теория ошибок и способ наименьших квадратов

теория ошибок и способ наименьших квадратов

М.Г.ПАПАЗОВ, С.Г.МОГИЛЬНЫЙ

М. Г. ПАПАЗОВ, С. Г. МОГИЛЬНЫЙ

ТЕОРИЯ ОШИБОК И СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности „Маркшейдерское дело"

Издательство „Недра"
Москва 1968

УДК 528.1 : 622.1 (075)

Теория ошибок и способ наименьших квадратов.
Папазов М. Г., Могильный С. Г.
«Недра», 1968 г., стр. 302.

В книге изложены общие сведения об измерениях и ошибках измерений, приведена краткая история развития теории ошибок и способа наименьших квадратов.

Изложены свойства случайных ошибок, закон накопления погрешностей, обработка рядов равноточных и неравноточных измерений. Описаны принципы наименьших квадратов и наибольшего веса.

Изложены вопросы приложения теории вероятностей к анализу ошибок измерений, доказана возможность и целесообразность применения матриц в теории способа наименьших квадратов.

Книга предназначена в качестве учебника для студентов маркшейдерской специальности горных вузов.

Табл. 51, рис. 31, библиогр. 16

Рецензенты: кафедра маркшейдерского дела Ленинградского горного института им. Г. В. Плеханова и доц. В. И. Акулов (Кузбасский политехнический институт).

3-7-2
125-68

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник составлен в соответствии с программой курса для студентов маркшейдерской специальности горных вузов и факультетов и состоит из четырех частей:

1. Теория ошибок измерений.
2. Способ наименьших квадратов.
3. Приложение теории вероятностей к теории случайных ошибок.
4. Применение аппарата линейной алгебры в теории способа наименьших квадратов.

Первые две части написаны с полнотой, необходимой для изучения студентами специального курса маркшейдерского дела, высшей геодезии, а также в практической деятельности инженера-маркшейдера. В третьей части приведены краткие сведения о приложении теории вероятностей к ошибкам измерений, в четвертой — сведения по уравновешиванию и оценке точности с применением матриц.

При изложении отдельных вопросов авторы использовали известные курсы по теории ошибок и способу наименьших квадратов профессоров И. М. Баумана, А. С. Чеботарева, П. И. Шилова, Н. И. Идельсона, В. А. Романова и других.

Часть первая, вторая и третья учебника написаны канд. техн. наук М. Г. Папазовым, часть четвертая и §§ 37, 48 и 53 — канд. техн. наук С. Г. Могильным.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам: проф. Д. А. Казаковскому, доц. А. А. Гуричу и доц. В. И. Акулову, а также доц. А. И. Осецкому, доц. Н. Д. Ипполитову, доц. Т. А. Бую, сотрудникам кафедры маркшейдерского дела Донецкого политехнического института и проф. Д. Н. Оглоблину за ценные замечания, указания и советы, способствовавшие улучшению содержания учебника.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Общие представления об измерениях

Измерительные действия в практике маркшейдера дают возможность изучать количественную сторону явлений и процессов, происходящих в горном деле. Изучая количественную сторону явления или процесса, производят измерение и счет. Счет является составной частью измерительного процесса и производится тогда, когда величина измеряемого объекта больше принятой единицы измерения.

Под измерением какой-либо величины понимается процесс сравнения ее с другой однородной с ней величиной, принятой за единицу измерения. В результате измерения получается отвлеченное число, показывающее, во сколько раз измеряемая величина больше или меньше единицы измерения.

Измерительный процесс может быть выражен математически в виде равенства

$$l = MN, \qquad (1,1)$$

где l — измеряемая величина;

M — единица измерения;

N — отвлеченное число, получаемое в результате измерения.

Примером может служить измерение длины стороны подземного теодолитного хода стальной рулеткой.

В связи с тем, что измеряемая величина и единица измерения почти всегда являются величинами несоизмеримыми, это приводит к необходимости определять некоторые доли единицы измерения, что при самом тщательном исполнении и при самых совершенных инструментах неизбежно сопровождается ошибками.

Любые измерения выполняются при наличии и взаимодействии следующих элементов, участвующих в процессе измерений:

1) объект измерения;
2) наблюдатель, выполняющий измерения;
3) инструменты, при помощи которых выполняются измерения;
4) внешняя среда, в которой производятся измерения.

Совокупность всех перечисленных факторов в их конкретном содержании при выполнении измерений называется у с л о в и я м и и з м е р е н и й.

При производстве измерений должны удовлетворяться следующие требования:

1. Величина единицы измерения должна быть известна с достаточной степенью точности и в процессе измерений должна оставаться неизменной. Это осуществляется в результате сравнения единиц измерения с нормальной мерой до и после измерения.

2. Величина объекта во время измерения должна быть практически неизменной.

Условия измерений являются источниками появления ошибок. Только тщательное изучение условий измерений может дать достаточно полную качественную характеристику результатов измерений.

Главным образом ошибки измерений происходят от несовершенства органов чувств наблюдателя, от недостатков измерительных приборов и под влиянием внешней среды.

Результаты измерений, имеющиеся в большом количестве в различных областях науки и техники, свидетельствуют о том, что почти никогда невозможно получить истинное значение измеряемой величины.

Исследование результатов непосредственных измерений показывает, что они тождественными между собой не бывают, а несколько отличаются друг от друга. Это свидетельствует о том, что результаты измерений отличаются от истинного значения измеряемой величины и содержат ошибки. Тождественность двух результатов измерений одной и той же величины говорит либо о простой случайности, либо указывает на то, что единицы, в которых выражены результаты измерений, превосходят своей величиной погрешность измерений.

Говоря о точном или истинном значении измеряемого объекта, предполагают, что, хотя абсолютно неизменных объектов измерения в природе нет, всегда можно найти такой промежуток времени, в течение которого размеры измеряемого объекта практически можно считать неизменными в течение всего процесса измерения. Такой практически неизменный в течение определенного промежутка времени размер измеряемого объекта называют т о ч н ы м или и с т и н н ы м значением этого объекта.

Для одних объектов промежуток времени их неизменности очень длителен, для других — короток. Так, например, можно считать практически неизменным расстояние между хорошо закрепленными на земной поверхности пунктами, разность отметок таких пунктов, угол между закрепленными на поверхности земли направлениями и т. д. Наряду с этим в практике маркшейдерского дела и геодезии встречаются случаи, когда приходится измерять объект, быстро изменяющийся во времени, например магнитный азимут при производстве магнитной ориентировки, зенитное расстояние или азимут звезды и др.

Обозначив истинное значение какой-либо измеряемой величины через L, а измеренное значение этой величины через l, их разность

$$l-L=\Delta \tag{1,2}$$

назовем истинной ошибкой измерения.

Вследствие накопления неизбежных ошибок измерений получаются несогласия практических данных с действительными соотношениями между истинными значениями измеряемых величин. Эти несогласия называются невязками. Чем более совершенные инструменты применяются при измерениях, искуснее наблюдатель, тщательнее производятся сами измерения и более благоприятны внешние условия, тем меньшие ошибки будут содержать результаты измерений.

Перед инженером-маркшейдером прежде всего встает вопрос: с какой же степенью точности следует измерять ту или другую величину? Очевидно, что увеличение точности измерений сопряжено с большой затратой труда и применением более точных и дорогостоящих инструментов; недостаточная точность измерений может привести к большим материальным убыткам и даже к нарушению технологического процесса горного предприятия.

Таким образом, точность измерений в практике маркшейдерского дела в конечном счете должна определяться той точностью, которая требуется для решения практических вопросов горного дела. Требуемая точность измерений определяет характер необходимых инструментов и методику измерения ими.

§ 2. Виды измерений

В практике маркшейдерского дела все измерения в зависимости от способа получения значений измеряемых величин и от наличия соотношения между их истинными значениями можно разделить на следующие виды: прямые, или непосредственные; косвенные, или посредственные; связанные условиями и не связанные условиями.

В зависимости от возникновения ошибок измерения можно разделить на независимые и зависимые, равноточные и неравноточные.

Прямыми (непосредственными) измерениями называются такие, при которых искомый результат получается из непосредственного сравнения измеряемой величины с единицей измерения. Примерами таких измерений являются: определение направления по лимбу теодолита, измерение температуры воздуха термометром, определение расстояния от пикета до визирной оси нивелира и т. д.

Косвенными (посредственными) измерениями называются такие, при которых непосредственному измерению подвергаются не те величины, которые отыскиваются, а некоторые другие, связанные с искомыми определенной функциональной зависимостью. Примером таких измерений может служить определение превышения между двумя реперами в наклонной выработке тригонометрическим путем при котором непосредственно измеряются наклонная длина l, угол ее наклона δ, высота инструмента и сигнала i и v, а само превышение вычисляется по известной формуле

$$h = l \sin \delta + i - v.$$

Связанные условиями — это измерения, для которых заранее известно, что их истинные значения должны удовлетворять определенным теоретическим условиям. Так, например, сумма углов в плоском треугольнике должна быть равна 180°, сумма превышений замкнутого нивелирного хода должна быть равна нулю и т. д.

Не связанные условиями — это измерения, для которых нет заранее известных теоретических условий.

Независимыми измерениями называются такие, у которых ошибки одного измерения не влияют на ошибки другого измерения. Например, при измерении направлений на станции ошибки одного направления не влияют на ошибки другого направления.

Зависимыми измерениями называются такие, при которых ошибки одного измерения связаны с ошибками другого измерения. Смежные углы, полученные как разность направлений, имеют связанные ошибки, так как в ошибку одного и другого угла входит одна и та же ошибка общего для них направления.

Равноточными измерениями называются такие, при выполнении которых совокупность условий, приводящих к тем или иным ошибкам, во время наблюдений не изменяется, т. е. измерения производятся в условиях, позволяющих считать все результаты одинаково надежными. Это обычно соблюдается, если измерения производятся одними и теми же инструментами, наблюдателями одинаковой квалификации и при одинаковых внешних условиях. Примером может служить измерение горизонтальных углов теодолитом в прямолинейной горной выработке с равными сторонами хода.

Неравноточными измерениями называются отдельные измерения или результаты ряда отдельных измерений (рассматриваемые как одно целое), подверженные различным погрешностям в связи с изменением условий наблюдения. Так, например, результаты измерений длин линий в подземных теодолитных ходах стальной рулеткой и измерения длин линий в ходах на поверхности инварными проволоками являются неравноточными.

Все перечисленные виды измерений могут состоять из необходимых и избыточных (дополнительных).

Необходимыми измерениями называются такие, которые дают возможность получить только одно единственное значение каждой из искомых величин.

Избыточными измерениями называются такие, которые выполнены помимо необходимых измерений. Так, при измерении длины линии в шахте производят трехкратное смещение рулетки по отношению к отвесам; в результате получают три значения определяемой длины, первое из которых будет необходимым, а остальные избыточными.

Для определения значения углов в треугольнике необходимыми будут измерения двух любых углов, измерение третьего угла будет избыточным.

Избыточные измерения имеют большое практическое значение: они дают возможность осуществить контроль измерений и выявить в них грубые ошибки, определить наиболее надежное значение измеряемой величины и судить о влиянии неизбежных ошибок измерений на получаемые результаты.

§ 3. Ошибки измерений и их классификация

Как мы уже установили выше, результаты непосредственных измерений не бывают между собой тождественными. Это свидетельствует о том, что результаты измерений не дают истинного значения измеряемой величины и сопровождаются ошибками. В связи с этим необходимо изучить причины возникновения ошибок измерений и ограничить их влияние. Основными источниками ошибок измерений являются: объект измерения, наблюдатель, инструменты и внешняя среда.

Ошибки из-за изменения величины или положения объекта в процессе измерения. В маркшейдерско-геодезической практике приходится измерять объекты, которые в процессе измерения изменяют свою величину или положение. При обработке результаты измерений приходится приводить к определенному моменту времени, вследствие чего появляются ошибки. Например, при производстве магнитной ориентировки необходимо учитывать изменение магнитного склонения, при барометрическом нивелировании учитывается изменение атмосферного давления и т. д.

Личные ошибки обусловливаются несовершенством органов чувств, недостаточной квалификацией и психико-физиологическими особенностями наблюдателя. Как правило, наблюдателю неизвестны ни величины, ни знак этих ошибок, так как они носят в основном случайный характер.

Инструментальные ошибки измерений являются следствием несоответствия инструментов тем идеальным геометрическим условиям, которым они должны удовлетворять, а также следствием неточной установки инструмента в рабочее положение. Эти ошибки могут достигать значительных величин и резко искажать результаты измерений, поэтому они должны быть тщательно изучены и по возможности исключены.

Инструментальные ошибки обусловлены в основном двумя причинами:

а) недостаточно точным изготовлением отдельных деталей инструментов (ошибки деления лимба, ошибки нанесения штрихов на рулетку, ошибки хода микрометренных винтов и т. д.);

б) недостаточно тщательной выверкой и юстировкой инструментов (коллимационная ошибка теодолита; ошибка «места нуля» вертикального круга; ошибка непараллельности оси уровня и визирной оси нивелира; ошибка компарирования рулетки и т. д.).

Ошибки, обусловленные влиянием внешней среды, появляются от неблагоприятного воздействия внешней среды на результаты измерений. Факторами, вызывающими такого рода ошибки, являются: температура, атмосферное давление, влажность воздуха и его запыленность в горных выработках, вентиляция и т. д. Некоторые из ошибок могут быть частично исключены путем введения в измеренные величины соответствующих поправок. Однако в результатах измерений останется часть неисключенных ошибок, обусловленных влиянием внешней среды из-за неполного учета влияния этих факторов.

Все перечисленные выше источники ошибок влияют на результаты измерения независимо один от другого, приводя к элементарным ошибкам. Таким образом, ошибки, сопровождающие измерения, являются суммой элементарных ошибок, возникающих от различных источников их появления, которые имели место в процессе измерений.

Среди различного рода ошибок, с которыми приходится встречаться в практике маркшейдерских измерений, по характеру действия и свойствам различают ошибки **грубые** и **неизбежные**.

Грубыми называются ошибки, выходящие за пределы точности, присущей данным условиям измерений. Они появляются вследствие промаха (просчета) исполнителя или резкого изменения внешних условий. Грубые ошибки искажают получаемый результат (просчет на дециметр при измерении длин стальной рулеткой; просчет на сантиметр при взятии отсчета по нивелирной рейке и т. д.).

Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, должны быть исключены из рядов измерений и дальнейшей обработке не подлежат. Однако при массовых измерениях маркшейдер не гарантирован от возможности совершить грубую ошибку. Поэтому для обнаружения грубых ошибок и их исключения из рядов измерений должны быть выполнены избыточные измерения. Методика производства маркшейдерских работ должна быть составлена таким образом, чтобы она давала контроль, гарантирующий своевременное обнаружение грубых ошибок.

В дальнейшем будем предполагать, что результаты измерений свободны от грубых ошибок.

После исключения результатов измерений, содержащих грубые ошибки, остаются измерения, результаты которых не тождественны между собой, что свидетельствует о наличии в них так называемых неизбежных ошибок. Несмотря на многообразие свойств и влияний на результаты измерений, неизбежные ошибки могут быть разделены на две большие группы.

Первая группа ошибок. Если среднее из ошибок равноточных измерений одной и той же величины стремится к некоторому пределу, отличному от нуля, при увеличении числа измерений до бесконечности, то такие ошибки относятся к первой группе и называются с и с т е м а т и ч е с к и м и. Появление этих ошибок вызвано влиянием односторонне действующих факторов, систематически искажающих результаты измерений.

Систематические ошибки возникают от определенных источников и имеют закономерный характер. В зависимости от условий измерений они могут оставаться постоянными как по знаку, так и по величине или изменяться по определенным законам.

Источниками систематических ошибок являются условия измерений: объект, наблюдатель, инструмент и среда. Большинство систематических ошибок происходит либо от недостатков конструкции инструментов, либо от несовершенства их выверки, либо от изменения внешней среды.

Систематические ошибки по своей абсолютной величине, как правило, не велики, однако пренебрегать ими нельзя. Характерным свойством систематических ошибок является постоянство знака, вследствие этого происходит их суммирование, которое может привести к значительному искажению конечного результата.

Существуют также систематические ошибки, которые изменяют как знак, так и величину. Например, ошибка в превышении при геометрическом нивелировании от неточной установки рейки в отвесное положение.

Следует отметить, что зачастую бывает трудно выявить источники систематических ошибок, проследить и установить закономерность их влияния на результаты измерения и исключить их. Во всех случаях измерений маркшейдер должен стремиться по возможности полнее исключить влияние систематических ошибок на результаты измерений путем введения соответствующих поправок в результаты измерений, если известен закон влияния систематических ошибок, или применения специальной методики измерений, в процессе которых систематические ошибки будут исключаться. Такие ошибки называются *исключаемыми систематическими ошибками*.

Например: ошибка в измеренной длине из-за несоответствия мерного прибора эталону исключается введением поправки за компарирование; влияние коллимационной ошибки на результат измерения горизонтального угла исключается путем определения среднего значения измеренного угла из «круга право» и «круга лево». Однако следует помнить, что поправки, определенные для исключения систематических ошибок, и методика измерений, направленная на их исключение, не дают возможности полностью исключить систематические ошибки из результатов измерений, т. е. измерения содержат *остаточные систематические ошибки*.

Методы исключения систематических ошибок разрабатываются в геодезии, маркшейдерском деле, инструментоведении и других специальных науках связанных с измерениями. В настоящей книге систематические ошибки изучаться не будут, так как невозможно дать общих рекомендаций по обработке измерений, содержащих систематические ошибки.

Вторая группа ошибок. После исключения из рядов измерений ошибок грубых и систематических остаются ошибки, которые избежать и исключить невозможно. Эти ошибки различны по величине и по знаку; по предыдущим ошибкам такого ряда нельзя установить, какой именно будет следующий за ним член ряда по величине и знаку.

Если среднее из ошибок равноточных измерений одной и той же величины стремится к нулю при увеличении числа измерений до бесконечности, то такие ошибки относятся ко второй группе и называются **случайными**.

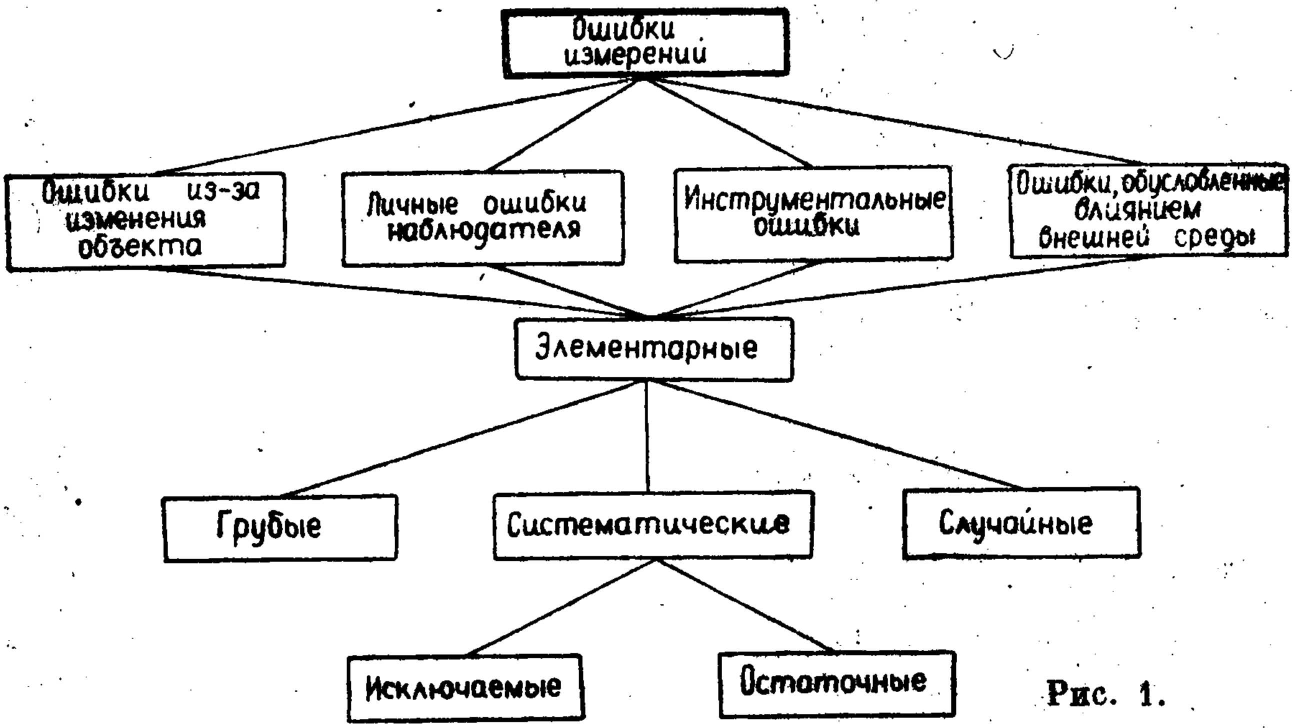


Рис. 1.

Опыт показал, что ошибки второй группы можно рассматривать как случайные математические величины, изучаемые в теории вероятностей и статистике, поэтому они и получили название случайных ошибок.

На рис. 1 приведена схема классификации ошибок измерений.

§ 4. Предмет теории ошибок и способа наименьших квадратов

Как уже отмечалось выше, практика маркшейдерского дела постоянно связана с различными измерениями, позволяющими на планах графически изображать горные выработки, форму залегания полезного ископаемого и геометрию распределения его свойств, решать различные горногеометрические задачи и т. д. Задание направления проходимым горным выработкам требует предварительного определения необходимой точности выполнения тех или иных измерительных действий. Но, как известно, всякие измерения сопровождаются неизбежными ошибками, в связи с чем маркшейдер должен разработать такую методику выполнения работ, при которой ошибки не превышали бы допусков, регламентированных технологическим процессам горного дела.

Чтобы уменьшить влияние неизбежных ошибок, постоянно совершенствуют инструменты и методы измерений. Однако на каждом этапе развития науки и техники ошибки измерений могут быть уменьшены только до известного предела. Поэтому должна быть выбрана такая методика работ, при которой ошибки не превышали бы допустимых пределов. Для выполнения указанных требований необходимо решить следующие вопросы:

1. Как организовать измерения, чтобы их результаты содержали ошибки, не превышающие допустимые.

2. Как оценить точность полученных результатов измерений, т. е. произвести оценку условий измерений.

3. Как из результатов измерений найти наиболее надежное значение.

4. Как оценить точность полученного наиболее надежного значения.

Для того чтобы решить поставленные вопросы, необходимо знать свойства случайных ошибок, установить закономерности возникновения и накопления ошибок, уметь производить оценку точности. Решением всех этих вопросов и занимается научная дисциплина «Теория ошибок и способ наименьших квадратов».

Изучение курса требует знакомства с дифференциальным и интегральным исчислением, основами линейной алгебры и теории вероятностей, общими курсами геодезии и маркшейдерского дела. В связи с тем, что теория ошибок и способ наименьших квадратов дают возможность определить наиболее надежное значение искомой величины из результатов непосредственных измерений и произвести оценку точности, они имеют широкое применение во многих областях науки и техники, где приходится иметь дело с измерениями и их обработкой: в физике, химии, астрономии и т. д.

§ 5. Краткая история развития предмета

1 января 1801 г. Иосиф Пиацци в Палермо открыл планету Цереру (первую малую планету между Марсом и Юпитером). Наблюдения Пиацци охватывали только 9° орбиты планеты. Известие об этом открытии дошло до сведения других астрономов Европы лишь спустя несколько месяцев, когда наблюдать ее стало невозможно ввиду неблагоприятного положения Цереры относительно Солнца.

Для нахождения планеты нужно было вычислить элементы ее орбиты. Наблюдения Пиацци сопровождались случайными ошибками, что затрудняло вычисления. Поэтому и было обращено особое внимание на удивительную точность эфемерид, вычисленных немецким математиком К. Ф. Гауссом. Теоретической основой для этих вычислений явился «способ наименьших квадратов», разработанный и применяемый им с 1794 г.

По ряду причин К. Ф. Гаусс не торопился с опубликованием своего открытия; поэтому случилось так, что первым печатным трудом по способу наименьших квадратов была работа французского математика и геодезиста А. М. Лежандра «Новые методы для определения орбит комет», выпущенная в свет в 1806 г., в которой он дал первое изложение способа наименьших квадратов, найденного им самостоятельно и независимо от К. Ф. Гаусса.

А. М. Лежандр так обосновывает свой принцип комбинации наблюдений для получения наиболее надежного и точного результата: «Из всех принципов, которые можно предложить для этой цели, не существует более простого, чем тот, которым мы пользовались в предыдущем изложении; он состоит в том, чтобы обратить в минимум сумму квадратов погрешностей. При помощи этого правила между погрешностями устанавливается как бы некоторое равновесие, которое не позволяет крайним из них по величине оказывать преобладающее влияние» (переведено Н. И. Идельсоном [7], стр. 8).

К. Ф. Гаусс опубликовал свою первую работу по способу наименьших квадратов в 1809 г. [3], где дал ему вероятностное обоснование. Здесь же он вывел закон распределения по вероятности случайных ошибок измерений, который сейчас называется законом Гаусса или нормальным законом.

Второе, принципиально отличное от К. Ф. Гаусса, вероятностное обоснование способа наименьших квадратов дано Лапласом в «Аналитической теории вероятности», изданной в 1812 г.

Однако оба эти обоснования имели принципиальные недостатки, поэтому К. Ф. Гауссом в 1826 г. был опубликован совершенно новый метод решения задачи о комбинации наблюдений, который привел опять таки к способу наименьших квадратов.

В деле практического приложения способа наименьших квадратов большую роль сыграли работы ученых XIX столетия — Бесселя, Ганзена, Энке, Шрейбера, Иордана, Гельмерта и др.

В русской геодезической литературе впервые способ наименьших квадратов был освещен в книге проф. А. П. Болотова «Курс высшей и низшей геодезии», вышедшей в 1836 г. При обработке результатов измерений дуги меридиана на протяжении 25° 20′ (1821—1852 гг.) русский астроном и геодезист В. Я. Струве (1793—1864 гг.) применил способ наименьших квадратов, оценивая точность результатов измерений средней квадратической ошибкой.

В 1857 г. акад. А. Н. Савич (1811—1883 гг.) написал книгу «Приложение теории вероятностей к вычислению наблюдений и геодезических измерений», которая содержала основы способа наименьших квадратов.

Недостатки обоснований Гаусса и Лапласа были устранены работами русских математиков — академиков П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова, превративших способ наименьших квадратов в строгую последовательную теорию, одной из проблем которой является математическая обработка наблюдений.

В 1859 г. П. Л. Чебышев (1821—1894 гг.) опубликовал разработанную им теорию интерполирования по способу наименьших квадратов.

Академик А. А. Марков (1856—1922 гг.) внес ряд весьма важных идей, поясняющих суть метода наименьших квадратов, а в 1913 г. создал классический труд «Исчисление вероятностей», в VI главе которого с исчерпывающей глубиной изложен способ наименьших квадратов.

Большую роль в распространении основ способа наименьших квадратов среди русских геодезистов сыграли труды профессоров В. В. Витковского, Н. Я. Цингера и И. А. Иверонова.

Развитие сети триангуляции I класса корпусом военных топографов в России обязано трудам проф. И. И. Померанцева, под руководством которого был составлен проект развития сети триангуляции и уравнительных вычислений.

После Великой Октябрьской социалистической революции возникли сложные задачи при создании геодезической основы на огромных территориях нашей Родины. В этой части большая заслуга принадлежит проф. Ф. Н. Красовскому (1878—1948 гг.), разработавшему научные основы создания государственной триангуляции Советского Союза. Методы обработки этой триангуляции были разработаны при участии известного военного геодезиста проф. Н. А. Урмаева (1895—1959 гг.) — автора ряда способов уравнивания и работ в области способа наименьших квадратов.

Крупным ученым в области способа наименьших квадратов является проф. А. С. Чеботарев, перу которого принадлежит более 150 работ, значительная часть которых посвящена различным вопросам способа наименьших квадратов, применительно к полигонометрическим сетям. Им создан фундаментальный учебник по способу наименьших квадратов.

Разработке вопросов построения точной полигонометрии посвящены также работы проф. В. В. Попова, которому принадлежит ряд оригинальных работ и в области способа наименьших квадратов.

В области многогруппового уравнивания большое значение имеют работы проф. А. Н. Высоцкого, проф. А. И. Кобылина, И. Ю. Пранис-Праневича и др.

Создателями оригинальных руководств и учебников по способу наименьших квадратов являются проф. Н. И. Идельсон, проф. П. И. Шилов, И. М. Герасимов и др.

В маркшейдерской литературе следует отметить работы профессоров В. И. Баумана, И. М. Бахурина, Н. Г. Келля, В. А. Романова.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Глава I

РАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 6. Свойства случайных ошибок измерений

В § 3 уже отмечалось что случайные ошибки, появляющиеся в процессе измерения, изменяют от измерения к измерению свою величину и знак без всякой видимой закономерности. Однако изучение распределения случайных ошибок в больших рядах равноточных измерений одних и тех же величин показывает, что под видом кажущегося отсутствия какой-либо закономерности в рядах проявляется так называемая статистическая закономерность, известная под названием свойств случайных ошибок измерений.

Ряды случайных ошибок обладают следующими свойствами:

1. **При данных условиях измерений случайные ошибки не могут превосходить по абсолютной величине определенного предела.** Если обозначить указанный предел $\Delta_{пр}$ и назвать эту величину предельной ошибкой, то настоящее свойство выразится следующим неравенством:

$$|\Delta| \leqslant \Delta_{пр}.$$

Это свойство характеризует условия измерений, на его основании устанавливаются пределы допустимых ошибок.

2. **Малые по абсолютной величине ошибки появляются чаще, чем большие.** Это свойство характеризует тщательность измерений, проводимых в данных условиях, а следовательно, и сами условия измерений, ибо если большинство случайных ошибок данного ряда измерений будет по своей абсолютной величине близко к предельной ошибке, то это значит, что не все возможности использованы для повышения качества измерений.

3. **Положительные ошибки появляются так же часто, как и равные им по абсолютной величине отрицательные ошибки.**

4. **Среднее арифметическое из случайных ошибок равноточных измерений одной и той же величины неограниченно стремится к нулю при неограниченном возрастании числа измерений.**

Третье и четвертое свойства вытекают из самой природы случайных ошибок: поскольку приняты меры к устранению грубых и систематических ошибок, нет основания считать, что при измерении результат, больший истинного, будет получаться чаще. чем меньший. Вследствие этого при достаточно большом числе измерений в ряду случайных ошибок можно ожидать равновероятное появление ошибок, равных по абсолютной величине и разных по знаку. Сложив все ошибки данного ряда, вправе ожидать, что положительные и отрицательные будут компенсироваться. Тогда при $n \to \infty$ четвертое свойство может быть записано

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n}{n} = 0. \tag{6,1}$$

Приняв введенное Гауссом обозначение суммы в виде квадратных скобок [ ], т. е.

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \Delta_n = [\Delta], \tag{6,2}$$

получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0. \tag{6,3}$$

Следует иметь в виду, что при увеличении числа измерений $\frac{[\Delta]}{n}$ может то увеличиваться, то уменьшаться, в общем сохраняя тенденцию приближаться к нулю, при бесконечном возрастании числа наблюдений n.

Среди перечисленных свойств случайных ошибок определяющими для ошибок измерений являются третье и четвертое, которые проявляются тем отчетливее, чем больше число измерений в данном ряду. Однако не всем случайным ошибкам присущи перечисленные свойства. Так, например, ниже в § 17 будут рассмотрены ошибки округлений, которые являются случайными, не удовлетворяющими второму свойству.

Если среднее арифметическое из суммы случайных ошибок данного ряда не стремится к нулю и является значительным по своей величине, т. е.

$$\frac{[\Delta]}{n} = A \neq 0, \tag{6,4}$$

это свидетельствует о том, что влияние систематических ошибок на результаты измерений полностью не исключено. Величина систематической ошибки может быть приближенно определена по формуле (6,4) и исключена из рядов измерений. Маркшейдер должен выявить источник появления систематических ошибок и устранить его.

§ 7. Принцип арифметической средины

Пусть даны результаты равноточных измерений некоторой величины

$$l_1, \ l_2, \ldots, \ l_n$$

истинное значение которой L. Разность между измеренным и истинным значением дает истинную случайную ошибку:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= l_1 - L; \\ \Delta_2 &= l_2 - L; \\ &\cdots\cdots \\ \Delta_n &= l_n - L. \end{aligned}\right\} \tag{7,1}$$

Сложив левые и правые части равенств (7,1)

$$[\Delta] = [l] - Ln \tag{7,2}$$

и разделив на n, получим

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - L. \tag{7,3}$$

Обозначим:

$$\frac{[l]}{n} = X; \tag{7,4}$$

$$\frac{[\Delta]}{n} = \omega, \tag{7,5}$$

где X — среднее арифметическое из данного ряда равноточных измерений, или арифметическая средина;

ω — среднее арифметическое из истинных случайных ошибок результатов данного ряда измерений, или истинная случайная ошибка арифметического среднего.

Согласно принятым обозначениям формула (7,3) примет вид

$$\omega = X - L. \tag{7,6}$$

На основании четвертого свойства случайных ошибок можно утверждать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta]}{n} = \lim_{n \to \infty} \omega = 0. \tag{7,7}$$

Тогда при $n \to \infty$ $X \to L$, т. е. **среднее арифметическое из результатов равноточных измерений одной и той же величины стремится к истинному значению этой величины при неограниченном возрастании числа измерений.** Это положение и выражает принцип арифметической средины.

Среднее арифметическое из данного ряда равноточных измерений принимается за наиболее надежное значение и при конечном числе измерений, так как в этом случае также происходит компенсация случайных ошибок и полученный результат лучше, вернее, надежнее характеризует действительные размеры измеренного объекта.

Непосредственное применение формулы (7,4) для определения среднего арифметического приводит к громоздким вычислениям. Чтобы избежать их, произведем следующие преобразования: возьмем некоторое приближенное значение l_0, близкое к измеренным значениям, и найдем уклонения измеренных величин от приближенного:

$$\left.\begin{aligned} l_1 - l_0 &= l'_1; \\ l_2 - l_0 &= l'_2; \\ &\dots\dots \\ l_n = l_0 &= l'_n. \end{aligned}\right\} \tag{7,8}$$

Сложив левые и правые части уравнений (7,8), получим

$$[l] - l_0 n = [l']. \tag{7,9}$$

Разделив все члены уравнения (7,9) на n, получим

$$X = l_0 + \frac{[l']}{n}. \tag{7,10}$$

Формула (7,10) является рабочей формулой для вычисления среднего арифметического.

Пример. Найти среднее арифметическое значение результатов измерений длины линии, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

№ п/п	l, *м*	l', *мм*	№ п/п	l, *м*	l', *мм*
1	27,483	+3	4	27,484	+4
2	27,485	+5	5	27,481	+1
3	27,482	+2	6	27,483	+3
l_0	27,480				$[l'] = 18$

Приняв за приближенное значение $l_0 = 27{,}480$ *м* по вычисленным уклонениям l', определим среднее значение

$$\frac{[l']}{n} = \frac{18}{6} = 3 \text{ мм}.$$

Тогда

$$X = l_0 + \frac{[l']}{n} = 27{,}480 + 0{,}003 = 27{,}483 \text{ м}.$$

§ 8. Оценка точности результатов измерений. Средняя квадратическая ошибка

Как уже указывалось, одной из основных задач теории ошибок и способа наименьших квадратов является суждение о влиянии неизбежных ошибок измерений на получаемые результаты, т. е. оценка точности результатов непосредственных измерений и результатов их обработки.

Для производства оценки точности, т. е. для характеристики влияния условий измерений на получаемые результаты, необходимо иметь истинные ошибки измерений.

Каждая из истинных случайных ошибок, характеризуя точность соответствующего измерения, не может характеризовать всего многообразия ошибок, возможных при данных условиях измерений. Поэтому при оценке точности измерений должны быть учтены все ошибки данного ряда.

Суждение о точности выполненных измерений можно получить по степени различия результатов измерений: чем больше разбросаны результаты измерений в ряду, чем сильнее они отличаются друг от друга, тем сильнее дисперсия (рассеяние) ряда, тем менее точны измерения.

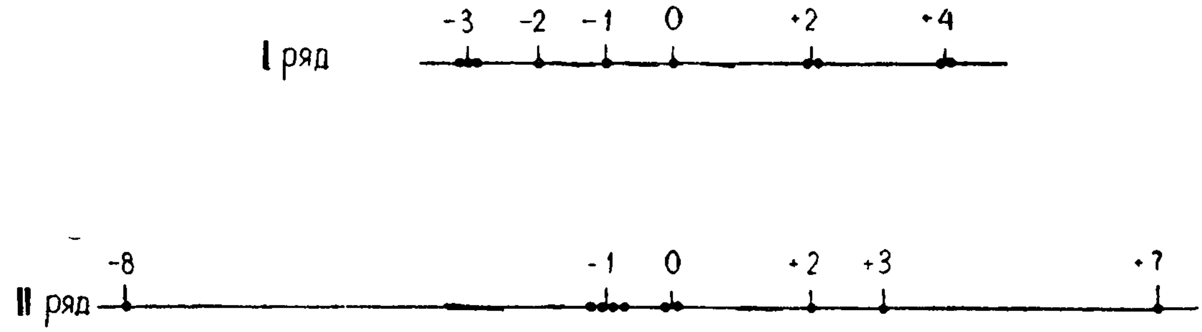


Рис. 2

Возьмем два ряда измерений однородных величин, выполненных в различных условиях, истинные ошибки которых будут:

I ряд: —3, +2, +4, —2, —1, 0, +4, —3, +2, —3.

II ряд: 0, —1, +7, +2, —1, —1, —8, 0, +3, —1.

Возникает вопрос, какой из этих рядов выполнен в более благоприятных условиях. Для наглядности на числовых осях в некотором масштабе отложим значения ошибок обоих рядов (рис. 2). Сопоставляя полученные графики, мы видим, что разбросанность II ряда ошибок значительно больше, чем I. На этом основании можно считать, что условия измерений I ряда более благоприятны, чем II.

Однако такое определение достоинств рядов измерений хотя и очевидно, но не совсем определенно. Поэтому суждение о влиянии неизбежных ошибок измерений на получаемые результаты должно быть выражено числом. Для этой цели можно воспользоваться средним арифметическим из абсолютных значений ошибок данных рядов*, т. е. средней ошибкой

$$\Theta = \frac{[|\Delta|]}{n}, \tag{8,1}$$

вычисленные значения которых для приведенного выше примера получатся равными:

$$\Theta_1 = 2{,}4; \qquad \Theta_2 = 2{,}4.$$

---

* Так как на основании четвертого свойства случайных ошибок среднее арифметическое из алгебраической суммы ошибок неограниченно стремится к нулю при возрастании их числа, им воспользоваться для оценки точности нельзя.

Этот вывод не согласуется с выводом, сделанным на основании анализа графиков. Объясняется это тем, что среднее арифметическое из абсолютных значений истинных ошибок недостаточно чувствительно к наличию крупных ошибок.

Если взять две группы измерений, произведенных в тождественных условиях и отличающихся только числом, то величины, характеризующие точность этих измерений, должны быть одинаковыми, независимо от числа наблюдений в группах. Очевидно, что с изменением условий наблюдений в одной из групп величины, характеризующие точность измерений, должны быть различными даже при одинаковом числе наблюдений в группах.

Поэтому целесообразно для оценки точности измерений применить такой критерий, который более остро реагировал бы на сравнительно крупные ошибки. Этому требованию отвечает средняя квадратическая ошибка, вычисляемая по формуле

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}, \tag{8,2}$$

т. е. средняя квадратическая ошибка данного ряда равноточных независимых измерений равна корню квадратному из суммы квадратов истинных ошибок этого ряда, деленной на число всех измерений.

Средняя квадратическая ошибка характеризуется тем, что при суммировании квадратов истинных ошибок $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2$ не приходится учитывать их знака; бо́льшие по абсолютной величине ошибки оказывают при возведении в квадрат и большее влияние, а знак средней квадратической ошибки $\pm$ соответствует природе случайных ошибок.

Вычислим средние квадратические ошибки для приведенных выше рядов измерений по их истинным ошибкам:

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{72}{10}} = \pm 2{,}7;$$

$$m_2 = \pm\sqrt{\frac{130}{10}} = \pm 3{,}6.$$

Из сравнения m_1 и m_2 следует, что условия, в которых производились измерения I ряда, лучше, чем условия измерений II ряда.

При $n \to \infty$ величина m будет стремиться к некоторому пределу, обусловленному условиями измерений,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} = m_0 \tag{8,3}$$

и будет являться постоянной для этих условий.

Аналогично тому, как среднее арифметическое X при конечном числе наблюдений не равно истинному значению измеряемой величины L, так и вычисленная средняя квадратическая ошибка m по истинным ошибкам Δ конечного ряда наблюдений не будет равна значению m_0, которое называется стандартом.

Так как никогда не бывает бесконечного ряда наблюдений, стандарт m_0 остается неизвестным и приходится пользоваться его приближенным значением m, которое определяется с ошибкой m_m, вычисляемой по приближенной формуле

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \tag{8,4}$$

или в относительном выражении

$$\frac{m_m}{m} = \frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{8,5}$$

Рис. 3

Придавая n различные значения, получим данные, приведенные в табл. 2*, по которым построен график изменения относительной средней квадратической ошибки в зависимости от изменения числа наблюдений (рис. 3).

Таблица 2

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	100
$100\frac{m_m}{m}$ %	50	41	35	32	29	27	25	24	22	18	16	14	10

С увеличением n кривая приближается к оси абсцисс, причем это приближение происходит довольно быстро на определенном интервале (примерно до $n = 10$). Дальнейшее увеличение числа наблюдений уточняет значение средней квадратической ошибки незначительно. Таким образом, средняя квадратическая ошибка при некотором n приобретает устойчивое значение.

По величине стандарта m_0, определяющего условия измерений, можно найти предельную ошибку $\Delta_{пр}$, которая также зависит от

* Данные для n, меньших 8—10, являются весьма приближенными.

условий измерений. Эта зависимость может быть выражена уравнением

$$\Delta_{\text{пр}} = km_0, \tag{8,6}$$

где k — некоторая постоянная.

Предельная ошибка — это такое абсолютное значение случайной ошибки, которого не может превзойти ни одна из истинных ошибок данного ряда. Ошибки, бо́льшие предельной, следует считать грубыми.

В теории вероятностей доказывается, что случайная ошибка измерения может превосходить среднюю квадратическую примерно в 32 случаях из 100, удвоенную среднюю квадратическую ошибку — в 5 случаях из 100 и утроенную среднюю квадратическую ошибку — в 3 случаях из 1000. Таким образом, мало вероятно появление в однократном измерении случайной ошибки, бо́льшей по абсолютной величине утроенной средней квадратической ошибки. Поэтому в практике маркшейдерских и геодезических работ величина k принимается равной 3. Тогда предельная ошибка будет равна

$$\Delta_{\text{пр}} = 3m_0. \tag{8,7}$$

Но так как величина стандарта m_0 неизвестна, предельная ошибка может быть вычислена по средней квадратической ошибке m, найденной из достаточно большого числа n ошибок,

$$\Delta_{\text{пр}} = 3m. \tag{8,8}$$

При вычислении допустимых невязок в маркшейдерских и геодезических съемках пользуются в качестве предельной невязки ее удвоенным средним квадратическим значением:

$$\Delta_{\text{пр}} = 2m. \tag{8,9}$$

§ 9. Средняя и вероятная ошибки

Для оценки точности произведенных измерений иногда применяется средняя ошибка Θ и так называемая вероятная ошибка r.

Средняя ошибка определяется по формуле (8,1). В теории вероятностей доказывается соотношение между средней ошибкой и стандартом при $n \to \infty$:

$$\Theta = m_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7979 m_0 \approx \frac{4}{5} m_0. \tag{9,1}$$

Вероятной ошибкой называется такое значение случайной ошибки при данных условиях равноточных измерений, по отношению к которому число ошибок, бо́льших ее по абсолютной величине, равно числу ошибок меньших. Если расположить случайные ошибки данного ряда измерений в возрастающем порядке по их абсолютным величинам, то вероятная ошибка при нечетном числе ошибок будет в середине этого ряда.

Если же число ошибок данного ряда четное, то вероятную ошибку можно вычислить как среднее арифметическое из двух смежных ошибок, которые стоят посередине.

Значение вероятной ошибки может быть определено по формуле, выражающей зависимость между нею и стандартом, при $n \to \infty$:

$$r = 0{,}6745 m_0 \approx \frac{2}{3} m_0. \qquad (9{,}2)$$

Для иллюстрации связи между средней, вероятной и средней квадратической ошибками разберем числовой пример.

Пример. В табл. 3 приведены невязки W в сумме углов 60 треугольников триангуляции I класса. Проследим на этих данных проявление свойств случайных ошибок и произведем оценку точности.

Таблица 3

№	W	W^2	№	W	W^2	№	W	W^2
1	−1″,38	1,904	21	+0″,38	0,144	41	−0″,41	0,168
2	+0 ,82	0,672	22	+0 ,87	0,757	42	+0 ,98	0,960
3	−1 ,00	1,000	23	−1 ,20	1,440	43	−0 ,54	0,292
4	+0 ,45	0,202	24	+0 ,76	0,578	44	+0 ,55	0,302
5	−1 ,95	3,802	25	+0 ,73	0,533	45	+0 ,34	0,116
6	−0 ,79	0,624	26	−0 ,79	0,624	46	−0 ,05	0,002
7	−0 ,28	0,078	27	−0 ,33	0,109	47	+0 ,48	0,230
8	+0 ,51	0,260	28	−0 ,26	0,068	48	−0 ,14	0,020
9	−0 ,22	0,048	29	+0 ,97	0,941	49	−1 ,06	1,124
10	+1 ,04	1,082	30	+0 ,25	0,062	50	−1 ,04	1,082
11	−0 ,41	0,168	31	−0 ,51	0,518	51	−0 ,63	0,397
12	−0 ,73	0,533	32	−0 ,21	0,044	52	+0 ,75	0,562
13	−1 ,55	2,402	33	−0 ,72	0,260	53	+1 ,99	3,960
14	+2 ,03	4,121	34	+0 ,46	0,212	54	−1 ,36	1,850
15	+0 ,56	0,314	35	+0 ,35	0,122	55	−0 ,97	0,941
16	−1 ,57	2,465	36	−0 ,45	0,202	56	+0 ,88	0,774
17	+1 ,31	1,716	37	−0 ,14	0,020	57	+1 ,13	1,277
18	+0 ,09	0,008	38	+0 ,03	0,001	58	+0 ,74	0,548
19	−0 ,73	0,533	39	+0 ,08	0,006	59	−0 ,26	0,068
20	+0 ,76	0,578	40	−0 ,41	0,168	60	+0 ,61	0,372

$[\,|W|\,] = 42'',99 \quad [W^2] = 44{,}360$

Анализ данных табл. 3 позволяет сделать следующие выводы:

1. В данном ряду ошибок нет никакой видимой закономерности распределения их ни по величине, ни по знаку.

2. Распределение числа ошибок по их абсолютным величинам соответствует второму свойству, что подтверждается следующими данными:

от 0 до 0″,5	от 0,5 до 1″	от 1,0 до 1″,5	от 1,5 до 2″	от 2″,0 и более
23	24	8	4	1

3. Число положительных ошибок 29, их сумма равна +20″,90, число отрицательных ошибок 31, их сумма равна −22″,09, что соответствует третьему свойству случайных ошибок.

4. Среднее арифметическое из суммы случайных ошибок приведенного ряда равно

$$\frac{[W]}{n}=\frac{-1'',19}{60}=-0'',02.$$

Полученная величина мала, что подтверждает четвертое свойство случайных ошибок.

Средняя квадратическая ошибка m суммы углов в одном треугольнике может быть вычислена по невязкам W, при подстановке их в формулу (8,2), так как невязки являются истинными ошибками:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[WW]}{n}}=\pm\sqrt{\frac{44,360}{60}}=\pm 0'',86.$$

Ошибка m_m полученной средней квадратической ошибки m будет равна

$$m_m=\frac{m}{\sqrt{2n}}=\pm\frac{0,86}{10,95}=\pm 0'',078.$$

Средняя ошибка по абсолютным значениям невязок по формуле (8,1) равна

$$\Theta=\frac{[|W|]}{n}=\frac{42'',99}{60}=\pm 0'',72.$$

Если записать невязки W, приведенные в табл. 3 в возрастающем порядке по их абсолютным значениям, то посредине ряда будет находиться вероятная ошибка r. В нашем случае 30-я ошибка равна 0,63, 31-я — 0,72, тогда

$$r=\frac{0,63+0,72}{2}=\pm 0'',68.$$

Предельная ошибка

$$\Delta_{\text{пр}}=3m=\pm 2'',58.$$

Сопоставляя ее с истинными случайными ошибками данного ряда видим, что ни одна из них не превосходит по абсолютной величине предельную ошибку.

Далее определим значение средней Θ и вероятной r ошибок по формулам связи их со стандартом, используя для этого значение средней квадратической ошибки.

По формуле (9,1)

$$\Theta\approx\frac{4}{5}m=\pm 0'',69.$$

По формуле (9,2)

$$r\approx\frac{2}{3}m=\pm 0'',57.$$

Сопоставляя полученные значения Θ и r с ранее вычисленными, убеждаемся в их достаточной сходимости.

§ 10. Средние квадратические ошибки функций измеренных величин

Выше мы установили, что если дан ряд равноточных измерений некоторой величины $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и известно ее истинное значение L, то по истинным случайным ошибкам этих измерений $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, можно по формуле (8,2) вычислить среднюю квадратическую ошибку, характеризующую условия данных измерений.

Однако в практике маркшейдерского дела и геодезии приходится встречаться со случаями, когда искомая величина не может быть измерена непосредственно. Так, например, длина линии подземного теодолитного хода, превышающая длину мерного прибора, может быть определена только как сумма непосредственно измеренных отдельных интервалов; объем угля в отвале, форма которого близка к конической, может быть определен как произведение квадрата радиуса основания на одну треть высоты и на $\pi = 3{,}14$.

В этих случаях искомые величины определяются посредством вычисления их через непосредственно измеренные независимые величины. Так как непосредственные измерения сопровождаются неизбежными ошибкам, то и значение вычисленной функции будет найдено с некоторой ошибкой.

Положим, что над несколькими независимыми величинами l_1, $l_2, \ldots, l_n$ производится ряд действий, указанных видом некоторой функции F:

$$Y = F(L_1, L_2, \ldots, L_n). \tag{10,1}$$

Зная $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — средние квадратические ошибки измеренных аргументов $l_1, l_2, \ldots, l_n$, определить m_y — среднюю квадратическую ошибку функции Y.

Решим эту задачу сначала для простейших функций.

I. Функция произведения непосредственно измеренного аргумента на постоянный коэффициент

$$Y = aL. \tag{10,2}$$

Например, длина окружности, вычисленная по диаметру $C = \pi D$.

Пусть для определения величины l, истинное значение которой L, произведен ряд непосредственных равноточных измерений l_1, $l_2, \ldots, l_n$ с истинными случайными ошибками:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= l_1 - L; \\ \Delta_2 &= l_2 - L; \\ &\cdots\cdots \\ \Delta_n &= l_n - L. \end{aligned}\right\} \tag{10,3}$$

Тогда средняя квадратическая ошибка измеренного аргумента будет

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \tag{10,4}$$

Вычислив по непосредственно измеренным значениям аргументов соответствующие величины функции

$$y_1 = al_1, \quad y_2 = al_2, \ldots, y_n = al_n, \tag{10,5}$$

истинное значение которой равно

$$Y = aL, \tag{10,6}$$

определим по их разностям истинные случайные ошибки:

$$\left.\begin{aligned} \Delta'_1 &= y_1 - Y; \\ \Delta'_2 &= y_2 - Y; \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Delta'_n &= y_n - Y. \end{aligned}\right\} \tag{10,7}$$

Средняя квадратическая ошибка функции определится по формуле

$$m_y = \pm\sqrt{\frac{[\Delta'\Delta']}{n}}. \tag{10,8}$$

Подставив в уравнение (10,7) значения y и Y из (10,5) и (10,6), получим:

$$\left.\begin{aligned} \Delta'_1 &= al_1 - aL = a(l_1 - L); \\ \Delta'_2 &= al_2 - aL = a(l_2 - L); \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Delta'_n &= al_n - aL = a(l_n - L). \end{aligned}\right\} \tag{10,9}$$

Выражения в скобках равенств (10,9) заменим истинными ошибками аргументов из (10,3):

$$\left.\begin{aligned} \Delta'_1 &= a\,\Delta_1; \\ \Delta'_2 &= a\,\Delta_2; \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Delta'_n &= a\,\Delta_n. \end{aligned}\right\} \tag{10,10}$$

Возведя в квадрат равенства (10,10), сложив их и разделив на n, будем иметь

$$\frac{[\Delta'\Delta']}{n} = a^2\frac{[\Delta\Delta]}{n}. \tag{10,11}$$

На основании (10,4) и (10,8) уравнение (10,11) примет вид

$$m_y^2 = a^2m^2 \tag{10,12}$$

или

$$m_y = am, \tag{10,13}$$

т. е. средняя квадратическая ошибка произведения постоянной величины на непосредственно измеренный аргумент равна произведению этой постоянной на среднюю квадратическую ошибку измеренного аргумента.

Пример. Для определения длины окружности C измерен ее диаметр со средней квадратической ошибкой $m_D = \pm 6$ *мм*. Определить среднюю квадратическую ошибку m_C вычисленной длины окружности.

Длина окружности вычисляется по формуле $C = \pi D$. Согласно формуле (10,13) средняя квадратическая ошибка этой функции

$$m_C = \pi m_D,$$

откуда

$$m_C = \pm 3{,}14 \cdot 6 = \pm 18{,}8 \text{ мм}.$$

II. Фунция суммы (или разности) двух непосредственно измеренных величин

$$Y = L_1 \pm L_2. \tag{10,14}$$

Пусть для определения величин L_1 и L_2 были произведены непосредственные равноточные измерения:

$$\begin{gathered} l'_1,\ l''_1,\ \ldots,\ l_1^{(n)}; \\ l'_2,\ l''_2,\ \ldots,\ l_2^{(n)}, \end{gathered} \tag{10,15}$$

истинные случайные ошибки которых

$$\Delta'_1 = l'_1 - L_1,\quad \Delta''_1 = l''_1 - L_1,\ \ldots,\ \Delta_1^{(n)} = l_1^{(n)} - L_1 \tag{10,16}$$

и

$$\Delta'_2 = l'_2 - L_2,\quad \Delta''_2 = l''_2 - L_2,\ \ldots,\ \Delta_2^{(n)} = l_2^{(n)} - L_2. \tag{10,17}$$

Средние квадратические ошибки измеренных аргументов, вычисленные по их истинным случайным ошибкам (10,16) и (10,17), соответственно определятся:

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{[\Delta_1\Delta_1]}{n}}; \tag{10,18}$$

$$m_2 = \pm\sqrt{\frac{[\Delta_2\Delta_2]}{n}}. \tag{10,19}$$

По непосредственно измеренным аргументам можно составить n функций:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= l'_1 \pm l'_2; \\ y_2 &= l''_1 \pm l''_2; \\ &\cdots\cdots \\ y_n &= l_1^{(n)} \pm l_2^{(n)}. \end{aligned}\right\} \tag{10,20}$$

Истинные ошибки этих функций будут равны:

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= y_1 - Y; \\ \Delta'' &= y_2 - Y; \\ &\cdots\cdots \\ \Delta^{(n)} &= y_n - Y. \end{aligned}\right\} \tag{10,21}$$

По истинным ошибкам функции может быть вычислена ее средняя квадратическая ошибка

$$m_y = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \tag{10,22}$$

Подставив в уравнения (10,21) значения y_i из (10,20) и Y из (10,14), получим:

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= (l'_1 - L_1) \pm (l'_2 - L_2); \\ \Delta'' &= (l''_1 - L_1) \pm (l''_2 - L_2); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{(n)} &= (l_1^{(n)} - L_1) \pm (l_2^{(n)} - L_2). \end{aligned}\right\} \qquad (10,23)$$

Заменив выражения в скобках в уравнениях (10,23) из (10,16) и (10,17) истинными ошибками, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= \Delta'_1 \pm \Delta'_2; \\ \Delta'' &= \Delta''_1 \pm \Delta''_2; \\ &\ldots\ldots \\ \Delta^{(n)} &= \Delta_1^{(n)} \pm \Delta_2^{(n)}. \end{aligned}\right\} \qquad (10,24)$$

Возведя в квадрат равенство (10,24), получим:

$$\left.\begin{aligned} \Delta'\Delta' &= \Delta'_1\Delta'_1 + \Delta'_2\Delta'_2 \pm 2\Delta'_1\Delta'_2; \\ \Delta''\Delta'' &= \Delta''_1\Delta''_1 + \Delta''_2\Delta''_2 \pm 2\Delta''_1\Delta''_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{(n)}\Delta^{(n)} &= \Delta_1^{(n)}\Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)}\Delta_2^{(n)} \pm 2\Delta_1^{(n)}\Delta_2^{(n)}. \end{aligned}\right\} \qquad (10,25)$$

Просуммировав почленно уравнения (10,25), получим выражение

$$[\Delta\Delta] = [\Delta_1\Delta_1] + [\Delta_2\Delta_2] \pm 2\,[\Delta_1\Delta_2]. \qquad (10,26)$$

Разделим все члены уравнения (10,26) на n:

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{[\Delta_1\Delta_1]}{n} + \frac{[\Delta_2\Delta_2]}{n} \pm 2\,\frac{[\Delta_1\Delta_2]}{n}. \qquad (10,27)$$

Поскольку каждое из произведений $\Delta_1^i\Delta_2^i$ ($i = 1, 2, \ldots n$) составлено из ошибок, не входящих в другие произведения, т. е. является независимым и обладает свойствами случайных ошибок, последний член уравнения (10,27) на основании четвертого свойства случайных ошибок будет равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_1\Delta_2]}{n} = 0.$$

Тогда

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{[\Delta_1\Delta_1]}{n} + \frac{[\Delta_2\Delta_2]}{n} \qquad (10,28)$$

или на основании (10,18), (10,19) и (10,22) будем иметь

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2. \qquad (10,29)$$

Следовательно, квадрат средней квадратической ошибки алгебраической суммы двух независимых аргументов равен сумме квадратов средних квадратических ошибок этих слагаемых.

Например, измерены две линии $l_1 = 20,575$ *м* с $m_1 = \pm 0,005$ *м* и $l_2 = 25,830$ *м* с $m_2 = \pm 0,006$ *м*.

Сумма этих двух линий $S = l_1 + l_2 = 46,405$ *м* имеет среднюю квадратическую ошибку $m_S^2 = m_1^2 + m_2^2 = 0,005^2 + 0,006^2$, откуда $m_S = \pm 0,008$ *м*.

Разность этих двух линий $d = l_2 - l_1 = 5,255$ *м*, ее средняя квадратическая ошибка $m_d^2 = m_1^2 + m_2^2$, отсюда $m_d = \pm 0,008$ *м*.

Если $m_1 = m_2 = m$, то

$$m_y = m\sqrt{2}, \tag{10,30}$$

т. е. **средняя квадратическая ошибка алгебраической суммы двух независимо измеренных с одинаковой точностью величин в $\sqrt{2}$ раз больше средней квадратической ошибки одного слагаемого.**

III. Функция алгебраической суммы нескольких слагаемых

$$Y = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n. \tag{10,31}$$

Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — средние квадратические ошибки независимых аргументов. Тогда средняя квадратическая ошибка функции (10,31)

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2. \tag{10,32}$$

Для доказательства возьмем функцию из трех аргументов

$$Y = L_1 \pm L_2 \pm L_3 \tag{10,33}$$

и представим ее так:

$$Y = L_1 \pm U, \tag{10,34}$$

где

$$U = L_2 \pm L_3. \tag{10,35}$$

На основании (10,29) погрешность функции (10,34) будет равна

$$m_y^2 = m_1^2 + m_U^2, \tag{10,36}$$

но погрешность функции (10,35) также на основании (10,29) выразится формулой

$$m_U^2 = m_2^2 + m_3^2. \tag{10,37}$$

Подставив значение m_U^2 из (10,37) в (10,36), получим

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2. \tag{10,38}$$

Продолжая подобные рассуждения для любого числа членов функции (10,31), придем к выражению (10,32), из которого следует, что **квадрат средней квадратической ошибки алгебраической суммы нескольких слагаемых равен сумме квадратов средних квадратических ошибок слагаемых.**

Если при этом средние квадратические ошибки аргументов будут равны между собой $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, то

$$m_y = m\sqrt{n}, \tag{10,39}$$

т. е. средняя квадратическая ошибка алгебраической суммы n равноточно измеренных величин в $\sqrt{n}$ раз больше ошибки одного слагаемого.

Пример 1. В нивелирном ходе получены превышения между четырьмя смежными реперами с соответствующими средними квадратическими ошибками:

$$h_1 = +1{,}347\ м, \quad m_{h_1} = \pm 3{,}6\ мм;$$

$$h_2 = +0{,}863\ м, \quad m_{h_2} = \pm 4{,}3\ мм;$$

$$h_3 = -3{,}275\ м, \quad m_{h_3} = \pm 5{,}7\ мм.$$

Определить общее превышение между крайними реперами и его среднюю квадратическую ошибку.

Общее превышение определится как сумма превышений между смежными реперами по формуле

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = +1{,}347 + 0{,}863 - 3{,}275 = -1{,}065\ м.$$

Средняя квадратическая ошибка этой функции определится по формуле (10,32)

$$m_h^2 = m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + m_{h_3}^2$$

или

$$m_h = \pm\sqrt{(3{,}6)^2 + (4{,}3)^2 + (5{,}7)^2} = \pm\sqrt{63{,}74},$$

откуда

$$m_h = \pm 8\ мм.$$

Пример 2. В вытянутом подземном теодолитном ходе с примерно равными сторонами измерены углы со средней квадратической ошибкой $m_\beta = \pm 20''$. Определить среднюю квадратическую ошибку вычисленного дирекционного угла девятой стороны хода m_{α_9}, считая дирекционный угол исходной стороны величиной безошибочной.

Дирекционный угол девятой стороны

$$\alpha_9 = \alpha_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_9 \pm 180° \cdot 9.$$

Средняя квадратическая ошибка этой функции будет равна

$$m_{\alpha_9}^2 = m_{\alpha_0}^2 + m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2 + \ldots + m_{\beta_9}^2,$$

но

$$m_{\alpha_0} = 0, \quad а \quad m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = \ldots = m_{\beta_9} = m_\beta;$$

тогда

$$m_{\alpha_9} = m_\beta\sqrt{9} = 3m_\beta,$$

откуда

$$m_{\alpha_9} = \pm 3 \cdot 20'' = \pm 60''.$$

IV. Функция линейного вида

$$Y = a_1L_1 \pm a_2L_2 \pm \ldots \pm a_nL_n, \tag{10,40}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторые постоянные положительные коэффициенты.

Средние квадратические ошибки независимых аргументов соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Введем обозначения:

$$\left.\begin{array}{l} a_1L_1 = U_1; \\ a_2L_2 = U_2; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_nL_n = U_n. \end{array}\right\} \qquad (10,41)$$

Подставив их в функцию (10,40), получим

$$Y = U_1 \pm U_2 \pm \ldots \pm U_n. \qquad (10,42)$$

На основании (10,31) и (10,32) можно написать

$$m_y^2 = m_{U_1}^2 + m_{U_2}^2 + \ldots + m_{U_n}^2. \qquad (10,43)$$

Но средние квадратические ошибки функций (10,41) на основании (10,2) и (10,12) будут соответственно равны

$$m_{U_1}^2 = a_1^2m_1^2; \quad m_{U_2}^2 = a_2^2m_2^2; \ \ldots; \ m_{U_n}^2 = a_n^2m_n^2.$$

Подставляя полученные значения в (10,43), запишем

$$m_y^2 = a_1^2m_1^2 + a_2^2m_2^2 + \ldots + a_n^2m_n^2, \qquad (10,44)$$

т. е. квадрат средней квадратической ошибки функции линейного вида равен сумме произведений квадратов коэффициентов на квадраты средних квадратических ошибок соответствующих аргументов.

В случае равноточного измерения аргументов функции (10,40), когда $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, средняя квадратическая ошибка ее будет равна

$$m_y = m\sqrt{[aa]}. \qquad (10,45)$$

Пример. Определить среднюю квадратическую ошибку превышения, найденного геометрическим нивелированием при двух горизонтах инструмента, если средняя квадратическая ошибка отсчета по рейке m.

Среднее превышение из двух горизонтов инструмента определяется по формуле

$$h = \frac{(l_1 - l_2) + (l_1' - l_2')}{2},$$

где l_1 и l_2 — отсчеты по рейкам при первом горизонте;
l_1' и l_2' — отсчеты по рейкам при втором горизонте.

Полученную формулу можно записать в следующем виде:

$$h = \frac{1}{2}l_1 - \frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{2}l_1' - \frac{1}{2}l_2',$$

т. е. будем иметь линейную функцию, средняя квадратическая ошибка которой согласно (10,44) равна

$$m_h^2 = \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}m^2,$$

или согласно (10,45)

$$m_h = m\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}},$$

откуда

$$m_h = m.$$

V. Функция общего вида

Рассмотренные выше функции не исчерпывают всего многообразия случаев, с которыми приходится встречаться в практике маркшейдерского дела и геодезии. В связи с этим разберем задачу в общем виде.

Пусть дана функция общего вида

$$Y = F(L_1, L_2, \ldots, L_n), \tag{10,46}$$

где $L_1, L_2, \ldots, L_n$ — независимые величины, для определения которых произведены соответствующие ряды непосредственных измерений; число этих измерений в рядах будем считать для простоты рассуждений одинаковым, равным K:

$$\left.\begin{array}{l} l_1', l_1'', \ldots, l_1^{(k)}; \\ l_2', l_2'', \ldots, l_2^{(k)}; \\ \cdots\cdots\cdots \\ l_n', l_n'', \ldots, l_n^{(k)}. \end{array}\right\} \tag{10,47}$$

Пусть истинные значения аргументов $L_1, L_2, \ldots, L_n$, а средние квадратические ошибки измерений соответствующих аргументов $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Составим ряд частных значений функций, подставив в них непосредственно измеренные значения аргументов:

$$\left.\begin{array}{l} y' = F(l_1', l_2', \ldots, l_n'); \\ y'' = F(l_1'', l_2'', \ldots, l_n''); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(k)} = F(l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, \ldots, l_n^{(k)}). \end{array}\right\} \tag{10,48}$$

Истинные ошибки функций определятся

$$\Delta^{(i)} = y^{(i)} - Y, \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{10,49}$$

Каждую из измеренных величин на основании (1,2) можно рассматривать как

$$\left.\begin{array}{l} l_1^{(i)} = L_1 + \Delta_1^{(i)}; \\ l_2^{(i)} = L_2 + \Delta_2^{(i)}; \\ \cdots\cdots\cdots \\ l_n^{(i)} = L_n + \Delta_n^{(i)}. \end{array}\right\} \tag{10,50}$$

Тогда уравнения (10,48) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} y' &= F(L_1+\Delta_1', L_2+\Delta_2', \ldots, L_n+\Delta_n'); \\ y'' &= F(L_1+\Delta_1'', L_2+\Delta_2'', \ldots, L_n+\Delta_n''); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(k)} &= F(L_1+\Delta_1^{(k)}, L_2+\Delta_2^{(k)}, \ldots, L_n+\Delta_n^{(k)}). \end{aligned}\right\} \qquad (10,51)$$

Раскладывая функции (10,51) в ряд по строке Тейлора и ограничиваясь, ввиду малости истинных ошибок аргументов, первыми членами ряда, получим:

$$\left.\begin{aligned} y' &= F(L_1, L_2, \ldots, L_n) + \frac{\partial F}{\partial L_1}\Delta_1' + \frac{\partial F}{\partial L_2}\Delta_2' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial L_n}\Delta_n'; \\ y'' &= F(L_1, L_2, \ldots, L_n) + \frac{\partial F}{\partial L_1}\Delta_1'' + \frac{\partial F}{\partial L_2}\Delta_2'' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial L_n}\Delta_n''; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(k)} &= F(L_1, L_2, \ldots, L_n) + \frac{\partial F}{\partial L_1}\Delta_1^{(k)} + \frac{\partial F}{\partial L_2}\Delta_2^{(k)} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial L_n}\Delta_n^{(k)}. \end{aligned}\right\} (10,52)$$

Первые члены правых частей уравнений (10,52) на основании (10,46) представляют истинное значение функции Y. Перенеся их в левые части уравнений, на основании (10,49) получим:

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= \frac{\partial F}{\partial L_1}\Delta_1' + \frac{\partial F}{\partial L_2}\Delta_2' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial L_n}\Delta_n'; \\ \Delta'' &= \frac{\partial F}{\partial L_1}\Delta_1'' + \frac{\partial F}{\partial L_2}\Delta_2'' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial L_n}\Delta_n''; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^{(k)} &= \frac{\partial F}{\partial L_1}\Delta_1^{(k)} + \frac{\partial F}{\partial L_2}\Delta_2^{(k)} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial L_n}\Delta_n^{(k)}. \end{aligned}\right\} \qquad (10,53)$$

Возведя в квадраты полученные уравнения (10,53) и не записывая удвоенные произведения их членов, суммы которых, деленные на K, по четвертому свойству случайных ошибок будут стремиться к нулю, найдем:

$$\begin{aligned} (\Delta')^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\Delta_1'\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2}\Delta_2'\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n}\Delta_n'\right)^2; \\ (\Delta'')^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\Delta_1''\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2}\Delta_2''\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n}\Delta_n''\right)^2; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\Delta^k)^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\Delta_1^{(k)}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L^2}\Delta_2^{(k)}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n}\Delta_n^{(k)}\right)^2; \end{aligned}$$

$$[\Delta^2] = \left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\right)^2 [\Delta_1^2] + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2}\right)^2 [\Delta_2^2] + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n}\right)^2 [\Delta_n^2]. \qquad (10,54)$$

Разделив все члены уравнения (10,54) на K, получим

$$\frac{[\Delta^2]}{K} = \left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\right)^2 \frac{[\Delta_1^2]}{K} + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2}\right)^2 \frac{[\Delta_2^2]}{K} + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n}\right)^2 \frac{[\Delta_n^2]}{K} \qquad (10,55)$$

или, заменив суммы квадратов истинных случайных ошибок аргументов и функции, деленных на K, средними квадратическими ошибками, получим

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n}\right)^2 m_n^2, \qquad (10,56)$$

т. е. квадрат средней квадратической ошибки функции общего вида независимых величин равен сумме произведений квадратов частных производных функции по каждому аргументу на квадраты средних квадратических ошибок соответствующих аргументов.

Значения частных производных в (10,56) вычисляется на практике при подстановке в них измеренных значений аргументов, так как изменения частных производных $\frac{\partial F}{\partial L_i}$ в пределах изменения аргументов от L_i до $L_i + \Delta_i = l_i$ не окажет существенного влияния на точность вычисления средней квадратической ошибки, поэтому можно записать

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial l_n}\right)^2 m_n^2. \qquad (10,57)$$

Пример. Найти средние квадратические ошибки приращений координат Δx и Δy, если известны средние квадратические ошибки m_l и m_α длины линии l и дирекционного угла α:

$$l \pm m_l = 100{,}00 \pm 0{,}02 \text{ м};$$

$$\alpha \pm m_\alpha = 30°00' \pm 1'.$$

Напишем функции

$$\Delta x = l \cos\alpha; \quad \Delta y = l \sin\alpha.$$

По формуле (10,57) найдем

$$m_{\Delta x}^2 = \left(\frac{\partial\,\Delta x}{\partial l}\right)^2 m_l^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta x}{\partial\alpha}\right)^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}; \qquad (а)$$

$$m_{\Delta y}^2 = \left(\frac{\partial\,\Delta y}{\partial l}\right)^2 m_l^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta y}{\partial\alpha}\right)^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}. \qquad (б)$$

Найдем производные

$$\frac{\partial\,\Delta x}{\partial l} = \cos\alpha; \quad \frac{\partial\,\Delta x}{\partial\alpha} = -l\sin\alpha; \quad \frac{\partial\,\Delta y}{\partial l} = \sin\alpha; \quad \frac{\partial\,\Delta y}{\partial\alpha} = l\cos\alpha.$$

Подставив производные в уравнения (а) и (б), получим:

$$m_{\Delta x}^2 = \cos^2\alpha\, m_l^2 + l^2\sin^2\alpha\,\frac{m_\alpha^2}{\rho^2};$$

$$m_{\Delta y}^2 = \sin^2\alpha\, m_l^2 + l^2\cos^2\alpha\,\frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$$

или в числовых значениях

$$m_{\Delta x} = \pm\sqrt{(0{,}87\cdot 0{,}020)^2 + \left(\frac{100\cdot 0{,}5\cdot 1}{3438}\right)^2} = \pm 0{,}023 \text{ м};$$

$$m_{\Delta y} = \pm\sqrt{(0{,}5\cdot 0{,}020)^2 + \left(\frac{100\cdot 0{,}87\cdot 1}{3438}\right)^2} = \pm 0{,}027 \text{ м}.$$

VI. Дифференциальный и логарифмический способы вычисления средней квадратической ошибки функции

При выводе формул средних квадратических ошибок простейших функций и функции общего вида в равенствах (10,10), (10,24), (10,53) была установлена зависимость между истинными ошибками аргументов и функций, которая выражается так же, как и зависимость между дифференциалами тех же функций.

Поэтому для любой функции зависимость между истинными ошибками может быть записана непосредственно на основании правил дифференцирования, заменяя дифференциалы истинными ошибками. Возведя в квадрат все члены полученного выражения, соединяем их знаком плюс и заменяем истинные ошибки средними квадратическими.

Например, пусть дана функция увеличения зрительной трубы $v=\frac{f}{\varphi}$, где f и φ — фокусные расстояния объектива и окуляра. Найти среднюю квадратическую ошибку увеличения v, если средние квадратические ошибки фокусных расстояний равны m_f и m_φ.

По формуле (10,56)

$$m_v^2=\left(\frac{\partial v}{\partial f}\right)^2 m_f^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2 m_\varphi^2$$

или

$$m_v=\pm\frac{1}{\varphi^2}\sqrt{\varphi^2 m_f^2+f^2 m_\varphi^2}.$$

Решим эту задачу, воспользовавшить правилами дифференцирования. Для этого напишем зависимость между истинными ошибками данной функции по правилу дифференцирования

$$\Delta_v=\frac{\varphi\,\Delta_f-f\,\Delta_\varphi}{\varphi^2}.$$

Переходя от истинных ошибок к средним квадратическим, получим

$$m_v^2=\frac{\varphi^2 m_f^2}{\varphi^4}+\frac{f^2 m_\varphi^2}{\varphi^4}$$

или

$$m_v=\pm\frac{1}{\varphi^2}\sqrt{\varphi^2 m_f^2+f^2 m_\varphi^2}.$$

Оба решения привели к одинаковым результатам.

Для функций, представляющих частное, произведение или степень аргументов, средние квадратические ошибки могут быть определены достаточно просто при использовании таблиц логарифмов.

Прологарифмируем функцию увеличения зрительной трубы

$$\lg v=\lg f-\lg\varphi.$$

Если средние квадратические ошибки логарифмов v, f и φ обозначить $m_{\lg v}$, $m_{\lg f}$ и $m_{\lg \varphi}$, то по формуле (10,29)

$$m^2_{\lg v} = m^2_{\lg f} + m^2_{\lg \varphi}.$$

Рассмотрим числовой пример: пусть $f = 198$ *мм*, $m_f = \pm 2$ *мм*, $\varphi = 8$ *мм*, $m_\varphi = \pm 0{,}05$ *мм*. Тогда $m_{\lg f}$ и $m_{\lg \varphi}$ найдем по табличным разностям соответствующих логарифмов

$$\left.\begin{array}{l} \lg 198 = 2{,}2967 \\ \lg 199 = 2{,}2989 \end{array}\right\} \text{Табличная разность равна 22.}$$

При изменении f на 1 *мм* логарифм f изменяется на 22 единицы последнего знака. При изменении f на величину $m_f = \pm 2$ *мм* логарифм f изменится на величину вдвое больше, т. е. $m_{\lg f} = \pm 44$ единицы последнего знака логарифма.

Аналогично находим и для φ.

$$\left.\begin{array}{l} \lg 8{,}0 = 0{,}9031 \\ \lg 8{,}1 = 0{,}9085 \end{array}\right\} \text{Табличная разность равна 54,}$$

откуда $m_{\lg \varphi} = \pm 27$.

Подставив полученные значения $m_{\lg f}$ и $m_{\lg \varphi}$ в формулу $m_{\lg v}$, получим

$$m^2_{\lg v} = (44)^2 + (27)^2 = 2665,$$

откуда

$$m_{\lg v} = \pm 52.$$

Но $\lg v = \lg f - \lg \varphi = 2{,}2967 - 0{,}9031 = 1{,}3936$ или $v = 24{,}75$.

При изменении этого числа на 0,01 логарифм его изменится на 2 единицы, следовательно, изменению логарифма на 52 единицы будет соответствовать изменение числа на 0,26. Итак, $v = 24{,}75 \pm 0{,}26$.

VII. Совместное действие нескольких независимых источников ошибок

Как уже отмечалось в § 3, результаты измерений сопровождаются случайными ошибками, которые зависят от целого ряда факторов и происходят из различных независимых источников. В этом случае истинные ошибки измерений будут представлять собой алгебраические суммы независимых элементарных истинных ошибок, т. е.

$$\Delta^{(i)} = \Delta_1^{(i)} \pm \Delta_2^{(i)} \pm \ldots \pm \Delta_k^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (10{,}58)$$

Аналогичные соотношения (10,24) между истинными ошибками были получены при рассмотрении функции (10,14) алгебраической суммы двух аргументов. Поэтому средняя квадратическая ошибка из-за совместного действия нескольких независимых источников ошибок на основании (10,29) определится по формуле

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_k^2, \qquad (10{,}59)$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — средние квадратические ошибки, обусловленные независимыми источниками.

Таким образом, если для какой-нибудь величины известны средние квадратические ошибки $m_1, m_2, \ldots, m_k$, происходящие из

различных независимых источников, то квадрат средней квадратической ошибки m, происходящей от совокупного влияния всех источников, равен сумме квадратов средних квадратических ошибок отдельных источников.

Так, при измерении направления теодолитом на его точность будут влиять: ошибка отсчета со средним квадратическим значением $m_{\text{от}}$, ошибка визирования m_v и ошибка центрирования m_e. Тогда средняя квадратическая ошибка из-за совокупного влияния этих ошибок в соответствии с (10,59) определится формулой

$$m_\beta = \sqrt{m_{\text{от}}^2 + m_v^2 + m_e^2}.$$

Все выведенные формулы погрешностей могут быть применимы только к функциям, аргументами которых являются независимые переменные.

§ 11. Относительные ошибки

Средняя квадратическая m и предельная $\Delta_{\text{пр}}$ — ошибки, называемые абсолютными, часто не дают полной характеристики качества произведенных измерений. Так, если говорится, что длина некоторой линии измерена со средней квадратической ошибкой ± 5 *мм*, то этого еще недостаточно для суждения о том, насколько точны измерения. Для этого нужно знать также значение измеряемой линии. Если, например, с указанной выше ошибкой измерена линия в 50 *м*, то качество измерений можно характеризовать отношением ошибки m к длине измеряемой величины l:

$$\frac{m}{l} = \frac{1}{\frac{l}{m}} \tag{11,1}$$

или, обозначив $\frac{l}{m}$ через N, получим

$$\frac{m}{l} = \frac{1}{N}. \tag{11,2}$$

Для указанного примера будем иметь

$$\frac{1}{N} = \frac{5}{50\,000} = \frac{1}{10\,000}.$$

Эта дробь называется **о т н о с и т е л ь н о й о ш и б к о й**. Она выражается всегда отвлеченным числом, представляющим простую дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель выражает отношение значения измеренной величины к значению ошибки.

Отношение $\frac{1}{\frac{l}{m}}$ называется о т н о с и т е л ь н о й с р е д н е й к в а д р а т и ч е с к о й о ш и б к о й, а дробь $\frac{1}{\frac{l}{\Delta_{\text{пр}}}}$ — п р е д е л ь н о й о т н о с и т е л ь н о й о ш и б к о й.

В относительной форме можно выражать не только ошибки линейные, но и угловые (в радианах). Это позволяет сопоставлять точности угловых и линейных измерений.

Пусть длина l некоторой линии AB, равная 40 *м*, измерена со средней квадратической ошибкой $m_l = \pm 8$ *мм*, направление этой линии определено с ошибкой $m_\alpha = \pm 0',5$. Определим точность положения точки B (удаленной точки). Под влиянием ошибки в измерении расстояния AB точка B получит продольное смещение, равное ± 8 *мм*, что в относительной мере составит

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{5000}.$$

Под влиянием ошибки направления Δ_α точка B получит поперечный сдвиг

$$q = \frac{\Delta_\alpha}{\rho} l.$$

Тогда средняя квадратическая ошибка поперечного сдвига определится по формуле

$$m_q = \frac{m_\alpha}{\rho} l$$

или в относительной мере

$$\frac{m_q}{l} = \frac{1}{\frac{\rho'}{m_\alpha}} = \frac{1}{\frac{3438}{0,5}} = \frac{1}{6876},$$

где $\rho' = 3438$.

Сопоставляя относительные ошибки, видим, что направление линии AB измерено точнее, чем ее длина.

В практике маркшейдерского дела и геодезии часто даются средние квадратические ошибки десятичных логарифмов величин, для которых нужно определить относительную ошибку.

Пусть задана функция в логарифмическом виде

$$y = \lg l, \tag{11,3}$$

тогда средняя квадратическая ошибка такой функции

$$m_y = \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right) m_l. \tag{11,4}$$

Переведя десятичный логарифм в натуральный и взяв производную, получим

$$m_y = \frac{M}{l} m_l = m_{\lg l}. \tag{11,5}$$

Отсюда

$$\frac{m_l}{l} = \frac{m_{\lg l}}{M}, \tag{11,6}$$

где $M = \lg e = 0,4343$.

Полученная формула (11,6) дает возможность легко находить относительную ошибку любой функции, если известна ошибка десятичного логарифма этой величины.

Если $m_{\lg l}$ дана в единицах седьмого знака логарифмов, то формула (11,6) запишется в следующем виде:

$$\frac{1}{N}=\frac{m_{\lg l}}{M\cdot 10^7}. \qquad (11,7)$$

Пример. Пусть средняя квадратическая ошибка логарифма стороны триангуляции равна $m_{\lg S}=\pm 56$ единицам 7-го знака логарифма *. Определить относительную ошибку стороны.

$$\frac{1}{N}=\frac{m_{\lg S}}{M\cdot 10^7}=\frac{56}{0{,}4343\cdot 10^7}\approx\frac{1}{77\,500}.$$

§ 12. Средняя квадратическая ошибка арифметической средины

В § 7 установлено, что за наиболее надежное значение из ряда равноточных измерений принимается среднее арифметическое, которое вычисляется по формуле (7,4). В развернутом виде она может быть записана так:

$$X=\frac{1}{n}l_1+\frac{1}{n}l_2+\ldots+\frac{1}{n}l_n. \qquad (12,1)$$

Это выражение представляет собой линейную функцию, у которой $\frac{1}{n}$ является коэффициентом, удовлетворяющим условию

$$\left[\frac{1}{n}\right]-1=0. \qquad (12,2)$$

Если средняя квадратическая ошибка одного измерения m, а средняя квадратическая ошибка арифметической средины M, то в соответствии с формулой (10,44) получим

$$M^2=\frac{1}{n^2}m^2+\frac{1}{n^2}m^2+\ldots+\frac{1}{n^2}m^2=\frac{n}{n^2}m^2=\frac{m^2}{n},$$

откуда

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}, \qquad (12,3)$$

т. е. средняя квадратическая ошибка арифметической средины из результатов независимых равноточных измерений в $\sqrt{n}$ раз меньше средней квадратической ошибки одного измерения.

Из формулы (12,3) видно, что с увеличением числа измерений n уменьшается влияние случайных ошибок на окончательный результат, за который мы принимаем среднее арифметическое.

---

* В. А. Романов [13] предлагает эту запись выполнять сокращенно следующим образом: $m_{\lg S}=\pm 56\ [L_7]$.

Однако уменьшение влияния случайных ошибок на среднее арифметическое (т. е. уменьшение средней квадратической ошибки M) происходит не прямолинейно. Характер зависимости между n и M можно установить, если принять $m = 1$ и придавать в формуле (12,3) n различные значения (табл. 4).

Таблица 4

n	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	50	100
M	1,00	0,71	0,58	0,50	0,45	0,41	0,38	0,35	0,32	0,22	0,14	0,10

Из данных таблицы и рис. 4 видно, что увеличение числа наблюдений n целесообразно только до определенного предела (10—20). Дальнейшее увеличение числа наблюдений будет незначительно повышать точность среднего арифметического X.

В связи с этим для повышения точности результата измерений не всегда следует идти по пути увеличения их числа. В ряде случаев разумнее улучшать условия измерений, например: применять более точные инструменты, выполнять измерения в более благоприятных внешних условиях и т. д.

