

Б. В. Пальцев

Сферические функции

Данное пособие посвящено изложению основ теории сферических функций и предназначено для студентов, изучающих соответствующий раздел курса уравнений математической физики. Избранная схема изложения основывается на использовании элементарных свойств оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере и связи собственных функций этого оператора — сферических функций с шаровыми функциями — однородными гармоническими многочленами. Для исследования поведения решений уравнения Лежандра в окрестностях особых точек привлекаются факты из аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с правильными особенностями. В заключение дано применение сферических функций к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа в областях в $\mathbb{R}^3$, обладающих сферической симметрией.

В дальнейшем будем обозначать:

$C^k(\Omega)$, где $k \geq 0$ — целое, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, — пространство функций непрерывных в Ω вместе со всеми своими частными производными до k -го порядка включительно;

$C^k(\bar{\Omega})$, $k \geq 0$ — целое, — подпространство пространства $C^k(\Omega)$, состоящее из функций, которые вместе со всеми своими производными до k -го порядка допускают продолжения в замыкание $\bar{\Omega}$ области Ω как непрерывные на $\bar{\Omega}$ функции;

$C(\Omega) = C^0(\Omega)$ и $C(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega})$ — пространства непрерывных функций на Ω и $\bar{\Omega}$ соответственно.

Функция $u(x) \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющая в области Ω уравнению Лапласа $\Delta u(x) = 0$, называется *гармонической* в Ω .

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \\ u|_{\Gamma} &= u_0(x), \quad \Gamma = \partial\Omega \text{ — граница } \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где Ω — область в $\mathbb{R}^3$, обладающая круговой симметрией:

либо шар $\Omega = \{x : |x| < R\}$,

либо внешность шара $\Omega = \{x : |x| > r\}$,

либо шаровой слой $\Omega = \{x : r < |x| < R\}$,

$u_0(x) \in C(\Gamma)$, где $C(\Gamma)$ — пространство непрерывных функций на Γ , а, если необходимо, и достаточно гладкая заданная на Γ функция.

Оказывается, что для решения и этой задачи можно развить метод Фурье. При этом возникают новые специальные функции — так называемые сферические функции.

§ 1. Оператор Лапласа в сферической системе

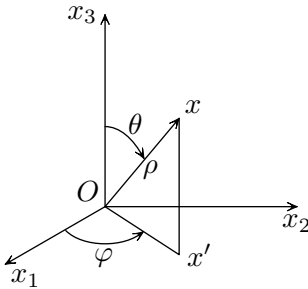


Рис. 1

Естественно перейти в задаче (1) к сферической системе координат ρ, θ, φ :

$$\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

θ — угол между осью Ox_3 и вектором x , отсчитываемый от оси Ox_3 ,

φ — угол между осью Ox_1 и проекцией x' вектора x на плоскость $x_3 = 0$, отсчитываемый от оси Ox_1 .

При этом

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \sin \theta \cos \varphi, & x_2 &= \rho \sin \theta \sin \varphi, & x_3 &= \rho \cos \theta, \\ \rho &\geq 0, & 0 &\leq \theta \leq \pi, & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (2)$$

(при $\rho = 0$ θ и φ не определяются однозначно).

Выведем уравнение Лапласа в сферической системе координат. Поскольку

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u,$$

то для этого следует получить выражения в сферической системе для $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div} \vec{F}$, где u — скалярное, а $\vec{F}$ — векторное поля в Ω .

Если $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ — некоторая функция в Ω , то через $\hat{u}(\rho, \theta, \varphi)$ будем обозначать выражение функции $u(x)$ в сферической системе

$$\hat{u}(\rho, \theta, \varphi) = u(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta). \quad (3)$$

Итак, нам нужно получить выражение $\widehat{\Delta u}(\rho, \theta, \varphi)$ через $\hat{u}(\rho, \theta, \varphi)$.

1°. Обозначим через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ортонормированный базис исходной декартовой системы Ox_1, x_2, x_3 . Пусть

$$\vec{F} = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3 \quad (4)$$

— некоторое векторное поле в Ω ($\vec{F} = \vec{F}(x)$ — вектор-функция на Ω), $\{F^1, F^2, F^3\}$ — координаты $\vec{F}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Каждой точке $x \in \Omega$, $x \neq 0$, со сферическими координатами (ρ, θ, φ) поставим в соответствие подвижный ортонормированный репер $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ (тройку взаимно ортогональных единичных векторов):

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad \left(= \frac{\partial x}{\partial \rho} \right), \\ \vec{e}_\theta &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \quad \left(= \frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right), \\ \vec{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad \left(= \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right).\end{aligned}\tag{5}$$

Легко видеть, что эти векторы — единичные касательные векторы соответственно к координатным линиям

$$\theta, \varphi = \text{const}, \quad \rho, \varphi = \text{const}, \quad \rho, \theta = \text{const}.$$

Разложим вектор $\vec{F}$ по ортонормированному базису (5)

$$\vec{F} = F^\rho \vec{e}_\rho + F^\theta \vec{e}_\theta + F^\varphi \vec{e}_\varphi,\tag{6}$$

$\{F^\rho, F^\theta, F^\varphi\}$ — координаты $\vec{F}$ в базисе (5) или, как мы их будем называть, координаты вектора $\vec{F}$ в сферической системе. В силу ортонормированности репера (5)

$$\begin{aligned}F^\rho &= (\vec{F}, \vec{e}_\rho) = \hat{F}^1 \sin \theta \cos \varphi + \hat{F}^2 \sin \theta \sin \varphi + \hat{F}^3 \cos \theta, \\ F^\theta &= (\vec{F}, \vec{e}_\theta) = \hat{F}^1 \cos \theta \cos \varphi + \hat{F}^2 \cos \theta \sin \varphi - \hat{F}^3 \sin \theta, \\ F^\varphi &= (\vec{F}, \vec{e}_\varphi) = -\hat{F}^1 \sin \varphi + \hat{F}^2 \cos \varphi,\end{aligned}\tag{7}$$

где $\hat{F}^k$ — декартовы координаты F^k , выраженные как скалярные функции в сферической системе.

2°. Получим выражение координат вектора $\nabla u = \text{grad } u$, $u \in C^1(\Omega)$, в сферической системе. Дифференцируя (3) после-

довательно по ρ , θ и φ , имеем

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{\partial u}}{\partial \rho} &= \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_1} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_2} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_3} \cos \theta, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta} &= \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_1} \cos \theta \cos \varphi + \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_2} \cos \theta \sin \varphi - \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_3} \sin \theta, \quad (8) \\ \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi} &= -\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_1} \sin \varphi + \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_2} \cos \varphi.\end{aligned}$$

Поскольку $\left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\}$ — координаты ∇u в декартовой системе, в силу (7) получаем

$$(\nabla u)^\rho = \frac{\widehat{\partial u}}{\partial \rho}, \quad (\nabla u)^\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\widehat{\partial u}}{\partial \theta}, \quad (\nabla u)^\varphi = \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\widehat{\partial u}}{\partial \varphi}. \quad (9)$$

3°. Пусть теперь $\widehat{\vec{F}}$ — гладкое векторное поле в Ω . Получим выражение $\widehat{\operatorname{div} \vec{F}}$ в сферической системе, т.е. выражение этой функции через F^ρ , F^θ , F^φ . Для этого сначала выразим $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_1}$, $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_2}$ и $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_3}$, где u — произвольная гладкая функция в Ω , через $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial \rho}$, $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial \theta}$ и $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial \varphi}$. Это легко сделать, рассматривая соотношения (8) как систему линейных уравнений относительно величин $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_1}$, $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_2}$, $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_3}$. Учитывая то, что матрица такой системы — ортогональная матрица, а обратная к ортогональной

матрице является транспонированная к ней, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_1} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \rho} \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta} \cos \theta \cos \varphi - \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi} \sin \varphi, \\ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_2} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \rho} \sin \theta \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta} \cos \theta \sin \varphi + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi} \cos \varphi, \\ \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_3} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta} \sin \theta.\end{aligned}$$

