Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тульский государственный педагогический университет
им. Л. Н. Толстого»

ФИЗИКА

ОПТИКА

Учебное пособие

В двух частях

Часть 2
ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Издание второе,
переработанное и дополненное

Тула
Издательство ТГПУ им. Л. Н. Толстого
2013

ББК 22.34я73
Ф48

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор *Ю. П. Смирнов*
(ТулГУ);
доктор физико-математических наук, профессор *В. А. Панин*
(ТГПУ им. Л. Н. Толстого)

Физика. Оптика: Учеб. пособие: В 2 ч. Ч. 2. Волновая оптика /
Ф48 Авт.-сост. А. В. Парамонов, Л. В. Никольская, И. А. Клепинина, А. В. Ермолов.– Изд. второе, перераб. и доп.– Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2013.– 109 с.

ISBN 978-5-87954-790-0 (ч. 2)
ISBN 978-5-87954-788-7

Пособие содержит теоретический материал, освещающий основные вопросы волновой оптики (волновая природа света, интерференция, дифракция, дисперсия), и задачи, сопровождаемые подробным решением.

Издание предназначено студентам естественнонаучных специальностей университетов, для которых физика является профилирующим предметом.

ББК 22.34я73

ISBN 978-5-87954-790-0 (ч. 2)
ISBN 978-5-87954-788-7

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I. Волновая оптика. 4
§ 1. Интерференция света 4
1.1. Принцип Гюйгенса 4
1.2. Когерентность. 5
1.3. Интерференция света. 6
1.4. Методы наблюдения интерференции 8
1.5. Расчет интерференционной картины от двух щелей. 10
1.6. Полосы равного наклона 11
1.7. Полосы равной толщины 14
1.8. Кольца Ньютона. 15
1.9. Просветление оптики. 16
1.10. Интерферометры. 17
§ 2. Дифракция света 18
2.1. Принцип Гюйгенса-Френеля. 18
2.2. Зоны Френеля. 18
2.3. Дифракция в сходящихся лучах (Дифракция Френеля). 20
2.4. Спираль Корню. 22
2.5. Дифракция в параллельных лучах (Дифракция Фраунгофера). 24
2.6. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке. 26
2.7. Дифракция на пространственной решетке. 29
2.8. Разрешающая способность спектрального прибора. 30
2.9. Разрешающая способность дифракционной решетки. 31
§ 3. Голография 32
§ 4. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом 35
4.1. Дисперсия света 35
4.2. Электронная теория дисперсии. 37

Глава II. Решение задач 40

Литература 109

ГЛАВА I. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

§ 1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

1.1. Принцип Гюйгенса

Волновая теория света основывается на принципе Гюйгенса: каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент времени.

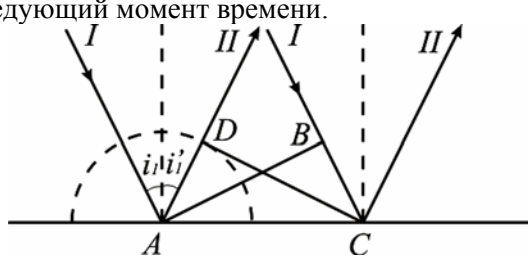

Рис. 1

Законы отражения и преломления света легко выводятся, используя принцип Гюйгенса.

Пусть на границу раздела двух сред падает плоская волна (плоскость волны – *AB*) (рис. 1), распространяющаяся вдоль направления *I*. Пока фронт проходит расстояние *BC* (за время *t*), фронт вторичных волн из точки *A* проходит расстояние *AD*.

При отражении: $\Delta ABC = \Delta ADC$, следовательно $i_1' = i_1$.

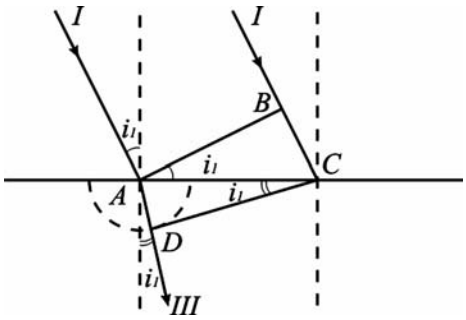

Рис. 2

При преломлении (рис.2): за время t фронт падающей волны проходит расстояние $BC = \upsilon_1 t$, а фронт преломленной – $AD = \upsilon_1 t$.

Из соотношения $AC = \dfrac{BC}{\sin i_1} = \dfrac{AD}{\sin i_2}$ следует

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} n_{21}.$$

1.2. Когерентность

Когерентностью называется согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.

Монохроматические волны – неограниченные в пространстве волны одной определенной и постоянной частоты – являются когерентными.

Так как реальные источники не дают строго монохроматического света, то волны, излучаемые любыми независимыми источниками света, всегда не когерентны. В источнике свет излучается атомами, каждый из которых испускает свет лишь в течение времени $\approx 10^{-8}$ *с*. Только в течение этого времени волны, испускаемые атомом имеют постоянные амплитуду и фазу колебаний.

Немонохроматический свет можно представить в виде совокупности сменяющих друг друга коротких гармонических импульсов излучаемых атомами – волновых цугов.

Средняя продолжительность одного цуга $\tau_{ког}$ называется временем когерентности.

Если волна распространяется в однородной среде, то фаза колебаний в определенной точке пространства сохраняется только в течение времени когерентности. За это время волна распространяется в вакууме на расстояние $l_{ког} = c \cdot \tau_{ког}$, называемое длиной когерентности (или длиной цуга). Поэтому наблюдение интерференции света возможно лишь при оптических разностях хода, меньших длины когерентности для используемого источника света.

Временная когерентность – это, определяемая степенью монохроматичности волн, когерентность колебаний, которые совер-

шаются в одной и той же точке пространства. Временная когерентность существует до тех пор, пока разброс фаз в волне в данной точке не достигнет π.

Длина когерентности – расстояние, на которое перемещается волна за время когерентности.

В плоскости, перпендикулярной направлению распространения цуга волн, случайные изменения разности фаз между двумя точками увеличивается с увеличением расстояния между ними.

Пространственная когерентность – когерентность колебаний в один и тот же момент времени, но в разных точках такой плоскости – теряется, если разброс фаз в этих точках достигает π.

Длина пространственной когерентности (радиус когерентности):

$$r_{ког} \sim \frac{\lambda}{\Delta\varphi}.$$

Источники должны быть пространственно когерентными, чтобы возможно было наблюдать интерференцию излучаемых ими световых волн.

1.3. Интерференция света

Интерференция света – сложение в пространстве двух или нескольких когерентных световых волн, при котором в разных его точках получается устойчивое во времени усиление или ослабление амплитуды результирующей волны.

Пусть в данной точке M две монохроматические волны с циклической частотой ω возбуждают два колебания, причем до точки M одна волна прошла в среде с показателем преломления n_1 путь s_1 с фазовой скоростью υ_1, а вторая – в среде n_2 путь s_2 с фазовой скоростью υ_2:

$$x_1 = A_1 \cos\omega\left(t - \frac{s_1}{\upsilon_1}\right),$$

$$x_2 = A_2 \cos\omega\left(t - \frac{s_2}{\upsilon_2}\right).$$

Амплитуда результирующего колебания:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta .$$

Интенсивность результирующей волны ($I \sim A^2$):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta .$$

Разность фаз δ колебаний, возбуждаемых в точке *M*, равна

$$\delta = \omega\left(\frac{s_2}{\upsilon_2} - \frac{s_1}{\upsilon_1}\right) = \omega\left(\frac{s_2}{c/n_2} - \frac{s_1}{c/n_1}\right) =$$

$$= \frac{\omega}{c}\left(s_2 n_2 - s_1 n_1\right) = \frac{2\pi\nu}{c}\left(L_2 - L_1\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta.$$

(Использовали: $\upsilon = \frac{c}{n}$; $\omega = 2\pi\upsilon$; $\frac{c}{\upsilon} = \lambda_0$ – длина волны в вакууме).

Произведение геометрической длины пути *s* световой волны в данной среде на показатель преломления этой среды π называется оптической длиной пути $L = s \cdot n$.

Разность $\Delta = L_2 - L_1 = s_2 n_2 - s_1 n_1$ оптических длин проходимых волнами путей называется оптической разностью хода.

Условие интерференционного максимума.

Если оптическая разность хода Δ равна целому числу длин волн в вакууме (четному числу полуволн)

$$\Delta = \pm m\lambda_0 = \pm 2m\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0,1,2,...),$$

то $\delta = \pm 2m\pi$ и колебания, возбуждаемые в точке *M*, будут происходить в одинаковой фазе.

Условие интерференционного минимума.

Если оптическая разность хода Δ равна нечетному числу полуволн

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0,1,2,...),$$

то $\delta = \pm(2m+1)\pi$ и колебания, возбуждаемые в точке *M*, будут происходить в противофазе.

Когерентные пучки при их наложении на экране дают интерференционную картину, ширина которой называется полем интерференции.

1.4. Методы наблюдения интерференции

До изобретения лазеров, во всех приборах когерентные световые пучки получали разделением волны, излучаемой одним источником, на две части, которые после прохождения разных оптических путей накладывали друг на друга и наблюдали интерференционную картину.

1.4.1. Метод Юнга. Свет от ярко освещенной щели *S* (рис. 3) падает на две щели S_1 и S_2, играющие роль когерентных источников. Интерференционная картина *BC* наблюдается на экране *Э*.

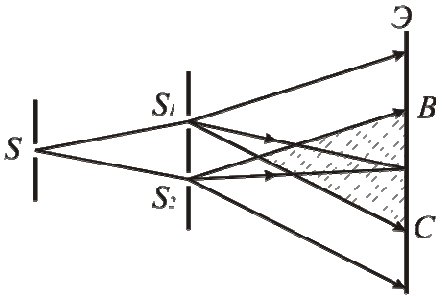

Рис. 3

1.4.2. Зеркала Френеля. Свет от источника *S* (рис.4) падает расходящимся пучком на два плоских зеркала A_1O и A_2O, расположенных под малым углом φ. Роль когерентных источников играют мнимые S_1 и S_2 изображения источника *S*. Интерференционная картина наблюдается на экране *Э*, защищенном от прямого попадания света заслонкой *З*.

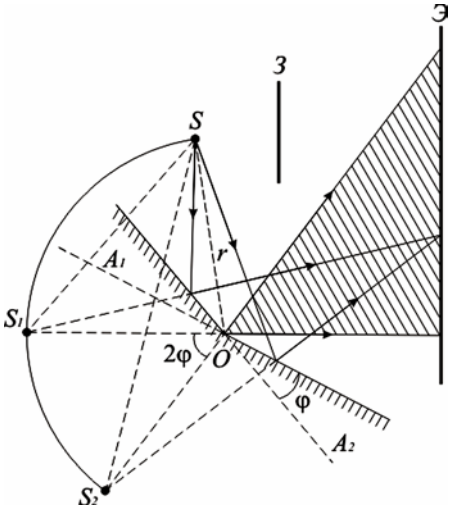

Рис. 4

Угол 2β при вершине S между двумя лучами света, которые после отражения от зеркал A_1O и A_2O, сходящиеся в точке интерференционной картины, называется апертурой интерференции.

1.4.3 Бипризма Френеля. Свет от источника S (рис. 5) преломляется в призмах, в результате чего за бипризмой распространяются световые лучи, как бы исходящие из мнимых когерентных источников S_1 и S_2.

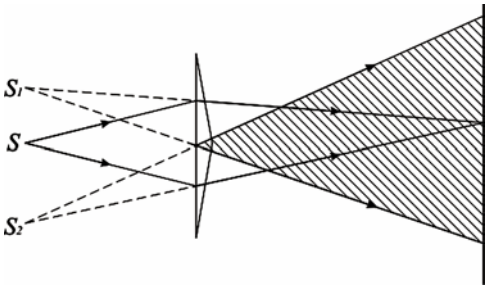

Рис. 5

1.4.4. Зеркало Ллойда. Точечный источник S (рис. 6) находится близко к поверхности плоского зеркала M. Когерентными источниками служат сам источник S и его мнимое изображение S_1.

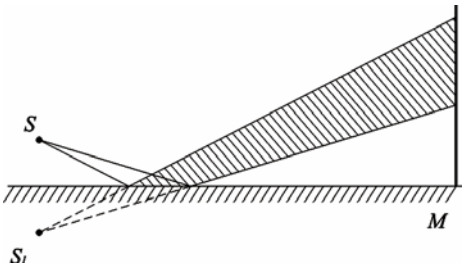

Рис. 6

1.5. Расчет интерференционной картины от двух щелей

Две щели S_1 и S_2 (рис.7) находятся на расстоянии d друг от друга и являются когерентными источниками. Экран Э параллелен щелям и находится от них на расстоянии $l \gg d$. Интенсивность в произвольной точке A определяется разностью хода $\Delta = s_2 - s_1$, где $s_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2$, $s_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2$, откуда $s_2^2 - s_1^2 = 2xd$ или $\Delta = s_2 - s_1 = \dfrac{2xd}{s_1 - s_2}$. Из $l \gg d$ следует $s_1 + s_2 \approx 2l$, поэтому $\Delta = \dfrac{xd}{l}$.

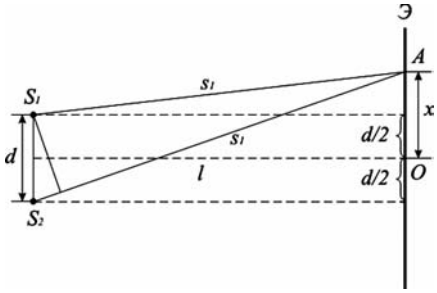

Рис. 7

Положение максимумов:

$$\frac{xd}{l} = \pm m\lambda_0 \;\Rightarrow\; x_{\max} = \pm m\frac{l}{d}\lambda_0 \;\; (m = 0,1,2,...)$$

Положение минимумов:

$$\frac{xd}{l} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 \;\Rightarrow\; x_{\min} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{d}\lambda_0 \;\; (m = 0,1,2,...)$$

Расстояние Δx между двумя соседними максимумами (минимумами) называется шириной интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda_0 .$$

Интерференционная картина представляет собой чередование на экране светлых и темных полос, параллельных друг другу.

Возможность наблюдения интерференционных полос зависит от их контрастности, т.е. от степени различия освещенности экрана в максимумах и минимумах. Освещенность пропорциональна интенсивности падающего света. Количественной характеристикой контрастности интерференционной картины служит безразмерная величина – видимость полос

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

глаз уверенно различает полосы, если их видимость больше 0,1 т. е. если $I_{\min} < 0,82 I_{\max}$.

1.6. Полосы равного наклона

Пусть из воздуха ($n_0 = 1$) на плоскопараллельную прозрачную пластинку с показателем преломления π и толщиной *d* под углом *i* падает плоская монохроматическая волна (рис. 8а). В точке *O* луч частично отразится (1), а частично преломится, и после отражения на нижней поверхности пластины в точке *C* выйдет из пластины в точке *B* (2). Лучи *1* и *2* когерентны и параллельны. С помощью собирающей линзы их можно свести в точке *P*.

Необходимо отметить важную особенность отражения электромагнитных волн (и, в частности, оптических лучей) при падении их на границу раздела двух сред из среды с меньшей диэлектрической проницаемостью (а, значит и меньшим показателем преломления): при отражении света от более плотной среды ($\pi_0 < \pi$) фаза изменяется на π. Изменение фазы на π равносильно потере полуволны при отражении. Такое поведение электромагнитной волны на границе двух сред следует из граничных условий, которым должны удовлетворять тангенциальные компоненты векторов напряженности электрического и магнитного поля на границе раздела: $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$, $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$. С учетом этого, оптическая разность хода:

$$\Delta = n\left(OC + CB\right) - \left(OA - \lambda_0 / 2\right).$$

Используя закон преломления, $OC = CB = \dfrac{d}{\cos r}$ и $OA = OB \cdot \sin i = 2d \cdot \mathrm{tg} r \cdot \sin i$, запишем

$$\Delta - \frac{\lambda_0}{2} = \frac{2dn}{\cos r} - 2dntgr \sin r = 2dn\left(\frac{1}{\cos r} - \frac{\sin^2 r}{\cos r}\right) =$$

$$= 2dn \cos r = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}.$$

В точке P будет интерференционный максимум, если

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2} = 2m\frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 \quad (m = 0,1,2,...).$$

В точке P будет интерференционный минимум, если

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0,1,2,...).$$

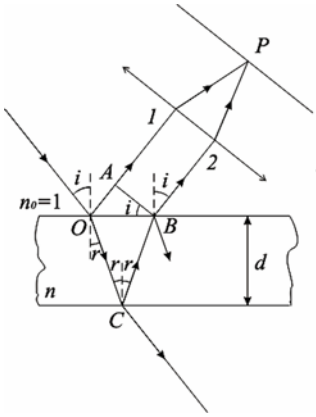

Рис. 8а

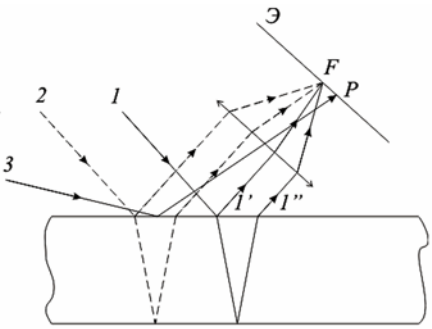

Рис. 8б

Таким образом, для данных λ_0, d и n каждому наклону i лучей соответствует своя интерференционная полоса. Интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами, называются полосами равного наклона.

Интерферирующие лучи (например, 1’ и 1” (рис. 8б)) параллельны друг другу, поэтому говорят, что полосы равного наклона локализованы в бесконечности. Для их наблюдения используют собирающую линзу и экран. Радиальная симметрия линзы приводит к тому, что интерференционная картина на экране будет иметь вид концентрических колец с центром в фокусе линзы.

Всякая линза обладает тем свойством, что она не создает дополнительной разности фаз между лучами, собираемыми линзой в одной и той же точке изображения, т.е. оптические длины пути для этих лучей одинаковы или таутохронны. Если бы это правило не соблюдалось, то с помощью линз нельзя было бы получать изображения предметов, подобные этим предметам: изображения всегда имели бы вид чередующихся максимумов и минимумов освещенности.

1.7. Полосы равной толщины

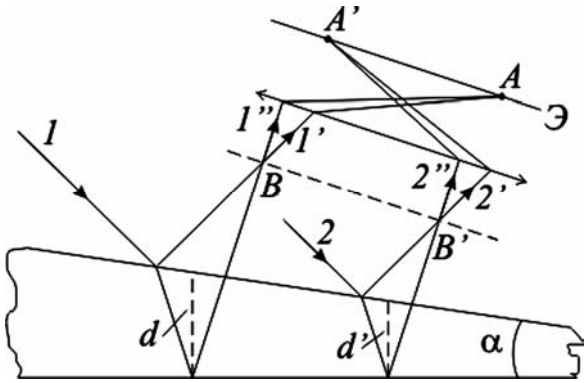

Рис. 9

Пусть на прозрачную пластинку переменной толщины – клин (рис.9), с малым углом α между боковыми гранями – падает плоская волна в направлении параллельных лучей *1* и *2*. Интенсивность интерференционной картины, формируемой лучами, отраженными от верхней и нижней поверхностей клина, зависит от толщины клина в данной точке (d и d' для лучей *1* и *2* соответственно). Когерентные пары лучей (*1'* и *1''*, *2'* и *2''*) пересекаются вблизи поверхности клина (точки B и B') и собираются линзой на экране (в точках A и A'). Таким образом, на экране возникает система интерференционных полос – полос равной толщины, – каждая из которых возникает при отражении от мест пластинки, имеющих одинаковую толщину. Полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности клина (в плоскости, отмеченной пунктиром $B'B$). Ширину интерференционных полос можно определить как $\dfrac{\lambda}{2n\alpha}$, где n – абсолютный показатель преломления клина.

1.8. Кольца Ньютона

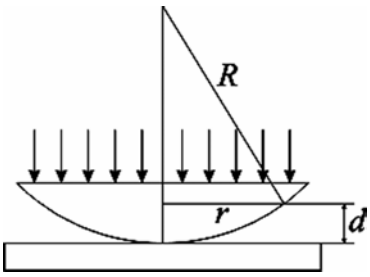

Рис. 10

Кольца Ньютона, являющиеся классическим примером полос равной толщины, наблюдаются при отражении света от воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны. Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы (рис.10). Полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей. С учетом $d^2 \to 0$

$$R^2 = \left(R - d\right)^2 + r^2 = R^2 - 2R \cdot d + d^2 - r^2 \Rightarrow d = \frac{r^2}{2R}.$$

В отраженном свете оптическая разность хода:

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda_0}{2} = 2\frac{r^2}{2R} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Радиусы светлых колец:

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0 R} \quad (m = 1, 2, 3, ...).$$

Радиусы темных колец:

$$r_m = \sqrt{m\lambda_0 R} \quad (m = 0, 1, 2, ...).$$

Интерференцию можно наблюдать и в проходящем свете, причем в проходящем свете максимумы интерференции соответствуют минимумам интерференции в отраженном свете и наоборот.

Правильная форма колец Ньютона легко искажается при всяких, даже незначительных дефектах, дефектах в обработке выпуклой поверхности линзы и верхней поверхности пластины. Наблюдение формы колец Ньютона позволяет осуществлять быстрый и точный контроль качества шлифовки плоских пластин и линз, а также близость поверхностей последних к сферической форме.

Заметим, что при расчете колец Ньютона пренебрегают влиянием света, отражающегося от верхней (плоской) поверхности линзы и нижней поверхности пластины. Это связано с тем, что толщины центральной части линзы и пластины на много порядков больше толщины воздушного зазора. Поэтому разности хода между световыми волнами, отражающимися от верхней и нижней поверхностей линзы и пластины, столь велики, что намного превосходят длину когерентности нелазерного излучения.

