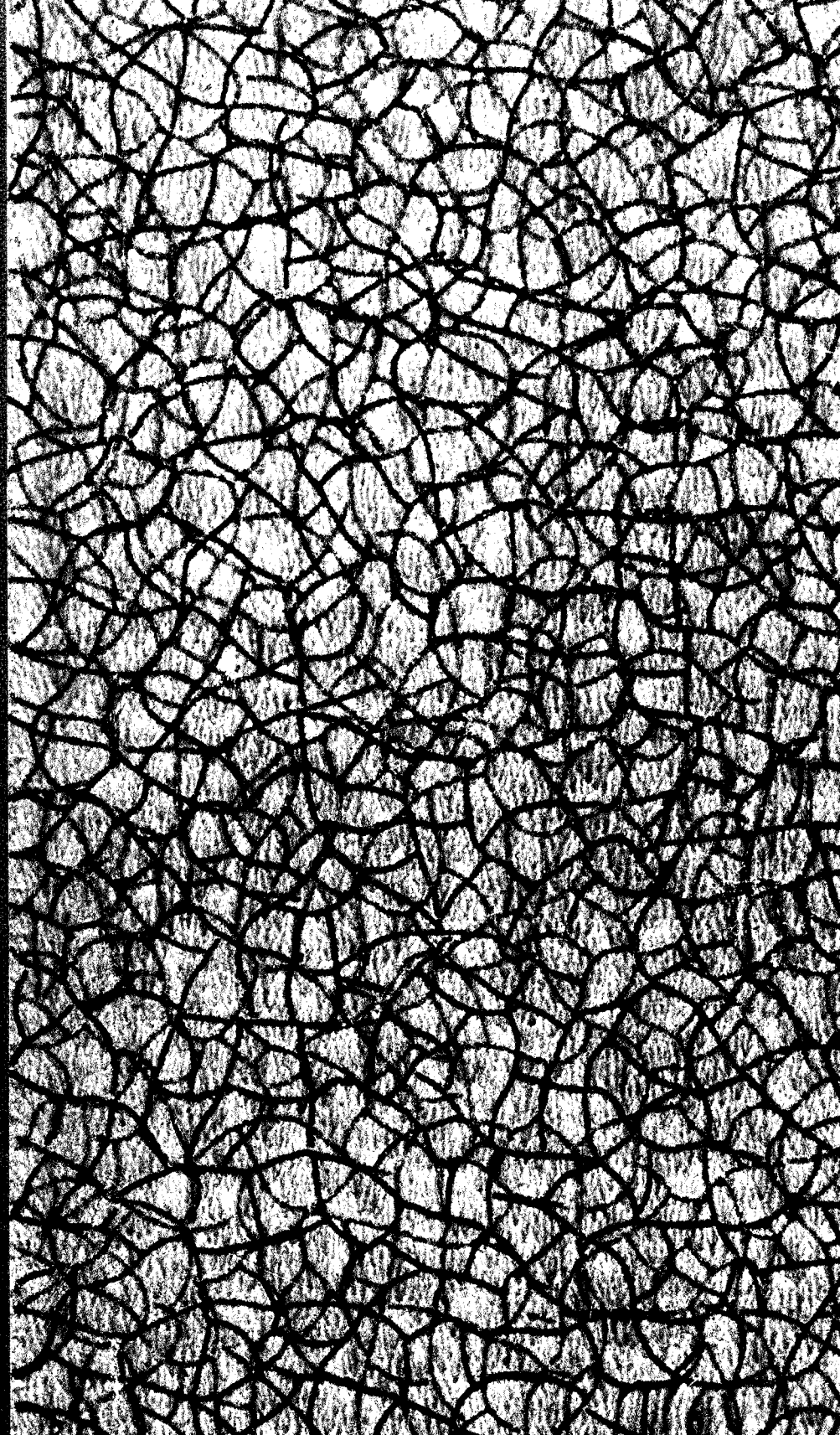




В. Н. ПИНЕГИН

Профессор Одесского Политехнического Института

343

VI-140

ГИДРАВЛИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ОДЕССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
1926

В. Н. ПИНЕГИН

Профессор Одесского Политехнического Института

НАПРАВЛЕН ПО:
КАФЕДРЕ МАШИНОСТРОЕНИЯ
ОДЕССКОМУ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМУ ИНСТИТУТУ

ГИДРАВЛИКА

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

ИЗДАТЕЛЬСТВО

ОДЕССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СТАДИОН ИЛИ МОП АИ

НЕ

25 (02')

ГОС ПУБЛИЧНАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА СССР

7385 $\frac{27}{59}$

Ж
953

Окрянт (Одесса). № 8244
Заказ № 4294—1500 экз.

ОДЕСПОЛИГРАФ
Первая Государственная
типография им. К. Маркса
Стурдзовский пер., № 3-а
Телефоны: 2-50, 21-46.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая книга представляет из себя курс лекций по гидравлике, которые я читал в предпоследние годы в Томском Технологическом Институте, а последний год в Одесском Политехническом Институте для студентов различных факультетов.

Последнее обстоятельство указывает на то, что содержание этого курса составляет, так называемая, общая гидравлика, необходимая для студентов всех специальностей, и заключающая в себе краткое изложение наиболее часто встречающихся в практике каждого инженера вопросов.

Специальные вопросы, интересные только специалистам гидро-техникам инженерно-строительного и гидромеханикам энергетического и механического факультетов, как то: теория вихрей, теория волн, теория и практика расчетов длинных и коротких каналов при неустановившемся течении, наполнение и опоражнивание водохранилищ в связи с работой гидросиловых установок, колебательные движения воды в уравнильных бассейнах и т. д., не вошли в данный учебник и подлежат рассмотрению в специальной гидравлике. Сравнительно небольшое количество времени, отводимое по учебным планам этому предмету, вынуждало излагать вопросы в сжатой и упрощенной форме, в то же время преподавание этого предмета в высшей школе налагало обязательство не терять из вида научности изложения; на сколько удалось мне согласовать эти стремления, предоставляю судить читателям.

В целях лучшего усвоения предмета студентами, каждый отдел снабжен некоторым числом решенных примеров, а желание притти на помощь тем лицам, которые захотели бы углубить свои знания по тому или другому вопросу, повлекло к сопровождению изложения этих вопросов литературными источниками, охватывающими их более широко.

Смею надеяться, что выпускаемый учебник, при почти полном отсутствии на рынке печатных руководств по гидравлике на русском языке (прекрасный курс гидравлики проф. Ф. Е. Максименко по

своему большому объему мало доступен студентам, а курс гидравлики проф. А. И. Астрова совершенно вышел из продажи) не будет совершенно бесполезен.

За указания на те или другие, всегда возможные, упущения в изложении заранее выражаю свою искреннюю признательность. Приношу глубокую благодарность преп. К. В. Кохановскому, взявшему на себя нелегкий труд корректировать издание и следить за исполнением чертежей, а также Издательству Одесского Политехнического Института за приложение больших усилий к тому, чтобы придать учебнику хорошую внешность.

Одесса, 24/IX 1925.

В. Н. Пинегин.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Понятие о предмете.

Гидравлика, как наука, весьма близка к теоретической механике, именно к тому ее отделу, который занимается изучением жидких тел; этот отдел, как известно, в свою очередь, в зависимости от того, рассматривается ли равновесие жидкостей или их движение, подразделяется на два подотдела: Гидростатику и Гидродинамику; последние, исходя из основных свойств жидкого тела, пользуются, при изучении его, во всем остальном общими положениями и выводами теоретической механики, что дает возможность изучение жидкого тела свести к определенным математическим операциям, выражающимся, главным образом, в решении различных дифференциальных уравнений; отсюда вытекает, что решение вопросов гидростатики и гидродинамики по существу зависит от развития математического анализа. Но если последний в настоящее время уже достаточно развит для решения вопросов гидростатики, то нельзя того же сказать относительно вопросов, рассматриваемых в гидродинамике; в последней очень часто приходится встречаться с вопросами, которые при современном состоянии математического анализа, не поддаются разрешению. И если Галилей говорил, что для нас легче представить себе (изучить) движение находящихся от нас на весьма далеком расстоянии небесных тел, чем проанализировать течение ручейка, протекающего у наших ног, а знаменитый Сен-Венан (Saent Venant) даже говорил, что движение жидкости представляет для нас задачу, разрешение которой может свести с ума, то и в настоящее время мы не очень далеко ушли от такого состояния — слова этих великих ученых могут быть повторены и в настоящее время, и мы можем и теперь констатировать те колоссальные затруднения, с которыми приходится встречаться при желании решать вопросы течения жидкостей только посредством математического анализа. Правда гидродинамика за последние годы далеко шагнула вперед по сравнению с тем, что она представляла из себя во времена Галилея, и непрерывно продолжает развиваться дальше; мы имеем прекрасные образцы решения многих вопросов из ее области

чисто математическим путем, но все же эти решения при применении к практическим вопросам редко могут быть использованы непосредственно: всегда почти является потребность введения некоторых поправок, некоторых коэффициентов, зависящих как от рода и состояния жидкостей, так и от рода и состояния тех поверхностей, около которых жидкость протекает и которые уже одним анализом не могут быть определены. Между тем практика весьма настойчиво, и тем более настойчиво, чем больше развивается строительство гидротехнических сооружений, требует ответа на целый ряд вопросов, связанных с течением жидкостей. Не имея пока никакого другого выхода, чтобы все же удовлетворить практическим запросам, люди науки и техники принуждены идти путем компромисса, который заключается в том, что по тому или другому частному вопросу, который настоятельно должен быть разрешен, ставят опыты, иногда лабораторные, иногда в естественных водотоках; из этих опытов получаются некоторые определенные результаты; на основании последних результатов делаются обобщения и составляются гипотезы о тех или других законах течения жидкостей в определенных случаях, а на основании этих гипотез, пользуясь опять основными положениями теоретической механики, составляются уже обобщенные решения. Вот такое изучение вопросов движения жидкостей, изучение, пользующееся, с одной стороны, опытными данными, а с другой стороны, положениями и методами теоретической механики, составляет предмет технической или инженерной гидравлики.

§ 2. Свойства жидких тел.

При изучении жидкостей обычно отличают идеальные жидкости от реальных, или действительно существующих в природе. Всем, конечно, известно, что всякая жидкость чрезвычайно подвижна, что она не имеет способности принимать и сохранять свою собственную форму. Если налить жидкость в любой формы сосуд, она сейчас же примет форму этого сосуда; если на нее подуть, то уже легкого дуновения достаточно, чтобы форма ее изменилась: появится перемещение частиц на ее поверхности и т. д.; все это дает как бы право высказать предположение, что сцепление между частицами жидкости настолько слабо, что не нужно никакой силы, чтобы разъединить их, т. е., другими словами, сказать, что жидкость неспособна оказывать никакого сопротивления силам растягивающим и силам сдвигающим. Кроме того, ежедневный опыт убеждает нас, что, если на жидкость производить давление, то ее объем почти не изменяется; это также дает нам право, конечно, только кажущееся, говорить, что жидкость совершенно несжимаема. Если бы теперь действительно существовала жидкость с ука-

занными свойствами, то это и была бы та жидкость, которую называют идеальной жидкостью. На самом деле в природе таких жидкостей нет; все реально существующие жидкости, из которых наиболее распространенной, как известно, является вода, только отчасти могут приближаться по своим свойствам к идеальным жидкостям в зависимости от рода и состояния, но никогда не совпадают с ними совершенно. Идеальная жидкость есть, так сказать, только предел, к которому приближаются реально существующие жидкости, подобно тому, как твердое тело теоретической механики есть предел, к которому приближается твердое тело природы. Что действительно реальные жидкости отличаются от идеальных, это видно из таких фактов: 1) берем стеклянную палочку, опускаем ее в воду; а затем вынимаем; на конце палочки увидим каплю воды; капля эта образовалась потому, что сила сцепления воды и стекла больше, чем сила сцепления частиц воды; но капля имеет, очевидно, определенный вес и, следовательно, в плоскости сечения, проведенной на некоторой высоте капли, действуют, с одной стороны, силы, растягивающие каплю (вес нижней части), а с другой стороны, силы сцепления частиц капли или силы сопротивления растяжению, и эти силы, при существовании капли, между собой уравниваются; отсюда вывод: вода способна оказывать сопротивление растяжению. Более совершенные опыты Гейнемана (Heimann) даже установили, что вода оказывает сопротивление растяжению, равное при 12°R : $3,7 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$, или $0,00037 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$; 2) берем стеклянный сосуд, наливаем в него воды и начинаем вращать этот сосуд; что мы видим? — слои воды, находящиеся в соприкосновении со стенками сосуда, начинают тоже вращаться; очевидно, сила сцепления между частицами воды и стенками сосуда настолько велика, что последние увлекают во вращение и близлежащие слои воды; но далее оказывается, что и следующие слои постепенно начинают вращаться, т. е. между разными слоями жидкости действуют силы, с одной стороны, увлекающие соседние неподвижные первоначально слои, а с другой стороны, задерживающие более быстро вращающиеся и более близко лежащие к стенкам сосуда слои; отсюда новый вывод: вода способна оказывать сопротивление силам сдвигающим или касательным; а Гейнеман нашел, что вода способна оказывать сопротивление силам сдвигающим, при той же температуре в 12°R равное $2,63 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$, или $0,000263 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$; 3) наконец, опыты показали, что вода способна и сжиматься, и ее объемный коэффициент сжатия может быть представлен в зависимости от давления в таком виде¹⁾:

¹⁾ Акад. А. Ф. Иоффе. Лекции по молекулярной физике. Петроград. 1923, стр. 202.

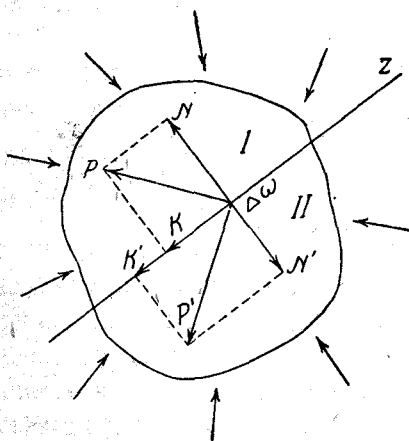
Давление — p (в атмосферах)	Объемный коэффициент сжатия — β	
	0°C	20°C
1 — 25	0,0000525	0,0000491
1 — 500	0,0000475	0,0000434
500 — 1000	0,0000416	0,0000386
1000 — 1500	0,0000358	0,0000338
1500 — 2000	0,0000324	0,0000307
2000 — 2500	0,0000292	0,0000278
2500 — 3000	0,0000261	0,0000257

следовательно, объем $v = v_0(1 - \beta p)$.

Таким образом, реальные жидкости отличаются от идеальных жидкостей, но в то же время мы констатируем, что способности сопротивляться силам растягивающим и сдвигающим очень слабо выражены, и, наоборот, сопротивляемость сжатию чрезвычайно велика. Это повело к тому, что в гидравлике принято рассматривать вообще идеальные жидкости, и полученные результаты исправлять коэффициентами,

находимыми из опытов, причем, конечно, в зависимости от рода жидкостей, их состояния и условий течения, коэффициенты эти будут меняться; в некоторых специальных вопросах, впрочем, приходится обращаться непосредственно к рассмотрению реальных жидкостей.

Из всего предыдущего для идеальных жидкостей можно вывести такое следствие. Пусть мы имеем некоторую массу жидкости, находящуюся в равновесии под действием приложенных к ней сил (см. черт. 1). Проведем мысленно секущую плоскость Z , деля-



Черт. 1.

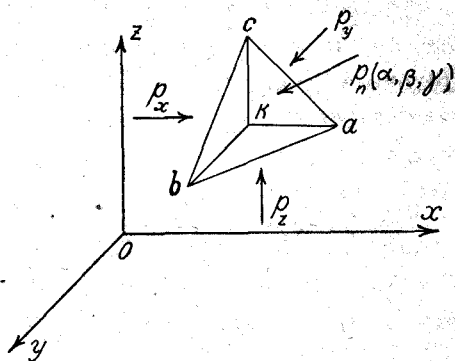
щую взятую нами массу на две части: I и II. Так как плоскость Z проведена мысленно, то, очевидно, в состоянии массы жидкости нарушения не произойдет. Если теперь часть I отбросить, то, чтобы не нарушалось состояние II-ой части, мы должны взамен части I предположить существование на секущей плоскости каких то сил вида P для каждой площадки $\Delta\omega$. Эту силу P , которую мы предположим сперва направленной от части II, мы можем разложить на касательную (K) и нормальную (N). Но жидкость (идеальная) неспособна оказывать сопротивление силам растягивающим и сдвигающим, поэтому, если мы хотим, чтобы часть II осталась в равновесии по прежнему, существование таких сил, как N и K , мы должны считать невозможным. Если бы мы предположили вместо

силы P силу P' , то, разлагая последнюю на K' и N' , пришли бы к аналогичному заключению о невозможности существования и такой силы, так как составляющая K' равновесие нарушила бы. Мы, очевидно, придем к заключению, что единственно возможное направление силы внутри жидкого тела, это нормальное к той поверхности, на которую рассматривается воздействие такой силы, при чем эта сила должна быть направлена по внутренней нормали, т. е. быть давлением. Этим жидкие тела отличаются от твердых тел, в которых внутренняя сила может быть направлена по любому направлению и быть любого знака.

Величина вышеуказанной внутренней силы определяется отношением $\frac{P}{\Delta\omega}$, но для выявления ее напряжения, очевидно, необходимо освободиться от величины площади. Если мы будем уменьшать площадь $\Delta\omega$ беспредельно, и при том так, что точка приложения силы P все время остается внутри этой площади, то предел отношения $\frac{P}{\Delta\omega}$, при приближении $\Delta\omega$ к нулю, и будет изображать напряжение, или то, что называют гидростатическим давлением (p) в точке приложения силы; из изложенного следует: $\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta\omega} = p$; откуда $\frac{P}{\Delta\omega} = p + \varepsilon$, где ε — бесконечно малая величина, обращающаяся в нуль при $\Delta\omega = 0$, или $P = p\Delta\omega + \varepsilon\Delta\omega$; так как площадь $\Delta\omega$ очень мала, то с точностью до бесконечно малых величин не высшего порядка, чем $\Delta\omega$, можно считать, что $P = p\Delta\omega$, где p давление в любой точке площадки.

Новым следствием предыдущих свойств жидкостей является такое: во всякой точке жидкости давление не зависит от направления, в котором рассматривается давление, и, следовательно, зависит только от координат этой точки, т. е. $p = f(x, y, z)$.

Для доказательства этого положения возьмем массу жидкости, находящуюся в равновесии, и в ней вообразим оси координат ($Oxyz$, черт. 2). В пространстве, занятом жидкостью, от некоторой точки k , координаты которой пусть будут x, y, z , проводим бесконечно малые отрезки $\delta x, \delta y, \delta z$; через полученные таким образом точки a, b, c , вообразим плоскость; тогда выделенный мысленно объем $kabc$ будет тетраэдр, и, так как этот тетраэдр выделен в жидкости, находящейся в равновесии, то и сам он будет находиться в равновесии, несмотря на то, что на него, очевидно, действуют силы, нормальные к граням,



Черт. 2.

и объемные силы; назовем силы, нормальные к граням kbc , kac , kab соответственно через p_x , p_y , p_z , а силу, нормальную (углы этой нормали с осями координат назовем соответственно через α , β , γ) к грани abc , через p_n ; силы эти будем понимать, как силы, приходящиеся на единицу площади граней (с вышеуказанным приближением); при равновесии тетраэдра все проекции сил по осям координат, в том числе и сил объемных, выражающихся через $\frac{U}{6} \rho \, dx \, dy \, dz$, (обозначая через ρ плотность жидкости, а через U ускорение от объемных сил, отнесенное к единице массы), должны уравновеситься; т. е. мы имеем право написать соотношения:

$$\frac{1}{2} p_x \, dy \, dz - p_n \, d\omega \cos \alpha + \frac{X}{6} \rho \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} p_x \, dy \, dz - p_n \, d\omega \cos \alpha + \epsilon_1''' = 0,$$

$$\frac{1}{2} p_y \, dx \, dz - p_n \, d\omega \cos \beta + \frac{Y}{6} \rho \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} p_y \, dx \, dz - p_n \, d\omega \cos \beta + \epsilon_2''' = 0,$$

$$\frac{1}{2} p_x \, dx \, dy - p_n \, d\omega \cos \gamma + \frac{Z}{6} \rho \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} p_z \, dx \, dy - p_n \, d\omega \cos \gamma + \epsilon_3''' = 0,$$

где через X , Y , Z обозначены проекции ускорения U по осям координат, а через ϵ_1''' , ϵ_2''' , ϵ_3''' — бесконечно малые величины 3-го порядка малости типа $\frac{X}{6} \rho \, dx \, dy \, dz$ и т. д.; так как $d\omega \cos \alpha = \frac{1}{2} \, dy \, dz$, $d\omega \cos \beta = \frac{1}{2} \, dx \, dz$, $d\omega \cos \gamma = \frac{1}{2} \, dx \, dy$, то предыдущие соотношения принимают вид:

$$p_x - p_n + \epsilon_1' = 0,$$

$$p_y - p_n + \epsilon_2' = 0,$$

$$p_z - p_n + \epsilon_3' = 0,$$

где ϵ_1' , ϵ_2' , ϵ_3' бесконечно малые величины первого порядка малости (типа $\frac{X}{3} \rho \, dx$ и т. д.), приближающиеся к нулю по мере уменьшения dx , dy , dz и в пределе обращающиеся в нуль. Если теперь действительно уменьшать равномерно dx , dy , dz , то площадка abc будет приближаться к точке k и в пределе с ней сольется, а тогда

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$

Так как отрезки dx , dy , dz выбраны совершенно произвольно, то при всяких других значениях их будем иметь новую ориентировку площадки abc и новое направление и величину силы p_n , например: p_n' , p_n'' , p_n''' , ..., но, рассуждая по предыдущему, в результате получим, что в пределе

$$p_x = p_y = p_z = p_n' = p_n'' = p_n''' = \dots,$$

т. е. действительно величина давления в данной точке не зависит от направления и может быть только функцией координат точки приложения:

$$p = f(x, y, z).$$

ГЛАВА I.

§ 1. Равновесие жидкого тела.

Выделим в жидкости, находящейся в равновесии, элементарный объем $klmtnsr$ (черт. 3) в виде параллелепипеда и найдем условия его равновесия. По предыдущему, давления в точке (k) одинаковы по всем направлениям, а потому, ввиду малости граней параллелепипеда, с точностью до бесконечно малых величин 2-го порядка малости, можно считать, что давления на грани km , kr и kt одинаковы и равны p ; на противоположных гранях давления, очевидно, будут:

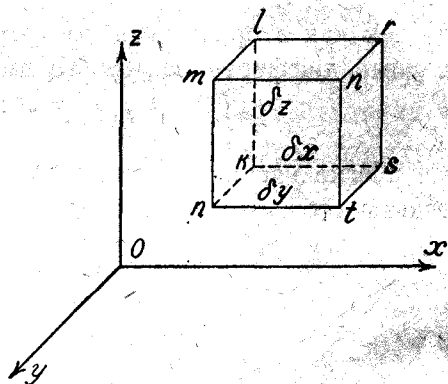
$$p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \dots, \quad p + \frac{\partial p}{\partial y} \delta y + \dots, \\ p + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z + \dots, \quad \text{а потому разности}$$

давлений вдоль осей координат определяются соответственно через:

$-\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \dots, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z + \dots, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z + \dots$. Беря проекции сил по осям координат, в том числе и сил объемных, получим условия равновесия:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \rho X \delta x \delta y \delta z + \epsilon_1^{IV} &= 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial y} \delta y \delta x \delta z + \rho Y \delta x \delta y \delta z + \epsilon_2^{IV} &= 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \delta z \delta x \delta y + \rho Z \delta x \delta y \delta z + \epsilon_3^{IV} &= 0, \end{aligned}$$

где через ϵ_1^{IV} , ϵ_2^{IV} , ϵ_3^{IV} обозначены бесконечно малые величины выше 3-го порядка малости; деля далее полученные соотношения на $\delta x \delta y \delta z$,



Черт. 3.

в пределе для бесконечно малого объема жидкости будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho X &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \varrho Y &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \varrho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} \varrho X &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \varrho Y &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ \varrho Z &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

каковые уравнения носят название Эйлеровых уравнений гидростатики, так как они были даны впервые Эйлером еще в 1755 г.

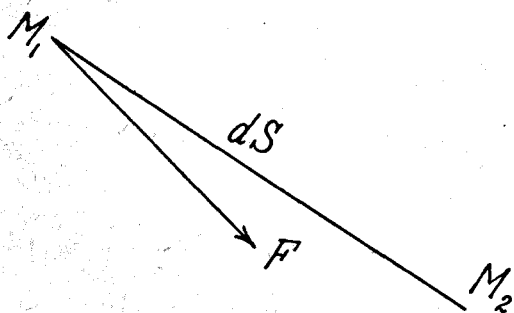
Из найденных выше трех уравнений можно получить одно, вполне их заменяющее; для этого умножаем уравнения (1) соответственно на dx , dy , dz и полученные выражения складываем:

$$\varrho [Xdx + Ydy + Zdz] = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz,$$

но, так как вторая часть последнего уравнения есть ничто иное, как полный дифференциал dp , то имеем

$$dp = \varrho [Xdx + Ydy + Zdz]. \quad (2)$$

Легко уяснить физический смысл этого уравнения; для этого представим себе, что частица жидкости с массой, равной единице, переме-



Черт. 4.

щается под действием внешней силы F из положения M_1 в положение M_2 (черт. 4), причем перемещение M_1M_2 (ds) настолько мало, что, если координаты M_1 суть x, y, z , то координаты M_2 : $x+dx, y+dy, z+dz$; в таком случае имеем очевидные соотношения: $dx = ds \cos \alpha$, $dy = ds \cos \beta$, $dz = ds \cos \gamma$, если углы, образованные линией M_1M_2 с осями координат назовем через α, β, γ ; если еще положить $X = F \cos \alpha'$, $Y = F \cos \beta'$, $Z = F \cos \gamma'$, где α', β', γ' — углы, составляемые направлением силы F с осями координат, то, подставляя найденные значения dx, dy, dz, X, Y и Z в уравнение (2), получим

$$dp = \varrho ds F [\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'],$$

а так как выражение в скобках есть ничто иное, как $\cos \widehat{Fds}$, то, окончательно,

$$dp = \varrho ds F \cos \widehat{Fds}, \quad (3)$$

что означает, что приращение давления при перемещении в жидкости из одного положения в другое, выражается произведением работы внешней объемной силы на этом пути на плотность жидкости.

Соотношение (2) дает возможность определить при данных внешних силах самое давление, для чего стоит только это выражение проинтегрировать:

$$p = \int \varrho [Xdx + Ydy + Zdz] + C, \quad (4)$$

где произвольная постоянная определяется по заданным значениям давления в определенных точках (особые уравнения).

Если в жидкости имеются поверхности, в которых давление имеет постоянное значение, то, во первых, такие поверхности называются поверхностями равного давления или поверхностями уровня, а, во вторых, уравнения таких поверхностей будут иметь вид:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad (5)$$

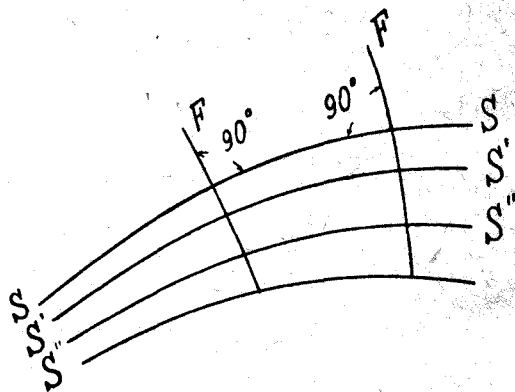
так как $p = \text{const}$, следовательно $dp = 0$, а $\varrho \neq 0$.

Поверхности равного давления, согласно с соотношением (3), могут быть выражены уравнением вида

$$F ds \cos \widehat{F} ds = 0,$$

которое, если представить сечение поверхности равного давления плоскостью чертежа кривой ss (черт. 5), говорит, что внешняя объемная сила F нормальна ко всякому элементарному перемещению (ds) от точки приложения этой силы по рассматриваемой поверхности, т. е. нормальна к поверхности равного давления. Далее из соотношения (3) следует, что

$$ds = \frac{dp}{\varrho F \cos \widehat{F} ds};$$



Черт. 5.

поэтому, если перемещаться с одной поверхности уровня (ss)

на другую, бесконечно близкую поверхность уровня ($s's'$), по направлению действия силы F , то $\cos \widehat{F} ds$ будет равен ± 1 , а $dp \neq 0$ и, следовательно, никогда не может быть

$$ds = 0,$$

т. е., другими словами, поверхности равного давления (конечно, различного для каждой поверхности) никогда не могут между собой пересекаться.

Перемещаясь в жидкой массе по направлению внешней объемной силы, или результирующей таких сил, мы опишем в общем случае кривую, нормальную ко всем попадающимся на пути поверхностям равного давления, и такая кривая, очевидно, может быть выражена уравнением

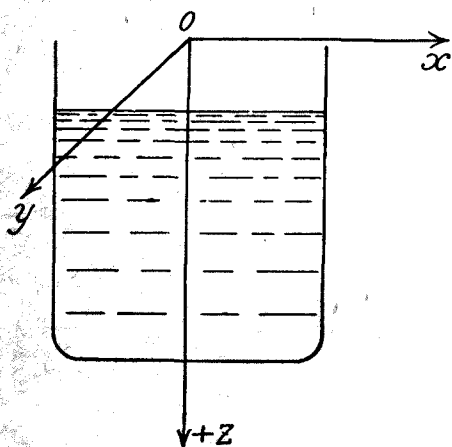
$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \quad (6)$$

К этой кривой результирующая сила будет касательна во всех ее точках; поэтому ее называют силовой линией.

§ 2. Примеры на определение поверхностей равного давления.

Задача № 1. Определить форму свободной поверхности жидкости, напр., воды, подверженной только силе тяжести; жидкость, предполагается, имеет небольшое протяжение в горизонтальном направлении.

Решение. При указанных условиях силу тяжести можно считать направленной одинаково на всей поверхности по вертикали вниз; по-



Черт. 6.

этому, выбирая оси координат так, что ось z направлена сверху вниз (черт. 6), а оси x и y лежат в горизонтальной плоскости, получим для составляющих по осям координат внешней силы значения

$$\begin{aligned} X &= Y = 0, \\ Z &= g. \end{aligned}$$

Уравнение (5) примет вид:

$$g dz = 0,$$

откуда, интегрируя, получаем:

$$gz = C,$$

т. е. поверхности равного давления — горизонтальные плоскости. Если начало координат выбрано на свободной поверхности жидкости, то

$$C = 0,$$

и, следовательно, уравнение свободной поверхности будет

$$z = 0,$$

т. е. горизонтальная плоскость, проходящая через начало координат.

Задача № 2. В сосуд цилиндрической формы радиуса R и высотой H налита вода до половины; сосуд вращается с угловой скоростью ω ; определить форму свободной поверхности, а также необходимую скорость вращения, при которой вода начнет переливаться через край сосуда.

Решение. Очевидно, при вращении сосуда (черт. 7), в силу сцепления частиц воды с его стенками, жидкость начнет вращаться с той же самой угловой скоростью, что и сосуд. Частицы жидкости с массой, равной единице, будут подвержены в каждом месте центробежной силе $\frac{U_0^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$ и силе веса ($-g$); таким образом, составляющие результирующей силы F будут:

$$X = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 r \frac{x}{r} = \omega^2 x;$$

$$Y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 r \frac{y}{r} = \omega^2 y;$$

$$Z = -g.$$

Поэтому уравнение (5) примет вид:

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0,$$

а, интегрируя, имеем:

$$\omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - gz = C,$$

каковое уравнение представляет из себя уравнение параболоида вращения; так как $x^2 + y^2 = r^2$, то:

$$\omega^2 \frac{r^2}{2} - gz = C, \text{ или, иначе, } \frac{\omega^2 r^2}{2g} - z = \frac{C}{g} = C_1.$$

Для определения постоянной C_1 , рассуждаем так: при $r=0$, $z=H_1$; при $r=R$, $z=H_2$; поэтому

$$-H_1 = C_1;$$

$$\omega^2 \frac{R^2}{2g} - H_2 = C_1,$$

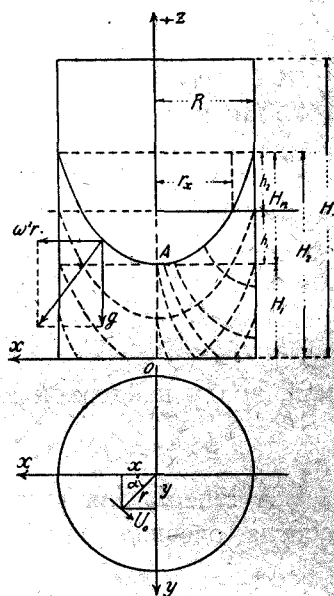
$$\text{откуда } \omega^2 \frac{R^2}{2g} - H_2 = -H_1, \text{ или } [H_2 - H_1] = H_n = \frac{\omega^2 R^2}{2g},$$

и, следовательно:

$$H_n = \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Если предположить плоскость xy проходящей через вершину параболоида (точка A), то уравнение последнего примет простой вид:

$$\frac{\omega^2 R^2}{2g} = z.$$



Черт. 7.

Радиус r_x , при котором поверхность параболоида пересекает плоскость $z = \frac{H_n}{2}$, очевидно, определится из соотношения

$$\frac{\omega^2 r_x^2}{g} = H_n,$$

и, таким образом, находим:

$$r_x^2 = \frac{R^2}{2}.$$

Так как, далее, из свойств параболоида вытекает, что

$$\frac{\pi R^2 H_n}{2} - \frac{\pi r^2 h_1}{2} = \frac{\pi (R^2 + r_x^2) h_2}{2},$$

то отсюда, после сокращений,

$$h_2 = \left(\frac{R^2}{r_x^2} - 1 \right) h_1,$$

или, ввиду найденной выше зависимости между R и r_x ,

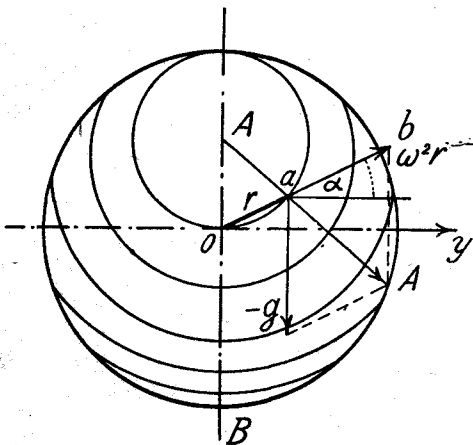
$$h_2 = h_1.$$

А теперь, для того, чтобы вода начала переливаться через край сосуда, очевидно необходимо, чтобы угловая скорость удовлетворяла соотношению

$$\frac{\omega_x^2 R^2}{2g} = H,$$

откуда

$$\omega_x = \frac{\sqrt{2gH}}{R}.$$



Черт. 8.

Решение. Единичная масса жидкости подвергается, очевидно, силам $(-g)$ и $(\omega^2 r)$ (черт. 8), поэтому:

$$Y = r\omega^2 \cos \alpha = r\omega^2 \frac{y}{r} = \omega^2 y;$$

$$Z = -g + r\omega^2 \sin \alpha = -g + r\omega^2 \frac{z}{r} = -g + \omega^2 z.$$

Задача № 3. Налитая в горизонтальный цилиндрический сосуд жидкость вращается вокруг оси последнего с постоянной угловой скоростью ω . Сосуд совершенно заполнен жидкостью. Найти форму поверхностей равного давления.

Таким образом, поверхности равного давления имеют дифференциальные уравнения:

$$\omega^2 y dy + (-g + \omega^2 z) dz = 0,$$

из которых, после интегрирования и приведения, получаем конечное уравнение:

$$\omega^2 (y^2 + z^2) - 2gz = C,$$

а так как $y^2 + z^2 = r^2$, то

$$\omega^2 r^2 - 2gz = C;$$

последнее уравнение представляет ничто иное, как уравнение окружностей, центр которых перемещен по оси z -ов в точку (A), находящуюся на расстоянии $\frac{g}{\omega^2}$ от начала координат O ; это видно также из того, что, на основании подобия треугольников abA_1 и aOA , следует:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{bA_1}} = \frac{\overline{Oa}}{\overline{ab}},$$

откуда

$$\overline{AO} = \frac{bA_1 \cdot \overline{Oa}}{\overline{ab}} = \frac{gr}{\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2}.$$

По мере увеличения угловой скорости, очевидно, центр A приближается к центру O , с которым и сливается в пределе, при $\omega = \infty$.

В последнем случае давления распределяются совершенно равномерно по концентрическим вокруг оси (O) цилиндрам (например, в очень быстро вращающихся центробежных насосах). По мере же уменьшения окружной скорости, концентричность расположения окружностей равных давлений вокруг оси O нарушается, ось (A) поднимается все выше и выше, и давление по оси z распределяется все более и более несимметрично по отношению к оси (O); от оси A давление увеличивается к образующей B по параболе, что видно из выражения давления:

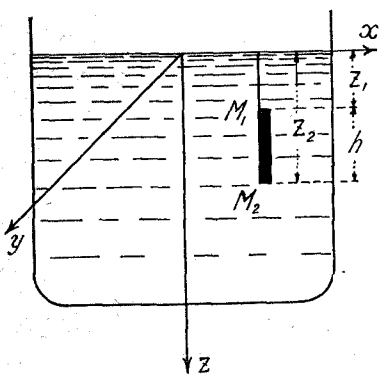
$$\frac{p}{\delta} = \frac{p_0}{\delta} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} - z,$$

получающегося после подстановки значений проекций сил и интегрирования дифференциального уравнения (2).

§ 3. Определение давления в жидкости.

Допустим, что мы имеем некоторое количество жидкости, например, воды, заключенной в сосуде, водоеме и т. п.; жидкость (вода) подвержена только силе тяжести. Возьмем оси координат так, что

начало их находится на свободной поверхности, оси x и y расположены в горизонтальной плоскости, а ось z направлена сверху вниз (черт. 9); тогда



Черт. 9.

$$\begin{aligned} X &= 0 = Y; \\ Z &= g, \end{aligned}$$

и, следовательно, уравнение (2) примет вид:

$$dp = \rho g dz. \quad (7)$$

Допустим, что мы желаем определить разность давлений в 2-х точках M_1 и M_2 ; тогда, интегрируя выражение (7) в указанных пределах, найдем:

$$p_2 - p_1 = \rho g (z_2 - z_1), \text{ или } p_2 = p_1 + \rho g (z_2 - z_1) = p_1 + \rho g h = p_1 + \delta h;$$

таким образом: давление в точке M_2 равно давлению в точке M_1 плюс вес водяного цилиндрика, у которого в основании площадь, равная единице, а высота его равна вертикальному расстоянию между данными точками.

Если точка M_1 будет на поверхности, то $p_1 = p_a$ (атмосферному давлению), и

$$p_2 = p_a + \delta h, \quad (8)$$

где h уже будет глубина погружения точки M_2 под свободной поверхностью. Если будем рассматривать только относительное давление воды, то для такового найдем весьма простое выражение:

$$p = p_2 - p_a = \delta h \left[\frac{\kappa z}{\mathcal{M}^2} \right], \quad (9)$$

откуда обратно:

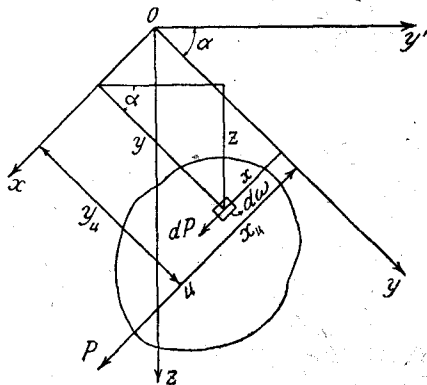
$$h = \frac{p}{\delta} \left[\frac{\kappa z}{\mathcal{M}^2} \cdot \frac{\mathcal{M}^3}{\kappa z} = \mathcal{M} \right].$$

Давления принято выражать, как указано, в κz , глубины h — в метрах, и, так как для воды можно принять (строго говоря, только при 4°C) $\delta = 1000 \left[\frac{\kappa z}{\mathcal{M}^3} \right]$, то, зная еще, что 1 атм (техническая) $\cong 1 \frac{\kappa z}{\text{см}^2}$ или $10000 \frac{\kappa z}{\mathcal{M}^2}$, для атмосферного давления, выраженного высотой водяного столба, $h_a = \frac{10000}{1000} = 10 \text{ м}$; если же измерять атмосферное давление высотой ртутного столба, то, так как вес ртути в 13,6 (13,596) раза больше веса воды,

$$h_a = \frac{10000}{13600} = 0,735 \text{ м}.$$

§ 4. Давления на плоские и криволинейные стенки.

Требуется определить давление на плоскую стенку ограниченных размеров и центр приложения давления. Пусть эта стенка (черт. 10) площадью ω [м²] как угодно расположена в воде; для того, чтобы ориентировать положение этой стенки, продолжим мысленно ее до пересечения со свободной поверхностью воды и линию пересечения примем за ось x -ов. Ось y -ов предположим сперва расположенной в свободной поверхности (ось y'), а ось z -ов направим сверху вниз. Выделим элементарную площадку $d\omega$ и давление на нее обозначим через dP ; тогда, по вышеизложенному, это давление будет нормально к площадке $d\omega$ и, если глубина погружения элементарной площадки равна z , то



Черт. 10.

$$dP = \delta z d\omega.$$

Все такого рода элементарные давления на другие элементарные площадки будут параллельны давлению dP ; ему будет параллельно и результирующее давление P , величина которого найдется, если просуммируем элементарные давления:

$$P = \delta \int_{\omega} z d\omega = \delta \omega z_c, \quad (10)$$

т. е. давление на плоскую стенку выражается весом цилиндра воды, у которого основанием служит площадь (ω) стенки, а высотой глубина (z_c) погружения центра тяжести стенки, или еще: равно площади стенки на давление в центре тяжести стенки.

Необходимо обратить также внимание на то, что, согласно выражения (10), давление остается неизменным, как бы мы не вращали стенку, лишь бы глубина центра тяжести ее оставалась неизменной, и если только при этом вращении часть стенки не выйдет за пределы воды.

Для определения центра давления поступим так: прежде всего ось y -ов повернем, оставляя ее нормальной к оси x -ов, до совпадения с плоскостью стенки, и пусть угол вращения будет α . Тогда $z = y \sin \alpha$ и, следовательно, $dP = \delta y \sin \alpha d\omega$, а $P = \delta \sin \alpha \int_{\omega} y d\omega$. Допустим далее, что задача решена, и пусть точка приложения равнодействующей P есть точка (u). Известно, что момент равнодействующей силы

относительно оси равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси, а потому

$$Px_u = \int_{\omega} \delta xy \sin \alpha d\omega,$$

$$Py_u = \int_{\omega} \delta y^2 \sin \alpha d\omega,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} y_u &= \frac{\delta \sin \alpha \int_{\omega} y^2 d\omega}{P} = \frac{\delta \sin \alpha \int_{\omega} y^2 d\omega}{\delta \sin \alpha \int_{\omega} y d\omega} = \frac{\int_{\omega} y^2 d\omega}{\int_{\omega} y d\omega} \\ x_u &= \frac{\delta \sin \alpha \int_{\omega} xy d\omega}{P} = \frac{\delta \sin \alpha \int_{\omega} xy d\omega}{\delta \sin \alpha \int_{\omega} y d\omega} = \frac{\int_{\omega} xy d\omega}{\int_{\omega} y d\omega} \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

а так как $\int_{\omega} y^2 d\omega$ есть момент инерции (J_x) стенки относительно оси x -ов, $\int_{\omega} y d\omega$ — статический момент (Θ_x) стенки относительно той же оси, и $\int_{\omega} xy d\omega$ — центробежный момент (Θ_{xy}), то можно предыдущие выражения для координат точки приложения равнодействующей силы представить так:

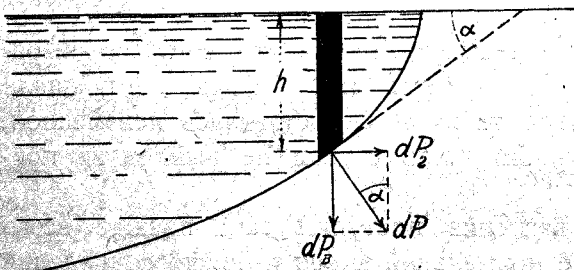
$$\left. \begin{aligned} y_u &= \frac{J_x}{\Theta_x} \\ x_u &= \frac{\Theta_{xy}}{\Theta_x} \end{aligned} \right\}; \quad (12)$$

наконец, так как $J_x = J_c + \omega y_c^2$, а $\Theta_x = \omega y_c$, то

$$y_u = \frac{J_x}{\Theta_x} = \frac{J_c + \omega y_c^2}{\omega y_c} = y_c + \frac{\rho^2}{y_c},$$

где ρ — радиус инерции, а J_c момент инерции стенки относительно оси, проходящей через центр тяжести стенки параллельно оси x -ов.

Второе из уравнений (11) или (12) показывает, что результирующая сила давления всегда лежит в плоскости симметрии, нормальной к



Черт. 11.

плоскости стенки и проходящей через центр тяжести ее.

Если теперь мы имеем криволинейную стенку, то нетрудно показать, что нахождение величины давления и центра приложения равнодействующей легко свести к предыдущему случаю плоской стенки. В самом деле, на криволинейной

стенке (черт. 11) выделим элементарную площадку $d\omega$ и обозначим давление (нормальное) на нее через dP ; для ориентации площадки

проводим плоскость, касательную к площадке, и пусть она пересечет продолжение свободной поверхности воды в сосуде под углом α ; разложим давление dP , величина которого, очевидно, есть $\delta h d\omega$, на две составляющие: горизонтальную (dP_z) и вертикальную (dP_s); по чертежу совершенно ясно, что

$$\begin{aligned} dP_z &= dP \sin \alpha = \delta h \sin \alpha d\omega; \\ dP_s &= dP \cos \alpha = \delta h \cos \alpha d\omega. \end{aligned}$$

Так как, далее, очевидно также, что

$$\begin{aligned} d\omega \sin \alpha &= d\omega_s, \\ d\omega \cos \alpha &= d\omega_z, \end{aligned}$$

то предыдущие соотношения могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} dP_z &= \delta h d\omega_s \quad | \\ dP_s &= \delta h d\omega_z \quad | \end{aligned} \quad (13)$$

Последние соотношения показывают, что давление по горизонтали на элементарную площадку равно давлению на проекцию этой площадки на вертикальную плоскость, давление же по вертикали равно весу столбика жидкости, у которого основанием служит проекция элементарной площадки на горизонтальную плоскость, а высотой глубина погружения этой площадки под свободной поверхностью.

Вполне понятно далее, что

$$\left. \begin{aligned} P_z &= \delta \int_{\omega} h d\omega_s \\ P_s &= \delta \int_{\omega} h d\omega_z \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и, наконец, полное давление

$$P = \sqrt{P_z^2 + P_s^2}. \quad (15)$$

Таким образом, горизонтальная составляющая давления на криволинейную стенку равна давлению на проекцию стенки на вертикальную плоскость, а вертикальная составляющая равна весу жидкости, находящейся над криволинейной стенкой (между прочим, отсюда вытекает известный парадокс Pascal'я), полное же давление равно корню квадратному из суммы квадратов составляющих давлений.

Для нахождения центра приложения давления воспользуемся опять теоремой о моменте результирующей силы; имеем очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} P_z h_u &= \delta \int_{\omega} h^2 d\omega_s, \\ P_s x_u &= \delta \int_{\omega} h x d\omega_z, \end{aligned}$$

откуда

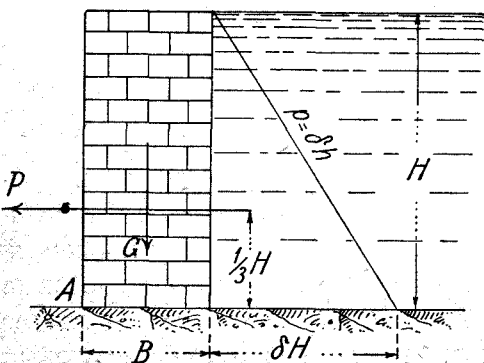
$$\left. \begin{aligned} h_u &= \frac{\int_{\omega} h^2 d\omega_s}{\int_{\omega} h d\omega_s} \\ x_u &= \frac{\int_{\omega} h x d\omega_s}{\int_{\omega} h d\omega_s} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и, следовательно, глубина центра приложения давления выражается отношением момента инерции проекции стенки на вертикальную плоскость относительно оси, лежащей в свободной поверхности жидкости (нормально к чертежу), к статическому моменту этой проекции относительно той-же оси; из второго соотношения (16) видно также, что точка приложения давления лежит в плоскости симметрии стенки, проходящей параллельно чертежу через центр тяжести стенки, если такая плоскость симметрии вообще имеется и в ней лежит ось у'ов.

§ 5. Примеры на определение давления воды на стенки.

Задача № 4. Определить отношение ширины (B) стенки, подпирающей воду, к ее высоте (H) из условия, чтобы стенка не опрокинулась от давления воды, а также найти это отношение при двойном запасе устойчивости (черт. 12).

Решение. При решении предложенной задачи, равно как и при других аналогичных, можно применять геометрическую интерпретацию распределения давления, что иногда значительно упрощает самое решение.



Черт. 12.

выразится так:

$$P = \frac{\delta H \cdot H}{2} = \frac{\delta H^2}{2},$$

где все обозначения уже известны. Приложена будет эта равнодействующая на одной трети высоты (H) от нижней границы стенки, т. е.

момент, опрокидывающий стенку около точки A , будет

$$M_0 = P \cdot \frac{1}{3} H = \frac{\delta H^2}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{\delta H^3}{6}.$$

От опрокидывания удерживает стенку ее вес (G), который, очевидно, называя вес одного m^3 кладки стенки через δ_c , может быть выражен (на единице длины) через $\delta_c \cdot BH$; момент, удерживающий от опрокидывания, выразится как

$$M_y = \delta_c B \cdot H \cdot \frac{B}{2} = \delta_c H \frac{B^2}{2};$$

не вводя запаса устойчивости, условие неопрокидывания стенки представится, очевидно, так:

$$M_y \geq M_0, \text{ или } \delta_c \frac{HB^2}{2} \geq \frac{\delta H^3}{6},$$

откуда

$$\delta_c B^2 \geq \frac{\delta H^2}{3}, \text{ или } \frac{B}{H} \geq \sqrt{\frac{\delta}{3 \delta_c}}.$$

При двойном запасе устойчивости будем иметь очевидное соотношение:

$$M_y \geq 2M_0, \text{ или } \delta_c \frac{HB^2}{2} \geq \frac{\delta H^3}{3},$$

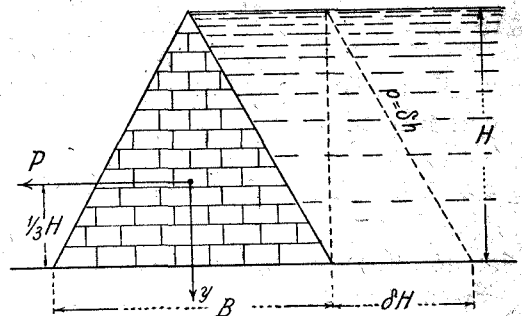
откуда

$$\frac{B}{H} \geq \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\delta}{\delta_c}}.$$

В последнем случае для объема кладки на 1 погонном метре стенки получаем выражение:

$$V = B \cdot H \cong H^2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\delta}{\delta_c}}.$$

Задача № 5. Определить для изображенной на прилагаемом чертеже (черт. 13) стенки отношение основания (B) к высоте (H), при условии, чтобы стенка не опрокинулась от давления воды, а также найти то же отношение при двойном запасе устойчивости (форма стенки — равнобедренный треугольник).



Черт. 13.

Решение. Так как по теореме: давление по горизонтали на какую угодно стенку равно давлению на проекцию этой стенки на верти-

кальную плоскость, распределение давлений по высоте на данную стенку может быть выражено опять законом прямой линии, то

$$P = \frac{\delta H \cdot H}{2} = \frac{\delta H^2}{2},$$

и момент, опрокидывающий стенку будет:

$$M_0 = \frac{\delta H^2}{2} \cdot \frac{H}{3} = \frac{\delta H^3}{6}.$$

Сила, удерживающая стенку от опрокидывания, выразится, как

$$y = \frac{BH}{2} \cdot \delta_c,$$

а момент, удерживающий от опрокидывания,

$$M_y = y \frac{B}{2} = \frac{BH}{2} \delta_c \frac{B}{2} = \delta_c H \frac{B^2}{4}.$$

Таким образом, условие устойчивости стенки будет

$$M_y \geq M_0, \text{ или } \delta_c \frac{HB^2}{4} \geq \frac{\delta H^3}{6},$$

откуда

$$\frac{B}{H} \geq \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\delta}{\delta_c}}.$$

При двойном запасе устойчивости имеем:

$$M_y \geq 2 M_0, \text{ или } \delta_c H \frac{B^2}{4} \geq \frac{\delta H^3}{3},$$

откуда

$$\frac{B}{H} \geq \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\delta}{\delta_c}}.$$

Для объема кладки на 1 погонном метре стенки, очевидно, получаем выражение:

$$V = \frac{BH}{2} \cong \frac{H^2}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\delta}{\delta_c}} \cong H^2 \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\delta}{\delta_c}};$$

таким образом, для стенки прямоугольной требуется кладки в

$$H^2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\delta}{\delta_c}} : H^2 \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\delta}{\delta_c}} = \sqrt{2}$$

раза больше, чем для рассматриваемой стенки.

Задача № 6. Решить аналогичную предыдущим задачу для стенки, показанной на прилагаемом чертеже (черт. 14).

Решение. По предыдущему имеем:

$$M_0 = \frac{\delta H^2}{2} \frac{H}{3} = \frac{\delta H^3}{6};$$

$$M_y = G \frac{2}{3} B = \delta_c \frac{BH}{2} \frac{2}{3} B = \delta_c \frac{HB^2}{3},$$

а теперь условие устойчивости:

$$M_y \geq M_0, \text{ или } \delta_c \frac{HB^2}{3} \geq \frac{\delta H^3}{6},$$

и, следовательно

$$\frac{B}{H} \geq \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta_c}}.$$

При двойном запасе устойчивости имеем:

$$M_y \geq 2M_0, \text{ или } \delta_c \frac{HB^2}{3} \geq 2\delta \frac{H^3}{6},$$

$$\text{или } \delta_c HB^2 \geq \delta H^3,$$

откуда

$$\frac{B}{H} \geq \sqrt{\frac{\delta}{\delta_c}}.$$

Объем кладки на 1-м погонном метре стенки будет:

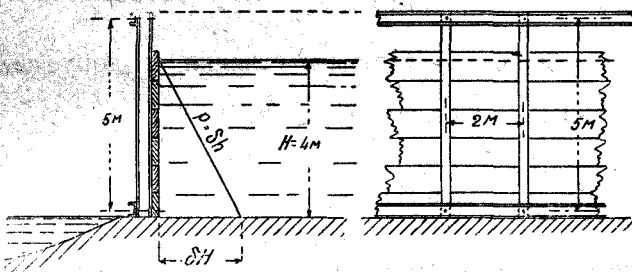
$$V = \frac{BH}{2} \approx \frac{H^2}{2} \sqrt{\frac{\delta}{\delta_c}}.$$

Таким образом, объем кладки для стенки прямоугольной в

$$H^2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\delta}{\delta_c}} : \frac{H^2}{2} \sqrt{\frac{\delta}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx \sqrt{2,67}$$

раза больше, чем для стенки рассматриваемой формы.

Задача № 7. Определить давление и центр приложения равнодействующей давления на щит и рассчитать стойки (AB), на которые опирается щит при указанных размерах всего сооружения (черт. 15).



Черт. 15.

Решение. Очевидно, давление P на щит выразится как:

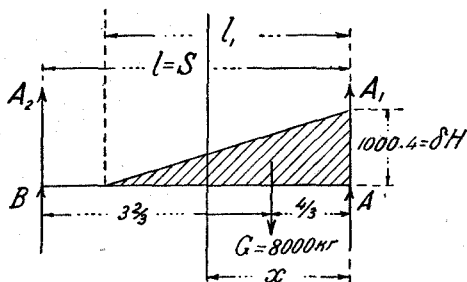
$$P = \frac{\delta H \cdot H}{2} B = \frac{\delta H^2}{2} B,$$

где H — глубина воды, а B — расстояние между осями стоек; при подстановке указанных размеров

$$P = \frac{1000 \cdot 4^2}{2} \cdot 2 = 1000 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16000 \text{ кг.}$$

Центр приложения результирующей давления будет находиться от дна на расстоянии

$$h_c = \frac{H}{3} = \frac{4}{3} \text{ м.}$$



Черт. 16.

Каждая из стоек (AB) нагружена согласно прилагаемого чертежа (черт. 16); поэтому

$$A_1 + A_2 = 8000;$$

$$5 \cdot A_1 = 8000 \frac{11}{3},$$

$$\text{откуда } A_1 = \frac{8000 \cdot 11}{5 \cdot 3} = 5866,7 \text{ кг, а}$$

$$\text{следовательно, } A_2 = 2133,3 \text{ кг.}$$

Момент изгиба относительно сечения (x) выразится так:

$$M_{из.} = + A_2 (l - x) - \frac{\delta (l_1 - x)^3}{6},$$

откуда условие наибольшего момента будет

$$\frac{d M_{из.}}{dx} = - A_2 + \frac{1}{2} \delta (l_1 - x_m)^2 = 0,$$

а теперь отсюда

$$x_m = l_1 - \sqrt{\frac{2A_2}{\delta}} = 4 - 2,06 = 1,94 \text{ м,}$$

а потому

$$M_{из. \text{ макс}} = 2133,3 (5 - 1,94) - \frac{1000}{6} (4 - 1,94)^3 = 5071 \text{ кг. м} = 507100 \text{ кг см.}$$

Предполагая стойки железными двутаврового сечения и допуская напряжение в $800 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, находим момент сопротивления

$$W = \frac{507100}{800} \cong 634 \text{ см}^3,$$

каковому моменту соответствует ближайший профиль № 32.

Задача № 8. Определить усилие, срезающее заклепки (a) у шва шарового днища котла, наполненного водой, а также вертикальное давление на рассматриваемое днище.

Решение. Очевидно, давление по горизонтали (черт. 17)

$$P_z = \delta \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{D}{2} = \delta \pi \frac{D^3}{8}.$$

Давление по вертикали на днище будет:

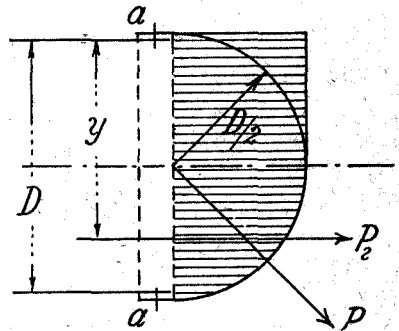
$$P_g = \delta \frac{1}{24} \pi D^3 + \delta \frac{\pi D^2}{8} \cdot \frac{D}{2} = \delta \pi D^3 \frac{5}{48}.$$

Полное давление

$$P = \sqrt{P_z^2 + P_g^2} \approx \frac{1}{6} \delta \pi D^3.$$

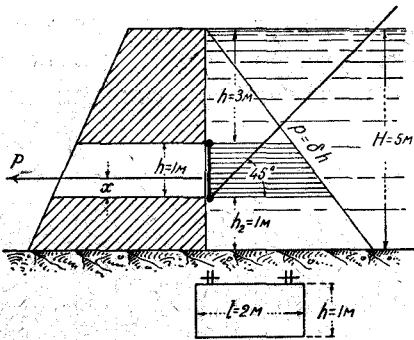
Центр приложения давления P_z найдется из соотношения:

$$y = \frac{J_x}{\theta_x} = \frac{\frac{1}{64} \pi D^4 + \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{D^2}{4}}{\frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{D}{2}} = \frac{5}{8} D.$$



Черт. 17.

Задача № 9. Определить, с каким натяжением (T) необходимо тянуть трос, прикрепленный к нижней кромке затвора, закрывающего отверстие в плотине, при указанных размерах (черт. 18).



Черт. 18.

Решение. Давление на затвор будет

$$P = \frac{\delta h_1 + \delta (h_1 + h)}{2} h \cdot l = \frac{\delta (2h_1 + h)}{2} h l = \frac{1000 (6 + 1)}{2} 2 = 7000 \text{ кг.}$$

Центр приложения этого давления определится из соотношения

$$x = \frac{\delta (h_1 + h) + 2\delta h_1}{\delta (h_1 + h) + \delta h_1} \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{3} \frac{3h_1 + h}{2h_1 + h} = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{7} = \frac{10}{21} \text{ м.}$$

А теперь имеем следующее очевидное соотношение моментов

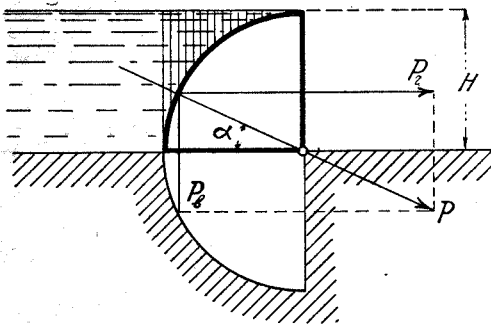
$$P(h - x) \leq T \cdot \cos 45^\circ \cdot h,$$

откуда

$$T \geq \frac{P(h - x)}{h \cos 45^\circ} = \frac{7000 \cdot \frac{11}{21}}{1.0,707} = \frac{1000 \cdot 11}{3.0,707} = 5186 \text{ кг.}$$

Задача № 10. Определить давление на шарнир в квадратной плотине (черт. 19).

Решение. Для метрового протяжения плотины имеем:



Черт. 19.

$$P_2 = \frac{\delta H \cdot H}{2} = \frac{\delta H^2}{2},$$

$$P_8 = \delta \left(H^2 - \frac{\pi H^2}{4} \right) = \delta H^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right),$$

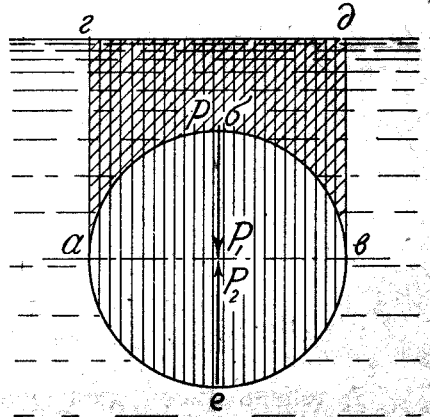
откуда:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{P_8}{P_2} = \frac{\delta H^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{\delta H^2}{2}} = \\ &= 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{P_2^2 + P_8^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta H^2}{2} \right)^2 + (\delta H^2)^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)^2} = \\ &= \delta H^2 \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)^2} = \frac{\delta H^2}{2} \sqrt{1 + \left(2 - \frac{\pi}{2} \right)^2}. \end{aligned}$$

§ 6. Плавание и устойчивость плавания.

Допустим, что некоторое тело (черт. 20) находится в воде или другой жидкости; пусть, для простоты, тело имеет форму шара; на основании предыдущего мы можем сказать, что, во первых, давления на это тело по горизонтали уравниваются между собой, так как эти давления выразятся давлениями на проекции данного шара на вертикальную плоскость, т. е. будут давления на площади кругов, у которых центры тяжести будут лежать на одинаковой глубине под водой; во-вторых, если провести через центр шара горизонтальную секущую плоскость, то давление на верхнюю часть выразится весом (P_1) воды, находящейся над верхней половиной шара (объем *абвдга*, заштрихованный наклонно), а давление на нижнюю часть — весом (P_2) воды в объеме *гдвгаг* (заштрихован вертикально), при чем это давление направлено снизу вверх; очевидно, результирующее давление будет равно весу объема воды, представляющего разность (*гдвгаг* — *абвдга*) предыдущих объемов, т. е. равно весу ($P_2 - P_1$) объема воды, равного объему данного тела, и это давление направлено снизу вверх (известный принцип Архимеда).



Черт. 20.

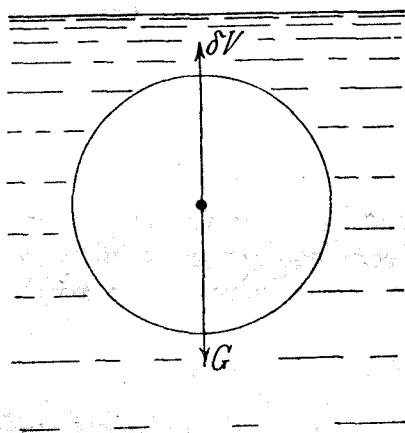
Допустим теперь, что собственный вес тела, погруженного в воду есть G ; его, очевидно, можно представить в виде $G = \delta_m V$, где δ_m вес единицы объема тела, а V —объем тела; тогда давление воды на тело представится в виде $P = \delta V$, где δ —вес единицы объема воды. Возможны три случая:

$$P < G; \quad P = G; \quad P > G;$$

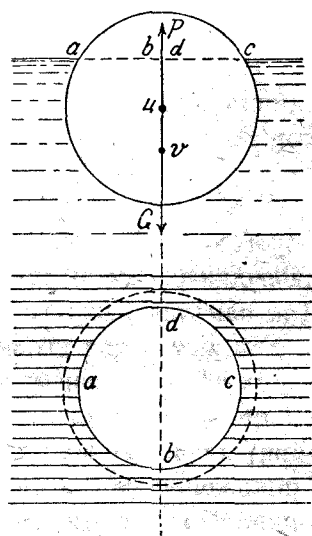
соответственно:

$$\delta < \delta_m; \quad \delta = \delta_m; \quad \delta > \delta_m.$$

В первом случае тело будет погружаться дальше в воду — тонуть, во втором случае тело останется на месте; в третьем случае оно будет подниматься — всплывать. Поднимаясь кверху, тело может часть



Черт. 21.



Черт. 22.

своего объема вывести из воды и при том настолько, что объем погруженной части V_n будет как раз таков, что удовлетворится соотношение:

$$\delta_m \cdot V = \delta \cdot V_n;$$

тогда тело начнет плавать в воде. Кривая линия ($abcd$) пересечения поверхности тела с поверхностью воды называется ватерлинией, а сечение тела, содержащее ватерлинию, называется плоскостью плавания; квадратное содержание плоской фигуры ($abcd$) внутри ватерлинии называется площадью ватерлинии. Сила $P = \delta V_n$ называется силой водоизмещения, объем V_n —водоизмещением плавающего тела, а точка (v) приложения силы водоизмещения, являющаяся центром тяжести вытесненного объема воды—центром водоизмещения. Линия, проходящая нормально к плоскости пла-

вания через центр тяжести тела и через центр водоизмещения носит название оси плавания.

Одно и то же тело при погружении в различные жидкости будет, очевидно, иметь различные водоизмещения и различные ватерлинии, так как, в зависимости от величины δ , глубина погружения будет различна; например, для речной воды принимают $\delta = 1000$ кг, а для морской 1025 кг; поэтому в морской воде тело (судно) будет менее погружено в воду, чем в речной (ватерлиния переместится по судну вниз). С другой стороны, при увеличении тяжести тела, например, при увеличении нагрузки судна, последнее будет погружаться в воду, а ватерлиния перемещаться по судну вверх. Если мы допустим, что площадь ватерлинии в известных пределах погружения тела, как то можно принять для некоторых судов, не меняется, то легко определить величину погружения судна при данном увеличении его нагрузки. Пусть, например, увеличена нагрузка судна на P тонн и площадь ватерлинии есть A ¹⁾, тогда глубина погружения (h) определится из соотношения

$$\delta Ah = P, \text{ или будет равна } h = \frac{P}{\delta A}, \quad (17)$$

при этом, конечно, как центр тяжести судна, так и центр водоизмещения судна переместятся.

Так как для каждого судна, в особенности морского, весьма важно знать, для выяснения его многих качеств, площади ватерлиний, а равно и водоизмещения при различных глубинах погружения, то еще при самом проектировании судна особыми методами определяются эти величины для ряда положений судна в воде, начиная от его фиктивного положения, когда оно только касается килем воды (нулевая ватерлиния). Полученные данные представляются в виде особых кривых, которые и составляют важные для судна характеристики.

Для каждого судна, кроме того, важно знать его остойчивость, т. е. способность, в случае выведения его из нормального положения, вследствие, например, волнения, неправильного размещения грузов и проч., возвращаться в это положение.

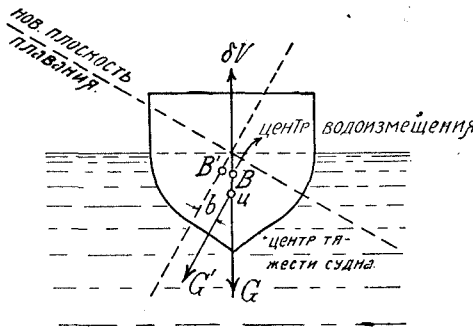
Для уяснения этих вопросов рассмотрим следующие возможные случаи плавания.

1) Центр тяжести тела или судна находится ниже центра водоизмещения; в этом случае, при наклонении судна, например, влево, центр водоизмещения судна тоже переместится влево, и так как центр тяжести останется на месте, то легко усмотреть, что появится пара ($\delta V.b$, или $G.b$), которая стремится вернуть судно в прежнее нор-

¹⁾ Если назовем в пределах площади ватерлинии длину судна через L , а ширину через B , то можно площадь ватерлинии выразить через $A = aBL$, где a — так называемый, коэффициент полноты, меняющийся, в зависимости от типа судов, в пределах от 0,65 до 1.

мальное положение¹⁾; такое состояние судна называют безусловно устойчивым.

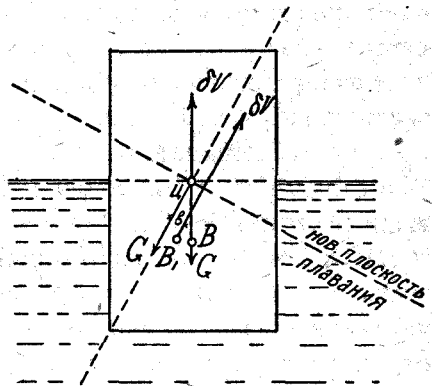
2) Центр тяжести судна и центр водоизмещения совпадают, и форма судна такова, что центр водоизмещения не меняет своего по-



Черт. 23.

ложения при качании судна; очевидно, в этом случае никакой пары при отклонении судна из своего нормального положения, не получится, и судно не будет стремиться изменить свое новое положение; такое состояние плавающего судна называют безразличным или индифферентным.