Используя эти выражения, мы получаем (выполняя на последней стадии суммирование по столбцам и тождественные преобразования)

$$\begin{aligned}\widehat{\operatorname{div} \vec{F}} &= \frac{\widehat{\partial F^1}}{\partial x_1} + \frac{\widehat{\partial F^2}}{\partial x_2} + \frac{\widehat{\partial F^3}}{\partial x_3} = \\ &= \frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial \rho} \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial \theta} \cos \theta \cos \varphi - \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial \varphi} \sin \varphi + \\ &\quad + \frac{\partial \widehat{F}^2}{\partial \rho} \sin \theta \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{F}^2}{\partial \theta} \cos \theta \sin \varphi + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \widehat{F}^2}{\partial \varphi} \cos \varphi + \\ &\quad + \frac{\partial \widehat{F}^3}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{F}^3}{\partial \theta} \sin \theta = \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\widehat{F}^1 \sin \theta \cos \varphi + \widehat{F}^2 \sin \theta \sin \varphi + \widehat{F}^3 \cos \theta \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\widehat{F}^1 \cos \theta \cos \varphi + \widehat{F}^2 \cos \theta \sin \varphi - \widehat{F}^3 \sin \theta \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(\widehat{F}^1 \sin \theta \cos \varphi + \widehat{F}^2 \sin \theta \sin \varphi + \widehat{F}^3 \cos \theta \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\widehat{F}^1 \sin \varphi + \widehat{F}^2 \cos \varphi \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\widehat{F}^1 \cos \varphi + \widehat{F}^2 \sin \varphi \right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial F^\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta} + \frac{F^\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} + \\
&+ \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\widehat{F}^1 \cos \varphi + \widehat{F}^2 \sin \varphi \right).
\end{aligned}$$

Остаётся последнее слагаемое здесь выразить через F^ρ , F^θ и F^φ . Для этого обратимся к соотношениям (7). Умножим первое из них на $\sin \theta$, второе — на $\cos \theta$, сложим их. В результате получим

$$\widehat{F}^1 \cos \varphi + \widehat{F}^2 \sin \varphi = F^\rho \sin \theta + F^\theta \cos \theta.$$

Используя это соотношение, окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\widehat{\operatorname{div} \vec{F}} &= \frac{\partial F^\rho}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho} F^\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \operatorname{ctg} \theta F^\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} = \\
&= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F^\rho) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F^\theta) + \frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} \right]. \quad (10)
\end{aligned}$$

Это и есть выражение дивергенции векторного поля $\vec{F}$ в сферической системе координат.

4°. Теперь уже легко выписать выражение оператора Лапласа в сферической системе. Используя (10), тождество $\widehat{\Delta u} = \widehat{\operatorname{div}(\nabla u)}$ и (9), находим

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta u} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 (\nabla u)^\rho) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta (\nabla u)^\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla u)^\varphi \right] = \\
&= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \varphi^2} \right] = \\
&= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \widehat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \widehat{u}, \quad (11)
\end{aligned}$$

где мы обозначили

$$\widehat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \widehat{u} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \varphi^2}. \quad (12)$$

Итак, в сферической системе оператор Лапласа представляет собой сумму оператора 2-го порядка по радиальной переменной $\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$ и оператора 2-го порядка по угловым переменным $\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi}$, поделённого на ρ^2 . Оператор $\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi}$ называют оператором Лапласа–Бельтрами на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$.

§ 2. Оператор Лапласа–Бельтрами на сфере и его свойства.

Сферические и шаровые функции

Обозначим через $S_1 = \{x : |x| = 1\}$ — единичную сферу в $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат.

Определение 1. Через $C^k(S_1)$, $k \geq 0$ — целое, обозначим пространство функций k раз непрерывно дифференцируемых на сфере S_1 .

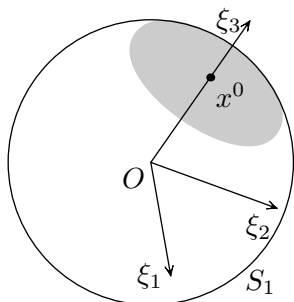


Рис. 2

Это означает следующее. Для любой точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in S_1$ возьмём какую-нибудь декартову систему $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ с началом в точке O , причём такую, что ось $O\xi_3$ направлена по вектору Ox^0 . При этом плоскость $\xi_3 = 0$ параллельна касательной плоскости к S_1 в точке x^0 . Обозначим $x = x(\xi)$ ($x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$) формулы перехода к

новой системе ξ и введём в рассмотрение функцию $v^\xi(\xi) = v(x(\xi))$ — выражение функции $v(x)$ в новой декартовой системе ξ . Далее, уравнение в системе ξ куска S_1 , проходящего через точку x^0 , будет $\xi_3 = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}$, $|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < 1$, где $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$. Выразим $v^\xi(\xi)$ только через “касательные”

координаты ξ' (являющиеся касательными координатами этого куска S_1) и получим функцию

$$\tilde{v}^\xi \stackrel{\text{def}}{=} v^\xi(\xi_1, \xi_2, \sqrt{1 - |\xi'|^2}). \quad (13)$$

Так вот, по определению функция $v(x) \in C^k(S_1)$, если для любой $x^0 \in S_1$ и для любой декартовой системы $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, описанной выше, функция (13) принадлежит пространству $C^k\left(|\xi'| \leq \frac{1}{2}\right)$. Аналогичным образом определяется пространство $C^k(S_\rho)$ на сфере S_ρ радиуса ρ .

З а м е ч а н и е 1. Можно показать, что это определение эквивалентно также следующему. Функция $v(x)$ принадлежит пространству $C^k(S_1)$ тогда и только тогда, когда для любой декартовой системы координат $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ с центром в начале координат функция

$$\hat{v}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) = v(\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}, \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi}, \cos \tilde{\theta}), \quad (14)$$

где $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\varphi}$ — углы в сферической системе, связанной с декартовой системой $\tilde{x}$, принадлежит пространству $C^k((0, \pi) \times [0, 2\pi])$.

Определение 2. *Оператор Лапласа–Бельтрами Δ'_{S_1} на единичной сфере S_1 определим как оператор, переводящий всякую функцию $v(x) \in C^2(S_1)$ в функцию $\Delta'_{S_1} v(x) \in C(S_1)$, выражение которой в сферических координатах даётся формулой*

$$\widehat{\Delta'_{S_1} v}(\theta, \varphi) = \hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \hat{v}(\theta, \varphi), \quad (15)$$

где $\hat{v}(\theta, \varphi)$ определяется по формуле (14), только без “тильд”, $\hat{\Delta}'_{\theta, \varphi}$ — дифференциальный оператор 2-го порядка, определяемый формулой (12).

Здесь мы встречаемся по сути дела с определениями пространств гладких функций на гладком многообразии (в данном случае — на сфере S_1) и дифференциального оператора на таком многообразии.

Хотя выражение оператора $\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}$ оператора Лапласа–Бельтрами $\widehat{\Delta}'_{S_1}$ в сферической системе и зависит от углов θ и φ , а $\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}$ имеет особенности при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ ($\sin \theta$, появляющийся в знаменателе, обращается в нуль в этих точках), сам оператор $\widehat{\Delta}'_{S_1}$ во всех точках сферы S_1 устроен совершенно одинаково. Если мы перейдём к другой сферической системе, связанной с другой декартовой системой $\tilde{x}$ (например, с осью $O\tilde{x}_3$, направленной по старой оси Ox_1), то $\widehat{\Delta}'_{\tilde{\theta},\tilde{\varphi}}$ уже не будет иметь особенностей в старых полюсах сферы $(0, 0, \pm 1)$, соответствующих $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

Эту “одинаковую устроенность” оператора $\widehat{\Delta}'_{S_1}$ во всех точках S_1 можно легко уяснить также из формулы

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \widehat{\Delta}'_{S_1}.$$

Оператор Лапласа Δ инвариантен (не изменяет своей формулы) относительно вращений (т.е. при переходе к другой ортогональной системе $\tilde{x}$ с центром в начале координат), оператор $\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$ содержит дифференцирования только по радиусу и очевидно инвариантен относительно вращений. Отсюда и оператор $\frac{1}{\rho^2} \Delta'_{S_1}$, а с ним и оператор Δ'_{S_1} инвариантен относительно вращений.