1.9. Просветление оптики

Объективы оптических приборов содержат большое количество линз. Даже незначительное отражение света каждой из поверхностей линз приводит к тому, что интенсивность прошедшего пучка света значительно уменьшается. Кроме того, в объективах возникают блики и фон рассеянного света, что снижает эффективность оптических систем. Но, если на границах сред создать условия, при которых интерференция отраженных лучей *1′* и *2″* дает минимум интенсивности отраженного света, то при этом интенсивность света, прошедшего через оптическую систему будет максимальна. Этого можно добиться, например, нанесением на поверхность линз тонких пленок с показателем преломления $n_0 < n < n_c$, причем $n = \sqrt{n_0 n_c}$. В этом случае амплитуды когерентных лучей *1′* и *2″* будут одинаковы, а условие минимума для отраженных лучей ($i = 0$) будет $2nd = (2m+1)\lambda_0/2$. При $m = 0$ оптическая толщина пленки *nd* удовлетворяет условию $nd = \frac{\lambda_0}{4}$, и происходит гашение отраженных лучей. Для каждой длины волны λ_0 должна быть своя толщина пленки *d*. Поскольку этого до-

биться невозможно, обычно оптику просветляют для длины волны λ_0 =550 *нм*, к которой наиболее чувствителен глаз человека.

1.10. Интерферометры

При плавном изменении разности хода интерферирующих пучков на $\lambda_0 / 2$ интерференционная картина сместится настолько, что на месте максимумов окажутся минимумы. Поэтому явление интерференции используют в интерферометрах (рис. 11) для измерения длины тел, длины световой волны, изменения длины тела при изменении температуры, сравнимых с λ_0.

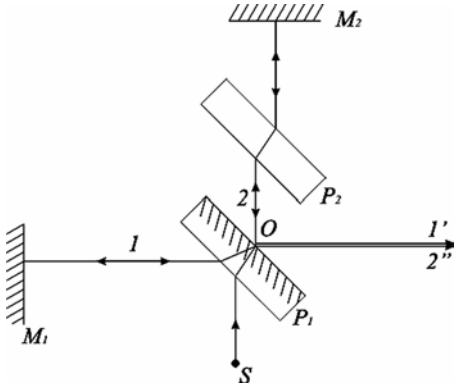

Рис. 11

Интерференционные методы широко используются для сравнения и проверки точности изготовления технических эталонов длины, для точных измерений коэффициентов линейного расширения и проверки качества линз, для исследования ударных волн в газах и т. д.

§ 2. Дифракция света

2.1. Принцип Гюйгенса-Френеля

Дифракцией называется огибание волнами препятствий, встречающихся на их пути, или в более широком смысле – любое отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики.

Дифракцию объясняет принцип Гюйгенса – именно вторичные волны огибают препятствия на пути распространения первичных волн.

Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением о когерентности вторичных волн и их интерференции.

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, световая волна, возбуждаемая каким-либо источником *S*, может быть представлена как результат суперпозиции когерентных вторичных волн, излучаемых вторичными (фиктивными) источниками – бесконечно малыми элементами любой замкнутой поверхности, охватывающей источник *S*.

2.2. Зоны Френеля

Рассмотрим в произвольной точке *M* (рис.12) амплитуду световой волны, распространяющейся в однородной среде из точечного источника *S*. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, заменим действие источника *S* действием воображаемых источников, расположенных на вспомогательной поверхности *Ф*, являющейся поверхностью фронта волны, идущей из *S* (поверхность сферы с центром *S*). Разобьем волновую поверхность *Ф* на кольцевые зоны такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до *M* отличались на $\lambda/2$. Тогда, обозначив амплитуды колебаний от 1-й, 2-й, ... *m*-й зон через A_1, A_2, ... A_m (при этом $A_1 > A_2 > A_3 > \ldots$), получим амплитуду результирующего колебания: $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots$.

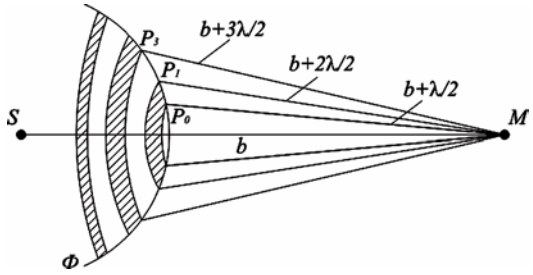

Рис. 12

При таком разбиении волновой поверхности на зоны оказывается, что амплитуда колебания A_m от некоторой m-й зоны Френеля равна среднему арифметическому от амплитуд примыкающих к ней зон

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тогда результирующая амплитуда в точке M будет

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2} = \left(\underset{m \gg 1}{\rightarrow}\right) = \frac{A_1}{2}.$$

т. к. при $m \gg 1$, $A_1 \gg A_m$. Площади всех зон Френеля равны $\sigma = \dfrac{\pi ab\lambda}{a+b}$,где a – длина отрезка SP_0, который является радиусом сферы $Ф$, b – длина отрезка P_0M.

Радиус внешней границы m-й зоны Френеля $r_m = \sqrt{\dfrac{ab}{a+b} m\lambda}$. При $a = b = 10$ *см* и $\lambda = 500$ *нм* радиус первой зоны $r_1 = 0{,}158$ *мм*. Следовательно, распространение света от S к M происходит так, будто световой поток распространяется внутри очень узкого канала вдоль SM, т.е. прямолинейно.

Таким образом, принцип Гюйгенса-Френеля позволяет объяснить прямолинейное распространение света в однородной среде.

2.3. Дифракция в сходящихся лучах (Дифракция Френеля)

Дифракция в сходящихся лучах (дифракция Френеля) – это дифракция сферических волн, осуществляемая в том случае, когда дифракционная картина наблюдается на конечном расстоянии от препятствия, вызвавшего дифракцию.

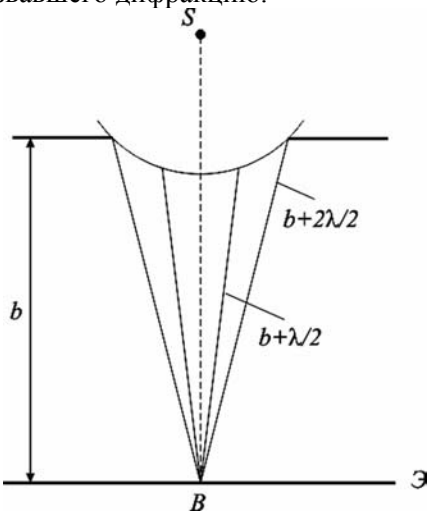

Рис. 13

2.3.1. Дифракция на круглом отверстии. Сферическая волна, распространяющаяся из точечного источника *S* (рис.13), встречает на своем пути экран с круглым отверстием. Вид дифракционной картины зависит от числа зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Амплитуда света в точке *B* экрана Э будет $A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}$, где знак "плюс" для случая, когда отверстие открывает нечетное число *m* зон Френеля, а знак "минус" – для четного *m*.

Дифракционная картина будет иметь вид чередующихся темных и светлых колец с центром в точке *B* (если *m*-четное, то центральное кольцо будет темным, если *m*-нечетное, то – светлым).

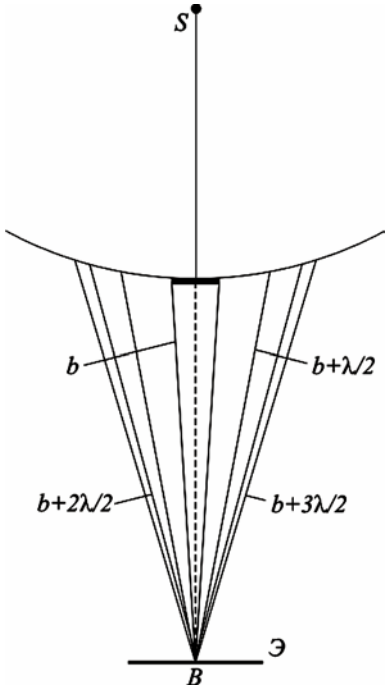

Рис. 14

2.3.2. Дифракция на диске. Сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника *S* (рис.14), встречает на своем пути диск. Если диск закрывает первые *m* зон Френеля, то амплитуда колебания в точке *B* экрана *Э*:

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \ldots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \ldots = \frac{A_{m+1}}{2}.$$

Таким образом, в точке *B* всегда наблюдается интерференционный максимум (светлое пятно), соответствующий половине действия первой открытой зоны Френеля. Центральный максимум окружен концентрическими с ним темными и светлыми кольцами.

2.4. Спираль Корню

Разобьем, таким образом, поверхность волны дугами больших окружностей на лунки (рис.15), подобно тому, как поверхность Земли делится меридианами на пояса. В отличие от меридианной сетки поверхность волны разбивается на лунки дугами, расположенными на неравном расстоянии друг от друга, и в соответствии с этим площади лунок не будут одинаковыми. Расчеты, показывают, что расстояния $N_0, N_1, N_2,...$ а следовательно, и площади соответствующих лунок, относятся между собой приблизительно как

1: 0,41: 0,32: 0,27: 0,23: 0,22: 0,20: 0,18: 0,17

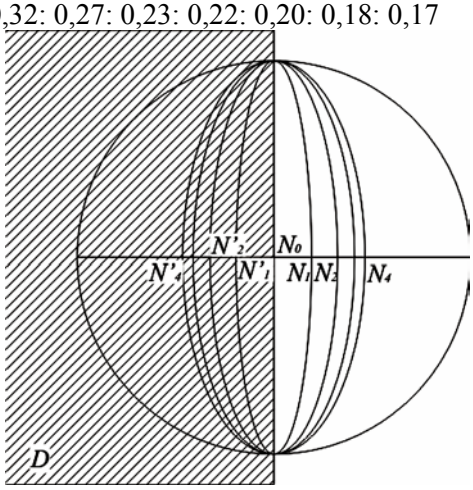

Рис. 15

Видно, что площади лунок убывают сначала очень быстро, а затем медленнее. Световое возбуждение из соответственных точек, лежащих в плоскости рисунка для соседних лунок достигает в противоположных фазах, как и при зонах, разбитых по обычному построению Френеля; однако амплитуды, обусловленные действием первой, второй и т.д. лунок, убывают значительно быстрее, т. к., кроме увеличения наклона фронта волны, площади лунок заметно уменьшаются по мере удаления от полюса N_0.

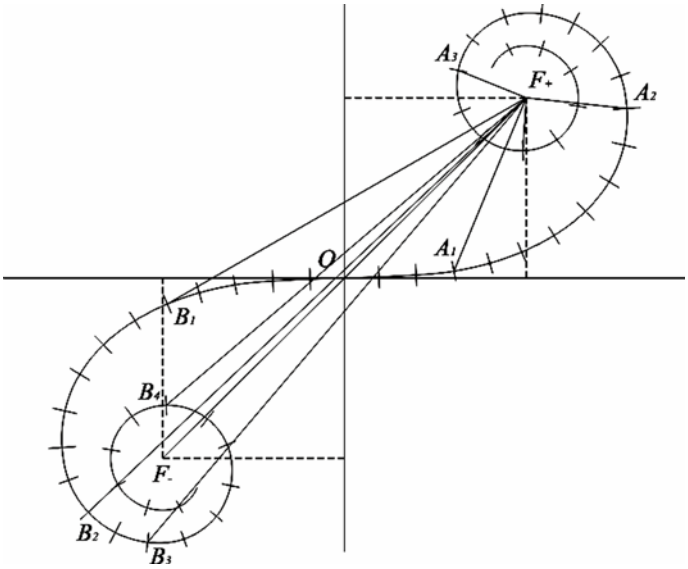

Рис. 16

Подобно тому, как строится векторная диаграмма для учета действия различных кольцевых зон, можно построить графически диаграмму действия различных лунок. В результате получится кривая в форме спирали (рис. 16), однако вследствие различия в площадях лунок действие их по мере удаления от центральной точки волны (точка N_0) быстро убывает, особенно вблизи N_0. В соответствии с этим векторы, изображающие действия последующих участков каждой лунки, быстрее убывают по длине, чем в случае построения, соответствующего разбиению на зоны Френеля, и спираль получается более пологой. Аналитически задача была решена Френелем с помощью интегралов специального вида, получивших название интегралов Френеля. График, соответствующий этому решению дифракционной задачи, был построен Корню и носит название спирали Корню. Она изображена на рисунке, причем точки F_- и F_+ представляют полюсы, к которым спираль приближается асимптотически. Ветвь спирали $OB_1B_2,...,F_-$ – выражающая действие левой половины волнового

фронта, состоит из участков, параллельных соответствующим участкам ветви $OA_1A_2,...,F_+$, изображающим действие правой половины, т.к. соответствующие части фронта волны расположены симметрично относительно точки, для которой ведется вычисление. Таким образом, обе ветви кривой симметричны, *O* является точкой перегиба, и прямая F_-OF_+, соединяющая полюсы спирали, образует угол 45° с касательной в точке *O*.

Пользуясь спиралью Корню, можно количественно решать задачи, о дифракции на препятствиях, ограниченных прямолинейными краями. Амплитуда колебания, обусловленная какой-либо частью фронта световой волны, выражается вектором, замыкающим участок спирали, соответствующий данной части фронта волны. Действие всего фронта волны, т. е. фронта, не закрытого никакими препятствиями, изобразится вектором F_-F_+, соединяющим концы спирали.

2.5. Дифракция в параллельных лучах (Дифракция Фраунгофера)

Дифракция Фраунгофера наблюдается в том случае, когда источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия, вызывающего дифракцию. Параллельный пучок лучей обычно создают, помещая точечный источник света в фокусе собирающей линзы. Дифракционную картину с помощью второй собирающей линзы, установленной за препятствием, фокусируют на экран.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера плоской монохроматической волны на одной бесконечно длинной щели шириной $a = MN$ (рис.17а). Оптическая разность хода между крайними лучами *MC* и *ND*: $\Delta = NF = a\sin\varphi$.

Разобьем открытую часть волновой поверхности *MN* на зоны Френеля, параллельные ребру *M* щели. Ширина каждой зоны выбирается так, чтобы разность хода от краев этих зон была равна λ/2, поэтому на ширине щели уместится $\Delta = \lambda/2$ зон.

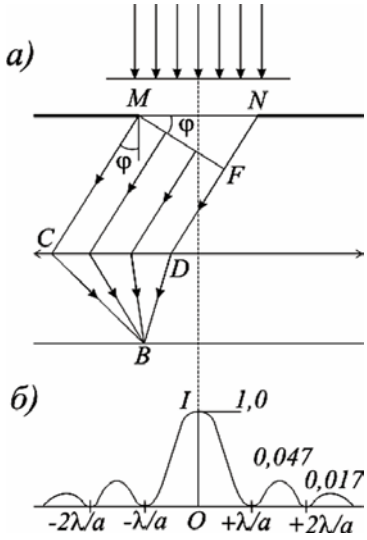

Рис. 17

Все точки волнового фронта в плоскости щели имеют одинаковую фазу и амплитуду колебаний. Поэтому суммарная интенсивность колебаний от двух любых соседних зон Френеля равна нулю. Следовательно:

1) если число зон Френеля четное, то:

$$a\sin\phi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, ...),$$

– условие дифракционного минимума (полная темнота)

2) если число зон Френеля нечетное, то

$$a\sin\phi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, ...),$$

– условие дифракционного максимума, соответствующего действию одной некомпенсированной зоны Френеля.

В направлении $\varphi = 0$ щель действует как одна зона Френеля и в этом направлении свет распространяется с наибольшей интенсивностью – центральный дифракционный максимум.

Направления, в которых амплитуда максимальна или равна нулю:

$$\sin\varphi_{\max} = \pm\frac{(2m+1)\lambda}{2a},$$

$$\sin\varphi_{\min} = \pm\frac{m\lambda}{a}.$$

Распределение интенсивности на экране, получаемое вследствие дифракции, называется дифракционным спектром (рис.17б).

Интенсивности в центральном и последующих максимумах относятся как 1:0,047:0,017:0,0083:..., т.е. основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме.

Положение дифракционных максимумов зависит от λ. При освещении щели белым светом, центральный максимум наблюдается в виде белой полоски (при $\varphi = 0$ разность хода равна нулю для всех λ) – он общий для всех длин волн. Боковые максимумы радужно окрашены фиолетовым краем к центру дифракционной картины (поскольку $\lambda_{\text{фиол}} < \lambda_{\text{красн}}$).

2.6. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке

Одномерная дифракционная решетка – система параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками.

Линии распределение интенсивности в дифракционном спектре каждой щели определяется направлением дифрагированных лучей и дифракционные картины, создаваемые каждой щелью будут одинаковыми.

Суммарная дифракционная картина есть результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей – в дифракционной решетке осуществляется многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света, идущих от всех щелей.

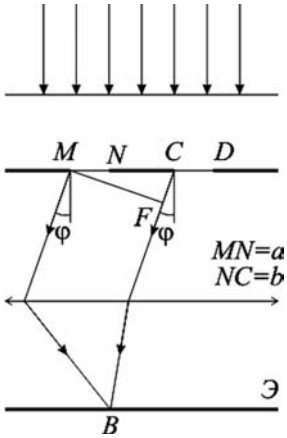

Рис. 18

Если a – ширина каждой щели; b – ширина непрозрачных участков между щелями (рис.18), то величина $d = a + b$ называется постоянной (периодом) дифракционной решетки.

$$d = \frac{1}{N_0},$$

где N_0 – число щелей, приходящееся, на единицу длины.

Разности хода Δ лучей, идущих от двух соседних щелей, будут для данного направления φ одинаковы в пределах всей дифракционной решетки:

$$\Delta = CF = (a + b)\sin\varphi = d\sin\varphi.$$

Очевидно, что в тех направлениях, в которых ни одно из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и при двух щелях, т.е. прежние (главные) минимумы интенсивности будут наблюдаться в направлениях

$$\sin\varphi_{\min} = \pm\frac{m\lambda}{a}.$$

Кроме того, вследствие взаимной интерференции, в направлениях, определяемых условием

$$d\sin\varphi = \pm\frac{(2m+1)\lambda}{2}.$$

световые лучи, посылаемые двумя соседними щелями, будут гасить друг друга – возникнут дополнительные минимумы. Наоборот, действие одной щели будет усиливать действие другой, если $d\sin\varphi = \pm\frac{2m\lambda}{2}$ – условие главных максимумов.

В общем случае, если дифракционная решетка состоит из N щелей, то:

– условие главных максимумов: $d\sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, ...)$;

– условие главных минимумов: $a\sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, ...)$;

между двумя главными максимумами располагается $N-1$ дополнительных минимумов, разделенных вторичными максимумами, создающими слабый фон. Условие дополнительных минимумов:

$$d\sin\varphi = \pm m'\frac{\lambda}{N},$$

(где m' может принимать все целочисленные значения, кроме 0, N, $2N$,… при которых данное условие переходит в условие главных максимумов).

Амплитуда главного максимума есть сумма амплитуд колебаний от каждой щели $A_{\max} = NA_1$. Поэтому, интенсивность главного максимума в N^2 раз больше интенсивности I_1 (рис.19), создаваемой одной щелью в направлении главного максимума:

$$I_{\max} = N^2 I_1.$$

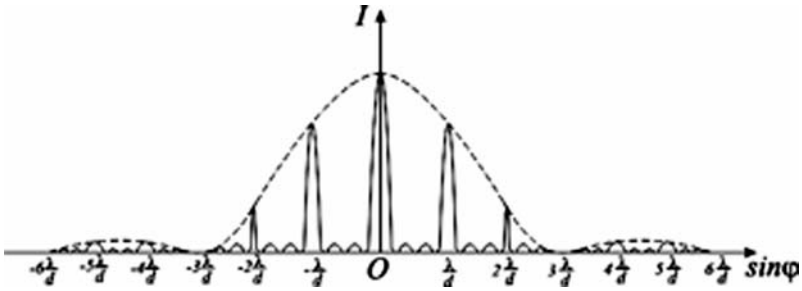

Рис. 19

Число главных максимумов, даваемое дифракционной решеткой:

$$m \le \frac{d}{\lambda},$$

так как $|\sin\varphi| \le 1$.

2.7. Дифракция на пространственной решетке

Дифракция света наблюдается на одномерных решетках (система параллельных штрихов), на двумерных решетках (штрихи нанесены во взаимно перпендикулярных направлениях в одной и той же плоскости) и на пространственных (трехмерных) решетках – пространственных образованиях, в которых элементы структуры подобны по форме, имеют геометрически правильное и периодически повторяющееся расположение, а также постоянные (периоды) решеток, соизмеримые с длиной волны электромагнитного излучения.

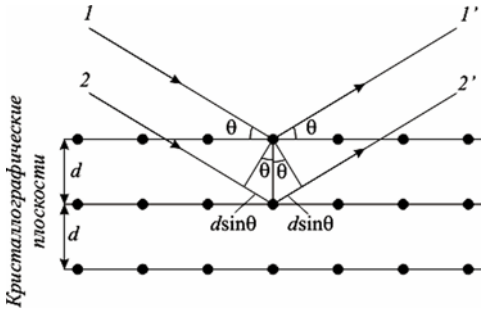

Рис. 20

Кристаллы, являясь трехмерными пространственными образованиями с постоянной решетки порядка 100 *нм*, могут быть использованы для наблюдения дифракции рентгеновского излучения ($\lambda \approx 10^{-12} \div 10^{-8}$ *м*). Представим кристалл в виде параллельных кристаллографических плоскостей (рис.20), отстоящих друг от друга на расстоянии *d*. Пучок параллельных монохроматических лучей (*1*, *2*) падает под углом скольжения θ (угол между направлением падающих лучей и кристаллографической плоскостью) и

возбуждает атомы кристаллической решетки, которые становятся источниками когерентных вторичных волн (*1′* и *2′*), интерферирующих между собой. Максимумы интенсивности будут наблюдаться в тех направлениях, в которых все отраженные атомными плоскостями волны будут находиться в одинаковой фазе: $2d\sin\theta = m\lambda$ – Формула Вульфа-Брэггов. Эта формула используется в:

– рентгеноструктурном анализе – если известна λ рентгеновского излучения, то, наблюдая дифракцию на кристаллической структуре неизвестного строения и измеряя θ и m, можно найти d, т.е. определить структуру вещества;

– рентгеновской спектроскопии – если известна d, то измеряя θ и m, можно найти длину волны λ падающего рентгеновского излучения.