3) Центр тяжести судна находится выше центра водоизмещения; в этом случае устойчивость судна и вообще плавающего тела зависит от формы последнего. В самом деле, пусть: а) форма плавающего тела имеет вид, указанный на чертеже (черт. 25); тогда, при наклонении тела влево, центр водоизмещения переместится тоже влево в положение B_1 , а появившаяся при этом пара $(\delta V, b)$ не только не будет восстанавливать тело в прежнее положение, а, наоборот, будет стремиться еще более удалить его от нормального положения; очевидно, такое состояние тела или судна будет неустойчивым; б) пусть, далее, плавающее тело имеет форму, указанную на чертеже 26. В этом случае при отклонении тела от нормального положения, перемещение центра водоизмещения из (B) в (B_1) будет таково, что появившаяся пара $(\delta V, b)$ будет стремиться вернуть тело в прежнее нормальное положение; в этом случае называют состояние тела условно устойчивым.

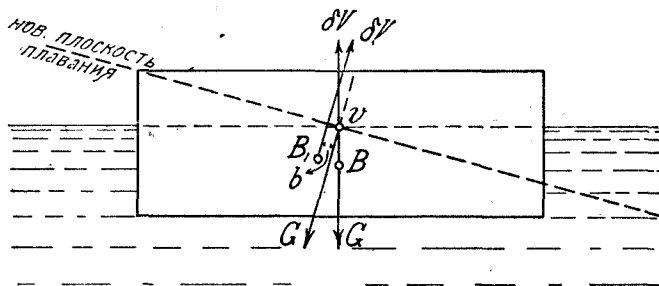


Черт. 25.

при отклонении тела от нормального положения, перемещение центра водоизмещения из (B) в (B_1) будет таково, что появившаяся пара $(\delta V, b)$ будет стремиться вернуть тело в прежнее нормальное положение; в этом случае называют состояние тела условно устойчивым.

¹⁾ На каждом из черт. 23 и 25 векторы, изображающие равные силы $\delta V, G$ и G' , конечно, должны быть одинаковы по своей величине.

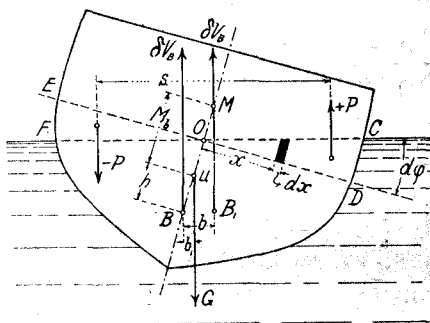
Таким образом, устойчивое состояние плавающего тела не обязательно отвечает положению центра тяжести тела только ниже центра водоизмещения; напротив, нередко момент восстанавливающей пары при положении центра водоизмещения ниже центра тяжести бывает



Черт. 26.

больше, чем при обратном положении. Чтобы решить вопрос об устойчивости окончательно в более определенной форме, обратимся к схематическому изображению поперечного разреза судна (черт. 27), наклонившегося вправо на некоторый угол $d\varphi$.

В наклоненном положении судна точка (Ц) продолжает оставаться центром тяжести судна; к первоначальной же силе водоизмещения (δV) в точке (B) в новом положении прибавляются силы ($+P$) и ($-P$), которые появились вследствие погружения призматической части судна OCD в воду и выхода из воды другой призматической части OEF .



Черт. 27.

Эти силы относительно точки (O) образуют момент ($P.S$), который действует обратно наклоняющему моменту ($G.\delta V_B$). Теперь, очевидно, положение плавания судна будет устойчиво (по отношению к судам принято говорить остойчивость, вместо устойчивости), если появившийся в наклоненном положении судна добавочный момент ($P.S$) больше наклоняющего момента ($G.\delta V_B$) и стремится судно привести в первоначальное положение плавания. Так как, согласно чертежа (27), момент ($P.S$) легко может быть представлен в виде

$$P.S = \delta \operatorname{tg} (d\varphi) \int_{\omega} x^2 d\omega = \delta \operatorname{tg} (d\varphi) I_{\omega},$$

где ω — площадь ватерлинии, а I_{ω} — момент инерции площади ватерлинии относительно оси вращения судна, проходящей через точку (O) нормально к плоскости чертежа, то вышеуказанное условие остойчивости можно представить в виде

$$\delta \operatorname{tg} (d\varphi) I_{\omega} > \delta V_B . b_1,$$

а так как

$$b_1 = BL \sin(d\varphi) = h \sin(d\varphi),$$

то предыдущее неравенство принимает вид:

$$\delta \operatorname{tg}(d\varphi) I_{\omega} > \delta V_B h \sin(d\varphi),$$

откуда, заменяя¹⁾ δV_B через δV :

$$h < \frac{I_{\omega}}{V \cos(d\varphi)}. \quad (18)$$

Появление сил $(+P)$ и $(-P)$ вызывает параллельное перемещение силы водоизмещения из (B) в (B_1) на расстояние (b) , которое по правилам статики может быть выражено

$$b = \frac{P \cdot S}{\delta V} = \frac{\delta \operatorname{tg}(d\varphi) I_{\omega}}{\delta V} = \frac{I_{\omega} \operatorname{tg}(d\varphi)}{V}.$$

Согласно чертежа (27), с другой стороны, мы имеем:

$$b = BM \sin(d\varphi),$$

откуда

$$BM = M_b + h = \frac{b}{\sin(d\varphi)},$$

или

$$M_b = \frac{b}{\sin(d\varphi)} - h,$$

а вставляя сюда вышенайденное значение (b) , окончательно находим

$$M_b = \frac{I_{\omega}}{V \cos(d\varphi)} - h, \quad (19)$$

каковая величина, согласно неравенства (18) для остойчивости плавания судна должна быть больше нуля; таким образом, для остойчивости плавания судна необходимо и достаточно, чтобы центр тяжести судна всегда лежал ниже точки M . При очень малых углах наклона судна значение $\cos(d\varphi)$ близко к единице, а потому в этом случае соотношение (19) примет вид

$$M_b = \frac{I_{\omega}}{V} - h. \quad (20)$$

Так как, далее, судно должно быть совершенно остойчиво при каких угодно возможных направлениях наклона, то предыдущие условия

¹⁾ Силы δV_B и δV_{B_1} конечно, одинаковы и равны просто δV , различны только точки приложения B и B_1 .

должны быть выполнены для всех осей качания судна, главным образом, конечно, для более неблагоприятной; таковой же, так как должно быть выполнено условие $BЦ < \frac{I_\omega}{V \cos d\varphi}$, очевидно, является та ось площади ватерлинии, проходящая через центр тяжести последней, для которой момент инерции I_ω наименьший. Для судов нормальной постройки это будет продольная ось.

Найденная нами высота M_b , имеющая такое важное значение для определения остойчивости судна, носит название высоты метacentра, а точка M — точка пересечения оси плавания в нормальном положении судна с направлением силы водоизмещения при наклоне судна — метacentром (Bouguer, 1746 г.).

Совершенно очевидно теперь, что понижение центра тяжести судна (размещение груза в трюме, заливка нижней части судна свинцом [яхты] и т. д.), увеличивает остойчивость судна; наоборот, повышение центра тяжести судна (размещение грузов на верхней палубе, подъем грузов из трюма блоками, прикрепленными к верхним частям мачт), уменьшает остойчивость судна.

Наконец, из изложенного ясно, что, если на судне имеется легко перемещающийся груз (зерно, насыпанное прямо в трюм, жидкий груз: керосин, нефть — в наливных судах, бочки, могущие перекачиваться от одного борта к другому и проч.), то, при наклонении судна в какую либо сторону, указанный груз будет перемещаться в том же направлении, и тем передвигать центр тяжести судна ближе к направлению результирующей силы водоизмещения, т. е. уменьшать высоту метacentра, а следовательно уменьшать остойчивость судна, при неблагоприятных же условиях и совершенно лишать судно остойчивости; вот почему, на морских судах, где этот вопрос имеет особенно важное значение, груз должен быть лишен подвижности — жидкий груз рекомендуется наливать в цистерны и баки, симметрично расположенные относительно оси судна и герметически закрываемые при полном объеме, зерно лучше грузить в мешках, бочки же и прочие подвижные предметы укреплять на своих местах и т. д.

§ 7. Примеры на плавание тел и определение их устойчивости.

Задача № 11. Определить высоту метacentра для плавающей в воде призмы, указанных на чертеже (черт. 28) размеров, при чем глубина погружения призмы равна как раз половине высоты призмы, т. е. одному метру.

Решение. По вышеизложенному, согласно уравнения (20), высота метacentра

$$M_b = \frac{I_\omega}{V} - BЦ;$$

так как сечение призмы квадратное, при чем сторона квадрата равна 1 метру, то

$$I_{\omega} = \frac{ab^3}{12} = \frac{1}{12} \text{ м}^4,$$

водоизмещение

$$V = ab \frac{h}{2} = 1 \text{ м}^3,$$

и расстояние

$$BЦ = 0,5 \text{ м},$$

а потому

$$M_b = \frac{I_{\omega}}{V} - BЦ = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} = -0,42,$$

т. е. положение неустойчиво.

Задача № 12. Определить высоту метацентра той же призмы, но плавающей в воде плашмя.

Решение. В данном случае высота метацентра будет различна, в зависимости от того, относительно какой оси будем определять устойчивость призмы; так, рассматривая качание призмы около оси xx будем иметь

$$I_{\omega} = \frac{ba^3}{12} = \frac{2.1}{12} = \frac{1}{6} \text{ м}^4,$$

при качании около оси yy имеем:

$$I_{\omega} = \frac{ab^3}{12} = \frac{1.8}{12} = \frac{2}{3} \text{ м}^4.$$

Водоизмещение в обоих случаях одинаково и равно

$$V = a \cdot b \frac{h}{2} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ м}^3.$$

Поэтому, для первого случая качания

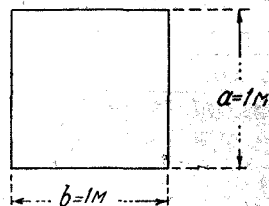
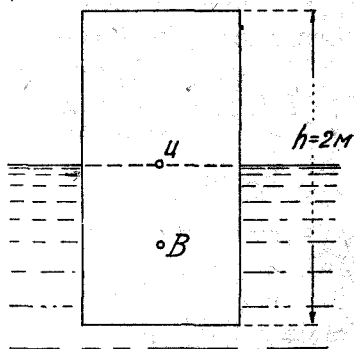
$$M_b = \frac{I_{\omega}}{V} - BЦ = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = M_b \frac{1}{12} \text{ м},$$

и для второго

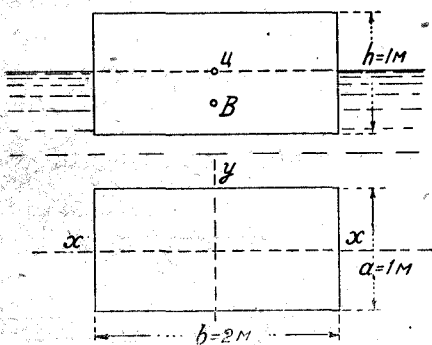
$$M_b = \frac{I_{\omega}}{V} - BЦ = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ м}.$$

Разобранные два случая плавания призмы ясно показывают относительную устойчивость ее плавания.

Задача № 13. Железный сосуд квадратного сечения со стороной $a=1 \text{ м}$. и высотой $b=1 \text{ м}$., с толщиной стенок $s=1 \text{ см}$ пла-



Черт. 28.



Черт. 29.

вает в воде. Определить глубину погружения и высоту метацентра, равно, как и положение центра тяжести и центра водоизмещения. Вес 1 м³ железа = 7000 кг.

Решение. Объем железа в сосуде =
 $= [a \cdot l \cdot a - (a-2)(a-2)(l-1)] = 1 - 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,99 = 1 - 0,9508 = 0,0492 \text{ м}^3$.
 Вес = $0,0492 \cdot 7000 = 344,4 \text{ кг}$.

Таким образом: $a^2 t \cdot 1000 = 344,4$, откуда глубина¹⁾ погружения $t =$
 $= \frac{344,4}{1000} = 0,3444 \text{ м}$. Центр водоизмещения B
 находится, очевидно, на расстоянии

$$\frac{t}{2} = 0,1712 \text{ м.}$$

от нижней поверхности сосуда. Центр тяжести сосуда находится от нижней его поверхности на расстоянии:

$$y_c = \frac{274,4 \cdot 0,505 + 70 \cdot 0,005}{344,4} = 0,403 \text{ м.},$$

где 274,4 — вес (кг.) сосуда без дна, а 70 — вес (кг.) дна.

Водоизмещение сосуда $V = a^2 \cdot t = 1,0 \cdot 0,3444 = 0,3444 \text{ м}^3$.

Момент инерции относительно оси уу будет:

$$J_{\omega} = 0,0833 \text{ м}^4,$$

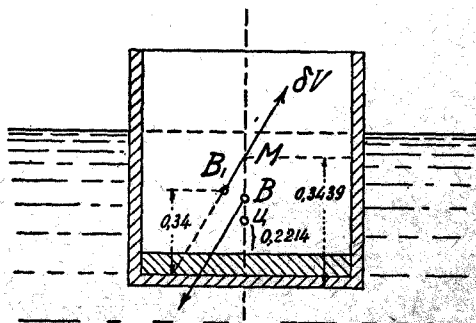
а потому

$$M_b = \frac{J_{\omega}}{V} - B\Gamma = \frac{0,0833}{0,3444} - 0,231 = 0,242 - 0,231 = 0,011 \text{ м.}$$

Таким образом, метацентр находится от нижней поверхности сосуда на расстоянии

$$0,403 + 0,011 = 0,414 \text{ м.}$$

Задача № 14. В предыдущей задаче определить изменение положения центров тяжести сосуда и водоизмещения, а также устойчивости, если на дно сосуда положен еще слой железа толщиной 5 см.



Черт. 31.

¹⁾ На черт. 30 и 31 глубина t должна отсчитываться от нижней поверхности дна сосуда, а не от верхней; точно также и расстояние и положение метацентра M ; на черт. 31, кроме того, на расстоянии 0,34 м находится не центр B , а B .

Решение.

Вес сосуда увеличится на

$$0,98^2 \cdot 0,05 \cdot 7000 = 0,9604 \cdot 350 = 336,14 \text{ кг. и будет равен}$$

$$G = 680,54 \text{ кг.}$$

Глубина погружения будет

$$t_1 = \frac{680,54}{1000} \cong 0,6805 \text{ м.}$$

Центр водоизмещения будет находиться на расстоянии $\frac{t}{2} \cong 0,340 \text{ м.},$

а центр тяжести — на расстоянии $y_{ц} = \frac{260,54 \cdot 0,53 + 420 \cdot 0,03}{680,54} = 0,2214 \text{ м.}$ от нижней поверхности сосуда.

Таким образом, центр водоизмещения находится выше центра тяжести, и положение будет абсолютно устойчиво.

Задача № 15. Судно при переходе из моря в реку сидит глубже на 1 м.; при нагрузке на него 500 тонн груза погружается в воду (в реке) на 2 м. Определить его водоизмещение.

Решение. Если назвать объем вытесненной судном воды в реке через V , вес 1 куб. метра пресной воды через δ (1000 кг/м^3), и вес 1 куб. метра морской воды через δ_m (1025 кг/м^3), то условия задачи дают нам следующие соотношения

$$V (\delta_m - \delta) = \delta \cdot 1,0 \cdot A;$$

$$500 \cdot 1000 = \delta \cdot 2 \cdot A,$$

где A — площадь ватерлинии в м^2 . Исключая A , имеем:

$$V = \frac{\delta \cdot 500000}{\delta \cdot 2 \cdot (\delta_m - \delta)} = \frac{250000}{0,025} = 10000000 \text{ м}^3 \cong 10000 \text{ тонн.}$$

ГЛАВА II.

§ 1. Движение идеальных жидкостей.

Уравнения движения элементарной частицы идеальной жидкости легко получаются из вышенайденных (Глава I, § 1) уравнений равновесия жидкого элемента, если воспользоваться принципом Д'Аламбера; как известно, по этому принципу движение можно рассматривать, как равновесие, если только в число сил ввести силы инерции; называя, поэтому, проекции скорости по осям x -ов, y -ов и z -ов соответственно через:

$$u = \frac{dx}{dt}; \quad v = \frac{dy}{dt}; \quad w = \frac{dz}{dt},$$

выражая, далее, силы инерции, отнесенные к единице массы, через:

$$-\frac{du}{dt}, \quad -\frac{dv}{dt}, \quad -\frac{dw}{dt},$$

и вводя их в уравнения равновесия жидкости, получим следующие уравнения движения последней:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Так как в самом общем случае движения жидкости скорости ее могут меняться не только с течением времени, но и с изменением места, то проекции скорости u , v и w являются функциями координат x , y , z , которые, в свою очередь, суть функции от времени, а поэтому уравнения (1) могут быть переписаны в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Последние уравнения носят название уравнений Эйлера. Как видно, они содержат в самом общем случае пять переменных величин: ϱ , p , u , v и w , для определения которых трех уравнений недостаточно. Дополнительные уравнения получаются из следующих соображений. Во первых, между p и ϱ для каких угодно жидкостей должна существовать определенная зависимость, если только жидкость не совершенно несжимаема (в последнем случае $\varrho = \text{const}$).

Так, напр., для газов (а выведенные уравнения пригодны и для таких жидкостей, ввиду того, что при выводе как уравнений равновесия, так и движения, никаких ограничений относительно плотности ϱ не делалось), подчиняющихся закону Мариотта и Гей-Люссака, имеем

$$\frac{p}{\varrho} = RT,$$

где R — газовая постоянная, для воздуха, напр., равная 29,4, а T — абсолютная температура, равная $(273 + t)^\circ \text{C}$. При адиабатическом сжатии имеет место соотношение

$$\frac{p}{\varrho^\kappa} = \text{Const},$$

где $\kappa = 1,41$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме. Для жидкостей капельных, напр., для воды, согласно приведенных выше результатов опытов Амага (Amagat), тоже можно написать зависимость вида

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 + \frac{p}{\beta},$$

где β — объемный коэффициент сжатия.

Во вторых, предполагается, что масса жидкости, заключенная в каком либо объеме, не меняется со временем. Обозначим элементарный объем жидкости через ΔV , тогда масса, заключенная в этом объеме будет $\varrho \Delta V$; выражая, что масса эта не меняется с течением времени, имеем:

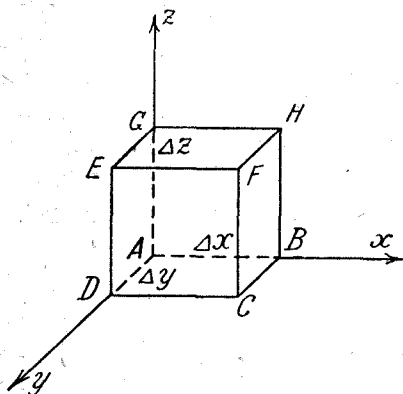
$$\frac{d}{dt} (\varrho \Delta V) = 0,$$

откуда

$$\frac{d\varrho}{dt} \Delta V + \varrho \frac{d(\Delta V)}{dt} = 0. \quad (3)$$

Представим объем в виде параллелепипеда со сторонами Δx , Δy , Δz (черт. 32). Очевидно, объем может меняться вследствие того, что точка A и точки B , D и G будут иметь различные скорости; пусть, напр., проекции скорости A в направлении осей координат x , y , z будут соответственно u , v , w ; тогда скорость B в направлении оси x' ов

можно выразить как $u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$, скорость D по направлению оси y' ов как $v + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y$ и скорость G в направлении оси z' ов как $w + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z$;



поэтому, увеличение объема в направлении осей координат выразится с известным приближением соответственно через

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y;$$

Черт. 32.

полное увеличение объема, таким образом, можно представить в виде

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \Delta V \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right].$$

Так как очевидно, что

$$\Delta V \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \frac{d(\Delta V)}{dt},$$

то имеем:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0, \quad (4)$$

соотношение, известное под именем закона неразрывности массы, или сплошности движения. В случае жидкости несжимаемой это уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

первая часть которого, как известно, есть ничто иное, как относительное объемное расширение жидкости.

Новые уравнения, в связи с уравнениями (2), вполне обеспечивают теоретически определение пяти вышеуказанных неизвестных величин и поэтому могли бы служить для решения всех вопросов, связанных с движениями жидкостей, если бы только эта система дифференциальных уравнений всегда могла быть разрешена. В действительности этого нет, и разрешение ее возможно только в отдельных случаях. В некоторых частных случаях могут быть составлены дополнительные уравнения, которые носят название особых уравнений, и которые иногда могут значительно упрощать изучение движения жидкости;

например, можно выразить особым уравнением невозможность движения жидкости через соприкасающуюся с ней твердую стенку, движение жидкости вдоль поверхности раздела и т. д. Частным случаем движения жидкости будет такое движение, когда в данном месте оно не зависит от времени; в этом случае найденные нами уравнения движения жидкости не будут содержать частных производных по времени; такое движение носит название установившегося движения. Еще более частным случаем движения жидкости будет не только установившееся, но и равномерное движение, т. е. такое, когда скорости и другие характеристики жидкости не только не меняются в данном сечении со временем, но и при переходе от одного сечения к другому остаются неизменными.

Все такого рода разграничения течений жидкостей весьма сильно облегчают задачу их изучения. С той же целью при установлении разных аналитических зависимостей между скоростями и давлениями в текучих жидкостях почти всегда принимают упрощающие решения предпосылки, которые, правда, в большинстве случаев в очень малой мере, а иногда и совсем не выполняются в действительности при движении жидкостей. Одной из таких предпосылок является, например, предположение о возможности подразделения потока на более мелкие, при чем поверхности раздела принимаются совпадающими с направлением главного течения: при таком подразделении потока на элементарные потоки, поперечные сечения последних, нормальные к направлению течения, принимают или конечными, или бесконечно-малыми.

Если теперь обратить внимание на какую либо точку (A) в жидкости, то перед этой точкой могут находиться такие частицы жидкости (B), которые при своем дальнейшем движении обязательно должны будут пройти через точку (A); но и позади последней тоже имеются частицы жидкости, которые, прежде, чем занять настоящее положение (C), прошли через точку (A). Последовательный ряд таких точек (B, A, C) называют линией тока. Касательные к линии тока в отдельных точках совпадают с направлением скоростей в этих точках, а потому уравнение такой линии тока представится в форме:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \quad (5)$$

При установившемся движении эти линии тока имеют определенное неизменное положение в пространстве, при неустановившемся, наоборот, принимают каждое мгновение новое положение, так как скорость в каждой точке может меняться со временем и по величине, и по направлению.

Вышеуказанное подразделение потока на элементарные потоки можно теперь представить так, что каждый такой элементарный поток ограничивается линиями тока, при чем, если ограниченный последними

элементарный поток бесконечно-малого поперечного сечения, то он называется токовой нитью, в случае же конечного поперечного сечения — токовой трубкой. Продольное сечение через такое, разделенное на токовые нити или трубки, течение, позволяет хорошо уяснить себе род движения и составить представление о направлении течения, об изменениях в нем скорости и давления.

Между прочим, если предположить, что скорости в отдельных, нормальных к главному направлению течения, поперечных сечениях, несмотря на различие в наклоне к последним отдельных линий тока, все же параллельны друг другу и равны между собой, то следствием этого предположения является то, что поперечные сечения должны быть плоски и при последовательных через элементы времени положениях должны оставаться параллельными. Такое упрощенное течение называется параллельным течением.

Остановимся теперь на одном весьма важном соотношении для установившегося движения жидкости, которое представляет из себя, так называемый, закон энергии для движущейся по некоторой траектории частицы жидкости.

Возьмем для этого первые три уравнения Эйлера:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt}; \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv}{dt}; \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw}{dt};$$

помножим их соответственно на dx , dy , dz и сложим; мы получим:

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right] = \\ = \frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Первый трехчлен левой части, по предыдущему, есть элемент работы (dE) внешней объемной силы; выражение в квадратных скобках есть полный дифференциал dp и, наконец, трехчлен правой части, как легко усмотреть, есть ничто иное, как $d\left(\frac{v^2}{2}\right)$; в самом деле, называя результирующую скорость элемента жидкости через v , мы имеем:

$$v^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

откуда, дифференцируя, получим

$$2v dv = 2u du + 2v dv + 2w dw,$$

или

$$d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = u du + v dv + w dw = \frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz,$$

так как при дифференцировании конечный результат не зависит от

порядка дифференцирования. Таким образом, вышенаписанное уравнение (6) принимает вид:

$$dE - \frac{dp}{\rho} = d\left(\frac{1}{2}v^2\right),$$

или

$$dE = \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{1}{2}v^2\right), \quad (7)$$

т. е. работа внешней силы идет на приращение живой силы и давления (потенциальной энергии), что представляет из себя своеобразную формулировку закона сохранения энергии.

Если жидкость подвержена только силе тяжести и при том она несжимаема, то, при направлении оси z -ов вертикально вверх, $dE = -gdz$, тогда соотношение (7) примет вид:

$$gdz + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = 0,$$

или, при делении на g ,

$$dz + \frac{dp}{\delta} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = 0,$$

откуда, интегрируя, получаем:

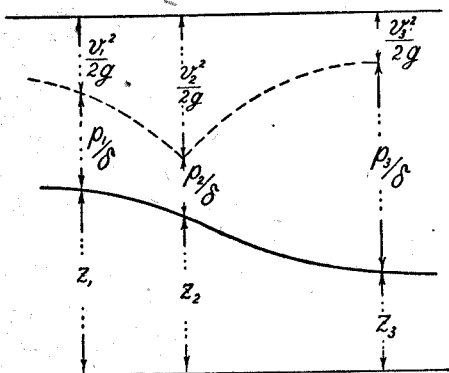
$$z + \frac{p}{\delta} + \frac{v^2}{2g} = C, \quad (8)$$

— уравнение, известное под именем уравнения Даниила Вернулли (1738 г.).

В этом уравнении $z(m)$ — нивелировочная высота положения частицы жидкости над основной плоскостью; $\frac{p}{\delta} \left(\frac{\kappa g}{m^2} \cdot \frac{m^3}{\kappa g} = m \right)$ — высота давления; $\frac{v^2}{2g} \left(\frac{m^2}{\text{сек}^2} \cdot \frac{\text{сек}^2}{m} = m \right)$ — высота скорости. Таким образом, уравнение (8) выражает собой то положение, что в каждой точке траектории частицы жидкости, движущейся без сопротивления (идеальной), сумма трех высот: нивелировочной, давления и скорости — есть величина постоянная. Если, поэтому, мы суммы этих трех высот отложим последовательно от некоторой горизонтальной плоскости, принятой за основную, то концы этих суммарных векторов будут лежать тоже в одной горизонтальной плоскости (черт. 33).

Найденный закон Даниила Вернулли, в случае существования потенциала скоростей, может быть распространен на весь поток; в применении ко всей массе движущейся жидкости, уравнение (8), носящее уже название уравнения Бернулли-Эйлера, указывает на

одинаковость запаса энергии во всех точках занятого потоком объема; и в этом случае выражаемое уравнением положение можно формулировать так: в каждом сечении



Черт. 33.

движущейся без сопротивления жидкости сумма высот— нивелировочной, давления и скоростной — есть величина постоянная.

Так как скорости (обозначим их через $v_1, v_2, v_3, \dots$) определяются сечениями ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$) потока, на основании предположения постоянства в данном месте и в данное время количества протекающей жидкости (закон сплошности движения), то мы можем написать соотношение:

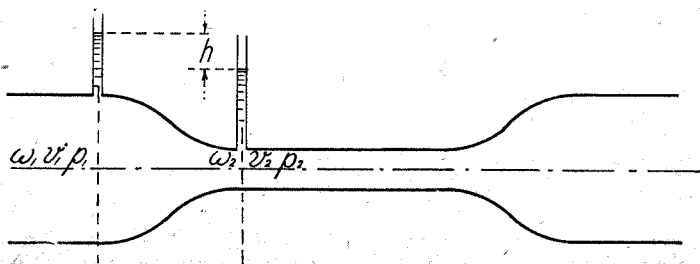
$$Q = \omega_1 v_1 = \omega_2 v_2 = \omega_3 v_3 = \dots = \text{const.} \quad (9)$$

Постоянство течения прекращается, если давление $p = 0$; в этом случае соотношение (9) перестает существовать.

В силу закона Д. Бернулли, при прочих равных условиях, давление в потоке там имеет наибольшее значение, где скорость наименьшая и наоборот. Поэтому в суженных местах горизонтального трубопровода имеют место меньшие давления, чем в других.

§ 2. Примеры на течение жидкостей без сопротивления.

Задача № 1. В трубе, имеющей форму, указанную на чертеже (черт. 34), пьезометрические высоты¹⁾ различны в широком и узком



Черт. 34.

сечениях. Пусть разность их равна h . Требуется определить количество жидкости (воды), протекающей в трубопроводе.

¹⁾ Пьезометрическими высотами называются высоты подъема жидкости в (стеклянных) трубочках, вставляемых вертикально в стенки трубы, по которой протекает жидкость; высоты эти, очевидно, соответствуют давлениям внутри жидкости в соответствующих сечениях; самые трубочки носят название пьезометров.

Решение. По закону Д. Бернулли имеем:

$$\frac{p_1}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g},$$

так как, если трубопровод горизонтален, что мы предполагаем, очевидно существование равенства $z_1 = z_2$. Простой перестановкой членов вышенаписанное соотношение преобразуется в такое:

$$\frac{p_1 - p_2}{\delta} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g},$$

но, так как, очевидно,

$$\frac{p_1 - p_2}{\delta} = h,$$

то

$$h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g},$$

откуда

$$2gh = v_2^2 - v_1^2;$$

по закону сплошности течения

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2,$$

откуда

$$v_2 = v_1 \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

а потому предыдущее соотношение принимает вид:

$$2gh = v_1^2 \left[\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1 \right],$$

откуда:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1}} = 4,429 \sqrt{\frac{h}{\left[\frac{\omega_1}{\omega_2} \right]^2 - 1}}$$

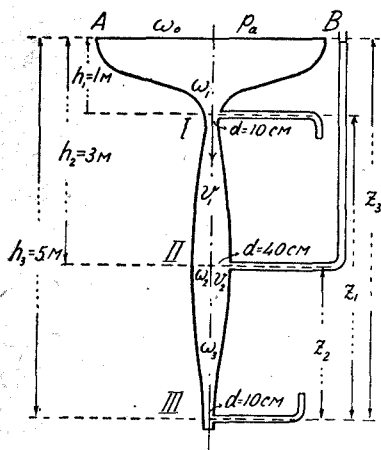
и, следовательно

$$Q = \omega_1 v_1 = 4,429 \cdot \omega_1 \sqrt{\frac{h}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 1}}.$$

Полученное соотношение дает возможность легко определить количество жидкости, протекающей в трубе, если только известны ω_1 , ω_2 и h ; существует прибор, построенный на этом принципе, называемый водомером Вентури и служащий для определения количеств протекающей воды в водопроводных трубах (см. Главу IX).

Задача № 2. Дан сосуд, указанной на чертеже (черт. 35) формы; для сечений I, II, III даны диаметры сечений и напоры. В сечении АВ, диаметр которого будем считать очень большим, давление равно атмо-

сферному; через сечение III вода вытекает наружу. Определить скорости и пьезометрические высоты, предполагая, что уровень AB не меняется, т. е. что сосуд все время пополняется водой.



Черт. 35.

Решение. Примем основную плоскость, от которой будем отсчитывать положения частиц жидкости, проходящей через III-е сечение. Тогда, применяя уравнение Д. Бернулли, имеем

$$\begin{aligned} z_3 + \frac{p_a}{\delta} + \frac{v_0^2}{2g} &= z_1 + \frac{p_1}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = \\ &= z_2 + \frac{p_2}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\delta} + \frac{v_3^2}{2g}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение сплошности нам дает:

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 = \frac{\pi d_3^2}{4} v_3$$

или, по сокращении на $\frac{\pi}{4}$:

$$d_1^2 v_1 = d_2^2 v_2 = d_3^2 v_3. \quad (11)$$

Большое значение диаметра d_0 и неизменность зеркала (AB) воды дает нам право считать скорость $v_0 = 0$, а так как истечение происходит в воздух, то $p_3 = p_a$ и $\frac{p_3}{\delta} = 10,3$ м. (соответствует старой атмосфере, по которой принимают давление равным $1,033 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$); поэтому из (10) имеем:

$$z_3 = \frac{v_3^2}{2g},$$

откуда,

$$v_3 = \sqrt{2g z_3} = 4,429 \cdot 2,236 \cong 9,9 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Уравнения (11), после подстановки в них значений d_1 , d_2 и d_3 , получают вид

$$0,01 v_1 = 0,16 v_2 = 0,01 v_3,$$

а потому соотношение (10) преобразуется в такое:

$$5 + 10,3 = 4 + \frac{p_1}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = 2 + \frac{p_2}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\delta} + \frac{v_3^2}{2g},$$

откуда,

$$15,3 = 4 + \frac{p_1}{\delta} + 5 = 2 + \frac{p_2}{\delta} + \frac{5}{256};$$

а теперь

$$\frac{p_1}{\delta} = 6,3 \text{ м} < \frac{p_a}{\delta} = 10,3;$$

$$\frac{p_2}{\delta} = 13,297.$$

Таким образом, в сечении III давление равно атмосферному, и вода в пьезометре не поднимается, в сечении II давление больше атмосферного, и вода поднимается на высоту 2,997 м; наконец, в сечении I давление меньше атмосферного на 4 м, и если мы пьезометрическую трубку загнем книзу, как показано на чертеже, и опустим конец в резервуар с водой, то, при высоте вертикального конца > 4 м, вода из резервуара поднимется на высоту в 4 м, если же высота этого конца < 4 м, то вода из него будет всасываться в сосуд, по которому протекает вода. Что касается скоростей, то

$$v_1 = v_3,$$

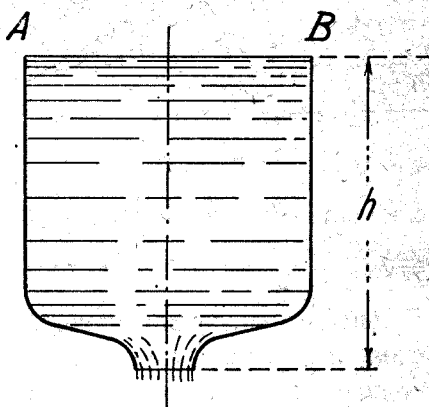
а

$$v_2 = \frac{1}{16} v_3 = 0,619 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Задача № 3. Из сосуда, наполненного водой до горизонта AB через отверстие в дне вода вытекает наружу; определить скорость истечения воды из отверстия, если сосуд цилиндрической формы, сечения ω_1 , а сечение отверстия — ω_2 ; высота горизонта (AB) воды в сосуде над отверстием все время истечения остается постоянной, равной h . Сосуд открытый и вода вытекает в воздух.

Решение. Принимая основную плоскость, от которой будем отсчитывать высоты, проходящей через отверстие, и применяя закон Д. Бернулли, имеем:

$$h + \frac{p_a}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = 0 + \frac{p_a}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g},$$



Черт. 36.

называя скорость истечения через v_2 , а скорость воды в сосуде на уровне AB через v_1 ; так как по закону сплошности движения

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2,$$

то предыдущее уравнение, по сокращении и замене v_1 через v_2 , примет вид:

$$h + \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g},$$

откуда:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}}}.$$

Если ω_1 велико по сравнению с ω_2 , например $\omega_1 \geq 10\omega_2$, то с точностью, большей одного процента, можно пренебречь знаменателем, и тогда получим

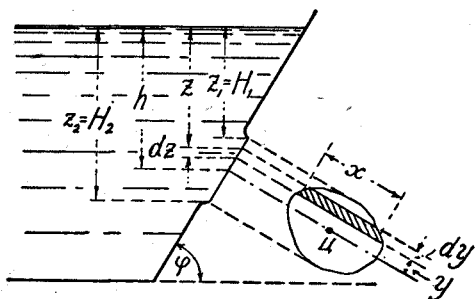
$$v_2 = \sqrt{2gh} = 4,429 \sqrt{h}$$

— известную формулу Торичелли (1643 г.). Очевидно, что количество жидкости, вытекающей из отверстия, определится из соотношения:

$$Q = \omega_2 v_2 \left(\frac{m^3}{сек} \right).$$

При $\omega_2 = \omega_1$ скорость обращается в ∞ , что показывает, что сплошность движения нарушается.

Задача № 4. Определить количество жидкости, вытекающей из отверстия какой угодно формы в боковой стенке сосуда, только симметричного относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести отверстия.



Черт. 37.

Решение. Пусть угол наклона боковой стенки сосуда к горизонтальной плоскости будет φ , а глубина погружения центра тяжести отверстия под свободной поверхностью воды h . Вообразим себе отверстие разбитым на горизонтальные полоски шириной dy ; тогда

площадь ($d\omega$) такой полоски будет $x dy$, а высота напора $z = h + y \sin \varphi = h \left(1 + \frac{y}{h} \sin \varphi \right)$, если только расстояния y будем считать отрицательными, когда рассматриваем полоски выше центра тяжести отверстия, и положительными, если ниже; очевидно, чем меньше dy , тем точнее мы можем принять предыдущее выражение за напор для рассматриваемой полоски.

При найденном напоре, количество воды, вытекающее в единицу времени через полоску, определится из выражения

$$dQ = d\omega \sqrt{2gh \left(1 + \frac{y}{h} \sin \varphi \right)},$$

а полное количество жидкости, вытекающее из всего отверстия, будет:

$$Q = \int_{\omega} d\omega \sqrt{2gh \left(1 + \frac{y}{h} \sin \varphi \right)};$$

так как далее

$$\left(1 + \frac{y}{h} \sin \varphi\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{y}{h} \sin \varphi - \frac{1}{8} \left(\frac{y}{h}\right)^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{16} \left(\frac{y}{h}\right)^3 \sin^3 \varphi - \dots,$$

то, довольствуясь первыми тремя членами, получим после интегрирования:

$$Q = \sqrt{2gh} \left[\omega - \frac{1}{8} \frac{J}{h^2} \sin^2 \varphi \right],$$

если еще принять во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_{\omega} y d\omega &= 0 \\ \int_{\omega} y^2 d\omega &= J. \end{aligned}$$

Если у нас стенка вертикальна и отверстие круглое радиуса r , то

$$J = \frac{\pi r^4}{4}; \quad \sin \varphi = 1,$$

и предыдущее выражение обратится в такое:

$$Q = \omega \sqrt{2gh} \left[1 - \frac{r^2}{32 \cdot h^2} \right].$$

Если отверстие прямоугольное, при чем ширина его равна b , а высота a , то вопрос решается проще; выражению для dQ тогда можно придать вид:

$$dQ = b dy \sqrt{2gh \left(1 + \frac{y}{h} \sin \varphi\right)} = b dy \sqrt{h + y \sin \varphi} \sqrt{2g}$$

или, вводя новую переменную $z = h + y \sin \varphi$, а, следовательно, $dy = \frac{dz}{\sin \varphi}$, мы можем написать:

$$dQ = \frac{b \sqrt{2g}}{\sin \varphi} \sqrt{z} \cdot dz,$$

а, интегрируя, имеем

$$Q = \frac{2}{3} b \frac{\sqrt{2g}}{\sin \varphi} (H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}}),$$

обозначая

$$H_2 = z_2 = h + \frac{a}{2} \sin \varphi$$

и

$$H_1 = z_1 = h - \frac{a}{2} \sin \varphi;$$

так как

$$\sin \varphi = \frac{H_2 - H_1}{a},$$

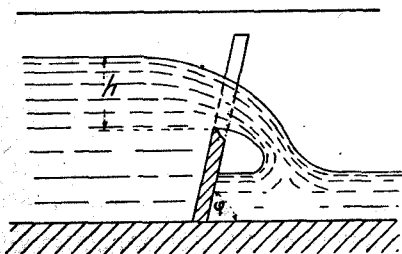
то

$$Q = \frac{2}{3} ab \sqrt{2g} \frac{H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}}}{H_2 - H_1}.$$

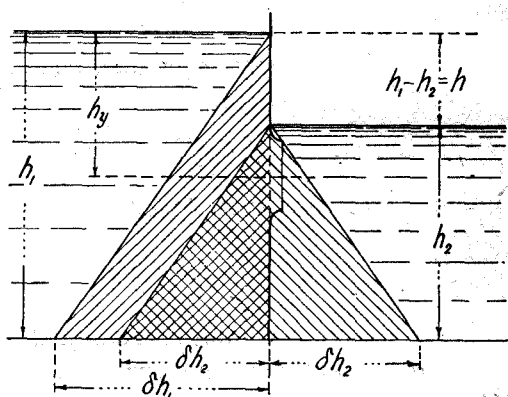
Если положить в последнем выражении для Q высоту $H_1 = 0$, то соотношение примет вид:

$$Q = \frac{2}{3} ab \sqrt{2gH_2} = \frac{2}{3} bh \sqrt{2gh}$$

— выражение для количества жидкости, вытекающей из прямоугольного отверстия, но неограниченного сверху стенкой; такое отверстие носит название водосливного отверстия (черт. 38)



Черт. 38.



Черт. 39.

Если истечение происходит не в воздух, а в воду же, как показано на прилагаемом чертеже (черт. 39), то, строя, как показано выше, эпюры распределения давлений с той и другой стороны отверстия, увидим, что истечение через отверстие во всех сечениях последнего, происходит под одним и тем же напором $(h_1 - h_2) = h$ и, следовательно, количество жидкости, вытекающее через отверстие, может быть определено из соотношения:

$$Q = \omega \sqrt{2gh} = \omega \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

Задача № 5. Определить давление (p_x) в сечении x у всасывающей трубы насоса, после того, как он остановлен; при чем высота установки насоса над уровнем (AB) воды в питательном колодце равна 6 м.

Решение. Беря за основную плоскость сечение AB (черт. 40), мы, применяя к данному случаю закон Д. Бернулли:

$$z_1 + \frac{p_1}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g},$$

имеем, очевидно, следующие значения членов данного соотношения:

$$z_1 = 0; \quad \frac{p_1}{\delta} = \frac{p_a}{\delta} \text{ (атмосф.)}; \quad v_1 = 0 \text{ (уровень } AB \text{ не меняется);}$$

$$z_2 = 6 \text{ м}; \quad \frac{p_2}{\delta} = \frac{p_x}{\delta}; \quad v_2 = 0 \text{ (насос остановлен),}$$

и, таким образом, по подстановке, получаем:

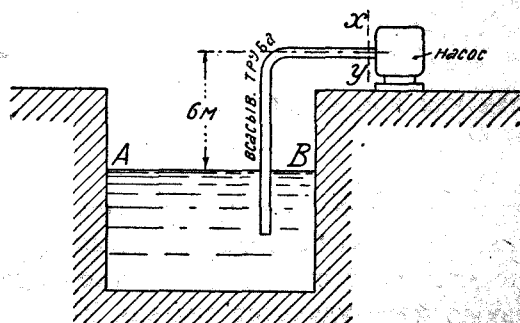
$$\frac{p_a}{\delta} = 6 + \frac{p_x}{\delta},$$

откуда

$$\frac{p_x}{\delta} = \frac{p_a}{\delta} - 6 = 10,3 - 6 = 4,3 \text{ м},$$

или

$$\frac{p_x - p_a}{\delta} = -6,$$

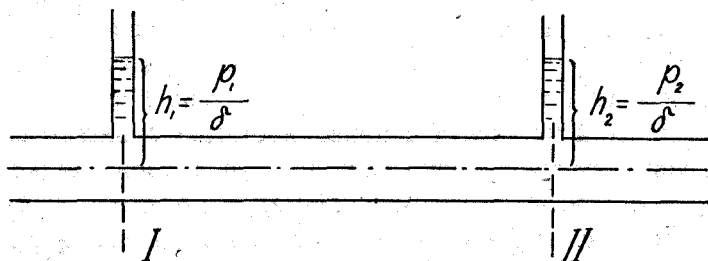


Черт. 40.

т. е. в сечении $xу$ мы имеем вакуум: давление выражается высотой водяного столба только в 4,3 м, против атмосферного в 10,3 м., или, другими словами, до последнего не хватает давления в 6 м. водяного столба.

§ 3. Движение действительных жидкостей.

Закон Д. Бернулли, связывающий отдельные характеристики движения, и весьма просто, казалось бы, применяемый при решении тех или других задач из области движения жидкостей, выведен в предположении жидкостей идеальных. Действительные жидкости, как известно, отличаются от таковых; поэтому, естественно, что получается некоторое расхождение между результатами применения закона Д. Бернулли и опытными данными. Что это действительно так, легко убедиться на следующем примере: представим себе, что мы имеем



Черт. 41.

цилиндрическую трубу, уложенную горизонтально, по которой протекает вода под некоторым напором. Для такого случая движения, если

бы закон Д. Бернулли был вполне справедлив, мы должны были бы получить из соотношения:

$$z_1 + \frac{p_1}{\delta} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\delta} + \frac{v_2^2}{2g}$$

для каких либо двух сечений I и II:

$$\frac{p_1}{\delta} = \frac{p_2}{\delta},$$

так как при наших условиях:

$$z_1 = z_2 \quad \text{и} \quad v_1 = v_2,$$

т. е., другими словами, пьезометрические высоты h_1 и h_2 должны были бы быть одинаковыми; действительно, когда сечения I и II находятся друг от друга недалеко, разность этих высот трудно уловить но по мере удаления сечения II-го от I-го, уменьшение подъема воды в пьезометрической трубке II-го сечения делается все более и более заметным. Далее оказывается, что не только увеличение расстояния между сечениями I и II уменьшает пьезометрическую высоту во II-м сечении, но то же происходит и при увеличении скорости протекания воды по трубе и уменьшении диаметра трубы. Между тем, уменьшение пьезометрической высоты, очевидно, соответствует уменьшению потенциальной энергии в текущей воде, а последняя вообще, сама по себе, конечно, теряться не может (по закону сохранения энергии); очевидно, уменьшение ее можно объяснить только тем, что указанная энергия затрачивается на преодоление некоторых, непринятых нами во внимание при выводе уравнения Д. Бернулли, сопротивлений, являющихся результатом как внутренних качеств жидкости и свойств ее движения, так и внешних обстоятельств. Действительно, опыт показывает, что, во первых, при движении жидкостей проявляется внутреннее трение, являющееся результатом неодинаковой скорости движущихся струек: одни струйки движутся скорее, другие медленнее, и, вследствие этого, появляется скольжение одних струек относительно других, и, в связи с присущим жидкости свойством сцепления, сопротивление этому скольжению (сопротивление силам сдвигающим или тангенциальным). Еще Ньютон нашел, что, если мы имеем слой жидкости с поверхностями, равными ω см², толщиной ϱ , и движущаяся с одной стороны этого слоя жидкость имеет скорость v_1 , а с другой стороны скорость v_2 , при чем $v_1 > v_2$, то со стороны движущейся с большей скоростью жидкости появляется сила, ускоряющая движение среднего слоя, а со стороны движущейся с меньшей скоростью жидкости сила, замедляющая движение того же слоя, по величине равная

$$S = \eta \omega \frac{v_1 - v_2}{\varrho}, \quad (12)$$

где η — коэффициент пропорциональности [представляющий из себя силу сопротивления, проявляющуюся при движении со скоростью $1 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ слоя воды, площадью, равной 1 см^2 , относительно другого слоя, площадью тоже в 1 см^2 и находящегося на расстоянии 1 см от первого] и выражающийся (в абсолютной системе С. Г. С. в $\frac{\text{дин. сек}}{\text{см}^2}$) для воды, температурой в $t^\circ \text{C}$, соотношением:

$$\eta_{\text{абс.}} = \frac{0,01775}{1 + 0,0331 t + 0,000244 t^2},$$

а в технической системе $\left(\frac{\text{кг. сек.}}{\text{м}^2} \right)$:

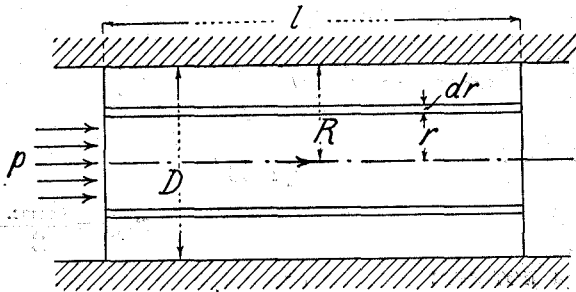
$$\eta = \eta_{\text{абс.}} \cdot \frac{0,001}{9,81} \cdot 0,01 \cdot \frac{1}{1/10000} = \eta_{\text{абс.}} \cdot \frac{10000}{981000} = \frac{\eta_{\text{абс.}}}{98,1}.$$

Коэффициент этот и есть коэффициент внутреннего трения, или вязкость жидкости; он был найден впервые французским гидравликом Пуазейлем (Poiseuille, 1844) и для воды, например, при температуре в 15°C , имеет значение $1162 \cdot 10^{-7}$.

Если в предыдущем уравнении (12) от конечных величин перейти к бесконечно-малым и положить $v_1 - v_2 = dv$, а толщину ϱ положить равной dy , то мы получим выражение для сопротивления при движении одного слоя относительно другого в виде:

$$S = \eta \omega \frac{dv}{dy}. \quad (13)$$

Уже одно существование внутреннего трения может объяснить, до некоторой степени, понижение высоты воды (давления) в пьезометрических трубках горизонтального водопровода, указанное выше. В самом деле, в силу неодинаковой скорости движения различных слоев движущейся в трубе (черт. 42) воды и, при том, как показывает опыт, увеличивающейся к оси трубы, появляющееся между цилиндрической поверхностью радиуса r и другой, ей концентрической, радиуса $r + dr$, трение, препятствующее скольжению внутреннего цилиндра вдоль наружного, на основании предыдущего, может быть представлено в виде:



Черт. 42.

$$- 2 \pi r \cdot \eta l \frac{dv}{dr};$$

здесь знак (—) обозначает, что (v) уменьшается с увеличением радиуса (r); называя давление, которое необходимо приложить на торцевой поверхности для преодоления рассматриваемого сопротивления, через p (на единице площади), можем написать соотношение:

$$\pi r^2 p = -2 \pi r \eta l \frac{dv}{dr},$$

откуда

$$dv = -\frac{p \cdot r \cdot dr}{2 \cdot \eta \cdot l},$$

а, интегрируя, имеем:

$$v = -\frac{p r^2}{4 \eta l} + \text{const.}$$

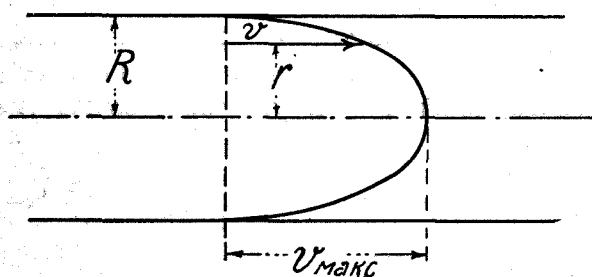
Так как есть все основания предполагать, что около самых стенок трубы, в силу сцепления материала стенок с частицами жидкости, скорость (v) равна нулю (ниже мы увидим подтверждение этого предположения опытными данными), то

$$0 = -\frac{p R^2}{4 \eta l} + \text{const.},$$

а теперь, подставляя из последнего соотношения значение постоянной в предыдущее уравнение, имеем:

$$v = \frac{p}{4 \eta l} (R^2 - r^2)$$

— параболический закон распределения скоростей в трубе (черт. 43),



Черт. 43.

при чем, очевидно, максимальное значение скорости получим по оси трубы:

$$v_{\text{макс.}} = \frac{p R^2}{4 \eta l}.$$

Если ввести среднюю скорость по сечению трубы — $v_{\text{ср.}}$, то, очевидно:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{v_{\text{макс.}}}{2},$$

а потому:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{p \cdot R^2}{8 \eta l},$$

откуда находим давление, необходимое для продвижения всей массы воды в трубе:

$$p = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{R^2} v_{\text{ср.}} = \frac{32 \eta v_{\text{ср.}} \cdot l}{D^2} \quad (14)$$

Переходя от давления к высоте давления (напору), получим:

$$h = \frac{8 \eta l}{\delta \cdot R^2} \cdot v_{\text{ср.}} = \frac{32 \eta v_{\text{ср.}}}{\delta \cdot D^3} \cdot l, \quad (15)$$

— если еще заменить R через $D/2$; последнее выражение для потери в высоте напора в трубопроводе от внутреннего трения найдено было опытным путем еще Пуазейлем, а потому и носит название формулы Пуазейля.

Течение, которое мы только что рассматривали, совершающееся параллельными струйками (линии тока параллельны оси трубы), а потому называемое, как мы видели выше, параллельно-струйчатым или спокойным (или еще ламинарным) течением, происходит только при скоростях, не достигающих известного предела, зависящего от диаметра трубы и от рода и состояния жидкости; оказывается, что, как только скорость течения жидкости в трубе переходит указанный предел, течение в трубе делается беспокойным, вихревым; в этом случае о параллельности течения говорить уже совершенно не приходится. При вихревом движении каждая частичка жидкости описывает ломаный зигзагообразный путь, так что вместе с главным движением, продвигающим всю массу жидкости вперед, является, как бы дополнительное, поперечное движение, крайне неправильной формы. Явление такого перехода жидкости из спокойного состояния в беспокойное при определенной скорости наблюдали многие гидравлики (Hagen, Hele Shaw и др.), но специально занимался этим вопросом и изучил это явление не только с качественной, но и с количественной стороны Osborne Reynolds¹⁾; последний не только установил факт существования предельной скорости, названной им критической, но и дал для нее определенное значение, а именно

$$v_{\text{кр.}} = C \frac{\eta}{\delta d}, \quad (16)$$

где η — коэффициент внутреннего трения, δ — вес жидкости в $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, d — диаметр трубы в м; для C можно принять значение $\sim 20\,000$. Для воды, например, при $t = 0^\circ \text{C}$, получим:

$$v_{\text{кр.}} \cong \frac{20\,000 \cdot 0,00018}{1000 \cdot d} \cong \frac{0,0036}{d}.$$

Позднейшие исследования показали, что предельная скорость Reynolds'a не имеет абсолютного значения, что она может иметь указанную величину только при устройстве установки для исследования течения, геометрически подобном устройству Reynolds'a, в осо-

¹⁾ Papers of Mechanical and Physical Subjects, Cambridge, at the University. Press, 1901. Vol II, page 51 и сл.

бенности при одинаковых условиях входа в трубу и при одинаковой шероховатости трубы; при различных же устройствах установок течения и различных шероховатостях предельная скорость может принять всевозможные значения. При тщательных мерах против сотрясений или возмущений удается иногда получить ламинарное течение при скоростях, далеко превосходящих предельную скорость Reynolds'a.

В последнее время в гидродинамике получило весьма важное значение схожее с (16) выражение:

$$R = \frac{vL}{\nu}, \quad (17)$$

так называемое, „Рейнольдсово число“, в котором L обозначает какое либо характеристическое измерение (диаметр трубы, ширина канала и т. д.), v — характеристическая скорость и $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ — модуль вязкости жидкости; выражение это является более общим, чем (16), и из него уже, как следствие, вытекает Рейнольдсова критическая скорость или критическое число, раз только мы Рейнольдсову числу (R) придадим определенное, вышеуказанное для C значение. Рейнольдсово число, являющееся отношением измерений (например, в системе метр-кг-сек.) —

$\frac{v^2}{L}$ и $\frac{\nu v}{L^2}$ — основных членов, входящих в уравнение движения жидкости и представляющих силы инерции $\left(\frac{\partial v}{\partial t} \text{ или } v \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ и вязкости

$\left(v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$, дает возможность установить механическое подобие течений жидкостей. В самом деле, очевидно, что два геометрически подобные течения жидкости будут и механически подобны, если они подобны между собой в отношении влияния сил инерции и вязкости, а это будет, как скоро Рейнольдсовы числа R , вычисленные по соответствующим друг другу в обоих течениях значениям v , L и ν , совпадают. Если, например, при сравнении двух течений одной и той же жидкости, когда, следовательно, модуль вязкости ν в обоих случаях одинаков, произведения vL для обоих течений численно равны между собой, то два геометрически подобные течения будут также и механически подобны.

Задача № 6. В горизонтальной длинной трубке диаметром 0,05 м мы хотим воспроизвести течение воды, имеющее место в трубе диаметром 0,5 м. Какую скорость (v_1) мы должны сообщить воде в трубке, чтобы получить течение, механически подобное течению в трубе при скорости $2 \frac{\text{м}}{\text{сек.}}$.

По уравнению (17), так как $\nu_1 = \nu_2$, имеем:

$$v_1 d_1 = v_2 d_2,$$

откуда

$$v_1 = v_2 \frac{d_2}{d_1} = 2 \frac{0,5}{0,05} = 20 \frac{\text{м}}{\text{сек.}}$$

Задача № 7. Необходимо испытать модель плана (аэроплана), ширина которого $L_1 = 0,5 \text{ м.}$; ширина действительного плана $1,5 \text{ м.}$ С какой скоростью необходимо передвигать модель, чтобы получить движение, механически подобное тому, какое имеет место при действительном полете плана со скоростью 40 м./сек. ?

По уравнению (17) имеем:

$$v_1 L_1 = v_2 L_2$$

откуда:

$$v_1 = v_2 \frac{L_2}{L_1} = 40 \frac{1,5}{0,5} = 120 \text{ м./сек.}$$

Чтобы избежать такой большой скорости, можно испытание модели произвести в воде; в этом случае, принимая модуль вязкости для воды (15°C)

$$\nu_1 = 1156 \cdot 10^{-7}$$

и для воздуха (15°C. , 760 мм)

$$\nu_2 = 1541 \cdot 10^{-6},$$

имеем:

$$\frac{v_1 L_1}{\nu_1} = \frac{v_2 L_2}{\nu_2},$$

откуда

$$v_1 = v_2 \frac{L_2}{L_1} \frac{\nu_1}{\nu_2} = 40 \frac{1,5}{0,5} \cdot \frac{1156 \cdot 10^{-7}}{1541 \cdot 10^{-6}} \cong 9 \text{ м./сек.}$$

Работы последних лет, как теоретические ¹⁾, так и экспериментальные ²⁾ показали, что все же и при вихревом течении жидкости в непосредственной близости к стенкам трубы, канала и проч., в очень

¹⁾ Prandtl, L. Ueber Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. d. 3. Int. Mathem. Kongresses in Heidelberg. 1911.

Kármán, Th. Über laminare und turbulente Reibung. Z. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 1, 1921.

Kármán, Th. und T. Levi-Civita. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro—und Aerodynamik. 1924.

²⁾ Burgers, I. M. Verhandl. d. Kön. Akad. d. Wiss. Amsterdam. 1. Sektion, XIII. 3. 1924.

B. G. Van-der Hegge Zijnen. Zeitschr. für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1924.

В. Н. Пинегин. Экспериментальное исследование перехода спокойного течения в вихревое в стеклянном клиновом желобе. Томск, 1924. Работа еще не совсем закончена и не опубликована.

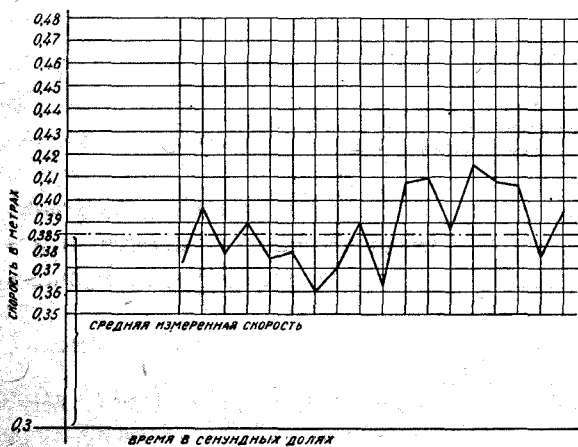
тонком слое, называемом пограничным слоем, существует ламинарное течение, переходящее далее внутри жидкости в вихревое; границей между обоими течениями является область, в которой скорость течения имеет величину критической скорости Reynolds'a; от этой границы скорость в пограничном слое спускается у самых стенок до нуля. Вихревое движение состоит из вихрей, зарождающихся у пограничного слоя, вследствие появления здесь повышенного давления, и посылаемых внутрь жидкости; вихри эти для своего распространения имеют определенную нижнюю границу скорости и могут иметь место только в том случае, если для развития их имеется достаточное пространство.

Установление этих положений привело к определению критической скорости Reynolds'a как такой скорости, при которой сопротивление вязкости между жидкостью, текущей, напр., в трубе, и той ее частью, которая пристала к стенкам трубы, преодолено, и происходит скольжение подвижной части жидкости по неподвижной. При этом в пограничном слое появляется повышенное давление, которое, благодаря вязкости, распространяется во внутреннюю массу текущей жидкости¹⁾.

§ 4. Пульсация струй.

Описанное выше вихревое движение мы можем наблюдать не только в трубах, но и, вообще, почти во всех естественных и искусственных водотоках: реках, каналах и проч.

Как следствие такого беспокойного вихревого движения, является между прочим, так называемая, пульсация водных струй, наглядно проявляющаяся в том, что в одной и той же точке какого либо живого сечения потока величина скорости колеблется, как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения, около некоторой сред-



Черт. 44.

ней местной скорости, иногда в значительных пределах. Чтобы показать характер и величину пульсации струй, приводим на черт. 44 один из графиков пульсации по наблюдениям ее на реке

¹⁾ Weill, L. W. Neue Grundlagen der technischen Hydrodynamik. München und Berlin. 1920.

Буге¹⁾); здесь по оси абсцисс откладывается время в секундных долях, а по оси ординат скорость в данной точке живого сечения реки; как видно, средняя за некоторый промежуток времени скорость определилась в этой точке приблизительно в 0,385 м./сек., а в течение этого промежутка она колебалась и вверх (до 0,414 м./сек.) и вниз (до 0,36 м./сек.).

Пульсация, как показывает опыт, увеличивается по мере приближения точки наблюдения к дну и берегам живого сечения реки или канала, и уменьшается по мере удаления от них.

Последнее обстоятельство располагает искать причину пульсации во влиянии шероховатости стенок и дна русла, и до известной степени это верно, но все же основная причина кроется в свойствах самой жидкости. Указанное выше появление повышенного давления в пограничном слое, результатом чего являются вихри, как бы посылаемые этим слоем, вызывает, очевидно, в массе движущейся жидкости периодические замедления и следующие за ними ускорения движения частиц, а это и ведет непосредственно к пульсации струй.

§ 5. Движение грунтовых вод.

Спокойное или ламинарное течение приходится наблюдать очень редко, главным образом в трубах малого диаметра, но в природе можно указать, как на пример такого течения, на течение грунтовых вод, которые, являясь, с одной стороны, продуктами атмосферных осадков, отчасти просачивающихся через поверхностный почвенный слой, с другой стороны, продуктами конденсации водяных паров, находящихся в атмосфере, движутся в толще водопроницаемых слоев, следуя их уклону. Отчасти пробираясь между отдельными зернами грунта, аналогично тому, как какая либо жидкость проходит через песок, угольный порошок и т. д., отчасти просачиваясь через самую толщу зерен грунта, грунтовые воды текут подобно тому, как течет вода по капиллярным трубкам; к этому движению можно, следовательно, применить закон Пуазейля, т. е., другими словами, применить уравнение

$$h_w = \frac{8\eta}{\delta r^2} v \cdot L;$$

так как, в зависимости от характера и рода водопроницаемого слоя, как радиус пор r , так и коэффициент η , зависящий в данном случае от рода растворенных в воде веществ, будут меняться, то мы можем предыдущее соотношение представить в виде:

$$h = mvL,$$

где под v следует понимать уже скорость просачивания грунтовых вод; под m — опытный коэффициент, зависящий от рода и состояния

¹⁾ Инж. В. М. Попов. Результаты работ и исследований на Южно-Бугской Гидрометрической станции. Одесса. 1925, стр. 19.

грунта, а под h и L соответственно, напор, под которым происходит движение грунтовых вод, и длину пути просачивания; из последнего соотношения можем получить также такое:

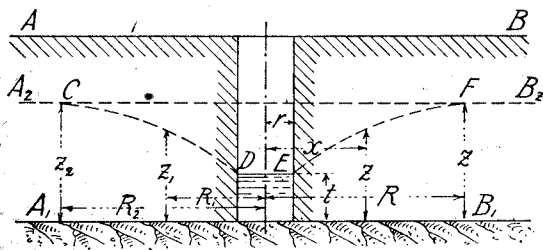
$$v = k \frac{h}{L},$$

или, заменяя h и L дифференциальными выражениями: dz (напор) и соответственно dx (элементарный путь просачивания), будем окончательно иметь:

$$v = k \frac{dz}{dx}, \quad (18)$$

где $k = \frac{1}{m}$, как указано выше, опытный коэффициент.

Допустим теперь, что на прилагаемом чертеже (черт. 45) нанесен разрез почвы: линия AB — горизонтальная поверхность почвы, A_1B_1 — поверхность водонепроницаемого подстилающего слоя; A_2B_2 — поверхность



Черт. 45.

грунтовых вод, находящихся в состоянии покоя над водонепроницаемым слоем A_1B_1 . Допустим, что мы вырыли круглый колодец, радиуса r , до водонепроницаемого слоя. При нормальных условиях уровень воды в колодце будет находиться на уровне A_2B_2 ; если мы

из колодца начнем каким либо образом откачивать воду (насосом, просто вычерпывать ведром и т. д.), то на место откачиваемой воды из водоносного слоя начнет поступать другая, восполняющая первую; если мы откачивать воды будем больше, чем поступает таковой из водоносного слоя, уровень воды в колодце будет понижаться, скорость подтока воды к колодцу будет увеличиваться, вследствие повышения напора, но при достаточном понижении уровня воды в колодце и соответствующем увеличении напора, может, наконец, установиться равновесие между количеством откачиваемой воды и подтекающей. Поверхность грунтовой воды около колодца уже не будет, очевидно, горизонтальной плоскостью, а примет форму некоторой поверхности вращения, сечение которой меридиональной плоскостью изобразится кривыми CD , EF , носящими название депрессионных кривых, или просто депрессий. Вообразим теперь концентрический с поверхностью колодца вертикальный цилиндр, радиуса x , и высотой z (см. черт. 45): очевидно, через поверхность (ω) такого цилиндра будет подтекать из водоносного слоя к колодцу количество воды:

$$Q = \omega \cdot v = 2\pi x \cdot z \cdot k \frac{dz}{dx}, \quad (19)$$

откуда имеем:

$$zdz = \frac{Qdx}{2\pi kx},$$

а, интегрируя это выражение в пределах изменения x от $x=r$, до $x=R$, понимая под R расстояние, на которое распространяется депрессионная кривая, или на котором последняя сливается с прямой A_2B_2 , при чем соответствующие пределы изменения z обозначим через t и Z , получим:

$$Z^2 - t^2 = \frac{Q}{\pi k} \lg \frac{R}{r},$$

откуда можно определить количество подтекающей к колодцу воды:

$$Q = \pi \cdot k \cdot \frac{Z^2 - t^2}{\lg \frac{R}{r}}. \quad (20)$$

При известном уже Q и определенном R можно вычислить глубину воды в колодце:

$$t = \sqrt{Z^2 - \frac{Q}{\pi k} \lg \frac{R}{r}},$$

или вычислить R по непосредственно измеренной глубине t . Уравнение кривой депрессии, очевидно, будет:

$$z^2 - t^2 = \frac{Q}{\pi k} \lg \frac{x}{r}.$$

Очевидно, далее, что для каких либо двух вертикалей, находящихся от оси колодца на расстояниях R_1 и R_2 , имеем:

$$z_1^2 - t^2 = \frac{Q}{\pi k} \lg \frac{R_1}{r},$$

$$z_2^2 - t^2 = \frac{Q}{\pi k} \lg \frac{R_2}{r},$$

откуда при вычитании первого уравнения из второго получим:

$$z_2^2 - z_1^2 = \frac{Q}{\pi k} [\lg R_2 - \lg R_1],$$

а теперь

$$z_2 + z_1 = \frac{Q}{\pi k} \left[\frac{\lg R_2 - \lg R_1}{z_2 - z_1} \right];$$

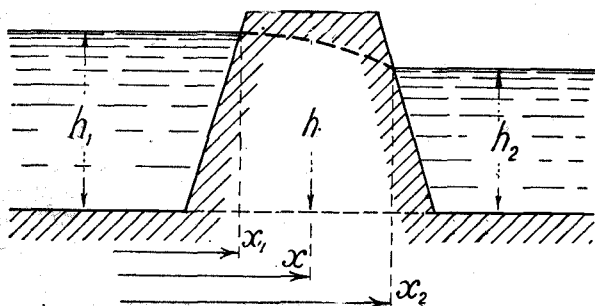
так как Q , R_1 , R_2 и разность высот $z_2 - z_1$ легко измерить, то последнее соотношение дает возможность вычислить $z_2 + z_1$, а, зная эту сумму и разность $z_2 - z_1$, найти z_2 и z_1 , а следовательно и глубину залегания водонепроницаемого слоя.

Задача № 8. Два водоема (чертеж 46), имеющие глубины h_1 и h_2 , разделены земляной дамбой. Определить количество воды, просачивающейся через дамбу.

Решение. Очевидно, уровень воды, просачивающейся через дамбу, располагается по кривой депрессии; поэтому, к данной задаче можно применить все наши предыдущие рассуждения. Таким образом, называя площадь просачивания через ω , а скорость просачивания через v , имеем количество (Q) воды, просачивающейся через дамбу:

$$Q = \omega \cdot v;$$

подставляя сюда, согласно (18), значение скорости v и принимая Q за количество воды, просачивающейся на единице длины дамбы, имеем:



Черт. 46.

$$Q = -kh \frac{dh}{dx};$$

здесь знак (—) обозначает, что h убывает с возрастанием x .

Из последнего соотношения находим:

$$h dh = -\frac{Q}{k} dx,$$

и интегрируя в пределах изменения h и x , получим:

$$\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} = -\frac{Q}{k} (x_1 - x_2),$$

откуда определяем искомое Q :

$$Q = \frac{k}{2} \cdot \frac{h_1^2 - h_2^2}{x_2 - x_1}.$$

ГЛАВА III.

§ 1. Равномерное течение воды в трубах.

Вихревая форма движения жидкости, очевидно, вызывает, при протекании ее в трубах, потерю энергии, а, следовательно, и напора — значительно большую, чем при ламинарном движении. Действительно, опыт показывает, что в этом случае потеря в напоре пропорциональна уже не первой степени скорости, а второй, и может быть выражена общей формулой (Вейсбаха — Weisbach'a), вида:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad (1)$$

где λ — опытный коэффициент, зависящий от рода и состояния стенок трубы, а также от рода и состояния жидкости, от диаметра трубы и от скорости движения, и для грубых подсчетов иногда принимаемый равным 0,03 — 0,025.

