип Гамильтона — Остроградского

Рассмотрим уравнения движения голономной системы. Установим, что эти уравнения, взятые в форме Лагранжа второго рода для случая силового потенциального поля

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} = 0\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{6.1}$$

при некоторых дополнительных предположениях представляют собой достаточное условие экстремума некоторой функции, называемой *функцией действия*.

Для математического описания экстремальных свойств траекторий движения механических систем, задаваемых функциями $q^\sigma(t)$, будем сравнивать их с кривыми, задаваемыми произвольными гладкими функциями $\widetilde{q}^\sigma(t)$. Такие кривые будем называть *кривыми сравнения*. Кривые сравнения целесообразно рассматривать как семейство гладких кривых, зависящих от параметра α. При этом удобно считать, что траектория движения системы входит в это семейство и ей соответствует значение параметра $\alpha = 0$, то есть что

$$\widetilde{q}^\sigma(t) = q^\sigma(t,\alpha)\,, \quad q^\sigma(t) = q^\sigma(t,0)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,.$$

В дальнейшем будут введены различные величины, связанные с кривыми сравнения и поэтому зависящие от параметра α.

Положим по определению, что вариация скалярной величины S такова:

$$\delta S = \left.\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \alpha\,. \tag{6.2}$$

Это — частный дифференциал величины S, описывающий в линейном приближении характер изменения этой величины при переходе с действительной траектории на кривую сравнения.

Определение (6.2) распространим на функции $q^\sigma(t,\alpha)$, то есть примем, что функции времени

$$\delta q^\sigma(t) = \left.\frac{\partial q^\sigma}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \alpha \tag{6.3}$$

по определению являются вариациями функций $q^\sigma(t)$.

Определения (6.2), (6.3) позволяют использовать при вычислении вариации δS обычное правило вычисления дифференциала сложной функции. Так, например, если $S = S(t, q(t,\alpha))$, то

$$\delta S = \left.\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \alpha = \left(\frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\,\frac{\partial q^\sigma}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha =$$
$$= \left(\frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\right)_{\alpha=0} \left(\frac{\partial q^\sigma}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha = \left(\frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\right)_{\alpha=0} \delta q^\sigma\,,$$

и поэтому имеем

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\,\delta q^\sigma\,.$$

Здесь для простоты записи не указываем, что в выражениях $\partial S/\partial q^\sigma$ следует положить $\alpha = 0$.

Введение параметризации и определений (6.2), (6.3) становится особенно конструктивным в случае, если величина S является вещественным числом, которое по некоторому правилу сопоставляется набору функций $\widetilde{q}^{\,1}(t), \widetilde{q}^{\,2}(t), \ldots, \widetilde{q}^{\,s}(t)$, заданных в интервале $[t_0, t_1]$. Эту операцию получения числа S можно рассматривать как функцию, областью определения которой являются всевозможные наборы функций $\widetilde{q}^{\,1}(t), \widetilde{q}^{\,2}(t), \ldots, \widetilde{q}^{\,s}(t)$. Такие функции называются *функционалами*. Аргументом функционала служат функции. Характерным примером функционала является определенный интеграл. В дальнейшем будет показано, что основные свойства движения в потенциальном силовом поле обусловлены функционалом

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\,dt\,,$$

который называется *действием по Гамильтону*.

Очевидно, что при определении понятия частного дифференциала δS функционала S по той же логической схеме, что и для обычной вещественной функции вещественного переменного, естественно должны появиться разности функций $\widetilde{q}^{\,\sigma}(t) - q^\sigma(t)$, которые в современных курсах вариационного исчисления называются *вариациями функций* $q^\sigma(t)$.

Параметризация и определения (6.2), (6.3) позволяют, не вводя новых понятий из функционального анализа, рассмотреть достаточно широкий круг вопросов гораздо более простыми средствами. При этом окончательные результаты записываются в такой форме, которая используется и при более абстрактном подходе.

Умножая уравнения (6.1) на вариации координат δq^σ и суммируя по σ, получаем

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\right)\delta q^\sigma = 0\,.$$

Вводя функции $\delta q^\sigma(t)$ под знак производной d/dt, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma}\,\delta q^\sigma\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma}\frac{d(\delta q^\sigma)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\,\delta q^\sigma\,. \tag{6.4}$$

Обсудим производную $d(\delta q^\sigma)/dt$. На основании формул (6.2), (6.3) ее можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\,(\delta q^\sigma) = \frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial q^\sigma}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha\right) = \left.\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha = \delta \dot q^\sigma\,.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{d}{dt}\,(\delta q^\sigma) = \delta \dot q^\sigma\,,$$

то есть операции дифференцирования и вариирования коммутируют.

Учитывая это соотношение, выражение (6.4) представляем в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma}\,\delta q^\sigma\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma}\,\delta \dot q^\sigma + \frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\,\delta q^\sigma\,.$$

Правая часть этого равенства является частным дифференциалом функции $L(t, q, \dot q)$, взятым при фиксированном значении t и соответствующим приращению ее аргументов q^σ и $\dot q^\sigma$ соответственно на δq^σ и $\delta \dot q^\sigma$. Этот дифференциал согласно определениям (6.2), (6.3) равен вариации δL функции L. Следовательно,

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma}\,\delta q^\sigma\right) = \delta L\,dt\,.$$

Поэтому

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma}\,\delta q^\sigma\right)_{t_1} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma}\,\delta q^\sigma\right)_{t_0}\,. \tag{6.5}$$

Из курса математического анализа известно, что если задан интеграл вида

$$S(\alpha) = \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L(t, q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha))\, dt\,,$$

то производная от этого интеграла по α выражается формулой

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \frac{dL}{d\alpha}\, dt + L_1 \frac{dt_1(\alpha)}{d\alpha} - L_0 \frac{dt_0(\alpha)}{d\alpha}\,,$$

где L_1 и L_0 представляют собой соответственно значения функции L при $t = t_1(\alpha)$ и $t = t_0(\alpha)$.

На основании этой формулы в соответствии с определением (6.2) вариация δS функционала

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\, dt \tag{6.6}$$

такова:

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt + L_1\, \delta t_1 - L_0\, \delta t_0\,.$$

Функции $t_0(\alpha)$ и $t_1(\alpha)$ выбираем здесь так, что $t_0(0) = t_0$ и $t_1(0) = t_1$.

Учитывая соотношение (6.5), имеем

$$\delta S \equiv \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L\, dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}\, \delta q^\sigma\right)_{t_1} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}\, \delta q^\sigma\right)_{t_0} + L_1\, \delta t_1 - L_0\, \delta t_0\,. \tag{6.7}$$

Рассмотрим частный случай. Предположим, что моменты t_0 и t_1 фиксированы и соответствующие им вариации $(\delta q^\sigma)_{t_1} = (\delta q^\sigma)_{t_0} = 0$. Этому случаю геометрически соответствуют (см. рис. 6) неподвижные концы.

При сделанных предположениях формула (6.7) запишется в виде

$$\delta S = \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0\,, \tag{6.8}$$

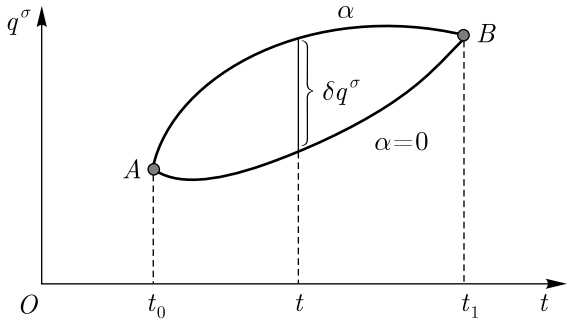

Рис. 6. Вариация функции с неподвижными концами

откуда следует, что интеграл (функционал) на действительной траектории принимает стационарное значение по сравнению с его значениями на соседних «траекториях». Соседние «траектории» называются также «траекториями сравнения» или «окольными путями».

Отметим особо, что этот результат получают в предположении

$$(\delta q^\sigma)_{t_1} = (\delta q^\sigma)_{t_0} = 0\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{6.9}$$

а функционал (6.6) вычисляют при фиксированных t_0 и t_1:

$$\delta t_1 = \delta t_0 = 0\,. \tag{6.10}$$

Условие $\delta S = 0$ получено как следствие уравнений Лагранжа (6.1). Следовательно, эти уравнения являются достаточными условиями обращения в нуль вариации δS при граничных условиях (6.9), (6.10). Покажем теперь, что они являются и необходимыми для этого условиями, то есть что обращение в нуль вариации δS при произвольных функциях $q^\sigma(t,\alpha)$, удовлетворяющих граничным условиям (6.9), (6.10), возможно только в случае, когда функции $q^\sigma(t)$ являются решением системы уравнений (6.1).

Действительно, основываясь на введенных и полученных ранее формулах, можем написать следующую последовательность равенств:

$$\delta S = \left.\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, q(t,\alpha), \dot q(t,\alpha))\,dt\right)_{\alpha=0} \alpha =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\right)_{\alpha=0} \left(\frac{\partial q^\sigma}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma}\right)_{\alpha=0} \left(\frac{\partial \dot q^\sigma}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\right] \alpha\,dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} \right)_{\alpha=0} \delta q^\sigma + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} \right)_{\alpha=0} \delta \dot{q}^\sigma \right] dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} \delta q^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} \frac{d}{dt} \delta\, q^\sigma \right) dt = 0\,.$$

Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta q^\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) dt = 0\,.$$

Но так как промежуток интегрирования $[t_0, t_1]$ может быть выбран произвольно, то отсюда следует, что подынтегральная функция должна обратиться в нуль:

$$\delta q^\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) = 0\,,$$

а из-за произвольности вариаций δq^σ из равенства нулю этой суммы получаем

$$\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} = 0\,, \qquad \sigma = \overline{1, s}\,,$$

то есть выполняются уравнения Лагранжа второго рода (6.1), что и хотели показать.

Соотношения (6.8)–(6.10), аксиоматически принятые за исходные, выражают *принцип Гамильтона — Остроградского*, который формулируется следующим образом: действительное движение системы из положения M_0 в положение M_1 отличается от всех кинематически возможных движений, совершаемых между теми же положениями за тот же промежуток времени, тем, что для действительного движения действие по Гамильтону имеет стационарное значение[15]. Принцип имеет широкое применение для составления дифференциальных уравнений движения механических систем, в том числе и для систем с распределенными параметрами, в результате чего получаются уравнения в частных производных.

Принцип Гамильтона — Остроградского относится к *интегральным принципам*. Наиболее общим вариационным соотношением относительно

[15] Принцип для случая стационарных связей был изложен Гамильтоном в 1834–1835 гг. Независимо от этого в 1848 г. М. В. Остроградский сформулировал его и для нестационарных связей, поэтому принцип носит название *принципа Гамильтона — Остроградского*.

действия по Гамильтону является соотношение (6.7). Оно впервые было получено Гамильтоном и названо им *принципом переменного действия*. Все остальные интегральные принципы будут получены далее из этого соотношения.

§ 7. Принцип Лагранжа

Рассмотрим теперь случай, когда пределы t_0 и t_1 зависят от параметра α, то есть задачу с подвижными концами.

Воспользуемся формулой (6.7) и перепишем ее для краткости в следующем виде:

$$\delta S \equiv \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L\, dt = (p_\sigma \delta q^\sigma)_{t_0}^{t_1} + (L\delta t)_{t_0}^{t_1} \ ,$$

$$p_\sigma = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} \, .$$

Заменяя под интегралом функцию L ее значением, взятым из преобразования Лежандра $L = p_\sigma \, \dot{q}^\sigma - H$, получаем

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} (p_\sigma \dot{q}^\sigma - H) \ dt = (p_\sigma \delta q^\sigma)_{t_0}^{t_1} + (L\delta t)_{t_0}^{t_1} \ .$$

Рассмотрим теперь стационарное силовое поле. Тогда (см. § 6 главы IV)

$$p_\sigma \dot{q}^\sigma = 2T \, , \quad H = T + \Pi = \mathrm{const} = h \, .$$

При этих предположениях имеем

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\, dt - \delta \left[h(t_1 - t_0) \right] = (p_\sigma \delta q^\sigma)_{t_0}^{t_1} + (L\delta t)_{t_0}^{t_1} \, .$$

Выдвинем дополнительное условие, согласно которому на всех возможных траекториях постоянная h одинакова, то есть не зависит от параметра α, и, следовательно, $\delta h = 0$. Тогда

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\, dt = (p_\sigma \delta q^\sigma)_{t_0}^{t_1} + ((L + h)\, \delta t)_{t_0}^{t_1} \, .$$

Однако $L + h = p_\sigma \dot{q}^\sigma$, поэтому

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\, dt = \left(p_\sigma \left(\delta q^\sigma + \dot{q}^\sigma \delta t\right)\right)_{t_0}^{t_1} . \tag{7.1}$$

Введем для краткости обозначение $\Delta q^\sigma = \delta q^\sigma + \dot{q}^\sigma \delta t$ и назовем величину Δq^σ *полной вариацией* q^σ соответственно на концах t_0 и t_1. Отметим, что в отличие от полной вариации Δq^σ введенную выше вариацию δq^σ называют иногда *изохронной*. Теперь формулу (7.1) перепишем в виде

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\, dt = \left(p_\sigma \Delta q^\sigma\right)_{t_0}^{t_1} . \tag{7.2}$$

Действительное движение системы между положениями M_0 и M_1, которое описывается функциями $q^\sigma(t)$, заданными в интервале $[t_0, t_1]$, сравниваем с другими кинематически возможными движениями между теми же положениями. На всех кинематически возможных движениях, которые задаются функциями $\widetilde{q}^\sigma(t) = q^\sigma(t, \alpha)$, полная механическая энергия h постоянна. Функции $\widetilde{q}^\sigma(t) = q^\sigma(t, \alpha)$ считаются заданными в интервале $[t_0(\alpha), t_1(\alpha)]$, причем в моменты $t_0(\alpha)$ и $t_1(\alpha)$ система находится, соответственно, в положениях M_0 и M_1, то есть

$$q^\sigma(t_0(\alpha), \alpha) = q_0^\sigma , \quad q^\sigma(t_1(\alpha), \alpha) = q_1^\sigma . \tag{7.3}$$

Раскладывая функции, стоящие в левых частях этих равенств, в ряды Маклорена по α, получаем

$$\begin{aligned} q^\sigma(t_0(0), 0) + \frac{d}{d\alpha}\, q^\sigma(t_0(\alpha), \alpha)\bigg|_{\alpha=0} \alpha + O(\alpha^2) = q_0^\sigma , \\ q^\sigma(t_1(0), 0) + \frac{d}{d\alpha}\, q^\sigma(t_1(\alpha), \alpha)\bigg|_{\alpha=0} \alpha + O(\alpha^2) = q_1^\sigma . \end{aligned} \tag{7.4}$$

Так как при $\alpha = 0$ кинематически возможные движения переходят в действительное, то

$$q^\sigma(t_0(0), 0) = q_0^\sigma , \quad q^\sigma(t_1(0), 0) = q_1^\sigma .$$

Далее

$$\frac{d}{d\alpha}\, q^\sigma(t(\alpha), \alpha)\bigg|_{\alpha=0} \alpha = \frac{\partial q^\sigma}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \alpha + \dot{q}^\sigma \left.\frac{dt}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \alpha = \delta q^\sigma + \dot{q}^\sigma \delta t = \Delta q^\sigma ,$$

и поэтому на основании равенств (7.4) заключаем, что следствием условий неподвижности концов (7.3) является обращение в нуль полной вариации Δq^σ на концах t_0 и t_1, то есть

$$(\Delta q^\sigma)_{t_0} = (\Delta q^\sigma)_{t_1} = 0\,.$$

Из формулы (7.2) вытекает, что при неизменности исходной и конечной конфигураций системы

$$\delta W \equiv \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\,dt = 0\,.$$

Таким образом, действительная траектория движения системы между положениями M_0 и M_1 отличается от всех кинематически возможных траекторий между теми же положениями при той же полной механической энергии h тем, что на ней функционал

$$W \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\,dt,$$

представляющий собой *действие по Лагранжу*, имеет стационарное значение. Это утверждение носит название *принципа стационарного действия в форме Лагранжа.* Исходя из него, можно получить основные уравнения механики при наложенных ранее ограничениях.

§ 8. Различные формы выражения принципа Лагранжа

Введем изображающую точку. Тогда действие по Лагранжу W имеет вид

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} MV^2 dt = \int\limits_{\smile M_0 M_1} MV\,ds\,, \tag{8.1}$$

где $ds = Vdt = \sqrt{g_{\sigma\tau}\dot q^\sigma \dot q^\tau}dt > 0$, $dt > 0$, а M_0, M_1 — точки пространства $\mathbb{R}^{3n}$, соответствующие положению изображающей точки в моменты времени t_0 и t_1.

Выражение (8.1) называется *действием по Мопертюи — Эйлеру. Принцип наименьшего действия в форме Мопертюи* выражается формулой

$$\delta W = \delta \int\limits_{\smile M_0 M_1} MV\,ds = 0\,.$$

Здесь M_0 и M_1 при вариировании следует рассматривать как неизменные точки, между которыми проводятся возможные траектории. При этом промежутки времени, за которые проходятся указанные траектории, различны.

Так как интеграл энергии имеет вид $T = h - \Pi$, то для изображающей точки получаем

$$M^2V^2 = 2M(h - \Pi)\,,$$

и поэтому

$$W = \int\limits_{\smile M_0M_1} MV\,ds = \int\limits_{\smile M_0M_1} \sqrt{2M(h-\Pi)}\,ds\,.$$

Обозначим

$$(d\Sigma)^2 = 2M(h-\Pi)\,\mathrm{g}_{\sigma\tau}dq^\sigma dq^\tau = \widetilde{\mathrm{g}}_{\sigma\tau}dq^\sigma dq^\tau\,, \tag{8.2}$$

где $\widetilde{\mathrm{g}}_{\sigma\tau} = 2M(h-\Pi)\,\mathrm{g}_{\sigma\tau}$.

Метрические коэффициенты $\mathrm{g}_{\sigma\tau}$ для свободной изображающей точки соответствуют евклидову $3n$-мерному пространству. Умноженные на функцию координат $2M(h-\Pi)$, эти коэффициенты переходят в новые метрические коэффициенты $\widetilde{\mathrm{g}}_{\sigma\tau}$, которые определяют, вообще говоря, неевклидову метрику. При этом евклидово пространство превращается в риманово. Математически оно определяется как пространство, в каждой точке которого задана квадратичная форма

$$\widetilde{\mathrm{g}}_{\sigma\tau}dq^\sigma dq^\tau\,.$$

Так как данная форма геометрически должна выражать квадрат элемента длины, то при преобразованиях координат ее величина должна оставаться инвариантной.

Для несвободной механической системы исходные коэффициенты $\mathrm{g}_{\sigma\tau}$, которые определяются по выражению для кинетической энергии системы, являются, вообще говоря, метрическими коэффициентами римановой метрики

$$ds^2 = \mathrm{g}_{\sigma\tau}dq^\sigma dq^\tau\,.$$

Очевидно, что римановой метрикой в этом случае является и метрика, задаваемая квадратичной формой (8.2).

На основании сказанного имеем следующее выражение для действия W, которое называется *формой Якоби*:

$$W = \int\limits_{\smile M_0M_1} \sqrt{\widetilde{\mathrm{g}}_{\sigma\tau}dq^\sigma dq^\tau} = \int\limits_{\smile M_0M_1} d\Sigma\,.$$

Принцип наименьшего действия, требующий

$$\delta W = \delta \int\limits_{\smile M_0 M_1} d\Sigma = 0\,,$$

равносилен требованию, чтобы движение изображающей точки под действием сил стационарного потенциального поля из положения M_0 в положение M_1 совершалось по геодезической линии в пространстве Римана, метрика которого определяется квадратичной формой (8.2).

§ 9. О вариационных принципах механики[16]

Рассмотренные дифференциальные и интегральные принципы механики основываются на понятиях вариации и поэтому называются *вариационными принципами*.

Дифференциальные принципы различаются тем, что в каждом из них речь идет о вариациях некоторых новых величин. Важным и существенным является то, что во всех дифференциальных принципах вариации вводятся по единой логической схеме, в основе которой лежит определение контравариантного вектора. Напомним это определение.

Пусть дано многообразие X, точка x которого задается величинами x^σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Введем новые переменные x^ρ_*, набором которых определяется та же точка x. Величинами δx^σ и δx^ρ_*, которые связаны соотношениями

$$\delta x^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\rho_*}\,\delta x^\rho_*\,, \quad \delta x^\rho_* = \frac{\partial x^\rho_*}{\partial x^\sigma}\,\delta x^\sigma\,, \quad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,, \tag{9.1}$$

задается контравариантный вектор $\delta\mathbf{x}$.

В принципе Даламбера — Лагранжа x определяет положение системы, которое задается координатами q^σ; в принципе Суслова — Журдена x — это скорость системы, задаваемая обобщенными скоростями $\dot q^\sigma$; и, наконец, в принципе Гаусса x — ускорение системы, под которым в данном случае понимается набор обобщенных ускорений $\ddot q^{\,\sigma}$. Из сказанного также следует, что перечисленные дифференциальные принципы могут быть записаны в единой форме

$$(MW_\sigma - Q_\sigma)\,\delta x^\sigma = 0\,, \tag{9.2}$$

отражающей их логическое единство.

[16] Вопросам возникновения и развития вариационных принципов механики посвящены монографии: *Полак Л. С.* Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1960. 599 с.; *Щелкачёв В. Н.* Вариационные принципы механики. М., 1989. 70 с.

Коэффициентами линейной формы (9.2) от контравариантного вектора $\delta\mathbf{x}$ являются реакции связей $R_\sigma = MW_\sigma - Q_\sigma$. Так как указанная форма инвариантна относительно выбора системы координат на многообразии X, то это означает, что совокупность величин R_σ задает вектор $\mathbf{R}$. В инвариантности линейной формы (9.2) и заключается основное содержание соответствующего дифференциального принципа. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Введем любые новые «координаты» x_*^ρ. В соответствии с выражениями (9.2), (9.1) имеем

$$R_\sigma\,\delta x^\sigma = R_\sigma\,\frac{\partial x^\sigma}{\partial x_*^\rho}\,\delta x_*^\rho = \Lambda_\rho^*\,\delta x_*^\rho = \Lambda_\rho^*\,\frac{\partial x_*^\rho}{\partial x^\sigma}\,\delta x^\sigma = 0\,.$$

Отсюда следует, что компоненты R_σ и Λ_ρ^* ковектора $\mathbf{R}$ в «координатах» x^σ и x_*^ρ соответственно связаны соотношениями

$$R_\sigma = \Lambda_\rho^*\,\frac{\partial x_*^\rho}{\partial x^\sigma}\,, \quad \Lambda_\rho^* = R_\sigma\,\frac{\partial x^\sigma}{\partial x_*^\rho}\,. \tag{9.3}$$

Пусть переменные x^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, $l < s$, выбираются произвольно, а переменные $x_*^{l+\varkappa}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, $k = s - l$, являются заданными величинами. В рассматриваемом случае дифференциалы $\delta x_*^{l+\varkappa} = 0$, и линейная форма (9.2) в переменных x_*^ρ принимает вид

$$\Lambda_\lambda^*\,\delta x_*^\lambda = 0\,. \tag{9.4}$$

Так как дифференциалы δx_*^λ произвольно выбираемых переменных являются линейно независимыми величинами, то из уравнения (9.4) следует, что $\Lambda_\lambda^* = 0$, $\lambda = \overline{1,l}$, и, значит

$$R_\sigma = \Lambda_{l+\varkappa}^*\,\frac{\partial x_*^{l+\varkappa}}{\partial x^\sigma}\,. \tag{9.5}$$

Формулы (9.3) можно рассматривать как определение обобщенных сил Λ_ρ^*, соответствующих переменным x_*^ρ. Напомним, что переменные x_*^ρ могут быть и квазискоростями, и квазиускорениями.

Обобщенные силы Q_σ, соответствующие обобщенным лагранжевым координатам q^σ, для голономной механической системы были введены в § 3 главы VI. Там же была доказана принципиально важная теорема: движение, при котором одна из обобщенных координат является заданной функцией времени, можно обеспечить введением одной дополнительной обобщенной силы, соответствующей этой координате. Прямым следствием этой теоремы является такое утверждение.

Пусть заданными функциями времени являются переменные $q_*^{l+\varkappa} = f_0^{\varkappa}(t,q)$, $\varkappa = \overline{1,k}$, $k = s - l$. Для обеспечения указанного движения достаточно приложить дополнительные обобщенные силы $\Lambda_{l+\varkappa}^*$, соответствующие переменным $q_*^{l+\varkappa}$, другими словами, обобщенные силы R_σ, как вытекает из общего выражения (9.5), могут быть представлены в виде

$$R_\sigma = \Lambda_{l+\varkappa}^* \frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial q^\sigma}\,.$$

Принципы Суслова — Журдена и Гаусса обобщают это утверждение на случай, когда заданными переменными являются соответственно квазискорости $v_*^{l+\varkappa} = f_1^{\varkappa}(t,q,\dot q)$ и квазиускорения $w_*^{l+\varkappa} = f_2^{\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q)$.

Таким образом, дифференциальные вариационные принципы показывают, что каждому уравнению связи может быть поставлена в соответствие обобщенная сила, управляющая этой связью.

Отметим следующее обстоятельство. Вариации координат, скоростей и ускорений, вводимые по единому правилу (9.1), логически не связаны с понятием кинематически возможных траекторий между двумя положениями механической системы. Сравнение действительного движения с кинематически возможным проводится на основе интегральных вариационных принципов. Введение кривых сравнения приводит к понятию вариаций координат как функций времени. Данные функции времени обозначаются так же, как и вариации координат в принципе Даламбера — Лагранжа. Таким образом, с одной стороны, δq^σ являются координатами касательного вектора, а с другой — это функции времени, по определению задаваемые формулами (6.3).

Использование одного и того же символа для обозначения различных понятий может быть объяснено следующим.

Пусть на систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q^1, q^2, \dots, q^s$, наложены голономные связи

$$f_0^{\varkappa}(t,q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.$$

Тогда она имеет l степеней свободы ($l = s - k$). Множество всех возможных положений системы при отсутствии связей обозначаем через $\mathbb{V}$, а при их наличии — через $\mathbb{V}_*$. Пусть обобщенными координатами положения $M \in \mathbb{V}_*$ являются величины q_*^λ, $\lambda = \overline{1,l}$.

Множество $\mathbb{V}_*$ будем рассматривать как подмножество множества $\mathbb{V}$. Пространство $\mathbb{T}(q_*, \mathbb{V}_*)$, касательное к многообразию $\mathbb{V}_*$, в анализируемом случае можно рассматривать как подпространство касательного пространства $\mathbb{T}(q, \mathbb{V})$, если только независимые q_*^λ и зависимые q^σ координаты

описывают одно и то же положение системы. Возможное перемещение $\delta\mathbf{y}$ по определению является произвольным вектором касательного пространства $\mathbb{T}(q_*, \mathbb{V}_*)$. Однако вектор $\delta\mathbf{y}$ можно рассматривать так же, как вектор из $\mathbb{T}(q, \mathbb{V})$, удовлетворяющий соотношениям

$$\boldsymbol{\nabla} f_0^{\varkappa} \cdot \delta\mathbf{y} = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{9.6}$$

или в зависимых координатах

$$\frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial q^{\sigma}}\,\delta q^{\sigma} = 0\,.$$

Пусть действительное движение системы описывается функциями $q^{\sigma}(t)$, а кинематически возможные движения — функциями $\widetilde{q}^{\,\sigma}(t) = q^{\sigma}(t,\alpha)$, которые при $\alpha = 0$ переходят в $q^{\sigma}(t)$. Функции $\widetilde{q}^{\,\sigma}(t) = q^{\sigma}(t,\alpha)$ должны удовлетворять уравнениям связей, и поэтому

$$f_0^{\varkappa}(t, q(t,\alpha)) = 0\,.$$

Отсюда следует, что в соответствии с определениями (6.2), (6.3) имеем

$$\delta f_0^{\varkappa} = \frac{\partial f_0^{\varkappa}}{\partial q^{\sigma}}\,\delta q^{\sigma} = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{9.7}$$

Таким образом, функции $\delta q^{\sigma}(t)$ не являются независимыми, а должны удовлетворять соотношениям (9.7). Последние совпадают с уравнениями (9.6) для координат δq^{σ} вектора возможного перемещения $\delta\mathbf{y}$. Отсюда вытекает, что значения функции $\delta q^{\sigma}(t)$ при фиксированном t можно рассматривать как координаты вектора $\delta\mathbf{y}$. Этим собственно и объясняется, почему, вообще говоря, разные математические понятия имеют одинаковые обозначения.

В качестве примера, поясняющего данные рассуждения, рассмотрим математический маятник. При отсутствии связей множество возможных положений $\mathbb{V}$ представляет собой трехмерное евклидово пространство, причем для простоты полагаем $q^{\sigma} = x_{\sigma}$, $\sigma = 1,2,3$. Пусть точка подвеса маятника длиной l_0 совпадает с началом координат, а плоскостью колебаний маятника является плоскость Ox_1x_2. Тогда уравнения связей приобретают вид

$$x_3 = 0\,, \quad x_1^2 + x_2^2 - l_0^2 = 0\,.$$

При наличии указанных связей множеством $\mathbb{V}_*$ возможных положений маятника является окружность с радиусом l_0 (рис. 7). Положение маятника M задается углом отклонения его от вертикали $\varphi = q_*^1$.

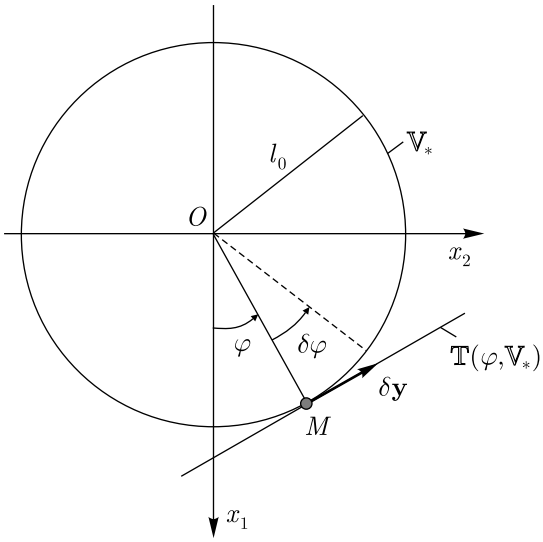

Рис. 7. Возможное перемещение математического маятника

Координаты вектора $\delta\mathbf{y}$ в пространстве $\mathbb{T}(q,\mathbb{V}) = \mathbb{R}^3$ связаны с координатой $\delta\varphi$ того же вектора $\delta\mathbf{y}$, но рассматриваемого как вектор пространства $\mathbb{T}(\varphi,\mathbb{V}_*)$, следующими соотношениями

$$\delta x_1 = -l_0 \sin\varphi\,\delta\varphi\,, \quad \delta x_2 = l_0 \cos\varphi\,\delta\varphi\,, \quad \delta x_3 = 0\,.$$

Важно отметить, что приведенные соотношения могут быть получены путем вариирования декартовых координат $x_1 = l_0\cos\varphi$, $x_2 = l_0\sin\varphi$, $x_3 = 0$, заданных как функции угла φ.