2.8. Разрешающая способность спектрального прибора

Если бы даже существовала идеальная оптическая система без дефектов и аберраций, то все равно изображение любой светящейся точки, вследствие волновой природы света, будет в виде центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами.

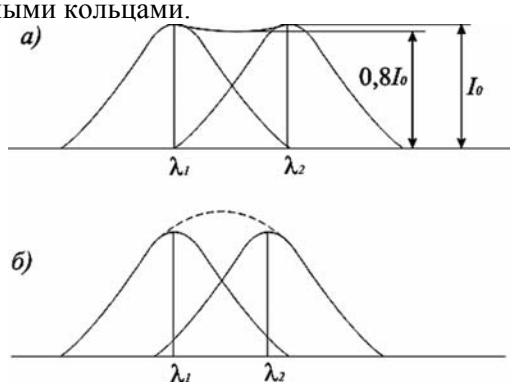

Рис. 21

Критерий Рэлея – изображения двух близлежащих одинаковых точечных источников или двух близлежащих спектральных линий с равными интенсивностями и одинаковыми симметричны-

ми контурами разрешимы (разделены для восприятия), если центральный максимум дифракционной картины от одного источника (линии) совпадает с первым минимумом дифракционной картины от другого. При этом интенсивность "провала" (рис. 21а) между максимумами составляет 80% интенсивности в максимуме. Этого достаточно для разрешения линий λ_1 и λ_2.

Если критерий Рэлея нарушен, то наблюдается одна линия (рис. 21б).

Разрешающей способностью спектрального прибора называют безразмерную величину

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

где $\delta\lambda$ – абсолютное значение минимальной разности длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются раздельно.

2.9. Разрешающая способность дифракционной решетки

Пусть максимум m – го порядка для длины волны λ_2 наблюдается под углом $\varphi_{\max}$ ($d\sin\varphi_{\max} = m\lambda_2$). В том же порядке ближайший дифракционный минимум для волны λ_1 находится под углом $\varphi_{\min}$ ($d\sin\varphi_{\min} = m\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N}$). По критерию Рэлея $\varphi_{\max} = \varphi_{\min}$, откуда

$$m\lambda_2 = m\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N} \text{ или } \delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{mN}$$

$$R_{диф.реш.} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN.$$

Таким образом, разрешающая способность дифракционной решетки пропорциональна порядку спектра m и числу N щелей.

§ 3. Голография

Обычный фотографический метод получения изображений объектов основан на регистрации с помощью фотопластинки (или фотопленки) различий в интенсивности света, рассеиваемого разными малыми элементами поверхности объекта. Для этого при фотосъемке действительное изображение объекта в фотоаппарате проецируется на светочувствительную поверхность фотопластинки. Полученный негатив и отпечатанная с него позитивная фотография объекта — лишь приближенные, двумерные образы трехмерного объекта. Об объемности объекта можно судить только по светотеням, имеющимся на его фотографическом изображении. Более совершенным является стереоскопический фотоснимок. Однако и в этом случае не удается получить такого же полного ощущения объемности, как при непосредственном наблюдении самого объекта. Дело в том, что, разглядывая стереоскопический фотоснимок с помощью стереоскопа, мы не можем, например, изменить положение точки наблюдения и увидеть то, что было закрыто во время съемки предметом, находящимся на переднем плане,— не можем «заглянуть за этот предмет».

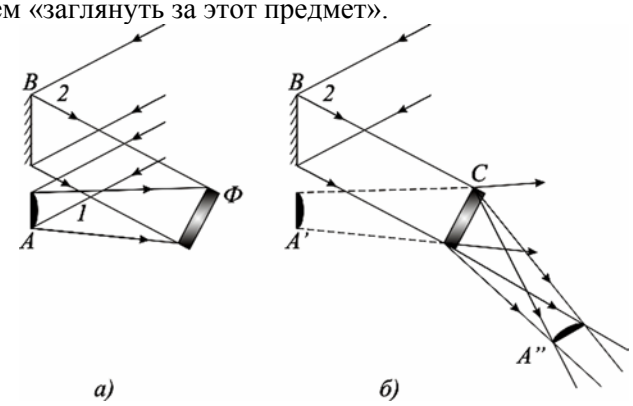

Рис. 22

Английский физик Д. Габор (1948) высказал идею принципиально нового метода получения объемных изображений объектов. Он предложил регистрировать с помощью фотопластинки не только амплитуды (или их квадраты, т. е. интенсивности, как при обычном фотографировании), но и фазы рассеянных объектом волн, восполь-

зовавшись для этого явлением интерференции волн. Таким способом можно получить и зарегистрировать на фотопластинке значительно более полную, информацию об объекте, нежели путем обычного фотографирования. Свой метод Габор назвал голографией.

Суть этого метода пояснена на рисунке. С помощью фотопластинки *Ф* (рис. 22а) регистрируется интерференционная картина, возникающая при наложении волны *1*, рассеянной объектом *А* и называемой сигнальной волной, или предметным пучком, и когерентной ей волны *2*, имеющей фиксированные значения амплитуды и фазы. Волна *2*, называемая опорной волной, или опорным пучком, испускается тем же источником света, который освещает объект, и после отражения от зеркала *В* падает непосредственно на фотопластинку *Ф*. Интерференционную картину, зафиксированную на фотопластинке после ее проявления, называют голограммой объекта. Голограмма, в отличие от фотографического негатива объекта, не имеет внешнего сходства с объектом. Она представляет собой очень мелкий и замысловатый узор из чередующихся малых областей различного почернения эмульсии.

Получение голограммы связано с осуществлением интерференции света при больших разностях хода, т. е. требует весьма высокой степени когерентности света. Практическое осуществление идеи Габора стало возможным лишь в начале 60-х годов после создания лазеров. Они являются незаменимыми источниками света в голографии.

Восстановление изображения объекта по его голограмме показано на рис. 22б. голограмму *С* просвечивают как диапозитив той же опорной волной *2*, которая использовалась при получении голограммы, причем ориентация голограммы по отношению к опорной волне также должна быть сохранена. Эта световая волна дифрагирует на голограмме. В результате дифракции наблюдаются два объемных изображения объекта: мнимое и действительное. Мнимое изображение *А′* находится в том же месте по отношению к голограмме, где помещался объект *А* при съемке голограммы. Это изображение видно при наблюдении сквозь голограмму как через окно. Действительное изображение *А″* расположено по другую сторону голограммы. Оно как бы висит в воздухе перед голограммой и является зеркальным изображением объекта, что представляет определенные неудобства.

Обычно пользуются мнимым голографическим изображением, которое по зрительному восприятию тождественно самому объекту. Оно является объемным, а его перспектива изменяется в зависимости от положения глаз наблюдателя по отношению к голограмме. Например, перемещая голову вдоль голограммы, наблюдатель может «заглянуть за предмет», находящийся на переднем плане голографического изображения. Точно такой же эффект получается при изменении положения точки визуального наблюдения непосредственно самого объекта.

Интерференционная картина в каждой точке голограммы определяется светом, рассеянным всеми точками объекта. Поэтому каждый участок голограммы содержит информацию обо всем объекте. Следовательно, если голограмма случайно разбилась, то с помощью даже малого сохранившегося ее осколка можно восстановить изображение всего объекта. Разница состоит лишь в том, что чем меньше размеры оставшейся части голограммы, тем меньше ее разрешающая способность и тем меньше света на ней дифрагирует на стадии восстановления изображения, соответственно тем менее четким и ярким будет восстановленное с ее помощью изображение. Между тем каждый элемент поверхности обычного фотонегатива содержит информацию только о той части объекта, изображением которой он является. Частичное повреждение фотонегатива неизбежно сопровождается потерей некоторой части информации об изображенном на нем объекте. Таким образом, с точки зрения надежности хранения записанной на ней информации голограмма значительно превосходит обычный фотонегатив. Наконец, на одну и ту же фотопластинку можно последовательно записать несколько различных голограмм, изменяя каждый раз, например, угол падения опорной волны.

Можно получить цветное голографическое изображение объекта. Для этого при изготовлении голограммы пользуются монохроматическим светом трех основных цветов (например, красным, зеленым и синим), испускаемым тремя разными лазерами. На стадии восстановления изображения на голограмму нужно одновременно направить три опорных пучка света от тех же трех лазеров.

Ю. Н. Денисюк впервые получил (1962) объемные голограммы, используя для этого толстослойные фотоэмульсии. Такие голограммы ведут себя подобно пространственным дифракцион-

ным решеткам. Они способны выделять из белого света свет той длины волны или тех нескольких длин волн, который был использован при получении голограммы. Для восстановления изображения, записанного в виде объемной голограммы, последнюю достаточно осветить белым светом. Если при изготовлении объемной голограммы был использован свет трех основных цветов, то при освещении этой голограммы белым светом наблюдается цветное изображение объекта.

Применение голографии открывает принципиальную возможность создания систем стереоскопического цветного голографического кино и телевидения. Очень перспективно использование голографических методов для создания новых, весьма надежных и очень емких систем памяти вычислительных машин, систем поиска заданной информации и распознавания образов, а также для кодирования информации.

§ 4. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

4.1. Дисперсия света

Дисперсией света называется зависимость показателя преломления n от частоты ν (длины волны λ) света (или зависимость фазовой скорости υ световых волн от его частоты ν).

Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму. Дисперсия проявляется лишь при распространении немонохроматических волн.

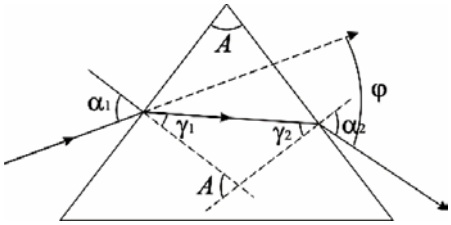

Рис. 23

Рассмотрим дисперсию света в призме (рис.23). Пусть монохроматический луч под углом α_1 падает на призму с показателем преломления n и преломляющим углом A. После двукратного преломления на левой и правой гранях призмы луч отклоняется на угол φ.

$$\varphi = (\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 - \gamma_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - A.$$

Если углы A и α_1 (а значит и γ_1, γ_2, α_2) малы, то $\frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{n}{1}$ и $\frac{\gamma_2}{\alpha_1} = \frac{1}{n}$. Поскольку $\gamma_1 + \gamma_2 = A$, то

$$\alpha_2 = \gamma_2 n = n(A - \gamma_1) = n\left(A - \frac{\alpha_1}{n}\right) = nA - \alpha_1,$$

откуда $\alpha_1 + \alpha_2 = nA$. Поэтому $\varphi = A(n-1)$ – угол отклонения лучей призмой тем больше, чем больше преломляющий угол призмы.

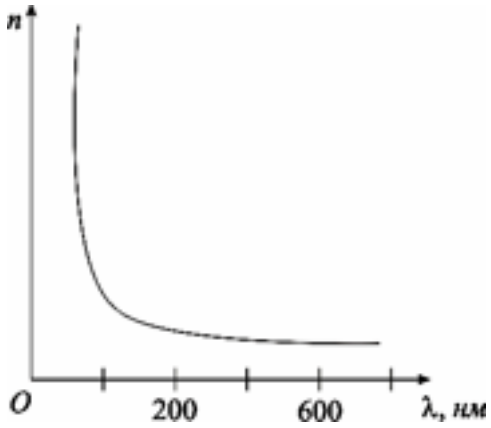

Рис. 24

Величина $D = \frac{dn}{d\lambda}$ называется дисперсией вещества. Для всех прозрачных веществ показатель преломления уменьшается с

увеличением длины волны: $\frac{dn}{d\lambda} < 0$. Такая дисперсия называется нормальной (или отрицательной). Вблизи линий и полос поглощения ход кривой $n(\lambda)$ – кривой дисперсии (рис.24) – обратный: $\frac{dn}{d\lambda} > 0$. Такая дисперсия называется аномальной.

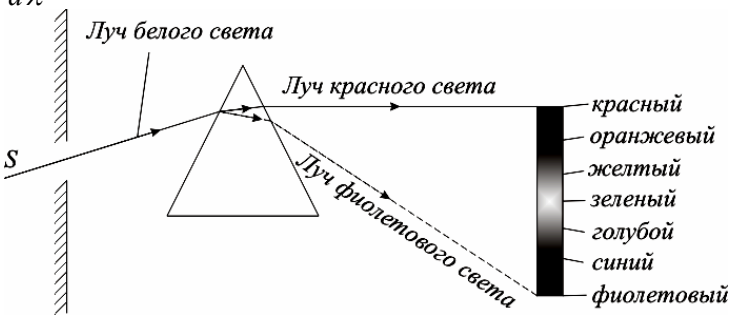

Рис. 25

На явлении нормальной дисперсии основано действие призменных спектрографов. Угол отклонения лучей призмой зависит от показателя преломления, который в свою очередь, зависит от длины волны. Поэтому призма разлагает белый свет в спектр (рис.25), отклоняя красные лучи (длина волны больше) слабее, чем фиолетовые (длина волны меньше).

4.2. Электронная теория дисперсии

Электронная теория дисперсии Лоренца рассматривает дисперсию света как результат взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны.

Абсолютный показатель преломления среды $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды, μ – магнитная проницаемость. В оптической области спектра для всех веществ $\mu \sim 1$, поэтому $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Согласно теории Лоренца, дисперсия света – следствие зависимости ε от частоты (длины волны) световых волн. По определению

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E},$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость среды, ε_0 – электрическая постоянная, P и E – мгновенные значение поляризованности и напряженности внешнего электрического поля.

В оптической области спектра частота колебаний электрического поля световой волны высока ($\nu \sim 10^{13}$ *Гц*), поэтому ориентационная поляризация диэлектриков несущественна, и главную роль играет электронная (деформационная) поляризация – вынужденные колебания электронов под действием электрической составляющей поля световой волны.

Пусть вынужденные колебания совершает только один внешний, слабо связанный с ядром атома, электрон – оптический электрон. Его наведенный дипольный момент: $p = ex$, где e – заряд электрона, x – смещение электрона под действием электрического поля световой волны.

Мгновенное значение поляризованности: $P = n_0 p = n_0 ex$, где n_0 – концентрация атомов в диэлектрике. Отсюда:

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 ex}{\varepsilon_0 E}.$$

Пусть внешнее поле E изменяется по гармоническому закону: $E = E_0 \cos \omega t$. Тогда уравнение вынужденных колебаний электрона (без учета силы сопротивления, обуславливающей поглощение энергии падающей волны):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_0 \cos \omega t = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t,$$

где $F_0 = eE_0$ – амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны, ω_0 – собственная частота колебаний электрона.

Решение этого уравнения: $x = A \cos \omega t$, где $A = \dfrac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$. Поэтому: $n^2 = 1 + \dfrac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \dfrac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

Полученная зависимость выражает явление дисперсии: $n = n(\omega)$. График этой зависимости приведен на рис. 26. Разрыв n вблизи ω_0 обусловлен тем, что не учтены силы сопротивления среды (поглощение электромагнитных волн средой).

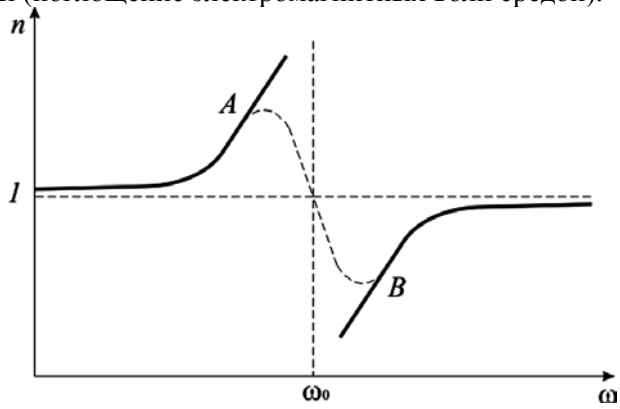

Рис. 26

Если учесть поглощение, то в области ω_0 зависимость $n(\omega)$ задается пунктирной линией AB – это область аномальной дисперсии (n убывает с ростом ω). Остальные участки описывают нормальную дисперсию (n растет с ростом ω).

В общем случае, если в веществе имеются различные заряды e_i с массами m_i совершающие вынужденные колебания с различными собственными частотами ω_0, то

$$n^2 = 1 + \frac{n_0}{\varepsilon_0} \sum_i \frac{e_i}{m_i} \frac{1}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)},$$

и кривая $n(\omega)$ имеет особенности вблизи каждой собственной частоты ω_{0i}.

ГЛАВА II. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Световая волна с длинной волны 700 *нм* распространяется в воздухе. Какова длина волны в воде?

Решение:

Длины волн λ_1 и λ_2 световых волн в волн в воздухе и в воде связаны со скоростями υ_1 и υ_2 распространения этих волн в воздухе и воде следующими соотношениями:

$$\lambda_1 = \frac{\upsilon_1}{\nu},\ \lambda_2 = \frac{\upsilon_2}{\nu},$$

где ν – частота световых колебаний, которая не изменяется при переходе света из одной среды в другую. Разделив почленно уравнения $\lambda_1 = \frac{\upsilon_1}{\nu}$, $\lambda_2 = \frac{\upsilon_2}{\nu}$, получим

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}.$$

Скорости распространения света в воздухе и в воде связанны с абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 этих сред соотношением

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Сравнивая между собой выражения $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{n_2}{n_1}$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$, находим $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$, откуда

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 n_1}{n_2};$$

$$\lambda_2 = \frac{7 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{1,33} \approx 5,26 \cdot 10^{-7}\ м.$$

2. Плоская монохроматическая волна бежит в направлении оси z_1, составляющей угол β с осью z. Какова разность фаз колебаний в двух точках любой плоскости $z = const$, расстояние между которыми равно x?

Решение:

На рис. 27 изображена плоскость $z = const$ (перпендикулярная оси z) и две волновые поверхности: AA', в которой лежит точка *O*, и BB', в которой находится точка *P* ($OP = x$). Расстояние между поверхностями $OD = \Delta z_1$.

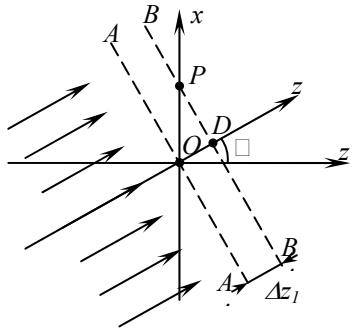

Рис. 27

Пусть колебания на волновой поверхности AA' (и в точке *O* этой поверхности) происходят по закону

$$E(t) = a\cos\omega t.$$

Тогда на поверхности BB' (и в частности, в точках *D* и *P*) колебания отстают по азе на величину

$$\Delta\varphi = k\Delta z_1 = k \cdot OP \cdot \sin\beta = kx\sin\beta.$$

Таким образом, разность фаз колебаний в двух точках плоскости $z = const$ зависит от расстояния между точками по линейному закону

$$\Delta\varphi(x) = (k\sin\beta)x.$$

Линейный закон изменения фазы колебания по некоторой плоскости $z = const$ означает, что имеется плоская волна, направление распространения которой составляет угол β с осью z, перпендикулярной этой плоскости.

3. Плоская световая волна (длина волны λ_0) падает нормально на тонкую прозрачную пластинку толщиной d (рис.28). Показатель преломления пластинки меняется вдоль координаты x по закону $n(x) = n\left(1 + \frac{x}{b}\right)$. Найдите распределение фазы колебаний $\varphi(x)$ на выходе из пластинки. В каком направлении будет распространятся волна за пластинкой?

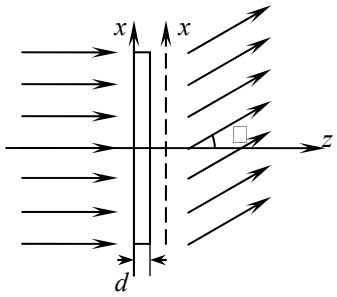

Рис. 28

Решение:

Пусть в плоскости, примыкающей к пластинке слева, падающая волна создает колебания

$$E_0 = a\cos\omega t\ .$$

Время распространения волны через пластинку в разных местах различно и равно

$$\tau(x) = \frac{d}{\upsilon(x)} = \frac{d}{c}n(x)\ .$$

Тогда на выходе из пластинки (в плоскости, примыкающей к ней справа) получаем

$$E(t) = a\cos\omega(t-\tau) = a\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}n(x)d\right),$$

или

$$E(t) = a\cos\left(\omega t - k_0 n(x)d\right),$$

где $k_0 = \dfrac{\omega}{t}$ – волновое число в вакууме.

Распределение фазы колебаний на выходе из пластинки есть

$$\varphi(x) = k_0 d n(x).$$

Подставляя функцию $n(x) = n\left(1 + \dfrac{x}{b}\right)$, находим

$$\varphi(x) = \varphi_0 + k_0 n_0 \frac{d}{b} x,$$

где $\varphi_0 = k_0 n_0 d$ – константа. Мы получили линейный закон изменения фазы колебаний в плоскости, примыкающей к пластинке справа. Это означает, что, пройдя через пластинку, волновой фронт повернулся (как показано на рисунке) на угол

$$\beta = \arcsin \frac{n_0 d}{b}.$$

Направление распространения составляет угол β с осью z – таким образом пластинка эквивалентна призме.