Что действительно так должна выражаться потеря в напоре в данном случае, это можно видеть из таких рассуждений¹⁾: известно, что параллельное движение при некоторой определенной скорости (критической) перестает существовать и вместо него появляется вихревое движение, которое по самому существу должно сопровождаться другим законом сопротивления, чем параллельное; переход этот от одной формы течения к другой происходит почти всегда очень быстро. Хотя закон для новой формы движения нам неизвестен, но мы можем предположить, что для механически подобных течений жидкости, следовательно, для таких, у которых Рейнольдсовы числа (R) одинаковы, также и этот переход должен совершаться при одинаковых числах R . В таком случае, в момент, когда появляется вихревая форма движения, оба значения потерь в напоре для обеих форм движения должны совпадать, хотя бы уже в ближайшее мгновение и начал существовать иной закон. Возможность такого допущения заключается исключительно в быстром переходе одной формы движения в

¹⁾ Th. Pöschl. Lehrbuch der Hydraulik. 1924, стр. 105.

другую. Зная теперь, что для параллельного движения потеря в напоре выражается на единице длины соотношением (15, глава II):

$$h_{w_1} = \frac{32 \eta v}{\delta D^2} = \frac{32 \nu \cdot v}{g D^2},$$

и допуская, что для вихревого движения потеря может быть выражена общим соотношением вида:

$$h_{w_2} = \varepsilon \frac{v^a}{D^\beta},$$

мы должны для момента перехода оба значения h_{w_1} и h_{w_2} , как для механически подобных течений, приравнять между собой и, таким образом,

$$\frac{32 \nu \cdot v}{g D^2} = \varepsilon \frac{v^a}{D^\beta}.$$

Для того, чтобы Рейнольдсовы числа были одинаковы, очевидно, необходимо, чтобы, определенное из этого уравнения выражение $\frac{v^{a-1} D^{2-\beta}}{\nu}$ было Рейнольдсово число, т. е.

$$\frac{v^{a-1} D^{2-\beta}}{\nu} \cong \frac{v \cdot D}{\nu} = R,$$

а это возможно, если только

$$a = 2$$

$$\beta = 1,$$

а тогда

$$h_{w_2} = \varepsilon \frac{v^2}{D},$$

т. е., для потери в напоре получим выражение, вполне согласное с соотношением (1), найденным, как уже указывалось, опытным путем.

Конечно, при течении жидкости в трубе сопротивление от внутреннего трения — скольжения одних слоев жидкости по другим — продолжает существовать, но можно показать, что это сопротивление, по сравнению с сопротивлением от вихревого движения, ничтожно мало. Решим в самом деле такую задачу.

Задача № 1. Дана труба длиной $l = 1000$ м., диаметром $d = 0,5$ м.; в трубе протекает вода с температурой в 20° С. со средней скоростью $v = 2$ м./сек. Требуется найти сопротивления от внутреннего трения и от беспорядочного движения.

Решение. При решении задачи будем определять не потерю в напоре, а соответствующее давление, необходимое для продвижения воды в трубе.

Давление для преодоления внутреннего трения будет, согласно соотношения (14) главы II,

$$p_1 = \frac{32 \eta v \cdot l}{d^3} = \frac{32 \cdot 0,000103 \cdot 2 \cdot 1000}{0,25} = 26,4 \text{ кг./м}^2.$$

Давление для преодоления вихревого сопротивления, согласно соотношения (1) главы III, должно иметь величину:

$$p_2 = 0,025 \frac{1000}{0,5} \frac{4}{2 \cdot 9,81} \cdot 1000 = 10193 \text{ кг./м}^2.$$

Полученные результаты вполне подтверждают чрезвычайную величину вихревого сопротивления, по сравнению с сопротивлением внутреннего трения, а так как в практике приходится почти всегда, за очень редкими исключениями, иметь дело с движением вихревым (скорости всегда выше критической), то становится понятной необходимость уметь правильно и точно определять вихревое сопротивление.

Немудрено, поэтому, что очень многие гидравлики работали над определением истинной величины потери в напоре при протекании воды в трубах, и различного рода формул для определения указанного сопротивления в технической литературе найдется не мало. Удивительного в том, что гидравлики находили различные значения для этой потери, ничего нет, так как, во первых, опыты производились над трубами из различного материала (железные трубы, чугунные, медные, цинковые и т. д.), или из одного материала, но различных его качеств, или способов получения труб (клепаные железные трубы и сваренные, чугунные трубы из мелко-зернистого чугуна и т. д.), во вторых, трубы могли быть различных сроков службы (новые трубы, трубы старые), а опыт учит, что уже годичный срок службы, напр., водопроводной трубы изменяет и ее поверхность и диаметр, так как на внутренней поверхности трубы откладываются из воды различного рода соли, уменьшающие диаметр трубы и изменяющие ее поверхность, а следовательно, и шероховатость. По данным, напр., проф. Banki¹⁾ годовые отложения в трубах Гамбургского водопровода (Эльба) диаметром в $d = 102, 152, 305$ и 508 мм. определились соответственно в $1,25, 1,75, 2,07, 2,25$ мм. В третьих, методы производства опытов, а равно и измерительные приборы, конечно, совершенствуются, и результаты, полученные из опытов, произведенных несколько десятков лет тому назад, могут не соответствовать результатам опытов современных; наконец, в четвертых, самая вода в разных городах имеет различный состав, и, конечно, это обстоятельство тоже должно сказаться на результатах опытов. Поэтому, не приводя целого ряда, может быть и интересных,

¹⁾ D. Banki. Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten. 1921. Bd I, стр. 70.

опытных данных и формул, в дальнейшем мы укажем только на такие соотношения для определения вихревых сопротивлений в трубах, которые заслуживают особого внимания.

Формула Lang'a¹⁾ (1907 г.). На основании данных прежних, известных в литературе, опытов и свыше 300 своих собственных опытов, проведенных при скоростях, лежащих в пределах от 0,004 м. до 53 м., Lang вывел для коэффициента λ в соотношении (1) следующую зависимость:

$$\lambda = a + \frac{b}{\sqrt{v \cdot d}} \quad (2)$$

где v — скорость и d — диаметр трубы в метрах, постоянные же a и b для чистой воды имеют следующие значения: 1) для совершенно гладких новых труб (из металла, стекла, лакированного дерева и проч.) $a = 0,012$; 2) для новых или хорошо очищенных и старательно монтированных чугунных труб $a = 0,020$; 3) постоянная b зависит от вязкости жидкости, а, следовательно, от температуры, и для воды с температурой $t = 3^\circ, 20^\circ, 100^\circ \text{C}$ соответственно равна 0,0022, 0,0018, 0,0004.

Формула Biel'я²⁾ (1907) также выведена на основании литературных материалов и проверена собственными опытами, и имеет вид:

$$h = \frac{L v^2}{R} \left(a + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{b}{v \sqrt{R}} \right), \quad (3)$$

где L — длина трубы в километрах, v — скорость и h — теряющийся напор в метрах, R — так называемый, гидравлический радиус, равный отношению площади (ω) поперечного сечения трубы к смоченному периметру ($R = \frac{\omega}{P}$), наконец, a , f и b — коэффициенты, при чем (f) зависит от шероховатости трубы, а (b), кроме того, от вязкости жидкости ($b = b_0 \frac{\eta}{Q}$, где b_0 новая постоянная). Для воды, например, при температуре в 12°C , если обозначить категории шероховатости соответственно через 0, I, II, III, IV, V, имеем такие значения этих коэффициентов:

Категории шероховатости	0	I	II	III	IV	V
Коэффициент a	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
" f	0	0,0064	0,018	0,036	0,054	0,07
" b	0	0,0118	0,0088	0,0057	0,0032	0,0032

¹⁾ Hütte, 21. Aufl., Bd I. 1911, стр. 293.

²⁾ R. Biel. Über den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten. 1907. Heft 44.

Указанные категории шероховатости установлены Вилем следующим образом:

категория 0		принадлежит идеально гладким трубам; с большим приближением к этой категории можно отнести, например, шероховатость стеклянных трубок, с особенной тщательностью приготовленных;
"	I	" трубам медным, свинцовым, цинковым, тянутым без шва, стеклянным трубкам, трубам из выстроганного и полированного дерева;
"	II	" железным трубам, газовым трубам, трубам из выстроганного дерева, чугунным трубам, асфальтированным, выкрашенным масляной краской;
"	III	" новым чугунным трубам, бетонным трубам, с особенной тщательностью приготовленным, трубам деревянным долбленным;
"	IV	" старым чугунным трубам, трубам из обыкновенного бетона, трубам из нестроганных досок;
"	V	" трубам из обыкновенной кирпичной кладки, ломанного камня и пр.

Формула Дарси (1865) легко получается из формулы (1) подстановкой вместо λ численного значения 0,0302, и имеет большое распространение в водопроводном деле, вследствие вхождения в нее, вместо скорости, количества $\left(Q \text{ в } \frac{M^3}{\text{сек.}} \right)$ подаваемой воды и диаметра трубы; в самом деле, имеем очевидное соотношение:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2},$$

или

$$v^2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 d^4};$$

подставляя это значение v^2 в формулу (1) и приравнявая $\lambda = 0,0302$, получим:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,0302 \frac{16}{3,14^2 \cdot 2 \cdot 9,81} \cdot \frac{Q^2}{d^5} l \cong 0,0025 \frac{Q^2}{d^5} l, \quad (4)$$

или просто:

$$h = \beta \frac{Q^2}{d^5} l,$$

где $\beta = \frac{1}{400}$.

При вышеуказанных опытах для чугунных труб диаметром 127, 305, 406, 762 и 1067 мм и для железных труб диаметром 51 мм найдено, при весьма различных скоростях, что в среднем $v_{\text{ср.}} = 0,84v_{\text{макс.}}$ при чем для труб с большим диаметром средняя скорость несколько больше этой средней величины; при больших скоростях возрастает также и отношение $\frac{v_{\text{ср.}}}{v_{\text{макс}}}$, но отступления от средней величины не превосходят 3%.

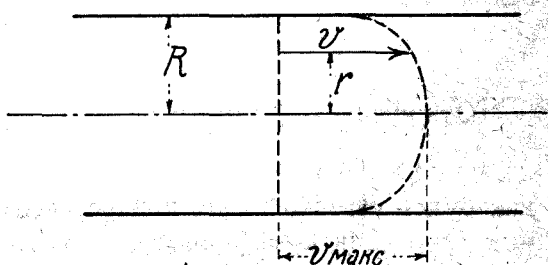
Отсюда можно заключить, что в длинных прямых трубах среднюю скорость с большой точностью можно определять по скорости вдоль оси трубы, что легко произвести трубкой Пито (Pitot) системы Amsler'a (см. Главу IX, § 2).

Интересно отметить, что упоминаемый выше Th. v. Kármán¹⁾, на основании анализа турбулентного движения жидкости установил теоретически, так называемый, $y^{\frac{1}{4}}$ -закон для распределения скорости течения жидкости, обтекающей стенку, где y — расстояние рассматриваемой скорости от стенки. На основании этого закона получается следующее соотношение для распределения скоростей в трубе радиуса (R):

$$v = v_{\text{макс.}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^n \right]^{\frac{1}{4}},$$

каковое при $n = 1,25 - 2$ с большой точностью соответствует опытным данным, между прочим, и выше приведенным.

Данное этим соотношением распределение скоростей в трубе при вихревом течении отчетливо указывает (черт. 48) на сравнительно равномерное распределение скоростей по сечению трубы и быстрое их падение до нуля у самых стенок трубы.



Черт. 48.

§ 2. Общие основания расчета водопроводов.

В предыдущем параграфе было приведено соотношение для потерь в напоре в трубопроводах в форме:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Соотношение это, вводя вместо диаметра трубы гидравлический радиус, очевидно, можно преобразовать в такое:

$$h = \lambda_0 \frac{l}{R} \frac{v^2}{2g},$$

¹⁾ Th. Kármán. Über laminare und turbulente Reibung. Zeit. f. angew. Mat. u. Mech. I. 1921, № 4, стр. 233 — 252.

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda_0}} \sqrt{\frac{h}{l} \cdot R}. \quad (6)$$

Обозначая теперь $\frac{h}{l}$ через I , при чем в данном случае I будет представлять потерю напора на единице длины трубы („пъезометрический уклон“), мы можем соотношение (6) представить в виде:

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda_0}} \sqrt{RI},$$

а обозначая еще $\sqrt{\frac{2h}{\lambda_0}}$ через C , и вводя вместо скорости v ее значение через отношение расхода к площади поперечного сечения трубы ($v = \frac{Q}{\omega}$), получим:

$$\frac{Q}{\omega} = C \sqrt{RI},$$

откуда:

$$k = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \omega C \cdot \sqrt{R}. \quad (7)$$

Отношение $\frac{Q}{\sqrt{I}}$ называется модулем расхода или коэффициентом пропускной способности¹⁾ и широко применяется, как будет указано ниже, при расчете водопроводных и канализационных труб. Для коэффициента C , который является зависящим от шероховатости стенок, наиболее употребительное для данных случаев соотношение — это сокращенная формула Гангилье и Куттера (Ganguillet-Kutter, 1869):

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{23n}{\sqrt{R}}}. \quad (8)$$

Последнее значение C применяется в особенности при расчетах канализационных труб (когда лишь в виде исключения уклон $I < 0,0005$), при чем значение n выбирается в пределах 0,012 — 0,014, без различия материала труб, так как последние покрываются в значительной мере осадками, что, конечно, сглаживает указанные различия в шероховатости стенок.

Для водопроводов, бывших в употреблении, как в Европе, так и в Америке, рекомендуется брать по Kutter'y (1868 г.) —

$$C = \frac{100}{1 + \frac{0.25}{\sqrt{R}}} \text{ (м)}. \quad (9)$$

¹⁾ Коэффициент пропускной способности введен в практику расчета водопроводных труб инж. К. М. Игнатовым („Из практики проектирования инженерных сооружений“. Москва 1908 г.).

Вообще для водопроводных и канализационных целей значения коэффициента (n) для формулы (9) даются в следующей таблице (№ 2).

Таблица № 2.

Р О Д С Т Е Н О К		n
1	Чистые (новые) гончарные, чугунные и железные трубы, хорошо уложенные и соединенные	0,011
2	Водопроводные трубы в нормальных условиях, без заметной инкрустации; весьма чистые водосточные трубы	0,012
3	Водосточные трубы в нормальных условиях; несколько загрязненные водопроводные трубы	0,013
4	Загрязненные трубы (водопроводные и водосточные)	0,014
5	Чрезвычайно загрязненные водостоки	0,015

Необходимо отметить, что для коэффициента C составлены таблицы, дающие значения его, в зависимости от величин гидравлического радиуса R и степеней шероховатости¹⁾, что, конечно, значительно облегчает все расчеты.

Для трубопроводов вообще имеет распространение еще формула Маннинга (Manning — 1890 г.):

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}, \quad (10)$$

где n — коэффициент шероховатости, для которого автор берет значения по Гангилье и Куттеру.

Выше было указано, что применение коэффициента пропускной способности весьма распространено при расчете водопроводных и канализационных труб; действительно, пользуясь этим коэффициентом, можно получить следующий ряд соотношений:

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{Q^2}{k^2} l; \\ I &= \frac{Q^2}{k^2}; \\ Q &= k \sqrt{I}; \\ k^2 &= ad^5; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

при чем для модуля расхода (k) или его квадрата (k^2) существуют уже готовые таблицы значений, в зависимости от диаметра труб и

¹⁾ См. проф. Н. Н. Павловский „Гидравлический Справочник“. Ленинград 1924, откуда и заимствованы значения коэффициентов (n) для водопроводных и канализационных труб

принятого коэффициента C . В следующей таблице (№ 3) приведены значения k^2 при коэффициенте C по Маннингу и Куттеру¹⁾:

Таблица № 3.

Диаметр труб в миллиметрах	Значения k в $\frac{м}{сек.}$ и k^2 при коэффициенте C по			
	Маннингу		Куттеру	
	k	k^2	k	k^2
50	10,4	108,3	6,782	45,99
75	32,9	1083,6	21,43	459,25
100	70,7	$5,0 \cdot 10^3$	48,10	$2,314 \cdot 10^3$
125	126,1	$15,9 \cdot 10^3$	89,84	$8,072 \cdot 10^3$
150	202,5	$41,0 \cdot 10^3$	149,37	$22,31 \cdot 10^3$
175	300,8	$90,5 \cdot 10^3$	229,20	$52,53 \cdot 10^3$
200	423,1	$179,0 \cdot 10^3$	331,70	$110,03 \cdot 10^3$
250	746,3	$557,0 \cdot 10^3$	613,59	$376,50 \cdot 10^3$
300	1187,4	$1410,0 \cdot 10^3$	1012,00	$1024,00 \cdot 10^3$

В этой таблице значения (k) вычислены для C по Маннингу при коэффициенте шероховатости $n = 0,011$, т. е. для труб чистых.

Что касается коэффициента α , то его можно принять для ходовых величин $\lambda = \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}$, соответственно равным 400, 500, 600.

Пользуясь теперь соотношениями (11) и значениями модуля расхода и коэффициента α , можно многие вопросы расчета простых водопроводов (т. е. расчета водопроводных труб с расходом только в конце трубы) свести к простому подбору диаметров труб по модулям расхода, как это будет показано ниже на примерных задачах.

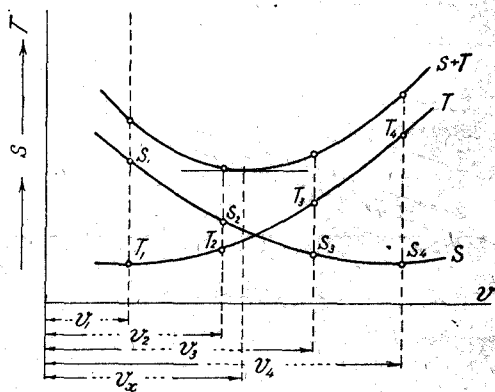
Если водопроводная труба распределяет воду на пути (сложные водопроводы), то должны быть даны длины отдельных участков трубы, количества протекающей по этим участкам воды (или расходы в узловых точках), и напоры в узловых точках. В этом случае нахождение диаметров для отдельных участков по соответствующим модулям расхода ведется по предыдущему, при чем, так как в таблицах диаметры труб не будут соответствовать в точности определенным по расчету модулям, то необходимо выбирать ближайшие по своему значению; и при том так, чтобы, с одной стороны, стоимость труб была наименьшая, а с другой стороны, потеря в напоре не превосходила заданной величины.

¹⁾ Более подробные таблицы значений k^2 по Куттеру см. Н. Н. Павловский „Гидравлический Справочник“, 1924 г., или — Астров „Гидравлика“. Москва, 1911 г.

§ 3. Экономический расчет водопроводов.

При расчете водопроводных линий и сетей необходимо иметь в виду не только стоимость труб, но и эксплуатационные расходы по станции. В этом случае расчет линии или сети ведется таким образом.

По данному количеству воды Q определяют, задаваясь различными скоростями: $v_1, v_2, \dots$, диаметры труб. Зная стоимости единицы (фут, метр) длины труб соответствующих диаметров, находят, при заданных длинах их, полные стоимости линии или сети; прибавляя стоимость укладки труб, получают окончательные стоимости линии или сети: $K_1, K_2, \dots$. Задаваясь сроком амортизации, получают определенные ежегодные амортизационные расходы, прибавляя к которым проценты на капитал, проценты на ремонт и ежегодные расходы на обслуживание, получают суммы ($S_1, S_2, \dots$) полных ежегодных расходов по сети, в зависимости от выбранной скорости воды в трубопроводах; эти стоимости наносят в виде ординат (черт. 49) в прямоугольной системе координат, а по оси абсцисс откладывают соответствующие скорости $v_1, v_2, \dots$; полученные точки S_1, S_2 концов ординат соединяют кривой, которая, очевидно, представит изменение годовых расходов по сети, в зависимости от выбранной скорости течения воды в трубопроводах, при чем эти расходы будут уменьшаться с увеличением выбранной скорости.



Черт. 49.

С другой стороны, в зависимости от изменения скорости протекания воды в трубопроводах, будут меняться потери напора (h_w) в последних от вихревого сопротивления. Эти потери будут тем больше, чем больше скорости. Очевидно, далее, что мощности насосов

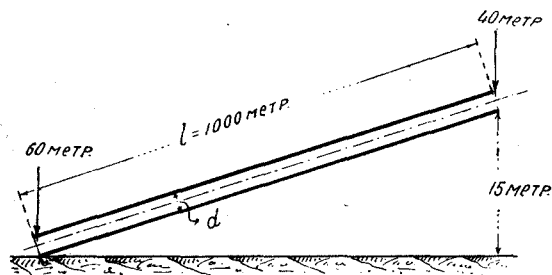
($N = \frac{\delta \cdot Q \cdot (H + h_w)}{75 \cdot \eta}$, где η — коэффициент полезного действия насоса)

должны увеличиваться, увеличатся их стоимости и эксплуатационные расходы на них (топливо, или количество киловатт электрической энергии, смазка, расходы на обслуживающий персонал и проч.). Пусть стоимости насосов будут соответственно: $L_1, L_2, \dots$, амортизационные годовые расходы плюс годовая стоимость топлива или электрической энергии, смазки и проч. будут: $T_1, T_2, \dots$; изображая новые годовые расходы опять в виде ординат для соответствующих скоростей, откладываемых по оси абсцисс, получим ряд новых точек $T_1, T_2, \dots$, соединяя которые, найдем новую кривую (T) годовых расходов по на-

сосной станции, при чем эти расходы будут, очевидно, расти с повышением скорости воды в трубопроводах. Суммируя теперь годовые расходы по станции и по сети (в частном случае, по одной линии), получим новую кривую $(S+T)$; проводя к последней касательную, параллельную оси абсцисс и, определив ее точку соприкосновения с кривой, снесением последней на ось абсцисс, найдем ту скорость v_x , при которой годовые расходы по станции и трубопроводам будут наименьшими.

§ 4. Задачи на расчет трубопроводов.

Задача № 2. Определить диаметр трубопровода длиной $l=1000$ м. для подачи воды в количестве 20 000 ведер в час при условии, что давление в начале трубы равно 6-ти атмосферам, а в конце трубопровода 4-м атмосферам; определить также мощность насоса, потребную для указанной подачи, при чем труба проложена так, что подъем к горизонту составляет $1,5\%$ длины.



Черт. 50.

Решение: Разность давлений на концах трубопровода равна 2 atm., или 20 м. водяного столба; отсюда пьезометрический

уклон $I = \frac{20}{1000} = 0,02$. Количество подаваемой воды в секунду равно:

$$Q = \frac{20.000 \cdot 12,3}{3600} = 68,3 \frac{\text{литра}}{\text{сек.}}$$

Таким образом, коэффициент пропускной способности будет иметь значение:

$$k = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \frac{68,3}{\sqrt{0,02}} = \frac{68,3}{0,141} = 484,4 \frac{\text{литр}}{\text{сек.}},$$

для какового по таблице № 3 ближайший подходящий больший модуль равен 614 ($k^2 = 376,5 \cdot 10^3$), соответствующий диаметру трубы в 250 мм.

По формуле Дириит та же задача решается так: потеря в напоре, равная по условиям задачи 5 м, выразится, согласно основного соотношения:

$$h_w = 5 = 0,0025 \frac{Q^2}{d^5} l,$$

откуда, при $l=1000$ м, имеем:

$$d^5 = \frac{Q^2}{2} = \frac{0,00466}{2} = 0,00233,$$

а теперь

$$d \cong 300 \text{ мм.}$$

При указанной потере в напоре полная высота нагнетания будет:

$$H + h_w = 15 + 5 = 20 \text{ м,}$$

а потому необходимая мощность насоса определится в

$$N = \frac{\delta \cdot Q \cdot (H + h_w)}{75 \cdot \eta} = \frac{1000 \cdot 0,0683 \cdot 20}{75 \cdot 0,8} = 22,6 \cong 23 \text{ лощ. силы,}$$

если принять коэффициент полезного действия насоса $\eta = 0,8$.

Задача № 3. Требуется определить количество перетекающей из одного резервуара в другой воды (черт. 51), при чем трубопровод состоит по длине из труб различного диаметра (последовательное соединение труб).

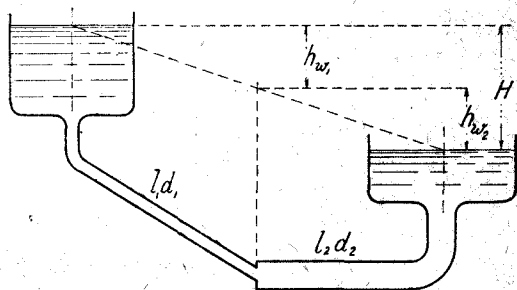
По чертежу имеем:

$$H = h_{w_1} + h_{w_2}.$$

По предыдущему, согласно (11):

$$h_{w_1} = q_1^2 \frac{l_1}{k_1^2},$$

$$h_{w_2} = q_2^2 \frac{l_2}{k_2^2},$$



Черт. 51.

где все значения входящих величин необходимо брать в дециметрах; поэтому (так как, очевидно, $q_1 = q_2 = q$):

$$H = h_{w_1} + h_{w_2} = q^2 \left(\frac{l_1}{k_1^2} + \frac{l_2}{k_2^2} \right),$$

и вообще, если бы последовательно было соединено n труб,

$$H = h_{w_1} + h_{w_2} + \dots + h_{w_n} = q^2 \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i^2}.$$

Пусть, например,

$$H = 35 \text{ м, } l_1 = 1000 \text{ м, } l_2 = 500 \text{ м, } d_1 = 2 \text{ дц, } d_2 = 1,5 \text{ дц;}$$

тогда имеем:

$$350 = q^2 \left[\frac{1000 \cdot 10}{110,3 \cdot 10^3} + \frac{500 \cdot 10}{22,31 \cdot 10^3} \right] = q^2 \cdot [0,0906 + 0,2241] = 0,3147 q^2,$$

откуда

$$q^2 = \frac{350}{0,3147} \cong 1112,$$

или

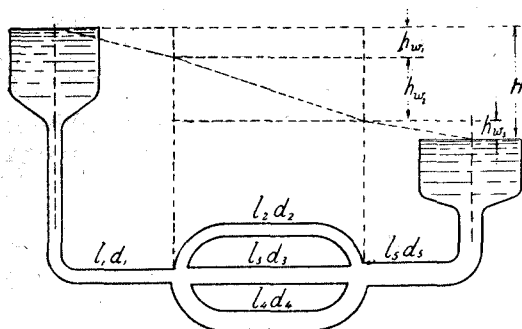
$$q \approx 33,4 \frac{\text{литр.}}{\text{сек.}},$$

а теперь

$$h_{w_1} = 1112 \frac{1000 \cdot 10}{110,3 \cdot 10^3} = 10,08 \text{ м};$$

$$h_{w_2} = 35 - 10,08 = 24,92 \text{ м}.$$

Задача № 4. Определить количество воды, подаваемой из одного бака в другой, при условии, что трубопровод на некоторой длине разветвляется (черт. 52) на несколько линий, которые снова соединяются в определенном пункте (параллельное соединение труб).



Черт. 52.

Решение задачи основывается на предположении, что потери напора по разветвлениям одинаковы; тогда:

$$H = h_{w_1} + 3h_{w_2} \text{ (так как } h_{w_2} = h_{w_3} = h_{w_4}) + h_{w_5};$$

$$q_1 = q_2 + q_3 + q_4 = q_5 = q;$$

$$q_2^2 \frac{l_2}{k_2^2} = q_3^2 \frac{l_3}{k_3^2} = q_4^2 \frac{l_4}{k_4^2};$$

$$h_{w_1} = q_1^2 \frac{l_1}{k_1^2}; \quad h_{w_2} = q_2^2 \frac{l_2}{k_2^2}; \quad h_{w_5} = q_5^2 \frac{l_5}{k_5^2},$$

откуда имеем:

$$q_3 = q_2 \sqrt{\frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{k_3^2}{k_2^2}};$$

$$q_4 = q_2 \sqrt{\frac{l_2}{l_4} \cdot \frac{k_4^2}{k_2^2}};$$

а теперь:

$$q = q_2 + q_3 + q_4 = q_2 \left[1 + \sqrt{\frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{k_3^2}{k_2^2}} + \sqrt{\frac{l_2}{l_4} \cdot \frac{k_4^2}{k_2^2}} \right] = q_2 m.$$

Последнее соотношение дает возможность выразить расход q_2 , а следовательно, по предыдущим соотношениям и расходы q_3 и q_4 , через расход q , а вставляя полученное значение расхода q_2 в выражение для полного напора H :

$$H = q_1^2 \frac{l_1}{k_1^2} + 3q_2^2 \frac{l_2}{k_2^2} + q_5^2 \frac{l_5}{k_5^2} = q^2 \left[\frac{l_1}{k_1^2} + \frac{l_2}{k_2^2} \frac{3}{m^2} + \frac{l_5}{k_5^2} \right], \quad (12)$$

находим и самый расход q , а затем по последнему и расходы q_2 , q_3 и q_4 и, наконец, отдельные потери в напоре: h_{w_1} , h_{w_2} , h_{w_3} .

Пусть, например,

$$H = 20 \text{ м}, \quad l_1 = 500 \text{ м}, \quad l_2 = 500 \text{ м}, \quad l_3 = 400 \text{ м}, \quad l_4 = 800 \text{ м}, \quad l_5 = 300 \text{ м};$$

$$d_1 = 2,5 \text{ дю}, \quad d_2 = 2 \text{ дю}, \quad d_3 = 1,5 \text{ дю}, \quad d_4 = 2 \text{ дю}, \quad d_5 = 2 \text{ дю}.$$

При этих данных имеем:

$$q_3 = q_2 \sqrt{\frac{500}{400} \cdot \frac{22,31 \cdot 10^3}{110,03 \cdot 10^3}} = 0,503 q_2,$$

$$q_4 = q_2 \sqrt{\frac{500}{800} \cdot \frac{110,03 \cdot 10^3}{110,03 \cdot 10^3}} = 0,791 q_2;$$

поэтому

$$q = q_2 (1 + 0,503 + 0,791) = 2,294 q_2,$$

откуда

$$q_2 = \frac{q}{2,294} = 0,436 \cdot q.$$

Теперь по соотношению (12) находим:

$$200 = q^2 \left[\frac{500 \cdot 10}{376,5 \cdot 10^3} + \frac{3 \cdot 500 \cdot 10}{110,03 \cdot 10^3} \cdot 0,1901 + \frac{300 \cdot 10}{110,03 \cdot 10^3} \right] = 0,0665 q^2,$$

откуда

$$q^2 = \frac{200}{0,0665} = 3008,$$

или

$$q \cong 54,8 \frac{\text{литра}}{\text{сек.}},$$

и далее:

$$q_2 = 0,436 q = 23,89 \cong 23,9 \frac{\text{литр.}}{\text{сек.}},$$

$$q_3 = 0,503 q = 27,61 \cong 27,6 \frac{\text{литр.}}{\text{сек.}},$$

$$q_4 = 0,791 q = 43,37 \cong 43,4 \frac{\text{литр.}}{\text{сек.}}.$$

Наконец, потери в напорах будут:

$$h_{w_1} = q_1^2 \frac{l_1}{k_1^2} = q^2 \frac{l_1}{k_1^2} = 3008 \cdot \frac{500 \cdot 10}{376,5 \cdot 10^3} = 3008 \cdot 0,0133 = 40,0 \text{ дю} = 4,0 \text{ м},$$

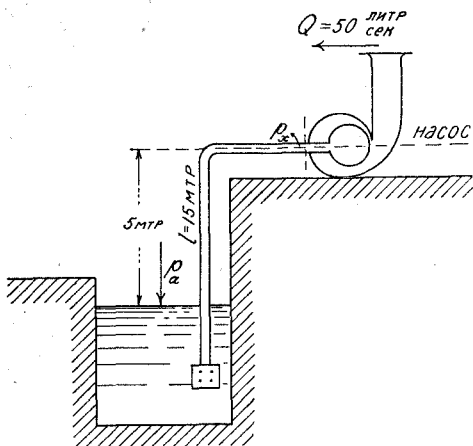
$$h_{w_2} = h_{w_3} = h_{w_4} = q_2^2 \frac{l_2}{k_2^2} = 571,21 \cdot \frac{500 \cdot 10}{110,03 \cdot 10^3} = 571,21 \cdot 0,0454 = 25,94 \text{ дю} \cong 2,6 \text{ м},$$

$$h_{w_5} = q_5^2 \frac{l_5}{k_5^2} = 3008 \cdot \frac{300 \cdot 10}{110,03 \cdot 10^3} = 3008 \cdot 0,0273 = 82,1 \text{ дю} \cong 8,2 \text{ м},$$

откуда сумма всех потерь в напоре:

$$h_{w_1} + 3h_{w_2} + h_{w_5} = 4,0 + 3 \cdot 2,6 + 8,2 = 4,0 + 7,8 + 8,2 = 20 \text{ м}.$$

Задача № 5. Центробежный насос подает 50 $\frac{\text{литр}}{\text{сек}}$ воды. Забор воды происходит на глубине 5 м (нивелировочное расстояние между насосом и уровнем воды в колодце [черт. 53]). Длина всасывающей трубы $l = 15$ м. Определить диаметр всасывающей трубы из условия, чтобы вакуум в ней был $\leq 7,5$ м.



Черт. 53.

Решение. По уравнению Д. Бернулли имеем:

$$\frac{p_a}{\delta} = 5 + \frac{p_x}{\delta} + \frac{v^2}{2g} + \xi_c \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$\frac{p_a - p_x}{\delta} = \text{вакуум} = 5 + \frac{v^2}{2g} (1 + \xi_c);$$

так как $Q = \omega v$,

то

$$\text{вакуум} = 5 + \frac{Q^2}{2g\omega^2} (1 + \xi_c) \leq 7,5,$$

откуда

$$\frac{1 + \xi_c}{\omega^2} \frac{Q^2}{2g} \leq 2,5,$$

или

$$\frac{\omega}{\sqrt{1 + \xi_c}} \geq \frac{Q}{\sqrt{2g \cdot 2,5}},$$

или в общем виде

$$\frac{\omega}{\sqrt{1 + \xi_c}} \geq \frac{Q}{\sqrt{2g(\text{вакуум} - \text{нивелировочная высота})}}.$$

В нашем случае

$$\frac{\omega}{\sqrt{1 + \xi_c}} \geq \frac{50}{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 10,25 \cdot 10}} \approx 0,72 \text{ дц}^2,$$

а так как

$$1 + \xi_c = 1 + \left[5 + \frac{15}{40} \cdot \frac{1}{d} \right] = 6 + \frac{3}{8d},$$

(где число 5 — коэффициент сопротивления во всасывающей коробке), то подставляя это значение $1 + \xi_c$ и выражение для ω в предыдущее соотношение, имеем:

$$\frac{\pi d^2}{4 \sqrt{6 + \frac{3}{8d}}} \geq 0,72,$$

откуда

$$d^2 \geq 0,92 \sqrt{6 + \frac{3}{8d}} = 0,56 \sqrt{16 + \frac{1}{d}}.$$

Диаметр d находим подбором (см. таблицу 4).

Таблица № 4.

d	d^2	$0,56 \cdot \sqrt{16 + \frac{1}{d}}$
1,25	1,56	2,30
1,50	2,25	2,29
1,75	3,06	2,28

Очевидно, при поставленном условии подходящим диаметром всасывающей трубы будет

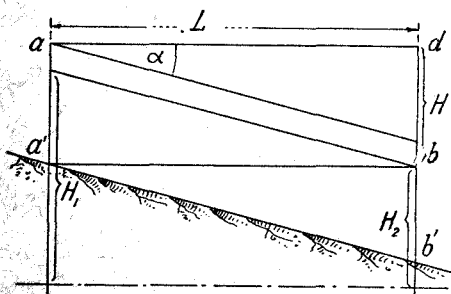
$$d = 1,75 \text{ дц.}$$

ГЛАВА IV.

§ 1. Равномерное течение воды в реках и каналах.

Хотя в самом общем случае течение воды в естественных водотоках (реках), очевидно, может происходить и происходит таким образом, что как ширина, так и глубина, а равно и скорость, представляют собой переменные величины, при чем в водотоках спокойных это изменение происходит всегда плавно, без резких скачков, все же всегда существуют достаточно длинные участки, на которых указанное изменение не проявляется заметным образом; в искусственных каналах, в большинстве случаев, вышеперечисленные факторы не меняются.

Если взять, поэтому, небольшой участок реки или канала (черт. 54), длиной, положим, L метров, и предположить, что на этом участке как



Черт. 54.

раз имеем неизменность указанных выше элементов, то нивелировкой мы установим, что поверхность воды всегда имеет некоторый определенный уклон по направлению течения и, следовательно, точка (a) сечения (aa') лежит выше точки (b) сечения (bb') на некоторую величину (bd) = H . Последняя величина называется падением реки или канала на данном участке, а отношение $\frac{H}{L}$ относительным па-

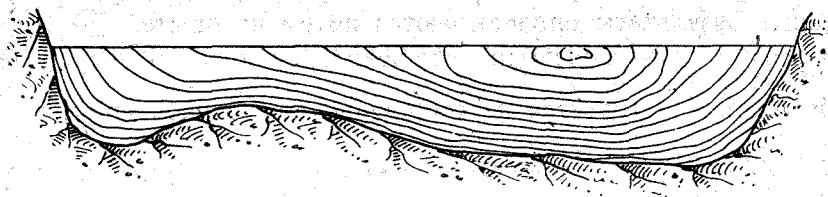
дением или уклоном, и обыкновенно обозначается через I ; это относительное падение, очевидно, есть ничто иное, как тангенс угла (bad); так как падение обыкновенно для больших спокойных рек или каналов очень мало, то тангенс может быть заменен синусом указанного угла, или даже самим углом; таким образом, имеем:

$$I = \frac{H}{L} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cong \sin \alpha \cong \alpha. \quad (1)$$

Что относительное падение действительно мало, это видно из следующих данных для некоторых русских рек: для Волги в ее среднем

течении средний уклон $I = 0,000044$; для Дона $I = 0,000052$; для Днепра (в порожиистой части) $I = 0,000086$; для Ангары (Сибирь) $I = 0,00022$; для Томи около Томска (Сибирь) $I = 0,00017$, и т. д. Для горных бурных рек уклоны иногда достигают более значительных величин. Для каналов принимают следующие уклоны: для промышленных $0,0004 — 0,002$; больших оросительных $0,0002 — 0,0005$, судоходных $0,0001 — 0,00025$, уличных $0,002 — 0,006$.

Как в реках, так и в каналах, подобно тому, как и в трубах, скорости в различных точках одного и того же сечения различны; наименьшие скорости, благодаря влиянию шероховатости и по другим причинам, конечно, будут около дна и берегов; по мере же удаления от последних, скорости возрастают, хотя на поверхности воды они все же обыкновенно несколько меньше, чем на некоторой (правда, небольшой) глубине под поверхностью на той же вертикали¹⁾; таким образом, центр приложения наибольшей скорости в данном сечении реки (иногда таких центров в реке может быть и несколько, в зависимости от формы поперечного профиля) или канала будет обыкновенно лежать на некоторой глубине под поверхностью, или около середины сечения (в прямых каналах, в реках с прямым руслом правильной формы), или в большем или меньшем удалении от нее (в изгибах рек и каналов, при несимметричной форме русла); если, поэтому, соединить в сечении точки с равными скоростями линиями (изотакхи), то мы получим следующую картину распределения скоростей в сечении



Черт. 55.

(черт. 55). В дальнейшем изложении (если не будет специальных оговорок) мы будем понимать под скоростью воды в данном сечении реки или канала (подобно тому, как и в трубах) среднюю скорость (об определении скоростей в сечении вообще, и средней в частности, см. последнюю главу IX).

¹⁾ Положение наибольшей скорости под свободной поверхностью водотока объясняется, во-первых, пульсацией струй, вызывающей некоторый подпор зеркала воды и, следовательно, задержку движения поверхностных частиц (L. W. Weil. *Neue Grundlagen der Technischen Hydrodynamik*. München und Berlin. 1920, стр. 46—47), во-вторых, образованием волн на поверхности (A. B u d a u. *Kurzgefasstes Lehrbuch der Hydraulik*. Wien u. Leipzig. 1921, стр. 78), в третьих, поверхностным натяжением воды (B a u d i s c h. *Mechanik*. 1914), наконец, вихреобразными или спиралеобразными движениями и водоворотами, поднимающимися со дна к поверхности (F o r c h h e i m e r. *Hydraulik*. 1914, стр. 109).

Рассматривая теперь выделенный участок реки или канала (см. черт. 54), мы должны придти к заключению, что количество энергии, расходуемой водой на этом участке, может быть выражено таким образом:

$$E = \left(\frac{\delta Q_1}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2} + \delta \cdot Q_1 H_1 \right) - \left(\frac{\delta Q_2}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2} + \delta \cdot Q_2 H_2 \right),$$

если только обозначить количество воды, втекающей на участок через сечение (aa') и вытекающей из него через сечение (bb') , соответственно через Q_1 и Q_2 , скорости втекания и вытекания через v_1 и v_2 , и, наконец, высоты расположения центров сечения над основным горизонтом (напр., горизонтом моря, в которое втекает река) через H_1 и H_2 ; если, как мы принимаем, $Q_1 = Q_2$ и $v_1 = v_2$, то вышенаписанное равенство принимает вид

$$E = \delta Q (H_1 - H_2) = \delta Q \cdot L \cdot I,$$

а, полагая $L = 1$ м, имеем:

$$E = \delta \cdot Q \cdot I \quad (2)$$

Найденное количество энергии затрачивается частью на поддержание скорости протекающей воды, частью на размытие русла и перенос наносов, но как распределяется оно между этими отдельными видами ее работы, мы, конечно, точно не знаем; мы можем делать только те или иные предположения, верные постольку, поскольку полученные результаты оправдываются потом на опыте.

Во всяком случае, очевидно, что некоторая доля вышеопределенной энергии, напр., $\frac{1}{\kappa}$, тратится на сообщение воде живой силы, т. е.

$$\frac{\delta \cdot Q \cdot I}{\kappa} = \frac{\delta Q}{g} \frac{v^2}{2};$$

очевидно также, что эта доля будет тем больше, чем условия течения воды будут легче, т. е. чем больше, напр., будет отношение площади поперечного сечения к омываемому периметру (гидравлический радиус) и чем, вообще, меньше будут сопротивления при протекании воды. Поэтому, мы имеем полное основание положить:

$$k = \lambda \frac{P}{\omega},$$

где λ — коэффициент пропорциональности, или, как принято называть, коэффициент шероховатости; при этом условии предыдущее соотношение примет вид, после возможных сокращений:

$$\frac{I\omega}{\lambda P} = \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \cdot \sqrt{RI}; \quad (3)$$

здесь R — гидравлический радиус $\left(\frac{\omega}{P}\right)$, а $\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}$ — коэффициент, который будем обозначать через C . Полученная нами формула носит название формулы Шези (Chezy, 1775 г.). На C смотрели первоначально, как на постоянную величину, но с развитием гидрометрии и накоплением опытного материала нашли, что C есть тоже величина переменная и, подобно тому, как для коэффициента λ , входящего в выражение потери в напоре при протекании воды по трубам, имеется достаточное количество различных соотношений, так и для C в формуле Шези гидравлика имеет целый ряд разнообразных значений, иногда достаточно сложных. Причины в различии значений для C те же, что и для коэффициента λ . Не перечисляя всех такого рода значений, приведем некоторые из них, пользующиеся в практике распространением.

Формула Базена (Bazin — 1897 г.). Базен, на основании своих многочисленных опытов, нашел, что:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}, \quad (4)$$

где γ есть коэффициент, зависящий от шероховатости русла, и значения которого приведены в нижеследующей таблице (табл. № 5).

Таблица № 5.

№№	Характеристика русла канала или, вообще, водотока	γ
1	Каналы с очень гладкими стенками: из чистого цемента, выстроганных досок	0,06
2	Каналы с гладкими стенками: из тесанного камня, кирпича, досок и т. п.	0,16
3	Каналы с негладкими стенками: из бутовой кладки	0,46
4	Каналы с еще более негладкими стенками: земляные в плотном грунте, постоянно очищаемые, мощенные, высеченные гладко в скале и т. п.	0,85
5	Каналы земляные, немного заросшие травой, из ломаного камня, в торфяной почве и т. п.	1,30
6	Каналы и вообще водотоки с совершенно негладкими стенками: поросшие травой, покрытые крупной галькой, высеченные в скалистом грунте	1,75
7	Реки и каналы с весьма неровным руслом, покрытым камнями и проч.	2
		и выше

Для облегчения пользования формулой Базена существуют таблицы значений C для различных гидравлических радиусов (R) и коэффициентов шероховатости¹⁾.

Формула Гангилье и Куттера (Ganguillet et Kutter, 1869 г.), двух швейцарских инженеров, выведена на основании опытов Базена над каналами и Гемфри и Аббота (Humphrey — Abbot, 1861 г.) на реке Миссисипи и имеет следующий вид:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{I}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}}, \quad (5)$$

где R — гидравлический радиус, I — уклон, а n — коэффициент шероховатости, значения которого приведены в следующей таблице (табл. № 6):

Таблица № 6.

№№	Характеристика русла канала или, вообще, водотока	n	$\frac{1}{n}$
1	Каналы с очень гладкими стенками: из цемента, выстроганных досок	0,010	100
2	Каналы из нестроганных досок	0,012	83
3	Каналы с гладкими стенками: из тесанного камня, кирпича и т. п.	0,013	77
4	Каналы с негладкими стенками: из бутовой кладки	0,017	59
5	Каналы с еще более негладкими стенками: из очень грубой бутовой кладки	0,020	50
6	Каналы в земляном плотном грунте, не укрепленном и не облицованном	0,025	40
7	Каналы земляные, немного поросшие травой, из ломаного камня, в торфяной почве	0,030	33
8	Те же земляные каналы и естественные водотоки, в более сильной степени заросшие травой, каналы в плохом состоянии	0,035	28,6
9	Каналы в очень плохом состоянии, естественные водотоки, покрытые камнями, галькой, заросшие водотоки	0,040	25

Для формулы Гангилье-Куттера также существуют таблицы значений C , значительно облегчающие ее применение при расчетах.

Из новых, сравнительно, формул укажем еще на формулу Форхгеймера (Ph. Forchheimer — 1903 г.), у которого

$$C = \lambda R^{0,2} \quad (6)$$

и, таким образом, скорость выражается как

$$v = \lambda R^{0,7} I^{0,5}, \quad (7)$$

¹⁾ Н. Н. Павловский. Гидравлический справочник. Ленинград, 1924 г.
R. Weirauch. Hydraulisches Rechnen. Stuttgart, 1921.

при чем, на основании старых измерений Базена и своих собственных многочисленных опытов, Форхгеймер принимает

$$\lambda = \frac{1}{n},$$

т. е. другими словами, коэффициент λ равен обратной величине коэффициента шероховатости (n) в формуле Гангилье-Куттера (см. табл. № 6).

Для суждения о величине коэффициентов γ (в формуле Базена) и λ (в формуле Форхгеймера) на основании непосредственных измерений, приводим следующие частичные данные Центрального Гидрографического Бюро в Вене (см. табл. № 7).

Таблица № 7.

РЕКИ и РЕЧКИ	Средняя скорость в $\frac{м}{сек}$	Уклон I	Живое се- чение в $м^2$	Ширина в $м$	Смоченный периметр в $м$	Средняя глубина в $м$	Гидравлич. радиус в $м$	γ для фор- мулы Ба- зена	λ для фор- мулы Форх- геймера
Польцен у Вертен- берга	0,3	0,00075	2,85	3,25	4,63	0,88	0,62	4,1	15,3
Речка у Симплона	0,34	0,00175	—	2	—	0,23	0,23	2,0	23,0
Рейн у Базеля . .	1,94	0,0012	—	—	—	2,10	2,10	1,834	35,2
Дунай у Маритга- узена	1,7	0,00055	750	271	280	2,77	2,68	1,49	38,6
Речка Ладовицера в Базеле	0,48	0,00065	1,70	5,20	5,69	0,33	0,30	1,21	43,8

Все вышеприведенные формулы содержат коэффициент шероховатости, зависящий от характера и рода русла канала или естественного водотока. Между тем, у некоторых гидравликов возникла мысль, нельзя ли, связывая скорость с различными гидравлическими элементами водотока, обойтись без коэффициента шероховатости, заменив его другими гидравлическими факторами, так как в естественном состоянии водоток является, как бы, саморегулирующимся: изменение характера грунта вызывает изменение уклона, а, следовательно, скорости, а равно и глубины и ширины; обратно, изменение последних элементов вызывает изменение уклона. Первым, высказавшим подобную точку зрения на водоток, был Зидек (R. Siedek)¹⁾, предложивший

¹⁾ R. Siedek. Studie über neue Formel zur Ermittlung der Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen und Strömen. Wien. W. Braumüller. 1901 г.

Дословно Зидек формулировал свою мысль следующим образом: „если уменьшить шероховатость лотка прямоугольного сечения, по которому протекает определенное количество воды при неизменном уклоне, то скорость течения увеличится, а так как расход воды постоянен, то должен измениться подводный периметр, а вместе с ним и глубина; при условии же неизменности расхода и глубины должна измениться, с уменьшением шероховатости, скорость, а вместе с ней и уклон“.

своеобразную зависимость между скоростью и гидравлическими элементами водотока — уклоном, глубиной, шириной и гидравлическим радиусом, но без введения коэффициента шероховатости.

За Зидеком появился целый ряд других гидравликов, по преимуществу австрийской школы, которые тоже предложили зависимости скорости течения водотока от гидравлических элементов без коэффициента шероховатости.

Не перечисляя всех такого рода зависимостей, известных в литературе, укажем на некоторые из них, имеющие распространение и в русской практике ¹⁾. Такова, например, формула Линдбое (Lindboe) ²⁾, считающаяся одной из лучших:

ГЛУБИНА РЕКИ	Уклон $I < 0.0006$	
	Отношение глубины к ширине	
	$\frac{t}{b} < 0,028$	$\frac{t}{b} > 0,028$
	$v =$	$v =$
$t < 1,12$	$23,37 \left(0,822 - \frac{t}{b}\right) \cdot t^{0,9} \cdot I^{0,42}$	$8,19 \left(2,293 - \frac{t}{b}\right) t^{0,9} I^{0,42}$
$1,12 < t < 3,65$	$24,11 \left(0,822 - \frac{t}{b}\right) t^{0,63} I^{0,42}$	$8,45 \left(2,293 - \frac{t}{b}\right) t^{0,63} I^{0,42}$
$t > 3,65$	$27,45 \left(0,822 - \frac{t}{b}\right) t^{0,53} I^{0,42}$	$9,62 \left(2,293 - \frac{t}{b}\right) t^{0,53} I^{0,42}$
ГЛУБИНА РЕКИ	$0,0006 < I < 0,005$	
	$\frac{t}{b} < 0,028$	$\frac{t}{b} > 0,028$
	$v =$	$v =$
$t < 1,12$	$33,86 \left(0,822 - \frac{t}{b}\right) t^{0,9} I^{0,47}$	$11,86 \left(2,293 - \frac{t}{b}\right) t^{0,9} I^{0,47}$
$1,12 < t < 3,65$	$34,94 \left(0,822 - \frac{t}{b}\right) t^{0,63} I^{0,47}$	$12,24 \left(2,293 - \frac{t}{b}\right) t^{0,63} I^{0,47}$
$t > 3,65$	$39,77 \left(0,822 - \frac{t}{b}\right) t^{0,53} I^{0,47}$	$13,94 \left(2,293 - \frac{t}{b}\right) t^{0,53} I^{0,47}$

К тому же классу формул принадлежит соотношение Германека (Hermanek'a) ³⁾:

$$\left. \begin{aligned} v &= 30,7 \sqrt{t} \sqrt{tI} & \text{при} & & t < 1,5 \text{ м} \\ v &= 34 \sqrt[4]{t} \sqrt{tI} & & & 1,5 < t < 6 \text{ м} \\ v &= \left(50,2 + \frac{t}{2}\right) \sqrt{tI} & & & t > 6,0 \text{ м} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

¹⁾ См. Эссен А. Отчет гидрометрической части за 1911—1912 при Водном Управлении на Кавказе. 1913. Часть 2-ая, стр. 87 и след.

²⁾ W. Lindboe. Eine neue Formel zur Ermittlung der mittleren Geschwindigkeit in natürlichen Wasserläufen. Zeit. f. Gewässerkunde. 1910, стр. 1. Смотри также: Engels. Zentralbl. d. Bauverw. 1910. S. 389.

³⁾ Hermanek. Die mittlere Profilgeschwindigkeit in natürlichen und künstlichen Gerinnen. Zeitschr. d. Österr. Ing. u. Arch. Ver. 1905.

Для сравнения результатов вычисления скорости по наиболее характерным формулам двух видов с действительными измерениями, приводим следующие данные Швейцарского Гидрометрического Бюро¹⁾ (таблица № 8):

Таблица № 8.

Формулы	Скорость v	Рейн	Рона	Инн	Эльба	Сан
	$\frac{m}{сек}$ Расход $Q \frac{m^3}{сек}$					
Гангилье и Куттера . . {	v	1,059	0,789	2,40	0,72	0,32
	Q	447,861	15,064	403,2	44,35	4,82
Новая формула Базена . {	v	1,018	0,694	2,45	0,74	0,30
	Q	430,521	13,251	411,98	45,60	4,51
Зидека {	v	0,917	0,691	—	—	—
	Q	387,808	13,193	—	—	—
Линдбое {	v	—	—	2,01	0,68	0,31
	Q	—	—	337,98	41,90	4,66
Германека {	v	—	—	2,25	0,64	0,24
	Q	—	—	378,34	39,68	3,61
Непосредственные изме- {	v	1,021	0,647	2,31	0,79	0,34
	Q	431,369	12,358	388,08	48,68	5,12

Данные последней таблицы показывают, что формулы для скоростей дают в естественных руслах величины, часто значительно отличающиеся от находимых непосредственными измерениями. Немудрено, поэтому, что в тех случаях, когда хотят более или менее точно определить скорости в реках (например, для определения секундных расходов воды), всегда прибегают к непосредственным измерениям этих скоростей (способами, изложенными в „Гидрометрии“), и только в целях предварительных изысканий и соображений допускается определение скоростей по формулам.

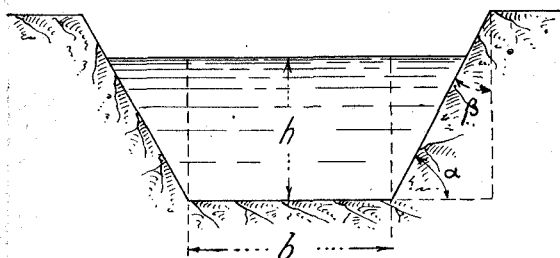
Что касается каналов, то здесь, ввиду постоянства шероховатости стенок и дна, возможности оценить более или менее точно коэффициент шероховатости, определенности поперечных сечений и, наконец, действительной, в большинстве случаев, равномерности течения, применение указанных выше формул для расчета вполне допустимо и всегда приводит к удовлетворительным для практики, в смысле точности, результатам.

§ 2. Форма каналов.

Формула Шези, в связи с соотношением: $Q = \omega \cdot v$, требует, в целях уменьшения поперечного сечения канала, чтобы выбранная для данных местных условий скорость была наибольшей, а это, очевидно, возможно

¹⁾ Эссен А. Отчет гидрометрической части за 1911—1912 г. при Водном Управлении на Кавказе. 1913. Часть 2-ая, стр. 94. В u b e n d e y - E n g e l s. Praktische Hydraulik, стр. 674.

только тогда, когда гидравлический радиус будет иметь наибольшую величину, или, когда, при данной площади поперечного сечения, периметр будет иметь наименьшую величину. С этой точки зрения наивыгоднейшим профилем был бы полукруглый, но такой профиль может быть выполнен только для каналов из определенного материала: железобетонных, кирпичных, каменных, деревянных или высеченных в скале; при чем на практике подобная форма придается преимущественно



Черт. 56.

каналам железобетонным, — для прочих же перечисленных каналов применяется форма прямоугольная; для каналов земляных (вырытых в земле или с насыпными земляными стенками) применяется форма трапециoidalная, при чем уклон стенок определяется связностью грунта.

Наиболее употребительные уклоны откосов, в зависимости от рода материала, представлены в следующей таблице № 9 (в этой таблице приведены углы наклонения откосов к горизонту (α) и дополнительные углы (β):

Таблица № 9.

	РОД КАНАЛА	Уклон откосов	Углы наклонения откосов	
			α	β
1	Каналы деревянные, каменные, бетонные, скальные	1	90°	0°
2	Каналы из бутовой кладки	1,75 : 1	60°	30°
3	Каналы в твердом связном грунте	1 : 1	45°	45°
4	Каналы в связном грунте (глина)	1 : 1 $\frac{1}{4}$	38°40'	51°20'
5	Каналы в малосвязном грунте (суглинок)	1 : 1 $\frac{1}{2}$	33°41'	56°20'
6	Каналы в рыхлом грунте (мелкий песок, раст. грунт)	1 : 2	26°34'	63°26'

На назначение профиля канала имеет, далее, большое влияние наибольшая допустимая средняя скорость воды, каковая, в зависимости от рода грунта по Тельфорду и Кёну (Telford и Th. Koehn) дается¹⁾ в таких пределах:

Легкая почва	0,15 $\frac{м}{сек}$
Песчаная почва	0,30 — 0,45
Мелкая галька	0,61 — 0,75

¹⁾ D. Banki. Energie — Umwandlungen in Flüssigkeiten. 1921. Bd. I, стр. 117.

Крупная галька	0,91 — 1,20
Каменистая почва	1,22 — 1,50*
Шиферная почва (или канал, облицован. камнем)	1,52 — 2,00
Скалистая почва (или канал с цемент- ной штукатуркой, или деревянный)	1,83 — 2,50
Твердая скала	3,00 — 3,50.

С другой стороны, для предотвращения осаждения ила или песка средняя скорость не должна спускаться ниже, соответственно, $0,25 - 0,50 \frac{м}{сек}$. При длинных, подводящих воду к гидравлическим установкам, каналах, для сбережения напора часто выбирают меньшие скорости (употребительные уклоны $\frac{1}{2000} - \frac{1}{2500}$), чем вышеуказанные, а иногда, при больших количествах воды и больших напорах, для уменьшения расходов, наоборот, берут большие скорости (до $5 - 8 \frac{м}{сек}$).

Выбором средней скорости и определяется площадь поперечного сечения канала; дальнейший расчет канала сводится к определению относительных размеров его поперечного сечения. Выше уже указано было, что всегда выгодно стремиться к тому, чтобы гидравлический радиус был при данной площади, по возможности, наибольшим, или, иначе, периметр наименьшим (это выгодно еще в том отношении, что выбранной скорости достигаем при меньшем относительном уклоне канала).

С этой целью находим выражения площади (ω) поперечного сечения канала и его периметра (P) через элементы сечения; очевидно, при принятых на чертеже 56 обозначениях, имеем:

$$\omega = (b + h \operatorname{tg} \beta) \cdot h$$

$$P = b + \frac{2h}{\cos \beta};$$

имея в виду, что $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$, и обозначая $\operatorname{tg} \beta$ через m (коэффициент откоса), преобразуем последние уравнения в такие:

$$\omega = (b + mh) h \quad (9)$$

$$P = b + 2h \sqrt{1 + m^2}. \quad (10)$$

Подставляя в выражение для P значение b из (9), получим выражение периметра, как функцию от глубины (наполнения) — h :

$$P = \frac{\omega}{h} - mh + 2h \sqrt{1 + m^2}, \quad (11)$$

а, беря производную по h и приравнявая ее нулю, имеем условие

минимума:

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{\omega}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = 0,$$

откуда, заменяя опять площадь ω ее выражением из (9), окончательно получим условие наивыгоднейшего профиля канала:

$$\frac{b}{h} = 2 \left[\sqrt{1+m^2} - m \right]. \quad (12)$$

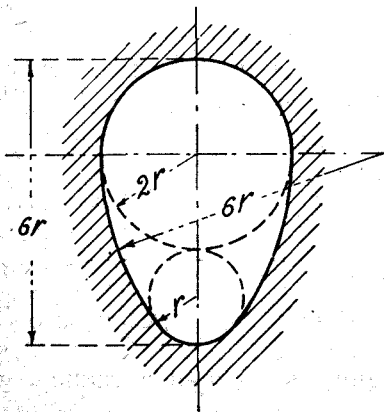
Таким образом, напр., для прямоугольного канала, когда $m=0$, имеем:

$$\frac{b}{h} = 2,$$

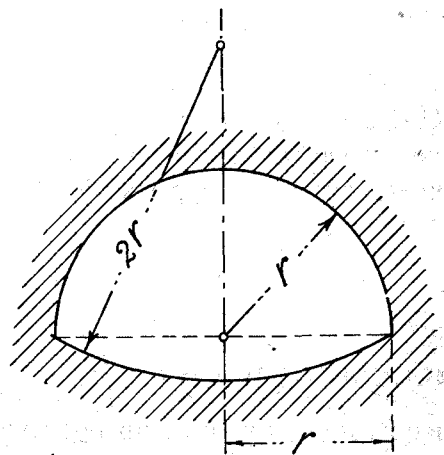
а для трапециoidalного канала с уклоном откосов 1:1, когда $m=1$:

$$\frac{b}{h} = 0,82.$$

Необходимо заметить, что на практике часто отступают от наиболее благоприятного гидравлического радиуса; если сечение канала невелико, канал, в целях удешевления его стоимости, делают глубже, наоборот, при большом поперечном сечении, ввиду опасности подмыва, берут мельче, чем это следовало бы из условия получения указанного наивыгоднейшего профиля.



Черт. 57.



Черт. 58.

Если воду необходимо сохранить чистой (питьевая вода), или, наоборот, необходимо предохранить окружающий район от грязной воды (канализационные воды), или, наконец, профиль местности заставляет применять туннели, воду проводят в закрытых каналах, при чем при сильно меняющихся количествах воды наиболее подходящим профилем для такого канала является форма яйца (овоидальное сечение).

ние (черт. 57); последний профиль вполне пригоден даже при незначительных расходах жидкости; применяется в этих случаях также и сечение лотковое (черт. 58).

§ 3. Гидравлический и экономический расчет каналов.

При гидравлическом расчете каналов, очевидно, основными соотношениями являются:

$$\left. \begin{aligned} v &= C \sqrt{RI} \\ Q &= \omega v = \omega \cdot C \sqrt{RI} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из последнего соотношения, как и для трубопроводов, легко находим, так называемый, коэффициент пропускной способности канала (κ):

$$\kappa = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \omega C \cdot \sqrt{R}, \quad (14)$$

введение которого также значительно упрощает решение многих задач на расчет каналов.

Что касается коэффициента C , то при расчете замкнутых каналов (лотковых, овоидальных) исключительно почти применяется сокращенная формула Гангиле и Куттера

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{23 \cdot n}{\sqrt{R}}}$$

с коэффициентом шероховатости $n = 0,012 - 0,014$; для прочих же каналов для C употребительны все перечисленные выше формулы, но, главным образом, Базена и, в последнее время, Форхгеймера.

„Коэффициент откоса“ m при этих расчетах является всегда заданным родом канала, точно так же, как и коэффициент шероховатости.

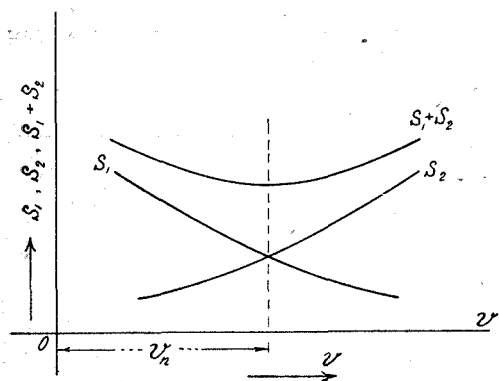
Чаще всего приходится решать одну из следующих задач: 1) дан уклон I и размеры живого сечения — ширина по дну b и наполнение h ; найти расход Q ; 2) дан расход Q и размеры поперечного сечения, найти уклон I ; 3) дан расход Q и уклон I ; подобрать живое сечение канала. При решении последней задачи, очевидно, для ее определенности необходимо исходить или из условия наивыгоднейшего профиля канала, или из каких либо технических условий для глубины или ширины; в остальных случаях задачи решаются весьма просто помощью соотношений (13) и (14).

Экономический расчет канала может вестись или из условия, чтобы строительная стоимость его была наименьшая, или, если это канал

для подведения воды к гидравлической установке, чтобы эксплуатационные расходы были наименьшими.

В первом случае, напр., для отвода определенного количества воды в реку или овраг (тальвег) с определенным уклоном, задаваясь различными скоростями, или, что все равно, уклонами, находят разные площади живого сечения и разные длины, и, следовательно, при данном рельефе местности, и определенные кубатуры выемки, каковые, в зависимости от местных условий расценки труда, приводят к различным стоимостям канала. Изображая эти стоимости в определенном масштабе в виде ординат, можно получить кривую стоимости канала в зависимости от выбранной скорости, и по этой кривой найти наивыгоднейшую скорость и, следовательно, наивыгоднейший уклон и длину.

Во втором случае, также задаваясь различными скоростями, находят соответствующий каждой скорости уклон канала, площадь живого сечения и кубатуру выемки. Очевидно, с увеличением скорости, или,



Черт. 59.

все равно, уклона, уменьшается полезный напор для установки, но зато канал обходится дешевле. Так как при этих условиях эксплуатационные годовые расходы состояются из: 1) амортизационной стоимости устройства канала + проценты на затраченный капитал + издержки на поддержание канала в порядке и 2) из величины годовых потерь вследствие потери в мощности установки, то, задаваясь различными скоростями и нанося в опреде-

ленном масштабе обе части эксплуатационных расходов на чертеже, получим две кривые зависимостей этих расходов от скоростей, при чем первая кривая (S_1) (черт. 59) покажет понижение расходов по постройке и эксплуатации канала с увеличением скорости, а вторая кривая (S_2) — увеличение расходов на потерянную мощность установки с тем же увеличением скорости. Суммарная кривая ($S_1 + S_2$) укажет ту наивыгоднейшую скорость v_n , про которой эксплуатационные расходы будут наименьшими.

§ 4. Задачи на каналы.

Задача № 1. Определить расход в земляном ($\gamma = 1,3$) канале трапециoidalного сечения (черт. 60) с основанием $b = 2$ м, наполнением $h = 1,5$ м. и коэффициентом откосов $m = 2$. Уклон $I = 0,0006$.

Решение. Искомый расход, очевидно, будет:

$$Q = \omega C \sqrt{RI}.$$

При данных размерах имеем:

$$\omega = (b + m \cdot h) h = (2 + 2 \cdot 1,5) 1,5 = 7,5 \text{ м}^2;$$

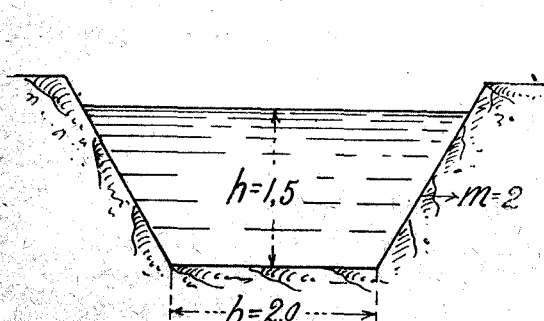
$$P = b + 2h \sqrt{1 + m^2} = 2 + 2 \cdot 1,5 \sqrt{5} = 8,71 \text{ м.};$$

$$R = \frac{\omega}{P} = \frac{7,5}{8,71} \approx 0,86;$$

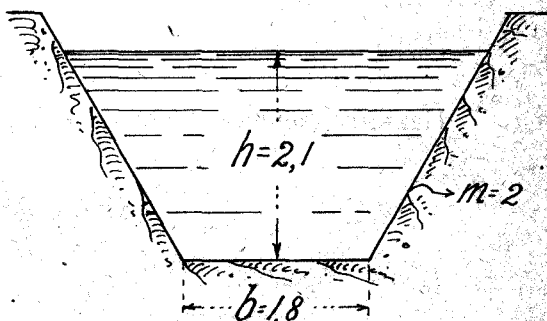
$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} = \frac{87}{1 + \frac{1,3}{\sqrt{0,86}}} = \frac{87}{2,4} = 36,25,$$

и теперь:

$$Q = \omega \cdot C \cdot \sqrt{RI} = 7,5 \cdot 36,25 \cdot \sqrt{0,86 \cdot 0,0006} \approx 271,9 \cdot 0,0227 \approx 6,18 \text{ м}^3/\text{сек.}$$



Черт. 60.



Черт. 61.

Задача № 2. Определить уклон земляного ($\gamma = 1,3$) канала трапециoidalного сечения (черт. 61) с шириной по дну $b = 1,8 \text{ м.}$, наполнением $h = 2,1 \text{ м.}$, коэффициентом откосов $m = 2$, и пропускающего $8 \text{ м}^3/\text{сек.}$ воды.

Решение: При данных размерах имеем:

$$\omega = (b + m \cdot h) h = (1,8 + 2 \cdot 2,1) = 12,6 \text{ м}^2;$$

$$P = b + 2h \sqrt{1 + m^2} = 1,8 + 2 \cdot 2,1 \cdot \sqrt{5} = 11,19 \text{ м.};$$

$$R = \frac{\omega}{P} = \frac{12,6}{11,19} = 1,13;$$

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} = \frac{87}{1 + \frac{1,3}{1,063}} = 39,2;$$

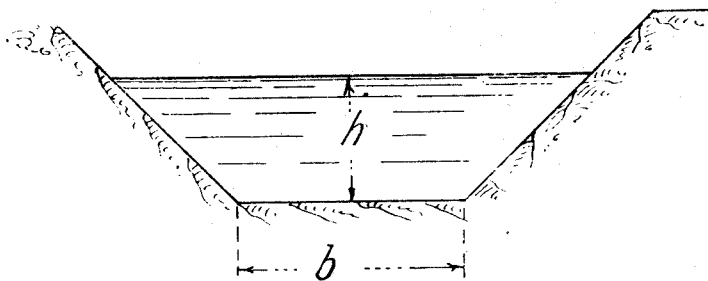
поэтому

$$I = \frac{Q^2}{\omega^2 \cdot C^2 \cdot R} = \frac{64}{12,6^2 \cdot 39,2^2 \cdot 1,13} \approx \frac{64}{275700} \approx 0,000232.$$

Задача № 3. Определить размеры земляного трапецидальной формы канала для пропуска $12 \text{ м}^3/\text{сек.}$ воды при уклоне $I=0,0004$. Отношение ширины канала к наполнению $\left(\frac{b}{h}\right)$ должно быть наивыгоднейшим! Грунт плотный, хорошо слежавшийся.

Решение. При указанном грунте можно принять:

$$m = 1; \quad \gamma = 1,3.$$



Черт. 62.