Таким образом, координаты вектора $\delta\mathbf{y}$ могут быть найдены вариированием в том смысле, как это понимается в вариационном исчислении, то есть в соответствии с определением (6.2). Данный пример показывает, что использование одного и того же символа δ в двух разных определениях (1.27) и (6.3) не содержит противоречия. Для принципиально неголономных систем, когда в соответствующем дифференциальном принципе приходится пользоваться символом δ с необходимым числом штрихов, связать определение вариаций по схеме (9.1) с определением (6.2) уже нельзя.

Все интегральные принципы являются следствием основного вариационного соотношения (6.7), которое показывает, как в линейном приближении изменяется действие по Гамильтону при отходе от выбранной траекто-

рии действительного движения. Это вариационное соотношение (принцип переменного действия) тесно связано с теорией интегрирования уравнений движения (см. главу XI).

§ 10. Уравнение Гамильтона — Якоби для функции S

Рассмотрим функцию действия S, взятую в виде

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\, dt\,.$$

Для вычисления значения выписанного интеграла необходимо предварительно найти L как функцию времени, то есть установить, по какому закону координаты q^σ, $\sigma = \overline{1, s}$, изменяются как функции времени. Иначе говоря, следует найти закон движения, получаемый в результате интегрирования уравнений Лагранжа второго рода.

Согласно общей теории интегрирования уравнений механики координаты q^σ, $\sigma = \overline{1, s}$, являются функциями времени t и $2s$ произвольных постоянных интегрирования. Для определения указанных постоянных можно задать s значений координат в начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени. Таким образом, имеем

$$q_0^\sigma = q^\sigma(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s})\,, \quad q_1^\sigma = q^\sigma(t_1, C_1, C_2, \dots, C_{2s})\,.$$

Из этих уравнений, предполагая, что соответствующие условия разрешимости выполнены, можно определить $2s$ произвольных постоянных C_1, C_2, $\dots$, C_{2s}. Они выражаются через постоянные q_0^σ и q_1^σ, а также параметры t_0 и t_1, вследствие чего S можно представить как функцию

$$S = S(t_0, t_1, q_0, q_1)\,.$$

Она называется *главной функцией Гамильтона.* Как будет показано в главе XI, эта функция играет основную роль в теории интегрирования уравнений движения механических систем для случая сил, имеющих потенциал.

Уравнение в частных производных, которому должна удовлетворять главная функция Гамильтона как функция переменных t_1 и q_1^σ, может быть получено из принципа переменного действия (6.7) путем следующих рассуждений.

Рассмотрим семейство действительных движений, задаваемое функциями $q^\sigma(t, \alpha)$. Моменты времени t_0 и t_1 также будем считать зависящими

от параметра α. В этом случае величина S станет сложной функцией параметра α, заданной в виде

$$S(\alpha) = S(t_0(\alpha),\ t_1(\alpha),\ q^\sigma(t_0(\alpha),\alpha),\ q^\sigma(t_1(\alpha),\alpha))\,.$$

На основании сказанного

$$\delta S = \left(\frac{dS}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}\alpha = \frac{\partial S}{\partial t_1}\,\delta t_1 + \frac{\partial S}{\partial q_1^\sigma}\,(\delta q_1^\sigma + \dot q_1^\sigma\,\delta t_1) + \\ + \frac{\partial S}{\partial t_0}\,\delta t_0 + \frac{\partial S}{\partial q_0^\sigma}\,(\delta q_0^\sigma + \dot q_0^\sigma\,\delta t_0)\,.$$

Вместе с тем вариация интеграла действия при переменных пределах на основании формулы (6.7) такова:

$$\delta S = (p_\sigma \delta q^\sigma)_{t_1} - (p_\sigma \delta q^\sigma)_{t_0} + L_1\,\delta t_1 - L_0\,\delta t_0\,.$$

При выводе этой формулы кривые сравнения $q^\sigma(t,\alpha)$ не рассматривались как действительные траектории. Это были произвольные функции времени и параметра α.

На кривые этого семейства накладывалось только одно ограничение: при $\alpha = 0$ они должны соответствовать действительной траектории, относительно которой вычисляется вариация δS. Функции $q^\sigma(t,\alpha)$, введённые в этом параграфе, как при $\alpha = 0$, так и при $\alpha \neq 0$ соответствуют действительным траекториям. Следовательно, и для них, в частности, вариация δS может быть вычислена по формуле (6.7). Это позволяет приравнять коэффициенты при независимых вариациях $\delta t_0,\ \delta t_1,\ \delta q_0^\sigma,\ \delta q_1^\sigma$ в двух разных выражениях, выписанных для вариации δS. В результате получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t_1} + \frac{\partial S}{\partial q_1^\sigma}\,\dot q_1^\sigma = L_1\,, \quad \frac{\partial S}{\partial t_0} + \frac{\partial S}{\partial q_0^\sigma}\,\dot q_0^\sigma = -L_0\,, \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_1^\sigma} = p_{\sigma 1}\,, \quad \frac{\partial S}{\partial q_0^\sigma} = -p_{\sigma 0}\,. \tag{10.2}$$

На основании (10.2) выражения (10.1) принимают вид

$$\frac{\partial S}{\partial t_1} = L_1 - p_{\sigma 1}\,\dot q_1^\sigma = -H_1\,, \quad \frac{\partial S}{\partial t_0} = p_{\sigma 0}\,\dot q_0^\sigma - L_0 = H_0\,, \tag{10.3}$$

где H_0 и H_1 в соответствии с формулой (6.7) представляют собой значения функции Гамильтона

$$H(t,q,p) = p_\sigma \dot q^\sigma - L(t,q,\dot q)$$

для моментов времени t_0 и t_1.

Будем рассматривать момент t_1 как текущее время, а величины $\dot{q}_1^\sigma$ — как текущие координаты. Обозначая t_1 и $\dot{q}_1^\sigma$ соответственно через t и q^σ, записываем первое соотношение из (10.3) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0\,, \tag{10.4}$$

где согласно уравнению (10.2) текущее значение обобщенного импульса p_σ таково:

$$p_\sigma = \frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\,.$$

Следовательно, действие S, рассматриваемое как функция времени t и координат q^σ, $\sigma = \overline{1, s}$, удовлетворяет уравнению в частных производных (10.4). Последнее носит название *уравнения Гамильтона — Якоби.* В главе XI будет показано, что интегрирование этого уравнения эквивалентно интегрированию системы канонических уравнений механики.

Покажем, что уравнение Гамильтона — Якоби (10.4) можно получить и непосредственно из уравнения Ньютона для изображающей точки

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y}\,, \quad d(M\mathbf{V}) = \mathbf{Y}dt\,. \tag{10.5}$$

Для простоты можно считать, что изображающая точка является свободной и число степеней свободы $s = 3n$, хотя все дальнейшие рассуждения справедливы и для механической системы общего вида с s степенями свободы. Напомним, что при таком общем подходе уравнение Ньютона (10.5) считается записанным для пространства, касательного к многообразию $\mathbb{V}_*$ всех возможных положений данной механической системы.

Предположим, что силовое поле имеет потенциал

$$\mathbf{Y} = -\boldsymbol{\nabla}\Pi\,. \tag{10.6}$$

Интегрируя уравнение Ньютона в пределах от t_0 до t вдоль траектории, соответствующей истинному движению, получаем

$$M\mathbf{V}(q, t) = M\mathbf{V}_0(q_0, t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{\nabla}\Pi\, dt\,. \tag{10.7}$$

Здесь $\mathbf{V}_0(q_0, t_0)$ представляет собой скорость изображающей точки в момент t_0 в положении N_0 с координатами q_0^σ. При данных начальных условиях изображающая точка в момент t занимает положение N с координатами q^σ и имеет скорость $\mathbf{V}(q, t)$.

Рассматривая положение N_0 как произвольную точку множества $\mathbb{V}_*$ всех возможных положений механической системы, получаем представление о векторном поле на многообразии $\mathbb{V}_*$.

Если известны траектории движения, соответствующие произвольным начальным условиям q_0 и $\mathbf{V}_0$, то есть общее решение уравнения Ньютона (10.5), то формула (10.7) по полю скоростей в момент t_0 позволяет построить поле скоростей в момент t.

Если $\mathbb{V}_* = \mathbb{R}^3$, то $\mathbf{V}_0(q_0, t_0)$ можно рассматривать как поле скоростей некоторой жидкости в момент t_0, а $\mathbf{V}(q,t)$ — как поле её скоростей в момент t. Таким образом, общему решению уравнения Ньютона при $\mathbb{V}_* = \mathbb{R}^3$ можно поставить в соответствие течение некоторой жидкости.

Поле скоростей $\mathbf{V}(q,t)$, соответствующее общему решению уравнений движения, будем искать в виде

$$M\mathbf{V}(q,t) = \boldsymbol{\nabla} S\,, \tag{10.8}$$

где $S(q,t)$ — некоторая неизвестная функция.

Подставляя выражения (10.6), (10.8) в уравнение Ньютона (10.5), получаем

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\nabla} S) = -\boldsymbol{\nabla}\Pi\,. \tag{10.9}$$

Так как $\boldsymbol{\nabla} S = \frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma$, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\nabla} S) &= \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma + \frac{\partial^2 S}{\partial q^\tau \partial q^\sigma}\,\dot q^\tau \mathbf{e}^\sigma + \frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\,\dot{\mathbf{e}}^\sigma = \\ &= \frac{\partial}{\partial q^\sigma}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^\tau}\,\dot q^\tau\right)\mathbf{e}^\sigma + \frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\,\dot{\mathbf{e}}^\sigma\,. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Вместе с тем

$$M\mathbf{W} = MW_\sigma \mathbf{e}^\sigma = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\right)\mathbf{e}^\sigma\,. \tag{10.11}$$

Однако

$$p_\sigma = \frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} = \frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\,, \quad M\mathbf{V} = p_\sigma \mathbf{e}^\sigma\,, \tag{10.12}$$

и, следовательно,

$$M\mathbf{W} = \frac{d(M\mathbf{V})}{dt} = \dot p_\sigma \mathbf{e}^\sigma + p_\sigma \dot{\mathbf{e}}^\sigma\,. \tag{10.13}$$

Сравнивая выражения (10.11), (10.13) и учитывая соотношения (10.12), видим, что

$$\frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\,\dot{\mathbf{e}}^\sigma = -\frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma\,.$$

Подставляя это соотношение в выражение (10.10), имеем

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\nabla} S) = \frac{\partial}{\partial q^\sigma}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + p_\tau \dot{q}^\tau - T\right)\mathbf{e}^\sigma\,.$$

Таким образом, уравнение Ньютона (10.9) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial q^\sigma}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + p_\tau \dot{q}^\tau - T + \Pi\right)\mathbf{e}^\sigma = 0\,.$$

Учитывая, что

$$p_\tau \dot{q}^\tau - T + \Pi = p_\tau \dot{q}^\tau - L(t,q,\dot{q}) = H(t,q,p) = H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right),$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial q^\sigma}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)\right)\mathbf{e}^\sigma = 0\,. \tag{10.14}$$

Поскольку искомая функция S является функцией времени t и координат q^σ, то и выражение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right) \tag{10.15}$$

является функцией указанных переменных.

Из уравнения Ньютона, записанного в виде (10.14), следует, что выражение (10.15) не зависит от q^σ, то есть является только функцией времени. Поскольку функция S определяется с точностью до произвольной функции времени, то, не умаляя общности рассуждений, можно считать, что выражение (10.15) равно нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0\,.$$

Таким образом, поле скоростей $\mathbf{V}(q,t)$, соответствующее общему решению уравнений движения, можно представить в виде (10.8), если функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби (10.4).

Глава X
СТАТИКА

Автор: *С. Б. Филиппов*

В данной главе содержится краткое изложение статики твердого тела и системы твердых тел. Даны два определения эквивалентности систем сил и доказана их равносильность. Приведены примеры составления уравнений равновесия механических систем различными методами. Рассмотрены задачи об определении положения центров масс твердых тел, о равновесии фермы и гибкой нерастяжимой нити. Описаны свойства сил трения, приведено решение задачи Эйлера о равновесии нити, намотанной на цилиндр.

§ 1. Эквивалентные системы сил

Статика изучает свойства сил и условия равновесия твердых тел под действием приложенных к ним сил. Вопрос об эквивалентности систем сил, приложенных к абсолютно твердому телу, рассмотрен в § 3 главы VIII. В данном параграфе понятие эквивалентности систем сил обсуждается более подробно.

Векторы

$$\mathbf{F} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu\,, \quad \mathbf{L}_O = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu\,,$$

где $\mathbf{r}_\nu$ — вектор из точки O в точку приложения M_ν силы $\mathbf{F}_\nu$, являются *главным вектором* и *главным моментом* системы сил $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$, $\nu = \overline{1,n}$. Обозначим через $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{L}'_O$ главный вектор и главный момент системы сил $(\mathbf{F}'_{\nu'}, M'_{\nu'})$, $\nu' = \overline{1,n'}$.

Определение 1. Системы сил $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$ и $(\mathbf{F}'_{\nu'}, M'_{\nu'})$ называются *эквивалентными*, если $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$, $\mathbf{L}_O = \mathbf{L}'_O$.

Это определение эквивалентности совпадает с определением, приведенным в § 3 главы VIII. В том же параграфе показано, что у эквивалентных систем сил равны главные моменты относительно любой точки P. Эквивалентные системы сил оказывают одинаковое воздействие на твердое тело.

В учебниках по механике имеется и другое определение эквивалентности систем сил, основанное на понятии элементарного преобразования. *Элементарными преобразованиями* системы сил $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$ называются:

1) добавление к системе и исключение из нее нулевой силы;

2) сдвиг силы $\mathbf{F}_\nu$ по линии ее действия;

3) замена двух сил, приложенных в одной точке, их векторной суммой;

4) замена силы $\mathbf{F}_\nu$ суммой двух сил, приложенных в той же точке.

Определение 2. Две системы сил называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой путем конечного числа элементарных преобразований.

Очевидно, что элементарные преобразования не меняют главный вектор системы сил. Столь же очевидно, что элементарные преобразования 1 и 2 не изменяют ее главный момент. Не меняют главный момент и элементарные преобразования 3 и 4. Действительно, пусть $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_{\nu 1} + \mathbf{F}_{\nu 2}$, причем все три силы приложены в точке M_ν, а вектор $\mathbf{r}_\nu$ направлен из точки O в точку M_ν. Тогда

$$\mathbf{L}_O(\mathbf{F}_\nu) = \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu = \mathbf{r}_\nu \times (\mathbf{F}_{\nu 1} + \mathbf{F}_{\nu 2}) = \mathbf{L}_O(\mathbf{F}_{\nu 1}) + \mathbf{L}_O(\mathbf{F}_{\nu 2})\,.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Система сил $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$ и система $(\mathbf{F}'_{\nu'}, M'_{\nu'})$, полученная из нее путем конечного числа элементарных преобразований, имеют одинаковые главные векторы и главные моменты.

Из теоремы 1 вытекает, что две системы сил, эквивалентные в смысле определения 2, являются эквивалентными и по определению 1. Докажем теперь, что из эквивалентности систем сил в смысле определения 1 следует их эквивалентность в соответствии с определением 2.

Теорема 2. Если две системы сил имеют одинаковые главные векторы и главные моменты, то одна из них может быть получена из другой путем конечного числа элементарных преобразований.

Доказательство. Докажем сначала, что любая система сил элементарными преобразованиями сводится к системе из двух сил. Для этого достаточно показать, что любая система из трех сил $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$, $\nu = 1, 2, 3$, сводится к системе из двух сил.

Случай параллельных сил. Рассмотрим случай, когда все три силы параллельны друг другу. Пусть силы $(\mathbf{F}_1, M_1)$ и $(\mathbf{F}_2, M_2)$ направлены в одну сторону. Докажем, что система из двух параллельных сил $(\mathbf{F}_1, M_1)$ и $(\mathbf{F}_2, M_2)$ путем элементарных преобразований сводится к одной силе. Тем самым будет доказано, что система из трех параллельных сил сводится к системе из двух сил.

Пусть $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль отрезка M_1M_2 (рис. 1). Добавим к рассматриваемой системе две силы $F\mathbf{e}$ и $-F\mathbf{e}$, приложенные в точке M_1. Сдвинем силу $-F\mathbf{e}$ в точку M_2 и сложим силы, приложенные в точках M_1 и M_2. Получим систему из двух сил $(\mathbf{F}_{11}, M_1)$,

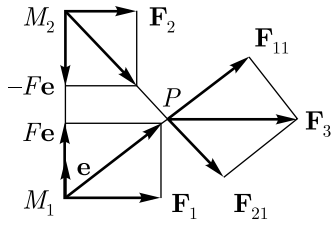

Рис. 1. Система из двух параллельных сил

$(\mathbf{F}_{21}, M_2)$, где $\mathbf{F}_{11} = \mathbf{F}_1 + F\mathbf{e}$, $\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_2 - F\mathbf{e}$. Линии действия сил $\mathbf{F}_{11}$ и $\mathbf{F}_{21}$ пересекаются в некоторой точке P. Сдвинув эти силы в точку P и сложив их, получим систему $(\mathbf{F}_3, P)$, состоящую из одной силы (рис. 1), причем $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

Тем же способом к одной силе сводится и система двух параллельных сил, направленных в разные стороны, если $\mathbf{F}_1 \neq -\mathbf{F}_2$. В случае $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ линии действия сил $\mathbf{F}_{11}$ и $\mathbf{F}_{21}$ параллельны. Система сил $(\mathbf{F}_1, M_1)$, $(-\mathbf{F}_1, M_2)$ называется *парой сил.*

Случай непараллельных сил. Предположим, что линии действия трех сил не являются параллельными. Пусть сила $\mathbf{F}_3$ не параллельна $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Докажем, что в этом случае существует плоскость S, проходящая через линию действия силы $\mathbf{F}_3$ и пересекающая линии действия сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$.

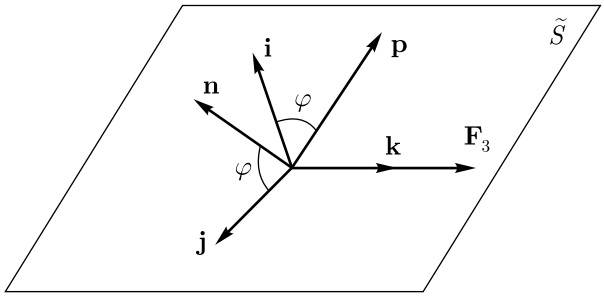

Рис. 2. Плоскость $\widetilde{S}$

Введем неподвижную систему координат с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, направив орт $\mathbf{k}$ вдоль вектора $\mathbf{F}_3$. Построим некоторый вектор $\mathbf{p}$, исходящий из начала силы $\mathbf{F}_3$ и ортогональный орту $\mathbf{k}$. Рассмотрим плоскость $\widetilde{S}$, проходящую через векторы $\mathbf{F}_3$ и $\mathbf{p}$, и исследуем, при каких векторах $\mathbf{p}$ полученная плоскость $\widetilde{S}$ будет совпадать с искомой плоскостью S.

Пусть вектор $\mathbf{p}$ составляет угол φ с ортом $\mathbf{i}$ (рис. 2). Тогда единичная нормаль $\mathbf{n}$ к плоскости $\widetilde{S}$, ортогональная векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$, имеет следующее

разложение по базису $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi\,.$$

В свою очередь векторы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ представим в виде

$$\mathbf{F}_k = a_k\mathbf{i} + b_k\mathbf{j} + c_k\mathbf{k}\,, \quad k = 1, 2\,.$$

Линия действия силы $\mathbf{F}_1$ не пересекает плоскость $\widetilde{S}$, если вектор $\mathbf{F}_1$ лежит в плоскости, параллельной $\widetilde{S}$. В этом случае векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{F}_1$ ортогональны, то есть $\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}_1 = 0$. Подставив в последнее равенство разложения векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{F}_1$, получим $a_1\sin\varphi + b_1\cos\varphi = 0$. Если $a_1 = b_1 = 0$, то равенство $\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}_1 = 0$ выполняется для любых φ. Однако в случае $a_1 = b_1 = 0$ вектор $\mathbf{F}_1$ параллелен вектору $\mathbf{F}_3$, что противоречит предположению о том, что эти векторы не параллельны. Следовательно, хотя бы одно из чисел a_1 и b_1 должно быть отлично от нуля, а тогда равенство $\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}_1 = 0$ выполняется только для углов φ таких, что $\operatorname{tg}\varphi = -b_1/a_1$. Аналогичным образом получаем, что линия действия силы $\mathbf{F}_2$ не пересекает плоскость $\widetilde{S}$, если $\operatorname{tg}\varphi = -b_2/a_2$. Выбрав угол φ так, чтобы его тангенс не равнялся числам $-b_1/a_1$ и $-b_2/a_2$, получим искомую плоскость S, которую пересекают линии действия обеих сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Очевидно, что таких плоскостей имеется бесчисленное множество.

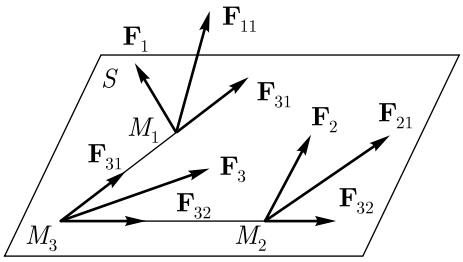

Рис. 3. Плоскость S

Пусть линии действия сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ пересекают плоскость S в точках M_1 и M_2 (рис. 3). Заменим вектор $\mathbf{F}_3$ суммой двух сил, направленных вдоль отрезков M_3M_1 и M_3M_2: $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}$. Перенесем силы $\mathbf{F}_{31}$ и $\mathbf{F}_{32}$ вдоль линий их действия в точки M_1 и M_2 и сложим с силами $(\mathbf{F}_1, M_1)$ и $(\mathbf{F}_2, M_2)$ соответственно. Получим систему из двух сил $(\mathbf{F}_{11}, M_1)$ и $(\mathbf{F}_{21}, M_2)$ (см. рис. 3), где

$$\mathbf{F}_{11} = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_1\,, \quad \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_2\,.$$

Перейдем к завершающему этапу доказательства теоремы 2. Рассмотрим системы сил $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$ и $(\mathbf{F}'_{\nu'}, M'_{\nu'})$, $\nu = \overline{1,n}$, $\nu' = \overline{1,n'}$, имеющие

одинаковые главные векторы и главные моменты, и покажем, что вторая система может быть получена из первой путем элементарных преобразований. Добавим к системе $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$ n' нулевых сил, приложенных в точках M'_ν, и заменим их системой $(\mathbf{F}'_\nu, M'_\nu)$, $(-\mathbf{F}'_\nu, M'_\nu)$. Систему сил $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$, $(-\mathbf{F}'_\nu, M'_\nu)$, имеющую нулевой главный вектор и нулевой главный момент, элементарными преобразованиями сведем к двум силам. Полученная система из двух сил $(\mathbf{F}''_1, M''_1)$, $(\mathbf{F}''_2, M''_2)$ по теореме 1 тоже будет иметь нулевой главный вектор $\mathbf{F}'' = \mathbf{F}''_1 + \mathbf{F}''_2$ и нулевой главный момент $\mathbf{L}''_O$. Из равенства нулю главного вектора следует, что $\mathbf{F}''_2 = -\mathbf{F}''_1$, поэтому главный момент имеет вид

$$\mathbf{L}''_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}''_1 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}''_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}''_1\,,$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — векторы из некоторой точки O в точки M''_1 и M''_2. Главный момент $\mathbf{L}''_O$ равен нулю, если 1) $\mathbf{F}''_1 = 0$, 2) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, 3) $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \parallel \mathbf{F}''_1$. В первом случае обе силы будут нулевыми. Исключив нулевые силы, получим систему сил $(\mathbf{F}'_\nu, M'_\nu)$. Во втором случае имеем совпадение точек: $M''_1 = M''_2$. Сложив силы $\mathbf{F}''_1$ и $\mathbf{F}''_2$, приложенные в одной точке, получим нулевую силу, которую можно исключить. Наконец, в третьем случае силы $\mathbf{F}''_1$ и $\mathbf{F}''_2$ лежат на одной прямой. Сдвиг силы $\mathbf{F}''_2$ по линии ее действия в точку M''_1 сводит третий случай ко второму.

Теорема 2 доказана. Тем самым доказана равносильность определений 1 и 2.

Определение эквивалентности, основанное на введении элементарных преобразований, легче проверить экспериментально, однако при теоретических исследованиях удобнее пользоваться определением, данным в терминах главного вектора и главного момента.

§ 2. Системы параллельных сил. Центр масс

В предыдущем параграфе доказано, что любая система сил эквивалентна системе, состоящей не более чем из двух сил. Если же главный вектор $\mathbf{F}$ и главный момент $\mathbf{L}_O$ системы сил ортогональны, то из результатов § 3 главы VIII вытекает, что система эквивалентна одной силе $\mathbf{F}$, то есть система сводится к *равнодействующей*. В частности, к равнодействующей сводится система сил, сходящихся в одной точке, так как главный момент относительно этой точки равен нулю. Покажем, что *система параллельных сил* с отличным от нуля главным вектором сводится к равнодействующей $\mathbf{F}$ и найдем линию действия силы $\mathbf{F}$.

Силы, образующие систему $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$, $\nu = \overline{1,n}$, будут параллельны, если $\mathbf{F}_\nu = F_{\nu e}\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, задающий направление сил.

Предположим, что главный вектор

$$\mathbf{F} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu = \mathbf{e} \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu e} \neq 0\,.$$

В этом случае и

$$F_e = \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu e} \neq 0\,.$$

Если точка P принадлежит линии действия $\mathbf{F}$, то главный момент $\mathbf{L}_P$ относительно точки P равен нулю.

Пусть $\mathbf{r}_\nu$, $\mathbf{p}_\nu$ и $\mathbf{p}$ являются векторами из начала координат O в точку приложения M_ν силы $\mathbf{F}_\nu$, из точки P в точку M_ν и из точки O в точку P соответственно. Вектор

$$\mathbf{L}_P = \sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{p}_\nu \times \mathbf{F}_\nu) = \left[\sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{p}) F_{\nu e}\right] \times \mathbf{e} = \left[\sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{r}_\nu F_{\nu e}) - \mathbf{p} F_e\right] \times \mathbf{e}$$

будет равен нулю, если

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{r}_\nu F_{\nu e}) - \mathbf{p} F_e = \lambda \mathbf{e}\,,$$

где λ — любое вещественное число. Следовательно, для точки P, положение которой определяется вектором

$$\mathbf{p} = F_e^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu F_{\nu e} - \lambda \mathbf{e}\right)\,,$$

справедливо равенство $\mathbf{L}_P = 0$. Таких точек, соответствующих всевозможным значениям λ, имеется бесчисленное множество. Они лежат на линии действия силы $\mathbf{F}$.

Таким образом, мы доказали, что в случае $\mathbf{F} \neq 0$ система параллельных сил сводится к равнодействующей. Если же $\mathbf{F} = 0$, то система параллельных сил эквивалентна паре сил с моментом, равным главному моменту этой системы сил.

Предположим, что $\mathbf{L}_P = 0$ для системы параллельных сил $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$, $\nu = \overline{1,n}$, и рассмотрим систему параллельных сил $(\mathbf{F}'_\nu, M_\nu)$, $\nu = \overline{1,n}$, полученную из системы $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$ поворотом всех сил на один и тот же угол. Для такой системы

$$\mathbf{F}'_\nu = F_{\nu e} \mathbf{e}'\,, \quad \nu = \overline{1,n}\,, \quad e' = 1\,.$$

Главный момент системы сил $(\mathbf{F}'_\nu, M_\nu),\ \nu = \overline{1,n}$, относительно точки P

$$\mathbf{L}'_P = \left[\sum_{\nu=1}^{n}(\mathbf{r}_\nu F_{\nu e}) - \mathbf{p}F_e\right] \times \mathbf{e}' = \lambda \mathbf{e} \times \mathbf{e}'$$

будет равен нулю при любых $\mathbf{e}'$ только в случае $\lambda = 0$. Точка C, которой соответствует $\lambda = 0$, называется *центром параллельных сил*. Положение точки C определяется вектором

$$\mathbf{r}_c = F_e^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{r}_\nu F_{\nu e}\right).$$

Центр параллельных сил C является единственной точкой, для которой главный момент системы параллельных сил остается равным нулю при любом повороте всех сил на один и тот же угол.

Разделим область объемом τ, занимаемую твердым телом, на n непересекающихся частей с объемами $\Delta\tau_\nu$. Каждую из этих частей заменим материальной точкой $M_\nu \in \tau_\nu$ с массой Δm_ν, равной массе соответствующей части тела. Полученная система материальных точек является приближенной моделью твердого тела.

В однородном гравитационном поле на каждую из точек действует сила тяжести $\mathbf{P}_\nu = \Delta m_\nu \mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения. Центр параллельных сил системы $(\mathbf{P}_\nu, M_\nu),\ \nu = \overline{1,n}$, называется *центром тяжести* системы материальных точек. Его положение определяется вектором

$$\mathbf{r}_c = P^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{r}_\nu P_\nu\right), \quad P = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu\,,$$

где $P_\nu = \mathbf{P}_\nu \cdot \mathbf{e},\ \mathbf{e} = \mathbf{g}/\mathrm{g}$. Учитывая, что $P_\nu = \Delta m_\nu \mathrm{g}$, получаем

$$\mathbf{r}_c = M^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{r}_\nu \Delta m_\nu\right), \quad M = \sum_{\nu=1}^{n}\Delta m_\nu\,. \tag{2.1}$$

Ввиду последнего равенства точку C называют также *центром масс* системы материальных точек.