4. Две монохроматические волны одинаковой амплитуды (долина волны λ) падают на плоский экран, как показано на рис.29а. Угол между сходящимися пучками света равен 2α. Найдите распределение интенсивности света на экране и ширину интерференционных полос, т.е. расстояние между двумя соседними светлыми полосами.

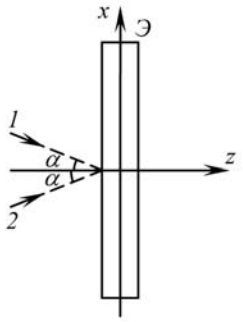

Рис. 29а

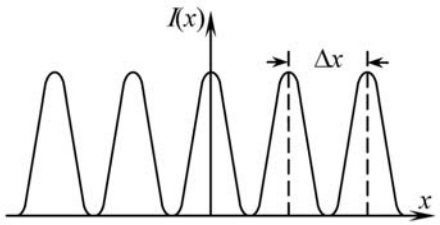

Рис. 29б

Решение:

Воспользуемся результатами задачи 2. Распределение фазы колебаний, создаваемых волной 1 на экране, запишем в виде $\varphi_1 = kx\sin\alpha$, а волной 2 – в виде $\varphi_2 = -kx\sin\alpha$.

Тогда разность фаз колебания равна $\Delta\varphi = 2kx\sin\alpha$, а интенсивность – $I = 2I_0\left(1+\cos\left(2kx\sin\alpha\right)\right)$.

График функции $I = I\left(x\right)$ изображен на рис.29б.

Максимальной интенсивности соответствует условие

$$\cos\left(2kx\sin\alpha\right) = 1,$$

откуда $2kx\sin\alpha = 2\pi m$ и $x_{\max} = \dfrac{\pi m}{k\sin\alpha}$.

При этом ширина интерференционной полосы равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\alpha}.$$

Для малых углов схождения 2α можно записать

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2a}.$$

5. Интерферируют две синфазные плоские волны. Чему равна ширина x интерференционной полосы, если угол схождения волн на экране α, а длина волны λ?

Решение:

На рис.30 изображены положения волновых фронтов в некоторый момент времени.

Сплошные линии соединяют точки, где в этот момент напряженность электрического поля принимает амплитудное значение $E = +A$. Расстояние между соседними сплошными линиями равны. Штриховые линии соединяют точки, где напряженность поля $E = -A$. Расстояние между штриховыми линиями тоже равны.

В точках O, M, N, M^*, N^* и т.д. две волны встречаются в одинаковых фазах. Поскольку фазы колебаний обеих волн одинаково меняются со временем ($\varphi = \omega t + \varphi_0$), то в любой момент времени волны будут приходить в эти точки в одинаковых фазах и, следовательно, усиливать друг друга. Точки O, M, N, M^*, N^* соответствуют интерференционным максимумам.

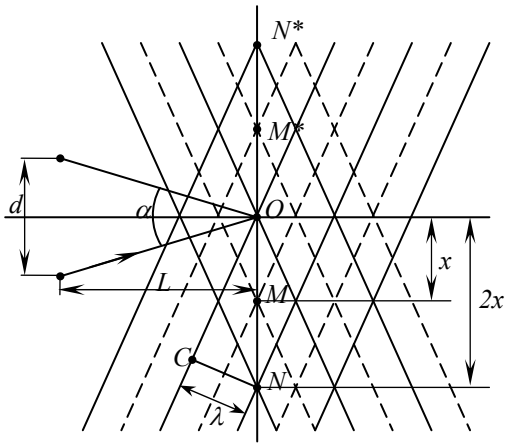

Рис. 30

Из рис.30 видно, что $\angle NOC = \dfrac{\alpha}{2}$, $NO = 2x$, $CN = \lambda$.

Из соотношения $\dfrac{\lambda}{2x} = \sin\dfrac{\alpha}{2} \approx \dfrac{\alpha}{2}$ найдем $x = \dfrac{\lambda}{\alpha}$ (для малых α).

Таким образом, ширина интерференционной полосы зависит от длины волны источников и угла схождения.

Этот результат справедлив для любой интерференционной схемы с малым углом схождения и углом схождения лучей (при достаточном удалении от источников волны всегда можно считать плоскими). В частности, для точечных источников $\alpha = \dfrac{d}{L}$; $x = \dfrac{\lambda}{\alpha} = \dfrac{\lambda L}{d}$.

В красном свете ($\lambda \approx 7 \cdot 10^{-7}$ *м*) полосы шире, чем в зеленом ($\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ *м*); с удалением экрана от источников полосы расширяются ($x \sim L$); сближение источников также ведет к расширению полос $\left(x \sim \dfrac{1}{d}\right)$.

6. От точечного монохромного источника A (рис.31) отодвигают точечный монохромный источник B (источники когерентны и синфазны) до тех пор, пока в точке O, где наблюдается интерференция, не наступает потемнение. Расстояние между A и B при этом равно $d = 2$ *мм*. Расстояние между источником A и экраном составляет $L = 9$ *м*. На сколько нужно придвинуть экран к источнику A, чтобы в центре экрана (точке O_1) снова возникло потемнение?

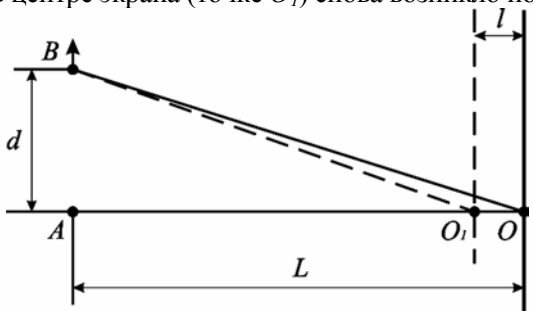

Рис. 31

Решение:

При удалении источника B первое потемнение в точке O возникает при условии, что разность хода волн от B и A равна половине длины волны.

$$\Delta r_1 = BO - AO = \frac{\lambda}{2}, \text{ или } \sqrt{L^2 + d^2} - L = \frac{\lambda}{2}.$$

Если экран приблизить к источникам на расстояние l, минимум в точке O будет соответствовать разности хода три вторых длины волны:

$$\Delta r_1 = BO_1 - AO_1 = \frac{3\lambda}{2}, \text{ или } \sqrt{(L-l)^2 + d^2} - (L-l) = \frac{3\lambda}{2}.$$

Преобразуем полученные выражения и воспользуемся приближенной формулой $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2}$ для $x \ll 1$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{d}{L}\right)^2} - 1 = \frac{\lambda}{2L};$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{d}{L-l}\right)^2}-1=\frac{3\lambda}{2\left(L-l\right)},$$

или

$$d^2=\lambda L,$$
$$d^2=3\lambda\left(L-l\right).$$

Отсюда $l=\frac{2}{3}L=6$ *м*.

7. Два когерентных источника S_1 и S_2 (рис.32) с длиной волны 0,5 *мкм* находится на расстоянии 2 *мм* друг от друга. Параллельно линии, соединяющей источники, расположен на экране на расстоянии 2 *м* от них. Что будет наблюдаться в точке *A* экрана?

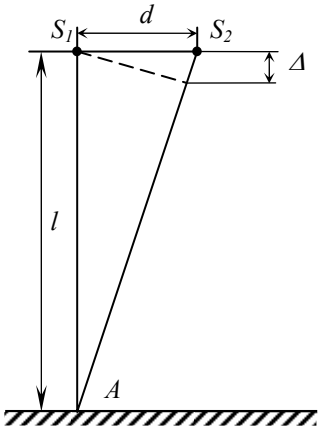

Рис. 32

Решение:

В точке *A* экрана будет максимум интенсивности, если разность хода двух лучей, исходящих из источников S_1 и S_2, равна целому числу длин волн, и минимум интенсивности, если эта разность хода равна нечетному числу полуволн. Вычислим разность хода:

$$\Delta=\left|S_2A\right|-\left|S_1A\right|,$$

где

$$|S_2A| = \sqrt{l^2 + d^2}\ ,$$

$$|S_1A| = l\ .$$

Следовательно,

$$\Delta = \sqrt{l^2 + d^2} - l = l\sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2} - l\ .$$

Так как $\frac{d}{l} \ll 1$, то, используя формулу приближенного вычисления, получаем

$$\Delta \approx l\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2\right] - l = \frac{d^2}{2l};$$

$$\Delta \approx \frac{\left(2 \cdot 10^{-3}\right)^2}{2 \cdot 2} = 10^{-6}\ м.$$

8. Сначала вертикальную мыльную пленку наблюдают в отраженном свете через красное стекло ($\lambda = 6{,}3 \cdot 10^{-7}$ *м*). При этом расстояние между соседними красными полосами равно 3 *мм*. Затем эту пеленку наблюдают через синее стекло ($\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ *м*). Найти расстояние между соседними синими полосами. Считать, что форма пленки за время наблюдения не изменяется.

Решение:

В глаз наблюдателя попадают лучи, отраженные от тонкого клина перпендикулярного его поверхности. Тогда для *k*-й и ($k+1$)-й красных полос оптические разности хода (рис.33а) соответственно равны

$$\Delta_k = 2h_k n - \frac{\lambda_1}{2} = k\lambda_1,$$

$$\Delta_{k+1} = 2h_{k+1} n - \frac{\lambda_1}{2} = (k+1)\lambda_1$$

($\cos r = 1$ в обоих случаях). Здесь h_k и h_{k+1} – соответствующие данным полосам толщины вертикальной мыльной пленки, сечение которой – клин.

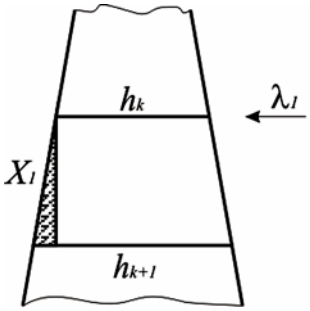

Рис. 33а

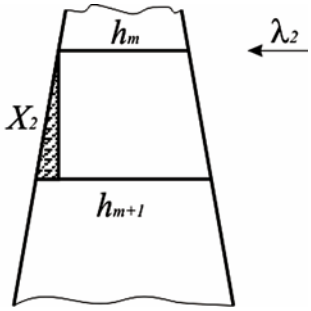

Рис. 33б

Из соотношений

$$\Delta_k = 2h_k n - \frac{\lambda_1}{2} = k\lambda_1 ,$$

$$\Delta_{k+1} = 2h_{k+1} n - \frac{\lambda_1}{2} = (k+1)\lambda_1$$

находим

$$\Delta_{k+1} - \Delta_k = 2h_{k+1} n - \frac{\lambda_1}{2} - \left(2h_k n - \frac{\lambda_1}{2}\right) = (k+1)\lambda_1 - k\lambda_1 ,$$

откуда

$$2n\left(h_{k+1} - h_k\right) = \lambda_1 .$$

Аналогично для синих полос (рис.33б)

$$2n\left(h_{m+1} - h_m\right) = \lambda_2 .$$

Разделив почленно выражения

$$2n\left(h_{k+1} - h_k\right) = \lambda_1 \text{ и } 2n\left(h_{m+1} - h_m\right) = \lambda_2 ,$$

получим

$$\frac{h_{k+1} - h_k}{h_{m+1} - h_m} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} .$$

Из подобия заштрихованных треугольников следует

$$\frac{h_{k+1} - h_k}{h_{m+1} - h_m} = \frac{x_1}{x_2} .$$

Приравнивая правые части выражений

$$\frac{h_{k+1}-h_k}{h_{m+1}-h_m}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ и } \frac{h_{k+1}-h_k}{h_{m+1}-h_m}=\frac{x_1}{x_2},$$

находим $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{x_1}{x_2}$, откуда

$$x_2=x_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1};$$

$$x_2=3\cdot10^{-3}\frac{4\cdot10^{-7}}{6{,}3\cdot10^{-7}}=1{,}9\cdot10^{-3}\ м.$$

9. Точечный монохроматический источник света S ($\lambda=5\cdot10^{-5}$ *см*) освещает непрозрачный экран с двумя маленькими отверстиями S_1 и S_2 (рис.34), расстояние между которыми $d=1$ *см*. Интерференционная картина возникает в плоскости наблюдения Э, находящейся от экрана с отверстиями на расстоянии $h=2$ *м*. Определите ширину интервенционной полоски.

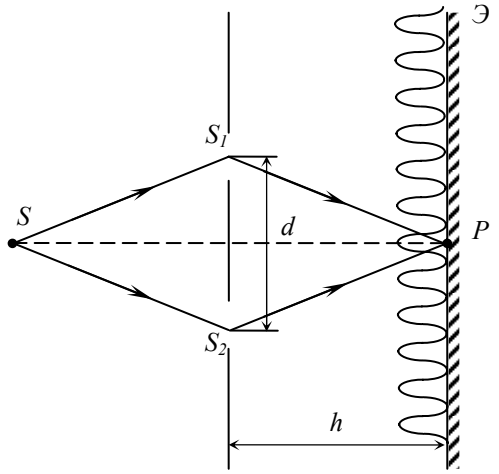

Рис. 34

Решение:

В этом случае интерферируют волны, прошедшие через отверстия S_1 и S_2, которые можно рассматривать как два когерентных источника. Угол схождения волн в плоскости наблюдения равен

$$\alpha = \frac{d}{h} = 0,005 .$$

Он мал, поэтому, используя результаты решения задачи 4 для ширины интерференционной полосы находим

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{d} h = 10^{-2} \ \textit{см}.$$

10. При наблюдении мыльной пленки, образованной в плоской вертикальной рамке, можно заметить, что интерференционные полосы с течением времени перемещаются вниз. Затем верхняя часть пленки рвется. Почему?

Решение:

Вода в пленке постепенно стекает вниз, вследствие чего нижняя часть пленки утолщается, верхняя становится тоньше. На участках разной толщины будут различны и условии интерференции, что приведет к появлению на поверхности пленки темных и светлых полос. По мере стекания воды толщина различных участков пленки изменяется, поэтому изменяются и условия интерференции, полосы при этом как бы перемещаются по пленке. Когда толщина станет очень малой ($d \approx 0$), то разность хода будет равна $\frac{\lambda}{2}$. При этом волны во всех точках пленки начнут гасить друг друга и пленка окрасится в черный цвет.

11. На мыльную пленку, находящуюся в воздухе, под углом $61°10'$ падает параллельный пучок монохроматических лучей $\lambda = 0,52$ *мкм*. При какой наименьшей толщине пленки станут видны интерференционные полосы, если наблюдение ведется в отраженном свете?

Решение:

Запишем условие максимума:

$$2k\frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина пленки в точке наблюдения, n – показатель преломления пленки, i – угол падения лучей света, λ – длина волны падающего света. Слагаемое учитывает потерю полуволны при отражении света от мыльной пленки (т.е. от границы раздела воздух-пленка).

Приняв $k = 1$, так как толщина пленки наименьшая, найдем

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

12. Рассчитать разность хода лучей при отражении от верхней и нижней поверхностей прозрачной плоскопараллельной пластины.

Решение:

Для получения разности хода лучей выделим из пучка отдельный луч *a*, падающий на поверхность в точке *A* под углом падения *i* (рис.35).

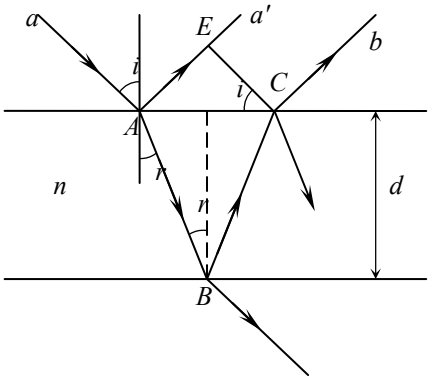

Рис. 35

Этот луч частично отразится, образовав луч a', частично преломится и упадет на вторую поверхность пластины в точке *B*. Здесь он снова частично преломится и частично отразится. То же произойдет и в точке *C*, где возникает преломленный луч *b*, параллельный лучу a'. Опустим из точки *C* перпендикуляр CE на направление луча a'. Тогда, считая показатель преломления среды

вне пластины (воздуха) равным единице, получим для разности хода Δ между лучами *a* и *b*:

$$\Delta = \left(AB + BC\right)n - \left(AE + \frac{\lambda}{2}\right),$$

где λ – длина волны рассматриваемого света.

Величина $\frac{\lambda}{2}$ представляет собой добавочную разность хода, возникающую при отражении луча *a* на границе между воздухом и пластиной. Если бы среда вне пластины имела показатель преломления больше, чем показатель преломления пластины, то потеря полуволны имела бы место при отражении в точке *B*.

Из рис.35 имеем:

$$AB = BC = \frac{d}{\cos r},$$

где *d* – толщина пластины; *r* – угол преломления. Так же из рисунка видно, что

$$AE = AC \sin i = 2d \cdot tgr \cdot \sin i.$$

Воспользовавшись законом преломления $\sin i = n \sin r$, перепишем выражение для AE в виде:

$$AE = 2dn\frac{\sin^2 r}{\cos r}.$$

Подставив в выражения для разности хода $\Delta = \left(AB + BC\right)n - \left(AE + \frac{\lambda}{2}\right)$ вместо *AB*, *BC* и *AE* их значения по $AB = BC = \frac{d}{\cos r}$ и $AE = 2dn\frac{\sin^2 r}{\cos r}$, найдем:

$$\Delta = 2dn\frac{1 - \sin^2 r}{\cos r} - \frac{\lambda}{2},$$

или

$$\Delta = 2dn\cos r - \frac{\lambda}{2}.$$

13. Найти радиус кривизны линзы, применяемой для наблюдения колец Ньютона, если расстояние между вторым и третьим светлыми кольцами 0,5 *мм*. Установка освещается светом с длинной волны $5,5\cdot10^{-7}$ *м*. Наблюдение ведется в отраженном свете.

Решение:

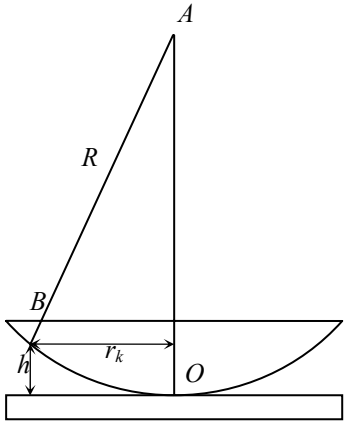

Рис. 36

Из ΔOAB (рис.36) имеем $|BA|^2 = |BO|^2 + |AO|^2$, или $R^2 = r_k^{\,2} + (R-h)^2$, откуда $r_k^{\,2} - 2Rh + h^2 = 0$. Пренебрегая малой величиной h^2 по сравнению с остальными слагаемыми, получаем $r_k = \sqrt{2Rh}$. Иначе, для светлого *k*-го кольца в отраженном свете разность хода равна

$$\Delta_k = 2hn - \frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{2},$$

откуда $2h = (2h+1)\dfrac{\lambda}{2n}$.

Тогда

$$r_k = \sqrt{(2k+1)\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{R}{n}}.$$

Для $k=2$ и $k=3$ имеем

$$r_2 = \sqrt{(2\cdot 2+1)\frac{\lambda R}{2n}} = \sqrt{\frac{5\lambda R}{2n}}.$$

$$r_2 = \sqrt{(2\cdot 3+1)\frac{\lambda R}{2n}} = \sqrt{\frac{7\lambda R}{2n}}.$$

Тогда

$$\Delta r_{3,2} = r_3 - r_2 = \sqrt{\frac{7\lambda R}{2n}} - \sqrt{\frac{5\lambda R}{2n}} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2n}}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right) = 0,4\sqrt{\frac{\lambda R}{2n}},$$

откуда

$$R = \frac{\Delta r_3^2 n}{0,08\lambda};$$

$$r = \frac{\left(0,5\cdot 10^{-3}\right)^2\cdot 1}{0,08\cdot 5,5\cdot 10^{-7}} = 5,7\ м.$$

14. На плоской стеклянной поверхности BB' лежит плоско-выпуклая линза AOA', радиус кривизны выпуклой поверхности которой *R*. Между линзой и поверхностью образуется воздушная прослойка. Найти вид кривых равной толщины, возникающих при отражениях от поверхностей, ограничивающих воздушную прослойку. Свет считать падающим на линзу нормально.

Решение:

Места равной толщины воздушной прослойки представляют собой окружность радиуса *r* с центром в точке *O*, где линза касается плоскости BB'. При $r \ll R$ и нормальном падении света разность хода Δ приближенно выражается формулой

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}.$$

Считая показатель преломления воздуха $n = 1$, получим

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2}.$$

Перед $\frac{\lambda}{2}$ берется теперь знак плюс, так как потеря полуволны происходит при отражении на границе воздушной прослойки

со стеклянной поверхностью BB'. Условием образования светлых интерференционных полос будет соотношение

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

где k – целое число.

При $r << R$ приближенно:

$$d = \frac{r^2}{2R}.$$

Подставляя это значение d в $\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$, найдем

$$\frac{r^2}{R} = \left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

откуда для r получаем: $r = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda R}$.

15. В камере обскуре с помощью малого отверстия можно получить изображение предмета. С уменьшением размера отверстия четкость изображения сначала возрастает, а потом падает. Почему?

Решение:

До тех пор, пока размеры отверстия много больше длины волны падающего на него света, явлением дифракции можно пренебречь, поэтому изображение получится отчетливым. Для его построения можно применять законы геометрической оптики. Как только размеры отверстия уменьшаются до того, что становятся соизмеримыми с длинной волны, необходимо учитывать явление дифракции (распространение света в области геометрической тени). Изображение получается размытым, неотчетливым.