Нетрудно установить (проверьте сами), что оператор Δ'_{S_1} отображает пространство $C^k(S_1)$, $k \geq 2$, в пространство $C^{k-2}(S_1)$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Оператор $-\Delta'_{S_1}$ симметричен и неотрицателен на пространстве $C^2(S_1)$ относительно скалярного произведе-

ния в $L_2(S_1)$:

$$(u, v)_{S_1} = \int_{S_1} u(x) \overline{v(x)} ds = \int_0^\pi \widehat{u}(\theta, \varphi) \overline{\widehat{v}(\theta, \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (16)$$

а именно, $\forall u, v \in C^2(S_1)$

$$\begin{aligned} (-\Delta'_{S_1} u, v)_{S_1} &= (u, -\Delta'_{S_1} v)_{S_1}, \\ (-\Delta'_{S_1} u, u)_{S_1} &\geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. В силу определения оператора Δ'_{S_1} для любых $u, v \in C^2(S_1)$ имеем

$$\begin{aligned} (-\Delta'_{S_1} u, v) &= - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \widehat{\Delta'_{S_1} u}(\theta, \varphi) \overline{\widehat{v}(\theta, \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \widehat{\Delta'_{\theta, \varphi}} \widehat{u}(\theta, \varphi) \overline{\widehat{v}(\theta, \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \widehat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) \overline{\widehat{v}(\theta, \varphi)} d\theta - \\ &\quad - \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \widehat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \overline{\widehat{v}(\theta, \varphi)} d\varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Покажем, что все функции, которые стоят под знаками интегралов в последнем выражении, на самом деле не имеют особенностей и принадлежат пространству $C([0, \pi] \times [0, 2\pi])$ как функции θ и φ . В самом деле, например,

$$\widehat{v}(\theta, \varphi) = v(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \in C([0, \pi] \times [0, 2\pi])$$

как суперпозиция непрерывных функций. Аналогично для $\widehat{u}(\theta, \varphi)$.

Проверим далее, что функции

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \quad (19)$$

принадлежат $C^1([0, \pi] \times [0, 2\pi])$. Отсюда будет следовать, что и

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right), \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \hat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \in C([0, \pi] \times [0, 2\pi]).$$

В силу сделанного выше замечания 1 функция $\hat{u}(\theta, \varphi) \in C^2((0, \pi) \times [0, 2\pi])$, а потому

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta}(\theta, \varphi), \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} \in C^1((0, \pi) \times [0, 2\pi]).$$

Поэтому остаётся показать, например, что функции (19) принадлежат пространствам

$$C^1\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \times [0, 2\pi]\right) \quad \text{и} \quad C^1\left(\left[\pi - \frac{\pi}{6}, \pi\right] \times [0, 2\pi]\right).$$

Проверим, например, первое. В силу определения 1 функция

$$\tilde{u}(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} u(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) \in C^2\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{1}{2}\right).$$

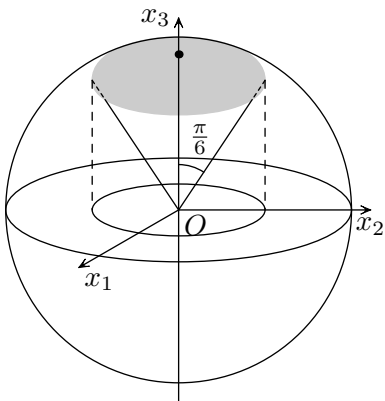


Рис. 3

При этом $u(x_1, x_2, x_3)|_{x \in S_1} = \tilde{u}(x_1, x_2)$ в окрестности верхнего полюса сферы S_1 , описываемой в сферической системе неравенством $\theta \leq \frac{\pi}{6}$. Поэтому имеет место равенство

$$\hat{u}(\theta, \varphi) = \tilde{u}(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi), \quad (20)$$

и эта функция принадлежит $C^2\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \times [0, 2\pi]\right)$ как суперпозиция функций соответствующей гладкости. Отсюда сле-

дует утверждение относительно первой функции (19). Далее, дифференцируя (20) по φ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} = & \left(-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi) \sin \varphi + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi) \cos \varphi \right) \in C^1 \left(\left[0, \frac{\pi}{6} \right] \times [0, 2\pi] \right), \end{aligned}$$

опять же как линейная комбинация суперпозиций функций соответствующей гладкости. (Отметим, что при $\theta \leq \frac{\pi}{6}$ имеем $0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sin \theta \leq \frac{1}{2}$). Итак, необходимые утверждения установлены.

Отсюда следует законность использованных расстановок порядков интегрирования в последнем выражении (18). Далее, интегрированием по частям встречающихся там внутренних интегралов имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) \overline{\hat{v}(\theta, \varphi)} d\theta &= \sin \theta \frac{\partial \hat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \overline{\hat{v}(\theta, \varphi)} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} - \\ &- \int_0^\pi \sin \theta \frac{\partial \hat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \overline{\hat{v}(\theta, \varphi)}}{\partial \theta} d\theta = - \int_0^\pi \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial \theta} \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

поскольку $\sin 0 = \sin \pi = 0$, а также

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \hat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \overline{\hat{v}(\theta, \varphi)} d\varphi &= \frac{\partial \hat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \overline{\hat{v}(\theta, \varphi)} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \\ &- \int_0^{2\pi} \frac{\partial \hat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \overline{\hat{v}(\theta, \varphi)}}{\partial \varphi} d\varphi = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial \varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

поскольку в силу 2π -периодичности по φ функций $\hat{u}(\theta, \varphi)$ и $\hat{v}(\theta, \varphi)$ имеем $\frac{\partial \hat{u}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \overline{\hat{v}(\theta, \varphi)} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0$. Используя полученные

равенства, приходим к выражению

$$\begin{aligned} (-\Delta'_{S_1} u, v)_{S_1} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \varphi} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \int_{S_1} (\nabla_{S_1} u, \nabla_{S_1} v) \, ds, \end{aligned} \quad (21)$$

где вектор $\nabla_{S_1} u$ лежит в касательной плоскости к S_1 (в каждой точке S_1) и представляет собой градиент функции u (заданной на S_1) вдоль сферы S_1 : координаты вектора $\nabla_{S_1} u$ в сферической системе суть $\left(0, \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi}\right)$.

Из формулы (21) вытекает сразу неотрицательность оператора $-\Delta'_{S_1}$:

$$(-\Delta'_{S_1} u, u)_{S_1} = \int_{S_1} |\nabla_{S_1} u|^2 \, ds \geq 0. \quad (22)$$

Из этой же формулы (21) легко получаем и симметричность оператора $-\Delta'_{S_1}$. А именно, меняя местами функции u и v в (21) и переходя к комплексному сопряжению, получаем

$$\begin{aligned} (u, -\Delta'_{S_1} v)_{S_1} &= \overline{(-\Delta'_{S_1} v, u)_{S_1}} = \int_{S_1} \overline{(-\nabla_{S_1} v, \nabla_{S_1} u)_{S_1}} \, ds = \\ &= \int_{S_1} (\nabla_{S_1} u, \nabla_{S_1} v) \, ds = (-\Delta'_{S_1} u, v)_{S_1}. \end{aligned}$$

Итак, лемма 1 установлена.

У п р а ж н е н и е 1. Пользуясь равенством в (22), установить, что всякая гармоническая на сфере S_1 функция $u(x)$, т.е. функция $u(x) \in C^2(S_1)$, удовлетворяющая на S_1 однородному уравнению Лапласа–Бельтрами $\Delta'_{S_1} u(x) = 0 \, \forall x \in S_1$, является постоянной на S_1 .

Как и в алгебре (а также для оператора Лапласа в ограниченной области с однородным граничным условием Дирихле),

симметричность и неотрицательность оператора $-\Delta'_{S_1}$ влекут следующие свойства его собственных значений и собственных функций.

Лемма 2. 1°. Собственные значения (СЗ) оператора $-\Delta'_{S_1}$ неотрицательны.

2°. Собственные функции (СФ) оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающие различным СЗ, ортогональны относительно скалярного произведения (16).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть $y(x)$ — СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающая СЗ λ :

$$-\Delta'_{S_1} y(x) = \lambda y(x), \quad y(x) \neq 0. \quad (23)$$

Последнее влечёт, что $(y, y)_{S_1} > 0$. Тогда в силу (23) и (22)

$$(-\Delta'_{S_1} y, y)_{S_1} = (\lambda y, y)_{S_1} = \lambda (y, y)_{S_1} \geq 0.$$

Отсюда вытекает, что и $\lambda \geq 0$.

2°. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — две СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающие, соответственно, СЗ λ_1 и λ_2 , причём $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда, пользуясь симметричностью $-\Delta'_{S_1}$ и действительностью СЗ λ_1 и λ_2 , имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (y_1, y_2)_{S_1} &= (\lambda_1 y_1, y_2)_{S_1} = (-\Delta'_{S_1} y_1, y_2)_{S_1} = (y_1, -\Delta'_{S_1} y_2)_{S_1} = \\ &= (y_1, \lambda_2 y_2)_{S_1} = \lambda_2 (y_1, y_2)_{S_1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2)_{S_1} = 0,$$

и, поскольку $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, $(y_1, y_2)_{S_1} = 0$. Лемма установлена.