При увеличении числа n с одновременным уменьшением наибольшего из объемов $\Delta\tau = \max_\nu \Delta\tau_\nu$ приближенная модель будет все более точно описывать сплошное твердое тело. Следовательно, формулу для вектора $\mathbf{r}_c$, задающего положение центра масс твердого тела, можно получить

из формулы (2.1) предельным переходом $n \to \infty$, $\Delta\tau \to 0$, при котором суммы превращаются в интегралы по объему:

$$\mathbf{r}_c = M^{-1} \int_\tau \mathbf{r}\, dm\,, \quad M = \int_\tau dm\,,$$

где M — масса тела, $dm = \mu\, d\tau$, μ — плотность (см. § 1 главы VIII). Действие на твердое тело сил тяжести эквивалентно действию на него силы тяжести $\mathbf{P} = M\mathbf{g}$, приложенной к центру масс C.

Координаты центра масс твердого тела определяются по формулам

$$x_c = M^{-1} \int_\tau x\, dm\,, \quad y_c = M^{-1} \int_\tau y\, dm\,, \quad z_c = M^{-1} \int_\tau x\, dm\,. \tag{2.2}$$

Для однородного тела плотность μ является постоянной, и формулы (2.2) принимают вид

$$x_c = \tau^{-1} \int_\tau x\, d\tau\,, \quad y_c = \tau^{-1} \int_\tau y\, d\tau\,, \quad z_c = \tau^{-1} \int_\tau z\, d\tau\,. \tag{2.3}$$

Если тело состоит из масс, непрерывно распределенных по поверхности S, то вектор $\mathbf{r}_c$ выражается через поверхностные интегралы:

$$\mathbf{r}_c = M^{-1} \int_S \mathbf{r}\, dm\,, \quad M = \int_S dm\,, \quad dm = \mu_S\, dS\,,$$

где μ_S — *поверхностная плотность*. Массу тонкого стержня можно считать распределенной по линии. В этом случае для определения $\mathbf{r}_c$ используются криволинейные интегралы:

$$\mathbf{r}_c = M^{-1} \int_l \mathbf{r}\, dm\,, \quad M = \int_l dm\,, \quad dm = \mu_l\, dl\,.$$

Функция μ_l является *погонной плотностью*.

Для тел, имеющих простую форму, координаты центра масс легко найти путем непосредственного вычисления интегралов.

Пример 1. Пусть однородное тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда шириной a, длиной b и высотой c (рис. 4).

Принимая во внимание, что $\tau = abc$, с помощью формул (2.3) получаем

$$x_c = \tau^{-1} \int_0^c \int_0^b \int_0^a x\, dxdydz = \tau^{-1} \int_0^c \int_0^b \frac{a^2}{2}\, dydz = \frac{a^2bc}{2abc} = \frac{a}{2}\,,$$
$$y_c = \frac{b}{2}\,, \quad z_c = \frac{c}{2}\,.$$

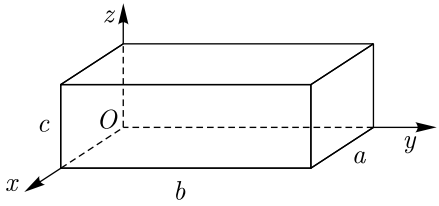

Рис. 4. Тело в форме прямоугольного параллелепипеда

Если высота прямоугольного параллелепипеда c намного меньше его ширины и длины, то при определении его центра масс можно считать параллелепипед прямоугольником, полагая $c = 0$. Центр масс прямоугольника со сторонами a и b имеет координаты $x_c = a/2,\ y_c = b/2$. В случае $a, c \ll b$ прямоугольный параллелепипед можно рассматривать как тонкий стержень длиной b. Центр масс стержня находится в его середине ($y_c = b/2$).

Пример 2. Для вычисления координат центра масс однородного круга с радиусом R и площадью $S = \pi R^2$ введем прямоугольную декартову систему координат с началом в центре круга и полярные координаты ρ и ψ. Тогда $x = \rho\cos\psi,\ y = \rho\sin\psi$, и поэтому

$$x_C = S^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^2\cos\psi\, d\psi d\rho = 0\,, \quad y_C = S^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^2\sin\psi\, d\psi d\rho = 0\,,$$

то есть центр масс находится в центре круга.

В том случае, когда тело может быть разбито на части, имеющие простую форму, для нахождения его центра масс можно использовать аддитивность интеграла. Разобьем область, занимаемую твердым телом, на две непересекающиеся части с объемами $\tau_1,\ \tau_2$ и массами M_1 и M_2. Предположим, что известны положения центров масс C_1 и C_2 частей тела:

$$\mathbf{r}_{C1} = M_1^{-1}\int_{\tau_1}\mathbf{r}\, dm\,, \quad \mathbf{r}_{C2} = M_2^{-1}\int_{\tau_2}\mathbf{r}\, dm\,.$$

В этом случае положение центра масс C всего тела можно найти с помощью формулы

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int\limits_{\tau}\mathbf{r}\, dV}{M} = \frac{\int\limits_{\tau_1}\mathbf{r}\, dm + \int\limits_{\tau_2}\mathbf{r}\, dm}{M_1 + M_2} = \frac{\mathbf{r}_{C1}M_1 + \mathbf{r}_{C2}M_2}{M_1 + M_2}\,. \tag{2.4}$$

Отметим, что центр масс тела лежит на отрезке C_1C_2. Проще всего убедиться в этом, выбрав за начало координат точку C_1. Тогда $\mathbf{r}_{C1} = 0$, вектор $\mathbf{r}_{C2}$ направлен из точки C_1 в точку C_2, и из формулы (2.4) следует, что

$$\mathbf{r}_C = \alpha\mathbf{r}_{C2}\,, \quad \alpha = V_2/(V_1 + V_2)\,.$$

Ввиду того что $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, последнее равенство означает, что точка C принадлежит отрезку C_1C_2.

Пример 3. Найдем координаты центра масс C_1 однородной плоской фигуры, полученной вырезанием из круга радиуса R круга радиуса $R/2$ (рис. 5).

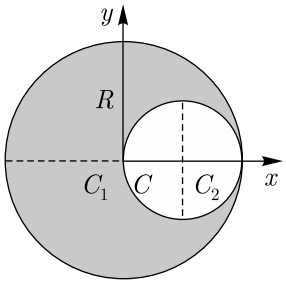

Рис. 5. Центр масс плоской фигуры

Центр масс большого круга C принадлежит отрезку C_1C_2, где C_2 центр масс малого круга. Следовательно, точка C_1 лежит на оси Ox слева от точки C. Ее координата x_{C1} находится из уравнения

$$x_C = \frac{x_{C1}S_1 + x_{C2}S_2}{S_1 + S_2}\,,$$

полученного проектированием векторного равенства (2.4) на ось x и заменой в нем масс M_k на площади частей круга S_k для $k = 1, 2$. Решение уравнения имеет вид

$$x_{C1} = (x_C S - x_{C2}S_2)/(S - S_2)\,,$$

где $S = S_1 + S_2$ — площадь круга радиуса R. Учитывая, что

$$x_C = 0\,, \quad x_{C2} = R/2\,, \quad S = \pi R^2\,, \quad S_2 = \pi R^2/4\,,$$

получаем $x_{C1} = -R/6$.

§ 3. Уравнения равновесия

Уравнения статики в декартовых координатах. В § 4 главы VIII доказано, что твердое тело может находиться в положении равновесия под действием системы сил $(\mathbf{F}_\nu, M_\nu)$, $\nu = \overline{1, n}$, если главный вектор и главный момент системы сил равны нулю:

$$\mathbf{F} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu = 0\,, \quad \mathbf{L}_O = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu = 0\,. \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{r}_\nu = x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j} + z_\nu\mathbf{k}$ — вектор из начала прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ в точку M_ν приложения силы $\mathbf{F}_\nu = F_{\nu x}\mathbf{i} + F_{\nu y}\mathbf{j} +$

$F_{\nu z}\mathbf{k}$. Спроектировав уравнения (3.1) на оси координат, получим шесть скалярных уравнений равновесия твердого тела:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu x} = 0\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu F_{\nu z} - z_\nu F_{\nu y}) = 0\,,\\
&\sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu y} = 0\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n}(z_\nu F_{\nu x} - x_\nu F_{\nu z}) = 0\,,\\
&\sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu z} = 0\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu F_{\nu y} - y_\nu F_{\nu x}) = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

При решении задач статики удобно пользоваться понятием *момента силы относительно оси*. Рассмотрим ось $\overrightarrow{OL}$, положение которой в пространстве определяется единичным вектором $\mathbf{l}$ ($l = 1$). Моментом силы $\mathbf{F}$ относительно оси $\overrightarrow{OL}$ называется скаляр

$$m_l(\mathbf{F}) = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{l}\,,$$

который является проекцией вектора $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ на ось $\overrightarrow{OL}$ ($\mathbf{r}$ — вектор из точки O в точку M приложения силы).

Покажем, что величина $m_l(\mathbf{F})$ не зависит от выбора точки O на оси $\overrightarrow{OL}$. Пусть O' — другая точка на оси $\overrightarrow{OL}$, $\mathbf{r}'$ — вектор из точки O' в точку M, а $\mathbf{r}_0$ — вектор из точки O в точку O', параллельный вектору $\mathbf{l}$ (рис. 6).

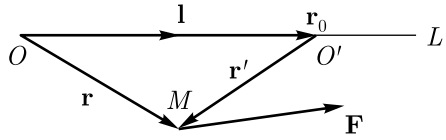

Рис. 6. Векторы $\mathbf{F}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}_0$

Тогда

$$m_l'(\mathbf{F}) = (\mathbf{r}' \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{l} = [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}] \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{l} = m_l(\mathbf{F})\,.$$

Рассмотрим плоскость S, перпендикулярную вектору $\mathbf{l}$ и проходящую через точку приложения силы M (рис. 7).

Представим вектор $\mathbf{F}$ в виде $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_s$, где $\mathbf{F}_l \parallel \mathbf{l}$, $\mathbf{F}_s \in S$. Пусть O — точка пересечения оси $\overrightarrow{OL}$ и плоскости S, а $\mathbf{r}$ — вектор из точки O в точку M. Тогда

$$m_l(\mathbf{F}) = [\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_s)] \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_s) \cdot \mathbf{l}\,,$$

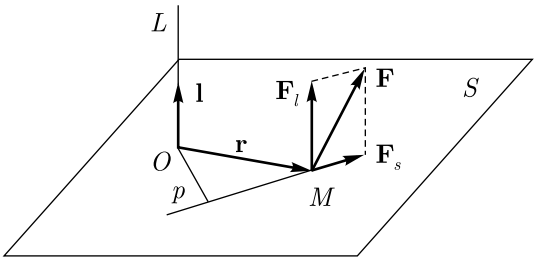

Рис. 7. Сила $\mathbf{F}$ и ее составляющие $\mathbf{F}_l$ и $\mathbf{F}_s$

причем $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_s \parallel \mathbf{l}$. Следовательно,

$$|m_l(\mathbf{F})| = |\mathbf{m}_O(\mathbf{F}_s)| = p\,|\mathbf{F}_s|\,,$$

где p называется *плечом силы* $\mathbf{F}_s$.

Если $p = 0$ или $\mathbf{F}_s = 0$, то момент силы относительно оси равен нулю. В первом случае линия действия силы пересекает ось, во втором случае сила $\mathbf{F}$ параллельна оси.

Таким образом, для вычисления модуля момента силы относительно оси следует найти проекцию этой силы на плоскость S, перпендикулярную оси, и определить величину момента этой проекции относительно точки пересечения оси и плоскости. Для определения знака момента силы надо посмотреть на плоскость S со стороны конца вектора $\mathbf{l}$. Если при этом сила $\mathbf{F}_s$ стремится повернуть тело против часовой стрелки, то $m_l(\mathbf{F}) > 0$, если по часовой стрелке, то $m_l(\mathbf{F}) < 0$.

Умножив уравнения равновесия (3.1) скалярно на орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, получим

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu x} = 0\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu y} = 0\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu z} = 0\,,\\ \sum_{\nu=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_\nu) = 0\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_\nu) = 0\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_\nu) = 0\,,\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $m_x(\mathbf{F}_\nu)$, $m_y(\mathbf{F}_\nu)$, $m_z(\mathbf{F}_\nu)$ — моменты силы $\mathbf{F}_\nu$ относительно осей координат. Ввиду того, что умножение вектора на орт эквивалентно его проектированию на ось координат, уравнения (3.3) являются другой формой записи уравнений равновесия (3.2).

Если рассматривается система из n твердых тел, то для каждого из них можно записать шесть уравнений равновесия вида (3.2) или (3.3). Таким образом, число скалярных уравнений равновесия для системы из n твердых тел составляет $6n$.

Уравнения статики в криволинейных координатах. Рассмотрим движение системы материальных тел. Для описания ее движения в криволинейных координатах можно воспользоваться уравнениями Лагранжа, полученными в главе VI. Выведенные ниже на основе этого уравнения статики будут относиться к так называемой *аналитической статике*.

Пусть положение рассматриваемой механической системы задается криволинейными координатами $q = (q^1, \dots, q^s)$. Если имеются голономные связи

$$f^{\varkappa}(t, q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \tag{3.4}$$

то движение такой механической системы можно описать уравнениями Лагранжа первого рода в криволинейных координатах (уравнениями Лагранжа второго рода с множителями)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\sigma}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\sigma}} = Q_{\sigma} + \Lambda_{\varkappa}\frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial q^{\sigma}}\,, \qquad \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{3.5}$$

Отметим, что в нашем случае уравнения голономных связей (3.4) будут описывать ограничения на обобщенные перемещения системы материальных тел, обеспечивающие возможность возникновения ее положения равновесия.

Часто от системы координат $q = (q^1, \dots, q^s)$ переходят к новой системе криволинейных координат $q_* = (q_*^1, \dots, q_*^s)$. В ней первые l координат $(l = s - k)$ являются лагранжевыми координатами, и их связь с исходной системой координат $q = (q^1, \dots, q^s)$ задается исследователем

$$q_*^{\lambda} = f_*^{\lambda}(t, q)\,, \quad \lambda = \overline{1, l}\,. \tag{3.6}$$

В свою очередь последние k координат полагаются равными уравнениям связей (3.4)

$$q_*^{l+\varkappa} = f^{\varkappa}(t, q)\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \tag{3.7}$$

и поэтому в процессе движения они оказываются равными нулю. В новой системе координат справедливы уравнения Лагранжа второго рода, распадающиеся на две группы уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_*}{\partial \dot{q}_*^{\lambda}} - \frac{\partial T_*}{\partial q_*^{\lambda}} = Q_{\lambda}^*\,, \quad \lambda = \overline{1, l}\,, \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_*}{\partial \dot{q}_*^{l+\varkappa}} - \frac{\partial T_*}{\partial q_*^{l+\varkappa}} = Q_{l+\varkappa}^* + \Lambda_{\varkappa}\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,. \tag{3.9}$$

Рассматривая случай равновесия системы твердых тел, когда кинетическая энергия тождественно равна нулю, из уравнений (3.5) и (3.8), (3.9) получаем два вида *уравнений статики в криволинейных координатах*:

$$Q_\sigma + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f^\varkappa}{\partial q^\sigma} = 0\,, \qquad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{3.10}$$

$$Q^*_\lambda = 0\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \qquad Q^*_{l+\varkappa} + \Lambda_\varkappa = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{3.11}$$

Здесь множители Лагранжа $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, являются *обобщенными реакциями* идеальных голономных связей (3.4), а слагаемые в сумме $\Lambda_\varkappa \dfrac{\partial f^\varkappa}{\partial q^\sigma}$ оказываются ковариантными компонентами реакций этих связей при использовании криволинейной системы координат $q = (q^1, \dots, q^s)$.

Применение принципа возможных перемещений. Получение уравнений равновесия в форме (3.10) и (3.11) можно объяснить и с помощью принципа возможных перемещений, изложенного в главе IX.

Этот принцип, записанный в касательном пространстве, при идеальных связях (3.4) имеет вид (см. формулу (5.5) главы IX)

$$(\mathbf{Y} + \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\nabla} f^\varkappa) \cdot \delta\mathbf{y} = 0\,, \tag{3.12}$$

где $\delta\mathbf{y}$ — вектор возможного перемещения системы.

Наряду с криволинейной системой координат $q = (q^1, \dots, q^s)$ с базисами $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s\}$ и $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^s\}$ по формулам (3.6), (3.7) была введена новая система координат $q_* = (q^1_*, \dots, q^s_*)$. Этому преобразованию соответствует обратное

$$q^\sigma = q^\sigma(t, q_*)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{3.13}$$

Преобразования (3.6), (3.7), (3.13) задают основной и обратный базисы новой системы координат

$$\mathbf{e}^*_\tau = \frac{\partial q^\sigma}{\partial q^\tau_*}\,\mathbf{e}_\sigma\,, \quad \mathbf{e}^\rho_* = \frac{\partial q^\rho_*}{\partial q^\tau}\,\mathbf{e}^\tau\,, \quad \rho, \sigma, \tau = \overline{1,s}\,. \tag{3.14}$$

Существенно, что при этом $\mathbf{e}^{l+\varkappa}_* = \boldsymbol{\nabla} f^\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, то есть связи (3.4) формируют K-«подпространство реакций». Теперь возможное перемещение, активные силы и реакции идеальных голономных связей в зависимости от используемой системы координат могут быть представлены следующим образом:

$$\delta\mathbf{y} = \delta q^\sigma \mathbf{e}_\sigma = \delta q^\tau_* \mathbf{e}^*_\tau\,, \quad \sigma, \tau = \overline{1,s}\,, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{Y} = Q_\sigma\,\mathbf{e}^\sigma = Q^*_\tau\,\mathbf{e}^\tau_*\,, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa\,\frac{\partial f^\varkappa}{\partial q^\sigma}\,\mathbf{e}^\sigma = \Lambda_\varkappa\,\mathbf{e}^{l+\varkappa}_*\,, \qquad \sigma,\tau = \overline{1,s}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{3.16}$$

Пользуясь формулами (3.15), (3.16), принцип (3.12) можно переписать в виде

$$\left(Q_\sigma + \Lambda_\varkappa\frac{\partial f^\varkappa}{\partial q^\sigma}\right)\delta q^\sigma = 0\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{3.17}$$

или

$$Q^*_\lambda\,\delta q^\lambda_* + (Q^*_{l+\varkappa} + \Lambda_\varkappa)\,\delta q^{l+\varkappa}_* = 0\,, \quad l = s-k\,, \quad \lambda = \overline{1,l}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,. \tag{3.18}$$

Напомним, что в случае применения принципа освобождаемости от связей все вариации в представлениях (3.15) независимы, поэтому для выполнения формул (3.17) и (3.18) все коэффициенты при этих независимых вариациях должны быть равны нулю, что и дает уравнения статики (3.10) и (3.11).

При решении практических задач выбирается система отсчета, на рисунок механической системы наносятся активные силы и моменты, действующие на систему, и искомые силы и моменты, являющиеся реакциями наложенных голономных связей. Из полученной системы $6n$ алгебраических уравнений равновесия n тел находятся $6n$ неизвестных компонент реакций наложенных связей. Эти реакции обеспечивают равновесие изучаемой системы связанных между собой тел.

Уравнения равновесия могут иметь бесчисленное множество решений, если число входящих в них неизвестных сил больше, чем число уравнений. В этом случае задача называется *статически неопределимой*. Статически неопределимые задачи не могут быть решены до конца в рамках статики. При их решении к уравнениям равновесия нужно добавлять дополнительные уравнения. Дополнительными уравнениями могут быть уравнения теории деформируемых твердых тел.

Сравнивая число уравнений равновесия с числом неизвестных сил, следует учитывать, что для конкретных задач некоторые из уравнений могут оказаться зависимыми. В частности, несколько уравнений могут превратиться в тождества. При выяснении вопроса о том, является ли задача статически неопределимой, нужно сравнивать число неизвестных с числом независимых уравнений равновесия.

В следующем параграфе при решении примеров будут обсуждаться различные виды реакций, возникающих при наложении конкретных голономных связей.

§ 4. Составление и решение уравнений равновесия

Применение уравнений статики, записанных в декартовой системе координат. Рассмотрим две системы сил, для которых из шести уравнений (3.3) независимыми являются не более чем три уравнения.

Сходящаяся система сил. Выберем начало координат O в точке, где пересекаются линии действия всех сил. Ввиду того, что в этом случае главный момент $\mathbf{L}_O = 0$, последние три уравнения равновесия превращаются в тождества, и для определения проекций сил остаются три первых уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0\,. \tag{4.1}$$

При выборе начала координат в точке P, положение которой относительно точки O задано вектором $\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$, уравнений равновесия станет шесть, однако три из них, полученные проектированием на оси координат главного момента $\mathbf{L}_P = -\mathbf{p} \times \mathbf{F}$, будут линейными комбинациями уравнений (4.1) с коэффициентами p_x, p_y и p_z.

Плоская система сил. Пусть все силы лежат в плоскости S. Выберем в качестве начала координат точку $O \in S$ и направим ось Oz перпендикулярно плоскости S. Тогда в силу равенств $F_{iz} = 0$, $z_i = 0$ три скалярных уравнения равновесия обращаются в тождества. Оставшиеся три уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_i) = 0 \tag{4.2}$$

используются для решения задач статики в случае плоской системы сил. Для плоской сходящейся системы сил третье уравнение превращается в тождество, если выбрать начало координат в точке пересечения линий действия сил.

Пример 4. Рассмотрим задачу о равновесии однородного стержня длиной l, опирающегося концами A и B на две абсолютно гладкие перпендикулярные плоскости (рис. 8).

Стержень лежит в плоскости Oxy. К концу стержня B привязана нить, второй конец которой закреплен в точке O. Сила тяжести $\mathbf{P}$ приложена к середине стержня. Величина P и угол $\alpha \neq 0$ между отрезками BO и BA известны. Требуется найти натяжение нити T и реакции X_A и Y_B, которые из-за отсутствия трения направлены перпендикулярно к соответствующим плоскостям. Нить может работать только на растяжение, поэтому она действует на стержень силой T, направленной вдоль нити справа-налево.

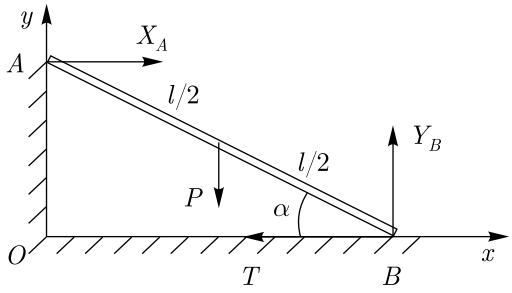

Рис. 8. Силы, действующие на стержень

Уравнения (4.2) для рассматриваемой задачи принимают вид

$$X_A - T = 0\,, \quad -P + Y_B = 0\,, \quad -X_A l \sin\alpha + P\frac{l}{2}\cos\alpha = 0\,.$$

Третье уравнение получено из условия $\mathbf{L}_B = 0$. Система уравнений имеет решение

$$X_A = T = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha\,, \quad Y_B = P\,.$$

Предположим, что к концу стержня B привязана еще одна нить, второй конец которой закреплен в одной из внутренних точек отрезка OA. В этом случае система уравнений будет содержать дополнительную неизвестную — натяжение второй нити T', и задача станет статически неопределимой. При ее решении необходимо учитывать растяжение нитей.

Если система сил не является сходящейся или плоской, то для решения задачи могут понадобиться шесть уравнений равновесия.

Пример 5. Обратимся к исследованию равновесия пространственной системы сил. Рассмотрим задачу о равновесии однородной прямоугольной двери, имеющей петли в точках A и B (рис. 9).

Петля в точке B играет роль цилиндрического шарнира, вокруг оси которого тело может свободно поворачиваться, но при этом шарнир препятствует перемещению тела в перпендикулярном к его оси направлению. Поэтому цилиндрический шарнир (петля B) создает неизвестную горизонтальную реакцию, которую будем отыскивать в виде ее проекций X_B и Y_B.

В отличие от верхней петли B нижняя петля A (согласно нашему рис. 9) препятствует и вертикальному перемещению двери. Этой петле можно сопоставить цилиндрический шарнир с донышком (такой шарнир называется «подпятником»; обычно тело на оси вращения укрепляется с помощью комбинации цилиндрического шарнира наверху оси и подпятника внизу оси). В результате петля A может создать любую по величине и направлению реакцию, которую будем отыскивать в виде ее неизвестных проекций X_A, Y_A, Z_A. Возвращаясь к двери, следует заметить, что неизвестную вертикальную составляющую Z_A мы отнесли к нижней

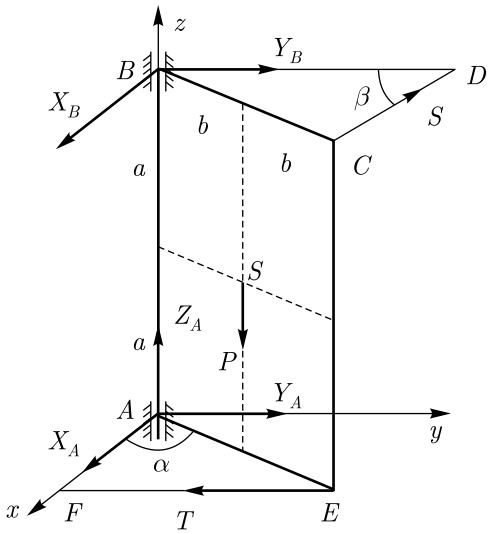

Рис. 9. Силы, действующие на дверь

петле условно, в зависимости от конкретной установки двери на петли эту нагрузку может нести и верхняя петля. Более того, при исключительно аккуратной подвеске двери обе петли одновременно могут удерживать дверь от вертикального перемещения, в этом случае из уравнений равновесия будет находиться их сумма вертикальных проекций.

Выберем начало координат в точке A и направим ось z по оси вращения двери. Кроме силы тяжести $\mathbf{P}$, параллельной оси Oz, на дверь действуют силы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{S}$, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси z и создаваемых веревками CD и EF. Величины сил P, Q, S и углы α, β заданы, $AB = 2a$, $BC = 2b$.

Неизвестными являются реакции X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B и величина силы T.

Удобно заменить силу $\mathbf{S}$ суммой $\mathbf{S}_x + \mathbf{S}_y$, где силы $\mathbf{S}_x$ и $\mathbf{S}_y$ параллельны осям Ox и Oy,

$$S_x = S\sin\beta\,, \quad S_y = S\cos\beta$$

(см. рис. 10, на котором изображен вид на дверь сверху).

Спроектировав главный вектор системы сил на оси координат, получим первые три уравнения равновесия

$$X_A + X_B - S_x = 0\,, \quad Y_A + Y_B - T + S_y = 0\,, \quad Z_A - P = 0\,.$$

При составлении уравнений равновесия, содержащих моменты сил относительно осей координат, следует иметь в виду, что в рассматриваемой задаче многие моменты равны нулю. Так, например, моменты реакций X_A, Y_A и Z_A относительно всех осей координат равны нулю, так как каждая из этих сил параллельна

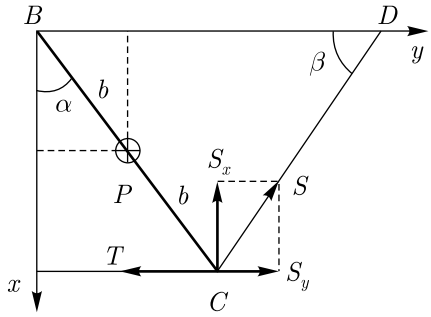

Рис. 10. Вид на дверь сверху

одной из осей и пересекает две другие. Приравнивая нулю суммы моментов сил относительно осей Ox, Oy и Oz, получаем остальные три уравнения равновесия:

$$-2Y_B a - Pb\sin\alpha - 2S_y a = 0\,, \quad 2X_B a + Pb\cos\alpha - 2S_x a = 0\,,$$
$$-2Tb\cos\alpha + 2S_x b\sin\alpha + 2S_y b\cos\alpha = 0\,.$$

При $\alpha \neq \pi/2$ решение системы уравнений равновесия имеет вид

$$X_A = \gamma P\cos\alpha\,, \quad Y_A = T + \gamma P\sin\alpha\,, \quad Z_A = P\,,$$
$$X_B = S_x - X_A\,, \quad Y_B = -S_y - \gamma P\sin\alpha\,, \quad T = S\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}\,,$$

где $\gamma = b/2a$.

В случае $\alpha = \pi/2,\ \beta \neq 0,\ S \neq 0$ решений нет (дверь не может находиться в равновесии). Если $\alpha = \pi/2,\ \beta = 0$, то шестое уравнение равновесия превращается в тождество, и задача становится статически неопределимой.

Применение принципа возможных перемещений и уравнений статики, записанных в криволинейных координатах

Пример 6. Найдем положение равновесия двух одинаковых однородных стержней OA и AB весом P и длиной $2l$, соединенных шарниром в точке A. Конец O первого стержня шарнирно закреплен, а к концу B второго стержня приложена горизонтальная сила величиной F (рис. 11).

Для решения задачи воспользуемся уравнениями (3.11). Рассматриваемая система двух стержней имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат возьмем углы поворотов стержней, то есть примем, что $q_*^1 = \varphi_1$ и $q_*^2 = \varphi_2$. Для нахождения обобщенных сил, соответствующих этим обобщенным координатам, составим выражение для возможной элементарной работы:

$$\delta A = P\delta x_1 + P\delta x_2 + F\delta y_3\,. \tag{4.3}$$

Здесь координаты точек приложения сил x_1, x_2 и y_3 выражаются через обобщенные координаты по формулам

$$x_1 = l\cos\varphi_1\,, \quad x_2 = 2l\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2\,, \quad y_3 = 2l(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)\,.$$

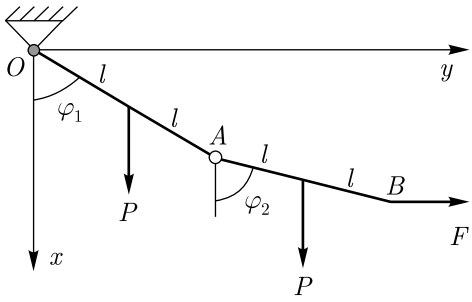

Рис. 11. Равновесие двух стержней

Возможные перемещения связаны с вариациями обобщенных координат следующими соотношениями:

$$\delta x_1 = -l\sin\varphi_1\delta\varphi_1\,, \quad \delta x_2 = -2l\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - l\sin\varphi_2\delta\varphi_2\,,$$
$$\delta y_3 = 2l(\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + \cos\varphi_2\delta\varphi_2)\,.$$

Подставим выражения для возможных перемещений в формулу (4.3). Коэффициенты при вариациях обобщенных координат $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ являются обобщенными силами. Следовательно, в положении равновесия

$$Q^*_{\varphi_1} = -3Pl\sin\varphi_1 + 2Fl\cos\varphi_1 = 0\,, \quad Q^*_{\varphi_2} = -Pl\sin\varphi_2 + 2Fl\cos\varphi_2 = 0\,.$$

Решение полученной системы уравнений

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2F}{3P}\,, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{2F}{P}$$

дает значения углов φ_1 и φ_2 в положении равновесия.