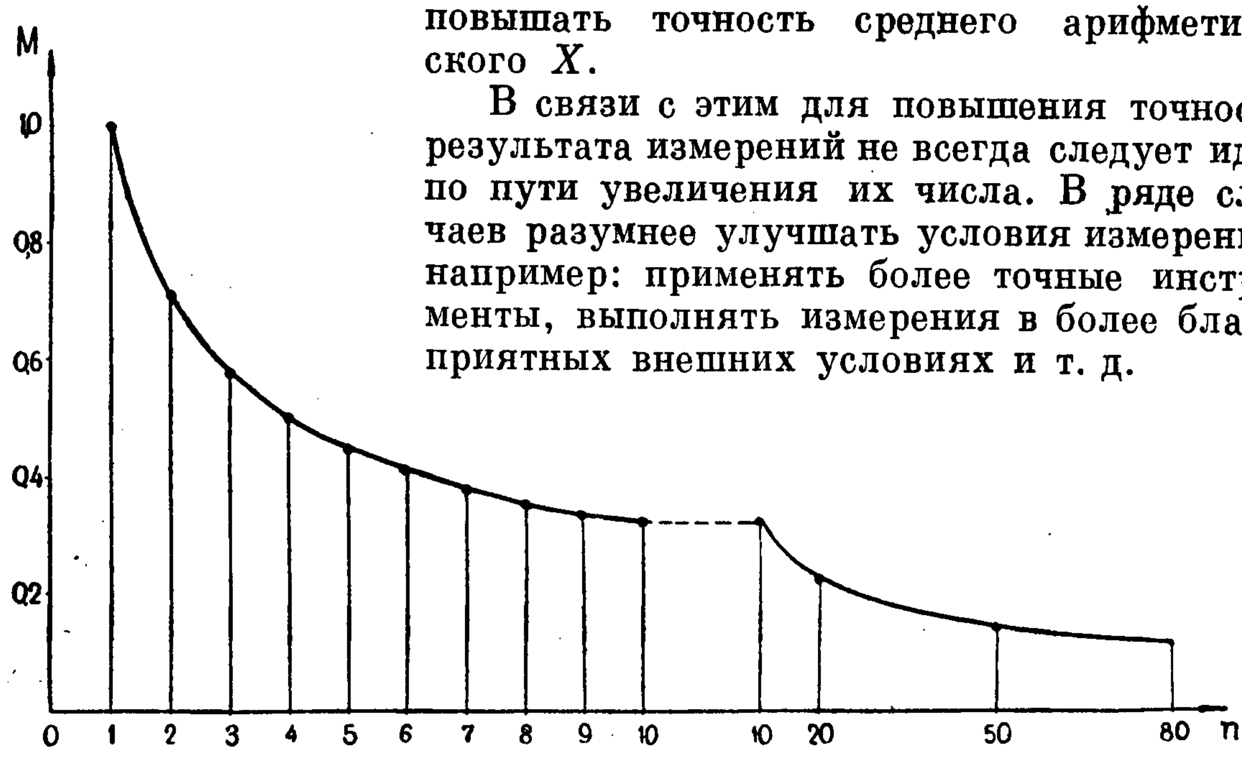


Рис. 4

§ 13. Уклонения измерений от арифметического среднего, их свойства и определение по ним средней квадратической ошибки

Все выведенные выше формулы оценки точности произведенных равноточных измерений предполагают известными истинные ошибки Δ. Однако в большинстве случаев истинные значения измеряемых величин L, а следовательно, и истинные случайные ошибки измерений Δ остаются неизвестными. Поэтому на основании принципа арифметической средины за наиболее надежное значение мы принимаем среднее арифметическое из результатов равноточных измерений X.

Результаты многократных измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$ одной и той же величины будут отличаться от их среднего арифметического на разности

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= l_1 - X; \\ \delta_2 &= l_2 - X; \\ &\ldots\ldots \\ \delta_n &= l_n - X; \end{aligned}\right\} \qquad (13,1)$$

которые называются **уклонениями от среднего арифметического.**

Задача заключается в том, чтобы произвести оценку точности равноточных непосредственных измерений одной и той же величины по уклонениям от среднего арифметического, которыми мы всегда располагаем при наличии ряда измерений. Очевидно, для данного ряда измерений уклонения от арифметической средины будут тем более близки к истинным ошибкам, чем ближе арифметическое среднее к истинному значению измеряемой величины.

Если взять разности между средним арифметическим X и измеренными l значениями, то получим п о п р а в к и ε:

$$\left.\begin{aligned} X - l_1 &= \varepsilon_1; \\ X - l_2 &= \varepsilon_2; \\ &\ldots\ldots \\ X - l_n &= \varepsilon_n \end{aligned}\right\} \qquad (13,2)$$

или

$$\varepsilon_i = -(l_i - X) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (13,3)$$

Подставив вместо выражения в скобках в (13,3) значение δ из (13,1), получим

$$\varepsilon_i = -\delta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (13,4)$$

Следовательно, поправка ε равна по абсолютной величине уклонению δ, но противоположна ему по знаку.

Выясним, какими свойствами обладают уклонения от арифметической средины δ.

Первое свойство. Сложим почленно равенства (13,1)

$$[\delta] = [l] - Xn. \qquad (13,5)$$

Разделив все члены равенства (13,5) на n и подставив значение X из (7,4), получим

$$[\delta] = 0, \qquad (13,6)$$

т. е. алгебраическая сумма уклонений от среднего арифметического для данного ряда равноточных измерений равна нулю при любом числе n.

Второе свойство. Вместо среднего арифметического X возьмем некоторое другое число X' и найдем уклонения от него измеренных величин:

$$\left.\begin{array}{l} l_1-X'=v_1; \\ l_2-X'=v_2; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l_n-X'=v_n. \end{array}\right\} \qquad (13,7)$$

Найдем разность равенств (13,1) и (13,7):

$$\left.\begin{array}{l} (l_1-X)-(l_1-X')=\delta_1-v_1; \\ (l_2-X)-(l_2-X')=\delta_2-v_2; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (l_n-X)-(l_n-X')=\delta_n-v_n. \end{array}\right\} \qquad (13,8)$$

Раскрыв скобки в (13,8), получим

$$\left.\begin{array}{l} X'-X=\delta_1-v_1; \\ X'-X=\delta_2-v_2; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X'-X=\delta_n-v_n. \end{array}\right\} \qquad (13,9)$$

Постоянную величину разности $X'-X$ обозначим η, тогда

$$\left.\begin{array}{l} v_1=\delta_1-\eta; \\ v_2=\delta_2-\eta; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n=\delta_n-\eta. \end{array}\right\} \qquad (13,10)$$

Возведем равенства (13,10) в квадрат и сложим

$$[v^2]=[\delta^2]+\eta^2 n-2\eta[\delta]. \qquad (13,11)$$

На основании (13,6) последний член формулы (13,11) будет равен нулю, тогда получим

$$[\delta\delta]=[vv]-n\eta^2. \qquad (13,12)$$

Все члены этого равенства величины положительные, поэтому

$$[\delta\delta]<[vv]. \qquad (13,13)$$

Отсюда вытекает следующее свойство: **сумма квадратов $[\delta\delta]$ уклонений данного ряда измеренных величин от их среднего арифметического X всегда будет меньше суммы квадратов уклонений измеренных величин данного ряда $[vv]$ от любого числа X', не равного среднему арифметическому.**

Пусть дан ряд результатов равноточных измерений одной и той же величины $l_1, l_2, \ldots, l_n$, истинное значение которой L, а среднее арифметическое X.

Составим два ряда уклонений:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = l_1 - L; \\ \Delta_2 = l_2 - L; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta_n = l_n - L;\end{array}\right\} \qquad (13,14)$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta_1 = l_1 - X; \\ \delta_2 = l_2 - X; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_n = l_n - X.\end{array}\right\} \qquad (13,15)$$

Найдем разность равенств (13,14) и (13,15):

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 - \delta_1 = X - L; \\ \Delta_2 - \delta_2 = X - L; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta_n - \delta_n = X - L.\end{array}\right\} \qquad (13,16)$$

Перенеся уклонения δ в правую часть уравнений (13,16), возведем их в квадрат и сложим:

$$\begin{array}{l}\Delta_1 \Delta_1 = \delta_1\delta_1 + (X - L)^2 + 2\delta_1 (X - L); \\ \Delta_2 \Delta_2 = \delta_2\delta_2 + (X - L)^2 + 2\delta_2 (X - L); \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta_n \Delta_n = \delta_n\delta_n + (X - L)^2 + 2\delta_n (X - L); \\ \hline [\Delta\Delta] = [\delta\delta] + n (X - L)^2 + 2 [\delta] (X - L).\end{array} \qquad (13,17)$$

На основании первого свойства уклонений от среднего арифметического последний член равенства (13,17) обращается в нуль, тогда

$$[\Delta\Delta] - n (X - L)^2 = [\delta\delta]. \qquad (13,18)$$

Из равенства (13,18) вытекает еще одно свойство уклонений от среднего арифметического

$$[\Delta\Delta] > [\delta\delta], \qquad (13,19)$$

т. е. сумма квадратов уклонений всегда меньше суммы квадратов истинных ошибок.

Обе части равенства (13,18) разделим на n и запишем в следующем виде:

$$(X - L)^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n} - \frac{[\delta\delta]}{n}. \qquad (13,20)$$

На основании (7,6) и (8,2) можно утверждать, что

$$\omega^2 = m^2 - \frac{[\delta\delta]}{n}, \tag{13,21}$$

т. е. **квадрат истинной ошибки среднего арифметического меньше квадрата средней квадратической ошибки отдельного измерения данного ряда, что подтверждает правильность выбора арифметической средины как наиболее надежного значения.**

В выражении (13,18) слагаемые левой части, как правило, остаются неизвестными. В этих условиях наиболее надежными их характеристиками будут средние арифметические из всех значений, которые могут принять каждое из слагаемых.

Тогда на основании формулы (8,2)

$$[\Delta\Delta] = nm^2, \tag{13,22}$$

а среднее $\frac{[\omega\omega]}{N}$ из всех возможных значений квадратов истинной ошибки среднего арифметического будет являться квадратом средней квадратической ошибки арифметического среднего $M^2 = \frac{m^2}{n}$.

Подставив эти значения в формулу (13,18), получим

$$nm^2 - \frac{m^2}{n} n = [\delta\delta] \tag{13,23}$$

или

$$m^2 (n-1) = [\delta\delta], \tag{13,24}$$

откуда

$$m^2 = \frac{[\delta\delta]}{n-1} \tag{13,25}$$

или

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}. \tag{13,26}$$

Средняя квадратическая ошибка данного ряда равноточных измерений равна корню квадратному из суммы квадратов уклонений от арифметической средины, деленной на число избыточных измерений.

Этой формулой, выведенной немецким астрономом и геодезистом Бесселем, пользуются на практике для вычисления средней квадратической ошибки.

Так как обычно имеем дело с ограниченным числом наблюдений, то и вычисленное значение средней квадратической ошибки m по ограниченному ряду уклонений не будет равно стандарту m_0 и определится со средней квадратической ошибкой m_m, которая может быть вычислена по формуле

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{13,27}$$

Средняя квадратическая ошибка арифметической средины по уклонениям от нее определится по формуле

$$M=\pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}}, \tag{13,28}$$

которая получится, если значение m из (13,26) подставить в формулу (12,3).

Пример. Для исследования точности измерения горизонтальных углов 30″-ным теодолитом угол в подземной выработке был измерен 13 раз, без изменения центрировки теодолита и сигналов. Результаты измерений приведены в табл. 5. Вычислить наиболее надежное значение измеренного угла, среднюю квадратическую ошибку отдельного измерения и среднюю квадратическую ошибку среднего значения.

Таблица 5

№	Результаты измерений угла	l', сек	δ, сек	$\delta\delta$	Формулы и вычисления
1	177° 44′ 23″	15	+7	49	$\frac{[l']}{n}=\frac{103}{13}=8''$
2	23″	15	+7	49	
3	23″	15	+7	49	
4	15″	7	−1	1	$m=\pm\sqrt{\frac{505}{12}}=\pm6''$
5	08″	0	−8	64	
6	15″	7	−1	1	
7	08″	0	−8	64	$m_m=\frac{6}{\sqrt{2(n-1)}}=\pm2''$
8	08″	0	−8	64	
9	23″	15	+7	49	
10	08″	0	−8	64	$M=\pm\frac{6}{\sqrt{13}}=\pm2''$
11	15″	7	−1	1	
12	23″	15	+7	49	
13	15″	7	−1	1	
l_0	177° 44′ 08″	103	+35	505	
$\frac{[l']}{n}$	8″		−36		
			$[\delta]=+1$		
X	177° 44′ 16″	$[\|\delta\|]=71$			

§ 14. Формула Петерса

На основании формулы (9,1) при достаточно большом n можно записать

$$\frac{[|\Delta|]}{n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \tag{14,1}$$

Для уклонений от арифметической средины δ, обладающих свойствами случайных ошибок, в теории вероятностей доказывается соотношение, аналогичное (14,1):

$$\frac{[|\delta|]}{n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n}}. \tag{14,2}$$

Умножив и разделив выражение под вторым корнем в правой части равенства (14,2) на $n-1$, получим

$$\frac{[|\delta|]}{n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{[\delta\delta](n-1)}{n(n-1)}}. \qquad (14,3)$$

Тогда

$$\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{[|\delta|]}{\sqrt{n(n-1)}}. \qquad (14,4)$$

Отсюда на основании (13,26)

$$m=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{[|\delta|]}{\sqrt{n(n-1)}}. \qquad (14,5)$$

Так как с достаточной точностью

$$\sqrt{n^2-n}\approx n-\frac{1}{2},$$

то

$$m=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{[|\delta|]}{n-\frac{1}{2}}. \qquad (14,6)$$

Тогда на основании (9,1) будем иметь

$$\Theta=\frac{[|\delta|]}{n-\frac{1}{2}}. \qquad (14,7)$$

Это и есть формула Петерса.

Формула (14,6) может служить контрольной при вычислении средней квадратической ошибки.

Воспользуемся данными примера, приведенного в § 13, и вычислим значение m по формуле (14,6)

$$m=1,253\frac{71}{13-\frac{1}{2}}=\pm 7''.$$

Этот результат подтверждает значение m, полученное в § 13.

§ 15. Определение средней квадратической ошибки по результатам однородных двойных измерений

В маркшейдерской и геодезической практике часто встречаются случаи, когда одна и та же величина измерена независимо два раза, т. е. двойные измерения однородных величин. Например, измерение углов и длин в подземных теодолитных ходах, определение превышения между маркшейдерскими точками и т. д. Такие данные на каждой шахте имеются в достаточном количестве. Возникает вопрос об использовании их для оценки точности произведенных измерений.

Пусть имеем результаты равноточных двойных независимых измерений однородных величин

$$\left.\begin{array}{l} l'_1,\ l'_2,\ \ldots,\ l'_n; \\ l''_1,\ l''_2,\ \ldots,\ l''_n. \end{array}\right\} \qquad (15,1)$$

Составим их разности:

$$\left.\begin{array}{l} l'_1 - l''_1 = d_1; \\ l'_2 - l''_2 = d_2; \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ l'_n - l''_n = d_n. \end{array}\right\} \qquad (15,2)$$

Если бы все измерения были абсолютно точными, то каждая разность двойных измерений d_i была бы равна нулю, т. е.

$$L_i - L_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Следовательно, нуль есть истинное значение каждой разности двух измерений, а d_i — измеренное значение этой разности. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} d_1 - 0 = d_1; \\ d_2 - 0 = d_2; \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ d_n - 0 = d_n. \end{array}\right\} \qquad (15,3)$$

Отсюда вытекает, что $d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n$ являются истинными ошибками разностей. Поэтому по ним можно вычислить среднюю квадратическую ошибку разности:

$$m_d = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{n}}. \qquad (15,4)$$

С другой стороны, согласно формуле (10,30), средняя квадратическая ошибка разности двух равноточных измерений m_d в $\sqrt{2}$ раз больше средней квадратической ошибки одного измерения m, т. е.

$$m_d = m\sqrt{2}, \qquad (15,5)$$

откуда

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}}. \qquad (15,6)$$

Подставив в это выражение значение m_d из (15,4), получим

$$m = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}}. \qquad (15,7)$$

Наличие систематических ошибок в разностях двойных измерений d можно обнаружить по преобладанию в них одного знака и по неравенству нулю величины $\frac{[d]}{n}$ при значительном числе n.

Чтобы судить о влиянии только случайных ошибок на результаты измерений, исключим из разностей d систематические ошибки. Для этого определим величину систематической ошибки, приходящуюся на одну разность,

$$\frac{[d]}{n} = d_0. \tag{15,8}$$

Исправляя на нее все разности, получим:

$$\left.\begin{aligned} d_1 - d_0 &= d'_1; \\ d_2 - d_0 &= d'_2; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_n - d_0 &= d'_n. \end{aligned}\right\} \tag{15,9}$$

Так как величина d_0 есть среднее арифметическое, то d' можно рассматривать как уклонение от него. Это подтверждается еще и следующим: возьмем сумму равенств (15,9)

$$[d] - d_0 n = [d'] \tag{15,10}$$

и подставим в полученное выражение значение d_0 из (15,8), будем иметь

$$[d'] = 0. \tag{15,11}$$

Таким свойством обладают только уклонения от среднего арифметического. Тогда, применяя формулу Бесселя (13,26), можно записать

$$m_d = \pm \sqrt{\frac{[d'd']}{n-1}}. \tag{15,12}$$

Подставив значение m_d в (15,6), получим

$$m = \pm \sqrt{\frac{[d'd']}{2(n-1)}}. \tag{15,13}$$

В этом случае ошибка измерения будет состоять из двух слагаемых: из постоянной части, характеризующейся величиной d_0, и случайной части, средняя квадратическая величина которой определяется по формуле (15,13). Учет совместного влияния этих ошибок будет рассмотрен в следующем параграфе.

Однако при наличии однородных двойных равноточных измерений, на их разности некоторые источники ошибок совсем не будут влиять из-за их компенсации. В разностях будут исключены односторонне действующие систематические ошибки. Поэтому разности d не выявят полностью влияния всех источников ошибок каждого отдельного измерения; вследствие этого значение средней квадратической ошибки одного измерения, вычисленное по формуле (15,7) или (15,13), как правило, оказывается преуменьшенным.

Пример. Определить среднюю квадратическую ошибку измерения длин линий по разностям двойных измерений (l' и l''), приведенных в табл. 6.

Таблица 6

№ линий	Длина линии, м l'	l''	d, мм	d', мм	$d'd'$	Формулы и вычисления
1	27,463	27,465	−2	−2,5	6,25	$d_0 = \frac{[d]}{n} = +0{,}5$ мм
2	27,187	27,184	+3	+2,5	6,25	
3	27,921	27,917	+4	+3,5	12,25	$m = \pm\sqrt{\frac{[d'd']}{2(n-1)}}$
4	27,358	27,355	+3	+2,5	6,25	
5	27,638	27,640	−2	−2,5	6,25	
6	27,746	27,743	+3	+2,5	6,25	
7	27,139	27,142	−3	−3,5	12,25	$m = \pm\sqrt{\frac{74{,}5}{18}} = \pm 2{,}1$ мм
8	27,381	27,383	−2	−2,5	6,25	
9	27,247	27,244	+3	+2,5	6,25	
10	27,833	27,835	−2	−2,5	6,25	
			+16 −11	+13,5 −13,5	74,50	
			$[d] = +5$	0,0		

§ 16. Оценка точности при совместном влиянии случайных и систематических ошибок измерений

При рассмотрении вопросов определения наиболее надежного значения измеряемой величины и оценки точности ранее исходили из того, что результаты измерений не содержат систематических ошибок. Однако не всегда удается полностью их исключить. Так, например, на результаты измерений длин будет влиять систематическая ошибка за компарирование, оставшаяся в результатах измерений после введения соответствующих поправок. Вследствие этого возникает вопрос, как произвести оценку точности измерений, содержащих кроме случайных систематические ошибки.

Рассмотрим несколько случаев.

1. **Наличие в результатах измерений постоянных ошибок.** Пусть дан ряд равноточных измерений одной и той же величины $l_1, l_2, \ldots, l_n$, истинное значение которой L, а среднее X. Допустим, что истинные ошибки произведенных измерений $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ состоят из случайных ошибок $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ и постоянной ошибки U, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 &= \Delta_1 + U; \\ \partial_2 &= \Delta_2 + U; \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \partial_n &= \Delta_n + U. \end{aligned}\right\} \qquad (16{,}1)$$

Тогда на основании (1,2) запишем

$$\left.\begin{aligned} L &= l_1 - \partial_1; \\ L &= l_2 - \partial_2; \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L &= l_n - \partial_n. \end{aligned}\right\} \qquad (16,2)$$

Подставив в равенства (16,2) значения ∂_i из (16,1), получим

$$\left.\begin{aligned} L &= l_1 - \Delta_1 - U; \\ L &= l_2 - \Delta_2 - U; \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L &= l_n - \Delta_n - U. \end{aligned}\right\} \qquad (16,3)$$

Просуммируем равенства (16,3) и разделим на n:

$$L = \frac{[l]}{n} - \frac{[\Delta]}{n} - U.$$

Заменив $\frac{[l]}{n}$ через X и приняв $\frac{[\Delta]}{n}$ равной нулю при $n \to \infty$ на основании четвертого свойства случайных ошибок, будем иметь

$$\lim_{n \to \infty} X = L + U. \qquad (16,4)$$

Таким образом, предельное значение среднего арифметического из ряда равноточных измерений при $n \to \infty$ будет отличаться от истинного значения L на величину постоянной ошибки U.

Если значение постоянной ошибки U исключить из результатов измерений

$$\left.\begin{aligned} l_1 - U &= l'_1; \\ l_2 - U &= l'_2; \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l_n - U &= l'_n \end{aligned}\right\} \qquad (16,5)$$

и найти среднее арифметическое

$$X' = \frac{[l']}{n}, \qquad (16,6)$$

то оно будет отличаться от X на величину постоянной ошибки U.

Для оценки точности определим уклонения от X'

$$\delta'_i = l'_i - X' \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \qquad (16,7)$$

Средняя квадратическая ошибка будет равна

$$m' = \pm\sqrt{\frac{[\delta'\delta']}{n-1}}. \qquad (16,8)$$

В том случае, когда постоянная ошибка U не исключена,

$$\delta_i = l_i - X \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{16,9}$$

а средняя квадратическая ошибка отдельного измерения

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}. \tag{16,10}$$

Просуммировав равенства (16,5) и разделив на n, получим

$$\frac{[l]}{n} - U = \frac{[l']}{n}$$

или

$$X' = X - U. \tag{16,11}$$

Подставив в (16,7) значения (16,5) и (16,11)

$$\delta'_i = l_i - U - X + U \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{16,12}$$

и произведя приведение подобных, будем иметь

$$\delta'_i = l_i - X \tag{16,13}$$

или на основании (16,9)

$$\delta'_i = \delta_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{16,14}$$

Тогда

$$m' = m, \tag{16,15}$$

т. е. средняя квадратическая ошибка отдельного измерения, вычисленная по уклонениям от арифметической средины, не учитывает наличия в результатах измерений постоянной ошибки U.

2. Наличие в результатах измерений переменной систематической ошибки. Пусть дан ряд равноточных измерений, истинные ошибки которых ∂_i содержат случайную ошибку Δ_i и переменную систематическую ошибку σ_i. Тогда можно записать

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 &= \Delta_1 + \sigma_1; \\ \partial_2 &= \Delta_2 + \sigma_2; \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \partial_n &= \Delta_n + \sigma_n. \end{aligned}\right\} \tag{16,16}$$

На основании (1,2)

$$l_i = L + \Delta_i + \sigma_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{16,17}$$

Сложив почленно уравнения (16,17) и разделив на n, будем иметь

$$\frac{[l]}{n} = L + \frac{[\Delta]}{n} + \frac{[\sigma]}{n}. \tag{16,18}$$

На основании определений случайных и систематических ошибок, данных в § 3, из равенства (16,18) можно получить

$$\lim_{n\to\infty} X = L + \sigma_0, \tag{16,19}$$

где

$$\sigma_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{[\sigma]}{n}. \tag{16,20}$$

Систематические ошибки могут быть представлены, как

$$\sigma_i = \sigma_0 + \sigma'_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{16,21}$$

где σ_0 — постоянная часть систематической ошибки, определяемая по (16,20);

σ'_i — переменная часть, обладающая четвертым свойством случайных ошибок.

Из (16,19) видно, что предельное значение среднего арифметического X отличается от истинного значения L на σ_0.

Найдем уклонения от арифметической средины

$$\delta_i = l_i - X \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{16,22}$$

Подставив в них значения l_i и X из (16,17) и (16,18), получим

$$\delta_i = \Delta_i - \frac{[\Delta]}{n} + \sigma_i - \frac{[\sigma]}{n} \tag{16,23}$$

или на основании (16,21)

$$\delta_i = \Delta_i - \frac{[\Delta]}{n} + \sigma_0 + \sigma'_i - \sigma_0 - \frac{[\sigma']}{n}, \tag{16,24}$$

откуда

$$\delta_i = \Delta_i - \frac{[\Delta]}{n} + \left(\sigma'_i - \frac{[\sigma']}{n}\right). \tag{16,25}$$

Из равенства (16,25) видно, что на уклонения от арифметической средины постоянная часть систематической ошибки σ_0 влияния не оказывает.

Возведя равенства (16,25) в квадрат и сложив их, получим

$$[\delta\delta] = [\Delta\Delta] - \frac{[\Delta]^2}{n} + [(\sigma')^2] - \frac{[\sigma']^2}{n}. \tag{16,26}$$

В этом выражении заменим:

$$[\Delta\Delta] = m_\Delta^2 n; \qquad \frac{[\Delta]^2}{n} = m_\Delta^2; \qquad [(\sigma')^2] = m_{\sigma'}^2 n;$$

$$\frac{[\sigma']^2}{n} = m_{\sigma'}^2$$

и разделим на $n - 1$, тогда

$$\frac{[\delta\delta]}{n-1} = \frac{m_\Delta^2 n - m_\Delta^2}{n-1} + \frac{m_{\sigma'}^2 n - m_{\sigma'}^2}{n-1} \tag{16,27}$$

или

$$m_0^2 = m_\Delta^2 + m_{\sigma'}^2. \tag{16,28}$$

Из формулы (16,28) следует, что вычисленная по уклонениям от арифметической средины средняя квадратическая ошибка измерений, содержащих случайные и систематические ошибки, отражает влияние случайных ошибок и переменной части систематических ошибок.

§ 17. Средняя квадратическая ошибка округления

При использовании результатов измерений для дальнейших вычислений в маркшейдерской и геодезической практике применяется ряд табличных величин, которые выражаются иррациональными числами в виде бесконечных десятичных дробей и даются в таблицах округленными.

Определение средних значений из результатов измерений также сопровождается ошибками округлений. Таким образом, конечный результат вычислений кроме ошибок измерений содержит еще и ошибки округлений.

Так, при вычислении приращений координат берутся натуральные значения функций sin и cos дирекционного угла, которые в таблицах приведены округленными.

Разность между истинной величиной и ее округленным значением называется истинной ошибкой округления e.

В большинстве случаев истинные ошибки округления как по величине, так и по знаку остаются неизвестными. Однако по округленному числу легко установить его предельную ошибку округления α.

Согласно общеизвестным правилам округления абсолютная величина этой ошибки равна половине единицы последнего десятичного знака округленного числа. Взяв из таблицы число 0,75396, легко установить, что его предельная ошибка округления $\alpha = \pm 0{,}000005 = \pm 0{,}5 \cdot 10^{-5}$, или, обобщая, можно установить, что если в округленном числе n десятичных знаков, то предельная ошибка округления будет равна

$$\alpha = \pm 0{,}5 \cdot 10^{-n}. \tag{17,1}$$

Ошибки округления, как и ошибки измерения, являются ошибками случайными. Однако они не подчиняются второму свойству случайных ошибок измерений, так как ошибки округления, по абсолютной величине меньшие предельной, одинаково возможны.

Область возможных ошибок округления в пределах от $-\alpha$ до $+\alpha$ является непрерывной. Разделим ее на отдельные интервалы величиной e, в пределах каждого из которых будет считать ошибки округлений равными между собой и равными по величине значению ошибки, соответствующей средине интервала. Тогда все ошибки округления могут быть представлены в виде следующего дискретного ряда:

$$-ne, \ldots, -3e, -2e, -e, 0, +e, +2e, +3e, \ldots, +ne, \quad (17,2)$$

где e — интервал изменения ошибок округления, общее число которых равно $2n+1$;

$\pm ne = \alpha$ — предельная ошибка округления.

Так как ошибки округления являются истинными случайными ошибками, то для определения средней квадратической ошибки округления можно применить формулу (8,2)

$$m_{\text{ок}} = \pm\sqrt{\frac{(-ne)^2 + \ldots + (-3e)^2 + (-2e)^2 + (-e)^2 + e^2 + (2e)^2 + (3e)^2 + \ldots + (ne)^2}{2n+1}}. \quad (17,3)$$

Преобразовав числитель в формуле (17,3) и вынеся из-под радикала e, получим

$$m_{\text{ок}} = \pm e\sqrt{\frac{2(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)}{2n+1}}. \quad (17,4)$$

Сумма квадратов натурального ряда чисел равна

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

следовательно,

$$m_{\text{ок}} = \pm e\sqrt{\frac{(n+1)n}{3}}. \quad (17,5)$$

Подставив вместо e в (17,5) его значение, равное $\frac{\alpha}{n}$, получим

$$m_{\text{ок}} = \pm\alpha\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}}. \quad (17,6)$$

Но при n, достаточно большом, членом $\frac{1}{3n}$ в (17,6) можно пренебречь, тогда

$$m_{\text{ок}} = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \quad (17,7)$$

Таким образом, средняя квадратическая ошибка округления $m_{\text{ок}}$ в $\sqrt{3}$ раз меньше предельной ошибки округления α.

Рассмотрим, как влияют на точность полученного результата вычислений ошибки округлений.

1. **Сложение и вычитание.** Возьмем сумму ряда чисел с различным количеством десятичных знаков

$$\begin{array}{r} 17,3 \\ 1,436 \\ 0,24 \\ 0,01368 \\ \hline 18,98968 \end{array}$$

Очевидно, без ущерба для точности получаемой суммы можно округлить каждое слагаемое так, чтобы оно имело на одну значащую цифру больше, чем их содержится в наиболее грубо округленном числе.

Так как в первом слагаемом приведенного примера предельная ошибка округления равна $\pm 0{,}05$, то в полученной сумме сотые доли будут уже неверны, поэтому три последние цифры без понижения точности суммы можно отбросить:

$$\begin{array}{r} 17{,}3 \\ 1{,}44 \\ 0{,}24 \\ 0{,}01 \\ \hline 18{,}99 \end{array}$$

Второй десятичный знак сохраняется для того, чтобы в сумму не внести новой ошибки округления.

Определим теперь среднюю квадратическую ошибку алгебраической суммы ряда слагаемых

$$S = Z_1 \pm Z_2 \pm \ldots \pm Z_n \tag{17,8}$$

при условии, что их предельные ошибки округления равны α.

Если средняя квадратическая ошибка округления одного слагаемого $m_{\text{ок}}$, а средняя квадратическая ошибка суммы n слагаемых m_S, то

$$m_S = m_{\text{ок}} \sqrt{n}. \tag{17,9}$$

Подставив в (17,9) значение $m_{\text{ок}}$ из (17,7), получим

$$m_S = \pm \alpha \sqrt{\frac{n}{3}} \tag{17,10}$$

или

$$\alpha_S = \alpha \sqrt{n}. \tag{17,11}$$

Предельная ошибка округления суммы равна предельной ошибке округления слагаемого на корень квадратный из числа слагаемых.

2. **Умножение и деление.** Определим точность произведения n приближенных множителей

$$R = Z_1 Z_2 \ldots Z_n. \tag{17,12}$$

Возьмем натуральный логарифм этого произведения

$$\ln R = \ln Z_1 + \ln Z_2 + \ldots + \ln Z_n \tag{17,13}$$

и запишем полный дифференциал выражения (17,13). Заменив дифференциалы ошибками, найдем зависимость между истинными ошибками аргументов и функции:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta Z_1}{Z_1} + \frac{\Delta Z_2}{Z_2} + \ldots + \frac{\Delta Z_n}{Z_n}. \tag{17,14}$$

Перейдя к средним квадратическим ошибкам, найдем

$$\left(\frac{m_R}{R}\right)^2=\left(\frac{m_1}{Z_1}\right)^2+\left(\frac{m_2}{Z_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{m_n}{Z_n}\right)^2, \qquad (17,15)$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — средние квадратические ошибки аргументов функции (17,13);

m_R — средняя квадратическая ошибка произведения.

Допустив, что

$$\frac{m_1}{Z_1}=\frac{m_2}{Z_2}=\ldots=\frac{m_n}{Z_n}=\frac{m}{Z},$$

из формулы (17,15) найдем

$$\frac{m_R}{R}=\frac{m}{Z}\sqrt{n}. \qquad (17,16)$$

Подставив в (17,16) значение m из (17,7), получим

$$\frac{m_R}{R}=\frac{\alpha}{Z}\sqrt{\frac{n}{3}} \qquad (17,17)$$

или

$$\frac{\alpha_R}{R}=\frac{\alpha}{Z}\sqrt{n}. \qquad (17,18)$$

Предельная относительная ошибка округления произведения равна предельной относительной ошибке сомножителей на корень из их числа.

Так как деление какого-либо числа на N равносильно умножению на $\frac{1}{N}$, то все выводы, сделанные относительно умножения приближенных чисел, справедливы и для деления.

3. Возведение в степень и извлечение корня. Пусть даны функции:

$$Y=X^n; \qquad (17,19)$$

$$Y=\sqrt[n]{X}, \qquad (17,20)$$

где X — приближенное число, а n — целое число. Прологарифмировав их, будем иметь:

$$\ln Y=n\ln X, \qquad (17,21)$$

$$\ln Y=\frac{1}{n}\ln X. \qquad (17,22)$$

Средние квадратические ошибки этих функций согласно формуле (10,56) равны:

$$m_Y=nX^{n-1}m_X; \qquad (17,23)$$

$$m_Y=\frac{1}{n}X^{\frac{1}{n}-1}m_X, \qquad (17,24)$$

а их относительные ошибки соответственно:

$$\frac{m_Y}{Y} = n \frac{m_X}{X}; \tag{17,25}$$

$$\frac{m_Y}{Y} = \frac{1}{n} \cdot \frac{m_X}{X}. \tag{17,26}$$

Отсюда вытекает, что:

1) **при возведении приближенного числа в степень относительная средняя квадратическая ошибка его увеличивается пропорционально показателю степени;**

2) **относительная средняя квадратическая ошибка корня n-ой степени из приближенного числа в n раз меньше, чем средняя квадратическая ошибка самого числа.**

Глава II

НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 18. Неравноточные измерения и их веса

Как уже отмечалось выше (§ 2), в практике маркшейдерского дела и геодезии часто встречаются неравноточные измерения, результаты которых обладают различной степенью надежности в связи с изменением условий наблюдений. Очевидно, при определении наиболее надежного значения из ряда таких неравноточных измерений уже нельзя будет воспользоваться просто арифметической срединой, потому что на окончательный результат более точные измерения должны оказывать и большее влияние, иначе говоря, при выводе окончательного значения мы должны учитывать достоинство каждого измерения.

Достоинство результата измерения, меру его надежности обозначают числом, называемым весом этого измерения, т. е. **весом называют степень доверия к результату измерения, выраженную числом.**

Чем лучше условия измерения, чем надежнее результат, тем больше его вес, т. е. тем больше наше доверие к нему. Таким образом, вес характеризует условия измерения. С другой стороны, определенным условиям измерений соответствует определенная средняя квадратическая ошибка. Отсюда вытекает взаимосвязь между весом и средней квадратической ошибкой: чем меньше средняя квадратическая ошибка какого-нибудь измерения, тем надежнее результаты, а следовательно, тем больше его вес. Исходя из сказанного **за веса результатов измерений принимают величины, обратно пропорциональные квадратам соответствующих им средних квадратических ошибок.**

Пусть некоторая величина измерялась неравноточно n раз: l_1, l_2, . . ., l_n. Средние квадратические ошибки измерений соответственно равны: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Веса этих измерений могут быть выражены:

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2}; \quad p_2 = \frac{1}{m_2^2}; \ldots; \quad p_n = \frac{1}{m_n^2}. \qquad (18,1)$$

Однако в силу того, что веса являются величинами относительными, призванными характеризовать степень надежности одних результатов по сравнению с другими, для нас имеют значение не абсолютные их величины, а лишь их отношения.

Поэтому выражения весов (18,1) можно записать в следующем виде:

$$p_1 = \frac{C^2}{m_1^2}; \quad p_2 = \frac{C^2}{m_2^2}; \ldots; \quad p_n = \frac{C^2}{m_n^2}, \qquad (18,2)$$

где C^2 — коэффициент пропорциональности, который может быть выбран любым, но обязательно одинаковым для выражения всех весов данного ряда измерений.

Если при измерении некоторой величины были получены результаты со средними квадратическими ошибками $m_1 = \pm 0{,}3$ и $m_2 = \pm 0{,}5$, то веса этих измерений по (18,1) будут равны

$$p_1 = \frac{1}{0{,}09}, \quad p_2 = \frac{1}{0{,}25}.$$

Очевидно, дальнейшее использование таких весов будет весьма затруднительным.

Приняв $C^2 = 0{,}09 \cdot 0{,}25 \cdot 100$, получим:

$$p_1 = \frac{0{,}09 \cdot 0{,}25 \cdot 100}{0{,}09} = 25;$$

$$p_2 = \frac{0{,}09 \cdot 0{,}25 \cdot 100}{0{,}25} = 9.$$

Дальнейшее использование этих весов, выраженных целыми числами, значительно удобнее. Подбирая соответствующим образом коэффициент пропорциональности C^2, можно всегда придать весам наиболее удобные для вычислений числовые значения.

При определении весов должны быть выполнены два условия:

1) средние квадратические ошибки m, по которым вычисляются веса p, должны быть определены из достаточно большого числа наблюдений;

2) из измерений, по которым вычисляются средние квадратические ошибки, а затем веса, должны быть исключены систематические ошибки.

Определим теперь соотношение весов

$$p_1 : p_2 = \frac{C^2}{m_1^2} : \frac{C^2}{m_2^2} \qquad (18,3)$$

или

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}. \qquad (18,4)$$

Таким образом, при различных значениях коэффициента пропорциональности получаются и различные значения весов, однако соотношение между ними остается неизменным. Отсюда следует, **что веса данного ряда измерений являются величинами относительными и их можно одновременно увеличивать или уменьшать в одинаковое число раз.**

В связи с тем, что веса являются величинами относительными, сами по себе они еще ни о чем не говорят. Они имеют значения только при сопоставлении между собой, давая возможность судить, во сколько раз одна величина надежнее другой. Если будем иметь ряд равноточных измерений некоторой величины l_1, l_2, . . ., l_n, условия которых определятся средней квадратической ошибкой m, то, принимая за коэффициент пропорциональности C^2 квадрат средней квадратической ошибки m^2, получим веса этих измерений, равные единицам, т. е.

$$p_1 = \frac{m^2}{m^2} = 1; \quad p_2 = \frac{m^2}{m^2} = 1; \ldots; \quad p_n = \frac{m^2}{m^2} = 1. \qquad (18,5)$$

Обозначим вес простой арифметической средины из данного ряда равноточных измерений через P, средняя квадратическая ошибка которой

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Тогда вес среднего арифметического будет равен

$$P = \frac{C^2}{M^2} = \frac{m^2}{\frac{m^2}{n}} \qquad (18,6)$$

или

$$P = n, \qquad (18,7)$$

т. е. **вес арифметической средины равен числу n, показывающему, из скольких равноточных измерений с весами, равными единице, получена данная арифметическая средина.**

Исходя из этого определения вес отдельного измерения данного ряда можно рассматривать как число, показывающее, сколько равноточных измерений с весом, равным единице, нужно сделать для того, чтобы среднее арифметическое из них имело бы такой же вес, как и действительно полученный результат измерений.

§ 19. Общая арифметическая средина и ее вес

Пусть дан ряд результатов неравноточных измерений некоторой величины l_1, l_2, . . ., l_n с их средними квадратическими ошибками m_1, m_2, . . ., m_n. Для этого ряда измерений напишем линейную функцию, определяющую наиболее надежное значение искомой величины [см. уравнение (12,1)],

$$X_0 = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \ldots + a_n l_n. \qquad (19,1)$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ этой функции должны удовлетворять условию

$$[a]-1=0, \tag{19,2}$$

так как при увеличении измеренных значений l на одну и ту же величину τ должно увеличиться на ту же величину и значение X_0. Чтобы определить наиболее надежное значение X_0, нужно найти коэффициенты a.

Средняя квадратическая ошибка линейной функции (19,1) будет равна

$$m_{X_0}^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \ldots + a_n^2 m_n^2. \tag{19,3}$$

Очевидно, функция (19,1) приведет нас к наиболее надежному значению в том случае, если ее средняя квадратическая ошибка будет наименьшей, т. е.

$$m_{X_0}^2 = \min, \tag{19,4}$$

при соблюдении условия (19,2).

Условие минимума (19,4) определяется точкой экстремума функции следующего вида:

$$U = [a^2 m^2] - 2\lambda([a]-1) = \min. \tag{19,5}$$

Минимум функции (19,5) определится значениями коэффициентов a, при которых первые частные производные функции U будут равны нулю:

$$\begin{gathered} \frac{\partial U}{\partial a_1} = 2a_1 m_1^2 - 2\lambda = 0; \\ \frac{\partial U}{\partial a_2} = 2a_2 m_2^2 - 2\lambda = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial U}{\partial a_n} = 2a_n m_n^2 - 2\lambda = 0. \end{gathered}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\lambda}{m_1^2}; \\ a_2 &= \frac{\lambda}{m_2^2}; \\ &\cdots\cdots \\ a_n &= \frac{\lambda}{m_n^2}. \end{aligned}\right\} \tag{19,6}$$

Подставив эти значения в (19,1), найдем

$$X_0 = \lambda\left(\frac{1}{m_1^2} l_1 + \frac{1}{m_2^2} l_2 + \ldots + \frac{1}{m_n^2} l_n\right). \tag{19,7}$$

Для определения λ используем условие (19,2). Суммируя коэффициенты (19,6), получим

$$[a]=\lambda\left[\frac{1}{m^2}\right], \tag{19,8}$$

откуда

$$\lambda=\frac{1}{\left[\frac{1}{m^2}\right]}. \tag{19,9}$$

Подставив значение λ из (19,9) в уравнение (19,7), будем иметь

$$X_0=\frac{\frac{1}{m_1^2}l_1+\frac{1}{m_2^2}l_2+\ldots+\frac{1}{m_n^2}l_n}{\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}+\ldots+\frac{1}{m_n^2}}. \tag{19,10}$$

На основании (18,1) коэффициенты полученного уравнения (19,10) есть не что иное, как веса соответствующих неравноточных измерений, вследствие чего формула может быть записана в виде

$$X_0=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\ldots+p_nl_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}=\frac{[pl]}{[p]}. \tag{19,11}$$

Это и есть формула **весовой, или общей, арифметической средины, которая равна сумме произведений каждого неравноточного измерения на его вес, разделенной на сумму весов.**

Из формулы (19,11) видно, что увеличение весов всех измерений в несколько раз не изменяет значения общей арифметической средины.

Для практического использования применяют рабочую формулу, основанную на выделении приближенных значений l_0 из измеренных величин l (см. § 7),

$$X_0=l_0+\frac{p_1l'_1+p_2l'_2+\ldots+p_nl'_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}=l_0+\frac{[pl']}{[p]}. \tag{19,12}$$

На основании понятия о весах вес общей арифметической средины P_0 будет обратно пропорционален квадрату ее средней квадратической ошибки m_{X_0}:

$$P_0=\frac{1}{m_{X_0}^2}. \tag{19,13}$$

Подставим в уравнение (19,3) вместо коэффициентов a_i их значения из уравнений (19,6):

$$m_{X_0}^2=\frac{\lambda^2}{m_1^2}+\frac{\lambda^2}{m_2^2}+\ldots+\frac{\lambda^2}{m_n^2} \tag{19,14}$$

или

$$m_{X_0}^2=\lambda^2\left[\frac{1}{m^2}\right]; \tag{19,15}$$

откуда, учитывая (19,9), получим

$$m_{X_0}^2 = \frac{1}{\left[\frac{1}{m^2}\right]}. \qquad (19,16)$$

Но на основании понятия о весах

$$\left[\frac{1}{m^2}\right] = [p]. \qquad (19,17)$$

Тогда

$$m_{X_0}^2 = \frac{1}{[p]}. \qquad (19,18)$$

Подставив значение (19,18) в (19,13), получим

$$P_0 = [p]. \qquad (19,19)$$

Таким образом, **вес общей арифметической средины результатов неравноточных измерений одной и той же величины равен сумме весов этих измерений.**

§ 20. Оценка точности при неравноточных измерениях. Ошибка единицы веса

Пусть известны результаты неравноточных измерений какой-либо величины l_1, l_2, ..., l_i, ..., l_n; их средние квадратические ошибки m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_n; их веса p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n.

В соответствии с (18,2) веса указанных измерений равны:

$$p_1 = \frac{C^2}{m_1^2}; \quad p_2 = \frac{C^2}{m_2^2}; \ldots; \quad p_i = \frac{C^2}{m_i^2}; \ldots; \quad p_n = \frac{C^2}{m_n^2}. \qquad (20,1)$$

Пусть среди данного ряда измерений имеется некоторое i-ое измерение, вес которого $p_i = 1$. Тогда, подставив в (20,1) значение p_i, получим

$$1 = \frac{C^2}{m_i^2}, \qquad (20,2)$$

откуда

$$C^2 = m_i^2, \qquad (20,3)$$

т. е. коэффициент C есть не что иное, как средняя квадратическая ошибка измерения, вес которого равен единице. В отличие от средних квадратических ошибок остальных измерений, веса которых не равны единице, эта средняя квадратическая ошибка обозначается через μ и для краткости называется **ошибкой единицы веса.** Тогда

$$C^2 = m_i^2 = \mu^2. \qquad (20,4)$$

Подставив в выражения (20,1) вместо C^2 значение ошибки единицы веса, получим:

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2}; \quad p_2 = \frac{\mu^2}{m_2^2}; \ldots; \quad p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}; \ldots; \quad p_n = \frac{\mu^2}{m_n^2}. \qquad (20,5)$$

Отсюда

$$\mu = m_1 \sqrt{p_1} = m_2 \sqrt{p_2} = \ldots = m_i \sqrt{p_i} = \ldots = m_n \sqrt{p_n}, \quad (20,6)$$

т. е. ошибка единицы веса μ в $\sqrt{p}$ раз больше средней квадратической ошибки наблюдения, вес которого равен p.

Из выражения (20,5)

$$m_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}}; \quad m_2 = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}}; \ldots; \quad m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}; \ldots; \quad m_n = \frac{\mu}{\sqrt{p_n}}, \quad (20,7)$$

т. е. средняя квадратическая ошибка любого измерения в $\sqrt{p}$ раз меньше ошибки единицы веса μ. Следует иметь в виду, что в данном ряде неравноточных измерений может не быть фактического измерения, вес которого будет равен единице. Однако мы можем условно принять некоторое фиктивное измерение с весом, равным единице, и с ним сравнивать надежность результатов всех остальных действительных измерений.

Выведем формулу для определения ошибки единицы веса μ по истинным случайным ошибкам Δ и весам p результатов неравноточных измерений.

Пусть дан ряд неравноточных измерений

$$l_1, l_2, \ldots, l_n; \quad (20,8)$$

их истинные ошибки, веса и средние квадратические ошибки соответственно равны:

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n; \quad (20,9)$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_n; \quad (20,10)$$

$$m_1, m_2, \ldots, m_n. \quad (20,11)$$

Умножив каждый результат непосредственного измерения (20,8) на корень из его веса, получим новый ряд

$$l_1 \sqrt{p_1}, l_2 \sqrt{p_2}, \ldots, l_n \sqrt{p_n}. \quad (20,12)$$

Очевидно, при увеличении или уменьшении измеренного значения l в произвольное число раз (в корень из p) во столько же раз увеличится или уменьшится и истинная ошибка Δ измерения. Следовательно, истинные ошибки ряда (20,12) будут равны:

$$\Delta_1 \sqrt{p_1}, \quad \Delta_2 \sqrt{p_2}, \quad \ldots, \quad \Delta_n \sqrt{p_n}. \quad (20,13)$$

Рассматривая величины ряда (20,12), как некоторые функции вида $y = al$, на основании (10,13) можно записать их средние квадратические ошибки:

$$m_1 \sqrt{p_1}, \quad m_2 \sqrt{p_2}, \quad \ldots, \quad m_n \sqrt{p_n}. \quad (20,14)$$

Но согласно (19,6) эти выражения есть не что иное, как ошибки единицы веса μ, следовательно,

$$m_1\sqrt{p_1}=m_2\sqrt{p_2}=\ldots=m_n\sqrt{p_n}=\mu. \tag{20,15}$$

Отсюда можно сделать вывод, что величины ряда (20,12) являются равноточными со средней квадратической ошибкой μ и истинными ошибками ряда (20,13). Тогда, использовав формулу (8,2) средней квадратической ошибки ряда равноточных измерений по истинным ошибкам, получим

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}}. \tag{20,16}$$

Эта формула выражает ошибку единицы веса μ через истинные случайные ошибки неравноточных измерений Δ и их весов p. Надежность определения μ по формуле (20,16) может быть оценена следующим образом:

$$m_\mu=\frac{\mu}{\sqrt{2n}}. \tag{20,17}$$

§ 21. Средняя квадратическая ошибка общей арифметической средины

Для определения средней квадратической ошибки общей арифметической средины воспользуемся формулой (19,16). Умножив числитель и знаменатель правой части этого равенства на квадрат ошибки единицы веса μ, получим

$$m^2_{X_0}=\frac{\mu^2}{\left[\frac{1}{m^2}\right]\mu^2}. \tag{21,1}$$

Выражение в знаменателе (21,1) на основании (20,5) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\mu^2}{m_1^2}+\frac{\mu^2}{m_2^2}+\ldots+\frac{\mu^2}{m_n^2}=p_1+p_2+\ldots+p_n=[p]. \tag{21,2}$$

Тогда формула (21,1) запишется

$$m^2_{X_0}=\frac{\mu^2}{[p]}. \tag{21,3}$$

Обозначив среднюю квадратическую ошибку общей арифметической средины через M_0 и учитывая (19,19), окончательно будем иметь

$$M_0=\frac{\mu}{\sqrt{P_0}}. \tag{21,4}$$

Подставив в (21,4) значение μ, выраженное через истинные случайные ошибки в (20,16), получим

$$M_0=\pm\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{nP_0}}. \tag{21,5}$$

Из этой формулы видно, что с изменением весов отдельных измерений в одно и то же число раз вес общей арифметической средины изменится во столько же раз, но ее средняя квадратическая ошибка при этом останется неизменной.

§ 22. Уклонения от общей арифметической средины и их свойства. Выражение по ним ошибки единицы веса

В § 20 выведена формула (20,16), выражающая ошибку единицы веса через истинные случайные ошибки Δ ряда неравноточных измерений. Как уже отмечалось, истинные ошибки часто остаются неизвестными. Вследствие этого воспользуемся для определения ошибки единицы веса μ уклонениями от общей арифметической средины δ.

Рассмотрим свойства уклонений δ при неравноточных измерениях.

Пусть l_1, l_2, . . ., l_n — результаты неравноточных измерений какой-либо величины; p_1, p_2, . . ., p_n — их веса, L — истинное значение измеренной величины, X_0 — среднее из результатов измерений. Возьмем уклонения измеренных величин от среднего арифметического X_0:

$$\left.\begin{aligned} l_1-X_0&=\delta_1;\\ l_2-X_0&=\delta_2;\\ &\dots\dots\\ l_n-X_0&=\delta_n. \end{aligned}\right\} \qquad (22,1)$$

Обе части равенств (22,1) умножим соответственно на веса p_1, p_2, . . ., p_n:

$$\left.\begin{aligned} p_1l_1-p_1X_0&=p_1\delta_1;\\ p_2l_2-p_2X_0&=p_2\delta_2;\\ &\dots\dots\dots\\ p_nl_n-p_nX_0&=p_n\delta_n. \end{aligned}\right\} \qquad (22,2)$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$$[pl]+[p]X_0=[p\delta]. \qquad (22,3)$$

Подставив вместо X_0 его значение из (19,11), будем иметь

$$[pl]-[p]\frac{[pl]}{[p]}=[p\delta],$$

откуда

$$[p\delta]=0, \qquad (22,4)$$

т. е. сумма произведений соответствующих весов на уклонения от арифметической средины равна нулю при любом числе измерений.

Этим свойством обладают только уклонения от общей арифметической средины. Действительно, возьмем некоторое значение X_0', не равное X_0. Тогда

$$\left.\begin{aligned} l_1 - X_0' &= v_1; \\ l_2 - X_0' &= v_2; \\ \dots & \dots \\ l_n - X_0' &= v_n. \end{aligned}\right\} \qquad (22{,}5)$$

Вычтем из каждого равенства системы (22,1) соответствующие равенства системы (22,5):

$$\left.\begin{aligned} X_0' - X_0 &= \delta_1 - v_1; \\ X_0' - X_0 &= \delta_2 - v_2; \\ \dots & \dots \\ X_0' - X_0 &= \delta_n - v_n. \end{aligned}\right\} \qquad (22{,}6)$$

Умножив равенства (22,6) соответственно на $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и сложив, получим

$$(X_0' - X_0)[p] = [p\delta] - [pv]. \qquad (22{,}7)$$

На основании (22,4) выражение (22,7) примет вид

$$[pv] = [p](X_0 - X_0'). \qquad (22{,}8)$$

Отсюда можно сделать вывод, что $[pv]$ **будет равна нулю только в том случае, если X_0' обратится в X_0, т. е. станет общей арифметической срединой, а v — уклонениями от нее** δ.

Равенства (22,6) перепишем в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \delta_1 - (X_0' - X_0); \\ v_2 &= \delta_2 - (X_0' - X_0); \\ \dots & \dots \\ v_n &= \delta_n - (X_0' - X_0). \end{aligned}\right\} \qquad (22{,}9)$$

Левые и правые части равенств возведем в квадрат, умножим соответственно на веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и сложим:

$$[pv^2] = [p\delta^2] + [p](X_0' - X)^2 - 2[p\delta](X_0' - X_0). \qquad (22{,}10)$$

На основании (22,4) равенство (22,10) примет вид

$$[p\delta^2] = [pv^2] - [p](X_0' - X_0)^2, \qquad (22{,}11)$$

откуда

$$[p\delta^2] < [pv^2], \qquad (22{,}12)$$

т. е. сумма произведений соответствующих весов на квадраты уклонений от общей арифметической средины всегда меньше суммы произведений весов на квадраты уклонений от любого числа, не равного общей арифметической средине.

Для вывода формулы погрешности единицы веса μ запишем выражения истинных ошибок неравноточных измерений:

$$\left.\begin{aligned} l_1 - L &= \Delta_1; \\ l_2 - L &= \Delta_2; \\ &\cdots\cdots \\ l_n - L &= \Delta_n. \end{aligned}\right\} \tag{22,13}$$

Вычтя из равенств (22,13) равенства (22,1), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} X_0 - L &= \Delta_1 - \delta_1; \\ X_0 - L &= \Delta_2 - \delta_2; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ X_0 - L &= \Delta_n - \delta_n. \end{aligned}\right\} \tag{22,14}$$

Равенства (22,14) перепишем в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_1 + (X_0 - L); \\ \Delta_2 &= \delta_2 + (X_0 - L); \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_n &= \delta_n + (X_0 - L). \end{aligned}\right\} \tag{22,15}$$

возведем их в квадрат, умножим на соответствующие веса и сложим:

$$[p\Delta\Delta] = [p\delta\delta] + [p]\,(X_0 - L)^2 + 2\,[p\delta]\,(X_0 - L). \tag{22,16}$$

На основании (22,4) полученное равенство можно записать так:

$$[p\Delta\Delta] = [p\delta\delta] + [p]\,(X_0 - L)^2. \tag{22,17}$$

Анализируя это равенство, приходим к выводу, что

$$[p\Delta\Delta] > [p\delta\delta]. \tag{22,18}$$

Из формулы (20,16) можно записать

$$[p\Delta\Delta] = n\mu^2, \tag{22,19}$$

а квадрат истинной ошибки общей арифметической средины можно представить его средним значением

$$\frac{[\omega\omega]}{N} = M_0^2 = \frac{\mu^2}{[p]}. \tag{22,20}$$

Подставив эти значения в формулу (22,17), получим

$$n\mu^2 - [p]\,\frac{\mu^2}{[p]} = [p\delta\delta] \tag{22,21}$$

или

$$\mu^2\,(n-1) = [p\delta\delta], \tag{22,22}$$

откуда

$$\mu^2 = \frac{[p\delta\delta]}{n-1}, \tag{22,23}$$

а

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-1}}. \qquad (22,24)$$

Эта формула дает возможность определить ошибку единицы веса по уклонениям от общей арифметической средины.

Точность определения ошибки единицы веса может быть вычислена по формуле

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (22,25)$$

Средняя квадратическая ошибка общей арифметической средины, выраженная через уклонения от нее результатов измерений, определится, если в формуле (21,4) подставить (22,24):

$$M_0 = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[p](n-1)}}. \qquad (22,26)$$

Для оценки надежности вычисления средней квадратической ошибки общей арифметической средины можно воспользоваться формулой

$$m_{M_0} = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad (22,27)$$

Пример 1. Одним и тем же теодолитом угол измерялся шесть раз различным числом приемов. По результатам измерений, приведенным в табл. 7, определить наиболее надежное значение угла, ошибку единицы веса, среднюю квадратическую ошибку наиболее надежного значения и средние квадратические ошибки каждого результата.

Таблица 7

№ измерения	Значение углов	Число приемов k	$p=\frac{k}{3}$	l', *сек*	pl', ″	δ, *сек*	$p\delta$	$p\delta\delta$	$M=\frac{\mu}{\sqrt{p}}$, *сек*	Формулы и вычисления
1	83° 27′ 16″	6	2	+10	+20	+6	+12	72	±4	$\frac{[pl']}{[p]} = \frac{+80}{20} = +4''$
2	9″	18	6	+3	+18	−1	−6	6	±2	
3	6″	3	1	0	0	−4	−4	16	±5	
4	10″	15	5	+4	+20	0	0	0	±2	$\mu = \pm\sqrt{\frac{128}{5}} = \pm 5''$
5	13″	6	2	+7	+14	+3	+6	18	±4	
6	8″	12	4	+2	+8	−2	−8	16	±2	$m_\mu = \pm\frac{5}{\sqrt{10}} = \pm 1'',6$
l_0	83° 27′ 06″		20		+80		+18 −18	128		$M_0 = \pm\frac{5}{\sqrt{20}} = \pm 1''$
$\frac{[pl']}{[p]}$	+4″									$m_{M_0} = \pm\frac{1'',6}{\sqrt{20}} = \pm 0'',4$
X_0	83° 27′ 10″									

Пример 2. Длина стороны подземного теодолитного хода измерена различными мерными приборами. Средние значения из произведенных измерений X, число измерений n и средние квадратические ошибки m отдельных измерений приведены в табл. 8.

Определить наиболее надежное значение длины измеренной линии X_0, ее среднюю квадратическую ошибку M_0 и ошибку единицы веса μ.

Таблица 8

№ п/п	Значения длин X, м	Число измерений n	Средняя квадратическая ошибка m, мм	$M=\frac{m}{\sqrt{n}}$, мм	$p=\frac{1}{M^2}$	l', мм	pl'	δ	$p\delta$	$p\delta\delta$	Формулы и вычисления
1	43,607	7	±4	1,5	0,44	0	0	−2,6	−1,14	3,0	$\frac{[pl']}{[p]}=\frac{+4,48}{1,69}=+2,6$ мм
2	612	11	6	1,8	0,31	+5	1,55	+2,4	+0,74	1,8	
3	608	6	5	2,0	0,25	+1	0,25	−1,6	−0,40	0,6	
4	614	9	7	2,3	0,19	+7	1,33	+4,4	+0,84	3,7	$\mu=\pm\sqrt{\frac{9,2}{5}}=\pm1,4$ мм
5	610	3	3	1,7	0,35	+3	1,05	+0,4	+0,14	0,1	
6	609	12	9	2,6	0,15	+2	0,30	−0,6	−0,09	0,0	$m_\mu=\frac{1,4}{\sqrt{10}}=\pm0,4$ мм
l_0	43,607								+1,63 −1,72		$M_0=\pm\frac{1,4}{\sqrt{1,96}}=\pm1,0$ мм
$\frac{[pl']}{[p]}$	+2,6 мм				$[p]=1,69$		$[pl']=4,48$				
X_0	43,6096								−0,09	9,2	$m_{M_0}=\pm\frac{0,4}{\sqrt{1,96}}=\pm0,3$ мм

Пример 3. Отметка репера R определена из четырех нивелирных ходов. Значения полученных отметок и число станций приведены в табл. 9. Определить наиболее надежное значение отметки репера R, ошибку единицы веса, среднюю квадратическую ошибку наиболее надежного значения, и средние квадратические ошибки отметок, полученных из соответствующих ходов.

Для решения поставленной задачи необходимо определить веса отметок, полученных из четырех ходов, средние квадратические ошибки которых будут равны

$$m_{H_i}=m_h\sqrt{n_i},$$

где m_h — средняя квадратическая ошибка определения превышения на одной станции;

n_i — число станций в нивелирном ходе, из которого получена отметка H_i.

Вес отметки репера из i-го нивелирного хода вычислится по формуле

$$p_{H_i}=\frac{1}{(m_h\sqrt{n_i})^2}.$$

Если вес превышения, определенного на одной станции, принять равным единице, то из соотношения весов следует

$$\frac{p_{H_i}}{p}=\frac{m_h^2}{(m_h\sqrt{n_i})^2},$$

откуда

$$p_{H_i}=\frac{1}{n_i}.$$

Таким образом, вес отметки репера обратно пропорционален числу станций нивелирного хода. Тогда веса отметок репера R будут равны

$$p_{H_1}=\frac{1}{20}=0{,}05;\quad p_{H_2}=\frac{1}{10}=0{,}1;\quad p_{H_3}=\frac{1}{50}=0{,}02;\quad p_{H_4}=\frac{1}{25}=0{,}04.$$

Увеличив все веса в 100 раз, получим их значения, приведенные в табл. 9.

Таблица 9

№ п/п	Отметки H, м	Число станций n	$p=\frac{100}{n}$	l', мм	pl'	δ, мм	$p\delta$	$p\delta\delta$	$M=\frac{\mu}{\sqrt{p}}$, мм	Формулы и вычисления
1	216,814	20	5	+12	60	+5	+25	+125	±4,4	$\frac{[pl']}{[p]}=+\frac{146}{21}=7$ мм
2	807	10	10	+5	50	−2	−20	+40	±3,0	$\mu=\pm\sqrt{\frac{279}{3}}=$
3	802	50	2	0	0	−7	−14	+98	±6,9	$=\pm10$ мм
4	811	25	4	+9	36	+2	+8	+16	±4,8	$m_\mu=\frac{10}{\sqrt{6}}=\pm4$ мм
l_0	216,802		21		146		+33	279		$M_0=\pm\frac{10}{\sqrt{21}}=$ $=\pm2$ мм
$\frac{[pl']}{[p]}$	+7						−34			$m_h=\frac{\mu}{\sqrt{100}}=\pm1$ мм
X_0	216,809						−1			$m_{M_0}=\frac{\pm4}{\sqrt{21}}=$ $=\pm0{,}9$ мм

§ 23. Вес функций измеренных величин

Как указывалось выше, в практике маркшейдерского дела и геодезии часто приходится сталкиваться с посредственными (косвенными) измерениями, т. е. вычислять искомые величины по результатам непосредственных измерений.

В § 10 рассмотрены способы определения средних квадратических ошибок различных функций измеренных величин. Чтобы определить вес функции, необходимо воспользоваться выведенными формулами средних квадратических ошибок функций и понятием о весе

I. Дана функция

$$Y = aL. \tag{23,1}$$

По формуле (10,13) известно, что

$$m_y = am.$$

Пусть p_y — вес функции, а p — вес аргумента, тогда на основании понятия о весах можно записать:

$$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}; \quad m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}. \tag{23,2}$$

Подставив полученные выражения средних квадратических ошибок из (23,2) в формулу средней квадратической ошибки функции (10,13), получим

$$\frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \frac{\mu}{\sqrt{p}} a, \tag{23,3}$$

откуда

$$\frac{1}{p_y} = a^2 \frac{1}{p}, \tag{23,4}$$

т. е. величина, обратная весу функции произведения коэффициента на аргумент, равна произведению квадрата коэффициента на величину, обратную весу аргумента.

Частный случай. Возьмем функцию вида

$$y = l\sqrt{p_l},$$

где l — непосредственное измерение;
p — его вес;
m_l — средняя квадратическая ошибка измерения.

В этом случае будем иметь

$$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}, \quad m_l = \frac{\mu}{\sqrt{p_l}}.$$

Тогда на основании (10,13) получим

$$\frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \sqrt{p_l}\frac{\mu}{\sqrt{p_l}}.$$

откуда

$$p_y = 1.$$

Следовательно, всякий результат измерения, умноженный на корень из своего веса, приводит к значению, вес которого равен единице, что подтверждает сделанное в § 20 заключение по отношению к ряду (20, 12).

II. Дана функция

$$Y = L_1 \pm L_2. \tag{23,5}$$

Согласно формуле (10,29) имеем

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2.$$

Если p_y, p_1 и p_2 соответственно веса функции и аргументов, то

$$m_y^2 = \frac{\mu^2}{p_y}; \qquad m_1^2 = \frac{\mu^2}{p_1}; \qquad m_2^2 = \frac{\mu^2}{p_2}. \tag{23,6}$$

Подставив полученные выражения (23,6) в формулу (10,29) и сократив на μ^2, получим

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \tag{23,7}$$

т. е. величина, обратная весу функции суммы или разности двух слагаемых, равна сумме величин, обратных весам аргументов.

Если $p_1 = p_2 = p$, то

$$p_y = \frac{1}{2} p, \tag{23,8}$$

т. е. вес суммы или разности двух равноточных величин в два раза меньше веса одной из этих величин.

III. Дана функция

$$Y = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n. \tag{23,9}$$

Пусть p_y, p_1, p_2, ..., p_n — соответственно веса функции и аргументов. На основании предыдущих рассуждений можно написать, что

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} \tag{23,10}$$

Величина, обратная весу функции алгебраической суммы аргументов, равна сумме величин, обратных весам аргументов.

Если аргументы данной функции величины равноточные, то

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p,$$

тогда

$$p_y = \frac{p}{n}, \tag{23,11}$$

т. е. вес алгебраической суммы n равноточных величин в n раз меньше веса одного слагаемого.

IV. Дана функция

$$Y = a_1 L_1 + a_2 L_2 + \ldots + a_n L_n. \tag{23,12}$$

Согласно формуле (10,44) имеем

$$m_y^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \ldots + a_n^2 m_n^2.$$

Подставив в нее значения средних квадратических ошибок функции и аргументов выраженные через веса и ошибку единицы веса, получим

$$\frac{1}{p_y} = a_1^2 \frac{1}{p_1} + a_2^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + a_n^2 \frac{1}{p_n}, \tag{23,13}$$

т. е. **величина, обратная весу линейной функции, равна сумме произведений квадратов постоянных коэффициентов на величины, обратные весам аргументов.**

Очевидно, при равенстве весов аргументов $p_1 = p_2 = \ldots p_n = p$, будем иметь

$$\frac{1}{p_y} = \frac{[a^2]}{p} \text{ или } p_y = \frac{p}{[a^2]}. \tag{23,14}$$

V. Дана функция общего вида

$$Y = F(L_1, L_2, \ldots, L_n). \tag{23,15}$$

На основании (10,57) имеем

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial l_n}\right)^2 m_n^2.$$

Заменив в этой формуле квадраты средних квадратических ошибок их выражениями через погрешность единицы веса μ и веса p, получим

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial l_n}\right)^2 \frac{1}{p_n}, \tag{23,16}$$

т. е. **величина, обратная весу функции общего вида, равна сумме произведений квадратов частных произведений по каждому аргументу на величины, обратные весам соответствующих аргументов.**

На основании формул (10,57) и (23,16) можно записать, что

$$m_y^2 = \mu^2 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)^2 \frac{1}{p}\right] \tag{23,17}$$

или

$$m_y = \mu \sqrt{\frac{1}{p_y}}. \tag{23,18}$$

Пример 1. Определить вес длины окружности C, если вес измеренного диаметра $p_D = 4$.

Длина окружности вычисляется по формуле

$$C = \pi D.$$

Величина, обратная весу этой функции, будет равна

$$\frac{1}{p_C} = \pi^2 \frac{1}{p_D},$$

откуда

$$\frac{1}{p_C}=(3{,}14)^2\,\frac{1}{4}; \quad p_C=0{,}4.$$

Пример 2. Измерены три угла с весами $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ и $p_3 = 6$. Определить вес суммы углов.

Составляем функцию

$$S=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3.$$

Согласно формуле (23,10) имеем

$$\frac{1}{p_S}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1; \quad p_S=1.$$

Пример 3. Вычислить вес угла $\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, если веса углов соответственно равны $p_\alpha = 3$ и $p_\beta = 5$.

По формуле (23,13) имеем

$$\frac{1}{p_\gamma}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{8}{60}; \quad p_\gamma=7{,}5.$$

Пример 4. Найти вес функции

$$y=x_1x_2.$$

Если веса аргументов соответственно равны p_1 и p_2, согласно формуле (23,16) имеем

$$\frac{1}{p_y}=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\frac{1}{p_1}+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\frac{1}{p_2},$$

но

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=x_2, \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2}=x_1.$$

Тогда

$$\frac{1}{p_y}=x_2^2\,\frac{1}{p_1}+x_1^2\,\frac{1}{p_2}.$$

Если

$$p_1=p_2=p,$$

то

$$\frac{1}{p_y}=\frac{1}{p}\,(x_1^2+x_2^2); \quad p_y=\frac{p}{x_1^2+x_2^2}.$$

§ 24. Оценка точности по результатам однородных двойных неравноточных измерений

В § 15 рассмотрен вопрос о применении однородных равноточных двойных измерений для оценки их точности. Рассмотрим этот вопрос применительно к неравноточным измерениям.

Пусть даны результаты двойных однородных неравноточных измерений

$$l_1' \text{ и } l_1''; \quad l_2' \text{ и } l_2''; \ldots ; \quad l_n' \text{ и } l_n'',$$

их веса

$$p_1', p_1''; \quad p_2', p_2''; \quad \ldots; \quad p_n', p_n''.$$

Определим разности

$$\left.\begin{aligned} l_1' - l_1'' &= d_1; \\ l_2' - l_2'' &= d_2; \\ &\cdots\cdots \\ l_n' - l_n'' &= d_n. \end{aligned}\right\} \tag{24,1}$$

В соответствии с формулой (23,7) веса этих разностей могут быть записаны

$$p_{d_1} = \frac{p_1' + p_1''}{p_1' p_1''}, \quad p_{d_2} = \frac{p_2' + p_2''}{p_2' p_2''}, \ldots, \quad p_{d_n} = \frac{p_n' + p_n''}{p_n' p_n''}. \tag{24,2}$$

Рассматривая разности $d_1, d_2, \ldots, d_n$ как истинные ошибки с весами (24,2), ошибку единицы веса можно выразить на основании формулы (20,16)

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{p_{d_1} d_1^2 + p_{d_2} d_2^2 + \ldots + p_{d_n} d_n^2}{n}} \tag{24,3}$$

или

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p_d dd]}{n}}. \tag{24,4}$$

Если двойные измерения будут попарно равноточными, т. е.

$$p_1' = p_1'' = p_1, \ p_2' = p_2'' = p_2, \ \ldots, \ p_n' = p_n'' = p_n,$$

то

$$p_{d_1} = \frac{p_1}{2}, \quad p_{d_2} = \frac{p_2}{2}, \ldots, \quad p_{d_n} = \frac{p_n}{2}, \tag{24,5}$$

тогда формула (24,4), примет вид

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}. \tag{24,6}$$

Выведенные выше формулы ошибки единицы веса справедливы при отсутствии в разностях d систематических ошибок.

На наличие систематических ошибок в разностях двойных измерений будет указывать преобладание одного знака в разностях и неравенство нулю величины $\frac{[pd]}{[p]}$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Глава III

ПРИНЦИПЫ СПОСОБА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ 25. Принцип наименьших квадратов

На основании принципа арифметической средины в теории ошибок было установлено, что за наиболее надежное значение из данного ряда равноточных измерений одной и той же величины следует принимать арифметическое среднее.

Однако принцип арифметической средины является частным случаем открытого Гауссом принципа наименьших квадратов, который заключается в следующем: **для определения наиболее надежных значений равноточно измеренных величин необходимо результаты измерений исправить на поправки ε, сумма квадратов которых равна минимуму:**

$$[\varepsilon\varepsilon] = \min. \qquad (25,1)$$

Обратимся к примеру, приведенному в § 7. В этом примере из ряда равноточных измерений одной и той же величины определено среднее арифметическое, равное 27,483 *м*. Составим уклонение ε измеренных величин от их среднего арифметического значения X. Определим сумму их квадратов $[\varepsilon\varepsilon]$ (табл. 10).

Теперь возьмем некоторую величину X', не равную среднему арифметическому, например 27,482, и найдем уклонение ε' измеренных величин l от взятого числа. Полученные уклонения запишем в колонку ε' табл. 10, а их квадраты в колонку $\varepsilon'\varepsilon'$. Из произведенных вычислений видно, что $[\varepsilon']$ не равна нулю, а $[\varepsilon'\varepsilon']$ больше $[\varepsilon\varepsilon]$. Взяв число X'', большее среднего арифметического, равное 27,485, произведем аналогичные вычисления и заполним колонку ε'' и $\varepsilon''\varepsilon''$.

Анализируя результаты вычислений, видим, что только сумма уклонений измеренных величин от их арифметического среднего равна нулю, а сумма их квадратов минимальна. Сумма уклонений измеренных величин от выбранных нами двух других чисел не равны нулю, а суммы их квадратов больше.

Таблица 10

№ п/п	l, м	ε, мм	$\varepsilon\varepsilon$	ε', мм	$\varepsilon'\varepsilon'$	ε'', мм	$\varepsilon''\varepsilon''$
1	27,483	0	0	−1	1	+2	4
2	485	−2	4	−3	9	0	0
3	482	+1	1	0	0	+3	9
4	484	−1	1	−2	4	+1	1
5	481	+2	4	+1	1	+4	16
6	483	0	0	−1	1	+2	4
X	27,483	$[\varepsilon]=0$	$[\varepsilon\varepsilon]=10$	$[\varepsilon']=-6$	$[\varepsilon'\varepsilon']=16$	$[\varepsilon'']=12$	$[\varepsilon''\varepsilon'']=34$
X'	27,482						
X''	27,485						

Аналогичный вывод был сделан при определении свойств уклонений от арифметического среднего (см. § 13). Таким образом, на основании свойств уклонений от арифметической средины и рассмотренного выше примера можно сделать два вывода:

1) сумма квадратов уклонений измеренных величин от арифметического среднего равна минимуму;

2) если результаты измерений будут исправлены на поправки, сумма квадратов которых равна минимуму, то мы найдем наиболее надежное значение измеряемой величины.

Докажем, что арифметическое среднее удовлетворяет принципу наименьшим квадратов. Пусть некоторая величина измерена в одинаковых условиях n раз и получены результаты измерений l_1, $l_2, \ldots, l_n$. Обозначим наиболее надежные значения искомой величины через X и составим разности

$$X - l_i = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{25,2}$$

Найдем значение X под условием

$$Q = [\varepsilon\varepsilon] = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 = \min. \tag{25,3}$$

Для отыскания значения X, удовлетворяющего условию (25,3), в него подставим значения поправок ε из (25,2)

$$Q = [\varepsilon\varepsilon] = (X - l_1)^2 + (X - l_2)^2 + \ldots + (X - l_n)^2 = \min. \tag{25,4}$$

Чтобы найти минимум данной функции, первую производную по аргументу X приравняем нулю:

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = 2(X - l_1) + 2(X - l_2) + \ldots + 2(X - l_n) = 0. \tag{25,5}$$

Сократив на 2 и раскрыв скобки в уранении (25,5), получим

$$X = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}. \tag{25,6}$$

Вторая производная $\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} = 2n > 0$, что является признаком минимума функции $[\varepsilon\varepsilon]$ при значении аргумента X, равном арифметической средине.

Если результаты измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$ неравноточны и имеют веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то наиболее надежное значение X_0 определится по принципу наименьших квадратов из следующего условия:

$$Q = [p\varepsilon\varepsilon] = p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \ldots + p_n\varepsilon_n^2 = \min. \tag{25,7}$$

В этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial X_0} = 2p_1(X_0 - l_1) + 2p_2(X_0 - l_2) + \ldots + 2p_n(X_0 - l_n) = 0, \tag{25,8}$$

откуда

$$X_0 = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}. \tag{25,9}$$

Из формулы (25,9) видно, что выражение $[p\varepsilon\varepsilon]$ обращается в минимум, когда аргументом функции (25,8) будет общая арифметическая средина.

§ 26. Принцип наибольшего веса

Пусть для определения некоторой величины произведен ряд непосредственных неравноточных измерений

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \tag{26,1}$$

веса которых

$$p_1, p_2, \ldots, p_n. \tag{26,2}$$

По этим данным определим наиболее надежное значение искомой величины так, чтобы ее вес был наибольшим, а средняя квадратическая ошибка соответственно наименьшей.

Искомое наиболее надежное значение X_0 связано с непосредственными измерениями ряда (26,1) некоторой функцией

$$X_0 = F(l_1, l_2, \ldots, l_n). \tag{26,3}$$

Эта функция должна обладать следующими двумя свойствами:

1. При увеличении всех измеренных значений на одну и ту же величину λ на ту же величину должно увеличиться и окончательное значение X_0.

2. При увеличении или уменьшении результатов непосредственных измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$ в одно и то же число раз во столько же раз должен увеличиться или уменьшиться искомый результат X_0.

Такими свойствами обладает только линейная функция.

На основании перечисленных свойств функция (26,3) должна иметь следующий вид:

$$X_0 = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \ldots + a_n l_n. \tag{26,4}$$

Допустим, что результаты непосредственных измерений равны между собой, т. е.

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_n = l. \tag{26,5}$$

Тогда, очевидно, наиболее надежное значение будет равно

$$X_0 = l, \tag{26,6}$$

а функция (26,4) примет вид

$$X_0 = l\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n). \tag{26,7}$$

Но чтобы X_0 было равно l, необходимо выполнение условия

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1. \tag{26,8}$$

Величина, обратная весу функции (26,4), на основании (23,13) будет равна

$$\frac{1}{p_y} = a_1^2 \frac{1}{p_1} + a_2^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + a_n^2 \frac{1}{p_n}. \tag{26,9}$$

Тогда поставленную выше задачу сформулируем следующим образом: **по результатам непосредственных измерений ряда (26, 1) и их весам (26, 2) определить такую систему коэффициентов a_i функции (26, 4), при которой величина, обратная ее весу, будет минимальной, т. е.**

$$\frac{1}{p_0} = \min \tag{26,10}$$

при выполнении условия $a_1 + a_2 \ldots + a_n = 1$.

Таким образом, мы пришли к задаче на условный экстремум, решение которой сводится к отысканию абсолютного экстремума новой функции

$$\Phi = a_1^2 \frac{1}{p_1} + a_2^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + a_n^2 \frac{1}{p_n} - 2K\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \min, \tag{26,11}$$

где K — неопределенный множитель Лагранжа.

Найдем частные производные от этой функции по каждому коэффициенту a_i и приравняем их нулю:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} &= 2a_1 \frac{1}{p_1} - 2K = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} &= 2a_2 \frac{1}{p_2} - 2K = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} &= 2a_n \frac{1}{p_n} - 2K = 0, \end{aligned}\right\} \tag{26,12}$$

откуда получим коэффициенты a, при которых достигается минимум функции (26,11):

$$a_1 = Kp_1, \ a_2 = Kp_2, \ \ldots, \ a_n = Kp_n. \tag{26,13}$$

Подставив значения a_i из (26,13) в равенство (26,8), получим

$$K(p_1+p_2+\ldots+p_n)=1, \tag{26,14}$$

откуда

$$K=\frac{1}{p_1+p_2+\ldots+p_n}=\frac{1}{[p]}. \tag{26,15}$$

Подставив значения коэффициентов a_i из (26,13) и значение K из (26,15) в равенство (26,4), будем иметь

$$X_0=\frac{p_1}{[p]}l_1+\frac{p_2}{[p]}l_2+\ldots+\frac{p_n}{[p]}l_n, \tag{26,16}$$

или

$$X_0=\frac{[pl]}{[p]}. \tag{26,17}$$

Таким образом, наиболее надежное значение искомой величины X_0 из ряда непосредственных неравноточных измерений, найденное при условии, что вес его будет наибольшим, а средняя квадратическая ошибка наименьшей, есть не что иное, как общая арифметическая средина.

Если измерения будут равноточными, то, очевидно,

$$p_1=p_2=\ldots=p_n=1.$$

Тогда неопределенный множитель K из (26,15) будет равен

$$K=\frac{1}{n}, \tag{26,18}$$

а наиболее надежное значение X соответственно

$$X=\frac{[l]}{n}, \tag{26,19}$$

т. е. равно простой арифметической средине.

Глава IV

УСЛОВНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 27. Общие понятия об условных измерениях

Как уже отмечалось выше, условными измерениями считают такие, для которых заранее известно, что истинные значения измеряемых величин удовлетворяют определенным теоретическим условиям.

Пусть для решения некоторой задачи произведено t непосредственных измерений

$$l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_t, \tag{27,1}$$

дающих однократное значение искомых величин. Эти измерения являются необходимыми.

Так, если в треугольнике должны быть определены все три угла γ_1, γ_2, γ_3, то, очевидно, достаточно произвести два измерения γ_1 и γ_2, которые будут необходимыми, а третий угол может быть вычислен по двум измеренным.

Допустим теперь, что помимо необходимых измерений мы произвели еще одно l_{t+1} измерение величины, входящей в решение той же задачи и связанной с измеренными ранее величинами определенной функциональной зависимостью. Это измерение l_{t+1} называют и з б ы т о ч н ы м, аналитическое соотношение, связывающее истинные значения измеряемых величин, у с л о в н ы м у р а в н е н и е м, а результаты

$$l_1, l_2, \ldots, l_t, l_{t+1} \tag{27,2}$$

у с л о в н ы м и и з м е р е н и я м и.

При появлении еще одного избыточного измерения l_{t+2} величины, входящей в решение той же задачи, можно составить еще одно условное уравнение. Если число избыточных измерений будет равно r, l_{t+1}, l_{t+2}, ..., l_{t+r}, то число условных уравнений будет равно числу избыточных измерений.

Все условные уравнения должны быть независимыми одно от другого, т. е. ни одно из них не должно быть следствием других условных уравнений.

Обратимся к нашему примеру с углами в треугольнике. Если будет измерен третий угол γ_3, можно записать геометрическое условие, которому удовлетворяют истинные значения углов в плоском треугольнике,

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - 180° = 0. \tag{27,3}$$

Подставив в уравнение (27,3) измеренные значения углов γ_1, γ_2, γ_3, содержащие неизбежные ошибки, получим

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 180° = W, \tag{27,4}$$

где W — невязка, образованная ошибками измеренных углов.

Чтобы устранить невязку W, измеренные углы исправим на некоторые поправки ε_1, ε_2, ε_3:

$$\gamma_1 + \varepsilon_1 + \gamma_2 + \varepsilon_2 + \gamma_3 + \varepsilon_3 - 180° = 0. \tag{27,5}$$

Вычтя из уравнения (27,5) уравнение (27,4), получим

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -W, \tag{27,6}$$

т. е. алгебраическая сумма поправок к измеренным углам должна быть равна невязке с обратным знаком, или

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + W = 0. \tag{27,7}$$

Полученное уравнение (27,7) называется у с л о в н ы м у р а в н е н и е м п о п р а в о к.

§ 28. Уравновешивание условных измерений

Определение по результатам непосредственных измерений наиболее надежных значений искомых величин называется **уравновешиванием**, а найденные наиболее надежные значения искомых величин называются **уравновешенными**. Уравновешенные значения должны удовлетворять условным уравнениям.

Составление условных уравнений. Пусть для решения некоторой задачи произведены n непосредственных неравноточных измерений:

$$\overbrace{\underbrace{l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_t}_{t\text{ - необходимых}},\ \underbrace{l_{t+1},\ l_{t+2},\ \ldots,\ l_{t+r}}_{r\text{ - избыточных}}}^{\text{всего измерений } n}, \tag{28,1}$$

веса которых

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_t,\ p_{t+1},\ p_{t+2},\ \ldots,\ p_{t+r}. \tag{28,2}$$

Предположим, что среди этого ряда n измерений имеется t необходимых и r избыточных, которые приводят к r независимым условным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &F_1(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)=0;\\ &F_2(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_r(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)=0, \end{aligned}\right\} \tag{28,3}$$

где $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ — уравновешенные значения измеренных величин.

Подставив в эти уравнения вместо уравновешенных значений X_i их измеренные значения, содержащие ошибки, по аналогии с (27,4) получим:

$$\left.\begin{aligned} &F_1(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)=W_1;\\ &F_2(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)=W_2;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_r(l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)=W_r, \end{aligned}\right\} \tag{28,4}$$

где $W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_r$ — невязки.

Эти невязки являются неизбежными в силу того, что они обусловливаются неизбежными ошибками непосредственных измерений. Чтобы в уравнениях (28,4) устранить невязки, необходимо исправить результаты измерений на некоторые поправки ε_i, которые превращали бы их в уравновешенные значения:

$$\left.\begin{aligned} &X_1=l_1+\varepsilon_1;\\ &X_2=l_2+\varepsilon_2;\\ &\ldots\ldots\\ &X_n=l_n+\varepsilon_n. \end{aligned}\right\} \tag{28,5}$$

Следует иметь в виду, что величины поправок ε_i небольшие, в силу того, что они обусловливаются в основном случайными ошибками измерений, которые по своей величине также малы.