Следующая лемма является центральной для изложения теории сферических функций, которому мы следуем.

Лемма 3. 1°. Собственными значениями оператора $-\Delta'_{S_1}$ могут быть лишь числа $\lambda_l = l(l+1)$, где $l \geq 0$ — целые. Если $\lambda = l(l+1)$ — СЗ, а $y(x)$ — соответствующая ему СФ

оператора $-\Delta'_{S_1}$, то функция $V(x)$, имеющая в сферической системе координат выражение

$$\widehat{V}(\rho, \theta, \varphi) = \rho^l \widehat{y}(\theta, \varphi), \quad (24)$$

где $\widehat{y}(\theta, \varphi)$ — выражение в сферической системе на S_1 СФ $y(x)$, представляет собой однородный гармонический многочлен переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$ степени l .

2°. Обратно, если $V(x)$ — ненулевой ($V(x) \neq 0$) однородный гармонический многочлен в $\mathbb{R}^3$ степени l , то его представление $\widehat{V}(\rho, \theta, \varphi)$ в сферической системе имеет вид (24), где $\widehat{y}(\theta, \varphi)$ — выражение в сферической системе на S_1 функции $y(x) \in C^\infty(S_1)$, $y(x) \neq 0$, представляющей собой СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающую СЗ $\lambda = l(l+1)$.

Доказательство. 1°. Пусть $\lambda \geq 0$ — СЗ, $y(x) \in C^2(S_1)$ — отвечающая ему СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$ и $\widehat{y}(\theta, \varphi)$ — выражение $y(x)$ в сферической системе. Нетрудно видеть, что функция $V(x)$, представление которой в сферической системе имеет вид

$$\widehat{V}(\rho, \theta, \varphi) = R(\rho) \widehat{y}(\theta, \varphi), \quad (25)$$

где $R(\rho) \in C^2(0, \infty)$, является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, т.е. $V(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ (отметим, что это верно и для любой $y(x) \in C^2(S_1)$). Найдём вид тех $R(\rho)$, при которых функция (25), где $y(x)$ — СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$, является гармонической в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа в $\mathbb{R}^3$.

Подставляя (25) в уравнение Лапласа, записанное в сферической системе, используя (11) и то, что $\widehat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \widehat{y}(\theta, \varphi) = -\lambda \widehat{y}(\theta, \varphi)$, приходим к уравнению

$$\left(R''(\rho) + \frac{2}{\rho} R'(\rho) - \frac{\lambda}{\rho^2} R(\rho) \right) \widehat{y}(\theta, \varphi) = 0.$$

Поскольку $\widehat{y}(\theta_0, \varphi_0) \neq 0$ при некоторых θ_0, φ_0 , отсюда получаем,

что $R(\rho)$ является решением на $(0, \infty)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$R''(\rho) + \frac{2}{\rho}R'(\rho) - \frac{\lambda}{\rho^2}R(\rho) = 0.$$

Это уравнение является уравнением Эйлера, и его решения следует искать в виде $R(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя такое выражение в (25) и сокращая на $\rho^{\mu-2}$, приходим к следующему уравнению для μ :

$$\mu^2 + \mu - \lambda = 0. \quad (26)$$

Корнями этого уравнения являются значения

$$\mu_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}.$$

Поскольку $\lambda \geq 0$, имеем $\sqrt{\frac{1}{4} + \lambda} \geq \frac{1}{2}$, а потому

$$\mu_+ = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda} \geq 0, \quad \text{а } \mu_- \leq -1.$$

Рассмотрим далее только функцию $V(x)$, которая в сферической системе имеет выражение

$$\widehat{V}(\rho, \theta, \varphi) = \rho^{\mu_+} \widehat{y}(\theta, \varphi). \quad (27)$$

Итак, эта функция является гармонической в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Установим, что $V(x)$ является ограниченной в проколотом шаре $0 < |x| = \rho \leq 1$.

В самом деле, т.к. $y(x) \in C(S_1) (\subset C^2(S_1))$, а S_1 — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$, то по теореме Вейерштрасса $y(x)$ ограничена на S_1 : $\exists M : |y(x)| \leq M \ \forall x \in S_1$. Поэтому и

$$|\widehat{y}(\theta, \varphi)| \leq M, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (28)$$

Так как $\mu_+ \geq 0$, $\rho^{\mu_+} \leq 1$ при $0 < \rho \leq 1$. Отсюда $|\widehat{V}(\rho, \theta, \varphi)| \leq M$, а потому и $|V(x)| \leq M$ при $0 < |x| \leq 1$.

Воспользуемся теперь теоремой об устранимой особенности для гармонической функции, согласно которой функция, гармоническая в проколотом шаре $0 < |x^0 - x| < R$ в $\mathbb{R}^3$ и являющаяся $o\left(\frac{1}{|x^0 - x|}\right)$ при $x \rightarrow x^0$, имеет конечный предел в точке $x = x^0$ и, будучи доопределённой в этой точке своим предельным значением, становится гармонической уже во всём шаре $|x^0 - x| < R$. В нашем случае $V(x)$ гармонична в проколотом шаре $0 < |x| < \infty$ и, в силу ограниченности $V(x)$ в окрестности нуля, $V(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому $V(x)$ можно так доопределить в точке $x = 0$, что она будет гармонической уже во всём пространстве $\mathbb{R}^3$.

Далее заметим, что $V(x)$ имеет на бесконечности рост не выше степенного: в силу (27) и (28)

$$|V(x)| \leq M|x|^{\mu_+} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Применим здесь теорему Лиувилля для гармонических функций в $\mathbb{R}^3$ и получим в результате, что $V(x)$ представляет собой многочлен переменных x_1, x_2, x_3 .

Теперь уже нетрудно показать, что число μ_+ в представлении (27) является целым, обозначим его буквой l , а $V(x)$ представляет собой однородный многочлен степени l . Для этого воспользуемся следующим утверждением.

Предложение 1. Пусть $v(t)$ — многочлен одной действительной переменной t и известно, что $v(t) = bt^\mu$, $b \neq 0$, $\forall t > 0$.

Тогда $\mu = l$, $l \geq 0$ — целое.

Доказательство. Так как многочлен $v(t) \neq 0$, то $v(t) = \sum_{k=0}^l a_k t^k$, где l — целое и $a_l \neq 0$. Сравнивая эти два

различных представления для $v(t)$, получим, что

$$\frac{v(t)}{a_l t^\mu} = t^{l-\mu} \left(1 + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{a_k}{a_l} t^{-(l-k)} \right) = t^{l-\mu} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) = \frac{b}{a_l}$$

при $t \rightarrow \infty$. Это возможно лишь в том случае, когда $l - \mu = 0$ и $\frac{b}{a_l} = 1$. Таким образом, $v(t) = b t^l$.

Перейдём теперь к доказательству сформулированного выше утверждения относительно функции $V(x)$. Представим многочлен $V(x)$ в виде

$$V(x) = \sum_{k=0}^p V_k(x),$$

где $V_k(x) = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = k}} C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}^k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ — однородные многочлены степени k , $k = 0, 1, \dots, p$. Переходя к сферическим координатам, имеем

$$\widehat{V}_k(\rho, \theta, \varphi) = \rho^k \widehat{y}_k(\theta, \varphi) \quad (29)$$

и

$$\widehat{V}(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^p \widehat{y}_k(\theta, \varphi) \rho^k, \quad (30)$$

где $\widehat{y}_k(\theta, \varphi)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые функции θ и φ .

Обратимся к представлению (27) и сначала воспользуемся предложением 1 для тех точек θ, φ , в которых $\widehat{y}(\theta, \varphi) \neq 0$. Это нам даёт, что $\mu_+ = l$ — целому (одному и тому же для всех таких θ и φ), что $p = l$, что $\widehat{y}_l(\theta, \varphi) = \widehat{y}(\theta, \varphi)$ и что $\widehat{y}_k(\theta, \varphi) = 0$, $k = 0, 1, \dots, (l-1)$ во всех тех точках θ, φ , где $\widehat{y}(\theta, \varphi) \neq 0$. Для тех же точек θ, φ , где $\widehat{y}(\theta, \varphi) = 0$, сравнивая представления (30) и (27), находим, что все $\widehat{y}_k(\theta, \varphi)$, $k = 0, 1, \dots, l$ также равны нулю.