Если для решения рассматриваемой задачи использовать уравнения равновесия (3.3), то получится система шести уравнений (по три для каждого стержня) для определения шести неизвестных: углов φ_1 и φ_2, реакций X_O, Y_O в шарнире O и двух проекций на оси Ox и Oy силы взаимодействия стержней. Правда, при решении этой системы уравнений будут найдены дополнительно сила реакции в шарнире O и сила взаимодействия стержней в шарнире A.

Пример 7. Рассмотрим равновесие горизонтальной однородной консольной балки OF длиной $6a$ (рис. 12), левый конец которой замурован в вертикальную стенку. При таком закреплении говорят, что в точке O балка имеет заделку. На балку действуют приложенная к центру балки C сила тяжести $\mathbf{P}$, активная сила $\mathbf{S}$ на правом конце балки и вертикальная нагрузка, распределенная на участке BE длиной $3a$ по линейному закону от нуля до значения p Н/м. Длина отрезка OB равна $2a$.

Обсудим вопрос о возможности замены нагрузки, распределенной на отрезке $[a, b]$ по закону $f(x)$, равнодействующей силой (рис. 13).

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков длиной Δx_1, Δx_2,..., Δx_n и выберем на каждом из них точку с координатой x_i, $i = \overline{1, n}$ (на рис. 13 $n = 5$). Заменим

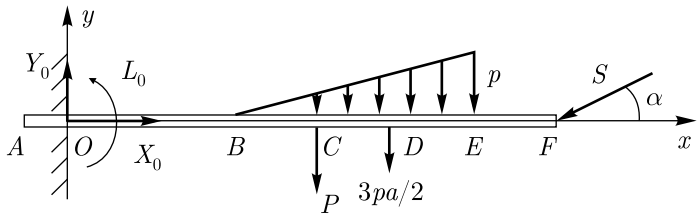

Рис. 12. Силы, действующие на балку

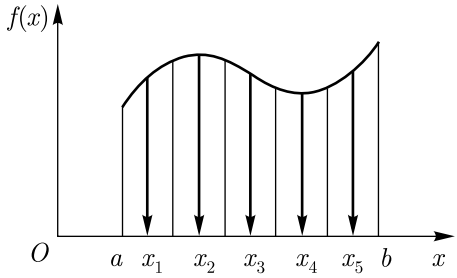

Рис. 13. Распределенная нагрузка

нагрузку, распределенную по i-ой части отрезка $[a, b]$, направленной вертикально вниз силой величиной $F_i = f(x_i)\Delta x_i$, проходящей через точку с координатой x_i. Из результатов § 2 следует, что полученная система параллельных сил эквивалентна равнодействующей

$$F' = \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i, \tag{4.4}$$

точка приложения которой имеет координату

$$x'_c = \frac{1}{F'}\sum_{i=1}^{n} x_i F_i = \frac{1}{F'}\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i. \tag{4.5}$$

Чем меньше длины отрезков Δx_i, тем лучше система параллельных сил F_i описывает действие распределенной нагрузки. При $\Delta x_i \to 0$ суммы в правых частях формул (4.4) и (4.5) превращаются в определенные интегралы. Предельные значения F и x_c величин F' и x'_c

$$F = \int_a^b f(x)\,dx, \quad x_c = \frac{1}{F}\int_a^b x f(x)\,dx$$

дают величину равнодействующей распределенной нагрузки и абсциссу точки ее приложения. Следовательно, величина равнодействующей силы равна площади криволинейной трапеции, расположенной под графиком функции $f(x)$, а координата x_c точки приложения этой силы совпадает с абсциссой «центра тяжести» криволинейной трапеции.

Для рассматриваемого примера действующую на балку распределенную нагрузку заменим силой $3pa/2$, приложенной в точке D, которая находится на расстоянии $4a$ от начала координат (см. рис. 12).

Перейдем к обсуждению реакции, создаваемой заделкой в точке O. Воздействие в этой точке на рассматриваемую балку OF создает замурованный в стенку кусок балки AO. При действии на балку внешних нагрузок он препятствует перемещению точки O, создавая силу с проекциями X_O, Y_O, и не дает балке поворачиваться, создавая момент L_O (на рис. 12 он изображен кривой стрелкой, пытающейся повернуть балку вокруг точки O против часовой стрелки).

Таким образом, по принципу освобождаемости можно считать, что балка, являясь свободной, находится в равновесии под действием приложенных к ней обобщенных сил

$$P\,, \quad S\,, \quad 3pa/2\,, \quad X_O\,, \quad Y_O\,, \quad L_O\,. \tag{4.6}$$

Положение свободной балки в вертикальной плоскости определяется координатами x, y точки O и поворотом балки вокруг точки O на угол φ относительно горизонтальной оси Ox. Согласно принципу возможных перемещений работа обобщенных сил (4.6) на любом возможном перемещении системы

$$(\delta x\,, \delta y\,, \delta\varphi) \tag{4.7}$$

должна быть равна нулю:

$$\begin{gathered}(X_O - S\cos\alpha)\,\delta x + (Y_O - S\sin\alpha - P - \frac{3}{2}\,pa)\,\delta y + \\ +(L_O - 3Pa - 6pa^2 - 6aS\sin\alpha)\,\delta\varphi = 0\,.\end{gathered} \tag{4.8}$$

Из-за независимости возможных перемещений (4.7) в нули должны обращаться коэффициенты при них в уравнении (4.8):

$$\begin{gathered}X_O - S\cos\alpha = 0\,, \\ Y_O - S\sin\alpha - P - \frac{3}{2}\,pa = 0\,, \\ L_O - 3Pa - 6pa^2 - 6aS\sin\alpha = 0\,.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Решение системы (4.9) имеет вид:

$$X_O = S\cos\alpha, \quad Y_O = S\sin\alpha + P + \frac{3}{2}\,pa, \quad L_O = 3a(P + 2pa + 2S\sin\alpha).$$

Обратим внимание на то, что, составляя уравнения равновесия (4.9) при выбранных координатах системы x, y, φ, мы фактически получили уравнения равновесия плоской системы сил для случая декартовой системы координат. Применение принципа возможных перемещений бывает целесообразным при работе в более сложной системе криволинейных координат.

Пример 8. На рис. 14,*а* представлено схематическое изображение коленчатого пресса в виде ромба, состоящего из четырех одинаковых шарнирно соединенных стержней длиной l.

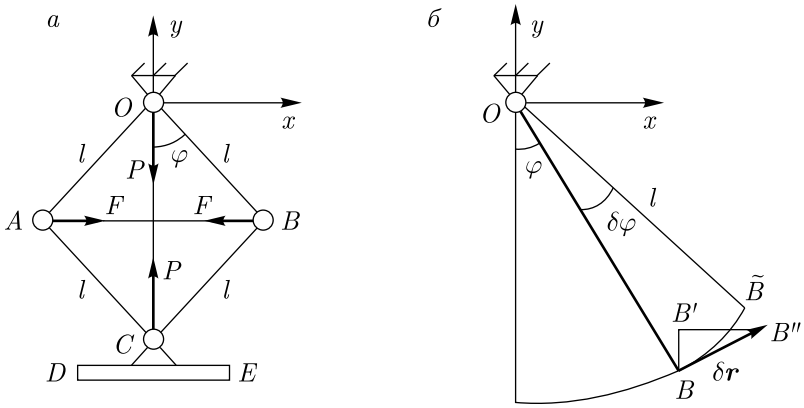

Рис. 14. Схема коленчатого пресса

Ромб закреплен в верхней точке O, выбранной за начало декартовой системы координат, а его нижняя точка C находится в контакте с верхней плитой пресса DE. К точкам соединения стержней A и B приложены две противоположно направленные горизонтальные силы величиной F. В предположении, что ромб находится в равновесии, найти величину силы P, действующей на нижнюю точку ромба C со стороны верхней плиты пресса в момент, когда угол при вершине ромба равен 2φ. По третьему закону Ньютона на плиту пресса действует сила величиной P, направленная вертикально вниз.

Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений (3.17). В качестве обобщенной координаты выберем угол φ между отрезками OC и OB. Тогда

$$x_1 = -x_2 = -l\sin\varphi, \quad y_1 = y_2 = -l\cos\varphi, \quad x_3 = 0, \quad y_3 = 2y_1,$$

где (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) — координаты точек A, B и C соответственно. Для вычисления возможных перемещений δx_2 и δy_2 воспользуемся рис. 14,*б*. Ввиду того, что $B\widetilde{B}$ и BB'' являются эквивалентными бесконечно малыми величинами, из равенства $B\widetilde{B} = l\delta\varphi$ следует приближенная формула $BB'' \approx l\delta\varphi$. Учитывая, что угол $B'B''B$ в треугольнике $B'B''B$ равен φ, получаем

$$\delta x_2 = B'B'' = l\delta\varphi\cos\varphi, \quad \delta y_2 = BB' = l\delta\varphi\sin\varphi.$$

Такой же результат можно получить, если воспользоваться тем, что вычисление δf для произвольной функции f аналогично взятию дифференциала df. Так, например, из формулы $dx_2 = ld\varphi\cos\varphi$ вытекает что $\delta x_2 = l\delta\varphi\cos\varphi$. Следовательно,

$$\delta x_1 = -\delta x_2 = -l\delta\varphi\cos\varphi, \quad \delta y_1 = \delta y_2 = l\delta\varphi\sin\varphi, \quad \delta y_3 = 2\delta y_1.$$

Подставив возможные перемещения δx_1, δx_2 и δy_3 в равенство

$$F\delta x_1 - F\delta x_2 + P\delta y_3 = 0,$$

которое вытекает из принципа возможных перемещений, получим

$$(-F\cos\varphi + P\sin\varphi)\delta\varphi = 0.$$

Ввиду произвольности величины $\delta\varphi$ из последнего равенства следует, что

$$P = F\operatorname{ctg}\varphi.$$

Решение рассматриваемой задачи можно получить другим способом, выразив δx_2 и δy_3 через δx_1 с помощью уравнений связей

$$x_2 = -x_1, \quad x_1^2 + y_1^2 = l^2, \quad y_3 = 2y_1.$$

Из этих уравнений вытекает, что

$$\delta x_2 = -\delta x_1, \quad x_1\delta x_1 + y_1\delta y_1 = 0, \quad \delta y_1 = -\frac{x_1}{y_1}\delta x_1 = -\operatorname{tg}\varphi\delta x_1, \quad \delta y_3 = -2\operatorname{tg}\varphi\delta x_1.$$

Подстановка выражений для δx_2 и δy_3 в принцип возможных перемещений дает равенство

$$2F\delta x_1 - 2P\operatorname{tg}\varphi\delta x_1 = 0,$$

из которого в силу произвольности δx_1 следует полученная выше формула

$$P = F\operatorname{ctg}\varphi.$$

§ 5. Равновесие ферм

Фермой называется конструкция, состоящая из прямолинейных стержней. Точки соединения стержней между собой и свободные концы стержней называются *узлами* фермы. В дальнейшем предполагается, что во всех узлах фермы имеются шарниры, а внешние силы приложены только к узлам фермы. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, то ферма называется *плоской*. Ферма называется *неизменяемой*, если она не меняет форму под действием любой приложенной к ней системы сил. В противном случае ферма называется *изменяемой*. Плоская ферма, изображенная на рис. 15,*а*, является неизменяемой, а фермы, изображенные на рис. 15,*б* и 15,*в* — изменяемыми. В зависимости от вида приложенной нагрузки изменяемая ферма либо складывается (рис. 15,*б*), либо сохраняет форму (рис. 15,*в*).

Будем рассматривать далее только плоские фермы. При добавлении одного узла неизменяемая плоская ферма останется неизменяемой, если добавленный узел соединить с другими узлами не менее чем двумя стержнями. Простейшая неизменяемая ферма состоит из одного стержня и двух узлов, расположенных на его концах. Любая ферма может быть получена

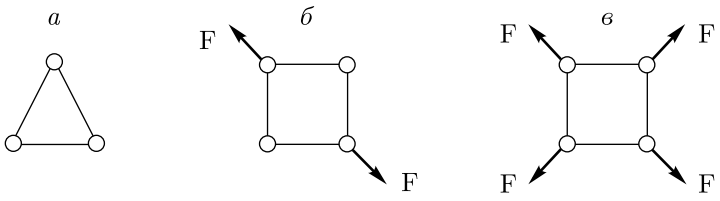

Рис. 15. Неизменяемая и изменяемая фермы

из простейшей добавлением к ней стержней и узлов. Пусть ферма, полученная таким способом из простейшей фермы, является неизменяемой и содержит s стержней и n узлов. Тогда число $s-1$ добавленных стержней должно быть больше удвоенного числа $2(n-2)$ добавленных узлов или равно ему, то есть $s-1 \geqslant 2(n-2)$ или

$$s \geqslant 2n-3\,.$$

Неизменяемая ферма называется *простой*, если она содержит минимально возможное число стержней, то есть $s = 2n-3$.

Задача расчета фермы состоит в определении по заданным внешним силам внутренних усилий в стержнях и опорных реакций фермы.

Пример 9. Рассмотрим расчет фермы, изображенной на рис. 16. Ферма состоит из семи одинаковых стержней, лежащих в плоскости xy. Она является простой, так как число стержней $s = 7$ и число узлов $n = 5$ удовлетворяют равенству $s = 2n-3$. Величины внешних сил P и S заданы. Неизвестными являются усилия в стержнях F_i, $i = \overline{1,7}$, и реакции X_A, Y_A, Y_B. Правый конец фермы поддерживается тележкой, называемой «катучей опорой». При отсутствии трения она может создавать лишь реакцию Y_B, перпендикулярную к направлению своего возможного движения.

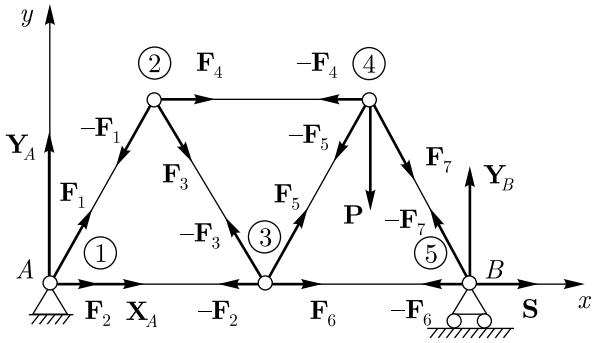

Рис. 16. Плоская ферма

Ферма будет находиться в равновесии, если находятся в равновесии все входящие в нее стержни и узлы. Узлы считаем точками, пренебрегая их размерами. Каждый стержень подвергается воздействию двух сил, приложенных к его концам. Он будет находиться в равновесии, если эти силы равны по величине, противоположны по направлению и направлены вдоль стержня. Силы действия стержней на узлы равны и противоположны силам действия узлов на стержни. Уравнения равновесия узлов для рассматриваемой фермы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{X}_A + \mathbf{Y}_A = 0\,, \\ -\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = 0\,, \\ -\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 = 0\,, \\ -\mathbf{F}_4 - \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_7 + \mathbf{P} = 0\,, \\ -\mathbf{F}_6 - \mathbf{F}_7 + \mathbf{S} + \mathbf{Y}_B = 0\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\mathbf{F}_i$ — силы, действующие на узлы со стороны стержней. Векторные уравнения (5.1) эквивалентны десяти скалярным уравнениям. Таким образом, число уравнений совпадает с числом неизвестных. Направления неизвестных сил $\mathbf{F}_i$ соответствуют растягивающим усилиям в стержнях. Если после решения задачи окажется, что $F_i < 0$, то это будет означать, что i-й стержень сжат.

Сложив уравнения (5.1), получим, что главный вектор внешних сил, действующих на ферму обращается в нуль:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}_A + \mathbf{Y}_A + \mathbf{P} + \mathbf{S} + \mathbf{Y}_B = 0\,.$$

Пусть положения узлов относительно некоторой точки O заданы векторами $\mathbf{r}_k$. Умножим k-е уравнение (5.1) векторно на $\mathbf{r}_k$ и сложим полученные равенства. Векторные произведения, содержащие вектор $\mathbf{F}_i$, в сумме дают нуль. Действительно,

$$\mathbf{r}_p \times \mathbf{F}_i - \mathbf{r}_q \times \mathbf{F}_i = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) \times \mathbf{F}_i = 0\,,$$

так как $(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) \parallel \mathbf{F}_i$. Следовательно, равен нулю и главный момент внешних сил:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{X}_A + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{Y}_A + \mathbf{r}_4 \times \mathbf{P} + \mathbf{r}_5 \times \mathbf{S} + \mathbf{r}_5 \times \mathbf{Y}_B = 0\,.$$

Ввиду того, что $\mathbf{F} = 0$, для любой точки P имеет место равенство $\mathbf{L}_P = 0$.

Очевидно, что приведенные выкладки справедливы для любой плоской фермы, находящейся в положении равновесия. Следовательно, ферма, рассматриваемая как твердое тело, находится в равновесии под действием внешних сил. Если задача для фермы как твердого тела статически определима, то есть содержит три неизвестные внешние силы, то общее число неизвестных внешних и внутренних сил составляет $s + 3$. Число уравнений равновесия узлов равно $2n$. Если ферма простая, то $2n = s + 3$, и задача в целом будет статически определимой.

Спроектировав уравнения (5.1) на оси x и y, получим

$$\begin{aligned}
X_A + \frac{1}{2}F_1 + F_2 = 0\,, &\qquad Y_A + \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 = 0\,,\\
-\frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_3 + F_4 = 0\,, &\qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_3 = 0\,,\\
-F_2 - \frac{1}{2}F_3 + \frac{1}{2}F_5 + F_6 = 0\,, &\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}F_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}F_5 = 0\,,\\
-F_4 - \frac{1}{2}F_5 + \frac{1}{2}F_7 = 0\,, &\qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}F_5 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_7 - P = 0\,,\\
-F_6 - \frac{1}{2}F_7 + S = 0\,, &\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}F_7 + Y_B = 0\,.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

При решении системы (5.2) удобно использовать уравнения равновесия фермы как твердого тела

$$X_A + S = 0\,, \quad Y_A + Y_b - P = 0\,, \quad -\frac{3}{2}Pl + 2lY_B = 0\,, \tag{5.3}$$

где l — длина стержня. Третье уравнение (5.3) получено из условия $\mathbf{L}_A = 0$. Систему уравнений, равносильную (5.3), можно получить исключением из системы (5.2) неизвестных $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_7$. Решение системы (5.3) имеет вид

$$X_A = -S\,, \quad Y_B = \frac{3}{4}P\,, \quad Y_A = \frac{1}{4}P\,.$$

Подставив эти выражения в систему (5.2), получим

$$\begin{gathered}
F_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}P\,, \quad F_2 = S + \frac{1}{4\sqrt{3}}P\,, \quad F_3 = -F_1\,,\\
F_4 = F_5 = F_1\,, \quad F_6 = S + \frac{\sqrt{3}}{4}P\,, \quad F_7 = 3F_1\,.
\end{gathered}$$

§ 6. Равновесие систем с трением

Рассмотрим тело, лежащее на шероховатой плоскости. Сила тяжести $\mathbf{P}$, действующая на тело, уравновешивается реакцией $\mathbf{N}$ (рис. 17).

Если приложить к телу горизонтальную силу $\mathbf{F}$ такую, что величина силы $F \leqslant kN$, где k — *коэффициент трения*, то тело останется в равновесии из-за того, что возникнет *сила трения покоя* $\mathbf{F}_k = -\mathbf{F}$ (рис. 17). Коэффициент трения k зависит от материала и свойств соприкасающихся поверхностей и определяется экспериментально. В случае $F > kN$ тело начнет скользить по плоскости. При движении тела сила сухого трения направлена в сторону, противоположную скорости тела, а ее величина определяется равенством $F_k = k_sN$. Коэффициент трения k_s зависит от скорости движения, но во многих задачах эту зависимость можно игнорировать и считать, что $k_s = k$.

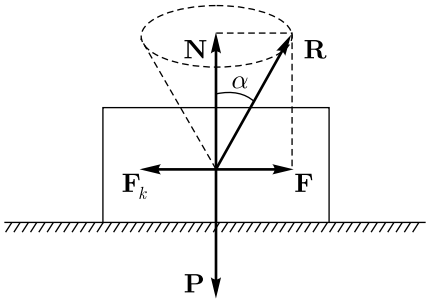

Рис. 17. Конус трения

Отметим, что в положении равновесия направление и величина силы трения покоя определяются величиной и направлением силы $\mathbf{F}$, причем $0 \leqslant F_k \leqslant kN$. При движении тела величина силы сухого трения $F_k = kN$ не будет зависеть от силы $\mathbf{F}$, если пренебречь зависимостью коэффициента трения от скорости.

Конус с углом полураствора $\alpha = \operatorname{arctg} k$, ось которого направлена вдоль вектора нормального давления $\mathbf{N}$, называется *конусом трения* (рис. 17). Если реакция $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}$ лежит внутри конуса трения, то тело находится в равновесии. Действительно, в этом случае $F/N \leqslant \operatorname{tg} \alpha = k$.

Формула Эйлера. Рассмотрим нить, касающуюся поверхности кругового цилиндра вдоль дуги с центральным углом α (рис. 18,*а*).

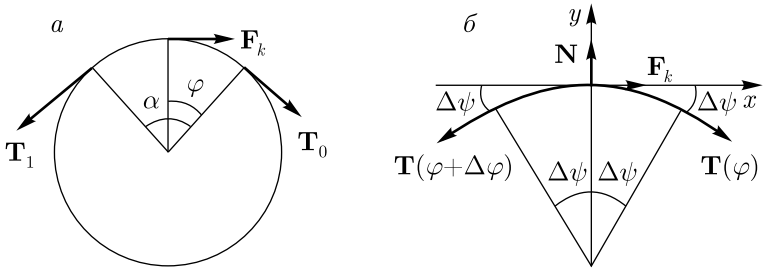

Рис. 18. Нить на поверхности кругового цилиндра

Коэффициент трения нити о цилиндр равен k. Пусть к одному концу нити приложена сила $\mathbf{T}_1$. Найдем наименьшую по величине силу $\mathbf{T}_0$, которую надо приложить к другому концу нити для того, чтобы нить находилась в равновесии. Если бы сила трения отсутствовала, то нить находилась бы в равновесии только при $T_0 = T_1$. При наличии силы трения равновесие возможно и при $T_0 \neq T_1$. Если, например, $T_1 > T_0$, то между

нитью и цилиндром возникает сила трения, препятствующая движению нити против часовой стрелки (см. рис. 18,*а*). При заданном значении T_1 значение T_0 будет наименьшим в том случае, когда сила трения имеет наибольшую величину.

В качестве координаты точки на нити будем использовать угол φ. Обозначим через $\mathbf{T}(\varphi)$ силу натяжения нити в точке с координатой φ. Если нить находится в равновесии, то и часть нити, ограниченная углами φ и $\varphi + \Delta\varphi$, будет находиться в равновесии. Следовательно, главный вектор сил, действующих на рассматриваемую часть нити, будет равен нулю (рис. 18,*б*):

$$\mathbf{T}(\varphi + \Delta\varphi) + \mathbf{T}(\varphi) + \mathbf{N} + \mathbf{F}_k = 0\,, \tag{6.1}$$

где $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}_k$ — соответственно равнодействующие сил реакции и сил трения, действующие на выделенный элемент нити. Спроектировав равенство (6.1) на оси Ox и Oy, получим

$$\begin{aligned} -(T + \Delta T)\cos\Delta\psi + T\cos\Delta\psi + F_k = 0\,, \\ -(T + \Delta T)\sin\Delta\psi - T\sin\Delta\psi + N = 0\,, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $\Delta\psi = \Delta\varphi/2$, $\Delta T = T(\varphi+\Delta\varphi) - T(\varphi)$. Заменим в равенствах (6.2) величину силы трения F_k ее максимальным значением kN. Тогда исключение из равенств (6.2) величины N дает формулу

$$\Delta T\cos\Delta\psi = k(2T + \Delta T)\sin\Delta\psi\,.$$

Разделив это равенство на $\Delta\varphi$ и перейдя к пределу при $\Delta\varphi \to 0$, получим уравнение для определения функции $T(\varphi)$

$$\frac{dT}{d\varphi} = kT\,,$$

решение которого имеет вид

$$T = Ce^{k\varphi}\,.$$

Принимая во внимание, что $T = T_0$ при $\varphi = 0$, находим значение постоянной $C = T_0$. Следовательно,

$$T = T_0 e^{k\varphi}\,, \quad T_1 = T_0 e^{k\alpha}\,, \quad T_0 = T_1 e^{-k\alpha}\,.$$

Последняя формула дает решение поставленной задачи и называется *формулой Эйлера*.

Пример 10. При трении каната о дерево $k = 0.5$. Если обернуть канат вокруг деревянного столба два раза, то

$$T_0 = T_1 e^{-4\pi k} = T_1 e^{-2\pi} \approx 0.002 T_1 \,.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае силу $T_1 = 1000\,\text{Н}$ можно уравновесить силой $T_0 \approx 2\,\text{Н}$.

§ 7. Равновесие нити

Рассмотрим абсолютно гибкую нить с концами в точках A и B, находящуюся в равновесии под действием нагрузки, распределенной вдоль нити. В качестве координаты точки M на оси нити будем использовать длину s дуги AM (рис. 19).

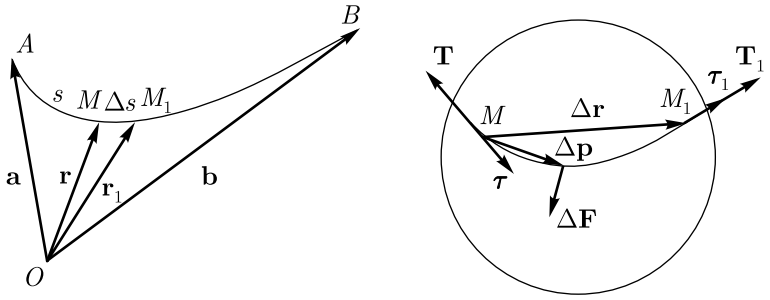

Рис. 19. Равновесие нити

Часть нити от точки M с координатой s до точки M_1 с координатой $s + \Delta s$ тоже будет находиться в равновесии. На нее действуют *силы натяжения* $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s)$ и $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}(s + \Delta s)$, приложенные в точках M и M_1, и равнодействующая распределенных сил $\Delta\mathbf{F}$ (см. рис. 19).

Вектор $\mathbf{q}_* = \Delta\mathbf{F}/\Delta s$ называется *средней распределенной нагрузкой* на отрезке $[s, s + \Delta s]$, а вектор

$$\mathbf{q} = \lim_{\Delta s \to 0} \mathbf{q}_* = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta s}$$

— *распределенной нагрузкой* в точке M. В случае действия на нить силы тяжести

$$\Delta\mathbf{F} = \Delta m \mathbf{g} = S \Delta s \rho \mathbf{g} \,, \quad \mathbf{q} = S\rho\mathbf{g} \,,$$

где S — площадь поперечного сечения нити, ρ — плотность нити, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения.

Выберем прямоугольную декартову систему координат с началом в произвольной точке O. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ и $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(s + \Delta s)$ — векторы из точки O в точки M и M_1 соответственно.

Ввиду того, что часть нити MM_1 находится в равновесии, главный момент действующих на нее сил относительно любой точки, в том числе и точки M, равен нулю:

$$\Delta\mathbf{r} \times \mathbf{T}_1 + \Delta\mathbf{p} \times \Delta\mathbf{F} = 0\,.$$

Здесь $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s)$, $\Delta\mathbf{p}$ — вектор из точки M в точку приложения силы $\Delta\mathbf{F}$ (см. рис. 19). Последнее равенство поделим на Δs и перейдем к пределу при $\Delta s \to 0$. Учитывая, что при предельном переходе

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} \to \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}\,, \quad \mathbf{T}_1 \to -\mathbf{T}\,, \quad \Delta\mathbf{p} \to 0\,, \quad \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta s} \to \mathbf{q}\,,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной в точке M, получим равенство

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{T} = 0\,.$$

Это означает, что сила натяжения $\mathbf{T} = -T\boldsymbol{\tau}$, то есть она направлена по касательной к оси нити, причем $T > 0$, так как нить не может находиться в равновесии под действием сжимающей силы.

Равен нулю и главный вектор сил, действующих на часть нити MM_1,

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T} + \Delta\mathbf{F} = 0\,,$$

где $\mathbf{T}_1 = T_1\boldsymbol{\tau}_1$, $T_1 = T(s+\Delta s)$, $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)$. Разделим это равенство на Δs и перепишем в виде

$$\frac{T_1\boldsymbol{\tau}_1 - T\boldsymbol{\tau}}{\Delta s} + \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta s} = 0\,.$$

Перейдя к пределу при $\Delta s \to 0$, получим

$$\frac{d}{ds}(T\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{q} = 0\,.$$

Подстановка в это равенство $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}/ds$ дает *векторное уравнение равновесия нити*

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) + \mathbf{q} = 0\,.$$

Спроектировав это векторное уравнение на оси Ox, Oy и Oz, получим три скалярных уравнения

$$(Tx')' + q_x = 0\,, \quad (Ty')' + q_y = 0\,, \quad (Tz')' + q_z = 0\,,$$

где q_x, q_y, q_z — проекции распределенной нагрузки на оси координат, $x' = dx/ds$.

Для определения четырех неизвестных функций $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ и $T(s)$ получено только три уравнения. Четвертое уравнение

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$$

следует из равенства $\tau = 1$, так как

$$\boldsymbol{\tau} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}\,.$$

Система дифференциальных уравнений равновесия нити имеет шестой порядок. Ее общее решение зависит от шести произвольных постоянных. Для их определения используются граничные условия на концах нити. Пусть левому и правому концам нити A и B соответствуют координаты $s = s_1$ и $s = s_2$. Тогда граничные условия, определяющие положения концов нити, имеют вид

$$\mathbf{r}(s_1) = \mathbf{a}\,, \quad \mathbf{r}(s_2) = \mathbf{b}\,,$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы из точки O в точки A и B (см. рис. 19). Последние два векторных равенства эквивалентны шести скалярным граничным условиям.