Наивыгоднейшее отношение $\frac{b}{h}$ будет (черт. 62):

$$\frac{b}{h} = 2 (\sqrt{1+m^2} - m) = 0,82.$$

Таким образом:

$$\omega = (b + m \cdot h) h = (0,82 \cdot h + 1 \cdot h) h = 1,82 h^2;$$

$$P = b + 2h \sqrt{1+m^2} = 0,82 \cdot h + 2h \sqrt{2} = (0,82 + 2 \cdot 1,41)h = 3,64 h;$$

$$R = \frac{\omega}{P} = \frac{1,82 h^2}{3,64 h} = 0,5 h;$$

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} = \frac{87 \cdot \sqrt{R}}{\sqrt{R} + \gamma} = \frac{87 \cdot \sqrt{0,5 h}}{\sqrt{0,5 h} + \gamma},$$

а далее, по соотношению

$$k = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \omega \cdot C \cdot \sqrt{R},$$

которое, по подстановке вышенайденных значений ω , C и R , а также данных Q и I , принимает вид:

$$k = \frac{Q}{\sqrt{I}} = 600 = \omega \cdot C \cdot \sqrt{R} = \frac{1,82 \cdot h^2 \cdot 87 \cdot 0,5 h}{\sqrt{0,5 \cdot h} + \gamma} = \frac{79,2 h^3}{\sqrt{0,5 h} + 1,3};$$

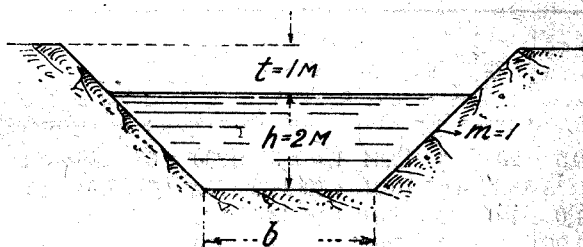
подбираем значение h ; имеем:

$$\begin{aligned} \text{при } h = 2,0 \text{ м., } k &= \frac{79,2 \cdot 8}{2,3} \approx 275; \\ \text{„ } h = 2,5 \text{ м., } k &= \frac{79,2 \cdot 15,625}{2,418} \approx 512; \\ \text{„ } h = 2,7 \text{ м., } k &= \frac{79,2 \cdot 19,68}{2,462} \approx 633; \\ \text{„ } h = 3,0 \text{ м., } k &= \frac{79,2 \cdot 27}{2,525} \approx 847; \end{aligned}$$

откуда видим, что наиболее подходящее значение наполнения есть $h = 2,7 \text{ м.}$, и тогда

$$b = 0,82 \times 2,7 \approx 2,21 \text{ м.}$$

Задача № 4. От реки, имеющей уклон $I_p = 20 \cdot 10^{-4} = 2^0/_{\infty}$, необходимо отвести для деревни $10 \text{ м}^3/\text{сек.}$; деревня расположена на берегу на высоте $H = 5$ метров над уровнем воды в реке. Отвод воды может быть произведен каналом, при чем последний придется вести в грунте средней плотности, а потому откосы необходимо мостить; по местным условиям глубину канала нужно принять не более 2 м. Необходимо определить наивыгоднейшие размеры поперечного сечения, длину (L_k) и уклон (I_k) канала, если стоимость выемки 1 м^3 земли в данной местности обходится в 50 коп. (s_1), а мостовки 1 м^2 в 1 руб. (s_2).



Черт. 63.

Решение: Принимаем: коэффициент мощеных откосов $m = 1$; коэффициент шероховатости $\gamma = 0,85$. Для решения поставленной задачи имеем следующие известные уже соотношения (см. черт. 63):

$$\begin{aligned} \omega &= (b + mh)h = 2b + 4; \\ P &= b + 2h \sqrt{1 + m^2} = b + 5,64; \\ R &= \frac{\omega}{P} = 2 \frac{b + 2}{b + 5,64}; \\ \kappa &= \frac{Q}{\sqrt{I_k}} = \omega \cdot C \cdot \sqrt{R}, \end{aligned}$$

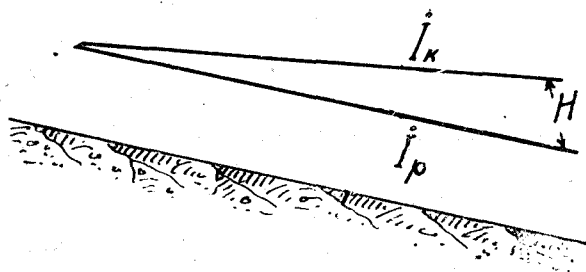
и, следовательно,

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{Q^2}{\kappa^2}; \\ C &= \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} = \frac{87}{1 + \frac{0,85}{\sqrt{R}}}; \end{aligned}$$

и, кроме того, очевидно (черт. 64):

$$L_K = \frac{H}{I_p - I_K}$$

Задаваясь теперь различными скоростями воды в канале, вычисляем сперва значения площади живого сечения канала, периметра,



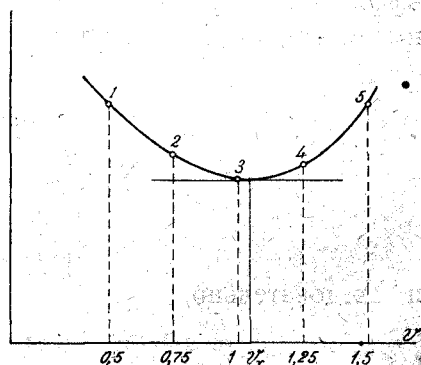
Черт. 64.

гидравлического радиуса, коэффициента C , уклона и длины его, а затем общую кубатуру выемки при прорытии канала ($\Omega \cdot L_K$, где Ω — площадь полной выемки), площадь мостовки ($W \cdot L_K$, где W — длина мостовки в поперечном сечении канала),

наконец, стоимости выемки ($\Omega \cdot L_K \cdot s_1$), мостовки $W \cdot L_K \cdot s_2$ и общую стоимость работ (S). Для наглядности и удобства вычислений, результаты последних сводим в таблицу:

v в м./сек.	ω в м ² .	b в м.	P в м.	R в м.	C	κ	$I_K \cdot 10^{-4}$	L_K в км.	Ω в м ²	ΩL_K	$\Omega L_K s_1$	W	$W L_K$	$W L_K s_2$	S
0,5	20	8	13,64	1,46	51	1230	0,66	2,59	33	85,6	43	16,48	42,6	42,6	85,6
0,75	13,23	4,67	10,31	1,29	49,7	752	1,77	2,74	23	63,0	31,5	13,13	36,0	36,0	67,5
1,0	10	3	8,64	1,16	48,6	524	3,7	3,06	18	55,1	27,6	11,46	35,1	35,1	62,7
1,25	8	2	7,64	1,05	47,5	389	6,6	3,74	15	56,0	28,0	10,46	39,2	39,2	67,2
1,50	6,67	1,335	6,975	0,955	46,5	303	10,9	5,50	13	71,5	35,8	9,80	53,9	53,9	89,7

Для окончательного, более точного, решения поставленной задачи рекомендуется отложить (черт. 65) в каком либо масштабе S по оси ординат при соответствующих значениях скорости v , откладываемой по оси абсцисс; полученные, таким образом, точки 1, 2, 3... соединяют плавной кривой, касательная к которой, проведенная параллельно оси абсцисс, и укажет наименьшую возможную стоимость канала и соответствующую скорость v_x .



Черт. 65.

Задача № 5. Требуется спроектировать осушительную сеть каналов между пунктами A, B, C и D (черт. 66), высоты положения которых показаны на чертеже; на чертеже же показаны расстояния между пунктами и

количества воды, которые каналы должны пропускать. Грунт торфянистый. Каналы должны иметь трапециoidalные сечения наивыгоднейшей формы, т. е. $\frac{b}{h} = 2 \left[\sqrt{1+m^2} - m \right]$.

Решение. Принимаем: коэффициент откосов $m=1$; коэффициент шероховатости $\gamma=1,3$. Имеем следующие соотношения:

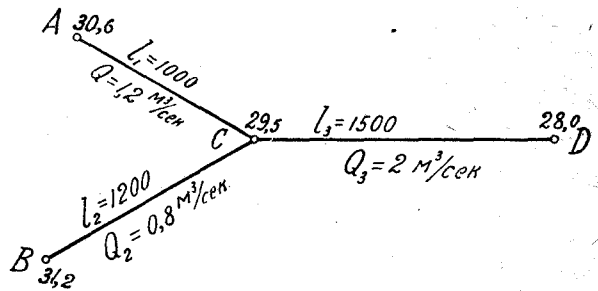
$$k = \frac{Q}{\sqrt{I_k}} = \omega \cdot C \cdot \sqrt{R};$$

$$\omega = (b + mh) h = 1,82 h^2;$$

$$P = b + 2h \sqrt{1+m^2} = 3,64 h;$$

$$R = \frac{\omega}{P} = 0,5 h;$$

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$



Черт. 66.

Согласно данным, имеем:

$$I_{k_1} = \frac{30,6 - 29,5}{1000} = \frac{1,1}{1000} = 0,0011;$$

$$I_{k_2} = \frac{31,2 - 29,5}{1200} = \frac{1,7}{1200} = 0,00142;$$

$$I_{k_3} = \frac{29,5 - 28,0}{1500} = \frac{1,5}{1500} = 0,001,$$

а потому

$$k_1 = \frac{Q_1}{\sqrt{I_{k_1}}} = \frac{1,2}{0,0332} = 36,14;$$

$$k_2 = \frac{Q_2}{\sqrt{I_{k_2}}} = \frac{0,8}{0,0374} = 21,4;$$

$$k_3 = \frac{Q_3}{\sqrt{I_{k_3}}} = \frac{2,0}{0,0316} = 63,4.$$

С другой стороны, из предыдущих соотношений имеем:

$$k = \omega C \sqrt{R} = 1,82 h^2 \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{0,5h}}} \cdot \sqrt{0,5h} = \varphi(h).$$

Поэтому, задаваясь различными значениями h , мы можем построить кривую зависимости k от h ; напр.,

$$\text{при } h' = 0,5, \quad k = 1,82 \cdot 0,5^2 \frac{87}{1 + \frac{1,3}{\sqrt{0,5 \cdot 0,5}}} \sqrt{0,25} = 0,91 \cdot 24,1 \cdot 0,5^2 = 5,43;$$

$$\text{при } h'' = 1, k = 1,82 \frac{87}{1 + \frac{1,3}{\sqrt{0,5}}} \cdot \sqrt{0,5} = 39,4;$$

$$\text{„ } h''' = 1,5, k = 1,82 \frac{87}{1 + \frac{1,3}{\sqrt{0,75}}} \cdot \sqrt{0,75} \cdot h^2 = 1,82 \cdot 34,8 \cdot 0,866 h^2 = \\ = 54,7 \cdot 1,5^2 = 123,1;$$

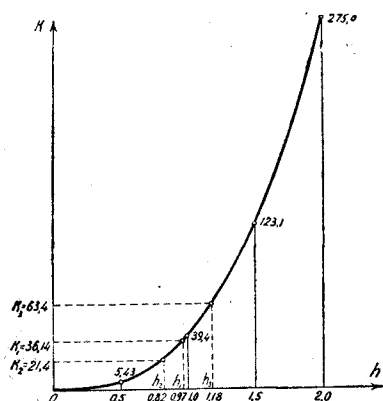
$$\text{„ } h'''' = 2, k = 1,82 \cdot 2^2 \frac{87}{1 + \frac{1,3}{\sqrt{0,5 \cdot 2}}} \cdot \sqrt{0,5 \cdot 2} = 1,82 \cdot 4 \cdot 37,8 = 275,0;$$

теперь строим кривую (черт. 67) $k = f(h')$, а затем, откладывая по оси ординат ранее полученные значения k_1, k_2 и k_3 , проводя через полученные точки параллельные оси x -ов прямые до пересечения с кривой $k = f(h')$ в точках: $a, б, в$, а из последних проводя нормали к оси x -ов, получаем искомые глубины $h_1 = 0,97, h_2 = 0,82$ и $h_3 = 1,18$ м., и, наконец, находим:

$$b_1 = 0,82 \cdot 0,97 = 0,795 \text{ м.};$$

$$b_2 = 0,82 \cdot 0,82 = 0,67 \text{ м.};$$

$$b_3 = 0,82 \cdot 1,18 = 0,97 \text{ м.}$$



Черт. 67.

Если бы было сделано дополнительное указание, что, по местным условиям, каналы не должны иметь глубину больше некоторой определенной величины, например, $h = 0,8$ м, тогда пришлось бы отказаться от наивыгоднейшей формы каналов; в этом случае необходимо было бы задаться глубиной и выразить коэффициент пропускной способности $k = \omega \cdot C \cdot \sqrt{R}$ в функции от ширины по основанию канала (b) и построить кривую $k = f(b)$ при заданном h .

ГЛАВА V.

Течение установившееся, но медленно изменяющееся (или неравномерное).

§ 1. Основные соотношения для неравномерного течения.

Рассматриваемое течение характеризуется тем, что в каком либо данном сечении водотока скорость остается все время постоянной, при переходе же от одного сечения к другому она очень медленно изменяется в ту или другую сторону. В большинстве случаев в неравномерное течение переходит равномерное, как вследствие естественных изменений в русле реки (углубление или повышение ложа, расширение берегов и т. д.), так и вследствие устройства искусственных сооружений на реке или канале, например, вследствие сооружения плотины на реке, устройства щитовых отверстий в канале; наконец, указанный переход одного течения в другое может совершаться при естественных изменениях горизонта воды в реке в ту или другую сторону во время внезапных паводков, заторов и проч. К течению, медленно изменяющемуся, очевидно, найденное нами выше соотношение $R.I = \lambda \frac{v^2}{2g}$ неприменимо, но мы все же в дальнейшем, конечно, несколько произвольно, будем считать, что сечения водотока изменяются чрезвычайно медленно, что линии тока являются весьма слабо изогнутыми линиями, так что, без большой погрешности, их можно считать везде нормальными к соответствующим поперечным сечениям. Выделим в водотоке прямоугольного поперечного сечения 2-мя сечениями aa' и bb' участок $aa'bb'$ малой длины dx . Пусть уклоны поверхности воды и дна на этом участке будут I' и I , а соответствующие и равновеликие им по своей малости углы поверхностей воды и дна с горизонтом — α' и α ; пусть глубины и скорости в сечениях aa' и bb' будут соответственно y, v и $y + dy, v + dv$. Очевидно, закон сохранения энергии дает нам соотношение:

$$\frac{v^2}{2g} + \alpha' dx = \frac{(v + dv)^2}{2g} + \lambda \frac{dx}{R} \frac{v^2}{2g}, \quad (1)$$

где λ — коэффициент шероховатости, а R — гидравлический радиус; соотношение (1), после возможных сокращений и отбрасывания члена

$\frac{dv^2}{2g}$, ввиду его малости по сравнению с другими членами, принимает вид

$$a'dx = 2 \frac{v}{2g} dv + \lambda \frac{dx}{R} \frac{v^2}{2g}. \quad (2)$$

По чертежу непосредственно имеем:

$$y + adx = y + dy + a'dx,$$

откуда

$$a'dx = adx - dy. \quad (3)$$

Обозначая, далее, ширину водотока через b , имеем по закону сплошности движения

$$b \cdot v \cdot y = \text{const},$$

откуда, дифференцируя, находим,

$$by dv + bv dy + vy db = 0;$$

определяем отсюда dv :

$$dv = -\frac{v}{y} dy - \frac{v}{b} db,$$

и, вставляя его, а равно и значения $a'dx$ из (3), во (2), имеем:

$$adx - dy = -\frac{2}{y} \frac{v^2}{2g} dy - \frac{2}{b} \frac{v^2}{2g} db + \lambda \frac{dx}{R} \frac{v^2}{2g},$$

или

$$\left[a - \frac{\lambda}{R} \frac{v^2}{2g} \right] dx = \left[1 - \frac{2}{y} \frac{v^2}{2g} \right] dy - \frac{2}{b} \frac{v^2}{2g} db. \quad (4)$$

Мы получили дифференциальное уравнение для медленно изменяющегося течения, которое, однако, вследствие большого числа переменных величин, входящих в него, не интегрируется; поэтому, делаем следующие предположения, более или менее применимые для небольших участков реки или канала:

$$a = \text{const}; \lambda = \text{const}; b = \text{const}; R = \frac{yb}{2y + b} = \frac{y}{1 + \frac{2y}{b}} \cong y;$$

последнее предположение, очевидно, для большинства рек близко соответствует действительности; для каналов же оно допустимо постольку, поскольку ширина значительно больше глубины.

При сделанных предположениях уравнение (4) принимает вид:

$$\left[a - \frac{\lambda}{y} \frac{v^2}{2g} \right] dx = \left[1 - \frac{2}{y} \frac{v^2}{2g} \right] dy, \quad (5)$$

и может быть интегрируемо.

Выше было указано, что неравномерное течение может быть рассматриваемо, как течение, получающееся, вследствие тех или других причин, из равномерного; поэтому, назвав глубину и скорость в равномерном течении, соответственно, через h_0 (бытовая глубина) и v_0 , мы имеем по закону сплошности течения

$$bv_0 \cdot h_0 = b \cdot v \cdot y; \quad (6)$$

и, кроме того, для равномерного течения

$$R_0 a = h_0 a = \lambda \frac{v_0^2}{2g}, \quad (7)$$

поэтому

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h_0^2}{y^2} \frac{v_0^2}{2g} = \frac{h_0^3 a}{y^2 \lambda};$$

вставляя это значение $\frac{v^2}{2g}$ в уравнение (5), преобразуем его в такое:

$$a \left[1 - \frac{h_0^3}{y^3} \right] dx = \left[1 - \frac{2a}{\lambda} \frac{h_0^3}{y^3} \right] dy,$$

или

$$a \left[\frac{y^3}{h_0^3} - 1 \right] dx = \left[\frac{y^3}{h_0^3} - \frac{2a}{\lambda} \right] dy. \quad (8)$$

Введем новое обозначение: $\frac{y}{h_0} = \eta$, тогда $dy = h_0 d\eta$, и уравнение (8) примет вид:

$$a(\eta^3 - 1) dx = \left(\eta^3 - \frac{2a}{\lambda} \right) h_0 d\eta,$$

откуда, деля все уравнение на $h_0(\eta^3 - 1)$ и вводя во 2-ой части упрощения, получим окончательно:

$$\frac{a}{h_0} dx = d\eta - \left(1 - \frac{2a}{\lambda} \right) \frac{d\eta}{1 - \eta^3}. \quad (9)$$

Интегрирование этого уравнения дает конечное решение (по Bress'y — 1860 г.):

$$\frac{a}{h_0} x = \eta - \left(1 - \frac{2a}{\lambda} \right) f(\eta) + C, \quad (10)$$

если обозначить $\int \frac{d\eta}{1-\eta^3}$ через $f(\eta)$. Численные значения функции $f(\eta) = \frac{1}{6} \ln \frac{\eta^2 + \eta + 1}{(\eta - 1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arccotg} \frac{2\eta + 1}{\sqrt{3}}$ даны Bress'ом²⁾ в таблице, охватывающей ее значения от $\eta = 0$ до $\eta = 1$ ($\eta < 1$) и от $\eta = 1$ до $\eta = \infty$ ($\eta > 1$); выдержки этих значений приведены в таблице № 10.

Таблица № 10.

η	$f(\eta)$	η	$f(\eta)$	η	$f(\eta)$	η	$f(\eta)$	η	$f(\eta)$
0,00	-0,605	0,85	0,461	1,001	2,183	1,30	0,373	3,0	0,055
0,01	-0,595	0,90	0,614	1,005	1,647	1,35	0,335	4,0	0,031
0,05	-0,555	0,94	0,798	1,01	1,416	1,40	0,304	5,0	0,020
0,10	-0,505	0,95	0,862	1,02	1,191	1,50	0,257	10,0	0,005
0,20	-0,404	0,96	0,940	1,03	1,060	1,60	0,218	20,0	0,0013
0,30	-0,303	0,97	1,040	1,05	0,895	1,70	0,190	50	0,0002
0,40	-0,198	0,98	1,178	1,07	0,783	1,80	0,166	100	0,0001
0,50	-0,088	0,99	1,412	1,10	0,676	1,90	0,146	∞	0
0,60	+0,032	0,995	1,647	1,15	0,561	2,0	0,132		
0,70	0,171	0,999	2,183	1,20	0,479	2,2	0,108		
0,80	0,346	1,000	∞	1,25	0,420	2,5	0,082		

Если проинтегрировать дифференциальное уравнение (9) в пределах от η_2 до η_1 , то мы получим соотношение:

$$\frac{a}{h_0} [x_2 - x_1] = \eta_2 - \eta_1 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right) [f(\eta_2) - f(\eta_1)],$$

или, обозначая $x_2 - x_1$ через s ,

$$\frac{a}{h_0} s = \eta_2 - \eta_1 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right) [f(\eta_2) - f(\eta_1)], \quad (11)$$

¹⁾ Выражение функции $f(\eta)$ находится таким образом: $\frac{d\eta}{1-\eta^3} = -\frac{d\eta}{\eta^3-1} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\eta-1} - \frac{\eta+2}{\eta^2+\eta+1} \right) d\eta = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{2} \frac{2\eta+1}{\eta^2+\eta+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{\eta^2+\eta+1} \right] d\eta = \frac{1}{6} d \ln (\eta^2 + \eta + 1) - \frac{1}{3} d \ln (\eta - 1) + \frac{1}{2} \frac{d\eta}{\frac{3}{4} + \left(\frac{2\eta+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{6} d \ln \frac{\eta^2 + \eta + 1}{(\eta - 1)^2} + \frac{2}{3} \frac{d\eta}{1 + \left(\frac{2\eta+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{6} d \ln \frac{\eta^2 + \eta + 1}{(\eta - 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} d \operatorname{arctg} \frac{2\eta+1}{\sqrt{3}}; а теперь $\int \frac{d\eta}{1-\eta^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{\eta^2 + \eta + 1}{(\eta - 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\eta+1}{\sqrt{3}} + C$; так как $\operatorname{arctg} \varphi + \operatorname{arccotg} \varphi = \frac{\pi}{2}$, то в предыдущем выражении arctg можно заменить через $\operatorname{arccotg}$, а $\frac{\pi}{2}$ войдет в произвольную постоянную C ; потому, окончательно$

$$\int \frac{d\eta}{1-\eta^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{\eta^2 + \eta + 1}{(\eta - 1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arccotg} \frac{2\eta+1}{\sqrt{3}} + C$$

²⁾ Bresse. Hydraulique. 1860. Стр. 238 и сл.

весьма удобное для определения расстояний между поперечными сечениями водотока, в которых относительные подпоры ($y > h_0$) или спады ($y < h_0$) имеют, соответственно, величины $\eta_2 = \frac{y_2}{h_0}$ и $\eta_1 = \frac{y_1}{h_0}$.

§ 2. Форма свободной поверхности водотоков при неравномерном течении.

Чтобы исследовать форму свободной поверхности водотоков при неравномерном течении, обратимся к уравнению (8), из которого легко найти:

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{y^3 - h_0^3}{y^3 - \frac{2a}{\lambda} h_0^3},$$

или, обозначая $\frac{2a}{\lambda} h_0^3$ через z^3 , имеем:

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{y^3 - h_0^3}{y^3 - z^3} \quad (12)$$

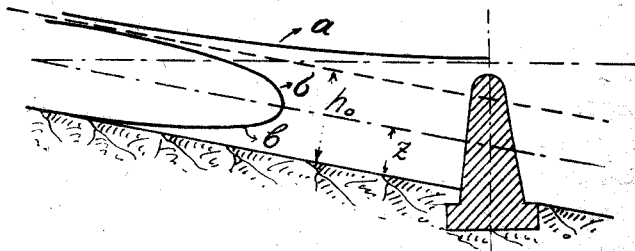
В зависимости от величины a , значение z может быть меньше h_0 , больше h_0 и равно h_0 ; в самом деле, если $a < \frac{\lambda}{2}$, то, очевидно, $z < h_0$ (в этом случае говорят, что имеем дело с водотоком спокойным — рекой), если $a > \frac{\lambda}{2}$, то $z > h_0$ (говорят, что имеем дело с водотоком бурным — с горной рекой, или потоком), наконец, если $a = \frac{\lambda}{2}$, то $z = h_0$. Рассмотрим эти три случая отдельно.

1. Первый случай: $a < \frac{\lambda}{2}$, $z < h_0$.

а) Пусть $y > h_0$; тогда, очевидно,

$$\frac{dy}{dx} > 0,$$

и, следовательно, глубина водотока с передвижением вниз по течению возрастает; наоборот, при движении вверх по течению убывает; при возрастании глубины, $\frac{dy}{dx}$ приближается к значению a и, когда глубина делается очень большой



Черт. 69.

(∞), $\frac{dy}{dx}$ делается равной a ; это значит, что свободная поверхность воды в реке, по мере увеличения глубины, приближается асимпто-

тически к горизонтальной плоскости, которой достигает в пределе, когда $y = \infty$; при уменьшении глубины (при движении вверх по течению) $\frac{dy}{dx}$ приближается, очевидно, к нулю, и в пределе, когда $y = h_0$, свободная поверхность, приближающаяся асимптотически к свободной поверхности равномерного движения, сольется с последней.

Таким образом, свободная поверхность в данном случае имеет две асимптотические поверхности — поверхность горизонта в нижнем течении и поверхность равномерного движения в верхнем; кривая пересечения этой поверхности с плоскостью чертежа изображена на чертеже 69 (кривая a), при чем показателем правильности обращения выпуклости этой кривой к оси x -ов служит значение 2-ой производной:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3ay^2 \frac{h_0^3 - z^3}{(y^3 - z^3)^2} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad (13)$$

очевидно, в данном случае, положительное. Полученная нами кривая носит название кривой подпора и имеет место во всех случаях, когда водоток подперт (см., напр., ниже черт. 71): плотиной (черт. 69), повышением горизонта в нижнем бьефе и т. д.

б) Пусть, далее, $z < y < h_0$.

В этом случае (см. уравн. 12)

$$\frac{dy}{dx} < 0.$$

и, следовательно, глубина водотока убывает, по мере движения вниз по течению, и возрастает при движении вверх по течению. Пределы изменения y суть h_0 и z ; при этом, по мере увеличения глубины, кривая свободной поверхности асимптотически приближается к кривой свободной поверхности равномерного движения, с которой и сливается в пределе, когда y делается равным h_0 ; по мере уменьшения глубины, свободная поверхность приближается к поверхности, параллельной поверхности равномерного движения и находящейся от дна на расстоянии z .

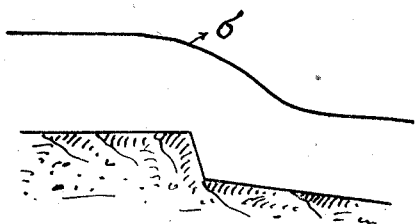
При этом приближении, $\frac{dy}{dx}$, или тангенс угла касательной к кривой пересечения рассматриваемой свободной поверхности с плоскостью чертежа, все увеличивается, и в пределе, когда y делается равным z , обращается в бесконечность; другими словами, рассматриваемая кривая подойдет нормально к прямой z . Кривая эта обозначена на чертеже 69 буквой (b) и носит название кривой спада; правильность изображения выпуклости кверху доказывается знаком 2-ой производной (см. уравнение 13), которая в данном случае отрицательна. Свободная поверхность воды принимает рассматриваемую форму, напр., в канале, отводящем воду из верхнего водоема в нижний, при понижениях горизонта воды в последнем, в реке при землечерпании и т. д. (черт. 70).

в) Пусть, наконец, $y < z$.

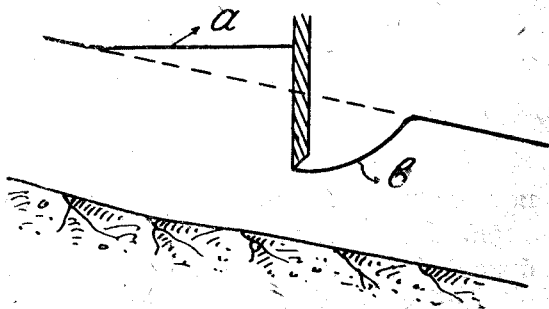
В этом случае, согласно уравнению (12),

$$\frac{dy}{dx} > 0,$$

т. е. глубина водотока возрастает, по мере движения вниз по течению, и убывает при движении в обратном направлении; при возрастании глубины (y), последняя может сделаться равной z ; тогда $\frac{dy}{dx} = \infty$, и, следовательно, кривая пересечения свободной поверхности воды с плоскостью чертежа подойдет нормально к прямой, проходящей от дна на расстоянии z ; при следовании по кривой вверх по течению, глуби-



Черт. 70.



Черт. 71.

на, как сказано выше, убывает и в пределе, когда $y = 0$ (теоретически), производная $\frac{dy}{dx}$ делается равной $\frac{\lambda}{2}$, чем определяется направление подхода рассматриваемой кривой к дну водотока; вторая производная $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ в этом случае положительна, следовательно, выпуклостью кривая обращена к оси x -ов. Кривая эта, изображенная на чертеже 69 под видом кривой (θ), носит название щитовой кривой, так как свободная поверхность воды, вытекающей из-под щита в лоток, принимает как раз рассматриваемую форму (черт. 71).

II. Второй случай: $\alpha > \frac{\lambda}{2}$. $z > h_0$.

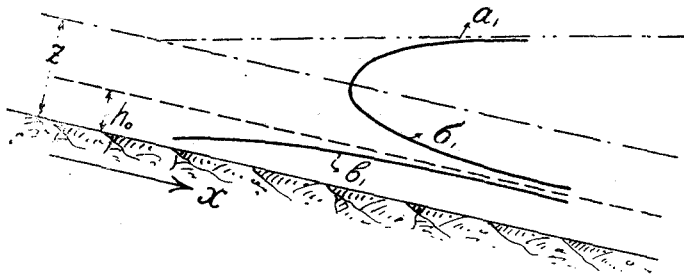
Здесь также могут быть три формы свободной поверхности воды, в зависимости от того, будет ли $y > z$, или $z > y > h_0$, или $y < h_0$.

а₁) Пусть $y > z$; тогда:

$$\frac{dy}{dx} > 0 \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2} < 0;$$

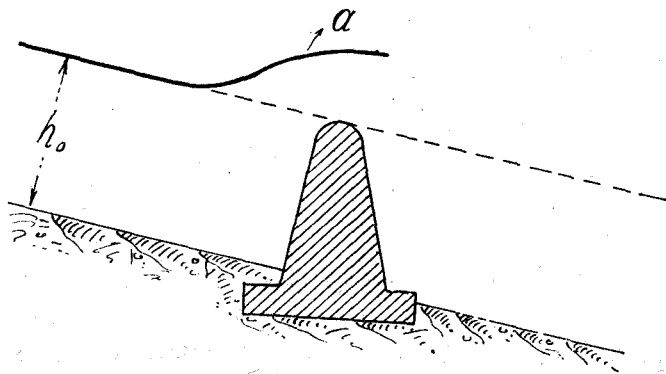
глубина, как видно, при движении вниз по течению увеличивается; свободная поверхность асимптотически приближается при этом

к горизонтальной поверхности, с которой и сливается в пределе, когда глубина делается (теоретически) бесконечно-большой, так как тогда $\frac{dy}{dx} = a$. При движении в обратном направлении, глубина уменьшается, свободная поверхность приближается к поверхности, параллельной поверхности равномерного движения и отстоящей от дна на расстоянии z , и к которой при втором пределе y , равном z , подходит



Черт. 72.

под прямым углом. Кривая пересечения этой поверхности неравномерного движения с плоскостью чертежа обозначена на чертеже 72 буквой (a_1) и носит название кривой прыжка или скачка воды; по этой кривой располагается поверхность воды в бурном потоке, когда в нем ставят плотину; поверхность воды, текущей первоначально с бытовой глубиной h_0 , сразу как бы подскакивает в этом случае перед плотиной или вообще преградой, как изображено на чертежах 73 и 75. В первый раз это явление наблюдал в канале, имеющем большой уклон, Бидон (Bidone, 1820 г.), когда в конце канала он поставил на



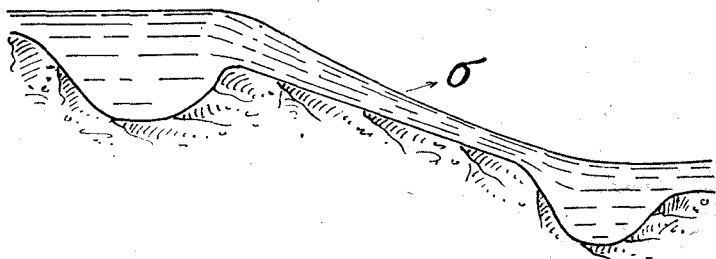
Черт. 73.

дно перегородку; поэтому явление это и носит в литературе название скачка Бидона.

б1) Если $h_0 < y < z$, тогда

$$\frac{dy}{dx} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

При движении вниз по течению, глубина уменьшается, и свободная поверхность воды ассимптотически приближается к поверхности бытовой глубины (h_0), с которой и сливается в пределе, когда $y = h_0$. При движении вверх по течению, глубина увеличивается до предела $y = z$; при приближении к этому пределу, угол, составляемый свободной поверхностью с поверхностями, параллельными поверхностям бытовой глубины, все увеличивается, и в пределе, когда $y = z$, он делается равным 90° ; выпуклостью свободная поверхность обращена к оси x -ов, что видно из знака второй производной $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$. На чертеже 72 пересечение свободной поверхности рассматриваемого течения с плоскостью чертежа изображено кривой (β_1), которая носит название

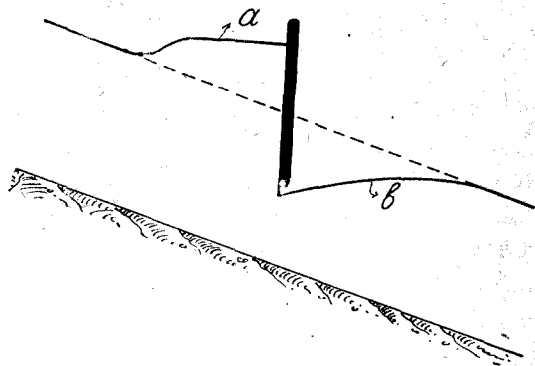


Черт. 74.

тоже кривой спада, но при бурных потоках; она может быть получена, например, при перетекании воды из одного водоема в другой по лотку большого уклона (черт. 74), как это иногда бывает в плотоходных каналах и пр.

в₁) В случае $y < h_0$ имеем:

$$\frac{dy}{dx} > 0 \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$



Черт. 75.

Очевидно, в этом случае, при движении вниз по течению, глубина все возрастает до предела $y = h_0$; при движении вверх по течению глубина убывает до нуля (теоретически). Свободная поверхность водотока, при движении вниз, ассимптотически приближается к поверхности бытовой глубины (h_0), с которой и сливается в пределе, когда $y = h_0$. При движении в обратном направлении, свободная поверхность приближается к поверхности дна и в пределе, когда $y = 0$, подходит

к последней под углом, тангенс которого равен $\frac{\lambda}{2}$. Выпуклостью свободная поверхность, очевидно, обращена от оси x -ов. Пересечение свободной поверхности с плоскостью чертежа изображено на чертеже 72 кривой (v_1); кривая эта носит название щитовой кривой при большом уклоне канала или лотка (черт. 75, кривая в).

III. Третий случай: $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ и, следовательно, $z = h_0$.

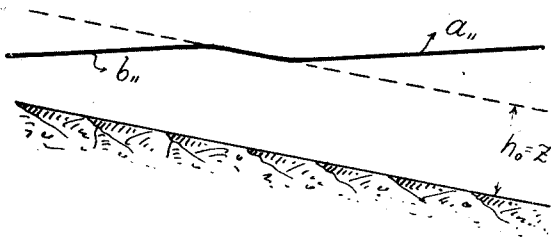
В этом случае, очевидно, может быть только

$$y > h_0 \text{ и } y < h_0.$$

Так как соотношения (12) и (13) принимают теперь вид

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

то, очевидно, и при $y > h_0$, и при $y < h_0$ мы получаем для свободных поверхностей горизонтальные плоскости, и самый вид пересечений



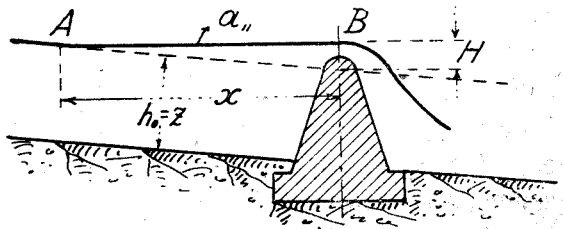
этих последних с плоскостью чертежа изобразится так, как показано на чертеже 76 (прямые a'' и b'').

На практике рассматриваемые формы свободной поверхности можно получить, например, в та-

Черт. 76.

ких случаях: представим себе, что уклон дна водотока $\alpha = \frac{\lambda}{2}$; течение в этом случае совершенно равномерное, поэтому и профиль свободной поверхности есть прямая, параллельная дну ($h_0 = \text{const}$).

Допустим, что в таком водотоке мы поставили плотину; тогда, согласно только что изложенного, профиль подпертой (чертеж 77) воды будет горизонтальная прямая (a''), и если в точке B глубина потока превышает глубину равномерного течения на величину H , то длина потока, на которой профиль остается горизонтальным (длина AB), есть



Черт. 77.

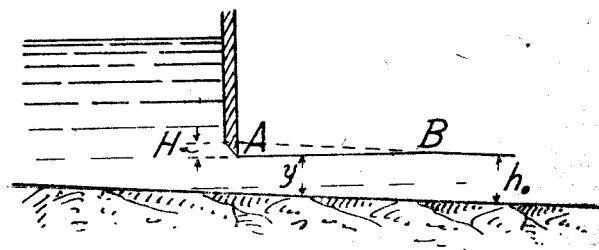
горизонтальным (длина AB), есть

$$x = \frac{H}{\alpha} = \frac{2H}{\lambda},$$

а далее, от точки A вверх по потоку, движение будет равномерное.

Допустим теперь, что вода из водоема, сосуда и пр., вытекает через щитовое отверстие в желоб или канал, поставленный под углом $\alpha = \frac{\lambda}{2}$, и при том

вытекает под таким напором, что скорость в желобе или канале у выходного отверстия больше, нежели скорость равномерного течения далее, вниз по каналу. В этом случае, по выходе воды



Черт. 78.

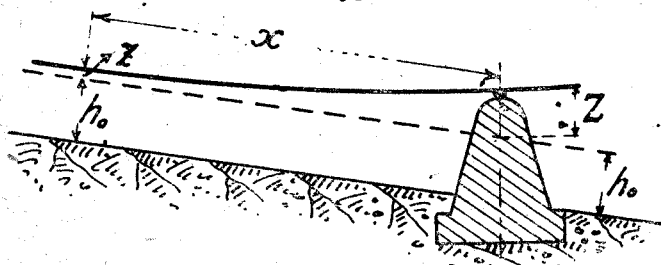
из отверстия в канал или желоб, ее свободная поверхность будет горизонтальна (черт. 78) на некотором протяжении от A до B ($AB = \frac{H}{a} = \frac{2H}{\lambda}$), где глубина (y) сравнивается с h_0 ; ниже точки B течение будет равномерным.

§ 3. Решение задачи о неравномерном движении по Дюпюи-Рюльманну (Dupuit-Rühlmann — 1880 г.) и Толькмиту (Tolkmitt — 1892 г.).

При нормальных условиях, встречающихся обыкновенно в практике, член $\frac{2}{y} \frac{v^2}{2g}$ в соотношении (5) настоящей главы представляет очень малую дробь, которой можно пренебречь, что и делает Рюльманн; в этом случае уравнение (8) принимает вид:

$$a \left(1 - \frac{h_0^3}{y^3} \right) dx = dy. \quad (14)$$

Исследование этого уравнения приводит к тем же профилям свободной поверхности, что и исследование уравнения (8).



Черт. 79.

Обозначая теперь y через $h_0 + z$ (где z может быть и положительным и отрицательным, см. черт. 79 и 80), откуда

$dy = dz$, имеем из (14):

$$a \left(1 - \frac{h_0^3}{(h_0 + z)^3} \right) dx = dz,$$

а из него:

$$adx = \frac{(h_0 + z)^3}{(h_0 + z)^3 - h_0^3} dz = \frac{h_0^3 + 3h_0^2z + 3h_0z^2 + z^3}{3h_0^2z + 3h_0z^2 + z^3} dz.$$

Производя на самом деле деление числителя на знаменатель во второй части последнего уравнения и вынося h_0 за скобки, находим:

$$adx = h_0 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} + \frac{2}{3} \frac{1}{h_0} + \frac{2}{9} \frac{z}{h_0^2} - \frac{1}{9} \frac{z^2}{h_0^3} + \frac{1}{27} \frac{z^3}{h_0^4} - \dots \right) dz,$$

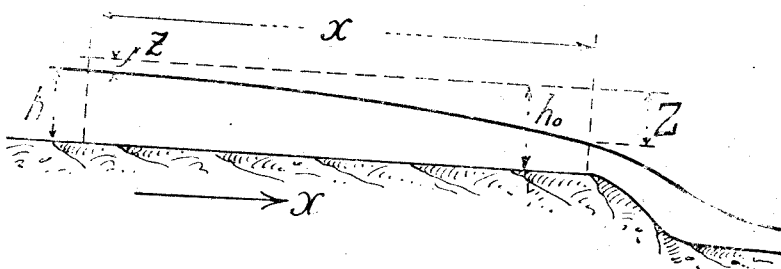
или

$$\frac{a}{h_0} dx = \frac{1}{3} \frac{dz}{z} + \frac{2}{3} \frac{dz}{h_0} + \frac{2}{9} \frac{zdz}{h_0^2} - \frac{1}{9} \frac{z^2dz}{h_0^3} + \frac{1}{27} \frac{z^3dz}{h_0^4} - \frac{1}{81} \frac{z^5dz}{h_0^6} + \dots$$

Интегрируя это соотношение в пределах от Z до z , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{a}{h_0} x = & \frac{1}{3} \ln \frac{Z}{z} \pm \frac{2}{3} \frac{Z-z}{h_0} + \frac{1}{9} \frac{Z^2-z^2}{h_0^2} + \frac{1}{27} \frac{Z^3-z^3}{h_0^3} + \\ & + \frac{1}{108} \frac{Z^4-z^4}{h_0^4} - \frac{1}{486} \frac{Z^6-z^6}{h_0^6} \pm \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь верхние знаки у членов 2-ой части нечетных степеней относятся к подпору, нижние к спаду.



Черт. 80.

Очевидно, далее, вторую часть последнего соотношения можно изобразить, как: $\Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right) - \Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$, а тогда все уравнение примет вид:

$$\frac{a}{h_0} x = \Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right) - \Phi\left(\frac{z}{h_0}\right), \quad (16)$$

в каком виде обычно и представляется решение задачи о неравномерном течении по Dupuit-Rühlmann'у. Значения функций $\Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right)$ и $\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$ были вычислены Гедекером (Gödecker), и представлены Rühlmann'ом в виде таблиц (сокращенные таблицы даны еще Dupuit), выдержки из которых приводятся в таблице № 11; при этом нужно

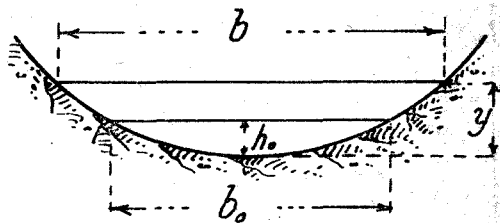
заметить, что ввиду того, что, как подпор, так и спад исчезают (теоретически) только в бесконечности, Гедекер начало координат ($x=0$) условно принял там, где $z=0,0098h_0$.

Таблица № 11.

Для подпорных кривых						Для кривых спада			
$\frac{z}{h_0}$	$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$	$\frac{z}{h_0}$	$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$	$\frac{z}{h_0}$	$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$	$\frac{z}{h_0}$	$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$	$\frac{z}{h_0}$	$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right)$
0,010	0,0067	0,275	1,296	0,850	2,110	0,010	0,0067	0,250	0,914
0,015	0,1452	0,300	1,343	0,900	2,168	0,015	0,1251	0,300	0,945
0,020	0,2444	0,325	1,388	0,950	2,226	0,020	0,2287	0,350	0,967
0,025	0,3222	0,350	1,431	1,00	2,284	0,025	0,2888	0,400	0,983
0,030	0,3863	0,375	1,472	1,20	2,508	0,030	0,3463	0,450	0,995
0,040	0,489	0,400	1,512	1,40	2,726	0,04	0,436	0,500	1,004
0,050	0,570	0,425	1,551	1,60	2,940	0,05	0,503	0,550	1,010
0,060	0,637	0,450	1,588	1,80	3,151	0,06	0,558	0,600	1,014
0,070	0,696	0,475	1,625	2,00	3,359	0,07	0,603	0,650	1,017
0,080	0,748	0,500	1,661	2,20	3,566	0,08	0,641	0,700	1,018
0,090	0,793	0,525	1,696	2,40	3,772	0,09	0,673	0,750	1,019
0,100	0,835	0,550	1,731	2,60	3,977	0,100	0,702	0,800	1,020
0,125	0,927	0,575	1,765	2,80	4,181	0,125	0,760	0,850	1,0202
0,150	1,005	0,600	1,798	3,00	4,385	0,150	0,805	0,900	1,0203
0,175	1,074	0,650	1,863	3,50	4,891	0,175	0,841	0,950	1,0203
0,200	1,136	0,700	1,927	4,00	5,396	0,200	0,870	1,000	1,0203
0,225	1,193	0,750	1,989	4,50	5,899				
0,250	1,246	0,800	2,046	5,00	6,402				

Вышеприведенные решения Bress'a и Dupuit—Rühlmann'a предполагают поперечные сечения русел прямоугольными, очень большой ширины; действительные русла, конечно, редко имеют точно прямоугольные сечения; поэтому, Толькмйт предложил измененное решение задачи о неравномерном течении, предполагая русло параболической формы, но тоже очень большой ширины.

Выражая все гидравлические элементы потока (ширина, площадь живого сечения и проч.), изменяющиеся при неравномерном движении в зависимости от ширины (b) и глубины (y), только через последнюю и через постоянные бытовые глубину h_0 и ширину b_0 (черт. 81), Толькмйт пришел к уравнению вида



Черт. 81.

$$\frac{\alpha x}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - \left(1 - \frac{2\alpha}{\lambda}\right) \left[\psi(\eta_2) - \psi(\eta_1) \right], \quad (17)$$

где η_2 и η_1 соответственно равны $\frac{y_2}{h_0}$ и $\frac{y_1}{h_0}$, т. е. к уравнению, весьма схожему с уравнением Bress'a и отличающемуся от него только функциями $\psi(\eta_2)$ и $\psi(\eta_1)$.

Уравнение (17) можно, очевидно, переписать в таком виде:

$$\frac{ax}{h_0} = \left[\eta_2 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda} \right) \psi(\eta_2) \right] - \left[\eta_1 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda} \right) \psi(\eta_1) \right],$$

а теперь, полагая

$$\left. \begin{aligned} \eta_2 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda} \right) \psi(\eta_2) &= \Psi(\eta_2) \\ \eta_1 - \left(1 - \frac{2a}{\lambda} \right) \psi(\eta_1) &= \Psi(\eta_1) \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

окончательно получаем уравнение Толькмита

$$\frac{ax}{h_0} = \Psi(\eta_2) - \Psi(\eta_1), \quad (19)$$

при чем для кривых подпора при спокойных реках функции $\Psi(\eta_2)$ и $\Psi(\eta_1)$ несколько упрощаются, так как Толькмитт пренебрегает членом $\frac{2a}{\lambda}$, как сравнительно малой величиной.

Для значений функции $\Psi(\eta)$ также составлены таблицы, выдержки из которых здесь и прилагаются (Табл. № 12).

Таблица № 12.

Для кривых подпора						Для кривых спада			
η	$\Psi(\eta)$	η	$\Psi(\eta)$	η	$\Psi(\eta)$	η	$\Psi(\eta)$	η	$\Psi(\eta)$
1,0	— ∞	1,22	0,985	1,75	1,685	1,000	∞	0,80	0,087
1,005	— 0,102	1,24	1,021	1,80	1,740	0,995	0,894	0,78	0,074
1,010	0,074	1,26	1,055	1,85	1,795	0,990	0,724	0,76	0,063
1,015	0,179	1,28	1,087	1,90	1,850	0,985	0,625	0,74	0,054
1,020	0,254	1,30	1,119	1,95	1,904	0,980	0,556	0,72	0,046
1,025	0,313	1,32	1,149	2,00	1,957	0,975	0,504	0,70	0,039
1,03	0,362	1,34	1,178	2,2	2,168	0,970	0,461	0,68	0,033
1,04	0,440	1,36	1,207	2,4	2,376	0,96	0,395	0,66	0,028
1,05	0,502	1,38	1,235	2,6	2,581	0,95	0,346	0,64	0,024
1,06	0,554	1,40	1,262	2,8	2,785	0,94	0,306	0,62	0,020
1,07	0,599	1,42	1,289	3,0	2,988	0,93	0,274	0,60	0,017
1,08	0,635	1,44	1,315	3,5	3,492	0,92	0,246	0,55	0,011
1,09	0,675	1,46	1,341	4,0	3,995	0,91	0,223	0,50	0,006
1,10	0,708	1,48	1,367	4,5	4,496	0,90	0,203	0,45	0,004
1,12	0,766	1,50	1,392	5,0	4,997	0,88	0,169	0,40	0,002
1,14	0,818	1,55	1,453	6,0	5,998	0,86	0,142	0,35	0,001
1,16	0,865	1,60	1,513	8,0	7,999	0,84	0,120	0,30	0
1,18	0,908	1,65	1,571	10,0	10,000	0,82	0,102	0	0
1,20	0,948	1,70	1,628						

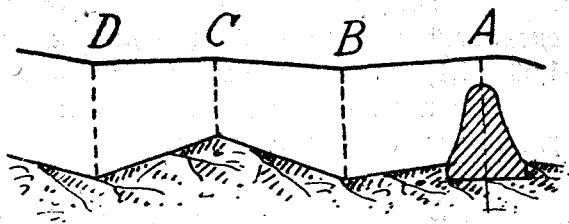
Что касается сравнительной оценки изложенных решений, то, как показывают проверки решений действительными наблюдениями, методы Дюпюи-Рюльманна и Толькмита мало отличаются друг от друга, но, повидимому, первый метод точнее второго; при вычислении кривой подпора на Дунайском канале ¹⁾ длиной 16 кмтр. и при подпоре в 4,5 м, максимальные отступления расчетных профилей (трех) от действительных профилей подпора по первому методу были: 15, 11 и 19 см, а по второму: 17, 15 и 21 см.

Способ Бресса несколько точнее двух других способов, но, конечно, абсолютного совпадения с действительными наблюдениями не дает, так как все указанные способы предполагают очень большую ширину русла, по сравнению с глубиной, и, кроме того, пренебрегают изменением коэффициента $C = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}}$ с глубиной в формуле Шези.

Все же, несмотря на указанные недостатки, получаемые результаты подсчетов по этим методам не сильно расходятся с действительными наблюдениями, и на практике до сего времени методы эти весьма широко распространены.

Необходимо при этом заметить, что в естественных руслах вообще трудно получить точное решение, так как поперечные профили и уклоны дна иногда весьма сильно меняются по течению. В силу этого, русло реки приходится разбивать на такие отдельные участки, для каждого из которых можно было бы, с большей или меньшей точностью, принять некоторый средний уклон дна и среднее поперечное сечение; средний уклон приходится при этом вычислять, как частное от деления имеющегося на участке падения горизонта воды на длину его.

Для продольного профиля, например, по черт. 82, следовало бы сперва определить (вычертить) профиль свободной поверхности на участке от *A* до *B*, затем от *B* до *C*, принимая точку *B* за начало подпора вверх по течению, далее от *C* до *D*, принимая точку *C* за начало подпора вверх и т. д.; в результате получили бы ломанный профиль подпорной кривой *ABCD*..., который был бы, конечно, только приближенным.



Черт. 82.

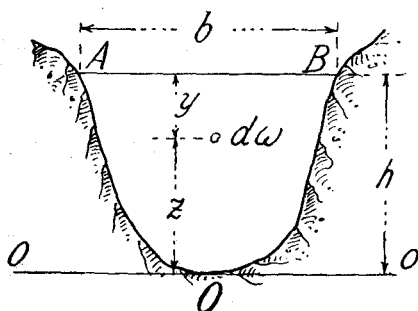
В последнее время появилось несколько новых методов решения той же задачи. Таковы, например, способы проф. Бахметева (1914 г.) и Батикля (Baticle—1921), но, ввиду их новизны и ограниченности

¹⁾ Ph. Forchheimer. Hydraulik. 1914, стр. 133.

пока применения на практике, останавливаться на них мы не будем; желающих ознакомиться с этими способами отсылаем к „Гидравлическому Справочнику“ проф. Н. Н. Павловского, где приведены также и литературные источники.

§ 4. Удельная энергия водотока.

Пусть имеем поперечное сечение AOB водотока, показанное на прилагаемом чертеже (черт. 83). Через нижнюю точку O проведем плоскость, от которой будем отсчитывать ординаты. Пусть полная глубина есть h . Возьмем бесконечно малую площадку $d\omega$ в поперечном сечении водотока; расстояния ее от поверхности и от основной плоскости (OO) назовем, соответственно, через y и z ; тогда, называя еще скорость течения через площадку $d\omega$ через u , имеем выражение элементарной энергии:



Черт. 83.

$$\delta \cdot u \cdot d\omega \left(z + \frac{p}{\delta} + \frac{u^2}{2g} \right) = d\mathfrak{E} = \delta \cdot u \cdot d\omega (z + y) + \\ + \frac{\delta u^3}{2g} d\omega = \delta u d\omega h + \frac{\delta u^3}{2g} d\omega,$$

отнесенной к весу воды, протекающей через площадку $d\omega$ в 1 секунду. Энергия всего водотока, очевидно, будет:

$$\mathfrak{E} = \delta h \int_{\omega} u d\omega + \frac{\delta}{2g} \int_{\omega} u^3 d\omega = \delta h v \omega + \frac{\delta}{2g} \alpha v^3 \omega,$$

где α — коэффициент (зависящий от неравномерного распределения скоростей по сечению), близкий к единице (принимаемый равным 1,06 — 1,1), а v — средняя скорость в сечении.

Энергия водотока, отнесенная к весу воды ($\delta \omega v$), протекающей через сечение, и называемая удельной энергией ¹⁾, очевидно, будет:

$$E = \frac{\mathfrak{E}}{\delta \omega v} = \frac{\delta h v \omega}{\delta \omega v} + \frac{\delta}{2g} \frac{\alpha v^3 \omega}{\delta \omega v} = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g \omega^2}.$$

Изменение энергии с глубиной найдем, беря производную по h ,

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} \cdot \frac{d\omega}{dh};$$

¹⁾ Это название ввел в гидравлику проф. Б. А. Бахметев („О неравномерном движении в открытых каналах и руслах“. Петроград, 1912).

но $\frac{d\omega}{dh}$ есть, очевидно, ширина водотока b , а потому:

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b; \quad (20)$$

это выражение может быть:

$$< 0, = 0, \text{ и } > 0;$$

таким образом:

$$\text{энергия убывает: } \frac{dE}{dh} < 0, \text{ когда } 1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b < 0;$$

$$\text{энергия достигает minimum'a: } \frac{dE}{dh} = 0, \text{ когда } 1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b = 0;$$

$$\text{энергия возрастает: } \frac{dE}{dh} > 0, \text{ когда } 1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b > 0.$$

Так как в естественных и искусственных руслах ω возрастает с увеличением глубины, то из предыдущих соотношений следует, что в водотоке с увеличением глубины энергия сперва уменьшается и достигает минимума при глубине, которая находится из соотношения

$$1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b = 0, \text{ или } 1 - \frac{a}{g} \frac{Q^2}{b^2} \frac{b}{bh_k^3} = 0, \text{ или } 1 - \frac{aq^2}{g} \frac{1}{h_k^3} = 0, \text{ или еще}$$

$$1 - \frac{av^2}{gh_k} = 0, \text{ выражается, наконец, как } h_k = \sqrt[3]{\frac{aq^2}{g}} = \frac{av^2}{g}, \text{ и называется}$$

критической глубиной; здесь через q обозначается количество воды, протекающее на единице ширины русла, при чем при вышеприведенных операциях предполагалось, что ширина русла значительно больше глубины, так что площадь русла можно считать равной произведению ширины на глубину (естественные водотоки), или что русло прямоугольное (каналы).

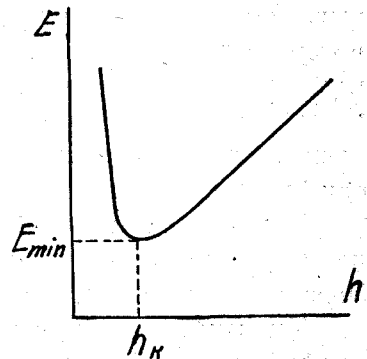
После перехода критической глубины, удельная энергия с увеличением глубины возрастает. На прилагаемом чертеже (черт. 84) это изменение изображено графически.

Выше мы видели, что уменьшение энергии с увеличением глубины происходит при условии:

$$1 - \frac{aQ^2}{g\omega^3} b < 0,$$

или, очевидно,

$$1 - \frac{av^2b}{g\omega} < 0, \text{ или, еще: } 1 - \frac{av^2}{gh} < 0;$$



Черт. 84.

выражение $1 - \frac{\alpha v^2}{gh}$ почти не отличается от выражения $1 - \frac{2}{y} \frac{v^2}{2g}$, которое имеется в соотношении, получаемом из (5), и далее в (12):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha - \frac{\lambda}{R} \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{2}{y} \frac{v^2}{2g}} = \alpha \frac{y^3 - h_0^3}{y^3 - z^3},$$

т. е., другими словами, условие $1 - \frac{\alpha v^2}{gh} < 0$ неразрывно связано с неравенствами:

$$1 - \frac{2}{y} \frac{v^2}{2g} < 0, \text{ или } y < z;$$

последнее же неравенство выполняется или при $\alpha < \frac{\lambda}{2}$, когда $0 < y < z < h_0$, или при $\alpha > \frac{\lambda}{2}$, когда $h_0 < y < z$; первое условие относится, как известно, к обыкновенной спокойной реке, второе к потоку. Так как глубина z есть, очевидно, ничто иное, как критическая глубина, потому что условию $y = z$ соответствует условие

$$1 - \frac{\alpha v^2}{gh} = 0, \text{ или } 1 - \frac{\alpha q^2}{gh^3} = 0;$$

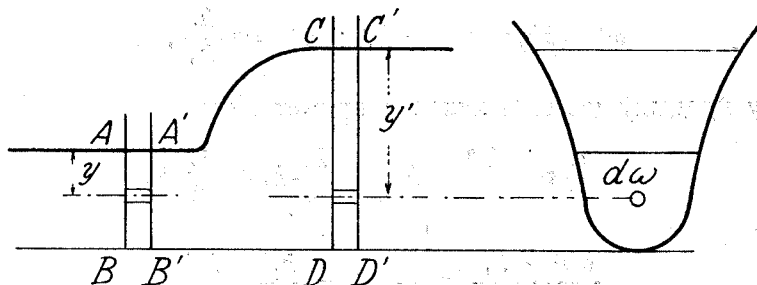
и, так как при условии $h_0 < y < z$ в потоке, равно как при условии $0 < y < z < h_0$ в реке, увеличение глубины влечет за собою приближение к критической глубине, то выходит, что в реке и в потоке убывание энергии идет при увеличении глубины, но с той разницей, что в реках эти глубины должны быть меньше нормальных (бытовых) а в потоках больше бытовых, и минимум энергии, в первом случае, будет тоже при глубинах, меньших бытовых, во втором, больших бытовых. Обратно, если, вследствие каких либо причин, в реке происходит потеря в энергии, то эта потеря должна сопровождаться уменьшением глубины против нормальной, в потоке, наоборот, увеличением глубины против нормальной; так, например, камень, лежащий на дне реки, вызывает понижение поверхности над ним, тот же камень в потоке вызывает повышение поверхности воды над ним.

В потоке, очевидно, увеличение глубины против нормальной и приближение последней к критической может повлечь за собой образование скачка воды, в реке этого произойти не может.

Так как за скачком воды течение устанавливается спокойное, то проф. Бахметев¹⁾ определяет скачок воды, как такое явление, при котором водоток переходит из одного состояния в другое при минимуме энергии, и скачок является, таким образом, как бы сохрани-
телем энергии.

¹⁾ Бахметев. „О неравномерном движении в открытых руслах и каналах“.

Что касается самой высоты скачка, то такая может быть определена следующим образом: предположим для упрощения, что уклон дна в районе скачка настолько мал, что мы силой тяжести можем пренебречь; опыт подтверждает, что для данного случая такое предположение допустимо. Выделим двумя сечениями AB и CD в месте скачка, сравнительно, небольшой участок водотока и применим к нему теорему о количестве движения: приращение количества движения за данный промежуток времени равно импульсу сил за тот же промежуток времени. За промежуток времени возьмем элемент dt , и пусть в течение



Черт. 85.

его выделенный нами объем переместится из положения $ABCD$ в положение $A'B'C'D'$. По чертежу 85 мы видим, что при этом перемещении участок $A'B'CD$, как бы, остался на своем месте, а переместились только сечения AB и CD , соответственно, в положения $A'B'$ и $C'D'$; таким образом, вышеприведенную теорему мы можем применить только к объемам $ABA'B'$ и $CDC'D'$; поэтому, выделяя в сечениях AB и CD элементарные площадки $d\omega$ и $d\omega'$ и называя скорости течения через них u и u' , имеем приращение количеств движения за время dt :

$$\frac{\delta u'^2 dt}{g} d\omega' - \frac{\delta u^2 dt}{g} d\omega \cong \frac{\delta}{g} dt [u'^2 d\omega' - u^2 d\omega].$$

Импульс сил за тот же промежуток времени будет, если назвать глубины погружения площадок $d\omega$ и $d\omega'$ через y и y' , соответственно,

$$\delta(y d\omega - y' d\omega') dt.$$

Таким образом, для целых сечений (ω и ω') теорема о количестве движения дает нам соотношение:

$$\frac{\delta}{g} dt \left[\int_{\omega'} u'^2 d\omega' - \int_{\omega} u^2 d\omega \right] = \delta dt \left[\int_{\omega} y d\omega - \int_{\omega'} y' d\omega' \right],$$

откуда, производя сокращения и вводя средние скорости по сечениям u и u' , получаем:

$$\frac{\alpha}{g} \left[\omega' u'^2 - \omega u^2 \right] = y_c \omega - y'_c \omega', \quad (21)$$

при чем мы обозначили глубины погружения центров тяжести сечений ω и ω' через y_c и y'_c и заменили $\int_{\omega'} u'^2 d\omega$ и $\int_{\omega} u^2 d\omega$ соответственно через $aa'v'^2$ и $aa'v^2$, где a считают равным 1,02—1,04 и выше.

Применим последнее соотношение к прямоугольному руслу постоянной ширины b ; тогда, называя глубины до скачка и после скачка, соответственно, через h_1 и h_2 , имеем:

$$\begin{aligned} \omega &= bh_1; \quad y_c = \frac{h_1}{2}; \quad hh_2 v' = bh_1 v; \\ \omega' &= bh_2; \quad y'_c = \frac{h_2}{2}; \quad v' = v \frac{h_1}{h_2}, \end{aligned}$$

а потому предыдущее соотношение примет вид:

$$\frac{a}{g} v^2 \left(\frac{h_1^2}{h_2} - h_1 \right) = \frac{h_1}{2} h_1 - \frac{h_2}{2} h_2,$$

откуда

$$\frac{av^2}{g} \cdot \frac{h_1}{h_2} [h_1 - h_2] = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2},$$

или

$$\frac{2av^2}{g} h_1 = (h_1 + h_2) \cdot h_2 = h_1 h_2 + h_2^2.$$

Из последнего соотношения находим:

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2av^2 h_1}{g}} = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8av^2}{gh_1}} - 1 \right],$$

беря перед корнем знак $+$ по смыслу задачи.

Заменяя, наконец, (v) через $\frac{q}{h_1}$, где q — количество воды, протекающее на единице ширины канала, окончательно имеем:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8aq^2}{gh_1^3}} - 1 \right]. \quad (22)$$

Легко вывести также, что обратно

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8aq^2}{gh_2^3}} - 1 \right]. \quad (23)$$

Глубины h_1 и h_2 называются, поэтому, взаимными.

§ 5. Задачи на неравномерное движение.

Задача № 1. Река имеет средний уклон $I = 0,0001$, среднюю ширину $b_0 = 100$ м. и среднюю бытовую глубину $h_0 = 2$ м. На реке построена плотина такой высоты, что глубина у плотины повысилась на 2 м. Требуется определить длину распространения подпора.

Решение 1-е. Принимаем русло в поперечном сечении прямоугольным. Задачу решаем по способу Дюпюи-Рюльманна. Считаем конец подпора там, где отношение превышения подпорной глубины над бытовой к последней составляет 0,01.

Для основного соотношения Дюпюи-Рюльманна

$$\frac{\alpha x}{h_0} = \Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right) - \Phi\left(\frac{z}{h_0}\right),$$

имеем:

$$\alpha = I = 0,0001;$$

$$h_0 = 2 \text{ м.};$$

$$Z = 2 \text{ м. и, следовательно, } \frac{Z}{h_0} = 1;$$

$$\frac{z}{h_0} = 0,01,$$

а потому

$$x = \frac{2}{0,0001} \left[\Phi(1) - \Phi(0,01) \right];$$

по таблице № 11 находим:

$$\Phi(1) = 2,284; \quad \Phi(0,01) = 0,0067,$$

а теперь

$$x = \frac{2(2,284 - 0,0067)}{0,0001} = \frac{2 \cdot 2,277}{0,0001} = 45540 \text{ м.} = 45,54 \text{ килом.}$$

Решение 2-е. Принимаем русло в поперечном сечении параболическим. Задачу решаем по способу Толькмитта. Так как, очевидно, что живые сечения реки ω должны быть приняты одинаковыми при решении задачи по обоим способам, то прежде всего находим наибольшую бытовую глубину для параболического русла; имеем:

$$\omega = b_0 h_0 = 2 \cdot 100 = 200 = \frac{2}{3} h'_0 b_0 = \frac{2 \cdot 100}{3} \cdot h'_0 = \frac{200}{3} h'_0,$$

откуда

$$h'_0 = 3 \text{ м.}$$

Для основного соотношения Толькмитта

$$\frac{\alpha x}{h_0} = \Psi(\eta_2) - \Psi(\eta_1),$$

имеем:

$$\alpha = I = 0,0001;$$

$$h_0 = h'_0 = 3;$$

$$\eta_2 = \frac{y_2}{h_0} = \frac{3 + 2}{3} = \frac{5}{3} = 1,66;$$

$$\eta_1 = \frac{y_1}{h_0} = \frac{3 + 0,01 \cdot 3}{3} = \frac{3,03}{3} = 1,01,$$

а потому

$$x = \frac{h_0}{\alpha} \left[\Psi(\eta_2) - \Psi(\eta_1) \right] = \frac{3}{0,0001} \left[\Psi(1,66) - \Psi(1,01) \right];$$

по таблице № 12 находим:

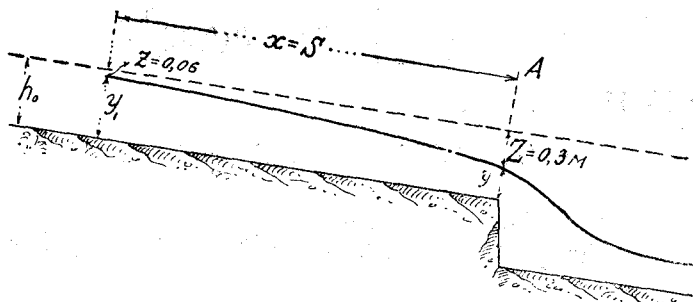
$$\Psi(1,66) = 1,582 \text{ (интерполированием);}$$

$$\Psi(1,01) = 0,074,$$

а теперь

$$x = \frac{3 [1,582 - 0,074]}{0,0001} = \frac{3 \cdot 1,508}{0,0001} = 45240 \text{ м.} = 45,24 \text{ килом.}$$

Задача № 2. Река со средним уклоном $I = 0,00016$ в меженью (низкую) воду имеет среднюю ширину $b_0 = 240$ м., а среднюю площадь поперечного сечения $\omega = 280$ м². От определенного поперечного сечения A вниз по реке предприняты землечерпательные работы, которые повели к тому, что у сечения A горизонт воды в реке пони-



Черт. 86.

зился на 0,3 м. Спрашивается, на каком расстоянии от сечения A вверх по реке понижение горизонта воды против нормального достигает еще 0,06 м.?

Решение 1-е. Профиль поперечного сечения реки принимаем параболическим; поэтому задачу решаем способом Толькмитта. Для основного соотношения

$$\frac{\alpha x}{h_0} = \Psi(\eta_2) - \Psi(\eta_1),$$

которое для кривых спада примет вид:

$$\frac{\alpha x}{h_0} = \Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_2),$$

имеем:

$$\alpha = I = 0,00016;$$

$$h_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{280}{240} = 1,75 \text{ м.};$$

$$\eta_2 = \frac{h_0 - 0,3}{h_0} \approx 0,829;$$

$$\eta_1 = \frac{h_0 - 0,06}{h_0} = 0,966,$$

а потому

$$x = \frac{h_0}{\alpha} \left[\Psi(0,966) - \Psi(0,829) \right];$$

по таблице № 12 находим:

$$\left. \begin{array}{l} \Psi(0,966) = 0,434 \\ \Psi(0,829) = 0,110 \end{array} \right\} \text{интерполированием,}$$

а теперь

$$x = \frac{1,75(0,434 - 0,110)}{0,00016} = \frac{1,75 \cdot 0,324}{0,00016} = 3540 \text{ м.} = 3,54 \text{ килом.}$$

Решение 2-е. Профиль поперечного сечения реки принимаем прямоугольным, поэтому задачу решаем способом Дюпюи-Рюльманна.

Для основного соотношения

$$\frac{\alpha x}{h_0} = \Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right) - \Phi\left(\frac{z}{h_0}\right),$$

имеем:

$$h_0 = \frac{\omega}{b_0} = \frac{280}{240} = 1,167;$$

$$Z = 0,3, \text{ а потому } \frac{Z}{h_0} = \frac{0,3}{1,167} = 0,257;$$

$$z = 0,06, \text{ " " } \frac{z}{h_0} = \frac{0,06}{1,167} = 0,0514;$$

по таблице № 11:

$$\Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right) = \Phi(0,257) = 0,9189;$$

$$\Phi\left(\frac{z}{h_0}\right) = \Phi(0,0514) = 0,5114,$$

а потому

$$x = \frac{h_0}{\alpha} \left[\Phi\left(\frac{Z}{h_0}\right) - \Phi\left(\frac{z}{h_0}\right) \right] = \frac{1,167}{0,00016} \cdot 0,408 = 2970 \text{ м} = 2,97 \text{ килом.}$$

Решение 3-е. Ввиду большого расхождения полученных результатов решений по способу Толькмитта и по способу Дюпюи-Рюльманна, решаем задачу еще по методу Бресса.