Итак, мы получили, что $\mu_+ = l$, что $p = l$, что $\widehat{y}_k(\theta, \varphi) \equiv 0$, $k = 0, 1, \dots, (l-1)$ для всех θ и φ , а потому и $\widehat{V}_k(\rho, \theta, \varphi) \equiv 0$ и, следовательно, $\widehat{V}_k(x) \equiv 0$, $k = 0, 1, \dots, (l-1)$. Таким образом, $V(x)$ является однородным многочленом степени l , удовлетворяющим уравнению Лапласа.

Воспользуемся теперь уравнением (26), которому удовлетворяет μ_+ . Выражая СЗ λ через μ_+ , получим

$$\lambda = \mu_+^2 + \mu_+ = l(l+1), \quad l \geq 0 \text{ — целое.}$$

1°. Перейдём теперь к доказательству обратного утверждения леммы 3. Для этого воспользуемся следующим предложением.

Предложение 2. Пусть $V(x)$ — однородный многочлен степени l . Тогда

$$\Delta V(x)|_{S_1} = l(l+1)y(x) + \Delta'_{S_1} y(x), \quad (31)$$

где

$$y(x) = V(x)|_{S_1} \quad (32)$$

— функция на S_1 , называемая следом многочлена $V(x)$ на S_1 .

Доказательство. Аналогично (29) для $\widehat{V}(\rho, \theta, \varphi)$ — выражения $V(x)$ в сферической системе — имеет место представление вида (24), где $\widehat{y}(\theta, \varphi)$ — выражение $y(x)$ в сферической системе. Тогда, используя (11), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta V}(\rho, \theta, \varphi)|_{\rho=1} &= \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} \rho^l \right) \widehat{y}(\theta, \varphi) + \frac{\rho^l}{\rho^2} \widehat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \widehat{y}(\theta, \varphi) \right] \Big|_{\rho=1} = \\ &= l(l+1)\widehat{y}(\theta, \varphi) + \widehat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \widehat{y}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда, с использованием определения 2 и (32), получаем (31).

Итак, если $V(x)$ — ненулевой однородный гармонический многочлен степени l , то в силу (31) и выполнения уравнения

$\Delta V(x) = 0$ получаем, что для функции (32)

$$-\Delta'_{S_1} y(x) = l(l+1)y(x), \quad x \in S_1, \quad (33)$$

причём $y(x) \not\equiv 0$ на S_1 (в противном случае в силу (24) $V(x) \equiv 0$). Таким образом $y(x)$ является собственной функцией оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающей собственному значению $\lambda = l(l+1)$. Лемма 3 полностью доказана.

СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$ и называют сферическими функциями.

Определение 3. Всякую собственную функцию $y(x)$ оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающую собственному значению $\lambda = l(l+1)$, $l \geq 0$ — целое, будем называть *сферической функцией веса l* . Обычно сферической функцией называют также и выражение $\widehat{y}(\theta, \varphi)$ функции $y(x)$ в сферической системе.

Лемма 3 по сути дела и даёт описание множества сферических функций. А именно, имеем следующее

Следствие 1. *Множество всех сферических функций веса l представляет собой совокупность следов на S_1 всех ненулевых однородных гармонических многочленов в $\mathbb{R}^3$ степени l .*

Определение 4. Пусть $y(x)$ — сферическая функция веса l . Однородный гармонический многочлен, имеющий в сферической системе выражение (24), называют *шаровой функцией*, порождённой $y(x)$.

§ 3. Подсчёт максимального числа линейно независимых сферических функций веса l

Поскольку формула (24) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между сферическими функциями веса l и шаровыми функциями степени l , то максимальное число линейно независимых сферических функций веса l

совпадает с максимальным числом линейно независимых однородных гармонических многочленов степени l . Займёмся подсчётом последнего числа.

Заметим, что множество P_l всех однородных многочленов степени l , т.е. многочленов вида

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \quad (34)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

образует линейное пространство. Множество H_l всех однородных многочленов $p(x)$ степени l , удовлетворяющих уравнению $\Delta p(x) = 0$, в силу линейности оператора Лапласа, представляет собой линейное подпространство пространства P_l . H_l является нуль-пространством оператора Лапласа, рассматриваемого на пространстве P_l .

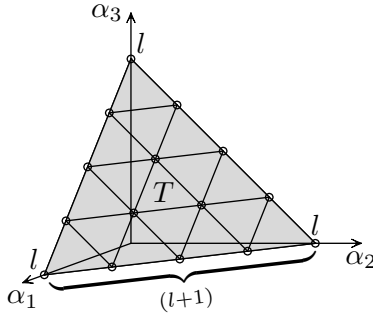


Рис. 4

Подсчитаем сначала размерность $\dim P_l$ пространства P_l . Так как в силу (34) всякий многочлен из P_l является линейной комбинацией одночленов

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3},$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = l,$$

а совокупность этих одночленов линейно независима, то размерность P_l равна числу различных

таких одночленов, т.е. числу всевозможных точек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в $\mathbb{R}^3$ с целочисленными координатами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$, лежащими на плоскости $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = l$, а точнее в замкнутом треуголь-

нике T , лежащем в этой плоскости и изображённом на рис. 4. Нетрудно подсчитать количество таких точек:

$$\dim P_l = (l+1) + l + \dots + 1 = \frac{(l+1)(l+2)}{2}. \quad (35)$$

Далее установим следующее утверждение.

Предложение 3. *Оператор Лапласа Δ отображает пространство P_l на всё пространство P_{l-2} (в случае $l = 0, 1$ пространство P_{l-2} состоит только из одной нулевой функции и его размерность равна нулю).*

Доказательство. Нужно показать, что для любого однородного многочлена $q(x)$ степени $m \geq 0$ найдётся такой однородный многочлен $p(x)$ степени $(m+2)$, что

$$\Delta p(x) = q(x). \quad (36)$$

1°. В случае, когда $m = 0$, т.е. $q(x) = c_0 = \text{const}$, $p(x) = \frac{c_0}{2} x_1^2$ удовлетворяет (36) и для $l-2 = 0$ предложение 3 справедливо.

2°. Предложение 3 справедливо и для случая, когда $q(x)$ является однородным многочленом только одной переменной. Например, если $q(x) = c_m x_1^m$, то многочлен $p(x) = \frac{c_m}{(m+1)(m+2)} x_1^{m+2}$ очевидно удовлетворяет (36). Заметим, что при этом $p(x)$ — однородный многочлен также только одной переменной x_1 .

3°. Установим далее справедливость предложения 3 для случая, когда $q(x)$ является однородным многочленом только двух переменных. Будем доказывать это индукцией по степени многочлена $q(x)$. Итак предположим, что (36) уже установлено для всех однородных многочленов степени m двух каких-либо переменных, например, x_1 и x_2 , и что при этом $p(x)$ — однородный многочлен степени $m+2$ опять тех же двух перемен-

ных. Для $m = 0$ мы уже установили, что это верно. Докажем справедливость такого утверждения для произвольного однородного многочлена $q(x)$ степени $m + 1$ и переменных x_1 и x_2 : $q(x) = q(x_1, x_2)$.

Производная $\frac{\partial}{\partial x_1} q(x_1, x_2)$ является однородным многочленом 2-х переменных x_1 и x_2 степени m . Поэтому в силу предположения индукции найдётся такой однородный многочлен $r(x_1, x_2)$ степени $(m + 2)$, что

$$\Delta r(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} q(x_1, x_2). \quad (37)$$

Введём для однородных многочленов операцию J_1 интегрирования по переменной x_1 : если $p(x) = \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ — однородный многочлен степени l , то

$$J_1 p(x) = \sum_{|\alpha|=l} \frac{c_\alpha}{(\alpha_1 + 1)} x_1^{\alpha_1+1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

— однородный многочлен степени $(l + 1)$. Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} J_1 p(x) \equiv p(x)$$

для любого однородного многочлена $p(x)$.