Рассмотрим задачу о равновесии нити под действием ее собственного веса. Пусть концы нити закреплены в точках A и B. Выберем за начало координат одну из точек плоскости S, проходящей через точки A и B и параллельной вектору ускорения свободного падения $\mathbf{g}$. В качестве ортов возьмем единичные вектора $\mathbf{j} = -\mathbf{g}/\mathrm{g}$, $\mathbf{k} \perp S$ и $\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ (рис. 20).

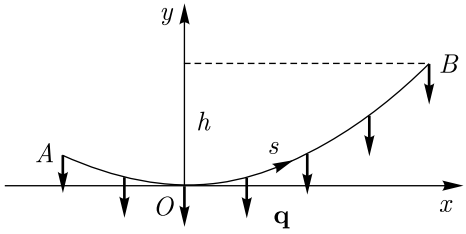

Рис. 20. Нить под действием силы тяжести

Учитывая, что распределенная нагрузка $\mathbf{q} = S\rho\mathbf{g} = -S\rho\mathrm{g}\mathbf{j}$ имеет проекции $q_x = q_z = 0$, $q_y = -q$, где $q = S\rho\mathrm{g}$, запишем *уравнения равновесия нити*

$$(Tx')' = 0\,, \quad (Ty')' = q\,, \quad (Tz')' = 0\,. \tag{7.1}$$

На концах нити $z(s_1) = z(s_2) = 0$, поэтому функция $z(s) = 0$ удовлетворяет уравнениям равновесия (7.1) и граничным условиям. Таким образом, ось нити лежит в плоскости Oxy. Предположим, что $x(s_1) \neq x(s_2)$.

Интегрирование первых двух уравнений (7.1) дает равенства

$$Tx' = C_1\,, \quad Ty' = qs + C_2\,. \tag{7.2}$$

Пусть в некоторой точке нити $Ty' = 0$. Выберем эту точку за начало отсчета координаты s. Тогда $C_2 = 0$. Если $T(0) = 0$, то $C_1 = 0$ и либо $T(s) = 0$, либо $x' = 0$. Равенство $T(s) = 0$ противоречит уравнениям, а равенство $x' = 0$ — условию $x(s_1) \neq x(s_2)$. Следовательно, $T(0) \neq 0$, и $y' = 0$ при $s = 0$. Из уравнения

$$(x')^2 + (y')^2 = 1 \tag{7.3}$$

вытекает, что $x' = 1$ при $s = 0$, поэтому $C_1 = T(0) \equiv T_0 > 0$, и уравнения (7.2) можно записать в виде

$$Tx' = T_0\,, \quad Ty' = qs\,. \tag{7.4}$$

Случай, когда ни в одной из точек нити $Ty' \neq 0$, мы не рассматриваем, так как для него решение задачи оказывается более сложным.

Возведем уравнения (7.4) в квадрат и сложим. С учетом уравнения (7.3), получим

$$T^2 = T_0^2 + q^2 s^2\,.$$

Следовательно,

$$x' = \frac{T_0}{T} = \frac{T_0}{\sqrt{T_0^2 + q^2 s^2}}\,.$$

Введем обозначение $\beta = T_0/q$ и перепишем это равенство в виде

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + s^2}}\,.$$

Проведем замену переменной по формуле $s = \beta \operatorname{sh} v$. Принимая во внимание, что

$$ds = \beta \operatorname{ch} v dv\,, \quad \operatorname{ch}^2 v - \operatorname{sh}^2 v = 1\,,$$

получим

$$dx = \beta dv\,, \quad x = \beta v + C_3\,.$$

Выберем начало координат O в точке нити с координатой $s = 0$ (см. рис. 20). Тогда $C_3 = 0$,

$$s = \beta \operatorname{sh} v = \beta \operatorname{sh}(x/\beta)\,.$$

Разделив второе уравнение (7.4) на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qs}{T_0} = \frac{s}{\beta} = \operatorname{sh}(x/\beta)\,, \quad y = \beta \operatorname{ch}(x/\beta) + C_4\,.$$

Из условия $y = 0$ при $s = 0$ вытекает, что $C_4 = -\beta$. Следовательно,

$$y = \beta[\operatorname{ch}(x/\beta) - 1]\,,$$

то есть ось нити является *цепной линией.*

Обозначим $x(s_k) = a_k,\ y(s_k) = b_k,\ k = 1, 2$. Тогда

$$s_k = \beta \operatorname{sh}(a_k/\beta)\,, \quad b_k = \beta[\operatorname{ch}(a_k/\beta) - 1]\,, \quad k = 1, 2. \tag{7.5}$$

Рассмотрим случай $b_1 = b_2 = h$. Тогда из формул (7.5) и условия $a_1 \neq a_2$ следует, что

$$a_1 = -a, \quad a_2 = a\,, \quad s_1 = -l, \quad s_2 = l\,.$$

Длина нити

$$L = s_2 - s_1 = 2l = 2\beta \operatorname{sh}(a/\beta)\,,$$

а ее наибольший прогиб

$$h = \beta[\operatorname{ch}(a/\beta) - 1]\,.$$

Введем обозначение $\alpha = a/\beta$. Тогда

$$\frac{h}{a} = \frac{\operatorname{ch}\alpha - 1}{\alpha}\,.$$

Предположим, что относительный максимальный прогиб нити h/a является малой величиной. В этом случае будет малой и величина α. Разложив в ряд функцию $\operatorname{ch}\alpha$ и отбросив в этом разложении малые члены, получим следующую приближенную формулу:

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} + \ldots - 1\right) \approx \frac{\alpha}{2}\,.$$

Следовательно,

$$h \approx \frac{qa^2}{2T_0}\,. \tag{7.6}$$

Пример 11. Провод, по которому движется токосъемник электрички, можно рассматривать как гибкую нерастяжимую нить. Значительный прогиб провода препятствует нормальному движению электрички. Найдем величину силы натяжения провода, при которой максимальный прогиб составляет 0.1 м. Пусть расстояние между столбами $2a = 50$ м, распределенная нагрузка $q = 0.5$ Н/м. С помощью формулы (7.6) получаем

$$T_0 \approx \frac{qa^2}{2h} = \frac{0.5 \cdot 625}{2 \cdot 0.1} \approx 1560\,\text{Н}.$$

Глава XI
ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ

Автор: *Н. Н. Пóляхов*

В данной главе рассматриваются вопросы теории интегрирования уравнений движения голономных механических систем под действием сил, имеющих потенциал. Основное внимание при этом уделяется тем ее аспектам, которые позволяют раскрыть общие свойства движения таких систем.

§ 1. Теорема Гамильтона — Якоби

Теорема Якоби. В главе IX было показано, что векторное уравнение Ньютона, которое является выражением закона движения, эквивалентно как системе канонических уравнений, так и одному уравнению в частных производных относительно функции действия S. Следовательно, между системой обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнением в частных производных существует тесная связь. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Предположим, что известно общее решение уравнений движения, то есть функции

$$q^\sigma = f^\sigma(\tau, C_1, C_2, \dots, C_{2s}), \quad \sigma = \overline{1, s}, \tag{1.1}$$

где τ — текущее время, σ — число степеней свободы механической системы, C_σ — произвольные постоянные. Тогда, как уже было показано, действие по Гамильтону

$$S = \int\limits_{t_0}^{t} L(\tau, q, \dot{q}) d\tau$$

может быть представлено как функция переменных:

$$S = S(t, q, t_0, q_0). \tag{1.2}$$

Здесь q_0^σ соответствует положению системы в момент t_0, а q^σ — положению ее в момент t. Функция S, рассматриваемая как функция переменных t и q^σ, удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби (10.4)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \tag{1.3}$$

Предположим теперь, что нам неизвестны общее решение (1.1), а следовательно, и функция S, заданная в виде (1.2). Будем искать ее, исходя

из уравнения в частных производных (1.3). Напомним, что полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби (1.3) является такое решение этого уравнения

$$S = S(t, q, \alpha) + \alpha^{s+1}\,, \tag{1.4}$$

которое зависит от $(s+1)$-й произвольной постоянной α^ρ и удовлетворяет условию

$$\det\Big[\frac{\partial^2 S}{\partial q^\tau \partial \alpha^\sigma}\Big] \neq 0\,, \quad \sigma, \tau = \overline{1, s}\,.$$

Постоянная α^{s+1} входит в полный интеграл аддитивно. Это объясняется тем, что уравнение (1.3) не содержит неизвестной функции S.

Между полным интегралом уравнения (1.3) и общим решением уравнений движения существует тесная связь. Она заключается в том, что по общему решению уравнений движения можно найти полный интеграл уравнения (1.3), и, наоборот, по полному интегралу этого уравнения можно построить общее решение уравнений движения. Уравнения движения могут быть заданы как в форме уравнений Лагранжа второго рода, так и в форме канонических уравнений, поэтому общее решение (1.1) можно рассматривать и как общее решение уравнений Лагранжа, и как общее решение канонических уравнений.

Как уже отмечалось, прямым следствием общего решения (1.1) является задание функции S, удовлетворяющей уравнению (1.3), в виде (1.2). Нетрудно показать, что это и есть полный интеграл. Обратное утверждение, позволяющее по полному интегралу уравнения (1.3) построить общее решение канонических уравнений, составляет содержание *теоремы Якоби*, которая формулируется следующим образом: если функция $S(t, q, \alpha)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби (1.3), то общее решение канонических уравнений

$$\frac{dq^\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \frac{dp_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{1.5}$$

может быть найдено из соотношений

$$p_\sigma = \frac{\partial S}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{1.6}$$

$$\beta_\sigma = \frac{\partial S}{\partial \alpha^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{1.7}$$

где α^σ и β_σ — произвольные постоянные.

Так как функция S является заданной функцией переменных t, q^σ и α^σ, то из соотношений (1.6), (1.7) следует, что величины p_σ и β_σ являются функциями вида

$$p_\sigma = p_\sigma(t, q, \alpha)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{1.8}$$

$$\beta_\sigma = \beta_\sigma(t, q, \alpha)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{1.9}$$

По условию определитель

$$\det\Big[\frac{\partial^2 S}{\partial q^\tau \partial \alpha^\sigma}\Big] = \det\Big[\frac{\partial \beta_\sigma}{\partial q^\tau}\Big]\,, \quad \sigma, \tau = \overline{1, s}\,,$$

отличен от нуля, и значит уравнения (1.9) можно разрешить относительно q^σ, то есть можно записать

$$q^\sigma = q^\sigma(t, \alpha, \beta)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}. \tag{1.10}$$

Подставляя эти выражения в формулы (1.8), получаем

$$p_\sigma = p_\sigma(t, \alpha, \beta)\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{1.11}$$

Таким образом, соотношения (1.6), (1.7) позволяют представить канонические переменные q^σ и p_σ в виде функций времени t и $2s$ произвольных постоянных α^σ и β_σ.

Как известно, выражения (1.10), (1.11) являются общим решением канонических уравнений (1.5), если при любых α^σ и β_σ функции q^σ и p_σ, рассматриваемые как функции времени t, удовлетворяют указанным уравнениям. Чтобы убедиться в этом, поступим следующим образом.

Дифференцируя выражения (1.7) по времени, находим

$$0 \equiv \frac{d\beta_\sigma}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha^\sigma} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^\tau \partial \alpha^\sigma}\,\dot{q}^\tau\,, \quad \sigma, \tau = \overline{1, s}\,. \tag{1.12}$$

Так как

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha^\sigma} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^\sigma \partial t}\,, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial q^\tau \partial \alpha^\sigma} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^\sigma \partial q^\tau}\,,$$

то равенство (1.12) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^\sigma \partial t} + \dot{q}^\tau \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^\sigma \partial q^\tau} = 0\,. \tag{1.13}$$

Функция $S(t, q, \alpha)$ удовлетворяет уравнению (1.3), и поэтому последнее при подстановке в него полного интеграла (1.4) следует рассматривать как тождество. Дифференцируя это тождество по α^σ, имеем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^\sigma \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\tau} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^\sigma \partial q^\tau} = 0\,. \tag{1.14}$$

Сравнивая выражения (1.13), (1.14), видим, что

$$\frac{dq^\tau}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\tau}\,, \quad \tau = \overline{1,s}\,. \tag{1.15}$$

Аналогично доказывается, что функция p_σ, задаваемая соотношениями (1.6), (1.7) в виде (1.11), удовлетворяет уравнению

$$\frac{dp_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{1.16}$$

Действительно, дифференцируя выражения (1.6) по времени, получаем

$$\frac{dp_\sigma}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q^\sigma} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^\tau \partial q^\sigma}\,\dot{q}^\tau\,. \tag{1.17}$$

Вместе с тем, дифференцируя тождество (1.3) по q^σ, имеем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q^\sigma \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial H}{\partial p_\tau}\frac{\partial^2 S}{\partial q^\sigma \partial q^\tau} = 0\,.$$

Учитывая соотношение (1.15), это равенство представляем в виде

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q^\sigma} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^\tau \partial q^\sigma}\,\dot{q}^\tau = -\frac{\partial H}{\partial q^\sigma}\,. \tag{1.18}$$

Сравнивая теперь выражения (1.17), (1.18), убеждаемся, что функция p_σ действительно удовлетворяет уравнению (1.16). Таким образом, теорема Якоби доказана.

Метод построения общего решения канонической системы уравнений, основанный на теореме Якоби, называется *методом Гамильтона — Якоби*. Он имеет исключительно большое значение как для теории, так и для приложений и часто позволяет решение представить в удобной аналитической форме. В некоторых случаях полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби может быть найден при помощи метода разделения переменных. Этот метод состоит в том, что решение ищется в следующем виде:

$$S = S_0(t) + S_1(q^1, t) + \ldots + S_s(q^s, t)\,,$$

то есть в виде суммы функций, каждая из которых является функцией только от одной переменной q^σ, времени t и, конечно, произвольных постоянных α^σ или части их. Возможность разделения переменных зависит как от характера самой задачи, так и от выбранных для ее описания лагранжевых координат.

Следует отметить, что нахождение полного интеграла нелинейного уравнения в частных производных (1.3), вообще говоря, не проще нахождения общего решения канонических уравнений. Более того, установлено, что в случаях, если удается найти полный интеграл уравнения (1.3), то каноническую систему (1.5) можно проинтегрировать прямым способом. Однако такая возможность встречается редко. Обычно уравнения в сложных и важных задачах механики оказываются неинтегрируемыми, и тогда встает вопрос об их приближенном решении или численном интегрировании. В развитии приближенных методов интегрирования уравнений (1.5) важную роль играет теория Гамильтона — Якоби. Она позволяет представить эти методы в наиболее простой форме. Указанные методы разрабатывались в основном в связи с решением задач небесной механики.

В качестве примера, иллюстрирующего теорию Гамильтона — Якоби, рассмотрим задачу о гармоническом осцилляторе и задачу Кеплера.

Гармонический осциллятор. Как было показано в § 7 главы IV, груз, подвешенный на пружине, при отклонении от положения равновесия совершает простое гармоническое колебание. Колебания такого типа широко распространены в природе и характерны как для упругих, так и для электромеханических систем. Любую систему с одной степенью свободы, кинетическая и потенциальная энергии которой задаются в виде

$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2}\,, \qquad \Pi = \frac{cq^2}{2}\,,$$

где m и c — положительные постоянные, а q — обобщенная лагранжева координата, принято называть *гармоническим осциллятором*. Данная система является консервативной, и поэтому функция Гамильтона H равна полной механической энергии: $H = T + \Pi$. Выражая T через обобщенный импульс $p = \partial T/\partial \dot{q} = m\dot{q}$, получаем

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}\,.$$

Таким образом, уравнение Гамильтона — Якоби в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial S}{\partial q}\Big)^2 + \frac{cq^2}{2} = 0\,.$$

Время t не входит явно в это уравнение, и поэтому его решение может быть представлено в виде

$$S = -\alpha t + w(q, \alpha)\,,$$

где α — произвольная постоянная, $w(q,\alpha)$ — новая неизвестная функция, которая должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial w}{\partial q}\Big)^2 = \alpha - \frac{cq^2}{2}\,. \tag{1.19}$$

Отметим, что постоянная α равна полной начальной энергии системы, так как

$$H_0 = H = -\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha\,.$$

Функции S и w определяются с точностью до аддитивной постоянной. Для простоты считаем, что $w = 0$ при $q = 0$. Интегрируя уравнение (1.19) при этих начальных условиях, получаем

$$w = \pm\sqrt{mc}\int_0^q \sqrt{\frac{2\alpha}{c} - q^2}\,dq\,. \tag{1.20}$$

Общее решение относительно функции q в соответствии с теоремой Якоби определяем из соотношения

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\,,$$

где β — вторая произвольная постоянная. Подставляя в эту формулу выражение (1.20), имеем

$$t + \beta = \pm\sqrt{\frac{m}{c}}\int_0^q dq\Big/\sqrt{\frac{2\alpha}{c} - q^2} = \pm\sqrt{\frac{m}{c}}\arcsin\Big(q\sqrt{\frac{c}{2\alpha}}\Big)\,. \tag{1.21}$$

Так как $\arcsin x = \pi/2 - \arccos x$, то решение (1.21) можно представить в виде

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{c}}\cos(\omega t + \gamma), \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}\,, \quad \gamma = \omega\beta \pm \frac{\pi}{2}\,.$$

Постоянные α и γ находим из начальных условий. Построенное решение совпадает с обычной формулой для гармонического колебания.

Задача Кеплера. Известно, что при притяжении материальной точки с массой m к неподвижному центру O траекторией движения является плоская кривая. Считая, что движение под действием силы тяготения происходит в плоскости Oxy и рассмотрение ведется в полярных координатах r и φ, представляем кинетическую и потенциальную энергии следующими выражениями:

$$T = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)\,, \quad \Pi = -\frac{\mu m}{r}\,,$$

где $\mu = \gamma M$ — гравитационный параметр притягивающего центра.

В соответствии с формулами для обобщенных импульсов

$$\frac{\partial S}{\partial r} = p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\,.$$

Уравнение Гамильтона — Якоби (1.3) в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Big[\Big(\frac{\partial S}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\Big)^2\Big] - \frac{\mu m}{r} = 0\,.$$

Время t и угол φ не входят явно в это уравнение, и, значит, его полный интеграл, зависящий от двух произвольных постоянных α^1 и α^2, может быть представлен в виде

$$S = \alpha^1 t + \alpha^2\varphi + w(r, \alpha^1, \alpha^2)\,,$$

где неизвестная функция w удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \pm\frac{m}{r}\sqrt{2\mu r - \frac{2\alpha^1 r^2}{m} - \frac{(\alpha^2)^2}{m^2}}\,. \tag{1.22}$$

Радикал берется со знаком плюс или минус в зависимости от того, какой знак имеет при данном r обобщенный импульс

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial r} = m\dot{r}\,.$$

Выявим физический смысл постоянных α^1 и α^2. Непосредственно из уравнения Гамильтона — Якоби (1.3) следует, что

$$\alpha^1 = \frac{\partial S}{\partial t} = -H = -H_0 = -(T_0 + \Pi_0)\,.$$

Ранее при рассмотрении движения под действием центральных сил вместо постоянной $T_0 + \Pi_0$ была введена постоянная

$$h = \frac{2(T_0 + \Pi_0)}{m} = -\frac{2\alpha^1}{m}\,.$$

Вторая постоянная, соответствующая интегралу площадей $c = r^2\dot{\varphi}$, связана с постоянной α^2 соотношением

$$\alpha^2 = \partial S/\partial\varphi = mr^2\dot{\varphi} = mc\,.$$

Таким образом, величины α^1 и α^2 непосредственно связаны с интегралом энергии и интегралом площадей.

Функция $w(r, \alpha^1, \alpha^2)$ определяется с точностью до аддитивной постоянной. Поэтому для простоты можно считать, что $w = 0$ при $r = r_0$. Интегрируя уравнение (1.22) при данных начальных условиях, получаем

$$w(r, \alpha^1, \alpha^2) = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \sqrt{2\mu r - \frac{2\alpha^1 r^2}{m} - \frac{(\alpha^2)^2}{m^2}}\, \frac{dr}{r}\,.$$

Общее решение относительно функций r и φ по теореме Якоби определяется соотношениями

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha^1} = t + \frac{\partial w}{\partial \alpha^1} = t \mp \int\limits_{r_0}^{r} \frac{r dr}{\sqrt{2\mu r - \frac{2\alpha^1 r^2}{m} - \frac{(\alpha^2)^2}{m^2}}}\,,$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha^2} = \varphi + \frac{\partial w}{\partial \alpha^2} = \varphi \mp \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\alpha^2 dr}{mr\sqrt{2\mu r - \frac{2\alpha^1 r^2}{m} - \frac{(\alpha^2)^2}{m^2}}}\,,$$

где β_1 и β_2 — произвольные постоянные, которые находим из начальных условий.

Заменяя в этих соотношениях постоянные α^1 и α^2 постоянными h и c и полагая для простоты, что начальные условия таковы: $t = t_0 = 0$, $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$, имеем

$$t = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{r dr}{\sqrt{hr^2 + 2\mu r - c^2}}\,, \quad \varphi = \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{c dr}{r\sqrt{hr^2 + 2\mu r - c^2}}\,. \tag{1.23}$$

Если считать, что $r_0 = r_1$, где r_1 — наименьший положительный корень уравнения

$$hr^2 + 2\mu r - c^2 = 0\,, \tag{1.24}$$

то при $t > 0$ величина r возрастает, и, следовательно,

$$\partial w/\partial r = m\dot{r} > 0\,, \quad r_1 < r < r_2\,.$$

Здесь r_2 — второй положительный корень уравнения (1.24). В рассматриваемом случае радикал в выражении (1.22) следует взять со знаком плюс. Но тогда знак плюс будет стоять и перед интегралами в соотношениях (1.23), то есть

$$t = \int\limits_{r_1}^{r} \frac{r dr}{\sqrt{hr^2 + 2\mu r - c^2}}\,, \quad \varphi = \int\limits_{r_1}^{r} \frac{c dr}{r\sqrt{hr^2 + 2\mu r - c^2}}\,.$$

Используя таблицы интегралов, получаем

$$t = \frac{\sqrt{hr^2 + 2\mu r - c^2}}{h} + \frac{\mu}{h\sqrt{-h}}\Big(\arcsin\frac{hr+\mu}{\sqrt{\mu^2+hc^2}} - \frac{\pi}{2}\Big), \quad h<0\,,$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\mu r - c^2}{r\sqrt{\mu^2+hc^2}} + \frac{\pi}{2}\,,$$

откуда

$$t = \frac{c^2}{\mu + \sqrt{\mu^2+hc^2}\cos\varphi} = \frac{p}{1+e\cos\varphi}\,, \quad p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1+\frac{hc^2}{\mu^2}}\,.$$

§ 2. Интегральные инварианты

Фазовое пространство. Интегральные инварианты. Наиболее общей формой дифференциальных уравнений движения голономной системы, подверженной действию потенциальных сил, является система канонических уравнений в гамильтоновой форме:

$$\dot p_\sigma = -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q^\sigma}\,, \quad \dot q^\sigma = \frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p_\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{2.1}$$

Если ввести сквозную нумерацию, положив

$$q^1 = \xi_1\,,\ q^2 = \xi_2\,,\ \dots, q^s = \xi_s\,,$$

$$p_1 = \xi_{s+1}\,,\ p_2 = \xi_{s+2}\,,\ \dots, p_s = \xi_{2s}\,,$$

то эту систему можно записать в виде

$$\dot\xi_i = \Phi_i(t,\xi)\,, \quad i = \overline{1,2s}\,, \tag{2.2}$$

где

$$\Phi_\sigma = \frac{\partial H(t,\xi)}{\partial \xi_{s+\sigma}}\,, \quad \Phi_{s+\sigma} = -\frac{\partial H(t,\xi)}{\partial \xi_\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,.$$

Будем характеризовать состояние механической системы в момент t значениями координат $q^\sigma(t)$ и импульсов $p_\sigma(t)$. Каждой совокупности начальных значений q_0^σ и $p_{\sigma 0}$ соответствует только одна совокупность функций $q^\sigma(t)$ и $p_\sigma(t)$, удовлетворяющая системе уравнений (2.1) и условиям

$$\big[q^\sigma(t)\big]_{t_0} = q_0^\sigma\,, \quad \big[p_\sigma(t)\big]_{t_0} = p_{\sigma 0}\,.$$

Иначе говоря, состояние динамической системы в момент t однозначно определяется ее начальным состоянием с помощью функций

$$q^\sigma = q^\sigma(t, q_0, p_0)\,, \quad p_\sigma = p_\sigma(t, q_0, p_0)\,. \tag{2.3}$$

Условимся говорить, что совокупность переменных q^σ, p_σ определяет «точку» *фазового пространства.* Таким образом, «точками» такого пространства служат отдельные состояния системы. В дальнейшем будем считать, что это пространство построено нами как евклидово, а выбираемая система координатных осей ортогональна, и, следовательно, всякий объем его выражается формулой

$$\Omega = \int\limits_\Omega dq^1 dq^2 \dots dq^s dp_1 dp_2 \dots dp_s = \int\limits_\Omega d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{2s}\,. \tag{2.4}$$

При движении системы материальных точек соответствующая точка фазового пространства перемещается по своей фазовой траектории, причем через каждую фазовую точку, в частности, через начальную $M_0(q_0, p_0)$, вследствие единственности решения системы дифференциальных уравнений (2.1) может проходить только одна фазовая траектория. Так как величины q^σ и p_σ являются координатами фазовой точки, то величины $\dot{q}^\sigma$ и $\dot{p}_\sigma$, определяемые формулами (2.1), естественно назвать составляющими вектора скорости фазовой точки. Этот вектор будем обозначать через $\mathbf{V}^*$.

Покажем, что для гамильтоновой системы (2.1) $\operatorname{div}\mathbf{V}^* = 0$. Действительно, так как

$$\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial \dot{p}_\sigma}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial^2 H}{\partial q^\sigma \partial p_\sigma} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma \partial q^\sigma} = 0\,,$$

то

$$\operatorname{div}\mathbf{V}^* = \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial \dot{p}_\sigma}{\partial p_\sigma} \right) \equiv \sum_{i=1}^{2s} \frac{\partial V_i^*}{\partial \xi_i} = 0\,. \tag{2.5}$$

Из этого условия вытекает интересное следствие о постоянстве во времени объема произвольно взятой в момент t_0 части фазового пространства. Действительно, поскольку фазовые точки перемещаются, то перемещается с течением времени и фазовый объем, при этом, вообще говоря, форма его изменяется.

При перемещении указанный объем мог бы изменяться только вследствие того, что изменяются величины $\Delta\xi_1$, $\Delta\xi_2, \dots, \Delta\xi_{2s}$, являющиеся длинами ребер элементарного 2s-мерного параллелепипеда. Полагая

$\Delta\xi_k = \xi_k' - \xi_k$, имеем

$$\frac{d\Delta\xi_k}{dt} = \dot{\xi}_k' - \dot{\xi}_k = V_k^{*\prime} - V_k^* = \frac{\partial V_k^*}{\partial \xi_k}\,\Delta\xi_k\,. \tag{2.6}$$

Производную от элементарного объема $\Delta\Omega$ можно записать следующим образом:

$$\frac{d\Delta\Omega}{dt} = \frac{d(\Delta\xi_1\Delta\xi_2\ldots\Delta\xi_{2s})}{dt} = \frac{d\Delta\xi_1}{dt}\Delta\xi_2\Delta\xi_3\ldots\Delta\xi_{2s} +$$
$$+\frac{d\Delta\xi_2}{dt}\Delta\xi_1\Delta\xi_3\ldots\Delta\xi_{2s} + \ldots + \frac{d\Delta\xi_{2s}}{dt}\Delta\xi_1\Delta\xi_2\ldots\Delta\xi_{2s-1}\,.$$

Пользуясь формулой (2.6), получаем

$$\frac{d\Delta\Omega}{dt} = \sum_{i=1}^{2s}\frac{\partial V_i^*}{\partial \xi_i}\Delta\Omega = \operatorname{div}\mathbf{V}^*\cdot\Delta\Omega\,.$$

По доказанному векторное поле скоростей фазовой точки соленоидально[1], и поэтому согласно (2.5) $\operatorname{div}\mathbf{V}^* = 0$. Это позволяет сделать заключение, что производная по времени от объема $\Delta\Omega$ также равна нулю, и, следовательно, указанный объем не изменяется во времени. Отсюда непосредственно вытекает, что суммарный объем Ω также остается неизменным. Данное утверждение составляет содержание *теоремы Лиувилля* о сохранении фазового объема. Сам же интеграл Ω (см. формулу (2.4)) является примером интегрального инварианта.

Вообще говоря, *интегральным инвариантом системы дифференциальных уравнений* (2.2) называется интеграл вида

$$I = \int\limits_{\Omega} F(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2s})d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_{2s}\,,$$

взятый по некоторой области Ω фазового пространства и сохраняющий свое значение при замене ее любой областью, в которую она переходит с течением времени, когда ее точки движутся по своим траекториям. Другими словами, интеграл I не изменяется при преобразовании, задаваемом формулами (2.3).

Порядок интегральных инвариантов определяется размерностью области интегрирования. Интеграл I, распространенный на $2s$-мерную область

[1]Поле вектора $\mathbf{u}$ называется *соленоидальным*, если в нем нет ни источников, ни стоков, то есть в каждой его точке выполняется $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Например, поле скоростей несжимаемой жидкости является соленоидальным.

фазового пространства, называется *интегральным инвариантом порядка* $2s$ (например, интеграл (2.4)). Аналогичный интеграл, взятый по расположенному в фазовом пространстве l-мерному многообразию и сохраняющий свое значение при движении точек данного многообразия по своим траекториям, называется *интегральным инвариантом порядка* l. В частности, криволинейный интеграл

$$\int\limits_C \sum_{i=1}^{2s} F_i(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2s}) d\xi_i \tag{2.7}$$

может являться *интегральным инвариантом первого порядка*, или *линейным интегральным инвариантом*. Если контур интегрирования C замкнут, то линейный инвариант называется *относительным*, в противном случае —*абсолютным*[2].