Для основного соотношения

$$\frac{\alpha S}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - \left(1 - \frac{2\alpha}{\lambda}\right) [f(\eta_2) - f(\eta_1)],$$

имеем:

$$h_0 = 1,167;$$

$$\eta_2 = \frac{h_0 - 0,3}{h_0} = \frac{1,167 - 0,3}{1,167} = \frac{0,867}{1,167} = 0,74;$$

$$\eta_1 = \frac{h_0 - 0,06}{h_0} = \frac{1,167 - 0,06}{1,167} = \frac{1,107}{1,167} = 0,95;$$

по таблице № 10 находим интерполированием:

$$f(\eta_1) = f(0,95) = 0,862;$$

$$f(\eta_2) = f(0,74) = 0,241.$$

Принимаем коэффициент шероховатости $\lambda = 0,025$, а тогда

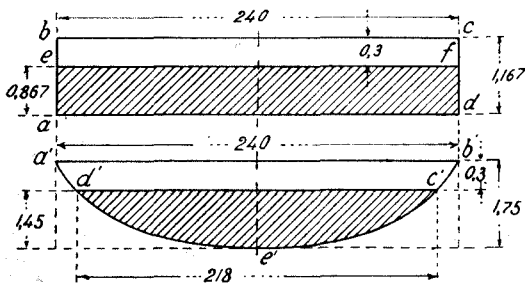
$$1 - \frac{2\alpha}{\lambda} = 1 - \frac{2,0,00016}{0,025} = 1 - \frac{0,00032}{0,025} = 1 - 0,0128 = 0,987,$$

и теперь

$$\begin{aligned} S &= \frac{1,167}{0,00016} [0,740 - 0,950 - 0,987 (0,241 - 0,862)] = \\ &= \frac{1,167}{0,00016} [-0,210 - 0,987 (-0,621)] = \frac{1,167}{0,00016} [0,613 - 0,210] = \\ &= \frac{1,167}{0,00016} \cdot 0,403 = 2940 \text{ м} = 2,94 \text{ килом.} \end{aligned}$$

Так как результат решения по Брессу почти совпадает с таковым же по Дюпюи-Рюльманну, то, очевидно, значительное отличие первого решения (по Толькмитту) от двух последних не есть случайное явление, а лежит в самом существе происходящих при сделанных предположе-

ниях явлений. В самом деле, на чертеже 87 показаны площади ($abcd$ и $a'b'e'$) поперечных сечений в водотоке при равномерном движении, а в виде заштрихованных площадок ($aejd$ и $d'c'e'$) — площади поперечных сечений водотока у сечения А (смотреть на черт. 86 вверх по течению), где произошло понижение свободной поверхности воды на 0,3 м. При рав-



Черт. 87.

номерном течении в обоих решениях площади поперечного сечения водотока $\omega = 280 \text{ м}^2$ и ширины $b_0 = 240 \text{ м}$ одинаковы, при чем $\frac{\omega}{b_0} = 1,167$. У се-

чения А при неравномерном течении для прямоугольного сечения ширина b_0 остается неизменной (240 м), а площадь $\omega_1 = 240 \times 0,867 = 208,1 \text{ м}^2$, и, таким образом, $\frac{\omega_1}{b_0} = \frac{208,1}{240} = 0,868$; при параболическом же

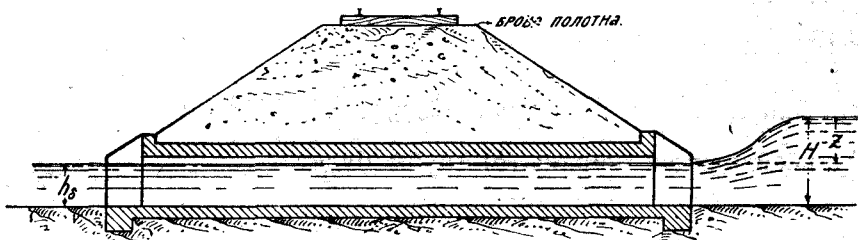
сечении, мы получаем глубину 1,45 м, а ширину $b = 240$. $\sqrt{\frac{1,45}{1,75}} = 218 \text{ м}$,

и, таким образом, $\omega_2 = 210 \text{ м}^2$ и $\frac{\omega_2}{b} = 0,965$. Отсюда следует, что при параболическом профиле русла у сечения А живое сечение несколько больше, следовательно, скорость протекания меньше, чем

при прямоугольном профиле, отношение же $\frac{\omega}{b}$, которое можно с известным приближением принять за гидравлический радиус, при параболическом профиле значительно больше, чем при прямоугольном. Так как теперь, тоже с известным приближением, $I = \frac{v^2}{C^2 R}$, то при параболическом профиле и свободная поверхность будет иметь меньший уклон при A , а благодаря этому, и расстояние до того сечения, в котором понижение уровня равно еще 0,06 м, будет больше, чем при прямоугольном профиле.

Таким образом, выяснение вопроса о том, какое из указанных решений считать более правильным, будет зависеть в каждом частном случае, от действительных местных особенностей ложа реки.

Задача № 3. Под насыпью железной дороги в балке (овраге) необходимо устроить трубу для пропуска ливневых вод в количестве $Q = 4,248 \frac{м^3}{сек}$ при бытовой глубине (когда насыпи нет) $h_0 = 1,02$ м. Определить отверстие трубы и подпор z .



Черт. 88.

Решение. При решении подобных задач приходится задаваться различными скоростями по дну, в зависимости от рода и укрепления русла; от донной скорости нетрудно перейти уже к средней скорости. Согласно норм Н. К. П. С. скорости эти таковы (см. табл. № 13):

Таблица № 13.

№№ по порядку	Грунт русла и его укрепление	Допускаемая скорость по дну в сек.		Соотв. средняя скорость в сек.	
		футах	метрах	сажен.	метрах
1	Плотный песок	3	0,922	0,538	1,148
2	Плотный глинистый грунт	5	1,524	0,880	1,878
3	Каменистый грунт, или укрепленный одиночной мостовкой	7	2,135	1,170	2,496
4	Скалистый, или укрепленный двойной мостовкой	10	3,05	1,630	3,478
5	Лоток из каменной кладки	14	4,27	2,228	4,754
6	Деревянный лоток, чугунные трубы .	20	6,134	3,110	6,636

Обыкновенно при решении поставленной задачи исходят из того, чтобы в трубе глубина воды была равна бытовой h_6 .

Пробуем выбрать донную скорость в трубе $v_0 = 10' = 3,05 \frac{м}{сек}$; тогда средняя скорость будет $v = 3,478 \frac{м}{сек}$.

При выбранной скорости критическая глубина h_k выразится так:

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{aq^2}{g}} = \frac{av^2}{g} = \frac{a \cdot 3,478^2}{9,81} = \frac{3,478^2}{9,81} = \frac{12,096}{9,81} = 1,23 м,$$

полагая $a = 1$; мы видим, что $h_k > h_6$, а потому, чтобы в трубе не возникло скачка воды, необходимо скорость уменьшить; выберем $v_0 = 7' = 2,135 \frac{м}{сек}$; тогда средняя скорость $v = 2,496 \frac{м}{сек}$; теперь

$$h_k = \frac{2,496^2}{9,81} \cong \frac{6,25}{9,81} \cong 0,636 м;$$

так как $h_k < h_6$, то мы можем скачка не бояться и задаться глубиной воды в трубе, одинаковой с бытовой. При средней скорости $v = 2,496 \frac{м}{сек}$ и глубине $h_6 = 1,02 м$, количество протекающей воды на

единице ширины трубы определяется в $q = 2,496 \times 1,02 = 2,546 \frac{м^3}{сек}$, а потому необходимая ширина (b) трубы будет

$$b = \frac{Q}{q} = \frac{4,248}{2,546} = 1,669 м.$$

Полная высота трубы определится так: правилами Н.К.П.С. требуется, чтобы от горизонта воды в трубе до пят свода было расстояние не менее $0,3 \text{ саж} = 0,64 м$ (при пролетах < 7 саж). Следовательно, полная высота трубы будет:

$$h_m = h_6 + 0,64 + \text{высота свода}.$$

Подпор воды перед трубой, полагая подходную к трубе скорость ничтожно малой, определится из соотношения

$$z = \frac{1}{\varphi^2} \frac{v^2}{2g},$$

где коэффициент φ зависит от устройства входа в трубу и принимается, обыкновенно, равным $0,82$; тогда:

$$z = \frac{1}{0,82^2} \frac{2,496^2}{2 \cdot 9,81} = 0,475 м.,$$

и, таким образом, полная глубина перед трубой будет

$$H = 1,02 + 0,475 = 1,495 м.$$

По нормам Н. К. П. С. бровка полотна железной дороги должна находиться от горизонта воды на расстоянии, не меньшем $0,5 \text{ саж} = 1,0668 \text{ м}$. Если это условие не выполняется, необходимо уменьшить скорость в трубе, что может повести к очень широким трубам, неудобным для выполнения; в таких случаях приходится вообще отказываться от труб и устраивать вместо них через балки мостики.

Задача № 4. Решить вопрос о том, что перед нами: обыкновенная спокойная речка или поток, если средняя ширина речки $b = 3 \text{ м}$, средняя глубина $h = 0,4 \text{ м}$, а расход в ней $Q = 2,4 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}$.

Решение. Вопрос решается на основании предыдущего определением величины отношения $\frac{2a}{\lambda} \cong \frac{2I}{\lambda} = \frac{v^2}{gR}$, так как при $a < \frac{\lambda}{2}$ будем иметь спокойную речку, а при $a > \frac{\lambda}{2}$ — поток. В нашем случае, предполагая поперечное сечение водотока близким к прямоугольному, имеем его площадь (ω):

$$\omega = b \times h = 3 \times 0,4 = 1,2 \text{ м}^2;$$

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{2,4}{1,2} = 2 \frac{\text{м}}{\text{сек}};$$

$$R = \frac{\omega}{P} = \frac{1,2}{b + 2h} = \frac{1,2}{3,8} = 0,316 \text{ м},$$

а потому

$$\frac{2I}{\lambda} = \frac{v^2}{gR} = \frac{2^2}{9,81 \cdot 0,316} = 1,38;$$

и так как

$$\frac{2I}{\lambda} > 1,$$

то перед нами поток (бурная речка).

Задача № 5. В потоке предыдущей задачи поставлена на дне перегородка; спрашивается, какой высоты может образоваться прыжок воды перед этой перегородкой.

Решение. Задача решается по известному уже соотношению:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8aq^2}{gh_1^3}} - 1 \right].$$

В нашем случае

$$h_1 = 0,4 \text{ м}; \quad q = \frac{Q}{b} = \frac{2,4}{3} = 0,8 \text{ м}^3;$$

принимаем $a = 1$; тогда имеем:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8aq^2}{gh_1^3}} - 1 \right] = \frac{0,4}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8 \cdot 0,8^2}{9,81 \cdot 0,4^3}} - 1 \right] = 0,405 \text{ м},$$

и, таким образом,

$$h_2 - h_1 = 0,405 - 0,400 = 0,005 \text{ м.}$$

Такой небольшой скачок получился потому, что наш водоток является сравнительно слабо выраженным потоком: $\frac{2I}{\lambda}$ близко к единице.

Для другого примера, когда ширина потока $b = 1,2 \text{ м}$, средняя глубина $h = 0,24 \text{ м}$ и расход $Q = 1,2 \frac{\text{м}^3}{\text{сек.}}$, мы имеем:

$$\omega = b \cdot h = 1,2 \times 0,24 = 0,288 \text{ м}^2;$$

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{1,2}{0,288} = 4,16 \frac{\text{м}}{\text{сек.}};$$

$$R = \frac{\omega}{P} = \frac{\omega}{b + 2h} = \frac{0,288}{1,2 + 0,48} = \frac{0,288}{1,68} = 0,171,$$

а потому

$$\frac{2I}{\lambda} = \frac{v^2}{gR} = \frac{17,3}{9,81 \cdot 0,171} = 10,36 > 1;$$

теперь, так как

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{1,2}{1,2} = 1,$$

то

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8aq^2}{gh_1^3}} - 1 \right] = \frac{0,24}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8}{9,81 \cdot 0,24^3}} - 1 \right] = \\ &= \frac{0,24}{2} [\sqrt{1 + 59,26} - 1] = 0,12 \cdot 6,76 = 0,81 \text{ м.} \end{aligned}$$

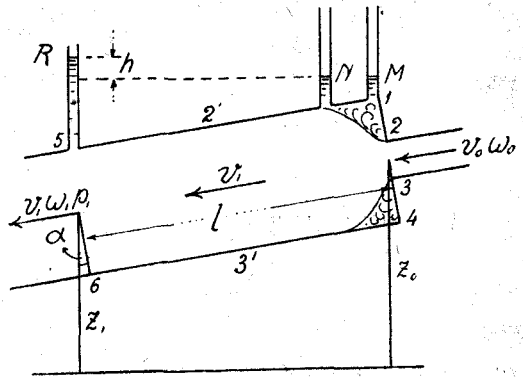
ГЛАВА VI.

Течение установившееся, но быстро меняющееся.

§ 1. Принцип Борда-Карно.

Представим себе, что имеем трубопровод, у которого сечение внезапно меняется из узкого в широкое. Вызываемое этим изменением сечения уменьшение скорости (с v_0 на v_1 , при чем по закону сплошности движения $v_1 = \frac{\omega_0}{\omega_1} v_0$) сопровождается значительной потерей

в энергии, которая не может быть определена обычными для потери от трения соотношениями. Такого рода явление, сопровождающееся образованием водоворотов в пространстве, ограниченном поверхностью 232'3', носит название гидравлического удара, и может быть исследовано, как это сделал Борда, с помощью известной теоремы: „приращение количества движения по какому-либо направлению равно сумме импульсов сил, действующих по этому направлению“; при этом делается допущение, что гидродинамическое давление около



Черт. 90.

стенки 1234 равно гидродинамическому давлению в сечении 23, в каком случае уровни в пьезометрах M и N должны быть одинаковы. Применяя теперь вышеуказанную теорему, имеем, очевидно, для приращения количества движения за время dt выражение:

$$\frac{\delta \omega_1 v_1^2 dt}{g} - \frac{\delta \omega_0 v_0^2 dt}{g} = \frac{\delta \omega_1 v_1 dt}{g} (v_1 - v_0),$$

так как массы количеств воды, проходящей за время dt через сечения ω_0 и ω_1 , одинаковы, т. е.

$$\frac{\delta \omega_1 v_1 dt}{g} = \frac{\delta \omega_0 v_0 dt}{g}.$$

Что касается импульса сил, то таковой складывается из импульса давления и импульса силы тяжести; первый из них, очевидно, будет:

$$\omega_1 (p_0 - p_1) dt,$$

а проекция второго на ось трубопровода выразится как:

$$\delta \omega_1 l dt \cos \alpha = \delta \omega_1 (z_0 - z_1) dt.$$

Таким образом, согласно теореме о количестве движения:

$$\frac{\delta \omega_1 v_1 dt}{g} (v_1 - v_0) = \omega_1 (p_0 - p_1) dt + \delta \omega_1 (z_0 - z_1) dt,$$

откуда, по сокращении и делении на δ , имеем:

$$\frac{(v_1 - v_0) v_1}{g} = \frac{p_0}{\delta} - \frac{p_1}{\delta} + z_0 - z_1;$$

но, так как

$$(v_1 - v_0) v_1 = \frac{v_1^2 - v_0^2 + v_0^2 - 2v_0 v_1 + v_1^2}{2} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} + \frac{(v_0 - v_1)^2}{2},$$

то предыдущее уравнение принимает вид:

$$\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} + \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} = \frac{p_0}{\delta} - \frac{p_1}{\delta} + z_0 - z_1,$$

или

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\delta} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\delta} + z_1 + \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g}.$$

Согласно исправленного уравнения Д. Бернулли

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\delta} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\delta} + z_1 + h_w,$$

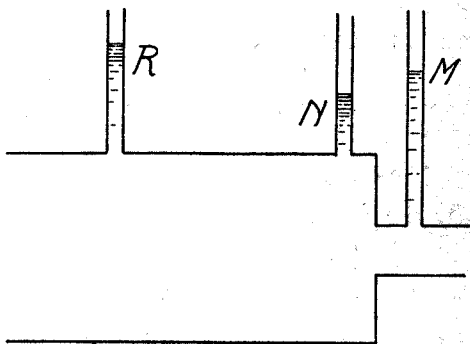
очевидно, потеря на гидравлический удар выразится как:

$$h_w = \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g}. \quad (1)$$

Ввиду того, что $(v_0 - v_1)$ представляет из себя потерянную скорость, найденное соотношение (закон или принцип Борда-Карно) можно формулировать так: высота, потерянная на удар, равна высоте потерянной скорости.

Принцип Борда, имеющий в практике большое применение, выведен, однако, со следующими допущениями: 1) в количество движения введена средняя скорость, между тем, очевидно, необходимо ввести поправочный коэффициент (α), который для трубопроводов с шероховатыми стенками принимают равным 1,036 и выше; 2) принято, что скорость

меняется внезапно вместе с сечением, что, конечно, не отвечает действительности; 3) предположено, что у кольцевой стенки 1234 давление p равно такому же (p_0) в сечении 23; в действительности, по опытам Mises'a, давление $p < p_0$ и, потому, пьезометрическая высота N меньше, чем в пьезометре M ; заметим кстати, что наклон трубопровода не влияет на потерю на удар: явление протекает совершенно независимо от того, наклонен ли трубопровод, как на предыдущем чертеже, или горизонтален, как на прилагаемом.



Черт. 91.

Если принять во внимание указание Mises'a¹⁾, то потерю на удар можно вывести следующим образом: из предыдущего имеем:

$$\frac{\delta \omega_1 v_1 dt}{g} (v_1 - v_0) = [\omega_0 p_0 + (\omega_1 - \omega_0) p - \omega_1 p_1] dt + \delta \omega_1 (z_0 - z_1) dt = \\ = [\omega_0 p_0 + (\omega_1 - \omega_0) p - \omega_1 p_1] dt + [\delta \omega_1 (z_0 - z_1) + \delta \omega_0 z_0 - \delta \omega_0 z_0] dt,$$

откуда

$$\frac{\delta}{g} \omega_1 v_1 (v_0 - v_1) = \omega_1 (p_1 + \delta z_1) - \omega_0 (p_0 + \delta z_0) - (\omega_1 - \omega_0) (p + \delta z_0),$$

или, принимая во внимание, что для горизонтальной трубы $z_0 = z$,

$$\omega_1 \frac{v_0 v_1 - v_1^2}{g} = \omega_1 \left[\frac{p_1}{\delta} + z_1 - \left(\frac{p}{\delta} + z \right) \right] - \omega_0 \left[\frac{p_0}{\delta} + z_0 - \left(\frac{p}{\delta} + z \right) \right].$$

Очевидно, разность уровней в пьезометрах M и N есть

$$h' = \left(\frac{p_0}{\delta} + z_0 \right) - \left(\frac{p}{\delta} + z \right),$$

а потому

$$\omega_1 \frac{v_0 v_1 - v_1^2}{g} = \omega_1 \left\{ \frac{p_1}{\delta} + z_1 - \left(\frac{p}{\delta} + z \right) - \left[\left(\frac{p_0}{\delta} + z_0 \right) - \left(\frac{p}{\delta} + z \right) \right] + h' \right\} - \omega_0 h' = \\ = \omega_1 \left[\frac{p_1}{\delta} + z_1 - \left(\frac{p_0}{\delta} + z_0 \right) \right] + h' (\omega_1 - \omega_0),$$

или, разделив обе части на ω_1 ,

$$\frac{v_0 v_1 - v_1^2}{g} = \frac{p_1}{\delta} + z_1 - \left(\frac{p_0}{\delta} + z_0 \right) + h' \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right).$$

¹⁾ R. Mises. Elemente der technischen Hydromechanik. Teil. 1. 1914 г., стр. 168 и след.

Наконец, так как

$$\frac{v_0 v_1 - v_1^2}{g} = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g} - \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g},$$

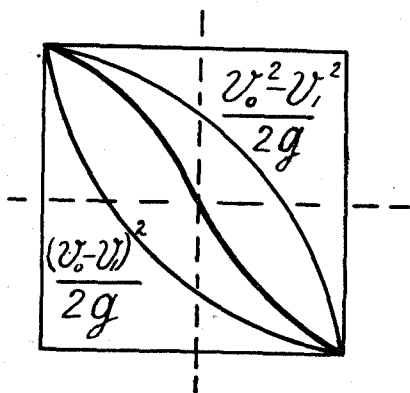
то окончательно имеем

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\delta} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\delta} + z_1 + \left[\frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} + h' \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) \right].$$

Сравнение последнего уравнения с исправленным уравнением Д. Бернулли дает

$$h_w = \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} + h' \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right). \quad (2)$$

Для окончательного выяснения второго члена этой формулы необходимо обратиться к опытным данным. Для этой цели особенно пригодны результаты опытов инж. Баера (Baer¹), из которых следует, что формула Борда дает для потери на удар нижний предел, а выражение $h'_w = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g}$ — верхний предел. По этим двум формулам можно вычертить две предельные кривые зависимости h_w от отношения площадей $\frac{\omega_0}{\omega_1}$. Как видно из прилагаемого чертежа, при $\frac{\omega_0}{\omega_1} = 0$ оба пре-



Черт. 92.

дела совпадают; но при $\frac{\omega_0}{\omega_1} = 0$ предыдущая формула дает

$$h''_w = \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} + h';$$

приравнявая, поэтому, h'_w и h''_w , получим:

$$h' = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g} - \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} = \frac{v_1(v_0 - v_1)}{g},$$

а потому

$$h_w = \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} + \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) \frac{v_1(v_0 - v_1)}{g}.$$

Обозначая теперь $\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{v_1}{v_0}$ через x , имеем $v_1 = v_0 x$ и

$$\begin{aligned} h_w &= \frac{[v_0(1-x)]^2}{2g} + (1-x) \frac{xv_0(v_0 - xv_0)}{g} = \frac{v_0^2}{2g} (1-x)^2 (1+2x) = \\ &= \frac{v_0^2}{2g} (1 - 3x^2 + 2x^3); \end{aligned}$$

¹) H. Baer. Versuche über hydraulische Stossverluste. Dingler's Polytechnisches Journal. Band 322, Heft 12.

или в окончательной форме

$$h_w = \frac{v_0^2}{2g} \left[1 + 2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^3 - 3 \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 \right] = \frac{v_0^2}{2g} \left[1 + 2 \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^3 - 3 \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Мы получили формулу Mises'a, графически изображаемую синусообразной кривой и определяющую потерю на удар с достаточной для практики точностью.

Рассматриваемое явление удара сопровождается, конечно, и изменением давления. Очевидно, само собой, что при увеличении сечения трубопровода, когда уменьшается скорость течения, давление, определяемое пьезометрической высотой, должно увеличиваться. Это увеличение давления при внезапном увеличении сечения может быть вычислено или по формуле Борда, или по формуле Mises'a. В первом случае, из соотношения:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\delta} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\delta} + z_1 + \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g}$$

имеем

$$h = \left(\frac{p_1}{\delta} + z_1 \right) - \left(\frac{p_0}{\delta} + z_0 \right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{(v_0 - v_1)^2}{2g} = \frac{v_1(v_0 - v_1)}{g} > 0. \quad (4)$$

Во втором случае из формулы

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\delta} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\delta} + z_1 + \frac{v_0^2}{2g} \left[1 + 2 \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^3 - 3 \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 \right]$$

имеем

$$\begin{aligned} h &= \left(\frac{p_1}{\delta} + z_1 \right) - \left(\frac{p_0}{\delta} + z_0 \right) = \frac{v_0^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 - 1 - 2 \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^3 + 3 \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{2v_0^2}{2g} \left[\left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 \left(1 - \frac{v_1}{v_0} \right) \right] = \frac{v_1^2}{g} \left(1 - \frac{v_1}{v_0} \right) > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

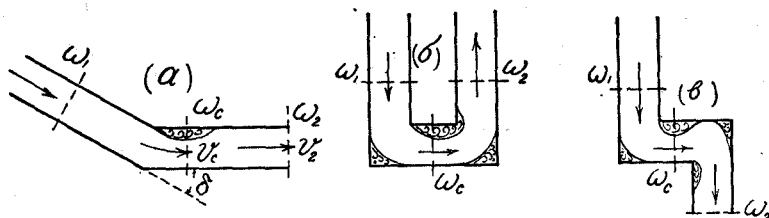
Очевидно также, что формула Борда дает несколько преувеличенное значение повышения давления.

§ 2. Применение принципа Борда к определению местных сопротивлений в трубах.

На принципе Борда основывается определение потерь в напоре при целом ряде других, так называемых, местных сопротивлений в трубопроводах.

Резкое изменение направления трубопровода. При резком изменении направления трубопровода происходит резкое изме-

нение поперечного сечения водяного потока (см. черт. 93, на котором заштрихованные площадки показывают места воды, не участвующей (мертвая вода) в общем движении движущегося водяного потока даже тогда, когда $\omega_1 = \omega_2$), при чем оказывается, что главная часть потери обуславливается резким расширением наиболее суженного сечения ω_c в нормальное сечение трубы ω_2 , между тем как само изменение направления вызывает, сравнительно, малую потерю.



Черт. 93.

Называя поперечные сечения водотока в наиболее суженном месте и далее в нормальном сечении, равном сечению трубы, соответственно, через ω_c и ω_2 , а скорости в этих сечениях, соответственно, через v_c и v_2 , очевидно, получим по принципу Бorda:

$$h_w = \frac{(v_c - v_2)^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{v_c}{v_2} - 1 \right)^2 = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{\omega_2}{\omega_c} - 1 \right)^2 = \xi \frac{v_2^2}{2g}, \quad (6)$$

имея ввиду, что, по закону сплошности движения, $v_c \omega_c = v_2 \omega_2$, и называя $\left(\frac{\omega_2}{\omega_c} - 1 \right)^2$ через ξ ; нетрудно видеть из самого процесса движения воды, что этот член $\left(\frac{\omega_2}{\omega_c} - 1 \right)^2$ или ξ будет зависеть от угла (δ) изменения направления трубопровода, так как очевидно, чем больше этот угол, тем меньше будет ω_c и тем больше будет скорость v_c . Действительно, по опытам Вейсбаха¹⁾ (Weisbach—1875)

$$\xi = 0,9457 \sin^2 \frac{\delta}{2} + 2,047 \sin^4 \frac{\delta}{2}. \quad (7)$$

При двойном изломе трубы (черт. 93б), если только второй излом происходит в той же плоскости, что и первый, потеря напора (ξ) та же, что и при одинарном изломе; если же второй излом происходит в направлении, перпендикулярном первому излому, то потеря напора увеличивается в $1\frac{1}{2}$ раза; если, наконец, второй излом, хотя и происходит в той же плоскости, что и первый, но в направлении, прямо противоположном первому (черт. 93в), то потеря в напоре увеличивается в 2 раза.

¹⁾ Weisbach. Lehrbuch der Technischen Mechanik. 1875.

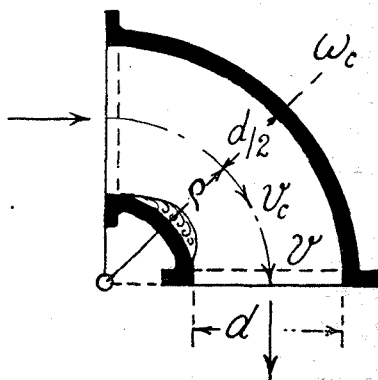
Вейсбах, кроме того, нашел, что в трубах с меньшим диаметром потеря в напоре (ξ) больше, чем в трубах большего диаметра; другие гидравлики¹⁾ более позднего времени (Montanoni—1893 г., A. W. Brightmoore—1907) этого не подтверждают, а утверждают на основании своих опытов даже обратное.

Плавное изменение направления трубопровода. Несмотря на плавное изменение направления трубопровода, в этом случае также имеется пространство, в котором находящаяся вода не участвует в общем движении потока, и сужение сечения водотока (черт. 94, ω_c). Нетрудно видеть, что и в данном случае потерю в напоре можно выразить по принципу Борда:

$$h_w = \frac{(v_c - v)^2}{2g} = \frac{v^2 (\frac{\omega}{\omega_c} - 1)^2}{2g} = \xi \frac{v^2}{2g},$$

при чем по опытам Вейсбаха, для круглых труб при угле отклонения $\delta = 90^\circ$,

$$\xi = 0,131 + 1,847 \left(\frac{d}{2q} \right)^{3,5}. \quad (8)$$

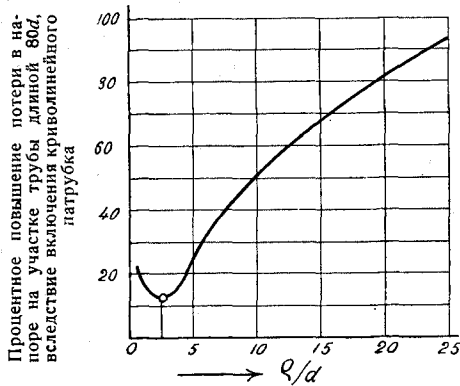


Черт. 94.

Вейсбах, далее, нашел, что увеличение угла отклонения больше 90° , равно как и другие факторы, влияют очень незначительно на увеличение потери (ξ) в напоре. Между тем, новые опыты, произведенные Freeman'ом (1889 г.), Williams'ом, Hibell'ем и Frenkell'ем (1902 г.) с трубами диаметром $d = 0,3—0,76$ м. и Brightmoore'ом (1907 г.) с трубами диаметром 0,076 и 0,102 м, показали, что формула Вейсбаха верна только внутри границ его опытов и только при малых радиусах кривизны. Вообще же потеря в напоре есть величина переменная, не ограничивающаяся влиянием только криволинейного патрубка (черт. 94). Оказывается, что вода, принявшая в этом патрубке еще более беспокойное состояние, чем когда она только подходила к нему, должна за ним в прямолинейной трубе протечь еще некоторый путь, чтобы прийти в более или менее нормальное состояние. Они измеряли, поэтому, сопротивление, вызванное включением криволинейного патрубка (90°) в трубу диаметра d , на участке длиной $80d$ после патрубка и сравнивали это сопротивление с сопротивлением для прямой трубы той же длины. Откладывая, затем, по оси абсцисс радиусы кривизны, отнесенные к диаметру трубы, а по оси ординат потери в напоре, вызванные включением криволинейного патрубка, в % потерь в напоре на прямой трубе указанной длины, получили кривую изменения этой потери с изменением $\frac{q}{d}$; при

¹⁾ Forchheimer Ph. Hydraulik. 1914 г., стр. 242.

этом оказывается, что наименьшая потеря, согласно исследованиям Williams'a, Hibell'я и Frenkell'я будет при $q=2,55d$, а согласно исследованиям Brightmoore'a при $q=3d-4d$, при чем вызванная патрубком потеря напора на участке трубы длиной $80d$ составляет 13% сопротивления прямого участка трубы равной длины¹⁾. Таким образом, если в каком-либо случае потерю в напоре в трубе определяют по соотношению: $h_w = 0,025 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$, то потеря, вызываемая криволинейным патрубком, имеющим $q = 2,55d$, будет: $0,025 \cdot 80 \cdot 0,13 \frac{v^2}{2g} = 0,26 \frac{v^2}{2g}$, поэтому коэффициент сопротивления для этого патрубка $\xi = 0,26$.

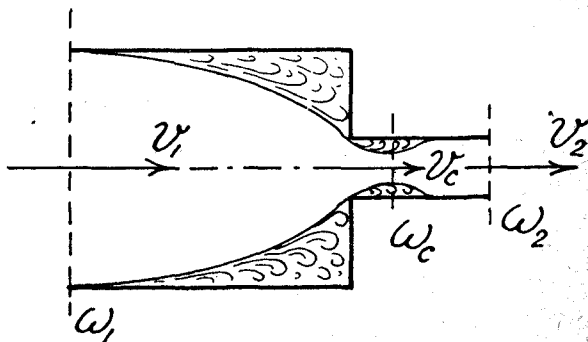


Черт. 95.

с помощью приведенной диаграммы находим для него коэффициент сопротивления $\xi = 0,025 \cdot 80 \cdot 0,80 = 1,6$.

Резкое сужение трубы. Уже по прилагаемому чертежу видно, что при переходе воды из широкой трубы в узкую должно произойти резкое сужение сечения (ω_c) водотока, по сравнению с сечением (ω_2) узкой части трубы, и, вместе с тем, увеличение скорости (v_c) течения, а далее такое же резкое увеличение сечения до ω_2 и соответствующее уменьшение скорости до v_2 .

Поэтому, согласно принципа Бorda,



Черт. 96.

$$h_w = \frac{(v_c - v_2)^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{v_c}{v_2} - 1 \right)^2 = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{\omega_2}{\omega_c} - 1 \right)^2 = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{\omega_2}{k\omega_2} - 1 \right)^2 = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{1}{k} - 1 \right)^2 = \xi \frac{v_2^2}{2g},$$

при чем, очевидно, коэффициент k и, следовательно, ξ , зависят от отношения площади сечения ω_1 к ω_2 . Действительно, по опытам Вейсбаха:

$$\xi = 0,5 \quad 0,42 \quad 0,33 \quad 0,25 \quad 0,15,$$

¹⁾ D. Banki. Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten. 1921, стр. 175 и след.

если, соответственно,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 0,6 \quad 0,8.$$

Точно также потеря в напоре при проходе через диафрагму, вставляемую в трубу, может быть выражена аналогичным соотношением:

$$h_w = \xi \frac{v^2}{2g},$$

при чем коэффициент ξ , очевидно, зависит от отношения площадей сечений диафрагменного отверстия (ω_d) и трубы (ω). По опытам Вейсбаха оказывается:

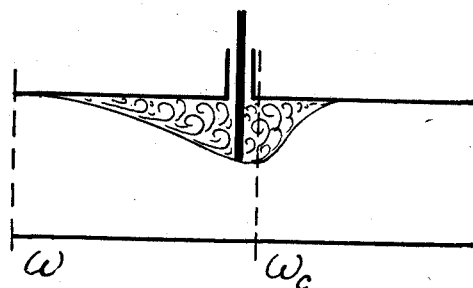
если $\xi = 1067 \quad 110,8 \quad 9,01 \quad 1,191 \quad 0,121,$

$$\frac{\omega_d}{\omega} = 0,046 \quad 0,1406 \quad 0,3814 \quad 0,6511 \quad 0,8598.$$

Сопротивления в органах, запирающих и уменьшающих сечения труб. Принцип Борда может быть применен также и к определению потерь в напоре при проходе воды через органы, запирающие и уменьшающие сечения труб, как-то: задвижки, дроссельные клапана, краны и проч. Легко можно убедиться, что во всех этих случаях потери в напоре могут быть также выражены формулой общего вида

$$h_w = \xi \frac{v^2}{2g},$$

и только коэффициент ξ будет меняться, в зависимости от рода запирающего устройства. В дальнейшем приводятся значения этого коэффициента ξ , главным образом, по Вейсбаху¹⁾.

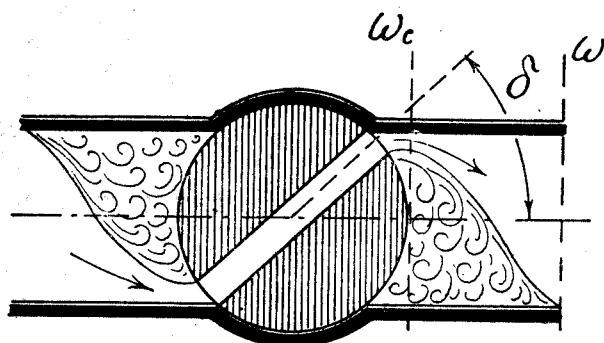


Черт. 98.

Задвижки.

$\frac{\omega_c}{\omega} = 1$	0,948	0,856	0,740
$\xi = 0$	0,07	0,26	0,81
$\frac{\omega_c}{\omega} = 0,609$	0,466	0,315	0,159
$\xi = 2,06$	5,52	17,0	97,8.

¹⁾ Из специальных статей о сопротивлении водопроводных клапанов укажем на статью: Б. А. Бахметев и М. В. Кирпичев. „О сопротивлении водопроводных клапанов“. Известия С.-Петербург. Политехнического Института. 1908 г., т. X.

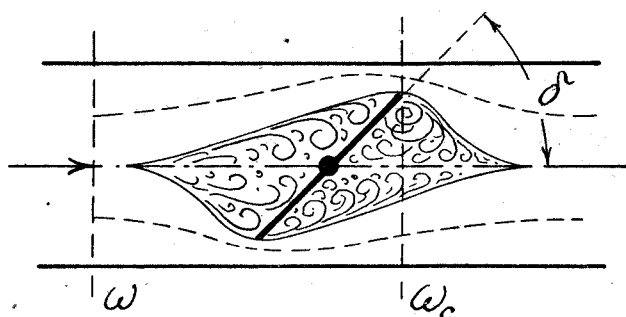


Краны.

Черт. 99.

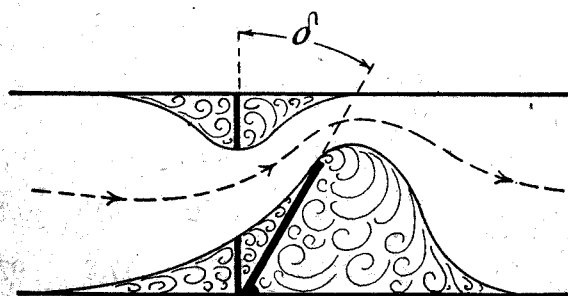
$\delta^\circ =$	5	10	15	20	30	40	50	60	65
$\frac{\omega_c}{\omega} =$	0,93	0,85	0,77	0,69	0,53	0,38	0,25	0,14	0,09
$\xi =$	0,05	0,29	0,75	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486

Дроссельные
клапана.



Черт. 100.

$\delta^\circ =$	5	10	15	20	30	40	50	60	70	90
$\xi =$	0,24	0,52	0,90	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	∞



Клапана.

Черт. 101.

$\delta^\circ =$	15	20	30	40	50	60	70
$\xi =$	90	62	30	14	6,6	3,2	1,7

Тарельчатые клапана.

По Бах'у (Bach, 1884):

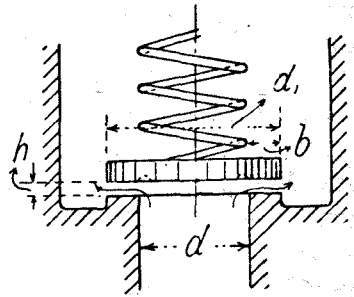
$$\xi = \alpha + \beta \left(\frac{d}{h} \right)^2,$$

при чем $h = 0,1d - 0,25d$;

$$b = 0,1d - 0,25d;$$

$$\alpha = 0,55 + 4 \frac{b - 0,1d}{d};$$

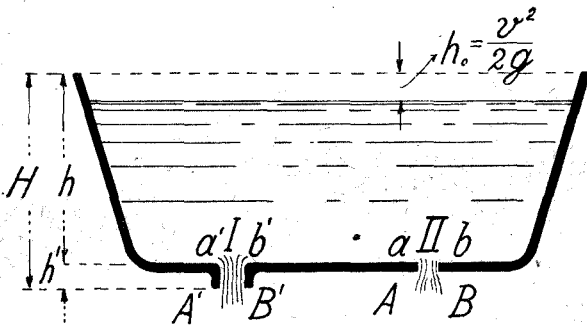
$$\beta = 0,15 - 0,16.$$



Черт. 102.

§ 3. Истечение жидкостей из отверстий и насадок.

Сжатие струи. Пусть в дне сосуда проделано отверстие (черт. 103). Если оно имеет форму I, то оно называется „отверстием с насадкой“, и, если насадка достаточно закруглена по краям, то



Черт. 103.

вытекающая струя заполняет все отверстие и имеет правильную цилиндрическую форму. Когда отверстие имеет форму II, то оно называется „отверстием в тонкой стенке“, и при истечении из такого отверстия струя довольно сильно сжимается; так, например, для круглого сечения диаметр струи в сжатом месте

$d \cong 0,8d_0$, где d_0 диаметр самого отверстия, при чем наиболее сжатое сечение находится на расстоянии $\frac{d_0}{2}$ от начала отверстия. Явление сжатия струи

объясняется тем, что в отверстие устремляются элементы жидкости, не только находящиеся над отверстием, но и находящиеся сбоку его, благодаря чему и образуются боковые струйки, вызывающие сжатие струи; хотя горизонтальные составляющие сил инерции отдельных частиц при этом попарно уничтожаются, но это явление все же ведет к потере энергии; потеря эта носит название потери в насадке, независимо от того, имеется ли действительно отверстие с насадкой, или имеем только отверстие в тонкой стенке. При рассматриваемом истечении в сечениях ab и $a'b'$ давление жидкости имеет довольно неправильный характер; скорости непараллельны и неравны между собой; наоборот, в сечениях AB и $A'B'$ скорости параллельны и распределены по сечению почти равномерно. Это обстоятельство побуждает

считать средней скоростью истечения ту скорость, которая имеется в конечном сечении насадки и в наиболее сжатом сечении струи при истечении из отверстия в тонкой стенке.

Скорость истечения. Пусть уровень жидкости в сосуде остается постоянным; обозначим через h его расстояние от дна сосуда, через h' — расстояние наиболее сжатого сечения от того же дна, пусть v_0 — средняя скорость на свободной поверхности жидкости, v — средняя скорость в сжатом сечении струи при истечении из отверстия. Принимая за основную плоскость — плоскость, проходящую через сжатое сечение, имеем по уравнению Д. Бернулли:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\delta} + 0 + h_w = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\delta} + h + h'.$$

Если теперь ω_0 и ω — площади поперечного сечения сосуда у свободной поверхности жидкости и сжатого сечения струи, то по закону сплошности движения $v_0 = v \frac{\omega}{\omega_0}$, и предыдущее соотношение примет вид (если еще положить $h_w = \xi \frac{v^2}{2g}$):

$$\frac{v^2}{2g} + \xi \frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left[1 + \xi - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] = h + h' + \frac{p_0 - p}{\delta},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2g \left(h + h' + \frac{p_0 - p}{\delta} \right)}{\xi + \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}}. \quad (9)$$

Величиной $\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$, обыкновенно очень небольшой, часто пренебрегают (см. выше Главу II, задачу № 3); если же в предыдущем соотношении положить $\frac{v_0^2}{2g} = h_0$ и сумму $h_0 + h + h'$ обозначить через H , то будем иметь еще

$$v = \sqrt{\frac{2g \left(H + \frac{p_0 - p}{\delta} \right)}{\xi + 1}},$$

а если, наконец, с достаточной для практики точностью, положить $p = p_0 =$ атмосферному давлению, то окончательно

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (10)$$

Так как в данном случае $h_w = \xi \frac{v^2}{2g}$ представляет исключительно потерю в насадке, то коэффициенту ξ дают название „коэффициента сопротивления в насадке“; этот коэффициент всегда больше нуля и достигает иногда значения $\xi = 0,5$. Коэффициент φ называется „коэффициентом скорости“ и, очевидно, что $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ всегда меньше единицы.

В практике употребляются насадки разнообразных форм: на прилагаемом чертеже (чертеж 104) приведены наиболее характерные типы их. Очевидно, что коэффициент сопротивления насадки ξ сильно зависит от ее формы; при этом необходимо еще отметить, что коэффициент этот не является постоянной величиной, а меняется в зависимости от величины напора; так, например, для насадки с очень большим закруглением (104ж) имеем:

$h = 0,161$	$0,292$	$0,374$	$0,46 \text{ м.}$
$\xi = 0,1191$	$0,1161$	$0,1150$	$0,1123.$

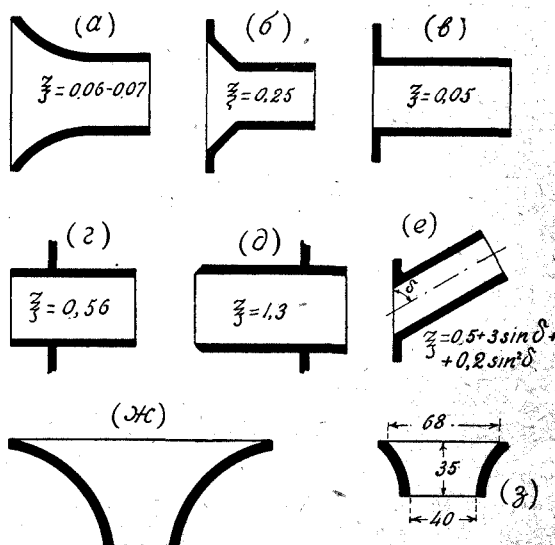
Для насадки обычного типа с размерами по чертежу 104з имеем по Weisbach'y:

$h = 0,02$	$0,5$	$3,5$	17	103 м.
$\xi = 0,087$	$0,07$	$0,052$	$0,012$	$0,012$
$\varphi = 0,959$	$0,967$	$0,975$	$0,994$	$0,994.$

Из приведенных данных видно, что скоростной коэффициент φ меняется в гораздо меньшей степени, чем коэффициент сопротивления насадки ξ ; в пределах, встречающихся на практике ($h = 0,5—3,5 \text{ м.}$), можно принимать $\varphi = 0,96—0,97$. Для больших напоров лучше вычислять ξ по формуле

$$\xi = 0,02 + \frac{0,042}{\sqrt[4]{h}}, \quad (11)$$

которая дает значения ξ , близкие к действительности.



Черт. 104.

Для отверстий в тонкой стенке коэффициент сопротивления насадки берется в пределах $\xi = 0,14 - 0,171$, при чем для больших отверстий надо брать меньшие значения ξ .

Расход жидкости через обыкновенные отверстия. Обозначая площадь отверстия в стенке через ω , а площадь сечения струи в сжатом месте через ω_c , очевидно, можем написать

$$\omega_c = a\omega,$$

где коэффициент a носит названия „коэффициента сужения или сжатия“, или еще „коэффициента контракции“. Расход жидкости через отверстие, поэтому, может быть выражен, как

$$Q = \omega_c v = a\varphi\omega\sqrt{2gH} = \mu\omega\sqrt{2gH},$$

при чем коэффициент $\mu = a\varphi$ называется „коэффициентом расхода“; последний коэффициент, как представляющий из себя произведение двух коэффициентов a и φ , очевидно изменяется вместе с изменением этих коэффициентов, а, следовательно, меняется с изменением напора и величины отверстия; например, для отверстия в тонкой стенке при среднем напоре, когда можно принять $\varphi = 0,97$ ($\xi = 0,065$), а $a = 0,64$, коэффициент $\mu = 0,62$. По Grascovy, на основании опытов Weisbach'a, можно вычислять этот коэффициент для круглых отверстий в тонкой боковой стенке сосуда (наши предыдущие рассуждения, очевидно, применимы и к отверстиям в боковых стенках сосуда, для которых, на основании изложенного в Главе II, можно принимать за скорость истечения скорость в центре отверстия) по формуле

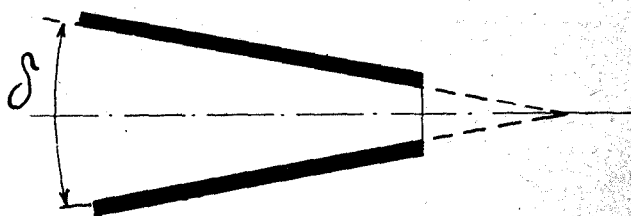
$$\mu = 0,6 + \frac{0,06}{0,5 + \sqrt{h}} - 0,7d, \quad (12)$$

где d — диаметр отверстия. В нижеследующей таблице приведены некоторые значения коэффициентов расхода по Н. Smith'у при истечении через отверстия в тонкой боковой стенке круглого и квадратного сечения.

Таблица № 14.

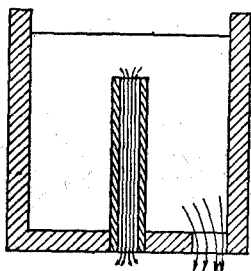
Напор над центром отверстия в метрах	Диаметр круглого отверстия в метрах					Сторона квадратного отверстия в метрах				
	0,015	0,030	0,060	0,180	0,300	0,015	0,030	0,060	0,180	0,300
0,15	0,627	0,615	0,600	0,592	—	0,633	0,619	0,605	0,597	—
0,30	0,617	0,608	0,600	0,595	0,591	0,622	0,613	0,605	0,601	0,599
0,60	0,610	0,604	0,599	0,597	0,595	0,615	0,608	0,605	0,604	0,602
0,90	0,606	0,603	0,599	0,597	0,597	0,612	0,607	0,605	0,604	0,603
1,20	0,605	0,602	0,599	0,598	0,596	0,610	0,606	0,605	0,603	0,602
2,40	0,603	0,600	0,598	0,596	0,596	0,608	0,605	0,604	0,603	0,602
3,00	0,601	0,598	0,597	0,596	0,595	0,606	0,604	0,603	0,602	0,601
6,00	0,598	0,596	0,596	0,596	0,594	0,603	0,602	0,602	0,601	0,600

Для конических насадок коэффициент расхода зависит от угла δ , и наибольший расход оказывается при $\delta = 13^\circ 24'$, когда $\mu = 0,946$ и $\xi = 0,078$. Так как опыты показали, что струя, вытекающая при таком угле насадки, не является ровной, и большей ровности можно достигнуть при $\delta = 5^\circ$, то, например, для брандспойтов (наконечники для пожарных шлангов), при истечении из которых как раз требуется получение ровной струи, берут всегда угол $\delta = 5^\circ$, при котором $\mu = 0,923$ и $\xi = 0,19 - 0,2$.



Черт. 105.

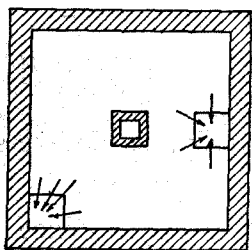
Неравномерное сжатие струи. Когда отверстие находится не в центре дна сосуда, а около стенки его, или около двух стенок, или, вообще, когда имеются особые направляющие стенки по той или



другой части периметра отверстия, то по длине этих стенок, очевидно, сужения вытекающей струи не происходит, и коэффициент расхода увеличивается. По опытам Bidone'a и Weisbach'a, если полный периметр отверстия назвать через p_n , а часть периметра, по которой не происходит сжатия, через p_s , то коэффициент расхода через такое отверстие μ' выразится формулой:

$$\mu' = \mu \left(1 + k \frac{p_s}{p_n} \right), \quad (13)$$

при чем для круглого отверстия $k = 0,128$, для небольшого квадратного отверстия $k = 0,152$, для небольшого прямоугольного отверстия $k = 0,134$; для более значительных прямоугольных отверстий k повышается до 0,157; что касается коэффициента μ , то его значение, как для отверстия с полным сжатием струи, принимается равным 0,62.



Черт. 106.

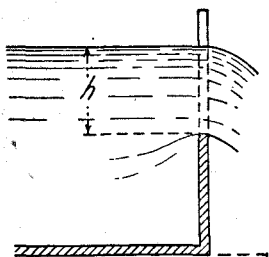
§ 4. Истечение через водосливные отверстия.

В § 2 Главы II было выведено для теоретического количества воды, протекающего через водосливное отверстие, соотношение

$$Q = \frac{2}{3} b \cdot h \cdot \sqrt{2gh}, \quad (14)$$

где b есть ширина отверстия, а h —толщина переливающегося слоя воды.

Если принять во внимание подтекание воды по каналу к водосливу и назвать скорость подтекания через v_0 , то напоры H_2 и H_1 (см. Главу II, задачу 4) увеличатся как бы на величину $\frac{v_0^2}{2g}$, и, следовательно, при переходе к водосливному отверстию, когда



$$\begin{aligned} H_1 &= 0, \\ H_2 &= h, \end{aligned}$$

Черт. 107.

мы получим уравнение:

$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left[\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Ввиду незначительной вообще величины $\frac{v_0^2}{2g}$, вторым членом в прямых скобках последнего выражения пренебрегают, и тогда мы получим:

$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left[h + \frac{v_0^2}{2g} \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (15)$$

или, обозначая $h + \frac{v_0^2}{2g}$ через h_0 ,

$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} h_0^{\frac{3}{2}}; \quad (16)$$

когда скорость v_0 не превосходит $0,5—0,6 \frac{м}{сек}$, тогда в последнем соотношении пренебрегают и членом $\frac{v_0^2}{2g}$, и мы получим выражение расхода через водослив в упрощенной форме (14).

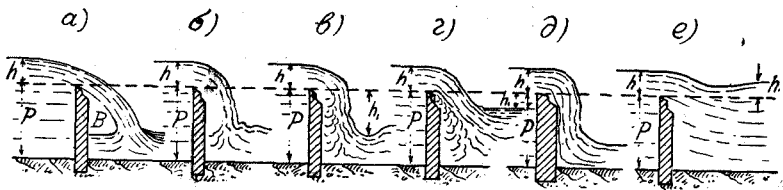
Действительное количество воды, вытекающее через водосливное отверстие, конечно, будет меньше, и его мы получим, если помножим выражение (14), (15) и (16) на коэффициент расхода μ :

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \cdot h \sqrt{2gh}, \quad (17)$$

$$Q = \frac{2}{3} \mu \cdot b \sqrt{2g} \left[h + \frac{v_0^2}{2g} \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \mu b \cdot \sqrt{2g} \cdot h_0^{\frac{3}{2}}. \quad (18)$$

Что касается коэффициента μ , то его величина зависит от многих причин: закругленности или незакругленности кромок отверстия,

сужения ширины водосливного отверстия по отношению к ширине канала, или вообще водотока, в котором устроено это отверстие, отношения толщины переливающегося через водослив слоя воды к высоте стенки P , наклонения стенки по отношению к дну канала, толщины стенки и проч. Кроме того, как коэффициент расхода, так и самая форма переливающейся струи, зависит от того, поступает ли под струю воздух или нет, стоит ли нижний уровень воды выше или ниже верхней кромки стенки водослива и т. д. Чтобы показать насколько может быть разнообразна форма струй, переливающихся через водосливы, приводим некоторые из этих форм, наиболее типичных, при чем здесь везде предполагаем, что ширина водосливного отверстия одинакова с шириной канала.



Черт. 108.

Первая из приведенных форм (а) принадлежит полному или совершенному водосливу со свободной струей, когда под струю в пространство (В) может совершенно свободно поступать воздух через боковые стороны.

Форма (б) принадлежит водосливу с сжатой струей и образуется тогда, когда, во-первых, $h < 0,4P$, а, во-вторых, под струю поступает недостаточное количество воздуха. Струя в этом случае меньше отдалается от стенки, чем в предыдущей форме (а), но, благодаря тому, что в пространстве (В) воздух несколько разрежен, появляется со стороны его всасывающее действие, и расход воды через такой водослив больше, чем через предыдущий.

Форма (в) принадлежит водосливу с подтопленной снизу струей, и переливание происходит при полном отсутствии доступа воздуха в пространство (В), при $h \geq 0,4P$; все пространство (В) наполнено водой, находящейся в вихревом движении. Часто при этом происходит подъем горизонта воды несколько ниже стекающей струи (как показано на чертеже — отогнанный скачок воды), что влечет за собой увеличение расхода воды через водослив.

Форма (г) принадлежит водосливу с подтопленной снизу струей и с покрывающим ее скачком и получается тогда, когда $h + h_1 \leq \frac{3}{4}P$; в этом случае скачок воды приближается к струе настолько, что часть ее покрывается вихревой водой.

Форма (д) принадлежит водосливу с прилипающей струей, когда стенка водослива не слишком тонка, и кромка ее обращена к подтекающей сверху воде.

Наконец, форма (е) принадлежит затопленному водосливу (или неполному водосливу); эта форма имеет место тогда, когда горизонт воды ниже стенки лежит выше ее кромки и $h - h_1 < 0,75P$; в противном случае этот подъем горизонта нижней воды может быть обусловлен скачком воды, при котором водослив будет полным (см. выше — отогнанный скачок).

Переходя теперь к значениям коэффициента μ , прежде всего укажем на формулу Базена¹⁾, которая для совершенного водослива, при ширине его одинаковой с шириной подводного канала, при вертикальной стенке и острой ее кромке, со свободным поступлением воздуха под струю, т. е. для водослива формы (а), при чем подтекание воды к водосливу уже учтено в ней, имеет вид:

$$\frac{2}{3} \mu = \left[0,405 + \frac{0,003}{h} \right] \left[1 + 0,55 \frac{h^2}{(h+P)^2} \right], \quad (19)$$

при чем $0,1 < h < 0,6$; с достаточной для практики точностью можно пользоваться и сокращенной формулой

$$\frac{2}{3} \mu = 0,405 + 0,212 \frac{h^2}{(h+P)^2}.$$

Для водослива той же формы Ребок²⁾ (Th. Rehbock) дает формулу такого вида (с учетом подтекания):

$$\mu = 0,605 + \frac{1}{1050h - 3} + 0,08 \frac{h}{P}. \quad (20)$$

Наконец, по Фрезе, для случая, когда подтекания воды к отверстию можно не принимать во внимание, или, следовательно, когда $h + P$ очень велико по отношению к h , для $h > 0,1$:

$$\mu = 0,615 + \frac{0,0021}{h}; \quad (21)$$

для случая же, когда подтекание необходимо учесть, Фрезе дает формулу:

$$\frac{2}{3} \mu = \left[0,615 + \frac{0,0021}{h} \right] \left[1 + 0,55 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right]. \quad (22)$$

Для формы водослива (в) Базен для коэффициента расхода (m) дает соотношение:

$$m = \mu \left[0,845 + 0,176 \frac{P}{h} - 0,016 \frac{P^2}{h^2} \right], \quad (23)$$

¹⁾ Н. Bazin. *Experiences nouvelles sur l'écoulement en d'éversoir*. Paris. 1898, стр. 25.

²⁾ Rehbock. *Der Abfluss von Wasser über Wehre verschiedenen Querschnitts*. Zeitschr. für Architekt. u. Ingenieurvereins. 1913, стр. 130.

при чем для μ надо брать вышеуказанное значение; менее точно будет значение (m):

$$m = \mu \left[0,878 + 0,128 \frac{P}{h} \right].$$

Для водосливов формы (2) по Базену:

$$m = \mu \left[1,06 - 0,16 \left(\frac{h_1}{P} + 0,05 \right) \frac{P}{h} - 0,02 \left(\frac{h_1}{P} + 0,05 \right)^2 \left(\frac{P}{h} \right)^2 \right], \quad (24)$$

или с меньшей точностью

$$m = \mu \left[1,05 - 0,15 \frac{h_1}{h} \right];$$

так как величина h_1 отрицательна, то она входит в последние два уравнения со знаком минус, а потому всегда $m > \mu$.

Водослив формы (д) доставляет воды на 30% больше, чем водослив формы (а).

Влияние бокового сужения исследовал Врасшмапп, который и дает следующее соотношение для коэффициента расхода:

$$\frac{2}{3} \mu = 0,384 + 0,0386 \frac{b}{B} + \frac{0,0053}{h}, \quad (25)$$

где B — ширина канала, а b — ширина водосливного отверстия.

Для водосливов формы (е) с острыми кромками стенок, по Базену при $h - h_1 \leq 0,7$ расход можно выразить формулой:

$$Q = \left[0,446 + 0,223 \left(\frac{h}{h + P} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{1}{5} \frac{h_1}{P} \right) \sqrt[3]{\frac{h - h_1}{h}} b \cdot h \cdot \sqrt{2gh}, \quad (26)$$

где член $\left(1 + \frac{1}{5} \frac{h_1}{h} \right) \sqrt[3]{\frac{h - h_1}{h}}$ называется коэффициентом затопления.

Из наиболее простых формул укажем для этого случая еще на формулу Мари (Мару):

$$Q = 0,8 h_1 \sqrt{2g \left(h - h_1 + \frac{v_0^2}{2g} \right)} \cdot b \quad (27)$$

и на формулу Тольмана¹⁾ (В. Tolmann):

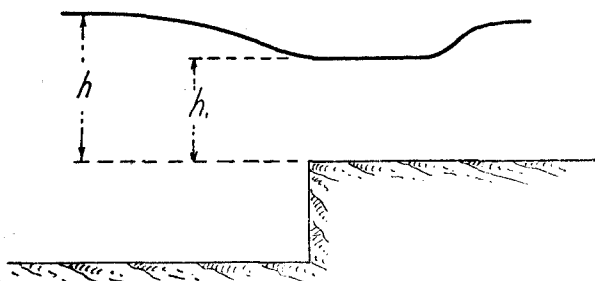
$$Q = b \sqrt{2g(h - h_1)} \cdot \mu \frac{2h + h_1}{3}, \quad (28)$$

где можно принять $\mu = 0,64$.

¹⁾ Allgemeine Bauzeitung. 1904, стр. 104 — 106.

Для водослива, указанного на прилагаемом чертеже (черт. 109), по Леб्रो (Lesbros):

$$Q = \mu \cdot b \cdot h \sqrt{2g(h - h_1)}, \quad (29)$$



Черт. 109.

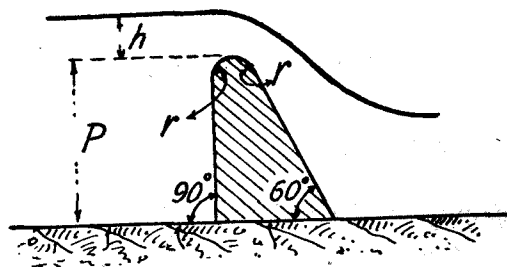
где $\mu = 0,474 - 0,6$, в зависимости от очертания кромки водослива.

Водоеливные плотины.

Водосливные плотины, которые в большинстве случаев представляют из себя в настоящее время бетонные или железо-бе-

тонные сооружения в русле реки, отличаются от рассмотренных нами водосливов тем, что гребень водосливногo отверстия плотины не заострен, а, наоборот, закруглен и в редких только случаях имеет форму плоскую с криволинейными сопряжениями с передней и задней гранями тела плотины, или, наконец, как это бывает иногда в железобетонных плотинах, имеет треугольную форму. Водосливные плотины также могут быть в виде полных водосливов (незатопленных), или неполных (затопленных).

Останавливаясь только на плотинах с закругленным гребнем¹⁾, мы, конечно, должны предвидеть, что коэффициент расхода через отверстия таких плотин должен быть выше, чем для водосливов с острой кромкой стенки. Действительно, Ребок для полной водосливной плотины, изображенной на прилагаемом чертеже (черт. 110) формы, дает²⁾ для коэффициента расхода значение



Черт. 110.

$$\mu = 0,845 - 0,0206 \left(3,8 - \frac{h}{r} \right)^2 + \frac{h}{12P}, \quad (30)$$

для всех значений h , меньших $0,4P + 0,5r$, где r — радиус закругления гребня плотины. Небольшие изменения, против указанных на чертеже,

¹⁾ Желающих ближе ознакомиться с водосливными плотинами прочих очертаний отсылаем к весьма обстоятельному труду проф. Н. Н. Павловского — „Гидравлический Справочник“. Ленинград. 1924 г.

²⁾ Verhandlungen d. Gesellschaft deutsch. Naturforcher. 1911, стр. 139, см. также Forchheimer. Hydraulik. 1914, стр. 301.

в наклонах передней и задней граней плотины не оказывают существенного влияния на расход.

Несколько позднее для плотины, почти совершенно одинаковой с изображенной на чертеже 110 формой (уклон задней грани 2:3, что соответствует углу в $56^{\circ}20'$), Ребок дал¹⁾ другую формулу для μ :

$$\mu = 0,312 + 0,09 \frac{h}{P} + \sqrt{0,30 - 0,01 \left(5 - \frac{h}{r}\right)^2}, \quad (31)$$

которая верна, пока $\frac{h}{P} \leq 1$, $r \geq 0,2$ и $\frac{h}{r} \leq \left(6 - \frac{20r}{P + 3r}\right)$.

Проф. Н. Н. Павловский, систематизируя разрозненный, но обильный опытный материал относительно коэффициентов расхода для водосливов криволинейных высоких профилей, представил²⁾ формулу (18) в таком виде:

$$Q = mb \sqrt{2g} h_0^{\frac{3}{2}}, \quad (32)$$

при чем ввел новый коэффициент расхода m :

$$m = m_r \cdot \sigma_f \sigma_h \sigma_n,$$

где: σ_n — коэффициент затопления, для незатопленных водосливов, равный единице;

σ_h — коэффициент полноты напора, дающий возможность учитывать отношение $\frac{h}{P}$;

σ_f — коэффициент формы, учитывающий влияние очертания гребня;

m_r — приведенный коэффициент расхода, т. е. коэффициент расхода при $\sigma_n = \sigma_h = \sigma_f = 1$.

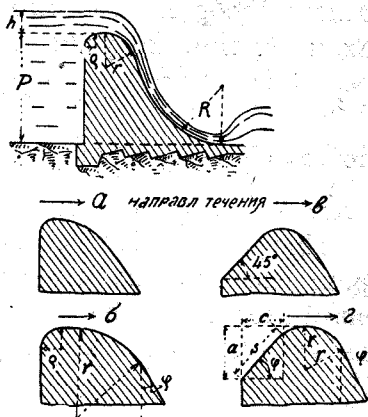
Для этой формулы, в зависимости от очертания гребня (см. черт. 111), Павловский рекомендует придерживаться таких значений коэффициентов:

а) Для типа (а):

$$m_r = 0,49; \quad \sigma_f = 1;$$

$$\sigma_h = 0,785 + 0,25 \frac{h}{h_{\max}} \left(\text{для } \frac{h}{h_{\max}} = 0,1 - 0,8 \right);$$

$$\sigma_h = 0,88 + 0,12 \sqrt{\frac{h}{h_{\max}}} \left(\text{для } \frac{h}{h_{\max}} > 0,8 \right).$$



Черт. 111.

¹⁾ Handb. d. Ingenieurwissenschaften. 3. Wasserbau. 2 Bd. 1 Abt. 1912 г., стр. 53.

²⁾ Проф. Н. Н. Павловский. „Гидравлический Справочник“. Ленинград. 1924, стр. 46.

Здесь $h_{\text{макс.}}$ — максимальная толщина переливающегося слоя, для которой проектируется плотина, h — какая угодно толщина того же слоя, но $< h_{\text{макс.}}$.

б) Для типа (б):

$$m_r = 0,49; \quad \sigma_f = 0,97;$$

σ_h имеет такое же значение, что для типа (а).

в) Для типа (в);

$$\sigma_r = 0,48; \quad \sigma_f = 1;$$

$$\sigma_h = 0,805 + 0,31 \frac{h}{h_{\text{макс.}}} \left(\text{для } \frac{h}{h_{\text{макс.}}} = 0,1 - 0,5 \right);$$

$$\sigma_h = \sqrt[20]{\frac{h}{h_{\text{макс.}}}} \left(\text{для } \frac{h}{h_{\text{макс.}}} > 0,5 \right).$$

г) Для типа (г):

$$m_r = 0,47; \quad \sigma_f = 1,02 - 0,02s - 0,02 \left(\frac{a}{r} - 1 \right),$$

где $s = \frac{c}{a}$ (черт. 109, г);

σ_h — имеет то же значение, что и для типа (в).

Для определения расхода через затопленные водосливные плотины очень часто пользуются формулой Базена (26), применяемой для затопленного водослива с тонкой стенкой, изменив в ней коэффициент расхода, согласно с новой формой очертания гребня водосливной стенки; таким образом, получим

$$Q = \left(1 + 0,2 \frac{h_1}{P} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{h}} m \cdot b \cdot \sqrt{2gh} \cdot h, \quad (33)$$

где $m = \frac{2}{3} \mu$ — коэффициент расхода для незатопленного водослива с тем же очертанием гребня.

Проф. Н. Н. Павловский, указывая на то обстоятельство, что приведенная только что формула для водосливов практических профилей дает, согласно опытов Базена, преуменьшенное значение для Q , рекомендует пользоваться формулой такого же вида

$$Q = \sigma_n m \cdot b \cdot \sqrt{2gh} \cdot h,$$

но для коэффициента затопления (σ_n) брать не вычисленные значения по соотношению Базена $\left(1 + 0,2 \frac{h_1}{P} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{h}}$, а пользоваться данными специальных опытов, поставленных в Америке с затопленными водосливами и приведенными в нижеследующей таблице (см. также черт. 112).

Таблица № 15.

$\frac{h_1}{h}$	σ_n	$\frac{h_1}{h}$	σ_n	$\frac{h_1}{h}$	σ_n	$\frac{h_1}{h}$	σ_n
0	1,000	0,3	0,972	0,6	0,907	0,9	0,621
0,1	0,991	0,4	0,956	0,7	0,856	1,0	0
0,2	0,983	0,5	0,937	0,8	0,778		

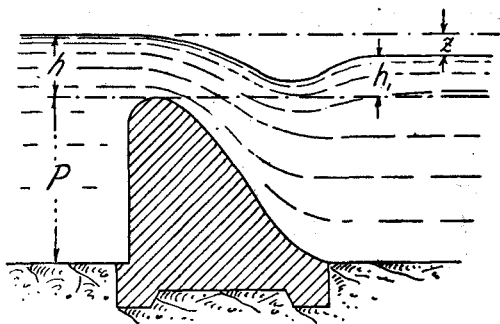
Истечение через щитовые отверстия. Ввиду того, что скорость (v) протекания воды через щитовое отверстие во всех точках его сохраняет одно и то же значение, мы можем написать следующее очевидное соотношение

$$\frac{v^2}{2g}(1+\xi) = \frac{v_0^2}{2g} + h_1 - h_2,$$

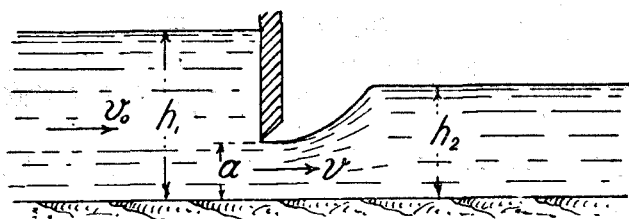
где $\xi \frac{v^2}{2g}$ — высота напора, теряющаяся на сопротивления в щитовом отверстии, а v_0 — скорость подтекания воды к отверстию. Из только что написанного соотношения находим:

$$v = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2g(h_1 - h_0)}}{\sqrt{1 + \xi}},$$

при чем $\frac{1}{\sqrt{1 + \xi}}$ — коэффициент, зависящий от очертания кромки щита, а также от того, является ли эта кромка свободной, как на прилагае-



Черт. 112.



Черт. 113.

мом чертеже, или подтоплена нижней водой; величина этого коэффициента колеблется в пределах 0,5 — 0,46, и, следовательно, можно положить $\xi = 3$.

Называя теперь ширину отверстия че-

рез b , а высоту его через a , при чем ширину отверстия считаем одинаковой с шириной подводного канала, имеем выражение для объема протекающей через отверстие в одну секунду воды:

$$Q = ab \sqrt{\frac{2g}{1 + \xi} \left(h_1 - h_2 + \frac{v_0^2}{2g} \right)}.$$

Очень часто щитовыми отверстиями пользуются для измерения расходов воды, при чем, конечно, подходная скорость v_0 заранее бывает неизвестна; но легко видеть, что скорость эту нетрудно исключить: в самом деле, совершенно очевидно:

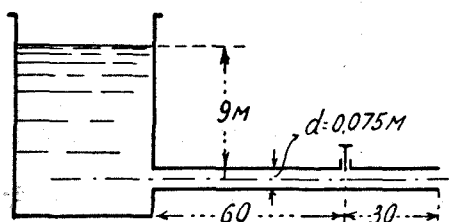
$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{Q}{2gb^2h_1^2};$$

подставляя же это значение $\frac{v_0^2}{2g}$ в предыдущее соотношение, делая приведение и определяя Q , найдем окончательно:

$$Q = ab \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1 + \xi \frac{a^2}{h_1^2}}}. \quad (34)$$

§ 5. Задачи на местные сопротивления в трубах и истечение воды через отверстия.