Подставив значения X_i из (28,5) в (28,3), получим

$$\left.\begin{aligned} &F_1(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ \ldots,\ l_n+\varepsilon_n)=0;\\ &F_2(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ \ldots,\ l_n+\varepsilon_n)=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_r(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ \ldots,\ l_n+\varepsilon_n)=0. \end{aligned}\right\} \quad (28,6)$$

Таким образом, мы получили ряд условных уравнений, число которых равно числу избыточных измерений r, а число неизвестных в них поправок — числу всех произведенных измерений.

Приведение условных уравнений к линейному виду. Полученные условные уравнения (28,6) в зависимости от конкретно решаемой задачи могут быть самого различного вида. Для удобства и упрощения уравновешивания приводят условные уравнения к линейному виду. Условно, для простоты дальнейших выводов, примем число избыточных измерений равным трем. Тогда уравнения (28,6) запишутся

$$\left.\begin{aligned} &a)\quad F_a(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ \ldots,\ l_n+\varepsilon_n)=0;\\ &b)\quad F_b(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ \ldots,\ l_n+\varepsilon_n)=0;\\ &c)\quad F_c(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ \ldots,\ l_n+\varepsilon_n)=0. \end{aligned}\right\} \quad (28,7)$$

Разложим левые части этих равенств в ряд Тейлора, ограничиваясь из-за малости поправок ε членами разложения, содержащими их в первой степени

$$\left.\begin{aligned} &F_a(l_1, l_2, \ldots, l_n)+\frac{\partial F_a}{\partial l_1}\varepsilon_1+\frac{\partial F_a}{\partial l_2}\varepsilon_2+\ldots+\frac{\partial F_a}{\partial l_n}\varepsilon_n=0;\\ &F_b(l_1, l_2, \ldots, l_n)+\frac{\partial F_b}{\partial l_1}\varepsilon_1+\frac{\partial F_b}{\partial l_2}\varepsilon_2+\ldots+\frac{\partial F_b}{d l_n}\varepsilon_n=0;\\ &F_c(l_1, l_2, \ldots, l_n)+\frac{\partial F_c}{\partial l_1}\varepsilon_1+\frac{\partial F_c}{\partial l_2}\varepsilon_2+\ldots+\frac{\partial F_c}{\partial l_n}\varepsilon_n=0. \end{aligned}\right\} \quad (28,8)$$

Обозначив частные производные функций F_a, F_b, F_c по непосредственно измеренным величинам l_i через

$$\frac{\partial F_a}{\partial l_i}=a_i, \quad \frac{\partial F_b}{\partial l_i}=b_i, \quad \frac{\partial F_c}{\partial l_i}=c_i \quad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (28,9)$$

и

$$F_a(l_1, l_2, \ldots, l_n)=W_a, \quad F_b(l_1, l_2, \ldots, l_n)=W_b,$$
$$F_c(l_1, l_2, \ldots, l_n)=W_c, \qquad (28,10)$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} &a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots+a_n\varepsilon_n+W_a=0;\\ &b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\ldots+b_n\varepsilon_n+W_b=0;\\ &c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+\ldots+c_n\varepsilon_n+W_c=0 \end{aligned}\right\} \quad (28,11)$$

или

$$\left.\begin{aligned} &[a\varepsilon]+W_a=0;\\ &[b\varepsilon]+W_b=0;\\ &[c\varepsilon]+W_c=0. \end{aligned}\right\} \quad (28,12)$$

Полученные уравнения называются условными уравнениями поправок в линейном виде.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты a_i, b_i и c_i — частные производные функций по непосредственно измеренным величинам — из-за малости поправок ε будут оставаться постоянными при изменении l_i от l_i до $l_i + \varepsilon_i$.

Решение условных уравнений. Итак, получена система условных уравнений (28,11), число которых равно числу избыточных измерений r, а число искомых в них поправок ε — числу всех непосредственно измеренных величин n. Но так как число избыточных измерений r всегда меньше числа всех непосредственно измеренных величин n, то имеем неопределенную систему уравнений, допускающую бесчисленное множество решений, т. е. можно найти бесчисленное множество таких систем поправок ε_i, которые одновременно удовлетворяют системе (28,11).

Для определения наиболее надежных значений измеренных величин найдем такую систему поправок ε_i, которая удовлетворила бы принципу наименьших квадратов,

$$[p\varepsilon\varepsilon] = \min. \tag{28,13}$$

Таким образом, к условным уравнениям поправок (28,11) добавляется еще одно условие (28,13).

Отыскание минимума функции (28,13) при наличии условий (28,11) сводится к определению условного экстремума этой функции.

Из математического анализа известно, что задачу на условный экстремум можно свести к задаче на абсолютный экстремум новой функции, которая составляется так: к функции (28,13) прибавляются условные уравнения поправок (28,12), предварительно умноженные на так называемые неопределенные множители Лагранжа или к о р р е л а т ы $-2K_1$, $-2K_2$, $-2K_3$:

$$\begin{aligned} \Phi = p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \ldots + p_n\varepsilon_n^2 &- 2K_1([a\varepsilon] + W_a) - \\ &- 2K_2([b\varepsilon] + W_b) - \\ &- 2K_3([c\varepsilon] + W_c) = \min. \end{aligned} \tag{28,14}$$

Значения поправок ε, при которых функция (28,14) имеет минимум, получим, взяв частные производные этой функции по искомым поправкам и приравняв их нулю:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1} &= 2p_1\varepsilon_1 - 2K_1a_1 - 2K_2b_1 - 2K_3c_1 = 0; \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2} &= 2p_2\varepsilon_2 - 2K_1a_2 - 2K_2b_2 - 2K_3c_2 = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_n} &= 2p_n\varepsilon_n - 2K_1a_n - 2K_2b_n - 2K_3c_n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{28,15}$$

откуда получим выражения:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{p_1}(a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3);\\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{p_2}(a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varepsilon_n &= \frac{1}{p_n}(a_nK_1+b_nK_2+c_nK_3), \end{aligned}\right\} \qquad (28,16)$$

которые называются **уравнениями поправок. Вычисление поправок по этим уравнениям возможно при наличии коррелат, число которых всегда будет равно числу условных уравнений.**

Для вычисления коррелат подставим в условные уравнения поправок (28,11) вместо $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ их значения из (28,16):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_1}{p_1}(a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3)+\frac{a_2}{p_2}(a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3)+\\ &\qquad+\ldots+\frac{a_n}{p_n}(a_nK_1+b_nK_2+c_nK_3)+W_a=0;\\ &\frac{b_1}{p_1}(a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3)+\frac{b_2}{p_2}(a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3)+\\ &\qquad+\ldots+\frac{b_n}{p_n}(a_nK_1+b_nK_2+c_nK_3)+W_b=0;\\ &\frac{c_1}{p_1}(a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3)+\frac{c_2}{p_2}(a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3)+\\ &\qquad+\ldots+\frac{c_n}{p_n}(a_nK_1+b_nK_2+c_nK_3)+W_c=0. \end{aligned}\right\} \qquad (28,17)$$

Раскрыв в полученных равенствах скобки и сгруппировав вокруг коррелат коэффициенты, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right]K_1+\left[\frac{ab}{p}\right]K_2+\left[\frac{ac}{p}\right]K_3+W_a=0;\\ \left[\frac{ab}{p}\right]K_1+\left[\frac{bb}{p}\right]K_2+\left[\frac{bc}{p}\right]K_3+W_b=0;\\ \left[\frac{ac}{p}\right]K_1+\left[\frac{bc}{p}\right]K_2+\left[\frac{cc}{p}\right]K_3+W_c=0. \end{aligned}\right\} \qquad (28,18)$$

Полученные уравнения (28,18) называются **нормальными уравнениями коррелат,** число которых равно числу искомых коррелат.

Рассматривая нормальные уравнения коррелат, замечаем, что по диагонали в них стоят квадратичные коэффициенты $\left[\frac{aa}{p}\right]$, $\left[\frac{bb}{p}\right]$, $\left[\frac{cc}{p}\right]$, а коэффициенты, расположенные симметрично относительно диагонали, равны между собой.

Благодаря указанной симметрии нормальных уравнений коррелат они могут быть записаны в сокращенной ступенчатой записи:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right]K_1+\left[\frac{ab}{p}\right]K_2+\left[\frac{ac}{p}\right]K_3+W_a=0;\\ \left[\frac{bb}{p}\right]K_2+\left[\frac{bc}{p}\right]K_3+W_b=0;\\ \left[\frac{cc}{p}\right]K_3+W_c=0. \end{aligned}\right\} \tag{28,19}$$

Из решения нормальных уравнений определяют коррелаты, а по ним из уравнений (28,16) поправки. Исправляя на эти поправки результаты непосредственных измерений определяемых величин, по (28,5) получают уравновешенные их значения $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

В том случае, когда для определения искомых величин производятся равноточные измерения

$$l_1, l_2, \ldots, l_t, l_{t+1}, l_{t+2}, \ldots, l_{t+r} \text{ (всего } n \text{ измерений)},$$

веса которых можно считать равными

$$p_1=p_2=\ldots=p_t=p_{t+1}=p_{t+2}=\ldots=p_{t+r}=1, \tag{28,20}$$

условие (28,13) запишется

$$[\varepsilon\varepsilon]=\min, \tag{28,21}$$

уравнения поправок (28,13) соответственно примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1&=a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3;\\ \varepsilon_2&=a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_n&=a_nK_1+b_nK_2+c_nK_3. \end{aligned}\right\} \tag{28,22}$$

Тогда нормальные уравнения коррелат (28,19) запишутся

$$\left.\begin{aligned} [aa]K_1+[ab]K_2+[ac]K_3+W_a=0;\\ [ab]K_1+[bb]K_2+[bc]K_3+W_b=0;\\ [ac]K_1+[bc]K_2+[cc]K_3+W_c=0. \end{aligned}\right\} \tag{28,23}$$

Изложенный выше метод решения условных уравнений поправок, образования нормальных уравнений коррелат и определения поправок, рассмотренный на примере трех условных уравнений, очевидно, может быть распространен на любое число условных уравнений, равных числу избыточных измерений r.

§ 29. Вычисление коэффициентов нормальных уравнений коррелат

Вычисление коэффициентов нормальных уравнений должно быть выполнено при наличии текущего контроля, чтобы избежать появления ошибок, которые исказят результаты вычислений.

Для вывода формул контроля вычисления коэффициентов нормальных уравнений образуем суммы

$$\left.\begin{array}{l} a_1+b_1+c_1=s_1; \\ a_2+b_2+c_2=s_2; \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n+b_n+c_n=s_n; \end{array}\right\} \tag{29,1}$$

$$[a]+[b]+[c]=[s]. \tag{29,2}$$

Равенство (29,2) контролирует правильность вычисления сумм s.

Умножим равенства (29,1) последовательно на коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$, разделим на веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и сложим:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1a_1}{p_1}+\frac{a_1b_1}{p_1}+\frac{a_1c_1}{p_1}=\frac{a_1s_1}{p_1}; \\ \frac{a_2a_2}{p_2}+\frac{a_2b_2}{p_2}+\frac{a_2c_2}{p_2}=\frac{a_2s_2}{p_2}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{a_na_n}{p_n}+\frac{a_nb_n}{p_n}+\frac{a_nc_n}{p_n}=\frac{a_ns_n}{p_n}; \\ \hline \left[\frac{aa}{p}\right]+\left[\frac{ab}{p}\right]+\left[\frac{ac}{p}\right]=\left[\frac{as}{p}\right]; \end{array}\right\} \tag{29,3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1b_1}{p_1}+\frac{b_1b_1}{p_1}+\frac{b_1c_1}{p_1}=\frac{b_1s_1}{p_1}; \\ \frac{a_2b_2}{p_2}+\frac{b_2b_2}{p_2}+\frac{b_2c_2}{p_2}=\frac{b_2s_2}{p_2}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{a_nb_n}{p_n}+\frac{b_nb_n}{p_n}+\frac{b_nc_n}{p_n}=\frac{b_ns_n}{p_n}; \\ \hline \left[\frac{ab}{p}\right]+\left[\frac{bb}{p}\right]+\left[\frac{bc}{p}\right]=\left[\frac{bs}{p}\right]; \end{array}\right\} \tag{29,4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1c_1}{p_1}+\frac{b_1c_1}{p_1}+\frac{c_1c_1}{p_1}=\frac{c_1s_1}{p_1}; \\ \frac{a_2c_2}{p_2}+\frac{b_2c_2}{p_2}+\frac{c_2c_2}{p_2}=\frac{c_2s_2}{p_2}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{a_nc_n}{p_n}+\frac{b_nc_n}{p_n}+\frac{c_nc_n}{p_n}=\frac{c_ns_n}{p_n}; \\ \hline \left[\frac{ac}{p}\right]+\left[\frac{bc}{p}\right]+\left[\frac{cc}{p}\right]=\left[\frac{cs}{p}\right]. \end{array}\right\} \tag{29,5}$$

Таблица 11

№ поправки	a	b	c	s	$\frac{1}{p}$	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{ac}{p}$	$\frac{as}{p}$	$\frac{bb}{p}$	$\frac{bc}{p}$	$\frac{bs}{p}$	$\frac{cc}{p}$	$\frac{cs}{p}$
ε_1	a_1	b_1	c_1	s_1	$\frac{1}{p_1}$	$\frac{a_1a_1}{p_1}$	$\frac{a_1b_1}{p_1}$	$\frac{a_1c_1}{p_1}$	$\frac{a_1s_1}{p_1}$	$\frac{b_1b_1}{p_1}$	$\frac{b_1c_1}{p_1}$	$\frac{b_1s_1}{p_1}$	$\frac{c_1c_1}{p_1}$	$\frac{c_1s_1}{p_1}$
ε_2	a_2	b_2	c_2	s_2	$\frac{1}{p_2}$	$\frac{a_2a_2}{p_2}$	$\frac{a_2b_2}{p_2}$	$\frac{a_2c_2}{p_2}$	$\frac{a_2s_2}{p_2}$	$\frac{b_2b_2}{p_2}$	$\frac{b_2c_2}{p_2}$	$\frac{b_2s_2}{p_2}$	$\frac{c_2c_2}{p_2}$	$\frac{c_2s_2}{p_2}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
ε_n	a_n	b_n	c_n	s_n	$\frac{1}{p_n}$	$\frac{a_na_n}{p_n}$	$\frac{a_nb_n}{p_n}$	$\frac{a_nc_n}{p_n}$	$\frac{a_ns_n}{p_n}$	$\frac{b_nb_n}{p_n}$	$\frac{b_nc_n}{p_n}$	$\frac{b_ns_n}{p_n}$	$\frac{c_nc_n}{p_n}$	$\frac{c_ns_n}{p_n}$
$\sum$	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[s]$		$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	$\left[\frac{as}{p}\right]$	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	$\left[\frac{bs}{p}\right]$	$\left[\frac{cc}{p}\right]$	$\left[\frac{cs}{p}\right]$

Равенства (29,3) дают возможность осуществить контроль вычисления коэффициентов первого нормального уравнения. Соответственно равенства (29,4) и (29,5) контролируют вычисления коэффициентов второго и третьего нормальных уравнений.

Все указанные вычисления производятся в соответствующем формуляре, образец которого приведен в табл. 11.

Контроль вычислений коэффициентов нормальных уравнений коррелат осуществляется тем, что суммы $\left[\frac{as}{p}\right]$, $\left[\frac{bs}{p}\right]$, $\left[\frac{cs}{p}\right]$ могут быть получены дважды: первый раз по сумме членов в левой части равенства (29,3), (29,4), (29,5), второй раз при непосредственном перемножении коэффициентов a, b, c на s. Оба результата должны быть одинаковыми в пределах точности вычислений.

§ 30. Решение нормальных уравнений коррелат

В том случае, когда число нормальных уравнений небольшое, их решение может быть произведено любым известным способом и, в частности, при помощи детерминантов. Если же число нормальных уравнений велико, удобнее всего применять способ последовательного исключения неизвестных, разработанный Гауссом. Преимущества его заключаются в однообразии последовательных действий и наличии постоянного контроля. Благодаря введению особых символов сохраняется симметрия преобразованных уравнений, присущая нормальным уравнениям. Кроме того, этот метод дает возможность сравнительно просто производить оценку точности полученных результатов.

Сущность этого способа заключается в следующем. Возьмем для простоты рассуждений три нормальных уравнения (28,18):

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right]K_1+\left[\frac{ab}{p}\right]K_2+\left[\frac{ac}{p}\right]K_3+W_a=0;\\
\left[\frac{ab}{p}\right]K_1+\left[\frac{bb}{p}\right]K_2+\left[\frac{bc}{p}\right]K_3+W_b=0;\\
\left[\frac{ac}{p}\right]K_1+\left[\frac{bc}{p}\right]K_2+\left[\frac{cc}{p}\right]K_3+W_c=0.
\end{aligned}\right\} \tag{30,1}$$

Из первого уравнения системы (30,1) определим первое неизвестное K_1:

$$K_1=-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}K_2-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}K_3-\frac{W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]},\ Э_1. \tag{30,2}$$

Это уравнение называется п е р в ы м э л и м и н а ц и о н н ы м уравнением.

Значение K_1 из (30,2) подставим во второе и третье уравнения системы (30,1) и после приведения подобных получим

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\left[\frac{bb}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)K_2+\left(\left[\frac{bc}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)K_3+\\
&+\left(\left[\frac{bd}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ad}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)K_4+\left(W_b-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)=0;\\
&\left(\left[\frac{bc}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)K_2+\left(\left[\frac{cc}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)K_3+\\
&+\left(\left[\frac{cd}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]\left[\frac{ad}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)+\left(W_c-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\quad(30,3)$$

Выражения в скобках уравнений (30,3) соответственно обозначим:

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{bb}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}&=\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right];\\
\left[\frac{bc}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}&=\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right];\\
\left[\frac{cc}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}&=\left[\frac{cc}{p}\cdot 1\right];\\
W_b-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}&=[W_b\cdot 1];\\
W_c-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}&=[W_c\cdot 1].
\end{aligned}\right\}\quad(30,4)$$

Эти обозначения впервые были введены Гауссом и называются символами или алгорифмами Гаусса.

Используя приведенные обозначения (30,4), перепишем уравнения (30,3) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]K_2+\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]K_3+[W_b\cdot 1]=0\\ \left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]K_2+\left[\frac{cc}{p}\cdot 1\right]K_3+[W_c\cdot 1]=0\end{aligned}\right\},\ \Pi_1. \qquad (30,5)$$

Это так называемая первая преобразованная система нормальных уравнений, в которой исключено первое неизвестное K_1. Конструкция уравнений (30,5) подобна нормальным уравнениям системы (30,1).

Из первого уравнения системы (30,5)

$$K_2=-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}K_3-\frac{[W_b\cdot 1]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]},\ Э_2. \qquad (30,6)$$

Уравнение (30,6) называется вторым элиминационным. Подставив его во второе уравнение системы (30,5) и сгруппировав коэффициенты вокруг коррелат, получим

$$\left(\left[\frac{cc}{p}\cdot 1\right]-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\right)K_3+\left([W_c\cdot 1]-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right][W_b\cdot 1]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\right)=0. \qquad (30,7)$$

Заменим выражения в скобках уравнения (30,7) алгорифмами Гаусса

$$\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]K_3+[W_c\cdot 2]=0,\quad \Pi_2. \qquad (30,8)$$

Уравнение (30,8) носит название второй преобразованной системы. Из нее определим K_3:

$$K_3=-\frac{[W_c\cdot 2]}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]},\quad Э_3. \qquad (30,9)$$

Это третье элиминационное уравнение. Число элиминационных уравнений всегда будет равно числу определяемых коррелат в нормальных уравнениях.

Таким образом, систему нормальных уравнений (30,1) можно заменить эквивалентной ей системой, из которой легко определяются все неизвестные:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{aa}{p}\right]K_1+\left[\frac{ab}{p}\right]K_2+\left[\frac{ac}{p}\right]K_3+W_a=0;\\ \left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]K_2+\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]K_3+[W_b\cdot 1]=0;\\ \left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]K_3+[W_c\cdot 2]=0.\end{aligned}\right\} \qquad (30,10)$$

Вернемся теперь к алгорифмам Гаусса и установим правило их раскрытия:

1. Всякий алгорифм по раскрытии его представляет собой разность двух членов.

2. Первый член получается из раскрываемого алгорифма путем уменьшения его числового символа на единицу, например, при раскрытии $\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]$ будет $\left[\frac{bb}{p}\right]$, при раскрытии $\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]$ будет $\left[\frac{cc}{p}\cdot 1\right]$ и т. д.

3. Второй член есть дробь, знаменателем которой является квадратичный коэффициент $\left[\frac{aa}{p}\right]$ — если в раскрываемом алгорифме числовой символ 1, $\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]$ — если числовой символ 2, $\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]$ — если числовой символ 3 и т. д.

4. Числитель дроби образуется из произведения двух алгорифмов, которые получаются почленным перемножением букв знаменателя на буквы первого члена с сохранением числового символа, на единицу меньше раскрываемого алгорифма, например

$$\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]=\left[\frac{cc}{p}\cdot 1\right]-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}.$$

Сформулированное правило раскрытия алгорифмов Гаусса остается справедливым и для алгорифмов свободных членов, если индекс при свободном члене принимать как множитель, например

$$[W_c\cdot 2]\rightarrow[cW\cdot 2],$$

т. е.

$$[W_c\cdot 2]=[W_c\cdot 1]-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right][W_b\cdot 1]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}.$$

Если в правой части алгорифма отбросить числовой символ 1 и знак суммы, то, рассматривая его как алгебраическое выражение, получим нуль:

$$\frac{cc}{p}-\frac{\frac{bc}{p}\,\frac{bc}{p}}{\frac{bb}{p}}=0.$$

$$W_c-\frac{\frac{bc}{p}W_b}{\frac{bb}{p}},$$

или условно

$$cW-\frac{\frac{bc}{p}\,bW}{\frac{bb}{p}}=0,$$

что служит проверкой правильности раскрытия алгорифма.

В настоящее время имеется большое число различных схем решения нормальных уравнений: ряд сокращенных схем решения нормальных уравнений, логарифмические схемы и т. д. Все они основаны на методе последовательного исключения неизвестных.

Вычисления, связанные с решением нормальных уравнений коррелат, с целью придания им определенного порядка и однообразия последовательных действий целесообразно вести в схеме Гаусса — Дулитля. Эта схема рассчитана на применение счетных машин или арифмометра.

Конструкция схемы следующая: она состоит из ряда вертикальных колонок, число которых равно числу определяемых коррелат плюс две; из ступенек, число которых равно числу решаемых нормальных уравнений, и строчек — в первой ступеньке три, во второй пять, а в каждой последующей на одну больше.

Рассмотрим схему решения трех нормальных уравнений, приведенную в табл. 12.

Заполнение схемы ведется в следующем порядке: в первые строки всех ступенек последовательно выписываются коэффициенты нормальных уравнений в их ступенчатой записи (28,19), свободные члены и в колонке S' соответственно величины:

$$\left.\begin{aligned} S'_1&=\left[\frac{as}{p}\right]+W_a;\\ S'_2&=\left[\frac{bs}{p}\right]+W_b;\\ S'_3&=\left[\frac{cs}{p}\right]+W_c.\end{aligned}\right\} \tag{30,11}$$

Тогда, очевидно:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right]+\left[\frac{ab}{p}\right]+\left[\frac{ac}{p}\right]+W_a&=S'_1;\\ \left[\frac{ab}{p}\right]+\left[\frac{bb}{p}\right]+\left[\frac{bc}{p}\right]+W_b&=S'_2;\\ \left[\frac{ac}{p}\right]+\left[\frac{bc}{p}\right]+\left[\frac{cc}{p}\right]+W_c&=S'_3.\end{aligned}\right\} \tag{30,12}$$

Эти равенства должны быть использованы для контроля заполнения схемы исходными данными.

Решение ведется в нисходящем порядке (за исключением последних строк каждой ступеньки). В табл. 12 порядок вычислений определяется номерами, стоящими в последней правой колонке. Рассмотрим порядок решения.

1. Члены первого равенства системы (30, 12) разделим на коэффициент $\left[\frac{aa}{p}\right]$ и, изменив знаки на обратные, получим

$$-1-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}=-\frac{S_1'}{\left[\frac{aa}{p}\right]}, \quad C_1. \qquad (30,13)$$

Это равенство записывается во вторую строку первой ступеньки.

2. Величины второй строки второй ступеньки получаются как результат произведения второго коэффициента второй строки первой ступеньки $-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$ на величины, стоящие в первой строке первой ступеньки, начиная с $\left[\frac{ab}{p}\right]$.

	K_1	K_2	K_3	W
1	$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	W_a
2	-1	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$	$-\frac{W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$
3	$K_1=$	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}K_2$	$-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}K_3$	$-\frac{W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$
	1	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	W_b
	2	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{ab}{p}\right]$	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{ac}{p}\right]$	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}W_a$
	3	$\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]$	$[W_b\cdot 1]$
	4	-1	$-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}$	$-\frac{[W_b\cdot 1]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}$

Контроль вычислений в этой строке осуществляется следующим образом: все члены уравнения (30,13) умножим на коэффициент $\left[\frac{ab}{p}\right]$:

$$-\left[\frac{ab}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{W_a\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}=-\frac{S_1'\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]},\ C_1'. \tag{30,14}$$

Отсюда видно, что сумма членов второй строки второй ступеньки плюс второй член первой строки первой ступеньки с обратным знаком должны быть равны величине, стоящей в колонке S' второй строки второй ступеньки.

3. Третья строка второй ступеньки вычисляется на основании алгорифмов (30,4), из которых видно, что величины этой строки равны сумме величин первой и второй строк второй ступеньки.

Таблица 12

	S'	Контроль	Примечание	Порядок вычисления
$\left[\frac{af}{p}\right]$	S_1'		$S_1'=\left[\frac{as}{p}\right]+W_a$	
$-\frac{\left[\frac{af}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$	$-\frac{S_1'}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$	C_1	Знак меняется на обратный	1
			$Э_1$	11
$\left[\frac{bf}{p}\right]$	S_2'		$S_2'=\left[\frac{bs}{p}\right]+W_b$	
$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{af}{p}\right]$	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}S_1'$	C_1'		2
$\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]$	$[S_2'\cdot 1]$	C_2		3
$-\frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}$	$-\frac{[S_2'\cdot 1]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}$	C_3	Знак меняется на обратный	4

K_1	K_2	K_3	W
	$K_2 =$	$-\dfrac{\left[\dfrac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\dfrac{bb}{p}\cdot 1\right]} K_3$	$-\dfrac{[W_b\cdot 1]}{\left[\dfrac{bb}{p}\cdot 1\right]}$
	1	$\left[\dfrac{cc}{p}\right]$	W_c
	2	$-\dfrac{\left[\dfrac{ac}{p}\right]}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]}\left[\dfrac{ac}{p}\right]$	$-\dfrac{\left[\dfrac{ac}{p}\right]}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]} W_a$
	3	$-\dfrac{\left[\dfrac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\dfrac{bb}{p}\cdot 1\right]}\left[\dfrac{bc}{p}\cdot 1\right]$	$-\dfrac{\left[\dfrac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\dfrac{bb}{p}\cdot 1\right]}[W_b\cdot 1]$
	4	$\left[\dfrac{cc}{p}\cdot 2\right]$	$[W_c\cdot 2]$
	5	-1	$-\dfrac{[W_c\cdot 2]}{\left[\dfrac{cc}{p}\cdot 2\right]}$
	6	$K_3 =$	$-\dfrac{[W_c\cdot 2]}{\left[\dfrac{cc}{p}\cdot 2\right]}$

1

2

3

4

5

	f	S'	Контроль	Примечание	Порядок вычисления
				$Э_2$	10
	$\left[\frac{cf}{p}\right]$	S'_3		$S_3^1=\left[\frac{cs}{p}\right]+W_c$	
	$-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{af}{p}\right]$	$-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}S'_1$	C'_2		5
	$-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]$	$-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}[S'_2 1]$	C'_3		6
	$\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]$	$[S'_3 2]$	C_4		7
	$-\frac{\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}$	$-\frac{[S'_3 2]}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}$	C_5	Знак меняется на обратный	8
				$Э_3$	9
	$\left[\frac{ff}{p}\right]$	12			
	$-\frac{\left[\frac{af}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{af}{p}\right]$	13			
	$-\frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]$	14			
	$-\frac{\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]$	15			
	$\frac{1}{p_u}=$	16			

Эти суммы являются коэффициентами первого уравнения преобразованной системы (30,5).

Для контроля вычисления этой строки докажем справедливость равенства

$$\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]+\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]+[W_b\cdot 1]=[S_2'\cdot 1],\quad C_2. \tag{30,15}$$

Разложив алгорифмы в этом равенстве, прибавим к левой части его $+\left[\frac{ab}{p}\right]$ и $-\left[\frac{ab}{p}\right]$:

$$\left[\frac{ab}{p}\right]-\left[\frac{ab}{p}\right]+\left[\frac{bb}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\left[\frac{bc}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+W_b-$$

$$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}=S_2'-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]S_1'}{\left[\frac{aa}{p}\right]},$$

сгруппируем члены полученного уравнения следующим образом:

$$\left(\left[\frac{ab}{p}\right]+\left[\frac{bb}{p}\right]+\left[\frac{bc}{p}\right]+W_b\right)+$$

$$+\left(-\left[\frac{ab}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right)=$$

$$=S_2'-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]S_1'}{\left[\frac{aa}{p}\right]},$$

выражение в первой скобке на основании второго равенства системы (30,12) есть S_2', а выражение во второй скобке на основании (30,14) есть $-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]S_1'}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$. Таким образом, тождественность левой и правой частей равенства (30,15) доказана.

4. Разделив все коэффициенты третьей строки второй ступеньки на первый коэффициент этой строки $\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]$ и изменив знаки на обратные, получим величины четвертой строки второй ступеньки, которые будут являться коэффициентами второго элиминационного уравнения.

Контроль вычислений в этой строке будет осуществляться следующим образом:

$$-1-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{[W_b\cdot 1]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}=-\frac{[S_2'\cdot 1]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]},\quad C_3,\qquad (30,16)$$

что вытекает из равенства (30,15).

5. Члены второй строки третьей ступеньки получатся в результате перемножения третьего члена второй строки первой ступеньки на третий и последующие члены первой строки первой ступеньки.

Для осуществления контроля вычислений в этой строке умножим все члены правой и левой частей первого равенства системы (30,12) на величину $-\dfrac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$, получим

$$-\left[\frac{ac}{p}\right]-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}=-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}S_1',\quad C_2'.\qquad (30,17)$$

Отсюда видно, что для получения значения члена, стоящего в колонке S' этой строки, нужно к сумме предыдущих членов этой строки прибавить второй член, стоящий во второй строке второй ступеньки, и вычесть третий член первой строки первой ступеньки.

6. Величины третьей строки третьей ступеньки получатся в результате перемножения второго члена четвертой строки на второй и последующие члены третьей строки второй ступеньки. Контроль вычислений в этой ступеньке будет осуществляться на основании следующего равенства:

$$-\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}[W_b\cdot 1]=$$

$$=-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}[S_1'\cdot 1],\quad C_3',\qquad (30,18)$$

которое получено в результате умножения всех членов равенства (30,15) на величину $-\dfrac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}$.

7. Четвертая строка третьей ступеньки вычисляется суммированием всех трех членов, стоящих в предыдущих строках данной колонки третьей ступеньки. Эти величины являются коэффициентами второй преобразованной системы (30,8).

Контроль их вычислений осуществляется по следующему равенству:

$$\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]+[W_c\cdot 2]=[S_3'\cdot 2], \quad C_4. \tag{30,19}$$

Справедливость этого равенства легко доказать, сложив левые и правые части третьего равенства системы (30,12) и равенства (30,17) и (30,18).

8. Разделив все коэффициенты четвертой строки третьей ступеньки на $\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]$ и изменив знак на обратный, получим величины пятой строки третьей ступеньки, являющиеся коэффициентами третьего элиминационного уравнения.

Контроль вычислений в этой строке будет осуществляться из следующего равенства:

$$-1-\frac{[W_c\cdot 2]}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}=-\frac{[S_3'\cdot 2]}{\left[\frac{cc}{c}\cdot 2\right]}, \quad C_5, \tag{30,20}$$

что вытекает из равенства (30,19).

9. На основании уравнения (30,9) коррелата K_3 будет равна второму члену пятой строки третьей ступеньки. Эту величину переписываем в шестую строку третьей ступеньки.

10. Умножив полученное значение коррелаты K_3 на второй член четвертой строки второй ступеньки, записываем полученную величину в этой же колонке на строку ниже, третий член четвертой строки второй ступеньки сносим в пятую строку и берем сумму членов пятой строки. Эта сумма на основании (30,6) дает вторую коррелату K_2.

11. Для определения коррелаты K_1 нужно второй и третий члены второй строки первой ступеньки умножить соответственно на K_2 и K_3 и записать в третьей строке первой ступеньки. Туда же сносится четвертый член второй строки.

Сумма членов третьей строки на основании уравнения (30,2) даст первую коррелату K_1.

Следует иметь в виду, что вычисление коррелат в схеме решения нормальных уравнений остается бесконтрольным.

Кроме разобранного выше способа Гаусса, решение нормальных уравнений может быть произведено методом квадратных корней и методом последовательных приближений. Последний метод является основным при решении систем нормальных уравнений на цифровых электронно-счетных машинах, так как он удобен для программирования.

§ 31. Контроль составления и решения нормальных уравнений и определения поправок

Докажем справедливость равенства

$$[p\varepsilon\varepsilon] = -[KW].$$

Для этого каждое уравнение поправок (28,16) умножим на $p_i\varepsilon_i$:

$$\left.\begin{aligned} p_1\varepsilon_1\varepsilon_1 &= a_1\varepsilon_1K_1 + b_1\varepsilon_1K_2 + c_1\varepsilon_1K_3;\\ p_2\varepsilon_2\varepsilon_2 &= a_2\varepsilon_2K_1 + b_2\varepsilon_2K_2 + c_2\varepsilon_2K_3;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ p_n\varepsilon_n\varepsilon_n &= a_n\varepsilon_nK_1 + b_n\varepsilon_nK_2 + c_n\varepsilon_nK_3. \end{aligned}\right\} \tag{31,1}$$

Уравнения (31,1) почленно сложим, группируя их в правой части вокруг коррелат,

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [a\varepsilon]K_1 + [b\varepsilon]K_2 + [c\varepsilon]K_3. \tag{31,2}$$

На основании уравнений (28,12) можно записать, что

$$[a\varepsilon] = -W_a, \qquad [b\varepsilon] = -W_b, \qquad [c\varepsilon] = -W_c. \tag{31,3}$$

Подставив эти значения в уравнение (31,2), получим

$$[p\varepsilon\varepsilon] = -K_1W_a - K_2W_b - K_3W_c \tag{31,4}$$

или

$$[p\varepsilon\varepsilon] = -[KW]. \tag{31,5}$$

Равенство (31,5) является заключительным контролем составления и решения нормальных уравнений коррелат и определения поправок.

Поскольку равенства (28,16) послужили исходными для вывода формулы (31,5), она контролирует вычисление абсолютных значений поправок ε, не контролируя их знаки, так как в равенство (31,5) поправки входят во второй степени. Кроме того, формула (31,5) контролирует определение коэффициентов нормальных уравнений и их решение.

Равенство (31,4) преобразуем следующим образом: вместо коррелат последовательно подставим их значения из элиминационных уравнений (30,2), (30,6) и (30,9), будем иметь

$$-[KW] = \frac{W_a^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{ab}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}K_2 + \frac{\left[\frac{ac}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}K_3 - K_2W_b - K_3W_c. \tag{31,6}$$

Группируя вокруг коррелат, получим

$$-[KW] = \frac{W_a^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - K_2\left(W_b - \frac{\left[\frac{ab}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right) - K_3\left(W_c - \frac{\left[\frac{ac}{p}\right]W_a}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right).$$

Выражения в скобках заменим алгорифмами

$$-[KW] = \frac{W_a^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - [W_b \cdot 1] K_2 - [W_c \cdot 1] K_3. \qquad (31,7)$$

Подставим значение K_2 в (31,7)

$$-[KW] = \frac{W_a^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{[W_b \cdot 1]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} + \frac{\left[\frac{bc}{p} \cdot 1\right][W_b \cdot 1]}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} K_3 - [W_c \cdot 1] K_3.$$

Группируя вокруг коррелат и заменяя алгорифмом, получаем

$$-[KW] = \frac{W_a^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{[W_b \cdot 1]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} - K_3 [W_c \cdot 2]. \qquad (31,8)$$

Подставив значение K_3 в (31,8), будем иметь

$$-[KW] = \frac{W_a^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{[W_b \cdot 1]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} + \frac{[W_c \cdot 2]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]}. \qquad (31,9)$$

Полученная формула (31,9) используется для контроля вычисления коррелат в схеме Гаусса—Дулитля.

Однако следует помнить, что ни формула (31,5), ни формула (31,9) не контролирует правильность вычисления невязок W и коэффициентов a_i, b_i, c_i условных уравнений поправок в линейном виде.

Чтобы осуществить полный контроль всех уравнительных вычислений, необходимо в условные уравнения (28,3) подставить уравновешенные значения измеренных величин. Если уравнения будут обращаться в нуль, то их составление, приведение к линейному виду, определение невязок и коэффициентов, а также дальнейшие уравнительные вычисления выполнены правильно.

§ 32. Оценка точности при уравновешивании условных измерений

При оценке точности возникают две основные задачи: 1) оценить точность измеренных величин и 2) определить вес и среднюю квадратическую ошибку функции уравновешенных значений измеренных величин.

Исходными при решении поставленных задач будут являться формулы, полученные в разделе теории ошибок измерений.

Средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения. Если бы в результате уравнительных вычислений были получены истинные ошибки измерений Δ, можно было бы воспользоваться известной формулой средней квадратической ошибки

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \qquad (32,1)$$

$[W_d \cdot 3]$

$[dd \cdot 3]$

Но так как из результатов уравновешивания нам известны только поправки ε, то для определения по ним ошибки единицы веса можно воспользоваться формулой

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{r}}, \tag{32,2}$$

где r — число избыточных измерений.

Для равноточных измерений будем иметь

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{r}}. \tag{32,3}$$

Вывод формулы (32,2) будет дан в § 43.

Определение средней квадратической ошибки и веса функции уравновешенных величин. Пусть дана некоторая функция уравновешенных значений измеренных величин

$$U = F(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{32,4}$$

Средняя квадратическая ошибка данной функции на основании формулы (23,18) будет равна

$$M_U = \mu\sqrt{\frac{1}{p_U}}, \tag{32,5}$$

а величина, обратная весу функции, определится по формуле (23,16)

$$\frac{1}{p_U} = \left[\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)^2}{p}\right]. \tag{32,6}$$

Так как эта формула применима только к функциям, у которых аргументами являются независимые переменные, а в функции (32,4) уравновешенные значения величин являются зависимыми переменными, полученными из совместного уравнивания, необходимо функцию (32,4) привести к функции непосредственно измеренных величин.

Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — результаты непосредственных измерений, средние квадратические ошибки которых $m_1, m_2, \ldots, m_n$, а веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Выразим уравновешенные значения измеренных величин через результаты непосредственных измерений и их поправки

$$X_1 = l_1 + \varepsilon_1, \qquad X_2 = l_2 + \varepsilon_2, \ldots, \qquad X_n = l_n + \varepsilon_n \tag{32,7}$$

и подставим в уравнение (32,4)

$$U = F(l_1 + \varepsilon_1, \quad l_2 + \varepsilon_2, \ldots, \quad l_n + \varepsilon_n). \tag{32,8}$$

Правую часть равенства (32,8) разложим в ряд Тейлора, ограничиваясь из-за малости поправок ε только первыми членами ряда,

$$U = F(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \frac{\partial F}{\partial l_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial l_n}\varepsilon_n. \tag{32,9}$$

Обозначив в этом выражении частные производные через

$$\frac{\partial F}{\partial l_1}=f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial l_2}=f_2, \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial l_n}=f_n, \tag{32,10}$$

которые в дальнейшем будем называть **коэффициентами весовой функции**, получим

$$U=F(l_1, l_2, \ldots, l_n)+f_1\varepsilon_1+f_2\varepsilon_2+\ldots+f_n\varepsilon_n. \tag{32,11}$$

В уравнении (32,11) поправки ε заменим их выражениями из (28,16)

$$\begin{aligned} U=F(l_1, l_2, \ldots, l_n)&+\frac{f_1}{p_1}(a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3)+\\ &+\frac{f_2}{p_2}(a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3)+\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{f_n}{p_n}(a_nK_1+b_nK_2+c_nK_3). \end{aligned} \tag{32,12}$$

Раскрывая скобки и группируя вокруг коррелат, получаем

$$U=F(l_1, l_2, \ldots, l_n)+\left[\frac{af}{p}\right]K_1+\left[\frac{bf}{p}\right]K_2+\left[\frac{cf}{p}\right]K_3. \tag{32,13}$$

Однако коррелаты также зависимы между собой, как и поправки, поэтому необходимо исключить и их. Для этого уравнения коррелат (28,18) соответственно умножим на неопределенные множители q_1, q_2, q_3 и полученные уравнения прибавим к правой части уравнения (32,13). Группируя вокруг коррелат, получим

$$\begin{aligned} U=F(l_1, l_2, \ldots, l_n)&+\left(\left[\frac{aa}{p}\right]q_1+\left[\frac{ab}{p}\right]q_2+\left[\frac{ac}{p}\right]q_3+\left[\frac{af}{p}\right]\right)K_1+\\ &+\left(\left[\frac{ab}{p}\right]q_1+\left[\frac{bb}{p}\right]q_2+\left[\frac{bc}{p}\right]q_3+\left[\frac{bf}{p}\right]\right)K_2+\\ &+\left(\left[\frac{ac}{p}\right]q_1+\left[\frac{bc}{p}\right]q_2+\left[\frac{cc}{p}\right]q_3+\left[\frac{cf}{p}\right]\right)K_3+\\ &+W_aq_1+W_bq_2+W_cq_3. \end{aligned} \tag{32,14}$$

Подберем множители q_1, q_2, q_3 такими, чтобы выражения в скобках уравнения (32,14) перед коррелатами равнялись нулю, т. е. найдем q из решения следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right]q_1+\left[\frac{ab}{p}\right]q_2+\left[\frac{ac}{p}\right]q_3+\left[\frac{af}{p}\right]=0;\\ \left[\frac{ab}{p}\right]q_1+\left[\frac{bb}{p}\right]q_2+\left[\frac{bc}{p}\right]q_3+\left[\frac{bf}{p}\right]=0;\\ \left[\frac{ac}{p}\right]q_1+\left[\frac{bc}{p}\right]q_2+\left[\frac{cc}{p}\right]q_3+\left[\frac{cf}{p}\right]=0. \end{aligned}\right\} \tag{32,15}$$

Из уравнений (32,15) видно, что неопределенные множители q не зависят от ошибок измерений. Тогда будем иметь

$$U = F(l_1, l_2, \ldots, l_n) + W_a q_1 + W_b q_2 + W_c q_3. \qquad (32,16)$$

На основании (28,10) свободные члены условных уравнений можно заменить

$$U = F(l_1, l_2, \ldots, l_n) + F_a(l_1, l_2, \ldots, l_n) q_1 + \\ + F_b(l_1, l_2, \ldots, l_n) q_2 + F_c(l_1, l_2, \ldots, l_n) q_3 \qquad (32,17)$$

Полученное равенство есть выражение функции (32,4) через непосредственно измеренные величины и к нему можно применить формулу (32,6) для определения величины, обратной весу функции.

Определим частные производные функции (32,17)

$$\frac{\partial U}{\partial l_i} = \frac{\partial F}{\partial l_i} + \frac{\partial F_a}{\partial l_i} q_1 + \frac{\partial F_b}{\partial l_i} q_2 + \frac{\partial F_c}{\partial l_i} q_3 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (32,18)$$

На основании (28,9) и (32,10) равенства (32,18) запишем

$$\frac{\partial U}{\partial l_i} = f_i + a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (32,19)$$

Правые и левые части уравнений (32,19) возведем в квадрат и разделим на веса p_i, получим

$$\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial l_i}\right)^2}{p_i} = \frac{a_i a_i}{p_i} q_1 q_1 + \frac{a_i b_i}{p_i} q_1 q_2 + \frac{a_i c_i}{p_i} q_1 q_3 + \frac{a_i f_i}{p_i} q_1 + \\ + \frac{a_i b_i}{p_i} q_1 q_2 + \frac{b_i b_i}{p_i} q_2 q_2 + \frac{b_i c_i}{p_i} q_2 q_3 + \frac{b_i f_i}{p_i} q_2 + \\ + \frac{a_i c_i}{p_i} q_1 q_3 + \frac{b_i c_i}{p_i} q_2 q_3 + \frac{c_i c_i}{p_i} q_3 q_3 + \frac{c_i f_i}{p_i} q_3 + \\ + \frac{f_i f_i}{p_i} + \frac{a_i f_i}{p_i} q_1 + \frac{b_i f_i}{p_i} q_2 + \frac{c_i f_i}{p_i} q_3. \qquad (32,20)$$

В соответствии с формулой (32,6) все n уравнений вида (32,20) нужно сложить почленно. Группируя вокруг неопределенных множителей q_1, q_2, q_3, будем иметь

$$\frac{1}{p_U} = \left[\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)^2}{p}\right] = \left(\left[\frac{aa}{p}\right] q_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] q_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] q_3 + \left[\frac{af}{p}\right]\right) q_1 + \\ + \left(\left[\frac{ab}{p}\right] q_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] q_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] q_3 + \left[\frac{bf}{p}\right]\right) q_2 + \\ + \left(\left[\frac{ac}{p}\right] q_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] q_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] q_3 + \left[\frac{cf}{p}\right]\right) q_3 + \\ + \left[\frac{ff}{p}\right] + \left[\frac{af}{p}\right] q_1 + \left[\frac{bf}{p}\right] q_2 + \left[\frac{cf}{p}\right] q_3. \qquad (32,21)$$

На основании (32,15) выражения в круглых скобках равны нулю, тогда

$$\frac{1}{p_U}=\left[\frac{ff}{p}\right]+\left[\frac{af}{p}\right]q_1+\left[\frac{bf}{p}\right]q_2+\left[\frac{cf}{p}\right]q_3. \qquad (32,22)$$

Сопоставляя систему нормальных уравнений коррелат (28,18) с системой уравнений неопределенных множителей (32,15), замечаем, что они различаются между собой только свободными членами.

В § 31 выведена формула (31,9) для нормальных уравнений коррелат

$$K_1W_a+K_2W_b+K_3W_c=-\frac{W_a^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{[W_b\cdot 1]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{[W_c\cdot 2]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}. \qquad (32,23)$$

По аналогии для системы (32,15) можно записать формулу

$$q_1\left[\frac{af}{p}\right]+q_2\left[\frac{bf}{p}\right]+q_3\left[\frac{cf}{p}\right]=-\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}. \qquad (32,24)$$

На основании (32,24) уравнение (32,22) может быть окончательно записать следующим образом:

$$\frac{1}{p_U}=\left[\frac{ff}{p}\right]-\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}. \qquad (32,25)$$

Если условные измерения будут равноточными, формула (32,25) примет вид

$$\frac{1}{p_U}=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cf\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}. \qquad (32,26)$$

Вычисление $\frac{1}{p_U}$ — величины, обратной весу функции U, производится в схеме Гаусса — Дулитля при решении нормальных уравнений коррелат (см. табл. 12), для чего в схеме вводится дополнительная колонка f между колонками W и S', а для определения коэффициентов $\left[\frac{ff}{p}\right]$, $\left[\frac{af}{p}\right]$, $\left[\frac{bf}{p}\right]$, $\left[\frac{cf}{p}\right]$ в таблице определения коэффициентов нормальных уравнений (см. табл. 16) вводят колонку f за последним условным уравнением и соответственно колонки $\frac{af}{p}$, $\frac{bf}{p}$, $\frac{cf}{p}$, $\frac{ff}{p}$. Чтобы в схеме решения нормальных уравнений (табл. 12) контролировалась и колонка f, необходимо в суммы S'

соответственно ввести $\left[\frac{af}{p}\right]$, $\left[\frac{bf}{p}\right]$, $\left[\frac{cf}{p}\right]$, если коэффициенты весовой функции f не включались в сумму s_i (см. табл. 11 и 16), т. е.

$$\left.\begin{aligned} S'_1 &= \left[\frac{aa}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{ac}{p}\right] + \left[\frac{af}{p}\right] + W_a; \\ S'_2 &= \left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{bb}{p}\right] + \left[\frac{bc}{p}\right] + \left[\frac{bf}{p}\right] + W_b; \\ S'_3 &= \left[\frac{ac}{p}\right] + \left[\frac{bc}{p}\right] + \left[\frac{cc}{p}\right] + \left[\frac{cf}{p}\right] + W_c. \end{aligned}\right\} \quad (32.27)$$

Если необходимо определить среднюю квадратическую ошибку уравновешенного значения X_i, то функцию (32,4) записывают в следующем виде:

$$U = X_i. \quad (32,28)$$

Определив коэффициенты весовой функции

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots,\ f_{i-1} = 0,\ f_i = 1,\ f_{i+1} = 0,\ \ldots,\ f_{n-1} = 0,\ f_n = 0, \quad (32,29)$$

подставляют их в формулу (32,26) и вычисляют величину, обратную весу уравновешенного значения $\frac{1}{p_{X_i}}$. По ней и по ошибке единицы веса из формулы (32,5) находят среднюю квадратическую ошибку M_{X_i}.

§ 33. Примеры на составление условных уравнений и уравновешивание условных измерений

Проиллюстрируем рассмотренную выше теорию уравновешивания результатов измерений величин, связанных условными уравнениями, на ряде примеров. Так как при уравновешивании методом условных измерений правильное и рациональное составление условных уравнений требует опыта, то в первых трех примерах рассмотрим только этот этап уравнительных вычислений.

Пример 1. Составление условных уравнений для уравновешивания углов, измеренных на станции во всех комбинациях. На точке A, между направлениями B, C, D, E (рис. 5) измерены шесть углов во всех комбинациях. По условиям задачи требуется определить уравновешенные значения углов 1, 2 и 3, необходимых для определения взаимного положения направления B, C, D, E. Таким образом, число избыточных измерений будет равно

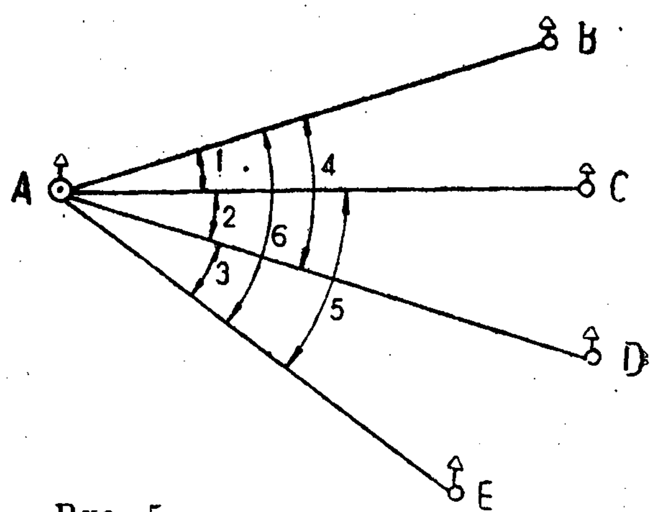


Рис. 5

$$r = n - t = 6 - 3 = 3, \quad (33,1)$$

оно определит число условных уравнений.

Очевидно, уравновешенные значения углов γ° должны удовлетворять следующим требованиям:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1^\circ+\gamma_2^\circ+\gamma_3^\circ-\gamma_6^\circ=0;\\ \gamma_1^\circ+\gamma_2^\circ-\gamma_4^\circ=0;\\ \gamma_2^\circ+\gamma_3^\circ-\gamma_5^\circ=0. \end{aligned}\right\} \tag{33,2}$$

Подставим в полученные условные уравнения вместо уравновешенных значений углов γ° их выражения через измеренные значения γ и поправки ε:

$$\left.\begin{aligned} (\gamma_1+\varepsilon_1)+(\gamma_2+\varepsilon_2)+(\gamma_3+\varepsilon_3)-(\gamma_6+\varepsilon_6)=0;\\ (\gamma_1+\varepsilon_1)+(\gamma_2+\varepsilon_2)-(\gamma_4+\varepsilon_4)=0;\\ (\gamma_2+\varepsilon_2)+(\gamma_3+\varepsilon_3)-(\gamma_5+\varepsilon_5)=0. \end{aligned}\right\} \tag{33,3}$$

Левые части этих уравнений разложим в ряд Тейлора:

$$\left.\begin{aligned} (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3-\gamma_6)+\frac{\partial F_a}{\partial\gamma_1}\varepsilon_1+\frac{\partial F_a}{\partial\gamma_2}\varepsilon_2+\frac{\partial F_a}{\partial\gamma_3}\varepsilon_3-\frac{\partial F_a}{\partial\gamma_6}\varepsilon_6=0;\\ (\gamma_1+\gamma_2-\gamma_4)+\frac{\partial F_b}{\partial\gamma_1}\varepsilon_1+\frac{\partial F_b}{\partial\gamma_2}\varepsilon_2-\frac{\partial F_b}{\partial\gamma_4}\varepsilon_4=0;\\ (\gamma_2+\gamma_3-\gamma_5)+\frac{\partial F_c}{\partial\gamma_2}\varepsilon_2+\frac{\partial F_c}{\partial\gamma_3}\varepsilon_3-\frac{\partial F_c}{\partial\gamma_5}\varepsilon_5=0. \end{aligned}\right\} \tag{33,4}$$

Выражения в скобках уравнений (33,4) представляют собой на основании (28,10) невязки или свободные члены:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3-\gamma_6=W_a;\\ \gamma_1+\gamma_2-\gamma_4=W_b;\\ \gamma_2+\gamma_3-\gamma_5=W_c, \end{aligned}\right\} \tag{33,5}$$

а частные производные в уравнениях (33,4) равны

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_a}{\partial\gamma_1}=a_1=1; \quad \frac{\partial F_a}{\partial\gamma_2}=a_2=1; \quad \frac{\partial F_a}{\partial\gamma_3}=a_3=1; \quad \frac{\partial F_a}{\partial\gamma_4}=a_4=0;\\ &\frac{\partial F_a}{\partial\gamma_5}=a_5=0; \quad \frac{\partial F_a}{\partial\gamma_6}=a_6=1;\\ &\frac{\partial F_b}{\partial\gamma_1}=b_1=1; \quad \frac{\partial F_b}{\partial\gamma_2}=b_2=1; \quad \frac{\partial F_b}{\partial\gamma_3}=b_3=0; \quad \frac{\partial F_b}{\partial\gamma_4}=b_4=1;\\ &\frac{\partial F_b}{\partial\gamma_5}=b_5=0; \quad \frac{\partial F_b}{\partial\gamma_6}=b_6=0;\\ &\frac{\partial F_c}{\partial\gamma_1}=c_1=0; \quad \frac{\partial F_c}{\partial\gamma_2}=c_2=1; \quad \frac{\partial F_c}{\partial\gamma_3}=c_3=1; \quad \frac{\partial F_c}{\partial\gamma_4}=c_4=0;\\ &\frac{\partial F_c}{\partial\gamma_5}=c_5=1; \quad \frac{\partial F_c}{\partial\gamma_6}=c_6=0. \end{aligned}\right\} \tag{33,6}$$

Подставив значения свободных членов из (33,5) и коэффициентов из (33,6) в уравнения (33,4), получим

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_6+W_a=0;\\ \varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_4+W_b=0;\\ \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5+W_c=0. \end{aligned}\right\}. \tag{33,7}$$

Уравнения (33,7) являются условными уравнениями поправок в линейном виде.

Пример 2. Составить условные уравнения для измеренных элементов замкнутого теодолитного хода.

Пусть в замкнутом теодолитном ходе, состоящем из пяти вершин, измерены горизонтальные углы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$ и длины линий $l_1, l_2, \ldots, l_5$ (рис. 6). Если даны координаты начальной точки 1 (X_1 и Y_1) и дирекционный угол исходной стороны α_{1-2}, то для вычисления координат всех остальных вершин хода достаточно использовать следующие измеренные данные: углы γ_2, γ_3, γ_4, длины l_1, l_2, l_3, l_4, т. е. $t = 7$. Всего измерено величин $n = 10$. Таким образом, избыточных измерений

$$r = n - t = 10 - 7 = 3. \qquad (33,8)$$

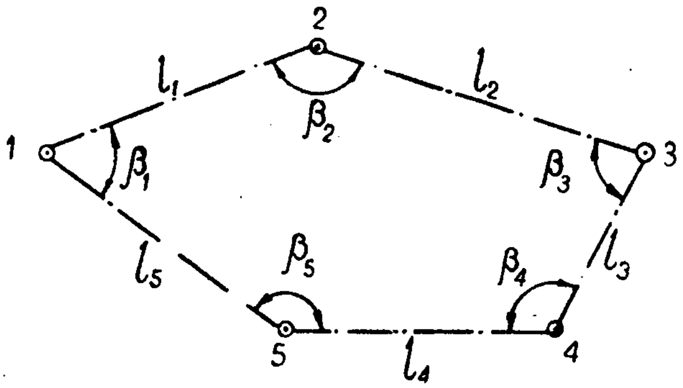


Рис. 6

В соответствии с этим должно быть составлено три условных уравнения. Из курсов геодезии и маркшейдерского дела известно, что в замкнутом теодолитном ходе для уравновешенных значений углов и длин должны удовлетворяться следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} \sum \gamma^\circ - 180^\circ (n-2) = 0; \\ \sum \Delta x = 0; \\ \sum \Delta y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (33,9)$$

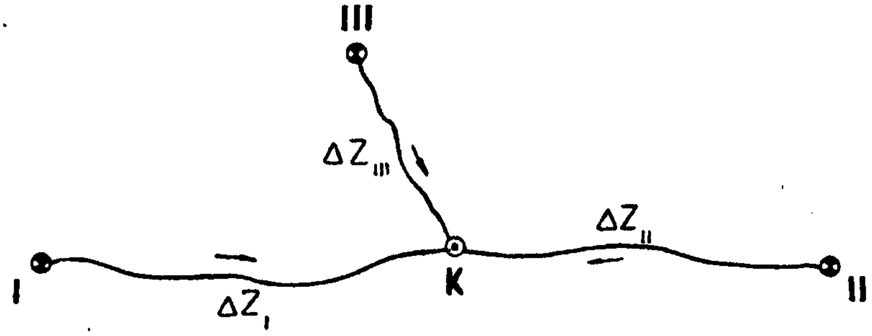


Рис. 7

Условные уравнения (33,9) запишем в развернутом виде через измеренные значения углов γ и длин l и их поправки δ и ε.

$$\left.\begin{aligned} &(\gamma_1 + \delta_1) + (\gamma_2 + \delta_2) + \ldots + (\gamma_5 + \delta_5) - 180^\circ (5-2) = 0; \\ &(l_1 + \varepsilon_1) \cos \alpha_{1-2} + (l_2 + \varepsilon_2) \cos (\alpha_{1-2} + \gamma_2 + \delta_2 - 180^\circ) + \ldots + \\ &\quad + (l_6 + \varepsilon_6) \cos (\alpha_{1-2} + \gamma_2 + \delta_2 + \ldots + \gamma_6 + \delta_6 - 180^\circ \cdot 5) = 0; \\ &(l_1 + \varepsilon_1) \sin \alpha_{1-2} + (l_2 + \varepsilon_2) \sin (\alpha_{1-2} + \gamma_2 + \delta_2 - 180^\circ) + \ldots + \\ &\quad + (l_6 + \varepsilon_6) \sin (\alpha_{1-2} + \gamma_2 + \delta_2 + \ldots + \gamma_6 + \delta_6 - 180^\circ \cdot 5) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (33,10)$$

Чтобы полученные условные уравнения привести к линейному виду, необходимо по формулам (28,9) и (28,10) вычислить коэффициенты a, b, c и свободные члены W_a, W_b и W_c.

Пример 3. Составить условные уравнения для сети нивелирных ходов, образующих одну узловую точку.

Пусть имеется три нивелирных хода, проложенных от реперов I, II, III с отметками Z_I, Z_{II}, Z_{III} к одной узловой точке K (рис. 7). Из этих ходов определены превышения Δz_I, Δz_{II}, Δz_{III}.

Для того чтобы вычислить отметку точки K, достаточно знать одно превышение ΔZ_{I}. Таким образом, $t=1$. Всего проложено три хода, т. е. $n=3$. Тогда число избыточных измерений, равное

$$r=n-t=3-1=2, \tag{33,11}$$

определит число условных уравнений.

Составляем первое условное уравнение: отметки точки K вычисленные по уравновешенным превышениям $\Delta Z_{\mathrm{I}}^{\circ}$ и $\Delta Z_{\mathrm{II}}^{\circ}$ из первого и второго ходов, должны быть равны, т. е.

$$Z_K=Z_{\mathrm{I}}+\Delta Z_{\mathrm{I}}^{\circ}=Z_{\mathrm{II}}+\Delta Z_{\mathrm{II}}^{\circ} \tag{33,12}$$

или

$$Z_{\mathrm{I}}+\Delta Z_{\mathrm{I}}^{\circ}-Z_{\mathrm{II}}-\Delta Z_{\mathrm{II}}^{\circ}=0. \tag{33,13}$$

Из аналогичных рассуждений для первого и второго ходов будем иметь второе условное уравнение

$$Z_{\mathrm{I}}+\Delta Z_{\mathrm{I}}^{\circ}-Z_{\mathrm{III}}-\Delta Z_{\mathrm{III}}^{\circ}=0. \tag{33,14}$$

Кроме полученных двух условных уравнений, составим еще одно условное уравнение

$$Z_{\mathrm{II}}+\Delta Z_{\mathrm{II}}^{\circ}-Z_{\mathrm{III}}-\Delta Z_{\mathrm{III}}^{\circ}=0. \tag{33,15}$$

Уравнение (33,15) не является новым условным уравнением, так как оно может быть получено из двух предыдущих, если из (33,14) вычесть (33,13).

Для приведения условных уравнений (33,13) и (33,14) к линейному виду, подставив в них измеренные значения превышений ΔZ и их поправки ε, получим

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{\mathrm{I}}-\varepsilon_{\mathrm{II}}+Z_{\mathrm{I}}+\Delta Z_{\mathrm{I}}-Z_{\mathrm{II}}-\Delta Z_{\mathrm{II}}=0;\\ \varepsilon_{\mathrm{I}}-\varepsilon_{\mathrm{III}}+Z_{\mathrm{I}}+\Delta Z_{\mathrm{I}}-Z_{\mathrm{III}}-\Delta Z_{\mathrm{III}}=0\end{aligned}\right\} \tag{33,16}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{\mathrm{I}}-\varepsilon_{\mathrm{II}}+W_a=0;\\ \varepsilon_{\mathrm{I}}-\varepsilon_{\mathrm{III}}+W_b=0,\end{aligned}\right\} \tag{33,17}$$

где

$$\left.\begin{aligned}W_a=Z_{\mathrm{I}}+\Delta Z_{\mathrm{I}}-Z_{\mathrm{II}}-\Delta Z_{\mathrm{II}};\\ W_b=Z_{\mathrm{I}}+\Delta Z_{\mathrm{I}}-Z_{\mathrm{III}}-\Delta Z_{\mathrm{III}}.\end{aligned}\right\} \tag{33,18}$$

Уравнения (33,17) являются искомыми условными уравнениями в линейном виде.

Пример 4. Разберем на примере полного геодезического четырехугольника применение теории уравновешивания и оценки точности измерений, связанных условными уравнениями.

Геодезическим четырехугольником называется фигура $ABCD$, имеющая две диагонали (рис. 8), в которой непосредственно измерены все восемь углов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_8$.

Будем предполагать, что одна из сторон четырехугольника является исходной, для которой известны ее длина, дирекционный угол и координаты начальной точки. Необходимо определить координаты остальных точек четырехугольника по уравновешенным значениям измеренных углов $\gamma_1^{\circ}, \gamma_2^{\circ}, \ldots, \gamma_8^{\circ}$.

Для решения этой задачи прежде всего нужно установить наличие избыточных измерений и по ним составить условные уравнения.

Предположим, что исходной является сторона BD (рис. 9). Чтобы определить по отношению к ней положение точки A, необходимо знать углы γ_2° и γ_7°; положение точки C определится углами γ_3° и γ_6°.

Таким образом, можно утверждать, что для однозначного решения данной задачи — вычислить координаты точек A и C — необходимо измерить четыре угла, т. е. $t = 4$. Общее число всех измерений $n = 8$. Тогда число избыточных измерений

$$r = n - t = 8 - 4 = 4. \qquad (33{,}19)$$

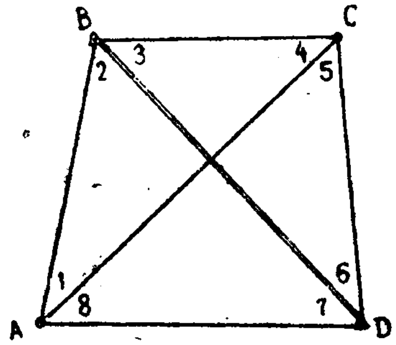


Рис. 8

Так как число условных уравнений определяется числом избыточных измерений, в геодезическом четырехугольнике должны появиться четыре независимых между собой условных уравнения.

Отложив от выбранной исходной стороны BD углы γ_2°, γ_3°, γ_6°, γ_7°, проведем направления, которые в своем пересечении определят положение искомых точек A и C (рис. 9, *а*). Эти измерения углов будут являться необходимыми, а остальные избыточными.

Приступим к составлению этих условных уравнений. Отложим угол γ_1°, который даст новое направление AC (рис. 9, *б*). Очевидно, при наличии уравновешенных значений измеренных углов линия AC, проведенная под углом γ_1°, должна точно пройти через точку C. Это и будет первым условием, возникшим

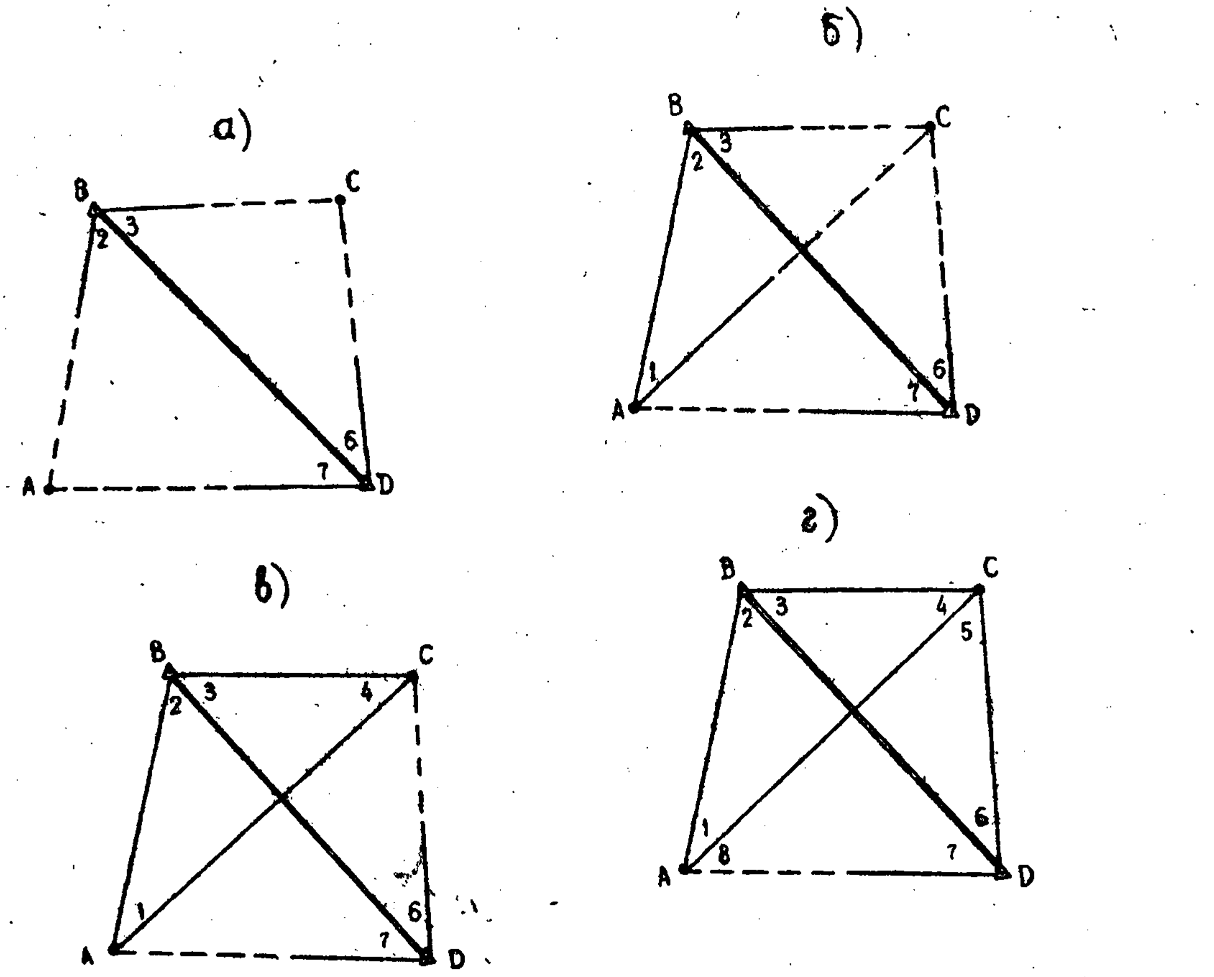


Рис. 9

с появлением первого избыточного измерения. *Такое условное уравнение называется полюсным.* Математически для сторон, пересекающихся в точке C, оно выражается так:

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{DC}{AC} \cdot \frac{BC}{DC} = 1. \qquad (33{,}20)$$

Из $\triangle ABC$ имеем

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin(\gamma_2^\circ + \gamma_3^\circ)}{\sin \gamma_1^\circ}, \qquad (33{,}21)$$

из $\triangle ADC$

$$\frac{DC}{AC}=\frac{\sin[180-(\gamma_1^\circ+\gamma_2^\circ+\gamma_7^\circ)]}{\sin(\gamma_6^\circ+\gamma_7^\circ)}, \tag{33,22}$$

из $\triangle BDC$

$$\frac{BC}{DC}=\frac{\sin\gamma_6^\circ}{\sin\gamma_3^\circ}. \tag{33,23}$$

Подставив равенства (33,21), (33,22) и (33,23) в равенство (33,20), получим

$$\frac{AC}{BC}\cdot\frac{DC}{AC}\cdot\frac{BC}{DC}=\frac{\sin(\gamma_2^\circ+\gamma_3^\circ)\sin(\gamma_1^\circ+\gamma_2^\circ+\gamma_7^\circ)\sin\gamma_6^\circ}{\sin\gamma_1^\circ\sin(\gamma_6^\circ+\gamma_7^\circ)\sin\gamma_3^\circ} \tag{33,24}$$

или

$$\frac{\sin(\gamma_2^\circ+\gamma_3^\circ)\sin(\gamma_1^\circ+\gamma_2^\circ+\gamma_7^\circ)\sin\gamma_6^\circ}{\sin\gamma_1^\circ\sin(\gamma_6^\circ+\gamma_7^\circ)\sin\gamma_3^\circ}=1. \tag{33,25}$$

Это и есть полюсное уравнение. Аналогичные соотношения должны соблюдаться в любой вершине четырехугольника.

За полюс рекомендуется принимать ту вершину четырехугольника, у которой величина внутреннего угла максимальная. В этом случае углы, входящие в полюсное уравнение, будут более острыми, а коэффициенты условного уравнения наибольшими.

Обратимся теперь к углу γ_4° (рис. 9, *в*), измерение которого даст возможность составить второе условное уравнение: сумма внутренних углов плоского треугольника ABC должна быть равна 180°.

Запишем это уравнение

$$\gamma_1^\circ+\gamma_2^\circ+\gamma_3^\circ+\gamma_4^\circ-180^\circ=0. \tag{33,26}$$

Далее нанесем на схему (рис. 9, *г*) угол γ_5°. Условное уравнение, возникающее с появлением этого избыточного измерения из треугольника BCD, будет иметь вид

$$\gamma_3^\circ+\gamma_4^\circ+\gamma_5^\circ+\gamma_6^\circ-180^\circ=0. \tag{33,27}$$

Четвертое избыточное измерение — угол γ_8° (рис. 9, *г*) приведет к условному уравнению, составленному из треугольника ACD,

$$\gamma_5^\circ+\gamma_6^\circ+\gamma_7^\circ+\gamma_8^\circ-180^\circ=0. \tag{33,28}$$

Три последние условные уравнения называются **уравнениями фигур**. Для их составления могут быть взяты три любых треугольника.

В условных уравнениях (33,25), (33,26), (33,27), (33,28) уравновешенные значения углов $\gamma_1^\circ, \gamma_2^\circ, \ldots, \gamma_8^\circ$ заменим их измеренными значениями $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_8$ и поправками $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&a)\quad \gamma_1+\varepsilon_1+\gamma_2+\varepsilon_2+\gamma_3+\varepsilon_3+\gamma_4+\varepsilon_4-180^\circ=0;\\
&b)\quad \gamma_3+\varepsilon_3+\gamma_4+\varepsilon_4+\gamma_5+\varepsilon_5+\gamma_6+\varepsilon_6-180^\circ=0;\\
&c)\quad \gamma_5+\varepsilon_5+\gamma_6+\varepsilon_6+\gamma_7+\varepsilon_7+\gamma_8+\varepsilon_8-180^\circ=0;\\
&d)\quad \frac{\sin(\gamma_2+\varepsilon_2+\gamma_3+\varepsilon_3)\sin(\gamma_8+\varepsilon_8)\sin(\gamma_6+\varepsilon_6)}{\sin(\gamma_1+\varepsilon_1)\sin(\gamma_6+\varepsilon_6+\gamma_7+\varepsilon_7)\sin(\gamma_3+\varepsilon_3)}=1.
\end{aligned}\right\} \tag{33,29}$$

Условные уравнения системы (33,29) приведем к линейному виду:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+W_a=0; \tag{33,30}$$

$$\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6+W_b=0; \tag{33,31}$$

$$\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_7+\varepsilon_8+W_c=0, \tag{33,32}$$

$$W_a = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 180^\circ; \quad (33{,}33)$$

$$W_b = \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 - 180^\circ; \quad (33{,}34)$$

$$W_c = \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8 - 180^\circ. \quad (33{,}35)$$

Приведем к линейному виду полюсное уравнение. Для этого прологарифмируем его

$$\lg\sin(\gamma_2 + \varepsilon_2 + \gamma_3 + \varepsilon_3) + \lg\sin(\gamma_8 + \varepsilon_8) + \lg\sin(\gamma_6 + \varepsilon_6) - \lg\sin(\gamma_1 + \varepsilon_1) -$$
$$- \lg\sin(\gamma_6 + \varepsilon_6 + \gamma_7 + \varepsilon_7) - \lg\sin(\gamma_3 + \varepsilon_3) = 0 \quad (33{,}36)$$

и уравнение (33,36) разложим в ряд Тейлора

$$[\lg\sin(\gamma_2 + \gamma_3) + \lg\sin\gamma_8 + \lg\sin\gamma_6 - \lg\sin\gamma_1 - \lg\sin(\gamma_6 + \gamma_7) - \lg\sin\gamma_3] +$$
$$+ \frac{\partial F_d}{\partial \gamma_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial F_d}{\partial \gamma_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial F_d}{\partial \gamma_8}\varepsilon_8 = 0. \quad (33{,}37)$$

Выражение в квадратных скобках равенства (33,37) является свободным членом W_d данного уравнения. Определение частных производных разберем на примере функции одного угла. Если поправка ε к углу достаточно мала, то, используя формулу Тейлора, можно записать

$$\lg\sin(\gamma_i + \varepsilon_i'') = \lg\sin\gamma_i + M \operatorname{ctg}\gamma_i \frac{\varepsilon_i''}{\rho''}, \quad (33{,}38)$$

где $M = 0{,}4343$.

Обозначив

$$\frac{M}{\rho''}\operatorname{ctg}\gamma_i = \Delta_i \quad (33{,}39)$$

получим

$$\lg\sin(\gamma_i + \varepsilon_i'') - \lg\sin\gamma_i = \Delta_i \varepsilon_i''. \quad (33{,}40)$$

При ε_i'', равном $1''$, будем иметь

$$\lg\sin(\gamma_i + 1'') - \lg\sin\gamma_i = \Delta_i. \quad (33{,}41)$$

Отсюда можно сделать вывод, что Δ_i есть не что иное, как изменение логарифма синуса угла при изменении его на $1''$. Эта величина определится по таблицам логарифмов, как табличная разность логарифма синуса угла на одну секунду в шестых или седьмых его знаках.

На основании вышеизложенного уравнение (33,37) можно записать в следующем виде:

$$\Delta_{2+3}\varepsilon_2 + \Delta_{2+3}\varepsilon_3 + \Delta_8\varepsilon_8 + \Delta_6\varepsilon_6 - [\Delta_1\varepsilon_1 + \Delta_{6+7}\varepsilon_6 + \Delta_{6+7}\varepsilon_7 + \Delta_3\varepsilon_3] + W_d = 0. \quad (33{,}42)$$

Приведя подобные члены, окончательно получим

$$-\Delta_1\varepsilon_1 + \Delta_{2+3}\varepsilon_2 + (\Delta_{2+3} - \Delta_3)\,\varepsilon_3 + (\Delta_6 - \Delta_{6+7})\,\varepsilon_6 - \Delta_{6+7}\varepsilon_7 + \Delta_8\varepsilon_8 + W_d = 0. \quad (33{,}43)$$

Составив условные уравнения поправок в линейном виде, определив их коэффициенты и свободные члены, вычисляют коэффициенты нормальных уравнений коррелат (см. табл. 11).

Решая нормальные уравнения коррелат в схеме Гаусса — Дулитля (см. табл. 12), находят коррелаты и по уравнениям (28,16) или (28,22), вычисляют поправки ε, на которые и должны быть исправлены измеренные значения углов, чтобы получить их уравновешенные значения.

При решении данной задачи оценка точности сводится к определению ошибки единицы веса измеренных углов по формулам (32,2) или (32,3) и определению погрешности удаленной стороны, вычисленной по уравновешенным значениям углов из весовой функции, для чего используются формулы (32,5) и (32,25) или (32,26).

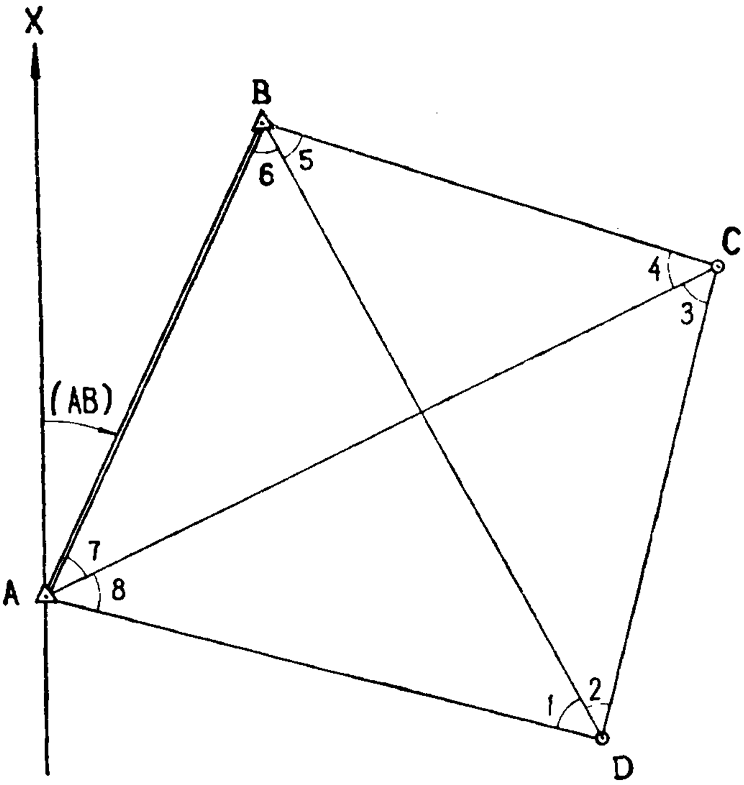


Рис. 10

Обратимся к числовому примеру. В геодезическом четырехугольнике $ABCD$ (рис. 10) равноточно измерены все углы:

$$\gamma_1 = 47^\circ\,12'\,57'',\quad \gamma_5 = 44^\circ\,29'\,00'',$$

$$\gamma_2 = 44^\circ\,15'\,15'',\quad \gamma_6 = 52^\circ\,51'\,21'',$$

$$\gamma_3 = 48^\circ\,16'\,46'',\quad \gamma_7 = 39^\circ\,40'\,35'',$$

$$\gamma_4 = 42^\circ\,59'\,03'',\quad \gamma_8 = 40^\circ\,15'\,03''.$$

Исходной стороной в геодезическом четырехугольнике является сторона AB, логарифм длины которой $\lg AB = 3{,}7634052$. Дирекционный угол $(AB) = 25^\circ\,30'\,40''$ и координаты начальной точки A: $X_A = 29707{,}296$ *м*, $Y_A = 24818{,}362$ *м*.

По этим данным необходимо определить уравновешенные значения углов и произвести оценку точности.

Порядок вычислений. 1. Составление условных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \text{Из } \triangle ABC\ \ \gamma_4^\circ + \gamma_5^\circ + \gamma_6^\circ + \gamma_7^\circ - 180^\circ = 0;\\ &b)\ \text{из } \triangle ACD\ \ \gamma_1^\circ + \gamma_2^\circ + \gamma_3^\circ + \gamma_8^\circ - 180^\circ = 0;\\ &c)\ \text{из } \triangle BCD\ \ \gamma_2^\circ + \gamma_3^\circ + \gamma_4^\circ + \gamma_5^\circ - 180^\circ = 0. \end{aligned}\right\}\ \text{Условные уравнения фигур}$$

$$d)\ \text{Полюс в точке } B\ \ \frac{\sin\gamma_1^\circ \sin(\gamma_3^\circ + \gamma_4^\circ)\sin\gamma_7^\circ}{\sin(\gamma_7^\circ + \gamma_8^\circ)\sin\gamma_2^\circ \sin\gamma_4^\circ} = 1. \Big\}\ \text{Полюсное уравнение}$$

2. Определение коэффициентов и свободных членов условных уравнений поправок.

Коэффициенты условных уравнений фигур будут равны:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ a_5 = 1,\ a_6 = 1,\ a_7 = 1,\ a_8 = 0;$$

$$b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1,\ b_4 = 0,\ b_5 = 0,\ b_6 = 0,\ b_7 = 0,\ b_8 = 1;$$

$$c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 1,\ c_4 = 1,\ c_5 = 1,\ c_6 = 0,\ c_7 = 0,\ c_8 = 0.$$

Вычисления свободных членов уравнений фигур приведены в табл. 13.

Для полюсного уравнения коэффициенты Δ и свободный член W_d определяются в седьмых знаках логарифмов. Вычисления их приведены в табл. 14.

3. Составление условных уравнений поправок:

$$a)\quad a_4\varepsilon_4 + a_5\varepsilon_5 + a_6\varepsilon_6 + a_7\varepsilon_7 + W_a = 0;$$

$$b)\quad b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3 + b_8\varepsilon_8 + W_b = 0;$$

$$c)\quad c_2\varepsilon_2 + c_3\varepsilon_3 + c_4\varepsilon_4 + c_5\varepsilon_5 + W_c = 0;$$

$$d)\quad \Delta_1\varepsilon_1 - \Delta_2\varepsilon_2 + \Delta_{3+4}\varepsilon_3 + (\Delta_{3+4} - \Delta_4)\,\varepsilon_4 + (\Delta_7 - \Delta_{7+8})\,\varepsilon_7 - \Delta_{7+8}\varepsilon_8 + W_d = 0.$$

Таблица 13

Угол	Значение угла	Угол	Значение угла	Угол	Значение угла
γ_4 γ_5 γ_6 γ_7	42° 59′ 03″ 44 29 00 52 51 21 39 40 35	γ_1 γ_2 γ_3 γ_8	47° 12′ 57′ 44 15 15 48 16 46 40 15 03	γ_2 γ_3 γ_4 γ_5	44° 15′ 15″ 48 16 46 42 59 03 44 29 00
$\sum\gamma$	179 59 59	$\sum\gamma$	180 00 01	$\sum\gamma$	180 00 04
—	180 00 00	—	180 00 00	—	180 00 00
W_a	—01	W_b	+01	W_c	+04

Таблица 14

Числитель				Знаменатель			
№ угла	Значение угла	Логарифмы синусов углов	Δ	№ угла	Значение угла	Логарифмы синусов углов	Δ
γ_1 $\gamma_3+\gamma_4$ γ_7	47° 12′ 57″ 91 15 49 39 40 35	9,8656473 9,9998943 9,8051274	+19,4 —0,5 +25,4	$\gamma_7+\gamma_8$ γ_2 γ_4	79° 55′ 38″ 44 15 15 42 59 03	9,9932538 9,8437574 9,8336546	+3,8 +21,7 +22,6
	$\sum\lg$	9,6706690			$\sum\lg$	9,6706658	

$$W_d = \sum \lg \text{ числителя минус } \sum \lg \text{ знаменателя.}$$

$$W_d = +32.$$

Подставив числовые значения коэффициентов и свободных членов, получим:

$$a)\quad \varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_7-1=0;$$

$$b)\quad \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_8+1=0;$$

$$c)\quad \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+4=0;$$

$$d)\quad 19{,}4\varepsilon_1-21{,}7\varepsilon_2-0{,}5\varepsilon_3-23{,}1\varepsilon_4+21{,}6\varepsilon_7-3{,}8\varepsilon_8+32=0.$$

4. Составление весовой функции. Для определения ошибки удаленной стороны CD составим весовую функцию U, выражающую сторону CD через исходную сторону AB:

$$U=CD=\frac{AB\sin\gamma_5^\circ\sin(\gamma_7^\circ+\gamma_8^\circ)}{\sin\gamma_1^\circ\sin(\gamma_3^\circ+\gamma_4^\circ)}.$$

Приведем данную функцию к линейному виду

$$\lg U = F_0 + f_5\varepsilon_5 + f_{7+8}\varepsilon_7 + f_{7+8}\varepsilon_8 - f_1\varepsilon_1 - f_{3+4}\varepsilon_3 - f_{3+4}\varepsilon_4.$$

Так как весовая функция является синусной, то ее коэффициенты f будут являться не чем иным, как изменением логарифмов синусов соответствующих углов на одну секунду в единицах седьмых знаков логарифмов.