Линейный интегральный инвариант Пуанкаре. Пусть точка M_0, соответствующая начальному состоянию, принадлежит некоторой гладкой кривой C_0, уравнение которой в параметрической форме задается функциями

$$q_0^\sigma = q_0^\sigma(\beta)\,, \quad p_{\sigma 0} = p_{\sigma 0}(\beta)\,, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant B\,. \tag{2.8}$$

Будем считать, что кривая C_0 замкнута, то есть

$$q_0^\sigma(0) = q_0^\sigma(B), \quad p_{\sigma 0}(0) = p_{\sigma 0}(B)\,.$$

Если через точки, принадлежащие кривой начальных состояний C_0, провести соответствующие фазовые траектории, то получим *фазовую трубку*. Как следует из выражений (2.3) и (2.8), фазовые траектории, образующие трубку, задаются уравнениями

$$q^\sigma = q^\sigma(t, q_0(\beta), p_0(\beta)), \quad p_\sigma = p_\sigma(t, q_0(\beta), p_0(\beta))\,.$$

Эти уравнения позволяют построить на фазовой трубке замкнутую кривую C_1, состоящую из точек с координатами

$$q_1^\sigma(\beta) = q^\sigma(t_1, q_0(\beta), p_0(\beta))\,, \quad p_{\sigma 1}(\beta) = p_\sigma(t_1, q_0(\beta), p_0(\beta))$$

для любого другого момента t_1. Общее решение (2.3) системы канонических уравнений, таким образом, дает возможность установить соответствие между точками замкнутых кривых C_0 и C_1.

[2]Понятие интегральных инвариантов введено А. Пуанкаре. Ему же принадлежит анализ теоремы Лиувилля на примере течения несжимаемой жидкости, для которой при отсутствии источников и стоков всегда $\operatorname{div}\mathbf{V}^* = 0$.

Выясним, при каких функциях F_i криволинейные интегралы вида (2.7), взятые вдоль кривых C_0 и C_1, совпадают. Для этого обратимся к функции действия S, которая, как уже неоднократно отмечалось, отражает общие свойства интегральных кривых.

В § 10 главы IX было показано, что если известно общее решение системы канонических уравнений, то функцию действия S можно рассматривать как функцию следующего вида:

$$S = S(t_0, t_1, q_0, q_1)\,. \tag{2.9}$$

Там же отмечалось также, что частные производные функции S по ее аргументам вычисляют по формулам (10.3) и (10.2), согласно которым находим

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = H_0\,, \quad \frac{\partial S}{\partial t_1} = -H_1\,, \quad \frac{\partial S}{\partial q_0^\sigma} = -p_{\sigma 0}\,, \quad \frac{\partial S}{\partial q_1^\sigma} = p_{\sigma 1}\,.$$

Отсюда следует, что полный дифференциал функции S имеет вид

$$dS = p_{\sigma 1} dq_1^\sigma - H_1 dt_1 - p_{\sigma 0} dq_0^\sigma + H_0 dt_0\,. \tag{2.10}$$

Аргументы q_0^σ и q_1^σ функции S вида (2.9) на введенных кривых C_0 и C_1 являются функциями параметра β. Следовательно, на этих кривых функция S также является функцией от β:

$$S(\beta) = S(t_0, t_1, q_0(\beta), q_1(\beta))\,,$$

причем так как моменты времени t_0 и t_1 не зависят от β, то на основании выражения (2.10)

$$dS = \frac{dS}{d\beta}\, d\beta = p_{\sigma 1} dq_1^\sigma - p_{\sigma 0} dq_0^\sigma\,, \tag{2.11}$$

где $dq_k^\sigma = \frac{dq_k^\sigma}{d\beta}\, d\beta$, $k = 0, 1$.

Кривые C_0 и C_1 замкнуты, и, следовательно, $S(0) = S(B)$. Отсюда вытекает, что интеграл от дифференциальной формы (2.11), взятый по многообразию, состоящему из точек, принадлежащих кривым C_0 и C_1, равен нулю:

$$\oint\limits_{C_1} p_{\sigma 1} dq_1^\sigma - \oint\limits_{C_0} p_{\sigma 0} dq_0^\sigma = \int\limits_0^B dS = S(B) - S(0) = 0\,.$$

Это равенство означает, что криволинейный интеграл

$$I_1 = \oint p_\sigma dq^\sigma = \mathrm{inv}\,, \tag{2.12}$$

взятый по контуру, перемещающемуся вдоль трубки, сохраняется постоянным. Интеграл (2.12) является искомым относительным интегральным инвариантом первого порядка и называется *линейным относительным интегральным инвариантом Пуанкаре.*

Дифференциалы dq^σ, входящие в интеграл I_1 и характеризующие вектор, касательный к кривой C, охватывающей фазовые траектории, следует отличать от дифференциалов dq^σ, которые в сочетании с дифференциалами dp_σ являются компонентами касательного вектора к фазовой траектории.

Введенное ранее фазовое пространство было образовано как многообразие с декартовыми координатами q^σ, p_σ и имело $2s$ измерений. Это пространство можно расширить, присоединив к нему еще одну координату t.

В «расширенном» фазовом пространстве можно также ввести замкнутую кривую C_0^*, задаваемую в параметрической форме уравнениями

$$t_0 = t_0(\beta)\,, \quad q_0^\sigma = q_0^\sigma(\beta)\,, \quad p_{\sigma 0} = p_{\sigma 0}(\beta)\,, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant B\,,$$

$$t_0(0) = t_0(B)\,, \quad q_0^\sigma(0) = q_0^\sigma(B)\,, \quad p_{\sigma 0} = p_{\sigma 0}(B)\,.$$

Используя кривую C_0^* и общее решение (2.3), строим фазовую «трубку», состоящую из точек с координатами

$$t = t_0(\beta) + \Delta t\,, \quad q^\sigma = q^\sigma(t, q_0(\beta), p_0(\beta))\,, \quad p_\sigma = p_\sigma(t, q_0(\beta), p_0(\beta))\,,$$

где Δt — произвольный интервал времени.

Рассмотрим теперь Δt как некоторую непрерывную функцию параметра β, подчиненную единственному условию $\Delta t(0) = \Delta t(B)$. Полагая $t_1 = t_0(\beta) + \Delta t(\beta)$, получаем на фазовой «трубке» замкнутую кривую C_1^*, задаваемую в параметрической форме уравнениями

$$t_1(\beta) = t_0(\beta) + \Delta t(\beta)\,, \quad q_1^\sigma(\beta) = q^\sigma(t_1(\beta),\, q_0(\beta),\, p_0(\beta))\,,$$
$$p_{\sigma 1}(\beta) = p_\sigma(t_1(\beta),\, q_0(\beta),\, p_0(\beta))\,.$$

Так как функцию $\Delta t(\beta)$ выбираем произвольно, то замкнутую кривую C_1^* можно рассматривать как произвольный контур, охватывающий фазовую «трубку». При этом существенно, что каждая фазовая «траектория» проходит только через одну точку контура.

Интегрируя дифференциальную форму (2.10) по многообразию, состоящему из точек, принадлежащих кривым C_0^* и C_1^*, получаем

$$\oint\limits_{C_1^*}(p_{\sigma 1}dq_1^\sigma - H_1 dt_1) - \oint\limits_{C_0^*}(p_{\sigma 0}dq_0^\sigma - H_0 dt_0) = \int\limits_0^B dS = S(B) - S(0) = 0\,.$$

Отсюда следует, что интеграл

$$I_1^* = \oint\limits_{C^*}(p_\sigma dq^\sigma - H dt) = \mathrm{inv} \tag{2.13}$$

не зависит от выбора замкнутого контура C^*, охватывающего фазовую «трубку». Такой интеграл называется *линейным относительным интегральным инвариантом Пуанкаре — Картана.*

Так как выражение (2.10) может быть получено только при использовании уравнений Гамильтона, то наличие данных уравнений есть необходимое условие существования интегрального инварианта Пуанкаре — Картана. Можно убедиться и в обратном, то есть что существования инварианта (2.13) достаточно для того, чтобы система канонических уравнений в форме Пуассона

$$\dot{q}^\sigma = Q_\sigma(t,q,p)\,, \quad \dot{p}_\sigma = P_\sigma(t,q,p) \tag{2.14}$$

приводилась к уравнениям в гамильтоновой форме (2.1) с функцией H, входящей в интеграл Пуанкаре — Картана (2.13).

Очевидно, что доказательство должно быть основано на независимости интеграла I_1^* от выбора контура C^*. Для того чтобы воспользоваться этим, представим координаты t, q^σ и p_σ точек контура C^* в виде

$$t = t_0(\beta) + \Delta t(\beta)\,, \quad q^\sigma = q^\sigma(t,\beta) = q^\sigma(t,\, q_0(\beta),\, p_0(\beta))\,,$$

$$p_\sigma = p_\sigma(t,\beta) = p_\sigma(t, q_0(\beta), p_0(\beta))\,.$$

Рассмотрим новый контур $\widetilde{C}^*$ с координатами

$$\widetilde{t} = t + \widetilde{\Delta} t\,, \quad \widetilde{q}^{\,\sigma} = q^\sigma(\widetilde{t},\beta)\,, \quad \widetilde{p}_\sigma = p_\sigma(\widetilde{t},\beta)\,,$$

где $\widetilde{\Delta} t$ не зависит от β. Прежде всего отметим, что при этом дифференциалы переменных $\widetilde{t}$ и t как функций β равны, то есть $d\widetilde{t} = dt$.

При достаточно малом $\widetilde{\Delta} t$

$$\widetilde{q}^{\,\sigma} = q^\sigma + \dot{q}^\sigma \widetilde{\Delta} t\,, \quad \widetilde{p}_\sigma = p_\sigma + \dot{p}_\sigma \widetilde{\Delta} t\,, \quad \widetilde{H} = H + \dot{H}\widetilde{\Delta} t\,,$$

и поэтому с точностью до малых первого порядка относительно $\widetilde{\Delta}t$ имеем

$$\widetilde{p}_\sigma d\widetilde{q}^{\,\sigma} - \widetilde{H}d\widetilde{t} = p_\sigma dq^\sigma - H dt + \big(\dot{p}_\sigma dq^\sigma + p_\sigma d\dot{q}^\sigma - \dot{H}dt\big)\widetilde{\Delta}t\,. \tag{2.15}$$

Отметим, что входящие сюда переменные $\dot{q}^\sigma$, $\dot{p}_\sigma$ и $\dot{H}$ вычисляют в точках, принадлежащих контуру C^*.

Из выражения (2.15) следует, что интеграл I_1^*, взятый по контуру $\widetilde{C}^*$, при достаточно малом $\widetilde{\Delta}t \neq 0$ может быть представлен в виде

$$\oint\limits_{\widetilde{C}^*} (\widetilde{p}_\sigma d\widetilde{q}^{\,\sigma} - \widetilde{H}d\widetilde{t}) = \oint\limits_{C^*} (p_\sigma dq^\sigma - H dt) + \widetilde{\Delta}t \oint\limits_{C^*} (\dot{p}_\sigma dq^\sigma + p_\sigma d\dot{q}^\sigma - \dot{H}dt)\,.$$

Значит следствием независимости интеграла I_1^* от выбора контура является равенство

$$\oint\limits_{C^*} (\dot{p}_\sigma dq^\sigma + p_\sigma d\dot{q}^\sigma - \dot{H}dt) = 0\,. \tag{2.16}$$

Вычисляя интеграл $\oint_{C^*} p_\sigma d\dot{q}^\sigma$ по частям, получаем

$$\oint\limits_{C^*} p_\sigma d\dot{q}^\sigma = p_\sigma \dot{q}^\sigma\big|_0^B - \oint\limits_{C^*} \dot{q}^\sigma dp_\sigma = -\oint\limits_{C^*} \dot{q}^\sigma dp_\sigma\,,$$

так как контур C^* замкнут. Отсюда вытекает, что выражение (2.16) может быть переписано в виде

$$\oint\limits_{C^*} (\dot{q}^\sigma dp_\sigma - \dot{p}_\sigma dq^\sigma + \dot{H}dt) = 0\,. \tag{2.17}$$

Фазовую «трубку» в «расширенном» фазовом пространстве выбираем произвольно, и охватывающий ее контур C^* может быть взят любым. Следовательно, интеграл (2.17) равен нулю при любом замкнутом контуре C^*. Как известно, это возможно только в том случае, когда дифференциальная форма, стоящая под знаком интеграла, есть полный дифференциал некоторой функции $\widetilde{H}(t, q, p)$:

$$\dot{q}^\sigma dp_\sigma - \dot{p}_\sigma dq^\sigma + \dot{H}dt = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\sigma}\,dp_\sigma + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q^\sigma}\,dq^\sigma + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t}\,dt\,.$$

Отсюда имеем

$$\dot{q}^\sigma = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\sigma}\,, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q^\sigma}\,, \quad \dot{H} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t}\,. \tag{2.18}$$

Вычислим полную производную по времени от функции $\widetilde{H}(t,q,p)$. Учитывая, что производные $\dot{q}^\sigma$ и $\dot{p}_\sigma$ могут быть представлены в виде (2.18), получаем

$$\dot{\widetilde{H}} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q^\sigma}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\sigma}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t}\,.$$

Сравнивая это равенство с третьим соотношением из выражений (2.18), видим, что в уравнениях (2.18) следует положить $\widetilde{H} = H$. Таким образом, уравнения (2.14) действительно приводятся к уравнениям в гамильтоновой форме (2.1).

§ 3. Канонические преобразования

Определение канонических преобразований. В главе VI было показано, что при точечном преобразовании координат

$$\widetilde{q}^{\,\sigma} = \widetilde{q}^{\,\sigma}(t,q) \tag{3.1}$$

уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma$$

не изменяются и переходят в уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T(t,\widetilde{q},\dot{\widetilde{q}})}{\partial \dot{\widetilde{q}}^{\,\tau}} - \frac{\partial T(t,\widetilde{q},\dot{\widetilde{q}})}{\partial \widetilde{q}^{\,\tau}} = \widetilde{Q}_\tau = Q_\sigma \frac{\partial q^\sigma}{\partial \widetilde{q}^{\,\tau}}\,.$$

Это свойство рассматриваемых уравнений называют *свойством* их *ковариантности относительно точечных преобразований* (3.1).

Если обобщенные силы Q_σ имеют потенциал, то система уравнений Лагранжа второго рода может быть записана в канонической форме:

$$\dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q^\sigma}\,, \quad \dot{q}^\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,. \tag{3.2}$$

При этом естественно возникает вопрос, при каких преобразованиях вида

$$\widetilde{q}^{\,\sigma} = \widetilde{q}^{\,\sigma}(t,q,p)\,, \quad \widetilde{p}_\sigma = \widetilde{p}_\sigma(t,q,p)\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{3.3}$$

уравнения относительно новых переменных $\widetilde{q}^{\,\sigma}$, $\widetilde{p}_\sigma$ обладают той же структурой, то есть имеют вид

$$\dot{\widetilde{p}}_\sigma = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{q}^{\,\sigma}}\,, \quad \dot{\widetilde{q}}^{\,\sigma} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{p}_\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{3.4}$$

где $\widetilde{H}(t, \widetilde{q}, \widetilde{p})$ — некоторая функция новых переменных и времени, играющая роль функции Гамильтона. Преобразования данного вида называются *каноническими.*

Условия каноничности преобразований. Скобки Лагранжа. Для определения условий, при которых преобразования (3.3) являются каноническими, необходимо с более общей точки зрения рассмотреть, что такое канонические уравнения. Как уже отмечалось, такие уравнения могут быть получены на основе уравнений Лагранжа второго рода путем использования преобразования Лежандра

$$H = p_\sigma \dot{q}_i^\sigma - L(t, q, \dot{q})\,.$$

Исходные уравнения Лагранжа являются необходимыми условиями экстремума интеграла действия

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} (p_\sigma \dot{q}^\sigma - H)dt\,. \tag{3.5}$$

Равенство нулю вариации этого интеграла может быть принято за исходный принцип, из которого можно получить уравнения движения механической системы, подверженной действию потенциальных сил, и в частности уравнения Гамильтона. Вариация интеграла (3.5) имеет вид

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big[\dot{q}^\sigma \delta p_\sigma + p_\sigma \delta \dot{q}^\sigma - \Big(\frac{\partial H}{\partial q^\sigma}\delta q^\sigma + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma\Big)\Big]dt\,.$$

Однако

$$p_\sigma \delta \dot{q}^\sigma = \frac{d}{dt}(p_\sigma \delta q^\sigma) - \dot{p}_\sigma \delta q^\sigma\,.$$

Так как $(\delta q^\sigma)_{t_0} = (\delta q^\sigma)_{t_1} = 0$, то

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(p_\sigma \delta q^\sigma)dt = p_\sigma \delta q^\sigma\Big|_{t_0}^{t_1} = 0\,,$$

и поэтому выражение для δS может быть представлено в виде

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big[\Big(\dot{q}^\sigma - \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\Big)\delta p_\sigma - \Big(\dot{p}_\sigma + \frac{\partial H}{\partial q^\sigma}\Big)\delta q^\sigma\Big]dt\,. \tag{3.6}$$

Рассмотрим сначала случай замены переменных по формулам

$$q^\sigma = q^\sigma(\widetilde{q}, \widetilde{p})\,, \quad p_\sigma = p_\sigma(\widetilde{q}, \widetilde{p})\,, \tag{3.7}$$

где под $\widetilde{q}$ и $\widetilde{p}$ подразумеваются совокупности $(\widetilde{q}^{\,1}, \widetilde{q}^{\,2}, \ldots, \widetilde{q}^{\,s})$, $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \ldots, \widetilde{p}_s)$ соответственно. Тогда

$$\dot{q}^\sigma = \frac{\partial q^\sigma}{\partial \widetilde{q}^{\,\rho}}\,\dot{\widetilde{q}}^{\,\rho} + \frac{\partial q^\sigma}{\partial \widetilde{p}_\tau}\,\dot{\widetilde{p}}_\tau\,, \quad \dot{p}_\sigma = \frac{\partial p_\sigma}{\partial \widetilde{q}^{\,\rho}}\,\dot{\widetilde{q}}^{\,\rho} + \frac{\partial p_\sigma}{\partial \widetilde{p}_\tau}\,\dot{\widetilde{p}}_\tau\,, \quad \rho, \tau = \overline{1, s}\,, \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} \delta q^\sigma = \frac{\partial q^\sigma}{\partial \widetilde{q}^{\,\lambda}}\,\delta\widetilde{q}^{\,\lambda} + \frac{\partial q^\sigma}{\partial \widetilde{p}_\mu}\,\delta\widetilde{p}_\mu\,, \quad \delta p_\sigma = \frac{\partial p_\sigma}{\partial \widetilde{q}^{\,\lambda}}\,\delta\widetilde{q}^{\,\lambda} + \frac{\partial p_\sigma}{\partial \widetilde{p}_\mu}\,\delta\widetilde{p}_\mu\,, \\ \sigma, \lambda, \mu = \overline{1, s}\,. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.6) и производя простые, но громоздкие вычисления, получаем

$$\begin{gathered} \delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Bigg([\widetilde{q}^{\,\rho}, \widetilde{p}_\mu]\dot{\widetilde{q}}^{\,\rho}\delta\widetilde{p}_\mu + [\widetilde{q}^{\,\rho}, \widetilde{q}^{\,\lambda}]\dot{\widetilde{q}}^{\,\rho}\delta\widetilde{q}^{\,\lambda} + [\widetilde{p}_\tau, \widetilde{q}^{\,\lambda}]\dot{\widetilde{p}}_\tau\delta\widetilde{q}^{\,\lambda} + \\ + [\widetilde{p}_\tau, \widetilde{p}_\mu]\dot{\widetilde{p}}_\tau\delta\widetilde{p}_\mu - \Big(\frac{\partial H}{\partial \widetilde{p}_\mu}\,\delta\widetilde{p}_\mu + \frac{\partial H}{\partial \widetilde{q}^{\,\lambda}}\,\delta\widetilde{q}^{\,\lambda} \Big) \Bigg) dt\,, \end{gathered} \tag{3.10}$$

где через $[u, v]$ обозначены *скобки Лагранжа* относительно канонических переменных q^σ и p_σ по параметрам u и v, задаваемые в виде

$$[u, v] = \sum_{\sigma=1}^{s} \Big(\frac{\partial q^\sigma}{\partial u}\frac{\partial p_\sigma}{\partial v} - \frac{\partial p_\sigma}{\partial u}\frac{\partial q^\sigma}{\partial v} \Big)\,.$$

Учитывая, что $[u, v] = -[v, u]$, представляем выражение (3.10) следующим образом:

$$\begin{gathered} \delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Bigg(\Big([\widetilde{q}^{\,\rho}, \widetilde{p}_\mu]\dot{\widetilde{q}}^{\,\rho} + [\widetilde{p}_\tau, \widetilde{p}_\mu]\dot{\widetilde{p}}_\tau - \frac{\partial H}{\partial \widetilde{p}_\mu} \Big)\,\delta\widetilde{p}_\mu - \\ - \Big([\widetilde{q}^{\,\lambda}, \widetilde{p}_\tau]\dot{\widetilde{p}}_\tau - [\widetilde{q}^{\,\rho}, \widetilde{q}^{\,\lambda}]\dot{\widetilde{q}}^{\,\rho} + \frac{\partial H}{\partial \widetilde{q}^{\,\lambda}} \Big)\,\delta\widetilde{q}^{\,\lambda} \Bigg) dt\,. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что если преобразование (3.7) обладает свойствами

$$[\widetilde{q}^{\,\rho}, \widetilde{q}^{\,\lambda}] = 0\,, \quad [\widetilde{p}_\tau, \widetilde{p}_\mu] = 0\,, \quad \rho, \lambda, \mu, \tau = \overline{1, s}\,, \tag{3.12}$$

$$[\widetilde{q}^{\,\rho}, \widetilde{p}_\mu] = \delta^\rho_\mu = \begin{cases} 1\,, & \rho = \mu\,, \\ 0\,, & \rho \neq \mu\,, \end{cases} \tag{3.13}$$

то вариацию δS в новых переменных записываем в виде

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\left(\dot{\widetilde{q}}^{\,\mu} - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{p}_\mu} \right) \delta \widetilde{p}_\mu - \left(\dot{\widetilde{p}}_\lambda + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{q}^{\,\lambda}} \right) \delta \widetilde{q}^{\,\lambda} \right) dt\,, \tag{3.14}$$

где

$$\widetilde{H}(t, \widetilde{q}, \widetilde{p}) = H(t,\, q(\widetilde{q}, \widetilde{p}),\, p(\widetilde{q}, \widetilde{p}))\,. \tag{3.15}$$

Формулы (3.6), (3.14) обладают одинаковой структурой, и, следовательно, приравнивание нулю величины δS приводит к уравнениям (3.2), (3.4) соответственно. А это означает, что преобразования (3.7) являются каноническими. Иначе говоря, условия (3.12), (3.13) достаточны для того, чтобы преобразования (3.7) были каноническими. И, наоборот, если преобразование каноническое, то интеграл (3.6) переходит непосредственно в интеграл (3.14), что влечет за собой равенство нулю скобок (3.12) и выполнение соотношений (3.13). Таким образом, равенства (3.12), (3.13) являются необходимыми и достаточными условиями каноничности преобразований (3.7).

Проанализируем теперь общий случай преобразования канонических переменных, задаваемых формулами (3.3), в которые явно входит время t. Величины δq^σ и δp_σ представляют собой частные дифференциалы функций (3.3) при фиксированном t, и формулы (3.9) при этом не изменяются. Вид формул (3.8) сохраняется неизменным, если положить $t = \widetilde{q}^{\,0}$, $\dot{\widetilde{q}}^{\,0} = 1$ и считать, что ρ изменяется от 0 до s. Отсюда следует, что и в случае преобразований общего вида (3.3) величина δS при переходе к новым переменным может быть представлена в виде (3.11). Выделяя в этом выражении скобки Лагранжа, содержащие время $t = \widetilde{q}^{\,0}$, и предполагая, что выполнены условия (3.12), (3.13), получаем

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\left(\dot{\widetilde{q}}^{\,\mu} + [t, \widetilde{p}_\mu] - \frac{\partial H}{\partial \widetilde{p}_\mu} \right) \delta \widetilde{p}_\mu - \left(\dot{\widetilde{p}}_\lambda - [t, \widetilde{q}^{\,\lambda}] + \frac{\partial H}{\partial \widetilde{q}^{\,\lambda}} \right) \delta \widetilde{q}^{\,\lambda} \right) dt\,.$$

Это выражение может быть приведено к интегралу вида (3.14), если сумму

$$-[t, \widetilde{p}_\mu] \delta \widetilde{p}_\mu - [t, \widetilde{q}^{\,\lambda}] \delta \widetilde{q}^{\,\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \widetilde{p}_\mu}\, \delta \widetilde{p}_\mu + \frac{\partial H}{\partial \widetilde{q}^{\,\lambda}}\, \delta \widetilde{q}^{\,\lambda}$$

представить в виде вариации $\delta \widetilde{H}$ некоторой новой функции Гамильтона $\widetilde{H}(t, \widetilde{q}, \widetilde{p})$, которую теперь уже нельзя считать заданной в виде (3.15).

Для нахождения такой новой функции $\widetilde{H}$ и одновременного определения возможных форм задания канонических преобразований воспользуемся взаимосвязью канонических уравнений и принципа Гамильтона — Остроградского.

Виды канонических преобразований. Канонические уравнения (3.2), (3.4) можно рассматривать как следствие принципа Гамильтона — Остроградского, записанного в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0\,, \qquad \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta \widetilde{L} dt = 0\,,$$

где $L = p_\sigma \dot{q}^{\,\sigma} - H$, $\widetilde{L} = \widetilde{p}_\sigma \dot{\widetilde{q}}^{\,\sigma} - \widetilde{H}$.

Отсюда следует, что решение системы (3.2) путем замены переменных по формулам (3.3) может быть сведено к решению системы (3.4), если из принципа Гамильтона относительно функции L вытекает принцип Гамильтона относительно функции $\widetilde{L}$.

Отметим прежде всего, что если для функции $L(t, q, \dot{q})$ выполняется условие

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\, dt \equiv \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} [p_\sigma \dot{q}^\sigma - H(t, q, p)]\, dt = 0\,,$$

то аналогичное условие выполняется и для функции

$$\widetilde{L} = L + \frac{d}{dt} V(t, q, p, \widetilde{q}, \widetilde{p})\,,$$

где V — произвольная дифференцируемая функция t, q^σ, p_σ, $\widetilde{q}^{\,\sigma}$, $\widetilde{p}_\sigma$. Действительно,

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \widetilde{L}\, dt = \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L\, dt + (\delta V)_{t_1} - (\delta V)_{t_0}\,.$$

Так как пределы t_0 и t_1 неизменны, а также неизменны значения q^σ и $\widetilde{q}^{\,\sigma}$ в моменты t_0 и t_1, то с учетом соотношений (3.3) имеем $\big(\delta V\big)_{t_1} = \big(\delta V\big)_{t_0} = 0$, и, следовательно,

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \widetilde{L}\, dt = \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L dt\,.$$

Из сказанного вытекает, что если положить

$$\widetilde{L} = \widetilde{p}_\sigma\, \dot{\widetilde{q}}^{\,\sigma} - \widetilde{H}(t, \widetilde{q}, \widetilde{p}) = p_\sigma\, \dot{q}^\sigma - H(t, q, p) + \frac{dV}{dt}\,, \tag{3.16}$$

то принцип Гамильтона выполняется как в переменных t, q^σ, p_σ, так и в переменных t, $\widetilde{q}^{\,\sigma}$, $\widetilde{p}_\sigma$. Формулу (3.16) удобно записать в виде

$$\widetilde{p}\,d\widetilde{q}^{\,\sigma} - \widetilde{H}(t,\widetilde{q},\widetilde{p})\,dt = p_\sigma\,dq^\sigma - H(t,q,p)\,dt + dV\,. \tag{3.17}$$

Воспользуемся теперь произвольностью функции V относительно переменных t, q^σ, p_σ, $\widetilde{q}^{\,\sigma}$, $\widetilde{p}_\sigma$. Будем считать, что V является функцией только переменных t, q^σ, $\widetilde{q}^{\,\sigma}$. Обозначим ее $V_1(t,q,\widetilde{q})$. Соотношение (3.17) при этом принимает вид

$$\widetilde{p}_\sigma\,d\widetilde{q}^{\,\sigma} - \widetilde{H}(t,\widetilde{q},\widetilde{p})\,dt = p_\sigma\,dq^\sigma - H(t,q,p)\,dt + \frac{\partial V_1}{\partial t}\,dt + \frac{\partial V_1}{\partial q^\sigma}\,dq^\sigma + \frac{\partial V_1}{\partial \widetilde{q}^\sigma}\,d\widetilde{q}^{\,\sigma}\,.$$

Это равенство становится тождеством, если положить

$$\widetilde{p}_\sigma = \frac{\partial V_1(t,q,\widetilde{q})}{\partial \widetilde{q}^{\,\sigma}}\,, \tag{3.18}$$

$$p_\sigma = -\frac{\partial V_1(t,q,\widetilde{q})}{\partial q^\sigma}\,, \tag{3.19}$$

$$\widetilde{H}(t,\widetilde{q},\widetilde{p}) = H(t,q,p) - \frac{\partial V_1}{\partial t}\,. \tag{3.20}$$

Предположим, что функция $V_1(t,q,\widetilde{q})$ выбрана так, что

$$\det\Big[\frac{\partial^2 V_1}{\partial q^\sigma \partial \widetilde{q}^{\,\tau}}\Big] \neq 0\,.$$

В этом случае уравнения (3.18) можно разрешить относительно q^σ. Тогда

$$q^\sigma = q^\sigma(t,\widetilde{q},\widetilde{p})\,.$$

Подставляя эти выражения в соотношения (3.19), имеем

$$p_\sigma = p_\sigma(t,\widetilde{q},\widetilde{p})\,.$$

Преобразования, задаваемые данными формулами, являются каноническими, так как равенство (3.17) при этом выполняется тождественно. И, значит, одновременно выполняются уравнения (3.2), (3.4).

Формула (3.20) позволяет найти новую функцию Гамильтона $\widetilde{H}(t,\widetilde{q},\widetilde{p})$.