Задача № 1. Определить количество воды, которое можно подать трубой диаметром $d = 0,075$ м и длиной $l = 90$ м под напором $h = 9$ м. В трубе на расстоянии 60 м от напорного резервуара имеется задвижка.



Черт. 114.

Решение. Очевидно, что напор h идет на сообщение скорости (v) воды в трубе и на преодоление сопротивлений; поэтому

$$h = \frac{v^2}{2g} + \Sigma h_{w_i}. \quad (35)$$

Сопротивления же в данном случае состоят из:

- 1) сопротивления при входе воды из напорного резервуара в трубу (теряющийся напор h_{w_1});
- 2) сопротивления при протекании воды в трубе (теряющийся напор h_{w_2});
- 3) сопротивления при проходе воды через задвижку (теряющийся напор h_{w_3}).

Таким образом:

$$\Sigma h_{w_i} = h_{w_1} + h_{w_2} + h_{w_3}.$$

На основании предыдущего, перечисленные потери можно выразить следующим образом:

$$h_{w_1} = \xi_1 \frac{v^2}{2g} \approx 0,5 \frac{v^2}{2g};$$

$$h_{w_2} = \xi_2 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \approx \frac{1}{40} \frac{90}{0,075} \cdot \frac{v^2}{2g} = 30 \frac{v^2}{2g};$$

$$h_{w_3} = \xi_3 \frac{v^2}{2g} = 1 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Подставляя все эти значения h_{w_i} в уравнение (35), имеем:

$$h = \frac{v^2}{2g} [1 + 0,5 + 30 + 1] = 32,5 \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{32,5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 9}{32,5}} = \sqrt{5,43} = 2,33 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Количество воды, подаваемой трубой, очевидно, будет:

$$Q = \omega v = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v = 0,0103 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}.$$

Если бы сопротивлений в трубе не существовало, то скорость (v) была бы

$$v = \sqrt{2gh} = 13,3 \frac{\text{м}}{\text{сек}},$$

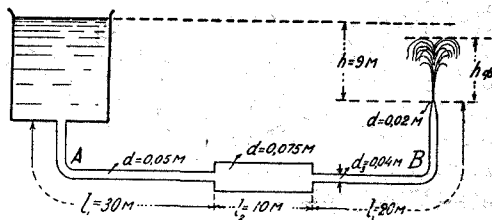
а количество воды, подаваемой трубой,

$$Q \cong 0,0587 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}.$$

Задача № 2. Определить высоту (h_{ϕ}) фонтана при нивелировочном напоре $h=9$ м и при указанных на чертеже (черт. 115) размерах трубопровода, а также расход воды.

Решение. Напор h идет на сообщение скорости (v) вытекания струи и на преодоление сопротивлений при протекании воды в трубопроводе; поэтому

$$h = \frac{v^2}{2g} + \Sigma h_{w_i}.$$



Черт. 115.

Сопротивления в данном случае подразделяются на:

- 1) сопротивление при входе воды в трубу (теряющийся напор h_{w_1});
- 2) сопротивления от трения на отдельных участках трубопровода (теряющиеся напоры: h_{w_2} , h_{w_3} и h_{w_4});
- 3) сопротивления в местах (А и В) изгиба трубопровода (теряющиеся напоры h_{w_5} и h_{w_6});
- 4) сопротивления при переходе воды из трубы диаметром в 5 см в трубу диаметром 7,5 см и из последней в трубу диаметром 4 см (теряющиеся напоры h_{w_7} и h_{w_8});
- 5) сопротивление в конической насадке при выходе воды из трубопровода (теряющийся напор h_{w_9}).

Таким образом:

$$\Sigma h_{w_i} = h_{w_1} + h_{w_2} + h_{w_3} + h_{w_4} + h_{w_5} + h_{w_6} + h_{w_7} + h_{w_8} + h_{w_9}.$$

На основании вышеприведенных данных, имеем:

$$h_{w_1} = \xi_1 \frac{v_1^2}{2g} \cong 0,5 \frac{v_1^2}{2g};$$

$$h_{w_2} = \xi_2 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} \cong \frac{1}{40} \cdot \frac{30}{0,05} \cdot \frac{v_1^2}{2g} = 15 \frac{v_1^2}{2g};$$

$$h_{w_3} = \xi_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \cong \frac{1}{40} \cdot \frac{10}{0,075} \frac{v_2^2}{2g} = 3,3 \frac{v_2^2}{2g};$$

$$h_{w_4} = \xi_2 \frac{l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g} \cong \frac{1}{40} \cdot \frac{20}{0,04} \frac{v_3^2}{2g} = 12,5 \frac{v_3^2}{2g};$$

$$h_{w_5} = \xi_3 \frac{v_1^2}{2g} \cong 0,3 \frac{v_1^2}{2g};$$

$$h_{w_6} = \xi_3 \frac{v_3^2}{2g} \cong 0,3 \frac{v_3^2}{2g};$$

$$h_{w_7} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{v_1}{v_2} - 1 \right)^2 = \frac{v_2^2}{2g} (\omega_2 - 1)^2 =$$

$$= \left(\frac{0,075^2}{0,05^2} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = 1,56 \frac{v_2^2}{2g};$$

$$h_{w_8} = \xi_4 \frac{v_3^2}{2g} \cong 0,37 \frac{v_3^2}{2g};$$

$$h_{w_9} = \xi_5 \frac{v^2}{2g} \cong 0,1 \frac{v^2}{2g},$$

и, следовательно,

$$\Sigma h_{w_i} = [0,5 + 15,0 + 0,3] \frac{v_1^2}{2g} + [3,3 + 1,56] \frac{v_2^2}{2g} + [12,5 + 0,3 + 0,37] \frac{v_3^2}{2g} +$$

$$+ 0,1 \frac{v^2}{2g} = 15,8 \frac{v_1^2}{2g} + 4,86 \frac{v_2^2}{2g} + 13,17 \frac{v_3^2}{2g} + 0,1 \frac{v^2}{2g},$$

а так как по закону сплошности движения

$$Q = \omega_1 v_1 = \omega_2 v_2 = \omega_3 v_3 = \omega v,$$

то

$$v_1 = v \frac{\omega}{\omega_1} = v \frac{d^2}{d_1^2} = \frac{4}{25} v = 0,16 v;$$

$$v_2 = v \frac{\omega}{\omega_2} = v \frac{d^2}{d_2^2} = \frac{4}{56,25} v = 0,071 v;$$

$$v_3 = v \frac{\omega}{\omega_3} = v \frac{d^2}{d_3^2} = \frac{4}{16} v = 0,25 v,$$

а, подставляя эти значения скоростей в выражение для Σh_{w_i} , получим:

$$\Sigma h_{w_i} = 0,404 \frac{v^2}{2g} + 0,024 \frac{v^2}{2g} + 0,823 \frac{v^2}{2g} + 0,1 \frac{v^2}{2g} \cong 1,45 \frac{v^2}{2g}.$$

Таким образом,

$$h = \frac{v^2}{2g} + 1,45 \frac{v^2}{2g} = 2,45 \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{2,45}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 9}{2,45}} \cong 8,49 \frac{\text{м}}{\text{сек}},$$

а теперь, пренебрегая сопротивлением воздуха,

$$h_{\phi} = \frac{v^2}{2g} = \frac{72,07}{19,61} \cong 3,67 \text{ м.}$$

Количество воды, необходимое для фонтана, будет равно

$$Q = \omega v = 0,000314 \cdot 8,49 = 0,00267 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}} \cong 0,217 \frac{\text{ведра}}{\text{сек}},$$

или 781 ведро в час.

Задача № 3. Имеются два резервуара (I и II), сообщающиеся между собой круглым отверстием A (диаметр отверстия $d_1 = 30 \text{ мм}$). Из резервуара I вода перетекает через отверстие A в резервуар II, а из последнего она вытекает через отверстие B (диаметр отверстия $d_2 = 20 \text{ мм}$) в воздух. Горизонт воды в резервуаре I все время поддерживается на высоте $h_1 = 4 \text{ м}$ над центром отверстия A; расстояние центра отверстия B от горизонта воды резервуара I равно $h_2 = 6 \text{ м}$. Определить расход воды через отверстие B, если отверстия A и B в тонких стенках.

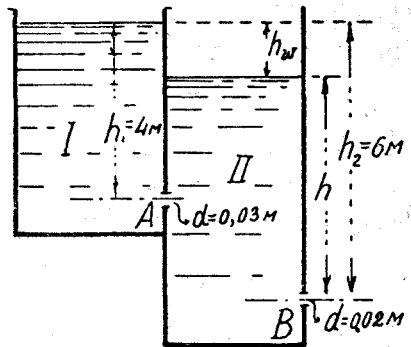
Решение. Вследствие сопротивлений при перетекании воды через отверстие A, горизонт воды в резервуаре II располагается ниже горизонта воды в резервуаре I на некоторую высоту h_w . Поэтому, называя коэффициенты расхода через отверстия A и B, соответственно, через μ_1 и μ_2 , а самые расходы через Q_1 и Q_2 , мы можем, очевидно, написать:

$$Q_1 = \mu_1 \omega_1 \sqrt{2gh_w}$$

и

$$Q_2 = \mu_2 \omega_2 \sqrt{2gh},$$

где ω_1 и ω_2 — площади отверстий A и B, а h — напор, под которым.



Черт. 116.

вытекает вода из отверстия B . По закону сплошности движения очевидно:

$$Q_1 = Q_2,$$

а потому

$$\mu_1 \omega_1 \sqrt{2gh_w} = \mu_2 \omega_2 \sqrt{2gh},$$

или

$$\mu_1^2 \omega_1^2 2gh_w = \mu_2^2 \omega_2^2 2gh,$$

или, по сокращении,

$$\mu_1^2 \omega_1^2 h_w = \mu_2^2 \omega_2^2 h.$$

Так как, далее, по чертежу

$$h_w = h_2 - h,$$

то предыдущее соотношение примет вид:

$$\mu_1^2 \omega_1^2 (h_2 - h) = \mu_2^2 \omega_2^2 h,$$

откуда определяется h :

$$h = \frac{\mu_1^2 \omega_1^2}{\mu_1^2 \omega_1^2 + \mu_2^2 \omega_2^2} h_2.$$

В начале решения задачи напоры h_w и h нам в точности неизвестны; поэтому мы задаемся пока приближенными значениями μ_1 и μ_2 ; так по таблицам Smith'a для напоров в 0,4 м и 5,6 м (полагая $h_w = 0,4$ м) и диаметров отверстий $d_1 = 30$ мм и $d_2 = 20$ мм, имеем, соответственно, $\mu_1 = 0,605$ и $\mu_2 = 0,598$; подставляя эти значения коэффициентов расхода μ_1 и μ_2 и значения площадей отверстий ω_1 и ω_2 в соотношение для h , имеем:

$$h = \frac{\mu_1^2 \omega_1^2}{\mu_1^2 \omega_1^2 + \mu_2^2 \omega_2^2} h_2 = \frac{177,88}{35,37} = 5,03$$

и, следовательно,

$$h_w = h_2 - h = 0,97 \text{ м.}$$

Ввиду того, что напор $h_w = 0,97$ значительно отличается от предположенного нами в 0,4 м, мы снова подыскиваем по таблицам значения μ_1 и μ_2 ; они будут, соответственно, $\mu_1 = 0,603$ и $\mu_2 \cong 0,598$, а тогда

$$h = \frac{176,9}{35,37} = 5,0$$

и, следовательно,

$$h_w = h_2 - h = 1,0.$$

Так как новое значение h_w мало отличается от предыдущего его значения, то мы можем дальнейшего уточнения его значения не делать

и, таким образом, окончательно принять

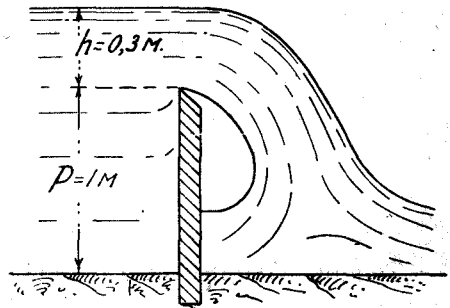
$$\begin{aligned}h_w &= 1,00, \\ \mu_1 &= 0,603, \\ \mu_2 &= 0,598,\end{aligned}$$

а тогда расход воды через отверстие B будет:

$$Q = \mu_2 \omega_2 \sqrt{2gh} = 0,598 \cdot 0,000314 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 5,0} = 0,00186 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}} = 1,86 \frac{\text{литра}}{\text{сек}}.$$

Задача № 4. Определить расход воды через полный водослив со свободной струей с тонкой стенкой (измерительный водослив), если толщина переливающегося слоя воды $h = 0,3$ м, высота стенки $P = 1$ м и ширина водослива, равная ширине подводящего воду канала, $b = 2$ м.

Решение. По Базену имеем для такого водослива:



Черт. 117.

$$Q = \left[0,405 + \frac{0,003}{h} \right] \left[1 + 0,55 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right] b \sqrt{2g h^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставляя соответствующие значения h , P , b и g , находим:

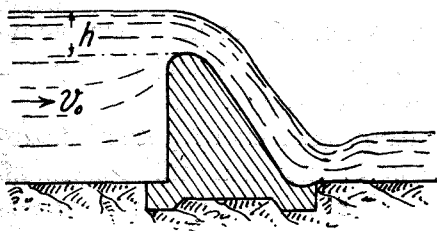
$$\begin{aligned}Q &= \left[0,405 + \frac{0,003}{0,3} \right] \left[1 + 0,55 \left(\frac{0,3}{1,3} \right)^2 \right] 2 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,3^{\frac{3}{2}}} = \\ &= 0,415 \cdot 1,029 \cdot 2 \cdot 4,429 \cdot 0,164 = 0,617 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}} \cong 617 \frac{\text{литров}}{\text{сек}}.\end{aligned}$$

Задача № 5. Определить подпор или высоту переливающегося слоя воды через водосливную плотину при длине водослива $b = 50$ м,

расходе высоких вод $Q_{sv} = 150 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}$,

площади живого сечения реки до ребра водослива $\Omega_0 = 250 \text{ м}^2$ и ширине реки $B = 75$ м.

Решение. Из соотношения



Черт. 118.

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} \cdot b \cdot \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}}$$

для расхода на единице ширины водослива получаем:

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Практически коэффициент расхода $m = \frac{2}{3} \mu$ колеблется для плотин с криволинейным очертанием гребня в узких, сравнительно, пределах: 0,46—0,54; примем, поэтому, для безопасности, значение $m = 0,48$; тогда $\frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} \cong 2,1$, и при наших условиях:

$$q = \frac{150}{50} = 3 = 2,1 \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Полагаем предварительно $v_0 = 0$, тогда

$$3 = 2,1 \cdot h^{\frac{3}{2}},$$

откуда

$$h = \left(\frac{3}{2,1} \right)^{\frac{2}{3}} = (1,43)^{\frac{2}{3}} = 1,27.$$

Теперь находим всю площадь живого сечения реки выше плотины; очевидно, она будет:

$$\Omega = \Omega_0 + B \cdot h = 250 + 75 \cdot 1,27 = 345,25 \text{ м}^2;$$

поэтому скорость (v_0) подхода воды к плотине

$$v_0 = \frac{150}{345,25} = 0,435 \frac{\text{м}}{\text{сек}},$$

а соответствующая ей высота

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{(0,435)^2}{2 \cdot 9,81} \cong 0,01$$

и, таким образом, действительный подпор

$$h = 1,27 - 0,01 = 1,26 \text{ м}.$$

Очевидно, в данном случае такая незначительная поправка получилась благодаря тому, что река сильно подперта плотиной, и скорость подхода к ней, благодаря этому, очень незначительна.

Задача № 6. Произвести проверку гидравлического расчета водосливной плотины для следующих условий: нормальный меженный (низкий) горизонт в реке принимается основным горизонтом с отметкой 0,00; нормальный подпорный горизонт (совпадает с гребнем плотины) должен иметь отметку +8,00 м; горизонт паводков +8,5 м; максимальный допустимый горизонт высоких вод +9,75 м. Расход воды во время паводков $Q_n = 80 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}$; расход во время высоких вод $Q_s = 320 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}$. Длина водосливной части плотины $b = 75 \text{ м}$.

Решение. В основном соотношении

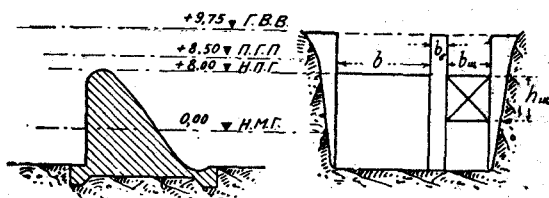
$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} \cdot b \cdot h_0^{\frac{3}{2}}$$

принимаям опять $\frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} = 2,1$ и, кроме того, пренебрегаем подходной скоростью v_0 ; поэтому

$$Q = 2,1 b \cdot h^{\frac{3}{2}},$$

откуда

$$b = \frac{Q}{2,1 \cdot h^{\frac{3}{2}}}$$



Черт. 119.

Проверяем прежде всего возможность прохода высоких вод:

$$b = \frac{320}{2,1(9,75 - 8,00)^{\frac{3}{2}}} = \frac{320}{2,1 \cdot 1,75^{\frac{3}{2}}} \cong \frac{320}{2,1 \cdot 2,315} \cong 65,8 \text{ м} < 75;$$

очевидно, высокие воды проходят совершенно свободно.

Проверяем возможность прохода вод паводка:

$$b = \frac{80}{2,1(8,5 - 8,0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{80}{2,1 \cdot 0,5^{\frac{3}{2}}} = \frac{80}{0,74} = 108 > 75,$$

т. е. воды паводка при заданных условиях не проходят, и, следовательно, необходимо или прибегнуть к понижению гребня плотины, или к устройству дополнительных отверстий в плотине.

В первом случае, ввиду того, что необходимая толщина переливающегося слоя воды через плотину определяется в

$$h = \left[\frac{Q_n}{2,1b} \right]^{\frac{2}{3}} = \left[\frac{80}{157,5} \right]^{\frac{2}{3}} = (0,508)^{\frac{2}{3}} \cong 0,637 \text{ м},$$

гребень плотины пришлось бы понизить до отметки

$$8,50 - 0,637 = 7,863 \text{ м}.$$

Во втором случае, полагая высоту дополнительного отверстия $h_{ш} = 2 \text{ м}$, имеем очевидное соотношение:

$$Q + Q_{ш} \geq 80 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}$$

или

$$2,1b(0,5)^{\frac{3}{2}} + 2,1b_{ш}2^{\frac{3}{2}} \geq 80,$$

откуда

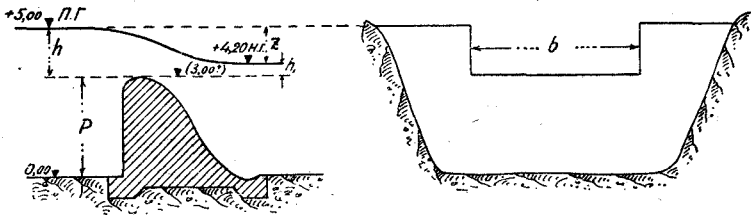
$$b_{ш} = \frac{80 - 2,1 \cdot b \cdot 0,5^{\frac{3}{2}}}{2,1 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \frac{24,5}{5,94} \cong 4,12 \text{ м}.$$

Понижение гребня плотины не всегда бывает выгодно, так как этим уменьшается, очевидно, напор и запас воды в верхнем бьефе; поэтому устройство дополнительного отверстия в плотине предпочтительнее.

При нашем расчете дополнительного отверстия последнее предположено в верхней части плотины; иногда дополнительные отверстия устраиваются в нижней части плотины (донные отверстия), но такого рода отверстия, помимо опасности подмыва плотины, вследствие получающихся больших выходных скоростей, представляют еще большие затруднения по управлению ими: необходимость приложения больших усилий для подъема затворов и проч.

Задача № 7. Имеется водосливная плотина с длиной гребня $b=50$ м. Расход воды в реке $400 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}$, при чем горизонт ее в естественном состоянии имеет отметку $+4,2$ м; горизонт подпертых плотиной вод $+5,00$ м. Площадь живого сечения реки в подпертом состоянии 300 м^2 . Спрашивается, возможно ли при заданных условиях отметку гребня плотины принять $+3,00$ м, или он должен находиться ниже, если отметка подошвы плотины $-0,00$.

Решение. Прежде всего решаем вопрос, какой будет водослив: затопленный или незатопленный. На основании предыдущего, этот



Черт. 120.

вопрос, по Базену, разрешается определением значения отношения $\frac{z}{P}$, при чем, если $\frac{z}{P} < 0,75$, водослив затопленный, если же $\frac{z}{P} > 0,75$, то ниже плотины получается отогнанный прыжок, и водослив будет незатопленный. В нашем случае, принимая отметку гребня плотины $+3,00$, имеем

$$\frac{z}{P} = \frac{5,0 - 4,2}{3} \cong 0,27 < 0,75,$$

т. е. характерный затопленный водослив.

Далее, по Базену, имеем для такого водослива

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} \cdot 1,05 \left(1 + 0,2 \frac{h_1}{P} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{h}} \cdot b \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

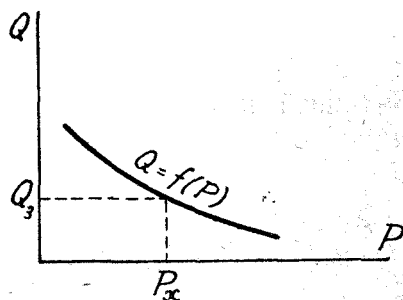
Принимая опять $\frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}=2,1$, имея $v_0=\frac{400}{300}=1,33\frac{\text{м}}{\text{сек}}$ и, следовательно, $\frac{v_0^2}{2g}\cong 0,1$, и находя, что

$$1,05\left(1+0,2\frac{h_1}{P}\right)V^{\frac{3}{2}}\frac{z}{h}=1,05\left(1+0,2\frac{1,2}{3,00}\right)V^{\frac{3}{2}}\frac{0,8}{2}\cong 0,8,$$

получаем

$$Q=2,1\cdot 0,8\cdot 50\cdot 3,04\cong 255,4 < 400.$$

Таким образом, если расположить гребень плотины на уровне $+3,00\text{ м}$, вода в количестве $400\frac{\text{м}^3}{\text{сек}}$ не пройдет через плотину при условии расположения подпорного горизонта на уровне $+5,00\text{ м}$; необходимо, следовательно, понизить гребень плотины до такого уровня, чтобы указанные $400\frac{\text{м}^3}{\text{сек}}$ прошли между гребнем плотины и уровнем $+5,00\text{ м}$. Чтобы решить эту задачу, приходится, ввиду сложной функциональной зависимости Q от P и от других величин, задаваться рядом значений P и, определив соответствующие значения Q , построить по этим данным кривую зависимости Q от P , а затем по этой кривой, зная Q_3 , легко найти и требуемую величину P_x .



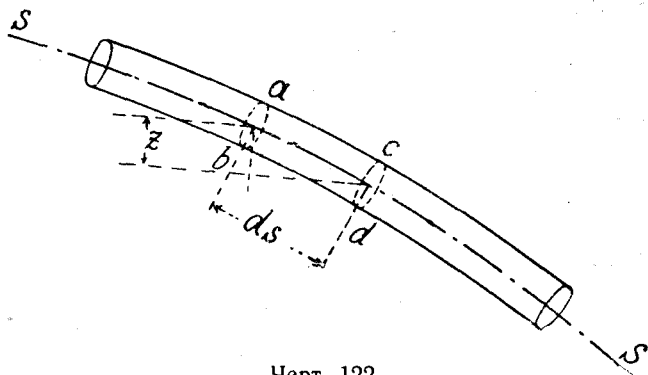
Черт. 121.

ГЛАВА VII.

Неустановившееся течение жидкости.

§ 1. Уравнение неустановившегося течения жидкости по криволинейной траектории.

Вообразим себе какую-либо токовую трубку вдоль оси ss , расположенной как угодно в пространстве (черт. 122); двумя сечениями ab и cd выделим элемент движущейся жидкости длиной ds ; пусть



Черт. 122.

самые площади сечений будут ω и $\omega + d\omega$; давления внутри жидкости в этих сечениях пусть будут, соответственно, p и $p + dp$, и, наконец скорости пусть будут, соответственно, v и $v + \frac{\partial v}{\partial s} ds$; тогда, очевидно, называя еще массу элемента жидкости через dm , и объемную силу, действующую по оси s , через S , будем иметь следующее соотношение:

$$dm \cdot S + p \cdot \omega - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) \left(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial s} ds \right) = dm \frac{dv}{dt};$$

раскрывая скобки и делая приведение, получаем:

$$dm S - \omega \frac{\partial p}{\partial s} ds - p \frac{\partial \omega}{\partial s} ds - \frac{\partial p}{\partial s} ds \frac{\partial \omega}{\partial s} ds = dm \frac{dv}{dt},$$

откуда, полагая изменение площади поперечного сечения ничтожно малым, находим:

$$S dm - \omega \frac{\partial p}{\partial s} ds = \frac{dv}{dt} dm, \quad (1)$$

но, так как, с одной стороны,

$$dm = \omega \cdot ds \frac{\delta}{g},$$

а, с другой стороны, объемную силу (отнесенную к единице массы), если иметь в виду только силу тяжести, можно выразить как

$$S = g \frac{dz}{ds},$$

то уравнение (1) принимает вид:

$$g \frac{dz}{ds} \varrho - \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dv}{dt} \varrho,$$

или, разделив на ϱ ,

$$g \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$

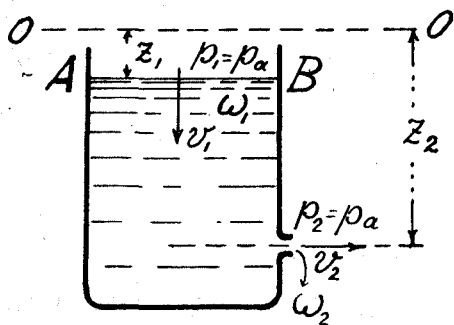
Наконец, ввиду того, что скорость v в неустановившемся течении есть функция времени и места, уравнение (2) преобразовывается в

$$g \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v, \quad (3)$$

каковое и является уравнением неустановившегося движения жидкости по какому угодно криволинейному пути (ss).

§ 2. Истечение воды из отверстий в сосудах при переменном уровне.

Имеем сосуд, наполненный водой до уровня AB . В боковой стенке сосуда имеется отверстие площадью ω_2 , первоначально закрытое. Если



Черт. 123.

открыть отверстие, то вода будет вытекать, и горизонт ее понижаться; требуется исследовать процесс этого истечения, предполагая, что вода в сосуд не доливается. Примем линию OO (черт. 123) за пересечение плоскости чертежа с основной плоскостью, от которой отсчитываем расстояния горизонта воды и оси отверстия; пусть эти расстояния будут z_1 и z_2 ; пусть скорости будут, соответственно, v_1 и v_2 ; тогда, при-

меняя уравнение (3) и интегрируя его, предварительно умножив на ds , в пределах от z_2 до z_1 , имеем:

$$g(z_2 - z_1) - \frac{1}{\varrho} (p_2 - p_1) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds, \quad (4)$$

но, так как p_1 и p_2 равны атмосферному давлению (p_a), то последнее соотношение, по сокращении и умножении на 2, примет вид:

$$2g(z_2 - z_1) = v_2^2 - v_1^2 + 2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds. \quad (5)$$

Ввиду того, что по закону сплошности движения

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2 = \omega v = \text{const},$$

где ω_1 площадь сечения сосуда на уровне первоначального горизонта воды, а ω — площадь сечения при любом горизонте воды в сосуде, то:

$$v_1 = v_2 \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

$$v = v_2 \frac{\omega_2}{\omega},$$

откуда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\omega_2}{\omega} \frac{dv_2}{dt};$$

поэтому из уравнения (5) получим:

$$2g(z_2 - z_1) = v_2^2 \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) + 2\omega_2 \frac{dv_2}{dt} \int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega}. \quad (6)$$

Если бы мы положили в этом уравнении $v_2 = \text{const}$ и, следовательно, $\frac{dv_2}{dt} = 0$, что, очевидно, будет иметь место при неизменном уровне, то получили бы соотношение, выведенное нами в задаче № 3, параграфа 2, Главы II.

Так как в сосуд вода не подтекает, то, очевидно,

$$\omega_2 v_2 dt = -\omega dz,$$

откуда

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{\omega_2}{\omega} \frac{v_2 dv_2}{dz} = -g \frac{\omega_2}{\omega} \frac{d\left(\frac{v_2^2}{2g}\right)}{dz} = -g \frac{\omega_2}{\omega} \frac{dh_2}{dz},$$

если обозначить $\frac{v_2^2}{2g}$ через h_2 ; уравнение (6), после подстановки в него значения $\frac{dv_2}{dt}$, введения $2gh_2$ вместо v_2^2 и возможных сокращений, примет вид:

$$\frac{dh_2}{dz} - \frac{\omega}{\int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega}} \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right) h_2 + \frac{\omega}{\omega_2^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega}} (z_2 - z_1) = 0,$$

или, вводя обозначения:

$$f(z) = -\frac{\omega}{\int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega}} \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right),$$

$$\varphi(z) = \frac{\omega}{\omega_2^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega}} (z_2 - z_1),$$

(при чем, очевидно, для определения $f(z)$ и $\varphi(z)$ необходимо знать закон изменения площади ω с длиной пути s), получим линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dh_2}{dz} + f(z)h_2 + \varphi(z) = 0, \quad (7)$$

интегрирование которого дает нам возможность определить h_2 , или, что все равно, v_2 :

$$h_2 = e^{-\int f(z)dz} \left[C - \int \frac{\varphi(z)dz}{e^{\int f(z)dz}} \right]; \quad (8)$$

здесь постоянную C приходится определять для каждого случая отдельно.

В частном случае, когда сосуд имеет постоянное сечение ($\omega = \omega_1 = \text{const}$), имеем:

$$f(z) = -\frac{\omega_1^2}{z_2 - z_1} \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right) = -\frac{\omega_1^2}{h} \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right) = -\frac{1}{h} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1 \right),$$

$$\varphi(z) = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2},$$

$$e^{-\int f(z)dz} = h^{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 1},$$

обозначая $z_2 - z_1$ через h ; теперь выражение для h_2 примет вид:

$$h_2 = h^{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 1} \left[C + \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2 \right) h^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}} \right]. \quad (9)$$

Полагаем для начального момента $h = h_0$ и $h_2 = h_{20}$, тогда

$$h_{20} = h_0^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1} \left[C + \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2 \right) h_0^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}} \right], \quad (10)$$

а теперь, исключая из (10) и (9) постоянную C , находим:

$$\frac{h_2}{h} = \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2} + \left[\frac{h_{20}}{h_0} - \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2} \right] \left(\frac{h}{h_0} \right)^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2} \quad (11)$$

или, обозначая $\frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}$ через a , $\left(\frac{h_{20}}{h_0} - \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2} \right) \frac{1}{h_0^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2}}$ через b ,

$$\frac{h_2}{h} = a + h \cdot b. \quad (12)$$

Из последнего соотношения имеем предельное значение $\frac{h_2}{h}$, полагая $h = 0$,

$$\lim \left(\frac{h_2}{h} \right) = \frac{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2} = a. \quad (13)$$

Допустим, что отверстие сосуда было сперва закрыто, а в момент $t=0$ его сразу открыли; тогда в этот момент, очевидно, $h_{20} = 0$, и из уравнения (11) получаем:

$$\frac{h_2}{h} = a \left[1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2} \right], \quad (14)$$

откуда видно, что $\frac{h_2}{h}$ все возрастает от 0 (при $h = h_0$) до a (при $h = 0$).

Допустим еще, что все время происходил приток воды в сосуд, а потом с момента $t=0$ приток прекратился, и сосуд начал опорожняться; очевидно, в момент прекращения притока истечение происходит при постоянном напоре, и

$$\frac{h_2}{h} = \frac{h_{20}}{h} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2} = \frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 1}. \quad (15)$$

С этого начального значения $\frac{h_2}{h}$ возрастает до $\frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 2}$, как следует из соотношения (13). Значение (15) отношение $\frac{h_2}{h}$ принимает,

согласно (14), при опускании поверхности воды до того момента, когда

$$\frac{h}{h_0} = \left[1 - \frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 2}} = \left[\frac{1}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 2}}.$$

При больших значениях отношения $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ величина $\frac{h}{h_0}$ очень близка к единице; в самом деле, например, при $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 20$, имеем $\frac{h}{h_0} = 0,985$.

Точно также при больших значениях $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ разница между $\frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}$ и $\frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 2}$ практически очень мала; так, например, при том же значении $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 20$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1} &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{400}} = \frac{400}{399} = 1,0025 \\ \frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 2} &= \frac{1}{1 - 2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{400}} = \frac{400}{398} = 1,00502; \end{aligned}$$

поэтому, во-первых, мы можем считать ускорительный период, когда $\frac{h_2}{h}$ поднимается от 0 до a , ничтожно коротким и полагать, что отношение $\frac{h_2}{h}$ мгновенно принимает значение $\frac{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}$; во-вторых, принимать оба, только что приведенные значения для $\frac{h_2}{h}$, одинаковыми и, так как они близки к единице, то считать возможным определять скорость v_2 из соотношения

$$\frac{h_2}{h} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{v_2^2}{2g} = h,$$

или, наконец,

$$v_2 = \sqrt{2gh};$$

практически, конечно, в последнее соотношение еще надо ввести скоростной коэффициент φ :

$$v_2 = \varphi \sqrt{2gh}.$$

Точно также можно исследовать изменение скорости v_1 . В самом деле, если в соотношение (5) подставить значения v_2 и v , выраженные через v_1 , то получим:

$$2g(z_2 - z_1) = v_1^2 \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 1 \right] + 2\omega_1 \frac{dv_1}{dt} \int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega}, \quad (16)$$

или, обозначая $\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 1 \right]$ через a , а $\omega_1 \int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega}$ через b , имеем:

$$2g(z_2 - z_1) = av_1^2 + 2b \frac{dv_1}{dt},$$

а так как

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_1}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} = v_1 \frac{dv_1}{dz_1} = \frac{1}{2} \frac{d(v_1)^2}{dz_1},$$

то

$$2g(z_2 - z_1) = av_1^2 + b \frac{d(v_1)^2}{dz_1}. \quad (17)$$

С момента открытия отверстия скорость v_1 , очевидно, должна изменяться от 0 (в этот момент $v_2 = 0$; см. выше) до некоторой наибольшей величины v_m ; при этом положение горизонта изменится с z_0 на малую величину Δz_m ; для этого периода скоростью v_1 , в виду ее очень малой величины, можно пренебречь, по сравнению с $\frac{d(v_1)^2}{dz_1}$; а тогда для момента наибольшей скорости, очевидно, можно положить $dz_1 = \Delta z_m$ и определить

$$v_1^2 = v_m^2 = \frac{2g(z_2 - z_0)}{b} \Delta z_m;$$

кроме того, так как в этот момент $\frac{d(v_1)^2}{dz_1} = 0$, $z_1 = z_0 + \Delta z_m$ и $v_1 = v_m$, то

$$2g(z_2 - z_0 - \Delta z_m) = \frac{a}{b} 2g(z_2 - z_0) \Delta z_m,$$

откуда

$$\Delta z_m = \frac{z_2 - z_0}{1 + \frac{a}{b}(z_2 - z_0)} = \frac{b}{a} \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_0 + \frac{b}{a}} = \frac{b}{a} \frac{1}{1 + \frac{\frac{b}{a}}{z_2 - z_0}} \cong \frac{b}{a}, \quad (18)$$

пренебрегая членом $\frac{b}{a(z_2 - z_0)}$ в знаменателе, ввиду его малости.

Время t_m , в течение которого существует ускорительный период для v_1 , найдется, если принимать движение равномерно-ускоренным, из выражения

$$\begin{aligned} t_m = 2 \frac{\Delta z_m}{v_m} &= 2 \frac{\Delta z_m \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{2g(z_2 - z_0)} \cdot \sqrt{\Delta z_m}} = 2 \frac{\sqrt{\Delta z_m} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{2g(z_2 - z_0)}} = \\ &= 2 \frac{b}{\sqrt{2g(z_2 - z_0)} a}. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, после ускорительного периода для v_1 начнется период замедления, ввиду уменьшения скорости v_2 . Положим сперва для этого периода, как для первого приближения, в выражении (17) $\frac{d(v_1)^2}{dz_1} = 0$; тогда

$$v_1^2 = \frac{2g(z_2 - z_1)}{a},$$

а отсюда при постоянном ω_1 и, следовательно, a , имеем:

$$\frac{dv_1^2}{dz_1} = -\frac{2g}{a}.$$

Соотношение (17), после подстановки этого значения $\frac{d(v_1)^2}{dz_1}$, примет вид

$$2g(z_2 - z_1) = av_1^2 - \frac{b}{a} 2g,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{(z_2 - z_1 + \frac{b}{a}) 2g}{a}}.$$

Время, которое потребуется для вытекания воды, начиная с замедительного периода до конца истечения, очевидно, будет:

$$t = \int_{z_0 - \Delta z_m}^{z_2} \frac{dz_1}{v_1} = \int_{z_0 - \Delta z_m}^{z_2} \frac{dz_1}{\sqrt{\frac{2g}{a} (z_2 - z_1 + \frac{b}{a})}}. \quad (20)$$

Задача № 1. Исследовать вытекание воды из сосуда постоянного сечения высотой 2 м при $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 20$.

Решение. Имеем:

$$a = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 1 = 399;$$

$$b = \omega_1 \int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{\omega} = z_2 - z_1 = 2 \text{ м.}$$

Из соотношения (18) находим величину понижения горизонта во время ускорительного периода

$$\Delta z_m = \frac{b}{a} = \frac{2}{399} \cong 0,005 \text{ м.}$$

Из соотношения (19) находим время ускорительного периода

$$t_m = 2 \frac{b}{\sqrt{2g(z_2 - z_1)a}} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 399}} = \frac{4}{125} = 0,032 \text{ сек.}$$

Наибольшая скорость в рассматриваемый период будет, так как
но (18) $\frac{\Delta z_m}{b} = \frac{1}{a}$,

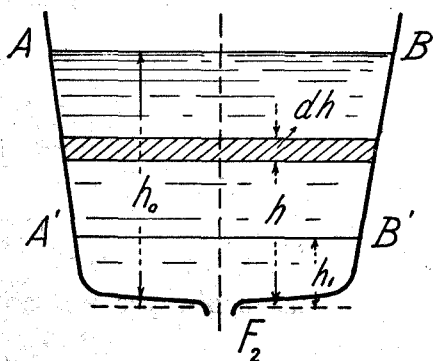
$$v_m = \sqrt{\frac{2g(z_2 - z_1)}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 2}{399}} = \sqrt{0,09834} = 0,3135 \frac{м}{сек}.$$

Наконец, время опорожнения найдется по уравнению (20):

$$\begin{aligned} t &= \int_{z_0 - \Delta z_m}^{z_2} \frac{dz_1}{\sqrt{\frac{2g}{a} \left(z_2 - z_1 + \frac{b}{a} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{a}}} \int_{z_0 - \Delta z_m}^{z_2} \frac{dz_1}{\sqrt{z_2 - z_1 + \frac{b}{a}}} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\frac{2g}{a}}} \left[\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{z_2 - z_0 + \Delta z_m + \frac{b}{a}} \right] = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\frac{2g}{a}}} \left[\sqrt{z_2 - z_0 + \Delta z_m + \frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\frac{2 \cdot 9,81}{399}}} \left[\sqrt{2 + 0,005 + \frac{2}{399}} - \sqrt{\frac{2}{399}} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{0,04905}} [\sqrt{2,01} - \sqrt{0,005}] = \frac{2}{0,2214} [1,418 - 0,0224] = 12,61 \text{ сек.} \end{aligned}$$

§ 3. Истечение воды из отверстий при переменном уровне, но неизменном притоке.

Выше было найдено, что при достаточно больших отношениях $\frac{\omega}{\omega_2}$ можно скорость истечения принимать равной $\sqrt{2gh}$. Пусть теперь



Черт. 124.

удовлетворялось соотношение

в секунду в сосуд подтекает воды $Q \text{ м}^3$; пусть в определенный момент t горизонт воды в сосуде находится над отверстием на высоте h ; в течение элемента времени dt пусть он опускается на dh ; тогда, очевидно, мы имеем право написать следующее соотношение:

$$-\omega dh = (\mu \omega_2 \sqrt{2gh} - Q) dt. \quad (21)$$

Далее, всегда имеется возможность подыскать такой напор k , чтобы удо-

$$Q = \mu \omega_2 \sqrt{2gk};$$

поэтому, уравнение (21) примет вид

$$-\omega dh = \mu \omega_2 \sqrt{2g} (\sqrt{h} - \sqrt{k}) dt,$$

откуда

$$dt = - \frac{\omega dh}{\mu \omega_2 \sqrt{2g} (\sqrt{h} - \sqrt{k})},$$

а время понижения горизонта с высоты h_0 на высоту h_1 будет, если только начало счета времени производить с того момента, когда горизонт находился на высоте h_0 :

$$t = \frac{1}{\mu \omega_2 \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_0} \frac{\omega dh}{\sqrt{h} - \sqrt{k}}. \quad (22)$$

Очевидно, для окончательного решения вопроса необходимо знать функциональную зависимость ω от h . Вопрос решается значительно проще, когда $\omega = \text{const}$; в этом случае имеем:

$$t = \frac{\omega}{\mu \omega_2 \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{h} - \sqrt{k}},$$

а, полагая $\sqrt{h} - \sqrt{k} = y$ и, следовательно, $dh = 2(y + \sqrt{k})dy$, получим:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\omega}{\mu \omega_2 \sqrt{2g}} \left[\int_{h_1}^{h_0} dy + \sqrt{k} \int_{h_1}^{h_0} \frac{dy}{y} \right] = \\ &= \frac{2\omega}{\mu \omega_2 \sqrt{2g}} \left[\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1} + \sqrt{k} \ln \frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Если подтекания воды в сосуд нет, то $Q=0=h$, и будем иметь:

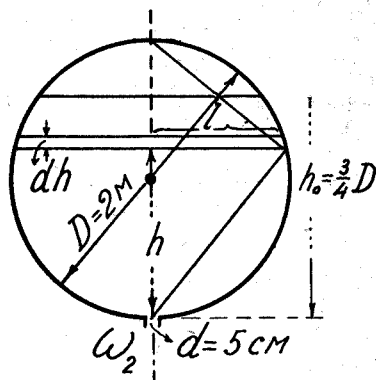
$$t = \frac{2\omega}{\mu \omega_2 \sqrt{2g}} [\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}]. \quad (24)$$

Время (T) полного опорожнения сосуда получим, полагая $h_1=0$; в этом случае находим:

$$T = \frac{2\omega h_0}{\mu \omega_2 \sqrt{2gh_0}}. \quad (25)$$

Последнее выражение, очевидно, говорит, что время полного опорожнения сосуда при переменном (от h_0 до 0) напоре h будет в 2 раза больше времени истечения из того же сосуда такого же количества воды, но при постоянном напоре $h=h_0$.

Задача № 2. Имеем цилиндрический котел диаметром $D=2$ м и длиной $L=8$ м; внизу имеется кран с отверстием диаметра $d=5$ см; котел наполнен водой так, что последняя заполняет его до высоты $h_0 = \frac{3}{4}D$; определить время опорожнения котла от воды через кран.



Черт. 125.

Решение. Так как подтекания воды в котел не происходит, то в соотношении (22) высота $h=0$, а так как, сверх того, котел должен опорожниться полностью, то и $h_1=0$; поэтому, заметив еще, что $h_0=\frac{3}{4}D$ и $\omega_2=\frac{\pi d^2}{4}$, имеем для данного случая

$$T=\frac{1}{\mu\omega_2\sqrt{2g}}\int_0^{h_0}\frac{\omega dh}{\sqrt{h}}. \quad (26)$$

Обозначая длину хорды, соответствующей напору h , через $2l$, очевидно, имеем

$$l^2=h(D-h),$$

поэтому

$$\omega=2lL=2\sqrt{h(D-h)}.L,$$

и, следовательно, соотношение (26) примет вид:

$$T=\frac{2L}{\mu\omega_2\sqrt{2g}}\int_0^{h_0}\sqrt{D-h}dh;$$

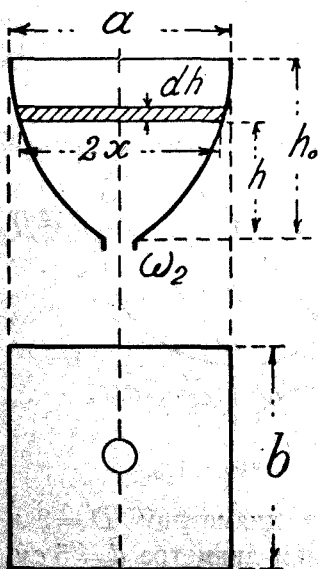
после интегрирования получим:

$$T=-\frac{4L}{3\mu\omega_2\sqrt{2g}}\left\{\left[D-\frac{3}{4}D\right]^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{7LD^{\frac{3}{2}}}{6\mu\omega_2\sqrt{2g}}.$$

Наконец, подставляя соответствующие значения L , ω_2 , D и g , и полагая $\mu=0,64$, как для отверстия с острыми кромками, находим:

$$T=\frac{7.8.2^{\frac{3}{2}}}{6.0,64.0,001962.4,429}=\frac{7.8.2,828}{6.0,64.0,00869}=\frac{7.22,624}{6.0,00556}=4747,2 \text{ сек} = 1 \text{ час } 19 \text{ мин. } 7,2 \text{ сек.}$$

Задача № 3. Дан сосуд указанной на чертеже (черт. 126) формы, наполненный доверху водой; при опоражнивании сосуда через отверстие в дне горизонт воды в каждую секунду опускается на 1 см. Определить форму сосуда и время истечения воды из него, если объем воды, налитый в него, равен $Q=1 \text{ м}^3$, а диаметр выпускного отверстия $d=5 \text{ см}$; длина сосуда (b) равна 2 м.



Черт. 126.

Решение. Обозначая ширину зеркала воды в сосуде в некоторый момент t после начала опоражнивания через $2x$ и соответствующий напор через h , очевидно,

имеем:

$$dt = - \frac{\omega dh}{\mu \omega_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}} = - \frac{2xb dh}{\mu \omega_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}},$$

откуда скорость опускания горизонта

$$u = - \frac{dh}{dt} = \frac{\mu \omega_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}}{2x \cdot b}. \quad (27)$$

Так как $u = \text{const} = 1 \frac{\text{см}}{\text{сек}} = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, то для двух каких-либо положений горизонта h_1 и h_2 имеем:

$$\frac{\mu \omega_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h_1}}{2x_1 b} = \frac{\mu \omega_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h_2}}{2x_2 b},$$

откуда

$$\frac{h_1}{x_1^2} = \frac{h_2}{x_2^2} = \text{const},$$

или, вообще, вводя некоторую постоянную $k = 2p = \text{const}$, имеем:

$$\frac{x^2}{h} = \text{const}; \quad x^2 = kh = 2ph.$$

Таким образом, боковые стенки сосуда должны быть очерчены по параболе. Так как скорость опускания горизонта $= 1 \frac{\text{см}}{\text{сек}} = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, то

$$\frac{\mu^2 \omega_2^2 2gh}{4b^2 x^2} = 0,01^2 = 0,0001;$$

откуда получаем уравнение параболы с численными коэффициентами:

$$x^2 = \frac{\mu^2 \omega_2^2 2g}{4 \cdot b^2 \cdot 0,0001} \cdot h = \frac{0,64^2 \cdot (0,00196)^2 \cdot 2 \cdot 9,81}{4 \cdot 4 \cdot 0,0001} h = 0,02012h. \quad (28)$$

Для начального момента $2x_0 = a$; $h = h_0$ и, кроме того, объем воды равен 1 м^3 ; поэтому

$$\frac{2}{3} a h_0 L = Q = 1,$$

откуда

$$h_0 a = \frac{3}{4}.$$

Вставляя отсюда значение $a = \frac{3}{4h_0}$ в соотношение (28), имеем:

$$\frac{9}{64h_0^2} = 0,02012h_0,$$

или

$$h_0^3 = \frac{9}{64.0,02012} = 6,834,$$

и, следовательно,

$$h_0 = \sqrt[3]{6,834} = 1,898 \text{ м},$$

а теперь

$$a = \frac{3}{4 \cdot h_0} = \frac{3}{7,592} = 0,395 \text{ м}.$$

Время опоражнивания сосуда, очевидно, будет равно

$$T = 189,8 \text{ сек} = 3 \text{ мин. } 9,8 \text{ сек}.$$

Задача № 4. Определить форму сосуда, в который налита вода в количестве 1 м^3 и который опоражнивается через отверстие в дне сосуда так, что скорость опускания горизонта воды, вообще, обратно пропорциональна напору, в начальный же период после открытия отверстия она равна $1 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$. Диаметр отверстия $d = 5 \text{ см}$; размер сосуда, нормальный к плоскости чертежа, постоянен и равен $0,5 \text{ м}$.

Решение. Скорость понижения горизонта может быть представлена вообще, как:

$$v = -\frac{dh}{dt} = \frac{\mu \omega_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}}{\omega}$$

или, называя ширину сосуда через $2x$, а длину через b , имеем:

$$v = \frac{\mu \cdot \omega_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}}{2x \cdot b}.$$

По условиям задачи скорость эта обратно пропорциональна напору; поэтому, называя коэффициент пропорциональности через k , получаем:

$$\frac{\mu \cdot \omega_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}}{2xb} = \frac{k}{h},$$

откуда находим уравнение кривой, очерчивающей стенки сосуда:

$$h = Bx^{\frac{2}{3}},$$

если обозначить $\left(\frac{2bk}{\mu \omega_2 \sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}}$ через B .

Для начального момента открытия отверстия, когда $h = h_0$ и $x = x_0$ по условиям задачи

$$\frac{k}{h_0} = 0,01 \text{ м},$$

а потому

$$h_0 = \left(\frac{2b \cdot 0,01}{\mu \cdot \omega_2 \sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} h_0^{\frac{2}{3}} x_0^{\frac{2}{3}},$$

откуда, принимая $\mu = 0,64$, деля обе части равенства на $h_0^{\frac{2}{3}}$ и возвышая в 3-ю степень, находим

$$h_0 = \left(\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 0,01}{0,64 \cdot 0,00196 \cdot 4,429} \right)^2 x_0^2 = 3,24 x_0^2;$$

как следствие имеем еще:

$$h = 0,01 h_0 = 0,0324 x_0^2.$$

Так как элементарный объем воды в сосуде, вырезанный горизонтальными плоскостями, проведенными от дна сосуда на расстоянии h и $h + dh$, можно представить в виде:

$$dq = 2xbdh = \frac{4}{3} Bbx^{\frac{2}{3}} dx,$$

то полный объем воды в сосуде до начального горизонта выразится:

$$q = \frac{4}{3} B \cdot b \int_0^{x_0} x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{4}{5} Bbx_0^{\frac{5}{3}}.$$

Этот объем по условиям задачи равен 1 м^3 , а потому:

$$\frac{4}{5} B \cdot b \cdot x_0^{\frac{5}{3}} = 1.$$

Внося сюда значения B , b и k , находим:

$$\frac{4}{5} \left(\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 0,0324 x_0^2}{0,64 \cdot 0,00196 \cdot 4,429} \right)^{\frac{2}{3}} 0,5 x_0^{\frac{5}{3}} = 1,$$

откуда, после производства вычислений, имеем:

$$x_0 = 0,917$$

и далее:

$$h_0 = 3,24 x_0^2 = 3,24 \cdot 0,917^2 = 2,725 \text{ м};$$

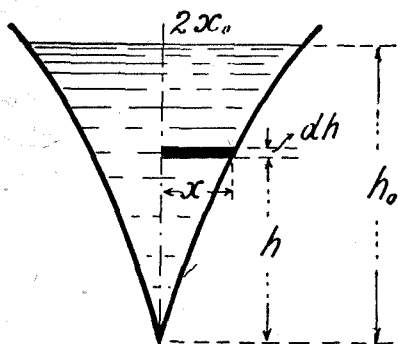
$$h = 0,0324 x_0^2 = 0,0324 \cdot 0,917^2 = 0,0272;$$

$$B = \left(\frac{2 \cdot b \cdot k}{\mu \cdot \omega_2 \sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 0,0272}{0,64 \cdot 0,00196 \cdot 4,429} \right)^{\frac{2}{3}} = 2,88,$$

и, наконец,

$$h = Bx^{\frac{2}{3}} = 2,88 x^{\frac{2}{3}}.$$

Самая форма очертания сосуда изображена на чертеже 127 (построена по точкам). Время полного опорожнения сосуда определяется из соотношения



Черт. 127.

$$dt = - \frac{\omega dh}{\mu \cdot \omega_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}} = - \frac{2xb dh}{\mu \cdot \omega_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}},$$

которое, после подстановки в него значения x , примет вид

$$dt = - \frac{2bh^{\frac{3}{2}} dh}{\mu \cdot \omega_2 \sqrt{2g} \cdot B^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}}} = - \frac{2bh \cdot dh}{\mu \cdot \omega_2 \sqrt{2g} \cdot B^{\frac{3}{2}}};$$

подставляя в последнее уравнение численные значения входящих в него членов, находим:

$$dt = - \frac{2 \cdot 0,5}{0,64 \cdot 0,00196 \cdot 4,429 \cdot 2,88^{\frac{3}{2}}} \cdot h dh = - 36,9 \cdot h dh;$$

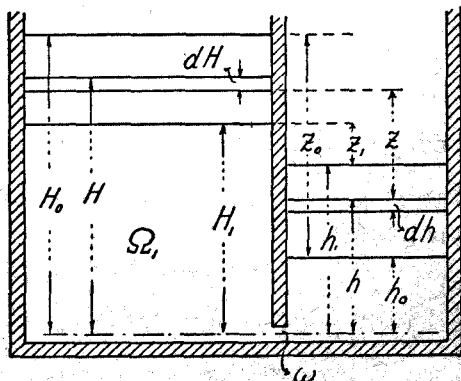
а теперь, интегрируя, имеем:

$$T = 36,9 \int_0^{h_0} h dh = 18,45 \left[h^2 \right]_0^{h_0} = 18,45 \cdot 7,425 = 137 \text{ сек} \cong 2 \text{ мин. } 17 \text{ сек.}$$

§ 4. Перетекание воды между двумя сосудами.

Имеются два, сообщающиеся через отверстие площадью ω , сосуда, площади поперечных сечений которых Ω_1 и Ω_2 . Первоначальные высоты стояния горизонтов воды в сосудах над осью отверстия пусть будут соответственно H_0 и h_0 ; вода перетекает из левого сосуда в правый, и требуется определить время, в течение которого в левом сосуде горизонт опустится до высоты H_1 над осью отверстия, а в правом поднимется на высоту h_1 над той же осью.

Называя высоты стояния горизонта воды в сосудах в некоторый момент t через H и h , мы для элемента времени dt , очевидно, можем написать следующие соотношения:



Черт. 128.

$$-\Omega_1 dH = \Omega_2 dh = \mu \omega \sqrt{2gz} dt, \quad (29)$$

если еще введем обозначение

$$H - h = z. \quad (30)$$

Последнее соотношение дает нам при дифференцировании

$$dH - dh = dz. \quad (31)$$

Определяя теперь dh из (29) через dH и подставляя найденное значение в (31), имеем:

$$dH + dH \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = dz,$$

или

$$dH \left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{\Omega_2} \right) = dz,$$

откуда

$$dH = \frac{\Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} dz. \quad (32)$$

Вставляя это значение dH в (29), получим:

$$-\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} dz = \mu \omega \sqrt{2gz} dt;$$

определяем отсюда dt :

$$dt = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \frac{dz}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gz}},$$

и, интегрируя в указанных выше пределах, при чем начало счета времени относим опять к моменту, когда горизонты были на высотах H_0 и h_0 , имеем:

$$t = \frac{1}{\mu \cdot \omega \sqrt{2g}} \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z}} \cdot \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}, \quad (33)$$

если обозначим $H_0 - h_0 = z_0$ и $H_1 - h_1 = z_1$.

Для окончательного решения последнего соотношения необходимо знать функциональную зависимость Ω_1 и Ω_2 от z (например, $\Omega_1 = \psi(z)$ и $\Omega_2 = f(z)$). Задача опять значительно упрощается, когда $\Omega_1 = \text{const}$ и $\Omega_2 = \text{const}$; тогда соотношение (33) принимает вид:

$$t = \frac{1}{\mu \cdot \omega \sqrt{2g}} \cdot \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

а после интегрирования, имеем:

$$t = \frac{2\Omega_1 \Omega_2}{\mu \cdot \omega \sqrt{2g} (\Omega_1 + \Omega_2)} [\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1}]. \quad (34)$$

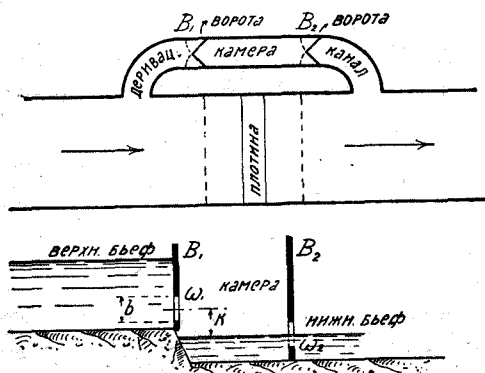
Время (T) сравнения горизонтов наступит, очевидно, при $z_1 = 0$, и будет:

$$T = \frac{2\Omega_1\Omega_2\sqrt{z_0}}{\mu\omega\sqrt{2g(\Omega_1 + \Omega_2)}}, \quad (35)$$

каковое выражение при очень больших отношениях $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ обращается, очевидно, в выражение (25).

Задача о перетекании воды из одного сосуда (камеры, водоема) в другой часто встречается в гидротехнике. Как пример, укажем на применение этой задачи при шлюзовании рек, когда для беспрепятственного прохода судов на порожистых или вообще мелких участках реки поднимают уровень воды в последней плотинами, а образующиеся при этом верхний (выше плотины) и нижний (ниже плотины) участки (бьефы) с более или менее значительной разностью горизонтов соединяют, так называемым, деривационным каналом, снабженным особыми, одной или несколькими (когда разность горизонтов выше 9—10 метров), камерами (шлюзами), закрывающимися со стороны бьефов воротами (обыкновенно двустворчатыми).

Общее расположение устройства видно на прилагаемом чертеже (черт. 129). Для плотного запирания ворот, последние могут открываться только против течения, что, в свою очередь, вносит обязательство устраивать или в самих воротах, или в боковых стенках в обход



Черт. 129.

ворот, отверстия (с некоторыми площадями ω_1 и ω_2). Если встречается надобность перевести судно, например, из верхнего бьефа в нижний, то открывают отверстие (или отверстия) в верхних воротах (ω_1) и наполняют камеру водой до сравнения горизонтов воды в последней и в верхнем бьефе; открывая после этого верхние ворота (B_1) (что сделать теперь, ввиду отсутствия напора, уже легко), переводят судно из верхнего бьефа в камеру, и снова закрывают ворота, а вместе с

тем и отверстия в них; затем, открывают отверстия (ω_2) в нижних воротах и спускают горизонт воды в камере до уровня воды в нижнем бьефе, после чего можно открыть нижние ворота (B_2) и вывести судно в нижний бьеф. Для перевода судна из нижнего бьефа в верхний, очевидно, операцию открывания и закрывания ворот приходится вести в обратном порядке: если камера была наполнена водой до уровня верхнего бьефа, то сперва открывают отверстия в нижних воротах (B_2)

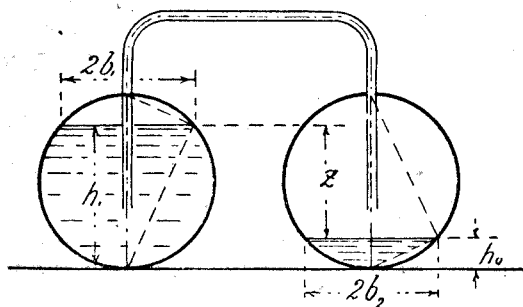
и спускают воду до уровня нижнего бьефа; открывая, затем, нижние ворота, проводят судно в камеру, закрывают нижние ворота, закрывают в них отверстия и, открывая отверстия в верхних воротах, наполняют камеру до уровня верхнего бьефа, когда можно открыть верхние ворота и вывести судно из камеры в верхний бьеф. Как видно из только что изложенного, вопрос о производительности шлюза или о количестве пропускаемых через шлюз в течение суток судов сводится к задачам определения времени опоражнивания и наполнения камеры водой при переменном напоре; при чем наполнение камеры водой, строго говоря, необходимо было бы разбить на три отдельные фазы: 1) свободное истечение, когда вода при неизменном напоре поднимается на высоту $k - \frac{b}{2}$, где k —вертикальное расстояние между горизонтом воды в камере (уровень нижнего бьефа) и осью отверстия в воротах B_1 , а b —высота этого отверстия; 2) вытекание, когда горизонт воды в камере поднимается на высоту b ; 3) перетекание под водой, в течение которого горизонт воды в камере поднимается от верхней кромки отверстия до уровня воды в верхнем бьефе. Из трех перечисленных фаз вторая наиболее сложная, ввиду недостаточной выясненности коэффициентов истечения для такого случая, и не свободна от ошибок. Обыкновенно, поэтому, вычисление упрощают тем, что свободное истечение считают продолжающимся до центра отверстия в воротах, а отсюда уже считают перетекание под водой.

В случае недостаточности одной камеры, что бывает, когда разность горизонтов воды в верхнем и нижнем бьефах велика для одной камеры, устраивают несколько камер—2-3-4 (например, по проекту проф. И. Г. Александрова¹⁾ утилизации водной энергии Днепровских порогов в связи с шлюзованием предположено, при общей разности горизонтов в бьефах в 36,89 м, устройство 4-х камерного шлюза с падением одной ступени в 9,22 м), отделенных друг от друга воротами. Наполнение верхней камеры и опоражнивание нижней в этом случае производится так же, как и в предыдущем однокамерном шлюзе, перетекание же между двумя камерами (в случае 2-х камерного шлюза) после закрытия крайних—верхних и нижних—ворот и открытия отверстия в средних воротах, должно быть подразделено на две фазы: 1) первая длится, пока горизонт воды во второй камере поднимается до середины открытого в средних воротах отверстия, 2) вторая продолжается, затем, до полного сравнения уровней воды в обеих камерах.

Задача № 5. Две бочки, диаметром $D=2$ м и длиной $L=4$ м, поставлены рядом; одна бочка полна водой, другая пустая; требуется

¹⁾ И. Г. Александров. Днепровское строительство и его экономическое значение. Харьков, 1925 г., стр. 19.

определить время, необходимое для перетекания воды из первой бочки во вторую до тех пор, пока уровни воды в них сравняются; перетекание совершается посредством сифона диаметром 5 см и длиной 3 м.



Черт. 130.

Ввиду того, что по условию диаметры бочек одинаковы, при перетекании воды площади поперечных сечений бочек на одновременных горизонтах воды будут тоже одинаковы, т. е. $\omega_1 = \omega_2$, что легко усматривается и непосредственно из чертежа 130, где, очевидно, в любой момент $2b_1 = 2b_2$. По чертежу:

$$b_1 = \sqrt{h_1(D - h_1)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{array}{l} b_2 = \sqrt{h_0(D - h_0)} \\ h_1 - h_0 = z. \end{array} \right\} \quad (37)$$

Из соотношений (36), принимая во внимание вышесказанное относительно равенства площадей, имеем:

$$\sqrt{h_1(D - h_1)} = \sqrt{h_0(D - h_0)},$$

или

$$h_1(D - h_1) = h_0(D - h_0),$$

откуда легко получаем

$$h_1 + h_0 = D. \quad (38)$$

Теперь из (37) и (38) следует:

$$h_1 = \frac{D + z}{2},$$

$$h_0 = \frac{D - z}{2}.$$

Вставляя последние значения h_1 и h_0 в уравнение (36), находим:

$$b_1 = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - z^2},$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - z^2},$$

и, следовательно, для площадей ω_1 и ω_2 имеем выражение:

$$\omega_2 = \omega_1 = 2b_1L = 2b_2L = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - z^2} \cdot L = \sqrt{D^2 - z^2} \cdot L.$$

Таким образом, для времени полного сравнения горизонтов воды в бочках получим соотношение:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\mu \cdot \omega \sqrt{2g}} \int_0^{z_0} \frac{\omega_1^2}{2\omega_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2\mu \cdot \omega \sqrt{2g}} \int_0^{z_0} \frac{\omega_1}{\sqrt{z}} dz = \\ &= \frac{L}{2\mu \cdot \omega \sqrt{2g}} \int_0^{z_0} \frac{\sqrt{D^2 - z^2}}{\sqrt{z}} dz. \end{aligned} \quad (39)$$

Коэффициент μ определяем из таких рассуждений: потеря в напоре при протекании воды в сифоне складывается из потерь: при входе, при выходе, в закруглениях и по длине сифона, и на основании данных Главы VI может быть выражена, как

$$h_w = \frac{v^2}{2g} \left(0,5 + 1 + 2 \cdot 0,25 + 0,025 \frac{3}{0,05} \right) = 3,5 \frac{v^2}{2g}.$$

Так как количество воды, протекающей в сифоне, может быть, очевидно, представлено выражением $\omega \sqrt{2g \left(z - 3,5 \frac{v^2}{2g} \right)}$, где ω — площадь поперечного сечения сифона, то, заменяя еще в этом выражении скорость v через количество воды (Q), имеем:

$$Q = \omega \sqrt{2g \left(z - 3,5 \frac{Q^2}{\omega^2 2g} \right)},$$

откуда

$$Q^2 = \omega^2 2gz - 3,5 Q^2,$$

и далее

$$Q^2 = \frac{\omega^2 2gz}{4,5},$$

а теперь:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{4,5}} \omega \sqrt{2gz} = \frac{1}{2,12} \omega \sqrt{2gz} \cong 0,47 \omega \sqrt{2gz},$$

и мы видим, что для данного случая можно принять

$$\mu = 0,47.$$

Что касается $\int_0^{z_0} \frac{\sqrt{D^2 - z^2}}{\sqrt{z}} dz$, то мы его найдем разложением в ряд подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{D^2 - z^2}}{\sqrt{z}} &= \sqrt{\frac{D^2 - z^2}{z}} = \left(\frac{D^2}{z} - z \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{D^2}{z} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{D^2}{z} \right)^{\frac{1}{2}-1} z - \frac{1}{8} \left(\frac{D^2}{z} \right)^{\frac{1}{2}-2} z^2 \dots = \\ &= \frac{D}{z^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{D} - \frac{1}{8} \frac{z^{\frac{5}{2}}}{D^3} \dots, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int_0^{z_0} \frac{\sqrt{D^2 - z^2}}{\sqrt{z}} dz = \int_0^{z_0} \left[\frac{D}{z^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{D} - \frac{1}{8} \frac{z^{\frac{7}{2}}}{D^2} \dots \right] dz =$$

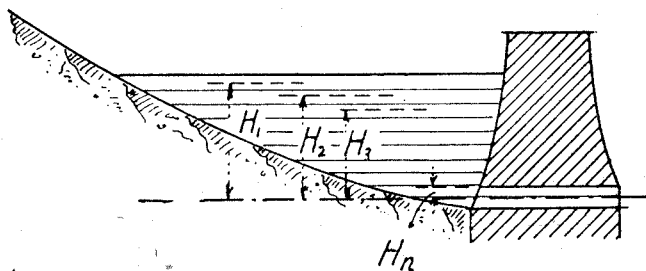
$$= \left[2Dz^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5} \frac{z^{\frac{5}{2}}}{D} - \frac{1}{36} \frac{z^{\frac{9}{2}}}{D^2} \dots \right]_0^{z_0} = 5,64 - 0,56 - 0,075 - \dots \cong 5,$$

а теперь из (39) следует, что время, необходимое для сравнения горизонтов воды в бочках, будет:

$$T = \frac{L.5}{2 \cdot \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}} = \frac{4.5}{2,0,47,0,00196,4,429} = 2451 \text{ сек} = 40 \text{ мин. } 51 \text{ сек.}$$

§ 5. Время опоражнивания водоемов неправильной формы.

Если приходится определять время опоражнивания водоемов неправильной формы, можно поступить так: пусть нам предложено определить время опоражнивания пруда, изображенного на чертеже (черт. 131). Весь пруд разбиваем горизонтальными плоскостями на



Черт. 131.

