ОБЩАЯ ФИЗИКА

В. В. ПОКРОВСКИЙ

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

методы решения задач

В. В. Покровский

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

методы решения задач

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

4-е издание (электронное)

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 004.514
ББК 32.973
П48

Покровский В. В.

П48 Электромагнетизм. Методы решения задач [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. В. Покровский. — 4-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 123 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2964-9

Пособие посвящено методам решения задач по курсу общей физики раздела «Электромагнетизм». Большинство рассматриваемых задач взято из сборника задач И. Е. Иродова «Задачи по общей физике». Каждый раздел предваряется кратким изложением теоретических вопросов, приводятся основные формулы. Описывается методика решения задач, которая может быть применена в данном разделе.

Для студентов физических специальностей вузов.

УДК 004.514
ББК 32.973

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Электромагнетизм. Методы решения задач : учебное пособие / В. В. Покровский. — 2-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. — 120 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-0641-1.

ISBN 978-5-9963-2964-9

Глава 1

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Закон Кулона, электрическое поле, напряженность и потенциал, связь между напряженностью и потенциалом, электрический диполь, энергия диполя в поле

Точечными зарядами считаются заряды, геометрические размеры которых много меньше расстояния между ними. Электрические заряды придают окружающему пространству особые свойства, основное из которых заключается в том, что *на точечный заряд q', находящийся на расстоянии R от точечного заряда q, действует сила, направленная вдоль прямой, соединяющей эти заряды, прямо пропорциональная величине точечных зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними* (закон Кулона). При этом одноименные заряды отталкиваются, разноименные притягиваются:

$$\overrightarrow{F}_{1-2} = -\frac{q'q\overrightarrow{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, \qquad \overrightarrow{F}_{2-1} = \frac{q'q\overrightarrow{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, \tag{1}$$
$$F_{1-2} = -\frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, \qquad F_{2-1} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

В современной физике доминирует теория близкодействия, согласно которой силовое взаимодействие между разделенными заряженными телами передается с конечной скоростью некоторой средой, окружающей эти тела. Эта среда — специфическая форма существования материи, называемая электрическим полем.

Вычленим из формулы (1) часть, не зависящую от пробного заряда q', которая имеет *физический смысл силы*, действующей на точечный единичный положительный заряд, и назовем ее напряженностью электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,,$$

или

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,.$$

Опытным путем установлено, что сила, с которой заряд q действует на пробный заряд q', не зависит ни от количества, ни от пространственного расположения других зарядов, что приводит нас к *принципу суперпозиции* $\vec{F} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F_i}$; очевидно также:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i\vec{R_i}}{R_i^3}\,. \tag{2}$$

В большом классе задач игнорируется тот факт, что заряды всегда дискретны, а считается, что они распределены по какому-либо закону, что вполне допустимо, пока мы не переходим к малым масштабам. Закон распределения зарядов дается в виде объемной (ρ), поверхностной (σ) или линейной (λ) плотности, в виде

$$\rho = \frac{dq}{dV}\,; \qquad \sigma = \frac{dq}{dS}\,; \qquad \lambda = \frac{dq}{dl}\,,$$

где dq — элемент заряда, заключенный в объеме dV, на поверхности dS или на длине dl.

Тогда принцип суперпозиции будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\rho\vec{r}\,dV}{r^3}$$

для объемного распределения,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_S \frac{\sigma\vec{r}\,dS}{r^3}$$

для поверхностного распределения,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_l \frac{\lambda\vec{r}\,dl}{r^3}$$

для линейного распределения.

Понятие электростатического потенциала тесно связано с работой при переносе заряда в кулоновском поле сил. Работа, произведенная при переносе заряда из точки a в точку b:

$$dA = \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{S} = q' \int\limits_a^b \overrightarrow{E}\, d\overrightarrow{S}\,. \tag{3}$$

Легко показать, что в случае кулоновских полей величина A не зависит от пути переноса заряда из точки a в точку b (консервативные поля). Вычислим по формуле (3) работу по перемещению пробного точечного заряда q' из точки *1* с радиус-вектором r_1 в точку *2* с радиус-вектором r_2:

$$A_{a-b} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\,. \tag{4}$$

Из формулы (4) видно, что в кулоновском поле работа определяется разностью величин, которые в механике называются потенциальной энергией. Как и ранее, вычленим из выражения для потенциальной энергии часть, не зависящую от пробного заряда q', и назовем ее потенциалом электрического поля в данной точке. Физический смысл потенциала — потенциальная энергия, которой обладает единичный, точечный, положительный заряд в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ в поле, создаваемом зарядом q:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,. \tag{5}$$

Очевидно, что φ является скалярной величиной.

Тогда работа по перемещению заряда q' из точки a в точку b согласно формуле (4) запишется в виде:

$$A = q'(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{6}$$

Напряженность электрического поля $\overrightarrow{E}$ и потенциал φ являются его важнейшими характеристиками, причем вектор $\overrightarrow{E}$ — силовая, а φ — энергетическая характеристики. Применим формулу (3) для расчета работы, совершаемой при перемещении заряда q' в поле, создаваемом совокупностью N произвольно расположенных точечных зарядов. Суммарная работа при перемещении заряда q' будет равна алгебраической сумме работ, произведенных силами, действующими на q' со стороны каждого из зарядов q_i. Поэтому можно записать, с учетом (4):

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i = q' \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i_1}} - \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i_2}} \right) =$$

$$= q' \sum_{i=1}^{N} (\varphi_{i_1} - \varphi_{i_2}) = q' \left(\sum_{i=1}^{N} \varphi_{i_1} - \sum_{i=1}^{N} \varphi_{i_2} \right). \qquad (7)$$

Следовательно, потенциал, создаваемый в данной точке системой из N зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из них в отдельности, т. е.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i, \qquad (8)$$

что по аналогии с (2) можно назвать суперпозицией потенциалов. Перепишем (8) в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i},$$

и, заменяя q_i на $\rho\, dV$, $\sigma\, dS$ или $\lambda\, dl$, а знак $\sum$ на знак $\int$, получим, как и в случае $\vec{E}$, принцип суперпозиции для непрерывного распределения зарядов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\rho\, dV}{r}$$

для объемного распределения,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_S \frac{\sigma\, dS}{r}$$

для поверхностного распределения,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_l \frac{\lambda\, dl}{r}$$

для линейного распределения.

Установим связь между $\vec{E}$ и φ. Эта связь имеет большое практическое значение. Например, при вычислении φ, создаваемого каким-либо распределенным зарядом, для вычисления нужно взять один интеграл (так как это скаляр), а при вычислении $\vec{E}$ — три, так как это вектор, кроме того, интегралы от функций вида $f \sim \frac{1}{r}$, как правило, проще, чем от функций вида $f \sim \frac{1}{r^2}$.

В некоторых случаях требуется по заданным значениям $\vec{E}$ в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Воспользовавшись (3) и (6), запишем:

$$A_{1-2} = \int\limits_1^2 qE_l\,dl = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

откуда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_1^2 E_l\,dl. \tag{9}$$

Перепишем (9) в виде $-d\varphi = E_l\,dl$, откуда $E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}$, где l — произвольное направление в пространстве, т. е.

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

или

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi. \tag{10}$$

Электрический диполь — это система из двух одинаковых по модулю разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на расстоянии друг от друга. В природе диполи встречаются довольно часто. Например, при наложении электрического поля на проводник, электроны и протоны смещаются так, чтобы внутреннее поле обратилось в нуль. В диэлектриках это смещение гораздо меньше, хотя каждый атом тоже становится микроскопическим диполем. Мы будем рассматривать только точечные диполи, т. е. такие, для которых радиус-вектор $\vec{r}$ до точек наблюдения много больше l (рис. 1). Используя формулу (5) и принцип суперпозиции потенциалов, потенциал поля диполя в точке P определяется с учетом $r \gg l$,

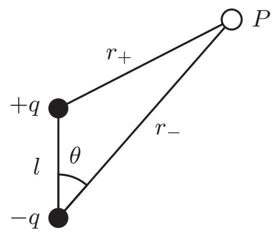


Рис. 1

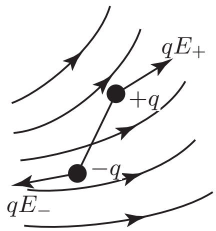


Рис. 2

$\vec{r}_- - \vec{r}_+ = l\cos\theta \;\; r_+ r_- = r^2,$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q(r_- - r_+)}{r_+ r_-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p\cos\theta}{r^2}\,, \qquad (11)$$

где $p = ql$ — электрический момент диполя. Этой величине сопоставляют вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному $\vec{p} = q\vec{l}$. Можно показать, что модуль вектора $\overrightarrow{E}$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p}{r^3}\,\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \qquad (12)$$

При $\theta = 0$ и $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ получим выражение для напряженности поля на оси диполя ($E_\parallel$) и перпендикулярно ей ($E_\perp$):

$$E_\parallel = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2p}{r^3}\,, \qquad E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p}{r^3}\,, \qquad (13)$$

т. е. при одном и том же r $E_\parallel$ вдвое больше $E_\perp$.

Во внешнем неоднородном электрическом поле на каждый конец диполя будут действовать разные силы, равные $q\overrightarrow{E}_+$ и $q\overrightarrow{E}_-$ (рис. 2). Результирующая сила $\overrightarrow{F}$, действующая на диполь, равна

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}_+ - q\overrightarrow{E}_- = q\left(\overrightarrow{E_+} - \overrightarrow{E_-}\right), \qquad (14)$$

где $\overrightarrow{E}_+$ и $\overrightarrow{E}_-$ — напряженность поля в точках, где расположены заряды диполя. Разность $\overrightarrow{E_+} - \overrightarrow{E_-}$ — это приращение вектора $\overrightarrow{E}$ на отрезке, равном длине диполя l. Вследствие его малости:

$$\Delta\vec{E} = \overrightarrow{E_+} - \overrightarrow{E_-} = \frac{\Delta\vec{E}}{l}\,l = \frac{\partial\vec{E}}{\partial l}\,l. \tag{15}$$

Подставив (15) в (14), получаем:

$$\vec{F} = p\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial l}\,. \tag{16}$$

Энергия диполя в поле. Энергия точечного заряда q во внешнем поле равна $W = q\varphi$, а так как диполь — это система из двух зарядов, то

$$W = q_+\varphi_+ + q_-\varphi_- = q\left(\varphi_+ - \varphi_-\right),$$

где φ_+ и φ_- — потенциал внешнего поля в точках расположения зарядов $+q$ и $-q$:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial\varphi}{\partial l}\,l = -E_l l = -\vec{E}\vec{l},$$

$$W = -\vec{p}\,\vec{E}. \tag{17}$$

Рекомендации по решению задач

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задачи. Недостающие данные можно получить из соответствующих справочников. Если какие-либо данные не использовались при решении, то решение задачи неверно.
2. Задачу решайте в общем виде, после чего проверяйте размерность. Неверная размерность — свидетельство неверного решения, хотя правильная размерность не является гарантией правильного решения.
3. В задачах, где происходит перераспределение зарядов, следует помнить, что заряды перераспределяются таким образом, чтобы произошло выравнивание потенциала, а общий заряд при этом остается неизменным.
4. В задачах типа задачи 4, где в решении фигурирует разность векторов, будьте внимательны в порядке расстановки вычитаемого и уменьшаемого векторов.
5. Тщательно выполните чертеж, обозначьте направления осей координат. Помните, что величины $\vec{F}$, $\vec{E}$, $\vec{p}$ — векторы,

поэтому записывайте векторные уравнения с учетом знака. Потенциал — скаляр, и его знак определяется лишь знаком заряда. Некоторые задачи (например 5, 6) требуют пространственного воображения и тщательного выполнения чертежей. Если для вас это затруднительно, то при необходимости решения нескольких задач их лучше оставить напоследок.

Задача 1

Два одинаковых электрических заряда расположены в точках A и B. Сначала вычислим электрическое поле, создаваемое зарядом q_A в точке B, т. е. $\overrightarrow{E}_{A-B}$. Действующая на заряд q_B сила должна быть равна $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{E}_{A-B} q_B$. Однако заряд, находящийся в точке B, должен создавать свое собственное поле, которое действует на заряд в точке A. Равна ли полная сила взаимодействия между двумя зарядами сумме этих двух сил?

Решение. При взаимодействии двух тел на каждое из них действуют одинаковые силы, направленные в противоположные стороны. В механике аналогом является задача о перетягивании каната, когда одна команда тянет вправо с силой $\overrightarrow{F}$, а вторая влево с силой $\overrightarrow{F}$. □

Задача 2

Три одинаковых положительных заряда

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1 \text{ нКл}$$

расположены по вершинам равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд Q_4 нужно поместить в центр треугольника, чтобы силы притяжения с его стороны уравновесили силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах?

Решение. Все три заряда, расположенные по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы один из трех зарядов, например Q_1, находился в равновесии. В соответствии с

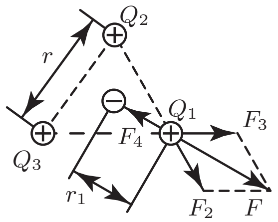


Рис. 3

принципом суперпозиции на заряд действует каждый заряд, независимо от остальных. Поэтому заряд Q_1 будет находиться в равновесии, если выполняется условие:

$$\overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 + \overrightarrow{F}_4 = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_4 = 0, \tag{18}$$

где $\overrightarrow{F}_2, \overrightarrow{F}_3, \overrightarrow{F}_4$ — силы, с которыми соответственно действуют на заряд Q_1 заряды Q_2, Q_3, Q_4; $\overrightarrow{F}$ — равнодействующая сил $\overrightarrow{F_2}$ и $\overrightarrow{F_3}$ (рис. 3). В скалярном виде $F - F_4 = 0$ или $F = F_4$. Выразим F через F_2 и F_3 и, применяя теорему косинусов и учитывая, что $F_2 = F_3$, получим:

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Записывая закон Кулона с учетом того, что $Q_1 = Q_2 = Q_3$:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1Q_4}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}, \tag{19}$$

откуда $Q_4 = \dfrac{Q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$. Из геометрических соображений:

$$r_1 = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}\,; \qquad \cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

С учетом (19):

$$Q_4 = \frac{Q_1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}58 \text{ нКл}. \qquad \square$$

Ответ. $Q_4 = \dfrac{Q_1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}58$ нКл.

Задача 3

Два одинаковых небольших металлических шарика с зарядами q_1 и q_2, находясь на расстоянии $l = 200$ мм друг от друга, притягиваются с силой $F_0 = 36$ мН. После того, как шарики привели в соприкосновение и опять развели на то же расстояние l, они стали отталкиваться с силой $F = 0{,}64$ мН. Найти q_1 и q_2.

Решение. Из условия задачи ясно, что силы $\overrightarrow{F}_0$ и $\overrightarrow{F}$ имеют различные знаки, так как направлены в противоположные стороны. Шарики одинаковы, поэтому после соприкосновения их заряды будут равны по знаку и величине $\dfrac{q_1 - q_2}{2}$. С учетом этого имеем:

$$F_0 = -k\,\frac{q_1 q_2}{l^2}\,, \tag{20}$$

$$-F = k\,\frac{(q_1 - q_2)^2}{4l^2}\,. \tag{21}$$

Из (20) имеем: $q_1 = -\dfrac{F_0 l^2}{k q_2}$,

$$-F = \frac{k}{4l^2}\left(-\frac{F_0 l^2}{k q_2} - q_2\right)^2$$

или

$$-F = \frac{k}{4l^2}\left(\frac{F_0 l^2 + k q_2^2}{k q_2}\right)^2 = \frac{F_0^2 l^4 + 2F_0 l^2 k q_2^2 + k^2 q_2^4}{4l^2 k q_2^2}\,.$$

В дальнейшем индекс при q будем опускать:

$$q^4 + \frac{2F_0 l^2 + 4l^2 F}{k}\,q^2 + \frac{F_0^2 l^4}{k^2} = 0. \tag{22}$$

Обозначив $Q = q^2$, имеем:

$$Q = \frac{F_0 l^2 + 2Fl^2}{k} \pm \frac{\sqrt{4F_0 F l^4 + 4F^2 l^4}}{k} =$$

$$= \frac{l^2}{k}\left(F_0 + 2F \pm 2\sqrt{F^2 + FF_0}\right) =$$

$$= \frac{l^2}{k}\left(\sqrt{F} \pm \sqrt{F + F_0}\right)^2.$$

С учетом (21), а также, что

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

$$q = l\sqrt{4\pi\varepsilon_0 F}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{F_0}{F}}\right) = \pm 1{,}2 \quad \text{и} \quad \pm\, 0{,}1333 \text{ мкКл}. \quad \square$$

Ответ. $q = l\sqrt{4\pi\varepsilon_0 F}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{F_0}{F}}\right) = \pm 1{,}2$ и $\pm 0{,}1333$ мкКл.

Задача 4

Два положительных заряда q_1 и q_2 находятся в точках с радиус-векторами $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$. Найти отрицательный заряд q_3 и радиус-вектор $\vec{r_3}$ точки, в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из этих трех зарядов, была равна нулю.

Решение. Обозначим $\overrightarrow{F}_{ik}$ силу, действующую на i-й заряд со стороны k-го. Тогда $-\overrightarrow{F}_{13} = \overrightarrow{F}_{23}$, $\overrightarrow{F}_{12} = -\overrightarrow{F}_{21}$, $\overrightarrow{F}_{31} = \overrightarrow{F}_{32}$, рис. 4, *а*. Равновесие будет достигнуто, когда все $|F_{ik}|$ равны между собой. Поэтому, как и в задаче 2, достаточно условия равновесия написать для одного заряда. В записи закона Кулона, когда вместо расстояния r стоит разность радиус-векторов, необходимо помнить, что разность $\vec{a} - \vec{b}$ приведенных к общему началу векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ представляет собой вектор, идущий из конца вычитаемого вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого

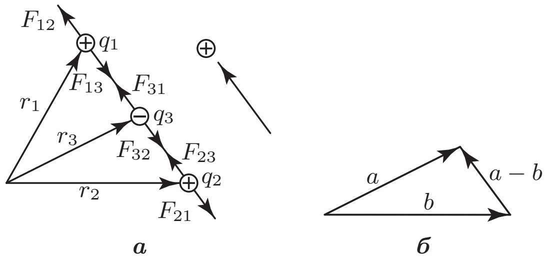


Рис. 4

вектора $\vec{a}$ рис. 4, *б*. В скалярной форме $F_{31} = -F_{32}$,

$$\left|\frac{q_1}{(\vec{r_1} - \vec{r_3})^2}\right| = \left|\frac{q_2}{(\vec{r_2} - \vec{r_3})^2}\right|,$$

или $\dfrac{\sqrt{q_1}}{\vec{r_1} - \vec{r_3}} = -\dfrac{\sqrt{q_2}}{\vec{r_2} - \vec{r_3}}$, откуда

$$\vec{r_3} = \frac{\sqrt{q_1}\vec{r_2} + \sqrt{q_2}\vec{r_1}}{\sqrt{q}_1 + \sqrt{q}_2}\,. \tag{23}$$

Имеем $-F_{13} = F_{12}$,

$$-\frac{q_3}{(\vec{r_3} - \vec{r_1})^2} = \frac{q_2}{(\vec{r_1} - \vec{r_2})^2}\,,$$

тогда

$$-q_3 = q_2\left(\frac{\vec{r_3} - \vec{r_1}}{\vec{r_1} - \vec{r_2}}\right)^2. \tag{24}$$

Заменяем $\vec{r_3} - \vec{r_1}$ из (23) и подставляем в (24). Получаем:

$$q_3 = -\frac{q_1 q_2}{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2}\,. \qquad \square$$

Ответ. $q_3 = -\dfrac{q_1 q_2}{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2}$, $\quad \vec{r_3} = \dfrac{\sqrt{q_1}\vec{r_2} + \sqrt{q_2}\vec{r_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$.

Задача 5

Три небольших одинаково заряженных шарика массы $m = 9{,}0$ г подвешены к одной точке на шелковых нитях длины $l = 250$ мм. Найти заряд каждого шарика, если углы между разошедшимися нитями равны $2\alpha = 60^\circ$.

Решение. Результирующая сила кулоновского взаимодействия (F_K) (рис. 5):

$$F_K = mg\,\mathrm{tg}\,\beta. \tag{25}$$

С другой стороны, учитывая, что расстояние между шариками $r = 2l\sin\alpha$, $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$F_K = \frac{\sqrt{3}q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2 \sin^2\alpha}\,. \tag{26}$$

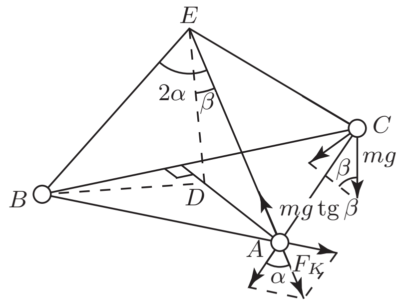


Рис. 5

$\triangle ABC$ — равносторонний, в нем все биссектрисы одновременно являются и высотами, поэтому:

$$DE = \sqrt{l^2 - AD^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2\sin^2\alpha}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{AD}{DE} = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{3 - 4\sin^2\alpha}}. \tag{27}$$

Подставив (27) и (26) в (25), получаем:

$$\frac{2mg\sin\alpha}{\sqrt{3 - 4\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{3}q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2\sin^2\alpha},$$

$$q = l\,\frac{\sqrt{32mg\pi\varepsilon_0\sin^3\alpha}}{\sqrt[4]{9 - 12\sin^2\alpha}}. \qquad \square$$

Ответ. $q = l\dfrac{\sqrt{32mg\pi\varepsilon_0\sin^3\alpha}}{\sqrt[4]{9 - 12\sin^2\alpha}}$.

Задача 6

В вершинах квадрата с диагональю $2l = 100$ мм находятся одинаковые по модулю ($q = 2{,}5$ мкКл) точечные заряды, знаки которых при обходе квадрата расположены в порядке $+, +, -, -$. Найти напряженность $\overrightarrow{E}$ электрического поля в точке, отстоящей на расстоянии $x = 50$ мм от центра квадрата и расположенной симметрично относительно его вершин.