Составим таблицу коэффициентов весовой функции.

Таблица 15

№ угла	Значение угла	f	№ угла	Значение угла	f
5	44° 29′ 00″	+21,4	1	47° 12′ 57″	+19,4
7+8	79 55 38	+3,8	3+4	91 15 49	−0,5

$$\lg U = F_0 + 21{,}4\varepsilon_5 + 3{,}8\varepsilon_7 + 3{,}8\varepsilon_8 - 19{,}4\varepsilon_1 + 0{,}5\varepsilon_3 + 0{,}5\varepsilon_4.$$

5. Вычисление коэффициентов нормальных уравнений коррелат производится по полной схеме (табл. 16).

6. Составление системы нормальных уравнений коррелат:

$$4 \cdot K_1 + 0 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 - 1{,}5 \cdot K_4 - 1 = 0;$$

$$0 \cdot K_1 + 4 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 - 6{,}6 \cdot K_4 + 1 = 0;$$

$$2 \cdot K_1 + 2 \cdot K_2 + 4 \cdot K_3 - 45{,}3 \cdot K_4 + 4 = 0;$$

$$-1{,}5K_1 - 6{,}6K_2 - 45{,}3K_3 + 1862{,}1K_4 + 32 = 0.$$

№ поправки	a	b	c	d	f	s	aa	ab	ac	ad	af	as	bb	bc	bd
ε_1	0	1	0	+19,4	−19,4	+1,0	0	0	0	0	0	0	1	0	+19,4
ε_2	0	1	1	−21,7	0	−19,7	0	0	0	0	0	0	1	1	−21,7
ε_3	0	1	1	−0,5	+0,5	+2,0	0	0	0	0	0	0	1	1	−0,5
ε_4	1	0	1	−23,1	+0,5	−20,6	1	0	1	−23,1	+0,5	−20,6	0	0	0
ε_5	1	0	1	0	+21,4	+23,4	1	0	1	0	+21,4	+23,4	0	0	0
ε_6	1	0	0	0	0	+1,0	1	0	0	0	0	+1	0	0	0
ε_7	1	0	0	+21,6	+3,8	+26,4	1	0	0	+21,6	+3,8	+26,4	0	0	0
ε_8	0	1	0	−3,8	+3,8	+1,0	0	0	0	0	0	0	1	0	−3,8
$\sum$	4	4	4	−8,1	+10,6	+14,5	4	0	2	−1,50	+25,7	+30,2	4	2	−6,60
W	−1	+1	+4	+32											

7. Решение нормальных уравнений коррелат выполняется в схеме Гаусса — Дулитля (табл. 17).

8. Контроль вычисления коррелат по формуле (31,9)

$$-[KW]=\frac{W_a^2}{[aa]}+\frac{[W_b\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{[W_c\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}+\frac{[W_d\cdot 3]^2}{[dd\cdot 3]};$$

$$-21{,}907=21{,}907.$$

9. Вычисление поправок и осуществление заключительного контроля (табл. 18).

10. Вычисление уравновешенных значений измеренных углов (табл. 19).

11. Заключительный контроль осуществляется подстановкой уравновешенных значений измеренных углов в условные уравнения.

Контроль условных уравнений фигур произведен в табл. 20.

Контроль полюсного уравнения приведен в табл. 21.

Результаты контрольных вычислений свидетельствуют о правильности произведенного уравнивания.

12. Определение средней квадратической ошибки измеренных углов. Согласно формуле (32,3) имеем

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{r}}=\pm\sqrt{\frac{21{,}9}{4}}=\pm 2'',3.$$

13. Определение ошибки удаленной стороны CD. Согласно формуле (32,5) будем иметь ошибку удаленной стороны, выраженную в единицах седьмого знака логарифмов,

$$M_{\lg CD}=m\sqrt{\frac{1}{P_U}}=2{,}3\sqrt{495{,}08}=\pm 51.$$

Таблица 16

bf	bs	cc	cd	cf	cs	dd	df	ds	ff	fs
−19,4	+1	0	0	0	0	+376,36	−376,36	+19,40	+376,36	−19,4
0	−19,7	1	−21,7	0	−19,7	+470,89	0	+427,49	0	0
+0,5	+2	1	−0,5	+0,5	+2	+0,25	−0,25	−1	+0,25	1
0	0	1	−23,1	+0,5	−20,6	+533,61	−11,55	+475,86	+0,25	−10,3
0	0	1	0	+21,4	+23,4	0	0	0	+457,96	500,76
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	+466,56	+82,08	+570,24	+14,44	100,32
+3,8	+1	0	0	0	0	+14,44	−14,44	−3,80	+14,44	3,8
−15,1	−15,7	4	−45,3	+22,4	−14,9	+1862,11	−320,52	+1488,19	+863,70	576,18

Таблица 17

K_1	K_2	K_3	K_4	W	f	S'	
4 −1 $K_1 = +2{,}4008$	0 0 0	2 −0,5000 +2,1942	−1,5 +0,3750 −0,0434	−1 +0,2500 +0,2500	+25,7 −6,4250	+29,2 −7,3000	C_1
	4 0 4 −1 $K_2 = +1{,}7531$	2 0 2 −0,5000 +2,1942	−6,6 0 −6,6 +1,6500 −0,1911	−1 0 +1 −0,2500 −0,250	−15,1 0 −15,1 +3,7750	−14,7 0 −14,7 +3,6750	C_1' C_2 C_3
		4 −1,000 −1,000 +2,000 −1 $K_3 = -4{,}3884$	−45,30 +0,750 +3,300 −41,250 +20,6250 −2,3884	+4 +0,500 −0,500 +4,000 −2,0000 −2	+22,40 −12,850 +7,550 +17,100 −8,5500	−10,90 −14,60 +7,350 −18,15 +9,0750	C_2' C_3' C_4 C_5
			+1862,1 −0,5625 −10,8900 −850,7812 +999,8663 −1 $K_4 = -0{,}1158$	+31,6 −0,3750 +1,6500 +82,5000 +115,7750 −0,1158	−320,52 +9,6375 −24,9150 +352,6875 +16,9100 −0,0169	+1519,79 +10,950 −24,2550 −374,3438 +1132,5512 −1,1327	C_4' C_5' C_6' C_6 C_7
					+863,7 −165,12 −57,00 −146,21 −0,29 $\frac{1}{p_U} = +495{,}08$		

Таблица 18

№ поправки	a	b	c	d	ε в секундах	$\varepsilon\varepsilon$
	$K_1=+2,4008$	$K_2=+1,7531$	$K_3=-4,3884$	$K_4=-0,1158$		
ε_1	0 0	1 +1,7531	0 0	+19,4 −2,2465	−0,493	0,243
ε_2	0 0	1 +1,7531	1 −4,3884	−21,7 +2,5129	−0,122	0,015
ε_3	0 0	1 +1,7531	1 −4,3884	−0,5 +0,0579	−2,577	6,640
ε_4	1 +2,4008	0 0	1 −4,3884	−23,1 +2,6750	+0,687	0,472
ε_5	1 +2,4008	0 0	1 −4,3884	0 0	−1,988	3,952
ε_6	1 +2,4008	0 0	0 0	0 0	+2,401	5,765
ε_7	1 +2,4008	0 0	0 0	+21,6 −2,5013	−0,100	0,010
ε_8	0 0	1 +1,7531	0 0	−3,8 +0,4400	+2,193	4,809
W	−1	+1	+4	+32	$[\varepsilon\varepsilon]=$	21,906
KW	−2,4008	+1,7531	−17,5536	−3,7056	$[KW]=$	−21,907

Таблица 19

№ угла	Измеренное значение угла γ	Поправка ε	Уравновешенное значение угла γ°
1	47° 12′ 57″	−0,5″	47° 12′ 56″,5
2	44 15 15	−0,1	44 15 14 ,9
3	48 16 46	−2,6	48 16 43 ,4
4	42 59 03	+0,7	42 59 03 ,7
5	44 29 00	−2,0	44 28 58 ,0
6	52 51 21	+2,4	52 51 23 ,4
7	39 40 35	−0,1	39 40 34 ,9
8	40 15 03	+2,2	40 15 05 ,2

Тогда относительная ошибка удаленной стороны в соответствии с формулой (11,7) получится

$$\frac{1}{N}=\frac{M_{\lg CD}}{\mathrm{M}\cdot 10^7}=\frac{51}{0,4343\cdot 10^7}\approx\frac{1}{84\,000}.$$

Таблица 20

Угол	Значение угла	Угол	Значение угла	Угол	Значение угла
γ_4° γ_5° γ_6° γ_7°	42° 59′ 03″,7 44 28 58 ,0 52 51 23 ,4 39 40 34 ,9	γ_1° γ_2° γ_3° γ_8°	47° 12′ 56″,5 44 15 14 ,9 48 16 43 ,4 40 15 05 ,2	γ_2° γ_3° γ_4° γ_5°	44° 15′ 14″,9 48 16 43 ,4 42 59 03 ,7 44 28 58 ,0
$\sum$	180 00 00 ,0	$\sum$	180 00 00 ,0	$\sum$	180 00 00 ,0
—	180 00 00 ,0	—	180 00 00 ,0	—	180 00 00 ,0
W_a	0	W_b	0	W_c	0

Таблица 21

Числитель			Знаменатель		
№ угла	Значение угла γ°	lg sin γ°	№ угла	Значение угла γ°	lg sin γ°
γ_1° $\gamma_3^\circ+\gamma_4^\circ$ γ_7°	47° 12′ 56″,5 91 15 47 ,1 39 40 34 ,9	9,8656463 9,9998944 9,8051272	$\gamma_7^\circ+\gamma_8^\circ$ γ_2° γ_4°	79° 55′ 40″,1 44 15 14 ,9 42 59 03 ,7	9,9932546 9,8437572 9,8336562
	$\sum$ lg=	9,6706679		$\sum$ lg=	9,6706680

Глава V

МЕТОД ДВУХГРУППОВОГО УРАВНОВЕШИВАНИЯ УСЛОВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 34. Общая теория уравновешивания по методу двух групп

При совместном решении большого числа нормальных уравнений по методу Гаусса требуются значительные затраты труда и времени. В связи с этим возникает вопрос об искусственном преобразовании условных уравнений (уравнений поправок) таким образом, чтобы система нормальных уравнений распалась на две независимые группы, каждая из которых могла быть решена самостоятельно.

Сущность метода двухгруппового уравновешивания заключается в следующем: систему уравнений поправок делят на две группы. Первую группу решают обычным способом, рассмотренным в главе IV, в результате чего определяют первичные поправки ε_i'.

Вторую группу условных уравнений преобразуют так, чтобы она совместно с первой группой дала бы систему, эквивалентную первоначальной системе уравнений поправок (до разделения на группы). Из решения второй преобразованной группы уравнений определяются вторичные поправки ε_i'', которые в сумме с первичными поправками должны дать окончательные поправки ε_i, т. е.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i' + \varepsilon_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим случай равноточных измерений. Пусть дана система из пяти условных уравнений поправок.

Разделив их на две группы, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n + W_a = 0; \\ b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots + b_n\varepsilon_n + W_b = 0; \\ c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \ldots + c_n\varepsilon_n + W_c = 0; \end{aligned}\right\} \text{первая группа} \tag{34,1}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n + W_\alpha = 0; \\ \beta_1\varepsilon_1 + \beta_2\varepsilon_2 + \ldots + \beta_n\varepsilon_n + W_\beta = 0. \end{aligned}\right\} \text{вторая группа} \tag{34,2}$$

Составим для первой группы нормальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,K_1' + [ab]\,K_2' + [ac]\,K_3' + W_a = 0; \\ [ab]\,K_1' + [bb]\,K_2' + [bc]\,K_3' + W_b = 0; \\ [ac]\,K_1' + [bc]\,K_2' + [cc]\,K_3' + W_c = 0 \end{aligned}\right\} \tag{34,3}$$

и, решив их, определим первичные поправки:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1' &= a_1K_1' + b_1K_2' + c_1K_3'; \\ \varepsilon_2' &= a_2K_1' + b_2K_2' + c_2K_3'; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n' &= a_nK_1' + b_nK_2' + c_nK_3'. \end{aligned}\right\} \tag{34,4}$$

Вторую группу условных уравнений поправок преобразуем следующим образом: условные уравнения первой группы (34,1) умножим соответственно на неопределенные множители ρ_{a1}, ρ_{b1}, ρ_{c1} и прибавим к первому уравнению второй группы (34,2); группируя вокруг поправок ε_i, получим

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 + a_1\rho_{a1} + b_1\rho_{b1} + c_1\rho_{c1})\,\varepsilon_1 + \\ &+ (\alpha_2 + a_2\rho_{a1} + b_2\rho_{b1} + c_2\rho_{c1})\,\varepsilon_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\alpha_n + a_n\rho_{a1} + b_n\rho_{b1} + c_n\rho_{c1})\,\varepsilon_n + \\ &+ W_\alpha + W_a\rho_{a1} + W_b\rho_{b1} + W_c\rho_{c1} = 0. \end{aligned} \tag{34,5}$$

Введем обозначения:

$$\alpha_i + a_i\rho_{a1} + b_i\rho_{b1} + c_i\rho_{c1} = A_i; \tag{34,6}$$

$$W_\alpha - W_a\rho_{a1} + W_b\rho_{b1} + W_c\rho_{c1} = W_A. \tag{34,7}$$

Таблица 20

Угол	Значение угла	Угол	Значение угла	Угол	Значение угла
γ_4° γ_5° γ_6° γ_7°	42° 59′ 03″,7 44 28 58 ,0 52 51 23 ,4 39 40 34 ,9	γ_1° γ_2° γ_3° γ_8°	47° 12′ 56″,5 44 15 14 ,9 48 16 43 ,4 40 15 05 ,2	γ_2° γ_3° γ_4° γ_5°	44° 15′ 14″,9 48 16 43 ,4 42 59 03 ,7 44 28 58 ,0
$\sum$	180 00 00 ,0	$\sum$	180 00 00 ,0	$\sum$	180 00 00 ,0
—	180 00 00 ,0	—	180 00 00 ,0	—	180 00 00 ,0
W_a	0	W_b	0	W_c	0

Таблица 21

Числитель			Знаменатель		
№ угла	Значение угла γ°	lg sin γ°	№ угла	Значение угла γ°	lg sin γ°
γ_1° $\gamma_3^\circ+\gamma_4^\circ$ γ_7°	47° 12′ 56″,5 91 15 47 ,1 39 40 34 ,9	9,8656463 9,9998944 9,8051272	$\gamma_7^\circ+\gamma_8^\circ$ γ_2° γ_4°	79° 55′ 40″,1 44 15 14 ,9 42 59 03 ,7	9,9932546 9,8437572 9,8336562
	$\sum$ lg=	9,6706679		$\sum$ lg=	9,6706680

Глава V

МЕТОД ДВУХГРУППОВОГО УРАВНОВЕШИВАНИЯ УСЛОВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 34. Общая теория уравновешивания по методу двух групп

При совместном решении большого числа нормальных уравнений по методу Гаусса требуются значительные затраты труда и времени. В связи с этим возникает вопрос об искусственном преобразовании условных уравнений (уравнений поправок) таким образом, чтобы система нормальных уравнений распалась на две независимые группы, каждая из которых могла быть решена самостоятельно.

Сущность метода двухгруппового уравновешивания заключается в следующем: систему уравнений поправок делят на две группы. Первую группу решают обычным способом, рассмотренным в главе IV, в результате чего определяют первичные поправки ε_i'.

Вторую группу условных уравнений преобразуют так, чтобы она совместно с первой группой дала бы систему, эквивалентную первоначальной системе уравнений поправок (до разделения на группы). Из решения второй преобразованной группы уравнений определяются вторичные поправки ε_i'', которые в сумме с первичными поправками должны дать окончательные поправки ε_i, т. е.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i' + \varepsilon_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим случай равноточных измерений. Пусть дана система из пяти условных уравнений поправок.

Разделив их на две группы, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n + W_a = 0; \\ b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots + b_n\varepsilon_n + W_b = 0; \\ c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \ldots + c_n\varepsilon_n + W_c = 0; \end{aligned}\right\} \text{первая группа} \tag{34,1}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n + W_\alpha = 0; \\ \beta_1\varepsilon_1 + \beta_2\varepsilon_2 + \ldots + \beta_n\varepsilon_n + W_\beta = 0. \end{aligned}\right\} \text{вторая группа} \tag{34,2}$$

Составим для первой группы нормальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} [aa]K_1' + [ab]K_2' + [ac]K_3' + W_a = 0; \\ [ab]K_1' + [bb]K_2' + [bc]K_3' + W_b = 0; \\ [ac]K_1' + [bc]K_2' + [cc]K_3' + W_c = 0 \end{aligned}\right\} \tag{34,3}$$

и, решив их, определим первичные поправки:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1' = a_1K_1' + b_1K_2' + c_1K_3'; \\ \varepsilon_2' = a_2K_1' + b_2K_2' + c_2K_3'; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n' = a_nK_1' + b_nK_2' + c_nK_3'. \end{aligned}\right\} \tag{34,4}$$

Вторую группу условных уравнений поправок преобразуем следующим образом: условные уравнения первой группы (34,1) умножим соответственно на неопределенные множители ρ_{a1}, ρ_{b1}, ρ_{c1} и прибавим к первому уравнению второй группы (34,2); группируя вокруг поправок ε_i, получим

$$\begin{gathered} (\alpha_1 + a_1\rho_{a1} + b_1\rho_{b1} + c_1\rho_{c1})\,\varepsilon_1 + \\ + (\alpha_2 + a_2\rho_{a1} + b_2\rho_{b1} + c_2\rho_{c1})\,\varepsilon_2 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (\alpha_n + a_n\rho_{a1} + b_n\rho_{b1} + c_n\rho_{c1})\,\varepsilon_n + \\ + W_\alpha + W_a\rho_{a1} + W_b\rho_{b1} + W_c\rho_{c1} = 0. \end{gathered} \tag{34,5}$$

Введем обозначения:

$$\alpha_i + a_i\rho_{a1} + b_i\rho_{b1} + c_i\rho_{c1} = A_i; \tag{34,6}$$

$$W_\alpha - W_a\rho_{a1} + W_b\rho_{b1} + W_c\rho_{c1} = W_A. \tag{34,7}$$

Тогда уравнение (34,5) может быть записано

$$A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + \ldots + A_n\varepsilon_n + W_A = 0. \qquad (34,8)$$

Аналогичные преобразования произведем со вторым уравнением второй группы. Для этого уравнения поправок первой группы (34,1) умножим соответственно на неопределенные множители ρ_{a2}, ρ_{b2}, ρ_{c2} и прибавим ко второму уравнению второй группы; группируя вокруг поправок, получим

$$\begin{aligned}
&(\beta_1 + a_1\rho_{a2} + b_1\rho_{b2} + c_1\rho_{c2})\,\varepsilon_1 + \\
&+ (\beta_2 + a_2\rho_{a2} + b_2\rho_{b2} + c_2\rho_{c2})\,\varepsilon_2 + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ (\beta_n + a_n\rho_{a2} + b_n\rho_{b2} + c_n\rho_{c2})\,\varepsilon_n + \\
&W_\beta + W_a\rho_{a2} + W_b\rho_{b2} + W_c\rho_{c2} = 0.
\end{aligned} \qquad (34,9)$$

Введя обозначения

$$\beta_i + a_i\rho_{a2} + b_i\rho_{b2} + c_i\rho_{c2} = B_i; \qquad (34,10)$$

$$W_\beta + W_a\rho_{a2} + W_b\rho_{b2} + W_c\rho_{c2} = W_B, \qquad (34,11)$$

будем иметь

$$B_1\varepsilon_1 + B_2\varepsilon_2 + \ldots + B_n\varepsilon_n + W_B = 0. \qquad (34,12)$$

Получены преобразованные условные уравнения поправок второй группы (34,8) и (34,12), в которых коэффициенты и свободные члены являются функциями неопределенных множителей ρ, число которых равно произведению числа уравнений в первой группе на число уравнений во второй группе.

Для системы уравнений поправок первой группы и преобразованных уравнений второй группы

$$\left.\begin{aligned}
[a\varepsilon] + W_a &= 0; \\
[b\varepsilon] + W_b &= 0; \\
[c\varepsilon] + W_c &= 0; \\
[A\varepsilon] + W_A &= 0; \\
[B\varepsilon] + W_B &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (34,13)$$

составим систему нормальных уравнений:

$$\begin{array}{|l|l|l|}
\hline
[aa]\,K_1' + [ab]\,K_2' + [ac]\,K_3' & + [aA]\,K_A + [aB]K_B & + W_a = 0 \\
[ab]\,K_1' + [bb]\,K_2' + [bc]\,K_3' & + [bA]\,K_A + [bB]K_B & + W_b = 0 \\
[ac]\,K_1' + [bc]\,K_2' + [cc]\,K_3' & + [cA]\,K_A + [cB]K_B & + W_c = 0 \\
\hline
\end{array} \qquad (34,14)$$

$$\begin{array}{l|l|}
\hline
[aA]\,K_1' + [bA]K_2' + [cA]\,K_3' + & [AA]\,K_A + [BA]\,K_B + W_A = 0 \\
[aB]\,K_1' + [bB]K_2' + [cB]\,K_3' + & [AB]\,K_A + [BB]\,K_B + W_B = 0 \\
\hline
\end{array}$$

Из совместного решения этих уравнений определятся коррелаты K_1', K_2', K_3', K_A и K_B, а по ним поправки

$$\varepsilon_i = a_i K_1' + b_i K_2' + c_i K_3' + A_i K_A + B_i K_B \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \qquad (34,15)$$

Очевидно, если суммы произведений коэффициентов уравнений первой группы (34,1) на коэффициенты преобразованных уравнений второй группы (34,8) и (34,12) будут равны нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned} [aA] &= [bA] = [cA] = 0; \\ [aB] &= [bB] = [cB] = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (34,16)$$

то нормальные уравнения системы (34,14) распадутся на две независимых между собой системы, каждую из которых можно решать самостоятельно.

Первая система [величины, взятые в рамку в первых трех уравнениях системы (34,14)] такая же, как и система нормальных уравнений (34,3), из решения которой определены первичные поправки ε_1', ε_2', . . . , ε_n'.

Вторая система [величины, взятые в рамку в последних двух уравнениях системы (34, 14)]

$$\left.\begin{aligned} [AA]\,K_A + [AB]\,K_B + W_A &= 0; \\ [AB]\,K_A + [BB]\,K_B + W_B &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (34,17)$$

из решения которой определятся коррелаты K_A и K_B и вторичные поправки ε_i'':

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1'' &= A_1 K_A + B_1 K_B; \\ \varepsilon_2'' &= A_2 K_A + B_2 K_B; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n'' &= A_n K_A + B_n K_B. \end{aligned}\right\} \qquad (34,18)$$

Сопоставив уравнения (34,4) и (34,18) с уравнением (34,15), видим, что:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_1' + \varepsilon_1''; \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2' + \varepsilon_2''; \\ &\cdots\cdots \\ \varepsilon_n &= \varepsilon_n' + \varepsilon_n''. \end{aligned}\right\} \qquad (34,19)$$

Таким образом, окончательные поправки ε_i равны сумме первичных ε_i' и вторичных ε_i'' поправок, полученных при раздельном уравнивании первой (34,1) и второй (34,2) групп условных уравнений поправок.

Контроль вычисления первичных и вторичных поправок может быть осуществлен согласно (31,4) по следующим формулам:

$$[\varepsilon'\varepsilon'] = -W_a K_1' - W_b K_2' - W_c K_3'; \tag{34,20}$$

$$[\varepsilon''\varepsilon''] = -W_A K_A - W_B K_B \tag{34,21}$$

и соответственно

$$-W_a K_1' - W_b K_2' - W_c K_3' = \frac{W_a^2}{[aa]} + \frac{[W_b \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[W_c \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]}, \tag{34,22}$$

$$-W_A K_A - W_B K_B = \frac{W_A^2}{[AA]} + \frac{[W_B \cdot 1]^2}{[BB \cdot 1]}. \tag{34,23}$$

Вернемся к условию (34,16). Чтобы указанные коэффициенты были равны нулю, должны быть подобраны неопределенные множители ρ, от которых зависят коэффициенты преобразованных уравнений второй группы A_i и B_i.

В равенствах (34,16) раскроем суммы, заменив значения коэффициентов A_i и B_i из (34,6) и (34,10), получим:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\rho_{a1} + [ab]\rho_{b1} + [ac]\rho_{c1} + [a\alpha] = 0; \\ [ab]\rho_{a1} + [bb]\rho_{b1} + [bc]\rho_{c1} + [b\alpha] = 0; \\ [ac]\rho_{a1} + [bc]\rho_{b1} + [cc]\rho_{c1} + [c\alpha] = 0; \end{aligned}\right\} \tag{34,24}$$

$$\left.\begin{aligned} [aa]\rho_{a2} + [ab]\rho_{b2} + [ac]\rho_{c2} + [a\beta] = 0; \\ [ab]\rho_{a2} + [bb]\rho_{b2} + [bc]\rho_{c2} + [b\beta] = 0; \\ [ac]\rho_{a2} + [bc]\rho_{b2} + [cc]\rho_{c2} + [c\beta] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{34,25}$$

Из этих систем и будут найдены неопределенные множители ρ. Число систем равно числу уравнений второй группы, а число неизвестных в системе равно числу уравнений в первой группе.

§ 35. Пути практического использования двухгруппового метода уравнивания

Из рассмотренной в предыдущем параграфе общей теории уравновешивания условных наблюдений по методу двух групп можно установить, что объем вычислений не уменьшился, а, напротив, увеличился: вместо того, чтобы решить один раз систему из r нормальных уравнений, мы вынуждены решать четыре системы нормальных уравнений, подобных (34,3), (34,17), (34,24) и (34,25), кроме того, приходится выполнять ряд дополнительных вычислений по определению первичных поправок (34,4), определению преобразованных коэффициентов A_i, B_i, . . . и свободных членов уравнений второй группы W_A, W_B, . . . и т. д.

Поэтому напрашивается вывод о нецелесообразности применения этого метода. Однако при внимательном рассмотрении формул, по которым решается данная задача (см. § 34), можно заметить, что количество вычислений значительно уменьшится, если:

а) все коэффициенты перед неизвестными в уравнениях первой группы будут равны единицам;

б) все неквадратичные коэффициенты в системе нормальных уравнений (34,3) будут равны нулю.

Эти два условия будут выполнены в том случае, если при разбивке условных уравнений поправок на две группы соблюдать следующее правило: **в первую группу выделяются те условные уравнения поправок, в которых коэффициенты a_i, b_i и c_i перед неизвестными ε_i равны плюс единице, а сами неизвестные в уравнениях не повторяются; во вторую группу выделяются все остальные уравнения.**

Разберем теперь, как изменятся основные формулы § 34, если при разделении на группы выполняется сформулированное выше правило. Пусть дана следующая система условных уравнений поправок:

$$\left.\begin{array}{ll}
a) & \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \text{ ———————————————— } +W_a=0; \\
b) & \text{———————— } \varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6 \text{ ———————— } +W_b=0; \\
c) & \text{———————————————— } \varepsilon_7+\varepsilon_8+\varepsilon_9 \quad +W_c=0;
\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{первая}\\ \text{группа}\\ (35{,}1)\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\alpha) & (\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\alpha_3\varepsilon_3)+(\alpha_4\varepsilon_4+\alpha_5\varepsilon_5+\alpha_6\varepsilon_6)+(\alpha_7\varepsilon_7+\alpha_8\varepsilon_8+\alpha_9\varepsilon_9)+W_\alpha=0; \\
\beta) & \underbrace{(\beta_1\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_2+\beta_3\varepsilon_3)}_{\text{секция } (a)}+\underbrace{(\beta_4\varepsilon_4+\beta_5\varepsilon_5+\beta_6\varepsilon_6)}_{\text{секция } (b)}+\underbrace{(\beta_7\varepsilon_7+\beta_8\varepsilon_8+\beta_9\varepsilon_9)}_{\text{секция } (c)}+W_\beta=0.
\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{вторая}\\ \text{группа}\\ (35{,}2)\end{array}$$

В первую группу выделим три первых уравнения, удовлетворяющих сформулированному правилу; во вторую группу оставшиеся два уравнения с неизвестными, сгруппированными в секции (*a*), (*b*), (*c*) (35,2) в соответствии с поправками, имеющимися в уравнениях первой группы.

Обозначим число неизвестных в уравнении *a* через n_a, в уравнении *b* — n_b и в уравнении *c* — n_c. Так как неизвестные в уравнениях первой группы не повторяются, неквадратичные коэффициенты нормальных уравнений (34,3) будут равны нулю: $[ab] = [ac] = [bc] = 0$. Тогда система (34,3) может быть записана так:

$$\left.\begin{array}{l}
[aa]\,K_1'+W_a=0; \\
[bb]\,K_2'+W_b=0; \\
[cc]\,K_3'+W_c=0,
\end{array}\right\} \qquad (35{,}3)$$

но

$$\left.\begin{array}{l}
[aa]=n_a; \\
[bb]=n_b; \\
[cc]=n_c,
\end{array}\right\} \qquad (35{,}4)$$

поэтому

$$K_1'=-\frac{W_a}{n_a}, \quad K_2'=-\frac{W_b}{n_b}, \quad K_3'=-\frac{W_c}{n_c}. \qquad (35{,}5)$$

Подставив значения коррелат из (35,5) в уравнения поправок (34,4), получим первичные поправки к измеренным величинам, входящие в первое условное уравнение:

$$\varepsilon_1' = -\frac{W_a}{n_a}, \quad \varepsilon_2' = -\frac{W_a}{n_a}, \quad \varepsilon_3' = -\frac{W_a}{n_a},$$

а в общем виде поправки первого уравнения будут равны

$$\varepsilon_{i\,(a)}' = -\frac{W_a}{n_a}. \tag{35,6}$$

Аналогично значения первичных поправок, входящих во второе и третье уравнения первой группы, будут вычислены по формулам:

$$\varepsilon_{i\,(b)}' = -\frac{W_b}{n_b}; \tag{35,7}$$

$$\varepsilon_{i\,(c)}' = -\frac{W_c}{n_c}. \tag{35,8}$$

Отсюда следует, что **для определения первичных поправок нужно в условных уравнениях поправок первой группы свободные члены соответственно разделить на число неизвестных в данном уравнении и знак изменить на обратный.**

Далее определим неопределенные множители ρ. Для этого возьмем систему уравнений (34,24). Так как неквадратичные коэффициенты $[ab] = [ac] = [bc] = 0$, а коэффициенты в условных уравнениях первой группы равны единицам, получим:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{a1} &= -\frac{[\alpha]_{(a)}}{n_a}; \\ \rho_{b1} &= -\frac{[\alpha]_{(b)}}{n_b}; \\ \rho_{c1} &= -\frac{[\alpha]_{(c)}}{n_c}. \end{aligned}\right\} \tag{35,9}$$

На этом основании из системы (34,25) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{a2} &= -\frac{[\beta]_{(a)}}{n_a}; \\ \rho_{b2} &= -\frac{[\beta]_{(b)}}{n_b}; \\ \rho_{c2} &= -\frac{[\beta]_{(c)}}{n_c}, \end{aligned}\right\} \tag{35,10}$$

где $[\alpha]_{(a)}$, $[\alpha]_{(b)}$, $[\alpha]_{(c)}$ и $[\beta]_{(a)}$, $[\beta]_{(b)}$, $[\alpha]_{(c)}$ — есть суммы коэффициентов уравнений второй группы по соответствующим секциям (a), (b) и (c).

Обратимся теперь к уравнениям (34,6) и (34,10). Из них определим коэффициенты преобразованных уравнений второй группы.

Подставив в уравнения (34,6) значения ρ неопределенных множителей из (35,9), получим

$$A_1=\alpha_1-\frac{[\alpha]_{(a)}}{n_a},\qquad A_2=\alpha_2-\frac{[\alpha]_{(a)}}{n_a},\qquad A_3=\alpha_3-\frac{[\alpha]_{(a)}}{n_a}$$

или

$$A_{i\,(a)}=\alpha_i-\frac{[\alpha]_{(a)}}{n_a}. \tag{35,11}$$

Аналогично

$$A_{i\,(b)}=\alpha_i-\frac{[\alpha]_{(b)}}{n_b}; \tag{35,12}$$

$$A_{i\,(c)}=\alpha_i-\frac{[\alpha]_{(c)}}{n_c}. \tag{35,13}$$

Из уравнений (34,10) на основании (35,10), получим:

$$\left.\begin{aligned}B_{i\,(a)}&=\beta_i-\frac{[\beta]_{(a)}}{n_a}\\ B_{i\,(b)}&=\beta_i-\frac{[\beta]_{(b)}}{n_b}\\ B_{i\,(c)}&=\beta_i-\frac{[\beta]_{(c)}}{n_c}\end{aligned}\right\}, \tag{35,14}$$

т. е. преобразованный коэффициент равен непреобразованному коэффициенту минус среднее арифметическое из непреобразованных коэффициентов по данной секции уравнения второй группы.

Сложим коэффициенты A_i и B_i первой секции:

$$\begin{array}{l|l}
A_1=\alpha_1-\dfrac{[\alpha]_{(a)}}{n_a}; & B_1=\beta_1-\dfrac{[\beta]_{(a)}}{n_a};\\
A_2=\alpha_2-\dfrac{[\alpha]_{(a)}}{n_a}; & B_2=\beta_2-\dfrac{[\beta]_{(a)}}{n_a};\\
A_3=\alpha_3-\dfrac{[\alpha]_{(a)}}{n_a}; & B_3=\beta_3-\dfrac{[\beta]_{(a)}}{n_a};\\
\hline
[A]_{(a)}=[\alpha]_{(a)}-\dfrac{[\alpha]_{(a)}n_a}{n_a} & [B]_{(a)}=[\beta]_{(a)}-\dfrac{[\beta]_{(a)}n_a}{n_a}
\end{array}$$

Отсюда

$$[A]_{(a)}=0,\qquad [B]_{(a)}=0. \tag{35,15}$$

Аналогично:

$$[A]_{(b)}=0,\quad [B]_{(b)}=0; \tag{35,16}$$

$$[A]_{(c)}=0,\quad [B]_{(c)}=0. \tag{35,17}$$

Эти равенства дают возможность осуществить контроль вычисления коэффициентов преобразованных уравнений второй группы.

Для определения свободных членов преобразованных уравнений второй группы воспользуемся формулами (34,7) и (34,11). Преобразуем эти уравнения следующим образом: вместо свободных членов уравнений первой группы подставим их значения из формул (35,6), (35,7) и (35,8), а вместо неопределенных множителей ρ их значения из (35,9) и (35,10), тогда получим:

$$W_A = W_\alpha + n_a \varepsilon'_{i(a)} \frac{[\alpha]_{(a)}}{n_a} + n_b \varepsilon'_{i\,(b)} \frac{[\alpha]_{(b)}}{n_b} + n_c \varepsilon'_{i\,(c)} \frac{[\alpha]_{(c)}}{n_c};$$

$$W_B = W_\beta + n_a \varepsilon'_{i\,(a)} \frac{[\beta]_{(a)}}{n_a} + n_b \varepsilon'_{i\,(b)} \frac{[\beta]_{(b)}}{n_b} + n_c \varepsilon'_{i\,(c)} \frac{[\beta]_{(c)}}{n_c}$$

или, сократив, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} W_A &= W_\alpha + \varepsilon'_{i\,(a)} [\alpha]_{(a)} + \varepsilon'_{i\,(b)} [\alpha]_b + \varepsilon'_{i\,(c)} [\alpha]_{(c)}; \\ W_B &= W_\beta + \varepsilon'_{i\,(a)} [\beta]_{(a)} + \varepsilon'_{i\,(b)} [\beta]_{(b)} + \varepsilon'_{i\,(c)} [\beta]_{(c)}. \end{aligned}\right\} \qquad (35,18)$$

Полученные формулы (35,18) применяются для контроля вычислений свободных членов преобразованных уравнений второй группы.

Если свободные члены условных уравнений второй группы вычислить по предварительно исправленным на первичные поправки результатам измерений, то полученные таким образом свободные члены будут равны свободным членам преобразованных условных уравнений второй группы, которые вычисляются по формулам (34,7) и (34,11).

По найденным коэффициентам и свободным членам преобразованной второй группы составляются нормальные уравнения коррелат (34,17), из решения которых определяются коррелаты K_A и K_B. По этим коррелатам из уравнений (34,18) определяют вторичные поправки, а затем по формулам (34,19) окончательные поправки к измеренным величинам.

Следует отметить, что выводы, полученные для пяти условных уравнений, справедливы для любого числа условных уравнений.

§ 36. Оценка точности измеренных и уравновешенных величин при двухгрупповом методе уравновешивания

На основании изложенной выше теории двухгруппового уравновешивания окончательные поправки равны сумме первичной и вторичной поправок, т. е.

$$\varepsilon_i = \varepsilon'_i + \varepsilon''_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \qquad (36,1)$$

Возведя (36,1) в квадрат, получим

$$\varepsilon_i^2 = (\varepsilon'_i)^2 + (\varepsilon''_i)^2 + 2\varepsilon'_i\varepsilon''_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \qquad (36,2)$$

Взяв сумму из n таких уравнений, будем иметь

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\varepsilon'\varepsilon'] + [\varepsilon''\varepsilon''] + 2[\varepsilon'\varepsilon'']. \qquad (36,3)$$

На основании равенств (34,4) и (34,18) можно записать

$$\varepsilon'_i \varepsilon''_i = (a_i K'_1 + b_i K'_2 + c_i K'_3)(A_i K_A + B_i K_B) =$$
$$= a_i A_i K'_1 K_A + a_i B_i K'_1 K_B + b_i A_i K'_2 K_A + b_i B_i K'_2 K_B +$$
$$+ c_i A_i K'_3 K_A + c_i B_i K'_3 K_B \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{36,4}$$

Взяв сумму уравнений (36,4), получим

$$[\varepsilon'\varepsilon''] = [aA] K'_1 K_A + [aB] K'_1 K_B + [bA] K'_2 K_A + [bB] K'_2 K_B +$$
$$+ [cA] K'_3 K_A + [cB] K'_3 K_B. \tag{36,5}$$

Так как коэффициенты в правой части равенства (36,5) согласно (34,16) равны нулю, то и

$$[\varepsilon'\varepsilon''] = 0. \tag{36,6}$$

На основании (36,6) уравнение (36,2) примет вид

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\varepsilon'\varepsilon'] + [\varepsilon''\varepsilon'']. \tag{36,7}$$

Подставив выражение (36,7) в формулу (32,3), получим

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon'\varepsilon'] + [\varepsilon''\varepsilon'']}{r}} \tag{36,8}$$

или для случая неравноточных измерений

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\varepsilon'\varepsilon'] + [p\varepsilon''\varepsilon'']}{r}}. \tag{36,9}$$

Определим теперь среднюю квадратическую ошибку функции уравновешенных значений измеренных величин

$$U = F(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{36,10}$$

Средняя квадратическая ошибка ее будет равна

$$M_U = \mu \sqrt{\frac{1}{p_U}}, \tag{36,11}$$

где

$$\frac{1}{p_U} = \left[\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)^2}{p}\right].$$

Чтобы определить величину, обратную весу, функцию (36,10) необходимо выразить через непосредственно измеренные величины. По аналогии с (32,11) можно записать

$$U = F(l_1, l_2, \ldots, l_n) + f_1(\varepsilon'_1 + \varepsilon''_1) + f_2(\varepsilon'_2 + \varepsilon''_2) + \ldots + f_n(\varepsilon'_n + \varepsilon''_n). \tag{36,12}$$

Раскрыв скобки в уравнении (36,12) и заменив поправки их значениями из (34,4) и (34,18), будем иметь

$$U = F(l_1, l_2, \ldots, l_n) + f_1(a_1K'_1 + b_1K'_2 + c_1K'_3) + \\ + f_2(a_2K'_1 + b_2K'_2 + c_2K'_3) + \ldots + f_n(a_nK'_1 + b_nK'_2 + c_nK'_3) + \\ + f_1(A_1K_A + B_1K_B) + f_2(A_2K_A + B_2K_B) + \ldots + f_n(A_nK_A + B_nK_B). \tag{36,13}$$

Производя умножение и группируя члены вокруг коррелат, получим

$$U = F(l_1, l_2, \ldots, l_n) + [af]K'_1 + [bf]K'_2 + [cf]K'_3 + [Af]K_A + [Bf]K_B. \tag{36,14}$$

Для исключения коррелат из уравнения (36,14) нормальные уравнения коррелат (34,3) умножим соответственно на неопределенные множители q_1, q_2, q_3, а нормальные уравнения коррелат (34,17) на неопределенные множители G_1, G_2 и прибавим их к правой части уравнения (36,14). После соответствующих преобразований получим

$$U = F(l_1, l_2, \ldots, l_n) + [aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3 + [af])K'_1 + \\ + ([ab]q_1 + [bb]q_2 + [bc]q_3 + [bf])K'_2 + \\ + ([ac]q_1 + [bc]q_2 + [cc]q_3 + [cf])K'_3 + \\ + ([AA]G_1 + [AB]G_2 + [Af])K_A + \\ + ([AB]G_1 + [BB]G_2 + [Bf])K_B + \\ + W_aq_1 + W_bq_2 + W_cq_3 + W_AG_1 + W_BG_2. \tag{36,15}$$

Подберем неопределенные множители так, чтобы выражения в скобках уравнения (36,15) были равны нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &[aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3 + [af] = 0; \\ &[ab]q_1 + [bb]q_2 + [bc]q_3 + [bf] = 0; \\ &[ac]q_1 + [bc]q_2 + [cc]q_3 + [cf] = 0; \end{aligned}\right\} \tag{36,16}$$

$$\left.\begin{aligned} &[AA]G_1 + [AB]G_2 + [Af] = 0; \\ &[AB]G_1 + [BB]G_2 + [Bf] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36,17}$$

Тогда

$$U = F(l_1, l_2, \ldots, l_n) + W_aq_1 + W_bq_2 + W_cq_3 + W_AG_1 + W_BG_2. \tag{36,18}$$

Заменив свободные члены W_A и W_B их значениями из (34,7) и (34,11), получим

$$U = F(l_1, l_2, \ldots, l_n) + W_aq_1 + W_bq_2 + W_cq_3 + \\ + (W_\alpha + W_a\rho_{a1} + W_b\rho_{b1} + W_c\rho_{c1})G_1 + (W_\beta + W_a\rho_{a2} + W_b\rho_{b2} + W_c\rho_{c2})G_2. \tag{36,19}$$

Формула (36,19) выражает функцию (36,10) через непосредственно измеренные величины.

Определим частные производные функции (36,19)

$$\frac{\partial U}{\partial l_i}=\frac{\partial F}{\partial l_i}+\frac{\partial W_a}{\partial l_i}+\frac{\partial W_b}{\partial l_i}+\frac{\partial W_c}{\partial l_i}+$$
$$+\left(\frac{\partial W_\alpha}{\partial l_i}+\frac{\partial W_a}{\partial l_i}\rho_{a1}+\frac{\partial W_b}{\partial l_i}\rho_{b1}+\frac{\partial W_c}{\partial l_i}\rho_{c1}\right)G_1+$$
$$+\left(\frac{\partial W_\beta}{\partial l_i}+\frac{\partial W_a}{\partial l_i}\rho_{a2}+\frac{\partial W_b}{\partial l_i}\rho_{b2}+\frac{\partial W_c}{\partial l_i}\rho_{c2}\right)G_2 \qquad (36,20)$$
$$(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$$

или в соответствии с (28,9) и (32,10) запишем

$$\frac{\partial U}{\partial l_i}=f_i+a_iq_1+b_iq_2+c_iq_3+(\alpha_i+a_i\rho_{a1}+b_i\rho_{b1}+c_i\rho_{c1})\,G_1+$$
$$+(\beta_i+a_i\rho_{a2}+b_i\rho_{b2}+c_i\rho_{c2})\,G_2. \qquad (36,21)$$

Выражения в скобках уравнения (36,21) на основании (34,6) и (34,10) можно заменить через A_i и B_i.

$$\frac{\partial U}{\partial l_i}=f_i+a_iq_1+b_iq_2+c_iq_3+A_iG_1+B_iG_2.$$
$$(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \qquad (36,22)$$

Правую и левую части уравнений (36,22) возведем в квадрат и сложим, тогда величина, обратная весу функции, будет равна

$$\frac{1}{p_U}=\left[\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)^2\right]=([aa]\,q_1+[ab]\,q_2+[ac]\,q_3+[aA]\,G_1+[aB]\,G_2+[af])q_1+$$
$$+([ab]\,q_1+[bb]\,q_2+[bc]\,q_3+[bA]\,G_1+[bB]\,G_2+[bf])\,q_2+$$
$$+([ac]\,q_1+[bc]\,q_2+[cc]\,q_3+[cA]\,G_1+[cB]\,G_2+[cf])\,q_3+$$
$$+([aA]\,q_1+[bA]\,q_2+[cA]\,q_3+[AA]\,G_1+[AB]\,G_2+[Af])G_1+$$
$$+([aB]\,q_1+[bB]\,q_2+[cB]\,q_3+[AB]\,G_1+[BB]\,G_2+[Bf])\,G_2+$$
$$+[ff]+[af]\,q_1+[bf]\,q_2+[cf]\,q_3+[Af]\,G_1+[Bf]\,G_2. \qquad (36,23)$$

На основании (34,16), (36,16) и (36,17) уравнение (36,23) упростится

$$\frac{1}{p_U}=\left[\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)^2\right]=[ff]+[af]\,q_1+[bf]\,q_2+[cf]\,q_3+[Af]\,G_1+[Bf]\,G_2. \qquad (36,24)$$

Для системы нормальных уравнений (34,14) может быть записано равенство

$$-W_aK'_1-W_bK'_2-W_cK'_3-W_AK_A-W_BK_B=$$
$$=\frac{W_a^2}{[aa]}+\frac{[W_b\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{[W_c\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}+\frac{W_A^2}{[AA]}+\frac{[W_B\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]}. \qquad (36,25)$$

По аналогии с этим уравнением для систем нормальных уравнений (36,16) и (36,17) получим

$$[af]\,q_1+[bf]\,q_2+[cf]\,q_3+[Af]\,G_1+[Bf]\,G_2=$$
$$=-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cf\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}-\frac{[Af]^2}{[AA]}-\frac{[Bf\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]}. \qquad (36,26)$$

В уравнение (36,24) вместо соответствующих его членов подставим правую часть уравнения (36,26), получим

$$\frac{1}{p_U}=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cf\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}-\frac{[Af]^2}{[AA]}-\frac{[Bf\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]}. \qquad (36,27)$$

Это и есть формула для вычисления величины, обратной весу функции.

В связи с тем, что коэффициенты a_i, b_i, c_i условных уравнений, выделенных в первую группу, равны плюс единице, а неизвестные в уравнениях не повторяются, формула (36,27) может быть упрощена. Такое упрощение возможно на основании следующего:

$$[bf\cdot 1]=[bf]-\frac{[ab]\,[af]}{[aa]}. \qquad (36,28)$$

В правой части этого выражения второй член равен нулю, так как коэффициент $[ab]$ равен нулю. Поэтому

$$[bf\cdot 1]=[bf], \qquad (36,29)$$

но так как коэффициенты b_i равны плюс единице, то

$$[bf\cdot 1]=[f]_{(b)}. \qquad (36,30)$$

Рассмотрим теперь алгорифм

$$[bb\cdot 1]=[bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}, \qquad (36,31)$$

но так как $[ab]=0$, получим

$$[bb\cdot 1]=[bb]=n_b.$$

На основании аналогичных рассуждений преобразован и четвертый член уравнения (36,27). Тогда окончательно эта формула может быть записана так:

$$\frac{1}{p_U}=[ff]-\underbrace{\frac{[f]^2_{(a)}}{n_a}-\frac{[f]^2_{(b)}}{n_b}-\frac{[f]^2_{(c)}}{n_c}-\ldots}_{\text{Число членов равно числу уравнений первой группы}}-\underbrace{\frac{[Af]^2}{[AA]}-\frac{[Bf\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]}-\ldots}_{\text{Число членов равно числу уравнений второй группы}} \qquad (36,32)$$

Формула (36,32) выведена для пяти условных уравнений, из которых три выделены в первую группу, а два во вторую. При другом числе условных уравнений, выделяемых в соответствующие группы, конструкция формулы (36,32) останется такой же, изменится только число ее членов.

Если коэффициенты f весовой функции преобразовать так же, как и коэффициенты условных уравнений второй группы, т. е.

$$\left.\begin{aligned} F_{i\,(a)} &= f_i - \frac{[f]_{(a)}}{n_a}; \\ F_{i\,(b)} &= f_i - \frac{[f]_{(b)}}{n_b}; \\ F_{i\,(c)} &= f_i - \frac{[f]_{(c)}}{n_c}, \end{aligned}\right\} \tag{36,33}$$

то формула величины, обратной весу функции (36,32), примет вид

$$\frac{1}{p_U} = [FF] - \frac{[AF]^2}{[AA]} - \frac{[BF\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]} - \ldots \tag{36,34}$$

Доказать справедливость этих преобразований можно на основании следующего: если в равенствах (36,22) первые четыре члена в правой части обозначить F_i, т. е.

$$F_i = f_i + a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{36,35}$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial l_i} = F_i + A_i G_1 + B_i G_2 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{36,36}$$

На основании равенств (36,16) можно записать

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= -\frac{[f]_{(a)}}{n_a}; \\ q_2 &= -\frac{[f]_{(b)}}{n_b}; \\ q_3 &= -\frac{[f]_{(c)}}{n_c}. \end{aligned}\right\}. \tag{36,37}$$

Подставив значения q в (36,35), получим преобразованные коэффициенты весовой функции F_i, представленные в (36,33).

Возведя правые и левые части равенств (36,36) в квадрат и сложив, получим

$$\frac{1}{p_U} = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)^2\right] = ([AA]\,G_1 + [AB]\,G_2 + [AF])\,G_1 +$$

$$+ ([AB]\,G_1 + [BB]\,G_2 + [BF])\,G_2 + [FF] + [AF]\,G_1 + [BF]\,G_2. \tag{36,38}$$

Преобразованные коэффициенты F_i весовой функции из (36,33) умножим на коэффициенты преобразованных условных уравнений второй группы A_i и B_i и сложим:

$$
\begin{array}{l|l}
A_{i\,(a)}F_{i\,(a)} = A_{i\,(a)}f_i - \dfrac{[f]_{(a)}A_{i\,(a)}}{n_a} & B_{i\,(a)}F_{i\,(a)} = B_{i\,(a)}f_i - \dfrac{[f]_{(a)}B_{i\,(a)}}{n_a} \\
A_{i\,(b)}F_{i\,(b)} = A_{i\,(b)}f_i - \dfrac{[f]_{(b)}A_{i\,(b)}}{n_b} & B_{i\,(b)}F_{i\,(b)} = B_{i\,(b)}f_i - \dfrac{[f]_{(b)}B_{i\,(b)}}{n_b} \\
A_{i\,(c)}F_{i\,(c)} = A_{i\,(c)}f_i - \dfrac{[f]_{(c)}A_{i\,(c)}}{n_c} & B_{i\,(c)}F_{i\,(c)} = B_{i\,(c)}f_i - \dfrac{[f]_{(c)}B_{i\,(c)}}{n_c} \\
\hline
\end{array}
$$

$$[AF] = [Af] - \frac{[f]_{(a)}[A]_{(a)}}{n_a} - \frac{[f]_{(b)}[A]_{(b)}}{n_b} - \frac{[f]_{(c)}[A]_{(c)}}{n_c}; \qquad (36,39)$$

$$[BF] = [Bf] - \frac{[f]_{(a)}[B]_{(a)}}{n_a} - \frac{[f]_{(b)}[B]_{(b)}}{n_b} - \frac{[f]_{(c)}[B]_{(c)}}{n_c}. \qquad (36,40)$$

Так как суммы преобразованных коэффициентов A и B по секциям равны нулю на основании (35,15), (35,16) и (35,17), будем иметь

$$[AF] = [Af], \quad [BF] = [Bf]. \qquad (36,41)$$

В соответствии с (36,17) выражения в скобках равенства (36,18) будут равны нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &[AA]\,G_1 + [AB]\,G_2 + [AF] = 0; \\ &[AB]\,G_1 + [BB]\,G_2 + [BF] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (36,42)$$

Тогда

$$\frac{1}{p_U} = [FF] + [AF]\,G_1 + [BF]\,G_2. \qquad (36,43)$$

Из уравнений (36,42) определим значения G_1 и G_2:

$$G_1 = -\frac{[AB]}{[AA]}G_2 - \frac{[AF]}{[AA]}; \qquad (36,44)$$

$$G_2 = -\frac{[BF\cdot 1]}{[BB\cdot 1]}. \qquad (36,45)$$

Подставив их последовательно в равенство (36,43), получим

$$\frac{1}{p_U} = [FF] - \frac{[AF]^2}{[AA]} - \frac{[BF\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]} - \ldots,$$

что и требовалось доказать.

§ 37. Уравновешивание углов центральной системы по методу двух групп

Чтобы проиллюстрировать рассмотренную выше теорию уравновешивания условных измерений по методу двух групп, обратимся к примеру уравновешивания углов центральной системы (рис. 11).

Пусть в центральной системе, состоящей из шести треугольников, измерены 18 углов. От исходной стороны AB построим графически все точки системы (рис. 12). Из рис. 12 видно, что для определения положения точек I, II, III, IV и V необходимо иметь десять измеренных углов: γ_1, γ_3, γ_4, γ_6, γ_7, γ_9, γ_{10}, γ_{12}, γ_{13}, γ_{15}. Тогда число избыточных измерений будет равно

$$r = n - t = 18 - 10 = 8.$$

Таким образом, должно быть составлено восемь условных уравнений.

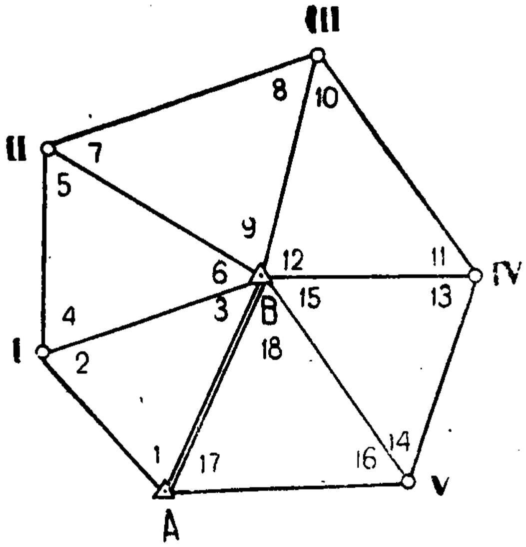


Рис. 11

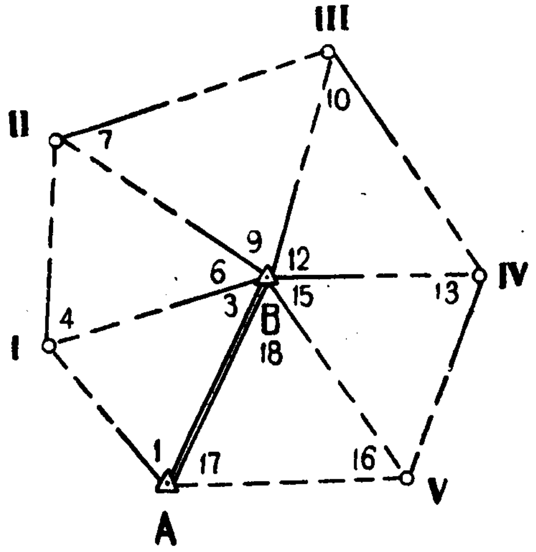


Рис. 12

Если кроме перечисленных необходимых углов измерены γ_2, γ_5, γ_8, γ_{11}, γ_{14}, то уравновешенные значения всех измеренных углов должны удовлетворять следующим условиям:

$$1)\quad \gamma_1^\circ + \gamma_2^\circ + \gamma_3^\circ - 180^\circ = 0;$$

$$2)\quad \gamma_4^\circ + \gamma_5^\circ + \gamma_6^\circ - 180^\circ = 0;$$

$$3)\quad \gamma_7^\circ + \gamma_8^\circ + \gamma_9^\circ - 180^\circ = 0;$$

$$4)\quad \gamma_{10}^\circ + \gamma_{11}^\circ + \gamma_{12}^\circ - 180^\circ = 0;$$

$$5)\quad \gamma_{13}^\circ + \gamma_{14}^\circ + \gamma_{15}^\circ - 180^\circ = 0.$$

Углы γ_{16}, γ_{17} и γ_{18} приведут еще к трем условиям. Первое из этих условий, определяемое углом γ_{16}, заключается в том, что направления $I—A$, $B—A$ и $V—A$ должны пересечься в точке A. Аналитически это условие выражается следующим равенством:

$$\frac{B-A}{B-I}\cdot\frac{B-I}{B-II}\cdot\frac{B-II}{B-III}\cdot\frac{B-III}{B-IV}\cdot\frac{B-IV}{B-V}\cdot\frac{B-V}{B-A}=1.$$

Заменив соотношения сторон отношениями синусов уравновешенных углов, получим полюсное условное уравнение

$$6)\quad \frac{\sin\gamma_2^\circ \sin\gamma_5^\circ \sin\gamma_8^\circ \sin\gamma_{11}^\circ \sin\gamma_{14}^\circ \sin\gamma_{17}^\circ}{\sin\gamma_1^\circ \sin\gamma_4^\circ \sin\gamma_7^\circ \sin\gamma_{10}^\circ \sin\gamma_{13}^\circ \sin\gamma_{16}^\circ} = 1.$$

Угол γ_{18}° с остальными уравновешенными значениями углов, измеренных на точке B, должны удовлетворять условному уравнению горизонта

$$7)\quad \gamma_3^{\circ}+\gamma_6^{\circ}+\gamma_9^{\circ}+\gamma_{12}^{\circ}+\gamma_{15}^{\circ}+\gamma_{18}^{\circ}-360^{\circ}=0.$$

И, наконец, углы γ_{18}°, γ_{17}° и γ_{18}° совместно должны составлять следующее соотношение:

$$8)\quad \gamma_{16}^{\circ}+\gamma_{17}^{\circ}+\gamma_{18}^{\circ}-180^{\circ}=0.$$

Для определения ошибки удаленной стороны II—III составим весовую функцию

$$S_{II-III}=\frac{S_{A-B}\sin\gamma_1^{\circ}\sin\gamma_4^{\circ}\sin\gamma_9^{\circ}}{\sin\gamma_2^{\circ}\sin\gamma_5^{\circ}\sin\gamma_8^{\circ}}.$$

Полученные условные уравнения и весовую функцию приведем к линейному виду:

$a)$ $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \quad +W_a=0;$

$b)$ $\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6 \quad +W_b=0;$

$c)$ $\varepsilon_7+\varepsilon_8+\varepsilon_9 \quad +W_c=0;$

$d)$ $\varepsilon_{10}+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12} \quad +W_d=0;$

$e)$ $\varepsilon_{13}+\varepsilon_{14}+\varepsilon_{15} \quad +W_e=0;$

$g)$ $\varepsilon_{16}+\varepsilon_{17}+\varepsilon_{18}+W_g=0;$

$\alpha)$ $\varepsilon_3+\varepsilon_6+\varepsilon_9+\varepsilon_{12}+\varepsilon_{15}+\varepsilon_{18}+W_\alpha=0;$

$\beta)$ $\Delta_1\varepsilon_1-\Delta_2\varepsilon_2+\Delta_4\varepsilon_4-\Delta_5\varepsilon_5+\Delta_7\varepsilon_7-\Delta_8\varepsilon_8+\Delta_{10}\varepsilon_{10}-\Delta_{11}\varepsilon_{11}+\Delta_{13}\varepsilon_{13}-\Delta_{14}\varepsilon_{14}+\Delta_{16}\varepsilon_{16}-\Delta_{17}\varepsilon_{17}+W_\beta=0;$

$f)$ $\lg S_{II-III}=F_0+f_1\varepsilon_1-f_2\varepsilon_2+f_4\varepsilon_4-f_5\varepsilon_5-f_8\varepsilon_8+f_9\varepsilon_9.$

№ уравнения	№ угла	Измеренное значение угла γ	Первичная поправка ε'	Предварительно исправленный угол
a	1	49° 34′ 19″,6	—1″,03	49° 34′ 18″,57
	2	60 57 58 ,7	—1 ,04	60 57 57 ,66
	3	69 27 44 ,8	—1 ,03	69 27 43 ,77
	Σ	180 00 03 ,1		180 00 00 ,0
	W_a	+03″,1		
b	4	49° 41′ 04″,6	—1″,40	49° 41′ 03″,20
	5	56 33 40 ,7	—1 ,40	56 33 39 ,30
	6	73 49 18 ,9	—1 ,40	73 45 17 ,50
	Σ	180 00 04 ,2		180 00 00 ,0
	W_b	+04″,2		
c	7	53° 35′ 04″,3	+0″,56	53° 35′ 04″,86
	8	56 50 23 ,8	+0 ,57	56 50 24 ,37
	9	69 34 30 ,2	+0 ,57	69 34 30 ,77
	Σ	179 59 58 ,3		180 00 00 ,0
	W_c	—01″,7		
d	10	57° 58′ 09″,4	—1″,00	57° 58′ 08″,40
	11	69 15 22 ,4	—1 ,00	69 15 21 ,40
	12	52 46 31 ,2	—1 ,00	52 46 30 ,20
	Σ	180 00 03 ,0		180 00 00 ,0
	W_d	+03″,0		
e	13	89° 11′ 33″,0	—0″,10	89° 11′ 32″,90
	14	49 06 11 ,5	—0 ,10	49 06 11 ,40
	15	41 42 15 ,8	—0 ,10	41 42 15 ,70
	Σ	180 00 00 ,3		180 00 00 ,0
	W_e	+00″,3		
g	16	68° 37′ 38″,5	—0″,50	68° 37′ 38″,00
	17	58 38 43 ,9	—0 ,50	58 38 43 ,40
	18	52 43 39 ,1	—0 ,50	52 43 38 ,60
	Σ	180 00 01 ,5		180 00 00 ,0
	W_g	+01″,5		

Согласно сформулированному выше принципу, систему условных уравнений поправок разделим на две группы: в первую группу выделим условные уравнения фигур — a, b, c, d, e, g, так как в них коэффициенты перед неизвестными равны плюс единице и неизвестные в уравнениях не повторяются; во второй группе останутся уравнения горизонта α и полюса β.

Дальнейший порядок уравнительных вычислений следующий:

1. Решаем условные уравнения поправок первой группы. В табл. 22 определяем свободные члены, первичные поправки и предварительно исправленные углы.

2. По предварительно исправленным углам определяем коэффициенты и преобразованные свободные члены уравнения горизонта (табл. 23) и полюсного условного уравнения (табл. 24).

Таблица 23

№ угла	Предварительно исправленный угол
3	69° 27′ 43″,77
6	73 45 17 ,50
9	69 34 30 ,77
12	52 46 30 ,20
15	41 42 15 ,70
18	52 43 38 ,60
$\sum$	359 59 56 ,54
W_α	—03″,46

Таблица 24

Числитель				Знаменатель			
№ угла	Предварительно исправленный угол	lg sin γ	Δ	№ угла	Предварительно исправленный угол	lg sin γ	Δ
2	60° 57′ 57″,66	9,9416764	11,7	1	49° 34′ 18″,57	9,8815099	18,0
5	56 33 39 ,30	9,9214118	13,9	4	49 41 03 ,20	9,8822342	17,9
8	56 50 24 ,37	9,9228019	13,8	7	53 35 04 ,86	9,9056529	15,5
11	69 15 21 ,40	9,9708915	7,9	10	57 58 08 ,40	9,9282734	13,2
14	49 06 11 ,40	9,8784584	18,3	13	89 11 32 ,90	9,9999569	0,3
17	58 38 43 ,40	9,9314392	12,9	16	68 37 38 ,00	9,9690565	8,3
	$\sum \lg =$	9,5666792			$\sum \lg =$	9,5666838	

$W_\beta = -46$

Коэффициенты и свободные члены полюсного уравнения выражены в единицах седьмого знака логарифмов.

3. Вычисляем коэффициенты весовой функции, выраженные в единицах седьмых знаков логарифмов (табл. 25).

Таблица 25

№ угла	Предварительно исправленный угол	f	№ угла	Предварительно исправленный угол	f
1	49° 34′ 18″,57	18,0	2	60° 57′ 57″,64	11,7
4	49 41 03 ,20	17,9	5	56 33 39 ,90	13,9
9	69 34 30 ,77	7,8	8	56 50 24 ,37	13,8

4. Вычисляем неопределенные множители ρ коэффициентов преобразованных уравнений второй группы A_i и B_i и коэффициенты нормальных уравнений коррелат преобразованной системы второй группы (табл. 26). В колонках 3 и 4 в соответствии с секциями выписываем коэффициенты уравнений второй группы, а затем по формулам (35,9) и (35,10) вычисляем множители ρ. Используя эти множители, вычисляем преобразованные коэффициенты A_i и B_i по формулам (35,11)— (35,14) в колонках 6 и 7. Выписав коэффициенты f весовой функции в колонку 5, преобразовываем их так же, как и коэффициенты условных уравнений второй группы по формулам (36,33), и преобразованные коэффициенты F_i записываем в колонку 8. Контрольные суммы s по строчкам заносим в колонку 9. В колонках 10—18 вычисляем коэффициенты нормальных уравнений преобразованной второй группы и коэффициенты весовой функции.

5. Решаем нормальные уравнения и вычисляем коррелаты K_A и K_B в схеме Гаусса — Дулитля (табл. 27). В этой же схеме вычисляем величину, обратную весу функции $\frac{1}{p_S}$, по преобразованным коэффициентам весовой функции.

6. Определяем вторичные поправки ε_i'' в соответствии с формулами (34,18) в специальном формуляре (табл. 28), а также уравновешенные значения искомых углов $\gamma°$.

Перед вычислением табл. 27 должен быть осуществлен контроль определения коррелат в схеме Гаусса — Дулитля по формуле (34,23)

$$-[KW]=\frac{W_A^2}{[AA]}+\frac{[W_B\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]},$$

$$4{,}12=4{,}12,$$

что свидетельствует о правильности вычисления коррелат.

Секция	№ угла	α	β	f	A	B	F
1	2	3	4	5	6	7	8
a	1 2 3	0 0 1	−18,0 11,7 0	+18,0 −11,7 0	−0,33 −0,33 +0,66	−15,90 +13,80 +2,10	+15,90 −13,80 −2,10
	$n_a=3$	$\rho_{a1}=-0{,}33$	$\rho_{a2}=+2{,}10$	$\frac{[f]_{(a)}}{n_a}=-2{,}10$	0	0	0
b	4 5 6	0 0 1	−17,9 13,9 0	+17,9 −13,9 0	−0,33 −0,33 +0,66	−16,57 +15,23 +1,34	+16,57 −15,23 −1,34
	$n_b=3$	$\rho_{b1}=-0{,}33$	$\rho_{b2}=+1{,}33$	$\frac{[f]_{(b)}}{n_b}=-1{,}33$	0	0	0
c	7 8 9	0 0 1	−15,5 13,8 0	0 −13,8 +7,8	−0,33 −0,33 +0,66	−14,93 +14,37 +0,56	+2,00 −11,80 +9,80
	$n_c=3$	$\rho_{c1}=-0{,}33$	$\rho_{c2}=+0{,}57$	$\frac{[f]_{(c)}}{n_c}=+2{,}00$	0	0	0
d	10 11 12	0 0 1	−13,2 7,9 0	0 0 0	−0,33 −0,33 +0,66	−11,43 +9,67 +1,76	0 0 0
	$n_d=3$	$\rho_{d1}=-0{,}33$	$\rho_{d2}=+1{,}77$	0	0	0	0
e	13 14 15	0 0 1	−0,3 18,3 0	0 0 0	−0,33 −0,33 +0,66	−6,30 +12,30 −6,00	0 0 0
	$n_e=3$	$\rho_{e1}=-0{,}33$	$\rho_{e2}=-6{,}00$	0	0	0	0
g	16 17 18	0 0 1	−8,3 12,9 0	0 0 0	−0,33 −0,33 +0,66	−9,83 +11,36 −1,53	0 0 0
	$n_g=3$	$\rho_{g1}=-0{,}33$	$\rho_{g2}=-1{,}53$	0	0	0	0

s	*AA*	*AB*	*AF*	*As*	*BB*	*BF*	*Bs*	*FF*	*Fs*
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
—0,33	0,11	5,25	—5,25	0,11	252,81	—252,81	5,25	252,81	—5,24
—0,33	0,11	—4,55	4,55	0,11	190,44	—190,44	—4,55	190,44	4,55
+0,66	0,44	1,39	—1,39	0,44	4,41	—4,41	1,39	4,41	—1,39
0									
—0,33	0,11	5,47	—5,47	0,11	274,56	—274,56	5,47	274,56	—5,47
—0,33	0,11	—5,03	5,03	0,11	231,95	—231,95	—5,03	231,95	5,03
+0,66	0,44	0,88	—0,88	0,44	1,80	—1,80	0,88	1,80	—0,88
0									
—13,26	0,11	4,93	—0,66	4,38	222,90	—29,86	197,97	4,00	—26,52
+2,24	0,11	—4,74	3,89	—0,74	206,50	—169,57	32,19	139,24	—26,43
+11,02	0,44	0,37	6,47	7,27	0,31	5,49	6,17	96,04	108,00
0									
—11,76	0,11	3,77	0	3,88	130,64	0	134,42	0	0
+9,34	0,11	—3,19	0	—3,08	93,51	0	90,32	0	0
+2,42	0,44	1,16	0	1,60	3,10	0	4,26	0	0
0									
—6,63	0,11	2,08	0	2,19	39,69	0	41,77	0	0
+11,97	0,11	—4,06	0	—3,95	151,29	0	147,23	0	0
—5,34	0,44	—3,96	0	—3,52	36,00	0	32,04	0	0
0									
—10,16	0,11	3,24	0	3,35	96,63	0	99,87	0	0
+11,03	0,11	—3,75	0	—3,64	129,05	0	125,30	0	0
—0,87	0,44	—1,01	0	—0,57	2,34	0	1,33	0	0
0	3,96	—1,75	6,29	8,49	2067,93	—1149,91	916,28	1195,25	51,65

Таблица 27

K_A	K_B	W	F	S
3,96 —1 $K_A = 0,8839$	—1,75 0,4419 0,0102	—3,46 0,8737 0,8737	6,29 —1,5884	5,04 —1,2727
	2067,93 —0,7733 2067,1567 —1 $K_B = 0,0230$	—46,00 —1,5290 —47,5290 0,0230	—1149,91 2,7796 —1147,1304 0,5549	870,27 2,2272 872,4972 —0,4221
			1195,25 —9,99 —636,54 $\frac{1}{p_S} = 548,72$	

7. Заключительный контроль. В соответствии с формулой (34,21) должно выполняться равенство

$$[\varepsilon''\varepsilon''] = -[KW],$$

т. е.

$$4,02 = 4,12.$$

Подставляя уравновешенные значения углов $\gamma°$ в условное уравнение горизонта и полюсное уравнение, должны получить для первого сумму углов, равную 360°, а для второго равенство сумм логарифмов числителя и знаменателя (табл. 29 и 30).

8. Оценка точности:

а) определяем среднюю квадратическую ошибку измеренных углов на основании формулы (36,8)

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon'\varepsilon'] + [\varepsilon'' + \varepsilon'']}{r}} = \pm\sqrt{\frac{13,71 + 4,12}{8}} = \pm 1'',5;$$

б) средняя квадратическая ошибка длины удаленной стороны II—III, вычисленной по уравновешенным значениям углов, в соответствии с формулой (36,11)

$$M_{\lg S} = m\sqrt{\frac{1}{p_S}} = 1,5\sqrt{548,72} = 35 \text{ единиц 7-го знака } \lg.$$

Таблица 28

Секция	№ угла	A $K_A=$ $=0{,}884$	B $K_B=$ $=0{,}0230$	ε″	ε″ε″	Предварительно исправленный угол	Уравновешенный угол γ°
	1	−0,33 −0,29	−15,90 −0,37	−0,66	0,44	49° 34′ 18″,57	49° 34′ 17″.91
a	2	−0,33 −0,29	+13,80 +0,32	+0,03	0,00	60 57 57 ,66	60 57 57 ,69
	3	+0,66 +0,58	+2,10 +0,05	+0,63	0,40	69 27 43 ,77	69 27 44 ,40
	4	−0,33 −0,29	−16,57 −0,38	−0,67	0,45	49 41 03 ,20	49 41 02 ,53
b	5	−0,33 −0,29	+15,23 +0,35	+0,06	0,00	56 33 39 ,30	56 33 39 ,36
	6	+0,66 +0,58	+1,34 +0,03	+0,61	0,37	73 45 17 ,50	73 45 18 ,11
	7	−0,33 −0,29	−14,93 −0,34	−0,63	0,40	53 35 04 ,86	53 35 04 ,23
c	8	−0,33 −0,29	+14,37 +0,33	+0,04	0,00	56 50 24 ,37	56 50 24 ,41
	9	+0,66 +0,58	+0,56 +0,01	+0,59	0,35	69 34 30 ,77	69 34 31 ,36
	10	−0,33 −0,29	−11,43 −0,26	−0,55	0,30	57 58 08 ,40	57 58 07 ,85
d	11	−0,33 −0,29	+9,67 +0,22	−0,07	0,00	69 15 21 ,40	69 15 21 ,33
	12	+0,66 +0,58	+1,76 +0,04	+0,62	0,38	52 46 30 ,20	52 46 30 ,82
	13	−0,33 −0,29	−6,30 −0,14	−0,43	0,18	89 11 32 ,90	89 11 32 ,47
e	14	−0,33 −0,29	+12,30 +0,28	−0,01	0,00	49 06 11 ,40	49 06 11 ,39
	15	+0,66 +0,58	−6,00 −0,14	+0,44	0,19	41 42 15 ,70	41 42 16 ,14
	16	−0,33 −0,29	−9,83 −0,23	−0,52	0,27	68 37 38 ,00	68 37 37 ,48
g	17	−0,33 −0,29	+11,36 +0,26	−0,03	0,00	58 38 43 ,40	58 38 43 ,37
	18	+0,66 +0,58	−1,53 −0,04	+0,54	0,29	52 43 38 ,60	52 43 39 ,14

$[\varepsilon''\varepsilon'']=4{,}02$

Относительная ошибка удаленной стороны, исходя из формулы (11,7),

$$\frac{1}{N}=\frac{M_{\lg S}}{M\cdot 10^7}=\frac{35}{0{,}4343\cdot 10^7}=\frac{1}{124\,000}.$$

Таблица 29

№ угла	Уравновешенный угол γ°
3	69° 27′ 44″,40
6	73 45 18 ,11
9	69 34 31 ,36
12	52 46 30 ,82
15	41 42 16 ,14
18	52 43 39 ,14
$\sum$	359 59 59 ,97
W	—0″,03

Таблица 30

Числитель			Знаменатель		
№ угла	Уравновешенный угол γ°	lg sin γ°	№ угла	Уравновешенный угол γ°	lg sin γ°
2	60° 57′ 57″,69	9,9416764	1	49° 34′ 17″,91	9,8815087
5	56 33 39 ,36	9,9214119	4	49 41 02 ,53	9,8822330
8	56 50 24 ,41	9,9228020	7	53 35 04 ,23	9,9056519
11	69 15 21 ,33	9,9708915	10	57 58 07 ,85	9,9282728
14	49 06 11 ,39	9,8784583	13	89 11 32 ,47	9,9999569
17	58 38 43 ,37	9,9314391	16	68 37 37 ,48	9,9690561
	$\sum \lg \sin \gamma°$	9,5666792		$\sum \lg \sin \gamma°$	9,5666794

Глава VI

ПОСРЕДСТВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 38. Общие представления о посредственных (косвенных) измерениях

Как указывалось в § 2, в маркшейдерско-геодезической практике часто встречаются случаи, когда непосредственно измеряются не те величины, которые отыскиваются, а некоторые другие, связанные с искомыми определенными функциональными зависимостями. Такие измерения называют **посредственными измерениями.**

Рассмотрим пример. Пусть на плоскости даны три точки A, B, C (рис. 13) с известными их координатами X_A, Y_A; X_B, Y_B; X_C, Y_C. Необходимо определить координаты некоторой точки P — X_P, Y_P. Для решения этой задачи достаточно измерить две линии l_{AP} и l_{BP}. Непосредственно измеренные величины с искомыми связаны определенными функциональными зависимостями, которые можно выразить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} l_{AP} &= \sqrt{(x_P - X_A)^2 + (y_P - Y_A)^2}; \\ l_{BP} &= \sqrt{(x_P - X_B)^2 + (y_P - Y_B)^2}. \end{aligned}\right\}$$

Чтобы определить координаты искомой точки P, необходимо совместно решить систему (38,1) с двумя неизвестными x_P и y_P. Так как из решения системы уравнений (38,1) координаты точки P будут найдены один раз, задача на уравновешивание не возникнет.

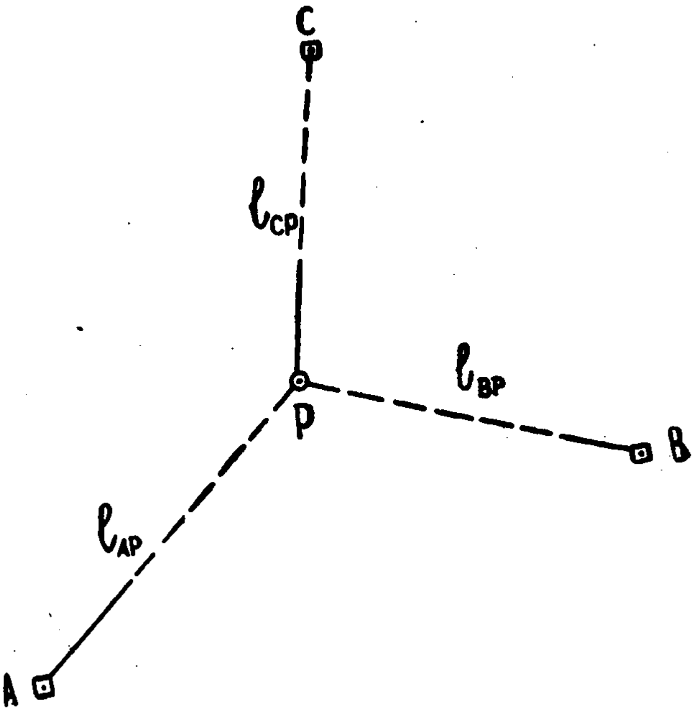


Рис. 13

Предположим, что помимо первых двух непосредственных измерений l_{AP} и l_{BP} сделано еще одно добавочное измерение l_{CP}, которое дает возможность составить еще одно уравнение,

$$l_{CP} = \sqrt{(x_P - X_C)^2 + (y_P - Y_C)^2}. \tag{38,2}$$

Теперь имеется три уравнения с двумя неизвестными и можно три раза получить значения искомых посредственных величин, решая попарно эти уравнения.

В силу того, что непосредственные измерения l_{AP}, l_{BP}, l_{CP} содержат неизбежные ошибки, вычисленные значения искомых посредственных величин не получатся тождественными. В этом случае и возникнет необходимость в уравновешивании.

§ 39. Теория уравновешивания посредственных измерений

Требуется определить уравновешенные значения k величин X, Y, Z, . . ., которые вычисляются по результатам n непосредственных измерений. Уравновешенные значения непосредственно измеренных величин L_1, L_2, . . ., L_n связаны с искомыми величинами X, Y, Z, ... определенными функциональными зависимостями

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= F_1(X, Y, Z, \ldots); \\ L_2 &= F_2(X, Y, Z, \ldots); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_n &= F_n(X, Y, Z, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{39,1}$$

или

$$\left.\begin{aligned} F_1(X, Y, Z, \ldots) - L_1 &= 0; \\ F_2(X, Y, Z, \ldots) - L_2 &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots \\ F_n(X, Y, Z, \ldots) - L_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{39,2}$$

Чтобы возникла необходимость в уравновешивании, число непосредственно измеренных величин n должно быть больше числа k искомых аргументов, т. е. $n > k$.

Пусть результаты непосредственных неравноточных измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$ имеют веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Уравновешенные значения измеренных величин будут равны

$$L_i = l_i + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{39,3}$$

где ε_i — поправки.

Подставив уравновешенные значения измеренных величин из (39,3) в (39,2), получим:

$$\left.\begin{aligned} F_1(X, Y, Z, \ldots) - (l_1 + \varepsilon_1) &= 0; \\ F_2(X, Y, Z, \ldots) - (l_2 + \varepsilon_2) &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots \\ F_n(X, Y, Z. \ldots) - (l_n + \varepsilon_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{39,4}$$

или

$$\left.\begin{aligned} F_1(X, Y, Z, \ldots) - l_1 &= \varepsilon_1; \\ F_2(X, Y, Z, \ldots) - l_2 &= \varepsilon_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots \\ F_n(X, Y, Z, \ldots) - l_n &= \varepsilon_n. \end{aligned}\right\} \tag{39,5}$$

Полученные уравнения (39,5) называются **уравнениями поправок в общем виде.**

В системе (39,5) число неизвестных равно $n + k$. Для их определения воспользуемся принципом наименьших квадратов, т. е. найдем значения X, Y, Z, ... такими, чтобы

$$[p\varepsilon\varepsilon] = \min. \tag{39,6}$$

Так как уравнения (39,5) могут быть сложными функциями, решение которых в дальнейшем будет затруднительно, их необходимо привести к линейному виду. Для этого в уравнениях системы (39,5) уравновешенные значения искомых посредственных величин заменим их приближенными значениями x, y, z или поправками δ_x, δ_y, δ_z, т. е.

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \delta_x; \\ Y &= y + \delta_y; \\ Z &= z + \delta_z. \end{aligned}\right\} \tag{39,7}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x+\delta_x,\ y+\delta_y,\ z+\delta_z) - l_1 = \varepsilon_1; \\ &F_2(x+\delta_x,\ y+\delta_y,\ z+\delta_z) - l_2 = \varepsilon_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_n(x+\delta_x,\ y+\delta_y,\ z+\delta_z) - l_n = \varepsilon_n. \end{aligned}\right\}. \tag{39,8}$$

Приближенные значения x, y, z искомых посредственных величин могут быть определены из решения любых k уравнений, взятых из системы (39,5), если поправки ε в них считать равными нулю.

В левой части уравнений (39,8) функции разложим в ряд по строке Тейлора, ограничиваясь при разложении членами, содержащими только первые степени поправок δ_x, δ_y, δ_z:

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x,\ y,\ z) + \frac{\partial F_1}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\delta_y + \frac{\partial F_1}{\partial z}\delta_z - l_1 = \varepsilon_1; \\ &F_2(x,\ y,\ z) + \frac{\partial F_2}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial F_2}{\partial y}\delta_y + \frac{\partial F_2}{\partial z}\delta_z - l_2 = \varepsilon_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_n(x,\ y,\ z) + \frac{\partial F_n}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial F_n}{\partial y}\delta_y + \frac{\partial F_n}{\partial z}\delta_z - l_n = \varepsilon_n. \end{aligned}\right\} \tag{39,9}$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = a_i; \quad \frac{\partial F_i}{\partial y} = b_i; \quad \frac{\partial F_i}{\partial z} = c_i; \tag{39,10}$$

$$F_i(x,\ y,\ z) - l_i = v_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n). \tag{39,11}$$

Подставив их в уравнения (39,9), получим:

$$\left.\begin{aligned} &a_1\delta_x + b_1\delta_y + c_1\delta_z + v_1 = \varepsilon_1; \\ &a_2\delta_x + b_2\delta_y + c_2\delta_z + v_2 = \varepsilon_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_n\delta_x + b_n\delta_y + c_n\delta_z + v_n = \varepsilon_n. \end{aligned}\right\} \tag{39,12}$$

Это и есть **уравнения поправок в линейном виде.**

В полученных уравнениях коэффициенты при неизвестных a_i, b_i, c_i являются частными производными от соответствующих функций по приближенным значениям искомых аргументов, а свободные члены v_i являются разностями между приближенными и измеренными значениями функций.