Образует далее многочлен $p_1(x_1, x_2) = J_1 r(x_1, x_2)$ — однородный, степени $(m + 3)$. Он зависит только от x_1 и x_2 . Тогда в силу (37)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta p_1(x_1, x_2) - q(x_1, x_2)) &= \Delta \frac{\partial}{\partial x_1} J_1 r(x_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} q(x_1, x_2) = \\ &= \Delta r(x_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} q(x_1, x_2) \equiv 0. \end{aligned}$$

Поэтому однородный многочлен $(\Delta p_1(x_1, x_2) - q(x_1, x_2))$ на самом деле является однородным многочленом только одной пе-

ременной x_2 степени $(m + 1)$:

$$\Delta p_1(x_1, x_2) - q(x_1, x_2) = \varphi(x_2). \quad (38)$$

В силу установленного в пункте 2° для $\varphi(x_2)$ найдётся такой однородный многочлен $p_2(x_2)$ только переменной x_2 степени $(m + 3)$, что $\Delta p_2(x_2) = \varphi(x_2)$. Используя это в (38), находим в результате, что однородный многочлен $p(x_1, x_2) = p_1(x_1, x_2) - p_2(x_2)$ удовлетворяет (36). Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta p(x_1, x_2) &= \Delta p_1(x_1, x_2) - \Delta p_2(x_2) = \\ &= \Delta p_1(x_1, x_2) - \varphi(x_2) = q(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Итак, утверждение пункта 3° доказано.

4°. Общий случай, когда $q(x)$ — многочлен 3-х переменных устанавливается точно так же индукцией по степени многочлена $q(x)$ с использованием уже доказанного утверждения в пункте 3° для многочленов $q(x)$ только двух переменных. При этом многочлены r и p_1 будут многочленами 3-х переменных, а многочлены φ и p_2 — многочленами 2-х переменных x_2 и x_3 . Итак, предложение 3 доказано.

Подсчёт размерности пространства H_l однородных гармонических многочленов степени l произведём с использованием полученных утверждений и следующей леммы, известной из курса линейной алгебры, доказательство которой приведём для полноты изложения.

Лемма 4. Пусть A — линейное отображение линейного пространства E размерности n на всё линейное пространство F размерности $m \leq n$. Тогда размерность нуль-пространства (ядра) N отображения A (т.е. подпространства элементов из E , которые A переводит в $0 \in F$) равна $n - m$.

Доказательство. Выберем в F какой-либо базис $f_1, \dots, f_m$. Так как $AE = F$, найдутся такие элементы

$e_1, \dots, e_m$, что $Ae_k = f_k$, $k = 1, \dots, m$. Нетрудно видеть, что система векторов $e_1, \dots, e_m$ также линейно независимая система.

Дополним систему $e_1, \dots, e_m$ элементами $e_{m+1}, \dots, e_n$ из E до базиса в E . Матрица $\mathcal{A}$ отображения A в базисах $e_1, \dots, e_n$ в пространстве E и $f_1, \dots, f_m$ в пространстве F имеет вид $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} E & * \end{bmatrix}$, где E — единичная матрица размеров $m \times m$, $*$ — некоторая матрица размеров $m \times (n-m)$. Нуль-пространство N оператора A состоит из тех и только тех векторов $x \in E$, координатные столбцы которых $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ в базисе $e_1, \dots, e_n$ удовлетворяют системе $\mathcal{A}\xi = 0$, где $0 = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m \text{ раз}}^T$. Поскольку

ранг матрицы $\mathcal{A}$ равен m (т.к. $\det E = 1$), то размерность пространства решений системы $\mathcal{A}\xi = 0$, а вместе с ней и размерность нуль-пространства N равны $(n-m)$. Лемма 4 доказана.

Итак, применим эту лемму к нахождению размерности пространства H_l однородных гармонических многочленов степени l . Оператор Лапласа Δ представляет собой линейное отображение пространства P_l на всё пространство P_{l-2} , а H_l является нуль-пространством такого оператора. Поэтому в силу леммы 4 и (35) размерность $\dim H_l$ пространства H_l равна

$$\dim H_l = \dim P_l - \dim P_{l-2} = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{(l-1)l}{2} = 2l+1.$$

Итак, установлено следующее утверждение.

Лемма 5. *Максимальное число линейно независимых сферических функций веса l равно в точности $(2l+1)$. Всякое число $\lambda = l(l+1)$, где $l \geq 0$ — целое, является СЗ оператора $-\Delta'_{S_1}$.*

Таким образом, в принципе мы уже получили описание СЗ и СФ оператора Лапласа–Бельтрами. Перейдём теперь к по-

лучению выражений сферических функций в сферической системе.

§ 4. Выражение сферических функций в сферической системе координат. Уравнение Лежандра

Пусть $y(x)$ — сферическая функция веса l , $l \geq 0$ — целое, а $\hat{y}(\theta, \varphi)$ — её выражение в сферической системе. $y(x) \in C^\infty(S_1)$ как след гармонического многочлена и, кроме того, $y(x)$ — СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающая СЗ $\lambda = l(l+1)$. Поэтому $\hat{y}(\theta, \varphi) \in C^\infty([0, \pi] \times [0, 2\pi])$, заведомо ограниченная функция, $\hat{y}(\theta, \varphi) \not\equiv 0$, и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{y}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \hat{y} = 0, \quad (39)$$

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Нам достаточно найти $(2l+1)$ линейно независимых функций, удовлетворяющих этим условиям. Будем искать каждую такую функцию методом разделения переменных в виде

$$\hat{y}(\theta, \varphi) = z(\theta) e^{im\varphi}, \quad m \text{ — целое.} \quad (40)$$

В силу бесконечной дифференцируемости $\hat{y}(\theta, \varphi)$ функция $z(\theta)$ также обязана принадлежать $C^\infty([0, 2\pi])$. Подставляя (40) в (39) и сокращая на $e^{im\varphi} \neq 0$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta z'(\theta))' - \left(\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - l(l+1) \right) z(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad (41)$$

где $z(\theta) \not\equiv 0$, $z(\theta) \in C^\infty([0, \pi])$.

В этом уравнении удобно сделать замену независимой переменной

$$t = \cos \theta, \quad z(\theta) = P(\cos \theta), \quad -1 < t < 1, \quad (42)$$

которая преобразует уравнение (41) к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left((1-t^2) \frac{dP}{dt} \right) - \left(\frac{m^2}{1-t^2} - l(l+1) \right) P(t) = 0, \quad -1 < t < 1, \quad (43)$$

причём $P(t) \in C^\infty((-1,1))$ и ограниченная на $(-1,1)$ функция, $P(t) \neq 0$. Уравнение (43) называется *уравнением Лежандра*.

Итак, перейдём к нахождению таких решений уравнения (43). Умножив это уравнение на $(1-t^2)$, преобразуем его к форме

$$(t^2-1)^2 P'' + 2t(t^2-1)P' - [m^2 + l(l+1)(t^2-1)]P = 0. \quad (44)$$

Существует аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой имеется раздел, посвящённый аналитической теории линейных уравнений с правильными особыми точками, см., например, книги [4] или [5] из списка литературы, приведённого в конце данного пособия. По этой теории, если в окрестности некоторой точки c линейное дифференциальное уравнение может быть приведено к виду

$$(t-c)^2 y'' + (t-c)a(t)y' + b(t)y = 0, \quad (45)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции t , аналитические в некоторой окрестности точки $c: |t-c| < \delta$, т.е. функции, которые представимы в этой окрестности степенными рядами

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + a_1(t-c) + \dots + a_k(t-c)^k + \dots, \\ b(t) &= b_0 + b_1(t-c) + \dots + b_k(t-c)^k + \dots, \end{aligned}$$

то точку c называют правильной особой точкой уравнения (44). В этом случае уравнение (45) (поскольку $a(t) \sim a_0$, $b(t) \sim b_0$ при $(t-c)$ малых) похоже в малой окрестности точки c на уравнение Эйлера

$$(t-c)^2 \tilde{y}'' + a_0(t-c)\tilde{y}' + b_0\tilde{y} = 0. \quad (46)$$

Решения последнего уравнения, как известно, следует искать в виде $\tilde{y} = (t - c)^\nu$. Подставляя такую функцию в уравнение (46) и сокращая на $(t - c)^\nu$, приходим к следующему характеристическому уравнению для определения показателя ν :

$$\nu(\nu - 1) + a_0\nu + b_0 = 0. \quad (47)$$

Это квадратное уравнение имеет два корня ν_1 и ν_2 . Занулируем их так, чтобы $\operatorname{Re} \nu_1 \geq \operatorname{Re} \nu_2$. Оказывается, что так же, как и для уравнения Бесселя (для которого точка 0 является правильной особой точкой), для корня ν_1 можно всегда найти решение уравнения (45) вида

$$y_1(t) = (t - c)^{\nu_1} \left[\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (t - c)^k \right], \quad \gamma_0 \neq 0. \quad (48)$$

При этом γ_0 можно взять произвольным, коэффициенты γ_k , $k \geq 1$, определяются тогда уже однозначно, и степенной ряд в представлении $y_1(t)$ сходится в некоторой достаточно малой окрестности точки c .