Решение. Для удобства расчетов вычислим сначала результирующую напряженность, создаваемую положительными зарядами ($\overrightarrow{E}_{\text{р}}^{+}$) (рис. 6). Вектор $\overrightarrow{E}_{\text{р}}^{+}$ лежит в плоскости AFD. Аналогично, вектор $\overrightarrow{E}_{\text{р}}^{-}$ лежит в плоскости BCF. Общая результирующая напряженность $\overrightarrow{E}_{\text{р}0} = \overrightarrow{E}_{\text{р}}^{+} + \overrightarrow{E}_{\text{р}}^{-}$. Из геометрических соображений запишем:

$$AG = l; \quad EG = \frac{l}{\sqrt{2}}; \qquad AB = CD = BC = AD = l\sqrt{2};$$

$$AF = \sqrt{l^2 + x^2}; \qquad EF = \sqrt{\frac{2x^2 + l^2}{2}};$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2x^2 + l^2}{2(l^2 + x^2)}}; \quad \cos\beta = \frac{l}{\sqrt{2x^2 + l^2}};$$

$$\overrightarrow{E}_{\text{р}}^{+} = 2\overrightarrow{E}^{+}\cos\alpha = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(l^2 + x^2)}\sqrt{\frac{2x^2 + l^2}{2(l^2 + x^2)}} =$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2x^2 + l^2}{2(l^2 + x^2)^3}}.$$

Аналогично:

$$\overrightarrow{E}_{\text{р}}^{-} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2x^2 + l^2}{2(l^2 + x^2)^3}}.$$

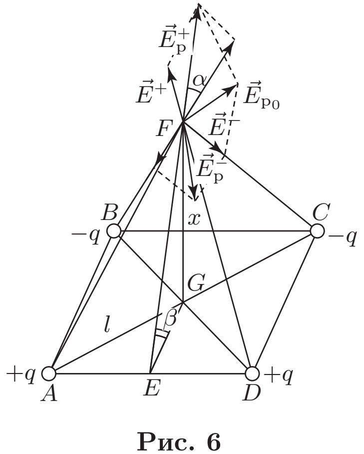


Рис. 6

Общая результирующая:

$$\overrightarrow{E}^{\pm}_{\text{p}_0} = \left(\overrightarrow{E}^{+}_{\text{p}} + \overrightarrow{E}^{-}_{\text{p}}\right)\cos\beta = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2x^2+l^2}{2(l^2+x^2)^3}}\,\frac{l}{\sqrt{2x^2+l^2}} =$$

$$= \frac{ql}{\pi\varepsilon_0\sqrt{2}(l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 9\ \text{кВ/м}. \qquad \square$$

Ответ. $\overrightarrow{E}^{\pm}_{\text{p}_0} = \dfrac{ql}{\pi\varepsilon_0\sqrt{2}(l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 9$ кВ/м.

Задача 7

Тонкое проволочное кольцо радиуса $R = 100$ мм имеет электрический заряд q =50 мкКл. Каково будет приращение силы, растягивающей проволоку, если в центре кольца поместить точечный заряд q_0 =7,0 мкКл?

Решение. Так как заряд распределен по кольцу равномерно, можно записать:

$$\Delta q = \frac{q}{2\pi R}\,\Delta l. \tag{28}$$

Из рис. 7, *а* видно, что

$$\Delta l = 2R\alpha, \quad \Delta q = \frac{q\alpha}{\pi}. \tag{29}$$

На элемент длины Δl будет действовать кулоновская сила $\overrightarrow{F}$ со всех остальных элементов кольца, равнодействующая которой будет направлена по радиусу R. Сила $\overrightarrow{F}$ будет уравновешена силами растяжения:

$$\overrightarrow{F} = 2\overrightarrow{F}_{\text{p}}\sin\alpha. \tag{30}$$

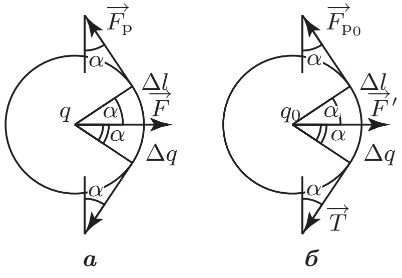


Рис. 7

После помещения в центр кольца заряда q_0 на элемент Δl будет действовать дополнительная сила $\Delta \overrightarrow{F}$ (рис. 7, *б*). Понятно, что

$$\overrightarrow{F}_1 = 2\overrightarrow{F}_{\text{р}0} \sin\alpha, \tag{31}$$

$$F' = F + \Delta F = F + \frac{\Delta q q_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,. \tag{32}$$

Подставив (29), (30), (31) в (32), получаем:

$$2F_{\text{р}0} \sin\alpha = 2F_{\text{р}} \sin\alpha + \frac{q q_0 \alpha}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\,. \tag{33}$$

При малых α $\sin\alpha \approx \alpha$. Имеем:

$$F_{\text{р}0} - F_{\text{р}} = \Delta F = \frac{q q_0}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = 50\ \text{Н}. \qquad \square$$

Ответ. $\Delta F = \dfrac{q q_0}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = 50$ Н.

Задача 8

В условиях предыдущей задачи, какой заряд q_0 нужно поместить в центр кольца, чтобы оно разорвалось? Проволока выдерживает максимальное растяжение $\overrightarrow{F}_{\text{р}0\,\max}$.

Решение. Чтобы кольцо разорвалось, необходимо выполнение следующего условия: $\overrightarrow{F}_1 > 2\overrightarrow{F}_{\text{р}0\,\max}\alpha$. Из предыдущей задачи с учетом (29), (30), (32), а также $\sin\alpha \approx \alpha$ имеем:

$$2\overrightarrow{F}_{\text{р}} + \frac{q q_0}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2} > 2\overrightarrow{F}_{\text{р}0\,\max},$$

откуда

$$q_0 > \frac{8\pi^2\varepsilon_0 (F_{\text{р}0\,\max} - F) R^2}{q}\,. \qquad \square$$

Ответ. $q_0 > \dfrac{8\pi^2\varepsilon_0 (F_{\text{р}0\,\max} - F) R^2}{q}$.

Задача 9

Тонкий стержень AB длины $l = 100$ см имеет заряд $q = 37$ нКл, распределенный так, что его линейная плотность пропорциональна квадрату расстояния от конца A. Найти напряженность электрического поля в точке A.

Решение. $\lambda(x) = kx^2$. Вычислим k из условия:

$$q = k\int_0^l x^2\,dx = \frac{kl^3}{3},$$

откуда

$$k = \frac{3q}{l^3};\quad \lambda(x) = \frac{3q}{l^3}x^2;\quad dq = \frac{3q}{l^3}x^2\,dx;$$

Учитывая, что $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon R^2}$, вычислим поле dE, создаваемое элементом стержня длины dx. Для этого заменим q на dq, а R на x. Получаем

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3q}{l^3}\,dx;$$

интегрируя, имеем

$$E = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 l^3}\int_0^l dx = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = 1\ \text{кВ/м}. \qquad \square$$

Ответ. $E = \dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = 1$ кВ/м.

Задача 10

Положительный точечный заряд 50 мкКл находится на плоскости xy в точке с радиус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — орты осей x и y. Найти напряженность электрического поля и ее модуль в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Здесь $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ даны в метрах.

Решение.

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = 6\vec{i} - 8\vec{j}; \tag{34}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (r - r_0)^2} = 4{,}5\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}. \tag{35}$$

Выражение (34) дает нам направление вектора $\overrightarrow{E}$, а (35) его модуль. Используем распределительное свойство числового сомножителя относительно суммы векторов:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha 6\vec{i} - \alpha 8\vec{j};$$

$$|\overrightarrow{E}| = \sqrt{36\alpha^2 + 64\alpha^2} = 10\alpha = 4{,}5;$$

откуда
$$\alpha = 0{,}45;$$
$$\vec{E} = (0{,}45 \cdot 6)\vec{i} - (0{,}45 \cdot 8)\vec{j} = 2{,}7\vec{i} - 3{,}6\vec{j}. \qquad \square$$

Ответ. $\vec{E} = 2{,}7\vec{i} - 3{,}6\vec{j}$.

Задача 11

Три маленьких одинаковых шарика, имеющие одинаковый заряд q, могут скользить по очень длинному стержню. Какую скорость будут иметь шарики на очень большом расстоянии друг от друга, если в начальный момент они находились в состоянии покоя и расстояние между ними было равно l.

Решение. Средний шарик будет находиться в состоянии покоя, а скорость крайних находим из закона сохранения энергии:
$$\frac{2mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2l} + \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}; \quad v = q\sqrt{\frac{5}{4\pi\varepsilon_0 2lm}} = q\sqrt{\frac{5}{8\pi\varepsilon_0 lm}}. \qquad \square$$

Ответ. $v = q\sqrt{\dfrac{5}{8\pi\varepsilon_0 lm}}$.

Задача 12

Два одинаковых шарика, имеющие одинаковый заряд q, соединены пружиной. Шарики колеблются так, что расстояние между ними меняется от l до $4l$. Найти жесткость пружины, если ее длина в свободном состоянии равна $2l$.

Решение. Из закона сохранения энергии имеем:
$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{\kappa l^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 4l} + \frac{\kappa 4l^2}{2},$$
$$\kappa = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2l^3}. \qquad \square$$

Ответ. $\kappa = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2l^3}$.

Задача 13

Два небольших тела, связанные нитью длины l, лежат на горизонтальной плоскости. Заряд каждого тела равен q, масса равна m. Нить пережигают и тела начинают скользить по плоскости. Какую максимальную скорость разовьют тела, если коэффициент трения равен k?

Решение. Скорость максимальна при равенстве сил трения и электростатического взаимодействия:

$$kmg = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\,. \tag{36}$$

Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{2mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{1}{l} - \dfrac{1}{x}\right)} - kmq(x - l). \tag{37}$$

Решая совместно (36) и (37), находим:

$$v_{\max} = \frac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 ml}} - \sqrt{kql}, \quad \text{при} \quad \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} > kmq. \qquad \square$$

Иначе тела не сдвинутся.

Ответ. $v_{\max} = \dfrac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 ml}} - \sqrt{kql}$, при $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} > kmq$.

Задача 14

На горизонтальной шероховатой поверхности закреплен заряд q_1. Тело массы m, имеющее заряд q_2, может перемещаться по поверхности. На каком расстоянии от заряда q_1 тело остановится, если в начальный момент оно находилось в состоянии покоя на расстоянии l_0 от заряда q_1? Заряды q_1 и q_2 — одного знака. Коэффициент трения равен k.

Решение. По закону сохранения энергии находим:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_0} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l} + kmg(l - l_0).$$

Обозначим $a = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$; $b = kmg$. Получаем:

$$a\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l}\right) = b(l - l_0),$$

отсюда $(l - l_0)(a - bll_0) = 0$, корень $l = l_0$ не подходит, так как в этом случае тело не сдвинется.

$$l = \frac{a}{bl_0} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 kmgl_0}. \qquad \square$$

Ответ. $l = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 kmgl_0}$.

Задача 15

Три одинаковых шарика, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной l, соединены друг с другом нитями. Заряд и масса каждого шарика равны q и m. Одну из нитей пережгли. Найти максимальную скорость среднего шарика. Сил тяжести нет.

Решение. Скорости окажутся максимальными в момент t, когда все три заряда будут находиться на одной прямой. При этом электрические силы будут скомпенсированы силами натяжения нити. Скорости частиц будут перпендикулярны нитям. Обозначим через v_1 скорость среднего заряда, а через v_2 — скорости крайних зарядов. Из соображений симметрии и с учетом законов сохранения импульса и энергии имеем:

$$mv_1 = 2mv_2; \tag{38}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2} = \Delta W_{\text{эл}}; \tag{39}$$

$$\Delta W_{\text{эл}} = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}},$$

где $W_{\text{нач}}$ и $W_{\text{кон}}$ — начальная и конечная потенциальная энергия системы;

$$W_{\text{нач}} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 l};$$

$$W_{\text{кон}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q^2}{l} + \frac{q^2}{2l}\right) = \frac{5}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l},$$

отсюда:

$$\Delta W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 2l}. \tag{40}$$

Решая совместно (38)–(40), находим:

$$v_{\max} = \frac{2q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 6ml}} = \frac{q}{\sqrt{6\pi\varepsilon_0 ml}}. \qquad \square$$

Ответ. $v_{\max} = \dfrac{q}{\sqrt{6\pi\varepsilon_0 ml}}$.

Задача 16

В точках A и B на расстоянии $|AB| = l$ закреплены заряды $+9q$ и $-q$. Вдоль прямой AB к ним движется частица массы m, имеющая заряд $+q$. Какую наименьшую скорость должна

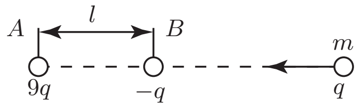


Рис. 8

иметь эта частица на очень большом расстоянии, чтобы достичь точки B?

Решение. Отталкивание сменяется притяжением на некотором расстоянии x от точки B (см. рис. 8), когда сила, действующая на частицу, обращается в нуль, т. е. $\dfrac{9q^2}{(x+l)^2} = \dfrac{q^2}{x^2}$; отсюда, однозначно, $x_1 = \dfrac{l}{2}$, $x_2 < 0$, после прохождения точки B и поэтому отброшено. Чтобы дойти до точки B, нужна энергия

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{9q^2}{4\pi\varepsilon_0(x_1+l)} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_1} = \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 l},$$

$$v = \sqrt{\frac{8q^2}{4\pi\varepsilon_0 ml}}. \qquad \square$$

Ответ. $v = \sqrt{\dfrac{8q^2}{4\pi\varepsilon_0 ml}}$.

Задача 17

Два протона и два позитрона, первоначально находившиеся на концах диагоналей квадрата, разлетаются. Отношение их масс $\dfrac{M}{m} = 2000$, а заряды одинаковы. Найти отношение скоростей протонов и позитронов после разлета (на бесконечности).

Решение. Вначале на все частицы действуют одинаковые по модулю силы. Но массы протонов в 2000 раз превышают массы позитронов. Это означает, что ускорения позитронов будут в 2000 раз больше ускорения протонов. Поэтому позитроны быстро разлетятся на бесконечность, а затем протоны будут разлетаться уже только взаимодействуя друг с другом. Это дает возможность при вычислении скоростей позитронов протоны считать неподвижными. Найдем полную потенциальную энергию позитронов до разлета. Если бы протонов не было, то потенциальная энергия взаимодействия двух позитронов была бы равна

$$W = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}}\,,$$

где a — сторона квадрата. Это работа, которую нужно затратить для сближения двух позитронов. Потенциал поля, которое создает каждый из протонов в месте, где находится позитрон, очевидно, равен

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}\,.$$

Поэтому полная потенциальная энергия позитронов будет равна

$$W_1 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} + 2\,\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}\,e + 2\,\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}\,e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a}\left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

или

$$mv^2 = \left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{41}$$

(скорости обоих позитронов на бесконечности одинаковы).

Теперь рассмотрим разлет протонов. Их потенциальная энергия до разлета, очевидно, равна

$$W_2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}}\,.$$

Эта энергия переходит в кинетическую энергию протонов после их разлета:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} = Mu^2, \tag{42}$$

где u — скорость протона.

Разделив теперь (42) на (41), получим:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}+1} = \frac{M}{m}\left(\frac{u}{v}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{u}{v} = \sqrt{\frac{m}{M}\,\frac{1}{4\sqrt{2}+1}} \approx 0{,}01. \qquad \square$$

Ответ. $\dfrac{u}{v} = \sqrt{\dfrac{m}{M}\,\dfrac{1}{4\sqrt{2}+1}} \approx 0{,}01.$

Задача 18

Найти напряженность электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi = \vec{a}\vec{r}$, где $\vec{a}$ — постоянный вектор, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки поля.

Решение. Представим φ как $\varphi = -a_x x - a_y y - a_z z$ — где a_x, a_y, a_z — постоянные. С помощью формулы (10) найдем:

$$\vec{E} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \vec{a},$$

т. е. поле однородно. □

Ответ. $\vec{E} = \vec{a}$.

Задача 19

Определить напряженность электрического поля, потенциал которого зависит от координат x, y по закону:

1. $\varphi = a(x^2 - y^2)$.
2. $\varphi = axy$, где a — постоянная.

Изобразить примерный вид этих полей с помощью линий вектора $\vec{E}$ (в плоскости xy).

Решение.

1. Воспользовавшись формулой (10), получаем

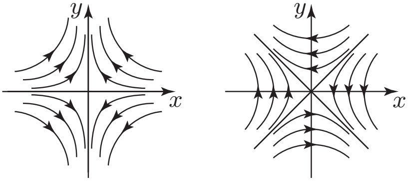
$$\varphi = a(x^2 - y^2)$$

(рис. 9, *а*),

$$\vec{E} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = -2a(\vec{i}x + \vec{j}y).$$

2. (рис. 9, *б*) $\quad \varphi = axy; \quad \vec{E} = -a(\vec{i}y + \vec{j}x).$ □

Ответ. 1. $\vec{E} = -2a(\vec{i}x + \vec{j}y)$. 2. $\vec{E} = -a(\vec{i}y + \vec{j}x)$.



а ***б***

Рис. 9

Задача 20

Потенциал электрического поля имеет вид $\varphi = \alpha(xy - z^2)$, где α — постоянная. Найти проекцию напряженности электрического поля в точке $M = (2{,}1,-3)$ на направление вектора $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$.

Решение. Сначала найдем вектор $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\alpha(y\vec{i} + x\vec{j} - 2z\vec{k}).$$

Искомая проекция

$$E_a = E\,\frac{\vec{a}}{a} = -\,\frac{\alpha(y\vec{i} + x\vec{j} - 2z\vec{k})(\vec{i} + 3\vec{k})}{\sqrt{1+3^2}} = -\,\frac{\alpha(y - 6z)}{\sqrt{10}}\,.$$

В точке M

$$E_a = -\,\frac{\alpha(1+18)}{\sqrt{10}} = -\,\frac{19}{\sqrt{10}}\,\alpha. \qquad \square$$

Ответ. $E_a = -\,\dfrac{19}{\sqrt{10}}\alpha.$

Задача 21

Найти потенциал следующих электрических полей:

1. $\vec{E} = a(y\vec{i} + x\vec{j})$.
2. $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 - y^2)\vec{j}$.
3. $\vec{E} = ay\vec{i} + (ax + bz)\vec{j} + by\vec{k}$.

Здесь a и b — постоянные, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты осей X, Y, Z.

Решение.

1. $$\vec{E} = a(y\vec{i} + x\vec{j}) = -\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,;$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -ay; \qquad \varphi_x = -axy + c;$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -ax; \qquad \varphi_y = -axy + c;$$
$$\varphi_0 = -axy + c.$$

2. $$\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 - y^2)\vec{j};$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2axy; \qquad \varphi_x = -ax^2y;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -a(x^2 - y^2); \qquad \varphi_y = -ax^2y + \frac{ay^3}{3}\,;$$
$$\varphi_0 = ay\Big(\frac{y^2}{3} - x^2\Big) + c.$$

3. $\overrightarrow{E} = ay\vec{i} + (ax + bz)\vec{j} + by\vec{k};$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -ay; \qquad \varphi_x = -ayx;$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -ax - bz; \qquad \varphi_y = -ayx - bzy;$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -by; \qquad \varphi_z = -byz;$$
$$\varphi_0 = -y(ax + bz) + c.$$
□

Ответ. 1. $\varphi_0 = -axy + c$. 2. $\varphi_0 = ay\Big(\frac{y^2}{3} - x^2\Big) + c$. 3. $\varphi_0 = -y(ax + bz) + c$.

Задача 22

Диполь с электрическим моментом $p = 10^{-12}$ Кл·м равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 10^4$ рад/с относительно оси, перпендикулярной плечу диполя и проходящей через его центр. Определить среднюю потенциальную энергию $< \Pi >$ заряда $Q = 1$ нКл, находящегося на расстоянии $r = 2$ см от центра диполя и лежащего в плоскости вращения, за время, равное полупериоду от $t_1 = 0$ до $t_2 = T/2$, в течение времени $t \gg T$. В начальный момент считать $\Pi = 0$.

Решение. $< d\Pi >=< \varphi_2 - \varphi_1 >=< d\varphi >= \dfrac{Qp < \cos\omega t > dt}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, так как $\alpha = \omega t$.

$$< \Pi >= \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int\limits_0^t < \cos\omega t > dt = \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^2} < \sin\omega t > .$$

$$< \Pi >= \frac{Qp2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 T\omega}\int\limits_0^{T/2} \sin\frac{2\pi}{T}\,t\,dt = \frac{2Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^2} < \sin\omega t >= 14{,}3 \text{ нДж}.$$

При $t \gg T < \sin\omega t > \longrightarrow 0$, следовательно, $< \Pi >= 0$. □

Ответ. 1. $< \Pi >= 14{,}3$ нДж. 2. $< \Pi >= 0$.

Задача 23

Какую работу против сил электрического поля надо совершить, чтобы перенести диполь с электрическим моментом p из положения *1* (рис. 10), где напряженность поля равна E_1, в положение *2* с напряженностью E_2?

Решение. Работа, совершенная при переносе диполя из положения 1 $\to$ 2, равна изменению потенциальной энергии $A = \Delta W = W_2 - W_1$ согласно (17); $W = -\overrightarrow{p}\overrightarrow{E}$. В точке *2* $W_2 = 0$, так как угол между $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{E}$ равен $\dfrac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos\overrightarrow{p}\overrightarrow{E} = 0$. Тогда $A = pE_1$, т. е. работа зависит только от E_1. □

Ответ. $A = pE_1$.

Задача 24

Два диполя с электрическими моментами $p_1 = 10^{-12}$ Кл $\cdot$ м и $p_2 = 4\cdot 10^{12}$ Кл $\cdot$ м находятся на расстоянии $r = 2$ см друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой.

Решение. Согласно (16) $F = p_1\left|\dfrac{\partial E}{\partial r}\right|$, где E — напряженность поля диполя $\overrightarrow{p_2}$ — определяется первой формулой (13).

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_2}{r^3},$$

откуда $\left|\dfrac{\partial E}{\partial r}\right| = \dfrac{3p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}$; подставив в выражение для F, получим:

$$F = \frac{3p_1p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4} = 1{,}35 \text{ мкН}.$$ □

Ответ. $F = \dfrac{3p_1p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4} = 1,35$ мкН.

Задача 25

Определить направление силы $\overrightarrow{F}$, действующей на диполь в поле положительного заряда, при трех разных расположениях диполя (рис. 11).

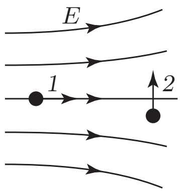


Рис. 10

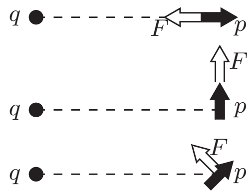


Рис. 11

Решение. Согласно формуле (14) во внешнем неоднородном поле сила, действующая на диполь:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right) = q\Delta\vec{E}.$$

Обратите внимание на то, что сила, действующая на диполь, находящийся в неоднородном электрическом поле, в общем случае не совпадает ни с $\vec{E}$ ни с $\vec{p}$, а совпадает лишь с $\Delta\vec{E}$, взятым в направлении вектора $\vec{p}$. Поэтому для решения задач подобного типа необходимо в каждом случае найти направление вектора $\vec{E}$. Как и в задаче 4, будьте внимательны при определении направления вектора $\vec{E}$. □

Задача 26

Электрический квадруполь состоит из двух положительных и двух отрицательных одинаковых по модулю точечных зарядов q, расположенных в вершинах квадрата со стороной a, как указано на рис. 12. Найти напряженность электрического поля E такого квадруполя в точке A, находящейся на расстоянии $l \gg a$ от его центра O, если линия OA параллельна одной из сторон квадрата.

Решение. Задачу можно решить, суммируя с учетом знака проекции $\vec{E_l}$ от каждого заряда. Однако более простым будет решение, если мы рассмотрим квадруполь как два диполя *1–2* и *3–4*. Диполи *2–3* и *1–4* не рассматриваем, так как в точке A они дадут одинаковые по модулю, но разные по знаку величины $\vec{E}$ (рис. 12). Согласно формуле (13):

$$E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p}{r^3}\,;$$

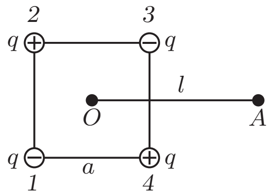


Рис. 12

используя принцип суперпозиции полей и учитывая, что $l \gg a$ и $p = qa$, запишем:

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(l - \frac{a}{2}\right)^3} - \frac{1}{\left(l + \frac{a}{2}\right)^3}\right] = \frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 l^4}\,. \qquad \square$$

Ответ. $E_{\perp} = \dfrac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 l^4}$.