Для определения поправок δ_x, δ_y, δ_z, удовлетворяющих принципу наименьших квадратов (39,6), составим функцию

$$\begin{aligned} F=[p\varepsilon\varepsilon]=p_1(a_1\delta_x+b_1\delta_y+c_1\delta_z+v_1)^2+\\ +p_2(a_2\delta_x+b_2\delta_y+c_2\delta_z+v_2)^2+\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +p_n(a_n\delta_x+b_n\delta_y+c_n\delta_z+v_n)^2=\min. \end{aligned} \qquad (39,13)$$

Чтобы отыскать минимум этой функции, нужно взять частные производные по δ_x, δ_y, δ_z и приравнять их нулю;

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial\delta_x}&=2p_1a_1^2\delta_x+2p_1a_1b_1\delta_y+2p_1a_1c_1\delta_z+2p_1a_1v_1+\\ &+2p_2a_2^2\delta_x+2p_2a_2b_2\delta_y+2p_2a_2c_2\delta_z+2p_2a_2v_2+\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+2p_na_n^2\delta_x+2p_na_nb_n\delta_y+2p_na_nc_n\delta_z+2p_na_nv_n=0;\\ \frac{\partial F}{\partial\delta_y}&=2p_1a_1b_1\delta_x+2p_1b_1^2\delta_y+2p_1b_1c_1\delta_z+2p_1b_1v_1+\\ &+2p_2a_2b_2\delta_x+2p_2b_2^2\delta_y+2p_2b_2c_2\delta_z+2p_2b_2v_2+\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+2p_na_nb_n\delta_x+2p_nb_n^2\delta_y+2p_nb_nc_n\delta_z+2p_nb_nv_n=0;\\ \frac{\partial F}{\partial\delta_z}&=2p_1a_1c_1\delta_x+2p_1b_1c_1\delta_y+2p_1c_1^2\delta_z+2p_1c_1v_1+\\ &+2p_2a_2c_2\delta_x+2p_2b_2c_2\delta_y+2p_2c_2^2\delta_z+2p_2c_2v_2+\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+2p_na_nc_n\delta_x+2p_nb_nc_n\delta_y+2p_nc_n^2\delta_z+2p_nc_nv_n=0. \end{aligned}\right\} \qquad (39,14)$$

Сократив в уравнениях (39,14) все члены на 2 и сделав приведение подобных, получим в обозначениях Гаусса следующую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} [paa]\,\delta_x+[pab]\,\delta_y+[pac]\,\delta_z+[pav]=0;\\ [pab]\,\delta_x+[pbb]\,\delta_y+[pbc]\,\delta_z+[pbv]=0;\\ [pac]\,\delta_x+[pbc]\,\delta_y+[pcc]\,\delta_z+[pcv]=0. \end{aligned}\right\} \qquad (39,15)$$

Уравнения системы (39, 15) называются нормальными. Число нормальных уравнений равно числу искомых посредственных величин k.

На основании системы уравнений поправок (39,12) и системы уравнений (39,14) можно обнаружить следующие свойства поправок ε:

$$\left.\begin{aligned} p_1a_1\varepsilon_1+p_2a_2\varepsilon_2+\ldots+p_na_n\varepsilon_n=[pa\varepsilon]=0;\\ p_1b_1\varepsilon_1+p_2b_2\varepsilon_2+\ldots+p_nb_n\varepsilon_n=[pb\varepsilon]=0;\\ p_1c_1\varepsilon_1+p_2c_2\varepsilon_2+\ldots+p_nc_n\varepsilon_n=[pc\varepsilon]=0. \end{aligned}\right\} \qquad (39,16)$$

Решив нормальные уравнения системы (39,15) так же, как решалась аналогичная система нормальных уравнений коррелат при уравновешивании условных измерений (§ 30), определим значения поправок δ_x, δ_y, δ_z, а по ним уравновешенные значения искомых величин X, Y, Z из равенств (39,7) и поправки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ из уравнений (39,12).

Для случая равноточных измерений веса́ измеряемых величин будут равны единицам

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1, \tag{39,17}$$

а система поправок δ_x, δ_y, δ_z должна удовлетворять условию

$$[\varepsilon\varepsilon] = \min. \tag{39,18}$$

Тогда, очевидно, функция (39,13) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} F = [\varepsilon\varepsilon] = (a_1\delta_x + b_1\delta_y + c_1\delta_z + v_1)^2 + \\ + (a_2\delta_x + b_2\delta_y + c_2\delta_z + v_2)^2 + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (a_n\delta_x + b_n\delta_y + c_n\delta_z + v_n)^2 = \min, \end{aligned} \tag{39,19}$$

а нормальные уравнения соответственно запишутся:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{[aa]}}\,\delta_x + [ab]\,\delta_y + [ac]\,\delta_z + [av] = 0; \\ \underline{\underline{[bb]}}\,\delta_y + [bc[\,\delta_z + [bv] = 0; \\ \underline{\underline{[cc]}}\,\delta_z + [cv] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{39,20}$$

Поправки ε в случае равноточных измерений имеют следующие свойства:

$$[a\varepsilon] = [b\varepsilon] = [c\varepsilon] = 0. \tag{39,21}$$

Рассмотренный выше способ решения уравнений поправок с тремя неизвестными (искомыми аргументами X, Y, Z) и составления нормальных уравнений можно распространить на любое число искомых аргументов.

§ 40. Вычисление коэффициентов нормальных уравнений и их решение

Определение коэффициентов нормальных уравнений производится в табл. 31.

Коэффициенты уравнений поправок a_i, b_i, c_i и свободные члены v_i записывают в колонках 2, 3, 4, 5. Колонка 6 является контрольной и соответствует следующим суммам:

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l|l} a_1 + b_1 + c_1 + v_1 = s_1 & p_1a_1 & p_1b_1 & p_1c_1 & p_1v_1 & p_1s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + v_2 = s_2 & p_2a_2 & p_2b_2 & p_2c_2 & p_2v_2 & p_2s_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n + b_n + c_n + v_n = s_n & p_na_n & p_nb_n & p_nc_n & p_nv_n & p_ns_n \\ \hline [a] + [b] + [c] + [v] = [s] & & & & & \end{array}\right\} \tag{40,1}$$

В колонке 7 записывают веса p_i непосредственных измерений.

№ урав-нения	a	b	c	v	s	p	paa	pab	pac	pav	pas
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	a_1	b_1	c_1	v_1	s_1	p_1	$p_1a_1a_1$	$p_1a_1b_1$	$p_1a_1c_1$	$p_1a_1v_1$	$p_1a_1s_1$
2	a_2	b_2	c_2	v_2	s_2	p_2	$p_2a_2a_2$	$p_2a_2b_2$	$p_2a_2c_2$	$p_2a_2v_2$	$p_2a_2s_2$
3	a_3	b_3	c_3	v_3	s_3	p_3	$p_3a_3a_3$	$p_3a_3b_3$	$p_3a_3c_3$	$p_3a_3v_3$	$p_3a_3s_3$
.											
n	a_n	b_n	c_n	v_n	s_n	p_n	$p_na_na_n$	$p_na_nb_n$	$p_na_nc_n$	$p_na_nv_n$	$p_na_ns_n$
$\sum$	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[v]$	$[s]$		$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pav]$	$[pas]$

Умножая равенство (40,1) последовательно на p_ia_i, p_ib_i, p_ic_i, p_iv_i, p_is_i и беря суммы, получают:

$$\left.\begin{aligned}
[paa]+[pab]+[pac]+[pav]&=[pas];\\
[pab]+[pbb]+[pbc]+[pbv]&=[pbs];\\
[pac]+[pbc]+[pcc]+[pcv]&=[pcs];\\
[pav]+[pbv]+[pcv]+[pvv]&=[pvs];\\
[pas]+[pbs]+[pcs]+[pvs]&=[pss].
\end{aligned}\right\}\qquad(40,2)$$

Эти суммы дают возможность осуществить контроль правильности вычисления коэффициентов нормальных уравнений.

Нормальные уравнения решают способом последовательного исключения неизвестных, сущность которого подробно рассмотрена при уравновешивании непосредственных измерений, связанных условными уравнениями (глава IV, § 30 и 31). Этот способ дает возможность получить систему преобразованных нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
[paa]\,\delta_x+\quad [pab]\,\delta_y+\quad [pac]\,\delta_z+\quad [pav]&=0;\\
[pbb\cdot 1]\,\delta_y+[pbc\cdot 1]\,\delta_z+[pbv\cdot 1]&=0;\\
[pcc\cdot 2]\,\delta_z+[pcv\cdot 2]&=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(40,3)$$

из которых легко вычислить искомые поправки δ_x, δ_y, δ_z по элиминационным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_x&=-\frac{[pab]}{[paa]}\delta_y-\frac{[pac]}{[paa]}\delta_z-\frac{[pav]}{[paa]};\\
\delta_y&=-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\delta_z-\frac{[pbv\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]};\\
\delta_z&=-\frac{[pcv\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}.
\end{aligned}\right\}\qquad(40,4)$$

pbb	pbc	pbv	pbs	pcc	pcv	pcs	pvv	pvs	pss
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$p_1b_1b_1$	$p_1b_1c_1$	$p_1b_1v_1$	$p_1b_1s_1$	$p_1c_1c_1$	$p_1c_1v_1$	$p_1c_1s_1$	$p_1v_1v_1$	$p_1v_1s_1$	$p_1s_1s_1$
$p_2b_2b_2$	$p_2b_2c_2$	$p_2b_2v_2$	$p_2b_2s_2$	$p_2c_2c_2$	$p_2c_2v_2$	$p_2c_2s_2$	$p_2v_2v_2$	$p_2v_2s_2$	$p_2s_2s_2$
$p_3b_3b_3$	$p_3b_3c_3$	$p_3b_3v_3$	$p_3b_3s_3$	$p_3c_3c_3$	$p_3c_3v_3$	$p_3c_3s_3$	$p_3v_3v_3$	$p_3v_3s_3$	$p_3s_3s_3$
$p_nb_nb_n$	$p_nb_nc_n$	$p_nb_nv_n$	$p_nb_ns_n$	$p_nc_nc_n$	$p_nc_nv_n$	$p_nc_ns_n$	$p_nv_nv_n$	$p_nv_ns_n$	$p_ns_ns_n$
$[pbb]$	$[pbc]$	$[pbv]$	$[pbs]$	$[pcc]$	$[pcv]$	$[pcs]$	$[pvv]$	$[pvs]$	$[pss]$

Алгорифмы Гаусса развертываются по правилам, описанным в § 30. Решаются нормальные уравнения (39,15) в схеме Гаусса—Дулитля (табл. 32), конструкция которой, порядок заполнения, последовательность решения и текущие контроли аналогичны схеме решения нормальных уравнений коррелат (см. табл. 12).

§ 41. Контроль решения нормальных уравнений

Первое уравнение системы (40,2) умножим на $-\frac{[pab]}{[paa]}$ и полученный результат сложим со вторым уравнением системы (40,2), получим

$$\left([pbb]-\frac{[pab][pab]}{[paa]}\right)+\left([pbc]-\frac{[pab][pac]}{[paa]}\right)+$$
$$+\left([pbv]-\frac{[pab][pav]}{[paa]}\right)=\left([pbs]-\frac{[pab][pas]}{[paa]}\right). \qquad (41,1)$$

Заменив выражения в скобках алгорифмами, будем иметь

$$[pbb\cdot 1]+[pbc\cdot 1]+[pbv\cdot 1]=[pbs\cdot 1]. \qquad (41,2)$$

На основании этого равенства осуществляется контроль вычислений в третьей строчке второй ступеньки табл. 32.

Умножив далее первое уравнение системы (40,2) последовательно на $-\frac{[pac]}{[paa]}$, $-\frac{[pav]}{[paa]}$, $-\frac{[pas]}{[paa]}$ и полученные значения прибавив к третьему, четвертому и пятому уравнениям системы (40,2), получим преобразованные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&[pbc\cdot 1]+[pcc\cdot 1]+[pcv\cdot 1]=[pcs\cdot 1];\\&[pbv\cdot 1]+[pcv\cdot 1]+[pvv\cdot 1]=[pvs\cdot 1];\\&[pbs\cdot 1]+[pcs\cdot 1]+[pvs\cdot 1]=[pss\cdot 1],\end{aligned}\right\} \qquad (41,3)$$

	δ_x	δ_y	δ_z	v
1	$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pav]$
2	-1	$-\frac{[pab]}{[paa]}$	$-\frac{[pac]}{[paa]}$	$-\frac{[pav]}{[paa]}$
3	$\delta_x =$	$-\frac{[pab]}{[paa]}\delta_y$	$-\frac{[pac]}{[paa]}\delta_z$	$-\frac{[pav]}{[paa]}$
	1	$[pbb]$	$[pbc]$	$[pbv]$
	2	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pab]$	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pac]$	$-\frac{[pab]}{[paa]}[pav]$
	3	$[pbb \cdot 1]$	$[pbc \cdot 1]$	$[pbv \cdot 1]$
		-1	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$	$-\frac{[pbv \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$
	4	$\delta_y =$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}\delta_z$	$-\frac{[pbv \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$
		1	$[pcc]$	$[pcv]$
		2	$-\frac{[pac]}{[paa]}[pac]$	$-\frac{[pac]}{[paa]}[pav]$
		3	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbc \cdot 1]$	$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbv \cdot 1]$
		4	$[pcc \cdot 2]$	$[pcv \cdot 2]$
		5	-1	$-\frac{[pcv \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$
		6	$\delta_z =$	$-\frac{[pcv \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$
			1	$[pvv]$
			2	$-\frac{[pav]}{[paa]}[pav]$
			3	$-\frac{[pbv \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pbv \cdot 1]$
			4	$-\frac{[pcv \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}[pcv \cdot 2]$
			5	$[pvv \cdot 3]$

f	S'	Контроль	Примечания	Порядок вычислений
f_1	S'_1		$S'_1=[pas]+f_1$	
$-\frac{f_1}{[paa]}$	$-\frac{S'_1}{[paa]}$	C_1	Знак меняется на обратный	1
			$Э_1$	15
f_2	S'_2		$S'_2=[pbs]+f_2$	
$-\frac{[pab]}{[paa]}f_1$	$-\frac{[pab]}{[paa]}S'_1$	C'_1		2
$[f_2\cdot 1]$	$[S'_2\cdot 1]$	C_2		3
$-\frac{[f_2\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$	$-\frac{[S'_2\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$	C_3	Знак меняется на обратный	4
			$Э_2$	14
f_3	S'_3		$S'_3=[pcs]+f_3$	
$-\frac{[pac]}{[paa]}f_1$	$-\frac{[pac]}{[paa]}S'_1$	C'_2		5
$-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}[f_2\cdot 1]$	$-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}[S'_2\cdot 1]$	C'_3		6
$[f_3\cdot 2]$	$[S'_3\cdot 2]$	C_4		7
$-\frac{[f_3\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$	$-\frac{[S'_3\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$	C_5	Знак меняется на обратный	8
			$Э_3$	13
	$[pss]$	$[pvs]$		
$-\frac{f_1}{[paa]}f_1$	$-\frac{S'_1}{[paa]}S'_1$	$-\frac{[pav]}{[paa]}S'_1$		9
$-\frac{[f_2\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}[f_2\cdot 1]$	$-\frac{[S'_2\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}[S'_2\cdot 1]$	$-\frac{[pbv\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}[S'_2\cdot 1]$		10
$-\frac{[f_3\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}[f_3\cdot 2]$	$-\frac{[S'_3\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}[S'_3\cdot 2]$	$-\frac{[pcv\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}[S'_3\cdot 2]$		11
$\frac{1}{p_u}=$	$[pS'S'\cdot 3]$	$[pvS'\cdot 3]$		12

Теперь уравнение (41,2) умножим на $-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$ и результат сложим с первым уравнением системы (41,3)

$$\left([pcc\cdot 1]-\frac{[pbc\cdot 1][pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\right)+\left([pcv\cdot 1]-\frac{[pbc\cdot 1][pbv\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\right)=$$
$$=\left([pcs\cdot 1]-\frac{[pbc\cdot 1][pbs\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\right)$$

или, использовав алгорифмы, получим

$$[pcc\cdot 2]+[pcv\cdot 2]=[pcs\cdot 2]. \tag{41,4}$$

Это уравнение дает возможность осуществить контроль вычислений в четвертой строчке третьей ступеньки табл. 32.

Умножив уравнение (41,2) последовательно на $-\frac{[pbv\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$, $-\frac{[pbs\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$ и результаты прибавив ко второму и третьему уравнениям системы (41,3), получим вторую преобразованную систему:

$$\left.\begin{aligned}&[pcv\cdot 2]+[pvv\cdot 2]=[pvs\cdot 2];\\&[pcs\cdot 2]+[pvs\cdot 2]=[pss\cdot 2].\end{aligned}\right\} \tag{41,5}$$

И, наконец, умножив уравнение (41,4) последовательно на $-\frac{[pcv\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$ и $-\frac{[pcs\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$ и прибавив к уравнениям (41,5), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}&\left([pvv\cdot 2]-\frac{[pcv\cdot 2][pcv\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}\right)=\left([pvs\cdot 2]-\frac{[pcv\cdot 2][pcs\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}\right);\\&\left([pvs\cdot 2]-\frac{[pcv\cdot 2][pcs\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}\right)=\left([pss\cdot 2]-\frac{[pcs\cdot 2][pcs\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}\right)\end{aligned}\right\} \tag{41,6}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&[pvv\cdot 3]=[pvs\cdot 3];\\&[pvs\cdot 3]=[pss\cdot 3],\end{aligned}\right\} \tag{41,7}$$

откуда

$$[pvv\cdot 3]=[pvs\cdot 3]=[pss\cdot 3]. \tag{41,8}$$

Равенства (41,8) дают возможность осуществить контроль преобразования коэффициентов нормальных уравнений в схеме Гаусса—Дулитля. Однако следует помнить, что вычисление самих поправок δ_x, δ_y, δ_z в схеме решения нормальных уравнений остается бесконтрольным.

Возьмем систему уравнений поправок (39,9):

$$\left.\begin{aligned}&a_1\delta_x+b_1\delta_y+c_1\delta_z+v_1=\varepsilon_1;\\&a_2\delta_x+b_2\delta_y+c_2\delta_z+v_2=\varepsilon_2;\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&a_n\delta_x+b_n\delta_y+c_n\delta_z+v_n=\varepsilon_n\end{aligned}\right\} \tag{41,9}$$

и члены каждого уравнения умножим соответственно на $p_1\varepsilon_1$, $p_2\varepsilon_2$, . . ., $p_n\varepsilon_n$. Сложив результаты, получим

$$[pa\varepsilon]\,\delta_x+[pb\varepsilon]\,\delta_y+[pc\varepsilon]\,\delta_z+[pv\varepsilon]=[p\varepsilon\varepsilon]. \qquad (41,10)$$

На основании (39,14)

$$[pa\varepsilon]=[pb\varepsilon]=[pc\varepsilon]=0 \qquad (41,11)$$

Тогда

$$[pv\varepsilon]=[p\varepsilon\varepsilon]. \qquad (41,12)$$

Умножим теперь уравнения (41,9) соответственно на p_1v_1, p_2v_2, . . ., p_nv_n и сложим их:

$$[pav]\,\delta_x+[pbv]\,\delta_y+[pcv]\,\delta_z+[pvv]=[pv\varepsilon]. \qquad (41,13)$$

На основании (41,12) уравнение (41,13) может быть записано так:

$$[p\varepsilon\varepsilon]=[pav]\,\delta_x+[pbv]\,\delta_y+[pcv]\,\delta_z+[pvv]. \qquad (41,14)$$

Подставив в это уравнение последовательно значения δ_x, δ_y, δ_z из (40,4), получим

$$[p\varepsilon\varepsilon]=[pvv\cdot 3]. \qquad (41,15)$$

Полученное выражение (41,15) для любого числа искомых посредственных величин примет вид

$$[p\varepsilon\varepsilon]=[pvv\cdot k]=[pvs\cdot k]=[pss\cdot k]. \qquad (41,16)$$

Контролем вычисления поправок δ_x, δ_y, δ_z в схеме решения нормальных уравнений может служить выражение, полученное из (41,14) и (41,15),

$$[pvv\cdot 3]=[pvv]+[pav]\,\delta_x+[pbv]\,\delta_y+[pcv]\,\delta_z. \qquad (41,17)$$

Равенство (41,16) дает возможность осуществить заключительный контроль составления и решения нормальных уравнений.

Окончательным контролем уравнительных вычислений является выполнение равенств (39,1), которые должны выполняться при подстановке в них уравновешенных значений измеренных и посредственных величин.

§ 42. Весовые коэффициенты и их свойства

Даны три нормальных уравнения:

$$\begin{array}{l|c|c|c|l}
[paa]\,\delta_x+[pab]\,\delta_y+[pac]\,\delta_z+[pav]=0 & Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} & \\
[pab]\,\delta_x+[pbb]\,\delta_y+[pbc]\,\delta_z+[pbv]=0 & Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} & \quad (42,1)\\
[pac]\,\delta_x+[pbc]\,\delta_y+[pcc]\,\delta_z+[pcv]=0 & Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} &
\end{array}$$

Умножим эти уравнения соответственно на неопределенные множители Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} и произведения сложим, приведя подобные:

$$
\begin{aligned}
&([paa]\,Q_{11}+[pab]\,Q_{12}+[pac]\,Q_{13})\,\delta_x+\\
&+([pab]\,Q_{11}+[pbb]\,Q_{12}+[pbc]\,Q_{13})\,\delta_y+\\
&+([pac]\,Q_{11}+[pbc]\,Q_{12}+[pcc]\,Q_{13})\,\delta_z+\\
&+[pav]\,Q_{11}+[pbv]\,Q_{12}+[pcv]\,Q_{13}=0.
\end{aligned}
\tag{42,2}
$$

Систему неопределенных множителей Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} подберем так, чтобы

$$
\left.
\begin{aligned}
&[paa]\,Q_{11}+[pab]\,Q_{12}+[pac]\,Q_{13}=1;\\
&[pab]\,Q_{11}+[pbb]\,Q_{12}+[pbc]\,Q_{13}=0;\\
&[pac]\,Q_{11}+[pbc]\,Q_{12}+[pcc]\,Q_{13}=0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{42,3}
$$

Подставив их в равенство (42,2), будем иметь

$$\delta_x=-([pav]\,Q_{11}+[pbv]\,Q_{12}+[pcv]\,Q_{13}). \tag{42,4}$$

Для определения δ_y изложенным выше способом нормальные уравнения (42,1) умножим на неопределенные множители Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}. По аналогии с предыдущим получим

$$\delta_y=-([pav]\,Q_{21}+[pbv]\,Q_{22}+[pcv]\,Q_{23}). \tag{42,5}$$

Неопределенные множители Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} определяются из решения следующей системы уравнений:

$$
\left.
\begin{aligned}
&[paa]\,Q_{21}+[pab]\,Q_{22}+[pac]\,Q_{23}=0;\\
&[pab]\,Q_{21}+[pbb]\,Q_{22}+[pbc]\,Q_{23}=1;\\
&[pac]\,Q_{21}+[pbc]\,Q_{22}+[pcc]\,Q_{23}=0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{42,6}
$$

И, наконец, для определения δ_z нормальные уравнения (42,1) умножим на неопределенные множители Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}. Тогда

$$\delta_z=-([pav]\,Q_{31}+[pbv]\,Q_{32}+[pcv]\,Q_{33}), \tag{42,7}$$

Неопределенные множители Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} определим из решения следующей системы уравнений:

$$
\left.
\begin{aligned}
&[paa]\,Q_{31}+[pab]\,Q_{32}+[pac]\,Q_{33}=0;\\
&[pab]\,Q_{31}+[pbb]\,Q_{32}+[pbc]\,Q_{33}=0;\\
&[pac]\,Q_{31}+[pbc]\,Q_{32}+[pcc]\,Q_{33}=1.
\end{aligned}
\right\}
\tag{42,8}
$$

Системы (42, 3), (42, 6), (42, 8) называются **весовыми уравнениями**, а неопределенные множители Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{3i} $(i=1, 2, 3)$ называются **весовыми коэффициентами**.

Выразим неизвестные δ_x, δ_y, δ_z через непосредственно измеренные величины, для этого развернем уравнение (42,4)

$$\begin{aligned}\delta_x = &-(p_1a_1v_1+p_2a_2v_2+\ldots+p_na_nv_n)Q_{11}-\\ &-(p_1b_1v_1+p_2b_2v_2+\ldots+p_nb_nv_n)Q_{12}-\\ &-(p_1c_1v_1+p_2c_2v_2+\ldots+p_nc_nv_n)Q_{13}.\end{aligned} \tag{42,9}$$

Раскрыв скобки и группируя вокруг свободных членов, получим

$$\begin{aligned}\delta_x = &-(a_1Q_{11}+b_1Q_{12}+c_1Q_{13})p_1v_1-\\ &-(a_2Q_{11}+b_2Q_{12}+c_2Q_{13})p_2v_2-\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-(a_nQ_{11}+b_nQ_{12}+c_nQ_{13})p_nv_n.\end{aligned} \tag{42,10}$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=(a_1Q_{11}+b_1Q_{12}+c_1Q_{13})p_1;\\ \alpha_2&=(a_2Q_{11}+b_2Q_{12}+c_2Q_{13})p_2;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_n&=(a_nQ_{11}+b_nQ_{12}+c_nQ_{13})p_n,\end{aligned}\right\} \tag{42,11}$$

тогда уравнение (42,10) примет вид

$$\delta_x=-(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_nv_n). \tag{42,12}$$

Раскрыв равенства (42,5) и (42,7) и введя обозначения

$$\beta_i=(a_iQ_{21}+b_iQ_{22}+c_iQ_{23})p_i \quad (i=1, 2, 3, \ldots, n); \tag{42,13}$$

$$\gamma_i=(a_iQ_{31}+b_iQ_{32}+c_iQ_{33})p_i \quad (i=1, 2, 3, \ldots, n), \tag{42,14}$$

получим:

$$\delta_y=-(\beta_1v_1+\beta_2v_2+\ldots+\beta_nv_n); \tag{42,15}$$

$$\delta_z=-(\gamma_1v_1+\gamma_2v_2+\ldots+\gamma_nv_n). \tag{42,16}$$

Таким образом, поправки δ_x, δ_y и δ_z в (42,12), (42,15), (42,16) выражены через свободные члены v_i, которые, как это следует из (39,11), имеют те же средние квадратические ошибки, что и непосредственно измеренные величины l_i.

Установим некоторые свойства весовых коэффициентов и коэффициентов α, β, γ. Умножив каждое из уравнений (42,11) соответственно сначала на a_i, затем на b_i и c_i и сложив, получим:

$$\left.\begin{aligned}[a\alpha]&=[paa]Q_{11}+[pab]Q_{12}+[pac]Q_{13};\\ [b\alpha]&=[pab]Q_{11}+[pbb]Q_{12}+[pbc]Q_{13};\\ [c\alpha]&=[pac]Q_{11}+[pbc]Q_{12}+[pcc]Q_{13}.\end{aligned}\right\} \tag{42,17}$$

На основании уравнений системы (42,3) будем иметь

$$[a\alpha]=1, \quad [b\alpha]=0, \quad [c\alpha]=0. \tag{42,18}$$

Аналогичным образом умножим каждое из уравнений систем (42,13) и (42,14) соответственно сначала на a_i, затем на b_i и c_i, сложим, на основании уравнений (42,6) и (42,8) получим:

$$[a\beta]=0, \quad [b\beta]=1, \quad [c\beta]=0; \tag{42,19}$$

$$[a\gamma]=0, \quad [b\gamma]=0, \quad [c\gamma]=1. \tag{42,20}$$

Теперь уравнения (42,11) умножим соответственно на $\frac{\alpha_i}{p_i}$ и сложим

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]=[a\alpha]\,Q_{11}+[b\alpha]\,Q_{12}+[c\alpha]\,Q_{13}, \tag{42,21}$$

на основании (42,18) будем иметь

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]=Q_{11}. \tag{42,22}$$

Произведя аналогичные преобразования с уравнениями (42,11) при умножении на них соответственно $\frac{\beta_i}{p_i}$ и $\frac{\gamma_i}{p_i}$, на основании (42,19) и (42,20) получим:

$$\left[\frac{\beta\alpha}{p}\right]=Q_{12}; \tag{42,23}$$

$$\left[\frac{\gamma\alpha}{p}\right]=Q_{13}. \tag{42,24}$$

Умножив уравнения (43,13) соответственно сначала на $\frac{\alpha_i}{p_i}$, затем на $\frac{\beta_i}{p_i}$ и $\frac{\gamma_i}{p_i}$ и сложив, на основании (42,18), (42,19) и (42,20) будем иметь:

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]=Q_{21}; \tag{42,25}$$

$$\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]=Q_{22}; \tag{42,26}$$

$$\left[\frac{\gamma\beta}{p}\right]=Q_{23}. \tag{42,27}$$

Наконец, произведя аналогичные преобразования уравнений (42,14), получим:

$$\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right]=Q_{31}; \tag{42,28}$$

$$\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]=Q_{32}; \tag{42,29}$$

$$\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]=Q_{33}. \tag{42,30}$$

Сопоставляя выражения (42,23) и (42,25), (42,24) и (42,28), (42,27) и (42,29), приходим к выводу что:

$$Q_{12}=Q_{21}; \tag{42,31}$$

$$Q_{13}=Q_{31}; \tag{42,32}$$

$$Q_{23}=Q_{32}. \tag{42,33}$$

§ 43. Оценка точности непосредственных измерений

Для оценки точности непосредственно измеренных величин воспользуемся поправками ε.

Если в уравнениях поправок (39,12)

$$\varepsilon_i=a_i\delta_x+b_i\delta_Y+c_i\delta_Z+v_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n) \tag{43,1}$$

заменить δ_x, δ_y, δ_z их истинными значениями δ_X, δ_Y, δ_Z, получим уравнения, в левых частях которых будут истинные поправки к измеренным величинам. На основании (13,4) поправки равны ошибкам, но противоположны по знакам. Следовательно,

$$-\Delta_i=a_i\delta_X+b_i\delta_y+c_i\delta_z+v_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n). \tag{43,2}$$

Уравнения (43,1) умножим на $-\Delta_i$ и сложим:

$$-[\Delta\varepsilon]=-[a\Delta]\,\delta_x-[b\,\Delta]\,\delta_y-[c\,\Delta]\,\delta_z-[v\,\Delta]. \tag{43,3}$$

Умножив уравнения (43,2) на ε_i и сложив, получим

$$-[\Delta\,\varepsilon]=[a\varepsilon]\,\delta_X+[b\varepsilon]\,\delta_Y+[c\varepsilon]\,\delta_Z+[v\varepsilon]. \tag{43,4}$$

На основании (41,11) и (41,12) будем иметь

$$-[\Delta\varepsilon]=[v\varepsilon]=[\varepsilon\varepsilon], \tag{43,5}$$

откуда согласно равенству (43,3)

$$[\varepsilon\varepsilon]=-[a\,\Delta]\,\delta_x-[b\,\Delta]\,\delta_y-[c\,\Delta]\,\delta_z-[v\,\Delta]. \tag{43,6}$$

Умножим уравнения (43,2) на $-\Delta_i$ и сложим:

$$[\Delta\Delta]=-[a\Delta]\,\delta_X-[b\Delta]\,\delta_Y-[c\Delta]\,\delta_Z-[v\Delta]. \tag{43,7}$$

Вычтем из уравнения (43,7) уравнение (43,6)

$$[\Delta\Delta]-[\varepsilon\varepsilon]=[a\Delta]\left(\delta_x-\delta_X\right)+[b\Delta]\left(\delta_y-\delta_Y\right)+[c\Delta]\left(\delta_z-\delta_Z\right). \tag{43,8}$$

Умножим уравнения (43,2) на α_i и сложим:

$$-[\alpha\Delta]=[a\alpha]\,\delta_X+[b\alpha]\,\delta_Y+[c\alpha]\,\delta_Z+[v\alpha]. \tag{43,9}$$

Поскольку $[a\alpha]=1$, $[b\alpha]=0$, $[c\alpha]=0$, $[v\alpha]=-\delta_x$, то, заменив ими члены в (43,9), придем к равенству

$$-[\alpha\Delta]=\delta_X-\delta_x. \tag{43,10}$$

Из аналогичных преобразований, умножив последовательно уравнения (43,2) на β_i и γ_i, получим:

$$-[\beta\Delta] = \delta_Y - \delta_y; \tag{43,11}$$

$$-[\delta\Delta] = \delta_Z - \delta_z. \tag{43,12}$$

Подставим полученные выражения в формулу (43,8)

$$[\Delta\Delta] - [\varepsilon\varepsilon] = [a\Delta]\,[\alpha\Delta] + [b\Delta]\,[\beta\Delta] + [c\Delta]\,[\gamma\Delta]. \tag{43,13}$$

Определим средние значения членов, входящих в правую часть равенства (43,13), для этого развернем их:

$$\begin{aligned}[a\Delta]\,[\alpha\Delta] &= (a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + \ldots + a_n\Delta_n)(\alpha_1\Delta_1 + \alpha_2\Delta_2 + \ldots + \alpha_n\Delta_n) = \\ &= (a_1\alpha_1\Delta_1^2 + a_2\alpha_2\Delta_2^2 + \ldots + a_n\alpha_n\Delta_n^2) + (a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1)\,\Delta_1\Delta_2 + \\ &\quad + (a_1\alpha_3 + a_3\alpha_1)\,\Delta_1\Delta_3 + \ldots\end{aligned} \tag{43,14}$$

Среднее значение Δ_i^2 равно m, а среднее значение $\Delta_i\Delta_j$ стремится к нулю. Тогда

$$[a\Delta]\,[\alpha\Delta] = a_1\alpha_1 m^2 + a_2\alpha_2 m^2 + \ldots + a_n\alpha_n m^2 \tag{43,15}$$

или

$$[a\Delta]\,[\alpha\Delta] = [a\alpha]\,m^2 = m^2, \tag{43,16}$$

так как на основании (42,18) $[a\alpha] = 1$.

Аналогично, раскрыв второй и третий члены в правой части равенства (43,13), будем иметь:

$$[b\Delta]\,[\beta\Delta] = [b\beta]\,m^2 = m^2; \tag{43,17}$$

$$[c\Delta]\,[\gamma\Delta] = [c\gamma]\,m^2 = m^2. \tag{43,18}$$

Подставив значения (43,16), (43,17) и (43,18) в (43,13) и заменив $[\Delta\Delta] = m^2 n$, получим

$$m^2 n - m^2 - m^2 - m^2 = [\varepsilon\varepsilon] \tag{43,19}$$

или

$$m^2(n-3) = [\varepsilon\varepsilon]. \tag{43,20}$$

В общем случае, когда требуется определить k посредственных величин, формула (43,20) будет иметь вид

$$m^2(n-k) = [\varepsilon\varepsilon], \tag{43,21}$$

откуда

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-k}}. \tag{43,22}$$

Для неравноточных измерений ошибка единицы веса вычисляется по формуле

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n-k}}. \tag{43,23}$$

§ 44. Определение средней квадратической ошибки и веса функции уравновешенных величин по весовым коэффициентам

Если по уравновешенным значениям посредственных величин вычислено значение некоторой функции

$$U = F(X, Y, Z), \tag{44,1}$$

то для определения ее средней квадратической ошибки необходимо знать ошибку единицы веса μ и величину, обратную весу функции $\frac{1}{p_U}$. Тогда согласно формуле (23,18) будем иметь

$$M_U = \mu \sqrt{\frac{1}{p_U}}. \tag{44,2}$$

Выразим аргументы функции (44,1) через приближенные их значения (x, y, z) и поправки δ_x, δ_y, δ_z. Тогда можем переписать ее в следующем виде:

$$U = F(x + \delta_x,\ y + \delta_y,\ z + \delta_z). \tag{44,3}$$

Для удобства приведем эту функцию к линейному виду, разложив ее в ряд Тейлора, ограничиваясь членами с поправками в первых степенях,

$$U = F(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta_y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta_z. \tag{44,4}$$

Введем обозначения:

$$F(x, y, z) = F_0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f_2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f_3. \tag{44,5}$$

Тогда получим

$$U = F_0 + f_1\delta_x + f_2\delta_y + f_3\delta_z. \tag{44,6}$$

Частные производные весовой функции f_1, f_2, f_3 называются **коэффициентами весовой функции.**

Заменим δ_x, δ_y, δ_z в формуле (44,6) их выражением через v_1, $v_2, \ldots, v_n$ из уравнений (42,12), (42,15) и (42,16):

$$\begin{aligned} U = F_0 &- f_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) - \\ &- f_2(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n) - \\ &- f_3(\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n). \end{aligned} \tag{44,7}$$

Раскрывая скобки в уравнении (44,7) и группируя вокруг v_1, $v_2, \ldots, v_n$, получаем

$$\begin{aligned} U = F_0 &- (f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1)\, v_1 - \\ &- (f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2)\, v_2 - \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- (f_1\alpha_n + f_2\beta_n + f_3\gamma_n)\, v_n. \end{aligned} \tag{44,8}$$

Из теории ошибок известна формула обратной величины веса функции (23,16)

$$\frac{1}{p_U}=\left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2\frac{1}{p_1}+\left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2\frac{1}{p_2}+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial l_n}\right)^2\frac{1}{p_n}, \qquad (44,9)$$

или для равноточных измерений при $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$

$$\frac{1}{p_U}=\left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial l_n}\right)^2. \qquad (44,10)$$

Найдем частные производные функции (44,8) по переменным l_i:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial l_1}&=\frac{\partial F}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial l_1}=-(f_1\alpha_1+f_2\beta_1+f_3\gamma_1);\\
\frac{\partial F}{\partial l_2}&=\frac{\partial F}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial l_2}=-(f_1\alpha_2+f_2\beta_2+f_3\gamma_2);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial F}{\partial l_n}&=\frac{\partial F}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial l_n}=-(f_1\alpha_n+f_2\beta_n+f_3\gamma_n).
\end{aligned}\right\} \qquad (44,11)$$

Эти равенства справедливы, так как на основании (39,11) $\frac{\partial v_i}{\partial l_i} = 1$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$. Тогда обратная величина веса функции будет равна

$$\frac{1}{p_U}=\left[\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2}{p}\right]=(f_1\alpha_1+f_2\beta_1+f_3\gamma_1)^2\frac{1}{p_1}+$$

$$+(f_1\alpha_2+f_2\beta_2+f_3\gamma_2)^2\frac{1}{p_2}+\ldots+(f_1\alpha_n+f_2\beta_n+f_3\gamma_n)^2\frac{1}{p_n}. \qquad (44,12)$$

Раскрыв скобки в правой части выражения (44,12) и приведя подобные, получим формулу

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_U}=\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]f_1f_1+2\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]f_1f_2+2\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right]f_1f_3&+\\
+\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]f_2f_2+2\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]f_2f_3&+\\
+\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]f_3f_3&. \qquad (44,13)\end{aligned}$$

На основании соотношений (42,22), (42,23), (42,24), (42,26), (42,27), (42,30) запишем окончательный вид формулы величины, обратной весу функции, выраженной через весовые коэффициенты,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_U}=f_1f_1Q_{11}+2f_1f_2Q_{12}+2f_1f_3Q_{13}&+\\
+f_2f_2Q_{22}+2f_2f_3Q_{23}&+\\
+f_3f_3Q_{33}&. \qquad (44,14)\end{aligned}$$

§ 45. Вывод преобразованной формулы веса функции уравновешенных величин

Применение формулы (44,14) для вычисления величины, обратной весу функции (44,1), затруднительно в связи с тем, что она требует дополнительного определения весовых коэффициентов Q. Поэтому приведем ее к более удобному виду. Запишем

$$\frac{1}{p_U} = f_1 f_1 Q_{11} + f_1 f_2 Q_{12} + f_1 f_3 Q_{13} + \\ + f_1 f_2 Q_{21} + f_2 f_2 Q_{22} + f_2 f_3 Q_{23} + \\ + f_1 f_3 Q_{31} + f_2 f_3 Q_{32} + f_3 f_3 Q_{33} \qquad (45,1)$$

или, группируя члены вокруг f_i, получим

$$\frac{1}{p_U} = (f_1 Q_{11} + f_2 Q_{12} + f_3 Q_{13}) f_1 + \\ + (f_1 Q_{21} + f_2 Q_{22} + f_3 Q_{23}) f_2 + \\ + (f_1 Q_{31} + f_2 Q_{32} + f_3 Q_{33}) f_3. \qquad (45,2)$$

Выражения в скобках уравнения (45,2) обозначим

$$\begin{array}{l|c|c|c|} q_1 = f_1 Q_{11} + f_2 Q_{12} + f_3 Q_{13} & [paa] & [pab] & [pac] \\ q_2 = f_1 Q_{21} + f_2 Q_{22} + f_3 Q_{23} & [pab] & [pbb] & [pbc] \\ q_3 = f_1 Q_{31} + f_2 Q_{32} + f_3 Q_{33} & [pac] & [pbc] & [pcc] \end{array} \qquad (45,3)$$

и назовем эти величины **переходными коэффициентами**.

Тогда

$$\frac{1}{p_U} = q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3. \qquad (45,4)$$

Уравнения (45,3) умножим соответственно на коэффициенты $[paa]$, $[pab]$, $[pac]$ и сложим:

$$[paa] q_1 + [pab] q_2 + [pac] q_3 = ([paa] Q_{11} + [pab] Q_{12} + [pac] Q_{13}) f_1 + \\ + ([paa] Q_{21} + [pab] Q_{22} + [pac] Q_{23}) f_2 + \\ + ([paa] Q_{31} + [pab] Q_{32} + [pac] Q_{33}) f_3. \qquad (45,5)$$

На основании систем уравнений (42,3), (42,6), (42,8) получим

$$[paa] q_1 + [pab] q_2 + [pac] q_3 - f_1 = 0. \qquad (45,6)$$

Из аналогичных преобразований уравнений системы (45,3), при умножении их последовательно на коэффициенты $[pab]$, $[pbb]$, $[pbc]$, а затем на $[pac]$, $[pbc]$ и $[pcc]$, будем иметь:

$$[pab] q_1 + [pbb] q_2 + [pbc] q_3 - f_2 = 0; \qquad (45,7)$$

$$[pac] q_1 + [pbc] q_2 + [pcc] q_3 - f_3 = 0. \qquad (45,8)$$

Для системы уравнений (45,6), (45,7), (45,8) легко составить элиминационные уравнения:

$$q_1 = -\frac{[pab]}{[paa]} q_2 - \frac{[pac]}{[paa]} q_3 + \frac{f_1}{[paa]}; \tag{45,9}$$

$$q_2 = -\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} q_3 + \frac{[f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}; \tag{45,10}$$

$$q_3 = \frac{[f_3 \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}. \tag{45,11}$$

Подставим в уравнение (45,4) значение q_1 из (45,9)

$$\frac{1}{p_U} = \frac{f_1^2}{[paa]} + \left(f_2 - \frac{[pab] f_1}{[paa]}\right) q_2 + \left(f_3 - \frac{[pac] f_1}{[paa]}\right) q_3. \tag{45,12}$$

Заменив выражения в скобках соответственно алгорифмами

$$f_2 - \frac{[pab] f_1}{[paa]} = [f_2 \cdot 1] \text{ и } f_3 - \frac{[pac] f_1}{[paa]} = [f_3 \cdot 1],$$

получим

$$\frac{1}{p_U} = \frac{f_1^2}{[paa]} + [f_2 \cdot 1] q_2 + [f_3 \cdot 1] q_3. \tag{45,13}$$

В уравнение (45,13) подставим значение q_2 из (45,10)

$$\frac{1}{p_U} = \frac{f_1^2}{[paa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + \left([f_3 \cdot 1] - \frac{[pbc \cdot 1][f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}\right) q_3. \tag{45,14}$$

Заменив выражение в скобках алгорифмом

$$[f_3 \cdot 1] - \frac{[pbc \cdot 1][f_2 \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} = [f_3 \cdot 2],$$

получим

$$\frac{1}{p_U} = \frac{f_1^2}{[paa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + [f_3 \cdot 2] q_3. \tag{45,15}$$

В это уравнение подставим значение q_3 из (45,11)

$$\frac{1}{p_U} = \frac{f_1^2}{[paa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[pcc \cdot 2]}. \tag{45,16}$$

Это и есть формула для определения величины, обратной весу функции (44,1).

Ее не трудно распространить для любого числа k неизвестных

$$\frac{1}{p_U} = \frac{f_1^2}{[paa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[pcc \cdot 2]} + \ldots + \frac{[f_k (k-1)]^2}{[pgg\,(k-1)]}. \tag{45,17}$$

В том случае, если непосредственные измерения произведены равноточно, их веса будут равны

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1,$$

тогда формула величины, обратной весу функции (45,17), примет вид

$$\frac{1}{p_U}=\frac{f_1^2}{[aa]}+\frac{[f_2\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{[f_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}+\ldots+\frac{[f_k(k-1)]^2}{[gg\,[k-1)]}. \quad (45,18)$$

Формулы (45,17) и (45,18) дают возможность сравнительно просто определить величину, обратную весу функции, попутно с решением нормальных уравнений в схеме Гаусса — Дулитля. Для этого рядом с колонкой v помещают колонку f (см. табл. 32), в первой строчке первой ступеньки которой ставят f_1, в первой строчке второй ступеньки f_2 и т. д. Производя с этими числами те же действия, что и в остальных колонках, получим все члены уравнения (45,17) или (45,18), сумма которых и даст величину, обратную весу функции.

§ 46. Определение весов и средних квадратических ошибок уравновешенных посредственных величин

Средние квадратические ошибки уравновешенных посредственных величин X, Y, Z при неравноточных измерениях определяются по формулам

$$M_X=\frac{\mu}{\sqrt{p_X}},\quad M_Y=\frac{\mu}{\sqrt{p_Y}},\quad M_Z=\frac{\mu}{\sqrt{p_Z}}. \quad (46,1)$$

Чтобы определить по этим формулам средние квадратические ошибки уравновешенных величин, необходимо знать веса p_X, p_Y, p_Z. Для их определения составим весовые функции

$$\left.\begin{aligned} U_1&=X;\\ U_2&=Y;\\ U_3&=Z; \end{aligned}\right\} \quad (46,2)$$

Определим коэффициенты весовых функций:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial X}=f_1=1, && \frac{\partial U_1}{\partial Y}=f_2=0, && \frac{\partial U_1}{\partial Z}=f_3=0;\\ &\frac{\partial U_2}{\partial X}=f_1=0, && \frac{\partial U_2}{\partial Y}=f_2=1, && \frac{\partial U_2}{\partial Z}=f_3=0;\\ &\frac{\partial U_3}{\partial X}=f_1=0, && \frac{\partial U_3}{\partial Y}=f_2=0, && \frac{\partial U_3}{\partial Z}=f_3=1. \end{aligned}\right\} \quad (46,3)$$

На основании формулы (44,45) получим:

$$p_X=\frac{1}{Q_{11}}, \quad (46,4)$$

$$p_Y=\frac{1}{Q_{22}}; \quad (46,5)$$

$$p_Z=\frac{1}{Q_{33}}. \quad (46,6)$$

Для системы весовых уравнений (42,8) составим преобразованную систему

$$\left.\begin{aligned}[paa]\,Q_{31}+[pab]\,Q_{32}+[pac]\,Q_{33}&=0;\\ [pbb\cdot 1]\,Q_{32}+[pbc\cdot 1]\,Q_{33}&=0;\\ [pcc\cdot 2]\,Q_{33}&=1,\end{aligned}\right\} \tag{46,7}$$

отсюда

$$Q_{33}=\frac{1}{[pcc\cdot 2]} \tag{46,8}$$

и на основании (42,33) из второго уравнения системы (46,7) получим

$$Q_{32}=Q_{23}=-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]\,[pcc\cdot 2]}. \tag{46,9}$$

Для определения Q_{22} возьмем систему весовых уравнений (42,6) и запишем их в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}[paa]\,Q_{21}+[pac]\,Q_{23}+[pab]\,Q_{22}&=0;\\ [pac]\,Q_{21}+[pcc]\,Q_{23}+[pbc]\,Q_{22}&=0;\\ [pab]\,Q_{21}+[pbc]\,Q_{23}+[pbb]\,Q_{22}&=1.\end{aligned}\right\}. \tag{46,10}$$

Первая преобразованная система для уравнений (46,10) будет равна

$$\left.\begin{aligned}[pcc\cdot 1]\,Q_{23}+[pbc\cdot 1]\,Q_{22}&=0;\\ [pbc\cdot 1]\,Q_{23}+[pbb\cdot 1]\,Q_{22}&=1.\end{aligned}\right\} \tag{46,11}$$

Из первого уравнения этой системы

$$Q_{22}=-\frac{[pcc\cdot 1]}{[pbc\cdot 1]}\,Q_{23}. \tag{46,12}$$

Подставив сюда значение Q_{23} из (46,9), будем иметь

$$Q_{22}=\frac{[pcc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]\,[pcc\cdot 2]}. \tag{46,13}$$

И, наконец, Q_{11} может быть определено из системы весовых уравнений (42,3)

$$Q_{11}=-\frac{[pab]}{[paa]}\,Q_{12}-\frac{[pac]}{[paa]}\,Q_{13}+\frac{1}{[paa]}. \tag{46,14}$$

Значение Q_{12} найдется из второго элиминационного уравнения этой же системы весовых уравнений

$$Q_{12}=-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\,Q_{13}. \tag{46,15}$$

Весовой коэффициент Q_{13} может быть найден из первого элиминационного уравнения системы (42,8)

$$Q_{13}=Q_{31}=-\frac{[pab]}{[paa]}\,Q_{32}-\frac{[pac]}{[paa]}\,Q_{33}. \tag{46,16}$$

Значение Q_{32} определится из (46,9).

Таким образом, веса уравновешенных величин будут равны:

$$p_X = \frac{1}{\frac{1}{[paa]} - \frac{[pab]}{[paa]} Q_{12} - \frac{[pac]}{[paa]} Q_{13}}; \tag{46,17}$$

$$p_Y = \frac{[pbb \cdot 1]}{[pcc \cdot 1]} [pcc \cdot 2] = \frac{[pbb \cdot 1]}{[pcc \cdot 1]} p_Z; \tag{46,18}$$

$$p_Z = [pcc \cdot 2]. \tag{46,19}$$

Из произведенного анализа видно, что веса последнего p_Z и предпоследнего p_Y неизвестного определяются сравнительно просто, попутно из решения нормальных уравнений в схеме Гаусса—Дулитля. Так, вес последнего неизвестного p_Z определится непосредственно в колонке δ_z четвертой строчке третьей ступеньки (см. табл. 32). Вес предпоследнего неизвестного p_Y также легко определится из величин, взятых непосредственно в схеме решения нормальных уравнений.

Определение весов остальных неизвестных этим путем сопряжено с довольно громоздкими вычислениями, что видно по определению p_X, для которого необходимо знать Q_{11}. Поэтому для определения весов целесообразно воспользоваться формулой (45,17), вычисляя ее в соответствующей колонке схемы решения нормальных уравнений.

§ 47. Примеры на составление уравнений поправок и уравновешивание посредственных измерений

Пример 1. Составить уравнения поправок при уравновешивании углов на станции, измеренных во всех комбинациях.

На точке A между направлениями B, C, D, E (рис. 14) измерены углы во всех комбинациях $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_6$. Необходимо определить уравновешенные значения направлений X, Y, Z.

Так как число всех измеренных углов равно шести, а число искомых посредственных величин равно трем, то возникает задача уравновешивания.

Уравновешенные значения $\gamma_1^\circ, \gamma_2^\circ, \ldots, \gamma_6^\circ$ измеренных углов и искомые направления X, Y, Z связаны следующими зависимостями:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1^\circ &= X; \\
\gamma_2^\circ &= -X+Y; \\
\gamma_3^\circ &= \quad\;\; -Y+Z; \\
\gamma_4^\circ &= \quad\;\; Y; \\
\gamma_5^\circ &= -X \quad\;\; +Z; \\
\gamma_6^\circ &= \quad\;\;\;\; Z.
\end{aligned}\right\} \tag{47,1}$$

Примем за приближенные значения искомых величин x, y, z соответствующие им измеренные углы

$$x = \gamma_1,\ y = \gamma_4,\ z = \gamma_6. \tag{47,2}$$

В уравнениях (41,1) уравновешенные значения величин заменим их измеренными и приближенными значениями с соответствующими поправками:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1+\varepsilon_1 &= \gamma_1+\delta_x;\\
\gamma_2+\varepsilon_2 &= -\gamma_1-\delta_x+\gamma_4+\delta_y.\\
\gamma_3+\varepsilon_3 &= -\gamma_4-\delta_y+\gamma_6+\delta_z;\\
\gamma_4+\varepsilon_4 &= \gamma_4+\delta_y.\\
\gamma_5+\varepsilon_5 &= -\gamma_1-\delta_x+\gamma_6+\delta_z;\\
\gamma_6+\varepsilon_6 &= \gamma_6+\delta_z.
\end{aligned}\right\}\qquad(47,3)$$

Приведя подобные члены в уравнениях (47,3), получим

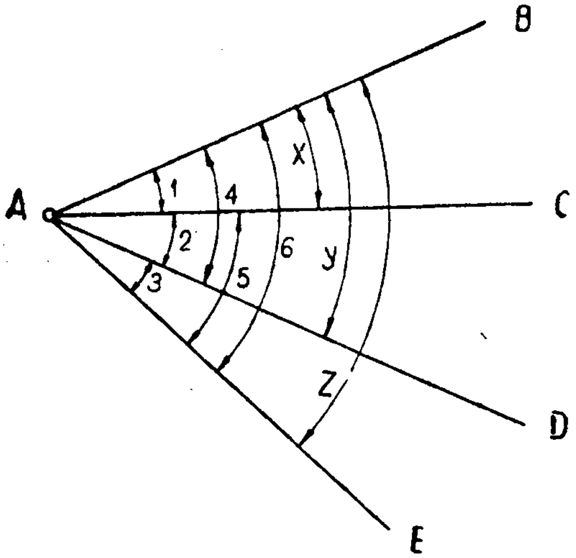


Рис. 14

$$\left.\begin{aligned}
\delta_x &= \varepsilon_1;\\
-\delta_x+\delta_y+v_2 &= \varepsilon_2;\\
-\delta_y+\delta_z+v_3 &= \varepsilon_3;\\
\delta_y &= \varepsilon_4;\\
-\delta_x+\delta_z+v_5 &= \varepsilon_5;\\
\delta_z &= \varepsilon_6
\end{aligned}\right\}\qquad(47,4)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
v_2 &= \gamma_4-\gamma_2-\gamma_1;\\
v_3 &= \gamma_6-\gamma_3-\gamma_4;\\
v_5 &= \gamma_6-\gamma_5-\gamma_1.
\end{aligned}\right\}\qquad(47,5)$$

Нормальные уравнения, составленные для системы уравнений поправок (47,4), будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
3\delta_x-\delta_y-\delta_z-(v_2+v_5) &= 0;\\
-\delta_x+3\delta_y-\delta_z-(v_3-v_2) &= 0;\\
-\delta_x-\delta_y+3\delta_z+(v_3+v_5) &= 0.
\end{aligned}\right\}\qquad(47,6)$$

Решив нормальные уравнения (47,6), получим

$$\delta_x=\frac{v_2+v_5}{4},\quad \delta_y=\frac{v_3-v_2}{4},\quad \delta_z=-\frac{v_3+v_5}{4}.\qquad(47,7)$$

Пример 2. Уравновешивание системы нивелирных ходов методом посредственных измерений.

Пусть для определения отметок реперов A и B от исходных реперов I, II, III, IV пройдено пять нивелирных ходов (рис. 15), в которых определены превышения $h_1, h_2, \ldots, h_5$. Длины ходов соответственно равны $l_1, l_2, \ldots, l_5$.

Для решения данной задачи — определения абсолютных отметок реперов Z_A и Z_B достаточно двух ходов. Тогда в связи с наличием избыточных измерений возникает задача на уравновешивание.

Обозначим уравновешенные значения отметок реперов A и B соответственно Z_A и Z_B, а их приближенные значения z_A и z_B примем равными

$$z_A=Z_{\mathrm{I}}+h_1,\quad z_B=Z_{\mathrm{III}}+h_3.\qquad(47,8)$$

Тогда уравнения поправок будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
h_1+\varepsilon_1&=z_A+\delta_{zA}-Z_{\mathrm{I}};\\
h_2+\varepsilon_2&=z_A+\delta_{zA}-Z_{\mathrm{II}};\\
h_3+\varepsilon_3&=z_B+\delta_{zB}-Z_{\mathrm{III}};\\
h_4+\varepsilon_4&=z_B+\delta_{zB}-Z_{\mathrm{IV}};\\
h_5+\varepsilon_5&=z_B+\delta_{zB}-z_A-\delta_{zA}.
\end{aligned}\right\} \qquad (47{,}9)$$

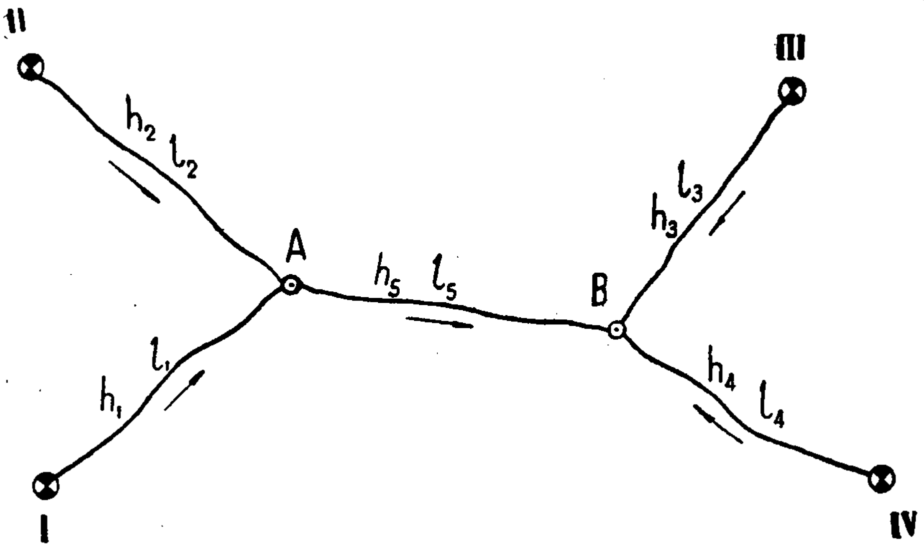


Рис. 15

Из этих уравнений получим:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{zA}\qquad\qquad +v_1&=\varepsilon_1, & p_1&=\frac{1}{l_1};\\
\delta_{zA}\qquad\qquad +v_2&=\varepsilon_2, & p_2&=\frac{1}{l_2};\\
\delta_{zB}+v_3&=\varepsilon_3, & p_3&=\frac{1}{l_3};\\
\delta_{zB}+v_4&=\varepsilon_4, & p_4&=\frac{1}{l_4};\\
-\delta_{zA}+\delta_{zB}+v_5&=\varepsilon_5, & p_5&=\frac{1}{l_5};
\end{aligned}\right\} \qquad (47{,}10)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
v_1&=z_A-Z_{\mathrm{I}}-h_1;\\
v_2&=z_A-Z_{\mathrm{II}}-h_2;\\
v_3&=z_B-Z_{\mathrm{III}}-h_3;\\
v_4&=z_B-Z_{\mathrm{IV}}-h_4;\\
v_5&=z_B-z_A-h_5.
\end{aligned}\right\} \qquad (47{,}11)$$

Для системы уравнений поправок (47,10) с учетом весов составляют нормальные уравнения, из решения которых определяют поправки δ_{zA} и δ_{zB}.

§ 48. Применение способа наименьших квадратов при обработке результатов эксперимента

В результате экспериментов зависимость между двумя величинами X и Y на практике чаще всего проявляется не в виде аналитического выражения, а в виде таблицы чисел, в которой для определенных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одной величины, называемой **аргументом**, задаются соответствующие значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ другой величины, называемой **функцией**.

В маркшейдерской практике аналогичная ситуация встречается весьма часто. Например, по данным геологической разведки горно-геометрические показатели (мощность, содержание, зольность) оказываются известными только в отдельных точках плана месторождения; оседание земной поверхности под влиянием подземных разработок измеряется только в отдельных точках мульды сдвижения и т. п. Вместе с тем, для решения практических и исследовательских задач необходимо уметь находить значения величины y для любого значения величины x, находящегося в пределах между $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вычисление при некотором x величины y по известным ее значениям $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называется интерполированием.

Рассмотрим два основных случая интерполирования. Первый случай, когда известен точно вид аналитического выражения зависимости между X и Y или же на основании теоретических выводов установлено, что зависимость между X и Y выражается некоторой функцией. Однако знание только вида функции еще не дает полного решения задачи, так как функция будет содержать неизвестные параметры, определяемые условиями эксперимента и сущностью явления.

В общем случае задача математически ставится так: для функции

$$Y = f(X, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k), \tag{48,1}$$

содержащей неизвестные параметры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, известны ее значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при значениях аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определить неизвестные параметры λ.

Подставив в уравнение (48,1) соответствующие значения x_i и y_i, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f(x_1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k); \\ y_2 &= f(x_2, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f(x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k). \end{aligned}\right\} \tag{48,2}$$

Если k — число неизвестных параметров равно n — числу заданных значений функции, то система уравнений (48,2) может иметь только одно решение, имеющее физический смысл.

Из-за того, что значения y_i определяются с некоторой ошибкой, и с целью получения надежных значений параметров λ всегда берут

n значительно большим, чем k. В этом случае возникает задача уравновешивания, которая решается совершенно так же, как было рассмотрено выше в § 39.

Неизвестные параметры λ определяются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений ε

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= f(x_1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) - y_1 \\ \varepsilon_2 &= f(x_2, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) - y_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n &= f(x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) - y_n\end{aligned}\right\}, \tag{48,3}$$

была минимальна, т. е.

$$[\varepsilon\varepsilon] = \min,$$

если значения y_i равноточны.

Для упрощения вычислений функция (48,1) приводится к линейному виду разложением в ряд Тейлора вокруг приближенных значений параметров λ или же каким-либо другим способом.

Среднее квадратическое отклонение m_ε, вычисляемое по формуле

$$m_\varepsilon = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-k}}, \tag{48,4}$$

определяет не только точность измеренных значений величины y, но и степень близости функции (48,1) к действительной функции, выражающей зависимость между X и Y. Разделить эти два фактора в величине m_ε практически невозможно. Однако, несмотря на вышесказанное, величина m_ε в какой-то мере характеризует точность определения y из уравнения (48,1) при значениях параметров λ, вычисленных по способу наименьших квадратов.

Во втором случае интерполирования вид функции (48,1) считается неизвестным или же он очень сложен для вычислений. В этих условиях задача интерполирования решается неоднозначно. Один из приемов решения поставленной задачи по способу наименьших квадратов заключается в следующем. Функциональная зависимость (48,1) представляется уравнением

$$Y = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_k\varphi_k(x), \tag{48,5}$$

где $c_0, \quad c_1, \quad \ldots, c_k$ — постоянные параметры, подлежащие определению;

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ — заранее выбранные функции, принадлежащие определенному классу.

Функции $\varphi_i(x)$ выбираются таким образом, что при увеличении числа слагаемых в уравнении (48,5) выражаемая им функциональная зависимость приближается к функции (48,1) и в пределе с ней совпадает.

В том случае, когда за $\varphi_i(x)$ выбирают целые рациональные функции — полиномы степени i от x, интерполирование называют

параболическим. В простейшем случае параболического интерполирования принимают

$$\varphi_i(x)=x^i \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{48,6}$$

Рассмотрим теорию определения по способу наименьших квадратов коэффициентов c_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$) в уравнении (48,5).

Пусть для значений аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ известны соответствующие значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Подставим в уравнение (48,5) значения x_i и y_i, в результате получим систему n уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} y_1=c_0\varphi_0(x_1)+c_1\varphi_1(x_1)+\ \ldots\ +c_k\varphi_k(x_1);\\ y_2=c_0\varphi_0(x_2)+c_1\varphi_1(x_2)+\ \ldots\ +c_k\varphi_k(x_2);\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ y_n=c_0\varphi_0(x_n)+c_1\varphi_1(x_n)+\ \ldots\ +c_k\varphi_k(x_n). \end{array}\right\} \tag{48,7}$$

Если $k = n$, то система (48,7) имеет единственное решение. Если $k < n$, то неизвестные $c_0, c_1, \ldots, c_k$ определяют по способу наименьших квадратов, чтобы сумма квадратов отклонений ε

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1=c_0\varphi_0(x_1)+c_0\varphi_0(x_1)+\ \ldots\ +c_k\varphi_k(x_1)-y_1;\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \varepsilon_n=c_0\varphi_0(x_n)+c_1\varphi_1(x_n)+\ \ldots\ +c_k\varphi_k(x_n)-y_n \end{array}\right\} \tag{48,8}$$

была равна минимуму

$$[\varepsilon\varepsilon]=\min.$$

Для системы (48,8) нормальные уравнения будут иметь вид:

$$\left.\begin{array}{l} [\varphi_0\varphi_0[\ c_0+[\varphi_0\varphi_1]\,c_1+\ \ldots\ +[\varphi_0\varphi_k]\,c_k-[\varphi_0 y]=0;\\ [\varphi_0\varphi_1]\,c_0+[\varphi_1\varphi_1]\,c_1+\ \ldots\ +[\varphi_1\varphi_k]\,c_k-[\varphi_1 y]=0;\\ \cdot\\ [\varphi_0\varphi_k]\,c_0+[\varphi_1\varphi_k]\,c_1+\ \ldots\ +[\varphi_k\varphi_k]\,c_k-[\varphi_k y]=0. \end{array}\right\} \tag{48,9}$$

Система нормальных уравнений (48,9) решается в схеме Гаусса, и найденные коэффициенты подставляют в уравнение (48,5), по которому теперь можно вычислить значение y при любом x.

Точность вычисления y по формуле (48,5) зависит от вида функции (48,1), числа членов в правой части уравнения (48,5) и точности определения y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Число членов в уравнении (48,5) следует согласовать с видом функции (48,1) и точностью определения y_i, поэтому увеличение числа k разумно только до определенных пределов.

Выше везде предполагалось, что значения y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) равноточны. Следует помнить, что использование весов значений y_i не будет в данном случае столь оправданным и рациональным, как при уравновешивании измерений, поэтому следует всегда стремиться иметь значения y_i равноточными.

Рассмотрим два конкретных примера применения способа наименьших квадратов при обработке результатов эксперимента.

Пример 1. По разностям двойных измерений длин в подземной полигонометрии для различных интервалов расстояний определены средние квадратические ошибки m_i измерения длины стальной рулеткой. Полученные значения m_i в каждом интервале отнесены к длине, равной среднему арифметическому из всех использованных длин l для этого интервала, считается, что все значения m_i равноточны. Из общих соображений можно предположить, что средняя квадратическая ошибка m является следующей функцией длины l:

$$m=b+a\sqrt{l}, \tag{48,10}$$

где a — коэффициент, выражающий влияние случайных ошибок измерений;
b — коэффициент, выражающий влияние систематических ошибок измерений.

Для отыскания неизвестных параметров a и b по результатам эксперимента воспользуемся приведенной выше теорией интерполирования по способу наименьших квадратов. В нашем случае будем иметь

$$\varphi_0=1,\quad \varphi_1=\sqrt{l}\quad \text{и}\quad y_i=m_i. \tag{48,11}$$

Все необходимые вычисления приведены в табл. 33.

Таблица 33

№ группы	Интервал группы, *м*	Средняя длина l, *м*	Средняя квадратическая ошибка m, *мм*	$\varphi_0=1$	$\varphi_1=\sqrt{l_i}$	$-y_i=-m_i$	s
1	0—5	3,2	1,2	1	1,79	—1,2	1,59
2	5—10	7,4	1,1	1	2,72	—1,1	2,62
3	10—15	12,5	1,4	1	3,54	—1,4	3,14
4	15—20	17,4	1,6	1	4,17	—1,6	3,57
5	20—25	22,1	1,6	1	4,70	—1,6	4,10
6	25—30	27,4	3,3	1	5,24	—3,3	2,94
7	30—35	33,0	5,2	1	5,74	—5,2	1,54
8	35—40	37,6	4,5	1	6,13	—4,5	2,63
9	40—45	42,3	6,9	1	6,50	—6,9	0,60
10	45 и более	58,2	4,5	1	7,63	—4,5	4,13

$$[\varphi_0\varphi_0]=10{,}00,$$
$$[\varphi_0\varphi_1]=48{,}16,\quad [\varphi_1\varphi_1]=261{,}06,$$
$$-[\varphi_0 y]=-31{,}30,\quad -[\varphi_1 y]=-178{,}20,\quad [yy]=135{,}77,$$
$$[\varphi_0 s]=26{,}86,\quad [\varphi_1 s]=131{,}02,\quad -[ys]=-73{,}73.$$

В результате получаем систему двух нормальных уравнений с неизвестными a и b:

$$\left.\begin{aligned} 10b+48{,}16a-31{,}30=0;\\ 48{,}16b+261{,}06a-178{,}20=0.\end{aligned}\right\} \tag{48,12}$$

Решение этой системы нормальных уравнений приведено в табл. 34.

Таблица 34

b	a	$[y\ldots]$	s
10,00 −1 $b=-1{,}411$	48,16 −4,816 −4,541	−31,30 +3,130 +3,130	26,86 −2,686
	261,06 −231,939 29,121 −1 $a=0{,}943$	−178,20 150,741 −27,459 0,943	131,02 −129,358 1,662 −0,057
		135,77 −97,97 −25,89 11,91	−73,73 84,07 1,57 11,91

Чтобы по формуле (48,10) получать значение m в метрах, коэффициенты a и b, полученные в табл. 34 и равные $a = 0{,}94$ и $b = -1{,}4$, следует разделить на 10^3, т. е.

$$a = 0{,}00094; \quad b = -0{,}0014. \tag{48,13}$$

Для оценки надежности функции

$$m = 0{,}00094\sqrt{l} - 0{,}0014 \tag{48,14}$$

вычислим значение m_ε по формуле (48,4)

$$m_\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{11{,}91}{8}} = \pm 1{,}2\ мм. \tag{48,15}$$

Полученное значение $m_\varepsilon = \pm 1{,}2$ *мм* указывает на недостаточную надежность определения значений m_i.

Пример 2.* При учете добычи по числу вагонеток и среднему весу угля в них важно знать, насколько из-за транспортировки уплотнился уголь в вагонетке по сравнению со свеженасыпанным углем.

В результате экспериментов было получено восемь пар числовых значений относительного уплотнения $\frac{\Delta v}{v}$ и соответствующих расстояний транспортирования l, связанных между собой следующей зависимостью:

$$\frac{\Delta v}{v} = \lambda\sqrt[\eta]{l}, \tag{48,16}$$

где λ и η неизвестные постоянные параметры.

---

* Данные для примера заимствованы из диссертации В. М. Буц на тему «Исследование способов учета добычи на пологих пластах каменного угля в условиях Буденовского комплекса Донецкого бассейна», г. Днепропетровск, 1955.

Это выражение входит в формулу для вычисления коэффициента $K_{уп}$ уплотнения угля при транспортировании в шахтных вагонетках по рудничным выработкам.

$$K_{уп}=1-\frac{\Delta v}{v}=1-\lambda\sqrt[\eta]{l}. \tag{48,17}$$

Для определения параметров λ и η приведем логарифмированием уравнение (48,16) к линейному виду

$$\lg\frac{\Delta v}{v}=\lg\lambda+\frac{1}{\eta}\lg l. \tag{48,18}$$

Обозначив

$$x=\lg\lambda \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{\eta}, \tag{48,19}$$

из уравнения (48,18) получим систему уравнений, аналогичных уравнениям поправок,

$$\varepsilon_1=x+y\lg l_i-\lg\left(\frac{\Delta v}{v}\right)_i \quad (i=1, 2, \ldots, 8). \tag{48,20}$$

В уравнениях (48,20) коэффициенты перед неизвестным x равны $a_i=1$, а коэффициенты перед неизвестным y равны $b_i=\lg l_i$ (табл. 35).

Таблица 35

№ п/п	$\frac{\Delta v}{v}$	Расстояние l, км	Коэффициенты a	Коэффициенты b	$-y_i=-\lg\left(\frac{\Delta v}{v}\right)_i$	s
1	0,130	2,34	1	0,369	+0,886	2,255
2	0,108	1,95	1	0,290	+0,967	2,257
3	0,100	1,20	1	0,079	+1,000	2,079
4	0,098	1,04	1	0,017	+1,051	2,068
5	0,114	1,11	1	0,045	+0,943	1,988
6	0,108	1,23	1	0,090	+0,967	2,057
7	0,105	1,47	1	0,167	+0,979	2,146
8	0,113	2,22	1	0,346	+0,947	2,293

$$[aa]=8,$$
$$[ab]=1,403, \qquad [bb]=0,385,$$
$$-[ay]=7,740, \qquad -[by]=1,325,$$
$$[as]=17,143, \qquad [bs]=3,113.$$

По вычисленным коэффициентам и свободным членам составлены нормальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 8x+1,403y+7,740&=0;\\ 1,403x+0,385y+1,325&=0. \end{aligned}\right\} \tag{48,21}$$

Из решения этой системы нормальных уравнений в схеме Гаусса (табл. 36) определим x и y.

По найденным значениям x и y в соответствии с формулами (48,19), получим

$$\lambda=0,098, \quad \eta=4,4\approx 4.$$

Таким образом, коэффициент уплотнения по формуле (48,17) будет равен

$$K_{уп}=1-0,098\sqrt[4]{l}. \tag{48,22}$$

Таблица 36

x	y	$-[y \ldots]$	s
8,000 —1 $x=-1{,}008$	1,403 —0,17538 —0,040	7,740 —0,96750 —0,968	17,143 —2,14288
	0,385 —0,246 0,139 —1 $y=0{,}230$	1,325 —1,357 —0,032 0,230	3,113 —3,007 0,106 —0,763

Глава VII

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ УРАВНОВЕШИВАНИЯ ПОСРЕДСТВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ К ЗАДАЧАМ НА ВСТАВКУ ТОЧЕК В ТРИАНГУЛЯЦИОННУЮ СЕТЬ

§ 49. Вывод дифференциальной формулы вычисления поправки в дирекционный угол

В маркшейдерской практике часто возникает задача вставки новых точек в существующую триангуляционную сеть. Вследствие большой застроенности горнопромышленных районов и по ряду других соображений приходится вставлять не одну точку, а совместно две и более точек, что приводит к сложным заполняющим сетям.

При уравновешивании заполняющих сетей методом условных измерений обычно возникает большое число условных уравнений, что приводит к необходимости решения большого числа нормальных уравнений. При уравновешивании тех же систем методом посредственных измерений, число нормальных уравнений будет значительно меньше. Поэтому заполняющие сети удобнее уравнивать методом посредственных измерений, в котором определяются поправки к приближенным значениям координат вставляемых точек под условием минимума суммы квадратов поправок к измеренным направлениям.

В дальнейшем будем предполагать, что на пунктах триангуляции непосредственно измерены не углы, а направления.

Рассмотрим способ вычисления поправок в дирекционный угол направления, если координаты конечных точек этого направления получат небольшие приращения.

Пусть дано некоторое направление, уравновешенное положение которого определяется точками *1—2*, а приближенное положение этого направления определяется точками *1′—2′* (рис. 16).

Обозначим:

$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2$ — приближенные значения координат точек $1'$ и $2'$ в метрах;

$\delta_{x_1},\ \delta_{y_1},\ \delta_{x_2},\ \delta_{y_2}$ — поправки к приближенным значениям координат точек $1'$ и $2'$ в метрах;

α°_{1-2} — уравновешенный дирекционный угол направления $1-2$;

α_{1-2} — приближенный дирекционный угол направления $1'-2'$;

$(\alpha_{1-2})''$ — поправка к приближенному значению дирекционного угла α_{1-2};

S_{1-2} — длина линии между точками $1'-2'$ в метрах.

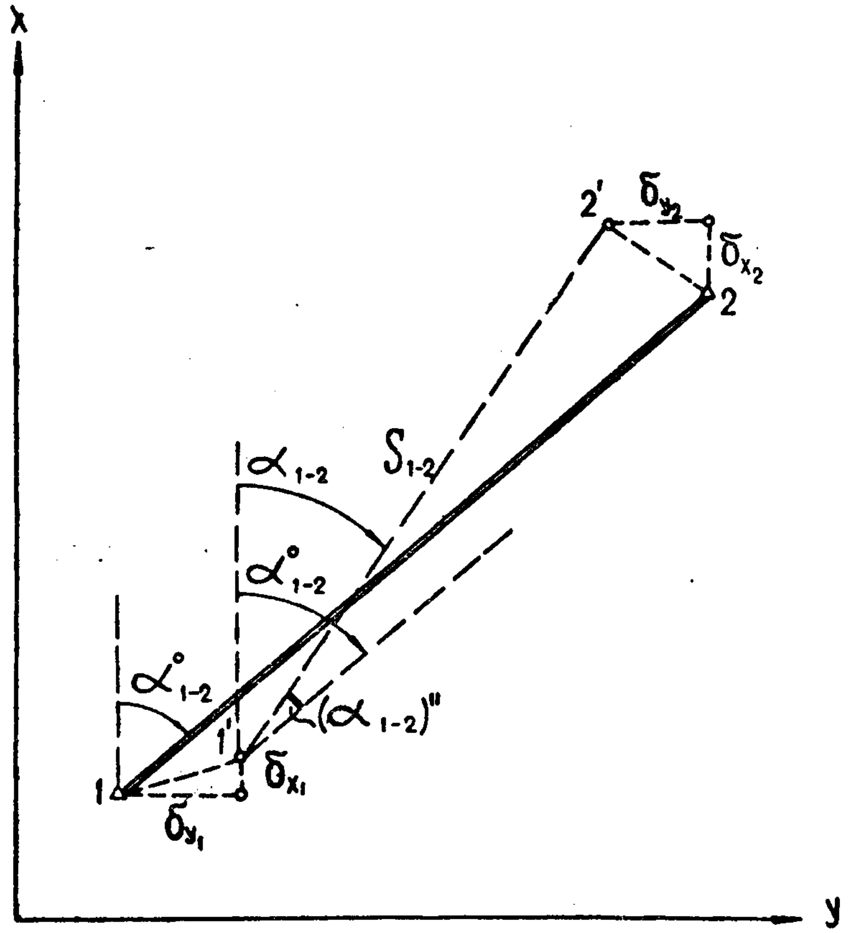


Рис. 16

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \delta_{x_1}, \quad Y_1 = y_1 + \delta_{y_1}; \\ X_2 &= x_2 + \delta_{x_2}, \quad Y_2 = y_2 + \delta_{y_2}, \end{aligned}\right\} \tag{49,1}$$

$$\alpha^{\circ}_{1-2} = \alpha_{1-2} + (\alpha_{1-2})''. \tag{49,2}$$

Воспользуемся известной формулой тангенса дирекционного угла данного направления, выраженного координатами его конечных точек,

$$\operatorname{tg} \alpha_{1-2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{49,3}$$

Определим зависимость между поправкой в дирекционный угол $(\alpha_{1-2})''$ и поправками координат δ_{x_1}, δ_{y_1}, δ_{x_2}, δ_{y_2}. Для этого возьмем полный дифференциал уравнения (49,3), считая координаты переменными величинами,

$$\frac{d\alpha_{1-2}}{\cos^2\alpha_{1-2}}=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2}dx_1-\frac{1}{(x_2-x_1)}d_{y_1}-\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2}dx_2+\frac{1}{(x_2-x_1)}d_{y_2}. \tag{49,4}$$

Умножив левую и правую части уравнения (49,4) на $\cos^2\alpha_{1-2}$ и заменив разности координат приращениями

$$\left.\begin{aligned} y_2-y_1&=S_{1-2}\sin\alpha_{1-2};\\ x_2-x_1&=S_{1-2}\cos\alpha_{1-2},\end{aligned}\right\} \tag{49,5}$$

получим

$$d\alpha_{1-2}=\frac{\sin\alpha_{1-2}}{S_{1-2}}dx_1-\frac{\cos\alpha_{1-2}}{S_{1-2}}dy_1-\frac{\sin\alpha_{1-2}}{S_{1-2}}dx_2+\frac{\cos\alpha_{1-2}}{S_{1-2}}dy_2. \tag{49,6}$$

В формуле (49,6) дифференциалы заменим по малости величин соответствующими приращениями (поправками), выражая поправку в дирекционный угол в секундах,

$$d\alpha_{1-2}=\frac{d\alpha''_{1-2}}{\rho''}=\frac{(\alpha_{1-2})''}{\rho''},$$

тогда

$$(\alpha_{1-2})''=\frac{\rho''\sin\alpha_{1-2}}{S_{1-2}}\delta x_1-\frac{\rho''\cos\alpha_{1-2}}{S_{1-2}}\delta y_1-\frac{\rho''\sin\alpha_{1-2}}{S_{1-2}}\delta x_2+\frac{\rho''\cos\alpha_{1-2}}{S_{1-2}}\delta y_2. \tag{49,7}$$

Для упрощения дальнейших вычислений в уравнении (49,7) числитель и знаменатель каждого члена в правой части разделим на 10 000:

$$\begin{aligned}(\alpha_{1-2})''=&\frac{20{,}6265\sin\alpha_{1-2}}{\frac{S_{1-2}}{1000}}\cdot\frac{\delta x_1}{\frac{1}{10}}-\frac{20{,}6265\cos\alpha_{1-2}}{\frac{S_{1-2}}{1000}}\frac{\delta_{y_1}}{\frac{1}{10}}-\\ &-\frac{20{,}6265\sin\alpha_{1-2}}{\frac{S_{1-2}}{1000}}\frac{\delta_{x_1}}{\frac{1}{10}}+\frac{20{,}6265\cos\alpha_{1-2}}{\frac{S_{1-2}}{1000}}\frac{\delta_{y_2}}{\frac{1}{10}}.\end{aligned} \tag{49,8}$$

Введем обозначения:

$$20{,}6265\sin\alpha_{1-2}=(a_{1-2}),\quad \frac{(a_{1-2})}{S_{1-2\,(км)}}=a_{1-2}; \tag{49,9}$$

$$-20{,}6265\cos\alpha_{1-2}=(b_{1-2}),\quad \frac{(b_{1-2})}{S_{1-2\,(км)}}=b_{1-2}; \tag{49,10}$$

$$\frac{S_{1-2}}{1000}=S_{1-2\,(км)},\quad 10\delta_x=\xi,\quad 10\delta_y=\eta, \tag{49,11}$$

В соответствии с принятыми обозначениями следует помнить: во-первых, что (a) имеет знак, соответствующий знаку синуса дирекционного угла, (b) имеет знак, обратный знаку косинуса дирекционного угла данного направления; во-вторых, что $\frac{S_{(м)}}{1000}$ есть длина линии, выраженная в километрах, а $10 \cdot \delta_x$ и $10 \cdot \delta_y$ — есть выражение поправок координат точек в дециметрах.

Подставив принятые обозначения в формулу (49,8), получим

$$(\alpha_{1-2})'' = a_{1-2}\xi_1 + b_{1-2}\eta_1 - a_{1-2}\xi_2 - b_{1-2}\eta_2. \qquad (49,12)$$

Коэффициенты a_{1-2} и b_{1-2} численно равны изменениям дирекционного угла α_{1-2}, выраженным в секундах и вызванным перемещением точки *1* на один дециметр вдоль положительного направления координатных осей X и Y.

Очевидно, аналогичное уравнение может быть составлено для поправки в дирекционный угол любого измеренного направления, различными будут только индексы у членов уравнения (49,12). Так, для направления *1 — i* оно будет иметь вид

$$(\alpha_{1-i})'' = a_{1-i}\xi_1 + b_{1-i}\eta_1 - a_{1-i}\xi_i - b_{1-i}\eta_i. \qquad (49,13)$$

В маркшейдерской практике коэффициенты a и b достаточно вычислять с точностью до единицы второго знака после запятой, для этого длина стороны S должна быть определена с точностью до метра.

§ 50. Составление уравнений поправок для направлений в триангуляции

Пусть на некоторой станции *1* (рис. 17) измерен ряд направлений N_{1-2}, N_{1-3}, . . ., N_{1-K}. Обозначим поправки к ним ε_{1-2}, ε_{1-3}, . . ., ε_{1-K}. Пусть приближенные дирекционные углы измеренных направлений α_{1-2}, α_{1-3}, . . ., α_{1-K}, а поправки к ним $(\alpha_{1-2})''$, $(\alpha_{1-3})''$, . . ., $(\alpha_{1-K})''$, тогда уравновешенные значения дирекционных углов направлений будут равны

$$\alpha^\circ = \alpha + (\alpha)''. \qquad (50,1)$$

Через Z_1 обозначим приближенный ориентирный угол (дирекционный угол начального направления на данной станции), т. е. угол, при помощи которого пучок измеренных на станции направлений ориентируется на плоскости, а через (Z_1) — поправку к нему.

Уравновешенное значение дирекционного угла направления *1 —i* (рис. 17) можно представить в виде

$$\alpha_{1-i} + (\alpha_{1-i})'' = N_{1-i} + \varepsilon_{1-i} + Z_1 + (Z_1). \qquad (50,2)$$

В выражение (50,2) подставим значение поправки в дирекционный угол $(\alpha_{1-i})''$ из уравнения (49,13)

$$-(Z_1) + a_{1-i}\xi_1 + b_{1-i}\eta_1 - a_{1-i}\xi_i - b_{1-i}\eta_i + \alpha_{1-i} - Z_1 - N_{1-i} = \varepsilon_{1-i}. \qquad (50,3)$$

Из рис. 17 видно, что разность $\alpha_{1-i} - Z_1$ является приближенным значением направления $1 - i$. Тогда величина $(\alpha_{1-i} - Z_1) - N_{1-i}$ представляет собой разность между приближенным значением направления и измеренным его значением, что на основании (39,11) является свободным членом уравнения поправок, который обозначим v_{1-i}.

Обозначим сумму $Z_1 + N_{1-i}$ буквой R_{1-i} и назовем ее приближенно ориентированным направлением, т. е.