16. Найти наибольший порядок спектра для желтой линии натрия с длиной волны $5{,}89 \cdot 10^{-7}$ *м*, если период дифракционной решетки 2 *мкм*.

Решение:

Воспользуемся формулой дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = k\lambda,$$

откуда

$$k = \frac{d\sin\varphi}{\lambda}.$$

Из выражения $k = \frac{d\sin\varphi}{\lambda}$ видно, что при заданных d и λ порядок спектра k будет максимальным, когда $\sin\varphi = 1$, т.е. при угле отклонения $\varphi = 1{,}57$ *рад*. Следовательно,

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda};$$

$$k_{\max} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{5{,}89\cdot 10^{-7}} \approx 3.$$

17. На каком расстоянии от дифракционной решетки нужно поставить экран, чтобы расстояние между нулевым максимумом и спектром четвертого порядка было равно 50 *мм* для света с длинной волны 500 *нм*? Постоянная дифракционной решетки 0,02 *мм*.

Решение:

Из формулы дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ имеем

$$\sin\varphi = \frac{k\lambda}{2}.$$

Иначе, $\sin\varphi$ можно найти из ΔABC (рис.37), в котором сторона BC является частью экрана, расположенного на расстоянии $x = |AB|$ от дифракционной решетки; в точке B наблюдается нулевой максимум – неотклоненное изображение, в точке C – изображение спектра четвертого порядка:

$$\sin\varphi = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}.$$

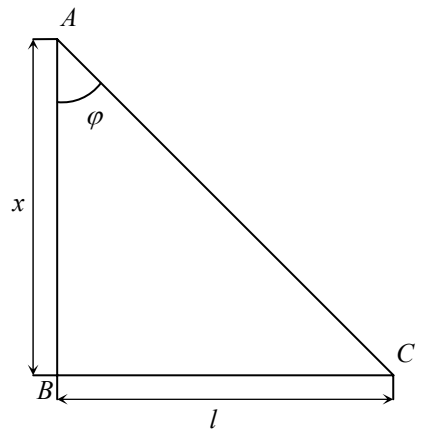

Рис. 37

Сравним между собой уравнения $\sin\varphi = \dfrac{k\lambda}{2}$ и $\sin\varphi = \dfrac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}$, получим $\dfrac{k\lambda}{d} = \dfrac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}$, откуда

$$x = \sqrt{\frac{d^2 l^2 - k^2\lambda^2 l^2}{k^2\lambda^2}} = \frac{l}{k\lambda}\sqrt{d^2 - k^2\lambda^2};$$

$$x = \frac{5\cdot 10^{-2}}{4\cdot 5\cdot 10^{-7}}\sqrt{\left(2\cdot 10^{-5}\right)^2 - 4^2\left(5\cdot 10^{-7}\right)^2} \approx 0{,}5 \text{ м.}$$

18. Определите угол дифракции для спектра второго порядка света натрия с длинной волны 589 *нм*, если на 1 *мм* дифракционной решетки приходится пять штрихов.

Решение:

Из формулы дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ найдем

$$\sin\varphi = \frac{k\lambda}{d}.$$

Так как число штрихов, отнесенных к длине решетки связанно с периодом решетки соотношением

$$N_0 = \frac{1}{d},$$

то формуле $\sin\varphi = \frac{k\lambda}{d}$ можно придать вид

$$\sin\varphi = k\lambda N_0,$$

откуда

$$\varphi = \arcsin k\lambda N_0;$$

$$\varphi = \arcsin 2\cdot 5{,}89\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{3} \approx 5{,}8\cdot 10^{-3}\ \textit{рад}.$$

19. Определить наибольший порядок спектра, который может образовать дифракционная решетка имеющая 500 штрихов на 1 *мм* и если длина воны падающего света 590 *нм*. Какую наибольшую длину волны можно наблюдать в спектре этой решетки?

Решение:

Из формулы дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ найдем

$$k = \frac{d\sin\varphi}{\lambda}.$$

Учитывая, что $d = \frac{1}{N_0}$, преобразуем формулу $k = \frac{d\sin\varphi}{\lambda}$:

$$k = \frac{\sin\varphi}{\lambda N_0}.$$

Из выражения $k = \frac{\sin\varphi}{\lambda N_0}$ следует, что при заданных λ и N_0 наибольший порядок спектра можно наблюдать при наименьшем значении $\sin\varphi_{\max} = 1$, т.е.

$$k_{\max} = \frac{\sin\varphi_{\max}}{\lambda N_0} = \frac{1}{\lambda N_0};$$

$$k_{\max} = \frac{1}{5{,}9\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{5}} \approx 3.$$

Наибольшая длинна волны которую можно наблюдать с помощью этой решетки,

$$\lambda_{\max} = \frac{d \sin \varphi_{\max}}{k_{\max}} = \frac{1}{k_{\max} N_0};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 10^5} = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

20. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом с $\lambda = 600$ *нм*, расстояние между отверстиями 1 *мм* и расстояние от отверстий до экрана 3 *м*. Найти положение трех первых светлых полос.

Решение:

Два отверстия в опыте Юнга, освещаемые одним источником света, являются когерентными источниками. Положение первых трех светлых полос на экране соответствует трем первым максимумам, т.е. $\Delta = k\lambda$ ($k = 1,2,3$) – оптическая разность лучей *1* и *2* равна целому числу длин волн.

Рис. 38

Из рис. 38 нетрудно найти оптические пути S_1A и S_2A лучей *1* и *2* и их разность:

$$\Delta = S_1A - S_2A = \sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}.$$

С учетом x, $d \ll \lambda$ получаем $\Delta = \frac{xd}{l} = k\lambda$. Из последнего соотношения получаем:

$$x_1 = \frac{l\lambda}{d} = 1,8 \text{ мм,}$$

$$x_2 = \frac{2l\lambda}{d} = 3,6 \text{ мм},$$

$$x_3 = \frac{3l\lambda}{d} = 5,4 \text{ мм}.$$

21. Для уменьшения потерь света при отражении от стекла на поверхность объектива ($n_2 = 1,7$) нанесена тонкая прозрачная пленка ($n = 1,4$). При какой наименьшей толщине пленки произойдет максимальное ослабление отраженного света, длина волны которого $\lambda_0 = 0,56$ *мкм*? Считать, что лучи падают нормально к поверхности объектива.

Решение:

Лучи *1* и *2* (рис.39), отраженные от передней и задней поверхности тонкой пленки, интерферируют.

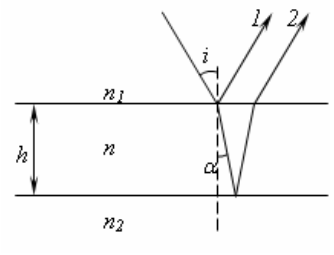

Рис. 39

Отраженный свет будет ослаблен максимально, если *1* и *2* гасят друг друга, т.е. выполняется условие минимума

$$\Delta = 2h \cdot n \cdot \cos r = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}, \ (k = 1,2,3)$$

(использована формула $\Delta = 2h \cdot n \cdot \cos r - \frac{\lambda_0}{2}$ с учетом того, что оба луча *1* и *2* отражаются от оптически более плотных сред, поэтому член $-\frac{\lambda_0}{2}$ отсутствует). Учитывая, что при $i = 0$ (лучи падают нормально) $r = 0$ получаем

$$2h \cdot n = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2} \text{ или } h = \frac{2k+1}{4n}\lambda_0 .$$

Толщина пленки минимальна при $k = 0$, т.е.

$$h_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n} = 0{,}1 \text{ мкм.}$$

22. Установка для наблюдения колец Ньютона в отраженном свете освещается монохроматическим светом, падающим нормально. После того, как пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнили жидкостью, радиусы темных колец уменьшилась в 1,25 *раза*. Найти показатель преломления жидкости, считая его меньше показателя преломления стекла.

Решение:

В установке для получения колец Ньютона интерферируют лучи, отраженные от нижней поверхности линзы (точка *A*) и верхней поверхности стеклянной пластинки (точка *B*) (рис.40).

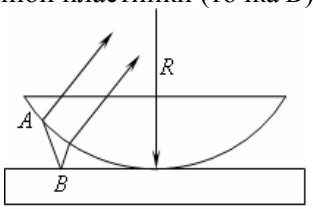

Рис. 40

Т.к. наблюдение ведется в отраженном свете, то радиусы темных, соответствующих минимумам интенсивности, колец Ньютона определяется формулой $r_k = \sqrt{kR\lambda}$ ($k = 1, 2...$). Поэтому $r_k = \sqrt{kR\lambda_0}$ для вакуума и $r_k' = \sqrt{kR\lambda}$ для случая, когда пространство между линзой и пластиной заполнено диэлектриком. Пусть показатель преломления диэлектрика *n*, тогда $n = \frac{c_{вак}}{c_{диэл}} = \frac{\lambda_0 v}{\lambda v} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$.

$$\text{Т. к. } \frac{r_k}{r_k'} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} = \sqrt{n} \text{, то } n = \left(\frac{r_k}{r_k'}\right)^2 = 1{,}25^2 \approx 1{,}56 .$$

23. Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2,2$ *мкм*, если угол между максимумом первого и второго порядков спектра $\Delta\varphi = 15°$.

Решение:

Обозначим φ_1 и φ_2 углы дифракции, соответствующие максимумам первого и второго порядка. Тогда

$$-\varphi_1 + \varphi_2 = \Delta\varphi,$$

а по уравнению $d\sin\varphi_k = \pm k\lambda$

$$d\sin\varphi_1 = \lambda \text{ и } d\sin\varphi_2 = 2\lambda.$$

Решая систему уравнений, можно найти

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4\cos\Delta\varphi}},$$

а затем

$$\lambda = d\sin\varphi_1 = \frac{d\sin\Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4\cos\Delta\varphi}} \approx 0,54 \text{ мкм}.$$

24. Чему равен угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор и анализатор, уменьшается в четыре раза? Поглощением света пренебречь.

Решение:

Обозначим интенсивность естественного света, падающего на поляризатор, через I_0. Тогда после поляризатора, в соответствии с законом Малюса $I = I_0\cos^2\varphi$, интенсивность луча будет $I_1 = \frac{I_0}{2}$ (среднее значение $\cos^2\varphi$ равно $1/2$). После прохождения луча через анализатор его интенсивность будет

$$I_2 = I_1\cos^2\alpha = 0,5 \cdot I_0\cos^2\alpha,$$

где α – угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора. По условию

$$\frac{I_2}{I_0} = 0,25.$$

Тогда

$$\cosh 2\alpha = \frac{0,25}{0,5} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

И угол $\alpha = 45°$.

25. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ *нм*, расстояние между отверстиями $d = 1$ *мм*, расстояние от отверстий до экрана $l = 3$ *м*. Найти положение третьей и четвертой светлых полос.

Решение:

Ширина интерференционной полосы

$$\Delta x = \frac{l\lambda}{d},$$

где d – расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии l от экрана, параллельного обоим источникам, причем $l \gg d$. Первая светлая полоса находится на расстоянии $y_1 = \frac{l\lambda}{d}$, третья полоса находится на расстоянии $y_3 = 3y_1$, n-я полоса – на расстоянии $y_n = ny_1$. Таким образом, $y_3 = 5,4$ *мм*, $y_4 = 7,2$ *мм*.

26. Параллельный пучок света с длиной волны λ нормально падает на основание бипризмы с малым преломляющими углами θ. Показатель преломления стекла призмы равен n. За призмой параллельно ее основанию расположен экран, на котором видна интерференционная картина. Найти ширину интерференционных полос.

Решение:

Ширина интерференционных полос определяется по формуле

$$\Delta x = \frac{l\lambda}{d},$$

где d – расстояние между двумя когерентными источниками. В данном случае когерентные источники получаются расщеплением исходного пучка лучей бипризмой. Угол отклонения каждого луча в силу малости преломляющего угла призмы $\delta = (n-1)\theta$. Следовательно, можно считать

$$\frac{d}{2l} = \operatorname{tg}\delta \approx \sin\delta \approx \delta,$$

откуда $\Delta x \approx \dfrac{\lambda}{2(n-1)\theta}$.

27. В просветленной оптике для устранения отражения света на поверхность линзы, сделанной из стекла с показателем преломления $n_1 = 1,5$, наносится тонкая пленка с показателем преломления $n = 1,26$. При какой толщине d пленки отражение света от линзы не будет наблюдаться? Длина волны падающего света $\lambda = 550$ *нм*, угол падения $i = 30°$.

Решение:

Свет, падая на систему пленка-стекло под углом i, отражается как от верхней, так и от нижней поверхности пленки. Отраженные лучи когерентны, поскольку образованны от одного падающего луча. Результат интерференции этих лучей зависит от оптической разности хода. Лучи отражаются от среды с большим показателем преломления, поэтому как на верхней, так и на нижней поверхности пленки происходит потеря полуволны и, следовательно, условие интерференционного минимума

$$2d_m = \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

откуда,

$$d_m = \frac{\lambda(2m+1)}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Полагая $m = 0,1,2...$, получим ряд возможных значений толщины пленки:

$$d_0 = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 120 \text{ нм},$$

$$d_1 = \frac{3\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 350 \text{ нм},$$

$$d_2 = \frac{5\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 590 \text{ нм}$$

и т.д.

28. В установке для наблюдения колец Ньютона свет с длиной волны $\lambda = 0,5$ *мкм* падает нормально на плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны $R_1 = 1$ *м*, положенную выпуклой стороной на вогнутую поверхность линзы с радиусом кривизны $R_2 = 2$ *м*. Определить радиус пятого темного кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете.

Решение:

Определим величину x_1 (рис.41) воздушного зазора между плосковыпуклой и вогнутой линзами на расстоянии *r* от точки их соприкосновения – центра линз. Из рисунка видно, что

$$x_2 = R_2 - \sqrt{R_2^2 - r^2},$$

$$x_1 = R_1 - x_2 - \sqrt{R_1^2 - r^2} = R_1 - R_2 + \sqrt{R_2^2 - r^2} - \sqrt{R_1^2 - r^2}.$$

В дальнейших вычислениях будем полагать $x_1 \ll R_1$ и $x_1 \ll R_2$. Записывая последнее равенство в виде

$$x_1 + \left(R_2 - R_1\right) = \sqrt{R_2^2 - r^2} - \sqrt{R_1^2 - r^2},$$

возводя его в квадрат и пренебрегая слагаемым x_1^2, получаем

$$R_1 R_2 - r^2 - x_1\left(R_2 - R_1\right) = \sqrt{\left(R_2^2 - r^2\right)\left(R_1^2 - r^2\right)}.$$

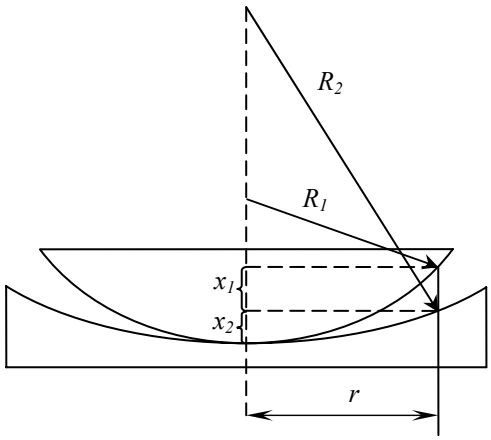

Рис. 41

Второй раз возводя в квадрат данное равенство и учитывая малость x_1, получаем

$$r = \sqrt{\frac{x_1 R_1 R_2}{R_2 - R_1}}.$$

Разность хода Δd в отраженном свете $\Delta d = 2x_1 + \frac{\lambda}{2}$. С другой стороны, условие наблюдения темного кольца $\Delta d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, откуда $x_1 = k\lambda$. Следовательно, радиус *k*-го темного кольца в отраженном свете определяется формулой

$$r_k = \sqrt{\frac{k\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1}}.$$

Подставляя $k = 5$, $R_1 = 1$ *м*, $R_2 = 2$ *м*, $\lambda = 0{,}5$ *мкм*, получаем $r_5 = 2{,}24$ *мм*.

29. Найти радиус r_4 четвертой зоны Френеля для случая плоской волны. Расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения $b = 1$ *м*. Длина волны света $\lambda = 500$ *нм*.

Решение:

Для плоской волны в формуле для радиуса *m*-й зоны Френеля $r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$ следует положить $a \to \infty$, поскольку плоский фронт волны дает бесконечно удаленный источник. Тогда

$$r_m = \lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda} = \lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{b}{1+b/a} m\lambda} = \sqrt{bm\lambda}\ .$$

Следовательно, $r_4 = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 1{,}4$ *мм*.

30. На щель падает нормально плоская монохроматическая световая волна. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному максимуму, равен $\alpha = 30°$. Определить ширину щели, если длина волны падающего света $\lambda = 0{,}6$ *мкм*.

Решение:

Положение максимумов освещенности при дифракции от щели определяется по формуле $a \sin\alpha = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, откуда ширина щели

$$a = \frac{(2k+1)\lambda}{2\sin\alpha}\ .$$

Подставляя в последнюю формулу $k = 2$, $\alpha = 30°$ и $\lambda = 0{,}6$ *мкм*, получаем $a = 5\lambda = 3$ *мкм*.

31. Какое число штрихов *N* на единицу длины имеет дифракционная решетка, если зеленая линия ртути ($\lambda = 546{,}1$ *нм*) в спектре первого порядка наблюдается под углом $\varphi = 19°8'$?

Решение:

Число штрихов *N* дифракционной решетки на 1 *мм* вычисляется по формуле $N = \frac{10^{-3}}{d}$, где *d* – период решетки в метрах. Пе-

риод d определяется из формулы $d\sin\varphi = k\lambda$, откуда $d = \dfrac{k\lambda}{\sin\varphi}$.

По условию $k = 1$, тогда $N = \dfrac{10^{-3}\sin\varphi}{\lambda} = 600$ *штр/мм*.

32. Построить ход лучей в одноосном положительном кристалле, если оптическая ось лежит в плоскости падения под косым углом к преломляющей грани. Параллельный пучок света падает под углом к поверхности кристалла.

Решение:

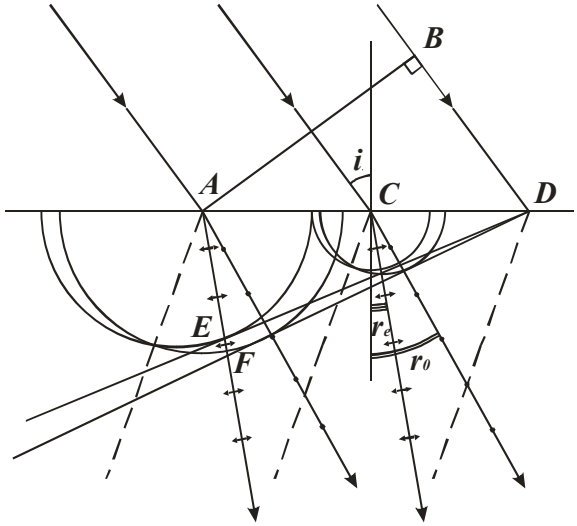

Рис. 42

Очевидно, что за время, в течении которого правый край B фронта волны AB достигает точки D на поверхности кристалла (рис.42), вокруг каждой из точек на поверхности кристалла между A и D возникают две лучевые поверхности – сферическая и эллипсоидальная. Эти две поверхности соприкасаются друг с другом вдоль оптической оси. Так как кристалл положительный, то эллипсоид будет вписан в сферу. Для нахождения фронтов обыкновенной и необыкновенной волн проводим (по принципу Гюйгенса) касательные плоскости DF и DE соответственно к сферам и эллип-

соидам. Линии, соединяющие точку A (а также точку C и др.) с точками касания сферической и эллипсоидальной поверхностей с касательными плоскостями DF и DE, дают нам соответственно обыкновенный и необыкновенный лучи. Так как главное сечение кристалла в данном случае совпадает с плоскостью чертежа, то электрический вектор необыкновенного луча колеблется в этой плоскости (стрелки), а электрический вектор обыкновенного луча колеблется перпендикулярно ей (точки). Как видно из рисунка, необыкновенные лучи не перпендикулярны волновому фронту. В данном случае угол преломления $r_e < r_o$.

33. Два когерентных источника света S_1 и S_2 расположены на расстоянии l друг от друга (рис.43). На расстоянии $D \gg l$ от источников помещается экран. Найти расстояние между соседними интерференционными полосами вблизи середины экрана (точка A), если источники посылают свет длины волны λ .

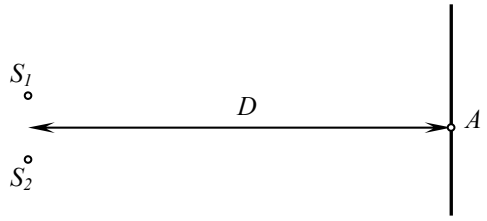

Рис. 43

Решение:

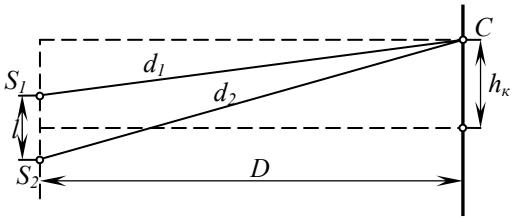

Рис. 44

В произвольной точке экрана C будет наблюдаться максимум освещенности (рис.44), если разность хода

$$d_1 - d_2 = k\lambda ,$$

Где $k = 0, 1, 2...$ – целые числа. По теореме Пифагора

$$d_2^2 = D^2 + \left(h_k + \frac{l}{2}\right)^2,$$

$$d_1^2 = D^2 + \left(h_k - \frac{l}{2}\right)^2.$$

Отсюда

$$d_2^2 - d_1^2 = \left(d_2 + d_1\right)\left(d_2 - d_1\right) = 2h_k l.$$

В соответствии с условием задачи $d_2 + d_1 = 2D$. Следовательно,

$$d_2 + d_1 = k\lambda \approx \frac{2h_k l}{2D}.$$

Расстояние от *k*-й светлой полосы до центра экрана $h_k = \frac{k\lambda D}{l_0}$. Расстояние между полосами

$$\Delta h = h_{k+1} - h_k = \frac{\lambda D}{l_0}.$$

34. Два плоских зеркала образуют между собой угол, близкий к 180° (рис.45). На равных расстояниях *b* от зеркал расположен источник света *S*. Определить интервал между соседними интерференционными полосами на экране *MN,* расположенном на расстоянии $OA = a$ от точки пересечения зеркал. Длина световой волны известна и равна λ. (Ширма *C* препятствует непосредственному попаданию света источника на экран.)