Задача 27

Показать, что потенциал поля диполя с электрическим моментом p может быть представлен как $\varphi = \dfrac{\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор. Найти с помощью этого выражения модуль напряженности электрического поля диполя как функцию r и θ (см. рис. 13).

Решение. Согласно (5), а также принципу суперпозиции электрических потенциалов для точки P можем записать:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(r_- - r_+)}{r_+ r_-}.$$

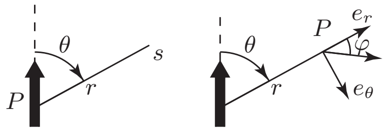
Так как $r \gg l$, то, как видно из рис. 13, *а*, $r_- - r_+ = l\cos\theta$ и $r_- r_+ = r^2$. Тогда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

где $\overrightarrow{p} = q\,\overrightarrow{l}$.

Для нахождения $E = f(r)$ и $E = f(\theta)$ воспользуемся формулой

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}\,.$$



а ***б***

Рис. 13

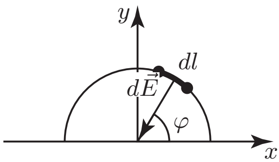


Рис. 14

С ее помощью мы вычислим проекции вектора $\overrightarrow{E}$ на два взаимно перпендикулярных направления вдоль ортов $\overrightarrow{e_r}$ и $\overrightarrow{e_\theta}$ рис. 13, *б*. Получаем:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2p\cos\theta}{r^3}\,;$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p\sin\varphi}{r^3}\,. \qquad \square$$

Ответ. $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{2p\cos\varphi}{r^3}\;; \qquad E_\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{p\sin\varphi}{r^3}.$

Задача 28

Тонкое полукольцо радиуса R заряжено равномерно зарядом q. Найти модуль напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца.

Решение. $|E_{\text{общ}}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$, где E_x и E_y — сумма всех проекций $\overrightarrow{E}$ на оси x и y соответственно. Из рис. 14 ясно, что E_x равна нулю, так как для любой проекции $d\overrightarrow{E_x}$, создаваемой элементом dl с зарядом dq в пределах $\dfrac{\pi}{2} > \varphi \geq 0$, всегда найдется другой вектор $d\overrightarrow{E_x}$, лежащий в пределах $\pi \geq \varphi > \dfrac{\pi}{2}$, равный ему по абсолютной величине, но противоположный по направлению. Таким образом, получаем:

$$|E| = E_{\text{общ}} = \int\limits_0^\pi dE_y. \tag{43}$$

Для каждого малого участка dl можно записать:

$$dl = R\,d\varphi; \qquad dq = \frac{q}{\pi R}\,dl. \tag{44}$$

Далее $dE_y = dE\sin\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,dq$. С учетом (44) $dE_y = \dfrac{q\sin\varphi}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}d\varphi$. Подставляем dE_y в (43) и, интегрируя по φ от 0 до π, получаем:

$$E_{\text{общ}} = |E| = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\,. \qquad \square$$

Ответ. $|E| = \dfrac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$.

Задача 29

Кольцо радиуса R из тонкой проволоки имеет заряд q. Найти модуль напряженности электрического поля на оси кольца, как функцию расстояния l до его центра. Исследовать $E(l)$ при $l \gg R$. Определить максимальное значение напряженности и соответствующее расстояние l. Изобразить примерный график функции $E(l)$.

Решение. Каждый элемент кольца dL обладает зарядом

$$dQ = \frac{q}{2\pi R}\,dL \tag{45}$$

и создает поле с напряженностью (рис. 15, *а*)

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dQ}{r^2}\,. \tag{46}$$

Как и в предыдущей задаче, суммарная проекция на ось x равна нулю: $\overrightarrow{E_x} = 0$, а

$$dE_y = dE\,\cos\alpha; \tag{47}$$

$$\cos\alpha = \frac{l}{r} = \frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}\,. \tag{48}$$

Применим (43) с учетом (45), (46), (48) (рис. 15, *б*):

$$E = E_y = \frac{ql}{8\pi^2\varepsilon_0 R\sqrt{(l^2+R^2)^3}}\int\limits_0^{2\pi R} dL = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(l^2+R^2)^3}}\,.$$

В случае $l \gg R$:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\,,$$

что соответствует полю точечного заряда.

Найдем l, при котором E максимальна.

$$\frac{dE}{dl} = 0 \sim \left[\frac{l}{\sqrt{(l^2+R^2)^3}}\right]' = \frac{\sqrt{(l^2+R^2)^3} - 3l^2\sqrt{l^2+R^2}}{(l^2+R^2)^3}.$$

После несложных преобразований приходим к уравнению:

$$l^2 + R^2 - 3l^2 = 0,$$

откуда $E_{\max} = \dfrac{q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$ при $l_{\max} = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. □

Ответ. $E = \dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0\sqrt[3]{(R^2+l^2)^2}}$. При $l \gg R$ $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$; $E_{\max} = \dfrac{q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$ при $l_{\max} = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

Задача 30

Тонкое непроводящее кольцо радиуса R заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$, где λ_0 — постоянная, φ — азимутальный угол. Найти модуль напряженности электрического поля:

1. В центре кольца.
2. На оси кольца в зависимости от расстояния x.

Исследовать полученное выражение при $x \gg R$.

Решение. При выборе расположения системы координат, во избежание ошибок, кольцо лучше расположить в плоскости zOy (рис. 16), так как по условию задачи необходимо

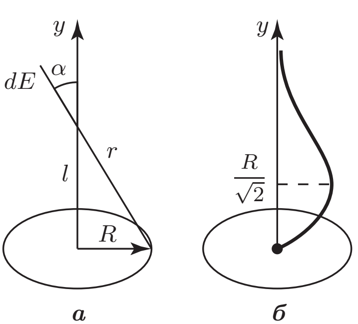


Рис. 15

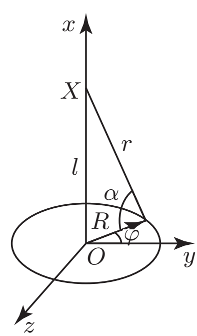


Рис. 16

найти $E = f(x)$.

$$dq = \lambda_0 \cos\varphi\, dl = \lambda_0 \cos\varphi R\, d\varphi; \tag{49}$$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)}\,; \tag{50}$$

$$dE_x = dE\,\sin\alpha;$$

$$dE_y = -dE\,\cos\alpha\cos\varphi; \tag{51}$$

$$dE_z = -dE\,\cos\alpha\sin\varphi;$$

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\,; \quad \cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}\,. \tag{52}$$

Подставляя (49) в (50), затем (50) и (52) в (51), получаем:

$$dE_x = \frac{\lambda_0 \cos\varphi x R\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}\,;$$

$$dE_y = -\frac{\lambda_0 \cos\varphi R^2\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}\cos\varphi;$$

$$dE_z = -\frac{\lambda_0 \cos\varphi R^2\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}\sin\varphi.$$

Интегрируя эти выражения по φ от 0 до 2π, получим:

$$E_x = E_z = 0; \quad E_y = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}\,,$$

отсюда

$$E(x) = |E_y| = \frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}\,.$$

В центре кольца:

$$E(x = 0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\,,$$

при $x \gg R$ $E = \dfrac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 x^3}$, т. е. напряженность поля спадает, как у точечного диполя. □

Ответ. $$E(x = 0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\,; \quad E(x) = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}\,;$$

$$E \cong \frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 x^3}\,, \quad \text{при} \quad x \gg R.$$

Задача 31

Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень длины $2a$ заряжен равномерно зарядом q. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра стержня до точки прямой:

1. Перпендикулярной стержню и проходящей через его центр.
2. Совпадающей с осью стержня, если $r \gg a$.

Решение.

1. Замечая, что суммарная проекция $\overrightarrow{E_x} = 0$, записываем (рис. 17, *а*):
$$dE_\text{р} = 2\cos\alpha\, dE; \tag{53}$$
где $E_\text{р}$ — результирующая электрического поля, направленная по оси y.
$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\,; \tag{54}$$
$$l^2 = x^2 + r^2; \tag{55}$$
$$dq = \frac{q}{2a}\, dx; \tag{56}$$
$$\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}\,. \tag{57}$$
Подставляем (55) и (56) в (54), а (54) и (57) в (53) и, интегрируя от $-a$ до a, имеем:
$$E = \frac{qr}{8\pi\varepsilon_0 a}\int\limits_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(x^2 + r^2)^3}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2 + r^2}}\,,$$

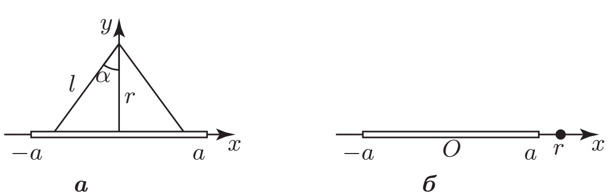


Рис. 17

при $r \gg a$

$$E \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,.$$

2. (рис. 17, *б*)
$$E = \int\limits_{-a}^{a} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (r-x)^2}\,. \tag{58}$$

Подставляем (56) в (58) и, интегрируя, получаем:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 - a^2)}\,,$$

при $r \gg a$,

$$E \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,,$$

что совпадает со случаем 1. □

Ответ. 1. $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2+r^2}}$.
2. $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r^2-a^2)}$, при $r \gg a$ $E \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ в обоих случаях.

Задача 32

Длинная прямая равномерно заряженная нить имеет заряд λ на единицу длины. Найти модуль и направление электрического поля в точке, которая отстоит от нити на расстоянии y и находится на перпендикуляре к нити, проходящем через один из ее концов.

Решение. Сначала выясним направление результирующего вектора $\overrightarrow{E_\text{р}}$. Для этого вычислим его проекции на оси x и y (рис. 18).

$$|dE_x| = dE_\text{р} \cos\varphi; \tag{59}$$

$$dE_\text{р} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)}\,; \tag{60}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{61}$$

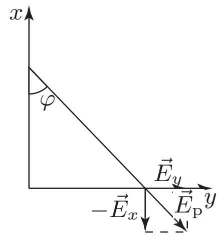


Рис. 18

Подставляя (61) и (60) в (59), получаем:

$$|dE_x| = \frac{\lambda x\,dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,;$$

$$|E_x| = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\,;$$

$$dE_y = dE_\text{р}\sin\varphi; \tag{62}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{63}$$

Подставляя (60) и (63) в (62), получаем:

$$dE_y = \frac{\lambda y\,dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,;$$

$$E_y = \frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\,.$$

Таким образом, $|E_x| = |E_y|$, результат неочевидный, следовательно, $E_\text{р}$ направлена под углом 45° к нити.

$$|E_\text{р}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\,. \qquad \square$$

Ответ. Вектор $\overrightarrow{E_\text{р}}$ направлен под углом 45° к нити

$$|E_\text{р}| = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}.$$

Задача 33

Имеются два тонких проволочных кольца радиуса R каждое, оси которых совпадают. Заряды колец равны q и $-q$. Найти разность потенциалов между центрами колец, отстоящими друг от друга на расстоянии l, если $R = 30$ см, $l = 52$ см и $q = 0{,}40$ мкКл.

Решение. $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, но из-за разных знаков зарядов q φ_1 и φ_2 имеют разные знаки, хотя и равны по величине. Известно, что

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} \tag{64}$$

Найдем $\overrightarrow{E}$ в точке 1 или 2, учтя $|\overrightarrow{E_1}| = -|\overrightarrow{E_2}|$:

$$E_\text{р} = E\cos\vartheta; \tag{65}$$

где $E_\text{р}$ — результирующая электрического поля, направленная вдоль оси *1–2* (рис. 19).

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(l^2 + R^2)}; \tag{66}$$

$$\cos\vartheta = \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}}. \tag{67}$$

Подставляем (66) и (67) в (65). Получаем:

$$E_\text{р} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{l}{\sqrt{(l^2 + R^2)^3}}.$$

Из формулы (64) получаем:

$$\partial\varphi = -E\,\partial l;$$

$$\varphi_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^l \frac{l\,dl}{\sqrt{(l^2 + R^2)^3}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{l^2 + R^2}} - \frac{1}{R}\right).$$

Аналогично:

$$\varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{l^2 + R^2}} - \frac{1}{R}\right);$$

$$\Delta\varphi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{R}\right)^2}}\right) = 12 \text{ кВ}. \qquad \square$$

Ответ. $\Delta\varphi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{R}\right)^2}}\right) = 12$ кВ.

Знак «минус» в ответе опущен, так как в условии задачи не уточняется, заряд какого знака находится на каждом из колец.

Задача 34

Круглая тонкая пластинка радиуса R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ. Найти потенциал и модуль напряженности электрического поля на оси пластинки как функцию расстояния l от ее центра. Рассмотреть также случаи $l \to 0$ и $l \gg R$.

Решение. Выберем кольцо шириной dr. Можно легко показать, что заряд этого кольца (рис. 20):

$$dq = 2\pi r\sigma\, dr; \tag{68}$$

$$\cos\vartheta = \frac{l}{\sqrt{l^2+r^2}}; \tag{69}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(l^2+r^2)}\cos\vartheta. \tag{70}$$

Подставляя (68) и (69) в (70) и интегрируя, получаем:

$$E = \frac{l\sigma}{2\varepsilon_0}\int\limits_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{(l^2+r^2)^3}} =$$

$$= \frac{l\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{\sqrt{l^2+R^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{l^2}}}\right).$$

Далее:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{\sqrt{l^2+R^2}} \tag{71}$$

Подставляя (68) и (69) в (71) и интегрируя, получаем:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int\limits_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{l^2+r^2}} = \frac{\sigma l}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2} - 1\right),$$

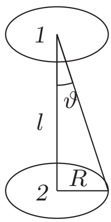


Рис. 19

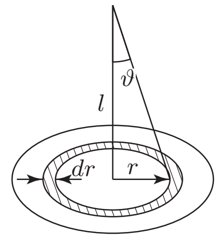


Рис. 20

при $l \to 0$ $\varphi \approx \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$, $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Для вычисления E при $l \gg R$ предельный переход осуществлять нельзя, так как при этих условиях E представляет собой поле точечного заряда $q = \sigma\pi R^2$ и вычисляется по формуле напряженности поля для точечного заряда, т. е. $E \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$, где $q = \sigma\pi R^2$.

Можно в этой задаче вычислить сначала φ, а потом по формуле $E = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$ вычислить E. □

Ответ.

$$\varphi = \frac{\sigma l}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2} - 1\right);$$

$$E = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}}\right)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0};$$

$$\text{при} \quad l \to 0 \quad \varphi \approx \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0};$$

$$\text{при} \quad l \gg R \quad \varphi \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \quad \text{и} \quad E \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

Задача 35

Найти потенциал на краю тонкого диска радиуса $R = 20$ см, по которому равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 0{,}25\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$.

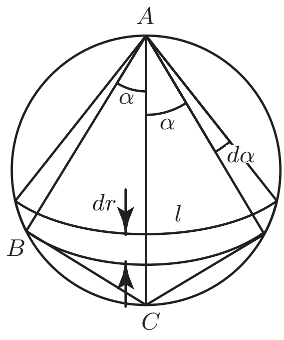


Рис. 21

Решение. Проведем из точки A хорды AB и AC. $\angle ABC$ — прямой (рис. 21). Площадь бесконечно тонкой полосы:

$$dS = l\,dr; \tag{72}$$

$$r = 2R\cos\alpha; \tag{73}$$

$$l = 2\alpha r; \tag{74}$$

$$dr = -2R\sin\alpha\,d\alpha; \tag{75}$$

$$dq = \sigma\,dS. \tag{76}$$

Подставляя (74) и (75) в (72), а (72) в (76), получим:

$$dq = -4\sigma r R\alpha\sin\alpha\,d\alpha;$$

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{R\sigma\alpha\sin\alpha\,d\alpha}{\pi\varepsilon_0}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\varphi = \frac{2\sigma R}{\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{-\frac{\pi}{2}}\alpha\sin\alpha\,d\alpha = \frac{2\sigma R}{\pi\varepsilon_0}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\Big|_0^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sigma R}{\pi\varepsilon_0} = 3{,}5\text{ кВ}.$$

Коэффициент 2 учитывает то, что интегрирование осуществлялось только по половине диска, а потенциал требуется определить в учетом заряда, находящегося на всем диске. □

Ответ. $\varphi = \dfrac{2\sigma R}{\pi\varepsilon_0} = 3{,}5$ кВ.

Задача 36

Заряд q распределен по тонкому кольцу радиусом a. Найти работу сил поля при перемещении точечного заряда q' из центра кольца на бесконечность.

Решение. Согласно (6) и (9) работа по перемещению заряда q' из точки 1 в точку 2 определяется как

$$A = q'(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 q' E_l \, dl.$$

Однако мы не знаем, по какому закону распределен заряд q и, следовательно, не можем вычислить поле $\overrightarrow{E}$, как мы делали в предыдущих задачах, поэтому будем решать задачу через потенциал. Каждый элемент участка кольца dl, обладающий зарядом dq, создает в центре кольца потенциал $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\sigma(l)\, dl}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

где $\sigma(l)$ — закон распределения плотности заряда по кольцу. Запишем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \int_l \sigma(l)\, dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Потенциал на бесконечности $\varphi_\infty = 0$, следовательно, работа по переносу заряда q' из центра кольца на бесконечность:

$$A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a}. \qquad \square$$

Ответ. $A = \dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

Задача 37

Тонкое кольцо радиусом $R = 25$ см имеет заряд $q = 5$ Кл, неравномерно распределенный по кольцу. Найти работу электрических сил при перемещении точечного заряда $q' = 1$ мкКл из центра кольца по произвольному пути в точку, находящуюся на оси кольца на расстоянии $l = 50$ см от его центра.

Решение.

Способ 1. Проводя рассуждения, аналогичные проведенным в предыдущей задаче, запишем выражение для потенциала в центре кольца:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

Потенциал на расстоянии l от центра кольца равен:

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{l^2+R^2}}\,;$$

$$A = q'(\varphi_1-\varphi_2) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{l^2}{R^2}}}\right) = 0{,}1\ \text{Дж}.$$

Способ 2. Эту же задачу в силу ее симметрии можно решить через вычисление электрического поля. Так как в потенциальных полях работа не зависит от пройденного пути, а зависит лишь от начальной и конечной точек, то можно записать:

$$dA = \overrightarrow{F}d\overrightarrow{l} = q'E\,dl\,\cos\varphi; \qquad (77)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+l^2)}\,; \qquad (78)$$

$$\cos\varphi = \frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}\,. \qquad (79)$$

Подставив (78) и (79) в (77) и проведя интегрирование:

$$A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^l \frac{l\,dl}{\sqrt{(l^2+R^2)^3}} =$$

$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{l^2}{R^2}}}\right) = 0{,}1\ \text{Дж}. \qquad \square$$

Ответ. $A = \dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{l^2}{R^2}}}\right) = 0{,}1$ Дж.

Глава 2

ТЕОРЕМА ГАУССА

Метод зеркального изображения, метод наложения

М. Фарадей развил очень полезную модель, исходя из понятий линий электрического поля. Согласно этой модели направление линий электрического поля определяет направление силы, действующей на положительный заряд, помещенный в данную точку, а густота линий в окрестностях этой точки определяет модуль этой силы. Чтобы придать этой модели количественный характер, можно положить, что напряженность электрического поля в любой области равна числу линий поля, проходящих через единичную площадку, расположенную перпендикулярно линиям напряженности, т. е.

$$E = \frac{N}{S\cos\alpha}\,, \tag{80}$$

где N — число линий напряженности, S — площадь поверхности, α — угол между нормалью к поверхности и напряженностью $\overrightarrow{E}$. Формулу (80) можно переписать в виде:

$$N = ES\cos\alpha = E_n S, \tag{81}$$

или $\Phi = E_n S$. Величину Φ называют *потоком вектора напряженности электрического поля через поверхность* S. Оценим число линий, или поток, создаваемый положительным зарядом в 1 Кл, помещенным в центр сферы радиуса 1 м. В силу симметрии задачи линии напряженности направлены по радиусу сферы и перпендикулярны ее поверхности. Подставляя численные значения в формулу (81), получаем:

$$N = ES \approx 10^{11} \text{ линий.}$$

Если поверхность S не окружает заряд, то число линий, входящих в некоторый объем, не имеющий внутри зарядов, равно числу линий, выходящих из этого объема, т. е. их алгебраическая сумма равна нулю, так как линии электрического поля могут начинаться только на положительных, а заканчиваться только на отрицательных зарядах.

Теорема Гаусса связывает полное число линий напряженности поля (поток), выходящих через поверхность, ограничивающую объем, с полным зарядом, находящимся внутри этого объема.

Для удобства расчета окружим заряд q сферой радиуса r. Значение E в любой точке поверхности сферы направлено по нормали и равно $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{q}{r^2}$, тогда в соответствии с (81):

$$\Phi = E_n S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,2\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}\,, \tag{82}$$

т. е. не зависит от радиуса r и, следовательно, от формы поверхности. Мы пришли к следующему выводу:

$$\int\limits_{\text{произвольная } S} E_n\,dS = \begin{cases} 0; & q \quad \text{снаружи} \quad S; \\ \dfrac{q}{\varepsilon_0}; & q \quad \text{внутри} \quad S. \end{cases} \tag{83}$$

Теорему Гаусса легко обобщить на случай нескольких зарядов внутри S (84), на случай объемного заряда (85) и случай поверхностного заряда (86).

$$\int\limits_S E_n\,dS = \frac{\sum\limits_i q_i}{\varepsilon_0}\,; \tag{84}$$

$$\int\limits_S E_n\,dS = \frac{\int\limits_V \rho\,dV}{\varepsilon_0}\,; \tag{85}$$

$$\int\limits_S E_n\,dS = \frac{\int\limits_s \sigma\,dS}{\varepsilon_0}\,. \tag{86}$$

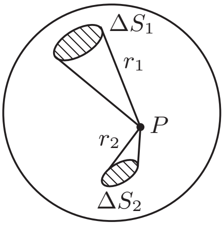


Рис. 22

Интересно отметить, что теорема Гаусса является следствием закона Кулона. Рассмотрим однородно заряженную сферу (рис. 22) и выберем в ней точку P, находящуюся не в центре этой сферы. Из точки P построим два симметричных конуса, заканчивающихся на поверхности сферы и вырезающих на ней площади ΔS_1 и ΔS_2 соответственно. Из элементарных геометрических соображений можно записать:

$$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}\,.$$

Считая сферу заряженной равномерно, легко показать, что заряд каждой площадки пропорционален ΔS:

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}\,.$$

На основании закона Кулона можно записать:

$$\frac{q_2}{r_2^2} = \frac{q_1}{r_1^2}\,,$$

т. е. поля в точке P взаимоуничтожаются. Разбивая всю сферу на пары, приходим к выводу, что поле в точке P равно нулю. Если бы в законе Кулона показатель степени был больше двух, то ΔS_2 создавало бы более сильное поле, чем ΔS_1, а если бы показатель степени был равен единице, то мы получили бы обратную картину. Другой великой теоремой, характеризующей электростатическое поле, является **теорема о циркуляции вектора** E, утверждающая, что

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0. \tag{87}$$

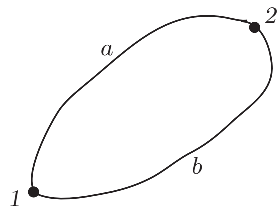


Рис. 23

Рассмотрим электростатическое поле $\vec{E}$, образованное совокупностью неподвижных электрических зарядов. Выберем произвольный замкнутый контур (рис. 23) и разобьем его на две части *1a2* и *2b1*. Из механики известно, что любое стационарное поле центральных сил является потенциальным (электростатическое поле является именно таким), т. е. работа в этом поле зависит только от конечной и начальной точки, тогда мы можем записать $\int\limits_{12}^{a} = \int\limits_{12}^{b}$, с другой стороны, $\int\limits_{12}^{b} = -\int\limits_{21}^{b}$, поэтому $\int\limits_{12}^{a} + \int\limits_{21}^{b} = \int\limits_{12}^{a} - \int\limits_{12}^{b} = 0$, т. е. утверждение (87) доказано.