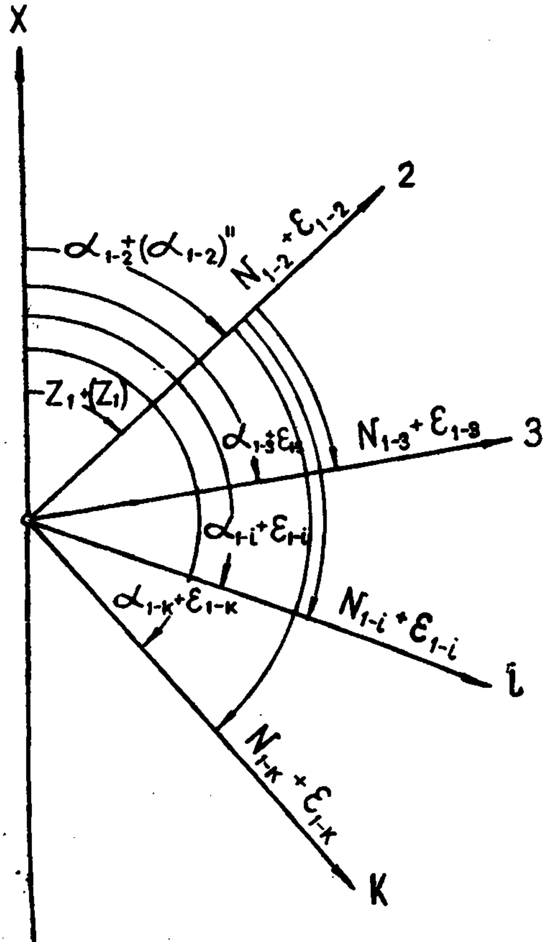


Рис. 17

$$R_{1-i} = Z_1 + N_{1-i}, \tag{50,4}$$

тогда свободный член v_{1-i} будет равен

$$v_{1-i} = \alpha_{1-i} - R_{1-i}, \tag{50,5}$$

а уравнение (50,3) примет вид

$$-(Z_1) + a_{1-i}\xi_1 + b_{1-i}\eta_1 - a_{1-i}\xi_i - b_{1-i}\eta_i + v_{1-i} = \varepsilon_{1-i}. \tag{50,6}$$

Это и есть уравнение поправок для измеренного направления в триангуляции.

Итак, для составления уравнения поправок необходимо определить его коэффициенты a и b и свободный член v.

Как уже было установлено ранее в § 49, коэффициенты a и b вычисляются по формулам (49,9) и (49,10). Для упрощения определения коэффициентов a и b составлена таблица значений (a) и (b) по формулам

$$(a) = 20{,}6265 \sin r, \quad (b) = 20{,}6265 \cos r,$$

где r — табличный угол (см. приложение 1).

Знаки коэффициентов a и b определяются по дирекционному углу направления, причем коэффициент a имеет знак, соответствующий знаку синуса дирекционного угла, а b имеет знак, обратный знаку косинуса дирекционного угла. Для проверки знаков можно воспользоваться табл. 37.

Чтобы проконтролировать вычисление коэффициентов a и b, возведем их в квадрат и сложим

$$a^2 + b^2 = \frac{\rho^2 \sin^2 \alpha}{S^2} + \frac{\rho^2 \cos^2 \alpha}{S^2},$$

откуда

$$a^2 + b^2 = \frac{\rho^2}{S^2}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{(20{,}6265)^2}{S^2_{(км)}} = \frac{425{,}45}{S^2_{(км)}} = A. \tag{50,7}$$

Таблица 37

Значение дирекционного угла α	Знаки коэффициентов	
	a	b
0—90°	+	—
90°—180°	+	+
180°—270°	—	+
270°—360°	—	—

Значения A приведены в приложении II. Следует иметь в виду, что соотношение (50,7) не контролирует знаков коэффициентов a и b.

Для определения свободного члена v необходимо вычислить приближенное значение ориентирного угла Z. Для случая, изображенного на рис. 17, Z_1 может быть вычислено k раз:

$$\left.\begin{aligned} Z_1' &= \alpha_{1-2} - N_{1-2}; \\ Z_1'' &= \alpha_{1-3} - N_{1-3}; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ Z_1^{(K)} &= \alpha_{1-K} - N_{1-K} \end{aligned}\right\} \qquad (50,8)$$

$$[Z]_1 = [\alpha - N]_1$$

Тогда среднее значение ориентирного угла

$$Z_{1\text{ср}} = \frac{[Z]_1}{k} = \frac{[\alpha - N]}{k}. \qquad (50,9)$$

Свободные члены соответствующих направлений могут быть определены:

$$\left.\begin{aligned} v_{1-2} &= \alpha_{1-2} - R_{1-2} = \alpha_{1-2} - N_{1-2} - Z_{1\text{ср}}; \\ v_{1-3} &= \alpha_{1-3} - R_{1-3} = \alpha_{1-3} - N_{1-3} - Z_{1\text{ср}}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{1-K} &= \alpha_{1-K} - R_{1-K} = \alpha_{1-K} - N_{1-K} - Z_{1\text{ср}}; \end{aligned}\right\} \qquad (50,10)$$

$$[v]_1 = [\alpha - R]_1 = [\alpha - N]_1 - Z_{1\text{ср}} k. \qquad (50,11)$$

Подставив в полученное уравнение (50,11) значение $Z_{1\text{ср}}$, из (50,9), будем иметь

$$[v]_1 = [\alpha - N]_1 - \frac{[\alpha - N]_1}{K} k \qquad (50,12)$$

или

$$[v]_1 = 0. \qquad (50,13)$$

Таким образом, сумма свободных членов уравнений поправок на данной станции должна быть равна нулю. Это и является контролем вычисления свободных членов.

Следует иметь в виду, что уравнения поправок (50,6) должны быть составлены для каждого измеренного в уравниваемой сети направления, включая и направления, измеренные на твердых пунктах.

Таким образом, число уравнений поправок будет равно числу измеренных в данной сети направлений.

При составлении уравнений поправок следует различать четыре случая:

1. Если начальная *1* и конечная *i* точки измеренного направления вставляемые, то уравнение поправок для направления *1 — i* в соответствии с (50,6) будет иметь вид

$$-(Z_1)+a_{1-i}\xi_1+b_{1-i}\eta_1-a_{1-i}\xi_i-b_{1-i}\eta_i+v_{1-i}=\varepsilon_{1-i}. \qquad (50,14)$$

2. Если начальная точка *1* измеренного направления вставляемая, а конечная точка *i* этого направления жесткая, то

$$-(Z_1)+a_{1-i}\xi_1+b_{1-i}\eta_1+v_{1-i}=\varepsilon_{1-i}. \qquad (50,15)$$

Такой вид уравнения поправок обусловлен тем, что поправки в координаты жесткой точки *i* равны нулю:

$$\xi_i=0, \quad \eta_i=0.$$

3. Если начальная точка *1* измеренного направления жесткая, а конечная точка *i* вставляемая, то

$$-(Z_1)-a_{1-i}\xi_i-b_{1-i}\eta_i+v_{1-i}=\varepsilon_{1-i}, \qquad (50,16)$$

так как $\xi_1=0$ и $\eta_1=0$.

4. Если начальная *1* и конечная *i* точки измеренного направления жесткие, то

$$-(Z_1)+v_{1-i}=\varepsilon_{1-i}, \qquad (50,17)$$

так как

$$\xi_1=0, \quad \eta_1=0, \quad \xi_i=0, \quad \eta_i=0.$$

§ 51. Преобразование уравнений поправок и составление нормальных уравнений

Составив уравнения поправок для всех измеренных направлений, от них необходимо перейти к нормальным уравнениям. Число нормальных уравнений в этом случае будет определяться числом искомых поправок к приближенным значениям плоских координат вставляемых пунктов плюс число поправок (Z) к приближенным ориентирным углам всех станций, на которых измерялись направления.

Если число вставляемых пунктов равно t, а число пунктов, на которых измерялись направления, равно j, то общее число нормальных уравнений

$$q = 2t + j. \tag{51,1}$$

Однако на практике при решении подобных систем уравнений поправок всегда ограничиваются системой нормальных уравнений с числом их, равным $2t$, в которой неизвестными являются поправки ξ и η к приближенным значениям плоских координат вставляемых пунктов.

Указанное упрощение достигается применением к системе уравнений поправок с общим неизвестным (Z) специального правила их преобразования.

Пусть для измеренных k направлений на некотором вставляемом пункте *1* составлено k начальных уравнений*:

$$\left.\begin{array}{l} -(Z_1) + a_{1-2}\xi_1 + b_{1-2}\eta_1 + v_{1-2} = \varepsilon_{1-2}; \\ -(Z_1) + a_{1-3}\xi_1 + b_{1-3}\eta_1 + v_{1-3} = \varepsilon_{1-3}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -(Z_1) + a_{1-K}\xi_1 + b_{1-K}\eta_1 + v_{1-K} = \varepsilon_{1-K}. \end{array}\right\} \text{Всего } k \text{ направлений} \tag{51,2}$$

Для данной системы начальных уравнений составим нормальные уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} k(Z_1) - [a]\ \xi_1 - [b]\ \eta_1 - [v] = 0; \\ -[a](Z_1) + [aa]\xi_1 + [ab]\eta_1 + [av] = 0; \\ -[b](Z_1) + [ab]\xi_1 + [bb]\eta_1 + [bv] = 0. \end{array}\right\} \tag{51,3}$$

Из первого уравнения этой системы определим (Z_1) помня, что на основании (50,13) $[v] = 0$:

$$(Z_1) = \frac{[a]}{k}\xi_1 + \frac{[b]}{k}\eta_1. \tag{51,4}$$

Подставим полученное значение (Z_1) из (51,4) во второе и третье уравнения системы (51,3), получим:

$$\left.\begin{array}{l} \left([aa] - \frac{[a][a]}{k}\right)\xi_1 + \left([ab] - \frac{[a][b]}{k}\right)\eta_1 + [av] = 0; \\ \left([ab] - \frac{[a][b]}{k}\right)\xi_1 + \left([bb] - \frac{[b][b]}{k}\right)\eta_1 + [bv] = 0. \end{array}\right\} \tag{51,5}$$

Система (51,5) представляет собой преобразованные нормальные уравнения, составленные для уравнений поправок (51,2).

Заменим теперь систему уравнений (51,2) некоторой новой системой, у которой k уравнений получаются путем исключения общего

---

* Для простоты дальнейшего вывода конечные точки взятых направлений считаются жесткими, что соответствует вставке одной точки в сеть высшего класса.

неизвестного (Z_1) из системы (51,2) а $k+1$ уравнение будет равно сумме k уравнений с весом $-\frac{1}{k}$, при равноточных измерениях:

$$\left.\begin{aligned} a_{1-2}\xi_1+b_{1-2}\eta_1+v_{1-2}&=\varepsilon'_{1-2}, & p_1&=1;\\ a_{1-3}\xi_1+b_{1-3}\eta_1+v_{1-3}&=\varepsilon'_{1-3}, & p_2&=1;\\ a_{1-K}\xi_1+b_{1-K}\eta_1+v_{1-K}&=\varepsilon'_{1-K}, & p_k&=1; \end{aligned}\right\} k \text{ уравнений} \qquad (51,6)$$

$$[a]\,\xi_1+[b]\,\eta_1+[v]=[\varepsilon'],\qquad p_{k+1}=-\frac{1}{k}\Big\}\ k+1 \text{ уравнение}$$

Для этой системы составим нормальные уравнения, учитывая, что $[v]=0$:

$$\left.\begin{aligned} \left([aa]-\frac{[a]\,[a]}{k}\right)\xi_1+\left([ab]-\frac{[a]\,[b]}{k}\right)\eta_1+[av]&=0;\\ \left([ab]-\frac{[a]\,[b]}{k}\right)\xi_1+\left([bb]-\frac{[b]\,[b]}{k}\right)\eta_1+[bv]&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (51,7)$$

Сопоставляя системы нормальных уравнений (51,5) и (51,7), видим полную их тождественность. Таким образом, система преобразованных уравнений поправок (51,6) эквивалентна системе уравнений поправок (51,2).

Если направления измерялись на нескольких пунктах, то уравнения поправок вида (51,2), составленные на каждой станции, заменяются эквивалентными системами вида (51,6). Совокупность этих систем составит новую систему преобразованных уравнений поправок, по которой с учетом принятых весов отдельных уравнений составляются нормальные уравнения.

Решение нормальных уравнений ведется в схеме Гаусса — Дулитля. В результате произведенных вычислений определяются поправки к приближенным координатам вставляемых точек ξ и η. Тогда уравновешенные координаты будут равны

$$X=x+\delta_x\,(м),\qquad Y=y+\delta_y\,(м), \qquad (51,8)$$

где

$$\delta_x\,(м)=\frac{1}{10}\,\xi\,(дм),\qquad \delta_y\,(м)=\frac{1}{10}\,\eta\,(дм). \qquad (51,9)$$

Поправка (Z_1) в ориентирный угол на данной станции определится из уравнения (51,4)

$$(Z_1)=\frac{[a]\,\xi_1+[b]\,\eta_1}{k}. \qquad (51,10)$$

Поправки ε_i в измеренные направления будут вычисляться по уравнениям поправок, составленным для каждого измеренного направления,

$$\varepsilon_{1-i}=-(Z_1)+a_{1-i}\xi_1+b_{1-i}\eta_1-a_{1-i}\xi_i-b_{1-i}\eta_i+v_{1-i}. \qquad (51,11)$$

Уравновешенные значения дирекционных углов вычислятся на основании (50,2) по формуле

$$\alpha^0_{1-i} = R_{1-i} + (Z_1) + \varepsilon_{1-i}. \tag{51,12}$$

§ 52. Оценка точности при вставке точек в триангуляционную сеть

Средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения, при вставке точки в твердую триангуляционную сеть, когда уравновешивание производится по измеренным направлениям, может быть вычислена по формуле (43,23)

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-k}}.$$

В соответствии с принятыми ранее обозначениями число искомых посредственных величин определится из (51,1)

$$q = 2t + j.$$

Тогда средняя квадратическая ошибка может быть вычислена по формуле

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-q}}, \tag{52,1}$$

а при неравноточных измерениях по формуле

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n-q}}, \tag{52,2}$$

где n — число всех измеренных направлений;
t — число вставляемых пунктов;
j — число станций, на которых измерялись направления.

Оценка точности уравновешенных величин сводится к определению средних квадратических ошибок координат вставляемых пунктов:

$$M_X = \frac{\mu}{\sqrt{p_X}}, \quad M_Y = \frac{\mu}{\sqrt{p_Y}}. \tag{52,3}$$

При вставке одного пункта в триангуляционную сеть будем иметь два нормальных уравнения, составленных для преобразованных уравнений поправок. Следовательно, на основании (46,18) и (46,19) веса уравновешенных координат вставляемого пункта будут равны

$$p_X = \frac{[paa]}{[pbb]}[pbb\cdot 1], \quad p_Y = [pbb\cdot 1], \tag{52,4}$$

где a и b являются коэффициентами преобразованных уравнений поправок (51,6). Подставив их в выражения средних квадратических ошибок (52,3), получим:

$$M_Y^2 = \frac{\mu^2}{[pbb\cdot 1]} = \frac{\mu^2[paa]}{[paa][pbb]-[pab]^2}; \tag{52,5}$$

$$M_X^2 = \frac{\mu^2[pbb]}{[paa][pbb\cdot 1]} = \frac{\mu^2[pbb]}{[paa][pbb]-[pab]^2}, \tag{52,6}$$

где $[paa]\,[pbb] - [pab]^2 = D$ — является определителем нормальных уравнений, составленным по преобразованным уравнениям поправок при вставке одной точки, тогда:

$$M_Y^2 = \frac{[paa]}{D}\,\mu^2; \qquad (52,7)$$

$$M_X^2 = \frac{[pbb]}{D}\,\mu^2. \qquad (52,8)$$

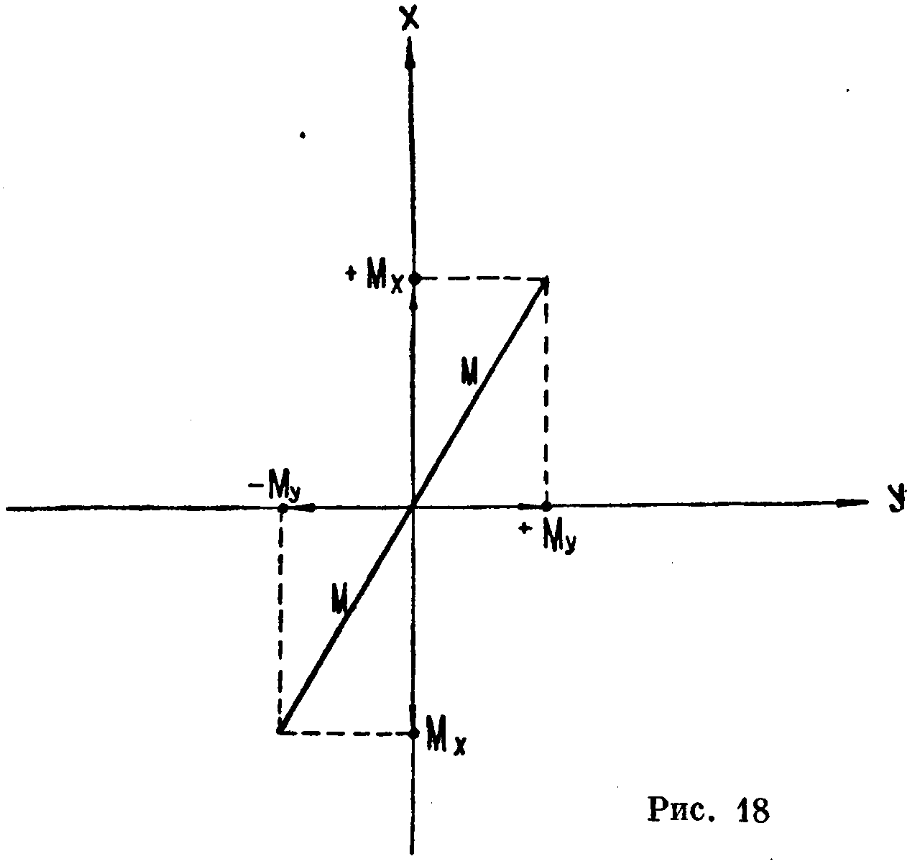


Рис. 18

M_X и M_Y характеризуют ошибки положения вставляемого пункта по направлениям существующих осей координат (рис. 18). Величина M, вычисляемая по формуле

$$M^2 = M_Y^2 + M_X^2, \qquad (52,9)$$

характеризует линейное смещение вставляемой точки и называется **средней ошибкой положения вставляемого пункта.**

Подставив в (52,9) вместо M_X^2 и M_Y^2 их значения из (52,7) и (52,8), получим

$$M^2 = \frac{[paa]+[pbb]}{D}\,\mu^2. \qquad (52,10)$$

Так как средняя квадратическая ошибка определения положения вставляемого пункта не одинакова по различным направлениям, очевидно, на плоскости существуют направления, по которым следует ожидать наибольшего и наименьшего смещения точки.

Поставим перед собой задачу отыскания этих смещений. Прежде всего найдем на плоскости направления, средние смещения точек по которым являются наибольшими и наименьшими. Примем новую условную систему координат X' и Y', повернутую по направлению движения часовой стрелки относительно существующей системы X и Y на некоторый угол Θ (рис. 19).

Из аналитической геометрии известно, что

$$\left.\begin{aligned} X' &= X\cos\Theta + Y\sin\Theta; \\ Y' &= Y\cos\Theta - X\sin\Theta, \end{aligned}\right\} \tag{52,11}$$

где X и Y — уравновешенные значения координат некоторой точки в существующей системе;

X' и Y' — уравновешенные значения координат той же точки в условной системе.

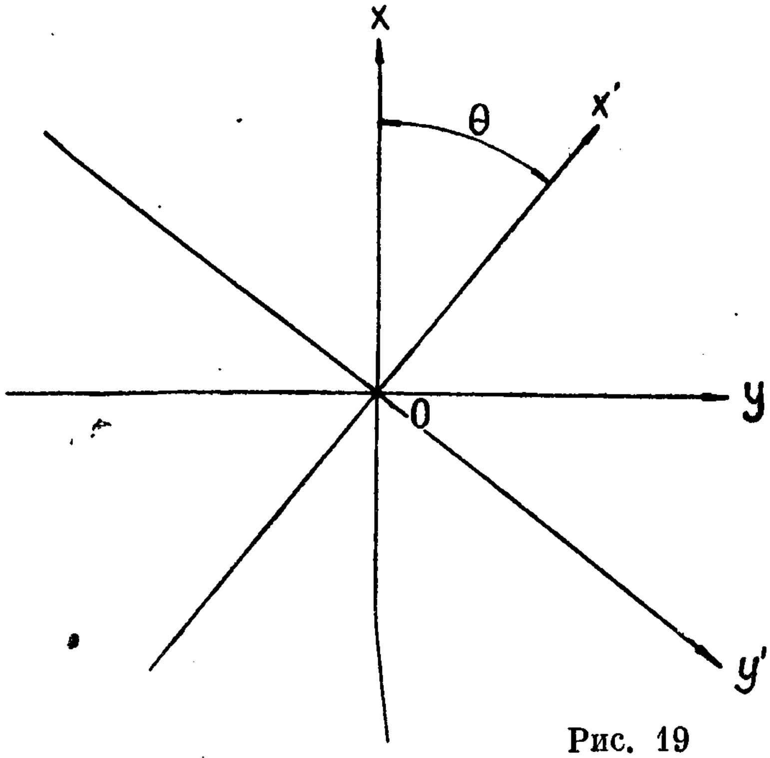


Рис. 19

Рассматривая выражения (52,11) как функции уравновешенных значений посредственных величин, определим для них величины, обратные весам функций. Для этого найдем коэффициенты весовых функций f:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X'}{\partial X} &= f_1^{X'} = \cos\Theta; & \frac{\partial X'}{\partial Y} &= f_2^{X'} = \sin\Theta; \\ \frac{\partial Y'}{\partial X} &= f_1^{Y'} = -\sin\Theta; & \frac{\partial Y'}{\partial Y} &= f_2^{Y'} = \cos\Theta \end{aligned}\right\} \tag{52,12}$$

и подставим их в формулу (44,14)

$$\frac{1}{p_{X'}} = \cos^2\Theta Q_{11} + \sin^2\Theta Q_{22} + 2\sin\Theta\cos\Theta Q_{12}; \tag{52,13}$$

$$\frac{1}{p_{Y'}} = \sin^2\Theta Q_{11} + \cos^2\Theta Q_{22} - 2\sin\Theta\cos\Theta Q_{12}. \tag{52,14}$$

Чтобы определить, при каких значениях Θ выражения (52,13) и (52,14) достигнут максимума и минимума, возьмем частные производные по углу Θ и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial \frac{1}{p_{X'}}}{\partial\Theta} = -2Q_{11}\cos\Theta\sin\Theta + 2Q_{22}\cos\Theta\sin\Theta + 2Q_{12}\cos 2\Theta = 0; \tag{52,15}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{p_{Y'}}}{\partial\Theta} = 2Q_{11}\cos\Theta\sin\Theta - 2Q_{22}\cos\Theta\sin\Theta - 2Q_{12}\cos 2\Theta = 0; \tag{52,16}$$

или

$$\frac{\partial \frac{1}{p_{X'}}}{\partial\Theta} = -Q_{11}\sin 2\Theta + Q_{22}\sin 2\Theta + Q_{12}2\cos 2\Theta = 0; \qquad (52,17)$$

$$\frac{\partial \frac{1}{p_{Y'}}}{\partial\Theta} = Q_{11}\sin 2\Theta - Q_{22}\sin 2\Theta - Q_{12}2\cos 2\Theta = 0. \qquad (52,18)$$

Из полученных выражений найдем значение угла Θ:

$$\sin 2\Theta\,(Q_{11} - Q_{12}) = 2Q_{12}\cos 2\Theta. \qquad (52,19)$$

Разделив на $\cos 2\Theta$ левую и правую части равенства (52,19), получим

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{2Q_{12}}{Q_{11} - Q_{22}}. \qquad (52,20)$$

При наличии двух искомых посредственных величин весовые коэффициенты Q_{11}, Q_{22} и Q_{12} соответственно будут равны:

$$Q_{11} = \frac{[pbb]}{[paa]\,[pbb\cdot 1]}; \qquad (52,21)$$

$$Q_{22} = \frac{1}{[pbb\cdot 1]}; \qquad (52,22)$$

$$Q_{12} = -\frac{[pab]}{[paa]\,[pbb\cdot 1]}. \qquad (52,23)$$

Подставив значения весовых коэффициентов Q_{11}, Q_{22} и Q_{12} в (52,20), будем иметь

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{-2\,[pab]}{-([paa] - [pbb])}. \qquad (52,24)$$

Четверть для 2Θ определяется как при обычном вычислении дирекционного угла по прямоугольным координатам.

Уравнение (52,24) имеет два решения: 2Θ и $2\Theta \pm 180°$, т. е. Θ и $\Theta \pm 90°$, так что оно определяет два взаимно перпендикулярных направления, которые соответствуют максимальному и минимальному значению средней квадратической ошибки положения вставляемой точки.

Если $[paa] = 0$, то $\Theta = 0$ или $90°$, т. е. направления максимума и минимума смещений совпадают с осями существующей системы координат X и Y.

Если $[pab] = 0$ и разность $[paa] - [pbb] = 0$, то $\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{0}{0}$, т. е. неопределенности. В этом случае средние смещения точек одинаковы по всем направлениям, а кривая средних ошибок будет представлять собой окружность.

Определим величины наибольшего и наименьшего смещений точки. Для этого преобразуем формулу (53,13) величины, обратной весу функции: в равенство (53,13) вместо $\sin^2\Theta$ и $\cos^2\Theta$ подставим их выражения через косинусы двойных углов, где Θ — значение угла, найденное по формуле (52,24),

$$\frac{1}{p_{X'}}=Q_{11}\frac{1+\cos 2\Theta}{2}+Q_{22}\frac{1-\cos 2\Theta}{2}+Q_{12}\sin 2\Theta \tag{52,25}$$

или

$$\frac{1}{p_{X'}}=\frac{Q_{11}+Q_{22}+(Q_{11}-Q_{22})\cos 2\Theta+2Q_{12}\sin 2\Theta}{2}. \tag{52,26}$$

Согласно формуле (52,20) будем иметь

$$Q_{11}-Q_{22}=\frac{2Q_{12}}{\operatorname{tg} 2\Theta}, \tag{52,27}$$

тогда равенство (52,26) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{1}{p_{X'}}=\frac{Q_{11}+Q_{22}+2Q_{12}\left(\frac{\cos^2 2\Theta}{\sin 2\Theta}+\frac{\sin^2 2\Theta}{\sin 2\Theta}\right)}{2}, \tag{52,28}$$

откуда

$$\frac{1}{p_{X'}}=\frac{Q_{11}+Q_{22}+\frac{2Q_{12}}{\sin 2\Theta}}{2}. \tag{52,29}$$

Подставив в полученное выражение (52,29) значения Q_{11}, Q_{22}, и Q_{12} из (52,21), (52,22) и (52,23), получим

$$\frac{1}{p_{X'}}=\frac{\frac{[pbb]}{[paa][pbb\cdot 1]}+\frac{1}{[pbb\cdot 1]}-\frac{2[pab]}{[paa][pbb\cdot 1]\sin 2\Theta}}{2}. \tag{52,30}$$

или

$$\frac{1}{p_{X'}}=\frac{[paa]+[pbb]-\frac{2[pab]}{\sin 2\Theta}}{2[paa][pbb\cdot 1]}. \tag{52,31}$$

В полученном выражении обозначим:

$$\frac{-2[pab]}{\sin 2\Theta}=w, \tag{52,32}$$

$$[paa][pbb\cdot 1]=[paa][pbb]-[pab]^2=D. \tag{52,33}$$

Тогда

$$\frac{1}{p_{X'}}=\frac{[paa]+[pbb]+w}{2D}. \tag{52,34}$$

Обратимся теперь к равенству (52,14), в нем $\sin^2\Theta$ и $\cos^2\Theta$ выразим через косинус двойного угла

$$\frac{1}{p_{Y'}}=Q_{11}\frac{1-\cos 2\Theta}{2}+Q_{22}\frac{1+\cos 2\Theta}{2}-2Q_{12}\sin 2\Theta \tag{52,35}$$

или

$$\frac{1}{p_{Y'}}=\frac{Q_{11}+Q_{22}-\{(Q_{11}-Q_{22})\cos 2\Theta+2Q_{12}\sin 2\Theta\}}{2}. \qquad (52,36)$$

На основании (52,27) равенство (52,36) может быть записано

$$\frac{1}{p_{Y'}}=\frac{Q_{11}+Q_{22}-\dfrac{2Q_{12}}{\sin 2\Theta}}{2}. \qquad (52,37)$$

Подставим в выражение (52,37) значения Q_{11}, Q_{22} и Q_{12} из (52,21) (52,22) и (52,23):

$$\frac{1}{p_{Y'}}=\frac{\dfrac{[pbb]}{[paa][pbb\cdot 1]}+\dfrac{1}{[pbb\cdot 1]}+\dfrac{2[pab]}{[paa][pbb\cdot 1]\sin 2\Theta}}{2}, \qquad (52,38)$$

учитывая принятые обозначения (52,32) и (52,33), получим

$$\frac{1}{p_{Y'}}=\frac{[paa]+[pbb]-w}{2D}. \qquad (52,39)$$

Сопоставляя равенства (52,34) и (52,39), видим, что $\frac{1}{p_{X'}}>\frac{1}{p_{Y'}}$.

Следовательно, $\frac{1}{p_{X'}}$ соответствует максимальному, а $\frac{1}{p_{Y'}}$ минимальному смещениям точки.

Величины, соответствующие максимальному смещению $M_{X'}$, и минимальному смещению $M_{Y'}$ точки, обозначим через A и B, тогда:

$$M^2_{X'}=\mu^2\frac{1}{p_{X'}}=\mu^2\,\frac{[paa]+[pbb]+w}{2D}=A^2; \qquad (52,40)$$

$$M^2_{Y'}=\mu^2\frac{1}{p_{Y'}}=\mu^2\,\frac{[paa]+[pbb]-w}{2D}=B^2 \qquad (52,41)$$

или окончательно можно записать:

$$A^2=\mu^2\frac{[paa]+[pbb]+w}{2D}, \qquad (52,42)$$

$$B^2=\mu^2\frac{[paa]+[pbb]-w}{2D}. \qquad (52,43)$$

Сложив полученные выражения (52,42) и (52,43), на основании (52,9) и (52,10) будем иметь:

$$A^2+B^2=\mu^2\,\frac{[paa]+[pbb]}{D}=M^2=M^2_X+M^2_Y, \qquad (52,44)$$

откуда

$$A^2+B^2=M^2_X+M^2_Y, \qquad (52,45)$$

т. е. величина средней квадратической ошибки положения точки на плоскости не зависит от направления осей координат.

Установим закон изменения средних смещений точки по различным направлениям.

Условную систему координат X' и Y', оси которой направлены по направлению наибольшего A и наименьшего B смещений точки (рис. 19), повернем на некоторый угол φ по направлению движения часовой стрелки. Тогда соотношение между вновь полученной системой осей X'' и Y'' и системой X и Y можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} X'' &= X\cos(\Theta+\varphi)+Y\sin(\Theta+\varphi);\\ Y'' &= Y\cos(\Theta+\varphi)-X\sin(\Theta+\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{52,46}$$

По аналогии с (52,11) для системы (52,46) можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{p_{X''}} &= \cos^2(\Theta+\varphi)Q_{11}+\sin^2(\Theta+\varphi)Q_{22}+2\sin(\Theta+\varphi)\cos(\Theta+\varphi)Q_{12};\\ \frac{1}{p_{Y''}} &= \sin^2(\Theta+\varphi)Q_{11}+\cos^2(\Theta+\varphi)Q_{22}-2\sin(\Theta+\varphi)\cos(\Theta+\varphi)Q_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{52,47}$$

На основании (52,40) и (52,41) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} M^2_{X''} &= \mu^2\frac{1}{p_{X''}} = \mu^2\{Q_{11}\cos^2(\Theta+\varphi)+Q_{22}\sin^2(\Theta+\varphi)+\\ &\quad +2Q_{12}\sin(\Theta+\varphi)\cos(\Theta+\varphi)\};\\ M^2_{Y''} &= \mu^2\frac{1}{p_{Y''}} = \mu^2\{Q_{11}\sin^2(\Theta+\varphi)+Q_{22}\cos^2(\Theta+\varphi)-\\ &\quad -2Q_{12}\sin(\Theta+\varphi)\cos(\Theta+\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{52,48}$$

Преобразуем первое уравнение системы (52,48), для этого определим значения каждого из членов уравнения, стоящих в фигурных скобках правой части:

$$\begin{aligned} Q_{11}\cos^2(\Theta+\varphi) &= (\cos^2\Theta\cos^2\varphi+\sin^2\Theta\sin^2\varphi-\\ &\quad -2\cos\Theta\sin\Theta\cos\varphi\sin\varphi)Q_{11}; \end{aligned} \tag{52,49}$$

$$\begin{aligned} Q_{22}\sin^2(\Theta+\varphi) &= (\sin^2\Theta\cos^2\varphi+\cos^2\Theta\sin^2\varphi+\\ &\quad +2\cos\Theta\sin\Theta\cos\varphi\sin\varphi)Q_{22}; \end{aligned} \tag{52,50}$$

$$\begin{aligned} 2Q_{12}\sin(\Theta+\varphi)\cos(\Theta+\varphi) &= 2Q_{12}(\cos^2\Theta\sin\varphi\cos\varphi-\\ -\sin\Theta\cos\Theta\sin^2\varphi+\sin\Theta\cos\Theta\cos^2\varphi &-\sin^2\Theta\sin\varphi\cos\varphi). \end{aligned} \tag{52,51}$$

Полученные выражения подставим в первое уравнение системы (52,48), группируя члены вокруг $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$ и $\sin\varphi\ \cos\varphi$,

$$\begin{aligned} M^2_{X''} &= \mu^2\cos^2\varphi\,(Q_{11}\cos^2\Theta+Q_{22}\sin^2\Theta+Q_{12}2\sin\Theta\cos\Theta)+\\ &+\mu^2\sin^2\varphi\,(Q_{11}\sin^2\Theta+Q_{22}\cos^2\Theta-Q_{12}2\sin\Theta\cos\Theta)+\\ &+\mu^2\sin\varphi\cos\varphi\,(-Q_{11}\sin 2\Theta+Q_{22}\sin 2\Theta+Q_{12}2\cos 2\Theta). \end{aligned} \tag{52,52}$$

На основании (52,13), (52,14) и (52,17) можно установить, что выражение в первой скобке равенства (52,52) равно $\frac{1}{p_{X'}}$, выражение во второй скобке равно $\frac{1}{p_{Y'}}$, а выражение в третьей скобке равно нулю, тогда

$$M_{X''}^2 = \mu^2 \frac{1}{p_{X'}} \cos^2 \varphi + \mu^2 \frac{1}{p_{Y'}} \sin^2 \varphi, \qquad (52,53)$$

откуда на основании (52,40) и (52,41) получим

$$M_{X''}^2 = A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi. \qquad (52,54)$$

Из аналогичных преобразований второго уравнения системы (52,48) придем к выражению (52,54). Обозначив его через P, будем иметь

$$P^2 = A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi. \qquad (52,55)$$

Полученное уравнение является уравнением замкнутой кривой, которая называется **подерой (педальной кривой)**.

Рассматривая максимальное A и минимальное B значения средней ошибки как полуоси некоторого эллипса, называемого средним квадратическим эллипсом ошибок, подера может быть представлена как кривая, образованная непрерывным перемещением конца перпендикуляра, восстановленного из центра эллипса к касательной в некоторой точке эллипса при непрерывном изменении ее положения на эллипсе. Перпендикуляр P принято называть **радиусом-вектором подеры.**

При вставке двух пунктов в триангуляционную сеть будем иметь четыре нормальных уравнения, составленных для преобразованных уравнений поправок. Исключив из этих уравнений поправки к приближенным значениям координат первого вставляемого пункта, получим преобразованную систему с поправками к приближенным значениям координат второго вставляемого пункта, которые являются последним и предпоследним неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} [pcc \cdot 2]\,\xi_2 + [pcd \cdot 2]\,\eta_2 + [pcv \cdot 2] = 0; \\ [pcd \cdot 2]\,\xi_2 + [pdd \cdot 2]\,\eta_2 + [pdv \cdot 2] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (52,56)$$

Тогда веса уравновешенных координат второго вставляемого пункта будут равны:

$$p_{Y_2} = [pdd \cdot 3]; \qquad (52,57)$$

$$p_{X_2} = \frac{[pcc \cdot 2]}{[pdd \cdot 2]} [pdd \cdot 3], \qquad (52,58)$$

а элементы подеры определятся по формулам:

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{-2\,[pcd \cdot 2]}{-([pcc \cdot 2] - [pdd \cdot 2])}; \tag{52,59}$$

$$A^2 = \mu^2 \frac{[pcc \cdot 2] + [pdd \cdot 2] + w}{2D}; \tag{52,60}$$

$$B^2 = \mu^2 \frac{[pcc \cdot 2] + [pdd \cdot 2] - w}{2D}, \tag{52,61}$$

где

$$w = \frac{-2\,[pcd \cdot 2]}{\sin 2\Theta}, \tag{52,62}$$

$$D = [pcc \cdot 2]\,[pdd \cdot 2] - [pcd \cdot 2]^2, \tag{52,63}$$

При вставке трех пунктов в триангуляционную сеть оценка точности уравновешенных значений координат пункта, поправки которого будут являться последним и предпоследним неизвестными в системе нормальных уравнений, и вычисление элементов подеры производятся по следующим формулам:

$$p_{Y_3} = [pgg \cdot 5]; \tag{52,64}$$

$$p_{X_3} = \frac{[pee \cdot 4]}{[pgg \cdot 4]}\,[pgg \cdot 5]; \tag{52,65}$$

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{-2\,[peg \cdot 4]}{-([pee \cdot 4] - [pgg \cdot 4])}; \tag{52,66}$$

$$A^2 = \mu^2 \frac{[pee \cdot 4] + [pgg \cdot 4] + w}{2D}; \tag{52,67}$$

$$B^2 = \mu^2 \frac{[pee \cdot 4] + [pgg \cdot 4] - w}{2D}, \tag{52,68}$$

где

$$w = \frac{-2\,[peg \cdot 4]}{\sin 2\Theta}; \tag{52,69}$$

$$D = [pee \cdot 4]\,[pgg \cdot 4] - [peg \cdot 4]^2. \tag{52,70}$$

Величина радиуса-вектора P подеры во всех случаях вычисляется по формуле (52,55) или определяется графически.

§ 53. Пример на вставку двух точек в жесткую триангуляционную сеть

В жесткую триангуляционную сеть (рис. 20) необходимо вставить два пункта II и III, т. е. по измеренным направлениям определить уравновешенные значения координат вставляемых пунктов.

Даны значения плоских координат жестких (исходных) пунктов «Азов», «Бор» и «Центр» (табл. 38).

Таблица 38

Пункт	Координаты	
	X, м	Y, м
Азов	6 418 071,71	7 557 951,96
Бор	6 411 801,16	7 555 809,62
Центр	6 411 023,10	7 560 851,17

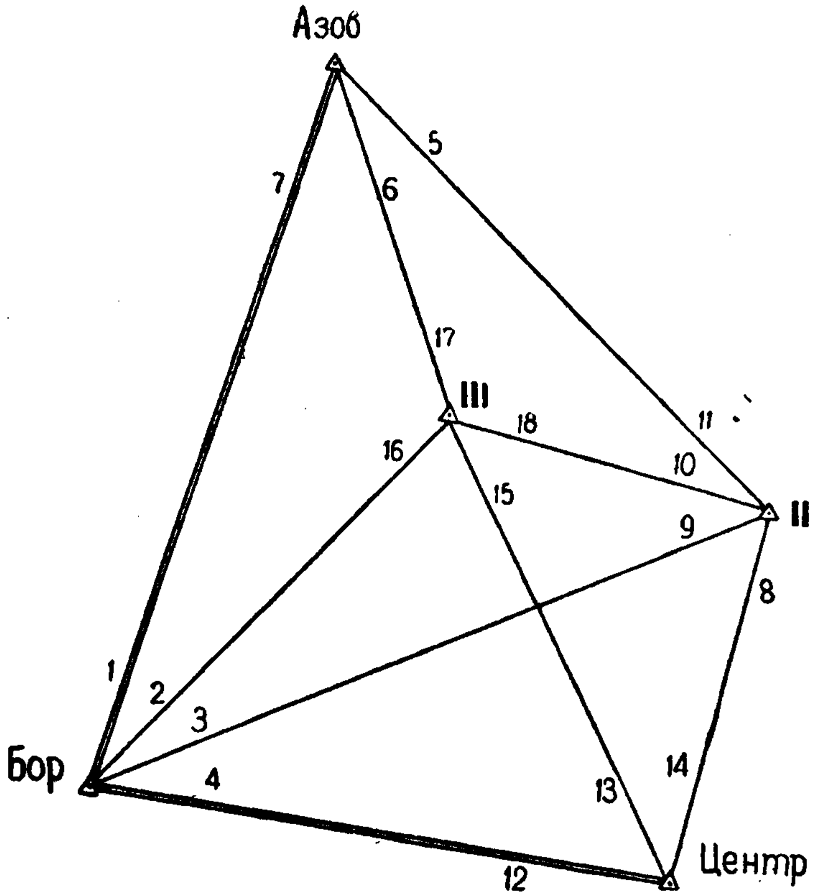


Рис. 20

Направления измерялись на всех точках сети и их приведенные значения даны в табл. 39.

Таблица 39

Пункт	Направление	Измеренные плоские приведенные направления N		
		°	′	″
Бор	1—7	0	00	00
	2—16	24	39	08,3
	3—9	48	29	37,1
	4—12	79	54	38,8
Азов	5—11	0	00	00
	6—17	26	27	26,5
	7—1	62	52	03,1

Пункт	Направление	Измеренные плоские приведенные направления N		
		°	′	″
II	8—14	0	00	00
	9—3	53	20	37,5
	10—18	92	37	10,7
	11—5	121	58	59,8
Центр	12—4	0	00	00
	13—15	55	28	53,0
	14—8	95	14	17,7
III	16—2	0	00	00
	17—6	118	56	15,0
	18—10	243	06	58,1
	15—13	290	44	18,3

Приближенные значения плоских координат вставляемых пунктов II и III, полученные из решения прямых засечек, равны:

$$x_{II} = 6\,414\,239{,}20; \quad y_{II} = 9\,561\,653{,}78;$$

$$x_{III} = 6\,415\,060{,}34; \quad y_{III} = 9\,558\,904{,}09.$$

I. Порядок уравнительных вычислений

1. Вычисление дирекционных углов направлений и длин сторон по координатам жестких пунктов и приближенным координатам вставляемых пунктов приведено в табл. 40. В этой таблице $x_н$ и $y_н$ — координаты начальной точки данного направления, $x_к$ и $y_к$ — координаты конечной точки данного направления.

2. Уравнения поправок, составленные для измеренных направлений на станциях, приведены в табл. 41.

3. Вычисление свободных членов уравнений поправок произведено в табл. 42.

4. Вычисление коэффициентов уравнений поправок a и b выполнено в табл. 43. Величины (a) и (b) найдены по приложению I, которое составлено по формулам:

$$(a) = 20{,}6265 \sin r, \quad (b) = 20{,}6265 \cos r,$$

где r — табличный угол.

Знаки коэффициентов a и b определяются в соответствии с величиной дирекционного угла данного направления по табл. 37. Контрольная величина A определена по приложению II.

5. Вычисление коэффициентов нормальных уравнений по преобразованным уравнениям поправок произведено в табл. 44.

Таблица 40

Направление	$x_к$ $x_н$ $\Delta x = x_к - x_н$ $\Delta x + \Delta y$	$y_к$ $y_н$ $\Delta y = y_к - y_н$ $\Delta x - \Delta y$	$\lg \Delta y$ $\lg \Delta x$ $\lg \operatorname{tg} \alpha$ r α	$\lg (\Delta x + \Delta y)$ $\lg (\Delta x - \Delta y)$ $\lg \operatorname{tg} (\alpha + 45°)$ r $\alpha + 45°$	$\lg \Delta y$ $\lg \sin \alpha$ $\lg S$ S	$\lg \Delta x$ $\lg \cos \alpha$ $\lg S$
Бор—Азов	18 071,71 11 801,16 +6 270,55 +8 412,89	57 951,96 55 809,62 +2 142,34 +4 128,21	3,3308884 3,7973056 9,5335828 18° 51′ 46″,04 18° 51′ 46″,04	3,9249452 3,6157618 0,3091834 63° 51′ 46″,02 63° 51′ 46″,02	3,3308884 9,5096096 3,8212788 6626,4	3,7973056 9,9760268 3,8212788
Бор—III	15 060,34 11 801,16 +3 259,18 +6 353,65	58 904,09 55 809,62 +3 094,47 + 164,71	3,4905863 3,5131083 9,9774780 43° 30′ 54″,08 43° 30′ 54″,08	3,8030233 2,2167200 1,5863033 88° 30′ 54″,07 88° 30′ 54″,07	3,4905863 9,8379323 3,6526540 4494,2	3,5131083 9,8604541 3,6526542
Бор—II	14 239,20 11 801,16 +2 438,04 +8 282,20	61 653,78 55 809,62 +5 844,16 —3 406,12	3,7667221 3,3870408 0,3796813 67° 21′ 19″,09 67° 21′ 19″,09	3,9181457 3,5322600*n* 0,3858857*n* 67° 38′ 40″,90 112° 21′ 19″,10	3,7667221 9,9651594 3,8015627 6332,3	3,3870408 9,5854781 3,8015627

Азов — II	14 239,20 18 071,71 −3 832,51 −130,69	61 653,78 57 951,96 +3 701,82 −7 534,33	3,5684153 3,5834833*n* 9,9849320*n* 44° 00′ 22″,50 135° 59′ 37″,50	2,1162424*n* 3,8770446*n* 8,2391978 0° 59′ 37″,49 180° 59′ 37″,49	3,5684153 9,8418204 3,7265949 5328,4	3,5834833 9,8568883 3,7265950
Азов — III	15 060,34 18 071,71 −3 011,37 −2 059,24	58 904,09 57 951,96 +952,13 −3 963,50	2,9786962 3,4787641*n* 9,4999321*n* 17° 32′ 44″,97 162° 27′ 15″,03	3,3137069*n* 3,5980789*n* 9,7156280 27° 27′ 15″,01 207° 27′ 15″,01	2,9786962 9,4792419 3,4994543 3158,3	3,4787641 9,9793098 3,4994543
II — Центр	11 023,10 14 239,20 −3 216,10 −4 018,71	60 851,17 61 653,78 −802,61 −2 413,49	2,9045046*n* 3,5073295*n* 9,3971751 14° 00′ 45″,07 194° 00′ 45″,07	3,6040867*n* 3,3826455*n* 0,2214412 59° 00′ 45″,07 239° 00′ 45″,07	2,9045046 9,3840556 3,5204490 3314,7	3,5073295 9,9868801 3,5204494
II — III	15 060,34 14 239,20 +821,14 −1 928,55	58 904,09 61 653,78 −2 749,69 +3 570,83	3,4392837*n* 2,9144172 0,5248665*n* 73° 22′ 22″,06 286° 37′ 37″,94	3,2852309*n* 3,5527692 9,7324617*n* 28° 22′ 22″,06 331° 37′ 37″,94	3,4392837 9,9814502 3,4578335 2869,7	2,9144172 9,4565837 3,4578335
III — Центр	11 023,10 15 060,34 −4 037,24 −2 090,16	60 851,17 58 904,09 +1 947,08 −5 984,32	3,2893838 3,6060846*n* 9,6832992*n* 25° 44′ 49″,48 154° 15′ 10″,52	3,3201795*n* 3,7770148*n* 9,5431647 19° 15′ 10″,50 199° 15′ 10″,50	3,2893838 9,6378891 3,6514947 4482,2	3,6060846 9,9545900 3,6514946

Таблица 42

Пункт	Направление	Измеренное плоское приведенное направление N			Дирекционный угол α			Приближенный ориентирный угол $Z=\alpha-N$	Приближенное ориентирное направление $R=Z_{ср}+N$			Свободный член $v=\alpha-R$
		°	′	″	°	′	″	° ′ ″	°	′	″	
Бор	1—7	0	00	00	18	51	46,04	18 51 46,04	18	51	44,65	+1,39
	2—16	24	39	08,3	43	30	54,08	45,78	43	30	52,95	+1,13
	3—9	48	29	37,1	67	21	19,09	41,99	67	21	21,75	—2,66
	4—12	79	54	38,8	98	46	23,59	44,79	98	46	23,45	+0,14
	$\sum$			24,2			22,80	58,60 58,60				0,00
								$Z_{ср}=18°\ 51'\ 44'',65$				
Азов	5—11	0	00	00	135	59	37,50	135 59 37,50	135	59	42,99	—5,49
	6—17	26	27	26,5	162	27	15,03	48,53	162	27	09,49	+5,54
	7—1	62	52	03,1	198	51	46,04	42,94	198	51	46,09	—0,05
	$\sum$			29,6			38,57	8,97 8,97				0,00
								$Z_{ср}=135°\ 59'\ 42'',99$				

II	8—14	0	00	00	194	00	45,07	194 00 45,07	194	00	37,90	+7,17
	9—3	53	20	37,5	247	21	19,09	41,59	247	21	15,40	+3,69
	10—18	92	37	10,7	286	37	37,94	27,24	286	37	48,60	−10,66
	11—5	121	58	59,8	315	59	37,50	37,70	315	59	37,70	−0,20
	$\sum$			48,0			19,60	31,60 31,60				0,00
								$Z_{cp} = 194° 00' 37'',90$				
Центр	12—4	0	00	00	278	46	23,59	278 46 23,59	278	46	22,83	+0,76
	13—15	55	28	53,0	334	15	10,52	17,52	334	15	15,83	−5,31
	14—8	95	14	17,7	14	00	45,07	27,37	14	00	40,53	+4,54
	$\sum$			10,7			19,18	8,48 8,48				−0,01
								$Z_{cp} = 278° 46' 22'',83$				
III	16—2	0	00	00	223	30	54,08	223 30 54,08	223	30	51,54	+2,54
	17—6	118	56	15,0	342	27	15,03	31 00,03	342	27	06,54	+8,49
	18—10	243	06	58,1	106	37	37,94	30 39,84	106	37	49,64	−11,70
	15—13	290	44	18,3	154	15	10,52	30 52,22	154	15	09,84	+0,68
	$\sum$			31,4			57,57	26,17 26,17				+0,01
								$Z_{cp} = 223° 30' 51'',54$				

Таблица 41

Пункт	Направление	№ уравнения поправок	Уравнения поправок	Число измеренных направлений на станции
Бор	1—7	1	$-(Z_Б)+v_{1-7}=\varepsilon_{1-7}$	$K_Б=4$
	2—16	2	$-(Z_Б)-a_{2-16}\xi_{III}-b_{2-16}\eta_{III}+v_{2-16}=$ $=\varepsilon_{2-16}$	
	3—9	3	$-(Z_Б)-a_{3-9}\xi_{II}-b_{3-9}\eta_{II}+v_{3-9}=\varepsilon_{3-9}$	
	4—12	4	$-(Z_Б)+v_{4-12}=\varepsilon_{4-12}$	
Азов	5—11	5	$-(Z_А)-a_{5-11}\xi_{II}-b_{5-11}\eta_{II}+v_{5-11}=$ $=\varepsilon_{5-11}$	$K_А=3$
	6—17	6	$-(Z_А)-a_{6-17}\xi_{III}-b_{6-17}\eta_{III}+v_{6-17}=$ $=\varepsilon_{6-17}$	
	7—1	7	$-(Z_А)+v_{7-1}=\varepsilon_{7-1}$	
II	8—14	8	$-(Z_{II})+a_{8-14}\xi_{II}+b_{8-14}\eta_{II}+v_{8-14}=$ $=\varepsilon_{8-14}$	$K_{II}=4$
	9—3	9	$-(Z_{II})+a_{9-3}\xi_{II}+b_{9-3}\eta_{II}+v_{9-3}=\varepsilon_{9-3}$	
	10—18	10	$-(Z_{II})+a_{10-18}\xi_{II}+b_{10-18}\eta_{II}-$ $-a_{10-18}\xi_{III}-b_{10-18}\eta_{III}+v_{10-18}=\varepsilon_{10-18}$	
	11—5	11	$-(Z_{II})+a_{11-5}\xi_{II}+b_{11-5}\eta_{II}+v_{11-5}=$ $=\varepsilon_{11-5}$	
Центр	12—4	12	$-(Z_Ц)+v_{12-4}=\varepsilon_{12-4}$	$K_Ц=3$
	13—15	13	$-(Z_Ц)-a_{13-15}\xi_{III}-b_{13-15}\eta_{III}+$ $+v_{13-15}=\varepsilon_{13-15}$	
	14—8	14	$-(Z_Ц)-a_{14-8}\xi_{II}-b_{14-8}\eta_{II}+$ $+v_{14-8}=\varepsilon_{14-8}$	
III	15—13	15	$-(Z_{III})+a_{15-13}\xi_{III}+b_{15-13}\eta_{III}+$ $+v_{15-13}=\varepsilon_{15-13}$	$K_{III}=4$
	16—2	16	$-(Z_{III})+a_{16-2}\xi_{III}+b_{16-2}\eta_{III}+$ $+v_{16-2}=\varepsilon_{16-2}$	
	17—6	17	$-(Z_{III})+a_{17-6}\xi_{III}+b_{17-6}\eta_{III}+$ $+v_{17-6}=\varepsilon_{17-6}$	
	18—10	18	$-(Z_{III})+a_{18-10}\xi_{III}+b_{18-10}\eta_{III}-$ $-a_{18-10}\xi_{II}-b_{18-10}\eta_{II}+v_{18-10}=\varepsilon_{18-10}$	

Таблица 43

Наименование направления	Дирекционный угол α	Коэффициенты		S, км	Коэффициенты		a^2	b^2	a^2+b^2	$A=\frac{425,45}{S^2 (км)}$
		(a)	(b)		a	b				
Бор—III	43° 31′	+14,20	−14,97	4,494	+3,16	−3,33	9,99	11,09	21,08	21,1
Бор—II	67 21	+19,03	−7,94	6,332	+3,01	−1,25	9,06	1,56	10,62	10,6
Азов—II	136 00	+14,33	+14,84	5,328	+2,69	+2,79	7,24	7,78	15,02	15,0
Азов—III	162 27	+6,21	+19,67	3,158	+1,97	+6,23	3,88	38,81	42,69	42,6
II—Центр	194 01	−5,00	+20,01	3,315	−1,51	+6,04	2,28	36,48	38,76	38,8
II—III	286 38	−19,76	−5,91	2,870	−6,89	−2,06	47,47	4,24	51,71	51,7
III—Центр	154 15	+8,96	+18,58	4,482	+2,00	+4,15	4,00	17,22	21,22	21,2

6. По вычисленным в табл. 44 коэффициентам составляются нормальные уравнения:

$$110,13\xi_{III}+37,59\eta_{III}-67,27\xi_{II}-35,51\eta_{II}-202,56=0;$$

$$37,59\xi_{III}+117,47\eta_{III}-16,43\xi_{II}-23,22\eta_{II}-140,46=0;$$

$$-67,27\xi_{III}-16,43\eta_{III}+65,10\xi_{II}+24,17\eta_{II}+148,58=0;$$

$$-35,51\xi_{III}-23,22\eta_{III}+24,17\xi_{II}+82,43\eta_{II}+133,96=0.$$

7. Решение нормальных уравнений выполнено в схеме Гаусса — Дулитля (табл. 45).

8. Вычисление поправок (Z) к приближенным значениям ориентирных углов и поправок ε к измеренным направлениям произведено в табл. 46.

9. Вычисление уравновешенных координат вставляемых пунктов:

$$\delta_{xII}=\frac{1}{10}\xi_{II}=-0,11 \text{ м}, \quad \delta_{yII}=\frac{1}{10}\eta_{II}=-0,08 \text{ м};$$

$$\delta_{xIII}=\frac{1}{10}\xi_{III}=+0,07 \text{ м}; \quad \delta_{yIII}=\frac{1}{10}\eta_{III}=+0,07 \text{ м};$$

$$X_{II}=6\,414\,239,20-0,11=6\,414\,239,09 \text{ м};$$

$$Y_{II}=9\,561\,653,78-0,08=9\,5616\,53,70 \text{ м};$$

$$X_{III}=6\,415\,060,34+0,07=6\,415\,060,41 \text{ м};$$

$$Y_{III}=9\,558\,904,09+0,07=9\,558\,904,16 \text{ м}.$$

10. Вычисление уравновешенных значений дирекционных углов и измеренных направлений произведено в табл. 47.

11. Заключительный контроль осуществлен путем вычисления дирекционных углов всех направлений по уравновешенным значениям координат пунктов (табл. 48).

ξ_{III}	η_{III}	ξ_{II}	η_{II}
110,13 —1	37,59 —0,34132	—67,27 0,61082	—35,51 0,32244
$\xi_{III} = 0,65604$	—0,22690	—0,69078	—0,26556
	117,47 —12,83 104,64 —1	—16,43 22,96 6,53 —0,06240	—23,22 12,12 —11,10 0,10608
	$\eta_{III} = 0,66478$	0,07057	—0,08736
		65,10 —41,09 —0,41 23,60 —1	24,17 —21,69 0,69 3,17 —0,13432
		$\xi_{II} = -1,13091$	0,11062
			82,43 —11,45 —1,17 —0,43 69,38 —1
			$\eta_{II} = -0,82358$

[v . . .]	[s . . .]	
—202,56 1,83928	—157,62 1,43122	6,89 —0,06
1,83928		
—140,46 69,14 —71,32 0,68157	—25,05 53,80 28,75 —0,27475	2,06 —2,36 —0,30 0
0,68157		
148,58 —123,73 4,45 29,30 —1,24153	154,15 —96,28 —1,79 56,08 —2,37627	—6,89 4,28 0,02 2,59 —0,11
—1,24153		
133,96 —65,31 —7,57 —3,94 57,14 —0,82358	181,83 —50,82 3,05 —7,53 126,53 —1,82372	—2,06 2,22 —0,03 —0,35 —0,22 0
515,13 —372,56 —48,61 —36,38 —47,06	454,65 —289,91 +19,60 —69,62 —104,21	0 0,41 0 0,28 0
10,52	10,51	$\frac{1}{p_{a_{II-III}}} + 0,69$

Таблица 46

Пункт	№ уравнения	(Z)	a $\xi_{III}=0,656$	b $\eta_{III}=0,665$	c $\xi_{II}=-1,131$	d $\eta_{II}=-0,824$	v	ε	$\varepsilon\varepsilon$
Бор	1	−1 −0,63	0 0	0 0	0 0	0 0	+1,39	+0,76	0,58
	2	−1 −0,63	−3,16 −2,07	+3,33 +2,21	0 0	0 0	+1,13	+0,64	0,41
	3	−1 −0,63	0 0	0 0	−3,01 +3,40	+1,25 −1,03	−2,66	−0,92	0,85
	4	−1 −0,63	0 0	0 0	0 0	0 0	+0,14	−0,49	0,24
		$(Z_Б)=$	−2,07	+2,21	+3,40	−1,03	$/4 = +0,63$	−0,01	
Азов	5	−1 0,03	0 0	0 0	−2,69 +3,04	−2,79 +2,30	−5,49	−0,12	0,01
	6	−1 0,03	−1,97 −1,29	−6,23 −4,14	0 0	0 0	+5,54	+0,14	0,02
	7	−1 0,03	0 0	0 0	0 0	0 0	−0,05	−0,02	0,00
		$(Z_А)=$	−1,29	−4,14	+3,04	+2,30	$/3 = -0,03$	0,00	
	8	−1 −4,96	0 0	0 0	−1,51 +1,71	+6,04 −4,98	+7,17	−1,06	1,12
	9	−1 −4,96	0 0	0 0	−3,01 +3,40	+1,25 −1,03	+3,69	+1,10	1,21

II	10	−1 −4,96	+6,89 +4,52	+2,06 +1,37	−6,89 +7,79	−2,06 +1,70	−10,66	−0,24	0,06
	11	−1 −4,96	0 0	0 0	−2,69 +3,04	−2,79 +2,30	−0,20	+0,18	0,03
		$(Z_{II})=\frac{+4,52 \quad +1,37 \quad +15,95 \quad -2,01}{4}=+4,96$						−0,02	
Центр	12	−1 −0,27	0 0	0 0	0 0	0 0	+0,76	+0,49	0,24
	13	−1 −0,27	+2,00 +1,31	+4,15 +2,76	0 0	0 0	−5,31	−1,51	2,28
	14	−1 −0,27	0 0	0 0	−1,51 +1,71	+6,04 −4,98	+4,54	+1,00	1,00
		$(Z_{Ц})=\frac{+1,31 \quad +2,76 \quad +1,71 \quad -4,98}{3}=+0,27$						−0,02	
III	15	−1 −3,54	−3,16 −2,07	+3,33 +2,21	0 0	0 0	+2,54	−0,86	0,74
	16	−1 −3,54	−1,97 −1,29	−6,23 −4,14	0 0	0 0	+8,49	−0,48	0,23
	17	−1 −3,54	+6,89 +4,52	+2,06 +1,37	−6,89 +7,79	−2,06 +1,70	−11,70	+0,14	0,02
	18	−1 −3,54	+2,00 +1,31	+4,15 +2,76	0 0	0 0	+0,68	+1,21	1,46
		$(Z_{III})=\frac{+2,47 \quad +2,20 \quad +7,79 \quad +1,70}{4}=+3,54$						+0,01	$[p\varepsilon\varepsilon]=10,50$

Таблица 47

Пункт	Направление	Приближенное ориентирное направление R			(Z)	ε	Уравновешенный дирекционный угол α°			Измеренное направление N			ε_0	Уравновешенное направление		
		°	′	″			°	′	″	°	′	″		°	′	″
Бор	1—7	18	51	44,65	+0,63	+0,76	18	51	46,04	0	00	00	0	0	00	00
	2—16	43	30	52,95	+0,63	+0,64	43	30	54,22	24	39	08,3	—0,12	24	39	08,18
	3—9	67	21	21,75	+0,63	—0,92	67	21	21,46	48	29	37,1	—1,70	48	29	35,40
	4—12	98	46	23,45	+0,63	—0,49	98	46	23,59	79	54	38,8	—1,25	79	54	37,55
Азов	5—11	135	59	42,99	—0,03	—0,12	135	59	42,84	0	00	00	0	0	00	00
	6—17	162	27	09,49	—0,03	+0,14	162	27	09,60	26	27	26,5	+0,26	26	27	26,76
	7—1	198	51	46,09	—0,03	—0,02	198	51	46,04	62	52	03,1	+0,10	62	52	03,20
II	8—14	194	00	37,90	+4,96	—1,06	194	00	41,80	0	00	00	0	0	00	00
	9—3	247	21	15,40	+4,96	+1,10	247	21	21,46	53	20	37,5	+2,16	53	20	39,66
	10—18	286	37	48,60	+4,96	—0,24	286	37	53,32	92	37	10,7	+0,82	92	37	11,52
	11—5	315	59	37,70	+4,96	+0,18	315	59	42,84	121	58	59,8	+1,24	121	59	01,04
Центр	12—4	278	46	22,83	+0,27	+0,49	278	46	23,59	0	00	00	0	0	00	00
	13—15	334	15	15,83	+0,27	—1,51	334	15	14,59	55	28	53,0	—2,00	55	28	51,00
	14—8	14	00	40,53	+0,27	+1,00	14	00	41,80	95	14	17,7	+0,51	95	14	18,21
III	16—2	223	30	51,54	+3,54	—0,86	223	30	54,22	0	00	00	0	0	00	00
	17—6	342	27	06,54	+3,54	—0,48	342	27	09,60	118	56	15,0	+0,38	118	56	15,38
	18—10	106	37	49,64	+3,54	+0,14	106	37	53,32	243	06	58,1	+1,00	243	06	59,10
	15—13	154	15	09,84	+3,54	+1,21	154	15	14,59	290	44	18,3	+2,07	290	44	20,37

Направление	$X_н$ $X_к$ $\Delta X = X_к - X_н$	$Y_н$ $Y_к$ $\Delta Y = Y_к - Y_н$	lg ΔY lg ΔX lg tg α α
Бор — III	11 801,160 15 060,406 +3 259,246	55 809,620 58 904,156 +3 094,536	3,4905955 3,5131171 9,9774784 43° 30′ 54″,20
Бор — II	11 801,160 14 239,087 +2 437,927	55 809,620 61 653,698 +5 844,078	3,7667160 3,3870207 0,3796953 67° 21′ 21″,45
Азов — II	18 071,710 14 239,087 —3 832,623	57 951,960 61 653,698 +3 701,738	3,5684057 3,5834961*n* 9,9849096*n* 135° 59′ 42″,82
Азов — III	18 071,710 15 060,406 —3 011,304	57 951,960 58 904,156 +952,196	2,9787264 3,4787546*n* 9,4999718*n* 162° 27′ 09″,60
II — III	14 239,087 15 060,406 +821,319	61 653,698 58 904,156 —2 749,542	3,4392603*n* 2,9145119 0,5247484*n* 286° 37′ 53″,32
II — Центр	14 239,087 11 023,100 —3 215,987	61 653,698 60 851,170 —802,528	2,9044602*n* 3,5073149*n* 9,3971460 194° 00′ 41″,82
III — Центр	15 060,406 11 023,100 —4 037,306	58 904,156 60 851,170 +1 947,014	3,2893690 3,6060916*n* 9,6832774 154° 15′ 14″,57

II. Оценка точности

1. Определение ошибки единицы веса. Согласно формуле (52,2) получим

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n-q}} = \sqrt{\frac{10{,}50}{18-9}} = \pm 1'',08.$$

2. Определение средних квадратических ошибок координат вставляемого пункта II. На основании (52,3), (52,57) и (52,58) будем иметь:

$$M_{Y_{II}} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_{Y_{II}}}} = \pm 1'',08\sqrt{\frac{1}{69{,}38}} = \pm 0{,}13 \text{ } \partial м;$$

$$M_{X_{II}} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_{X_{II}}}} = \pm 1'',08\sqrt{\frac{69{,}81}{23{,}60\cdot 69{,}38}} = \pm 0{,}22 \text{ } \partial м;$$

где

$$\frac{1}{p_{Y_{II}}} = \frac{1}{[pdd\cdot 3]}; \quad \frac{1}{p_{X_{II}}} = \frac{[pdd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]\,[pdd\cdot 3]};$$

$$M^2 = M^2_{Y_{II}} + M^2_{X_{II}} = 0{,}065.$$

3. Дополнительная оценка точности, построение подеры для пункта II. Согласно формулам (52,59), (52,60) и (52,61) будем иметь:

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{-2\,[pcd\cdot 2]}{-([pcc\cdot 2]-[pdd\cdot 2]} = \frac{-2\cdot 3{,}17}{-(23{,}60-69{,}81)} = \frac{-6{,}34}{+46{,}21} = 0{,}13720;$$

$$2\Theta = 360^\circ - 7^\circ 49' = 352^\circ 11', \quad \Theta = 176^\circ\, 06';$$

$$A^2 = \mu^2\,\frac{[pcc\cdot 2]+[pdd\cdot 2]+w}{2D} = (1{,}08)^2\,\frac{23{,}6+69{,}8+46}{2\cdot 1640} = 0{,}049,$$

$$A = \pm 0{,}23 \text{ } \partial м = \pm 23 \text{ мм};$$

$$B^2 = \mu^2\,\frac{[pcc\cdot 2]+[pdd\cdot 2]-w}{2D} = (1{,}08)^2\,\frac{23{,}6+69{,}8-46}{2\cdot 1640} = 0{,}017,$$

$$B = \pm 0{,}12 \text{ } \partial м = \pm 12 \text{ мм},$$

где

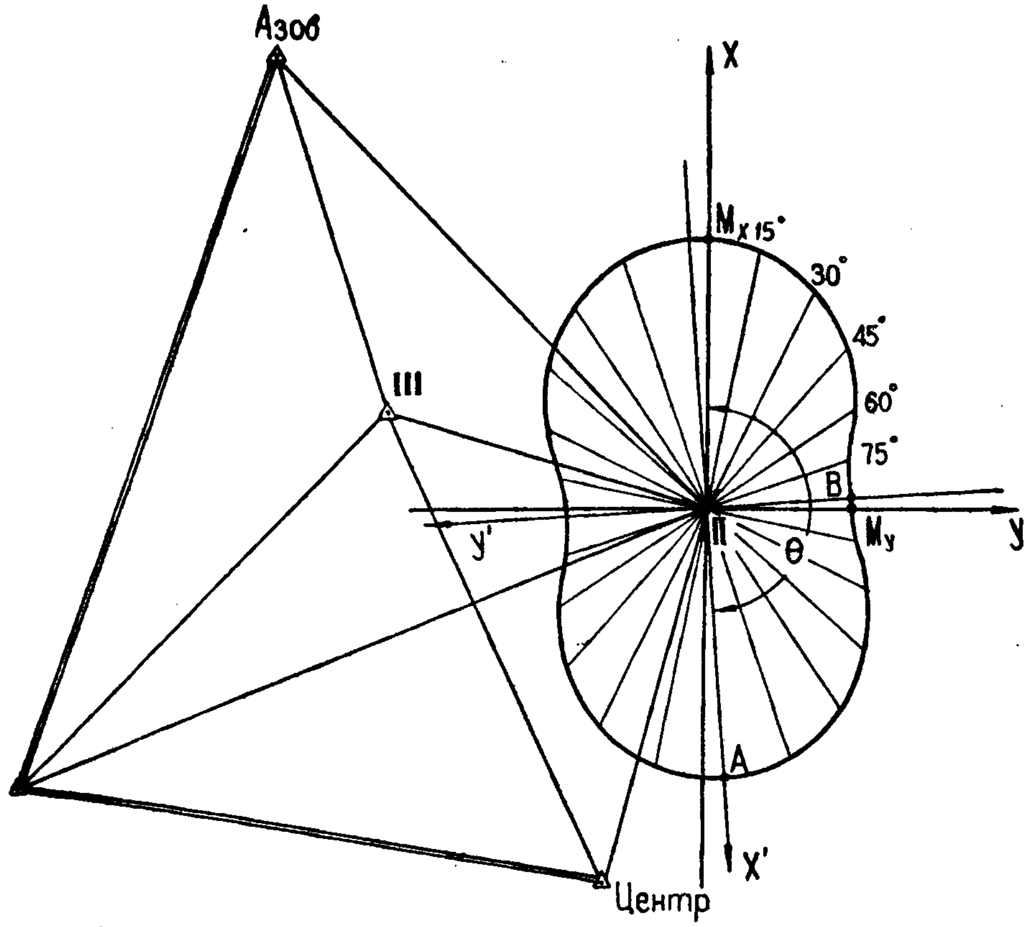
$$w = \frac{-2\,[pcd\cdot 2]}{\sin 2\Theta} = \frac{-2\cdot 3{,}17}{\sin 352^\circ\, 11'} = 46;$$

$$D = [pcc\cdot 2]\,[pdd\cdot 2] - [pcd\cdot 2]^2 = 23{,}60\cdot 69{,}81 - (3{,}17)^2 = 1640;$$

$$A^2 + B^2 = 0{,}066.$$

По формуле (52,55) вычисляются значения P — радиусов-векторов подеры (табл. 49).

По полученным данным строится подера (рис. 21). Определение радиусов-векторов подеры может быть выполнено графически, для чего на осях X' и Y' (рис. 22) в первом квадранте проводим дугу окружности радиусом A, а в третьем квадранте — дугу радиусом B.



Масштаб сети 1:50000, Масштаб подеры 2:1

Рис. 21

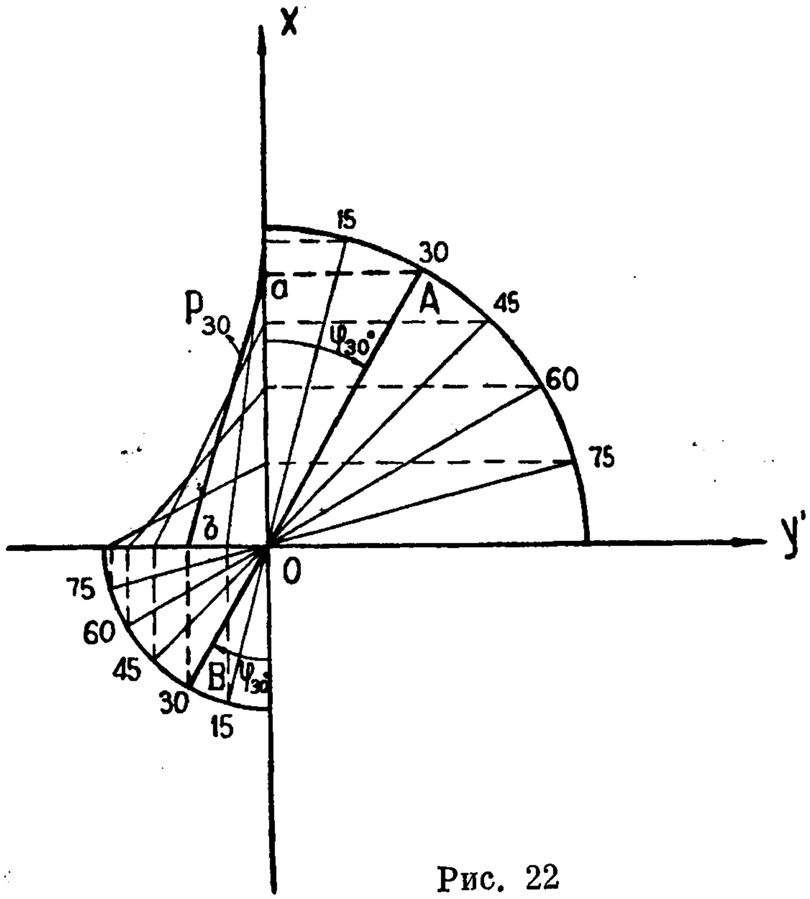


Рис. 22

Таблица 49

φ, *град*	A^2	$\cos\varphi$	$\cos^2\varphi$	$A^2\cos^2\varphi$	B^2	$\sin\varphi$	$\sin^2\varphi$	$B^2\sin^2\varphi$	P^2	P (*дм*)
15	0,049	0,966	0,933	0,046	0,017	0,259	0,067	0,001	0,047	0,22
30	0,049	0,866	0,750	0,037	0,017	0,500	0,250	0,004	0,041	0,20
45	0,049	0,707	0,500	0,025	0,017	0,707	0,500	0,008	0,033	0,18
60	0,049	0,500	0,250	0,012	0,017	0,866	0,750	0,013	0,025	0,16
75	0,049	0,259	0,067	0,003	0,017	0,966	0,933	0,016	0,019	0,14

Задаваясь рядом значений φ (через 15°), проводим радиусы A и B и проектируем их соответственно на оси X' и Y'. Например, при $\varphi = 30°$ имеем:

$$A\cos\varphi = \overline{oa},$$

$$B\sin\varphi = \overline{ob};$$

откуда

$$(\overline{ab})^2 = (\overline{oa})^2 + (\overline{ob})^2 = A^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi = P^2.$$

Таким образом, величина $\overline{ab} = P$ и будет являться радиусом-вектором подеры при $\varphi = 30°$. Из аналогичных построений определяется P и для остальных углов φ.

4. Определение средней квадратической ошибки дирекционного угла стороны между вставляемыми пунктами II—III. Составим весовую функцию

$$\alpha_{II\text{-}III} = \operatorname{arctg}\frac{Y_{III} - Y_{II}}{X_{III} - X_{II}}.$$

Определяем коэффициенты весовой функции:

$$f_1 = a_{10\text{-}18} = +6{,}89; \quad f_2 = b_{10\text{-}18} = +2{,}06;$$

$$f_3 = -a_{10\text{-}18} = -6{,}89; \quad f_4 = -b_{10\text{-}18} = -2{,}06.$$

В табл. 45 в колонке f вычисляется величина, обратная весу функции по формуле (45,17).

Средняя квадратическая ошибка дирекционного угла будет равна

$$m_{\alpha_{II\text{-}III}} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_{\alpha_{II\text{-}III}}}} = \pm 1'',08\sqrt{0{,}69} = \pm 0'',9.$$

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ К ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК

Глава VIII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 54. Случайные события и вероятности

Рассматриваемые в теории вероятностей явления **называются событиями.**

Под «случайными событиями» в теории вероятностей понимают всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта при наличии определенного комплекса условий.

Осуществление рассматриваемого комплекса условий **называется испытанием.**

Простейшими примерами таких событий могут служить: выпадение той или иной оцифрованной грани при бросании кубика, причем испытанием является бросание кубика, а случайным событием, например, выпадение грани с цифрой 6; второй пример: испытание — бросание монеты, случайное событие — выпадение герба.

Говоря, что какое-то событие случайно и не может быть предсказано с полной уверенностью, мы стремимся установить, в какой мере имеются основания ожидать наступления данного события, т. е. стремимся определить его **вероятность.**

Если обозначить количество случаев появления данного события через k, а общее число произведенных испытаний через n, то отношение $\frac{k}{n}$ называется **относительной частотой случайного события или статистической вероятностью.**

Относительную частоту (статистическую вероятность) события A обозначают знаком $P^*(A)$ и вычисляют по формуле

$$P^*(A)=\frac{k}{n}. \tag{54,1}$$

При небольшом числе опытов частота события $P^*(A)$ носит в значительной мере случайный характер и может заметно изменяться от одной группы опытов к другой. Однако практика показывает, что при многократном повторении испытаний относительная частота

$\frac{k}{n}$ случайного события обладает определенной устойчивостью. Так, если многократно бросать правильный кубик, сделанный из однородного материала, то относительная частота выпадения граней с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 колеблется около одного и того же числа $\frac{1}{6}$, или если бросать монету, то относительная частота выпадения герба должна быть близкой к $\frac{1}{2}$.

Устойчивость относительной частоты можно объяснить только проявлением некоторого объективного свойства случайного события. Так, примерное равенство относительных частот выпадения граней с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 при бросании правильного кубика объясняется его симметрией, делающей одинаково возможным выпадение каждого числа от 1 до 6.

В табл. 50 приведены результаты опытов с бросанием монеты.

Таблица 50

Лицо, производившее опыт	Число бросаний	Частота выпадения герба
Buffon	4 040	0,51
Ученики Morgan'а	4 092	0,5005
Griffith	8 178	0,5004
Pearson	12 000	0,5016
Pearson	24 000	0,5005

Из данных таблицы видно, что в случае бросания монеты частота выпадения герба действительно оказывается весьма близкой к $\frac{1}{2}$. Это свойство **устойчивости частоты** подтверждается всем опытом практической деятельности человека и является одной из наиболее характерных закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях.

Численная мера степени объективной возможности того или иного случайного события называется вероятностью случайного события.

Вероятность события позволяет количественно сравнивать между собой события по степени их возможности. Понятие вероятности события в самой своей основе связано с опытом, практическим понятием частоты события: на основании опыта мы считаем более вероятными те события, которые происходят чаще; менее вероятными те события, которые происходят реже; мало вероятными те, которые почти никогда не происходят.

Сравнивая между собой различные события по степени их возможности, необходимо установить какую-то единицу измерения. В качестве такой единицы измерения естественно принять вероятность **достоверного события**, т. е. такого события, которое в результате опыта непременно должно произойти. Примером достоверного события является выпадение грани с любой цифрой от 1 до 6 при бросании кубика. Если приписать достоверному событию вероятность, равную единице, то все другие события — возможные, но не достоверные, будут характеризоваться вероятностями, меньшими единицы, т. е. составляющими какую-то долю единицы.

Противоположностью по отношению к достоверному событию является **невозможное событие**, т. е. такое событие, которое в данном опыте произойти не может. Вероятность невозможного события равна нулю. Пример невозможного события — выпадение цифры 9 при бросании кубика с гранями, расцифрованными от 1 до 6.

Как и относительная частота случайного события, его вероятность является безразмерной величиной, заключенной между 1 и 0.

Рассмотрим далее некоторые вспомогательные понятия:

1. **Несовместимые события.** Несколько случайных событий называются несовместимыми в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться одновременно. Примеры: одновременное выпадение герба и цифры при бросании монеты; попадание и промах при одном выстреле; появление граней с цифрами 2 и 5 при однократном бросании кубика и т. д.

2. **Полная группа событий.** Случайные события образуют полную группу попарно несовместимых событий, если при каждом испытании должно появиться одно и только одно из них, т. е. если каждые два из них несовместимы и хотя бы одно из них обязательно должно произойти. Примеры: выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты; попадание и промах при выстреле, появление цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6 при бросании кубика и т. д.

3. **Равновозможные события.** Несколько событий в данном опыте называются равновозможными, если по условиям симметрии есть основание считать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое. Примеры: выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты; появление граней с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, и 6 при бросании кубика; появление шара с № 1, 2, 3, . . ., 10 при вынимании одного шара из урны, содержащей 10 одинаковых пронумерованных шаров.

Существуют группы событий, обладающие всеми тремя перечисленными выше свойствами. Эти события называются **случаями** (**или шансами**).

Если какой-либо опыт по своей структуре обладает симметрией возможных исходов, то случаи представляют собой исчерпывающую систему равновозможных и исключающих друг друга исходов опыта. Про такой опыт говорят, что он **«сводится к схеме случаев»**. Схема случаев по преимуществу имеет место в искусственно организованных опытах, в которых заранее и сознательно обеспечена одинаковая возможность исходов опыта.

Для таких опытов возможен непосредственный подсчет вероятностей, основанный на оценке доли так называемых **благоприятных** случаев в общем числе случаев. Случай называется благоприятным некоторому событию, если появление этого случая влечет за собой появление данного события. Например, при бросании кубика событию A — появление четной цифры на верхней грани — благоприятны три случая: 2, 4, 6 и неблагоприятны остальные три.

Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события A в данном опыте можно оценить по относительной доле благоприятных случаев. Вероятность события A вычислится как отношение числа благоприятных случаев к общему числу случаев

$$P(A)=\frac{k}{n}, \tag{54,2}$$

где $P(A)$ — обозначение вероятности события A;
n — общее число случаев;
k — число случаев, благоприятных событию, A.

Формула (54, 2) выражает так называемое классическое определение вероятности: **если результаты испытания можно представить в виде полной группы n равновозможных попарно несовместимых случаев и если случайное событие A появляется только в k случаях, то вероятность события A равна $\frac{k}{n}$, т. е. равна отношению числа случаев, благоприятных событию, к общему числу всех случаев.** Так как число благоприятных случаев всегда заключено между 0 и n, то вероятность события, вычисленная по формуле (54,2), всегда есть рациональная правильная дробь

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1. \tag{54,3}$$

Пример 1. При бросании двух монет герб может выпасть 2 раза, 1 раз или 0 раз (не выпасть ни разу); определить вероятности всех этих трех случайных событий. Перечисленные события образуют полную группу и, очевидно, попарно несовместимы. Но они не являются равновозможными. Для того чтобы применить классическое определение вероятности, надо представить все возможные исходы испытания в виде полной группы равновозможных событий. По соображениям симметрии это можно сделать следующим образом:

Первая монета	Герб	Герб	Не герб	Не герб
Вторая монета	Герб	Не герб	Герб	Не герб

Перечисленные четыре исхода испытания естественно считать равновозможными, причем они снова составляют полную группу попарно несовместимых событий. Поэтому вероятность выпадения двух гербов равна $\frac{1}{4}$, вероятность выпадения одного герба равна $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, вероятность невыпадения герба ни на одной монете равна $\frac{1}{4}$.

Пример 2. В урне находятся два белых и три черных шара. Из урны наугад вынимается один шар. Требуется найти вероятность того, что этот шар будет белым. Обозначим A событие, состоящее в появлении белого шара; общее число случаев $n=5$; число случаев, благоприятных событию A, $k=2$. Тогда вероятность события A будет равна

$$P(A)=\frac{2}{5}.$$

Формула (54,2) для непосредственного подсчета вероятностей применима только тогда, когда опыт, в результате которого может появиться интересующее нас событие, обладает симметрией возможных исходов, т. е. сводится к схеме случаев.

Однако многие опыты не могут быть сведены к схеме случаев и вероятности событий, связанных с этими опытами, нельзя вычислить по формуле (54,2).

Вместе с тем ясно, что каждое событие обладает определенной степенью объективной возможности, которую в принципе можно выразить численно и которая при повторении подобных опытов будет отражаться в относительной частоте соответствующих событий. Поэтому мы будем считать, что каждое событие, связанное с массой однородных опытов, сводящееся к схеме случаев или нет, имеет определенную вероятность, заключенную между нулем и единицей. Для событий, сводящихся к схеме случаев, эта вероятность может быть вычислена непосредственно по формуле (54,2); для событий, не сводящихся к схеме случаев, применяются другие способы определения вероятностей.

Между частотой события и вероятностью существует глубокая органическая связь. С одной стороны, оценивая степень возможности какого-либо события, мы неизбежно связываем эту оценку с большей или меньшей частотой появления аналогичных событий на практике. С другой стороны, характеризуя вероятность события каким-то числом, мы не можем придать этому числу иного реального значения и иного практического смысла, чем относительная частота появления данного события при большом числе опытов.

Благодаря этой связи вероятность того или иного события может быть приближенно определена по частоте события при большом числе опытов. Но для определения вероятности события, не сводящегося к схеме случаев, не всегда необходимо непосредственно определять из опыта его частоту. Теория вероятностей располагает многими способами, позволяющими определять вероятности событий косвенно через вероятности других событий, с ними связанных. Однако надежность и объективная ценность всех практических расчетов вероятности определяется качеством и количеством экспериментальных данных, на базе которых этот расчет выполняется.

Раньше мы установили понятие достоверного и невозможного события. На практике часто приходится иметь дело не с достоверным и невозможным событиями, а с так называемыми «практически достоверными» и «практически невозможными» событиями.

Событие, вероятность которого не в точности равна единице, но весьма близка к ней, называется практически достоверным событием.