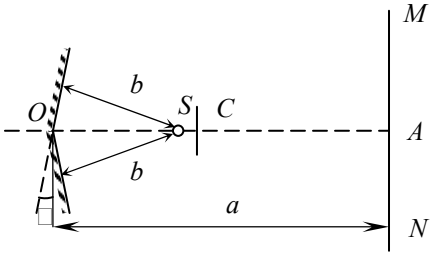

Рис. 45

Решение:

Расстояние между интерференционными полосами $\Delta h = \dfrac{\lambda D}{l}$.

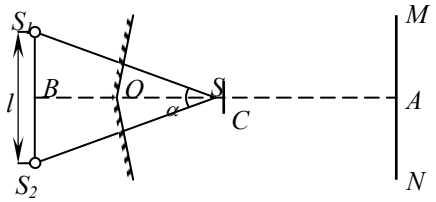

Рис. 46

В данном случае $D = AB = a + b$, а $l = S_1S_2$ – расстояние между изображениями S_1 и S_2 источника S в плоскости зеркалах (рис.46). Величину l можно определить из треугольника S_1SB:

$$\frac{l}{2} = \frac{2a\alpha}{2},$$

или

$$l = 2b\alpha.$$

Следовательно, $\Delta h = \dfrac{\lambda(a+b)}{2b\alpha}$.

35. Интерференционный опыт Ллойда состоял в получении на экране картины от источника S и его мнимого изображения S' в зеркале AO (рис.47). Чем будет отличаться интерференционная картина от источников S и S' по сравнению с картиной, рассмотренной, в задаче 33?

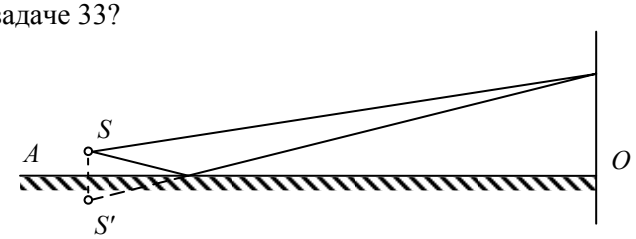

Рис. 47

Решение:

Второй когерентный источник получается в опыте Ллойда путем отражения лучей от зеркала *АО.* При отражении происходит изменение фазы на π (потеря полуволны), поэтому в точке *О,* где должна бы наблюдаться светлая полоса, произойдет гашение колебаний – минимум освещенности. По сравнению с задачей 33 вся картина окажется сдвинутой на ширину светлой (или темной) полосы.

36. Два точечных когерентных источника, расстояние между которыми $l \gg \lambda$, расположены на прямой, перпендикулярной экрану. Ближайший источник находится от экрана на расстоянии $D \gg \lambda$. Какой вид будут меть интерференционные полосы на экране? Каково расстояние на экране от перпендикуляра до ближайшей светлой полосы (при условии $l = n\lambda$, *n* – целое число)?

Решение:

Усиление освещенности на экране получается, когда разность хода $d_2 - d_1 = k\lambda$. Геометрическое место точек экрана, до которых лучи от обоих источников доходят с такой разностью хода, есть окружность с центром в точке *А* (рис.48), Следовательно, интерференционные полосы будут представлять собой концентрические окружности.

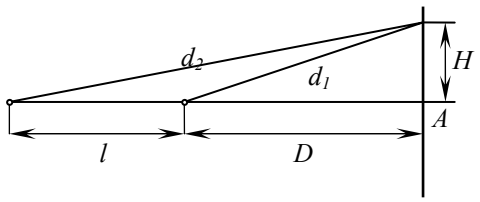

Рис. 48

В случае $l = n\lambda$ в точке *А* будет наблюдаться усиление освещенности (интерференционный максимум *n*-го порядка). Ближайшая светлая интерференционная полоса (окружность) $(n-1)$-го порядка находится от точки *А* на расстоянии, определяемом из уравнения

$$d_2 - d_1 = \sqrt{(n\lambda + D)^2 + H_{n-1}^2} - \sqrt{D^2 + H_{n-1}^2} = (n-1)\lambda .$$

Приняв во внимание условия задачи $\lambda \ll D$, $\lambda \ll l$, получим

$$H_{n-1} = \sqrt{\frac{2D(D+n\lambda)}{n}} = \sqrt{2D\lambda\left(\frac{D}{l}+1\right)}.$$

37. Найти радиус r_k для k-го светлого кольца при условии, что $D = l = n\lambda$, $n \gg 1$, $k = n; n-1; n-2...$

Решение:

Разность хода лучей для k-го светлого кольца

$$d_2 - d_1 = \sqrt{(2n\lambda)^2 + r_k^2} - \sqrt{(n\lambda)^2 + r_k^2} = k\lambda.$$

Отсюда

$$r_k = \frac{\lambda}{2k}\sqrt{(9n^2 - k^2)(n^2 - k^2)}.$$

38. Как практически можно осуществить опыт, описанный в задаче 36?

Решение:

Для создания второго когерентного источника, расположенного ближе к экрану, чем первый, можно использовать полупрозрачную пластину с отверстием. На основании принципа Гюйгенса отверстие можно рассматривать как вторичный источник. На экране получается интерференционная картина. Если расстояние между источниками велико, то для получения интерференционной картины необходимо располагать источником, дающим волны, очень близкие к монохроматическим.

39. На бипризму Френеля, изображенную на рис. 49, падает свет от источника S. Световые пучки, преломленные различными гранями призмы, частично перекрываются и дают на экране на участке AB интерференционную картину. Найти расстояние между соседними интерференционными полосами, если расстояние от источника до призмы $a = 1$ *м*, а от призмы до экрана $b = 4$ *м*; преломляющий угол призмы, $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ *рад*. Стекло, из которого

изготовлена призма, имеет показатель преломления $n = 1,5$. Длина световой волны $\lambda = 600$ *нм*.

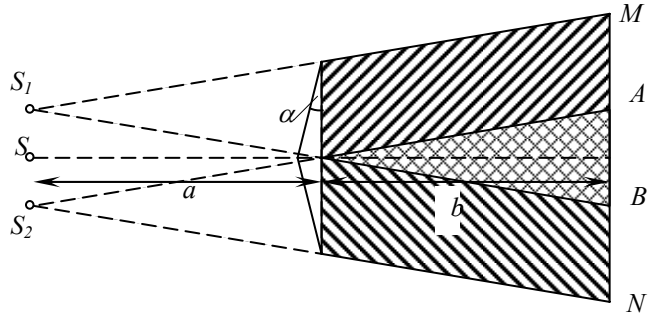

Рис. 49

Решение:

Чтобы найти искомое расстояние Δh, нужно предварительно вычислить расстояние *l* между мнимыми источниками S_1 и S_2, расположенными на пересечении продолжений лучей, преломленных гранями призмы.

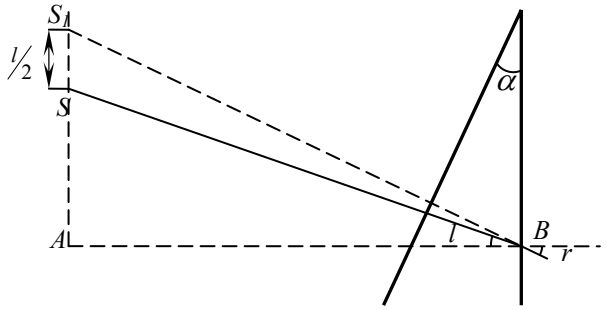

Рис. 50

Для этого проще всего рассмотреть ход луча, падающего на грань призмы нормально (рис. 50). Такого луча в действительности нет, но можно построить его, мысленно продолжив верхнюю призму вниз. Все преломленные призмой лучи от точечного источника можно считать сходящимися в точке, и такой прием вполне допустим. Так как преломляющий угол призмы мал (призма

тонкая), то мнимые изображения S_1 и S_2 источника можно считать лежащими на том же расстоянии от призмы, что и источник *S*. Как видно из рис. 553, $i = \alpha$ и $SA \approx a\alpha$. По закону преломления $r \approx n\alpha$. Рассматривая треугольник AS_1B, можно написать

$$\frac{l}{2} + a\alpha \approx a\alpha n,$$

$$\Delta h = \frac{\lambda D}{l} = \frac{\lambda(a+b)}{2a\alpha(n-1)} = 0{,}15 \ см.$$

40. Сколько интерференционных полос наблюдается на экране в установке с бипризмой, описанной в предыдущей задаче?

Решение:

$$N = \frac{L}{\Delta h},$$

где *L* – ширина интерференционной картины.

$L = AB = \frac{b}{a} l$. Используя результаты предыдущей задачи, получим

$$N = \frac{4ab\alpha^2(n-1)^2}{(a+b)\lambda} \approx 5.$$

41. Трудность изготовления бипризмы с углом, близким к 180°, заставляет прибегнуть к следующему приему. Бипризма с углом β, сильно отличающимся от 180°, помещается в сосуд, заполненный жидкостью с показателем преломления n_1, или является одной из стенок этого сосуда (рис.51). Рассчитать угол эквивалентной бипризмы, находящейся в воздухе. Показатель преломления вещества призмы равен n_2. Произвести вычисления для $n_1 = 1{,}5$ (бензол), $n_2 = 1{,}52$ (стекло), $\beta = 170°$.

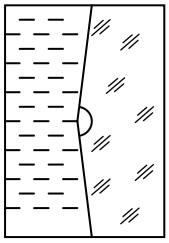

Рис. 51

Решение:

Бипризма изготовлена из вещества с показателем преломления n_2, отклоняет лучи на угол

$$\varphi_1 = \left(90° - \frac{\beta}{2}\right)\left(n_2 - n_1\right),$$

где n_1 – показатель преломления среды, из которой падают лучи. Для бипризмы, находящейся в воздухе,

$$\varphi_2 = \left(90° - \frac{\delta}{2}\right)\left(n_2 - 1\right).$$

В случае эквивалентности бипризмы $\varphi_1 = \varphi_2$. Отсюда

$$\delta = \beta\frac{n_2 - n_1}{n_2 - 1} + 180°\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1}.$$

Для заданных в условии величин $\delta \approx 179°37'$.

42. Собирающая линза, имеющая фокусное расстояние $f = 10$ *см*, разрезана пополам, и половинки раздвинуты на расстояние $d = 0{,}5$ *мм* (билинза). Оценить число интерференционных полос на экране, расположенном за линзой на расстоянии $D = 60$ *см*, если перед линзой имеется точечный источник монохроматического света ($\lambda = 500$ *нм*), удаленный от нее на расстояние $a = 15$ *см*.

Решение:

Ход лучей в системе изображен на рис. 52.

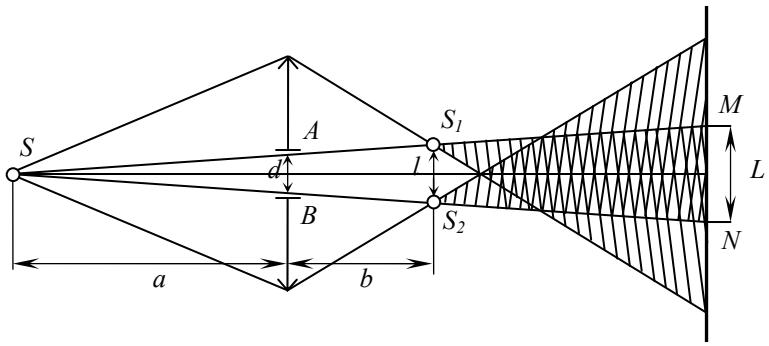

Рис. 52

Точки S_1 и S_2 – изображение источника S в половинах линзы. Очевидно, что

$$b = \frac{fa}{a-f}.$$

Из подобия треугольников SAB и SS_1S_2 можно найти расстояние l между S_1 и S_2:

$$l = \frac{ad}{a-f}.$$

Расстояние между соседними, интерференционными полосами на экране

$$\Delta h = \frac{\lambda(D-b)}{l} = \frac{\lambda}{ad}(Da - Df - af) = 10^{-2}\ см.$$

Искомое число интерференционных полос

$$N = \frac{L}{\Delta h} = \frac{d(D+a)}{a\Delta h} = 25.$$

43. Из собирающей линзы с фокусным расстояние $f = 10$ *см* вырезана центральная часть ширины $d = 0{,}5$ *мм*, как показано на рис.53. Обе половины сдвинуты вплотную. На линзу падает монохроматический свет ($\lambda = 500$ *нм*) от точечного источника, расположенного на расстоянии $a = 5$ *см* от линзы. На каком расстоянии

с противоположной стороны линзы нужно поместить экран, чтобы на нем можно было наблюдать три интерференционные полосы? Чему равно максимальное возможное число интерференционных полос, которое можно наблюдать в данной установке?

Рис. 53

Решение:

Расстояние между мнимыми источниками S_1 и S_2 можно найти методом, изложенным в решении задачи 42 (рис. 54).

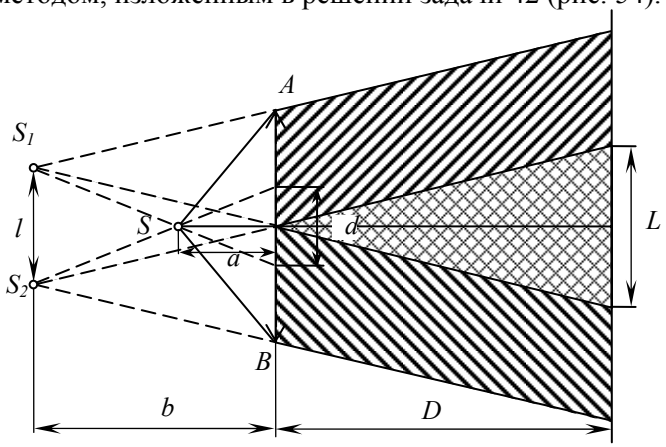

Рис. 54

Расстояние между интерференционными полосами

$$\Delta h = \frac{\lambda\left(Df - Da + af\right)}{da}.$$

Число полос па экране $N = \dfrac{L}{\Delta h}$, где $L = \dfrac{Dl}{b}$ – размер участка экрана, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Отсюда

$$D = \frac{Nabf\lambda}{adl + abN\lambda - bfN\lambda} = 15 \ \textit{см}.$$

Максимальное возможное число полос найдется из условия

$$adl + Nab\lambda - bfN\lambda = 0,$$

(при этом $D \to \infty$). Следовательно,

$$N_{\max} = \frac{adl}{bf\lambda - ab\lambda} = 5.$$

Число полос получается конечным, так как по мере удаления экрана одновременно с увеличением размеров участка экрана, на котором возникает интерференционная картина, растет расстояние между полосами.

44. Найти расстояние между соседними полосами интерференционной картины, даваемой линзой радиуса $R = 1$ *см*, которая описана в задаче 43, при условии, что это расстояние не зависит от наложения экрана. При каком положении экрана число интерференционных полос будет максимальным? Источник света дает монохроматический свет длины волны $\lambda = 500$ *нм*.

Решение:

Расстояние между интерференционными полосами не будет зависеть от положения экрана только в том случае, если источник расположен в фокальной плоскости линзы. Это непосредственно вытекает из выражения

$$\Delta h = \frac{\lambda}{ad}\left(Df - Da + af\right),$$

которое получено при решении задачи 43. Если $a = f$, то $\Delta h = \dfrac{\lambda f}{d} = 10^{-2}$ *см* при любом *D*.

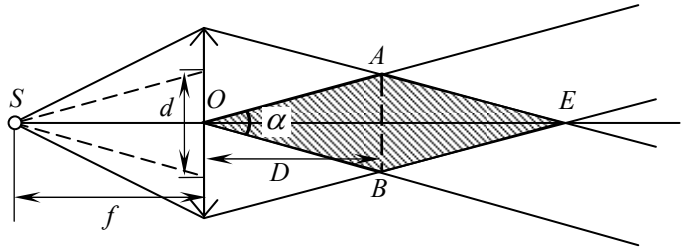

Рис. 55

Ход лучей для данного случая изображен на рис. 55. Как видно из этого рисунка, число интерференционных полос будет максимально, когда экран займет положение *AB*. Расстояние от экрана до линзы можно найти из треугольника *OAB,* учитывая, что угол $\alpha \approx \dfrac{d}{f}$, а $AB = \dfrac{R}{D} = \dfrac{Rf}{d} = 2$ *м*.

45. Что произойдет с интерференционной картиной в установке, описанной в задаче 43, если ввести в световой пучок, прошедший верхнюю половину линзы, плоскопараллельную стеклянную пластинку толщины $d = 0{,}11$ *см*, а в световой пучок, прошедший нижнюю половину линзы, пластинку толщины $d_2 = 0{,}1$ *см*? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Пластинки располагаются нормально к проходящим сквозь них световым пучкам.

Решение:

Внутри стекла длина световой волны уменьшается в *n* раз, так как частота не изменяется, а скорость уменьшается в *n* раз. Вследствие этого между когерентными волнами в пучках возникает дополнительная разность хода. На расстоянии d_1 в верхнем пучке уложится $k_1 = \dfrac{d_1 n}{\lambda}$ длин волн, а в нижнем на том же расстоянии уложится $k_2 = \dfrac{d_2 n}{\lambda} + \dfrac{d_1 - d_2}{\lambda}$ длин волн. Световые волны в любой точке экрана окажутся дополнительно сдвинутыми отно-

сительно друг друга на $k_1 - k_2$ длин волн. Вследствие этого вся интерференционная картина сместится вверх на $k_1 - k_2 = \frac{d_1 - d_2}{\lambda}(n-1) = 100$ *полос*. Процесс смещения можно наблюдать в момент введения пластин. После того как пластины введены, интерференционная картина на экране будет иметь прежний вид.

46. Почему кольца Ньютона образуются только вследствие интерференции лучей *2* и *3,* отраженных от границ воздушной прослойки между линзой и стеклом (рис.56), а луч *4,* отраженный от плоской грани линзы, не влияет на характер интерференционной картины?

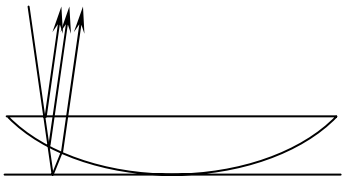

Рис. 56

Решение:

Толщина линзы слишком велика. Интерференции имеет место только в случае тонких пленок. Воздушная прослойка вблизи соприкосновения линзы и стекла тонкая.

47. Изменится ли характер интерференционной картины в установке, которая описана в задаче 34, если ширму *C* убрать? Расстояние *a* считать большим (равным 1 *м*). Излучаемые источником волны не являются монохроматическими.

Решение:

Нет, не изменится. Разность хода между волнами, встречающимися на экране от источников *S* и S_1 или *S* и S_2 велика. В этих условиях спектры различных порядков, соответствующие спектральному интервалу источника, налагаются друг на друга

подобно тому, как это имеет место при отражении волн от границ толстой пленки.

Если ширму убрать, то это приведет только к наложению на интерференционную картину от источников S_1 и S_2 монотонно меняющейся освещенности.

48. В каком случае кольца Ньютона видны более отчетливо: в отраженном свете или в проходящем?

Решение:

При наблюдении колец в отраженном свете интенсивность интерферирующих пучков примерно одинакова. В проходящем же свете интенсивность одного пучка, не испытавшего отражений, значительно превышает интенсивность второго пучка, испытавшего два отражения. В результате максимумы и минимумы возникнут на фоне равномерной освещенности, полного гашения света не произойдет и вся картина будет менее контрастной, чем в отраженном свете.

49. Контакт между плосковыпуклой линзой и стеклянной пластинкой, на которую она положена, отсутствует вследствие попадания пыли. Радиус пятого темного кольца Ньютона равен при этом $r_1 = 0,08$ *см*. Если пыль удалить, то радиус этого кольца увеличится до $r_2 = 0,1$ *см*. Найти толщину слоя пыли *d,* если радиус кривизны выпуклой поверхности линзы $R = 10$ *см*.

Решение:

При отсутствии контакта радиус пятого кольца определяется уравнением $\frac{r_1^2}{R} + 2d = 5\lambda$. Если пыль удалить, то радиус этого кольца определится равенством $\frac{r_1^2}{R} = 5\lambda$. Отсюда

$$d = \frac{\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{2R} = 1,8 \text{ мкм.}$$

50. Чтобы уменьшить коэффициент отражения света от оптических стекол, на их поверхность наносят тонкий слой прозрачного вещества, у которого показатель преломления n меньше, чем у стекла (так называемый метод просветления оптики). Определить толщину наносимого слоя, считая, что световые лучи падают на оптическое стекло приблизительно нормально.

Решение:

Для уменьшения коэффициента отражения необходимо, чтобы лучи *1* и *2* (рис.57), отраженные от внешней и внутренней поверхностей пленки, нанесенной на оптическое стекло, гасили друг друга.