Из теоремы (87) следует, что линии электростатического поля не могут быть замкнуты, в противном случае, взяв интеграл по контуру, совпадающему с линией $\vec{E}$, мы получили бы не ноль, а какую-то конечную величину работы, что противоречит теореме о циркуляции вектора $\vec{E}$.

Метод зеркального изображения

Проводники электричества — это те вещества, которые имеют много свободных зарядов. Это металлы, растворы солей, кислот, щелочей, плазма и т. д. Мы будем рассматривать только металлы, носителями зарядов в которых являются электроны, которые свободно двигаются в веществе, но не могут покидать поверхность. При наложении на проводник электрического поля на его поверхности индуцируются заряды, а электрическое поле внутри проводника будет равно нулю, а значит и

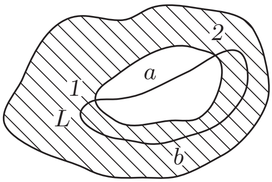


Рис. 24

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial l} = 0$, т. е. φ постоянен и не меняется от точки к точке. Любой проводник — эквипотенциальная область, поверхность — эквипотенциаль, а электрическое поле возле самой поверхности — нормаль.

Рассмотрим теперь полость в проводнике (рис. 24). Рассмотрим произвольный контур L, часть которого проходит по внутренней части проводника, а часть — по полости. Тогда:

$$\oint\limits_L \vec{E}\,d\vec{l} = \int\limits_{1-2} \vec{E}\,d\vec{l} + \int\limits_{2-1} \vec{E}\,d\vec{l}.$$

Первый интеграл должен быть равен нулю, так как мы доказали, что внутри проводника поле равно нулю. Согласно теореме о циркуляции вектора $\vec{E}$ имеем $\oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0$. Следовательно, $\oint\limits_{2-1} \vec{E}\,d\vec{l} = 0$, т. е. поле внутри полости отсутствует. Таким образом, мы пришли к выводу, что наружное электрическое поле не создает поля внутри, а поле внутри проводника не создает поле снаружи, т. е. экранировка работает в обе стороны. Кроме того, поля в электростатике внутри и снаружи сплошной металлической оболочки не влияют и не зависят друг от друга. Вышеприведенные результаты позволяют значительно облегчить решение задач, где требуется вычислить распределение индуцированного заряда на поверхности проводника, либо силу взаимодействия между индуцированными зарядами и точечным зарядом. Рассмотрим картину поля двух разноименных точечных зарядов. Предположим, что мы вместо эквипотенциальной поверхности A выгнули металлический лист и установили на нем потенциал φ_A, либо вместо поверхно-

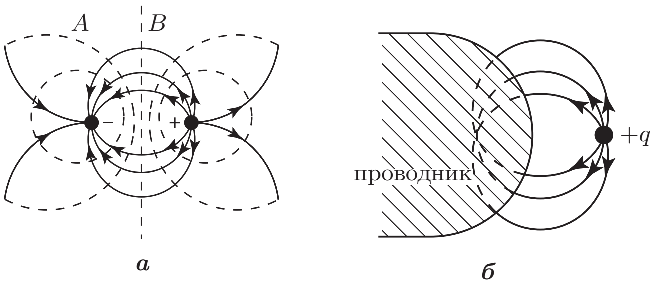


Рис. 25

сти B поместили металлический лист и заземлили его, чтобы обеспечить $\varphi_B = 0$ (рис. 25, *а*). Тогда в обоих случаях поле между зарядами $\pm q$ не изменится, и конфигурация силовых линий эквипотенциальной поверхности A или B и заряда $+q$ будет такой же, как и конфигурация между зарядами $+q$ и $-q$. Это и есть суть **метода зеркального изображения**, когда сложная задача взаимодействия проводящей плоскости, имеющей зачастую довольно сложную форму (например поверхность A), и точечных зарядов заменяется простой задачей взаимодействия двух или нескольких точечных зарядов (рис. 25, *б*).

При решении некоторых «несимметричных задач», связанных с вычислением трудоемких интегралов, их решение может быть значительно облегчено при использовании **метода наложения**. Как правило, такие задачи заключаются в нахождении напряженности электрического поля внутри полости заряженной сферы, в области перекрытия разноименно заряженных сфер, либо нахождении напряженности внутри и вне сферы, имеющей неравномерное распределение плотности поверхностного заряда. В первых двух случаях поле внутри полости либо в области перекрытия сфер рассматривается как суперпозиция полей двух разноименно заряженных сфер, в случае же сферы, имеющей неравномерную плотность поверхностного заряда, эту сферу представляют в виде двух сфер, имеющих одинаковую разноименную плотность заряда, сдвинутых на расстояние l относительно друг друга.

Рекомендации по решению задач

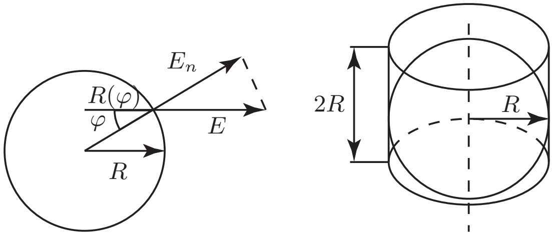
1. Теорема Гаусса значительно облегчает решение задач по расчету электростатических полей, обладающих сферической, цилиндрической или плоской симметрией. К сожалению, класс задач, решаемых с ее помощью, весьма ограничен. Например, для равномерно заряженного отрезка, заряженного диска и т. д., и т. п. невозможно построить замкнутую поверхность, окружающую заряженное тело и обладающую простой формой, необходимой для вычисления потока вектора $\vec{E}$. В этом случае необходимо применять формулу для непосредственного вычисления:
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho\vec{e_r}\,dV}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho\,\vec{r}\,dV}{r^3}$$
либо другие методы.
2. В задачах типа **51**, где используется метод зеркального изображения, при вычислении работы, необходимой для удаления заряда, системы зарядов или заряженного тела, применение формулы $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ неправомерно, так как перемещение зарядов приводит к зависимости распределения индуцированных зарядов от времени, и их поле не является консервативным.

Задача 38

Имеется аксиально-симметричное поле, напряженность которого зависит от расстояния r до его оси как $\vec{E} = \dfrac{a\,\vec{r}}{r^2}$, где a — постоянная. Найти заряд внутри сферы радиуса R с центром на оси этого поля.

Решение.

Способ 1 (рис. 26, *а*).
$$E = \frac{a}{R(\varphi)}\,;$$
$$R(\varphi) = R\cos\varphi;$$
$$E_n(\varphi) = E\cos\varphi = \frac{a\cos\varphi}{R\cos\varphi} = \frac{a}{R}\,.$$



а ***б***

Рис. 26

Используя теорему Гаусса, можно записать:

$$E_n 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

$$\frac{a}{R} 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда $q = 4\pi\varepsilon_0 aR$.

Способ 2. Впишем сферу радиуса R (рис. 26, *б*) в цилиндр высотой $2R$ и радиусом основания R. Так как поле является аксиально-симметричным, отмечаем, что поток через сферу радиуса R равен потоку через боковую поверхность цилиндра. Тогда теорема Гаусса принимает вид:

$$q = \varepsilon_0 \oint \overrightarrow{E}\, d\overrightarrow{S} = \varepsilon_0 E_n S = 4\pi\varepsilon_0 aR. \qquad \square$$

Ответ. $q = 4\pi\varepsilon_0 aR$.

Задача 39

Напряженность электрического поля $\overrightarrow{E} = ar\vec{r}$, где a — постоянная, r — расстояние от центра поля. Найти плотность зарядов $\rho(r)$, создающих это поле.

Решение. Запишем теорему Гаусса для напряженности поля внутри шара E_i:

$$4\pi r^2 E_i = \frac{\int\limits_0^r \rho(r_1) 4\pi r_1^2\, dr_1}{\varepsilon_0}.$$

Выражение в числителе дроби представляет собой заряд шара радиуса r. Подставляя $E_i = ar^2$ и дифференцируя по r, получаем: $\rho(r) = 4\varepsilon_0 ar$. $\square$

Ответ. $\rho(r) = 4\varepsilon_0 ar$.

Задача 40

Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до его центра как $\varphi = ar^2 + b$, где a и b — постоянные. Найти распределение объемного заряда $\rho(r)$ внутри шара.

Решение. Согласно (10) имеем:

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -2ar.$$

Записываем теорему Гаусса с учетом того, что по условию задачи $E_n = f(r)$. Поэтому введем обозначение $E_n = E_r$ и запишем:

$$4\pi d(r^2 E_r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\, dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\, \rho 4\pi r^2\, dr,$$

где dq — заряд между сферами, радиусы которых r и $r + dr$. Отсюда:

$$r^2 dE_r + 2rE_r\, dr = \frac{1}{\varepsilon_0}\, \rho r^2\, dr, \qquad \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\, E_r = \frac{\rho}{\varepsilon_0};$$

подставив сюда $E_r = -2ar$ (учитывая, что для сферы $E_r = E_n = E$), получаем $\rho = -6\varepsilon_0 a$. $\square$

Ответ. $\rho = -6\varepsilon_0 a$.

Задача 41

Шар радиуса R имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его центра как $\rho = \rho_0\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$, где ρ_0 — постоянная. Пренебрегая влиянием вещества шара, найти:

1. Модуль напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию r.
2. Максимальное значение модуля напряженности $E_{\max}$ и соответствующее ему значение $r_{\max}$.

Решение.

1. Как и в предыдущей задаче, воспользуемся теоремой Гаусса для вычисления напряженности внутри шара.

$$4\pi r^2 E_i = \frac{\int\limits_0^r \rho(r_1) 4\pi r_1^2\, dr_1}{\varepsilon_0}.$$

Очевидно, что интеграл представляет собой заряд, заключенный внутри сферы радиуса r. Подставляя выражение для $\rho(r)$, интегрируя и производя несложные преобразования, получаем:

$$E(r \leq R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{3r}{4R}\right).$$

Для определения поля вне шара $E(r \geq R)$ запишем выражение для полного заряда Q шара радиусом R:

$$Q = \int\limits_0^R \rho(r_1) 4\pi r_1^2\, dr_1 = \frac{\pi \rho_0 R^3}{3}.$$

Применив теорему Гаусса, получим:

$$E(r \geq R) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2};$$

видно, что при $r = R$ $E(r \geq R) = E(r \leq R)$.

2. Электрическое поле достигает максимума в точке, где

$$\frac{dE(r \leq R)}{dr} = 0.$$

Приходим к уравнению:

$$\frac{1}{3} = \frac{r_{\max}}{2R},$$

отсюда

$$r_{\max} = \frac{2}{3}R; \quad E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}.$$

□

Ответ. 1. $r_{\max} = \dfrac{2}{3}R$; 2. $E_{\max} = \dfrac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$.

Задача 42

Система состоит из шара радиуса R, заряженного сферически-симметрично, и окружающей сферы, заполненной зарядом с объемной плотностью $\rho = \dfrac{\alpha}{r}$, где α — постоянная, r — расстояние от центра шара. Найти заряд шара, при котором модуль напряженности электрического поля вне шара не зависит от r. Чему рана эта напряженность? Диэлектрическая проницаемость всюду равна единице.

Решение. Окружим шар радиуса R шаром радиуса r и запишем теорему Гаусса для этой системы.

$$4\pi r^2 E = \frac{q + \int\limits_R^r \rho(r') 4\pi r'^2\, dr'}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\dfrac{q - 2\pi\alpha R^2}{r^2} + 2\pi\alpha}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Видно, что E не зависит от r при $q = 2\pi\alpha R^2$. Тогда $E = \dfrac{\alpha}{2\varepsilon_0}$. □

Ответ. $q = 2\pi\alpha R^2$; $E = \dfrac{\alpha}{2\varepsilon_0}$.

Задача 43

Бесконечно длинная прямая нить заряжена равномерно с линейной плотностью $\lambda = 0{,}4\,\dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Вычислить разность потенциалов точек *1* и *2*, если точка *2* находится дальше от нити, чем точка *1*, в $\eta = 2$ раза.

Решение.

Способ 1. Мысленно окружим участок нити единичной длины цилиндром радиусом r и запишем теорему Гаусса:

$$2\pi r E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0},$$

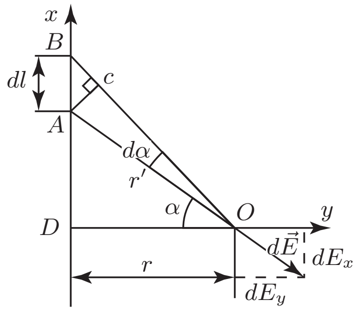


Рис. 27

отсюда

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1}^{r_2} E\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\eta = 5 \text{ кВ}.$$

Способ 2. Элемент нити длиной dl имеет заряд $dQ = \lambda\,dl$ (рис. 27). В произвольной точке O напряженность, создаваемая этим зарядом:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} = \frac{\lambda\,dl}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,.$$

Из треугольника ADO находим:

$$r' = \frac{r}{\cos\alpha}\,.$$

Так как $|AC| = r'\,d\alpha = \dfrac{r\,d\alpha}{\cos\alpha}$, то из треугольника ABC определяем: $dl = \dfrac{AC}{\cos\alpha} = \dfrac{r\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$, с учетом значения r и dl для dE получаем:

$$dE = \frac{\lambda\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r}\,,$$

откуда

$$dE_y = \frac{\lambda\cos\alpha\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r}\,;$$

$$dE_x = \frac{\lambda\sin\alpha\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Интегрируя, имеем:

$$E_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda \cos\alpha\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,;$$

$$E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda \sin\alpha\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0.$$

Впрочем, из соображений симметрии ясно, что $E_x = 0$ и последний интеграл можно не вычислять. Таким образом:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Далее, как и выше.

Способ 3.

$$dE = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + r^2)}\,.$$

Как и раньше, вычисляем только dE_y:

$$dE_y = dE\cos\alpha = \frac{\lambda r\, dx}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

$$E_y = \frac{2\lambda r}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Далее, как и в предыдущих случаях. □

Ответ. $\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1}^{r_2} E\, dr = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\eta = 5$ кВ.

Задача 44

Заряд q распределен равномерно по объему шара радиуса R. Пренебрегая влиянием вещества шара, найти потенциал:

1. В центре шара.
2. Внутри шара, как функцию расстояния r от его центра.

Решение. Будем решать задачу в общем виде. Вспомним определение потенциала как работы электрических сил при переносе единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Эта работа будет складываться из двух слагаемых — работы на пути от данной точки с радиус-вектором r ($r < R$) до границы шара ($r = R$) и от границы до бесконечности. Запишем теорему Гаусса для внутренней области шара.

$$E_{(r\leq R)} 4\pi r^2 = \frac{4\rho\pi r^3}{3\varepsilon_0}\,.$$

Учитывая, что объемная плотность заряда $\rho = \dfrac{3q}{4\pi R^3}$, получаем:

$$E_{(r\leq R)} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,.$$

Для области $r \gg R$ теорема Гаусса имеет вид:

$$E_{(r\geq R)} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда $E_{(r\geq R)} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Интересно отметить, что $E_{(r\geq R)}$ соответствует полю точечного заряда. Общий потенциал:

$$\varphi = \int\limits_r^R E_{(r\leq R)} dr + \int\limits_R^\infty E_{(r\geq R)}\, dr = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right).$$

В центре шара $r = 0$:

$$\varphi_{\text{ц}} = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}\,.$$ □

Ответ. $\varphi_{(r\leq R)} = \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \dfrac{r^2}{3R^2}\right); \quad \varphi_{\text{ц}} = \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

Задача 45

Объемная плотность электрического заряда зависит от расстояния r до его центра, как $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$. Найти:

1. Модуль напряженности электрического поля как функцию r.
2. Значение модуля при $\alpha r^3 \ll 1$ и $\alpha r^3 \gg 1$.

Решение.

1. Вырежем сферу радиуса r с центром в точке $r = 0$ и запишем для нее теорему Гаусса.

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0};$$

$$Q = \rho_0 \int\limits_0^r \exp(-\alpha r'^3) dV = \rho_0 \int\limits_0^r \exp(-\alpha r'^3) 4\pi r'^2 \, dr' =$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{3\alpha}\left[1 - \exp(-\alpha r^3)\right];$$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \alpha r^2}\left[1 - \exp(-\alpha r^3)\right].$$

2. При $\alpha r^3 \ll 1$ раскладываем $\exp(-\alpha r^3)$ в ряд Маклорена и ограничиваемся первыми двумя членами. Получаем:

$$e^{-\alpha r^3} = 1 - \alpha r^3 + o(x);$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 \alpha r^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{\alpha \rho_0 r}{3\varepsilon_0}.$$

При $\alpha r^3 \gg 1$:

$$E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}. \qquad \square$$

Ответ.

$$E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \alpha r^2}\left[1 - \exp(-\alpha r^3)\right];$$

$$E(r) = \frac{\alpha \rho_0 r}{3\varepsilon_0}, \quad \text{при} \quad \alpha r^3 \ll 1;$$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}, \quad \text{при} \quad \alpha r^3 \gg 1.$$

Задача 46

На расстоянии $a = 10$ см от бесконечной проводящей плоскости находится точечный заряд $q = 20$ нКл. Вычислить напряженность E электрического поля в точке A, удаленной от плоскости на расстоянии a и от заряда q на расстоянии $2a$.

Решение. Используя метод зеркального изображения, нарисуем эквивалентную схему задачи с фиксированным за-

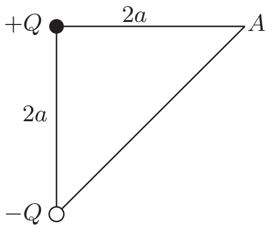


Рис. 28

рядом-изображением q (рис. 28). Далее, используя принцип суперпозиции и теорему косинусов, запишем:

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{4a^2}\,; \qquad E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{8a^2}\,;$$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, так как треугольник $-Q{+}QA$ — равнобедренный. Тогда, используя теорему косинусов, можно записать:

$$E_\text{р} = \sqrt{E_+^2 + E_-^2 - 2|E_+||E_-|\cos\alpha} = \frac{q}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\,\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} = 3{,}32\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}\,.$$

□

Ответ. $E_\text{р} = \dfrac{q}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} = 3{,}32\ \dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

Задача 47

Точечный заряд $Q = +40$ нКл находится на расстоянии $a = 30$ см от бесконечной проводящей плоскости. Какова напряженность E электрического поля в точке A?

Решение. Используя метод зеркальных изображений, нарисуем эквивалентную схему с фиктивным зарядом-изображением $-Q$ (рис. 29). Применяя принцип суперпозиции, вычислим напряженность E в точке A.

$$E_A = E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{4a^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{16a^2} = \\ = \frac{3Q}{64\pi\varepsilon_0 a^2} = 750\ \frac{\text{В}}{\text{м}}\,.$$

□

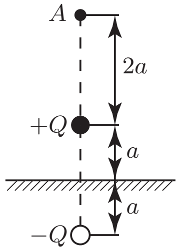


Рис. 29

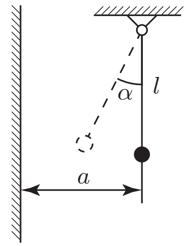


Рис. 30

Ответ. $E_A = \dfrac{3Q}{64\pi\varepsilon_0 a^2} = 750\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$.

Задача 48

Большая металлическая пластина расположена в вертикальной плоскости и соединена с землей (рис. 30). На расстоянии $a = 10$ см от пластины находится неподвижная точка, к которой на нити длиной $l = 12$ см подвешен маленький шарик массой $m = 0{,}1$ г. При сообщении шарику заряда Q он притянулся к пластине, в результате чего нить отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 30°$. Найти заряд Q шарика.

Решение. В состоянии равновесия кулоновская сила притяжения между зарядом и его фиктивным изображением равна по величине и противоположна по направлению горизонтальной составляющей силы тяжести.

Расстояние между шариком после придания ему заряда Q и его фиктивным изображением

$$R = 2(a - l\sin\alpha);$$

$$F_{\text{Кул}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0[2(a - l\sin\alpha)]^2};$$

$$F_{\text{гор. тяж}} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0[2(a - l\sin\alpha)]^2} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

откуда $Q = 2(a - l\sin\alpha)\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 20$ нКл. □

Ответ. $Q = 2(a - l\sin\alpha)\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 20$ нКл.

Задача 49

Небольшой шарик висит над горизонтальной проводящей плоскостью на изолирующей упругой нити жесткости κ. После того как шарик зарядили, он опустился на x см, и его расстояние от проводящей плоскости стало равно l. Найти заряд шарика.

Решение.

Способ 1. После того как шарик зарядили, сила упругости $F_{\text{упр}} = -\kappa x$ будет равна по модулю и противоположна по знаку кулоновской силе притяжения между зарядом q и фиктивным зарядом-изображением $-q$, находящимися на расстоянии $2l$ друг от друга. Таким образом, можем записать: $|F_{\text{упр}}| = |F_{\text{Кул}}|$, или $\kappa x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{4l^2}$, откуда

$$q = 4l\sqrt{\pi\varepsilon_0\kappa x}.$$

Способ 2. До зарядки шарика условие равновесия можно записать в виде $mg = \kappa X$, где X — первоначальное растяжение пружины m — масса шарика. После зарядки, кроме силы тяжести, на шарик будет действовать еще сила электростатического притяжения со стороны фиктивного заряда-изображения. Условие равновесия приобретает вид:

$$mg + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2} = \kappa(X + x).$$

Решая совместно оба уравнения равновесия, получаем: $q = 4l\sqrt{\pi\varepsilon_0\kappa x}$. □

Ответ. $q = 4l\sqrt{\pi\varepsilon_0\kappa x}$.

Задача 50

Электрон вылетел по нормали с плоской поверхности проводника в вакуум, где создано однородное ускоряющее электрическое поле с напряженностью $E = 100\,\dfrac{\text{В}}{\text{м}}$. Имея в виду силы электрического взаимодействия между электроном и его фиктивным изображением, найти, на каком расстоянии l от поверхности проводника скорость электрона минимальна.