Событие, вероятность которого не в точности равна нулю, но весьма близка к нему, называется практически невозможным событием.

На этих понятиях основывается все практическое применение теории вероятностей.

§ 55. Основные теоремы теории вероятностей

В предыдущем параграфе мы познакомились с классической формулой для вычисления вероятности случайного события, которое сводится к схеме случаев, и со способом приближенного определения вероятности по частоте для события, которое к схеме случаев не сводится.

Однако эти непосредственные способы определения вероятности на практике применяются довольно редко, их применение не всегда удобно и не всегда возможно. Поэтому для определения вероятностей сложных событий применяются не непосредственные методы, а косвенные.

Типичным для теории вероятностей является следующая постановка задачи: имеется некоторая совокупность случайных событий, вероятности которых известны (заданы); требуется найти вероятности других случайных событий, связанных с данными событиями определенным образом. В основе этих вычислений лежат теоремы сложения и умножения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей

Пусть в урне имеется n совершенно одинаковых шаров, отличающихся только по цвету. Среди них k_1 — белых шаров (событие A), k_2 — желтых шаров (событие B) и k_3 — черных шаров (событие C). Шары тщательно перемешаны; не глядя в урну вынимаем один шар. Определим вероятность того, что это будет светлый шар (событие E). События A, B и C — несовместимы, т. е. наступление одного из них исключает наступление других и составляет полную группу событий. Событие E, заключающееся в том, что произойдет либо событие A, либо событие B, называется суммой событий A и B.

По формуле (54,2) имеем

$$P(E)=\frac{k}{n}.$$

В данном опыте k — число случаев, благоприятствующих событию E (или белый или желтый шар), равно

$$k=k_1+k_2, \tag{55,1}$$

а общее число случаев

$$n=k_1+k_2+k_3. \tag{55,2}$$

Тогда вероятность события E

$$P(E)=\frac{k_1+k_2}{n}. \tag{55,3}$$

Но вероятность появления белого шара

$$P(A)=\frac{k_1}{n}, \tag{55,4}$$

вероятность появления желтого шара

$$P(B)=\frac{k_2}{n}. \qquad (55,5)$$

Следовательно, на основании формул (55,3), (55,4) и (55,5) имеем

$$P(E)=\frac{k_1}{n}+\frac{k_2}{n}=P(A)+P(B). \qquad (55,6)$$

Выражение (55,6) записывается следующим образом:

$$P(A \text{ или } B)=P(A)+P(B). \qquad (55,7)$$

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если событие E состоит в осуществлении одного из двух несовместимых событий A или B (безразлично какого именно), то вероятность события E равна сумме вероятностей событий A и B.

Очевидно, методом полной индукции можно обобщить теорему сложения, применив ее к произвольному числу несовместимых событий:

$$P(A \text{ или } B \text{ или } \ldots \text{ или } F)=P(A)+P(B)+\ldots+P(F). \qquad (55,8)$$

Пример 1. Пусть в урне 15 одинаковых шаров, отличающихся только по цвету. Среди них 4 — белых, 6 — желтых и 5 — черных шаров. Определить вероятность того, что вынутый наугад шар будет светлый (или белый или желтый).

Вероятность появления белого шара на основании (55,4) будет равна

$$P(A)=\frac{4}{15};$$

вероятность появления желтого шара

$$P(B)=\frac{6}{15}.$$

Тогда вероятность того, что вынутым будет светлый шар, равна

$$P(A \text{ или } B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{15}+\frac{6}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Возле трамвайной остановки, через которую проходят маршруты № 3, № 4, № 6, № 9 и № 11 пассажир ждет трамвая № 4, или № 9, или № 11. Считая что трамваи всех маршрутов появляются в среднем одинаково часто, найти вероятность того, что первый подошедший трамвай будет нужного пассажиру маршрута.

Вероятность прибытия к остановке первым любого из перечисленных номеров трамваев равна

$$P(A)=\frac{1}{5}.$$

Тогда вероятность того, что первым подойдет трамвай № 4, или № 9 или, № 11, равна

$$P(A_{№4} \text{ или } A_{№9} \text{ или } A_{№11})=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}.$$

Следствия, вытекающие из теоремы сложения вероятностей:

Следствие 1. Если попарно несовместимые случайные события A, B, ..., F образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице.

Действительно, так как события A, B, ..., F образуют полную группу, то появление хотя бы одного из них является событием достоверным, следовательно,

$$P(A \text{ или } B, \text{ или } \ldots, \text{ или } F) = 1. \qquad (55,9)$$

Тогда на основании формулы (55,8) получим

$$P(A) + P(B) + \ldots + P(F) = 1. \qquad (55,10)$$

Пример. В урне имеется 10 одинаковых шаров, из них 7 темных и 3 светлых шара. Определить вероятность того, что вынутым будет или темный или светлый шар.

Вероятность вынуть темный шар равна

$$P(A) = \frac{7}{10};$$

вероятность вынуть светлый шар равна

$$P(B) = \frac{3}{10}.$$

Тогда вероятность того, что будет вынут или темный шар или светлый шар, на основании (55,10) будет равна

$$P(A \text{ или } B) = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1.$$

Рассмотрим теперь противоположные события.

Если полная группа событий состоит только из двух несовместимых событий и при этом наступление одного из них равносильно ненаступлению другого, то такие события называются противоположными.

Событие, противоположное событию A, принято обозначать $\bar{A}$ (не A).

Примеры противоположных событий:

1) A — выпадение герба при бросании монеты,
$\bar{A}$ — выпадение цифры при бросании монеты;

2) A — попадание при выстреле,
$\bar{A}$ — промах при выстреле.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \qquad (55,11)$$

Это следствие является частным случаем следствия 1. На практике часто бывает легче вычислить вероятность противоположного события $\bar{A}$, тогда вероятность прямого события вычислится по формуле

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \qquad (55,12)$$

Пример. Круговая мишень (рис. 23) состоит из трех зон: I, II и III. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле 0,15, во вторую 0,23, в третью 0,17. Найти вероятность промаха (прямое событие).

Обозначим: $\left.\begin{matrix} A \text{ — промах,} \\ \overline{A} \text{ — попадание} \end{matrix}\right\}$ противоположные события.

Тогда

$$\overline{A}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3,$$

где $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ — попадание соответственно в первую, вторую и третью зоны. Вероятность попадания (противоположное событие) равна:

$$P(\overline{A})=P(\overline{A}_1)+P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_3)=0{,}15+0{,}23+0{,}17=0{,}55,$$

откуда вероятность промаха (прямого события)

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0{,}45.$$

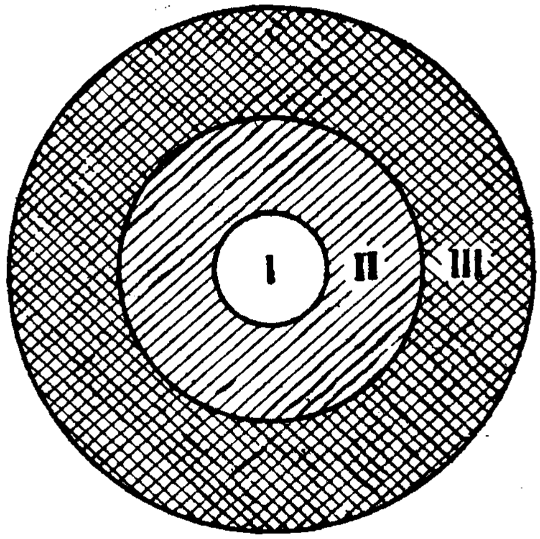


Рис. 23

Рассмотрим понятие совмещения случайных событий.

Под совмещением случайных событий A и B понимают случайное событие, заключающееся в том, что в результате испытания произойдет и событие A и событие B.

Совмещение случайных событий A и B обозначается (A и B).

Рассматриваемые события A и B могут быть независимыми и зависимыми.

Событие A называется независимым от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называется зависимым от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Теорема умножения вероятностей

Пусть из двух урн с шарами вынимается по одному шару. Событие A заключается в том, что шар, вынутый из первой урны, окажется белым, событие B — в том, что шар, вынутый из второй урны, окажется белым. Эти случайные события **независимы**, ибо цвет шара, вынутого из первой урны, не может влиять на цвет шара, вынутого из второй урны.

Подсчитаем вероятность совмещения событий A и B, т. е. вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми. Обозначим количество всех шаров в первой урне n_1, во второй урне n_2, а количество белых шаров в них соответственно k_1 и k_2. Тогда вероятности события A и события B будут равны

$$P(A)=\frac{k_1}{n_1}, \quad P(B)=\frac{k_2}{n_2}. \qquad (55{,}13)$$

Подсчитаем число всех возможных случаев: из первой урны могли вынуть любой из n_1 шаров, из второй урны любой из n_2 шаров; таким образом, число всех возможных случаев будет равно $n_1 \cdot n_2$.

Подсчитаем число благоприятных случаев: на каждый вынутый из первой урны белый шар имеем k_2 благоприятных случаев появления белого шара из второй урны, т. е. всего благоприятных случаев будет $k_1 \cdot k_2$.

Искомая вероятность совместного появления белых шаров из первой и второй урны будет равна

$$P(A \text{ и } B) = \frac{k_1 k_2}{n_1 n_2} \tag{55,14}$$

или на основании (55,13) будем иметь

$$P(A \text{ и } B) = P(A)\,P(B). \tag{55,15}$$

Эта формула выражает правило умножения вероятностей для независимых случайных событий и читается так: **вероятность совместного наступления двух взаимно независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.**

Обобщая эту формулу на большее число случайных событий, будем иметь

$$P(A \text{ и } B \text{ и } C \text{ и } \ldots \text{ и } F) = P(A)\,P(B)\,P(C) \ldots P(F). \tag{55,16}$$

Рассмотрим далее правило умножения вероятностей для **зависимых** случайных событий. Докажем теорему умножения для схемы случаев. Пусть в урне имеется n одинаковых шаров, различающихся по двум признакам: по цвету и рисунку (рис. 24).

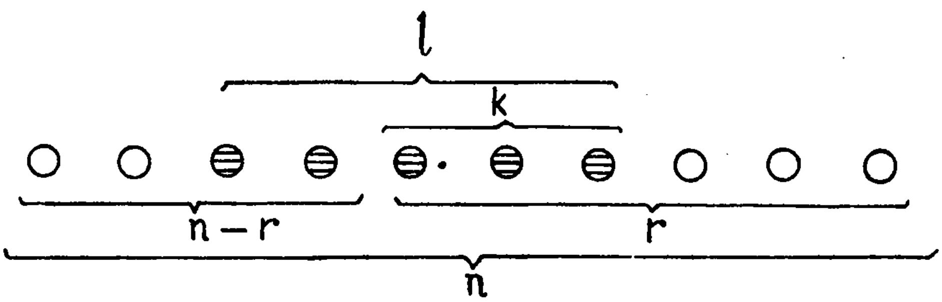


Рис. 24

Обозначим:

r — количество цветных шаров ($n - r$ — белых шаров);

l — количество шаров с рисунком ($n - l$ — шары без рисунка);

k — количество цветных шаров с рисунком.

Пусть событие A заключается в появлении цветного шара, событие B — в появлении шара с рисунком. Совмещение событий A и B означает появление цветного шара с рисунком.

Вероятности этих случайных событий соответственно равны

$$P(A) = \frac{r}{n}; \quad P(B) = \frac{l}{n}; \quad P(A \text{ и } B) = \frac{k}{n}. \tag{55,17}$$

Связь вероятности события (A и B) с вероятностью события A, на основании (рис. 24) и формулы (55,15) будет равна

$$\frac{k}{n}=\frac{r}{n}\frac{k}{r}. \tag{55,18}$$

Отношение $\frac{k}{r}$ — количества цветных шаров с рисунками к количеству всех цветных шаров также имеет характер вероятности, а именно, оно дает вероятность выбрать шар с рисунком при условии, что выбор производится только из числа цветных шаров. Такую вероятность называют условной вероятностью события B при условии осуществления события A и обозначают

$$P(B/A)=\frac{k}{r}. \tag{55,19}$$

Тогда соотношение (55,18) можно записать так:

$$P(A \text{ и } B)=P(A)\,P(B/A). \tag{55,20}$$

Эта формула выражает общее правило умножения вероятностей: **вероятность совмещения двух случайных событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого.**

Теорема умножения вероятностей может быть обобщена для случая произвольного числа событий: **вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место:**

$$P(A \text{ и } B \text{ и } C \text{ и } \ldots \text{ и } F)=P(A)\,P(B/A)\,P(C/A \text{ и } B)\ldots$$

$$\ldots P(F/A \text{ и } B \text{ и } C\ldots). \tag{55,21}$$

Следствие 1. Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A, т. е. если

$$P(A)=P(A/B), \tag{55,22}$$

то

$$P(B)=P(B/A). \tag{55,23}$$

Напишем теорему умножения вероятностей в двух формах:

$$\left.\begin{aligned} P(A \text{ и } B)&=P(A)\,P(B/A);\\ P(A \text{ и } B)&=P(B)\,P(A/B). \end{aligned}\right\} \tag{55,24}$$

Отсюда при $P(A)\neq 0$ будем иметь

$$P(A)\,P(B/A)=P(B)\,P(A/B) \tag{55,25}$$

или в соответствии с (55,16)

$$P(A)\,P(B/A)=P(B)\,P(A). \tag{55,26}$$

Разделив обе части равенства (55,26) на $P(A)$, получим

$$P(B/A)=P(B). \qquad (55,27)$$

Отсюда следует, что **два события называются взаимно независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.**

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 1. В урне два белых шара и четыре черных; два лица вынимают из урны по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара белые. Рассмотрим события: A — появление белого шара у 1-го лица, B — появление белого шара у 2-го лица.

Вероятность события A до того, как известно что-либо о событии B, равна

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Тогда условная вероятность события B равна

$$P(B/A)=\frac{1}{5},$$

а по теореме умножения вероятностей получим

$$P(A \text{ и } B)=P(A)\,P(B/A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}.$$

Пример 2. Условия предыдущего примера, но после первого вынимания шар возвращается в урну. В данном случае события A и B независимы и для решения задачи должна быть применена формула (55,15)

$$P(A \text{ и } B)=P(A)\,P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

Общие правила сложения вероятностей

Если случайные события A и B независимы, то

$$P(A \text{ или } B)=P(A)+P(B)-P(A)\,P(B). \qquad (55,28)$$

Для доказательства этой формулы заметим, что события (A или B) и ($\bar{A}$ и $\bar{B}$) взаимно противоположны (если происходит хотя бы одно из двух событий A или B, то значит, не может произойти и совмещение противоположных событий $\bar{A}$ и $\bar{B}$). На основании формулы (55,12) и правила умножения получим

$$P(A \text{ или } B)=1-P(\bar{A} \text{ и } \bar{B})=1-P(\bar{A})\,P(\bar{B})=$$
$$=1-\{1-P(A)\}\,\{1-P(B)\}=P(A)+P(B)-P(A)\,P(B),$$

или на основании (55,15)

$$P(A \text{ или } B)=P(A)+P(B)-P(A \text{ и } B). \qquad (55,29)$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей появления каждого из этих событий в отдельности без вероятности появления обоих событий вместе.

Пример. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания для первого стрелка равна $P(A) = 0{,}9$, для второго $P(B) = 0{,}8$. Требуется определить вероятность поражения цели, т. е. вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадет в цель.

Если применить для решения этой задачи формулу (55,7), то

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) = 0{,}9 + 0{,}8 = 1{,}7.$$

Это произошло потому, что формула (55,7) применима только к несовместимым событиям, составляющим полную группу. Поэтому, так как события A и B в настоящем примере являются совместимыми и независимыми, должна быть использована формула (55,29)

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B) = 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}98.$$

Формула полной вероятности

Следствием обеих основных теорем — теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей — **является так называемая формула полной вероятности**, которая формулируется следующим образом: **если случайные события** $H_1, H_2, \ldots, H_n$ **(гипотезы) попарно несовместимы и образуют полную группу событий и если событие** A **может осуществиться только с каким-нибудь одним из этих событий**, то

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n), \tag{55,30}$$

т. е. вероятность события A вычисляется как сумма произведений вероятности каждого события H_i (гипотезы) на условную вероятность события A под действием событий H_i.

При указанных выше условиях событие A равносильно совмещению событий

$$\{H_1 \text{ или } H_2 \text{ или} \ldots \text{или } H_n\} \text{ и } A.$$

Но это совмещение происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из совмещений

$$\{H_1 \text{ и } A\} \text{ или } \{H_2 \text{ и } A\} \text{ или} \ldots \text{или } \{H_n \text{ и } A\}.$$

Применив правило сложения вероятностей, получим

$$P(A) = P(\{H_1 \text{ или } H_2 \text{ или} \ldots \text{или } H_n\} \text{ и } A) =$$
$$= P(H_1 \text{ и } A) + P(H_2 \text{ и } A) + \ldots + P(H_n \text{ и } A), \tag{55,31}$$

а на основании правила умножения вероятностей перепишем

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n)$$

или

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A/H_i), \tag{55,32}$$

что и следовало доказать.

Формула Бейеса (теорема гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместимых гипотез H_1, H_2, ..., H_n. Вероятности этих гипотез до опыта известны и равны соответственно $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$.

Произведен опыт, в результате которого наблюдалось появление некоторого события A. Найти условную вероятность $P(H_i/A)$ для каждой гипотезы.

Из теоремы умножения имеем

$$P(A \text{ и } H_i)=P(A)\,P(H_i/A)=P(H_i)\,P(A/H_i) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{55,33}$$

или

$$P(A)\,P(H_i/A)=P(H_i)\,P(A/H_i), \tag{55,34}$$

откуда

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\,P(A/H_i)}{P(A)}. \tag{55,35}$$

или, выразив знаменатель полученной дроби по формуле полной вероятности (55,33), получим

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\,P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A/H_i)}. \tag{55,36}$$

Эта формула носит название **формулы Бейеса** и имеет большое применение в практике вычисления вероятностей.

§ 56. Случайные величины и их законы распределения

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Существуют прерывные или дискретные случайные величины и непрерывные случайные величины.

Прерывными (дискретными) случайными величинами называются такие, которые принимают только отделенные друг от друга значения. Возможные значения прерывных величин могут быть заранее перечислены.

Такие случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток, называются непрерывными случайными величинами.

Возможные значения непрерывных величин не могут быть заранее перечислены.

Ошибки измерений относятся к непрерывным случайным величинам. Случайную величину можно представить так: произведен опыт, в результате которого может появиться или не появиться некоторое событие A. Вместо события A можно рассматривать случайную величину X, которая равна 1, если событие A происходит, и равна 0, если событие A не происходит. Случайная величина X является прерывной, она имеет два возможных значения: 0 и 1. Эта случайная величина X называется **характеристической случайной величиной** события A.

Условимся в дальнейшем случайные величины обозначать большими буквами, а их возможные значения — соответствующими малыми буквами. Например X — число попаданий при трех выстрелах, возможные значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Величина X может принимать каждое из этих значений с некоторой вероятностью. В результате опыта величина X примет одно из этих значений, т. е. произойдет одно из полной группы несовместимых событий:

$$\left.\begin{array}{l} X = x_1; \\ X = x_2; \\ \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \\ X = x_n. \end{array}\right\} \qquad (56,1)$$

Обозначим вероятности этих событий буквами P с соответствующими индексами:

$$P(X = x_1) = P_1; \quad P(X = x_2) = P_2; \ \ldots; \ P(X = x_n) = P_n, \qquad (56,2)$$

так как несовместные события (56,1) образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1, \qquad (56,3)$$

т. е. сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице. Эта суммарная вероятность каким-то образом распределена между отдельными значениями. Случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим это распределение, т. е. в точности укажем, какой вероятностью обладает каждое из событий (56,1). Этим установим так называемый закон распределения случайной величины.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. О случайной величине будем говорить, что она подчинена данному закону распределения.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности.

Возможные значения x	x_1	x_2	. . .	x_n
Вероятность P	P_1	P_2	. . .	P_n

Такая таблица называется таблицей **распределения вероятностей дискретной случайной величины** x.

На основании (56,3)

$$P_1+P_2+\ldots+P_n=1. \tag{56,4}$$

Пример. Число очков, выпадающее на верхней грани правильного кубика, есть дискретная случайная величина со следующей таблицей распределения вероятностей:

Число очков	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Для придания таблице распределения более наглядного вида строится график, называемый **многоугольником распределения** (рис. 25).

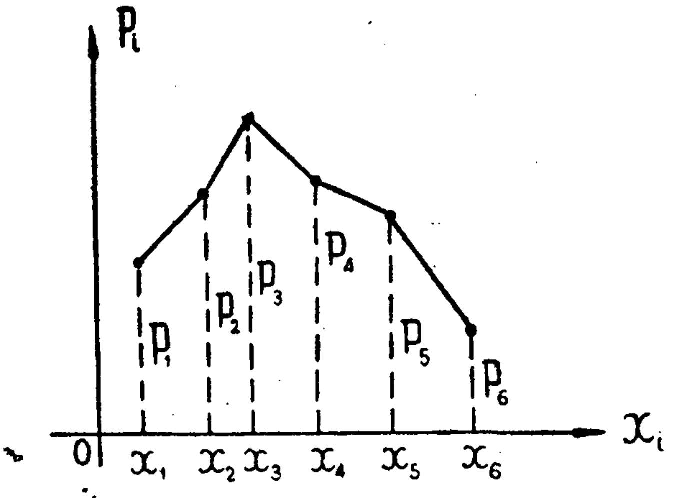


Рис. 25

Ряд распределения и многоугольник распределения полностью характеризуют случайную величину, они являются одной из форм закона распределения.

Однако для непрерывной случайной величины такой характеристикой воспользоваться невозможно, так как она имеет бесчисленное множество возможных значений, сплошь заполняющих некоторый промежуток.

Для количественной характеристики этого распределения вероятностей удобно воспользоваться не вероятностью события $X=x$, а вероятностью события $X<x$, где x — некоторая текущая переменная. Вероятность этого события есть некоторая функция от x

$$F(x)=P(X<x). \tag{56,5}$$

Эта функция называется **функцией распределения случайной величины** X; ее иногда называют также **интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.** Функция распределения — самая универсальная характеристика случайной величины. Она существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин и является наиболее общей формой закона распределения.

Эта функция обладает следующими свойствами:

1. Функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция своего аргумента, т. е. при $x_2>x_1$ $F(x_2)\geqslant F(x_1)$.

2. На минус бесконечности функция распределения равна нулю

$$F(-\infty)=0. \tag{56,6}$$

3. На плюс бесконечности функция распределения равна единице

$$F(+\infty)=1. \tag{56,7}$$

Рассмотрим геометрический смысл этих свойств для случайной точки X (рис. 26), которая в результате опыта может занять то или

Рис. 26

иное положение на оси OX. Тогда функция распределения $F(x)$ есть вероятность того, что случайная точка X в результате опыта попадет левее точки x.

Если точку x перемещать вправо по оси, то вероятность попадания случайной точки X левее x увеличится, т. е. функция $F(x)$ с возрастанием x убывать не может.

Если точку x неограниченно перемещать влево по оси, то вероятность попадания случайной величины X левее точки x становится все менее возможной и в пределе стремится к нулю, т. е. $F(-\infty)=0$.

Перемещая точку x неограниченно вправо, мы видим, что вероятность попадания случайной величины X в интервал от $-\infty$ до x все возрастает и событие $X<x$, становится все достовернее, а в пределе $F(+\infty)=1$.

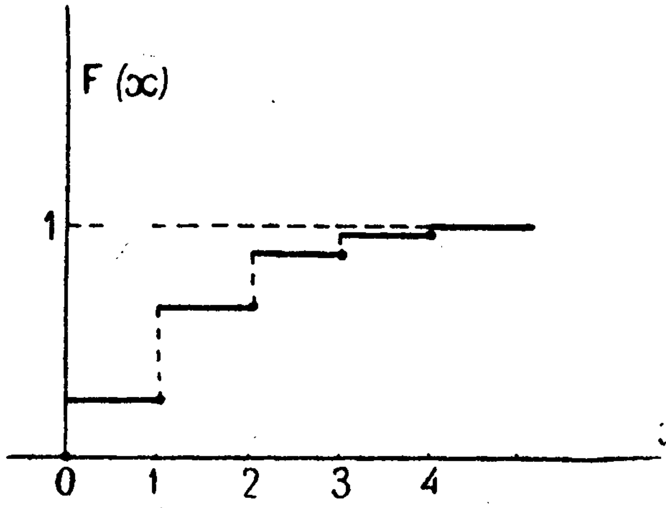


Рис. 27

График функции $F(x)$ в общем случае представляет собой график неубывающей функции, значения которой начинаются от 0 и доходят до 1.

Функция распределения любой прерывной (дискретной) случайной величины всегда есть разрывная ступенчатая функция (рис. 27), скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков прерывной функции $F(x)$ равна единице.

Функция распределения непрерывной случайной величины представляет собой функцию непрерывную во всех точках, как это показано на рис. 28.

Для решения практических вопросов бывает необходимо вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в некоторых пределах, например от α до β. Это событие мы будем называть «попаданием случайной величины X на участок от α до β», что равносильно неравенству

$$\alpha \leqslant X < \beta. \tag{56,8}$$

Выразим вероятность этого события через функцию распределения величины X, для чего рассмотрим три события:

$$\left.\begin{array}{l}\text{событие } A, \text{ состоящее в том, что } X < \beta, \\ \text{событие } B, \text{ состоящее в том, что } X < \alpha, \\ \text{событие } C, \text{ состоящее в том, что } \alpha \leqslant X < \beta.\end{array}\right\} \tag{56,9}$$

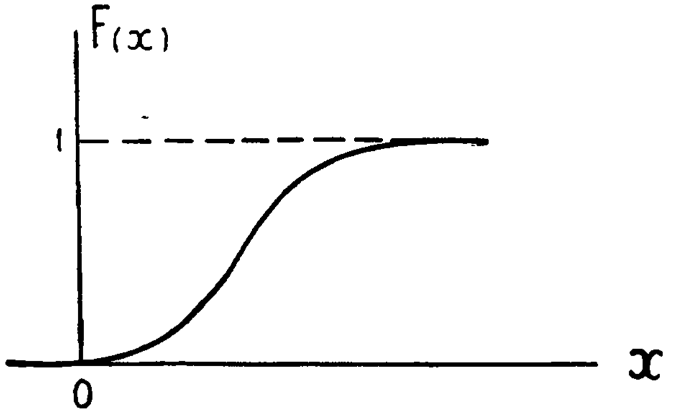


Рис. 28

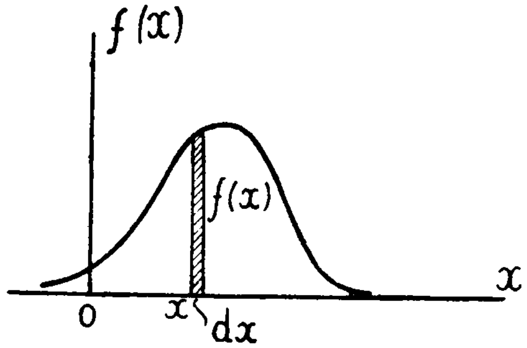


Рис. 29

События B и C являются независимыми.

Учитывая, что $A = B$ или C, по теореме сложения вероятностей получим

$$P(X < \beta) = P(X < \alpha) + P(\alpha \leqslant X < \beta) \tag{56,10}$$

или

$$F(\beta) = F(\alpha) + P(\alpha \leqslant X < \beta), \tag{56,11}$$

откуда

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \tag{56,12}$$

т. е. вероятность попадания случайной величины на заданный участок равна приращению функции распределения на этом участке.

Если имеется **непрерывная** случайная величина X с функцией распределения, то вероятность попадания этой случайной величины на участок от x до $x + \Delta x$ на основании (56,12) будет равна

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x). \tag{56,13}$$

Рассмотрим отношение этой вероятности к длине участка, т. е. **среднюю вероятность**, приходящуюся на единицу длины на этом участке. Приближая Δx к нулю, в пределе получим производную от функции распределения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \tag{56,14}$$

Обозначим

$$F'(x) = f(x).$$

Функция $f(x)$ — производная от функции распределения характеризует как бы плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке. Эта функция называется **плотностью распределения**. Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется **кривой распределения** (рис. 29). Плотность распределения, так же как и функция распределения, есть одна из форм закона распределения.

Рассмотрим непрерывную случайную величину X с плотностью распределения $f(x)$ и элементарный участок dx, примыкающий к точке x (рис. 29). Вероятность попадания случайной величины X на этот элементарный участок равна $f(x)\,dx$ — **элементу вероятности**, что соответствует площади элементарного участка, опирающегося на dx. Тогда вероятность попадания величины X на отрезок от α до β, выраженная через плотность распределения, будет равна сумме элементов вероятности на всем участке, т. е. интегралу

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \tag{56,15}$$

Геометрически эта вероятность равна площади кривой распределения, опирающейся на участок (α, β).

Чтобы выразить функцию распределения через плотность, возьмем

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x), \tag{56,16}$$

откуда по формуле (56,15)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{56,17}$$

Геометрически $F(x)$ есть не что иное, как площадь кривой распределения, лежащая левее точки x.

Основные свойства плотности распределения:

1) плотность распределения есть неотрицательная функция

$$f(x) \geqslant 0, \tag{56,18}$$

т. е. вся кривая распределения лежит выше оси абсцисс;

2) интеграл в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ плотности распределения равен единице

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1, \tag{56,19}$$

т. е. полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

§ 57. Математическое ожидание случайной величины

Пусть имеется совокупность возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ некоторой прерывной случайной величины X (совокупность дождливых дней в году, различающихся величиной осадков в данном месте) с вероятностями $P_1, P_2, \ldots, P_n$, сумма которых равна единице.

Требуется охарактеризовать каким-то числом среднее значение случайной величины X, помня, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют свои вероятности. Для этого целесообразно воспользоваться «средним взвешенным» $M[X]$ из значений x_i, принимая за веса их вероятности:

$$M[X]=\frac{x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_nP_n}{P_1+P_2+\ldots+P_n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iP_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}P_i}; \qquad (57,1)$$

учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1$, получим

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_iP_i. \qquad (57,2)$$

Это выражение называют **математическим ожиданием случайной величины** X.

Математическим ожиданием $M[X]$ дискретной **случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на их вероятности P_i.**

Теперь рассмотрим понятие математического ожидания для непрерывной случайной величины. В этом случае оно будет равно

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx. \qquad (57,3)$$

Формула (57,3) получается из формулы (57,2), если в ней заменить отдельные значения x_i непрерывно изменяющимся параметром x, соответствующие вероятности P_i — элементом вероятности $f(x)\,dx$, конечную сумму — интегралом.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной K равно этой же постоянной

$$M[K]=K. \qquad (57,4)$$

2. Постоянный множитель K можно вынести за знак математического ожидания

$$M[KX]=\int_{-\infty}^{+\infty}Kxf(x)\,dx=K\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx. \qquad (57,5)$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно алгебраической сумме математических ожиданий этих величин

$$M[X_1+X_2+\ldots+X_n]=M[X_1]+M[X_2]+\ldots+M[X_n]. \qquad (57,6)$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин

$$M[X, Y] = M[X]\, M[Y]. \tag{57,7}$$

Вычисление математического ожидания от функции. Пусть X — дискретная случайная величина, принимающая значения x_i с вероятностями P_i, тогда математическое ожидание функции $\varphi(x)$ определится по формуле

$$M[\varphi(x)] = \sum \varphi(x_i)\, P_i. \tag{57,8}$$

Математическое ожидание функции $\varphi(x)$ от непрерывной величины X может быть вычислено по формуле

$$M[\varphi(x)] = \int \varphi(x)\, f(x)\, dx, \tag{57,9}$$

где $f(x)$ — плотность распределения самой величины X. Кроме математического ожидания в качестве численных характеристик случайных величин в теории вероятностей применяются также **мода и медиана.**

Модой M прерывной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение; для непрерывной величины модой является то значение, в котором плотность вероятности максимальна.

Медианой Me случайной величины X называется такое ее значение, для которого

$$P(X < Me) = P(X > Me). \tag{57,10}$$

Геометрически медиана является абсциссой точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

Основной числовой характеристикой рассеяния случайной величины X является среднее квадратическое отклонение σ, называемое **стандартом** и определяемое по формуле

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{M[(X-a)^2]}, \quad \text{где} \quad a = M[X]. \tag{57,11}$$

Стоящее под корнем выражение носит название **дисперсии случайной величины.**

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата уклонения отдельных значений величины X от ее математического ожидания и обозначается символом D, т. е.

$$DX = M(X-a)^2 = \sigma^2(X). \tag{57,12}$$

Пользуясь формулами (57,8) и (57,9), запишем формулы для дисперсий дискретных и непрерывных случайных величин:

$$\sigma^2(X) = \sum (x_i - a)^2 P_i; \tag{57,13}$$

$$\sigma^2(X) = \int (x_i - a)^2 \varphi(x_i)\, dx_i. \tag{57,14}$$

Глава IX

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ К ОШИБКАМ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 58. Закон распределения случайных ошибок измерений

Для выявления вероятностных свойств ошибок измерений необходимо располагать значительным рядом случайных ошибок измерений. Обратимся к примеру § 9, из которого нетрудно установить,что распределение ошибок данного ряда подчиняется определенной закономерности.

Основной задачей является математическое выражение этой закономерности.

Разбив на группы по асболютной величине все ошибки данного ряда (§ 9), получим: от 0 до 1—47 ошибок, от 1 до 2—12 ошибок и от 2 до 3—1 ошибку.

Отсюда видно, что малые по абсолютной величине ошибки более вероятны, чем большие. Подобное распределение обнаруживается во всех сколько-нибудь значительных рядах случайных ошибок измерений и поэтому можно заключить, что относительная частота появления, а следовательно, и вероятность некоторой случайной ошибки зависит от ее величины Δ, т. е. вероятность случайной ошибки есть некоторая функция от Δ, которую мы обозначим $f(\Delta)$.Обычно рассматривают вопрос о появлении ошибки в определенных весьма ограниченных пределах от $\Delta - d\Delta$ до $\Delta + d\Delta$. Очевидно, что чем больше этот промежуток, тем вероятность появления случайной ошибки Δ будет больше, и наоборот, чем меньше $d\Delta$, тем меньше вероятность появления ошибки Δ. Вероятность того, что случайная ошибка Δ должна находиться внутри малого интервала $d\Delta$, может быть выражена произведением $f(\Delta)\, d\Delta$, т. е.

$$P = f(\Delta)\, d\Delta. \tag{58,1}$$

Если будем иметь случайные ошибки в пределах от $-b$ до $+b$, то вероятность получить одну из ошибок, лежащих в указанном пределе, будет равна сумме вероятностей появления каждой из ошибок этого ряда

$$\sum_{-b}^{+b} f(\Delta)\, d\Delta. \tag{58,2}$$

Рассматривая $d\Delta$ как бесконечно малый промежуток, а функцию $f(\Delta)$ как непрерывную, можно представить эту сумму в виде определенного интеграла

$$\int_{-b}^{+b} f(\Delta)\, d\Delta. \tag{58,3}$$

Таким образом, вероятность того, что при однократном измерении появится одна из случайных ошибок в пределах от $-b$ до $+b$, равна

$$P_{-b}^{+b} = \int_{-b}^{+b} f(\Delta)\, d\Delta. \tag{58,4}$$

Расширив пределы появления случайной ошибки измерения от $-\infty$ до $+\infty$, получим сумму вероятностей всех возможных ошибок; любая случайная ошибка должна обязательно попадать в эти пределы. Следовательно, вероятность того, что случайная ошибка измерения попадает в пределы от $-\infty$ до $+\infty$, как было установлено в § 56, равна единице:

$$P_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta)\, d\Delta = 1. \tag{58,5}$$

§ 59. Определение вида функции $f(\Delta)$

Свойства случайных ошибок, сформулированные в § 6, с точки зрения теории вероятностей могут быть истолкованы следующим образом:

1) при данных условиях измерений случайные ошибки не могут превосходить по абсолютной величине определенного предела; вероятность случайной ошибки, превосходящей этот предел, равна нулю;

2) между крайними пределами случайные ошибки могут принимать все промежуточные значения, при этом малые по абсолютной величине ошибки появляются чаще больших, т. е. малые по абсолютной величине ошибки более вероятны, чем большие;

3) положительные ошибки появляются так же часто, как и равные им по абсолютной величине отрицательные ошибки; с точки зрения теории вероятностей это значит, что положительные ошибки так же вероятны, как и равные им по абсолютной величине отрицательные ошибки.

На основании первого свойства случайных ошибок функция $f(\Delta)$ должна быть определена так, чтобы она была равна нулю для всех значений Δ, превосходящих по своей абсолютной величине $\Delta_{\text{пр}}$ — предел случайных ошибок для данных условий измерений.

Но так как крайние пределы случайных ошибок не могут быть определены совершенно строго, мы удовлетворимся, если функция $f(\Delta)$ будет такого свойства, что она делается очень малой для ошибок, значительных по величине.

На основании второго свойства случайных ошибок, если $|\Delta_2| > |\Delta_1|$, то

$$f(|\Delta_2|) < f(|\Delta_1|). \tag{59,1}$$

Функция, удовлетворяющая этому свойству, называется убывающей. При $\Delta = 0$ функция эта должна достигать максимума

$$f(0) = \max. \tag{59,2}$$

Отсюда следует, что $f(0)$ больше, чем $f(\Delta)$ при всяком Δ, не равном нулю.

Из третьего свойства вытекает, что частоты одинаковых по абсолютной величине положительных и отрицательных ошибок примерно одинаковы и это будет тем ярче выявляться, чем больше произведено измерений. Отсюда следует, что

$$f(\Delta) = f(-\Delta), \tag{59,3}$$

Функция, удовлетворяющая этому свойству, называется четной функцией. Но если функция $f(\Delta)$ четная, то функция $\Delta f(\Delta)$ — нечетная и, следовательно, математическое ожидание случайной ошибки Δ на основании (57,3) будет равно

$$M[\Delta] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta f(\Delta)\, d\Delta. \tag{59,4}$$

Исходя из понятия математического ожидания (§ 57), можно сказать, что среднее арифметическое из случайных ошибок равноточных измерений одной и той же величины неограничено стремится к нулю с увеличением числа измерений. Это — четвертое свойство случайных ошибок измерений, вытекающее из принятых свойств функции $f(\Delta)$ и свойств случайных ошибок измерений. Примем еще одно условие: допустим, что среднее арифметическое из нескольких равноточных непосредственных измерений одной и той же величины является вероятнейшим значением этой величины. Приняв названное допущение за аксиому, Гаусс определил вид функции $f(\Delta)$, аналитически выражающей закон вероятности случайной ошибки измерения в зависимости от изменения величины этой ошибки. Этот закон получил название закона Гаусса или нормального закона.

Из указанного допущения следует, что уклонения

$$l_1 - X = \delta_1, \quad l_2 - X = \delta_2, \quad \ldots, \quad l_n - X = \delta_n \tag{59,5}$$

отдельных результатов равноточных измерений $l_1, l_2, \ldots l_n$ от арифметического среднего $X = \frac{[l]}{n}$ представляет собой ряд вероятнейших ошибок измерений. Поэтому на основании предыдущего допущения можно вывести закон вероятности ошибок, для которых, как известно, $[\delta] = 0$ при всяком n. Пренебрегая различием между вероятнейшими и истинными случайными ошибками, которое при $n \to \infty$ будет все время уменьшаться, принимаем закон распределения вероятнейших ошибок измерений за общий закон случайных ошибок.

Уклонения измеренных величин $l_1, l_2, \ldots, l_n$ от истинного значения L дадут истинные ошибки измерений

$$l_1-L=\Delta_1, \quad l_2-L=\Delta_2, \quad \ldots, \quad l_n-L=\Delta_n \tag{59,6}$$

с вероятностями

$$P_1=f(\Delta_1)\,d\Delta, \quad P_2=f(\Delta_2)\,d\Delta, \quad \ldots, \quad P_n=f(\Delta_n)\,d\Delta. \tag{59,7}$$

Вероятность совместного появления ошибок этого ряда P по теореме умножения будет равна произведению вероятностей отдельных ошибок

$$P=P_1P_2\ldots P_n=f(\Delta_1)f(\Delta)_2\ldots f(\Delta_n)(d\Delta)^n. \tag{59,8}$$

Так как истинное значение измеряемой величины L обычно неизвестно, вместо него возьмем некоторое другое значение X, уклонения измеренных величин от которого соответствуют ряду (59,5). Естественно при этом потребовать, чтобы X было таким, при котором P было бы наибольшим. Очевидно, значение X, при котором P становится наибольшим, следует считать вероятнейшим. Определение значения X, при котором $P=\max$, сводится к определению максимума функции

$$y=f(\delta_1)f(\delta_2)\ldots f(\delta_n)=\max, \tag{59,9}$$

что в свою очередь можно свести к требованию, чтобы

$$\ln y=\ln f(\delta_1)+\ln f(\delta_2)+\ldots+\ln f(\delta_n)=\max. \tag{59,10}$$

Для значения X, обращающего функцию (59,10) в максимум, первая производная логарифма функции y, взятая по X, должна быть равна нулю

$$\frac{d\ln y}{dX}=\frac{d\ln f(\delta_1)}{d\delta_1}\cdot\frac{d\delta_1}{dX}+\frac{d\ln f(\delta_2)}{d\delta_2}\cdot\frac{d\delta_2}{dX}+\ldots+\frac{d\ln f(\delta_n)}{d\delta_n}\cdot\frac{d\delta_n}{dX}=0. \tag{59,11}$$

Из (59,5) будем иметь, что

$$\frac{d\delta_1}{dX}=\frac{d\delta_2}{dX}=\ldots=\frac{d\delta_n}{dX}=1. \tag{59,12}$$

Введем обозначения:

$$\frac{d\ln f(\delta_1)}{d\delta_1}=\varphi(\delta_1); \quad \frac{d\ln f(\delta_2)}{d\delta_2}=\varphi(\delta_2); \quad \ldots; \quad \frac{d\ln f(\delta_n)}{d\delta_n}=\varphi(\delta_n). \tag{59,13}$$

Подставив их в (59,11), получим

$$\frac{d\ln y}{dX}=\varphi(\delta_1)+\varphi(\delta_2)+\ldots+\varphi(\delta_n)=0. \tag{59,14}$$

Мы видим, что производные $\ln f(\delta)$ по δ являются функциями от δ и что $[\delta]=0$. Эти два условия должны существовать совместно, а это возможно, если одно из них является следствием другого. Представив первое условие в виде

$$\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1}\delta_1+\frac{\varphi(\delta_2)}{\delta_2}\delta_2+\ldots+\frac{\varphi(\delta_n)}{\delta_n}\delta_n=0 \qquad (59,15)$$

и сопоставив его со вторым, можно прийти к выводу, что

$$\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1}=\frac{\varphi(\delta_2)}{\delta_2}=\ldots=\frac{\varphi(\delta_n)}{\delta_n}=C, \qquad (59,16)$$

где C — некоторое постоянное число.

Из (59,16) имеем

$$\varphi(\delta)=C\delta. \qquad (59,17)$$

Подставив значение $\varphi(\delta)$ из (59,13), получим

$$\frac{d\ln f(\delta)}{d\delta}=C\delta, \qquad (59,18)$$

или

$$d\ln f(\delta)=C\delta\,d\delta. \qquad (59,19)$$

Интегрируя, получим

$$\ln f(\delta)=\frac{1}{2}C\delta^2+B, \qquad (59,20)$$

где B — постоянная интегрирования.

Переходя от натурального логарифма функции к самой функции, будем иметь

$$f(\delta)=e^{{}^1/{}_2C\delta^2+B}=e^Be^{{}^1/{}_2C\delta^2}=Ae^{{}^1/{}_2C\delta^2}, \qquad (59,21)$$

где e — основание натуральных логарифмов, а $A = e^B$.

Распространяя найденный закон изменения функции в зависимости от изменения величины вероятнейшей ошибки также и на истинные ошибки, можно записать

$$f(\Delta)=Ae^{{}^1/{}_2C\Delta^2}. \qquad (59,22)$$

Функция (59,22) выражает плотность распределения вероятности случайной ошибки Δ.

Случайная величина, имеющая функцию плотности вида (59, 22), называется **нормальной случайной величиной**, а функция распределения плотности вероятности вида (59, 22) **называется законом Гаусса или нормальным законом.**

Сумма достаточно большого числа независимых случайных величин приближенно подчиняется нормальному закону и тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется. Большинство встречающихся на практике случайных величин, таких как ошибки измерений, могут быть представлены как суммы весьма большого числа сравнительно малых слагаемых, каждое из которых связано с действием отдельной элементарной причины, не зависящей от остальных.

Каким бы законам распределения ни были подчинены отдельные элементарные ошибки, особенности этих распределений в сумме большого числа слагаемых нивелируются и сумма оказывается подчиненной закону, близкому к нормальному. Основное требование, которое должно быть предъявлено к суммируемым ошибкам, состоит в том, чтобы они все равномерно оказывали на общую сумму относительно малое влияние. Если это условие не выполняется и одна из случайных ошибок окажется по своему влиянию на сумму резко превалирующей над всеми другими, то закон распределения этой превалирующей ошибки наложит свое влияние на сумму и определит в основных чертах ее закон распределения.

На основании сказанного выше случайные ошибки измерений всегда рассматриваются как нормальные случайные величины.

Вероятность ошибки в промежутке $d\Delta$ на основании (58,1) можно представить в виде

$$P = f(\Delta)\,d\Delta = Ae^{{}^1/{}_2 C\Delta^2}\,d\Delta. \qquad (59,23)$$

Так как на основании (59,1) функция $f(\Delta)$ является функцией убывающей, т. е. ее значения уменьшаются с увеличением Δ, то из (59,22) следует, что параметр C должен быть меньше нуля. Обозначим $\frac{1}{2}C$ через $-h^2$, где h — вещественное число. Тогда

$$P = f(\Delta)\,d\Delta = Ae^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta. \qquad (59.24)$$

Определим постоянную интегрирования A. Для этого в формулу (58,5) подставим полученное выражение $f(\Delta)\ d\Delta$ из (59,24)

$$P_{-\infty}^{+\infty} = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta = 1. \qquad (59,25)$$

Для интегрирования введем новую переменную $t = h\Delta$, тогда

$$dt = h\,d\Delta \quad \text{и} \quad d\Delta = \frac{1}{h}\,dt; \qquad (59,26)$$

при этом пределами интегрирования будут $-\infty$ и $+\infty$.

В соответствии с этим формула (59,25) запишется в виде

$$P_{-\infty}^{+\infty} = \frac{A}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 1. \qquad (59,27)$$

Получился интеграл Пуассона, которой равен $\sqrt{\pi}$, следовательно,

$$P_{-\infty}^{+\infty} = \frac{A}{h}\sqrt{\pi} = 1, \qquad (59,28)$$

откуда

$$A = \frac{h}{\sqrt{\pi}}. \tag{59,29}$$

Подставив, полученное значение A в (59,24), будем иметь

$$P = f(\Delta)\,d\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta. \tag{59,30}$$

На основании этого выражения вероятность появления ошибки в пределах от $-b$ до $+b$, представленная формулой (58,4), примет вид

$$P_{-b}^{+b} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-b}^{+b} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta. \tag{59,31}$$

Так как под знаком интеграла стоит четная функция, то можно взять интеграл в пределах от 0 до b и полученный результат удвоить:

$$P_{-b}^{+b} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{b} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta. \tag{59,32}$$

Приняв обозначения (59,26), будем иметь: при $\Delta = 0$ $t = 0$, при $\Delta = b$ $t = hb$, тогда

$$P_{-b}^{+b} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{hb} e^{-t^2}\,dt. \tag{59,33}$$

Полученное выражение называется функцией Лапласа, у которой P_{-b}^{+b} представляет собой некоторую функцию от верхнего предела интегрирования, т. е. $hb = g$. Обозначим функцию (59,33) через $\Phi\ (g)$

$$P_{-b}^{+b} = \Phi(g) = \Phi(hb). \tag{59,34}$$

Частные значения функции Лапласа в зависимости от изменения g приведены в приложении III.

§ 60. Определение параметра h

Приняв

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\Delta^2}, \tag{60,1}$$

получим уравнение кривой распределения вероятностей. Тогда формула (59,30) примет вид

$$P = f(\Delta)\,d\Delta = y\,d\Delta. \tag{60,2}$$

Кривая I (рис. 30), определяемая уравнением (60,1) геометрически представляет закон распределения вероятностей случайных ошибок и называется кривой случайных ошибок. На этой кривой отложим от начала координат по оси абсцисс величины Δ и $d\Delta$ и, проведя в полученных точках M и N ординаты кривой MM' и NN', получим фигуру $MM'N'N$, которую можно принять за прямоугольник с высотой $y = f(\Delta)$ и основанием $d\Delta$. Площадь этого прямоугольника будет равна

$$y\,d\Delta = f(\Delta)\,d\Delta = P, \tag{60,3}$$

что графически представляет собой вероятность того, что ошибка одного измерения окажется в пределах от Δ до $\Delta + d\Delta$.

Отложив по оси абсцисс в обе стороны от начала координат отрезки, равные b, и проведя в полученных точках B и C ординаты

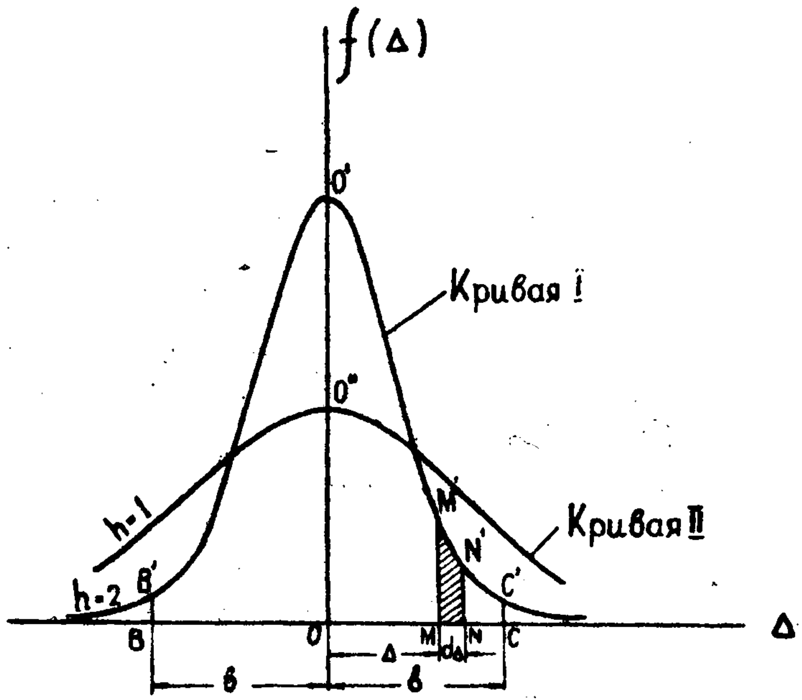


Рис. 30

кривой BB' и CC', получим фигуру $BB'O'C'C$, площадь которой геометрически представляет вероятность того, что при однократном измерении получится ошибка, заключенная между $-b$ и $+b$, т. е.

$$P_{-b}^{+b} = \int_{-b}^{+b} y\,d\Delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{hb} e^{-t^2}\,dt. \tag{60,4}$$

Вся площадь между осью абсцисс и асимптотически приближающейся к ней кривой ошибок I равна единице. Этой площади соответствует вероятность

$$P_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,d\Delta = 2\int_{0}^{\infty} y\,d\Delta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta = 1. \tag{60,5}$$

Если положим $\Delta = 0$, то формула (60,1) примет вид

$$y_0 = OO' = \frac{h}{\sqrt{\pi}}. \tag{60,6}$$

Таким образом, положение вершины O' кривой ошибок I определяется параметром h. Чем больше параметр h, тем больше ордината y_0 и тем выше над осью абсцисс поднимается кривая ошибок.

На рис. 30 представлены две кривые: для $h=1$ — кривая II и $h=2$ — кривая I. Вторая кривая по сравнению с первой оказывается как бы сжатой вдоль оси абсцисс. В соответствии с этим во втором случае, т. е. когда h больше, большие ошибки будут появляться реже малых, а следовательно, измерения в этом случае нужно считать более точными. Поэтому параметр h называется **мерой точности.**

Найдем зависимость между средней квадратической ошибкой m и мерой точности h, воспользовавшись для этого понятием о математическом ожидании.

В теории ошибок (§ 8) было принято точность результатов измерений характеризовать средней квадратической ошибкой m, определяемой по формуле

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \tag{60,7}$$

Но среднее арифметическое из ряда $\Delta_1^2, \Delta_2^2, \ldots, \Delta_n^2$, при $n \to \infty$ будет равно стандарту

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n} = m_0. \tag{60,8}$$

Таким образом, на основании определения математического ожидания стандарт m_0^2 — есть математическое ожидание квадрата случайной ошибки

$$M[\Delta^2] = m_0^2. \tag{60,9}$$

Составим выражение математического ожидания квадрата случайной ошибки Δ. Для этого каждое из возможных значений Δ^2 нужно умножить на соответствующую вероятность P и полученные произведения сложить

$$M[\Delta^2] = \sum_{-b}^{+b} P\Delta^2, \tag{60,10}$$

где $-b$ и $+b$ — пределы возможных случайных ошибок.

В формулу (60,10) подставим вместо P его значение из равенства (60,2) и заменим суммирование в пределах от $-b$ до $+b$ интегрированием в пределах от $-\infty$ до $+\infty$

$$M[\Delta^2] = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta. \tag{60,11}$$

Это выражение преобразуем:

$$M[\Delta^2]=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2h^2}\right)\int_0^\infty \Delta\left(-2h^2\Delta e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta\right)=$$

$$=-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \Delta d\left(e^{-h^2\Delta^2}\right). \qquad (60,12)$$

Интегрирование по частям даст

$$M[\Delta^2]=-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left\{\Big|_0^\infty \Delta e^{-h^2\Delta^2}-\int_0^\infty e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta\right\}=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta. \qquad (60,13)$$

Легко убедиться, что выражение $\Big|_0^\infty \Delta e^{-h^2\Delta^2}$ равно нулю при обоих предельных значениях Δ.

Для дальнейшего интегрирования введем новое переменное $t = h\Delta$, $dt = h\,d\Delta$ и $d\Delta = \frac{1}{h}\,dt$, при этом пределами интегрирования будут 0 и ∞.

Произведя замену переменных, найдем

$$M[\Delta^2]=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

откуда

$$M[\Delta^2]=\frac{1}{2h^2}. \qquad (60,14)$$

Сопоставив формулы (60,9) и (60,14), получим

$$m_0^2=\frac{1}{2h^2}, \qquad (60,15)$$

откуда

$$h=\frac{1}{m_0\sqrt{2}}. \qquad (60,16)$$

Подставив значение h в формулу (60,1), получим уравнение кривой случайных ошибок

$$y=\frac{1}{m_0\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\Delta^2}{2m_0^2}}. \qquad (60,17)$$

Сделав такую подстановку в формуле (60,2), найдем соответствующее выражение вероятности

$$P=f(\Delta)\,d\Delta=\frac{1}{m_0\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\Delta^2}{2m_0^2}}\,d\Delta. \qquad (60,18)$$

§ 61. Средняя ошибка

В предыдущем параграфе мы получили зависимость между мерой точности h и стандартом m_0, выраженную формулой (60,16). Найдем теперь связь между мерой точности h и средней ошибкой Θ, определяемой по формуле (8,1),

$$\Theta = \frac{[|\Delta|]}{n}.$$

Если число измерений n велико, то в этом случае можно принять среднюю ошибку Θ равной математическому ожиданию абсолютного значения ошибки

$$\Theta = M[|\Delta|] = \sum_{-b}^{+b} |\Delta| P, \tag{61,1}$$

где $-b$ и $+b$ — возможные пределы случайных ошибок Δ, а P — вероятность соответствующих значений абсолютных величин случайных ошибок в этих пределах.

В полученное выражение (61,1) вместо P подставим его значение из (59,30) и заменим суммирование интегрированием в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\Theta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| e^{-h^2\Delta^2} d|\Delta| = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} |\Delta| e^{-h^2\Delta^2} d|\Delta| =$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2h^2}\right) \int_0^{\infty} (-2h^2) |\Delta| e^{-h^2\Delta^2} d|\Delta| =$$

$$= -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\left(e^{-h^2\Delta^2}\right) = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \Big|_0^{\infty} e^{-h^2\Delta^2}, \tag{61,2}$$

откуда

$$\Theta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \tag{61,3}$$

или

$$h = \frac{1}{\Theta\sqrt{\pi}}. \tag{61,4}$$

Из соотношения равенств (60,16) и (61,4) находим, что

$$\frac{1}{m_0\sqrt{2}} = \frac{1}{\Theta\sqrt{\pi}}. \tag{61,5}$$

Отсюда определим значение средней ошибки, выраженное через стандарт,

$$\Theta = m_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7979 m_0. \tag{61,6}$$

Соответственно

$$m_0 = \Theta \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}2533\Theta. \tag{61,7}$$

§ 62. Вероятная ошибка

Из определения, данного в теории ошибок (§ 9), вероятной ошибкой r называется такое значение случайной ошибки при данных условиях измерений, по отношению к которому число ошибок, бо́льших ее по абсолютной величине, равно числу ошибок меньших. Из этого определения вероятной ошибки согласно теории вероятностей следует, что вероятность такой ошибки равна

$$P_{-r}^{+r} = \frac{1}{2}, \tag{62,1}$$

Тогда на основании функции Лапласа можно записать

$$P_{-r}^{+r} = \Phi(g) = \Phi(hr) = \frac{1}{2}. \tag{62,2}$$

Из приложения III для значения $\Phi(g) = 0{,}5$ находим $g = hr = 0{,}4769$, откуда

$$r = \frac{0{,}4769}{h} \tag{62,3}$$

или

$$h = \frac{0{,}4769}{r}. \tag{62,4}$$

Из сопоставления формул (62,4) и (60,16) имеем

$$\frac{1}{m_0\sqrt{2}} = \frac{0{,}4769}{r}, \tag{62,5}$$

откуда

$$r = 0{,}4769 m_0 \sqrt{2} = 0{,}6745 m_0. \tag{62,6}$$

Соответственно

$$m_0 = 1{,}483 r. \tag{62,7}$$

Таким образом закон, распределения ошибок будет определен, если меру точности h измерений выразить стандартом m_0, средней ошибкой Θ или вероятной ошибкой r, т. е.

$$h = \frac{1}{m_0\sqrt{2}} = \frac{1}{\Theta\sqrt{\pi}} = \frac{0{,}4769}{r}. \tag{62,8}$$

На основании исследований, проведенных Гельмертом, можно утверждать, что при конечном числе измерений наиболее надежная оценка результатов измерений достигается при помощи средней квадратической ошибки m.

§ 63. Предельная ошибка

Определим вероятности появления ошибок в зависимости от величины ошибок и точности измерений. Зная величину стандарта m_0, свойственную данному ряду измерений, можно определить вероятность случайной ошибки любой заданной величины, кратной m_0.

Вероятность того, что в данном ряду измерений случайная ошибка по абсолютной величине не превзойдет пределов от $-b$ до $+b$, определится формулой (59,33)

$$P_{-b}^{+b}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{hb} e^{-t^2}\,dt=\Phi(hb)=\Phi(g). \qquad (63,1)$$

Но мера точности h по формуле (60,16) равна

$$h=\frac{1}{m_0\sqrt{2}},$$

а как было установлено в § 59, $g = hb$, тогда

$$g=hb=\frac{b}{m_0\sqrt{2}}. \qquad (63,2)$$

Отношение $\frac{b}{m_0}$ обозначим через k — некоторая постоянная (см. § 8). Это число k можно рассматривать как предельное значение случайной ошибки, приходящейся на единицу стандарта m_0. Подставив значение b, выраженное через m_0 и k, т. е. $b = m_0k$, в формулу (63,2), получим

$$g=\frac{k}{\sqrt{2}}. \qquad (63,3)$$

Придавая k различные значения, вычислим соответствующие им числовые значения b и g, а по приложению III значений $\Phi(g)$ найдем вероятности $P_{-b}^{+b} = P_{-m_0k}^{+m_0k}$, соответствующие формуле (63,1). Сведем все эти данные в табл. 51.

Таблица 51

k	b	g	$P_{-m_0k}^{+m_0k}$ Вероятность получить ошибку, не превышающую b	$1-P_{-m_0k}^{+m_0k}$ Вероятность получить ошибку, превышающую b	Число ошибок, превышающих b на 1000
0	0	0	0	0	0
0,5	$0{,}5m_0$	0,354	0,383	0,617	617
1	$1{,}0m_0$	0,707	0,683	0,317	317
1,5	$1{,}5m_0$	1,061	0,866	0,134	134
2	$2{,}0m_0$	1,414	0,954	0,046	46
2,5	$2{,}5m_0$	1,768	0,988	0,012	12
3	$3{,}0m_0$	2,121	0,997	0,003	3
3,5	$3{,}5m_0$	2,475	0,9995	0,0005	0,5
4	$4{,}0m_0$	2,828	0,9999	0,0001	0

Анализируя данные табл. 51, видим, что вероятность ошибки, не превосходящей $3m_0$, равна 0,997, т. е. очень близка к достоверности, тогда как вероятность появления ошибок, больших $3m_0$, равна 0,003, что свидетельствует о почти невероятности получить такие ошибки при измерениях.

При большом числе измерений относительная частота какой-либо ошибки численно будет мало отличаться от вероятности той же ошибки. Тогда, приняв 0,997 за относительную частоту ошибки, не превосходящей утроенной величины стандарта, найдем, что относительная частота ошибки, превосходящей утроенную величину стандарта, равна 0,003, т. е. 3 случая на 1000 ошибок, что практически вполне удовлетворяет требованиям предела. Таким образом, можно принять величину предельной ошибки

$$\Delta_{\text{пр}} = 3m_0. \tag{63,4}$$

Из данных таблицы видно, что, приняв за относительную частоту ошибки, не превышающей m_0, величину 0,683, можно утверждать, что только в 32 случаях из 100 ошибка измерения может быть больше стандарта m_0. Также нетрудно убедиться, что только в 5 случаях их 100 ошибка измерения может быть больше $2m_0$.

В маркшейдерской и геодезической практике часто за предельную ошибку принимают

$$\Delta_{\text{пр}} = 2m_0. \tag{63,5}$$

§ 64. Точность вычисления средней квадратической ошибки

В § 8 для оценки точности конечных рядов измерений была принята средняя квадратическая ошибка, квадрат которой

$$m^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n}, \tag{64,1}$$

истинное значение ее m_0, определенное для бесконечно большого числа n измерений, названо стандартом. Очевидно, квадрат средней квадратической ошибки m^2 будет отличаться от квадрата своего истинного значения — стандарта m_0^2 на некоторую величину квадрата истинной ошибки

$$\frac{[\Delta^2]}{n} - m_0^2 = \omega_m^2, \tag{64,2}$$

а выражение

$$(\omega_m^2)^2 = \left(\frac{[\Delta^2]}{n} - m_0^2\right)^2 = \left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2 - 2\,\frac{[\Delta^2]}{n}\,m_0 + m_0^4 \tag{64,3}$$

будет представлять собой квадрат истинной ошибки ω_m^2.

Если бы серии измерений, из которых определяются средние квадратические ошибки, были повторены бесконечное число раз, то в выражении $[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2$ можно было бы заменить каждое слагаемое его средним арифметическим, т. е.

$$[\Delta^2] = \frac{[\Delta_1^2]}{n} + \frac{[\Delta_2^2]}{n} + \ldots + \frac{[\Delta_n^2]}{n} = nm_0^2. \tag{64,4}$$

Подставив значение $[\Delta^2]$ из (64,4) в (64,3), получим

$$\left(\frac{[\Delta^2]}{n} - m_0^2\right)^2 = \left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2 - m_0^4. \tag{64,5}$$

Определим среднее значение величины $\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2$:

$$\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2 = \frac{[\Delta^2]^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}\{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^2\}^2 = \quad \begin{matrix}\text{число}\\ \text{слагаемых}\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} = \frac{1}{n^2}\{\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \ldots + \Delta_{n-1}^4 + \Delta_n^4 + \\ + 2\Delta_1^2(\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_{n-1}^2 + \Delta_n^2) + \\ + 2\Delta_2^2(\Delta_3^2 + \ldots + \Delta_{n-1}^2 + \Delta_n^2) + \\ + 2\Delta_{n-2}^2(\Delta_{n-1}^2 + \Delta_n^2) + \\ + 2\Delta_{n-1}^2\Delta_n^2\} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\ldots n \\ &\ldots n-1 \\ &\ldots n-2 \\ &\ldots 2 \\ &\ldots 1 \end{aligned} \tag{64,6}$$

В фигурных скобках уравнения (64,6) имеем n слагаемых вида Δ^4 и $\frac{n(n-1)}{2}$ слагаемых вида $2\Delta_i^2\Delta_j^2$. Среднее значение вторых степеней Δ при бесконечно большом числе измерений равно m_0^2. Установим, во что обращается среднее значение четвертых степеней величин Δ при том же условии. Для этого составим выражение математического ожидания четвертой степени случайной ошибки Δ

$$M[\Delta^4] = \sum_{-b}^{+b} P\Delta^4, \tag{64,7}$$

где $-b$ и $+b$ — пределы возможных случайных ошибок Δ;
P — вероятности этих случайных ошибок.

Подставив вместо P их значения из формулы (59,30) и заменив суммирование в пределах от $-b$ до $+b$ интегрированием в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$M[\Delta^4] = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^4 e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \Delta^4 e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta =$$

$$= -\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \Delta^3\,d\left(e^{-h^2\Delta^2}\right) = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left\{\Big|_0^{\infty} \Delta^3 e^{-h^2\Delta^2} - \int_0^{\infty} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta^3\right\}, \tag{64,8}$$

но

$$\Big|_0^{\infty} \Delta^3 e^{-h^2\Delta^2} = 0. \tag{64,9}$$

Тогда

$$M[\Delta^4] = \frac{3}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta. \qquad (64{,}10)$$

Из формулы (61,12) и (61,9) видно, что

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta = M[\Delta^2] = m_0^2, \qquad (64{,}11)$$

откуда

$$\int_0^\infty \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta = \frac{m_0^2\sqrt{\pi}}{2h}. \qquad (64{,}12)$$

Подставив полученное значение в (64,10), будем иметь

$$M[\Delta^4] = \frac{3}{h\sqrt{\pi}} \cdot \frac{m_0^2\sqrt{\pi}}{2h} = \frac{3m_0^2}{2h^2}. \qquad (64{,}13)$$

Но по (60,16)

$$h^2 = \frac{1}{2m_0^2}, \qquad (64{,}14)$$

тогда

$$M[\Delta^4] = 3m_0^4. \qquad (64{,}15)$$

С вероятностью, близкой к достоверности, можно утверждать, что при неограниченном возрастании числа величин Δ^4 математическое ожидание случайной величины $M\ [\Delta^4]$ сколь угодно мало отличается от среднего арифметического из всех значений этой величины $\frac{[\Delta^4]}{n}$. Обозначим $\frac{[\Delta^4]}{n} = \Delta_s$. Тогда можно принять $\Delta_s = 3m_0^4$.

Заменив в выражении (64,6) каждое слагаемое Δ^4 его средним значением Δ_s, получим в сумме n таких слагаемых $n\Delta_s$; вместо каждого Δ_i^2, как и вместо каждого Δ_j^2, подставим соответствующее значение m_0^2; тогда, имея в виду, что выражение $2\Delta_i^2\Delta_j^2 = 2m_0^4$ повторяется в (64,6) $\frac{n(n-1)}{2}$ раз, в сумме получим $n(n-1)m_0^4$. Следовательно, среднее значение выражения $\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2$ будет равно

$$\frac{1}{n^2}\{n\Delta_s + n(n-1)m_0^4\}. \qquad (64{,}16)$$

Таким образом, среднее значение выражения (64,5), т. е. квадрата средней квадратической ошибки значения m^2, определяемого формулой (64,1), будет

$$m_{(m^2)}^2 = \frac{1}{n}\{\Delta_s + (n-1)m_0^4\} - m_0^4 \qquad (64{,}17)$$

или

$$m_{(m^2)}^2 = \frac{\Delta_s}{n} + \frac{n-1}{n}m_0^4 - m_0^4 = \frac{2m_0^4}{n}, \qquad (64{,}18)$$

откуда

$$m_{(m^2)} = m_0^2 \sqrt{\frac{2}{n}}. \qquad (64,19)$$

Такова средняя квадратическая ошибка вычисления m^2 из n ошибок измерений.

Таким образом, в среднем

$$m^2 = \frac{[\Delta^2]}{n} \pm m_0^2 \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

При достаточно большом n, приняв с некоторым приближением $m = m_0$, получим

$$m^2 = \frac{[\Delta^2]}{n}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}\right). \qquad (64,20)$$

Отсюда найдем

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{1/2}. \qquad (64,21)$$

Но

$$\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} \pm \frac{3}{4n} \pm \ldots \qquad (64,22)$$

или, пренебрегая величинами второго порядка, получим

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right). \qquad (64,23)$$

Так, при $n = 50$ средняя квадратическая ошибка определения m будет равна $\frac{1}{10} m$.

Из аналогичных рассуждений можно определить точность вычисления средней квадратической ошибки m по формуле Бесселя (13,26)

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}. \qquad (64,24)$$

Таким образом, можно записать

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\right). \qquad (64,25)$$

Практически при n достаточно большом формулу (64,24) можно считать равноценной (64,1).

§ 65. Обоснование способа наименьших квадратов

Пусть при многократном измерении одной и той же величины в одинаковых условиях получены следующие результаты: l_1, l_2, ..., ..., l_n, которым соответствует мера точности h. Пусть вероятнейшее значение измеренной величины X. Найдем вероятнейшие случайные ошибки:

$$l_1 - X = \delta_1, \quad l_2 - X = \delta_2, \ \ldots, \ l_n - X = \delta_n. \tag{65,1}$$

Предполагая, что эти ошибки подчиняются закону Гаусса, т. е. что вероятность каждой из них определяется формулой (59,30), найдем, что вероятность P совместного появления n ошибок δ по теореме умножения вероятностей будет равна произведению вероятностей вида

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2} \, d\delta, \tag{65,2}$$

т. е.

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2)} \, d\delta_1 \, d\delta_2 \ldots d\delta_n. \tag{65,3}$$

Очевидно, вероятнейшим будет то значение X, при котором вероятность P получит наибольшее значение. Так как все множители в формуле (65,3) кроме $e^{-h[\delta^2]}$ не зависят от величин δ, то наибольшее значение вероятность P получит тогда, когда множитель $e^{-h[\delta^2]}$ будет иметь наибольшее значение. Но так как показатель степени отрицательный, степень будет иметь максимум, когда показатель будет наименьшим по абсолютной величине. Таким образом, условие максимума P приводит к условию минимума

$$[\delta^2] = \min. \tag{65,4}$$

Заменив величины δ из (65,1), получим

$$f(X) = (l_1 - X)^2 + (l_2 - X)^2 + \ldots + (l_n - X)^2 = \min, \tag{65,5}$$

откуда

$$X = \frac{[l]}{n}. \tag{65,6}$$

Таким образом, закон Гаусса привел к принципу наименьших квадратов, а от него к арифметической средине.

Для случая неравноточных измерений каждой измеренной величине $l_1, l_2, \ldots, l_n$ будет соответствовать своя мера точности $h_1, h_2, \ldots, h_n$ и выражение (65,3) примет вид

$$P = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2\delta_1^2 + h_2^2\delta_2^2 + \ldots + h_n^2\delta_n^2)} \, d\delta_1 \, d\delta_2 \ldots d\delta_n. \tag{65,7}$$

В этом случае условие максимума P приводит к условию минимума функции

$$f(X_0) = [h^2\delta^2] = \min. \tag{65,8}$$

Но так как

$$h_i = \frac{1}{m_i \sqrt{2}}, \tag{65,9}$$

то

$$f(X_0) = \frac{1}{2m_1^2}\delta_1^2 + \frac{1}{2m_2^2}\delta_2^2 + \ldots + \frac{1}{2m_n^2}\delta_n^2 = \min. \tag{65,10}$$

Обозначив

$$P_1=\frac{1}{2m_1^2},\quad P_2=\frac{1}{2m_2^2},\ \ldots,\ P_n=\frac{1}{2m_n^2},\tag{65,11}$$

получим

$$f(X_0)=P_1\delta_1^2+P_2\delta_2^2+\ \ldots\ +P_n\delta_n^2=\min,\tag{65,12}$$

где $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ — веса результатов измерений.

Отсюда в соответствии с (24,9) будем иметь

$$X_0=\frac{P_1l_1+P_2l_2+\ \ldots\ +P_nl_n}{P_1+P_2+\ \ldots\ +P_n}=\frac{[Pl]}{[P]}.\tag{65,13}$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что вероятнейшие значения измеренных величин, ошибки которых подчиняются нормальному распределению, должны определяться под условием

$$[P\delta\delta]=\min.$$

§ 66. Средняя квадратическая ошибка положения точки пересечения двух прямых. Эллипс ошибок

В практике маркшейдерского дела и геодезии положение точки на плоскости часто определяется пересечением двух прямых, проведенных из исходных точек.

Пусть положение некоторой точки O определяется пересечением прямых AA' и BB' (рис. 31). Под влиянием ошибок измерений указанные прямые могут перемещаться параллельно самим себе, независимо друг от друга, на некоторое расстояние в обе стороны относительно точки O. Если в положении прямых AA' и BB' были допущены некоторые случайные ошибки u и v, то их пересечение уже не даст точку O, а получится некоторая другая точка N, которая будет определяться величиной перпендикуляров u и v, проведенных к прямым AA' и BB'.

Будем считать, что ошибки u и v подчиняются нормальному распределению и что меры точности, соответствующие этим ошибкам измерений, равны h_1 и h_2; тогда получим следующие вероятности ошибок u и v:

$$P_u=\frac{h_1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h_1^2u^2}\,du;\tag{66,1}$$

$$P_v=\frac{h_2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h_2^2v^2}\,dv.\tag{66,2}$$

Вероятность совместного появления ошибок u и v или вероятность того, что прямое AA' и BB' пересекутся в точке N, по теореме умножения будет равна

$$P = P_u P_v = \frac{h_1 - h_2}{\pi} e^{-(h_1^2 u^2 + h_2^2 v^2)} \, du \, dv. \qquad (66,3)$$

При изменении положения прямых AA' и BB' по отношению к точке O, очевидно, и ошибки u и v будут изменяться, определяя новое положение точки N, а следовательно, и соответствующее значение вероятности P. Однако можно подобрать такие ряды значений u и v для которых величина P будет оставаться неизменной.

Из формулы (66,3) видно, что для постоянства P необходимо, чтобы при прочих равных условиях показатель степени при е был постоянным, т. е. чтобы

$$h_1^2 u^2 + h_2^2 v^2 = \text{const}. \qquad (66,4)$$

Обозначим

$$h_1^2 u^2 + h_2^2 v^2 = \frac{C^2}{2}. \qquad (66,5)$$

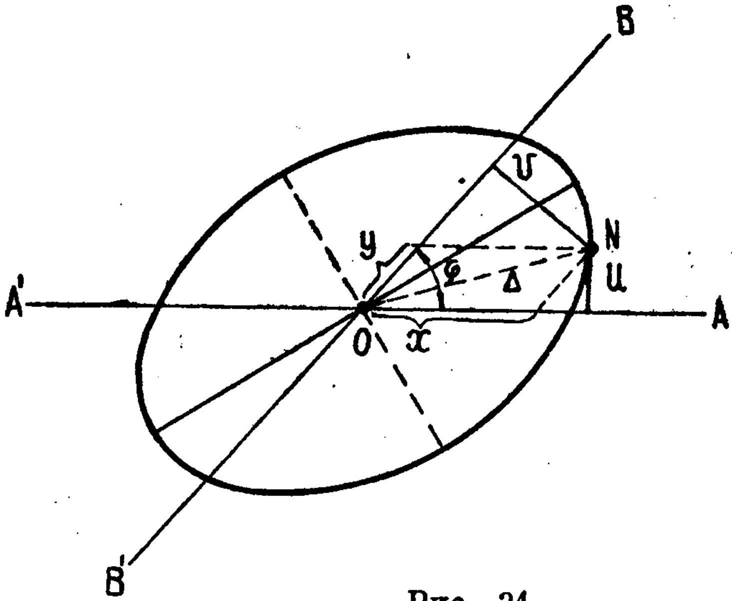


Рис. 31

Но так как

$$h_1 = \frac{1}{m_1 \sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{1}{m_2 \sqrt{2}}, \qquad (66,6)$$

то, подставив их значения в (66,5), получим

$$\left(\frac{u}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v}{m_2}\right)^2 = C^2. \qquad (66,7)$$

Введем косоугольные координаты с началом в точке O и осями OA и OB (рис. 31), составляющими угол φ.

Проведя из точки N прямые, параллельные осям OA и OB, найдем следующие значения текущих координат:

$$x = \frac{v}{\sin\varphi} \text{ и } y = \frac{u}{\sin\varphi}. \qquad (66,8)$$

Подставим полученные отсюда значения u и v в формулу (66,7)

$$\left(\frac{y \sin\varphi}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{x \sin\varphi}{m_2}\right)^2 = C^2. \qquad (66,9)$$

Введем обозначения

$$\frac{m_1 C}{\sin\varphi} = b; \quad \frac{m_2 C}{\sin\varphi} = a. \qquad (66,10)$$

Тогда равенство (66,9) примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{66,11}$$

Таким образом, оказывается, что точки N с равными вероятностями P будут располагаться на кривой, представляющей собой эллипс, отнесенный к двум сопряженным осям.

Линейная величина ON будет являться ошибкой точки N. Обозначим ее через Δ, тогда из рис. 31 следует, что

$$\Delta^2=x^2+y^2+2xy\cos\varphi. \tag{66,12}$$

Подставив вместо x и y в выражении (66,12) их значения из (66,8), получим

$$\Delta^2=\frac{v^2}{\sin^2\varphi}+\frac{u^2}{\sin^2\varphi}+2\frac{uv}{\sin^2\varphi}\cos\varphi. \tag{66,13}$$

Так как точка N может занимать n всевозможных положений, каждому из которых будет соответствовать своя ошибка Δ, то возможно составить n уравнений вида (66,13). Взяв среднее арифметическое из всех возможных значений Δ^2, получим квадрат средней квадратической ошибки положения точки N

$$M^2=\frac{[\Delta^2]}{n}=\frac{[v^2]}{n}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}+\frac{[u^2]}{n}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}+2\frac{[uv]}{n}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\cos\varphi. \tag{66,14}$$

Но так как

$$\frac{[v^2]}{n}=m_1^2, \quad \frac{[u^2]}{n}=m_2^2, \quad \text{а} \quad \frac{[uv]}{n}=0 \qquad \text{при } n\to\infty, \tag{66,15}$$

получим

$$M^2=\frac{m_1^2+m_2^2}{\sin^2\varphi}. \tag{66,16}$$

Возьмем эллипс, для которого $C=1$, тогда на основании (66,10) запишем

$$a=\frac{m_2}{\sin\varphi} \quad \text{и} \quad b=\frac{m_1}{\sin\varphi}, \tag{66,17}$$

откуда

$$a^2+b^2=\frac{m_1^2+m_2^2}{\sin^2\varphi}. \tag{66,18}$$

Сопоставив выражения (66,16) и (66,18), получим

$$M^2=a^2+b^2. \tag{66,19}$$

Эллипс, у которого $C=1$, называется основным, главным или средним квадратическим эллипсом ошибок.

Для главного эллипса сумма квадратов сопряженных полуосей эллипса представляет квадрат средней квадратической ошибки точки.

Анализ показал, что практически можно считать предельным эллипсом ошибок — эллипс, у которого $C=3$.

§ 67. Задачи на вычисление вероятностей

Задача 1. Средняя квадратическая ошибка m результата измерения при некоторых условиях равна 1,7 *см*. Найти уравнение кривой случайных ошибок.

Решение. На основании формулы (60,16)

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{1{,}7\sqrt{2}} = 0{,}417,$$

тогда, подставив значение h в формулу (60,1), получим

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\Delta^2} = \frac{0{,}417}{\sqrt{\pi}}\, e^{-0{,}1739\,\Delta^2}.$$

Задача 2. Найти вероятность того, что ошибка Δ не превзойдет по абсолютной величине среднюю квадратическую ошибку m.

Решение. Определим величину g по формуле

$$g = hm = h\,\frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707.$$

По вычисленному значению $g = 0{,}707$ найдем искомую величину P по приложению III: $P = 0{,}6826$.

Задача 3. Определить вероятность появления ошибки измерения Δ, абсолютная величина которой окажется в пределах от 4 до 6″, т. е. $P\,(4'' \leqslant |\Delta| \leqslant 6'')$, если $m = \pm 10''$.

Решение. Искомая вероятность $P_{4''}^{6''} = P_0^{6''} - P_0^{4''}$.

Определим величины:

$$g_1 = \frac{\Delta_4}{m\sqrt{2}} = \frac{4}{10\sqrt{2}} = 0{,}282;$$

$$g_2 = \frac{\Delta_6}{m\sqrt{2}} = \frac{6}{10\sqrt{2}} = 0{,}424.$$

По таблице функции $\Phi\,(g)$ приложения III находим: $\Phi\,(g_1) = 0{,}310$, $\Phi\,(g_2) = 0{,}451$. Тогда искомая вероятность будет равна

$$P_{4''}^{6''} = P_0^{6''} - P_0^{4''} = 0{,}451 - 0{,}310 = 0{,}141.$$

Задача 4. Определить, чему будет равна вероятность того, что действительная ошибка по числовой величине будет заключена в пределах от 1 до 2 *см*, если средняя квадратическая ошибка $m = \pm 1{,}5$ *см*.

Решение. Искомая вероятность

$$P_1^2 = P_0^2 - P_0^1.$$

Определим g_1 и g_2:

$$g_1 = \frac{1}{1{,}5\sqrt{2}} = 0{,}47; \qquad g_2 = \frac{2}{1{,}5\sqrt{2}} = 0{,}94.$$

По приложению III находим:

$$\Phi\,(g_1) = 0{,}497; \quad \Phi\,(g_2) = 0{,}816.$$

Тогда вероятность того, что действительная ошибка будет заключена в пределах от 1 до 2 *см*, будет равна

$$P_1^2 = P_0^2 - P_0^1 = 0{,}816 - 0{,}497 = 0{,}319.$$

Задача 5. Средняя квадратическая ошибка $m = \pm 1{,}2$ *мм*. Требуется определить величину Δ, для которой большие по абсолютной величине ошибки имели бы вероятность 0,01.

Решение. Из условия задачи имеем

$$1 - P = 0{,}01,$$

откуда

$$P = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

По приложению IV находим для $P = 0{,}99$ $t = 2{,}577$. Тогда искомая величина ошибки определится из соотношения

$$\Delta = mt = 1{,}2 \cdot 2{,}577 = 3{,}1 \text{ мм}.$$

Задача 6. В подземной полигонометрии I разряда углы измеряют со средней квадратической ошибкой m равной $\pm 20''$. С какой вероятностью можно ожидать появление истинной ошибки при измерении угла в пределах

$$1)\ -10'' \leqslant \Delta_1 \leqslant +10'';$$

$$2)\ -20'' \leqslant \Delta_2 \leqslant +20'';$$

$$3)\ -30'' \leqslant \Delta_3 \leqslant +30''.$$

Решение. Определим величины t_1, t_2, t_3:

$$t_1 = \frac{\Delta_1}{m\sqrt{2}} = \frac{10}{20\sqrt{2}} = 0{,}355;$$

$$t_2 = \frac{\Delta_2}{m\sqrt{2}} = \frac{20}{20\sqrt{2}} = 0{,}707;$$

$$t_3 = \frac{\Delta_3}{m\sqrt{2}} = \frac{30}{20\sqrt{2}} = 1{,}064.$$

По приложению III определим вероятности

$$P_{-10''}^{+10''} = 0{,}38; \quad P_{-20''}^{+20''} = 0{,}68; \quad P_{-30''}^{+30''} = 0{,}86.$$

Задача 7. В триангуляции IV класса углы измеряются со средней квадратической ошибкой $m = \pm 2''$. Найти вероятность того, что угловая невязка в треугольнике превзойдет по абсолютной величине $\pm 5''$.

Решение. Определим среднюю квадратическую ошибку суммы углов в треугольнике

$$m_s = \pm 2''\sqrt{3} = \pm 3'',46.$$

Тогда

$$t = \frac{5}{3{,}46\sqrt{2}} = 1{,}02.$$

Определим вероятность того, что угловая невязка в треугольнике будет не больше $\pm 5''$, по приложению III найдем

$$P_{-5''}^{+5''} = 0{,}8508$$

откуда

$$P_{\Delta > \pm 5''} = 1 - 0{,}8508 = 0{,}1492.$$

Задача 8. Даны угловые невязки 1200 треугольников сети триангуляции. Из них число невязок, расположенных в пределах от $-1''$ до $+1''$, равно 800. Найти среднюю квадратическую ошибку суммы углов треугольника.

Решение. Определим вероятность появления ошибок в пределах от $-1''$ до $+1''$

$$P_{-1''}^{+1''} = \frac{800}{1200} = 0{,}667.$$

Из таблицы приложения III находим $t = 0{,}685$, тогда

$$m = \frac{1''}{t\sqrt{2}} = \frac{1}{0{,}685\sqrt{2}} = \pm 1'',03.$$

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ТЕОРИИ СПОСОБА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Глава X

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 68. Общие соображения

При рассмотрении глав, посвященных теории способа наименьших квадратов, мы встречались с довольно громоздкими математическими выкладками, имеющими общее содержание. Они по существу представляют собой замену переменных в линейных функциях новыми переменными, имеющими с первоначальными линейную связь.