Вследствие произвольности функции V наряду с каноническими преобразованиями, задаваемыми формулами (3.18), (3.19), существуют также канонические преобразования другого вида. Для нахождения другой

возможной формы задания канонических преобразований воспользуемся тождеством

$$p_\sigma dq^\sigma = d(p_\sigma q^\sigma) - q^\sigma dp_\sigma \,.$$

Соотношение (3.17) при этом принимает вид

$$\widetilde{p}_\sigma \, d\widetilde{q}^{\,\sigma} - \widetilde{H}(t, \widetilde{q}, \widetilde{p}) \, dt = -q^\sigma \, dp_\sigma - H(t, q, p) \, dt + dV_* \,,$$

где $V_*(t, q, p, \widetilde{q}, \widetilde{p}) = p_\sigma \, q^\sigma + V(t, q, p, \widetilde{q}, \widetilde{p})$.

Полагая теперь, что $V_* = V_2(t, \widetilde{q}, p)$, получаем

$$\widetilde{p}_\sigma \, d\widetilde{q}^{\,\sigma} - \widetilde{H}(t, \widetilde{q}, \widetilde{p}) \, dt = -q^\sigma \, dp_\sigma - H(t, q, p) \, dt + \\ + \frac{\partial V_2}{\partial t} \, dt + \frac{\partial V_2}{\partial \widetilde{q}^{\,\sigma}} \, d\widetilde{q}^{\,\sigma} + \frac{\partial V_2}{\partial p_\sigma} \, dp_\sigma \,,$$

и, следовательно, канонические преобразования могут быть заданы также в виде

$$\widetilde{p}_\sigma = \frac{\partial V_2(t, \widetilde{q}, p)}{\partial \widetilde{q}^{\,\sigma}} \,, \quad q^\sigma = -\frac{\partial V_2(t, \widetilde{q}, p)}{\partial p_\sigma} \,,$$

$$\widetilde{H}(t, \widetilde{q}, \widetilde{p}) = H(t, q, p) - \frac{\partial V_2}{\partial t} \,.$$

Рассуждая аналогично, устанавливаем, что возможны и следующие два частных вида общего соотношения (3.17):

$$-\widetilde{q}^{\,\sigma} \, d\widetilde{p}_\sigma - \widetilde{H}(t, \widetilde{q}, \widetilde{p}) \, dt = p_\sigma \, dq^\sigma - H(t, q, p) \, dt + \\ + \frac{\partial V_3(t, q, \widetilde{p})}{\partial t} \, dt + \frac{\partial V_3(t, q, \widetilde{p})}{\partial q^\sigma} \, dq^\sigma + \frac{\partial V_3(t, q, \widetilde{p})}{\partial \widetilde{p}_\sigma} \, d\widetilde{p}_\sigma \,,$$

$$-\widetilde{q}^{\,\sigma} d\widetilde{p}_\sigma - \widetilde{H}(t, \widetilde{q}, \widetilde{p}) \, dt = -q_\sigma \, dp_\sigma - H(t, q, p) \, dt + \\ + \frac{\partial V_4(t, p, \widetilde{p})}{\partial t} \, dt + \frac{\partial V_4(t, p, \widetilde{p})}{\partial p_\sigma} \, dp_\sigma + \frac{\partial V_4(t, p, \widetilde{p})}{\partial \widetilde{p}_\sigma} \, d\widetilde{p}_\sigma \,.$$

Отсюда вытекает, что существуют также следующие две формы канонических преобразований:

$$\widetilde{q}^{\,\sigma} = -\frac{\partial V_3(t, q, \widetilde{p})}{\partial \widetilde{p}_\sigma} \,, \quad p_\sigma = -\frac{\partial V_3(t, q, \widetilde{p})}{\partial q^\sigma} \,,$$

$$\widetilde{H}(t, \widetilde{q}, \widetilde{p}) = H(t, q, p) - \frac{\partial V_3}{\partial t} \,,$$

$$\widetilde{q}^{\,\sigma} = -\frac{\partial V_4(t, p, \widetilde{p})}{\partial \widetilde{p}_\sigma} \,, \quad q^\sigma = \frac{\partial V_4(t, p, \widetilde{p})}{\partial p_\sigma} \,,$$

$$\widetilde{H}(t,\widetilde{q},\widetilde{p}) = H(t,q,p) - \frac{\partial V_4}{\partial t}\,.$$

Таким образом, в зависимости от вида выбираемой функции V можно осуществить канонические преобразования одного из приведенных видов. Поэтому функцию V естественно называть *производящей функцией*.

Метод возмущений[3]**.** Метод возмущений является, пожалуй, основным методом применения канонических преобразований. Опишем его. Рассмотрим систему канонических уравнений (3.2), в которой

$$H(t,q,p) = H_0(t,q,p) + \varepsilon H_1(t,q,p)\,, \quad \varepsilon \ll 1\,, \tag{3.21}$$

то есть функция Гамильтона является суммой двух слагаемых, одно из которых мало, что фиксируется введением малого параметра ε. Предположим, что для системы канонических уравнений с функцией Гамильтона H_0

$$\dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H_0}{\partial q^\sigma}\,, \quad \dot{q}^\sigma = \frac{\partial H_0}{\partial p_\sigma}\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{3.22}$$

может быть построено общее решение

$$p_\sigma = p_\sigma(t,\widetilde{p},\widetilde{q})\,, \quad q^\sigma = q^\sigma(t,\widetilde{p},\widetilde{q})\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,, \tag{3.23}$$

в котором произвольные постоянные обозначены через $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$. Здесь, как и ранее, через $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ для краткости записи обозначены совокупности переменных $\widetilde{p} = (\widetilde{p}_1, \dots, \widetilde{p}_s)$, $\widetilde{q} = (\widetilde{q}^1, \dots, \widetilde{q}^s)$.

С другой стороны, формулы (3.23) можно рассматривать как каноническое преобразование к новым переменным $\widetilde{q}$, $\widetilde{p}$, для которых новая функция Гамильтона $\widetilde{H}_0(t,\widetilde{q},\widetilde{p}) \equiv 0$, ибо

$$\dot{\widetilde{p}}_\sigma = -\frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial \widetilde{q}^\sigma} = 0\,, \quad \dot{\widetilde{q}}^\sigma = \frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial \widetilde{p}_\sigma} = 0\,, \quad \sigma = \overline{1,s}\,.$$

В силу соотношения (3.20)

$$H_0(t,q,p) - \frac{dV_1}{dt} = \widetilde{H}_0(t,\widetilde{q},\widetilde{p}) = 0\,.$$

Тем самым, найдена производящая функция V_1, соответствующая каноническому преобразованию (3.23).

Каноническое преобразование (3.23) построено, исходя из функции Гамильтона H_0. Однако оно может быть применено для любой системы канонических уравнений с тем же числом степеней свободы s. Действительно, скобки Лагранжа, входящие в критерий каноничности преобразования

[3]Пункт «Метод возмущений» написан П. Е. Товстиком.

(3.12) и (3.13), не зависят от выбора функции Гамильтона. Поэтому применим каноническое преобразование (3.23) к системе с функцией Гамильтона (3.21). При этом формула (3.20) дает

$$\widetilde{H}(t,\widetilde{q},\widetilde{p}) = H_0(t,q,p) + \varepsilon H_1(t,q,p) - \frac{dV_1}{dt} = \varepsilon H_1(t,q,p)\,.$$

Окончательно получаем

$$\widetilde{H}(t,\widetilde{q},\widetilde{p}) = \varepsilon H_1(t,q(t,\widetilde{q},\widetilde{p}),p(t,\widetilde{q},\widetilde{p}))\,.$$

В результате применения канонического преобразования (3.23) новая функция Гамильтона оказалась малой, то есть новые неизвестные $\widetilde{p}_\sigma(t)$, $\widetilde{q}^{\,\sigma}(t)$, $\sigma = \overline{1,s}$, в силу системы (3.4) с течением времени меняются медленно. Появляется возможность упростить систему (3.4), заменяя правые части в ней их средними по времени значениями. В частности, если правые части периодичны по времени, то можно приближенно положить

$$f(t,\widetilde{q},\widetilde{p}) \approx \widehat{f}(\widetilde{q},\widetilde{p}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,\widetilde{q},\widetilde{p})dt\,,$$

где T — период, $f(t,\widetilde{q},\widetilde{p})$ — любая из правых частей системы (3.4).

Разработаны методы асимптотического интегрирования[4], позволяющие уточнить этот приближенный подход.

Канонические преобразования широко используются при решении задач небесной механики. Если учитывать только силу притяжения Солнца, то движение планеты будет эллиптическим, то есть может быть построено аналитическое решение. Метод возмущений позволяет учесть малое воздействие других планет, что приводит к медленной эволюции параметров эллипса.

В качестве примера рассмотрим систему с одной степенью свободы с функцией Гамильтона

$$H(q,p) = H_0(q,p) + \varepsilon H_1(q,p)\,, \quad H_0(q,p) = \frac{1}{2}(q^2+p^2)\,, \quad H_1(q,p) = F(q)\,,$$

где $F(q)$ — заданная функция.

Общее решение системы (3.22)

$$\dot{p} = -q, \quad \dot{q} = p$$

[4]См. монографию: *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

имеет вид

$$q = \widetilde{q}\cos t + \widetilde{p}\sin t\,, \quad p = \widetilde{p}\cos t - \widetilde{q}\sin t\,. \tag{3.24}$$

Рассматривая формулы (3.24) как каноническое преобразование, находим, что новая функция Гамильтона будет $\widetilde{H} = \varepsilon F(\widetilde{q}\cos t + \widetilde{p}\sin t)$, и новая система канонических уравнений примет вид

$$\begin{gathered}\dot{\widetilde{p}} = -\varepsilon f(\widetilde{q}\cos t + \widetilde{p}\sin t)\cos t\,, \quad \dot{\widetilde{q}} = \varepsilon f(\widetilde{q}\cos t + \widetilde{p}\sin t)\sin t\,,\\ f(q) = \frac{dF}{dq}\,.\end{gathered} \tag{3.25}$$

Пусть $F(q) = q^4/4$, тогда $f(q) = q^3$, и система (3.25) после осреднения за период $T = 2\pi$ принимает вид

$$\dot{\widetilde{p}} = -\frac{3}{8}\varepsilon\widetilde{q}(\widetilde{q}^{\,2} + \widetilde{p}^{\,2})\,, \quad \dot{\widetilde{q}} = \frac{3}{8}\varepsilon\widetilde{p}(\widetilde{q}^{\,2} + \widetilde{p}^{\,2})\,. \tag{3.26}$$

Умножая уравнения (3.26) на $\widetilde{p}$ и на $\widetilde{q}$ и складывая, видим, что эта система имеет интеграл $\widetilde{q}^{\,2} + \widetilde{p}^{\,2} = a^2 = \mathrm{const}$. После этого находим решение системы (3.26):

$$\widetilde{p} = a\cos\left(\frac{3}{8}\varepsilon a^2 t + \alpha\right)\,, \quad \widetilde{q} = a\sin\left(\frac{3}{8}\varepsilon a^2 t + \alpha\right)\,, \tag{3.27}$$

где a и α — произвольные постоянные. Подставляя формулы (3.27) в (3.24), находим решение исходной системы:

$$q = a\sin(\omega t + \alpha)\,, \quad p = a\cos(\omega t + \alpha)\,, \quad \omega = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2\,, \tag{3.28}$$

откуда следует, что частота колебаний ω зависит от амплитуды a.

В частности, безразмерное уравнение колебаний математического маятника имеет вид $\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0$. Для малых колебаний $\ddot{\varphi} + \varphi = 0$, и частота колебаний $\omega_0 = 1$ не зависит от амплитуды a. Для исследования колебаний с умеренной амплитудой положим $\sin\varphi \approx \varphi - \varphi^3/6$ и воспользуемся формулой (3.28) при $\varepsilon = -1/6$. В результате находим $\omega = 1 - a^2/16$. Например, при колебаниях с амплитудой $a = 1/2$ (или 30°) частота уменьшается на $1/64$ по сравнению с частотой малых колебаний.

§ 4. Оптико-механическая аналогия

Функция действия S, позволяющая, как было показано, описывать движение системы в целом, дает возможность также установить тесную связь между законом движения свободной точки и законом распространения света. Зависимость функции S от начальных значений t_0 и q_0^σ в рассматриваемом случае интереса не представляет, поэтому записываем

$$S = S(t, q) = \int\limits_{t_0}^{t} L(t, q, \dot{q})\, dt = \int\limits_{t_0}^{t} (T - \Pi)\, dt\,.$$

В случае стационарного силового поля, когда T и Π не зависят явно от времени, существует интеграл энергии $T + \Pi = H = \text{const}$, и, следовательно, $L = 2T - H$. Выражение для S при этом принимает вид

$$S(t, q) = \int\limits_{t_0}^{t} 2T\, dt - \int\limits_{t_0}^{t} H\, dt\,,$$

или, так как $T = Mv^2/2$ и $vdt = ds$, то при $t_0 = 0$

$$S(t, q) = \int\limits_{\smile AB} Mv\, ds - Ht = W(q) - Ht\,. \tag{4.1}$$

Для простоты в дальнейшем будем считать, что система состоит из одной точки и рассмотрение ведется в декартовых координатах. Переход к общему случаю, как уже отмечалось, сводится к формализации математического аппарата. Итак, считаем, что

$$S = S(t, x_1, x_2, x_3)\,, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_j} = \frac{\partial W}{\partial x_j} = p_j\,, \qquad j = 1, 2, 3,$$

где p_j — составляющие импульса, равные mv_j. Полный импульс при этом представляем в виде

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} S\,.$$

Отсюда вытекает, что вектор $m\mathbf{v}$ ортогонален поверхности $S(t, x) = C = \text{const}$. Уравнение этой поверхности, как следует из выражения (4.1), таково:

$$W(x) = Ht + C\,. \tag{4.2}$$

Для момента $t + \Delta t$ то же значение C функция S имеет на поверхности, задаваемой уравнением

$$W(x) = Ht + C + H\Delta t\,. \tag{4.3}$$

Сравнивая уравнения этих двух поверхностей, видим, что поверхность с равными значениями функции S перемещается в пространстве.

Установим скорость перемещения при подобном движении отдельных точек такой поверхности. Пусть $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — интересующий нас вектор скорости, соответствующий точке с координатами x_j на поверхности (4.2). Тогда при достаточно малом Δt эта точка на новой поверхности (4.3) имеет координаты $x_j + u_j\Delta t$. Функция $W(x + u\Delta t)$ с точностью до малых первого порядка относительно Δt может быть представлена в виде

$$W(x + u\Delta t) = W(x) + \frac{\partial W}{\partial x_j}\, u_j \Delta t\,.$$

Учитывая, что точки с координатами x_j и $x_j + u_j\Delta t$ принадлежат соответственно поверхностям (4.2), (4.3), имеем

$$Ht + C + H\Delta t = Ht + C + \frac{\partial W}{\partial x_j}\, u_j \Delta t\,.$$

Отсюда $\frac{\partial W}{\partial x_j}\, u_j = H$.

Учитывая, что $\boldsymbol{\nabla} W = \boldsymbol{\nabla} S = m\mathbf{v}$, получаем

$$m\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = H\,.$$

Изменение координат x_j происходит только вследствие перехода с поверхности (4.2) на поверхность (4.3). Это означает, что компоненты $u_j\Delta t$ вектора смещения направлены по нормали к поверхности (4.2), то есть векторы $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\nabla} W = m\mathbf{v}$ коллинеарны. Поэтому окончательно имеем

$$\mathbf{u} = \frac{H}{mv^2}\mathbf{v} = \frac{H}{m^2v^2}\boldsymbol{\nabla} S\,.$$

Отсюда

$$|\mathbf{u}| = u = \frac{H}{mv} = \frac{H}{|\boldsymbol{\nabla} S|}\,. \tag{4.4}$$

Рассмотрим теперь интеграл $W = \int_0^t 2T dt$, входящий в формулу (4.1). Его можно записать в форме Мопертюи — Эйлера

$$W = \int\limits_{\smile AB} mv\, ds\,, \tag{4.5}$$

или на основании формулы (4.4) в виде

$$W = \int\limits_{\smile AB} \frac{H\,ds}{u} = H \int\limits_{\smile AB} \frac{ds}{u}\,. \tag{4.6}$$

Вместо постоянной H, зависящей от начальных данных, вводим некоторую новую постоянную H_* той же размерности, которую считаем одинаковой для всех кривых. Деля W на H_*, получаем

$$\tau = \frac{W}{H_*} = \int\limits_{\smile AB} \frac{ds}{\widetilde{u}}\,, \tag{4.7}$$

где $\widetilde{u} = uH_*/H$.

Величина τ имеет размерность времени. Интеграл (4.7) точно совпадает с интегралом, выражающим *принцип Ферма*. Согласно этому принципу луч света, вышедший из точки A, приходит в точку B в наикратчайшее время так, что интеграл (4.7) принимает для дуги AB наименьшее значение.

Для удобства сравнения интегралов (4.5), (4.7), выражающих принципы разной физической природы, приводим их к безразмерному виду. Принимая за эталон скорости скорость света c, а за эталон длины l, имеем

$$W = mcl \int\limits_{\smile AB} \overline{v}\,d\overline{s}\,, \quad \tau = \frac{l}{c} \int\limits_{\smile AB} \frac{d\overline{s}}{\overline{\widetilde{u}}}\,,$$

где $d\overline{s} = ds/l$, $\overline{v} = v/c$, $\overline{\widetilde{u}} = \widetilde{u}/c$, или в безразмерном виде

$$W = \frac{W}{mcl} = \int\limits_{\smile AB} \overline{v}\,d\overline{s}\,, \quad \overline{\tau} = \frac{\tau c}{l} = \int\limits_{\smile AB} \frac{d\overline{s}}{\overline{\widetilde{u}}}\,.$$

Из этих формул следует, что безразмерное действие $\overline{W}$ равно безразмерному времени $\overline{\tau}$, если $\overline{v}\overline{\widetilde{u}} = 1$ или

$$v = c^2/\widetilde{u}\,. \tag{4.8}$$

Сравнивая это выражение с выражением (4.4) $mv = H/u = H_*/\widetilde{u}$, видим, что постоянную H_* следует выбирать в виде

$$H_* = mc^2\,.$$

Таким образом, движению материальной точки со скоростью v в потенциальном силовом поле всегда можно поставить в соответствие оптический процесс, распространяющийся со скоростью $\widetilde{u}$, и, наоборот, причем скорости $\widetilde{u}$ и v связаны соотношением (4.8).

Как известно из курса оптики, распространение света можно объяснять распространением волн возмущения, носящих колебательный характер, причем это явление подчиняется *принципу Гюйгенса*. Согласно данному принципу каждая точка среды, до которой дошло возмущение, представляет собой источник вторичных волн с радиусом $\widetilde{u}\Delta t$, огибающая которых является новой волновой поверхностью в момент $t + \Delta t$.

Принцип Гюйгенса можно распространить и на перемещение поверхности с равными значениями функции S со скоростью u. Математическим выражением принципа Гюйгенса является волновое уравнение

$$\boldsymbol{\nabla}^2\psi - \frac{1}{\widetilde{u}^{\,2}}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0\,. \tag{4.9}$$

Здесь $\psi(t, x_1, x_2, x_3)$ — потенциал, значения которого на поверхности фронта волны сохраняются одинаковыми, $\widetilde{u}$ — скорость распространения состояния ψ. Характерным является случай, когда изменения функции $\psi(t, x_1, x_2, x_3)$ носят колебательный характер. В простейшем случае распространения луча света с постоянной скоростью $\widetilde{u}$ вдоль оси x колебательный характер изменения потенциала ψ, удовлетворяющего уравнению (4.9), можно задать в виде

$$\psi(t, x) = A\sin 2\pi\bigl(\nu t - \frac{\nu x}{\widetilde{u}}\bigr) \tag{4.10}$$

или в виде

$$\psi(t, x) = A\sin 2\pi\bigl(\nu t - \frac{x}{\lambda}\bigr)\,.$$

Здесь $\lambda = \widetilde{u}/\nu$ — длина волны, ν — частота колебания, A — амплитуда.

Величина $f = \nu t - x/\lambda$ есть *фаза колебания*. Поверхности с одинаковой фазой $\nu t - x/\lambda = \mathrm{const}$ представляют собой плоскости, перпендикулярные оси x, которые движутся со скоростью $\widetilde{u} = H_*/(mv) = \nu\lambda$. Такая волна называется *плоской*.

В рассматриваемом случае прямолинейное распространение луча света со скоростью $\widetilde{u}$ соответствует движению материальной точки с постоянной скоростью v вдоль оси x. Функция S, как следует из формулы (4.1), имеет вид

$$S = mvx - Ht, \quad s = x\,.$$

Как видно из этого выражения, при движении вдоль оси x со скоростью u, то есть при $x = x_0 + ut$, величина S постоянна, если скорость u задана в виде выражения (4.4).

Приведенный пример показывает существование связи между движением точки и волновым процессом. Установить эту связь удается благодаря наиболее общему подходу к механическому движению материальной точки через функцию действия S.

Вернемся к решению (4.10) одномерного волнового уравнения. Производная $\partial^2\psi/\partial t^2$ связана с функцией ψ соотношением

$$\partial^2\psi/\partial t^2 = -4\pi^2\nu^2\psi\,.$$

Отсюда следует, что эта функция удовлетворяет также уравнению

$$\boldsymbol{\nabla}^2\psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{\widetilde{u}^{\,2}}\,\psi = 0\,.$$

Пользуясь равенством $\widetilde{u} = H_*/(mv)$, получаем

$$\boldsymbol{\nabla}^2\psi + \frac{8\pi^2 m\nu^2}{H_*^2}\,\frac{mv^2}{2}\,\psi = 0\,.$$

Обозначая

$$h = \frac{H_*}{\nu} = \frac{mc^2}{\nu} = mv\,\frac{c^2}{\nu v} = mv\,\frac{c^2\lambda}{\widetilde{u}v} = p\lambda \tag{4.11}$$

и учитывая, что $mv^2/2 = H - \Pi$, имеем

$$\boldsymbol{\nabla}^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\,(H - \Pi)\,\psi = 0\,. \tag{4.12}$$

Уравнение относительно функции ψ такого вида играет большую роль в теоретической физике. Здесь мы подошли к уравнению (4.12) на основе оптико-механической аналогии и элементарного решения волнового уравнения. При этом предполагалось, что скорость $\widetilde{u}$, а следовательно, и потенциальная энергия Π не зависят от x.

Рассмотрим теперь свойства уравнения (4.12), считая, что Π — функция от x. Впервые для анализируемого случая оно было использовано Шрёдингером и носит название *уравнения Шрёдингера*. Полная энергия H играет в этом уравнении роль параметра. Интересно, что отличные от нуля решения, затухающие на бесконечности, существуют только при некоторых значениях полной энергии.

Исследуем этот вопрос более подробно на примере гармонического осциллятора. Потенциальная энергия в данном случае

$$\Pi = c_1 x^2/2\,.$$

Уравнение (4.12) при этом принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(H - \frac{c_1 x^2}{2}\right)\psi = 0\,.$$

Обозначая

$$\alpha = \frac{8\pi^2 m H}{h^2}\,, \quad \beta = \frac{2\pi}{h}\sqrt{m c_1}\,, \tag{4.13}$$

получаем

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\alpha - \beta^2 x^2)\,\psi = 0\,.$$

Введем новую переменную $\xi = x\sqrt{\beta}$. Тогда

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\overline{H} - \xi^2)\psi = 0\,, \tag{4.14}$$

где

$$\overline{H} = \alpha/\beta\,. \tag{4.15}$$

В этом уравнении параметром является величина $\overline{H}$.

Для плоской волны, которой соответствует равномерное и прямолинейное движение материальной точки, функция ψ имеет вид (4.10). Характерно то, что она обладает одинаковой структурой на всей оси x. Это объясняется тем, что движение на всей оси x предполагается также равномерным и прямолинейным. В случае гармонического осциллятора оно происходит внутри конечного промежутка, взятого на указанной оси. В точках этого промежутка функция ψ не равна тождественно нулю. Вне его функция ψ, являющаяся решением уравнения (4.14), должна удовлетворять условиям

$$\lim_{x\to+\infty}\psi = 0\,, \quad \lim_{x\to-\infty}\psi = 0\,. \tag{4.16}$$

Связь между возможным движением точки и функцией ψ в данном случае, конечно, не так проста, как при прямолинейном и равномерном движении. Здесь этого специального вопроса касаться не будем.

Уравнение (4.14) при граничных условиях (4.16) имеет решения, не равные нулю тождественно, лишь при некоторых вполне определенных значениях параметра $\overline{H}$, которые называются *собственными*, или *характеристическими*, *числами*, а соответствующие им решения — *собственными*, или *фундаментальными*, *функциями*. Характеристическим числам

уравнения Шрёдингера соответствует ряд вполне определенных значений полной энергии H. Этим самым задача о нахождении возможных дискретных значений энергии (*задача о квантовании энергии*) сводится к задаче нахождения характеристических чисел для уравнения (4.14) при граничных условиях (4.16).

Интересно отметить, что данная математическая задача была решена Эрмитом задолго до появления уравнения Шрёдингера. Им было показано, что собственные значения уравнения (4.14) таковы:

$$\overline{H}_n = 2\,n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.17}$$

Собственные функции ψ_n, соответствующие значениям $\overline{H}_n$, называются *функциями Эрмита* и имеют вид

$$\psi_n = P_n(\xi)\, e^{-\xi^2/2}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

где $P_n(\xi)$ — *полиномы Эрмита*, связанные рекуррентными соотношениями

$$P_{n+1} = 2\,\xi P_n - 2\,n P_{n-1}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

причем $P_0 = 1,\ P_1 = 2\xi$.

Установим теперь, каким значениям полной энергии H_n соответствуют найденные значения $\overline{H}_n$.

При колебаниях точки по закону $x = a \sin 2\pi\nu t$ ее полная энергия H может быть представлена в виде

$$H = \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{c_1 x^2}{2} + m \cdot 2\pi^2 a^2 \nu^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Отсюда видно, что при $x = 0$ полная энергия $H = m \cdot 2\pi^2 a^2 \nu^2$, а при $x = a$ она выражается как $H = c_1 a^2/2$, поэтому

$$c_1 a^2/2 = m \cdot 2\pi^2 a^2 \nu^2\,.$$

Следовательно,

$$c_1 = 4\pi^2 \nu^2 m\,.$$

Подставляя это значение c_1 в выражения (4.13), получаем

$$\beta = \frac{2\pi}{h}\sqrt{m c_1} = \frac{4\pi^2 m\nu}{h}\,, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2H}{h\nu}\,,$$

откуда на основании формул (4.15) и (4.17) имеем

$$H_n = \overline{H}_n \frac{h\nu}{2} = \frac{2n+1}{2}\, h\nu\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Таким образом, постоянная H в уравнении Шрёдингера не может быть взята совершенно произвольно. Она должна быть пропорциональна частоте колебания ν и кратна нечетным значениям половины некоторой элементарной начальной энергии $h\nu$. Согласно формуле (4.11) эта энергия выражается формулой

$$h\nu = mc^2\,.$$

Глава XII
ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Автор: *Н. Н. Пóляхов*

В главе XII в кинематических соотношениях вводится четырехмерная квадратичная форма Пуанкаре и при рассмотрении сложного движения точки используется четырехмерный вектор скорости. При рассмотрении динамики из обобщенного закона Ньютона выводится теорема об изменении кинетической энергии и получаются уравнения Лагранжа второго рода и Гамильтона.

§ 1. Кинематические соотношения

Четырехмерная квадратичная форма Пуанкаре. Известно, что кинематика точки изучает геометрические свойства движения в системе четырех измерений, в которой роль четвертого измерения играет время. Однако время, рассматриваемое как четвертая координата, входило в преобразования кинематики не вполне равноправно с пространственными координатами. Так, например, при переходе от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе $O'x_1'x_2'x_3'$, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой, инвариантами преобразования являются длина пространственного элемента

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = (dx_1')^2 + (dx_2')^2 + (dx_3')^2 \tag{1.1}$$

и промежуток времени

$$t_2 - t_1 = t_2' - t_1' \,, \tag{1.2}$$

что эквивалентно равенству $t = t'$. Именно в наличии указанных инвариантов Ньютон видел проявление абсолютных свойств пространства и времени.

Неравноправность пространственной и временной координат следует из формул (1.1) и (1.2). Очевидно, что для установления равноправности указанных координат и построения четырехмерной кинематики за основу ее естественно принять инвариантную квадратичную форму

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 = \\ &= (dx_1')^2 + (dx_2')^2 + (dx_3')^2 + (dx_4')^2 \,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где согласно Пуанкаре $dx_4 = ic\,dt$, $i^2 = -1$, причем c есть множитель, очевидно имеющий размерность скорости.

Введение Пуанкаре множителя i объясняется тем, что он рассматривал физическую задачу, связанную с приведением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

к уравнению вида

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4^2} = 0\,,$$

в которое все четыре переменные входят равноправно.

Несколько позже Минковским было предложено считать инвариантным выражение

$$dS^2 = c^2(dt)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2\,.$$

Представим форму (1.3) в виде

$$d\sigma = (ic\,dt)^2(1 - v^2/c^2), \qquad v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\,.$$

Отсюда имеем

$$d\sigma = ic\,dt(1 - v^2/c^2)^{1/2} = ic\,d\tau\,, \tag{1.4}$$

где

$$d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,dt, \qquad \beta = v/c\,. \tag{1.5}$$

Так как величина $d\sigma$ принята за инвариант относительно преобразования четырехмерных координат, то очевидно, что величина $d\tau$ также является инвариантом.

Преобразования Лоренца. Требование инвариантности формы (1.3) означает, что пространство, в котором строится теперь кинематика, есть четырехмерное евклидово пространство. Так как одна из координат, а именно x_4, выбирается чисто мнимой, будем называть взятое пространство *псевдоевклидовым*. Следствием евклидовости пространства является то, что расстояние

$$\begin{gathered}\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \\ = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 + (x_4')^2\end{gathered} \tag{1.6}$$

при ортогональных преобразованиях пространства должно оставаться неизменным.