слои; чем больше число последних, тем точнее будут наши подсчеты. Пусть число слоев будет n . Из предварительных промеров и съемок пруда в горизонталях, выясняются поперечные сечения пруда и площади слоев,

а, следовательно, и объемы воды в каждом слое; пусть они будут, соответственно, $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$. Пусть также средние напоры для каждого слоя будут, соответственно, $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$. Если допустить, что задача о вытекании каждого слоя уже решена, и мы знаем времена истечения слоев $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, то, очевидно, мы можем написать ряд следующих соотношений:

$$Q_1 = \mu \cdot \omega \sqrt{2g H_1} \cdot t_1$$

$$Q_2 = \mu \cdot \omega \sqrt{2g H_2} \cdot t_2$$

$$Q_3 = \mu \cdot \omega \sqrt{2g H_3} \cdot t_3$$

$$\dots$$

$$Q_n = \mu \cdot \omega \sqrt{2g H_n} \cdot t_n,$$

где ω — площадь отверстия водоспускной трубы, а μ — коэффициент расхода. Из только что написанных соотношений имеем времена исте-

чения каждого слоя:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{Q_1}{\mu \cdot \omega \sqrt{2gH_1}} \\ t_2 &= \frac{Q_2}{\mu \cdot \omega \sqrt{2gH_2}} \\ t_3 &= \frac{Q_3}{\mu \cdot \omega \sqrt{2gH_3}} \\ &\dots \dots \dots \\ t_n &= \frac{Q_n}{\mu \cdot \omega \sqrt{2gH_n}}, \end{aligned}$$

складывая которые, получим время опораживания пруда:

$$T = \sum_{i=1}^{i=n} t_i = \frac{1}{\mu \cdot \omega \sqrt{2g}} \left[\frac{Q_1}{\sqrt{H_1}} + \frac{Q_2}{\sqrt{H_2}} + \frac{Q_3}{\sqrt{H_3}} + \dots + \frac{Q_n}{\sqrt{H_n}} \right]. \quad (40)$$

Более точный расчет времени опораживания водоемов получим, если воспользуемся правилом Симпсона. Как известно, по этому правилу, если разделить наш водоем по высоте на четное число равной толщины слоев, например $2n$, и обозначить ординаты слоев через $H_0, H_1, H_2, \dots, H_{2n}$, а соответствующие площади слоев через $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_{2n}$, то время опораживания может быть представлено соотношением¹⁾:

$$\begin{aligned} T = \frac{H_0 - H_{2n}}{3 \cdot 2n \cdot \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}} &\left\{ \frac{\Omega_0}{\sqrt{H_0}} + \frac{\Omega_{2n}}{\sqrt{H_{2n}}} + 4 \left[\frac{\Omega_1}{\sqrt{H_1}} + \frac{\Omega_3}{\sqrt{H_3}} + \dots \right] + \right. \\ &\left. + 2 \left[\frac{\Omega_2}{\sqrt{H_2}} + \frac{\Omega_4}{\sqrt{H_4}} + \dots \right] \right\}. \quad (41) \end{aligned}$$

1) По правилу Симпсона для приближенного вычисления интеграла $\int_{z_{2n}}^{z_0} f(z) dz$ необходимо разделить промежуток $z_0 - z_{2n}$ на четное число равных частей, для каждого полученного значения $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{2n}$ определить каким-либо образом значения подынтегральной функции $f(z)$ и, если эти значения будут: $f(z_0), f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_{2n})$, то тогда:

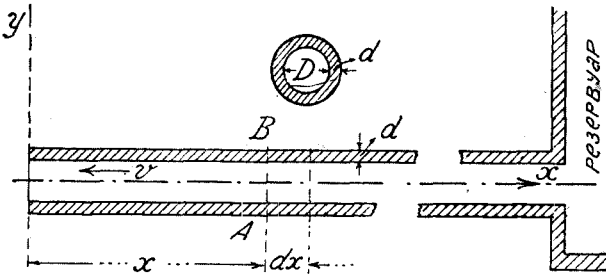
$$\int_{z_{2n}}^{z_0} f(z) dz = \frac{z_0 - z_{2n}}{3 \cdot 2n} \left\{ f(z_0) + f(z_{2n}) + 4 [f(z_1) + f(z_3) + \dots] + 2 [f(z_2) + f(z_4) + \dots] \right\}.$$

В нашем случае, очевидно, приходится приближенно определять величину $\int_{H_{2n}}^{H_0} \frac{\Omega dh}{\sqrt{h}}$ (см. соотношение (22) при $k=0$) и, следовательно, для каждого слоя с ординатами $H_0, H_1, \dots, H_{2n}$ и с площадями сечений слоев $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{2n}$ значения подынтегральной функции будут:

$$f(z_0) = \frac{\Omega_0}{\sqrt{H_0}}; \quad f(z_1) = \frac{\Omega_1}{\sqrt{H_1}}; \quad \dots; \quad f(z_{2n}) = \frac{\Omega_{2n}}{\sqrt{H_{2n}}}.$$

§ 6. Переменное течение в трубах¹⁾.

Представим себе, что в горизонтально расположенной трубе внутреннего радиуса R , стенки которой имеют толщину d (из материала с модулем упругости, равным E), движется вода с некоторой определенной скоростью v в направлении, обратном положительному направлению оси x -ов. Если в слое, отстоящем на расстоянии x от начала координат (конец трубы), давление будет p , то основное уравнение (2) движения жидкости для данного случая примет



Черт. 132.

вид (пренебрегая силой тяжести):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (42)$$

Положим, что в некоторый момент какой-нибудь возбудитель подействовал на этот слой движущейся в трубе воды и изменил, как скорость движения, так и давление (например, труба была сразу закрыта, или открыта больше, чем нормально и т. д.), и пусть давление при этом увеличилось с p_0 до $p_0 + \frac{\partial p}{\partial t} dt$. Под влиянием такого увеличения давления слой жидкости толщиной dx сожмется вдоль оси на некоторую величину λ_1 .

Кроме того, под влиянием того же увеличения давления труба в этом месте расширится в радиальном направлении, что вызовет новое сжатие слоя dx вдоль оси x на величину λ_2 , так что полное сжатие слоя жидкости будет:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Первое сжатие, применяя к воде закон Гука, может быть представлено в виде:

$$\lambda_1 = \frac{dx}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} dt,$$

¹⁾ Жуковский Н. Е. Бюллетени Политехи. Общ. 1899. № 5.

Allievi L. Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen. Berlin, 1909.

Пинегин, В. Н. К вопросу о скорости распространения колебательных движений в жидкостях и газах, заключенных в трубы, в связи с упругостью материала последних. Журнал Прикладной Физики. Том I, Выпуски 1—4 и 5—8. Москва, 1925.

R. Escher. Über den Wasserschlag. Die Turbine. 1910, H. 1.

где ε — модуль упругости воды, равный $2,07 \cdot 10^8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$ (при 0°C по Allievi и Grassi). Второе сжатие получится из увеличения dR радиуса трубы при увеличении давления на $\frac{\partial p}{\partial t} dt$; согласно с законами теории упругости:

$$dR = \frac{R^2}{Ed} \frac{\partial p}{\partial t} dt.$$

Такое увеличение внутреннего радиуса трубы вызывает увеличение объема воды на

$$\pi D dR dx = \pi R^2 \lambda_2,$$

если через D обозначить внутренний диаметр трубы, так как при этом должна на величину λ_2 уменьшиться длина слоя dx . Отсюда:

$$\lambda_2 = \frac{D \cdot dR \cdot dx}{R^2} = \frac{D dx}{Ed} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

и, следовательно,

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = dx \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ed} \right] \frac{\partial p}{\partial t} dt. \quad (43)$$

Следствием сжатия слоя dx на величину λ будет уменьшение скорости движения воды в сечении AB , которое найдем из соотношения:

$$\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dt - v dt = \lambda.$$

Сравнивая последнее выражение с (43), будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{p \partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ed} \right]. \quad (44)$$

Если теперь в выражениях (42) и (44) ввести вместо давления высоту давления по соотношению $p = \delta y$, и, следовательно, $\frac{\partial p}{\partial t} = \delta \frac{\partial y}{\partial t}$

и $\frac{\partial p}{\partial x} = \delta \frac{\partial y}{\partial x}$, то получим:

$$\left. \begin{aligned} g \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \delta \frac{\partial y}{\partial t} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ed} \right] \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Вводя обозначение

$$\delta \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ed} \right] = \frac{1}{a^2}, \quad (46)$$

и пренебрегая в первом из уравнений (45) вторым членом правой

части $\left(-v \frac{\partial v}{\partial x}\right)$, как не влияющим заметно на окончательный результат, ввиду вообще небольших значений скорости v , по сравнению со скоростью распространения изменений давления, легко приводим уравнения (45) к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= g \frac{\partial y}{\partial x} & a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t} & a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad (47)$$

Последние два уравнения представляют собой обычные дифференциальные уравнения распространения колебательных движений, аналогичных звуковым, в какой-либо среде и имеют общие интегралы вида

$$\begin{aligned} y &= f_1(x+at) + f_2(x-at); \\ v &= \psi_1(x+at) + \psi_2(x-at). \end{aligned}$$

Частными интегралами будут выражения:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} F\left(t - \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

откуда, исключая функцию $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$, получаем:

$$y = y_0 + \frac{a(v_0 - v)}{g}. \quad (49)$$

Последнее соотношение дает ключ к решению, например, вопроса об изменении давления в трубе, когда конец трубы закрывается задвижкой (водопроводные трубы, трубы, подводящие воду к турбинам, и т. д.); из него легко усматривается, что при указанном закрытии, когда переменная скорость (v) воды в трубе (v_0 — начальная скорость воды в трубе) уменьшается до нуля (при полном закрытии трубы), происходит увеличение давления до наивысшей величины

$$\frac{av_0}{g},$$

сверх нормального давления y_0 ; если бы, наоборот, задвижкой можно было открыть отверстие трубы больше нормального, при котором скорость движения воды в трубе v_0 , то тогда v начало бы делаться больше v_0 , и мы получили бы в трубе понижение давления, по сравнению с нормальным давлением y_0 .

Ввиду того, что скорость истечения воды из трубы (назовем ее u), и связанная с ней соотношением $u\omega = v\Omega$ [где ω — площадь сечения выходного отверстия трубы, а Ω — площадь сечения последней] скорость в трубе v , являются функциями не только переменной величины ω ,

но и появляющегося при этом повышении или понижении давления, изменение давления, даваемое уравнением (49), не выражается простой линейной зависимостью от скорости v , а является более сложной функцией, именно функцией 2-го порядка, дающей в координатах y и v или y и t , если ω или v изменяются пропорционально времени, параболическую кривую OA (черт. 133).

Однако, указанное повышение давления (при закрытии выходного отверстия трубы) может развиваться беспрепятственно только в том случае, если труба будет бесконечно длинной (теоретически); на самом деле, вследствие всегда конечной длины трубы, явление протекает в сильно измененном виде, в зависимости от длины трубы и времени (T) закрывания конца последней. В самом деле, появившееся повышенное давление не может существовать только у конца трубы; оно, очевидно, начнет распространяться по трубе от этого конца к резервуару, из которого труба исходит, и распространяться это повышение давления будет со скоростью a ; что действительно a есть скорость распространения повышения давления (ударной волны), это легко можно усмотреть, с одной стороны, из того, что частным интегралом уравнений (47) является также выражение

$$x = at + c;$$

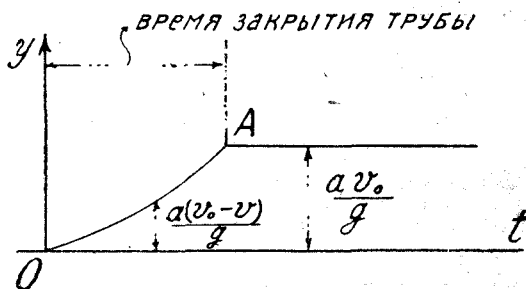
(чтобы убедиться в этом, достаточно подставить это значение x в уравнения (47)), в которое давление y не входит, а это значит, что если перемещаться в трубе со скоростью a , то мы будем встречать одно и то же давление, т. е. мы будем перемещаться со скоростью распространения давления; с другой стороны, на то, что a есть скорость распространения давления, указывает и самое выражение для a (см. 46):

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\delta}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ed}}}, \quad (50)$$

которое при $E = \infty$, что равносильно предположению об отсутствии влияния стенок на весь рассматриваемый процесс, обращается в

$$a = \sqrt{\frac{g\varepsilon}{\delta}},$$

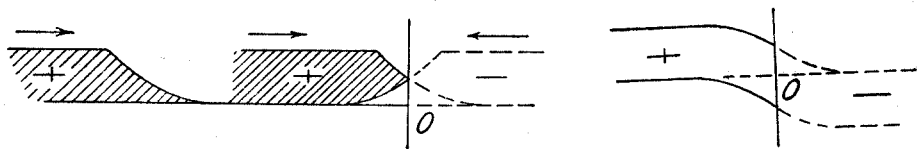
каковое выражение есть, как известно, скорость распространения звука в воде. Значение a (по 50) для встречающихся в практике труб — желез-



Черт. 133.

ных, чугунных, свинцовых, в среднем равно $1000 \frac{м}{сек}$, что легко проверить простым подсчетом.

Распространяющееся с такою скоростью к резервуару повышенное давление (сверхдавление, ударная волна), имеющее, очевидно, вид, изображенный на прилагаемом чертеже, в определенный момент, через $\frac{L}{a}$ секунд, где L — длина трубы, достигнет резервуара; однако, достигнув, оно не останется существовать неизменно, так как частички жидкости, подошедшие уже из трубы к резервуару, со стороны частичек, следующих сзади, находятся под большим давлением,

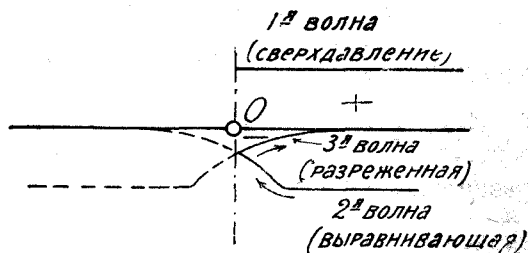


Черт. 134.

чем давление в резервуаре; они начнут отходить в резервуар, а этот отход начнет захватывать все новые и новые слои, позади их, и происходящее отсюда понижение давления до нормального (выравнивание) будет распространяться от резервуара к концу трубы; частички воды получают при этом скорость, равную прежней скорости течения к концу трубы, но направленную в обратную сторону — к резервуару (мы предполагаем, что сверхдавление все перешло в скорость, как раньше в период закрытия скорость переходила в сверхдавление). Самый процесс выравнивания давления можно представить себе так, что, когда сверхдавление (положительная волна) дойдет до резервуара, из последнего, как бы, начинает двигаться по направлению к концу трубы пониженное давление в виде отрицательной волны, которое и будет выравнивать давление, как это изображено на прилагаемых чертежах.

Если волна пониженного давления, выравнивающая давление в трубе идвигающаяся к концу трубы, достигнет, наконец, последнего (опять через $\frac{L}{a}$ секунд) в то время, как отверстие уже совершенно закрыто, то, ввиду того, что все частицы воды двигаются в направлении к резервуару, и новой воды к концу трубы ниоткуда не поступает, у последнего начнет появляться дальнейшее разрежение, а, следовательно, и дальнейшее понижение давления, равное, очевидно, по величине прибывшему разрежению. Процесс можно представить, как это изображено на прилагаемом чертеже, таким образом, что к прибывшей волне прибавляется, как бы, новая волна такого же знака, которая совершенно симметрична относительно точки O

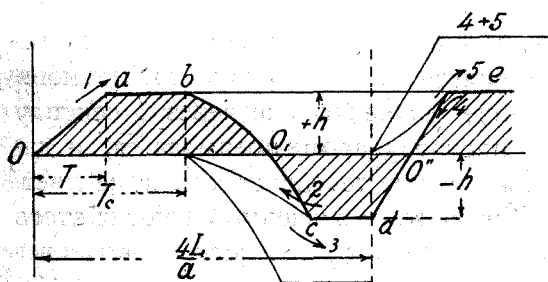
(концу трубы) с первой волною. Прибывшая волна разрежения в точке O , не изменяясь, как бы отражается, и отброшенная волна складывается с прибывающей. По прилагаемому чертежу, чтобы получить полную картину состояния давления, мы должны взять алгебраическую сумму трех изображенных волн. Как только отраженная волна достигнет внутреннего конца трубы (у резервуара), она снова отбросится, но уже на этот раз с изменением знака, т. е. она вызовет там идущую к наружному концу волну положительного знака, которая погасит понижение давления, и т. д.



Черт. 135.

Задача № 6. Допустим теперь, что нам известен вид кривой давления (кривая OA черт. 133) для внешнего конца трубы во время (T) закрывания, и время пробега волны вперед и назад ($T_c = \frac{2L}{a}$); требуется определить процесс изменения давления в течение длительного времени у того же конца.

Решение. Пусть время закрытия $T < \frac{2L}{a}$, тогда обратная волна, очевидно, приходит уже тогда, когда отверстие закрыто. Процесс изменения давления мы получим, если вообразим, что каждая волна давления, раз появившаяся, остается неизменной, и каждая отброшенная волна, самостоятельно существующая, складывается с первой. К первой ударной волне (1) подходит обратная волна (2) [противоудар или выравнивающая волна] с таким опозданием, что вершина ее подходит к точке O через промежуток времени T_c . Сразу же



Черт. 136.

возникает отраженная (рефлективная) волна (3), которая со второй (2) имеет одинаковый знак. По истечении следующего промежутка времени, равного T_c , подходит положительная волна (4), которая рефлексирует тоже положительную волну (5). Если взять теперь алгебраическую сумму ординат всех этих волн, то получим искомую картину процесса изменения давления у конца трубы — кривую $Oabcde$; в результате получим несимметричные волны вида $OabO_1$, O_1cdO'' ,...

ния несимметричного вида, но с подъемами и опусканиями одного значения $(+h_2)$ и $(-h_2)$ и продолжительностью колебания $2T_c = \frac{4L}{a}$.

В действительности, конечно, явление происходит, как уже говорилось выше, несколько иначе, так как, чем больше открытие трубы, тем несовершеннее происходят рефлекс волны у конца трубы; кроме того, при пробеге волн проявляется внешнее трение, которое несколько понижает скорость их распространения, а следовательно, и величину удара; все же, как показали опыты Н. Е. Жуковского на трубах Московского водопровода, отступления от изложенной теории очень незначительны, и, во всяком случае, не лишают ее результатов практической применимости.

Между прочим, на изложенной теории основано устройство прибора для определения места утечки воды в водопроводных трубах. Прибор этот, предложенный еще самим Жуковским и подвергшийся, затем, некоторым изменениям, широко распространенный, между прочим, в американской водопроводной практике¹⁾, дает возможность с большой точностью (до 3-х м) определить место повреждения трубы по скорости возвращения ударной волны, пускаемой по трубе и отражающейся у места повреждения.

При подводе воды к турбинам, при средне-напорных и высоконапорных установках, приходится иметь дело с трубами, наклоненными (под углом α) к горизонту. В применении к этому случаю в первое из основных уравнений (47) войдет дополнительный член вида $+g \sin \alpha$, зависящий от составляющей веса воды вдоль трубы, каковой для конца трубы не производит никаких изменений в величине удара (интегральное уравнение $y = y_0 - x \sin \alpha + F$ при $x = 0$ переходит в прежнее $y = y_0 + F$; см. уравнение 48), вверх же по трубе величина удара, благодаря присутствию этого члена, понижается. Для практики важно знать максимальное значение водяного удара именно у конца трубы, а здесь, как мы видим, различия в явлении удара у горизонтальных и наклонных труб нет.

Непосредственные опыты²⁾, произведенные на гидравлических установках для проверки теории, вполне подтверждают это. На прилагаемом чертеже 138 нанесены результаты теоретических подсчетов явлений удара (пунктирная кривая) и результаты опытов (сплошная кривая).

¹⁾ Описание прибора Жуковского можно найти в „Трудах 4-го русского водопроводного съезда“ (1899 г.) и в „Бюллетенях Политехнического Общества“ (1899 г., № 5), а измененных конструкций в:

1) Engineering News. Sept 11. 1913, стр. 515.

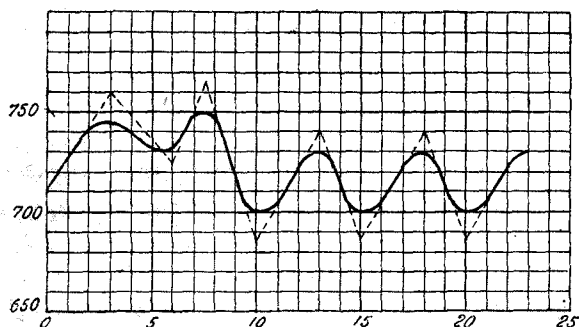
2) Journal of the New England. Water Works Association. 1913. Sept, стр. 422.

²⁾ R. Neeser. Coups de bélier dans les conduites. Bulletin Technique de la Suisse Romande. 1910 г.

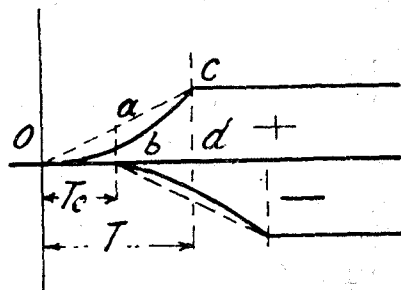
A. Strickler. Zeitschr. für das gesamte Turbinenwesen. 1915. S. 229.

Как видно, опытная кривая все время несколько отстает от теоретической, но тем самым повышается надежность теории для практического приложения.

Ввиду того, что вторичное повышение (h_1) давления (см. предыдущий чертеж и последний) несколько больше повышения давления h_0 , для грубого подсчета величины удара можно принимать, вместо параболической кривой повышения давления при закрывании отверстия



Черт. 138.



Черт. 139.

трубы, прямую линию; тогда, согласно чертежа, при закрывании отверстия в T секунд, при пробеге волны $T_c = \frac{2L}{a}$ возможно повышение давления ($y_0 = ab$) определить из соотношения

$$\frac{ab}{cd} = \frac{Ob}{Od},$$

откуда

$$y_0 = cd \frac{Ob}{Od};$$

но, так как, полагая нормальную скорость воды в трубе равной v_0 ,

$$cd = \frac{av_0}{g}$$

$$Ob = T_c = \frac{2L}{a}$$

$$Od = T,$$

то

$$y_0 = \frac{av_0 \cdot 2L}{gaT} = \frac{2}{g} \cdot \frac{v_0 L}{T}. \quad (51)$$

Задача № 8. Длина трубы, подводящей воду к турбине, $L = 200$ м, скорость воды в трубе $v_0 = 2 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, время закрытия отверстия трубы $T = 8$ сек. Определить максимальное повышение давления.

Решение. По предыдущему повышение давления

$$y_0 = \frac{2.2 \cdot 200}{9.81 \cdot 8} = 10,194 \text{ м} \cong 1 \text{ атм.},$$

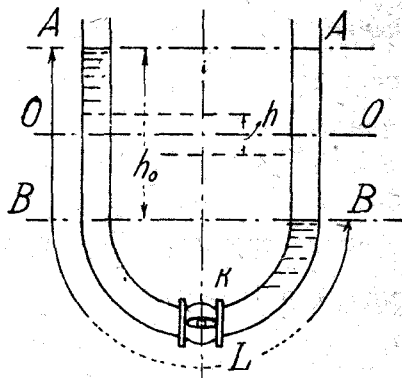
вместо повышения давления при мгновенном закрытии трубы

$$y_m = \frac{1000 \cdot 2}{9.81} = 203,88 \text{ м} \cong 20 \text{ атм.}$$

§ 7. Колебательное движение воды.

Из колебательных движений воды, имеющих большое значение в практике (колебательные движения в воздушных колпаках поршневых насосов, колебательные движения в уравнительных резервуарах гидравлических установок и проч.), рассмотрим только самое простое движение. Допустим, что имеем изогнутую в виде дуги трубку постоянного сечения (ω) с открытыми концами, обращенными вверх (черт. 140). Внизу трубки имеется дроссельный клапан (κ), который в начальный момент закрывает трубку.

В последнюю налита вода, которая в левом колене стоит на уровне AA , а в правом на уровне BB . Расстояние уровней AA и BB между собою равно h_0 . Если открыть клапан κ , то вода под влиянием первоначального напора h_0 начнет перетекать из левого колена в правое, уровень воды в первом начнет понижаться, а в правом повышаться, и, таким образом, напор (потенциальная энергия), под которым происходит перетекание, будет все уменьшаться и совершенно исчезнет, когда уровни сравняются (положение 00), скорость же (кинетическая энергия), получающаяся за счет напора, все возрастает и достигает максимума при том же среднем положении 00 ; движение, очевидно, на этом не успокоится, вода начнет из среднего положения за счет инерции подниматься в правом колене и опускаться в левом; скорость при этом будет уменьшаться и переходить в напор (отрицательный) в правом колене; скорость совершенно уничтожится, когда напор в правом колене достигнет максимального значения ($-h_0$); после этого начнется движение обратное и т. д.; очевидно, такие колебательные движения продолжались бы бесконечно долгое время, если бы не существовало сопротивлений (трение о стенки трубки, сопротивление воздуха и т. п.). При дальнейшем исследовании рассматриваемого движения мы будем предполагать отсутствие сопротивлений. Рассуждаем



Черт. 140.

следующим образом: на массу воды, находящуюся в трубке, $M = \frac{\delta\omega L}{g}$ в первый момент по открытии дроссельного клапана действует сила веса $\delta\omega h_0$. Сила эта, по мере приближения к среднему положению OO , все уменьшается и в последнем положении становится равной нулю; как мы и выше видели, за счет этой силы увеличивается кинетическая энергия (скорость). Таким образом, для рассматриваемого процесса движения мы можем воспользоваться дифференциальным уравнением вида

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} = P, \quad (52)$$

где для данного случая сила $P = \delta h \omega$ изменяется линейным образом в пределах $\delta h_0 \omega - 0$, а под s будем понимать длину пути центра тяжести всей массы воды в трубке; в силу последнего замечания имеем право положить $h = h_0 - 2s$; а теперь, подставляя отсюда значение $s \left(\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 h}{dt^2} \right)$ и вышеуказанное значение P в уравнение (52), получим линейное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{2\delta\omega}{M} h = 0,$$

которое, обозначая $\frac{2\delta\omega}{M}$ через k^2 (откуда $k = \sqrt{\frac{2\delta\omega}{M}} = \sqrt{\frac{2\delta\omega g}{\delta\omega L}} = \sqrt{\frac{2g}{L}}$), можно переписать так:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + k^2 h = 0.$$

Последнее уравнение, как известно, имеет общий интеграл

$$h = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \quad (53)$$

в котором постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий явления. Если, например, условиться отсчитывать время с того момента, когда вода находится в среднем положении, то, очевидно, для $t=0$ и $h=0$, а тогда, во-первых, $C_2=0$, а, во-вторых, при $h=h_0$, время $t = \frac{T}{4}$, где T —время полного колебания; так как в этом случае

$C_1 = \frac{h_0}{\sin k \frac{T}{4}}$, то предыдущее уравнение примет простой вид:

$$h = \frac{h_0}{\sin k \frac{T}{4}} \sin kt = a \sin kt,$$

если еще обозначить $\frac{h_0}{\sin k \frac{T}{4}}$ через a .

Из последнего уравнения имеем

$$kt = \arcsin \frac{h}{a},$$

и теперь можем определить время полного колебания воды в трубке; в самом деле, для $h=0$, т. е. для начала колебаний ($t=0$), и по прошествии половины колебания ($t=\frac{T}{2}$), величина $\arcsin \frac{h}{a}$ равна, соответственно, нулю или π ; поэтому

$$k \frac{T}{2} = \pi,$$

откуда

$$T = 2\pi \frac{1}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}. \quad (54)$$

Таким образом, время колебаний не зависит от рода (удельного веса) жидкости и от площади поперечного сечения трубки, а зависит от высоты столба жидкости, находящейся в трубке, и от ускорения силы тяжести.

ГЛАВА VIII.

Давление движущейся жидкости на обтекаемые ею стенки.

§ 1. Реактивное действие воды на стенки неподвижных изогнутых каналов.

Еще из теоретической механики известно, что тело, начавшее двигаться по какому-либо направлению с определенной скоростью, будет все время продолжать двигаться с этой скоростью по тому же направлению, если только на него не подействует в пути какая-либо сила, под влиянием которой тело изменит и свою скорость и направление своего движения; обратно, если тело при своем движении изменяет и свою скорость и направление своего движения, значит, на него действует какая-то сила. Точно так же и вода, или какая-либо другая жидкость, если во время своего движения изменяет свое направление или свою скорость, значит существует какая-то внешняя причина, будет ли это действительно сила, или воздействующая на нее какая-то среда (например, стенка канала, по которому движется жидкость, или которая поставлена поперек пути и т. п.), которая и производит указанное действие. По закону „действие равно противодействию“, очевидно, и со стороны движущейся жидкости будет, в свою очередь, существовать воздействие, равное и противоположное, на подействовавшую на нее среду.

Так как всякую элементарную силу (dp) можно представить соотношением:

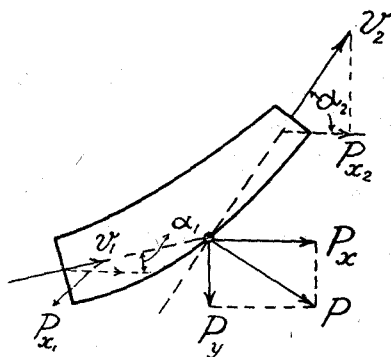
$$dp = dm \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} dv = M dv, \quad (1)$$

где dm — элемент массы, dv — изменение скорости, dt — элемент времени и M — масса, отнесенная к единице времени, то в дальнейшем мы и будем пользоваться этим выражением при рассмотрении взаимодействия между стенками и движущейся жидкостью. Будем предполагать при этом, что гидравлических сопротивлений не существует. Допустим, например, что вода вступает в канал, как показано на

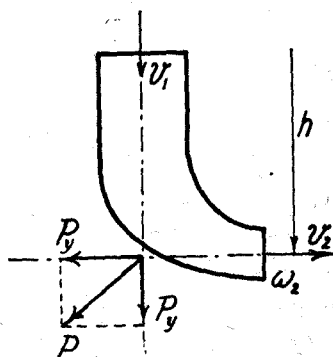
чертеже, под углом α_1 к оси x -ов со скоростью v_1 , а выходит из него под углом α_2 к той же оси со скоростью v_2 . Изменение скорости и направления, очевидно, произведено стенками канала, а потому, интегрируя уравнение (1) в пределах изменения скорости, мы найдем составляющую P_x по оси x -ов силы давления стенок на воду в виде:

$$P_{x_1} - P_{x_2} = -P_x = M(v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2),$$

так как, очевидно, что составляющая сила P_{x_1} при входе в канал или равна нулю, или ничтожно мала (стенки только начинают действовать);



Черт. 141.



Черт. 142.

обратно, вода на стенки производит давление, равное и прямо противоположное:

$$P_x = M(v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) = \frac{\delta Q}{g} (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2). \quad (2)$$

Точно так же найдется составляющая давления воды P_y на стенки канала по направлению оси y -ов:

$$P_y = M(v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2) = \frac{\delta Q}{g} (v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2). \quad (3)$$

Результирующая сила P давления воды на стенки канала, очевидно, будет

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}. \quad (4)$$

В частном случае, когда вода вступает в канал по направлению одной оси координат и вытекает по направлению другой, соотношения значительно упрощаются; например, для протекания воды по прилагаемому чертежу (черт. 142), очевидно, имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -\frac{\delta Q}{g} v_2 \\ P_y &= -\frac{\delta Q}{g} v_1 \\ P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \frac{\delta Q}{g} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Знак (—) в первых двух выражениях (5) показывает, что силы направлены в отрицательном направлении осей координат, как показано на чертеже.

Если предположить, что вода вытекает из сосуда под напором h , так что $v_2 = \sqrt{2gh}$, то, называя еще выходную площадь поперечного сечения через ω_2 , очевидно, будем иметь:

$$Q = \omega_2 v_2 = \omega_2 \sqrt{2gh},$$

а, беря только абсолютную величину давления, получим

$$P_x = \frac{\delta}{g} \omega_2 v_2^2 = \frac{\delta}{g} \omega_2 2gh = 2\delta \omega_2 h. \quad (6)$$

Таким образом, составляющая давления по горизонтали на стенку канала (реакция), при вытекании из него жидкости в горизонтальном прямо противоположном стенке направлении, равна двойному статическому давлению при том же напоре h и той же площади ω_2 .

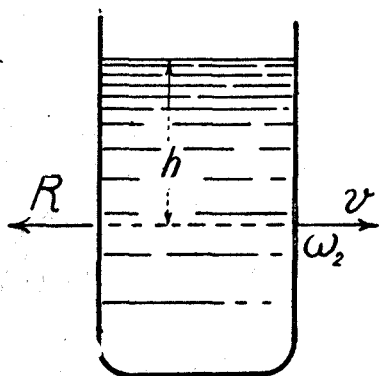
Такое же явление реакции мы получим и в том случае, когда у нас имеется не канал, а сосуд с отверстием в боковой стенке. При вытекании воды через это отверстие на противоположную отверстию

стенку будет производиться давление, по величине совершенно равное выведенному нами давлению на стенку канала при равных напоре и площади отверстия:

$$R = 2\delta h \omega_2.$$

Если отверстие находится в дне сосуда, то, как не трудно усмотреть из вышеизложенного, реакция будет тоже существовать и будет выражаться, как

$$R = -\frac{\delta Q}{g} v_2 = -2\delta h \omega_2, \quad (7)$$



Черт. 143.

где отрицательный знак показывает, что реакция будет направлена по вертикали вверх, и может быть замечена по некоторому облегчению сосуда.

Задача № 1. Цилиндрический сосуд диаметром 0,5 м и высотой 2 м, наполнен водой; в дне сосуда имеется отверстие диаметром 5 см. Определить, какое облегчение получит сосуд в первый момент после открытия отверстия.

Решение. По соотношению (7) имеем величину реакции при данных условиях задачи:

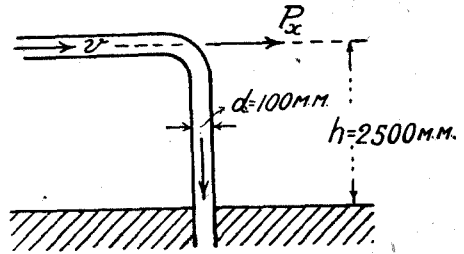
$$R = 2\delta h \omega_2 = 2.1000.2.0,00196 = 7,84 \text{ кг.}$$

Таким образом, данный сосуд, независимо от уменьшения веса вследствие вытекания воды, сразу же, после открытия отверстия, будет

весить на 7,84 кг меньше, что, при весе воды в сосуде в 392 кг составляет 2%.
Задача № 2. По трубе диаметром 10 см, изогнутой под прямым углом и уходящей под пол машинного зала (черт. 144), протекает вода со скоростью $v = 5 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$. Труба

проложена на высоте 2,5 м над полом и плотно заделана в полу. Определить изгибающий трубу момент под влиянием реактивного действия воды в изгибе на трубу.

Решение. Сила (P_x) реакции, очевидно, согласно соотношения (2), будет



Черт. 144.

$$P_x = \frac{\delta Q}{g} v = \frac{\delta}{g} \omega v^2,$$

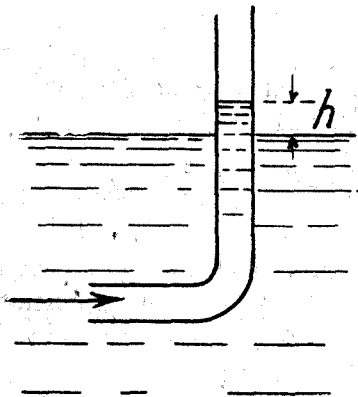
а момент M_x , изгибающий трубу,

$$M_x = P_x \cdot h = \frac{\delta}{g} \omega v^2 h.$$

При наших заданиях получим:

$$M_x = \frac{\delta}{g} \omega \cdot v^2 h = \frac{1000}{9,81} \cdot 0,00785 \cdot 25 \cdot 2,5 = 50 \text{ клг. м} = 5000 \text{ клг см.}$$

Задача № 3. В воду, текущую с некоторой скоростью (v), опущена трубка, изогнутая под прямым углом, против течения. Определить высоту (h) подъема воды в трубке, по сравнению с горизонтом воды, окружающей трубку.



Черт. 145.

наивысшего столбика воды — $\delta \omega h$; поэтому

Решение. На основании соотношения (1) сила давления воды на отверстие трубки определяется выражением

$$P = Mv = \frac{\delta \omega v^2}{g},$$

где ω — площадь отверстия трубки; с другой стороны, это давление должно уравновешиваться, очевидно, весом под-

$$\frac{\delta \omega v^2}{g} = \delta \omega h,$$

откуда

$$h = \frac{v^2}{g},$$

а обратно

$$v = \sqrt{gh} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2gh} = 0,71 \sqrt{2gh} = \varphi \sqrt{2gh}.$$

§ 2. Давление струи на стенки, поставленные на пути струи нормально к последней.

1) Стенки неподвижные.

При всех дальнейших рассуждениях, как и в предыдущем параграфе, предполагается, что потеря энергии на гидравлические сопротивления не существует. Пусть вода вытекает через отверстие в боковой стенке сосуда под напором h . Пусть площадь отверстия, а следовательно, и струи (сужения не предполагается) есть ω ; на пути струи поставлена стенка, нормально к направлению струи. При расположении по чертежу 146 (а), пользуясь соотношением (2), очевидно, найдем для давления (P) на стенку следующую величину:

$$P = M(v - v \cos \alpha) = Mv(1 - \cos \alpha) = \frac{\delta Q}{g} v(1 - \cos \alpha). \quad (8)$$

Если стенка достаточных размеров (по опытам нужно, чтобы ее площадь была приблизительно в 9 раз больше площади поперечного сечения струи), то расположение струи по отношению к стенке будет согласно черт. 146 (б), и тогда давление выразится, как

$$P = \frac{\delta Q v}{g} = \frac{\delta \omega v^2}{g} = 2\delta h \omega, \quad (9)$$

так как $\alpha = 90^\circ$. Таким образом, и в данном случае давление струи на стенку выражается двойным гидростатическим да-

влением при том же напоре и той же площади.

Если стенка имеет коническую форму (черт. 146 (в)), то стекание струи с нее происходит в ту и другую сторону под углом (α) к первоначальному направлению струи, и давление выражается соотношением (8).

Точно так же, и в случае стенки вогнутой (черт. 146, г), давление струи на нее выражается тем же соотношением (8).

Черт. 146.

Если струя такой вогнутой стенкой отклоняется по направлению, прямо противоположному первоначальному направлению струи (черт. 146, ∂), т. е., если угол $\alpha = 180^\circ$, то давление будет

$$P = \frac{2\delta Qv}{g} = \frac{2\delta\omega v^2}{g} = 4\delta h\omega, \quad (10)$$

т. е. давление равно четырехкратному статическому давлению при том же напоре и той же площади.

Давление на стенку выпуклую (черт. 146, e), очевидно, выражается соотношением (8).

2) Стенки подвижные.

Допустим, что та или другая стенка из рассмотренных (черт. 146 $a, б, в, г, д, e$) под давлением струи начинает двигаться с некоторой скоростью $u < v$; тогда относительная скорость струи по отношению к стенкам будет $v - u$, и, очевидно, основное соотношение для давления (8) преобразуется в такое:

$$P = \frac{\delta Q(v - u)}{g} (1 - \cos \alpha). \quad (11)$$

Для стенки типа ($б$) это выражение обращается в

$$P = \frac{\delta Q(v - u)}{g}, \quad (12)$$

а для стенки типа ($д$) в

$$P = \frac{2\delta Q(v - u)}{g}. \quad (13)$$

При движении стенки в противоположном направлении (против струи) давление, очевидно, будет:

$$P = \frac{\delta Q}{g} (v + u) (1 - \cos \alpha). \quad (14)$$

Задача № 4. Определить максимальную возможную работу струи, когда она давит на подвижную стенку типа ($б$) и типа ($д$).

Решение. В первом случае работа выражается, согласно соотношения (12),

$$R = \frac{\delta Q}{g} (v - u)u;$$

во втором:

$$R = \frac{2\delta Q}{g} (v - u)u.$$

Условие максимума работы в обоих случаях, очевидно, будет:

$$\frac{dR}{du} = 0 = (v - 2u),$$

или наивыгоднейшая скорость должна быть равна

$$u_n = \frac{v}{2}. \quad (15)$$

Таким образом, максимальная работа в первом случае будет

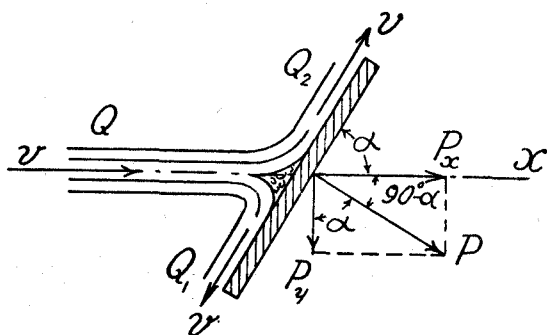
$$R_{\max.} = \frac{\delta Q}{g} \left(v - \frac{v}{2} \right) \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \frac{\delta Q v^2}{2g}, \quad (16)$$

а во втором

$$R_{\max.} = \frac{2\delta Q}{g} \left(v - \frac{v}{2} \right) \frac{v}{2} = Q\delta \frac{v^2}{2g}. \quad (17)$$

§ 3. Давление струи на стенки, поставленные наклонно к оси струи.

1) Неподвижные стенки. Мы предполагаем, что площадь стенки по отношению к площади сечения струи достаточно велика (не менее 9 площадей струи), так что направление стекающих струй совпадает с направлением плоскости стенки. Стенка наклонена к оси струи под углом α . Подтекающая к стенке вода в количестве Q делится на две части Q_1 и Q_2 , которые стекают по стенке в противоположных направлениях.



Черт. 147.

Предполагается опять, что отклонение струи, а равно и стекание, происходит без всяких гидравлических сопротивлений; влияние силы тяжести не принимается во внимание. Мы можем предста-

вить себе данный процесс обтекания происходящим таким образом, что разделившиеся струи, как бы, отклоняются двумя каналами. Поэтому, силу давления можно определить, пользуясь соотношением (2), которое в применении к данному случаю представляется так:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{\delta Q_1}{g} (v + v \cos \alpha) + \frac{\delta Q_2}{g} (v - v \cos \alpha) = \\ &= \frac{\delta v}{g} [(1 + \cos \alpha) Q_1 + (1 - \cos \alpha) Q_2]. \end{aligned} \quad (18)$$

По направлению самой стенки силы реакции, очевидно, должны находиться в равновесии, а потому:

$$\frac{\delta Q}{g} v \cos \alpha - \frac{\delta Q_2}{g} v + \frac{\delta Q_1}{g} v = 0,$$

или, по сокращении,

$$Q \cos \alpha - Q_2 + Q_1 = 0.$$

Последнее равенство, в связи с понятным равенством $Q = Q_1 + Q_2$, дает:

$$Q_1 = \frac{1 - \cos \alpha}{2} Q;$$

$$Q_2 = \frac{1 + \cos \alpha}{2} Q;$$

подставляя найденные значения Q_1 и Q_2 в соотношение (18), получим:

$$P_x = \frac{\delta Q v}{2g} [(1 - \cos^2 \alpha) + (1 - \cos^2 \alpha)] = \frac{\delta Q}{g} v \sin^2 \alpha. \quad (19)$$

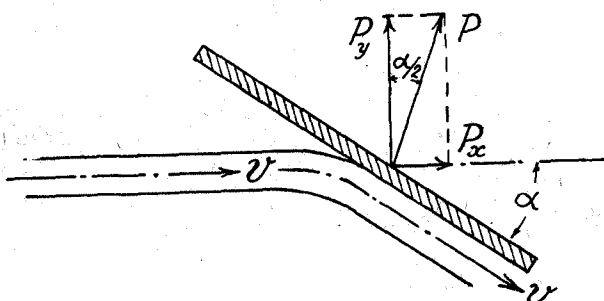
Так как очевидно, что сила P_x есть проекция результирующей силы (P) давления на стенку, то последняя определится из соотношения:

$$P = \frac{\delta Q}{g} \frac{v \sin^2 \alpha}{\cos (90 - \alpha)} = \frac{\delta Q}{g} \frac{v \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\delta Q}{g} v \sin \alpha, \quad (20)$$

а составляющая давления по оси y -ов будет:

$$P_y = \frac{\delta Q}{g} v \sin \alpha \cos \alpha. \quad (21)$$

При очень малом угле (α) наклона стенки к оси струи (черт. 148), последняя отклоняется только в одном направлении; в этом случае, как нетрудно видеть, $Q_1 = 0$ и $Q_2 = Q$, а потому:



Черт. 148.

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{\delta Q}{g} v (1 - \cos \alpha) \\ P_y &= \frac{\delta Q}{g} v \sin \alpha \\ P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$

при чем:

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (23)$$

2) Подвижные стенки. В случае, если стенка под влиянием давления движется со скоростью (u) по первоначальному направлению оси струи, то относительная скорость струи по отношению к стенке

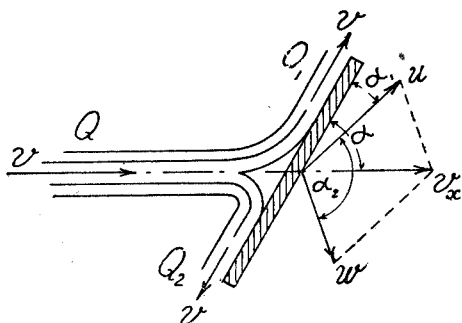
будет $(v - u)$, и уравнения (19) и (21) преобразуются в такие:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{\delta Q}{g} (v - u) \sin^2 \alpha \\ P_y &= \frac{\delta Q}{g} (v - u) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (24)$$

при чем нетрудно убедиться, что по прежнему

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} Q, \\ Q_2 &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} Q. \end{aligned}$$

Для более общего случая, когда стенка движется под влиянием давления струи под углом (α_1) к первоначальному направлению струи со скоростью u , относительная скорость (w) струи по отношению к стенке найдется геометрическим построением, как показано на чертеже (149), и будет наклонена к направлению скорости (u) под некоторым углом (α_2) ; с этой скоростью (w) и будет происходить стекание воды по стенке в обе стороны.



Черт. 149.

Пользуясь опять соотношением (2), мы получим для давления в направлении (u) выражение:

$$P_u = \frac{\delta Q_1}{g} [w \cos \alpha_2 + w \cos (\alpha_1 + \alpha_2)] + \frac{\delta Q_2}{g} [w \cos \alpha_2 - w \cos \alpha_1]. \quad (25)$$

Очевидно, и здесь струя разделяется на Q_1 и Q_2 так, что силы реакции в направлении стенки уравниваются, т. е.

$$\frac{\delta Q}{g} w \cos (\alpha_2 + \alpha_1) = \frac{\delta Q_2}{g} w - \frac{\delta Q_1}{g} w,$$

откуда, имея в виду еще равенство $Q = Q_1 + Q_2$, находим:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{1 - \cos (\alpha_1 + \alpha_2)}{2} Q \\ Q_2 &= \frac{1 + \cos (\alpha_1 + \alpha_2)}{2} Q \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

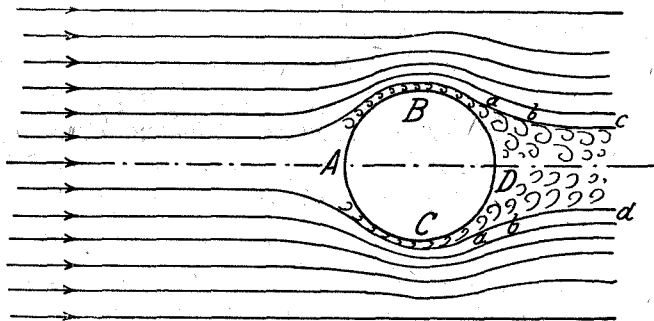
Подставляя найденные значения Q_1 и Q_2 в уравнение (25), после возможных приведений и сокращений, получим:

$$P_u = \frac{\delta Q}{g} w [\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cdot \cos (\alpha_1 + \alpha_2)]. \quad (27)$$

§ 4. Давление потока жидкости неограниченного поперечного сечения на находящиеся в этом потоке тела.

1) Давление текущей жидкости по направлению ее течения на находящееся в ней тело и, обратно, сопротивление, испытываемое последним при передвижении в неподвижной жидкости. Представим себе, что имеется неограниченных размеров масса жидкости, находящаяся в состоянии равномерного и прямолинейного движения; при таком движении линии тока будут прямые параллельные между собой линии, при чем скорости по всем линиям тока будут одинаковы. Если вообразить еще, что вся масса жидкости разделена на токовые трубки равного поперечного сечения, то через каждую такую токовую трубку будет протекать одинаковое количество жидкости, и, если бы в каком-либо месте, вследствие тех или других причин, линии тока принуждены были бы сблизиться, а токовые трубки, следовательно, сжаться, то скорость течения должна была бы в этом месте увеличиться, а давление по закону Д. Бернулли, уменьшиться; при расхождении линий тока должно было бы произойти обратное явление: уменьшение скорости и увеличение давления.

Если, поэтому, мы теперь вообразим, что в жидкость в каком-либо месте помещено некоторое тело, например, шар (черт. 150), то при обтекании этого



Черт. 150.

шара жидкостью произошли бы явления только что описанные, и мы, рассматривая изображенную на чертеже картину перемещения линий тока, можем безошибочно указать на обязательность повышения давления в районе точки *A* и уменьшения давления по меридиану *BC* (на чертеже в районах точек *B* и *C*). Если бы жидкость была идеальная, то и в районе точки *D* мы должны были бы получить повышение давления, совершенно одинаковое с повышением у точки *A*, так как очевидно, что за шаром линии тока должны были бы снова распределиться совершенно одинаково с распределением перед шаром. Мы бы пришли тогда к, так называемому, парадоксу Дирихле¹⁾ (Dirichlet — 1852), по которому тело, погруженное в дви-

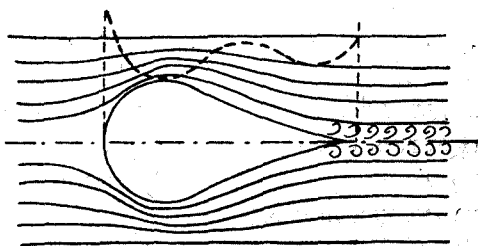
¹⁾ G. L. Dirichlet. Über die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressibeln flüssigen Medium. Verhandlung. d. K. Pr. Ak. d. W. 1852, стр. 12—17.

жущуюся жидкость неограниченных размеров, или обратно, тело движущееся в неподвижной жидкости, не испытывает со стороны жидкости никакой результирующей силы давления.

В реальной жидкости, обладающей вязкостью и способностью прилипать к стенкам твердого тела, картина будет совершенно другая. Частицы жидкости, проходящие около поверхности шара и задерживаемые с одной своей стороны, вследствие вязкости, частичками, приставшими к стенкам шара, а с другой своей стороны увлекаемые, по той же причине, частичками, находящимися дальше от шара, приводятся во вращательное движение и, как бы, катятся по поверхности шара; около шара образуется слой некоторой толщины, состоящий из таких вращающихся и катящихся по шару частичек. При своем качении, начиная от точки *A*, частички переходят из области повышенного давления в область пониженного давления (район точек *B* и *C*), при чем кинетическая энергия, расходуясь на вращение, очевидно, уменьшается. От района *BC* частички должны катиться в район *D*, — район опять повышенного давления, на преодоление которого у них энергии, уже ослабевшей, не хватит, и, благодаря этому, легко зарождается за шаром обратное течение. Но образовавшееся, таким образом, обратное течение, имеющее место за шаром между его поверхностью и главной массой движущейся вперед жидкости, начинает отнимать, благодаря трению, кинетическую энергию у проходящих мимо частичек жидкости и принуждает новые частички жидкости принимать участие в обратном течении; благодаря этому, обратное течение усиливается и распространяется в ширину. За шаром образуется значительное пространство, наполненное находящейся во вращательном (вихревом) движении жидкостью, окружаемое снаружи жидкостью, двигающейся вперед. Поверхность раздела этих двух состояний жидкости (образующие этой поверхности линии *a, b, c, ..., a', b', c', ...*) называется пограничным слоем и начинается сейчас же за зоной *BC*. Благодаря тому, что за шаром внутри пространства с вихревым движением давление сильно падает, впереди же шара в районе *A* давление повышенное, появляется результирующая сила, складывая которую с силой трения при обтекании поверхности шара потоком, мы получим полную силу давления на шар, которую нужно приложить к нему или для того, чтобы удерживать шар на месте в текущей жидкости, или для того, чтобы его передвигать в неподвижной жидкости; в первом случае мы будем иметь силу давления текущей жидкости на тело, во втором сопротивление жидкости движению тела¹⁾ в ней.

¹⁾ Можно принимать силу давления жидкости, текущей с некоторой скоростью, на неподвижное тело, и сопротивление, испытываемое телом, движущимся с той же скоростью в неподвижной жидкости, теоретически совершенно идентичными. Несовпадение этих двух величин, известное под названием парадокса Дюбуа, обнаруженное опы-

Вполне понятно теперь, что форма тела может иметь существенное влияние на давление, оказываемое движущейся жидкостью на неподвижное тело, или на сопротивление при движении тела в неподвижной жидкости: форма тела может увеличить, или уменьшить и даже совсем уничтожить область образования вихрей за телом и тем самым увеличить или уменьшить давление на тело; форма передней части имеет при этом значительно меньшее влияние на давление. Таким образом, если необходимо уменьшить сопротивление, оказываемое жидкостью на движущееся в ней тело, следует придать ему такую форму, чтобы, выражаясь языком гидродинамики, возможно постепеннее (следовательно, на более длинном пути) перевести пограничный слой из зоны малого давления в зону более высокого давления за телом; нетрудно при этом убедиться, что телу необходимо придать для этого своеобразную форму, очень схожую с формой тела рыбы или птицы; в этом случае, как показывает нанесенная на прилагаемом чертеже диаграмма распределения давлений, получается наивыгоднейшее распределение последних, и уменьшение результирующей силы давления по длине движущегося тела; природа рыб и птиц путем приспособливания к окружающим их условиям жизни выработала для них форму, испытывающую наименьшее сопротивление при плавании в воде и летании в воздухе.

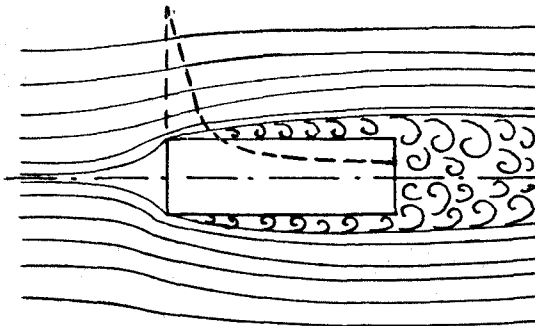


Черт. 151.

Совершенно другую картину мы получим, если вообразим, что в среде (будем так говорить, потому что явления в рассматриваемом случае протекают почти одинаково и в воде, и в воздухе) движется тело, например, цилиндрической формы; распределение давлений будет,

тами Дюбуа (Principes d'Hydraulique. 1786—1816) и Дюхамена (Rech. experim. sur les lois de la résistance des fluides. 1842) над пластинками, как известно, в настоящее время, более или менее, разъяснено (Н. Е. Жуковский. „О парадоксе Дюбуа“, 1891); в самом деле, жидкость во время опытов с определением давления или сопротивления должна быть ограничена боковыми стенками, которые при ее течении влияют на распределение в ней скоростей и заполняют ее массу вихревыми потоками, усиливающими давление на неподвижную в ней пластинку. Заменяя движущуюся жидкость и неподвижную в ней пластинку жидкостью неподвижной и движущейся пластинкой, мы заставляем жидкость испытывать совершенно иное влияние на нее стенок, не создающих теперь сплошного вихревого потока, и уменьшаем тем самым давление на пластинку. Если бы можно было создать движущийся поток достаточно больших поперечных размеров, можно было бы влияние стенок ограничить, или даже совсем уничтожить, и оба явления в желательной мере сблизить. Практически, ввиду всегда существующего ограничения потока стенками, влияние последних на величину давления на погруженное в него тело будет всегда сказываться, что и необходимо иметь в виду при экспериментальных исследованиях.

как показывает чертеж, самое благоприятное для увеличения результирующей силы давления: уже от самой головной торцевой поверхности отделяется пограничный слой и захватывает область много шире



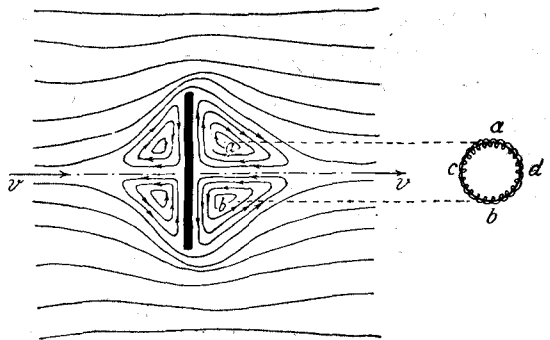
Черт. 152.

самого тела, и, тем самым, весьма сильно увеличивается трата энергии на вихри и обращение ее в конечном результате в теплоту.

Весьма интересная картина процесса обтекания получается, если взять вместо тела круглую пластинку (черт. 153). Если пластинка по-

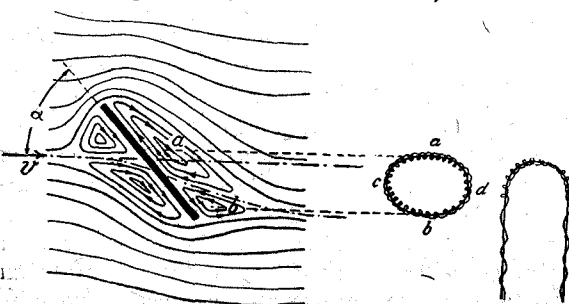
ставлена нормально к направлению течения воды, впереди и позади пластинки образуются вихревые кольца с круговой осью $abcd$, вокруг которой вращаются частички воды, как показано на чертеже.

Давление на пластинку складывается, очевидно, по предыдущему, из результирующей давления на переднюю (повышенное давление) и на заднюю (пониженное давление) поверхности пластинки, и из трения на периферии пластинки, и будет иметь некоторую определенную величину (P_x).



Черт. 153.

Будем теперь наклонять пластинку к направлению течения жидкости (черт. 154). Оказывается, что в этом случае вихревые пространства впереди и сзади пластинки получают, как и следовало ожидать, эллипсоидальную форму с эллиптической осью вращения ($abcd$); в вихревое движение увлекаются при этом вначале все большие и большие массы жидкости, и давление



Черт. 154.

на пластинку повышается,

но при некотором достаточно большом повороте пластинки наступает, наконец, такой момент (критический), когда вихревое кольцо не может удержаться на пластинке и соскальзывает с нее, превращаясь в

вихревую дугу, продолжающуюся на некотором расстоянии в текущей жидкости и за пластинкой. В момент срыва вихревого кольца давление сразу падает весьма сильно и при дальнейшем увеличении наклона пластинки повышается уже очень медленно.

В зависимости от формы пластинки, критический угол α_k меняется не в очень широких пределах. На чертеже 155 представлены¹⁾ в виде диаграмм изменения нормального давления (приведенного к единице площади пластинки, к скорости, равной единице, и к плотности, равной единице), в зависимости от угла наклона α , на прямоугольные пластинки со следующим отношением длины (l) пластинки к ее ширине (b):

$$\frac{l}{b} = 3; 2; 1,5; 1,25; 1,0; 0,5,$$

при чем ширина (b) для всех пластинок одинакова и равна $b = 350$ мм; концы пластинок на протяжении 25 мм были заострены; жидкость — воздух.

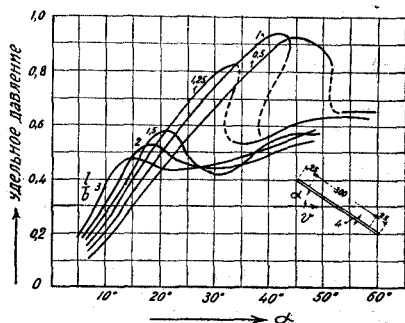
Из всего изложенного выше, несомненно можно придти к следующим заключениям: величина давления движущейся жидкости на неподвижное в ней тело, или сопротивление, оказываемое жидкостью движущемуся в ней телу, зависит от:

- 1) рода жидкости и, главным образом, от ее плотности ($\rho = \frac{\delta}{g}$);
- 2) размеров тела в направлении, нормальном к направлению относительного движения жидкости, главным образом, от наибольших его размеров (площади ω) в этом направлении;
- 3) относительной скорости v жидкости по отношению к телу;
- 4) формы тела вообще.

Действительно, как показывают многочисленные опыты последних лет, давление (сопротивление) можно выразить следующей формулой:

$$P = \xi \rho \cdot \omega \cdot v^2 = \xi \frac{\delta}{g} \omega \cdot v^2, \quad (28)$$

где коэффициент ξ зависит, главным образом, от формы тела. Для возможности применения формулы (28) в особенности важно, чтобы скорости не выходили из таких пределов, при которых мы можем жидкость — воду или воздух — считать еще несжимаемой, или сжимаемой весьма мало. Для воды в практике редко приходится иметь дело со скоростями выше $14-17 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, каковые не вызывают заметного повыше-



Черт. 155.

¹⁾ D. B a n k i. Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten. 1921, стр. 448.

ния давления, и, следовательно, воду можно считать несжимаемой. Для воздуха в авиационном деле скорости не превосходят пока $100 \frac{м}{сек}$; при таких скоростях давления увеличиваются уже до 4%, против нормального атмосферного, но такое увеличение еще мало сказывается на изменении плотности, а потому его можно не принимать во внимание; в баллистике скорости достигают скорости звука $(332 \frac{м}{сек})$, а при таких скоростях не принимать во внимание сжимаемости воздуха и, следовательно, изменения давления уже невозможно.

Что касается коэффициента ξ , то, при современном состоянии гидродинамики, определить его значения теоретически невозможно (за весьма малыми исключениями), и приходится прибегать к определению опытным путем в испытательных лабораториях (гидравлических и аэродинамических). В настоящее время этот опытный материал уже весьма богат, в особенности для воздушной среды. Ниже приводятся значения коэффициента ξ для различных форм тел, средние из результатов опытов целого ряда экспериментаторов.

1) Плоские пластины, поставленные нормально к направлению потока:

а) круглые или квадратные:

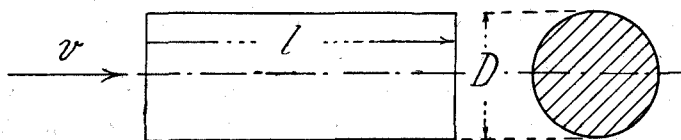
при малых, сравнительно, поверхностях ($\omega \leq 0,1 м^2$): $\xi = 0,55$,

„ более значительных „ ($\omega > 0,1 м^2$): $\xi = 0,65$;

б) прямоугольные:

при отношении сторон 1:5: $\xi = 0,70$,

„ „ „ 1:10: $\xi = 0,78$.



Черт. 156.

2) Круглые цилиндры или призмы с квадратным основанием.

а) С направлением осей, совпадающим с направлением потока.

При отношении длины (l) цилиндра или призмы к диаметру или стороне (D):

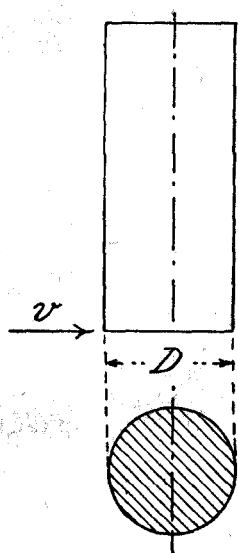
$\frac{l}{D} =$	0	0,5	1	2	4	7,
$\xi =$	0,55	0,54	0,44	0,40	0,41	0,47.

Специально для сопротивления призм квадратного сечения в воде по опытам Engels'a и Gebers'a:

$\frac{l}{D} =$	1	2	5	10	20	30.
$\xi =$	0,49	0,38	0,41	0,43	0,47	0,57.

б) С направлением осей, нормальным к направлению потока (черт. 157):

$D =$	0,05	0,2	1	10	30	150 мм.
$\xi =$	0,88	0,64	0,52	0,49	0,48	0,32.



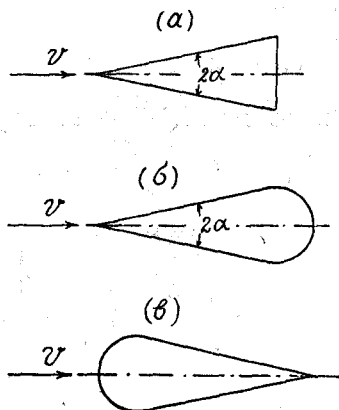
Черт. 157.

3) Для тела, имеющего форму шара — коэффициент ξ значительно больше (почти в $2\frac{1}{2}$ раза) при малых скоростях, чем при больших. Критическая скорость (скорость перехода) зависит от диаметра шара (D), но в общем изменяется в узких пределах. Для шара диаметром 20 см можно положить: при больших скоростях

$$\left(v > 15 \frac{\text{м}}{\text{сек}}\right), \xi = 0,11;$$

при малых скоростях

$$\left(v < 15 \frac{\text{м}}{\text{сек}}\right), \xi = 0,30.$$



Черт. 158.

4) Для клиновых и конических тел.

- а) При клиновом угле $2\alpha = 90^\circ$, $\xi = 0,36$,
 " " " $2\alpha = 60^\circ$, $\xi = 0,26$,
 " " " $2\alpha = 30^\circ$, $\xi = 0,17$;

б) при конусном угле $2\alpha = 20^\circ$ и закруглении заднего конца по полушару

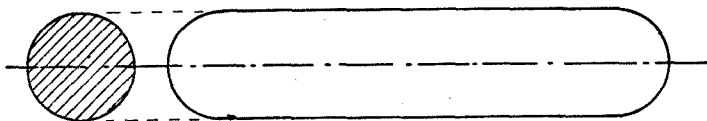
$$\xi = 0,12;$$

в) при обратном расположении конуса $\xi = 0,040$ до 0,024, в зависимости от угла и формы конуса.

5) Для цилиндрических тел с закруглениями торцевых концов по полушаровым поверхностям (баллоны, черт. 159) можно принимать

$$= 0,06.$$

Задача № 5. Определить сопротивление, испытываемое шаром



Черт. 159.

при движении его в неподвижной морской воде, если диаметр шара $D = 0,25 \text{ м}$ и скорость передвижения $v = 3 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

Решение. Согласно соотношения (28) находим:

$$P = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 = 0,3 \frac{1025}{9,81} \cdot \frac{3,14 \cdot 0,0625}{4} \cdot 9 = 13,8 \text{ кг},$$

так как для данного случая $\xi = 0,3$ и $\delta = 1025 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Задача № 6. Определить давление ветра ($t = 20^\circ \text{C}$), дующего со скоростью $20 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, на трубу квадратного сечения (сторона квадрата =

= 1 м) высотой 20 м. Расположение трубы относительно направления ветра показано на чертеже 160.

Решение. Согласно соотношения (28) имеем для давления:

$$P = \xi \frac{\delta}{g} \omega \cdot v^2.$$

Так как 1 м^3 воздуха при температуре 20°C и 760 мм атмосферного давления весит 1,2049 кгр, то плотность

$$\rho = \frac{\delta}{g} = \frac{1,2049}{9,81} = 0,123.$$

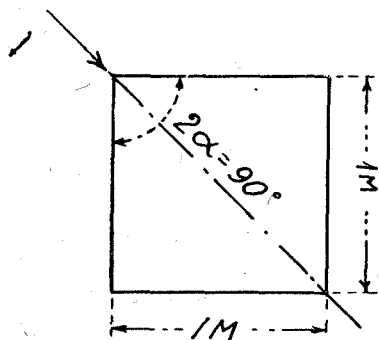
Принимая далее для ξ значение 0,36, имеем

$$P = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 = 0,36 \cdot 0,123 \cdot 1,414 \cdot 20 \cdot 400 \cong 500 \text{ кг}.$$

Задача № 7. Определить сопротивление Цеппелина с площадью поперечного сечения 50 м^2 , летящего в воздухе со скоростью $30 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

Решение. Сопротивление определяется по соотношению (28) и будет:

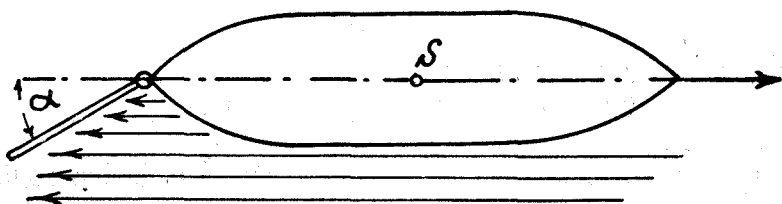
$$P = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 = 0,06 \cdot 0,123 \cdot 50 \cdot 900 \cong 242 \text{ кг}.$$



Черт. 160.

Задача № 8. Определить, при каком угле поворота руля получится наибольший поворачивающий судно момент, если погруженная в воду площадь руля есть ω , если скорость судна равна v и если длина (L) судна велика по сравнению с шириной (B).

Решение. Когда длина судна велика по сравнению с шириной, можно относительные траектории частиц воды принимать за параллель-



Черт. 161.

ные продольной оси судна прямые; при этом условии, принимая руль за пластину, опущенную в воду под углом α к направлению потока, согласно с данными опытов Lössli¹⁾, выражаем нормальное давление воды на руль соотношением:

$$P = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 \sin \alpha.$$

Называя расстояние точки приложения давления на руль от оси вращения его через x [по опытам Avanzini¹⁾ для квадратных пластин, погруженных в воду, расстояние $x = (0,2 + 0,3 \sin \alpha) b$, если через b обозначить длину стороны пластины], а расстояние той же оси от вертикальной оси, проходящей через центр тяжести (S) судна, через l , для поворачивающего судно момента найдем соотношение

$$M = P(l \cos \alpha + x) = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 \sin \alpha (l \cos \alpha + x).$$

В первом приближении, при достаточно большой длине судна (L) величиной (x) можно пренебречь, и, если, кроме того, возможно принять $l = \frac{L}{2}$, то

$$M = \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 \frac{L}{2} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Условие максимума, считая коэффициент ξ за постоянную величину, будет:

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0 = \frac{d}{d\alpha} (\sin \alpha \cos \alpha) = -\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha,$$

¹⁾ D. Banki. Energie-Umwandlungen in Flüssigkeiten. 1921, стр. 450.

откуда

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 1,$$

и, следовательно,

$$\alpha = 45^\circ,$$

а максимальный момент

$$M_{\max} \cong 0,5 \xi \frac{\delta}{g} \omega v^2 \frac{L}{2} = 0,25 \xi \frac{\delta}{g} \omega L v^2.$$

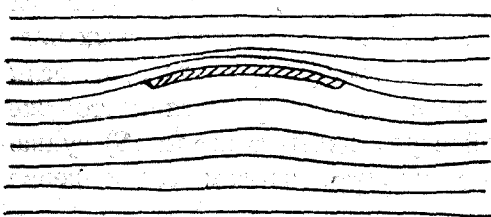
Более точное выражение для максимального момента получим, если в выражение для момента при подстановке значения угла α вставим и значение x .

Наконец, для окончательного решения задачи необходимо было бы подставить значение ξ при критическом угле α_k поворота руля, подсчитать для него соответствующее значение M_{α_k} и, сравнив это значение с $M_{\max}$, выбрать наибольшее значение.

II) Боковое давление, или поддерживающая сила при обтекании тела жидкостью.

Допустим, что в жидкости, текущей со скоростью v , находится неподвижная изогнутая кверху, как показано на чертеже, пластинка.

Очевидно, линии тока, при обтекании этой пластинки, должны будут сближаться между собой около выпуклой стороны ее и, наоборот, разойтись вблизи вогнутой стороны; таким образом, скорости



течения частичек жидкости над выпуклой стороной должны увеличиться, ниже же вогнутой стороны уменьшиться, давления же, наоборот, по закону Д. Бернулли, уменьшатся со стороны выпуклой стороны пластинки и увеличатся со стороны вогнутой; отсюда следует, что на пла-

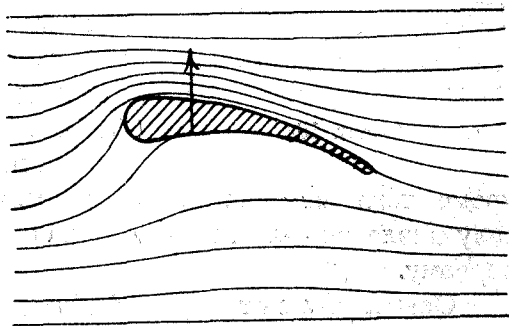
Черт. 162.