Решение. Минимальное значение скорости будет на расстоянии $l_{\min}$, которое соответствует условию

$$\overrightarrow{F}_{\text{эл.ст}} - \overrightarrow{F}_{\text{изобр}} = 0,$$

где $\overrightarrow{F}_{\text{эл.ст}}$ — сила, действующая на электрон в постоянном электрическом поле, $\overrightarrow{F}_{\text{изобр}}$ — сила взаимодействия с фиктивным зарядом-изображением. При прохождении расстояния $l_{\min}$ скорость начнет возрастать, так как $\overrightarrow{F}_{\text{эл.ст}}$ все время остается постоянной, а $\overrightarrow{F}_{\text{изобр}}$ продолжает стремиться к нулю:

$$eE - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 4l_{\min}^2} = 0,$$

где $2l_{\min}$ — расстояние между электроном и фиктивным зарядом-изображением. Отсюда $l_{\min} = \sqrt{\dfrac{e}{16\pi\varepsilon_0 E}} = 6$ мкм. □

Ответ. $l_{\min} = \sqrt{\dfrac{e}{16\pi\varepsilon_0 E}} = 6$ мкм.

Задача 51

Точечный заряд $q = 100$ мкКл находится от проводящей плоскости на расстоянии $l = 1{,}5$ см. Какую работу надо совершить против электрических сил, чтобы медленно удалить этот заряд на очень большое расстояние от плоскости?

Решение. Кулоновская сила взаимодействия между зарядом q и зарядом-изображением $-q$ определяется как

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2l)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2}\,;$$

$$dA = F\,dl,$$

откуда

$$A = -\int\limits_l^\infty \frac{q^2\,dl}{16\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l} \approx 0{,}15 \text{ Дж}. \qquad \square$$

Ответ. $A = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l} \approx 0{,}15$ Дж.

Задача 52

Два точечных заряда q и $-q$ расположены на расстоянии l друг от друга и на одинаковом расстоянии $\frac{l}{2}$ от проводящей плоскости с одной стороны от нее. Найти модуль электрической силы, действующей на каждый заряд.

Решение. Задача сводится к решению задачи взаимодействия четырех зарядов (рис. 31). В силу симметрии все силы,

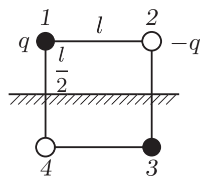


Рис. 31

действующие на каждый заряд, равны. Рассмотрим заряд *2*. Со стороны зарядов *1* и *3* на него действуют силы притяжения:

$$F_{\text{пр}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\,.$$

По теореме Пифагора:

$$F_{\text{пр.рез}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\sqrt{2}.$$

Между зарядами *2* и *4* действует сила отталкивания:

$$l_0 = \sqrt{2}l.$$

$$F_{\text{от}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 l^2}\,;$$

$$F_{\text{рез}} = F_{\text{пр.рез}} - F_{\text{от}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 l^2}\,(2\sqrt{2} - 1). \quad \square$$

Ответ. $F_{\text{рез}} = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 l^2}\,(2\sqrt{2} - 1).$

Задача 53

Три разноименных точечных заряда расположены в вершинах квадрата с диагональю $l = 50$ см, как показано на рис. 32, *a*, где точка O — центр квадрата, AOB — прямой угол, образованный двумя проводящими полуплоскостями. Найти силу, действующую на заряд $-q$, если $q = 11$ мкКл.

Решение. Необходимо подобрать заряд или систему точечных зарядов, чтобы эквипотенциальная поверхность с $\varphi = 0$ совпала бы с проводящими полуплоскостями, потенциал которых равен нулю, так как они уходят в бесконечность (рис. 32, *б*). В нашем случае достаточно одного фиктивного заряда-изображения, расположенного в вершине квадрата. Запишем равнодействующую силу $\overrightarrow{F}_\text{р}$, действующую на заряд $-q$ со стороны двух зарядов q и фиктивного заряда $-q$:

$$\overrightarrow{F}_\text{р} = \overrightarrow{F}_+ + \overrightarrow{F}_+ - \overrightarrow{F}_-, \tag{88}$$

где $\overrightarrow{F}_+$ — сила притяжения между положительным и отрицательным зарядами; $\overrightarrow{F}_-$ — сила отталкивания между отрицательным зарядом и фиктивным зарядом-отражением. Сторона квадрата $a = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$. Перепишем уравнение (88) в скалярном виде и вычислим $F_\text{р}$.

$$F_\text{р} = \frac{\sqrt{8}q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\,(2\sqrt{2} - 1) = 8\ \text{Н}. \qquad \square$$

Ответ. $F_\text{р} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\,(2\sqrt{2} - 1) = 8$ Н.

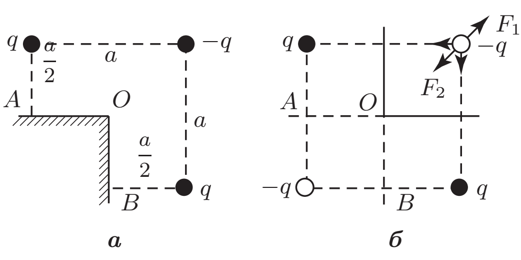


Рис. 32

Задача 54

Точечный заряд $q = 2$ мкКл находится между двумя проводящими взаимно-перпендикулярными полуплоскостями (рис. 33, *а*). Расстояние от заряда до каждой полуплоскости $l = 5$ см. Найти модуль силы, действующей на заряд.

Решение. В данном случае условие эквипотенциальности двух проводящих полуплоскостей обеспечат три фиктивных заряда-изображения (рис. 33, *б*). Как и в предыдущей задаче, запишем векторное и скалярное уравнения для равнодействующей силы, действующей на заряд q:

$$\vec{F}_{\text{р}} = \vec{F}_+ + \vec{F}_+ - \vec{F}_-,$$

где обозначения сил приняты как и в предыдущей задаче. В скалярном виде выражение для $F_{\text{р}}$ с учетом $L = \sqrt{8}l$, где L — диагональ квадрата, принимает следующий вид:

$$F_{\text{р}} = \frac{\sqrt{2}q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2} - \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 l^2}\,(2\sqrt{2} - 1) = 3{,}3\ \text{Н}. \qquad \square$$

Ответ. $F_{\text{р}} = \dfrac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 l^2}\,(2\sqrt{2} - 1) = 3{,}3$ Н.

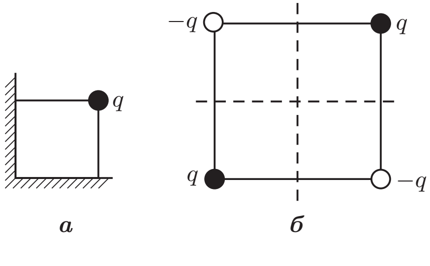


Рис. 33

Задача 55

Точечный диполь с электрическим моментом $\overrightarrow{P}$ находится на расстоянии l от проводящей плоскости. Найти силу, действующую на диполь, если вектор $\overrightarrow{P}$ перпендикулярен плоскости.

Решение. Модуль силы, действующей на диполь, согласно (16) определяется как

$$F = P\left|\frac{\partial E}{\partial l}\right|. \tag{89}$$

Будем считать, что диполь P находится в поле диполя $P_{\text{и}}$, где $P_{\text{и}}$ — индуцированный диполь с электрическим моментом $P_{\text{и}}$, который создает вдоль общей оси напряженность

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2P_{\text{и}}}{r^3}\,,$$

откуда

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\,\frac{3P_{\text{и}}}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\,. \tag{90}$$

Подставляя (90) в (89) и учитывая, что $P = P_n$ и $r = 2l$, получаем:

$$F = \frac{3P^2}{32\pi l^4\varepsilon_0}. \qquad \square$$

Ответ. $F = \dfrac{3P^2}{32\pi l^4\varepsilon_0}$.

Задача 56

Точечные заряды q_1 и q_2 находятся на расстоянии l друг от друга. Определить силы F_1 и F_2, которые будут действовать на эти заряды после того, как посредине между ними будет расположена бесконечная металлическая пластина толщиной $\dfrac{l}{2}$.

Решение. До внесения металлической пластины между зарядами действует кулоновская сила, обусловленная взаимодействием зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии l друг от друга. После внесения металлической пластины каждый из зарядов будет взаимодействовать с индуцированными на пластине зарядами противоположного знака, а поскольку заряды разные, то и силы взаимодействия также разные и определяются следующими выражениями:

$$F_1 = \frac{q_1^2}{\pi\varepsilon_0 l^2}\,; \quad F_2 = \frac{q_2^2}{\pi\varepsilon_0 l^2}\,.$$

□

Ответ. $F_1 = \dfrac{q_1^2}{\pi\varepsilon_0 l^2}$; $F_2 = \dfrac{q_2^2}{\pi\varepsilon_0 l^2}$.

Задача 57

Точечный заряд q находится на расстоянии l от проводящей плоскости. Определить поверхностную плотность зарядов, индуцированных на плоскости, как функцию расстояния r от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость.

Решение. Опять используем метод зеркального изображения. Плоскость S является эквипотенциалью с $\varphi_s = 0$ (рис. 34). Нормальная составляющая напряженности электрического поля:

$$E_n = -E\cos\alpha = -\frac{q\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 (l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Здесь знак «$-$» связан с тем, что нормальная составляющая направлена к поверхности (внутрь ее). Результирующая составляющая $E_{\text{р}} = 2E_n$, так как зеркальный заряд-изображение дает точно такую же нормальную составляющую. Получаем:

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{\text{р}} = -\frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

□

Ответ. $\sigma = -\dfrac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Задача 58

Очень длинная нить расположена перпендикулярно проводящей плоскости и не доходит до нее на расстояние l. Нить заряжена равномерно с линейной плотностью λ. Пусть точка O — след нити на плоскости. Найти поверхностную плотность заряда на плоскости:

1. В точке O.
2. В зависимости от расстояния r до точки O (рис. 35).

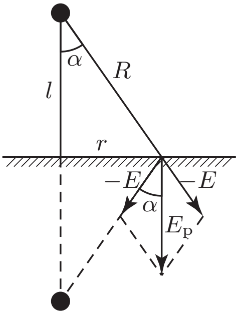


Рис. 34

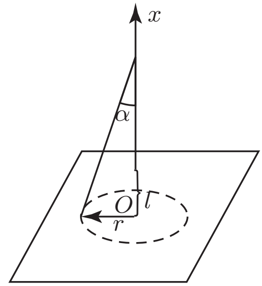


Рис. 35

Решение.

1. Как и в предыдущей задаче, используем метод зеркального изображения. Каждый элемент нити dx создает в точке O поле dE. Имеем:
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dx}{x^2},$$
откуда:
$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_l^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$
С учетом «зеркального» заряда, а также $\sigma = \varepsilon_0 E_p$, получаем:
$$E_p = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 l}; \qquad \sigma = \frac{\lambda}{2\pi l}.$$

2. Запишем:
$$dE_n = dE\cos\alpha; \tag{91}$$
$$dE = \frac{\lambda\,dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)}; \tag{92}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}. \tag{93}$$
Подставляя (92), (93) в (91), получаем
$$E_n = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_l^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+r^2)^3}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+l^2}}.$$

Как и в предыдущем случае, учитывая «зеркальное» изображение нити, получаем:

$$E_{\text{р}} = 2E_n = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+l^2}}\,;$$

$$\sigma(r) = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{r^2+l^2}}\,. \qquad \square$$

Ответ. $\sigma = \dfrac{\lambda}{2\pi l}$; $\sigma(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\sqrt{r^2+l^2}}$.

Задача 59

Тонкая бесконечно длинная нить имеет заряд λ на единицу длины и расположена параллельно проводящей плоскости. Расстояние между нитью и плоскостью равно l. Найти:

1. Модуль силы, действующей на единицу длины нити;
2. Распределение поверхностной плотности заряда $\sigma(x)$ на плоскости (здесь x — расстояние от прямой до плоскости, где $\sigma = \max$).

Решение.

1. Воспользуемся теоремой Гаусса для расчета потока E через боковую поверхность цилиндра радиуса r и высотой h, ось которого совпадает с нитью:

$$2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}\,,$$

отсюда

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,. \tag{94}$$

Учитывая, что $F = qE$, $q = \lambda$ для единичной длины нити и $r = 2l$, запишем:

$$F = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\,.$$

Этот результат можно получить другим способом. На единичный элемент нити с зарядом λ со стороны элемента dx «зеркальной» нити действует сила:

$$dF = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dx}{x^2}\,,$$

откуда

$$F = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{2l}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\,.$$

2. Так как напряженность около плоскости перпендикулярна ей, то, учитывая (94), запишем:

$$E_n(x) = 2E\cos\alpha = \frac{\lambda l}{\pi\varepsilon_0(x^2+l^2)}\,,$$

отсюда

$$\sigma(x) = \varepsilon_0 E_n = \frac{\lambda l}{\pi(x^2+l^2)}\,. \qquad \square$$

Ответ. $F = \dfrac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 l}$; $\quad \sigma(x) = \dfrac{\lambda l}{\pi\varepsilon_0(x^2+l^2)}$.

Задача 60

Внутри шара, заряженного равномерно с объемной плотностью ρ, имеется сферическая полость. Центр полости смещен относительно центра шара на расстояние $\overrightarrow{a}$. Пренебрегая влиянием вещества шара, найти напряженность E внутри полости.

Решение. Воспользуемся методом наложения. Предположим сначала, что большая сфера заполнена «положительной электрической жидкостью» с плотностью ρ (рис. 36). Воспользовавшись результатом задачи 44, вычислим $E(r_+)$. Затем на место полости мысленно наложим сферу с «отрицательной электрической жидкостью» с плотностью $-\rho$ и вычислим $E(r_-)$. Теперь воспользуемся принципом суперпозиции полей для произвольной точки A, находящейся внутри полости:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(r_+) + \overrightarrow{E}(r_-) = \rho\left(\frac{\overrightarrow{r}_+ - \overrightarrow{r}_-}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho\overrightarrow{a}}{3\varepsilon_0}\,. \qquad \square$$

Ответ. $\quad \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho\overrightarrow{a}}{3\varepsilon_0}$.

Задача 61

Найти напряженность E электрического поля в области пересечения двух шаров, равномерно заполненных разноименными по знаку зарядами с объемной плотностью ρ и $-\rho$, если расстояние между центрами шаров равно $\overrightarrow{a}$ (рис. 37).

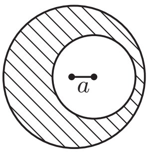


Рис. 36

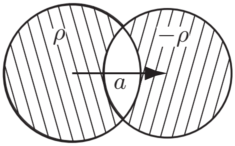


Рис. 37

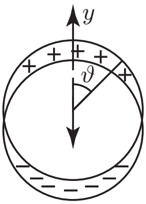


Рис. 38

Решение. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям предыдущей задачи, получаем абсолютно такой же результат:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \rho\left(\frac{\vec{r}_+ - \vec{r}_-}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}.$$

Результат не очевидный, так как $\vec{E}$ не зависит ни от радиуса шаров, ни от их взаимного расположения. □

Ответ. $\vec{E} = \dfrac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}$.

Задача 62

Заряд распределен по поверхности сферы с плотностью $\sigma = \sigma_0\cos\vartheta$, где σ_0 — постоянная, ϑ — полярный угол. Найти напряженность $\vec{E}$ внутри сферы.

Решение. Представляем сферу с зарядом, распределенным по поверхности, в виде двух одинаковых сфер с «положительной электрической оболочкой» и «отрицательной электрической оболочкой» одинаковой плотности и наложенных друг на друга с очень малым смещением $\vec{a}$ (рис. 38). Тогда, переходя от объемной к поверхностной плотности, с учетом $\sigma = \rho a\cos\vartheta = \sigma_0\cos\vartheta$ и результата решения двух предыдущих задач, можно записать:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\vec{j},$$

где $\vec{j}$ — орт оси y. □

Ответ. $\vec{E} = -\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\vec{j}$.

Глава 3

ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Поляризация, диэлектрическая проницаемость вещества, теорема Гаусса для векторов $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{D}$, преломление линий $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{D}$ на границе диэлектриков, электрическая энергия системы зарядов

Как мы выяснили выше, заряды в проводниках под действием электрического поля выстраиваются так, чтобы поле внутри стало равно нулю. Диэлектрики — вещества, не проводящие электричество; в них, в отличие от металлов и электролитов, нет зарядов, способных переносить электрический ток.

Диэлектрики построены либо из нейтральных зарядов, либо из заряженных ионов, закрепленных в узлах кристаллической решетки. Мы будем рассматривать только диэлектрики, построенные из нейтральных молекул. Такие диэлектрики в природе существуют в двух видах. У диэлектриков первого типа которых центры масс положительного и отрицательного зарядов не совпадают даже при отсутствии внешнего поля. Такие диэлектрики называются полярными. У диэлектриков второго типа каждый атом молекулы имеет равномерное распределение электронов вокруг ядра. Диэлектрики первого типа изначально представляют собой диполь, а диэлектрики второго типа становятся диполями под действием внешнего поля, так как в таких диэлектриках под действием внешнего поля ядро и электроны смещаются в противоположные стороны.

Под воздействием внешнего электрического поля заряды, входящие в состав диэлектрика, не срываются полем со своих мест, а лишь несколько смещаются из положения равновесия в некоторые новые равновесные положения.

Равнодействующая электрических сил, действующих на нейтральную молекулу в однородном ($E = \text{const}$) электрическом поле, очевидно, равна нулю; поэтому центр тяжести молекулы диэлектрика в однородном поле остается неподвижным. Однако электрические частицы противоположных знаков, входящие в состав молекул диэлектрика, должны под воздействием сил поля смещаться в противоположные стороны — молекула деформируется. Поэтому, чтобы определить воздействие поля на диэлектрик, нужно прежде всего найти удобную количественную характеристику распределения зарядов в нейтральной молекуле. Такой характеристикой любой, в целом нейтральной, системы зарядов может служить **вектор электрического момента этой системы** $\overrightarrow{P}$, определяемый равенством

$$\overrightarrow{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \overrightarrow{P}_i.$$

Вектор $\overrightarrow{P}$ называют **поляризованностью диэлектрика**. При наложении внешнего поля на объем ΔV диэлектрика в нем возникает поляризация, при этом положительный заряд $\rho'_+ \Delta V$ смещается относительно отрицательного заряда на величину $\vec{l}$, и эти заряды приобретут дипольный момент $\Delta \overrightarrow{P} = \rho'_+ \Delta V \overrightarrow{l}$. Для единицы объема

$$\overrightarrow{P} = \rho'_+ \overrightarrow{l}.$$

Экспериментально установлено, что

$$\overrightarrow{P} = \varkappa \varepsilon_0 \overrightarrow{E}, \tag{95}$$

где $\varkappa$ — безразмерная величина, называемая диэлектрической восприимчивостью вещества, $\overrightarrow{E}$ — напряженность поля в диэлектрике.

При наложении на диэлектрик внешнего поля $\overrightarrow{E}_0$ на его молекулы будут действовать моменты сил, стараясь развернуть их вдоль линий поля, и, хотя баланс между положительными и отрицательными зарядами сохранится, на противоположных поверхностях диэлектрика возникнут слои разноименных зарядов, которые называются **поляризованными, связанными или поверхностными**. Они создадут свое собственное поле $\overrightarrow{E}'$, направленное противоположно $\overrightarrow{E}_0$ (рис. 39). Таким обра-

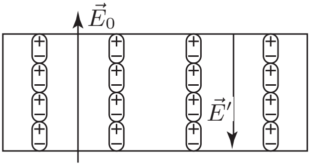


Рис. 39

зом, поле внутри диэлектрика:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 + \overrightarrow{E}', \quad \text{или в скалярном виде} \quad E = E_0 - E'. \qquad (96)$$

Очевидно, что поле $\overrightarrow{E} < \overrightarrow{E}_0$. Отношение $\varepsilon = \dfrac{E_0}{E}$ зависит от диэлектрических свойств материалов и называется **диэлектрической проницаемостью вещества**; оно показывает, во сколько раз величина напряженности электрического поля внутри однородного диэлектрика меньше величины напряженности внешнего поля. Заряды, которые не входят в состав молекул диэлектрика, называются **сторонними**. Они могут находиться как внутри, так и вне диэлектрика.

Теорема Гаусса для поля вектора $\overrightarrow{P}$:

$$\oint \overrightarrow{P} d\overrightarrow{S} = -q_{\text{внутр. связ.}}. \qquad (97)$$

Физический смысл теоремы заключается в следующем. При наложении на диэлектрик внешнего электрического поля диэлектрик, как мы знаем, начинает поляризоваться. Левая часть выражения (97) представляет собой весь заряд, вышедший на поверхность S, а правая часть равна оставшемуся внутри связанному заряду с обратным знаком.

Можно показать, что объемная плотность избыточных связанных зарядов внутри диэлектрика будет равна нулю при одновременном выполнении двух условий:

- диэлектрик должен быть однородным;
- внутри него не должно быть сторонних зарядов.

Такой изотропный диэлектрик произвольной формы, помещенный в электрическое поле любой конфигурации, при поляризации приобретет только поверхностные связанные заряды, объемные же избыточные связанные заряды по всему объему будут равны нулю. Нормальная составляющая вектора $\overrightarrow{P}$ на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков испытывает разрыв, величина которого зависит от плотности поверхностного заряда σ':

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'. \tag{98}$$

Если среда 2 — вакуум, то $P_{2n} = 0$;

$$P_{1n} = \sigma'. \tag{99}$$

С учетом (95):

$$\sigma' = \varkappa\varepsilon_0 E_n, \tag{100}$$

где E_n — проекция вектора $\overrightarrow{E}$ внутри диэлектрика, вблизи поверхности, на внешнюю нормаль. **Связь между напряженностью $\overrightarrow{E}$, поляризованностью $\overrightarrow{P}$ и сторонними зарядами** выражается теоремой Гаусса для поля вектора $\overrightarrow{D}$:

$$\oint \overrightarrow{D}\, d\overrightarrow{S} = q_{\text{внутр. стор.}},$$

где

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon_0 \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}; \tag{101}$$

$q_{\text{внутр. стор.}}$ — алгебраическая сумма сторонних зарядов, охватываемых поверхностью S.

Связь между векторами $\overrightarrow{D}$ и $\overrightarrow{E}$ в случае изотропных диэлектриков поляризованностью $\overrightarrow{P} = \varkappa\varepsilon_0 \overrightarrow{E}$ имеет вид

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \overrightarrow{E}, \tag{102}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость вещества.

Физический смысл ε:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}. \tag{103}$$

Из выражения (103) видно, что ε показывает, во сколько раз ослабляется электрическое поле за счет диэлектрика.

Отличие вектора $\overrightarrow{E}$ от $\overrightarrow{D}$

Линии вектора $\overrightarrow{E}$ могут начинаться и заканчиваться как **на сторонних, так и на связанных зарядах**, источниками и стоками вектора $\overrightarrow{E}$ являются **любые** заряды. Вектор $\overrightarrow{D}$ введен для формализации расчета и связывает через теорему Гаусса поток вектора $\vec{D}$ через произвольную поверхность S с алгебраической суммой **сторонних** зарядов, находящихся внутри этой поверхности. Истоками и стоками $\vec{D}$ служат **сторонние заряды**. Важно уяснить, что поле вектора $\vec{D}$ зависит не только от сторонних, но и от связанных зарядов (через соотношение $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$), и что вектор $\vec{D}$ не имеет физического смысла, а введен лишь для формализации расчета и «работает» лишь в ограниченном числе симметричных случаев.

Условия на границе

Пусть на границе раздела двух диэлектриков *1* и *2* находится поверхностный сторонний заряд с плотностью σ. Тогда $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, т. е. тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ при переходе через границу не изменяется.