Что касается решения $y_2(t)$, отвечающего второму корню ν_2 характеристического уравнения (47), то тут ситуация несколько более сложная. Если $\nu_1 - \nu_2 \neq$ целому, то существует и второе решение $y_2(t)$ уравнения вида (48), но с ν_1 и γ_k заменёнными, соответственно, на ν_2 и γ_k , и потому в этом случае $y_2(t) \sim \gamma_0(t - c)^{\nu_2}$ в окрестности точки c . Если же $\nu_1 - \nu_2 =$ целому $\neq 0$, то оказывается также существует решение $y_2(t)$ уравнения (45), которое имеет поведение $y_2(t) \sim \gamma_0(t - c)^{\nu_2}$ при $t \rightarrow c$. В случае же, когда $\nu_1 = \nu_2$, второе решение уравнения (45) линейно независимое с $y_1(t)$, имеет уже в малой окрестности точки c такое поведение: $y_2(t) \sim \gamma_0(t - c)^{\nu_1} \ln(t - c)$.

Обратимся к уравнению Лежандра в форме (44). У этого

уравнения две особые точки $t = +1$ и $t = -1$, поскольку коэффициент при P'' обращается в нуль только в этих точках. Эти особые точки являются правильными. Проверим это, например, для точки $t = 1$.

Разделим уравнение (44) на функцию $(t + 1)^2$, которая не обращается в нуль в окрестности исследуемой точки $t = 1$. Уравнение приобретает вид

$$(t - 1)^2 P'' + (t - 1) \frac{2t}{t + 1} P' - \left(\frac{m^2}{(t + 1)^2} + l(l + 1) \frac{t - 1}{t + 1} \right) P(t) = 0, \quad (49)$$

т.е. становится вида (44) с $c = 1$ и с

$$a(t) = \frac{2t}{t + 1}, \quad b(t) = - \left(\frac{m^2}{(t + 1)^2} + l(l + 1) \frac{t - 1}{t + 1} \right).$$

Нетрудно видеть, что $a(t)$ и $b(t)$ — регулярные функции переменной t (рассматриваемой уже как комплексная переменная) в круге $|t - 1| < 2$. Поэтому эти функции допускают разложения в этом круге в ряды Тейлора

$$a(t) = a(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{(k)}(1)}{k!} (t - 1)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (t - 1)^k, \\ b(t) = b(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{(k)}(1)}{k!} (t - 1)^k = -\frac{m^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (t - 1)^k,$$

и, следовательно, и для действительных t в окрестности $|t - 1| < 2$. Итак, точка $t = 1$ является правильной.

Поэтому согласно сформулированной выше теории уравнение (49) при t , близких к 1, становится похожим на уравнение эйлеровского типа

$$(t - 1)^2 \tilde{P}'' + (t - 1) \tilde{P}' - \frac{m^2}{4} \tilde{P} = 0. \quad (50)$$

Решение последнего уравнения ищем в виде $\tilde{P} = (t-1)^\nu$. И, как и выше для ν , получаем квадратное уравнение для ν :

$$\nu(\nu - 1) + \nu - \frac{m^2}{4} = \nu^2 - \frac{m^2}{4} = 0.$$

Это уравнение имеет два корня ν_1 и ν_2 , $\operatorname{Re} \nu_1 \geq \operatorname{Re} \nu_2$:

$$\nu_1 = \frac{|m|}{2}, \quad \nu_2 = -\frac{|m|}{2}.$$

При этом, как это следует из сказанного выше, тогда всякое ограниченное в окрестности точки $t = 1$ решение уравнения (49) имеет вид

$$P(t) = (1 - t)^{\frac{|m|}{2}} Q_+(t), \quad (51)$$

где функция $Q_+(t)$ аналитическая, а потому и бесконечно дифференцируемая функция в окрестности точки $t = 1$. Действительно, одно нетривиальное решение уравнения (49) согласно этой формуле имеет (51), а другое решение, линейно независимое с этим имеет поведение $P_2(t) = \gamma_0(1 - t)^{-\frac{|m|}{2}}$ при $m \neq 0$ и $P_2(t) = \gamma_0 \ln(1 - t)$ при $m = 0$, а потому это второе решение неограничено в окрестности точки $t = 1$.

Нетрудно видеть, что уравнение (49) таким же образом устроено и в окрестности точки $t = -1$, причём значения ν_1 и ν_2 для этой точки оказываются в точности теми же, что и выше. Следовательно, всякое решение уравнения (49), ограниченное в окрестности точки $t = -1$, необходимо имеет вид

$$P(t) = (1 + t)^{\frac{|m|}{2}} Q_-(t),$$

где $Q_-(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция в некоторой окрестности точки $t = -1$.

Отсюда уже следует, что если $P(t)$ — решение уравнения Лежандра (44), отвечающее сферической функции вида (40), то функция

$$Q(t) = (1 - t^2)^{-\frac{|m|}{2}} P(t)$$

обязана принадлежать пространству $C^\infty([-1, +1])$. В самом деле, в окрестностях точек $t = \pm 1$ $Q(t) = (1 \pm t)^{-\frac{|m|}{2}} Q_\pm(t)$ бесконечно дифференцируемая, поскольку таковыми являются в этих окрестностях функции $Q_\pm(t)$ и $(1 \pm t)^{-\frac{|m|}{2}}$. Во внутренних же точках интервала $(-1, 1) : Q(t) \in C^\infty((-1, 1))$ поскольку $P(t)$ и $(1 - t^2)^{-\frac{|m|}{2}}$ принадлежат $C^\infty((-1, 1))$.

Таким образом, мы приходим в итоге к заключению, что ограниченное на $[-1, +1]$ решение $P(t)$ уравнения Лежандра (43) следует искать в виде

$$P(t) = (1 - t^2)^{\frac{|m|}{2}} Q(t), \quad (52)$$

где $Q(t) \in C^\infty([-1, +1])$.

Выполняя замену (52) в уравнении (43), приходим к следующему уравнению для функции $Q(t)$:

$$(1 - t^2)Q'' - 2(|m| + 1)tQ' + [l(l + 1) - |m|(|m| + 1)]Q = 0. \quad (53)$$

Требуется найти нетривиальное решение $Q(t)$ этого уравнения, принадлежащее $C^\infty([-1, 1])$. Установим, что такими решениями будут некоторые многочлены, и найдём их.

Для этого рассмотрим несколько более общее семейство уравнений, включающее уравнения (53), зависящее от действительного параметра n :

$$(1 - t^2)S'' - 2(n + 1)tS' + [l(l + 1) - n(n + 1)]S = 0. \quad (54)$$

При $n = |m|$ уравнение (54) совпадает с уравнением (53). Последнее семейство уравнений обладает следующими важными для нас свойствами.

Лемма 6. 1° . Если $S(t)$ — решение уравнения (54), то $S'(t)$ является решением уравнения вида (54) с n , заменённым на $(n + 1)$.

2°. При $n = -l$ решением уравнения (54) является многочлен

$$W(t) = (1 - t^2)^l. \quad (55)$$

Доказательство. 1°. Если $S(t)$ — решение уравнения (54), то дифференцируя его (как тождество), получим $(1 - t^2)(S')'' - 2t(S')' - 2(n+1)t(S')' - 2(n+1)S' + [l(l+1) - n(n+1)]S' = (1 - t^2)(S')'' - 2(n+2)(S')' + [l(l+1) - (n+1)(n+2)]S' = 0$, и первое утверждение леммы установлено.

2°. Преобразуем уравнение (54) при $n = -l$ к виду

$$(1 - t^2)S'' - 2tS' + 2ltS' + 2lS = ((1 - t^2)S')' + 2l(tS)' = 0.$$

Поэтому решение уравнения первого порядка

$$(1 - t^2)S' + 2ltS = 0$$

будет и решением предыдущего уравнения. Но последнее уравнение легко интегрируется (оно является уравнением с разделяющимися переменными). Одним из решений этого уравнения является функция (55). Лемма 6 установлена.

Применим теперь эту лемму к нахождению решений из $C^\infty([-1, 1])$ уравнений (53). Для того, чтобы получить такое решение уравнения (53) при $m = 0$, согласно лемме 6 достаточно l раз продифференцировать многочлен (55), и полученный многочлен будет с точностью до постоянного множителя единственным нетривиальным ограниченным на $[-1, 1]$ решением этого уравнения. Вместо такого многочлена берут многочлен

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dt^l} (t^2 - 1)^l \quad (56)$$

(он — степени l), нормированный условием $P_l(1) = 1$ (проверить последнее самим). Систему многочленов (56) $l = 0, 1, 2, \dots$ называют *системой многочленов Лежандра*. Формула (56) носит название формулы Родрига для многочленов Лежандра.