Это обстоятельство наводит на мысль о более детальном изучении подобных преобразований с целью упрощения и обобщения теоретических выводов способа наименьших квадратов, а в некоторых случаях, может быть, и получения новых результатов.

В математике подобного рода преобразования очень подробно изучены линейной алгеброй, которая с успехом может быть использована и в способе наименьших квадратов. Действительно, запись и разработка проблем способа наименьших квадратов с использованием терминов и понятий линейной алгебры оказались очень полезными и плодотворными. Сейчас уже совершенно очевидно, что дальнейшая разработка теории способа наименьших квадратов не только не целесообразна, но и невозможна без привлечения идей линейной алгебры. Поэтому квалифицированный инженер-маркшейдер должен иметь какой-то минимум знаний о применении понятий линейной алгебры в способе наименьших квадратов, для того чтобы, с одной стороны, понимать современную научную литературу, а с другой стороны, эти знания во многих случаях упростят обращение с уже известными ему теоретическими положениями.

Настоящий раздел книги имеет своей целью помочь студентам маркшейдерской специальности пользоваться современной литературой по вопросам математической обработки измерений.

Раздел делится на две главы: в главе X приведены сведения из линейной алгебры, необходимые для понимания главы XI, в которой изложены основные математические выводы способа наименьших квадратов с применением аппарата линейной алгебры. Следует иметь в виду, что содержание главы XI далеко не полностью охватывает все вопросы, которые могут быть решены применением линейной алгебры в теории математической обработки наблюдений.

§ 69. Матрицы. Основные обозначения

Прямоугольную таблицу действительных чисел *

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = A \qquad (69,1)$$

будем называть **матрицей** и обозначать буквой А. Сокращенно матрицу можно записать так:

$$A = \|a_{ik}\| \qquad (i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n). \qquad (69,2)$$

Иногда, чтобы подчеркнуть, что матрица A имеет m строк и n столбцов, пишут

$$A = A_{mn}. \qquad (69,3)$$

Числа a_{ik}, составляющие матрицу, называются ее **элементами.** Первый индекс i всегда указывает номер строки, а второй индекс k — номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент a_{ik}.

Если $m = n$, то матрица называется **квадратной**, а число n, равное m, — ее **порядком.**

Тогда матрицу (69,2) можно обозначать

$$A = \|a_{ik}\|_1^n, \qquad (69,4)$$

где значок $\|a_{ik}\|_1^n$ указывает на порядок матрицы.

В общем же случае матрица называется **прямоугольной** (с размерами $m \times n$).

Матрица, у которой $a_{ik} = 0$ для всех возможных i и k, называется **нулевой матрицей,** т. е. $0 = 0_{mn}$.

Элементы матрицы a_{ik} при $i = k$ называются **диагональными,** а диагональ, на которой они расположены, — **главной диагональю.**

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad (69,5)$$

называется **диагональной матрицей.**

---

* Здесь и далее будем рассматривать только действительные числа, так как при уравновешивании в маркшейдерском деле и геодезии комплексные числа практически не встречаются.

Диагональная матрица, у которой все элементы, расположенные на главной диагонали, равны единицам

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = E, \tag{69,6}$$

называется **единичной матрицей** и обозначается E.

Если матрицу

$$A_{mn} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{69,7}$$

повернуть вокруг главной диагонали, то получится матрица

$$A^{\text{т}}_{mn} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \tag{69,8}$$

в которой строки A_{mn} заменены столбцами, а столбцы строками.

Матрица $A^{\text{т}}_{mn}$ называется **транспонированной** по отношению к A_{mn} и обозначается со значком «Т».

Очевидно,

$$A_{mn} = (A^{\text{т}}_{mn})^{\text{т}}. \tag{69,9}$$

Квадратная матрица

$$A_{mn} = \| a_{ik} \|_1^n, \tag{69,10}$$

у которой элементы, стоящие симметрично главной диагонали, равны, т. е. $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, называется **симметричной матрицей**. Например, всякая квадратная диагональная матрица является симметричной. Для симметричной матрицы A справедливо следующее очевидное соотношение:

$$A = A^{\text{т}}, \tag{69,11}$$

которое далее будет часто использоваться.

Прямоугольная матрица, состоящая из одного столбца,

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} \tag{69,12}$$

называется **столбцовой матрицей**.

Транспонированная столбцовая матрица

$$\overline{X}^{\tau} = \| x_1, x_2, \ldots, x_n \| \qquad (69,13)$$

называется **строчной.**

В некоторых случаях столбцовую матрицу X удобно будет называть **n-мерным вектором.**

Пусть m величин $v_1, v_2, \ldots, v_m$ выражается линейно через n величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ следующими уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ v_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \qquad (69,14)$$

или сокращенно

$$v_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (69,15)$$

Вычисление величин v по значениям x согласно уравнениям системы (69, 14) называется **однородным линейным преобразованием величин x в величины v.**

Коэффициенты преобразования, выраженного уравнениями системы (69,14), образуют прямоугольную матрицу вида (69,1) с размерами $m \times n$.

Линейное преобразование (69,14) однозначно определяет матрицу (69,1), а матрица (69,1) однозначно определяет преобразование (69,14).

§ 70. Сложение и умножение прямоугольных матриц

Сложение прямоугольных матриц

Пусть величины $v_1', v_2', \ldots, v_m'$ выражаются через величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи линейного преобразования

$$v_i' = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (70,1)$$

а величины $v_1'', v_2'', \ldots, v_m''$ — через те же величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи преобразования

$$v_i'' = \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (70,2)$$

Тогда величины $v_1, v_2, \ldots, v_m$, определяемые как суммы

$$v_i = v_i' + v_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (70,3)$$

должны получаться из величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ посредством следующего линейного преобразования:

$$v_i = \sum_{k=1}^{k=n} (a_{ik} + b_{ik}) x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{70,4}$$

или, обозначив

$$a_{ik} + b_{ik} = c_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \ k = 1,2, \ldots, n), \tag{70,5}$$

получим

$$v_i = \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{70,6}$$

Таким образом, если матрица, соответствующая линейному преобразованию (70,1), равна

$$A = \| a_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n), \tag{70,7}$$

а матрица, соответствующая линейному преобразованию (70,2), равна

$$B = \| b_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n), \tag{70,8}$$

то матрица, соответствующая линейному преобразованию (70,6), будет равна

$$C = \| c_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n). \tag{70,9}$$

Отсюда видно, что для получения преобразования (70,6) из преобразований (70,1) необходимо из двух матриц (70,7) и (70,8) получить новую матрицу (70,9), определяющую искомое линейное преобразование (70,6).

Суммой двух прямоугольных матриц $A = \| a_{ik} \|$ **и** $B = \| b_{ik} \|$ **одинаковых размеров** $m \times n$ **называется матрица** $C = \| c_{ik} \|$ **тех же размеров, элементы которой равны сумме соответствующих элементов данных матриц, т. е.** $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

Тогда матрица C может быть записана так:

$$C = A + B, \tag{70,10}$$

где

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

Операция нахождения суммы данных матриц называется **сложением матриц.**

Пример. Пусть в преобразовании (70,1) и (70,2) матрицы A и B соответственно равны

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 15 & 4 & 8 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Тогда, по определению, суммой этих двух матриц будет матрица

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 15 & 4 & 8 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10 & 9 & 13 \\ 23 & 7 & 12 \end{Vmatrix}. \tag{70,11}$$

Из определения суммы двух матриц непосредственно следует, что эта операция обладает **переместительным и сочетательным** свойствами:

$$A+B=B+A; \tag{70,12}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C), \tag{70,13}$$

где A, B, C — произвольные прямоугольные матрицы одинаковых размеров.

Рассмотренная выше операция сложения матриц может быть распространена на случай любого числа слагаемых.

Умножение матрицы на некоторое действительное число

Умножим в преобразовании (70,6) величины $v_1, v_2, \ldots, v_m$ на некоторое действительное число α. Тогда получим

$$\alpha v_i=\omega_i=\sum_{k=1}^{k=n}(\alpha c_{ik})\,x_k \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{70,14}$$

Преобразованию (70,14) соответствует новая матрица D, элементами которой являются произведения соответствующих элементов матрицы C на действительное число α, т. е.

$$d_{ik}=\alpha c_{ik} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{70,15}$$

Произведением матрицы $C=\|c_{ik}\|$ $(i=1,2,\ \ldots,\ m;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ **на действительное число** α **называется матрица** $D=\|d_{ik}\|$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, элементы которой определяются соотношением (70, 15),

$$D=\|\alpha c_{ik}\| \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{70,16}$$

Это выражение сокращенно записывается так:

$$D=\alpha C. \tag{70,17}$$

Операция нахождения произведения матрицы на число называется **умножением матрицы на число.**

Пример. Пусть в преобразовании (70,6) матрица C (70,11) умножается на $\alpha=3$, т. е.

$$D=3C=3\begin{Vmatrix}10 & 9 & 13\\ 23 & 7 & 12\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}30 & 27 & 39\\ 69 & 21 & 36\end{Vmatrix}.$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B; \tag{70,18}$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A; \tag{70,19}$$

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A), \tag{70,20}$$

где A и B — прямоугольные матрицы одинаковых размеров;
α и β — действительные числа.

Разность двух прямоугольных матриц A и B одинаковых размеров определяется равенством

$$A-B=A+(-1)B. \qquad (70,21)$$

Умножение матрицы на матрицу

Пусть некоторые величины $z_1, z_2, \ldots, z_t$ выражаются через величины $v_1, v_2, \ldots, v_m$ посредством преобразования

$$z_j=\sum_{i=1}^{i=m} b_{ji}v_i \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ t), \qquad (70,22)$$

а величины $v_1, v_2, \ldots, v_m$ связаны с величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соотношениями (69,15)

$$v_i=\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_k \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Подставив значения v_i в уравнение (70,22), получим

$$z_j=\sum_{i=1}^{i=m}\left(b_{ji}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_k\right) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ t). \qquad (70,23)$$

Запишем это выражение в развернутом виде:

$$\begin{aligned} z_j=&b_{j1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)+\\ &+b_{j2}(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)+\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &+b_{jm}(a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ t) \end{aligned} \qquad (70,24)$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены по x_k, получим

$$z_j=\left(\sum_{i=1}^{i=m} b_{ji}a_{i1}\right)x_1+\left(\sum_{i=1}^{i=m} b_{ji}a_{i2}\right)x_2+\ldots+\left(\sum_{i=1}^{i=m} b_{ji}a_{in}\right)x_n, \qquad (70,25)$$

а сокращенно

$$z_j=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\sum_{i=1}^{i=m} b_{ji}a_{ik}\right)x_k \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ t). \qquad (70,26)$$

Обозначим

$$\sum_{i=1}^{i=m} b_{ji}a_{ik}=g_{jk} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ t;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (70,27)$$

Тогда

$$z_j=\sum_{k=1}^{k=n} g_{jk}x_k \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ t). \qquad (70,28)$$

Преобразование (70,28) также является линейным. Следовательно, подстановка в линейное преобразование (70, 22) другого линейного преобразования (69, 15) приводит к новому линейному преобразованию (70, 28), элементы матрицы которого определяются выражением (70, 27). В соответствии с этим выражением **произведением двух прямоугольных матриц**

$$B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{t1} & b_{t2} & \dots & b_{tm} \end{Vmatrix}, \quad A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{70,29}$$

называется матрица

$$G=\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{t1} & g_{t2} & \dots & g_{tn} \end{Vmatrix}, \tag{70,30}$$

у которой элемент g_{jk}, стоящий на пересечении j-ой строки и k-го столбца, равен сумме произведений элементов j-ой строки первой матрицы B на соответствующие элементы k-го столбца второй матрицы A, т. е.

$$g_{jk}=\sum_{i=1}^{i=m} b_{ji}a_{ik} \qquad (j=1,\ 2,\ \dots,\ t; \quad k=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Операция нахождения произведения матриц называется **умножением матриц** и коротко записывается так:

$$G=BA. \tag{70,31}$$

Пример. Пусть матрицы B и A в преобразованиях (70,22) и (69,15) соответственно равны

$$B=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \end{Vmatrix}, \quad A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}. \tag{70,32}$$

Тогда матрица G в преобразовании (70,28), равная произведению матрицы B на матрицу A, вычисляется следующим образом:

$$G=BA=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 1\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+2(-1); & 1\cdot 2+(-1)\cdot 0+2\cdot 3 \\ 3\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+6\cdot 1; & 3\cdot 2+(-2)\cdot 0+6\cdot 3 \end{Vmatrix},$$

откуда имеем

$$G=\begin{Vmatrix} 1 & 8 \\ 13 & 24 \end{Vmatrix} \tag{70,33}$$

Операция умножения двух прямоугольных матриц выполнима лишь в том случае, когда число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором.

В частности, умножение всегда выполнимо, если оба сомножителя — квадратные матрицы одного и того же порядка.

Следует иметь в виду, что операция умножения матриц в общем случае не является перестановочной (**коммутативной**), т. е.

$$BA \neq AB. \tag{70,34}$$

Легко проверить **сочетательное** свойство умножения матриц, а также **распределительное** свойство умножения относительно сложения:

$$(AB)\,C = A\,(BC); \tag{70,35}$$

$$(A+B)\,C = AC + BC; \tag{70,36}$$

$$A\,(B+C) = AB + AC. \tag{70,37}$$

Все свойства естественным образом распространяются на случай нескольких сомножителей.

Чтобы получить матрицу $G^{\text{т}}$, транспортированную относительно матрицы (70,31), нужно транспортировать сомножители B и A и при перемножении поменять их местами, т. е.

$$G^{\text{т}} = (BA)^{\text{т}} = A^{\text{т}}B^{\text{т}}. \tag{70,38}$$

Это правило справедливо для любого числа сомножителей.

Если любую матрицу A умножить слева или справа на E — единичную матрицу соответствующего порядка, то матрица не изменится, т. е.

$$AE = EA = A. \tag{70,39}$$

Воспользовавшись понятием произведения матриц, можно линейное преобразование (70,28) записать одним матричным равенством

$$\left\| \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_t \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ & & & \\ & & \cdot & \\ & & & \\ g_{t1} & g_{t2} & \dots & g_{tn} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix} \right\| \tag{70,40}$$

или в сокращенной записи

$$Z = GX, \tag{70,41}$$

где Z и X — столбцовые матрицы из величин соответственно $(z_1, z_2, \dots, z_t)$ и $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Запись линейного преобразования в форме (70,41) значительно меньше занимает места по сравнению с (70,40), но в то же время очень наглядна и удобна для обозрения и запоминания.

§ 71. Основные сведения из теории определителей

Одним из показателей матрицы является ее **определитель**, или **детерминант**, имеющий большое применение при теоретических выводах.

Прежде чем дать определение, что такое детерминант, необходимо ввести понятие **перестановки** и ее **четности.** Перестановкой n чисел 1, 2, . . ., n называется любое расположение этих чисел в определенном порядке. Число всех перестановок будет равно произведению 1, 2, . . ., n, которое сокращенно обозначается $n!$ и называется **«n-факториал»**. Например: из трех чисел 1, 2, 3 можно составить всего $3! = 6$ перестановок: 123, 132, 312, 321, 231, 213.

Среди возможных перестановок всегда выделяется одна, в которой числа идут в натуральном порядке (1, 2, 3), в остальных перестановках этот порядок нарушен. Если в перестановке большее число стоит впереди меньшего, то говорят, что эти два числа образуют **инверсию,** если же меньшее число стоит впереди бо́льшего — **то порядок.**

Чтобы подсчитать число инверсий, необходимо подсчитать, сколько чисел перестановки стоит впереди 1, зачеркнув единицу подсчитать, сколько чисел стоит впереди 2 (не считая зачеркнутую единицу), после чего зачеркнуть 2 и посчитать, сколько чисел стоит впереди 3 (зачеркнутые числа не считаются), и т. д.

Пусть впереди единицы было t_1 чисел, впереди $2 - t_2$ чисел и т. д., наконец, впереди $n - t_n$ чисел. Тогда общее число инверсий в рассматриваемой перестановке

$$t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n. \tag{71,1}$$

Пример. В перестановке 2 4 6 1 3 5 число инверсий будет равно

$$\left.\begin{array}{cccccccc}
2 & 4 & 6 & \cancel{1} & 3 & 5 & & t_1=3 \\
2 & 4 & 6 & \cancel{1} & 3 & 5 & & t_2=0 \\
\cancel{2} & 4 & 6 & \cancel{1} & 3 & 5 & & t_3=2 \\
\cancel{2} & 4 & 6 & \cancel{1} & \cancel{3} & 5 & & t_4=0 \\
\cancel{2} & \cancel{4} & 6 & \cancel{1} & \cancel{3} & 5 & & t_5=1 \\
\cancel{2} & \cancel{4} & 6 & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{5} & & t_6=0
\end{array}\right\} t = 3+0+2+0+1+0 = 6$$

Перестановка может быть **четной или нечетной**, смотря по тому, будет ли число инверсий в ней четным или нечетным.

Если в некоторой перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ из n чисел поменять местами какие-нибудь два числа, например α_1 и α_3, получится новая перестановка $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из тех же n чисел. **Эта операция перемещения двух чисел называется транспозицией.** Каждая транспозиция изменяет четность перестановки на противоположную. От любой перестановки из n чисел можно перейти к любой другой перестановке из тех же n чисел путем ряда транспозиций, причем для этого можно обойтись не более чем $n-1$ транспозициями.

Все $n!$ перестановок из n чисел можно расположить одну вслед за другой (без пропусков и без повторений) так, что каждая следующая перестановка получается из предыдущей путем одной транспозиции. Каждая транспозиция меняет четность перестановки.

При любом $n \geqslant 2$ число четных перестановок из n чисел равно числу нечетных, т. е. $\frac{n!}{2}$.

Пусть дана квадратная матрица A n-ого порядка с элементами a_{ij}

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{71,2}$$

Тогда ее определителем (детерминантом) n-го порядка из n^2 элементов матрицы A называется алгебраическая сумма всевозможных членов, представляющих собой произведение n элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знак члена равен $(-1)^t$, где t — число инверсий в перестановке вторых индексов элементов члена, когда сами элементы члена расположены в порядке возрастания первых индексов.

Проиллюстрируем данное определение на примере матрицы третьего порядка:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \begin{aligned} &= (-1)^{t_1} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{t_2} a_{12}a_{23}a_{31} + \\ &+ (-1)^{t_3} a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{t_4} a_{13}a_{22}a_{31} + \\ &+ (-1)^{t_5} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{t_6} a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned} \tag{71,3}$$

где

$$t_1 = 0; \quad t_2 = 2; \quad t_3 = 2; \quad t_4 = 3; \quad t_5 = 1; \quad t_6 = 1.$$

Тогда определитель

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{71,4}$$

Из приведенных определения и примера может быть записана следующая сокращенная формула вычисления определителя n-го порядка:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{\substack{1 \leqslant \alpha_1 \dots \\ \dots \alpha_n \leqslant n}} (-1)^t a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} = \\ &= \sum_{\substack{1 \leqslant \alpha_1 \dots \\ \dots \alpha_n \leqslant n}} (-1)^t a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}, \end{aligned} \tag{71,5}$$

где числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ являются номерами столбцов (строк) матрицы и образуют $n!$ перестановок из чисел $1, 2, \dots, n$, а t — число инверсий в соответствующей перестановке.

Квадратная матрица A называется **особенной**, если определитель $|A| = 0$, в противном случае квадратная матрица A называется **неособенной**.

Вычислять определитель непосредственно по формуле (71,5) очень трудно и нерационально, так как имеются более простые методы, основанные на свойствах определителей, которые приведем ниже без доказательств. Доказательства легко усмотреть из формулы (71,5) или же познакомиться с ними по книге А. Г. Куроша [11].

Свойство 1. Определитель не изменяется при транспортировании матрицы

$$|A| = |A^{\tau}|, \tag{71,6}$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{71,7}$$

Свойство 2. При взаимной перестановке двух столбцов (строк) в матрице ее определитель изменяет знак без изменения величины

$$\begin{vmatrix} & & (i) & (k) & \\ a_{11} & a_{12} \dots & a_{1i} \dots & a_{1k} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2i} \dots & a_{2k} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{ni} \dots & a_{nk} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} & & (k) & (i) & \\ a_{11} & a_{12} \dots & a_{1k} \dots & a_{1i} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2k} \dots & a_{2i} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nk} \dots & a_{ni} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{71,8}$$

Свойство 3. Определитель квадратной матрицы, имеющей две одинаковые строки или два одинаковых столбца, равен нулю.

Свойство 4. Если строку или столбец матрицы A умножить на число α, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & \alpha a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \dots \alpha a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha |A|. \tag{71,9}$$

Следовательно, множитель α, общий для всех членов одного столбца или одной строки, можно вынести за знак определителя.

Свойство 5. Определитель матрицы

$$A=\left\| \begin{matrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a'_{n1}+a''_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{71,10}$$

у которой каждый член одного столбца (или строки) представлен в виде суммы двух членов, может быть разложен на два определителя

$$|A|=|A'|+|A''|, \tag{71,11}$$

где

$$A'=\left\| \begin{matrix} a'_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a'_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{matrix} \right\|, \qquad A''=\left\| \begin{matrix} a''_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a''_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a''_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{matrix} \right\|. \tag{71,12}$$

Свойство 6. Каждый столбец (строку) можно рассматривать, как столбцовую (строчную) матрицу и обозначать соответственно

$$\|a_{ir}\| \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n) \text{ и } \|a_{rk}\| \;(k=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{71,13}$$

Если r-ый столбец (строка) матрицы $A=\|a_{ik}\|_1^n$ может быть получен следующим образом:

$$\|a_{ir}\|=\alpha_1\|a_{i1}\|+\alpha_2\|a_{i2}\|+\ldots+\alpha_{r-1}\|a_{ir-1}\|+\alpha_{r+1}\|a_{ir+1}\|+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_n\|a_{in}\| \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n), \tag{71,14}$$

где $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_{r-1},\,\alpha_{r+1},\,\ldots,\,\alpha_n$ — некоторые числа, то говорят, что **r-ый столбец (строка) есть линейная комбинация остальных столбцов (строк).**

Столбцы (строки), для которых выполняется соотношение (71, 14), называются **линейно-зависимыми,** в противном случае столбцы (строки) называются **линейно-независимыми.**

Опираясь на свойства 3, 4 и 5, получаем следующее утверждение: **квадратная матрица, у которой столбцы (строки) линейно зависимы, имеет определитель, равный нулю.**

Если прямоугольная матрица A_{mn} $(n>m)$ имеет m линейно независимых столбцов, то можно показать, что все остальные $(n-m)$ столбцов матрицы A_{mn} являются линейной комбинацией m линейно независимых столбцов.

Следовательно, если и для прямоугольных матриц определитель вычислять по одной из формул (71, 5), то он всегда будет получаться равным нулю. **Поэтому прямоугольные матрицы всегда имеют определитель, равный нулю.**

Свойство 7. Если к элементам строки (столбца) матрицы прибавить любую линейную комбинацию остальных строк (столбцов), то определитель матрицы не изменяется. Это утверждение следует из свойств 5 и 6.

Если в матрице $A_{nn} = \| a_{ik} \|_1^n$ взять какой-либо элемент a_{rs} и вычеркнуть из матрицы r-ую строку и s-ый столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{rs}, то получится новая квадратная матрица $A'_{n-1,\, n-1}$. Ее определитель называется **минором элемента** a_{rs} и обозначается M_{rs}.

Например, минором M_{23} элемента a_{23} определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

будет

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}. \tag{71,15}$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{rs} определителя $|A|$ называется минор M_{rs} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{r+s}$, и обозначается

$$A_{(rs)} = (-1)^{r+s} M_{rs}. \tag{71,16}$$

Для алгебраических дополнений имеет место формула

$$|A| = \sum_{r=1}^{r=n} a_{rs} A_{(rs)} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{rs} A_{(rs)}. \tag{71,17}$$

Формула (71,17) дает один из методов вычисления определителей путем понижения порядка матрицы на единицу. Для вычисления миноров можно опять применить формулу (71,17) и так далее, пока не получится определитель 2-го или 3-го порядка, вычисление которого не представляет затруднений.

Из свойства 3 и формулы (71,17) следует, что если миноры элементов r-ой строки (столбца) умножить на соответствующие элементы любой другой строки (столбца) и полученные произведения сложить, то сумма их будет равна нулю, т. е.

$$\sum_{s=1}^{s=n} a_{is} \underset{(i \neq r)}{A_{(rs)}} = \sum_{r=1}^{r=n} a_{ri} \underset{(i \neq s)}{A_{(rs)}} = 0. \tag{71,18}$$

Если в матрице $A_{mn} = \| a_{ik} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ возьмем p строк и столбцов, то элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют новую матрицу, определитель которой будем обозначать

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_p \\ k_1, k_2, \ldots, k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1k_1}a_{i_1k_2} \ldots a_{i_1k_p} \\ a_{i_2k_1}a_{i_2k_2} \ldots a_{i_2k_p} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{i_pk_1}a_{i_pk_2} \ldots a_{i_pk_p} \end{vmatrix}. \tag{71,19}$$

Определитель (71, 19) называется **минором** p-го порядка матрицы A. Миноры, у которых $i_1 = k_1$; $i_2 = k_2$; $\ldots$; $i_p = k_p$, называются **главными**.

Наибольший из порядков, отличных от нуля миноров, порождаемых матрицей, называется **рангом матрицы**.

Если r-ранг прямоугольной матрицы A_{mn}, то очевидно, что $r \leqslant m, n$.

Пусть квадратная матрица $C = \|c_{ij}\|_1^m$ является произведением двух прямоугольных матриц $A = \|a_{ik}\|$ и $B = \|b_{kj}\|$ с размерами соответственно $m \times n$ и $n \times m$:

$$\begin{Vmatrix} c_{11}c_{12} \ldots c_{1m} \\ c_{21}c_{22} \ldots c_{2m} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ c_{m1}c_{m2} \ldots c_{mm} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{m1}a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11}b_{12} \ldots b_{1m} \\ b_{21}b_{22} \ldots b_{2m} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ b_{n1}b_{n2} \ldots b_{nm} \end{Vmatrix}, \tag{71,20}$$

у которой $m \leqslant n$, а

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Тогда справедлива будет важная для нас формула Бине—Коши, выражающая определитель C через миноры матриц A и B:

$$|C| = \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 < \ldots \\ \ldots < k_m \leqslant n}} \begin{vmatrix} a_{1k_1} \ldots a_{1k_m} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{mk_1} \ldots a_{mk_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{k_11} \ldots b_{k_1m} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ b_{k_m1} \ldots b_{k_mm} \end{vmatrix} \tag{71,21}$$

или в иных обозначениях

$$|C| = \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 < \ldots \\ \ldots < k_m \leqslant n}} A\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, m \\ k_1, k_2, \ldots, k_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1, k_2, \ldots, k_m \\ 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}. \tag{71,22}$$

Согласно этой формуле **определитель матрицы C равен сумме произведений всевозможных миноров максимального (m-го) порядка матрицы A на соответствующие миноры того же порядка матрицы B.**

Если $m > n$, то матрицы A и B не имеют миноров m-го порядка. В этом случае определитель матрицы C (71,20) равен нулю.

Элементы любого минора p-го порядка $C\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_p \\ j_1 j_2 \dots j_p \end{pmatrix}$ можно рассматривать как результат перемножения двух матриц

$$\begin{Vmatrix} c_{i_1 j_1} & c_{i_1 j_2} & \dots & c_{i_1 j_p} \\ c_{i_2 j_1} & c_{i_2 j_2} & \dots & c_{i_2 j_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i_p j_1} & c_{i_p j_2} & \dots & c_{i_p j_p} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_p 1} & a_{i_p 2} & \dots & a_{i_p n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{1 j_1} & \dots & b_{1 j_p} \\ b_{2 j_1} & \dots & b_{2 j_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n j_1} & \dots & b_{n j_p} \end{Vmatrix}, \qquad (71,23)$$

первая из которых составлена из строк $i_1, i_2, \dots, i_p$ матрицы A, а вторая из столбцов $j_1, j_2, \dots, j_p$ матрицы B. Поэтому и для миноров матрицы C можно написать формулу, аналогичную (71,22), а именно

$$C\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_p \\ j_1 j_2 \dots j_p \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 < \dots \\ < k_p \leqslant n}} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_p \\ k_1 k_2 \dots k_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 k_2 \dots k_p \\ j_1 j_2 \dots j_p \end{pmatrix}. \qquad (71,24)$$

Следовательно, минор p-го порядка $C\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_p \\ j_1 j_2 \dots j_p \end{pmatrix}$ равен сумме произведений всевозможных миноров p-го порядка, лежащих в строках $i_1, i_2, \dots, i_p$ матрицы A, на соответствующие миноры того же порядка, матрицы B, лежащие в столбцах $j_1, j_2, \dots, j_p$.

Из формулы Бине—Коши (71,22), как следствие, следует формула определителя произведения двух квадратных матриц

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|, \qquad (71,25)$$

т. е. определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц.

Для неособенной квадратной матрицы $A_{nn} = \| a_{ik} \|_1^n$ рассмотрим матрицу $\mathfrak{B}_{nn}$ следующего вида:

$$\mathfrak{B}_{nn} = \frac{1}{|A|} \begin{Vmatrix} A_{(11)} & A_{(21)} & \dots & A_{(n1)} \\ A_{(12)} & A_{(22)} & \dots & A_{(n2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{(1n)} & A_{(2n)} & \dots & A_{(nn)} \end{Vmatrix}, \qquad (71,26)$$

где $A_{(rs)}$ — есть алгебраическое дополнение элемента a_{rs} матрицы A_{nn}.

Умножив матрицу A_{nn} на $\mathfrak{B}_{nn}$ (71,26), на основании формул (71,17) и (71,18), получим

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{A_{(11)}}{|A|} & \dots & \frac{A_{(n+1)}}{|A|} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{(1n)}}{|A|} & \dots & \frac{A_{(nn)}}{|A|} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \qquad (71,27)$$

или сокращенно

$$A\mathfrak{B}=E. \tag{71,28}$$

Очевидно, справедливо и следующее равенство:

$$\mathfrak{B}A=E. \tag{71,29}$$

Матрица (71,26) называется обратной матрицей для матрицы A и обозначается A^{-1}. Тогда (71,28) и (71,29) запишутся

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \tag{71,30}$$

Для произведения двух неособенных матриц будем иметь

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}. \tag{71,31}$$

Рассмотрим систему n линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}x_k=w_i \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{71,32}$$

или в матричной записи

$$AX=W, \tag{71,33}$$

где $A=\|a_{ik}\|_1^n$ — матрица, составленная из коэффициентов линейных уравнений при неизвестных x_k;

X — столбцовая матрица, составленная из неизвестных x_k, или вектор неизвестных,

$$X=\begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n \end{Vmatrix}; \tag{71,34}$$

W — столбцовая матрица, составленная из свободных членов w_i, или вектор свободных членов,

$$W=\begin{Vmatrix} w_1\\ w_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ w_n \end{Vmatrix}. \tag{71,35}$$

Умножив слева левую и правую часть матричного уравнения (71,33) на обратную матрицу A^{-1}, получим

$$X=A^{-1}W. \tag{71,36}$$

Матричное уравнение (71,36) дает значения составляющих вектора неизвестных X, выраженные через коэффициенты матрицы

$A = \|a_{ik}\|_1^n$, и вектор свободных членов W, т. е., другими словами, уравнение (71,36) есть решение системы линейных уравнений (71,32).

Таким образом, для решения системы линейных уравнений необходимо и достаточно знать матрицу A^{-1}, обратную матрице коэффициентов A. Если матрица A особенная, т. е. $|A| = 0$, то A^{-1} не существует, а значит, система не имеет решения (несовместна) или решение многозначно. Следовательно, **для того чтобы система линейных уравнений $AX = W$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $|A| \neq 0$.**

На практике при решении систем линейных уравнений в некоторых случаях действительно сначала находят обратную матрицу A^{-1}, а потом по формуле (71,36) вычисляют значения неизвестных.

Существуют и другие методы решения системы линейных уравнений, например известная уже читателю «схема Гаусса».

Глава XI

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ В СПОСОБЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ 72. Способ посредственных (косвенных) измерений

В настоящем параграфе будем исходить из того, что читателю известны из основного курса постановка и путь решения задачи уравнивания по методу посредственных измерений. Поэтому изложение начнем с того, что нами получены n линейных уравнений поправок с k неизвестными:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1\delta_x + b_1\delta_y + \ldots + g_1\delta_k + v_1 = \varepsilon_1;\\
&a_2\delta_x + b_2\delta_y + \ldots + g_2\delta_k + v_2 = \varepsilon_2;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_n\delta_x + b_n\delta_y + \ldots + g_n\delta_k + v_n = \varepsilon_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (72,1)$$

Систему уравнений (72,1) можно записать более компактно, если ввести следующие обозначения:

$$A = A_{nk} = \begin{Vmatrix} a_1 b_1 \ldots g_1 \\ a_2 b_2 \ldots g_2 \\ \cdots\cdots \\ a_n b_n \ldots g_n \end{Vmatrix} \text{— матрица коэффициентов уравнений поправок;} \qquad (72,2)$$

$$X = X_{k1} = \begin{Vmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_k \end{Vmatrix} \text{— столбцовая матрица или } k\text{— мерный вектор искомых поправок к приближенным значениям посредственных измерений, которые не связаны между собой условиями;} \qquad (72,3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n1} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{Vmatrix}$$ — столбцовая матрица или n — мерный вектор поправок непосредственно измеренных величин; (72,4)

$$V = V_{n1} = \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{Vmatrix}$$ — столбцовая матрица или n — мерный вектор свободных членов уравнений поправок. (72,5)

Пользуясь правилами умножения и сложения матриц, систему уравнений (72,1) запишем в следующем виде:

$$\begin{Vmatrix} a_1 b_1 \dots g_1 \\ a_2 b_2 \dots g_2 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_n b_n \dots g_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_k \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{Vmatrix} \qquad (72,6)$$

или, использовав принятые обозначения (72,2)—(72,5), получим

$$A_{nk} X_{k1} + V_{n1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n1} \qquad (72,7)$$

или

$$AX + V = \boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (72,8)$$

Запись системы уравнений (72,1) в виде (72,8) занимает мало места и в то же время очень наглядна, так как в ней четко разделены величины, имеющие разный физический смысл.

Согласно принципу наименьших квадратов вектор X должен быть таким, чтобы для составляющих вектора ε выполнялось следующее условие:

$$[p\varepsilon\varepsilon] = \min. \qquad (72,9)$$

Запишем это условие в матричном виде. Для этого введем понятие **о матрице весов (или весовой матрице)** непосредственно измеренных величин.

Весовой матрицей независимых непосредственных измерений называется матрица вида

$$P = \begin{Vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{Vmatrix}, \qquad (72,10)$$

где p_i есть вес i-го измерения, к которому отыскивается поправка ε_i.

Таким образом, весовая матрица есть диагональная, а значит, и симметричная матрица, у которой на главной диагонали стоят веса независимых непосредственных измерений, а остальные элементы равны нулю *.

В матричной форме записи условие (72,9) примет следующий вид:

$$\| \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \| \cdot \begin{Vmatrix} p_1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & p_2 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & p_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{Vmatrix} = \min \tag{72,11}$$

или

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} P \boldsymbol{\varepsilon} = \min. \tag{72,12}$$

Здесь значок «т» обозначает транспонирование матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Для определения поправок δ_x, δ_y, δ_z, . . , δ_k значения из системы (72,1) нужно подставить в (72,9) и после приведения подобных членов придем к следующему выражению:

$$\begin{aligned}[p\varepsilon\varepsilon] = {} & [paa]\,\delta_x^2 + [pab]\,\delta_x\delta_y + \ldots + [pag]\,\delta_x\delta_k + 2[pav]\delta_x + \\ & + [pab]\,\delta_x\delta_y + [pbb]\,\delta_y^2 + \ldots + [pbg]\,\delta_y\delta_k + 2[pbv]\delta_y + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [pag]\,\delta_x\delta_k + [pbg]\,\delta_y\delta_k + \ldots + [pgg]\,\delta_k^2 + 2[pgv]\,\delta_k + \\ & + [pvv] \end{aligned} \tag{72,13}$$

Произведем эти же преобразования, пользуясь матричной формой записи. Подставив (72,8) в (72,12), получим

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} P \boldsymbol{\varepsilon} = (X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} + V^{\mathrm{T}})\, P\, (AX + V) \tag{72,14}$$

или, раскрыв скобки,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} P \boldsymbol{\varepsilon} = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} PAX + V^{\mathrm{T}} PAX + X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} PV + V^{\mathrm{T}} PV. \tag{72,15}$$

Произведения матриц $V^{\mathrm{T}}PAX$ и $X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}PV$ представляют собой квадратные и симметричные матрицы, состоящие из одного элемента. Поэтому на основании свойства симметричной матрицы имеем, что

$$(V^{\mathrm{T}} PAX)^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} PV = V^{\mathrm{T}} PAX. \tag{72,16}$$

---

* Вообще говоря, весовая матрица не обязательно должна быть диагональной, поскольку условие (72,9) может быть обобщено и на зависимые измерения. Подробное изложение этого вопроса читатель найдет в работах [5], [9] и [12]. Это один из примеров плодотворности применения понятий линейной алгебры в теории способа наименьших квадратов, так как без матриц прийти к такому обобщению условия (72,9) практически невозможно.

Обозначим матрицу $A^{\text{т}}PA$ через N:

$$N = A^{\text{т}}PA. \tag{72,17}$$

Учитывая (72,16) и (72,17) из (72,15), получим

$$\varepsilon^{\text{т}}P\varepsilon = X^{\text{т}}NX + 2X^{\text{т}}A^{\text{т}}PV + V^{\text{т}}PV. \tag{72,18}$$

Выражение (72,18) является не чем иным, как записью в матричной форме выражения (72,13). Действительно, рассматривая выражения (72,16) и (72,17), легко заметить, что:

$$N = \begin{Vmatrix} [paa] & [pab] & \ldots & [pag] \\ [pab] & [pbb] & \ldots & [pbg] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [pag] & [pbg] & & [pgg] \end{Vmatrix}; \tag{72,19}$$

$$A^{\text{т}}PV = \begin{Vmatrix} [pav] \\ [pbv] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ [pgv] \end{Vmatrix} \tag{72,20}$$

$$V^{\text{т}}PV = [pvv]. \tag{72,21}$$

Для решения поставленной задачи необходимо найти такое значение вектора X, при котором функция (72,18) в соответствии с (72,9) была бы равна минимуму,

$$\Phi(X) = X^{\text{т}}NX + 2X^{\text{т}}A^{\text{т}}PV + V^{\text{т}}PV = \min. \tag{72,22}$$

Если функция Φ (X) имеет min, то он достигается в точке, где выполняются условия

$$\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\delta_i} = 0 \qquad (i = x, y, \ldots, k), \tag{72,23}$$

т. е. частные производные от Φ (X) по составляющим вектора X должны быть равны нулю (39,14).

Произведя дифференцирование функции Φ (X), получим систему уравнений, которая в матричной форме запишется так:

$$NX + A^{\text{т}}PV = 0. \tag{72,24}$$

Сравнивая (72,24) с (39,15), видим, что выражением (72,24) записаны нормальне уравнения в матричной форме.

Матрица нормальных уравнений N является симметричной, что легко установить из (72,17), так как

$$(A^{\text{т}}PA)^{\text{т}} = A^{\text{т}}PA = N. \tag{72,25}$$

Определитель матрицы N всегда больше нуля. Для доказательства этого утверждения введем матрицу

$$P^{1/2} = \begin{Vmatrix} \sqrt{p_1} & 0 \dots 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} \dots 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 \dots \sqrt{p_n} \end{Vmatrix}. \qquad (72{,}26)$$

Очевидно, что

$$P = P^{1/2} P^{1/2}. \qquad (72{,}27)$$

Тогда матрицу N (72,17) можно представить в виде

$$N = (P^{1/2}A)^{\mathrm{T}} (P^{1/2}A) \qquad (72{,}28)$$

или, обозначив

$$P^{1/2}A = B, \qquad (72{,}29)$$

получим

$$N = B^{\mathrm{T}}B. \qquad (72{,}30)$$

Матрицу N можно рассматривать как результат произведения двух прямоугольных матриц $(B_{nk})^{\mathrm{T}}$ и B_{nk}.

На основании формулы Бине-Коши имеем, что

$$|N| = \sum_{i=1}^{i=\gamma} \eta_i^2, \qquad (72{,}31)$$

где η_i — i-ый минор максимального k-го порядка матрицы B_{nk}^{T}; γ — общее число таких миноров ($\gamma = C_n^k$).

Из (72,31) следует, что всегда

$$|N| \geqslant 0. \qquad (72{,}32)$$

Путем аналогичных рассуждений можно показать, что и все главные миноры матрицы N больше нуля.

Следует иметь в виду, что все сказанное относительно матрицы N будет справедливо только тогда, когда посредственные измерения x, y, z, ..., k выбраны правильно, т. е. они не связаны условными уравнениями. В противном случае ранг матрицы B_{nk} будет меньше k, а следовательно, матрица B_{nk}^{T} не будет иметь миноров k-го порядка. В этом случае, согласно (71,22), определитель матрицы N будет равен нулю. Мы будем рассматривать только случай независимых посредственных измерений.

Таким образом, отмечаем, что матрица нормальных уравнений есть **симметричная матрица, имеющая все главные миноры больше нуля.**

Если $|N| > 0$, то существует обратная матрица N^{-1} относительно матрицы N.

Тогда, умножив слева левую и правую часть системы (72,24) на N^{-1}, получим

$$X=-N^{-1}A^{\text{т}}PV. \tag{72,33}$$

Подставив (72,33) в (72,8), будем иметь

$$\varepsilon=-AN^{-1}A^{\text{т}}PV+V. \tag{72,34}$$

Выражениями (72,33) и (72,34) и определяются искомые поправки к приближенным значениям посредственных величин и поправки к непосредственно измеренным величинам.

§ 73. Решение системы нормальных уравнений

Рассмотрим некоторые теоретические стороны решения нормальных уравнений по схеме Гаусса.

Дальнейшие рассуждения будем иллюстрировать на примере матрицы трех нормальных уравнений

$$N=\begin{Vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] \end{Vmatrix}. \tag{73,1}$$

При решении нормальных уравнений в схеме Гаусса первая строка матрицы N умножается на $-\frac{[pab]}{[paa]}$ и полученный результат прибавляется ко второй строке матрицы (в соответствии с 41,1). В результате вместо матрицы N получим матрицу

$$N^{(1)}=\begin{Vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ 0 & [pbb\cdot 1] & [pbc\cdot 1] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] \end{Vmatrix}. \tag{73,2}$$

В то же время матрицу $N^{(1)}$ можно получить из матрицы N, если последнюю умножить слева на матрицу K_1 следующего вида:

$$K_1=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{[pab]}{[paa]} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{73,3}$$

т. е.

$$N^{(1)}=K_1N. \tag{73,4}$$

Далее первая строка матрицы $N^{(1)}$ умножается на $-\frac{[pac]}{[paa]}$ и полученный результат прибавляется к третьей строке. В результате получим матрицу

$$N^{(2)}=\begin{Vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ 0 & [pbb\cdot 1] & [pbc\cdot 1] \\ 0 & [pbc\cdot 1] & [pcc\cdot 1] \end{Vmatrix}, \tag{73,5}$$

что равносильно произведению матрицы $N^{(1)}$ на K_2

$$K_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{[pac]}{[paa]} & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{73,6}$$

Тогда

$$N^{(2)} = K_2 K_1 N. \tag{73,7}$$

Применив далее аналогичные преобразования (см. § 41), получим вместо матрицы N верхнюю треугольную матрицу

$$G = \begin{Vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ 0 & [pbb \cdot 1] & [pbc \cdot 1] \\ 0 & 0 & [pcc \cdot 2] \end{Vmatrix}. \tag{73,8}$$

Переход от матрицы N к матрице G совершался при помощи некоторого числа γ операций следующего типа: к i-ой строке матрицы прибавляется j-ая ($j < i$) строка, предварительно помноженная на некоторое число α. Такая операция, как мы уже видели, равносильна умножению преобразуемой матрицы слева на матрицу

$$K_s = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & (j) & & (i) & & & \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots \alpha \ldots 1 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 1 \end{Vmatrix} \end{array}. \tag{73,9}$$

В этой матрице на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы, за исключением элемента α, равны нулю.

Таким образом

$$G = K_\gamma \ldots K_2 K_1 N, \tag{73,10}$$

где каждая из матриц $K_1, K_2, \ldots, K_\gamma$ имеет вид (73,9) и, следовательно, является нижней треугольной матрицей с диагональными элементами, равными 1.

Пусть

$$K = K_\gamma \ldots K_2 K_1. \tag{73,11}$$

Тогда формула (73,10) примет вид

$$G = KN. \tag{73,12}$$

Перемножив K_1 (73,3) на K_2 (73,6) и так далее, легко получить для k уравнений, что

$$K = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{[pab]}{[paa]} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{[pac]}{[paa]} & -\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{[pag]}{[paa]} & -\frac{[pbg\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \dots & -\frac{[pfg\cdot (k-2)]}{[pff\cdot (k-2)]} & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (73,13)$$

Матрица K (73,13) является также нижней треугольной матрицей с диагональными элементами, равными 1. Пользуясь формулой (71,17), легко установить, что определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. Значит, $|K| = 1$, т. е. матрица K неособенная и существует обратная ей матрица K^{-1}, тоже нижняя треугольная.

Матрица K называется **преобразующей матрицей для матрицы** N **в методе исключения Гаусса.**

При вычислениях по схеме Гаусса на преобразующую матрицу умножается не только матрица N, но и столбец свободных членов $A^{\tau}PV$. В результате этого исходная система нормальных уравнений (72,24)

$$NX + A^{\tau}PV = 0$$

на основании (73,12) преобразуется в эквивалентную систему

$$GX = -KA^{\tau}PV, \qquad (73,14)$$

которая имеет верхнетреугольную матрицу коэффициентов при неизвестных $\|\delta_x, \delta_y, \dots, \delta_k\| = X$.

Получение системы (73, 14) составляет прямой ход схемы Гаусса, процесс же нахождения самого вектора неизвестных X составляет так называемый обратный ход схемы Гаусса.

Таково содержание схемы Гаусса с точки зрения операций над матрицами.

Следует отметить еще одно важное свойство матрицы нормальных уравнений: из формулы (73,12), так как существует обратная матрица K^{-1}, получим, что

$$N = K^{-1}G. \qquad (73,15)$$

Таким образом, матрица N представлена в виде произведения нижней треугольной матрицы K^{-1} на верхнюю треугольную матрицу G. Именно благодаря возможности такого разложения система нормальных уравнений всегда разрешима.

§ 74. Контроль вычисления поправок

Исходя из формул контроля определения коэффициентов нормальных уравнений и их преобразования, данных в § 40, рассмотрим вывод контрольной формулы (41,16) определения поправок ε.

Возьмем формулу (72,34)

$$\varepsilon = -AN^{-1}A^{\mathrm{T}}PV + V$$

и умножим левую и правую часть ее слева на $A^{\mathrm{T}}P$:

$$A^{\mathrm{T}}P\varepsilon = -(A^{\mathrm{T}}PA)N^{-1}A^{\mathrm{T}}PV + A^{\mathrm{T}}PV. \tag{74,1}$$

Согласно формуле (72,17)

$$N = A^{\mathrm{T}}PA$$

равенство (74,1) примет вид

$$A^{\mathrm{T}}P\varepsilon = -NN^{-1}A^{\mathrm{T}}PV + A^{\mathrm{T}}PV. \tag{74,2}$$

Но так как на основании (71,30) $NN^{-1} = E$, то

$$A^{\mathrm{T}}P\varepsilon = -A^{\mathrm{T}}PV + A^{\mathrm{T}}PV, \tag{74,3}$$

откуда

$$A^{\mathrm{T}}P\varepsilon = 0. \tag{74,4}$$

Легко заметить, что (74,4) есть не что иное, как уравнение (39,16) в матричной записи.

Пользуясь (72,34), найдем

$$\varepsilon^{\mathrm{T}}P\varepsilon = (V^{\mathrm{T}} - V^{\mathrm{T}}PAN^{-1}A^{\mathrm{T}})P(V - AN^{-1}A^{\mathrm{T}}PV). \tag{74,5}$$

Раскрыв скобки, получим

$$\varepsilon^{\mathrm{T}}P\varepsilon = V^{\mathrm{T}}PV - V^{\mathrm{T}}PAN^{-1}A^{\mathrm{T}}PV - V^{\mathrm{T}}PAN^{-1}A^{\mathrm{T}}PV + \\ + V^{\mathrm{T}}PAN^{-1}(A^{\mathrm{T}}PA)N^{-1}A^{\mathrm{T}}PV. \tag{74,6}$$

На основании (72,17) и (71,30) после приведения подобных членов будем иметь

$$\varepsilon^{\mathrm{T}}P\varepsilon = V^{\mathrm{T}}PV - V^{\mathrm{T}}PAN^{-1}A^{\mathrm{T}}PV. \tag{74,7}$$

Учитывая (72,33), формулу (74,7) запишем

$$\varepsilon^{\mathrm{T}}P\varepsilon = V^{\mathrm{T}}PV + V^{\mathrm{T}}PAX, \tag{74,8}$$

что соответствует равенству (41,14).

Если умножить (72,34) слева на $V^{\mathrm{T}}P$, то получим

$$V^{\mathrm{T}}P\varepsilon = -V^{\mathrm{T}}PAN^{-1}A^{\mathrm{T}}PV + V^{\mathrm{T}}PV \tag{74,9}$$

или согласно (72,33)

$$V^{\mathrm{T}}P\varepsilon = V^{\mathrm{T}}PAX + V^{\mathrm{T}}PV. \tag{74,10}$$

Полученное выражение (74,10) есть матричная запись равенства (41,13). Сравнивая формулу (74,10) с формулой (74,8), видим, что правые части их тождественно равны. Тогда

$$\varepsilon^{\mathrm{T}} P \varepsilon = V^{\mathrm{T}} P \varepsilon, \tag{74,11}$$

что соответствует формуле (41,12).

Найдем значение величины $[pvv \cdot k]$. Умножение свободных членов нормальных уравнений (72,24) на преобразующую матрицу K (73,11) дает

$$KA^{\mathrm{T}}PV = \begin{Vmatrix} [pav] \\ [pbv \cdot 1] \\ \vdots \\ [pgv \cdot (k-1)] \end{Vmatrix}. \tag{74,12}$$

Тогда значение величины $[pvv \cdot k]$ может быть записано следующим образом:

$$[pvv \cdot k] = [pvv] - \begin{Vmatrix} [pav] & [pbv \cdot 1] & \ldots & [pgv \cdot (k-1)] \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \frac{1}{[paa]} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{[pbb \cdot 1]} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{[pgg \cdot (k-1)]} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} [pav] \\ [pbv \cdot 1] \\ \vdots \\ [pgv \cdot (k-1)] \end{Vmatrix} \tag{74,13}$$

Если обозначить

$$D^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{[paa]} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{[pbb \cdot 1]} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{[pgg \cdot (k-1)]} \end{Vmatrix}, \tag{74,14}$$

то формула (74,13) в сокращенной записи примет вид

$$[pvv \cdot k] = V^{\mathrm{T}}PV - V^{\mathrm{T}}PA\,(K^{\mathrm{T}}D^{-1}K)\,A^{\mathrm{T}}PV. \tag{74,15}$$

В линейной алгебре [2] доказывается для матрицы нормальных уравнений справедливость следующей формулы:

$$N^{-1} = K^{\mathrm{T}}D^{-1}K. \tag{74,16}$$

Учитывая (74,16) и (72,33), из (74,15) будем иметь

$$[pvv \cdot k] = V^{\mathrm{T}}PV + V^{\mathrm{T}}PAX. \tag{74,17}$$

Сравнив (74,17) с (74,10), получим основное контрольное равенство

$$[pvv \cdot k] = \varepsilon^{\text{т}} P \varepsilon = V^{\text{т}} P \varepsilon, \qquad (74.18)$$

которое соответствует равенствам (41,12) и (41,16).

§ 75. Оценка точности при уравновешивании посредственных измерений

Пусть задана некоторая функция $f\ (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ от независимых непосредственных измерений, тогда, как известно из теории ошибок, величина, обратная весу функции, определяется формулой (23,16)

$$\frac{1}{p_f} = \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{\partial f}{\partial l_j} \right)^2 \frac{1}{p_j}. \qquad (75,1)$$

В матричной записи формула (75,1) будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{p_f} = F^{\text{т}} P^{-1} F, \qquad (75,2)$$

где $F = \begin{Vmatrix} \frac{\partial f}{\partial l_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial l_n} \end{Vmatrix}$ — столбцовая матрица, составленная из частных производных от функции $f\,(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ по непосредственно измеренным величинам l_j;

$P^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{p_n} \end{Vmatrix}$ — диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят величины, обратные весам непосредственно измеренных величин.

Определим величину, обратную весу значения i-го посредственного измерения, полученного из уравнивания. Для этого необходимо поправку δ_i выразить как функцию непосредственно измеренных величин l_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

При матричной форме записи нет необходимости заниматься длинными выкладками, чтобы получить δ_i как функцию l_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$; для этого достаточно в формуле (72,33) выделить i-ую составляющую вектора X, тогда получим

$$\delta_i = -\| Q_{i1}, Q_{i2}, \ldots, Q_{ii}, \ldots, Q_{ik} \| A^{\text{т}} P V. \qquad (75,3)$$

Обозначим через $Q^{\text{т}}_{(i)}$ строчную матрицу, составленную из элементов i-ой строки матрицы N^{-1},

$$Q^{\text{т}}_{(i)} = \| Q_{i1}, Q_{i2}, \ldots, Q_{ii}, \ldots, Q_{ik} \|. \qquad (75,4)$$

Тогда выражение (75,3) запишется в следующем виде:

$$\delta_i = Q^{\mathrm{T}}_{(i)} A^{\mathrm{T}} P V. \tag{75,5}$$

Правая часть равенства (75,5) дает выражение δ_i, как линейной функции от непосредственных измерений, и коэффициенты этой линейной функции составляют строчную матрицу $F^{\mathrm{T}}_{(i)}$

$$F^{\mathrm{T}}_{(i)} = Q^{\mathrm{T}}_{(i)} A^{\mathrm{T}} P. \tag{75,6}$$

Применив формулу (75,2), получим

$$\frac{1}{P_{\delta_i}} = Q^{\mathrm{T}}_{(i)} A^{\mathrm{T}} P P^{-1} P A Q_{(i)}. \tag{75,7}$$

Учитывая, что

$$PP^{-1} = E \quad \text{и} \quad A^{\mathrm{T}} P A = N, \tag{75,8}$$

получим

$$\frac{1}{P_{\delta_i}} = Q^{\mathrm{T}}_{(i)} N Q_{(i)}. \tag{75,9}$$

Если матрица $Q^{\mathrm{T}}_{(i)}$ есть i-ая строка, то матрица $Q_{(i)}$ есть i-ый столбец матрицы N^{-1}, обратной по отношению к матрице N, поэтому произведение $NQ_{(i)}$ согласно формуле (71,27) дает i-ый столбец единичной матрицы E

$$NQ_{(i)} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} \right\| \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}\right\} (i) \tag{75,10}$$

Тогда

$$\frac{1}{P_{\delta_i}} = \| Q_{i1}, Q_{i2}, \ldots, Q_{ii}, \ldots, Q_{ik} \| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} \right\|, \tag{75,11}$$

откуда

$$\frac{1}{P_{\delta_i}} = Q_{ii}, \tag{75,12}$$

что соответствует выражениям (46, 4), (46, 5) и (46, 6). Следовательно, диагональные элементы обратной матрицы нормальных уравнений являются величинами, обратными весам значений посредственных измерений, полученных из уравнивания. Именно поэтому элементы Q_{ij} ($i, j=1, 2, \ldots, k$) обратной матрицы называются **весовыми коэффициентами** (см. гл. VI).

Пусть требуется найти вес функции общего вида от уравновешенных значений посредственных измерений $X, Y, \ldots, K$:

$$U=F(X, Y, \ldots, K). \tag{75,13}$$

Разложим данную функцию в ряд, ограничиваясь первыми степенями поправок δ_i по их малости:

$$U=F(x, y, \ldots, k)+F^{\text{т}}X, \tag{75,14}$$

где X — матрица-столбец, составленная из поправок δ_i (72,3);

$$F=\begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k \end{Vmatrix}, \quad f_1=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad f_2=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ldots, \quad f_k=\frac{\partial U}{\partial k}.$$

Чтобы определить величину, обратную весу функции (75,13), необходимо в ней вместо вектора X подставить его выражение через V из (72,33), а затем применить формулу (75,2). Тогда

$$\frac{1}{P_U}=F^{\text{т}}N^{-1}A^{\text{т}}PP^{-1}PAN^{-1}F. \tag{75,15}$$

На основании (75,8) выражение (75,15) примет вид

$$\frac{1}{P_U}=F^{\text{т}}N^{-1}F. \tag{75,16}$$

Полученная формула (75,16) есть матричная запись формулы (44,14), определяющей обратную величину веса функции (75,13), выраженную через весовые коэффициенты.

Подставив (74,16) в (75,16), получим

$$\frac{1}{P_U}=(F^{\text{т}}K^{\text{т}})\,D^{-1}\,(KF). \tag{75,17}$$

Из формулы (75,17) виден путь вычисления обратной величины веса функции: в схеме Гаусса решения нормальных уравнений добавляется лишний столбец f, в который записываются составляющие вектора F и над ними производятся те же операции, что и над свободными членами нормальных уравнений, т. е. вектор F умножается слева на преобразующую матрицу K. Получим

$$KF=\begin{Vmatrix} f_1 \\ [f_2\cdot 1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ [f_k\cdot(k-1)] \end{Vmatrix}. \tag{75,18}$$

Тогда формула (75,17) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{1}{P_U}=\|f_1,\ [f_2\cdot 1],\ \ldots,\ [f_k\cdot(k-1)]\|\times$$

$$\times\begin{Vmatrix} \frac{1}{[paa]} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{[pbb\cdot 1]} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{[pgg\cdot(k-1)]} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} f_1 \\ [f_2\cdot 1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ [f_k\cdot(k-1)] \end{Vmatrix}, \tag{75,19}$$

что соответствует известной формуле (45,17)

$$\frac{1}{P_U}=\frac{f_1^2}{[paa]}+\frac{[f_2\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}+\ldots+\frac{[f_k\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]}. \tag{75,20}$$

§ 76. Уравновешивание условных измерений

Пусть произведено n непосредственных неравноточных измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$ с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, связанных r условными уравнениями. Условные уравнения поправок имеют вид

$$A\varepsilon+W=0, \tag{76,1}$$

где $A_{rn}=A=\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_n \end{Vmatrix}$ — матрица коэффициентов условных уравнений;

$\varepsilon=\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{Vmatrix}$ — столбцовая матрица поправок в непосредственные измерения;

$$W = \begin{Vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{Vmatrix}$$ — столбцовая матрица свободных членов условных уравнений.

Поскольку ошибки измерений $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ малы, можно считать, что

$$W = A\Delta, \tag{76,2}$$

где $\Delta = \begin{Vmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_n \end{Vmatrix}$ — столбцовая матрица, составленная из истинных ошибок измерений.

Для решения задачи уравновешивания необходимо найти такой вектор поправок ε, чтобы он удовлетворял условию

$$\varepsilon^{\tau} P \varepsilon = \min. \tag{76,3}$$

Условие минимума (76,3) определяется точкой экстремума функции (28,14), которая в матричной записи имеет вид

$$\Phi(\varepsilon) = \varepsilon^{\tau} P \varepsilon - 2K^{\tau}(A\varepsilon + W), \tag{76,4}$$

где $K = \begin{Vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_r \end{Vmatrix}$ — столбцовая матрица коррелат.

Функция (76,4) имеет минимум в точке, которая определяется следующей системой n уравнений:

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{76,5}$$

Дифференцируя (76,4) по составляющим вектора ε, получим, что (76,5) имеет следующее выражение:

$$\varepsilon^{\tau} P - K^{\tau} A = 0, \tag{76,6}$$

откуда вектор поправок ε будет равен

$$\varepsilon = P^{-1} A^{\tau} K, \tag{76,7}$$

что соответствует системе уравнений (28,16).

Для определения вектора коррелат K подставим (76,7) в (76,1)

$$AP^{-1}A^{т}K+W=0. \tag{76,8}$$

Пусть

$$AP^{-1}A^{т}=N, \tag{76,9}$$

тогда

$$NK+W=0, \tag{76,10}$$

что соответствует системе нормальных уравнений коррелат (28,18). Решив относительно K уравнения (76,10) и подставив результат в (76,7), получим

$$\varepsilon=-P^{-1}A^{т}N^{-1}W. \tag{76,11}$$

Если условные уравнения (76,1) составлены неверно, т. е. хотя бы одно из них является следствием остальных, то матрица A будет иметь ранг, меньший r, так как строки матрицы A линейно зависимы. Тогда, как и в § 72 настоящей главы, определитель $|N|=0$, а система (76,10) будет неразрешима. Проявится это при вычислениях следующим образом: в ходе преобразований системы нормальных уравнений по схеме Гаусса квадратичный коэффициент получится равным нулю, а поскольку делить на нуль нельзя, то система не будет разрешима.

Имея из уравнения (76,10)

$$K=-N^{-1}W, \tag{76,12}$$

умножим его слева на $W^{т}$, получим

$$W^{т}K=-W^{т}N^{-1}W. \tag{76,13}$$

Найдем значение величины $\varepsilon^{т}P\varepsilon$, используя (76,11):

$$\varepsilon^{т}P\varepsilon=W^{т}N^{-1}AP^{-1}PP^{-1}A^{т}N^{-1}W, \tag{76,14}$$

откуда

$$\varepsilon^{т}P\varepsilon=-W^{т}N^{-1}W. \tag{76,15}$$

Сравнив (76,13) и (76,15), получим контрольное равенство правильности вычисления поправок ε в следующем виде:

$$\varepsilon^{т}P\varepsilon=-W^{т}K, \tag{76,16}$$

что соответствует (31,5).

§ 77. Оценка точности при уравновешивании условных измерений

Выведем формулу веса функции от уравновешенных значений непосредственных измерений

$$U=F(X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n). \tag{77,1}$$

Обозначим истинные ошибки уравновешенных значений непосредственных измерений через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, т. е.

$$X_i - L_i = \omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{77,2}$$

Очевидно, что

$$\omega_i = \Delta_i + \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{77,3}$$

Тогда можно с достаточной точностью истинную ошибку Δ_U функции (77,1) выразить следующим образом:

$$\Delta_U = F^{\tau}\omega, \tag{77,4}$$

где $F = \left\| \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{matrix} \right\|$ — вектор, составленный из коэффициентов весовой функции $\frac{\partial F}{\partial X_i} = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$;

$\omega = \left\| \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_n \end{matrix} \right\|$ — вектор истинных ошибок уравновешенных значений непосредственно измеренных величин.

Учитывая (77,3), из (77,4) получаем

$$\Delta_U = F^{\tau}(\Delta + \varepsilon). \tag{77,5}$$

Подставляя в формулу (77,5) вместо ε его значение из (76,11) и учитывая (76,2), будем иметь

$$\Delta_U = F^{\tau}(E - P^{-1}A^{\tau}N^{-1}A)\,\Delta, \tag{77,6}$$

где E — единичная матрица n-го порядка.

Теперь для вычисления $\frac{1}{P_U}$ можно применить формулу (75,2)

$$\frac{1}{P_U} = F^{\tau}(E - P^{-1}A^{\tau}N^{-1}A)\,P^{-1}(E - A^{\tau}N^{-1}AP^{-1})\,F. \tag{77,7}$$

В полученном равенстве раскроем скобки и произведем упрощения:

$$\frac{1}{P_U} = F^{\tau}P^{-1}F - 2F^{\tau}P^{-1}A^{\tau}N^{-1}AP^{-1}F + F^{\tau}P^{-1}A^{\tau}N^{-1}AP^{-1}A^{\tau}N^{-1}AP^{-1}F \tag{77,8}$$

или

$$\frac{1}{P_U} = F^{\tau}P^{-1}F - F^{\tau}P^{-1}A^{\tau}N^{-1}AP^{-1}F. \tag{77,9}$$

Первое слагаемое формулы (77,9) есть известное выражение $\left[\frac{ff}{p}\right]$. Произведение $AP^{-1}F$ из второго слагаемого является не чем иным, как

$$AP^{-1}F = \left\| \begin{matrix} \left[\frac{af}{p}\right] \\ \left[\frac{bf}{p}\right] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left[\frac{gf}{p}\right] \end{matrix} \right\|,$$

а все второе слагаемое находится точно так же, как и произведение $F^{\tau}N^{-1}F$ (75,16) в § 75.

В результате получается известная формула (32,25)

$$\frac{1}{P_U} = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \ldots - \frac{\left[\frac{gf}{p}\cdot(r-1)\right]^2}{\left[\frac{gg}{p}\cdot(r-1)\right]}.$$

Коэффициенты (a) и (b) для табличного угла r через 10′

$(a) = 20{,}6265 \sin r$, $(b) = 20{,}6265 \cos r$

(для расстояний 1 *км*)

r	(a)	(b)		r	(a)	(b)	
0° 0′	0,00	20,63	90° 0′	7° 0′	2,51	20,47	83° 0′
10	0,06	20,63	50	10	2,57	20,47	50
20	0,12	20,63	40	20	2,63	20,46	40
30	0,18	20,63	30	30	2,69	20,45	30
40	0,24	20,63	20	40	2,75	20,44	20
50	0,30	20,62	10	50	2,81	20,43	10
1° 0′	0,36	20,62	89° 0′	8° 0′	2,87	20,43	82° 0′
10	0,42	20,62	50	10	2,93	20,42	50
20	0,48	20,62	40	20	2,99	20,41	40
30	0,54	20,62	30	30	3,05	20,40	30
40	0,60	20,62	20	40	3,11	20,39	20
50	0,66	20,62	10	50	3,17	20,38	10
2° 0′	0,72	20,61	88° 0′	9° 0′	3,23	20,37	81° 0′
10	0,78	20,61	50	10	3,29	20,36	50
20	0,84	20,61	40	20	3,35	20,35	40
30	0,90	20,61	30	30	3,40	20,34	30
40	0,96	20,60	20	40	3,46	20,33	20
50	1,02	20,60	10	50	3,52	20,32	10
3° 0′	1,08	20,60	87° 0′	10° 0′	3,58	20,31	80° 0′
10	1,14	20,59	50	10	3,64	20,30	50
20	1,20	20,59	40	20	3,70	20,29	40
30	1,26	20,59	30	30	3,75	20,28	30
40	1,32	20,58	20	40	3,82	20.27	20
50	1,38	20,58	10	50	3,88	20,26	10
4° 0′	1,44	20,58	86° 0′	11° 0′	3,94	20,25	79° 0′
10	1,50	20,57	50	10	3,99	20,24	50
20	1,56	20,57	40	20	4,05	20,22	40
30	1,62	20,56	30	30	4,11	20,21	30
40	1,68	20,56	20	40	4,17	20,20	20
50	1,74	20,55	10	50	4,23	20,19	10
5° 0′	1,80	20,55	85° 0′	12° 0′	4,29	20,18	78° 0′
10	1,86	20,54	50	10	4,35	20,16	50
20	1,92	20,54	40	20	4,41	20,15	40
30	1,98	20,53	30	30	4,46	20,14	30
40	2,04	20,53	20	40	4,52	20,12	20
50	2,10	20,52	10	50	4,58	20,11	10
6° 0′	2,16	20,51	84° 0′	13° 0′	4,64	20,10	77° 0′
10	2,22	20,51	50	10	4,70	20,08	50
20	2,28	20,50	40	20	4,76	20,07	40
30	2,33	20,49	30	30	4,82	20,06	30
40	2,39	20,49	20	40	4,87	20,04	20
50	2,45	20,48	10	50	4,93	20,03	10
7° 0′	2,51	20,47	83° 0′	14° 0′	4,99	20,01	76° 0′
	(b)	(a)	r		(b)	(a)	r

r	(a)	(b)		r	(a)	(b)	
14° 0′	4,99	20,01	76° 0′	22° 0′	7,73	19,12	68° 0′
10	5,05	20,00	50	10	7,78	19,10	50
20	5,11	19,98	40	20	7,84	19,08	40
30	5,16	19,97	30	30	7,89	19,06	30
40	5,22	19,95	20	40	7,95	19,03	20
50	5,28	19,94	10	50	8,00	19,01	10
15° 0′	5,34	19,92	75° 0′	23° 0′	8,06	18,99	67° 0′
10	5,40	19,91	50	10	8,11	18,96	50
20	5,45	19,89	40	20	8,17	18,94	40
30	5,51	19,88	30	30	8,22	18,92	30
40	5,57	19,86	20	40	8,28	18,89	20
50	5,63	19,84	10	50	8,33	18,87	10
16° 0′	5,69	19,83	74° 0′	24° 0′	8,39	18,84	66° 0′
10	5,74	19,81	50	10	8,44	18,82	50
20	5,80	19,79	40	20	8,50	18,79	40
30	5,86	19,78	30	30	8,55	18,77	30
40	5,92	19,76	20	40	8,61	18,74	20
50	5,97	19,74	10	50	8,66	18.72	10
17° 0′	6,03	19,73	73° 0′	25° 0′	8,72	18,69	65° 0′
10	6,09	19,71	50	10	8,77	18,67	50
20	6,15	19,69	40	20	8,83	18,64	40
30	6,20	19,67	30	30	8,88	18,62	30
40	6,26	19,65	20	40	8,93	18,59	20
50	6,32	19,64	10	50	8,99	18,57	10
18° 0′	6,37	19,62	72° 0′	26° 0′	9,04	18,54	64° 0′
10	6,43	19,60	50	10	9,10	18,51	50
20	6,49	19,58	40	20	9,15	18,49	40
30	6,54	19,56	30	30	9,20	18,46	30
40	6,60	19,54	20	40	9,26	18,43	20
50	6,66	19,52	10	50	9,31	18,41	10
19° 0′	6,72	19,50	71° 0′	27° 0′	9,36	18,38	63° 0′
10	6,77	19,48	50	10	9,42	18,35	50
20	6,83	19,46	40	20	9,47	18,32	40
30	6,89	19,44	30	30	9,52	18,30	30
40	6,94	19,42	20	40	9,58	18,27	20
50	7,00	19,40	10	50	9,63	18,24	10
20° 0′	7,05	19,38	70° 0′	28° 0′	9,68	18,21	62° 0′
10	7,11	19,36	50	10	9,74	18,18	50
20	7,17	19,34	40	20	9,79	18,16	40
30	7,22	19,32	30	30	9,84	18,13	30
40	7,28	19,30	20	40	9,89	18,10	20
50	7,34	19,28	10	50	9,95	18,07	10
21° 0′	7,39	19,26	69° 0′	29° 0′	10,00	18,04	61° 0′
10	7,45	19,23	50	10	10,05	18,01	50
20	7.50	19,21	40	20	10,10	17,98	40
30	7,56	19,19	30	30	10,16	17,95	30
40	7,62	19,17	20	40	10,21	17,92	20
50	7,67	19,15	10	50	10,26	17,89	10
22° 0′	7,73	19,12	68° 0′	30° 0′	10.31	17,86	60° 0′
	(b)	(a)	r		(b)	(a)	r

r	(a)	(b)		r	(a)	(b)	
30° 0′	10,31	17,86	60° 0′	38° 0′	12,70	16,25	52° 0′
10	10,37	17,83	50	10	12,75	16,22	50
20	10,42	17,80	40	20	12,79	16,18	40
30	10,47	17,77	30	30	12,84	16,14	30
40	10,52	17,74	20	40	12,89	16,10	20
50	10,57	17,71	10	50	12,93	16,07	10
31° 0′	10,62	17,68	59° 0′	39° 0′	12,98	16,03	51° 0′
10	10,67	17,65	50	10	13,03	15,99	50
20	10,73	17,62	40	20	13,07	15,95	40
30	10,78	17,59	30	30	13,12	15,92	30
40	10,83	17,56	20	40	13,17	15,88	20
50	10,88	17,52	10	50	13,21	15,84	10
32° 0′	10,93	17,49	58° 0′	40° 0′	13,26	15,80	50° 0′
10	10,98	17,46	50	10	13,30	15,76	50
20	11,03	17,43	40	20	13,35	15,72	40
30	11,08	17,40	30	30	13,40	15,68	30
40	11,13	17,37	20	40	13,44	15,65	20
50	11,18	17,33	10	50	13,49	15,61	10
33° 0′	11,23	17,30	57° 0′	41° 0′	13,53	15,57	49° 0′
10	11,28	17,27	50	10	13,58	15,53	50
20	11,33	17,23	40	20	13,62	15,49	40
30	11,38	17,20	30	30	13,67	15,45	30
40	11,43	17,17	20	40	13,71	15,41	20
50	11,48	17,13	10	50	13,76	15,37	10
34° 0′	11,53	17,10	56° 0′	42° 0′	13,80	15,33	48° 0′
10	11,58	17,07	50	10	13,85	15,29	50
20	11,63	17,03	40	20	13,89	15,25	40
30	11,68	17,00	30	30	13,94	15,21	30
40	11,73	16,96	20	40	13,98	15,17	20
50	11,78	16,93	10	50	14,02	15,13	10
35° 0′	11,83	16,90	55° 0′	43° 0′	14,07	15,09	47° 0′
10	11,88	16,86	50	10	14,11	15,04	50
20	11,93	16,83	40	20	14,15	15,00	40
30	11,98	16,79	30	40	14,20	14,96	30
40	12,03	16,76	20	40	14,24	14,92	20
50	12,08	16,72	10	50	14.28	14,88	10
36° 0′	12,12	16,69	54° 0′	44° 0′	14,33	14.84	46° 0′
10	12,17	16,65	50	10	14,37	14,80	50
20	12,22	16,62	40	20	14,41	14,75	40
30	12,27	16,58	30	30	14,46	14,71	30
40	12,32	16,54	20	40	14,50	14,67	20
50	12,37	16,51	10	50	14,54	14,63	10
37° 0′	12,41	16,47	53° 0′	45° 0′	14,59	14,59	45° 0′
10	12,46	16,44	50				
20	12,51	16,40	40				
30	12,56	16,36	30				
40	12,60	16,33	20				
50	12,65	16,29	10				
38° 0′	12,70	16,25	52° 0′				
	(b)	(a)	r		(b)	(a)	r

Значения дирекционного угла α	Знаки коэффициентов	
	a	b
0°—90°	+	—
90°—180°	+	+
180°—270°	—	+
270°—360°	—	—

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Значения A для контроля вычисления коэффициентов a и b

$$A = \frac{425{,}45}{S^2\ км} = a^2 + b^2$$

s	00м	10м	20м	30м	40м	50м	60м	70м	80м	90м
1,0	425	417	409	401	393	386	379	372	365	358
1,1	352	345	339	333	327	322	316	311	306	300
1,2	295	291	286	281	277	272	268	264	260	256
1,3	252	248	244	241	237	233	230	227	223	220
1,4	217	214	211	208	205	202	200	196	194	192
1,5	189	187	184	182	179	177	175	173	170	168
1,6	166	164	162	160	158	156	154	153	151	149
1,7	147	145	144	142	141	139	137	136	134	133
1,8	131	130	128	127	126	124	123	122	120	119
1,9	118	117	115	114	113	112	111	110	109	107
2,0	106	105	104	103	102	101	100	99	98	97
2,1	96	96	95	94	93	92	91	90	89	89
2,2	88	87	86	86	85	84	83	83	82	81
2,3	80	80	79	78	78	77	76	76	75	74
2,4	74	73	73	72	72	71	70	70	69	69
2,5	68,1	67,5	67,0	66,5	66,0	65,4	65,0	64,4	63,9	63,4
2,6	62,9	62,5	62,0	61,5	61,0	60,6	60,1	59,7	59,2	58,8
2,7	58,4	57,9	57,5	57,1	56,7	56,3	55,8	55,4	55,0	54,6
2,8	54,3	53,9	53,5	53,1	52,7	52,4	52,0	51,7	51,3	50,9
2,9	50,6	50,3	49,9	49,6	49,2	48,9	48,6	48,2	47,9	47,6
3,0	47,3	47,0	46,6	46,3	46,0	45,7	45,4	45,1	44,9	44,6
3,1	44,3	44,0	43,7	43,4	43,2	42,9	42,6	42,3	42,1	41,8
3,2	41,5	41,3	41,0	40,8	40,5	40,3	40,0	39,8	39,5	39,3
3,3	39,1	38,8	38,6	38,4	38,1	37,9	37,7	37,5	37,2	37,0
3,4	36,8	36,6	36,4	36,2	36,0	35,7	35,5	35,3	35,1	34,9
3,5	34,7	34,5	34,3	34,1	33,9	33,8	33,6	33,4	33,2	33,0
3,6	32,8	32,6	32,5	32,3	32,1	31,9	31,7	31,6	31,4	31,2

s	00м	10м	20м	30м	40м	50м	60м	70м	80м	90м
3,7	31,1	30,9	30,7	30,6	30,4	30,3	30,1	29,9	29,8	29,6
3,8	29,5	29,3	29,2	29,0	28,9	28,7	28,6	28,4	28,3	28,1
3,9	28,0	27,8	27,7	27,5	27,4	27,3	27,1	27,0	26,9	26,7
4,0	26,6	26,5	26,3	26,2	26,1	25,9	25,8	25,7	25,6	25,4
4,1	25,3	25,2	25,1	24,9	24,8	24,7	24,6	24,5	24,3	24,2
4,2	24,1	24,0	23,9	23,8	23,7	23,6	23,4	23,3	23,2	23,1
4,3	23,0	22,9	22,8	22,7	22,6	22,5	22,4	22,3	22,2	22,1
4,4	22,0	21,9	21,8	21,7	21,6	21,5	21,4	21,3	21,2	21,1
4,5	21,0	20,9	20,8	20,7	20,6	20,6	20,5	20,4	20,3	20,2
4,6	20,1	20,0	19,9	19,8	19,8	19,7	19,6	19,5	19,4	19,3
4,7	19,3	19,2	19,1	19,0	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,5
4,8	18,5	18,4	18,3	18,2	18,2	18,1	18,0	17,9	17,9	17,8
4,9	17,7	17,6	17,6	17,5	17,4	17,4	17,3	17,2	17,2	17,1
5,0	17,0	17,0	16,9	16,9	16,8	16,7	16,7	16,6	16,5	16,4
5,1	16,4	16,3	16,2	16,2	16,1	16,0	16,0	15,9	15,9	15,8
5,2	15,7	15,7	15,6	15,6	15,5	15,4	15,4	15,3	15,3	15,2
5,3	15,1	15,1	15,0	15,0	14,9	14,9	14,8	14,8	14,7	14,6
5,4	14,6	14,5	14,5	14,4	14,4	14,3	14,3	14,2	14,2	14,1
5,5	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9	13,8	13,8	13,7	13,7	13,6
5,6	13,6	13,5	13,5	13,4	13,4	13,3	13,3	13,2	13,2	13,1
5,7	13,1	13,0	13,0	13,0	12,9	12,9	12,8	12,8	12,7	12,7
5,8	12,6	12,6	12,6	12,5	12,5	12,4	12,4	12,3	12,3	12,3
5,9	12,2	12,2	12,1	12,1	12,1	12,0	12,0	11,9	11,9	11,9
6,0	11,8	11,8	11,7	11,7	11,7	11,6	11,6	11,5	11,5	11,5

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Значения функции Лапласа $P_{-b}^{+b} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{hb} e^{-t^2} dt,$

где $hb = g$

g	$\Phi(g)$	d	g	$\Phi(g)$	d	g	$\Phi(g)$	d
0,00	0,0000	564	0,95	0,8209	218	1,90	0,9928	14
0,05	0,0564	561	1,00	0,8427	197	1,95	0,9942	11
0,10	0,1125	555	1,05	0,8624	178	2,00	0,9953	10
0,15	0,1680	547	1,10	0,8802	159	2,05	0,9963	7
0,20	0,2227	536	1,15	0,8961	142	2,10	0,9970	6
0,25	0,2763	523	1,20	0,9103	126	2,15	0,9976	5
0,30	0,3286	508	1,25	0,9229	111	2,20	0,9981	4

g	$\Phi(g)$	d	g	$\Phi(g)$	d	g	$\Phi(g)$	d
0,35	0,3794	490	1,30	0,9340	98	2,25	0,9985	3
0,40	0,4284	471	1,35	0,9438	85	2,30	0,9988	3
0,45	0,4755	450	1,40	0,9523	74	2,35	0,9991	2
0,50	0,5205	428	1,45	0,9597	64	2,40	0,9993	2
0,55	0,5633	406	1,50	0,9661	55	2,45	0,9995	1
0,60	0,6039	381	1,55	0,9716	47	2,50	0,9996	1
0,65	0,6420	358	1,60	0,9736	41	2,55	0,9997	1
0,70	0,6778	334	1,65	0,9804	34	2,60	0,9998	0
0,75	0,7112	309	1,70	0,9838	29	2,65	0,9998	1
0,80	0,7421	286	1,75	0,9867	24	2,70	0,9999	0
0,85	0,7707	262	1,80	0,9891	20	2,75	0,9999	0
0,90	0,7969	240	1,85	0,9911	17	2,80	0,9999	1
0,95	0,8209		1,90	0,9928		3,00	1,0000	

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

Вероятность получения ошибки между нулем и n-кратной средней квадратической ошибкой

n	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09	Разность
0,0	0,0000	0,0080	0,0159	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0637	0,0717	80
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507	78
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282	76
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035	73
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759	70
0,5	0,3829	0,3900	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448	67
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4908	4971	5035	5098	63
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5746	5705	58
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6090	6157	6211	6265	54
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778	49
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7016	0,7063	0,7109	0,7154	0,7198	0,7243	44
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7498	7539	7580	7620	7660	39
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8030	34
1,3	8064	8098	8132	8165	8197	8229	8262	8293	8324	8355	30
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638	26
1,5	0,8664	0,8689	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882	22
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090	19
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9266	15
1,8	9281	9297	9312	9328	9342	9357	9371	9385	9399	9412	14
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9512	9523	9534	11

n	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09	Разность
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634	9
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9602	9700	9707	9715	7
2,2	9722	9729	9736	9742	9749	9756	9762	9768	9774	9780	5
2,3	9785	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832	4
2,4	9836	9840	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872	4
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904	3
2,6	9907	9909	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9928	3
2,7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947	2
2,8	9949	9950	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961	2
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	1

$n=$	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$P=$	0,9973	0,9981	0,9986	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999
$n=$	4,0	4,1								$n=\infty$
$P=$	0,9999	1,0000								$P=1$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахурин И. М. Курс маркшейдерского искусства. Специальная часть. Госгортехиздат, 1932.

2. Гантмахер Ф. Ф. Теория матриц, 1954.

3. Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения, т. I. Способ наименьших квадратов. Геодезиздат, 1957.

4. Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. Гостехиздат, 1952.

5. Гордеев Ю. А. О применении принципа наименьших квадратов при уравнивании зависимых результатов измерений. «Геодезия и аэрофотосъемка», 1960, № 2.

6. Зимовнов В. Н. Вопросы оценки точности результатов измерений. Геодезиздат, 1951.

7. Идельсон Н. И. Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. Геодезиздат, 1947.

8. Иордан В. Руководство по геодезии, т. I. Уравнительные вычисления по способу наименьших квадратов. Редбюро ГУГК, 1939.

9. Кемниц Ю. В. К обоснованию метода (способа) наименьших квадратов. Труды МИИЗ, вып. 22, 1964.

10. Кемниц Ю. В. Теория ошибок измерений. Геодезиздат, 1961.

11. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Физматгиз, 1963.

12. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Физматгиз, 1958.

13. Романов В. А. Теория ошибок и способ наименьших квадратов. Углетехиздат, 1952.

14. Романовский В. И. Основные задачи теории ошибок. Гостехиздат, 1947.

15. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. Геодезиздат, 1958.

16. Шилов П. И. Способ наименьших квадратов. Геодезиздат, 1941.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Часть вторая. **Способ наименьших квадратов**

Папазов Михаил Герасимович,
Могильный Сергей Георгиевич

ТЕОРИЯ ОШИБОК
И СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Ведущий редактор *Т. И. Королева*
Технический редактор *Л. Н. Ломилина*
Корректор *М. П. Курылева*

Подписано к набору 15/XI 1967 г.
Подписано к печати 2/II 1968 г.
Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Печ. л. 19.
Уч.-изд. л. 18,2. Т-01895. Тираж 7000 экз.
Бум. № 2. Заказ № 1255/3044—10.
Цена 82 коп. Индекс 1—1—1.

Издательство «Недра». Москва, К-12,
Третьяковский проезд, 1/19.

Ленинградская типография № 14
«Красный Печатник» Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Московский проспект, 91.

Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По вине
147	1 сверху	x, y, z или	x, y, z и	Типогр.
159	15 сверху	$+b_i\delta_y+c_i\delta_z$	$+b_i\delta_Y+c_i\delta_Z$	Типогр.
181	3 снизу	$-\frac{[\alpha-N]_1}{K}k$	$-\frac{[\alpha-N]_1}{k}k$	Авт.
205	1 колонка справа, строка 1 снизу	$\frac{1}{p_{\alpha_{\text{II-III}}}}+0{,}69$	$\frac{1}{p_{\alpha_{\text{II-III}}}}=+0{,}69$	Типогр.
233	1 снизу	$=\int(x_i-a)^2\varphi(x_i)\,dx_i$	$=\int(x-a)^2\varphi(x)\,dx$	Типогр.
253	4 сверху	$=\frac{h_1-h_2}{\pi}$	$=\frac{h_1h_2}{\pi}$	Типогр.
273	3 снизу	$\dots\frac{A_{(n+1)}}{\lvert A\rvert}$	$\dots\frac{A_{(n1)}}{\lvert A\rvert}$	Типогр.

Заказ 1255.