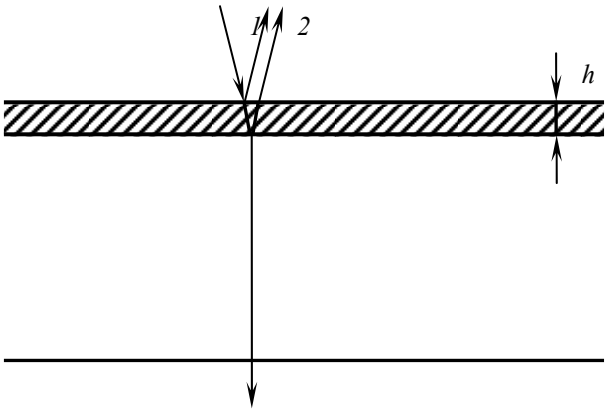

Рис. 57

Гашение будет иметь место при условии

$$2hn = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

где $k = 0, 1, 2...$ Отсюда минимальная толщина пленки $h_{\min} = \frac{\lambda}{4n}$.

Приведенное условие не может быть выполнено для всех длин волн. Поэтому обычно h выбирают так, чтобы гасилась средняя часть спектра. Наносимая пленка имеет толщину, превышающую $h_{\min}$ в нечетное число раз, так как более толстые пленки изготовить проще, чем топкие (в четверть длины волны).

51. Нормальный глаз способен различать оттенки в цвете при разности длин волн $\Delta\lambda = 10$ *нм*. Учитывая это, оценить максимальную толщину тонкого воздушного слоя, при которой можно наблюдать в белом свете интерференционную картину, вызванную наложением лучей, отраженных от границ этого слоя.

Решение:

Для наблюдения интерференционной картины необходимо, чтобы максимум *k*-го порядка, соответствующий длине волны *A*, не перекрывался с максимумом $(k+1)$-го порядка, соответствующим длине волны $\lambda + \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda = 10$ *нм*. Это будет иметь место при условии $(\lambda + \Delta\lambda)k \le \lambda(k+1)$. Отсюда $k \le \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}$.

Максимальная допустимая толщина прослойки $h_{\max}$ удовлетворяет уравнению

$$2h_{\max} = (\lambda + \Delta\lambda)k_{\max},$$

где $k_{\max} = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}$.

Если к качестве λ выбрать длину волны, соответствующую середине видимого участка спектра ($\lambda = 500$ *нм*), то $h_{\max} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ *см*.

Если вместо воздушной прослойки взять тонкую пленку, имеющую показатель преломления и, то максимальная толщина должна быть в *n* раз меньше, чем у воздушной прослойки.

52. На тонкий стеклянный клин от удаленного источника почти нормально падает поток монохроматических волн длины волны λ. На расстоянии *d* от клина расположен экран, на который линза с фокусным расстоянием *f* проецирует возникающую в клине интерференционную картину. Расстояние между интерференционными полосами на экране Δl известно. Найти угол α клина, если показатель преломления стекла равен *n*?

Решение:

При интерференции лучей *1* и *2* (рис.58), отраженных от различных граней клина, условие минимума запишется следующим образом: $2hn = k\lambda$ ($k = 0, 1, 2...$).

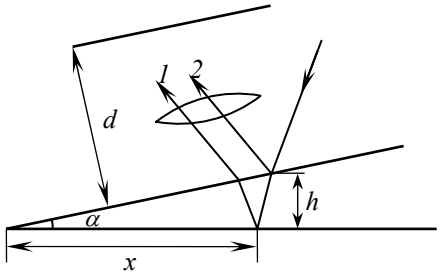

Рис. 58

Так как угол α мал, то $h = x\alpha$. Следовательно, расстояние между интерференционными полосами на самом клине $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2\alpha n}$.

Согласно формуле увеличения линзы,

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} = \frac{a}{b},$$

где a – расстояние от экрана до линзы, а b – от линзы до клина. Так как $b = d - a$, то по формуле линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a} = \frac{1}{f}.$$

Исключая из данных выражений a и b, найдем искомое значение угла α:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta l} \cdot \frac{d \mp \sqrt{d^2 - 4fd}}{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}.$$

Решение этой задачи не однозначно. Это связано с тем, что четкое изображение на экране при фиксированных d и f можно получить при двух положениях линзы.

53. Вычислить радиусы зон Френеля сферической волны радиуса a для точки B, отстоящей от источника монохроматических волн длины волны λ на расстояние $a + b$, учитывая, что $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$.

Решение:

Радиус первой зоны Френеля можно найти из треугольников ADE и DEB (рис.59):

$$r_1^2 = a^2 - (a-x)^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b+x)^2 .$$

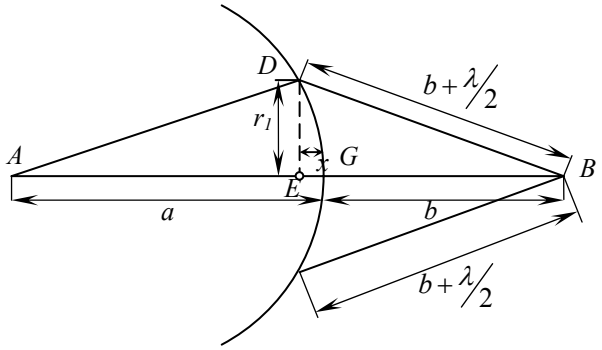

Рис. 59

Так как длина волны мала, то

$$x = \frac{b\lambda}{2(a+b)} .$$

Следовательно $r_1^2 = 2ax - x^2$. Пренебрегая малой величиной x^2, окончательно получим

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}} .$$

Аналогичным образом можно найти радиус последующих зон Френеля. Для зоны номер k

$$r_k = \sqrt{\frac{abk\lambda}{a+b}} .$$

54. Вычислить радиусы зон Френеля плоской волны для точки B, отстоящей от фронта волны на расстоянии $b \gg \lambda$, где λ – длина волны источника.

Решение:

Плоской волне соответствует расстояние от точечного ис-

точника до фронта волны $a \to \infty$. Искомые радиусы зон:

$$r_k = \lim_{a\to\infty}\sqrt{\frac{abk\lambda}{a+b}} = \sqrt{kb\lambda}\,.$$

55. Точечный источник монохроматического света длины волны $\lambda = 500$ *нм* находится на расстоянии $a = 6,75$ *м* от ширмы с отверстием диаметра $D = 4,5$ *мм*. На расстоянии $b = a$ от ширмы расположен экран (рис.60). Как изменится освещенность в точке *B* экрана, лежащей на оси пучка, если диаметр отверстия увеличить до значения $D' = 5,2$ *мм*?

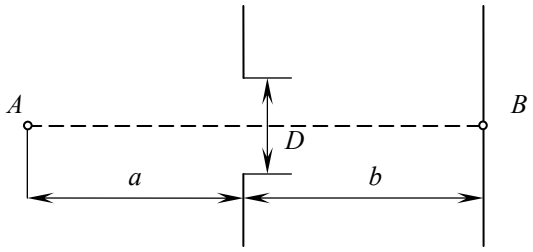

Рис. 60

Решение:

Для решения задачи необходимо подсчитать число *k* зон Френеля, укладывающихся в отверстиях диаметров *D* и *D'*. Используя результаты задачи 53, имеем $\sqrt{\frac{kab\lambda}{a+b}} = \frac{D}{2}$. Отсюда легко найти, что $k = 3$ (нечетное число). При диаметре отверстия 5,2 *мм* в нем укладывается приблизительно четыре зоны (четное число). Следовательно, увеличение отверстия приведет к уменьшению освещенности в точке *B*.

56. Как согласовать с законом сохранения энергии тот факт, что увеличение отверстия может привести к уменьшению освещенности на оси пучка? Ведь при увеличении отверстия полный световой поток, проникающий за ширму, возрастает.

Решение:

Темное пятно на оси пучка при открытых четырех зонах Френеля окружено светлыми и темными кольцами. Суммарная

освещенность экрана при увеличении отверстия возрастает, но распределение световой энергии по экрану меняется таким образом, что в центре будет минимум освещенности.

57. Плоская световая волна ($\lambda = 600$ *нм*) падает на ширму с круглой диафрагмой. На расстоянии $b = 2$ *м* за диафрагмой расположен экран. При каком диаметре диафрагмы освещенность экрана в точке *B,* лежащей на оси светового пучка, будет максимальна?

Решение:

Искомая освещенность будет максимальна в том случае, когда в диафрагме укладывается одна зона Френеля. Учитывая решение задачи 54, имеем $D = 2\sqrt{b\lambda} = 0,2$ *см*.

58. Считая расстояния от источника до ширмы и от ширмы до экрана примерно одинаковыми и равными *a*, оценить, при каких условиях дифракция световых волн длины λ на отверстии в ширме будет выражена достаточно отчетливо (интенсивность на оси пучка будет зависеть от диаметра отверстия).

Решение:

Дифракция будет заметна, если в отверстии укладывается небольшое число зон Френеля, т.е. радиус отверстия будет того же порядка (или меньше), что и радиус первой зоны Френеля:

$$\sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}} \geq R,$$

где *R* – радиус отверстия. При $a = b$ имеем $a\lambda \geq 2R^2$.

59. Показать, что за круглым экраном *C* в точке *B* (рис.61) будет наблюдаться светлое пятно, если размеры экрана достаточно малы.

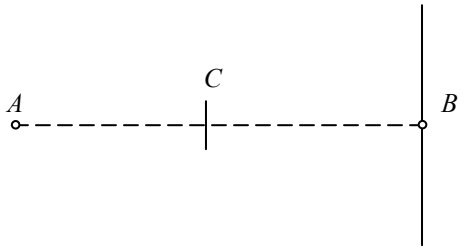

Рис. 61

Решение:

На рис. 62 построены зоны Френеля, позволяющие определить интенсивность света в точке *B*.

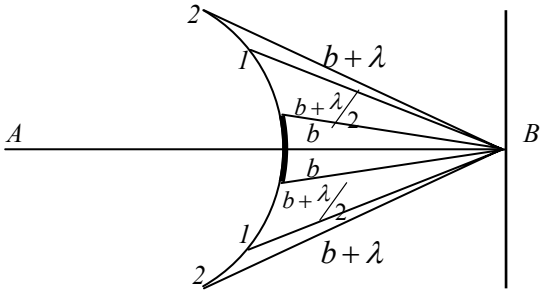

Рис. 62

Освещенность в точке *B* создается первой и последующими зонами Френеля. Если размеры экрана не превышают значительно радиуса первой центральной зоны, определяемого по формуле задачи 53, то в точке *B* обязательно возникает светлое пятно с освещенностью, мало отличающейся от той освещенности, которая имела бы место в отсутствие экрана.

60. Плоская световая волна (длина волны λ) падает Нормально на узкую щель ширины *b*. Определить направление на минимумы освещенности.

Решение:

Зоны Френеля в данном случае удобно выбрать в виде полосок, параллельных краям щели. В направлении φ будет наблюдаться минимум в том случае, если в щели *AB* (рис.63) укладывается четное число зон (на рис.63 изображены четыре зоны Френеля): $b = 2kx$, где x – ширина зоны Френеля, $k = 1, 2, 3...$

Расстояние AK представляет собой разность хода между крайними лучами, посылаемыми одной зоной:

$$AK = x\sin\varphi = \frac{\lambda}{2}.$$

Отсюда $x = \dfrac{\lambda}{2\sin\varphi}$. Следовательно, в направлении φ будет наблюдаться минимум, если $b\sin\varphi = k\lambda$.

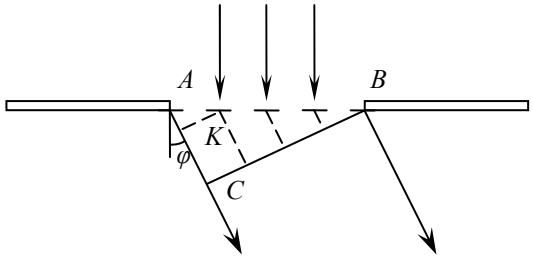

Рис. 63

61. Определить оптимальные размеры отверстия "дырочной камеры" в зависимости от длины волны, т.е. радиус отверстия r, при котором точечный источник изобразится на стенке камеры кружком минимального диаметра, если расстояние от источника света до камеры велико по сравнению с ее глубиной d. Направления на минимумы освещенности по порядку величины определяются той же формулой, что и в случае щели, только вместо ширины щели b нужно взять диаметр отверстия $2r$.

Решение:

Лучи, падающие на отверстие камеры от удаленного точечного источника, идут приблизительно параллельно. Если бы не было дифракции, то размеры светлого пятна были бы равны $AB = 2r$ (рис. 64).

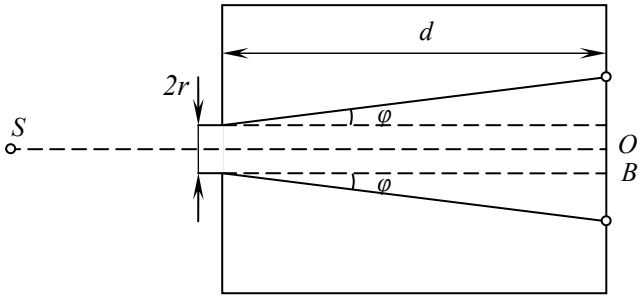

Рис. 64

Вследствие дифракции размеры пятна увеличатся до *DC*. Расстояние *OC* определяется углом φ, дающим направление на первый минимум (темное кольцо). Согласно указанию, $2r\sin\varphi \approx \lambda$. Следовательно, радиус пятна

$$OC = r + AC = r + d\sin\varphi \approx r + \frac{d\lambda}{2r}.$$

Эта величина достигает минимума при $\lambda = \frac{\lambda d}{2r}$. Оптимальные размеры отверстия $r = \sqrt{\frac{\lambda d}{2}}$.

62. На дифракционную решетку, имеющую период $d = 4$ *мкм*, нормально падает монохроматическая волна. Оценить длину волны λ, если угол между спектрами второго и третьего порядка $\alpha = 2°30'$. Углы отклонения считать малыми.

Решение:

Углы, определяющие направление на максимумы второго и третьего порядков, удовлетворяют уравнениям

$$d\sin\varphi_2 = 2\lambda,$$

$$d\sin\varphi_3 = 3\lambda.$$

Отсюда

$$\lambda = d\left(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_2\right) = 2d\cos\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2} \approx$$
$$\approx d\left(\varphi_3 - \varphi_2\right) = d\alpha \approx 0{,}17 \text{ мкм.}$$

63. На дифракционную решетку, имеющую период $d = 4\cdot 10^{-4}$ *см*, падает нормально монохроматическая волна. За решеткой расположена линза, имеющая фокус-расстояние $f = 40$ *см*, которая дает изображение дифракционной картины на экране. Определить длину волны λ, если первый максимум получается на расстоянии $l = 5$ *см* от центрального.

Решение:

Направление на первый максимум определяется выражением $d\sin\varphi = \lambda$. Экран расположен в фокальной плоскости линзы. Считая угол φ малым, $l = f\varphi$. Отсюда $\lambda = \dfrac{dl}{f} = 5\cdot 10^{-5}$ *см*.

64. Источник белого света, дифракционная решет и экран помещены в воду. Какие изменения претерпит при этом дифракционная картина, если углы отклонения световых лучей решеткой малы?

Решение:

В воде длина всех волн уменьшается в *n* раз (*n* – показатель преломления воды). Следовательно, углы φ, определяющие направления на максимумы, и расстояния от центра дифракционной картины до максимумов, соответствующих различным длинам волн, также уменьшатся в *n* раз, так как по условию углы φ малы и $\sin\varphi \approx \varphi$.

65. На дифракционную решетку, имеющую период $d = 2$ *мкм*, падает нормально свет, пропущенный сквозь светофильтр. Фильтр пропускает длины волн от $\lambda_1 = 500$ *нм* до $\lambda_2 = 600$ *нм*. Будут ли спектры разных порядков перекрываться друг другом?

Решение:

Спектры разных порядков будут соприкасаться при условии $k\lambda_2 = (k+1)\lambda_1$. Отсюда $k = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 5$. Следовательно, частично перекрываться могут только спектры шестого и седьмого порядков. Но данная решетка может дать для данного интервала длин волн спектр только четвертого порядка. Поэтому спектры в нашем случае перекрываться не будут.

66. На дифракционную решетку, имеющую 500 штрихов на миллиметр, падает плоская монохроматическая волна ($\lambda = 500$ *нм*). Определить наибольший порядок спектра *k*, который можно наблюдать при падении луча на решетку под углом 30°.

Решение:

При наклонном падении лучей на решетку под углом θ (рис. 65) разность хода между волнами, идущими от краев соседних щелей,

$$\delta = BD - AC = d\sin\varphi - d\sin\theta .$$

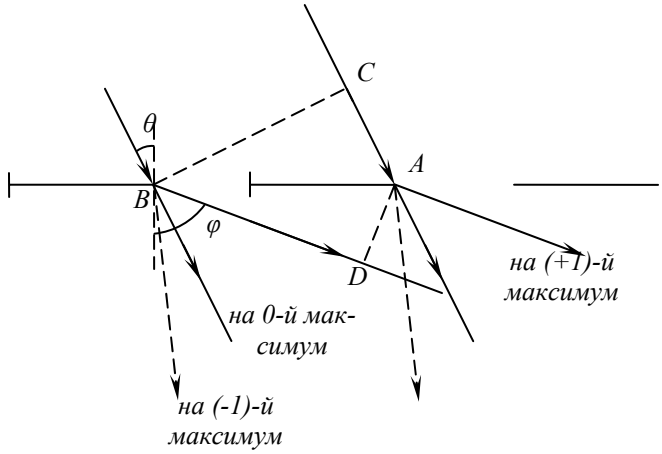

Рис. 65

Эти волны, складываясь, усиливают друг друга при

$$d(\sin\varphi - \sin\theta) = k\lambda ,$$

где $k = 1, 2, 3...$ для максимумов, лежащих правее центрального ($k = 0$), и $k = -1, -2, -3...$ для максимумов, лежащих левее центрального.

Наибольший порядок спектра будет при $\varphi = -90°$. Тогда $d\left(-1 - \frac{1}{2}\right) = k\lambda$. Отсюда $k = -6$. Может наблюдаться спектр шестого порядка. Знак минус указывает на то, что спектр лежит левее центрального.

67. Определить период d решетки, способной анализировать инфракрасное излучение с длинами волн до $\lambda = 0,02$ *см.* Падение лучей на решетку наклонное.

Решение:

Как вытекает из формулы $d\left(\sin\varphi - \sin\theta\right) = k\lambda$, минимальное значение периода решетки будет при скользящем падении лучей: $\theta = 90°$. В этом случае $d = \frac{\lambda}{2}$. Следовательно, период решетки должен удовлетворять неравенству $d \geq \frac{\lambda}{2}$.

68. Найти условие, определяющее направление главные максимумы при наклонном падении световых волн на решетку, если период решетки $d \gg k\lambda$ (k – порядок спектра).

Решение:

В общем случае, как показано в решении задачи 66, искомое условие имеет вид

$$d\left(\sin\varphi - \sin\theta\right) = k\lambda .$$

Его можно переписать в форме

$$2d\cos\frac{\varphi + \theta}{2} \cdot \sin\frac{\varphi - \theta}{2} = k\lambda .$$

Если $d \gg k\lambda$, то $\varphi \approx \theta$. При этом

$$\cos\frac{\varphi+\theta}{2}\approx\cos\theta,\ \sin\frac{\varphi-\theta}{2}\approx\frac{\varphi-\theta}{2}.$$

Следовательно, условие, определяющее направление на главные максимумы, примет вид

$$(d\cos\theta)(\varphi-\theta)=k\lambda.$$

Постоянная решетки как бы уменьшилась и стала равной $d\cos\theta$ вместо *d*. Углы $\varphi-\theta$ отсчитываются от направления падающего света.

69. Луч белого света падает под углом $\alpha=30°$ на призму, преломляющий угол которой $\varphi=45°$. Определить угол θ между крайними лучами спектра по выходе из призмы, если показатель преломления стекла призмы для крайних лучей видимого спектра равен $n_k=1,62$ и $n_ф=1,67$.

Решение:

Угол падения α, преломляющий угол призмы φ, и показатель преломления *n* связаны с углом β под которым луч выходит из призмы, выражением

$$n=\sin\beta\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\varphi}+\mathrm{ctg}\varphi\right)^2+1}.$$

Отсюда для $\sin\beta$ получаем следующее уравнение:

$$\sin^2\beta\left(1+\mathrm{ctg}^2\varphi\right)+2\sin\beta\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi\mathrm{tg}\varphi}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\varphi}-n^2=0,$$

или (при данных значениях α и φ)

$$2\sin^2\beta+\sqrt{2}\sin\beta+{}^1\!/_2-n^2=0.$$

Решая это уравнение, найдем

$$\sin\beta=\frac{\left(-1\pm\sqrt{4n^2-1}\right)}{2\sqrt{2}}.$$

Физический смысл имеет решение со знаком плюс. Для красных лучей $\sin\beta_k\approx0,26$. Следовательно, $\beta_k=15°6'$. Для

фиолетовых лучей $\sin\beta_ф \approx 0,31$ и $\beta_ф \approx 18°6'$. Искомый угол $\theta = \beta_ф - \beta_к \approx 3°$.

70. На двояковыпуклую линзу, радиусы кривизны поверхностей которой равны $R_1 = R_2 = 40$ *см*, падает белый свет от точечного источника, расположенного на оптической оси линзы на расстоянии $a = 50$ *см* от нее. Вплотную перед линзой расположена диафрагма диаметра $D = 1$ *см*, ограничивающая поперечное сечение светового пучка. Показатель преломления для крайних лучей видимого спектра равен $n_k = 1,74$ и $n_ф = 1,8$. Какую картину можно будет наблюдать на экране, расположенном на расстоянии $b = 50$ *см* от линзы перпендикулярно ее оптической оси?