Для вектора $\vec{D}$ можно записать $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$, т. е. нормальная составляющая $\vec{D}$ претерпевает скачок. Если же сторонние заряды на границе отсутствуют, то при переходе границы E_τ и D_n не изменяются, а E_n и D_τ претерпевают скачок. Еще раз подчеркнем, что E_τ не изменяется в обоих случаях.

Преломление линий $\vec{E}$ и $\vec{D}$

Если сторонних зарядов на границе раздела нет, то (рис. 41):

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\,.$$

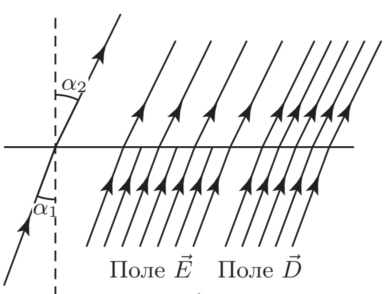


Рис. 40

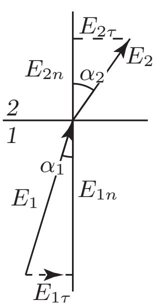


Рис. 41

Электроемкость, конденсаторы

Практически во всех изделиях электронной техники, компьютерных системах и т. п. используются такие устройства, как конденсаторы, способные накапливать в себе большое количество зарядов без заметного изменения потенциала. В простейшем случае конденсатор представляет собой две плоскопараллельные металлические пластины, заряженные равными, но противоположными зарядами Q. Промежуток между пластинами величиной d заполнен диэлектриком проницаемостью ε. Поскольку заряды разноименные, то они будут притягиваться и равномерно распределяться по поверхности пластин с плотностью $+\sigma$ и $-\sigma$ соответственно, создавая между пластинами поле $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$.

Тогда разность потенциалов между пластинами:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = U = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{dQ}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

где S — площадь пластин.

Запишем это выражение в виде:

$$Q = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} U = CU,$$

где величина $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ называется емкостью плоского конденсатора.

Соединение конденсаторов

Опыт показывает, что между зарядом какого-либо проводника Q и его потенциалом существует соотношение $Q = C\Delta\varphi$.

При параллельном соединении одна из обкладок каждого конденсатора имеет потенциал φ_1, а другая φ_2. Следовательно, на каждой из двух систем обкладок накапливается суммарный заряд:

$$\begin{aligned} &Q = \sum Q_k = \sum C_k(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum C_k; \\ &C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \sum C_k. \end{aligned} \tag{104}$$

При последовательном соединении N конденсаторов вторая обкладка первого конденсатора образует с первой обкладкой второго единый проводник, на котором при подаче напряжения на батарею возникают индуцированные заряды такой же величины, как заряд на первой обкладке первого и второй обкладке N-го конденсатора. То же самое справедливо для второй обкладки второго и первой обкладки третьего конденсатора и т. д. Следовательно, для всех конденсаторов, включенных последовательно, характерна одинаковая величина заряда q на обкладках. Тогда:

$$U_k = \frac{q}{C_k}\,.$$

Сумма этих напряжений равна разности потенциалов, приложенной к батарее:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sum U_k = \sum \frac{q}{C_k} = q \sum \frac{1}{C_k},$$

откуда

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_k}. \tag{105}$$

Электрическая энергия системы зарядов

Работа, необходимая для сближения двух зарядов с очень большого расстояния до промежутка r_{12}, равна, как следует из определения потенциала, $\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$.

Из принципа суперпозиции следует, что при большом количестве зарядов полная энергия системы есть сумма величин, определяемых формулой, выражающей взаимодействие каждой пары зарядов по отдельности. Если q_1 и q_2 — какие-то два из множества зарядов, расстояние между которыми r_{ij}, то энергия взаимодействия этой пары равна $\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$.

Полная электростатическая энергия W равна сумме энергий всех пар зарядов (N):

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i, \tag{106}$$

где q_i — i-й заряд системы; φ_i — потенциал, создаваемый в месте нахождения i-го заряда всеми остальными зарядами системы.

Рекомендации по решению задач

1. Если в задаче требуется найти связанные заряды или поверхностную плотность связанных зарядов на границе раздела двух сред (задача 64), то для решения задач подобного типа пользуйтесь теоремой Гаусса для вектора $\overrightarrow{P}$:
$$\oint \overrightarrow{P}\overrightarrow{dS} = -q_{\text{вн}}$$
и соотношением $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$.
Часто считают, что поле вектора $\overrightarrow{P}$ зависит только от связанных зарядов. На самом деле оно зависит как от связанных, так и от сторонних, поскольку они связаны соотношением $\overrightarrow{P} = \varkappa\varepsilon_0\overrightarrow{E}$. Связанные заряды определяют лишь поток вектора $\overrightarrow{P}$ через замкнутую поверхность S, охватывающую эти заряды.
2. Если в условии задачи дана величина только стороннего заряда (задача 65), теорему Гаусса для вектора $\overrightarrow{E}$ применять нельзя, даже в симметричном случае, так как поле $\overrightarrow{E}$ зависит от связанных зарядов, а они в свою очередь зависят от поля $\overrightarrow{E}$. В таких случаях применяется теорема Гаусса для вектора $\overrightarrow{D}$:
$$\oint \overrightarrow{D}\overrightarrow{dS} = -q_{\text{внутр.стор.}}, \quad \text{где} \quad \overrightarrow{D} = \varepsilon_0\overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}.$$
3. При решении задач на расчет емкости системы конденсаторов задача упрощается, если увидеть в системе скрытую симметрию, приводящую к нулевой разности потенциалов на обкладках конденсатора (задача 70), после чего этот конденсатор может быть изъят из системы, а полученная емкость легко вычислена.
4. В задачах, где требуется определить емкость конденсатора, когда ε постоянна либо меняется по какому-то закону $\varepsilon = f(x)$, можно рекомендовать следующий алгоритм — мысленно сообщая одной из обкладок заряд q и применяя теорему Гаусса, получаем выражения для напряжен-

ности поля:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 f(x) S}\,; \tag{107}$$

вычисляем $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \int\limits_a^b E\,dx = \frac{q}{\varepsilon_0 S}\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)}. \tag{108}$$

Пределы интегрирования определяются конфигурацией конденсатора. В случае плоского конденсатора $a = 0$; $b = d$, где d — расстояние между пластинами; в случае сферического конденсатора $a = r_1$; $b = r_2$ и т. д. Затем по формуле $C = \dfrac{q}{\Delta\varphi}$ вычисляем емкость.

Задача 63

Точечный сторонний заряд q находится в центре шара из однородного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти поляризованность диэлектрика $\overrightarrow{P}$ как функцию радиус-вектора $\overrightarrow{r}$ относительно центра шара, а также связанный заряд q' внутри сферы, радиус которой меньше радиуса шара.

Решение. Применим теорему Гаусса для электрической индукции D. Имеем: $4\pi r^2 D = q$, откуда $D = \dfrac{q}{4\pi r^2}$, с учетом (101):

$$P = D - \varepsilon_0 E = \frac{q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{q(\varepsilon - 1)}{4\pi r^2 \varepsilon}\,,$$

а также

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\,.$$

Связанный заряд найдем, используя теорему Гаусса для вектора $\overrightarrow{P}$:

$$\oint \overrightarrow{P}\,d\overrightarrow{s} = \frac{q(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} = -q'. \qquad \square$$

Ответ. $P = \dfrac{q(\varepsilon - 1)}{4\pi r^2 \varepsilon}$; $q' = -\dfrac{q(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}$.

Задача 64

Точечный сторонний заряд q находится в центре диэлектрического шара радиуса a с проницаемостью ε_1. Шар окружен безграничным диэлектриком с проницаемостью ε_2. Найти поверхностную плотность связанных зарядов на границе раздела этих диэлектриков.

Решение. В предыдущей задаче, применяя теорему Гаусса для вектора $\overrightarrow{P}$, мы показали, что

$$\overrightarrow{P_1} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}\,\frac{q}{4\pi r^2}\,; \quad \overrightarrow{P_2} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}\,\frac{q}{4\pi r^2}\,.$$

Согласно (98) поверхностная плотность связанного заряда определяется скачком поляризованности при $r = a$:

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n} = \frac{q}{4\pi a^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \qquad \square$$

Ответ. $\sigma' = \dfrac{q}{4\pi a^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$.

Задача 65

Бесконечно большая пластина из однородного диэлектрика с проницаемостью ε заряжена равномерно сторонним зарядом с объемной плотностью ρ. Толщина пластины $2d$. Найти:

1. Модуль напряженности электрического поля и потенциал как функцию расстояния l от середины пластины (потенциал в середине пластины $\varphi = 0$); взяв ось x перпендикулярно пластине, изобразить примерные графики зависимостей проекции $E_x(x)$ и потенциала $\varphi(x)$.
2. Объемную и поверхностную плотности связанных зарядов.

Решение.

1. Для нахождения $E(l)$ воспользуемся теоремой Гаусса для вектора $\overrightarrow{D}$. Выберем замкнутую поверхность в виде цилиндра с площадью основания S, параллельного плоскостям пластины, и высотой $2l$ $(l < d)$:

$$\oint D\,dS = 2\rho S l, \quad 2SD = 2\rho S l.$$

Так как $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, то

$$E(l < d) = \frac{\rho l}{\varepsilon\varepsilon_0}\,. \tag{109}$$

Для вычисления $E(l > d)$ возьмем цилиндр с $l > d$. Тогда теорема Гаусса, с учетом $\varepsilon = 1$ для вакуума, примет вид:

$$2SE(l > d) = \frac{\rho 2\,Sd}{\varepsilon_0}\,,$$

откуда

$$E(l \geq d) = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}\,, \tag{110}$$

$\varphi = -\int\limits_0^l E(l')\,dl'$; подставляя значение E для обоих случаев, получаем:

$$\varphi(l \leq d) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_0^l E(l')dl' = -\frac{\rho l'^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}\Bigg|_0^l = -\frac{\rho l^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}\,.$$

$$\varphi(l \geq d) = \varphi(l = d) + \varphi(l > d) =$$

$$= -\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} - \int\limits_d^l E(l')dl' = -\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} - \frac{\rho d}{\varepsilon_0}\,l'\Bigg|_d^l =$$

$$= -\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} - \frac{\rho d l}{\varepsilon_0} + \frac{\rho d^2}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2\varepsilon} + l - d\right).$$

Видно, что при $l = d$ значения потенциалов совпадают. На рис. 42 изображены зависимости проекции $E_x(x)$ и потенциала $\varphi(x)$.

2. Согласно (99) и (100)

$$\sigma' = P_n = \varkappa\varepsilon_0 E_n,$$

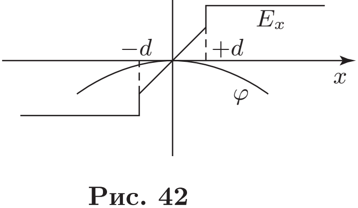


Рис. 42

где $\varkappa = \varepsilon - 1$. Тогда $\sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_n$. Согласно (109) при $l = d$

$$\sigma' = \frac{(\varepsilon - 1)\rho d}{\varepsilon}.$$

Для определения объемной плотности связанного заряда ρ' воспользуемся соотношением $\nabla \overrightarrow{P} = -\rho'$, которое в нашем простейшем случае будет иметь вид:

$$\rho' = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\rho x\right) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\rho,$$

где ρ' — объемная плотность связанного заряда. □

Ответ. $E(l < d) = \dfrac{\rho d}{\varepsilon\varepsilon_0}$; $E(l \geq d) = \dfrac{\rho d}{\varepsilon_0}$;

$$\varphi(l \leq d) = -\frac{\rho l^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}\,;\ \varphi(l \geq d) = -\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2\varepsilon} + l - d\right);$$

$$\rho' = -\frac{\rho(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\,; \qquad \sigma' = \frac{\rho d(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}.$$

Задача 66

У плоской поверхности однородного диэлектрика с проницаемостью ε напряженность электрического поля в вакууме равна E_0, причем вектор $\overrightarrow{E}_0$ составляет угол ϑ с нормалью к поверхности диэлектрика (рис. 43). Считая поле внутри и вне диэлектрика однородным, найти:

1. Поток вектора E через сферу радиуса R с центром на поверхности диэлектрика.
2. Циркуляцию вектора $\overrightarrow{D}$ по контуру Γ длины l, плоскость которого перпендикулярна поверхности диэлектрика и параллельна вектору $\overrightarrow{E}_0$.

Решение.

1. Воспользовавшись соотношениями

$$\overrightarrow{D}_{1n} = \overrightarrow{D}_{2n};$$

$$\overrightarrow{E}_n = \frac{\overrightarrow{D}_n}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\overrightarrow{E}_{0n}}{\varepsilon} = \left(\frac{\overrightarrow{E}_0}{\varepsilon}\right)\cos\vartheta;$$

$$\overrightarrow{E}_{0n} = \overrightarrow{E}_0\cos\vartheta,$$

рассчитываем поток вектора E через сферу радиуса R с центром на поверхности диэлектрика:

$$\oint E\,dS = E_0\pi R^2\cos\vartheta\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right),$$

где $\overrightarrow{E}_n$ — нормальная составляющая $\overrightarrow{E}$ в диэлектрике; $\overrightarrow{E}_{0n}$ — нормальная составляющая $\overrightarrow{E}_0$ в вакууме.

2. Обозначим $\overrightarrow{D}_\text{в}$ — величина вектора $\overrightarrow{D}$ в вакууме, $\overrightarrow{D}_\text{д}$ — величина вектора $\overrightarrow{D}$ в диэлектрике. Тогда, учитывая $D_\text{в} = -\varepsilon_0 E_0\sin\vartheta$:

$$D_\text{д} = \varepsilon\varepsilon_0 E_0 l\sin\vartheta;$$

$$\oint \overrightarrow{D}\,d\overrightarrow{r} = -\varepsilon_0 E_0 l\sin\vartheta(\varepsilon-1). \quad \square$$

Ответ. $\oint E\,dS = E_0\pi R^2\cos\vartheta\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)$;

$\oint \overrightarrow{D}\,d\overrightarrow{r} = -\varepsilon_0 E_0 l\sin\vartheta(\varepsilon-1)$.

Задача 67

Точечный сторонний заряд q находится в центре шара радиусом a из однородного изотропного диэлектрика проницаемостью ε. Найти напряженность E поля как функцию расстояния r от центра данного шара.

Решение. Используем теорему Гаусса для вектора $\overrightarrow{D}$ (воспользоваться аналогичной теоремой для вектора $\overrightarrow{E}$ мы не можем, так как нам не известен связанный заряд). Теорема Гаусса для $\overrightarrow{D}$:

$$4\pi r^2 D_r = q.$$

Учитывая, что $\overrightarrow{D} = \varepsilon\varepsilon_0\overrightarrow{E}$, находим:

$$E(r<a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\varepsilon r^2}\,; \quad E(r>a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,. \qquad \square$$

Ответ. $E(r<a) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{q}{\varepsilon r^2}$; $E(r>a) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{q}{r^2}$.

Задача 68

Половина пространства между обкладками сферического конденсатора заполнена (рис. 44) однородным диэлектриком с проницаемостью ε. Заряд конденсатора q. Найти модуль напря-

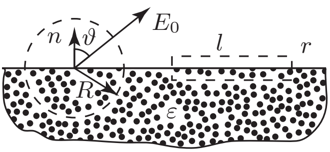


Рис. 43

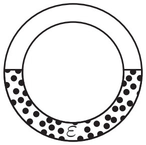


Рис. 44

женности электрического поля между обкладками как функцию расстояния r от центра конденсатора.

Решение. Запишем теорему Гаусса для нашего случая:

$$E2\pi r^2 + \varepsilon E2\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}\,,$$

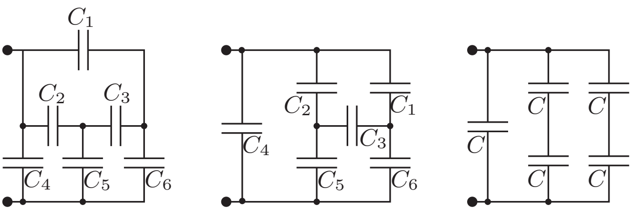
откуда

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)r^2}\,. \qquad \square$$

Ответ. $E = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)r^2}$.

Задача 69

Найти емкость системы одинаковых конденсаторов, изображенных на рис. 45, *а*. Емкость каждого из конденсаторов равна C.



а *б* *в*

Рис. 45

Решение. Перерисуем схему, как показано на рис. 45, *б*. Из симметрии схемы следует, что разность потенциалов пластин конденсатора C_3 равна нулю. Следовательно, этот конденсатор не заряжен и может быть изъят (рис. 45, *в*). Полученная емкость может быть легко вычислена:

$$C_0 = \mathrm{C} + \frac{C^2}{2C} + \frac{C^2}{2C} = 2C. \qquad \square$$

Ответ. $C_0 = 2C$.

Задача 70

Пять различных конденсаторов соединены согласно схеме, приведенной на рис 46. Определить электроемкость C_4, при которой электроемкость всего соединения не зависит от величины электроемкости C_5. Принять

$$C_1 = 8\ \text{пФ}, \quad C_2 = 12\ \text{пФ}, \quad C_3 = 6\ \text{пФ}.$$

Решение. Электроемкость всего соединения не будет зависеть от величины C_5, если разность потенциалов между ее пластинами будет равна нулю. Так как C_1 и C_2, а также C_3 и C_4 соединены последовательно, то на обкладках C_1 и C_2, как у последовательно соединенных конденсаторов, заряд положительно заряженной обкладки будет равен Q_1, а у C_3 и C_4 — соответственно Q_2. Условие равенства нулю потенциала между пластинами C_5 запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{Q_2}{C_3}; \\ \dfrac{Q_1}{C_2} = \dfrac{Q_2}{C_4}, \end{cases}$$

откуда $C_4 = \dfrac{C_2 C_3}{C_1} = 9$ пФ. $\square$

Ответ. $C_4 = \dfrac{C_2 C_3}{C_1} = 9$ пФ.

Задача 71

Первоначально пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено воздухом и напряженность электрического поля в зазоре равна E_0. Затем половину зазора, как показано на рис. 47, заполнили однородным диэлектриком с

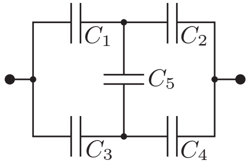


Рис. 46

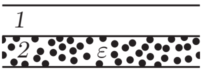


Рис. 47

проницаемостью ε. Найти модули векторов $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{D}$ в обеих частях зазора (1 и 2), если при введении диэлектрика:

1. Напряжение между обкладками не менялось.
2. Заряды на обкладках оставались неизменными.

Решение.

1. Эквивалентная схема после введения диэлектрика будет представлять собой два последовательно соединенных конденсатора с расстоянием между обкладками $\dfrac{d}{2}$, у одного из которых оно заполнено диэлектриком с проницаемостью ε. Так как при последовательном соединении разность потенциалов на концах батареи конденсаторов равна сумме разности потенциалов на каждом конденсаторе, то
$$U_0 = U_1 + U_2. \tag{111}$$
Отсюда с учетом (104), а также неизменности напряжения:
$$\frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{\varepsilon C_1}\right) = \frac{Q}{C_1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right),$$
где Q_0, U_0 и C_0 — заряд, разность потенциалов и емкость конденсатора до введения диэлектрика; Q_1, U_1, U_2, C_1 и C_2 — заряд, разность потенциалов и емкости конденсаторов эквивалентной схемы.
Так как $C_1 = 2C_0$, то $Q_0 = Q\left(\dfrac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)$, или $Q = Q_0\left(\dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$.
$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Q_0}{2C_0}\,\frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)} = U_0\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad \text{где} \quad \frac{Q_0}{C_0} = U_0;$$
$$\overrightarrow{E_1} = \frac{2U_1}{d} = \frac{2U_0\varepsilon}{d(1+\varepsilon)} = \frac{2\varepsilon\overrightarrow{E_0}}{\varepsilon+1}.$$

Для вакуума $\overrightarrow{D_1} = \varepsilon_0 \overrightarrow{E_1} = \dfrac{2\varepsilon_0 \varepsilon \overrightarrow{E_0}}{\varepsilon + 1}$;

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{\varepsilon C_1} = \frac{Q_0 2\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\frac{1}{\varepsilon C_1} = U_0\,\frac{1}{1+\varepsilon}\,;$$

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{2U_0}{d}\,\frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{2\overrightarrow{E_0}}{\varepsilon+1}\,.$$

При переходе границы двух диэлектриков D_n сохраняется, таким образом, $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D_2}$.

2. $$U_1 = \frac{Q}{2C_0} = \frac{U_0}{2}\,;\quad \overrightarrow{E_1} = \frac{U_0}{2d} = \overrightarrow{E_0};\quad \overrightarrow{D_1} = \varepsilon\varepsilon_0 \overrightarrow{E_1} = \varepsilon \overrightarrow{E_0};$$

$$U_2 = \frac{Q}{2\varepsilon C_0} = \frac{U_0}{2\varepsilon}\,;\quad \overrightarrow{E_2} = \frac{2U_0}{2d\varepsilon} = \frac{\overrightarrow{E_0}}{\varepsilon}\,;\quad \overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{D_1} = \varepsilon_0 \overrightarrow{E_0}. \qquad \square$$

Ответ. 1. $E_1 = 2\varepsilon E_0/(\varepsilon+1)$; $E_2 = 2E_0/(\varepsilon+1)$; $D_1 = D_2 = 2\varepsilon\varepsilon_0 E_0/(\varepsilon+1)$. 2. $E_1 = E_0$; $E_2 = E_0/\varepsilon$; $D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0$.

Задача 72

Решить предыдущую задачу с тем отличием, что диэлектриком заполнили половину зазора, как показано на рис. 48.

Решение.

1. Эквивалентная схема после введения диэлектрика будет представлять собой два параллельно соединенных конденсатора:
$$U_1 = U_2 = U_0,$$
отсюда следует:
$$E_1 = E_2 = E_0;$$
$$D_1 = \varepsilon_0 E_0; \quad D_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_0.$$

2. Q — заряд на каждом конденсаторе; C и εC — емкости конденсаторов.

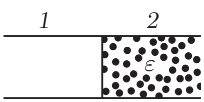


Рис. 48

Поскольку конденсаторы соединены параллельно, то можем записать:
$$U = \frac{2Q}{C(\varepsilon+1)}\,.$$

С учетом того, что $E = \dfrac{U}{d}$; $E_0 = \dfrac{Q}{Cd}$, получаем:
$$E_1 = E_2 = E = \frac{2Q}{Cd(\varepsilon+1)} = \frac{2E_0}{\varepsilon+1}\,;$$
$$D_1 = \frac{2\varepsilon E_0}{\varepsilon+1}\,; \quad D_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+1}\,. \qquad \square$$

Ответ. 1. $E_1 = E_2 = E_0$, $D_1 = \varepsilon_0 E_0$; $D_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_0$; 2. $E_1 = E_2 = 2E_0/(\varepsilon+1)$; $D_1 = \dfrac{2\varepsilon E_0}{\varepsilon+1}$; $D_2 = \dfrac{2\varepsilon\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+1}$.

Задача 73

Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость которого изменяется в перпендикулярном обкладкам направлении — растет линейно от ε_1 до ε_2. Площадь каждой обкладки S, расстояние между ними d. Найти емкость конденсатора.