Рассмотрим для простоты случай, когда преобразуются лишь координаты x_1 и x_4. Тогда формула (1.6) приобретает вид

$$x_1^2 + x_4^2 = (x_1')^2 + (x_4')^2 \,. \tag{1.7}$$

Каковы же должны быть коэффициенты α_{ij} линейного преобразования

$$x_1' = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{14} x_4 \,, \qquad x_4' = \alpha_{41} x_1 + \alpha_{44} x_4 \,, \tag{1.8}$$

удовлетворяющего условию (1.7)? Подставляя выражения (1.8) в (1.7), получаем

$$x_1^2 + x_4^2 = (\alpha_{11}^2 + \alpha_{41}^2)\, x_1^2 + 2(\alpha_{11}\alpha_{14} + \alpha_{41}\alpha_{44})\, x_1 x_4 + (\alpha_{14}^2 + \alpha_{44}^2)\, x_4^2 \,,$$

откуда видно, что коэффициенты α_{ij} должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{gathered} \alpha_{11}^2 + \alpha_{41}^2 = 1, \qquad \alpha_{14}^2 + \alpha_{44}^2 = 1 \,, \\ \alpha_{11}\alpha_{14} + \alpha_{41}\alpha_{44} = 0 \,. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Отметим, что так как x_1 и x_1' — действительные, а x_4 и x_4' — чисто мнимые величины, то в системе (1.8) α_{11} должно быть действительным числом, а α_{14} — чисто мнимым.

Введем новую величину $i\beta_e = \alpha_{14}/\alpha_{11}$, или

$$\alpha_{14} = i\beta_e\, \alpha_{11} \,. \tag{1.10}$$

Подставляя в уравнение (1.9) вместо α_{14} его выражение (1.10), получаем систему трех уравнений с неизвестными α_{11}, α_{44} и α_{41}, содержащую параметр β_e. Решая эту систему, имеем

$$\alpha_{11}^2 = \alpha_{44}^2 = \frac{1}{1-\beta_e^2} \,, \qquad \alpha_{41}^2 = -\frac{\beta_e^2}{1-\beta_e^2} \,.$$

Характерным примером ортогонального преобразования двух вещественных переменных x и y является поворот плоскости Oxy на угол ψ. При этом, как легко показать, новые координаты x', y' связаны со старыми соотношениями

$$x = x' \cos\psi - y' \sin\psi \,, \qquad y = x' \sin\psi + y' \cos\psi \,,$$

откуда

$$x' = x \cos\psi + y \sin\psi \,, \qquad y' = -x \sin\psi + y \cos\psi \,,$$

или с введением индексов

$$x_1' = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2\,, \qquad x_2' = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2\,.$$

Коэффициенты этого преобразования связаны соотношениями

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}\,, \qquad \alpha_{12} = -\alpha_{21}\,.$$

Коэффициенты преобразования (1.8) также можно подчинить аналогичным условиям, то есть принять, что

$$\alpha_{11} = \alpha_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}}\,, \qquad \alpha_{14} = -\alpha_{41} = \frac{i\beta_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}}\,.$$

Система (1.8) при этом принимает вид

$$x_1' = \frac{x_1 + i\beta_e x_4}{\sqrt{1-\beta_e^2}}\,, \qquad x_4' = \frac{-i\beta_e x_1 + x_4}{\sqrt{1-\beta_e^2}}\,.$$

С учетом $x_4 = ict$, $x_4' = ict'$ находим

$$x_1' = \frac{x_1 - \beta_e ct}{\sqrt{1-\beta_e^2}}\,, \qquad t' = \frac{ct - \beta_e x_1}{c\sqrt{1-\beta_e^2}}\,. \tag{1.11}$$

Из первого равенства следует, что если x_1' и параметр β_e считать постоянными, то

$$\frac{dx_1}{dt} = \upsilon_e = \beta_e c\,, \qquad \beta_e = \frac{\upsilon_e}{c}\,.$$

Таким образом, точка, неподвижная в системе координат $O'x_1'x_2'x_3'$, в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеет скорость υ_e, направленную по оси x_1. Эту скорость можно рассматривать как переносную, то есть считать, что система координат $O'x_1'x_2'x_3'$ движется относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$ поступательно со скоростью υ_e, направленной вдоль оси x_1. Выражая в формулах (1.11) параметр β_e через υ_e и учитывая, что $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$, окончательно имеем

$$\begin{gathered} x_1' = \frac{x_1 - \upsilon_e t}{\sqrt{1-(\upsilon_e/c)^2}}\,, \qquad x_2' = x_2\,, \qquad x_3' = x_3\,, \\ t' = \frac{t - \upsilon_e x_1/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon_e/c)^2}}\,. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Эти формулы называются *преобразованиями Лоренца*.

Разрешая уравнения (1.12) относительно старых переменных, получаем

$$x_1 = \frac{x_1' + v_e t'}{\sqrt{1-(v_e/c)^2}}\,, \qquad x_2 = x_2'\,, \qquad x_3 = x_3'\,,$$
$$t = \frac{t' + v_e x_1'/c^2}{\sqrt{1-(v_e/c)^2}}\,, \tag{1.13}$$

то есть формулы обратного перехода обладают той же структурой, что и исходные формулы (1.12). Остается установить кинематический смысл постоянной c.

Как уже отмечалось, инвариантности $d\sigma$ соответствует инвариантность вида волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,,$$

лежащего в основе волновой оптики. Здесь c соответствует скорости распространения света в вакууме. При этом, как известно из многочисленных экспериментов, данная скорость не зависит от скорости v_e движения системы отсчета и одинакова для всех систем. Это возможно только в случае, когда в новых переменных x_1', x_2', x_3' и t', связанных со старыми соотношениями (1.12), волновое уравнение имеет тот же вид[1]:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}\,.$$

Интересным и важным следствием преобразований Лоренца (1.12) является то, что сравнение расстояний между точками трехмерного пространства в разных системах отсчета можно производить только при одновременном сравнении и промежутков времени. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Выберем в исходной системе отсчета две точки с координатами $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, t_0)$ и $(x_{11}, x_{21}, x_{31}, t_1)$ соответственно. Пусть преобразованиями Лоренца эти точки переводятся в точки с координатами $(x_{10}', x_{20}', x_{30}', t_0')$ и $(x_{11}', x_{21}', x_{31}', t_1')$. Тогда, как следует из преобразований (1.12), имеем

$$x_{11}' - x_{10}' = \frac{x_{11} - x_{10} - v_e(t_1 - t_0)}{\sqrt{1-(v_e/c)^2}}\,,$$
$$t_1' - t_0' = \frac{t_1 - t_0 - (x_{11} - x_{10})v_e/c^2}{\sqrt{1-(v_e/c)^2}}\,. \tag{1.14}$$

[1] Еще в 1887 г. В. Фохт показал, что при преобразованиях, задаваемых формулами (1.12), вид волнового уравнения не изменяется: *Voigt W.* Über das Dopplersche Prinzip. Göttingen, 1887. S. 41–51.

Отсюда видно, что при $t'_1 = t'_0$ интервал времени

$$t_1 - t_0 = (x_{11} - x_{10})\upsilon_e/c^2\,,$$

поэтому, обозначая $x'_{11} - x'_{10} = l'$, $x_{11} - x_{10} = l$, получаем

$$l' = \frac{l(1-\beta_e^2)}{\sqrt{1-\beta_e^2}} = l\sqrt{1-\beta_e^2}\,, \qquad \beta_e = \frac{\upsilon_e}{c}\,.$$

Считая, что $x'_{11} = x'_{10}$, находим

$$x_{11} - x_{10} = \upsilon_e(t_1 - t_0)\,,$$

и, следовательно,

$$\Delta t' = t'_1 - t'_0 = (t_1 - t_0)\frac{1-\beta_e^2}{\sqrt{1-\beta_e^2}} = \Delta t\sqrt{1-\beta_e^2}\,.$$

Непосредственно из формул (1.14) следует также, что при $t_1 = t_0$, а затем при $x_{11} = x_{10}$ имеем соответственно

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1-\beta_e^2}}\,, \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t}{1-\beta_e^2}\,.$$

Сложное движение. Вычислим скорость υ_1 точки относительно системы $Ox_1x_2x_3$, если известны скорость этой точки υ'_1 относительно системы $O'x'_1x'_2x'_3$ и переносная скорость системы υ_e. Будем считать, что точка движется параллельно оси x'_1, то есть $\upsilon'_1 = dx'_1/dt'$. Тогда на основании формул (1.13) получаем

$$\upsilon_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx'_1 + \upsilon_e dt'}{dt' + \upsilon_e dx'_1/c^2} = \frac{\upsilon'_1 + \upsilon_e}{1 + \upsilon_e\upsilon'_1/c^2} = \frac{\upsilon'_1 + \upsilon_e}{1 + \beta_e^2\upsilon'_1/\upsilon_e}\,.$$

Этот результат отличается от формулы, соответствующей инвариантности выражений (1.1) и (1.2), множителем $(1 + \beta_e^2\upsilon'_1/\upsilon_e)^{-1}$.

Четырехмерный вектор скорости. До сих пор мы исходили из инвариантности четырехмерной квадратичной формы (1.3), представленной затем в виде (1.4)

$$d\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^{4}(dx_j)^2} = ic\,dt\sqrt{1-\beta^2}\,,$$

и вводили инвариантную величину (1.5)

$$d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,dt\,,$$

которую можно рассматривать как инвариантный интервал времени.

В рассматриваемом четырехмерном континууме следует ввести понятие четырехмерного вектора скорости

$$\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4)\,,$$

определив его компоненты по формулам

$$V_j = \frac{dx_j}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dx_j}{dt} = \frac{\upsilon_j}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad j = 1, 2, 3, 4,$$

причем временна́я составляющая

$$V_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dx_4}{dt} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

при $\beta < 1$ есть чисто мнимая величина.

Для удобства дальнейшего изложения введем единичные базисные векторы $\mathbf{i}_j = (\delta_j^1, \delta_j^2, \delta_j^3, \delta_j^4)$, где δ_j^k — символы Кронекера, и четырехмерный радиус-вектор $\mathbf{R}$, задав его в виде

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^{4} x_j \mathbf{i}_j = \mathbf{r} + ict\,\mathbf{i}_4\,. \tag{1.15}$$

Здесь $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, 0)$ — вектор, соответствующий обычному радиус-вектору точки с координатами (x_1, x_2, x_3). Четырехмерный вектор $\mathbf{V}$ при этом может быть представлен в виде

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{d}{dt}(\mathbf{r} + ict\,\mathbf{i}_4) = \frac{\mathbf{v} + ic\,\mathbf{i}_4}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \tag{1.16}$$

где $\mathbf{v} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, 0)$ — вектор, характеризующий скорость в обычном трехмерном пространстве.

§ 2. Уравнения динамики

Обобщенный закон Ньютона. Установим, в каком смысле для взятого четырехмерного континуума следует понимать второй закон Ньютона, определяющий силу. Естественно принять, что сила, как и в трехмерном

пространстве, должна быть равна нулю, если вектор скорости $\mathbf{V}$ постоянен, а также считать, что она пропорциональна массе точки m. Иначе говоря, обобщенный закон Ньютона можно выразить в виде

$$\frac{d(m\mathbf{V})}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\Big(m\frac{d\,\mathbf{R}}{d\tau}\Big) = \mathbf{F}\,, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}$ — четырехмерные векторы. Отметим особо, что дифференциал $d\tau$, входящий в выражение (2.1), является инвариантом преобразований Лоренца (1.12). Другими словами, постулируется, что существует интервал времени $d\tau$, не зависящий от того, подвижной или неподвижной является исходная система отсчета пространственных координат. Поэтому введение дифференциала $d\tau$ в обобщенный закон движения (2.1) можно рассматривать как развитие идеи Ньютона о существовании абсолютного времени.

По аналогии с представлением (1.15) для вектора $\mathbf{R}$ величину $\mathbf{F}$ записываем в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + iF_4\,\mathbf{i}_4\,,$$

где $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, 0)$.

Для определения возможной связи между пространственными координатами (f_1, f_2, f_3) четырехмерного вектора силы $\mathbf{F}$ и составляющими f_1^*, f_2^*, f_3^* обычной силы $\mathbf{f}^*$ обобщенный закон Ньютона (2.1) представляем в виде

$$\frac{d}{dt}\Big(m_L\frac{d\,\mathbf{R}}{dt}\Big) = \mathbf{F}\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.2}$$

и рассматриваем $m_L = m/\sqrt{1-\beta^2}$ как переменную массу. Из уравнения (2.2) следует, что векторы, соответствующие пространственным координатам, связаны выражением

$$\frac{d}{dt}(m_L\mathbf{v}) = \mathbf{f}\sqrt{1-\beta^2}\,, \tag{2.3}$$

которое имеет вид второго закона Ньютона в классической форме, поэтому считаем, что

$$\mathbf{f}\sqrt{1-\beta^2} = \mathbf{f}^* \quad \text{или} \quad f_k = \frac{f_k^*}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{2.4}$$

В частности, если сила $\mathbf{f}^*$ имеет потенциал Π, то

$$f_k = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial\Pi}{\partial x_k}\,, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{2.5}$$

Выделяя теперь в уравнении (2.2) мнимую часть, получаем

$$\frac{d}{dt}(m_L c) = F_4\sqrt{1-\beta^2} = F_4^* \,.$$

Отметим, что введение векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}^*$ с нулевой четвертой координатой очень удобно, так как их можно отождествить с обычными трехмерными векторами.

Обобщенный закон Ньютона (2.1) в соответствии с выражением (1.16) можно записать также в виде

$$\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\mathbf{v}+ic\,\mathbf{i}_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathbf{F}\,.$$

Раскрывая производную, получаем

$$\frac{m\mathbf{w}}{1-\beta^2} + \frac{m(\mathbf{v}+ic\,\mathbf{i}_4)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \mathbf{F},$$

или

$$\frac{m\mathbf{w}}{1-\beta^2} + \frac{m(\mathbf{v}+ic\,\mathbf{i}_4)}{(1-\beta^2)^2}\,\frac{v}{c^2}\,\frac{dv}{dt} = \mathbf{f} + iF_4\,\mathbf{i}_4\,. \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{w} = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3, 0)$.

Разделяя действительную и мнимую части в выражении (2.6), имеем

$$m\mathbf{w} = \mathbf{f}(1-\beta^2) - \frac{m\beta^2}{1-\beta^2}\,\mathbf{v}^0\,\frac{dv}{dt}\,, \tag{2.7}$$

$$\frac{m\beta}{(1-\beta^2)^2}\,\frac{dv}{dt} = F_4\,, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}/v$ — единичный вектор скорости. Уравнение (2.7), описывающее движение точки в обычном трехмерном пространстве, эквивалентно двум скалярным

$$m\frac{dv}{dt} = f_\varepsilon(1-\beta^2) - \frac{m\beta^2}{1-\beta^2}\,\frac{dv}{dt}\,, \tag{2.9}$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = f_n(1-\beta^2)\,, \tag{2.10}$$

которые представляют собой уравнения в проекциях на касательную и нормаль $\mathbf{n}$ к траектории. Здесь ρ — радиус кривизны траектории, $f_\varepsilon = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}^o$, $f_n = \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}$.

Из уравнений (2.9), (2.10) видно, что движение происходит так, как если бы к материальной точке, кроме силы $\mathbf{f}$, были приложены добавочные силы

$$f'_\varepsilon = -f_\varepsilon \beta^2 - \frac{m\beta^2}{1-\beta^2}\frac{dv}{dt}\,,$$

$$f'_n = -f_n \beta^2\,,$$

причем f'_ε представляет собой силу сопротивления, зависящую от квадрата скорости v^2 и ускорения dv/dt. Очевидно, что для постоянной силы f_ε ускорение точки с течением времени стремится к нулю, так как из формулы (2.9) вытекает, что

$$m\frac{dv}{dt} = f_\varepsilon(1-\beta^2)^2\,, \tag{2.11}$$

и, следовательно, ускорение w_ε обращается в нуль при $\beta = 1$, то есть при $v = c$. Можно убедиться, что время, требуемое для достижения этой скорости, равно бесконечности.

Выявим смысл составляющей силы F_4. Воспользовавшись формулой (2.11), представим выражение (2.8) в виде

$$F_4 = f_\varepsilon \beta = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}/c\,.$$

Через обычную силу $\mathbf{f}^*$ в соответствии с равенством (2.4) это может быть выражено так:

$$F_4 = \mathbf{f}^*\cdot\mathbf{v}/(c\sqrt{1-\beta^2})\,.$$

Следовательно, если исходным считать второй закон Ньютона, записанный в виде (2.1), то интересующее нас движение материальной точки в системе $Ox_1x_2x_3$ описывается уравнением (2.3) или (2.7), причем входящая в эти уравнения сила $\mathbf{f}$ связана с заданной силой $\mathbf{f}^*$, под действием которой происходит рассматриваемое движение, соотношением (2.4). Уравнение (2.3) называется *релятивистским уравнением движения*.

Теорема об изменении кинетической энергии. Умножая формулу (2.11) на v, получаем

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = f_\varepsilon(1-\beta^2)^2\,v\,dt = f_\varepsilon(1-\beta^2)^2 ds\,, \tag{2.12}$$

что выражает теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме. Из этой формулы видно, что роль силы, совершающей работу, выполняет сила $f_\varepsilon(1-\beta^2)^2$.

Предположим теперь, что обычная сила $\mathbf{f}^*$ имеет потенциал Π. Тогда в соответствии с выражением (2.5) находим

$$f_\varepsilon = \frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{v} = -\frac{(1-\beta^2)^{-1/2}}{v}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\Pi}{\partial x_k}\,\frac{dx_k}{dt} = -\frac{(1-\beta^2)^{-1/2}}{v\,dt}\,d\Pi\,,$$

и, следовательно, соотношение (2.12) в этом случае может быть записано в виде

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -(1-\beta^2)^{3/2}d\Pi\,,$$

или в интегральной форме

$$\frac{mc^2}{2}\int_{\beta_0}^{\beta}\frac{d(\beta^2)}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \Pi_0 - \Pi\,.$$

Предполагая для простоты, что скорость v_0 и соответственно $\beta_0 = v_0/c$ равны нулю, получаем

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = \Pi_0 - \Pi\,. \tag{2.13}$$

Вводя обозначения

$$T = \frac{mv^2}{2}\,, \qquad \varkappa = \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \tag{2.14}$$

имеем

$$\varkappa T = \Pi_0 - \Pi\,. \tag{2.15}$$

Такую форму интеграл энергии принимает в случае релятивистского движения. При $\beta \to 0$, когда $\varkappa \to 1$, он преобразуется в обычный интеграл энергии. Величина $\varkappa T = T_r$ называется *релятивистской кинетической энергией*. Закон сохранения энергии при этом принимает вид

$$E_r \equiv T_r + \Pi = \Pi_0 = \mathrm{const}\,.$$

Выражение (2.13) записываем как

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \Pi = mc^2 + \Pi_0 = \widetilde{\Pi}_0$$

и рассматриваем $\widetilde{\Pi}_0$ как начальный запас энергии. Величину mc^2 иногда называют *собственной энергией точки*, или *энергией покоя*, а величину

$mc^2/\sqrt{1-\beta^2}$ — ее *«полной» энергией*. Все изменения обычных выражений для кинетической энергии и закона сохранения механической энергии связаны, как это видно из предыдущего, с введением инвариантного интервала $d\tau$ вместо изменяющегося при переходе от одной системы координат к другой интервала времени dt. В результате обычный закон движения $m\mathbf{w} = \mathbf{f}^*$ приобретает вид (2.3). Учитывая соотношение (2.4), записываем уравнение (2.3) в виде

$$\frac{d}{dt}\big(m_L\mathbf{v}\big) = \mathbf{f}^*\,, \qquad m_L = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

При такой форме записи основного закона движения появление множителя $\varkappa$, задаваемого выражением (2.14), в интеграле энергии (2.15) можно объяснить изменяемостью массы m_L в зависимости от скорости.

Уравнения Лагранжа. Ранее уравнения Лагранжа второго рода мы получали, записывая векторное уравнение Ньютона в проекциях на оси криволинейных координат, которые определялись преобразованием

$$x_i = x_i(q^1, q^2, q^3)\,, \qquad i = 1, 2, 3.$$

В случае четырехмерного континуума с инвариантом (1.3), когда исходным является обобщенный закон Ньютона (2.1), определяющую роль при исследовании движения в обычном трехмерном пространстве играет уравнение (2.7), которое с учетом соотношения (2.11) имеет вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{f}(1-\beta^2) - \frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\,(1-\beta^2)\,\mathbf{v}\,.$$

Проанализируем движение материальной точки под действием обычной силы $\mathbf{f}^*$ в рамках этого уравнения. Считая, что векторы $\mathbf{f}^*$ и $\mathbf{f}$ связаны соотношением (2.4), можно записать

$$m\mathbf{w} = \mathbf{f}^*\sqrt{1-\beta^2} - \frac{\mathbf{f}^*\cdot\mathbf{v}}{c^2}\,\sqrt{1-\beta^2}\,\mathbf{v}\,. \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь, какую форму принимает это уравнение в проекциях на оси криволинейной системы координат. При $\beta = 0$ ($c = \infty$) это — обычные уравнения Лагранжа второго рода. Если же $\beta \neq 0$, то, умножая векторное равенство (2.16) на базисные векторы $e_\sigma = \partial\mathbf{r}/\partial q^\sigma$ и учитывая, что

$$\mathbf{v} = \dot{q}^\rho\mathbf{e}_\rho\,, \qquad \mathbf{f}^* = Q_\tau\mathbf{e}^\tau\,, \qquad \mathbf{e}^\tau\cdot\mathbf{e}_\rho = \delta^\tau_\rho\,,$$

$$\mathrm{g}_{\rho\sigma} = \mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{e}_\sigma\,, \qquad \rho, \sigma, \tau = 1, 2, 3,$$

получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma + \widetilde{Q}_\sigma\,,$$

где

$$\widetilde{Q}_\sigma = Q_\sigma\big(\sqrt{1-\beta^2}-1\big) - \frac{Q_\tau \dot{q}^\tau}{c^2}\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{g}_{\rho\sigma}\dot{q}^\rho\,.$$

Если сила $\mathbf{f}^*$ имеет потенциал Π, то есть если $Q_\sigma = -\partial\Pi/\partial q^\sigma$, то, вводя функцию $L = T - \Pi$, имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} = \widetilde{Q}_\sigma\,. \tag{2.17}$$

Таким образом, релятивистский эффект проявляется в том, что в правой части уравнений Лагранжа появляется как бы дополнительная сила $\widetilde{Q}_\sigma$, не являющаяся потенциальной. Вследствие этого интеграл энергии в обычной для него форме не существует, а выполняется соотношение (2.15). Из уравнений (2.17) следует, что действие по Гамильтону не носит «экстремального» характера, так как

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\big(\widetilde{Q}_\sigma\delta q^\sigma\big)\,dt \neq 0\,.$$

Уравнения Гамильтона в данном случае можно представить в виде, в каком они записывались для неконсервативной системы:

$$\frac{dp_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\sigma} + \widetilde{Q}_\sigma\,, \qquad \frac{dq^\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\,.$$

Следует, однако, помнить, что интеграл энергии в рассматриваемом случае существует и имеет вид[2]

$$\varkappa T + \Pi = \mathrm{const} \quad \text{или} \quad T + \Pi + \varkappa_1 T = \mathrm{const}\,,$$

где

$$\varkappa_1 = \varkappa - 1 = \frac{1}{\beta^2\sqrt{1-\beta^2}}\left[2 - (2+\beta^2)\sqrt{1-\beta^2}\,\right].$$

[2]В связи с изложенным в данной главе может представить интерес работа: *Пóляхов Н. Н.* Что привнесли теория относительности и квантовая механика в классическую механику. М.: Институт проблем механики АН СССР, 1988. Препринт № 330. 38 с.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Болотин С. В., Карапетян А. В., Кугушев Е. И., Трещев Д. В. Теоретическая механика. М.: Издательский центр «Академия», 2010. 430 с.

Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1969. Часть I, 468 с.; Часть II, 332 с.

Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во Московск. ун-та, 2019. 728 с.

Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.

Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1972. Том I, 456 с.; 1977. Том II, 544 с.

Маркеев А. П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414 с.

Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Аппель П. Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960. Том I. 515 с.; Том II. 487 с.

Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Добронравов В. В. Основы механики неголономных систем. М.: Высшая школа, 1970. 272 с.

Галиуллин А. С. Аналитическая динамика. М.: Высшая школа, 1989. 264 с.

Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 811 с.

Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука, Физматлит, 2009. 344 с.

Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А. Неголономная механика и теория управления. М.: Наука, Физматлит, 2018. 236 с.

Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.

Лагранж Ж. Аналитическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. Том 1. 594 с.; Том 2. 440 с.

Леви-Чивита Т. и Амальди У. Курс теоретической механики. М.: Изд-во Иностр. литературы, 1952. Том I, часть 1, 387 с., часть 2, 326 с.; 1951. Том II, часть 1, 435 с., часть 2, 555 с.

Лич Дж. У. Классическая механика. М.: Изд-во Иностр. литературы, 1961. 173 с.

Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1982. Том I, 352 с.; 1983. Том II, 640 с.

Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Ляпунов А. М. Лекции по теоретической механике. Киев: Наукова думка, 1982. 632 с.

Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.

Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 520 с.

Ньютон И. Математические начала натуральной философии // Собрание трудов акад. А. Н. Крылова. В 12 т. Т. 7. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 696 с.

Парс Л. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636 с.

Розе Н. В. Лекции по аналитической механике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1938. 203 с.

Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.

Четаев Н. Г. Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 368 с.

Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 536 с.

Эйлер Л. Основы динамики точки. М.; Л.: ОНТИ, 1938. 500 с.

Якоби К. Лекции по динамике. М.: Едиториал УРСС, 2004. 272 с.

Papastavridis J. G. Analytical mechanics. Oxford. 2002. 1392 p.

Udwadia F. E., Kalaba R. E. Analytical dynamics: A new approach. Cambridge, 1996. 262 p.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПОЛЯХОВ Николай Николаевич (1906–1987), доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РСФСР. После окончания Московского государственного университета в 1929 году работал в Центральном аэродинамическом институте им. Н. Е. Жуковского (ЦАГИ) под руководством академика С. А. Чаплыгина, по заданию которого совместно с В. П. Ветчинкиным разработал математическую теорию винта (см. монографию «Теория и расчет воздушного гребного винта»; эта книга не потеряла актуальности до настоящего времени). В 1933 году переехал в Ленинград и стал преподавать на кафедре гидроаэродинамики Ленинградского политехнического института. В 1953–1977 годах заведовал кафедрой теоретической и прикладной механики, а в 1977–1987 годах — кафедрой гидромеханики математико-механического факультета Ленинградского (Санкт-Петербургского) университета. В это же время руководил отделением «Механика» факультета. Был награжден рядом орденов и медалей Советского Союза, в том числе двумя Орденами Ленина. Николай Николаевич был инициатором написания учебника «Теоретическая механика» для университетов, выдержавшего три издания. Читателю предлагается значительно расширенное двухтомное четвертое издание этого учебника, выходящее под названием «Теоретическая и прикладная механика», соответствующем названию кафедры, на которой он создавался.

ТОВСТИК Петр Евгеньевич (1935–2020), доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ. В 1958 году он с отличием окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ) и был оставлен в аспирантуре. После защиты в 1963 году кандидатской диссертации работал в лаборатории вибраций НИИ математики и механики ЛГУ. Защитив в 1968 году докторскую диссертацию, он стал доцентом, а затем профессором кафедры теоретической и прикладной механики. С 1977 до 2020 года заведовал этой кафедрой. Петр Евгеньевич являлся кавалером Ордена почета, лауреатом Государственной премии РФ, лауреатом премии имени М. А. Лаврентьева РАН, двух первых университетских премий за научные труды. Ему были присвоены звания «Почетный работник высшего профессионального образования» и «Почетный профессор Санкт-Петербургского государственного университета».

ЗЕГЖДА Сергей Андреевич (1935–2015), доктор физико-математических наук, профессор. Окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета в 1958 году и аспирантуру при кафедре теоретической и прикладной механики. С 1958 по 2015 год работал на этой кафедре. В 1987 году стал лауреатом Первой премии Ленинградского университета и в 2011 году был

удостоен премии Санкт-Петербургского университета «За научные труды». Имел почетное звание «Заслуженный работник высшей школы РФ».

ЮШКОВ Михаил Петрович, доктор физико-математических наук, профессор. Окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета в 1957 году и аспирантуру при кафедре теоретической и прикладной механики. С 1960 года по настоящее время работает на этой кафедре. В 1987 году стал лауреатом Первой премии Ленинградского университета и в 2011 году был удостоен премии Санкт-Петербургского университета «За научные труды». Награжден несколькими медалями, в том числе медалью «За оборону Ленинграда», и Почетной грамотой Президента РФ.

СОЛТАХАНОВ Шервани Хусаинович, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Академии наук Чеченской Республики. Окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета в 1982 году, а также аспирантуру и докторантуру при кафедре теоретической и прикладной механики того же факультета. Работает в Чеченском государственном университете и в Грозненском государственном нефтяном техническом университете им. М. Д. Миллионщикова. Заведует отделом физико-математических и химических наук Академии наук Чеченской Республики и является главным научным сотрудником лаборатории прикладной математики и механики Комплексного научно-исследовательского института имени Х. И. Ибрагимова РАН. В 2011 году был удостоен премии Санкт-Петербургского университета «За научные труд». Имеет почетное звание «Заслуженный деятель науки Чеченской Республики».

ФИЛИППОВ Сергей Борисович, доктор физико-математических наук, профессор. Окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ) в 1970 году, а в 1974 году заочную аспирантуру при кафедре теоретической и прикладной механики. С 1970 до 1993-го работал в лаборатории вибраций НИИ математики и механики ЛГУ, а с 1993 года — на кафедре теоретической и прикладной механики. С 2021 года исполняет обязанности заведующего этой кафедрой. Награжден Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ и медалью «Санкт-Петербургский университет».

ПЕТРОВА Виктория Игоревна окончила в 2021 году магистратуру математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета и поступила в аспирантуру при кафедре теоретической и прикладной механики того же факультета.

Научное издание

ПОЛЯХОВ Николай Николаевич,
ЗЕГЖДА Сергей Андреевич,
ЮШКОВ Михаил Петрович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том I
Общие вопросы теоретической механики

Учебник

Редактор *Т. В. Семенова*
Корректор *Н. Е. Абарникова*
Компьютерная верстка *А. М. Вейшторт*
Обложка *Е. Р. Кунягина*

Подписано в печать 15.12.2021. Формат $70 \times 100^1/_{16}$. Усл. печ. л. 45,5.
Тираж 1000 экз. Print-on-Demand. Заказ № .

Издательство Санкт-Петербургского университета.
199004, Санкт-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11.
Тел./факс +7(812) 328-44-22
publishing@spbu.ru

publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5.

Книги Издательства СПбГУ можно приобрести
по издательским ценам в Доме университетской книги СПбГУ

Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5

Тел. (812) 329-24-71

Часы работы: 10.00–20.00 пн. — сб.,

а также на сайте publishing.spbu.ru