Решение:

Для красных лучей фокусное расстояние линзы $f_к = \dfrac{R}{2(n_к - 1)} \approx 27$ *см*, для фиолетовых $f_к = 25$ *см*. По формуле линзы изображение, даваемое красными лучами, будет расположено на расстоянии $b_к = \dfrac{af_к}{a - f_к} = 58,7$ *см*, фиолетовыми – на расстоянии $b_ф = 50$ *см*.

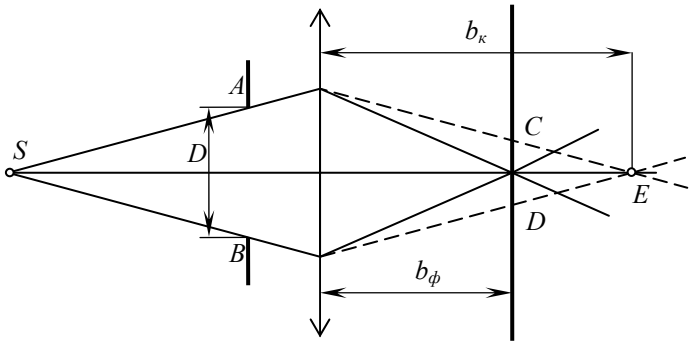

Рис. 66

На экране (рис. 66) изображение источника будет иметь форму пятна, края которого окрашены в красный цвет. Диаметр пятна d можно найти из подобия треугольников ABE и CDE:

$$d = \frac{D\left(b_к - b_ф\right)}{b_к} \approx 0{,}15\,см\,.$$

71. Показать, что центр радуги находится на прямой, проведенной от Солнца через глаз наблюдателя, и что дуга радуги представляет собой часть окружности, все точки которой видны под углом 42° (для красного света) по отношению к прямой, соединяющей глаз наблюдателя и центр радуги.

Решение:

Солнечные лучи, падающие на капли дождя, можно считать параллельными. По выходе из капли после однократного отражения на внутренней поверхности капли лучи расходятся по всем направлениям. Лишь лучи, испытавшие наименьшее отклонение, идут приблизительно параллельно. Поэтому именно эти лучи, попадая в глаз, вызовут наибольшее зрительное впечатление. Эти лучи идут, так сказать, с наибольшей "плотностью". Остальные лучи рассеиваются во все стороны. Для параллельных лучей угол отклонения равен 138°. Следовательно, угол между падающими от Солнца лучами и направлением на радугу составляет 42° (для красного света) (рис.67).

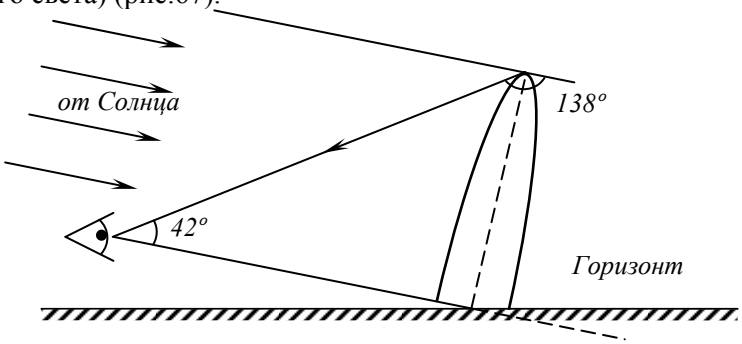

Рис. 67

В глаз попадает свет от тех капель, которые находятся в направлении, составляющем угол 42° с линией, проведенной через

глаз и Солнце. Для фиолетовых лучей этот угол составляет примерно 40°.

72. Объяснить качественно причины появления двойной радуги. Каково чередование цветов в первой (основной) и второй радуге?

Решение:

Первая (основная) радуга наблюдается – благодаря лучам, испытавшим одно отражение внутри капелек воды. При преломлении наиболее сильно отклоняются от первоначального направления фиолетовые лучи, поэтому внешняя дуга будет красной, а внутренняя – фиолетовой. Вторая радуга вызвана лучами, испытавшими два отражения внутри капелек. Примерный ход луча изображен на рис.68.

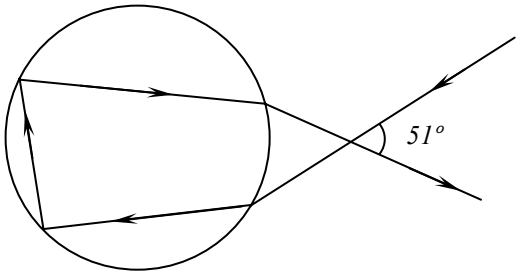

Рис. 68

Направление на радугу составляет, как можно показать, 51° с линией, соединяющей глаз и Солнце. Чередование цветов при двух преломлениях и двух отражениях получается обратным: внешняя дуга будет фиолетовой, а внутренняя – красном. После двух отражений интенсивность света оказывается сильно ослабленной, вследствие чего вторая радуга бывает гораздо менее яркой, чем первая.

73. Можно ли в Москве во время летнего солнцестояния (22 июня) наблюдать радугу в полдень? (В это время Солнце в северном полушарии стоит наиболее высоко над горизонтом.)

Решение:

Географическая широта Москвы, т.е. угол между плоскостью экватора и нормалью к поверхности земного шара, $\varphi = 56°$ Солнце в этот момент стоит в зените над северным тропиком (широта $\alpha = 23,5°$). Следовательно, угол между направлением на Солнце и горизонтом (рис. 69)

$$\beta = 90' - \varphi + \alpha = 57°30'.$$

Радуга же может быть видна только в том случае, когда высота солнца над горизонтом не превышает 42° (см. рис.67). Следовательно, наблюдать радугу в указанное время нельзя.

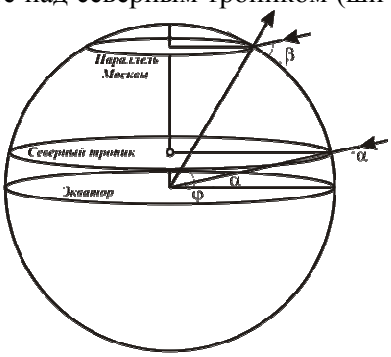

Рис. 69

74. Длина волны в воде уменьшается в *n* раз, где *n* – показатель преломления. Означает ли это, что ныряльщик не может видеть окружающие тела в естественном цвете?

Решение:

Наш глаз получает ощущение того или иного цвета, когда его чувствительные элементы раздражаются световой волной определенной частоты. Частота же световых волн не меняется при переходе из одной среды в другую.

75. На тетради написаны красным карандашом "отлично" и зеленым "хорошо". Имеются два стекла – зеленое и красное. Через какое стекло надо смотреть, чтобы увидеть оценку "отлично"?

Решение:

Необходимо смотреть через зеленое стекло. При этом надпись будет видна черной на зеленом фоне бумаги, так как красный свет надписи "отлично" не пропускается зеленым стеклом. При рассматривании через красное стекло красная надпись не будет видна на красном фоне бумаги.

76. Почему объективы с "просветленной оптикой" пурпурно-фиолетовый (сиреневый) оттенок?

Решение:

Объектив преимущественно отражает крайние части видимого спектра: красную и фиолетовую. От смешения этих цветов возникает сиреневый оттенок.

77. Цвета тонких пленок (например, пленки нефти на воде) и цвета радуги имеют совершенно различные оттенки. Почему?

Решение:

Цвета радуги являются чистыми спектральными цветами, так как по данному направлению виден лишь луч вполне определенной длины волны. Цвета тонких пленок, наоборот, получаются из-за гашения (полного или частичного) лучей некоторого спектрального интервала в результате интерференции. Цвет пленки будет дополнительным к цвету этого спектрального интервала.

78. Тонкая мыльная пленка натянута на вертикальную рамку. При освещении белым светом на пленке наблюдаются три цветные полосы: пурпурного (малинового), желтого и голубого (сине-зеленого) цветов. Найти расположение и порядок полос.

Решение:

Под действием силы тяжести мыльная вода стекает в нижнюю часть пленки, которая всегда толще, чем верхняя. Следовательно, полосы, которые указывают геометрическое место точек одинаковой толщины, должны быть расположены горизонтально. Голубой (сине-зеленый) оттенок получается при исключении из полного спектра его длинноволновой (красно-оранжевой) части. При гашении средней (зеленой) части спектра оставшиеся лучи придают пленке пурпурный (малиновый) оттенок, а при вычитании из сплошного спектра его коротковолновой (сине-фиолетовой) части пленка выглядит желтой. Если разность хода взаимно гасящихся лучей составляет одно и то же число полуволн во всех трех случаях, то вверху должна быть желтая полоса, затем пурпурная и внизу голубая.

79. Почему днем Луна имеет чистый белый цвет, а после захода Солнца принимает желтоватый оттенок?

Решение:

Днем рассеянный небом голубой свет добавляется к желтоватому свету самой Луны. Это смешение цветов воспринимается глазом как белый цвет. После захода Солнца голубой свет неба ослабевает, и Луна принимает желтоватый оттенок.

80. Почему столб дыма, поднимающегося над крышами домов, на темном фоне окружающих предметов кажется синим, а на фоне светлого неба – желтым или даже красноватым?

Решение:

На темном фоне мы видим дым вследствие того, что он рассеивает падающие на него сверху солнечные лучи. Частицы дыма рассеивают синий свет гораздо сильнее, чем красный или желтый. Поэтому цвет дыма кажется синим.

На фоне светлого неба дым виден в проходящем свете. Дым кажется желтоватым, так как синий свет рассеивается во все стороны и только длинноволновой участок спектра белого света достигает глаз.

81. Почему цвета влажных предметов кажутся более глубокими, более насыщенными, чем сухих?

Решение:

Тонкая пленка воды, покрывающая влажный предмет, отражает падающий белый свет по одному определенному направлению. Поверхность предмета уже не рассеивает белый свет во все стороны, и господствующим становится его собственный цвет. Рассеянный свет не налагается на отраженный от предмета, и поэтому цвет кажется более насыщенным.

82. С помощью принципа Гюйгенса-Френеля докажите, что при падении плоской волны на границу раздела сред

1) угол падения равен углу отражения;

2) отношение угла падения к синусу угла преломления равно относительному показателю преломления.

Решение:

Пусть угол падения лучей равен α (рис.70).

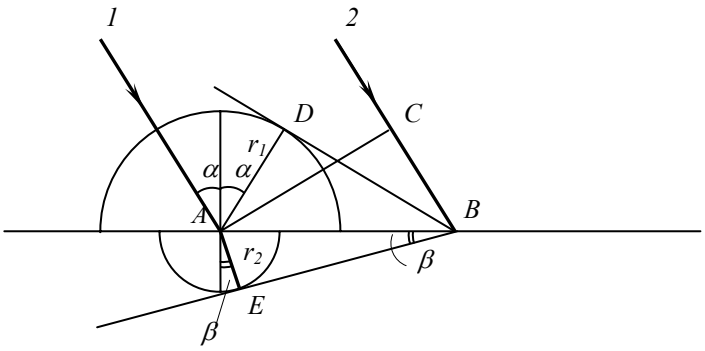

Рис. 70

Точка *A* является источником вторичных волн. За промежуток времени Δt фронт волны в среде *1* будет иметь форму сферы радиуса $r_1 = \upsilon_1 \Delta t$, а в среде *2* – $r_2 = \upsilon_2 \Delta t$. За это время луч *2* только дойдет до границы раздела в точке *B*. Из точки *B* проведем касательные к фронтам волны в первой и второй средах *BD* и *BE*. Очевидно, что *BD* даст положение фронта отраженной волны, а *BE* – положение фронта преломленной волны, причем

$$AD = CB = \upsilon_1 \Delta t,$$

откуда ΔADB равен ΔACB. Следовательно, угол *CBA* равен углу *DAB* и угол между нормалью и отраженным лучом *1* равен углу падения α.

Из ΔAEB (угол *AEB* прямой) следует, что сторона *AB* равна

$$AB = \frac{AE}{\sin\beta} = \frac{\upsilon_2 \Delta t}{\sin\beta}.$$

Из ΔACB следует, что

$$AB = \frac{CB}{\sin\alpha} = \frac{\upsilon_1 \Delta t}{\sin\alpha}.$$

Приравняв эти выражения для *AB*, получим

$$\frac{\upsilon_2 \Delta t}{\sin\beta} = \frac{\upsilon_1 \Delta t}{\sin\alpha},$$

откуда

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = n,$$

где n относительный показатель преломления.

83. В некоторую точку пространства приходит излучение с оптической разностью хода волн 1,8 *мкм*. Определить, усилится или ослабеет свет в этой точке с длиной волны 1) 600 *нм*; 2) 400 *нм*.

Решение:

Максимум или минимум интерференционной картины зависит от числа полуволн, укладывающихся на разности хода. Для λ_1 и λ_2 получим

$$\frac{\Delta}{\lambda_1} = \frac{1{,}8\cdot 10^{-6}}{6\cdot 10^{-7}} = 3,$$

$$\frac{\Delta}{\lambda_2} = \frac{1{,}8\cdot 10^{-6}}{4\cdot 10^{-7}} = 4{,}5,$$

т. е. для излучения с длинной волны 600 *нм* в этой точке будет наблюдаться усиление света, а для излучения с длинной волны 400 *нм*, для которого разность хода составляет нечетное число полуволн, будет наблюдаться ослабление света.

84. Падая на две щели, расположенные на расстоянии 0,0026 *мм* друг от друга, монохроматический свет образует полосу четвертого порядка под углом $\varphi = 6{,}4°$. Чему равна длина волны падающего света.

Решение:

Две щели можно рассматривать как когерентные источники (рис.71). Разность хода лучей, идущих от них, равна

$$\Delta = d\sin\varphi.$$

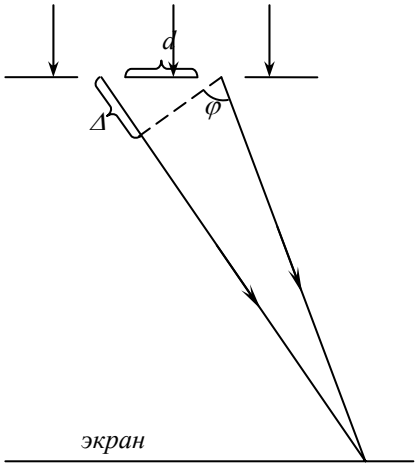

Рис. 71

Условие наблюдения интерференционного максимума

$$\Delta = \pm n\lambda ,$$

следовательно, $d\sin\varphi = \pm n\lambda$. По условию задачи $n = 4$, отсюда

$$d\sin\varphi = 4\lambda .$$

Окончательно имеем

$$\lambda = \frac{d}{4}\sin\varphi ,$$

$$\lambda = \frac{2,6\cdot 10^{-6}\cdot \sin 6,4^\circ}{4} = \frac{2,6\cdot 10^{-6}\cdot 0,11}{4} = 7,15\cdot 10^{-7}\ м.$$

85. Как изменится длина волны при нормальном падении света на границу раздела сред воздух-стекло? Показатель преломления стекла *n*, длина волны в воздухе λ_0 .

Решение:

Частота колебаний при распространении электромагнитной волны во всех средах одинакова. Скорость распространения волны зависит от показателя преломления среды.

$$\upsilon = \frac{c}{n}.$$

Длина волны равна

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Следовательно, при переходе, в оптически более плотную среду длина волны уменьшается в *n* раз.

86. Период дифракционной решетки 3 *мкм*. Найдите наибольший порядок спектра для желтого света (длина волны 580 *нм*).

Решение:

Запишем формулу дифракционной решетки:

$$d \sin\varphi = n\lambda.$$

Очевидно, что максимальный порядок спектра $n_{\max}$ достигается при максимальном значении $\sin\varphi$. Положим $\sin\varphi \sim 1$, тогда

$$d = n\lambda,\ n_{\max} = \frac{d}{\lambda} < 6,\ n_{\max} = 5.$$

87. Спектр получен с помощью дифракционной решетки с периодом 22 *мкм*. Дифракционное изображение второго порядка находится на расстоянии 5 *см* от центрального и на расстоянии 1 *м* от решетки. Определить длину световой волны. Наблюдение ведется без линзы.

Решение:

Используем формулу дифракционной решетки

$$d \sin\varphi = n\lambda.$$

Так как $x \ll L$, угол φ мал (рис.72), поэтому можно считать $\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi \approx \frac{x}{L}$.

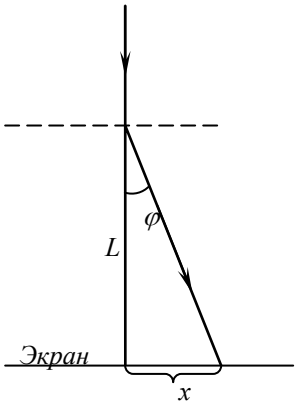

Рис. 72

Тогда

$$\frac{d \cdot x}{L} = n\lambda ,$$

$$\lambda = \frac{d \cdot x}{n \cdot L} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 1} = 5{,}5 \cdot 10^{-7} \ м.$$

88. В опыте Юнга расстояние между двумя щелями S_1 и S_2 равно *d*, а расстояние от щели до экрана равно *L* ($d \ll L$) (рис.73). Найти расстояние *x* до первого интерференционного максимума.

Решение:

Опыт Юнга подтвердил волновую природу света. Свет от источника (параллельные лучи) проходит через щель *S*, а затем падает на непрозрачный экран, в котором прорезаны две щели S_1 и S_2, параллельные *S* и находящиеся на малом расстоянии друг от друга. На экране наблюдается интерференционная картина в виде чередующихся ярких линий.

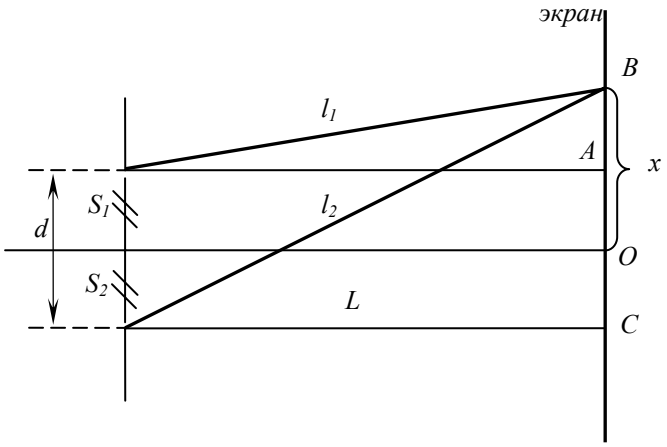

Рис. 73

Точка *O*, равноудалена от щелей S_1 и S_2, является центральным максимумом. Определим оптическую разность хода лучей S_1B и S_2B, равную $\Delta = l_2 - l_1$. Из ΔS_1AB имеем

$$l_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,$$

из ΔS_2BC

$$l_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2,$$

следовательно,

$$l_1^2 - l_2^2 = 2x \cdot d \text{, или } \left(l_1 + l_2\right)\left(l_1 - l_2\right) = 2x \cdot d .$$

Поскольку

$$l_1 + l_2 \approx 2L ,$$

$$\Delta = \frac{x \cdot d}{L} .$$

Для первого максимума можно записать

$$\Delta = n\lambda = \lambda \text{, или } \frac{x \cdot d}{L} = \lambda ,$$

$$x = \frac{\lambda \cdot L}{d} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Антошина, Л. Г. Общая физика: Сборник задач: Учеб. пособие / Л. Г. Антошина, С. В. Павлов, Л. А. Скипетрова; Под ред. Б. А. Струкова.– М.: ИНФРА-М, 2008. – 336 с.

2. Буховцев, Б. Б. Сборник задач по элементарной физике: Пособие для самообразования / Б. Б. Буховцев, В. Д. Кривченков, Г. Я. Мякишев. – 7-е изд., испр. – М.: УНЦ ДО, 2004. – 448 с.

3. Гинзбург, В. Л. Сборник задач по общему курсу физики: В 5 кн. Кн. IV. Оптика / В. Л. Гинзбург, Л. М. Левин, М. С. Рабинович, Д. В. Сивухин и др.; Под ред. Д. В. Сивухина. – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит; Лань, 2006. – 272 с.

4. Егорова, Л. Н. Оптика: Учеб. пособие / Л. Н. Егорова.– Саратов: Лицей, 2003. – 128 с.

5. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – 3-е изд.– М.: Бином, Владис, 2002. – 448 с.

6. Ландсберг, Г. С. Оптика / Г. С. Ландсберг. – 6-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 848 с.

7. Огурцов, А. Н. Лекции по физике: Оптика /А. Н. Огурцов. – http: //kart.edu.ua/books/ln/index.html

8. Парфентьева, Н. А. Решение задач по физике. В помощь поступающим в вузы: В 2 ч. / Н. А. Парфентьева, М. В. Фомина. – М.: Мир, 1993. – Ч. 2.– 206 с.

9. Родионов, С. А. Основы оптики: Конспект лекций / С. А. Родионов. – СПб.: СПб ГИТМО (ТУ), 2000. – 167 с.

10. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: В 5 т. Т. IV. Оптика / Д. В. Сивухин.– 3-е изд., стер.– М.: Физматлит, МФТИ, 2006. – 792 с.

Учебное издание

ФИЗИКА

ОПТИКА

Учебное пособие
В двух частях
Часть 2
ВОЛНОВАЯ ОПТИКА
Издание второе, переработанное и дополненное
Авторы-составители
ПАРАМОНОВ Андрей Викторович,
НИКОЛЬСКАЯ Людмила Владимировна,
КЛЕПИНИНА Ирина Анатольевна,
ЕРМОЛОВ Алексей Викторович

Печатается в авторской редакции.
Художественное оформление – Е. А. Свиридова.
Подписано в печать 28.03.2013 г. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 6,9. Тираж 50 экз. Заказ 13/027-2. «С» 1487.

Издательство Тульского государственного педагогического университета
им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в Издательском центре ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.