стинку со стороны обтекающей жидкости появится некоторое результирующее давление, направленное, при расположении пластинки согласно чертежу 162, снизу вверх. Это результирующее давление, помноженное на площадь пластинки, дает, так называемую, поддерживающую силу, значительно большую силы давления сверху от непосредственного давления жидкости при обтекании выпуклой стороны и объясняющую явления летания по воздуху, плавания в воде и т. д.

Развивающаяся все более и более за последние годы авиация вызвала большой интерес и понятное стремление к разрешению задачи о нахождении такой формы поверхности, которая бы, с одной стороны, вызвала наибольшую поддерживающую силу, а, с другой стороны, давала бы наименьшее сопротивление при передвижении в жидкой

среде. Теоретические работы в этом направлении Кутта¹⁾, Жуковского²⁾ и Чаплыгина³⁾, подкрепленные целым рядом опытных исследований других ученых, указали истинные пути для разрешения указанной задачи, которая в настоящее время в отдельных своих частях может считаться уже более или менее удовлетворительно разрешенной.

Совершенно точно, например, установлено, что форма поверхности, изображенная на прилагаемом чертеже, удовлетворяет самым строгим требованиям, как в отношении выявления наибольшей возможной поддерживающей силы, так и в отношении наименьшей силы сопротивления при передвижении, т. е., другими словами, теория и опыт пришли к тому, что форма, которую выработала природа для крыльев птиц в указанных отношениях, есть наилучшая.



Черт. 163.

В весьма близком отношении к рассматриваемому вопросу находится, вызвавшее большой интерес в морских кругах, применение явления бокового давления при обтекании тел движущейся жидкостью к передвижению судов.

Допустим, в самом деле, что обтекаемое тело представляет из себя цилиндр, вращающийся вокруг своей оси с некоторой угловой скоростью; тогда, очевидно, около той стороны (а) цилиндра (черт. 164), которая при этом вращении движется в одинаковом направлении с частичками жидкости, скорость последних еще более увеличится, линии тока еще более между собою сблизятся, и давление еще более умень-

¹⁾ W. M. Kutta. Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung. Sitz.-ber. d. K. Akad. d. Wiss. in München. 1910, стр. 1—58.

W. M. Kutta. Über ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen. Sitz.-ber. d. Akad. d. Wiss. in München. 1911, стр. 65—125.

²⁾ Н. Е. Жуковский. Geometrische Untersuchungen über die Kuttasche Strömungen. Труды Отделения Физ. Наук О-ва Любителей Естествознания в Москве. Т. 15. 1911, стр. 10—22.

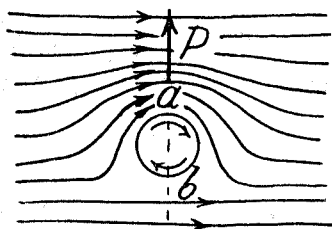
Его-же. Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. Zeit. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. 1910, стр. 281—284.

Его-же. „О поддерживающих планах типа Антуанетт“. Труды Отд. Физ. Наук О-ва Любителей Естествознания. Т. 15, Вып. 2. 1912, стр. 7—20.

Его-же. Определение давления плоско-параллельного потока жидкости на контур, который в пределе переходит в отрезки прямой. Мат. Сборн. 1911, Т. 28, стр. 195—204.

³⁾ Чаплыгин С. А. О давлении плоско-параллельного потока на преграждающие тела. Матем. Сборник. 1910, Т. 27.

шится, чем в том случае, когда цилиндр был неподвижен; около же противоположной стороны (b) цилиндра, где направления движения стенки цилиндра и частичек жидкости противоположны, скорости последних уменьшаются, линии тока разойдутся, и давление увеличится;

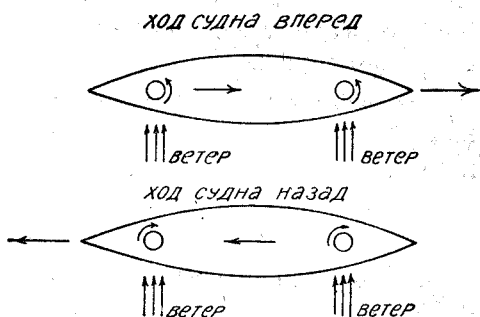


Черт. 164.

в результате такого перераспределения скоростей и давлений около цилиндра, появится боковая сила P , которая будет давить на цилиндр в ту сторону, где направления перемещения стенки цилиндра и частичек жидкости совпадают. Очевидно также, что, изменяя скорость вращения цилиндра, можно достигнуть того, что сила давления (P) достигнет наибольшей возможной при данной скорости движения потока величины;

кроме того, изменяя сторону вращения цилиндра, можно получить силу давления на цилиндр в направлении, прямо противоположном первому.

Опыты Флеттнера (Flettner, 1924) показали¹⁾, что при применении вращающихся цилиндров к судам, можно достигнуть значительно больших сил для передвижения судна, чем при пользовании обыкновенными парусами при одинаковой силе ветра, а именно: при вращающемся цилиндре сила получается в восемь раз больше, чем при парусах, имеющих рабочую поверхность, равную проекции поверхности цилиндра на плоскость, параллельную плоскости парусов. На прилагаемом чертеже показано направление вращения цилиндров при ходе судна вперед и назад при заданном направлении ветра.



Черт. 165.

¹⁾ См. Das Walzensegel von Flettner. Zeit. d. Ver. d. Ingenieure. 1924, № 47, стр. 1218* Prof. H. Föttinger u. H. Wagner. Fortschritte der Strömungslehre und Entstehung der Tragflügelkräfte. Zeit. d. Ver. d. Ingenieure. 1924, № 36, стр. 926—928.

Появление бокового давления на вращающийся цилиндр в параллельном течении известно было еще в 70-х годах прошлого столетия; по этому поводу производились давно уже исследования в аэродинамической лаборатории в Геттингене. Флеттнеру принадлежит идея применения вращающихся цилиндров к передвижению судов и непосредственные опыты с последними.

ГЛАВА IX.

Гидравлические измерения.

§ 1. Понятие о гидравлических измерениях, их целях и задачах.

Под именем гидравлических измерений понимаются, в узком смысле, такие измерения, которые дают возможность определить расходы воды в водотоках, будут ли это естественные реки, или искусственные каналы, или, наконец, просто трубопроводы. Но так как объекты, с которыми приходится иметь дело, и задачи, которые преследуются при указанных измерениях, различны, то и объем измерений, и самые способы измерений, и даже приборы для производства измерений тоже различны. Если еще можно говорить об определении только расходов воды при гидравлических измерениях в каналах и трубопроводах, то в отношении рек такое определение было бы очень неполно. В самом деле, конечной целью гидравлических измерений в реках является изучение полного режима реки с течением времени; поэтому, в гидравлические измерения здесь входят не только измерения расходов в определенный момент, но и установление определенной закономерности изменений этих расходов, в зависимости от стояния горизонта воды в реке, от изменения поверхностного уклона ее, как тогда, когда река имеет свободную поверхность, так и тогда, когда эта поверхность покрывается ледяным покровом; в гидравлические же измерения входит и изучение несомых рекой наносов, как с качественной, так и с количественной стороны, и изучение изменений таковых с течением времени. Таким образом, под именем гидравлических измерений в реке понимают не только измерение расходов, но и измерение уклонов, наносов и проч.

Все эти вопросы во всей полноте рассматриваются в особом отделе гидравлики — Гидрометрии. В общем же курсе гидравлики рассматриваются, главным образом, способы измерений расходов и притом в форме изложения общих методов измерений; другие же перечисленные вопросы рассматриваются или весьма кратко, или совсем не рассматриваются.

Придерживаясь вышеуказанных общепринятых приемов изложения, в дальнейшем мы рассмотрим только в общей форме современные приемы гидравлических измерений в применении к рекам, каналам и трубопроводам.

§ 2. Основные положения при измерении расхода воды в реках.

Для гидравлических измерений в реках прежде всего, в целях получения более или менее надежных результатов, необходимо выбрать подходящее место на реке. Для данных целей таким местом может служить, по возможности, прямолинейный участок одинаковой ширины, по длине равный, по крайней мере, четырем-пяти ширинам реки в данном месте, без всяких разветвлений, ответвлений или впадений притоков, при чем последние (притоки) вообще не должны находиться в близком расстоянии от выбранного участка. Русло реки должно быть ровное, правильной корытообразной формы, без местных возвышений (мелей, камней), или значительных углублений (ям).

Найдя подходящий участок на реке, выбирают и закрепляют на нем главный створ, т. е. такое поперечное сечение, к которому бы большинство струй было, по возможности, нормально; очевидно, такое сечение будет по своим размерам наименьшее для пропуска протекающей в реке воды. Положение главного створа закрепляется вешками (длинными кольями), вбиваемыми в берег на той и другой стороне (по две с каждой стороны) реки по направлению створа (черт. 168, 169). Кроме главного створа, служащего местом для гидрометрических работ, таким же образом закрепляются еще два створа, один выше, другой ниже по течению главного створа; верховой из добавочных створов находится от главного створа на расстоянии, равном двум ширинам реки, низовой — на расстоянии одной ширины реки; эти добавочные створы называются уклонными створами, так как ими пользуются для определения уклонов.

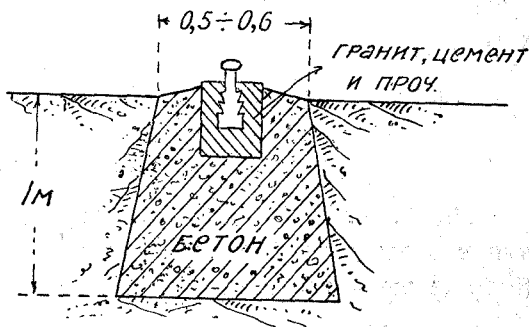
Весь участок реки, на котором предполагается производство гидрометрических работ, вместе с прилежащими берегами точно нивелируется и наносится в определенном масштабе на бумагу вместе с расположением створов; глубины реки по створам многократно промериваются с лодки футштоками (штанга, разделенная на сажени, футы, сотки сажени, или метры, дециметры и сантиметры, и окрашенная по делениям, попеременно, красной и белой краской; см. черт. 166) через определенные расстояния; нанося глубины в определенном масштабе на бумагу с соблюдением относительных расстояний, получаем профиля поперечных сечений по



Черт. 166.

створам реки, при чем захватываются и берега. Существуют и специальные приборы — профилографы — для непосредственного заснятия поперечного сечения реки.

На главном створе около одного из берегов вбивается в русло реки свая, вершина которой, гладко подтесанная, связывается точной нивелировкой с репером (черт. 167), т. е. определенной точкой, берега (каковой является, обыкновенно, конец железного стержня, укрепленного в бетонном основании, заложенном в грунте), положение которой точно определено по отношению к какой-либо плоскости, принятой за основную; у нас в России за основную плоскость принято считать средний уровень Балтийского моря. Таким образом, благодаря связи репера с вершиной сваи, положение последней также вполне определено, и, если мы будем измерять расстояния горизонтов воды в реке от вершины сваи, то можем получить ясную картину изменения этих горизонтов с течением времени, и положение последних всегда будет точно фиксировано; имеются приборы и для автоматической записи стояния горизонтов — лимниграфы.



Черт. 167.

По обоим берегам уклонных створов тоже забиваются сваи (уклонные сваи), вершины которых тоже связываются нивелировкой с репером и между собою, и, следовательно, положение вершин этих свай является тоже вполне определенным. Измеряя расстояния горизонтов воды от вершин уклонных свай, мы, очевидно, будем знать нивелировочные высоты положений горизонтов воды на верхнем и нижнем уклонном створе, а деля разности этих высот на расстояние между уклонными створами, найдем и уклоны реки на данном участке. Для более точного измерения расстояний вершин свай от горизонтов воды существуют специальные приборы.

Для измерения скоростей течения воды по главному створу в последнем выбирается определенное число вертикалей, в зависимости от ширины реки, при чем всегда предъявляется основное требование, чтобы характерные места поперечного профиля реки (места возвышений, углублений и проч.) были захвачены вертикалями. Вообще же относительно выбора числа вертикалей общих установленных правил нет. Так, например, известный гидрометр Ясмунд¹⁾ (R. Jasmund)

¹⁾ R. Jasmund. Hydrometrische Ermittlungen. Handbuch der Ingenieurwissenschaften. 3 Teil. 1. Bd. 1923 г., стр. 623.

рекомендует выбирать число вертикалей таким образом, чтобы расстояния между вертикалями были около $\frac{1}{10}$ ширины реки, но, во всяком случае, не более 20 м, при чем около самых берегов расстояния между вертикалями должны быть меньше (не более 5 м), на середине же реки могут быть и больше. При больших ширинах реки (более 20 м), для возможности производства всех гидрометрических измерений в один день, Ясмунд не рекомендует выбирать число вертикалей больше 10. При гидрометрических работах в Туркестане, число вертикалей выбиралось¹⁾, в зависимости от ширины реки, из такого расчета:

при ширине реки до 1 саж.	4 вертикали;
„ „ „ от 1 саж. до 10 саж. . . .	5 „
„ „ „ свыше 10 саж.	10 „

Проф. Ф. Е. Максименко, для возможности закончить измерения в один день, не советует выбирать число вертикалей более 15. Вообще же число вертикалей он определяет²⁾ из такого расчета:

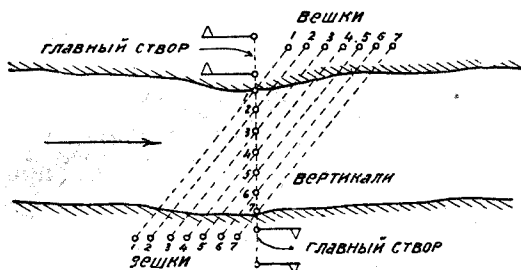
при ширине реки в	1 саж.		4	вер.
" " " "	1—5 "		5	"
" " " "	5—10 "		8	"
" " " "	10—120 "		10	"
" " " "	120—300 "		12	"
" " " "	более 300 "		15	"

Так как для изучения всех проявлений жизни и деятельности реки важно производить все гидравлические измерения на одних и тех же местах, то является необходимым закрепить положение вертикалей на долгое время. При малых ширинах реки, при том реки не судоходной, такое закрепление можно произвести, например, посредством перекидного через реку троса (стальной тонкий канат) с соответствующими разметками; при больших ширинах реки, и в особенности, для рек судоходных, подобного рода приемы закрепления вертикалей не годятся. Наиболее распространенным в таких случаях способом закрепления вертикалей является закрепление посредством вешек, вбиваемых по берегам реки — способ косых створов (черт. 168) и способ центральных створов (черт. 169), представляющее единственное неудобство в том, что установка понтона или лодки одновременно по линии главного створа и косых или центральных створов при сильных течениях и, в особенности, при ветре бывает затруднительна и вызывает значительную трату времени.

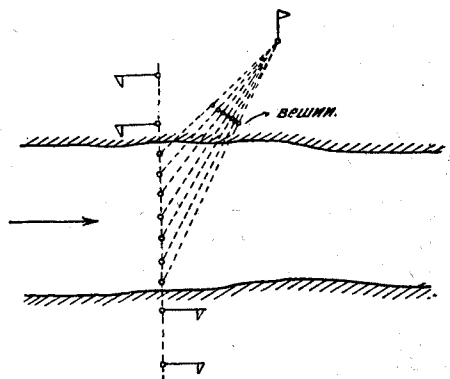
¹⁾ В. Глушков. Отчет Гидрометрической части Отдела Земельных Улучшений в Туркестанском крае за 1913 г. Т. I, стр. 7.

²⁾ Ф. Е. Максименко. Курс Гидравлики. 1921 г., стр. 446.

Переходя теперь к определению самых скоростей на вертикалях, очевидно, необходимо установить вполне определенно те точки на них, в которых необходимо и следует производить измерения скоростей. Выбор таких точек, конечно, должен основываться на предположении, что скорости, определенные в выбранных точках, дадут возможность наиболее точно установить среднюю



Черт. 168.



Черт. 169.

скорость по вертикали. Вывести какую-либо строгую математическую зависимость для распределения скоростей по вертикали до сих пор, как известно, не удалось, но зато накопился в этом отношении богатый опытный материал. На основании этого материала установлено¹⁾, что, определяя скорость в 3-х точках по вертикали: на глубинах 0,2 ($v_{0,2}$), 0,6 ($v_{0,6}$), 0,8 ($v_{0,8}$), и беря среднюю скорость:

$$v_{cp.} = \frac{v_{0,2} + 2v_{0,6} + v_{0,8}}{4},$$

получим скорость, отличающуюся от действительной средней скорости по вертикали на ничтожно малый процент.

Для лучшего определения распределения скоростей, когда это необходимо в силу тех или иных соображений, к указанным 3-м точкам присоединяют еще 2—вблизи поверхности и дна.

При малой глубине вертикалей (например, у берегов) принято измерять скорость течения в двух точках: у поверхности и на $\frac{2}{3}$ глубины, или на глубинах 0,2 и 0,8; в первом случае средняя скорость определяется по соотношению

$$v_{cp.} = \frac{v_n + 3v_{\frac{2}{3}}}{4},$$

во втором

$$v_{cp.} = \frac{v_{0,2} + v_{0,8}}{2}.$$

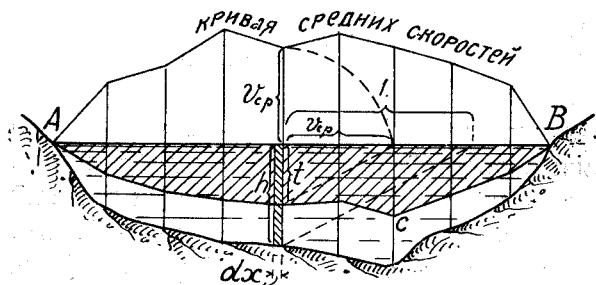
¹⁾ Hoyt and Grover. River Discharge. 1910.

На особенно мелких местах довольствуются определением одной скорости по вертикали на 0,6 глубины; эта скорость тоже близко подходит к средней скорости по вертикали. Наконец, при очень бурных течениях, больших глубинах и отсутствии достаточно солидного оборудования, довольствуются измерением поверхностных скоростей, при чем для перехода к средним скоростям по вертикали принимают, на основании опытного материала, коэффициент 0,85.

Когда средние скорости по вертикалям вычислены, приступают определению расхода воды через данное сечение.

Методов определения расхода существует несколько, но наиболее употребительным и простым является метод Гарлахера¹⁾ (Hartlacher). Заключается он в следующем: на чертеже, на котором в масштабе вычерчено поперечное сечение реки (главного створа), на продолжениях вертикалей откладывают в масштабе соответствующие

средние скорости, концы которых соединяют ломанной линией. Беря теперь элементарную площадку, расположенную на какой-либо вертикали (глубина h), например, $h dx$ (см. черт. 170), и, умножая на соответствующую этой вертикали среднюю скорость v_{cp} , мы, очевидно,



Черт. 170.

получим элементарное количество воды, протекающее через элементарную площадку в одну секунду

$$dQ = h dx \cdot v_{cp},$$

а обозначая переменную по сечению величину $h v_{cp}$ через новую переменную t , имеем

$$dQ = t dx;$$

интегрируя последнее выражение в пределах площади (ω) сечения, получим искомый расход (Q) воды через сечение

$$Q = \int_{\omega} t dx.$$

Решение весьма упрощается тем, что из равенства $h v_{cp} = t$ получается пропорция

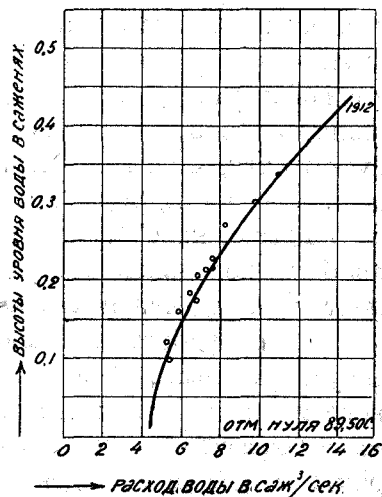
$$\frac{t}{h} = \frac{v_{cp}}{1},$$

¹⁾ Handb. d. Ingenieurwissenschaften. 1908. 3 Teil. Bd. 13, стр. 211.

легко строящаяся, как показано на чертеже, и дающая в известном уже масштабе отрезок t . Определяя подобные отрезки для всех вертикалей, соединяя концы их кривой, мы получаем новую площадь ABC , которую легко определить планиметрированием, и которая дает, очевидно, нечто иное, как $\int_{\infty}^{\infty} t dx$, т. е. расход Q .

Определив расходы воды при нескольких наиболее характерных горизонтах реки, можно построить, так называемую, кривую расходов воды для данного сечения, устанавливающую определенную зависимость между стояниями горизонтов в пределах измерений и соответствующими расходами, и дающую возможность, обратно, по стоянию горизонта в данное время непосредственно определить расход.

На прилагаемом чертеже 171 приведена, например, кривая расходов для р. Чу¹⁾ в Туркестане (Гидрометрическая станция Константиновская), построенная, как видно, по точкам, отмечаящим расходы воды при соответствующих стояниях горизонта.



Черт. 171.

§ 3. Приборы для определения скоростей в реках.

Для определения поверхностных скоростей в реках очень быстрых, глубоких, где более сложные приборы и инструменты являются трудно применимыми, употребляются еще до сих пор иногда поплавки, пускаемые вниз по течению. Для того, чтобы скорость поплавок, по возможности, мало отличалась от скорости движения струй, и в местах изгиба последних не оказывала заметного влияния центробежная сила, поплавков должен быть легким. Поэтому, самым лучшим материалом для поплавков является дерево и лучше всего лиственничное. Поплавки вырезаются из круглого дерева толщиной 5 см (0,02 саж.) и диаметром 10—12 см (0,04—0,06 саж.). Во избежание влияния воздушных течений, почти всегда существующих в слое атмосферы, близком к воде, никаких флажков на них устраивать не рекомендуется. Для того, чтобы еще более уменьшить вес, сохраняя наибольшую площадь, рекомендуется поплавков посредине сверху выдолбить. Поверхность поплавок, для лучшей видимости с дальнего расстояния, окрашивается в красный и белый цвета. Для определения скорости поплавками выби-

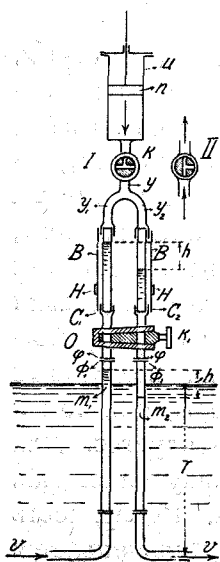
¹⁾ В. Глушков. Отчет Гидрометрической части Отдела Земельных Улучшений Туркестанском крае. 1913 г. Т. VI.

раются два новых створа, один выше, другой ниже главного створа, на определенном друг от друга расстоянии, зависящем от желаемой точности измерений (для этой цели могут служить и уклонные створы). Поплавки пускаются с лодки, которая устанавливается по линии, так называемого, „створа лодок“. Этот створ лодок располагается саженьях в 5—10 выше верхового створа. Это делается для того, чтобы поплавок успел, до подхода к измерительному (верховому) створу, принять скорость, равную скорости течения воды. Поплавки стараются пускать так, чтобы они проходили при дальнейшем своем движении, по возможности, через места выбранных вертикалей главного створа, чего можно, конечно, достичь только путем предварительного пуска пробных поплавков, указывающих направления течений струй. В момент прохождения поплавками верхового и низового створов, один из участников работы, наблюдающий за движением поплавков, сигнализирует (например, флажком) другому, который засекает с определенного места поплавков пантометром, и, таким образом, устанавливается траектория движения поплавка на участке реки между створами. Время прохождения поплавками верхнего и нижнего створов отмечается по секундомеру. При больших ширинах реки для наблюдения за поплавками приходится пользоваться биноклем. Вычерчивая теперь на бумаге, содержащей план данного участка реки, траекторию движения поплавков, определяют длину путей, проходимых поплавками и, зная время прохождения этих длин, очевидно, легко определяют

скорость движения поплавков, а следовательно, и скорость течения воды на различных расстояниях от берега. Средняя из этих скоростей дает среднюю поверхностную скорость на данном участке, от которой уже можно перейти к средней скорости по сечению.

При тщательной работе, при правильно выбранном расстоянии между верховым и низовым створами, можно получить, как указывает практика, с поплавками результаты, более или менее, удовлетворительные.

Наиболее совершенными приборами для определения скоростей являются гидрометрические трубки и гидрометрические вертушки или крылья. Гидрометрические трубки, носящие название трубок Пито-Дарси (Pitot-Darcy), в настоящее время конструируются из двух отогнутых под прямым углом трубок (m_1) и (m_2) (черт. 172), из которых одна (m_1) отогнута против течения, а другая (m_2) по течению. Трубки (m_1) и (m_2) соединены между собою обоймой (O) с краном (k). Продолжением трубок m_1 и m_2 , большей частью металлических, служат стеклянные трубки (C_1) и (C_2), окружен-



Черт. 172,

обоймой (O) с краном (k). Продолжением трубок m_1 и m_2 , большей частью металлических, служат стеклянные трубки (C_1) и (C_2), окружен-

ные общей, тоже стеклянной, трубкой (BB), на которой нанесены миллиметровые деления. Верхние концы стеклянных трубок переходят снова в металлические трубки (y_1) и (y_2), соединяющиеся в одну трубку (y), снабженную трехходовым краном (k). Выше крана трубка (y) переходит в цилиндр (u) с поршнем (n).

При положении крана (h), обозначенном цифрой I, пространство цилиндра под поршнем соединяется с наружным воздушным пространством, при положении же II — с внутренним пространством трубок (y_1) и (y_2) и, далее, (C_1) и (C_2), и еще, далее, (m_1) и (m_2).

Принцип действия описываемого прибора (конструкция Amsler'a) изложен в Главе VIII, § 1 (см. задачу № 3). Там найдено было, что, если опустить в воду трубку, изогнутую под прямым углом против течения, то горизонт воды в трубке поднимется на некоторую высоту h , при чем зависимость скорости от высоты (h) выразится соотношением

$$v = \sqrt{gh} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2gh} = 0,71 \sqrt{2gh} = \varphi \sqrt{2gh}.$$

Коэффициент φ , получившийся при этом равным 0,71, очевидно, вообще говоря, должен зависеть от устройства отверстия трубки и должен быть определен опытным путем для каждой трубки отдельно. Если бы отогнутый конец трубки повернуть вниз по течению, то картина получилась бы другая: горизонт воды в трубке понизился бы по сравнению с горизонтом воды вне трубки, вследствие высасывания воды из последней. Ставя две трубки вместе рядом, как в вышеописанном приборе, мы, очевидно, получим повышение горизонта в левой и понижение в правой, т. е. усилим действие воды, и при той же самой скорости разность (h) горизонтов воды в этих трубках будет больше, чем подъем в одной трубке, но зависимость скорости (v) от высоты (h) сохранит свой общий вид, за исключением коэффициента φ , который изменится и, конечно, опять должен быть определен опытным путем. Для удобства отсчета высоты (h) и служит дальнейшее усложнение прибора: ставя кран (h) в положение II и поднимая поршень (n) вверх, мы, очевидно, разрежаем пространство под ним; благодаря этому наружное атмосферное давление поднимет оба столбика воды в правой и левой трубках, но разность (h) горизонтов останется при этом неизменной. Поворачивая, далее, кран (k) в положение I и опуская поршень книзу, мы выгоним воздух из-под поршенька наружу, не нарушая стояния горизонтов воды в трубках. Переводя, затем, кран (h) снова в положение II и снова поднимая поршень вверх, мы снова поднимем столбики воды в трубках и т. д. Продолжая таким образом манипулировать поршеньком и краном (h), мы, наконец, поднимем столбики воды в стеклянные трубки (C_1) и (C_2), где уже легко отсчитать разность горизонтов (h). Для большей точности отсчета служит

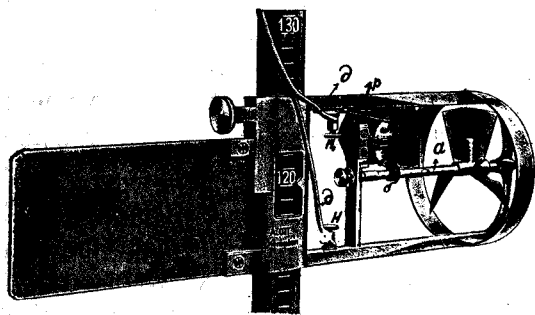
нониус (H). После определения высоты (h), остается только подсчитать скорость по аналогичной вышеприведенной формуле ¹⁾.

Для возможности измерения скорости при больших глубинах, между фланцами $\Phi\Phi$ и $\Phi_1\Phi_1$ вставляются добавочные звенья трубок. Для избежания влияния капиллярности, внутренний диаметр трубок делается не менее 15 мм, а, для избежания влияния волнения воды в водотоке на показания, диаметр отогнутых концов трубок делается, наоборот, не больше $1-1\frac{1}{2}$ мм.

Необходимо обратить внимание на то, что разность стояний горизонтов воды в трубках, очевидно, будет соответствовать не некоторому определенному моменту, а не среднему за данный промежуток времени, что имеет, если вспомнить о влиянии пульсации на скорость воды в водотоках, существенное значение.

Кран (κ_1) служит для того, чтобы, закрыв его, можно было весь прибор, вынув из воды, перенести, например, на берег и здесь более спокойно произвести отсчет высоты (h).

Гидрометрические вертушки или крылья в существенных своих чертах состоят из валика (a) (черт. 173), снабженного винтовой резьбой (b); валик, вращающийся в шариковых подшипниках, несет на себе винтовое колесо (κ), которое при течении воды вдоль оси валика вращается с определенной скоростью и приводит посредством червяка (b) во вращение зубчатое колесико ($з$); последнее на



Черт. 173.

своей поверхности имеет, обыкновенно, 4 выступающих из его тела штифтика (m), с которыми соприкасается пружинка (p) при прохождении штифтиков под ней; пружинка соединяется с изолированным от прочих частей вертушки контактом (H_1); другой контакт (H) не изолирован; электрические провода (тонкий кабель — δ), идущие от кон-

тактов, соединяются с батареей, имея в своей цепи звонок. Так как зубчатое колесико ($з$) поворачивается на один зубец, когда валик сде-

¹⁾ Относительно влияния конца трубки Пито на точность результатов измерений и вообще о работе с трубками Пито см.:

H. Blasius. Einige Formen von Pitotmessröhren. Die Turbine. 1910, стр. 150.

K. Ellison. Zeit. d. Ver. d. Ingen. 1919, стр. 989.

Schuster. Experimentelle Untersuchung der Strömungsvorgänge in einer Schnellläufer-Francis-Turbine, unter Anwendung eines neuen Verfahrens zur Bestimmung von Stromrichtungen mit Pitot-Röhren. Mitteilungen über Forschungsarbeiten. 1910, Heft 82.

R. Winkel. Stauröhren zur Messung des Druckes und der Geschwindigkeit im fließenden Wasser. Zeit. des Vereines d. Ingen. 1923, стр. 568—571.

дает полный оборот, и так как на колесике бывает обыкновенно 100 зубцов, то валику необходимо сделать 100 оборотов, чтобы колесико сделало один полный оборот; указанные выше штифтики (m) на зубчатом колесике, приходя в соприкосновение с пружинкой (p), что будет происходить через каждые 25 оборотов валика (при 100 зубцах на колесике), замыкают ток, и сейчас же раздается звонок, который, следовательно, будет повторяться через каждые 25 оборотов валика; отсюда, определяя по секундомеру промежуток времени между звонками, можно подсчитать число оборотов валика (n) в одну секунду.

Штифтики на своих концах имеют вырезы, которые дают возможность, если только штифтики повернуты вокруг оси соответствующим образом, проходить свободно над ними пружинке; таким образом, можно регулировать промежуток времени между звонками; если 3 штифтика из 4-х не будут соприкасаться с пружинкой, звонок будет раздаваться только через каждые 100 оборотов валика; если 2 штифтика, диаметрально противоположных, не соприкасаются с пружинкой, звонок будет раздаваться через каждые 50 оборотов валика и т. д.

Так как очевидно, что скорость вращения винтового колеса, а следовательно, и валика, зависит от скорости течения воды, то число оборотов валика (n) в единицу времени (1 сек.) есть мера скорости течения воды в соответствующем месте. Так как, кроме того, каждое крыло, вследствие всегда существующего на оси трения, начинает вращаться только при некоторой определенной, зависящей от конструкции крыла, скорости $v_0 = a$, то скорость течения воды можно представить в виде соотношения

$$v = a + bn.$$

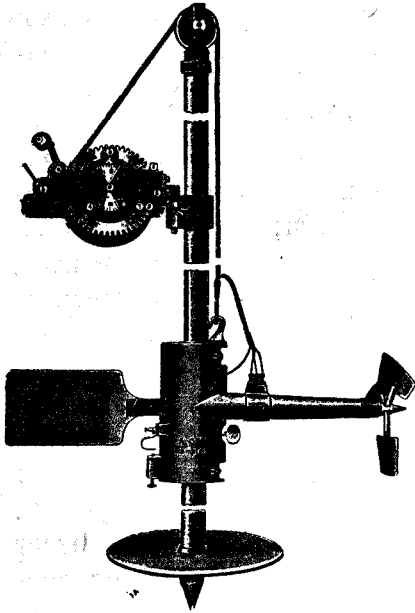
Постоянные a и b должны быть определены для каждого крыла специальными опытами (тарированием).

Для того, чтобы вертушка устанавливалась по течению, она снабжается особой тонкой и широкой пластинкой (P), так называемым, рулем. Для установки прибора на определенной глубине, он или надевается на металлическую штангу, на которой может быть закреплен в любом месте, или укрепляется на конце штанги накрепко; в первом случае штанга устанавливается на дно, и прибор перемещается по ней для измерения на различных глубинах, во втором случае, для той же цели, перемещается по вертикали штанга с вертушкой, помещаемая в особых направляющих, укрепляемых на понтоне, помосте, мосту и т. д.

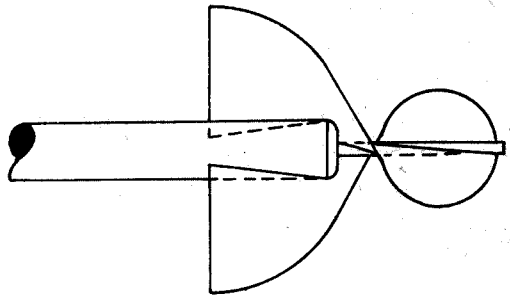
Описанное выше гидрометрическое крыло имеет, сравнительно, простую конструкцию; более сложные и усовершенствованные конструкции вызваны стремлением сократить время при производстве работ, сделать прибор более чувствительным и, наконец, обезопасить механизм прибора от засорения и порчи плавающими в воде предметами, да и самой водой. На чертеже 174 изображено, например, гидро-

метрическое крыло, у которого весь механизм закрыт, а самое крыло подвешено на тросе, перекинутом через блок на верхнем конце штанги и идущем, затем, на калиброванный барабан, вращая который посредством рукоятки, можно весьма точно поднимать или опускать вертушку по штанге; внизу штанга кончается диском, дающим возможность штанге погружаться в грунт русла всегда на определенную глубину; муфта крыла снабжена подвижным штифтом, который при посадке ее на диск, замыкает ток, и сейчас же раздается звонок, сигнализирующий предел опускания вертушки.

Чувствительность прибора зависит от устройства подшипников, поддержи-



Черт. 174.



Черт. 175.

вающих валик, а также от формы винтовых лопастей крыла. С другой стороны, форма лопастей имеет весьма большое значение на приставание к ним плавающих в воде предметов, как-то: травы, листьев, водорослей и проч. В этом отношении лопасти, имеющие форму двух конических винтовых поверхностей, изображенную на чертеже 175, более благоприятны.

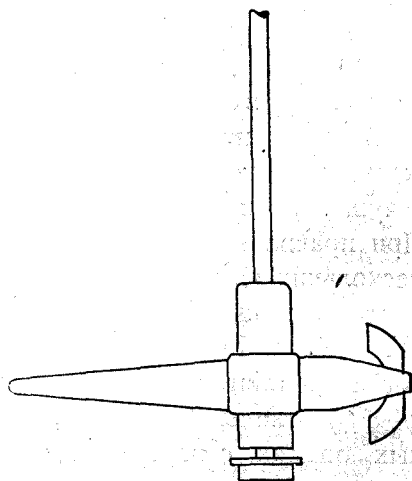
Винтовые поверхности могут сменяться; при больших скоростях применяются винтовые лопасти с большим подъемом.

Чтобы совершенно обезопасить счетный механизм прибора, в некоторых новейших конструкциях помещают его в совершенно изолированном от воды помещении, при чем, например, в одной конструкции передача вращения к нему от валика происходит извне посредством магнита, сидящего на валике (магнитные вертушки системы Mensing'a).

В самое последнее время появились¹⁾ вертушки весьма большой чувствительности — системы DBF (инженеры Dubs, Bitterli, Fischer).

¹⁾ Die Wasserkraft. 1922.

Особенностью этого прибора (черт. 176) является то, что винтовое крыло приводит во вращение маленькую динамо-машинку, а возбуждаемый последней ток отводится кабелем к очень чувствительному гальванометру, на котором и отсчитывается, при чем отклонение стрелки гальванометра прямо пропорционально скорости воды. Этим прибором возможно определить мгновенную скорость течения воды. Весь механизм, за исключением только винтового крыла, заключен в совершенно закрытую коробку, которой придана форма, наименее нарушающая течение воды в месте установки прибора.



Черт. 176.

В малых речках расходы воды можно определять посредством устройства на них щитовых отверстий и водосливов (см. Главу VI, § 4), при чем для полной уверенности в достоверности получаемых результатов стремятся¹⁾ при работе с водосливами соблюдать все те условия, при которых производились опыты Базена:

1) избежание всякого бокового сужения струи, т. е. длина водослива должна совпадать с шириной подводящего канала;

2) водослив должен быть полным, т. е. горизонт нижнего бьефа должен быть ниже гребня водослива не менее, чем на высоту переливающегося слоя, но ни в каком случае не менее 0,15 м.

3) пространство под водосливом должно быть хорошо вентилируемо, т. е. к нему должен быть устроен совершенно свободный подвод воздуха со стороны;

4) переливающаяся струя не должна иметь бокового расширения, т. е. стенки канала должны быть продолжены за водослив;

5) высота стенки водослива должна иметь один из следующих размеров: 0,20, 0,30, 0,40, 0,50, 0,60, 0,80 м;

6) к деревянной стенке, для образования гребня, необходимо прикрепить железную полоску толщиной в 6—7 мм, шириной в 0,20 м и выступающую над деревянной стенкой на 0,1 м;

7) высота слоя над водосливом должна определяться на расстоянии 5 м выше по течению от гребня водослива.

При соблюдении всех перечисленных условий, применение формулы Базена (19, Глава VI, § 4) дает очень точные результаты при определении расхода.

¹⁾ А. Эссен. Отчет Гидрометрич. Части Отдела Земельных Улучшений на Кавказе за 1910—12 г.г. Выпуск 2-ой, стр. 102—103.

§ 4. Определение расходов воды в каналах.

Определение расходов воды в каналах возможно производить, в зависимости от величины, всеми перечисленными выше способами, но, кроме того, применяют еще и такие приемы:

а) Определение средних скоростей по вертикали посредством гидрометрических шестов. Гидрометрическим шестом называется деревянный или металлический пустотелый стержень, нагруженный в нижней своей части с таким расчетом, чтобы в текущей с определенной скоростью воде он держался вертикально. При правильно выбранной длине стержня, обыкновенно составного из нескольких частей, при значительных глубинах средние скорости по вертикали, определенные гидрометрическим шестом, как показали многочисленные опыты Francis'a, Gordon'a, Lombardini, Grote и, в особенности, Cunningham'a в каналах Индии, очень мало (не более, как на 2—3%) отличаются от тех, которые получены были при сравнительных опытах с вертушками; расходы же, определенные посредством гидрометрических шестов, отличались от истинных также не более, как на 3%¹⁾.

Гидрометрические шесты применимы также и при измерениях в реках и речках, но при условии вполне правильного русла с однообразными глубинами в продольном направлении и, при том, в реках с тихим течением; точность работ с ними уменьшается с возрастанием скорости течения потока.

Что касается правильного выбора длины шеста, то, по исследованиям Cunningham'a и Francis'a, необходимо длину (l) погруженной части шеста делать на 4—5 процентов меньше глубины (H) вертикали, на которой производится измерение скорости. При этих условиях средняя скорость (v_{cp}) по вертикали может быть вычислена по скорости (v) движения гидрометрического шеста из соотношения

$$v_{cp} = \kappa \cdot v,$$

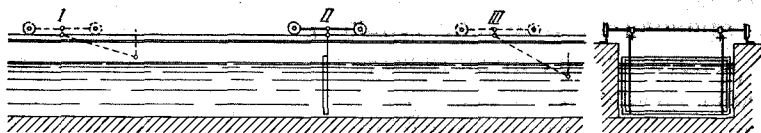
при чем, по опытам Francis'a, переходный коэффициент (κ) имеет значение:

$$\kappa = 1,000 - 0,116 \left[\sqrt{1 - \frac{l}{H}} - 0,1 \right].$$

Что касается способа производства работ с гидрометрическими шестами, то таковой ничем не отличается от способа производства работ с поплавками.

¹⁾ R. Jasmund, Fließende Gewässer. Handbuch der Ingenieurwissenschaften. Der Wasserbau. I Bd. 1923, стр. 587.

б) Измерение средних скоростей по всему сечению канала посредством подвижных экранов или щитов. Из таких устройств наиболее известен прибор Е. Андерссона¹⁾, который состоит из прорезиненного полотна, натянутого в раму (черт. 177), при чем последняя только на 1 см не доходит до стенок



Черт. 177.

и дна канала. Рама подвешена свободно к горизонтальной оси, покоящейся на легкой тележке, которая может катиться на колесах по рельсам, уложенным вдоль канала.

Если опустить щит из положения I в воду, нормально к течению последней (положение II), и укрепить его в этом положении посредством особых укрепляющих устройств, то он под давлением воды будет передвигаться вместе с тележкой с некоторой скоростью, почти точно совпадающей (ввиду очень малых сопротивлений) с средней скоростью течения воды в канале; движение щита будет продолжаться до тех пор, пока особым приспособлением он не задержится, после чего прибор поднимается в положение III. Для отсчета времени пробега прибором измерительного пути употребляют обыкновенный секундомер, а при больших устройствах особые электрические измерители и пути, и времени.

Основным условием для применения экранов Андерсона служит наличие длинных прямых каналов с гладкими стенками и неизменного поперечного сечения.

§ 5. Измерение расходов воды в трубопроводах.

Это измерение можно производить посредством трубок Пито-Дарси и посредством водометров. Как уже выше указывалось (Глава III, § 1), измерение скорости по оси трубы дает возможность с большой, сравнительно, точностью определить среднюю скорость по поперечному сечению трубы, а, следовательно, и секундный расход воды в трубе.

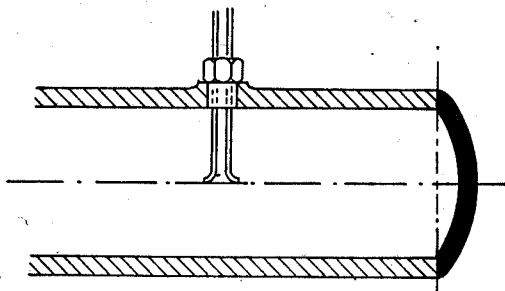
Трубка Пито-Дарси для этого случая конструируется (черт. 178) с очень небольшими отгибами концов и герметически ввинчивается посредством особой обоймы, носящей характер муфты, в стенку трубы; установка концов трубок по оси трубы может быть произведена с большой точностью.

¹⁾ Zeit. d. Vereines Deutsch. Ing. 1907, стр. 627.

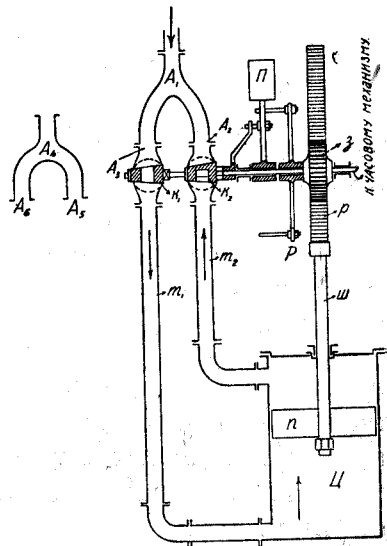
Водомеры, имеющие широкое распространение в водопроводном деле, можно подразделить на 4 главных группы: объемные, дисковые, скоростные и водомеры Вентури.

Все перечисленные группы водомеров имеют много различных конструкций, описание которых в данном кратком руководстве, конечно, не может найти места; в дальнейшем приводится описание только одного какого либо представителя водомеров из вышеуказанных групп¹⁾.

Объемный поршневой водомер системы Кеннеди (Kennedy).



Черт. 178.



Черт. 179.

На прилагаемом чертеже (черт. 179) схематически изображен в разрезе водомер Кеннеди. Вода подводится штуцером (A_1) и течет через трехходовой кран (κ_1) и трубу (m_1) в измеряющий цилиндр (L), давит снизу на поршень (n) и поднимает его вместе со штоком ($ш$), конец которого переходит в зубчатую рейку (p). Находящаяся над поршнем вода устремляется по трубе (m_2) и уходит через кран (κ_2) в отводную трубу (A_5). Зубчатая рейка (p) зацепляется с шестерней ($з$), которая, помещаясь на оси, продолжающейся в обе стороны, управляет, с одной стороны, часовым механизмом, а с другой стороны, представляет рычаг (P), который, в свою очередь, посредством особой ручки действует на противовес (Π) и ставит его, положим, в вертикальное положение; при этом противовес поворачивает оба крана (κ_1) и (κ_2) на 90° , после чего вода устремляется уже через (A_2) и (κ_2) по

¹⁾ О водомерах см.:

Труды 3-го (1897 г.), 8-го (1907 г.), 9-го (1909 г.) Русск. Водопроводн. Съездов.

Труды Донск. отделения Русск. Техн. Общества. 1914, № 2.

A. Claus et P. Poinsard. Le Compteur d'eau. Paris, 1906.

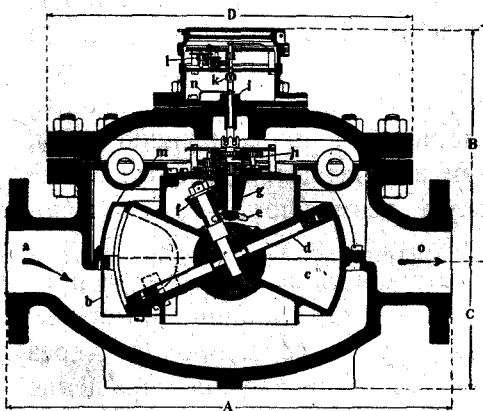
A. Bergesse. Compteur et limitation automatique de débit. Le Génie Civil. 1906 и 1908 г.

P. Juppont. La vente de l'eau potable dans les villes. Paris, 1908.

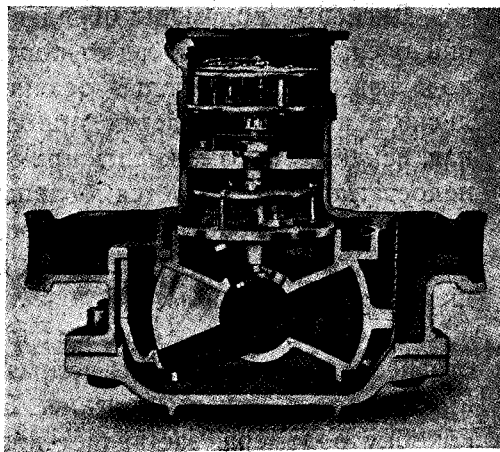
Hütte. 21 и 22 Auflage, II.

трубе (m_2) в верхнюю часть цилиндра (L) и принуждает поршень опуститься книзу; вода из под поршня уходит по трубе (m_1) и кран (k_1) в трубу (A_6), соединяющуюся с трубой (A_5) в одну отводную трубу (A_4). Попеременное, то в одну, то в другую сторону, вращение зубчатки (z) превращается особым механизмом в непрерывное круговое вращение, приводящее в движение стрелки циферблата. Так как объем цилиндра точно известен, то движение стрелки по циферблату указывает, какое количество воды в определенный промежуток времени пропущено аппаратом. Поршень, ходящий в цилиндре, устроен совершенно непроницаемым при помощи каучукового кольца, катающегося между поршнем и стенками цилиндра, чем в то же время трение между последними сводится к минимуму. Устраиваются также по этому типу двухцилиндровые, трехцилиндровые и даже четырехцилиндровые водомеры.

Объемные водомеры считаются очень точными водомерами, отсчитывающими с одинаковой точностью проход воды в 0,1 литра в секунду и в несколько литров и даже десятков литров; достоинством их является и малая чувствительность к чистоте воды. Недостатками же их являются большой вес и большая стоимость, по сравнению с другими типами; кроме того, некоторые системы объемных водомеров производят шум при работе, который, конечно, составляет известное неудобство, в особенности ночью; наконец, к числу недостатков можно приписать и то, что при повреждении некоторых частей водомера происходит иногда полная остановка подачи воды.



Черт. 180а.



Черт. 180б.

Дисковой водомер системы Сименса изображен на прилагаемом чертеже (черт. 180). Существенную часть водомера этой системы составляет плоский диск (d), установленный на шаровом подшипнике и помещенный в камере (c) с конусообразными верхним и нижним днищами, с которыми вышеуказанный диск все время сопри-

касается по образующей; в верхнем днище камеры имеется отверстие, через которое проходит небольшой шпindel от шарового подшипника; этот шпindel, имеющий на конце коническую головку (f), последней соприкасается с коническим же наконечником (g) вертикального валика, передающего посредством зубчатой передачи вращательное движение диска счетному и указательному механизмам (h и l). Вода, поступающая в водомер через впускной патрубок (a), проходит сперва сетку (b) и, омывая всю измерительную камеру, попадает в собственно измерительное пространство (c) и приводит диск в своеобразное колебательно-вращательное движение; при этом, движение диска, благодаря устройству направляющих конусов (g) и (f), происходит таким образом, что между диском и камерой образуется плотный затвор, предупреждающий протекание неизмеренной воды. Один оборот захватки (e) соответствует полному периоду колебательного движения диска, и количество протекшей воды при этом точно соответствует полезному объему дисковой камеры. Из последней вода выходит через особое отверстие в выходной потрубок (o). Так как вращательное движение диска находится в зависимости от скорости течения воды или ее объема, то число оборотов непосредственно переводится в счетном аппарате в объем протекшей воды.

Необходимым условием для правильности показаний водомера служит совпадение центра шарового подшипника диска с центром камеры.

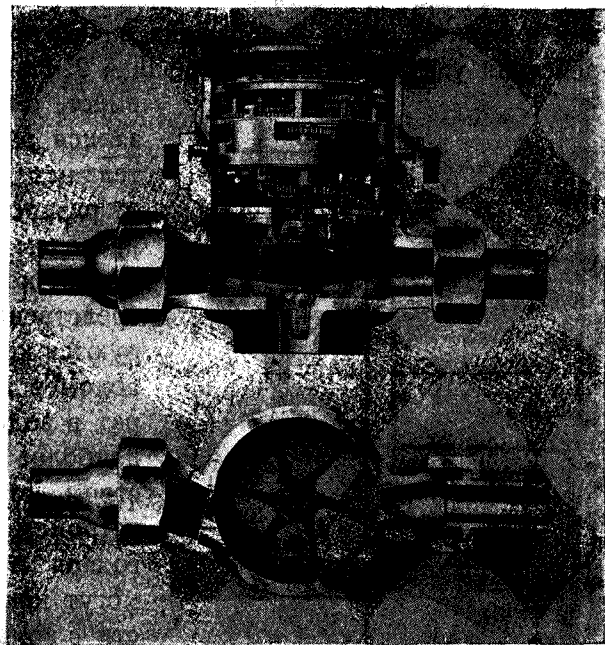
Дисковые водомеры обладают целым рядом серьезных недостатков: они очень деликатны, легко портятся и требуют особенно чистой воды; вода известковая, дающая осадки на стенках сферической камеры, на диске и на других частях прибора, а также вода периодически мутная, исключает возможность применения дисковых водомеров; наконец, недостатком их является большая склонность к просачиванию воды, даже в новых водомерах. Достоинствами их считают: простоту, малые размеры, малый вес, дешевизну и легкую возможность смены изношенного диска новым.

Скоростные водомеры пользуются весьма большим распространением в Европе и подразделяются на две главных системы: крыльчатые и Вольтмановские. В тех и других вода, проходя через коробку водомера, заставляет вращаться колесо, передающее вращение счетному механизму. В крыльчатых водомерах колесо имеет форму, изображенную на прилагаемом чертеже (черт. 181); в Вольтмановских водомерах (черт. 182) колесо по форме имеет много общего с винтовыми колесами гидрометрических вертушек. Для легкости и для уменьшения трения в подшипниках в некоторых системах водомеров первого типа колеса делаются из каучука или целлулоида; для лучшего воздействия воды на колесо, патрубок, подводящий к колесу воду, в некоторых конструкциях наклонен по отношению к внешней

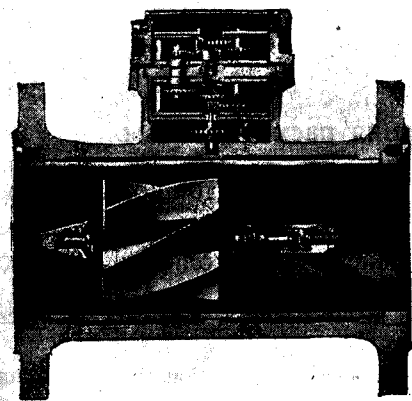
окружности колеса; в других конструкциях вода, перед вступлением на колесо, проходит через отверстия в стенке, окружающей колесо, и тем получает определенное направление к лопастям колеса.

Вращение колеса в том и другом типе водомеров передается счетному аппарату, а так как число оборотов пропорционально скорости течения воды или ее объему, то счетный аппарат сразу переводит числа оборотов в объемы протекающей воды.

Скоростные водомеры по самому существу своему не могут обладать такой точностью, при равных условиях, как поршневые, но они дешевле последних. Точность регистрации воды в особен-



Черт. 181.



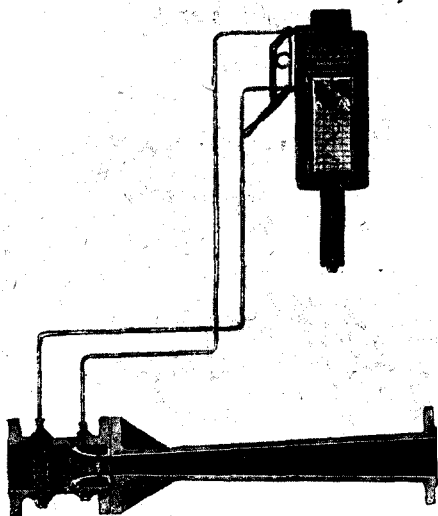
Черт. 182.

ности низка при малых количествах протекающей воды, и она становится тем меньше, чем больше размеры скоростного водомера по отношению к возможным пониженным расходам воды; это становится вполне понятным, если обратить внимание на то, что при больших поперечных сечениях и малых секундных расходах, скорость течения гораздо легче может упасть ниже того предела, при котором водомер уже перестает показывать подачу. При значительных колебаниях расхода возможно устранить указанный недостаток только установкой двух водомеров, одного большого, другого малого, но с неперменным условием, чтобы в периоды малых потреблений работал малый водомер.

Если все же, несмотря на указанные существенные недостатки водомеров этого типа, они имеют большое распространение в городских водоснабжениях, то это объясняется тем, что для водопроводного

хозяйства выгоднее допустить некоторый неучет отпускаемой населению воды, чем ставить дорогие водомеры и иметь из-за этого очень квалифицированный персонал.

Водомеры Вентури, одна из конструкций которых для холодной и горячей воды изображена на чертеже 183, по принципу своего действия уже описаны в Главе II, § 2. На чертеже водомер изображен вместе с прибором для автоматической записи разности давлений в измерительных сечениях аппарата. Так как от разности давлений легко перейти к расходам протекающей воды, то существуют конструкции, в которых непосредственно автоматически регистрируются количества протекающей через водомер воды. Регистрирующий аппарат в водомерах этого типа и является наиболее сложным и дорогим устройством, по сравнению с аналогичными устройствами других водомеров. Благодаря этому, водомеры Вентури могут конкурировать по своей стоимости с водомерами других типов только при больших диаметрах (свыше 200 мм).



Черт. 183.

В особенности они являются пригод-

ными при регистрации потребления воды из открытых каналов или желобов, когда главное внимание должно быть обращено на уменьшение потери в напоре (при учете воды в целях орошения и проч.). Совершенная нечувствительность к мутности воды делает водомеры Вентури в таких случаях особенно ценными.

§ 6. Химический метод определения расходов воды.

Сущность химического метода¹⁾ определения расходов воды заключается в том, что в поток вводится некоторое вполне определенное количество концентрированного раствора какой либо соли, чаще всего

¹⁾ E. F. Cote et H. Bellet. La mesure du débit dans les essais de turbines hydraul. 1909.

A. Boucher et R. Mellet. Jaugeages par titrations et applications de la titration des chlorures au jaugeage des debits. Bull. techn. de la Suisse Romande. 1910, № 11.

Dr. Collet et Dr. Mellet. Jaugeages par titration. 1913. Mitteil. der Abt. der Schweiz. Landeshydrographie.

W. Zuppinger. Neuere Messmethoden zur Bestimmung von Wassermengen. Zeit. für d. gesam. Turbinenwesen. 1913.

W. Müller. Über ein neues Wassermessverfahren. Zeit. f. d. gesam. Turbinenwesen. 1915, стр. 205.

очищенной столовой соли, и на некотором расстоянии от этого места берется проба воды из потока; степень разжижения соляного раствора и позволяет сделать заключение о секундном расходе воды в потоке. В самом деле, если назвать искомый расход воды в потоке через Q , степень концентрации раствора соли, вводимой в поток, через C , количество вводимого в поток в единицу времени (1 сек) раствора соли через q , степень концентрации раствора во взятой пробе через c , то, очевидно, можно написать следующее соотношение

$$Qc = qC,$$

откуда

$$Q = q \frac{C}{c}.$$

Пусть, например, вводится в поток $0,15 \frac{\text{литра}}{\text{сек}}$ концентрированного раствора соли, содержащего 300 gr соли в одном литре, а взятая из потока проба содержит $0,02 \text{ gr}$ соли в одном литре, тогда по вышеприведенному соотношению расход воды в потоке будет:

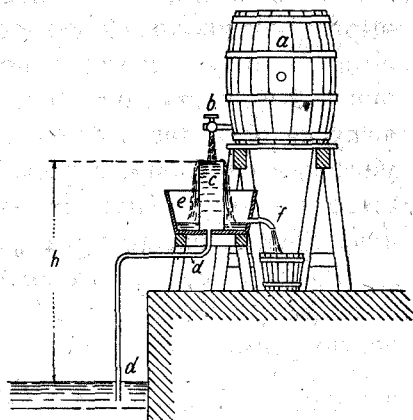
$$Q = \frac{300 \cdot 0,15}{0,02} = 2250 \frac{\text{литр}}{\text{сек}} = 2,25 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}.$$

Для того, чтобы измерение расхода описываемым методом вполне удалось, необходимо выполнение 3-х условий:

- а) равномерность подвода концентрированного раствора;
- б) полнейшее перемешивание раствора в потоке;
- в) точный анализ растворов соли.

Равномерности подвода концентрированного раствора можно достигнуть различными приспособлениями. На прилагаемом, например, чертеже 184 приведена схема довольно простого устройства, состоящего из сосуда (а), содержащего концентрированный раствор соли, и из чана (е) с укрепленным в нем плотно цилиндром (с); из сосуда (а) раствор вытекает через кран (b) в цилиндр (с), а из последнего по трубке (dd) в поток.

Вытекание регулируется таким образом, что часть раствора постоянно переливается через верхний край цилиндра (с) в чан (е); таким образом, является возможность, более или менее, точно определять напор (h), по которому вычисляется скорость истечения раствора соли из трубки dd, и который есть ни что иное, как нивелировочное



Черт. 184.

расстояние между верхней поверхностью переливающегося через край цилиндра (с) слоя раствора и горизонтом воды в потоке; чтобы получить еще более точные результаты, рекомендуется толщину переливающегося слоя иметь в 1000 раз меньше напора (h). Раствор, попадающий в чан (e), перетекает по трубке (f) в сосуд (g), из которого он может быть снова перелит в бочку (a). Второе условие для точности определения расходов рассматриваемым методом — перемешивание раствора в потоке — выполняется тем лучше, чем беспокойнее течение потока; поэтому, наиболее благоприятные условия для применения химического метода дают реки небольшие, бурные, горные, порожистые, и менее благоприятные условия представляют реки большие, спокойные.

Действительно, опыты, произведенные Boucher и Mellet, по определению расходов в отводных каналах высоконапорных гидравлических установок, где, конечно, и нужно было ожидать скорого и полного перемешивания, дали поразительно точные результаты. Такие же результаты получились и при определении расходов в малых горных речках. Применение химического метода к определению расходов в таких больших реках, как Волга, как это сделал инж. Н. М. Вернадский, давали не всегда удовлетворительные результаты; необходимо, впрочем, сказать, что точность результатов при работах на таких больших реках в высокой степени зависит от правильно выбранного расстояния между местом впуска в реку концентрированного раствора и местом взятия проб после перемешивания, а также от правильно выбранной продолжительности выпуска раствора в реку. Так, при работах Вернадского¹⁾, при взятии проб для определения концентрации в 2-х верстах от места выпуска раствора и продолжительности выпуска последнего в 90'0", расходимость расхода, определенного химическим способом, с расходом, определенным вертушкой, оказалась всего в $+0,3\%$. При других же продолжительностях выпуска раствора и на других расстояниях расходимость была значительно больше и доходила до $38,3\%$. Необходимо при этом указать на чрезвычайно большие расходы соли при применении химического метода к определению расходов в больших реках: у Вернадского расход соли доходил до 7 пудов на $1 \frac{\text{саж}^3}{\text{сек}}$ расхода реки.

Выполнение третьего условия зависит всецело от подготовленности персонала, производящего анализ растворов, тщательности и чистоты работы и наличия первосортных реактивов, посуды и, вообще, соответствующего оборудования. В качестве реактивов употребляются почти исключительно азотноватое серебро (AgNO_3) и хромокислый калий (K_2CrO_4). По Collet, если через n_1, n_2, n_3 (см³) обозначить количества

¹⁾ В. И. Владычяский. Гидрометрия. 1922.

раствора азотноватого серебра, которые необходимы для концентрированного раствора соли, полученного из 1 литра дистиллированной воды, для одного литра речной воды в ее естественном состоянии и для 1 литра речной воды, взятой в качестве пробы после перемешивания с раствором соли, то расход воды в реке определяется по формуле:

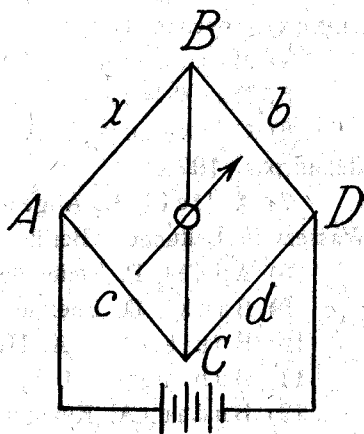
$$Q = q \left(\frac{n_1}{n_3 - n_2} - 1 \right),$$

если через q обозначим количество литров концентрированного раствора, впускаемого в реку в 1 с^к, при чем это количество не должно быть меньше 0,0001 предполагаемого расхода (Q).

Для определения концентрации растворов можно воспользоваться измерением их электропроводности. С этой целью применяют прибор, построенный по принципу Уитстонова мостика. Как известно, если обозначить сопротивления ветвей AB , BD , DC и CA , соответственно, через x , b , c , d , то, когда стрелка гальванометра не дает уже больше отклонения, неизвестное сопротивление

$$x = \frac{cb}{d}.$$

Разрезая теперь одну из ветвей, например, AB и разрезанные концы соединяя проводниками с 2-мя медными никелированными пластинками, скрепленными параллельно каким либо изолятором, можно, опуская эти пластинки попеременно в чистую воду и растворы различных, заранее известных, концентраций, градуировать прибор так, что, обратно, при опускании пластинок в раствор неизвестной концентрации, по отклонению стрелки гальванометра легко судить о концентрации данного раствора.



Черт. 185.

Список книг по Гидравлике и Гидродинамике, которыми автор пользовался при составлении настоящего учебника.

- 1) Астров, А. И. Гидравлика. Москва. 1911.
 - 2) Бахметев, Б. А. Гидравлика. Часть 1-я и 2-я. Петроград. 1913.
 - 3) Бахметев, Б. А. О неравномерном движении жидкостей в открытых каналах и руслах. Петроград. 1912.
 - 4) Максименко, Ф. Е. Курс Гидравлики. Москва. 1921.
 - 5) Павловский, Н. Н. Гидравлический Справочник. Ленинград. 1924.
 - 6) Саткевич, А. А. Аэродинамика, как теоретическая основа авиации. Ленинград. 1923.
 - 7) Allievi, L. Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen. Berlin. 1909.
 - 8) Appel, P. Traité de Mécanique Rationnelle. T. 3. Paris. 1909.
 - 9) Banki, D. Energie — Umwandlungen in Flüssigkeiten. Bd. I. Berlin. 1922.
 - 10) Boulanger, A. Hydraulique Générale. Paris. 1900.
 - 11) Bubendey, J. F. et Engels, H. Praktische Hydraulik. Leipzig. 1923.
 - 12) Budau, A. Kurzgefasstes Lehrbuch der Hydraulik. Wien. 1921.
 - 13) Flamant, A. Hydraulique. Paris. 1909.
 - 14) Forchheimer, Ph. Hydraulik. Leipzig. 1914.
 - 15) Gibson, A. H. Hydraulics and its Applications. London. 1912.
 - 16) Th. v. Kármán und T. Levi-Civita. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro-und Aerodynamik. Berlin. 1924.
 - 17) Lorenz, H. Technische Hydromechanik. Berlin. 1910.
 - 18) Mises, R. Elemente der technischen Hydromechanik. T. I. Leipzig. 1914.
 - 19) Pöschl, Th. Lehrbuch der Hydraulik. Berlin. 1924.
 - 20) Prasil, Fr. Technische Hydrodynamik. Berlin. 1913.
 - 21) Weil, L. W. Neue Grundlagen der technischen Hydrodynamik. Berlin. 1920.
 - 22) Weyrauch, R. Hydraulisches Rechnen. Stuttgart. 1921.
- Журнальная литература приведена на страницах учебника.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

СТР.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Понятие о предмете	
§ 2. Свойства жидких тел	6

ГЛАВА I.

§ 1. Равновесие жидкого тела	11
§ 2. Примеры на определение поверхностей равного давления	14
§ 3. Определение давления в жидкости	17
§ 4. Давления на плоские и криволинейные стенки	19
§ 5. Примеры на определение давления на стенки	22
§ 6. Плавание и устойчивость плавания	28
§ 7. Примеры на плавание тел и определение их устойчивости	34

ГЛАВА II.

§ 1. Движение идеальных жидкостей	38
§ 2. Примеры на течение жидкостей без сопротивления	44
§ 3. Движение действительных жидкостей	51
§ 4. Пульсация струй	58
§ 5. Движение грунтовых вод	59

ГЛАВА III.

§ 1. Равномерное течение воды в трубах	63
§ 2. Общие основания расчета водопроводов	69
§ 3. Экономический расчет водопроводов	73
§ 4. Задачи на расчет трубопроводов	74

ГЛАВА IV.

§ 1. Равномерное течение в реках и каналах	80
§ 2. Форма каналов	87
§ 3. Гидравлический и экономический расчет каналов	91
§ 4. Задачи на каналы	92

ГЛАВА V. ТЕЧЕНИЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ, НО МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ (ИЛИ НЕРАВНОМЕРНОЕ).

§ 1. Основные соотношения для неравномерного течения	99
§ 2. Форма свободной поверхности водотоков при неравномерном течении	103

§ 3. Решение задачи о неравномерном движении по Дююи-Рюльманну (Dupuit-Rühlmann — 1880 г.) и Толькмитту (Tolkmitt — 1892 г.)	109
§ 4. Удельная энергия водотока	114
§ 5. Задачи на неравномерное течение	118

ГЛАВА VI. ТЕЧЕНИЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ, НО БЫСТРО МЕНЯЮЩЕЕСЯ.

§ 1. Принцип Борда-Карно	127
§ 2. Применение принципа Борда к определению местных сопротивлений в трубах	131
§ 3. Истечение жидкостей из отверстий и насадок	137
§ 4. Истечение через водосливные отверстия	141
§ 5. Задачи на местные сопротивления в трубах и истечение воды через отверстия	150

ГЛАВА VII. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ.

§ 1. Уравнение неустановившегося течения жидкости по криволинейной траектории	160
§ 2. Истечение воды из отверстий в сосудах при переменном уровне	161
§ 3. Истечение воды из отверстий при переменном уровне, но неизменном притоке	168
§ 4. Перетекание воды между двумя сосудами	174
§ 5. Время опораживания водоемов неправильной формы	180
§ 6. Переменное течение в трубах	182
§ 7. Колебательное движение воды	191

ГЛАВА VIII. ДАВЛЕНИЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НА ОБТЕКАЕМЫЕ ЕЮ СТЕНКИ.

§ 1. Реактивное действие воды на стенки неподвижных изогнутых каналов	194
§ 2. Давление струи на стенки, поставленные на пути струи нормально к последней	198
§ 3. Давление струи на стенки, поставленные наклонно к оси струи	200
§ 4. Давление потока жидкости неограниченного поперечного сечения на находящиеся в этом потоке тела	203

ГЛАВА IX. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ.

§ 1. Понятие о гидравлических измерениях и их целях и задачах	215
§ 2. Основные положения при измерениях расходов воды в реках	216
§ 3. Приборы для определения скоростей в реках	221
§ 4. Определение расходов воды в каналах	228
§ 5. Измерение расходов воды в трубопроводах	229
§ 6. Химические способы определения расходов	234

Цена 3 руб. 50 коп.

3-50

1686 /

**ИЗДАТЕЛЬСТВО
ОДЕССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:

Проф. Ч. Д. Кларк. — Теория сопротивления судов.

Инж. Ф. Зейферт. — Паровые турбины и основы их расчета.

Перевод с немецкого инж. М. П. Зельдовича с до-
полнительной статьей инж.-мех. А. И. Приббе.

Инж. Б. Л. Николаи. — Сопротивление материалов.

Инж. В. Г. Рейсиг. — Монтаж мельниц.

Инж. В. Г. Рейсиг. — Зерно, его очистка и хранение.

Проф. В. Н. Пинегин. — Гидравлика.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

Проф. В. Н. Пинегин. — Теория гидравлических двигателей.

Проф. В. Н. Пинегин. — Насосы и насосные станции.

MC
953