Решение. Воспользуемся алгоритмом, предложенным в методических указаниях. Согласно (107):
$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 f(x) S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\left(\varepsilon_1 + \dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x\right)S}\,,$$

где $f(x) = \varepsilon_1 + \dfrac{df(x)}{dx}x = \varepsilon_1 + \dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x$.
$$\Delta\varphi = \int_0^d E\,dx = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 + \dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\,;$$
$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\ln\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\,. \qquad \square$$

Ответ. $C = \dfrac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\ln\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

Задача 74

Найти емкость сферического конденсатора, радиусы обкладок которого a и b, причем $a < b$, если пространство между обкладками заполнено диэлектриком:

1. Проницаемости ε.
2. Проницаемость которого зависит от расстояния до центра конденсатора как $\varepsilon = \alpha/r$, где α — постоянная.
3. Проницаемость которого зависит от расстояния до центра конденсатора как $\varepsilon = \alpha/r^2$, где α — постоянная.

Решение.

1. Как и в предыдущей задаче, используем алгоритм, описанный выше. Напряжение внутри конденсатора при сообщении ему заряда q:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{q}{r^2}\,;$$

$$\Delta\varphi = \int\limits_a^b E_r\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right);$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\,\frac{ab}{b-a}\,.$$

2. $$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 f(x) r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\alpha r}\,;$$

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\alpha}\int\limits_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\alpha}\ln\frac{b}{a};$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{\ln\dfrac{b}{a}}\,.$$

3. $$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 f(x) r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\alpha}\,;$$

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\alpha}\int\limits_a^b dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\alpha}\,(b-a);$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{b-a}\,.$$

□

Ответ. 1. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, ab}{b-a}$. 2. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{\ln\dfrac{b}{a}}$. 3. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{b-a}$.

Задача 75

То же, что и в предыдущей задаче, но конденсатор цилиндрический длины l и в пунктах 2 и 3 r — расстояние до оси системы. Краевыми эффектами пренебречь.

Решение.

1. Так же, как и в двух предыдущих задачах, вычислим E_r с помощью теоремы Гаусса:

$$E_r 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon}; \quad E_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r l};$$

$$\Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}\int\limits_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a};$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\dfrac{b}{a}}.$$

2. $E_r = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0\alpha\, l}$;

$$\Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\alpha\, l}\int\limits_a^b dr = \frac{q(b-a)}{2\pi\varepsilon_0\alpha\, l};$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon_0\alpha\, l}{b-a}.$$

3. $E_r = \dfrac{qr}{2\pi\varepsilon_0\alpha\, l}$;

$$\Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\alpha\, l}\int\limits_a^b r\,dr = \frac{q(b^2-a^2)}{4\pi\varepsilon_0\alpha\, l};$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\varepsilon_0\alpha\, l}{b^2-a^2}. \qquad \square$$

Ответ. 1. $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\dfrac{b}{a}}$. 2. $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\alpha\, l}{b-a}$. 3. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\alpha\, l}{b^2-a^2}$.

Задача 76

Найти емкость сферического конденсатора, радиусы внутренней и внешней обкладок которого равны a и b, если пространство между обкладками заполнено наполовину (см. рис. 44) однородным диэлектриком проницаемостью ε.

Решение. Как и ранее, используем алгоритм решения подобных задач. Значение E мы уже получили в задаче 68.

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)r^2};$$

$$\Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)}\int\limits_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q(b-a)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)ab};$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)ab}{b-a}. \qquad \square$$

Ответ. $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)ab}{b-a}$.

Задача 77

Найти емкость системы одинаковых конденсаторов между точками A и B, которая показана:

1. На рис. 49.
2. На рис. 50.

Решение.

1. Одна из пластин конденсаторов C_1, C_2, C_3 находится под потенциалом точки A, а другая — под потенциалом точки B, т. е. конденсаторы соединены параллельно и $C_0 = C_1 + C_2 + C_3$.

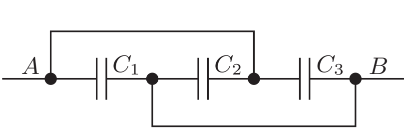


Рис. 49

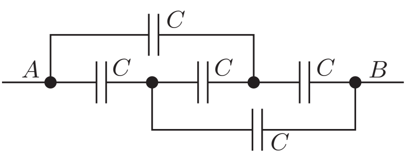


Рис. 50

2. Разность потенциалов на пластинах среднего конденсатора в цепочке последовательно соединенных емкостей равна нулю. Эквивалентная схема изображена на рис. 45, *в*. Ее емкость:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{2C} = \frac{1}{C}; \quad C_0 \; = C. \qquad \square$$

Ответ. 1) $C_0 = C_1 + C_2 + C_3$; 2) $C_0 = C$.

Задача 78

Конденсатор емкости $C_1 = 1{,}0$ мкФ выдерживает напряжение не более $U_1 = 6{,}0$ кВ, а конденсатор емкости $C_2 = 2{,}0$ мкФ — не более $U_2 = 4{,}0$ кВ. Какое напряжение может выдержать система из этих двух конденсаторов при последовательном соединении?

Решение. При последовательном соединении разность потенциалов на концах батареи U равна сумме разности потенциалов на каждом конденсаторе, а заряд каждого конденсатора одинаков, т. е.:

$$U = U_1 + U_2; \quad q = U_1 C_1 + U_2 C_2,$$

откуда $U - U_1 \leqslant U_2$;

$$U \leqslant U_1 + U_2 = U_1(1 + \frac{C_1}{C_2}) = 9 \text{ кВ}. \qquad \square$$

Ответ. $U \leqslant 9$ кВ.

Задача 79

Найти емкость бесконечной цепи, которая образована повторением одного и того же звена из двух одинаковых конденсаторов, каждый емкостью C (рис. 51).

Решение. Так как цепь бесконечна, все звенья, начиная со второго, можно заменить емкостью C_x, равной искомой. Тогда из рисунка следует:

$$\frac{1}{C_x} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_x},$$

откуда

$$C_x = \frac{C^2 + C_x C}{2C + C_x}\,,$$

или $C_x^2 + CC_x - C^2 = 0$;

$$C_x = \frac{C}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Второе решение физического смысла не имеет. □

Ответ. $C_x = \dfrac{C}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Задача 80

Конденсатор емкости $C_1 = 1{,}0$ мкФ, заряженный до напряжения $U = 110$ В, подключен параллельно к концам системы из двух последовательно соединенных конденсаторов, емкости которых $C_2 = 2{,}0$ мкФ и $C_3 = 3{,}0$ мкФ. Какой заряд протечет при этом по соединительным проводам?

Решение. На рис. 52 изображена эквивалентная схема батареи конденсаторов. Если конденсатор C_1 отключить от источника зарядов и подключить к соединенным последовательно конденсаторам C_2 и C_3, то изменится напряжение, а заряд останется постоянным. Часть заряда с конденсатора C_1 перетечет на эквивалентную емкость $C_{\text{экв}}$.

На C_1 останется заряд q_2, который и надо найти по условию задачи. Согласно (104) при параллельном соединении конденсаторов $q_1 = C_1\Delta\varphi$; $q_2 = C_{\text{экв}}\Delta\varphi$, откуда $\dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{C_1}{C_{\text{экв}}}$, следовательно,

$$q_1 = q_2\,\frac{C_1}{C_{\text{экв}}}\,. \tag{112}$$

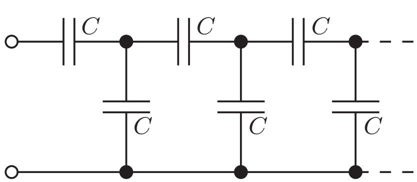


Рис. 51

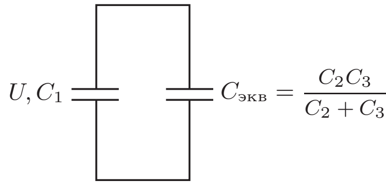


Рис. 52

Условия сохранения заряда $q_1 + q_2 = C_1 U$.

Откуда, с учетом (112):

$$q_2 = \frac{C_1 U}{1 + \dfrac{C_1}{C_{\text{экв}}}} = \frac{U}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}} = 0{,}06 \text{ мКл.} \qquad \square$$

Ответ. $q_2 = \dfrac{U}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}} = 0{,}06$ мКл.

Задача 81

Три электрона, находящихся на расстоянии $a = 10{,}0$ мм друг от друга, начали симметрично разлетаться под действием взаимного отталкивания. Найти их максимальные скорости.

Решение. Электростатическая энергия системы электронов, находящихся на расстоянии a друг от друга, при разлете начнет переходить в кинетическую энергию. Максимальную скорость электроны будут иметь на бесконечно большом расстоянии, когда силы кулоновского взаимодействия будут равны нулю. Используя формулу (106), запишем:

$$W = \sum_N \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{3e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{3mV_{\max}^2}{2},$$

где m — масса электрона, откуда $V_{\max} = \dfrac{e}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 am}} = 2{,}25 \cdot 10^2$ м/с. $\square$

Ответ. $V = \dfrac{e}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 am}} = 2{,}25 \cdot 10^2$ м/с.

Задача 82

Определить суммарную энергию взаимодействия точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной a, в системах, которые показаны на рис. 53.

Решение.

1. Суммарную энергию взаимодействия точечных зарядов вычислим по формуле (106):

$$W = \sum_N \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 2\sqrt{2}a} = \frac{(\sqrt{2}+4)q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

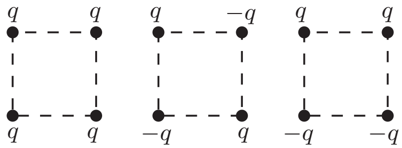


Рис. 53

2. $$W = \frac{q^2}{2\sqrt{2}\,a\pi\varepsilon_0} - \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q^2(\sqrt{2}-4)}{4\pi\varepsilon_0 a}\,.$$

3. $$W = -\frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\,.$$ □

Ответ. 1) $W = \dfrac{(\sqrt{2}+4)q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$; 2) $W = \dfrac{q^2(\sqrt{2}-4)}{4\pi\varepsilon_0 a}$; 3) $W = -\dfrac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

Задача 83

Диэлектрический шар поляризован однородно и статически. Его поляризованность равна $\overrightarrow{P}$. Имея в виду, что так поляризованный шар можно представить как результат малого сдвига всех положительных зарядов диэлектрика относительно всех отрицательных зарядов:

1. Найти напряженность $\overrightarrow{E}$ поля внутри шара.
2. Показать, что поле вне шара является полем диполя и потенциал поля $\varphi = \overrightarrow{P_0}\,\overrightarrow{r}/4\pi\varepsilon_0\,\overrightarrow{r}^{\,3}$, где $\overrightarrow{P}_0$ — электрический момент шара, r — расстояние от его центра.

Решение.

1. Воспользуемся принципом наложения и принципом суперпозиции полей. Представим результирующую картину как сдвиг центров двух шаров с плотностью заряда $-\rho$ и $+\rho$ относительно друг друга на величину $\overrightarrow{l}$. Тогда, как показано в задачах 60 и 61, напряженность поля внутри шара не зависит ни от радиуса шаров, ни от их взаимного расположения и определяется как

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_+ + \overrightarrow{E_-} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\overrightarrow{r_+} - \overrightarrow{r_-}\right) = -\frac{\rho\,\overrightarrow{l}}{3\varepsilon_0}\,.$$

Поскольку $\overrightarrow{P} = \rho \overrightarrow{l}$:

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_0}.$$

2. После малого сдвига одного шара относительно другого на одной стороне шара возникнет небольшой положительный заряд, а на другой — такой же отрицательный. Если относительное смещение двух шаров мало, то эти заряды эквивалентны существованию поверхностного заряда (на сферической поверхности) с плотностью, пропорциональной косинусу полярного угла (см. задачу 62). Два смещенных шара — это все равно что два точечных заряда, так как легко показать с помощью теоремы Гаусса, что в точках вне шаров их напряженность поля и потенциал совпадают с напряженностью поля и потенциалом точечных зарядов, а их мы уже вычислили в задаче 27. □

Ответ. $\overrightarrow{E} = -\dfrac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_0}$. $\varphi = \dfrac{\overrightarrow{P}_0\overrightarrow{r}}{4\pi\varepsilon_0\overrightarrow{r}^3}$.

Задача 84

В однородное электрическое поле $\overrightarrow{E_0}$ поместили однородный диэлектрический шар. При этих условиях диэлектрик поляризуется однородно. Найти напряженность $\overrightarrow{E}$ поля внутри шара и поляризованность $\overrightarrow{P}$ диэлектрика, проницаемость которого ε. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

Решение. Известно (96), что

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 - \overrightarrow{E}', \tag{113}$$

где E — поле внутри диэлектрика; E' — поле, создаваемое связанными зарядами.

Из решения предыдущей задачи:

$$\overrightarrow{E}' = -\frac{\overrightarrow{P}}{3\varepsilon_0}. \tag{114}$$

Согласно (95):

$$\vec{P} = \varkappa\varepsilon_0\vec{E}. \tag{115}$$

Подставляя (115) в (114), а затем в (113) и проведя простые преобразования с учетом того, что $\varepsilon = 1 + \varkappa$, получаем:

$$E = \frac{3E_0}{\varepsilon + 2}. \tag{116}$$

В (115) подставляем (116), имеем:

$$P = \frac{3\varepsilon_0 E_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}. \qquad \square$$

Ответ. $E = \dfrac{3E_0}{\varepsilon + 2}$; $P = \dfrac{3\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0}{\varepsilon + 2}$.

Задача 85

На расстоянии r от точечного заряда q расположен тонкий диск из диэлектрика с проницаемостью ε. Объем диска V, его ось проходит через заряд q. Считая, что радиус диска значительно меньше r, оценить силу, действующую на диск.

Решение. По условию задачи радиус диска значительно меньше r, поэтому можем считать, что поверхностная плотность связанных зарядов σ постоянна. Тогда диск можно рассматривать как диполь с зарядом $q = \sigma S$, где S — площадь диска. Для P можно записать:

$$P = lq = \sigma V, \tag{117}$$

где $l = \dfrac{V}{S}$.

Поверхностную плотность связанных зарядов найдем из условия $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma$ на границе раздела двух диэлектриков. Поляризованность вакуума равна нулю и граничные условия принимают следующий вид:

$$P_{1n} = \sigma = \varkappa\varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E, \tag{118}$$

где $\varkappa = \varepsilon - 1$.

Подставляя (118) в (117) и учитывая, что $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon}$, а $E_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где E_0 — напряженность поля в вакууме, получаем:

$$P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 EV = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 V E_0}{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon - 1)Vq}{4\pi\varepsilon r^2}. \tag{119}$$

Известно, что

$$F = P\left|\frac{\partial E_0}{\partial r}\right|, \tag{120}$$

где $\dfrac{\partial E_0}{\partial r}$ — производная вектора E_0 по направлению диполя

$$\left|\frac{\partial E_0}{\partial r}\right| = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{121}$$

Подставляя (121) и (119) в (120), получаем:

$$F = \frac{(\varepsilon - 1)Vq^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^5}. \qquad \square$$

Ответ. $F = \dfrac{(\varepsilon - 1)Vq^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^5}$.

Задача 86

К источнику постоянного напряжения с внутренним сопротивлением R_0 подключили три одинаковых резистора, каждый сопротивлением R, соединенных между собой, как показано на рис. 54. При каком значении R тепловая мощность, выделяемая на этом участке, максимальна?

Решение. Как показано в задаче 77, соединение, аналогичное соединению сопротивлений R, является параллельным, а общее сопротивление $R' = R_0 + \dfrac{R}{3} = \dfrac{3R_0 + R}{3}$.

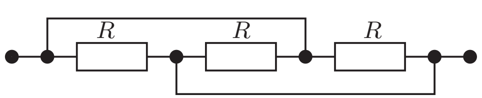


Рис. 54

Ток, проходящий в цепи,

$$J_0 = \frac{3U}{3R_0 + R}\,.$$

Тепловая мощность, выделяемая на участке цепи:

$$\dot{Q} = J_0^2 R = \left(\frac{3U}{3R_0 + R}\right)^2 \frac{R}{3}\,.$$

Для нахождения максимума $\dot{Q}$ вычислим $\dfrac{d\dot{Q}}{dR} = 0$. С целью упрощения записи будем рассматривать только числитель дроби без постоянных множителей:

$$\frac{d\dot{Q}}{dR} \sim \frac{d\left(\dfrac{R}{(3R_0 + R)^2}\right)}{dR} = (3R_0 + R)^2 - 2R(3R_0 + R) = 0,$$

откуда $R = 3R_0$. □

Ответ. $R = 3R_0$.

Задача 87

Убедиться, что распределение тока в параллельно соединенных резисторах с сопротивлениями R_1 и R_2 соответствует минимуму выделяемой на этом участке тепловой мощности.

Решение. Предположим, что γ — доля тока, текущего через резистор R_1, а $(1-\gamma)$ — доля тока, текущего через резистор R_2. Тогда $J_0 = J_1 + J_2 = \gamma J_0 + (1-\gamma) J_0$;

$$J_1 = \frac{\gamma U(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}\,; \tag{122}$$

$$J_2 = \frac{(1-\gamma) U(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}\,; \tag{123}$$

$$\dot{Q}_1 = J_1^2 R_1 = \gamma^2 \left[\frac{U(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}\right]^2 R_1;$$

$$\dot{Q}_2 = J_2^2 R_2 = (1-\gamma)^2 \left[\frac{U(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}\right]^2 R_2.$$

Для нахождения значения γ, при котором суммарная выделяемая мощность минимальна, найдем и приравняем к нулю следующее выражение:

$$\frac{d(\overset{\bullet}{\underset{1}{Q}}+\overset{\bullet}{\underset{2}{Q}})}{d\gamma} = 2\gamma\left[\frac{U(R_1+R_2)}{R_1R_2}\right]^2 \cdot R_1 - 2(1-\gamma)\left[\frac{U(R_1+R_2)}{R_1R_2}\right]^2 \cdot R_2 = 0,$$

откуда $\gamma = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$; $\quad 1-\gamma = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}$.

Подставляя в (122) и (123), получаем $\dfrac{J_1}{J_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$, что соответствует распределению тока в резисторах R_1 и R_2 при параллельном соединении. □

Задача 88

В цепи (рис. 55, *а*) ЭДС источников пропорциональны их внутренним сопротивлениям: $\mathcal{E} = \alpha R$, α — постоянная. Сопротивление проводников пренебрежимо мало.

Найти:

1. Ток в цепи.
2. Разность потенциалов между точками A и B.

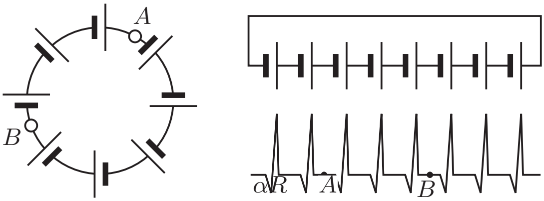
Решение.

1. По условию задачи, в цепи присутствуют только внутренние сопротивления источников ЭДС. Поэтому закон Ома будет иметь следующий вид:

$$J = \frac{\sum\limits_i \mathcal{E}}{\sum\limits_i R} = \alpha.$$

2. Рассмотрим ход потенциала φ вдоль цепи. Для этого представим ее в следующем виде (рис. 55, *б*): $\varphi_A - \varphi_B = 0$, как, впрочем, и разность потенциалов между двумя любыми точками. □

Ответ. $J = \alpha$; $\varphi_A - \varphi_B = 0$.



а **б**

Рис. 55

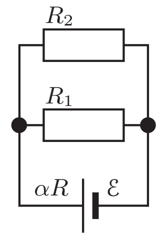


Рис. 56

Задача 89

В схеме (рис. 56) $\mathcal{E} = 5{,}0$ В, $R_1 = 4{,}0$ Ом, $R_2 = 6{,}0$ Ом. Внутреннее сопротивление источника $R = 0{,}1$ Ом. Найти токи, текущие через сопротивления R_1 и R_2.

Решение. Заменим три сопротивления одним R_0:

$$R_0 = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

тогда

$$J_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_0} = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}. \tag{124}$$

Для параллельного соединения проводников выполняется соотношение:

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{125}$$

С учетом $J_0 = J_1 + J_2$, $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{J_0 - J_1}{J_1}$, следовательно, $J_1 R_1 = J_0 R_2 - J_1 R_2$.

Учтя (124), имеем:

$$J_1 = \frac{J_0 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E} R_2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} = 1{,}2\ \text{А}. \tag{126}$$

Из (125) следует: $J_2 = J_1 \dfrac{R_1}{R_2} = 0{,}8$ А. □

Ответ. $J_1 = 1{,}2$ А; $J_2 = 0{,}8$ А.

Глава 4

МАГНЕТИЗМ

Сила Лоренца. Магнитное поле равномерно движущегося заряда. Принцип суперпозиции. Закон Био—Савара—Лапласа, теорема Гаусса для поля $\overrightarrow{B}$, теорема о циркуляции для вектора $\overrightarrow{B}$, сила Ампера, магнитный момент контура. Электромагнитная индукция, самоиндукция, индуктивность, ЭДС самоиндукции

На каждый электрический заряд действует сила, зависящая как от его местоположения в пространстве, так и от скорости его движения. Та часть силы, которая не зависит от движения заряда, описывается вектором электрического поля $\overrightarrow{E}$. Вторая часть силы, называемая магнитной силой, имеет особенность, заключающуюся в том, что направление этой силы и ее величина зависят от направления движения частицы; в каждый момент сила всегда перпендикулярна вектору скорости, кроме того, в любом месте сила всегда перпендикулярна определенному направлению в пространстве и величина силы пропорциональна компоненте скорости, перпендикулярной этому выделенному направлению. Для описания этих свойств вводится вектор магнитного поля $\overrightarrow{B}$, который определяет выделенное направление в пространстве и одновременно служит константой пропорциональности между силой и скоростью.

Полная электромагнитная сила, действующая на заряд q, называется силой Лоренца:

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\left[\overrightarrow{V}\overrightarrow{B}\right]. \qquad (127)$$

На покоящийся заряд магнитное поле не действует. Магнитная сила перпендикулярна вектору скорости, поэтому работы над зарядом не совершает и, следовательно, в постоянном магнитном поле энергия движущейся заряженной частицы неизменна.

Обобщение экспериментальных данных позволило получить элементарный закон, определяющий поле $\overrightarrow{B}$ точечного заряда q, движущегося с постоянной скоростью $\overrightarrow{V}$:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\left[\overrightarrow{V}\,\overrightarrow{r}\right]}{r^3}, \tag{128}$$

где μ_0 — магнитная постоянная; $\overrightarrow{r}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения.

Вектор $\overrightarrow{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\overrightarrow{V}$ и $\overrightarrow{r}$, причем вращение вокруг вектора $\overrightarrow{V}$ в направлении вектора $\overrightarrow{B}$ образует с направлением $\overrightarrow{V}$ правовинтовую систему (рис. 57). Величину вектора $\overrightarrow{B}$ называют магнитной индукцией.

Расчет показывает (см. задачу 90), что отношение магнитной составляющей силы Лоренца к электрической крайне мало даже при больших скоростях движения двух точечных зарядов. На практике же очень часто приходится рассматривать совместное движение колоссального числа заряженных частиц, например, движение электронов в проводах, когда малость магнитной составляющей силы Лоренца компенсируется огромным числом зарядов, движущихся в одном направлении.

Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых

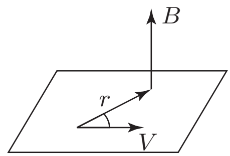


Рис. 57

каждым зарядом или током в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \tag{129}$$

Закон Био—Савара—Лапласа является обобщением выражения (128) для случая постоянного электрического тока:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{J\left[\vec{dl}\,\vec{r}\right]}{r^3}, \tag{130}$$

где $\vec{dl}$ — элементы длины провода.

В соответствии с принципом суперпозиции полное поле $\vec{B}$ определяется в результате интегрирования выражения (130) по всем элемента тока:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J\left[\vec{dl}\,\vec{r}\right]}{r^3}. \tag{131}$$

Графическое представление поля $\vec{B}$ ничем не отличается от поля $\vec{E}$ и может быть представлено с помощью линий вектора $\vec{B}$, у которых касательная к этим линиям в каждой точке совпадает с направлением вектора $\vec{B}$, а густота линий пропорциональна модулю вектора $\vec{B}$ в данном месте.

Теорема Гаусса для поля B

Поток вектора $\vec{B}$ сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint \vec{B}\,\vec{dS} = 0, \tag{132}$$

Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$ констатирует факт отсутствия в природе магнитных зарядов, следствием чего является отсутствие у линий $\vec{B}$ начала и конца, поэтому число линий $\vec{B}$, выходящих из любого объема, ограниченного замкнутой поверхностью S, всегда равно числу линий, входящих в этот объем.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ (для магнитного поля постоянных токов в вакууме). *Циркуляция вектора*

$\overrightarrow{B}$ по произвольному контуру Γ равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром Γ:

$$\oint \overrightarrow{B}\,\overrightarrow{dl} = \mu_0 J, \qquad (133)$$

где $J = \sum J_k$, причем J_k — величины алгебраические.

Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного направления считается отрицательным (рис. 58).

Теорема о циркуляции вектора B, при наличии специальной симметрии, позволяет очень просто находить $\overrightarrow{B}$.

Сила Ампера

Как мы уже знаем, магнитное поле действует на заряженные частицы и на токи, а следовательно и на их носители. Эта сила может быть определена из выражения для закона Ампера;

$$d\overrightarrow{F} = J\left[d\,\overrightarrow{l}\,\overrightarrow{B}\right], \qquad (134)$$

где $\overrightarrow{dl}$ — вектор, совпадающий по направлению с током и характеризующий элемент длины тонкого проводника. При исследовании электрического поля используется пробный точечный заряд, при исследовании же магнитного поля используется пробный ток, циркулирующий в плоском замкнутом контуре очень малых размеров. Ориентацию контура в пространстве характеризует направление нормали к контуру, связанной с направлением тока правилом правого винта (рис. 59).

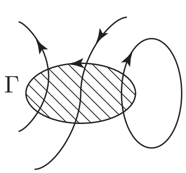


Рис. 58

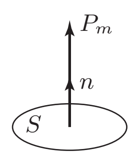


Рис. 59

Такая нормаль называется положительной. Для описания поведения малого контура в магнитном поле используют понятие магнитного момента $\overrightarrow{P}_m$, который определяется как

$$\overrightarrow{P}_m = JS\overrightarrow{n}, \tag{135}$$

где J — ток, S — площадь контура, $\overrightarrow{n}$ — нормаль к контуру.

В 1831 г. Фарадей открыл один из фундаментальных законов природы, который гласит — в замкнутом проводящем контуре при изменении потока вектора $\overrightarrow{B}$, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, называемый индукционным.

Появление индукционного тока эквивалентно появлению в контуре ЭДС индукции ε_i. Установлено, что ε_i определяется лишь скоростью изменения магнитного потока Φ, т. е. величиной $\dfrac{d\Phi}{dt}$.

Правило Ленца: индукционный ток, а следовательно, и ε_i всегда направлены так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\,\frac{dS}{dt}\,. \tag{136}$$

Это правило выражает существенный физический факт — стремление системы противодействовать изменению ее состояния (электромагнитная инерция).

При изменении величины тока, текущего в контуре, изменяется его магнитное поле и, как следствие этого, магнитный поток через контур, что влечет за собой появление ЭДС индукции. Таким образом, изменение тока в контуре ведет к возникновению ЭДС индукции в этом же самом контуре. Данное явление называется самоиндукцией. Если через какой-либо контур течет ток J, то полный магнитный поток Φ через этот контур будет пропорционален J, т. е.

$$\Phi = LJ,$$

где коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью контура. Индуктивность L зависит от формы и размеров контура, а также магнитных свойств окружающей среды.

При изменении силы тока в контуре, согласно (136) возникает ЭДС самоиндукции ε_s:

$$\varepsilon_s = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L\,\frac{dJ}{dt}\,.$$

Знак минус показывает, что ε_s всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока в соответствии с правилом Ленца. ЭДС самоиндукции стремится сохранить ток неизменным, т. е. она противодействует току, когда он увеличивается, и поддерживает, когда он уменьшается.

Рекомендации по решению задач

1. Теорема о циркуляции вектора $\overrightarrow{B}$ имеет такое же значение при решении задач магнетизма, как теорема Гаусса для векторов $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{D}$. К сожалению, область ее применения, по тем же причинам, весьма ограничена. В случае невозможности использования теоремы о циркуляции вектора $\overrightarrow{B}$ приходится применять дифференциально-интегральные методы, например, закон Био—Савара—Лапласа.
2. При решении задач на вращение объемно заряженных тел, обладающих симметрией (задача 96), пользуйтесь соответствующей системой координат: сферической, если это сфера, цилиндрической, если это цилиндр. Элементарный объем в сферических координатах равен $r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$, в цилиндрических — $r\, dr\, d\varphi\, dZ$.

Задача 90

Два протона движутся параллельно друг другу с одинаковой скоростью $V = 300$ км/с. Найти отношение сил магнитного и электрического взаимодействия данных протонов.

Решение. Согласно (127) $F_{\text{М}} = qVB$ и $F_{\text{Э}} = qE$, где V — скорость заряда q, а B и E — индукция магнитного и напряженность электрического полей, создаваемых зарядом *1* в месте нахождения заряда *2*. Таким образом:

$$\frac{F_{\text{М}}}{F_{\text{Э}}} = \frac{VB}{E}\,,$$

с учетом $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$; $B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{qV}{r^2}$; $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$;

$$\frac{F_{\text{М}}}{F_{\text{Э}}} = \left(\frac{V}{c}\right)^2 = 10^{-6}. \qquad \square$$

Ответ. $\dfrac{F_{\text{М}}}{F_{\text{Э}}} = \left(\dfrac{V}{c}\right)^2 = 10^{-6}$.

Задача 91

Ток J течет вдоль длинной тонкостенной трубы радиуса R (рис. 60), имеющей по всей длине продольную прорезь ширины h. Найти индукцию магнитного поля внутри трубы, если $h \ll R$.

Решение. Воспользуемся принципом наложения. Представим, что мы имеем сплошную тонкостенную трубу, по которой течет ток $J_0 = J + \Delta J$, где ΔJ — часть тока, текущая по полосе шириной h. Понятно, что ток J будет пропорционален величине $2\pi R - h$, а ΔJ — пропорционально h. По условию задачи $h \ll R$, поэтому можно считать $J_0 \approx J$. Теперь предположим, что по полосе тонкостенной трубы шириной h во встречном направлении течет ток ΔJ. В соответствии с принципом суперпозиции индукция магнитного поля внутри трубы будет равна алгебраической сумме магнитной индукции, создаваемой сплошной тонкостенной трубой, по которой течет ток J и полоской шириной h, по которой течет ток ΔJ. Ток $\Delta J = \dfrac{h}{2\pi R} J$, где R — расстояние от прорези (полосы шириной h) до оси трубы.

Согласно (132) магнитная индукция внутри трубы без прорези равна нулю. Индукцию, создаваемую полосой шириной h с текущим по ней током ΔJ, определим используя теорему о

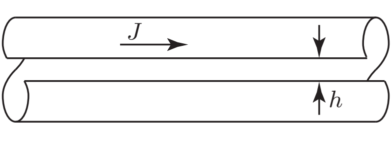


Рис. 60

циркуляции вектора $\vec{B}$:

$$2\pi RB = \mu_0 \Delta J.$$

Отсюда

$$B = \frac{\mu_0 \Delta J}{2\pi R} = \frac{\mu_0 h}{4\pi^2 R^2}\, J. \qquad \square$$

Ответ. $B = \dfrac{\mu_0 h}{4\pi^2 R^2}\, J.$

Задача 92

Найти магнитный момент тонкого кругового витка с током, если радиус витка $R = 100$ мм и индукция магнитного поля в его центре $B = 6{,}0$ мкТл.

Решение.

$$P_m = J\pi R^2.$$

Ток J найдем с помощью закона Био—Савара—Лапласа (131) $B = \dfrac{\mu_0 J}{2R}$.

Отсюда

$$J = \frac{2RB}{\mu_0}; \quad P_m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} = 30 \text{ мА} \cdot \text{м}^2. \qquad \square$$

Ответ. $P_m = \dfrac{2\pi R^3 B}{\mu_0} = 30$ мА · м^2.

Задача 93

Вычислить магнитный момент тонкого проводника с током $J = 0{,}8$ А, плотно навитого на половину тора (рис. 61). Диаметр сечения тора $d = 5{,}0$ см, число витков $N = 500$.

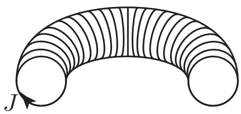


Рис. 61

Решение. $\overrightarrow{P}_m = JS\overrightarrow{n};$

$$S = \frac{N\pi d^2}{4};$$

$$P_m = \frac{N\pi d^2}{4} J \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{N\pi d^2 J}{2} \approx 1{,}5\,\text{А}\cdot\text{м}^2. \ \square$$

Ответ. $P_m = \dfrac{N\pi d^2 J}{2} \approx 1{,}5\ \text{А}\cdot\text{м}^2.$

Задача 94

Непроводящий тонкий диск радиуса R, равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью σ, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти:

1. Индукцию магнитного поля в центре диска.
2. Магнитный момент диска.

Решение. Разобьем диск на кольцевые слои радиуса r и толщины dr. Заряд такого слоя равен $dq = \sigma 2\pi r\,dr$. При вращении диска вдоль слоя течет элементарный ток, равный

$$dJ = \frac{dq}{T} = \frac{dq\,\omega}{2\pi} = \sigma\omega r\,dr.$$

Этот элементарный ток создает в центре индукцию

$$dB = \frac{\mu_0\,dJ}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega\,dr}{2};$$

$$B = \int\limits_0^R \frac{\mu_0\sigma\omega\,dr}{2} = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2};$$

$$dP_m = dJ\pi r^2 = \pi\sigma\omega r^3\,dr;$$

$$P_m = \pi\sigma\omega \int\limits_0^R r^3\,dr = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}. \qquad \square$$

Ответ. $B = \dfrac{\mu_0\sigma\omega R}{2}; \quad P_m = \dfrac{\pi\sigma\omega R^4}{4}.$

Задача 95

Непроводящая сфера радиуса $R = 50$ мм, заряженная равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 10{,}0$ мкКл/м^2 , вращается с угловой скоростью $\omega = 70$ рад/с вокруг оси, проходящей через ее центр. Найти магнитную индукцию в центре сферы.

Решение. Разделим полусферу на узкие кольца шириной dx (рис. 62, *а*). Заряд такого кольца:

$$dq = 2\pi r\sigma\, dx = 2\pi R^2\sigma \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

где R — радиус сферы.

Результирующий вектор B направлен вдоль оси вращения сферы и равен

$$dB_p = 2\, dB \sin\vartheta = \frac{2r}{R}\, dB. \tag{137}$$

Множитель 2 появился в силу того, что такое же кольцо в верхней части сферы, находящееся на расстоянии x от центра сферы и на ее оси вращения, создаст такое же dB. Понятно также, что сумма компонентов вектора dB, расположенных перпендикулярно оси вращения сферы, будет равна нулю. Запишем закон Био—Савара—Лапласа для элемента кольца $\overrightarrow{dl}$ с учетом того, что угол между $\overrightarrow{dl}$ и $\overrightarrow{R}$ прямой:

$$dB = \frac{\mu_0\, dJ\, dl}{4\pi R^2}\,. \tag{138}$$

Подставляем (138) в (137), интегрируем по контуру и получаем:

$$dB_p = \frac{\mu_0 r^2\, dJ}{R^3}\,. \tag{139}$$

Как и в предыдущей задаче, записываем:

$$dJ = \frac{dq}{T} = \frac{dq\omega}{2\pi} = \sigma\omega R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{140}$$

Подставляя (140) в (139), получаем:

$$dB_p = \frac{\mu_0\sigma\omega}{R}\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{141}$$

С учетом $r = R\sin\vartheta$, получаем: $dB_p = \mu_0\omega\sigma R \sin^3\vartheta\, d\vartheta$, откуда $B_p = \mu_0\sigma\omega R \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \dfrac{2\mu_0\sigma\omega R}{3}$. $\square$

Ответ. $B_p = \dfrac{2\mu_0\sigma\omega R}{3} = 29$ пТл.

Задача 96

Заряд q равномерно распределен по объему однородного шара массы m и радиуса R, который вращается вокруг оси, проходящей через его центр с угловой скоростью ω (рис. 62, *б*). Найти соответствующий магнитный момент и его отношение к механическому моменту.

Решение. Будем решать задачу в сферических координатах. Тогда элементарный объем можно записать в виде (рис. 62, *б*):

$$dV = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr\, d\varphi.$$

Заряд этого элементарного объема:

$$dq = \rho_3 r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr\, d\varphi,$$

где ρ_3 — объемная плотность заряда сферы.

Тогда

$$dP_M = dJ\pi r^2 \sin^2\vartheta = \frac{\omega\rho_3}{2}\sin^3\vartheta\, d\vartheta\, r^4\, dr\, d\varphi;$$

$$P_M = \frac{\omega\rho_3}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\, d\vartheta\int_0^R r^4\, dr\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{15}\,\omega\rho_3 R^5 = \frac{\omega q R^2}{5},$$

где $q = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_3$.

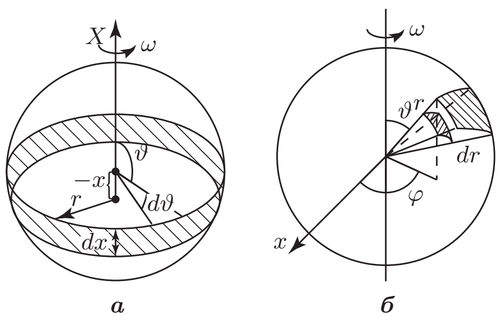


Рис. 62

Вычислим механический момент M:

$$dM = \omega\, dI,$$

где I — момент инерции шара.

По определению момента инерции

$$dI = \rho_m\, dV r^2 \sin^2\vartheta,$$

где ρ_m — плотность вещества сферы.

$$dI = \rho_m r^4\, dr \sin^3\vartheta\, d\vartheta\, \varphi\, d\varphi;$$

$$I = \rho_m \int_0^R r^4\, dr \int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{5} mR^2,$$

где $m = \frac{4}{3}\rho_m \pi R^3$,

$$\frac{P_M}{M} = \frac{q}{2m}\,. \qquad \square$$

Ответ. $\frac{P_M}{M} = \frac{q}{2m}$.

Задача 97

Два параллельных длинных провода с током $J = 6{,}0$ А в каждом (токи направлены в одну сторону) удалили друг от друга так, что расстояние между ними стало в $\eta = 2{,}0$ раза больше первоначального. Какую работу на единицу длины проводов совершили при этом силы Ампера?

Решение. Сила Ампера

$$d\overrightarrow{F} = J\left[d\overrightarrow{l}\,\overrightarrow{B}\right]$$

для нашего случае запишется в виде:

$$F = JB. \tag{142}$$

Вычислим магнитное поле прямого тока (рис. 63). В произвольной точке M векторы $d\overrightarrow{B}$ от всех элементов тока направлены за плоскость рисунка, поэтому сложение векторов $d\overrightarrow{B}$ заменяется сложением их модулей.

Согласно закону Био—Савара—Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{J\, dl \cos\alpha}{r^2}\,.$$

Из рисунка видно, что $dl\,\cos\alpha = r\,d\alpha$ и $r = \dfrac{b}{\cos\alpha}$.

Значит, $dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\,\dfrac{J\cos\alpha\,d\alpha}{b}$.

Интегрируя по α, получаем:

$$B = \frac{\mu_0 J}{4\pi b}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\,d\alpha = \frac{\mu_0 J}{2\pi b}\,.$$

Подставив в (142), имеем:

$$F = \frac{\mu_0 J^2}{2\pi b}\,; \quad dA = -F db.$$

Интегрируя, получаем:

$$A = \frac{\mu_0 J^2}{2\pi}\ln 2 = -5\ \text{мкДж/м}. \qquad \square$$

Ответ. $A = -\dfrac{\mu_0 J^2}{2\pi}\ln 2 = -5$ мкДж/м.

Задача 98

Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током J находятся в одной плоскости (рис. 64). Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью v. Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x.

Решение. $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -B\,\dfrac{dS}{dt}$, откуда $d\Phi = B\,dS$.

В нашем случае изменение потока идет не за счет изменения площади, а за счет изменения величины вектора $\vec{B}$ в зависимо-

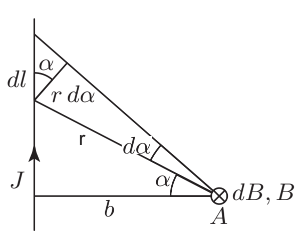


Рис. 63

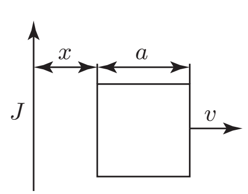


Рис. 64

сти от x . Для бесконечно длинного провода $B = \dfrac{\mu_0 J}{2\pi\, x}$. Отсюда:

$$dB = -\,\frac{\mu_0 J}{2\pi\, x^2}\;dx; \quad B = -\,\frac{\mu_0 J}{2\pi}\int\limits_{x}^{x+a}\frac{dx}{x^2} = \frac{\mu_0 Ja}{2\pi\,(x+a)x}\;;$$

$$dS = a\,dx = av\,dt; \quad d\Phi = -\,\frac{\mu_0 Ja^2 v dt}{2\pi(x+a)x}\,.$$

Знак минус показывает, что с удалением от провода величина потока Φ убывает.

$$\varepsilon_i = -\,\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 Ja^2 v}{2\pi\,(x+a)x}\,. \qquad \square$$

Ответ. $\varepsilon_i = \dfrac{\mu_0 Ja^2 v}{2\pi\,(x+a)x}$.

Задача 99

Стержень *1–2* массы m скользит без трения по двум длинным рельсам, расположенным на расстоянии l друг от друга (рис. 65). На левом конце рельсы замкнуты сопротивлением R. Система находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $\overrightarrow{B}$. В момент $t = 0$ стержню сообщили вправо начальную скорость v_0. Пренебрегая сопротивлением рельсов и стержня, а также магнитным полем индукционного тока, найти:

а) Расстояние, пройденное стержнем до остановки.

б) Количество теплоты, выделенной при этом на сопротивлении.

Решение.

а) Будем считать нормаль положительной, если она направлена от нас. Тогда в соответствии с правилом

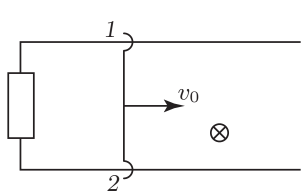


Рис. 65

правого винта положительным направлением обхода контура будет обход по часовой стрелке.

Закон Ома для данной цепи:

$$RJ = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\,\frac{dS}{dt} = -Blv, \tag{143}$$

где $d\Phi > 0$, так как перемычка движется вправо. Индукционный ток будет направлен таким образом, чтобы возникающая сила Ампера была направлена влево, т. е. в противоположном от v направлении. Запишем уравнение движения перемычки:

$$m\,\frac{dv}{dt} = JlB. \tag{144}$$

В правой части стоит знак плюс, так как сила Ампера и индукционный ток отрицательны.

Из (143) $J = -\dfrac{Blv}{R}$, подставляя в (144), получаем:

$$m\,\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2v}{R}\,; \quad \frac{dv}{v} = -kdt, \quad \text{где} \quad k = \frac{B^2l^2}{mR}\,.$$

Интегрируя, имеем:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -kt; \quad v = v_0e^{-kt};$$

$$x = \int\limits_0^{\infty} v\,dt = -\frac{v_0}{k}\,e^{-kt}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{v_0mR}{B^2l^2}\,;$$

б) $Q = \dfrac{mv_0^2}{2}\,.$ □

Ответ. $x = \dfrac{v_0mR}{B^2l^2}\,; \quad Q = \dfrac{mv_0^2}{2}.$

Задача 100

Катушка индуктивности L соединяет верхние концы двух вертикальных медных шин, отстоящих друг от друга на расстояние l. Вдоль шин падает без начальной скорости горизонтальный проводник-перемычка массы m (без нарушения контакта с шинами). Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $\overrightarrow{B}$, перпендикулярном плоскости шин. Найти закон движения $x(t)$. Сопротивление всех проводников пренебрежимо мало.

Решение. Запишем выражение для индукции и самоиндукции в контуре катушка—шина—проводник—перемычка, воспользовавшись результатом предыдущей задачи, и второе правило Кирхгофа, с учетом малости сопротивления всех проводников:

$$\varepsilon_i = vBl; \quad \varepsilon_s = -L\,\frac{dJ}{dt}\,; \quad vBl - L\,\frac{dJ}{dt} = 0,$$

откуда $\dfrac{dJ}{dt} = \dfrac{vBl}{L}$.

Интегрируя, получаем:

$$J = \frac{vBlt}{L}\,. \tag{145}$$

Проводник-перемычка движется под действием силы Ампера и силы тяжести. Закон его движения имеет вид:

$$ma = mg - BlJ; \quad a = \frac{mg - BlJ}{m}\,.$$

С учетом (145), а также, учитывая, что $v = at$; $x = \dfrac{at^2}{2}$, имеем:

$$a = g - \frac{B^2l^2at^2}{Lm}\,.$$

Обозначим $\omega = \dfrac{2lB}{\sqrt{ml}}$, тогда

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g.$$

Убедитесь самостоятельно, что решением этого уравнения является

$$x = \frac{(1-\cos\omega t)g}{\omega^2}\,. \qquad \square$$

Ответ. $x = \dfrac{(1-\cos\omega t)g}{\omega^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Е. Иродов. Электромагнетизм. Основные законы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.

[2] И. Е. Иродов. Задачи по общей физике. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

[3] Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм. — М.: Мир, 1966.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Покровский Вячеслав Валерьевич

**ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

Учебное пособие

Редактор *Б. И. Копылов*
Художник *Н. А. Лозинская*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано к использованию 19.03.15.
Формат 125×200 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Книга является полезным дополнением к учебным пособиям И. Е. Иродова «Электромагнетизм. Основные законы» и «Задачи по общей физике».

Охвачены разделы «Электростатика», «Теорема Гаусса», «Диэлектрики в электрическом поле», «Магнетизм».

Приведены подробные решения 100 задач, которые предваряются краткими теоретическими сведениями и методическими рекомендациями.

Для студентов физических специальностей вузов.