Пользуясь далее пунктом 1° леммы 6, находим, что решением уравнения (53), причём с точностью до постоянного множителя единственным ограниченным на $[-1, 1]$ решением при $|m| > 0$ является многочлен

$$\frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}} P_l(t).$$

Отметим, что при $|m| > l$ этот многочлен будет равен тождественно нулю.

Обратимся теперь к замене (52), и мы получаем, что единственным, с точностью до постоянного множителя, нетривиальным ограниченным на $(-1, 1)$ решением уравнения Лежандра (43) является функция

$$P_l^{|m|}(t) = (1 - t^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}} P_l(t), \quad (57)$$

где $P_l(t)$ — многочлен Лежандра степени l . При этом такие нетривиальные решения уравнения (43) существуют только для m , удовлетворяющих условию $|m| \leq l$. При $|m| > 0$ функции (57) называются *присоединными функциями Лежандра*. При $m = 0$ $P_l^0(t)$ — многочлены Лежандра.

Обратимся, наконец, к формулам (40) и (42). И мы в результате находим, что при каждом $l \geq 0$ — целом система функций

$$\widehat{y}_l^m(\theta, \varphi) = P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad -l \leq m \leq l, \quad (58)$$

представляет собой систему $(2l + 1)$ сферических функций веса l . Таким образом, если мы ещё установим, что такая система линейно независимая, то задача будет решена: тогда мы нашли всю систему сферических функций веса l для каждого $l \geq 0$ (точнее — их выражений в сферической системе).

Обычно вместо системы (58) используют систему действительных сферических функций (получаемую из системы (58)

отделением действительных и мнимых частей):

$$\hat{Y}_l^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi, & m = 0, \dots, l, \\ P_l^{|m|}(\cos \theta) \sin |m|\varphi, & m = -1, -2, \dots, -l. \end{cases} \quad (59)$$

Установим, что эта система при каждом $l \geq 0$ является линейно независимой системой $(2l+1)$ сферических функций веса l . Это вытекает из свойства ортогональности системы (59) относительно скалярного произведения (16).

§ 5. Ортогональность сферических функций и функций Лежандра. Производящая функция и рекуррентное соотношение. Базисность

Итак, обозначим через

$$Y_l^m(x), \quad x \in S_1, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad -l \leq m \leq l, \quad (60)$$

систему всех сферических функций, каждая из которых — $Y_l^m(x)$ имеет в сферической системе выражение (59).

Лемма 7. 1°. Система (60) сферических функций является ортогональной системой относительно скалярного произведения (16).

2°. Имеют место равенства

$$(Y_l^m(x), Y_l^m(x))_{S_1} = \begin{cases} \frac{4\pi}{2l+1} & \text{при } m = 0, \\ \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \frac{2\pi}{2l+1} & \text{при } 1 \leq |m| \leq l. \end{cases} \quad (61)$$

Доказательство. Установим сначала 1°, а именно, что $(Y_{l_1}^{m_1}, Y_{l_2}^{m_2})_{S_1} = 0$ для любых пар (l_1, m_1) и (l_2, m_2) таких, что либо $l_1 \neq l_2$, либо $m_1 \neq m_2$. Если $l_1 \neq l_2$, то поскольку $Y_{l_1}^{m_1}(x)$ и $Y_{l_2}^{m_2}(x)$ — собственные функции оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1 = l_1(l_1+1)$ и $\lambda_2 = l_2(l_2+1)$, в силу леммы 2 $(Y_{l_1}^{m_1}, Y_{l_2}^{m_2})_{S_1} = 0$.

Пусть далее $l_1 = l_2$, но $m_1 \neq m_2$. Рассмотрим случай $m_1, m_2 \geq 0$. Выполняя замену $t = \cos \theta$, получаем для $m_1, m_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} (Y_{l_1}^{m_1}, Y_{l_2}^{m_2})_{S_1} &= \int_0^{2\pi} \cos m_1 \varphi \cos m_2 \varphi d\varphi \times \\ &\quad \times \int_0^\pi P_{l_1}^{m_1}(\cos \theta) P_{l_2}^{m_2}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos m_1 \varphi \cos m_2 \varphi d\varphi \int_{-1}^1 P_{l_1}^{m_1}(t) P_{l_2}^{m_2}(t) dt. \end{aligned} \quad (62)$$

Поэтому для $m_1, m_2 \geq 0$, $m_1 \neq m_2$ $(Y_{l_1}^{m_1}, Y_{l_2}^{m_2})_{S_1} = 0$ в силу известного из курса математического анализа свойства ортогональности классической тригонометрической системы $\cos k\varphi$, $k \geq 0$, $\sin k\varphi$, $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ на интервале $(0, 2\pi)$: $\int_0^{2\pi} \cos m_1 \varphi \cos m_2 \varphi d\varphi = 0$ при $m_1 \neq m_2$. Совершенно аналогично рассматриваются другие возможности для случая $m_1 \neq m_2$. Итак, 1° установлено.

Отметим, что из этого свойства вытекает непосредственно свойство ортогональности систем многочленов Лежандра и присоединённых функций Лежандра на интервале $(-1, 1)$.

Лемма 8. При каждом фиксированном $m \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-1}^1 P_{l_1}^m(t) P_{l_2}^m(t) dt = 0 \quad \text{для} \quad l_1, l_2 \geq m, \quad l_1 \neq l_2. \quad (63)$$

Доказательство. Обратимся к формуле (62). Поскольку $(Y_{l_1}^m, Y_{l_2}^m)_{S_1} = 0$, а $\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi = \{2\pi \text{ при } m = 0, \pi \text{ при } m > 0\} \neq 0$, получаем (63).

Справедливость утверждения 2° леммы 7 непосредственно вытекает из формулы (62) и её аналога при $m_1 = m_2 < 0$ и нижеследующего утверждения.

Лемма 9. Для любых целых l и m , $0 \leq m \leq l$ имеет место равенство

$$\int_{-1}^1 (P_l^m(t))^2 dt = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{(2l+1)}. \quad (64)$$

Для доказательства этой формулы удобно воспользоваться рекуррентной формулой для многочленов Лежандра, выражающей $P_{l+1}(t)$ через $P_l(t)$ и $P_{l-1}(t)$. Доказательство такой формулы в свою очередь легко следует из нижеследующего разложения, которое представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 10. Для любых $\rho : 0 \leq \rho < 1$ справедливо разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\rho+\rho^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(t)\rho^l, \quad \forall t \in [-1,1], \quad (65)$$

причём это разложение допускает почленное дифференцирование по ρ и по t произвольное число раз.

Определение 5. Функцию $(1-2t\rho+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}$ называют производящей функцией для многочленов Лежандра.

Доказательство леммы 10. Функция $\frac{1}{|x-y|}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяет уравнению Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}^3$ для $x \neq y$. Положим $y = (0,0,1)$ и выразим $\frac{1}{|x-y|}$ как функцию x в сферической системе:

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{1-2\rho \cos \theta + \rho^2}}, \quad \rho = |x|, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (66)$$

Разложим эту функцию при каждом фиксированном θ в ряд Тейлора по степеням ρ . Покажем, что радиус сходимости такого ряда не меньше 1 (на самом деле равен 1).

Для этого воспользуемся ТФКП. Рассмотрим при каждом фиксированном $\theta \in [0, \pi]$ квадратный трёхчлен $\omega(z, \theta) = 1 - 2z \cos \theta + z^2 = (1 - e^{i\theta}z)(1 - e^{-i\theta}z)$, где z — комплексная переменная, $z \in \mathbb{C}$. Как известно, функция

$$h(w) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{-\frac{1}{2}} w^k, \quad C_k^\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!},$$

представимая степенным рядом в правой части с радиусом сходимости, равным 1, является регулярной ветвью в круге $|w| < 1$ двузначной функции $\left\{1/(1-w)^{\frac{1}{2}}\right\}$, причём такой, что $h(u) = 1/\sqrt{1-u}$ при $0 \leq u < 1$, где $\sqrt{1-u}$ — арифметический корень из положительного числа.

Поэтому функция

$$g(z, \theta) = h(e^{i\theta}z) \cdot h(e^{-i\theta}z) \quad (67)$$

является регулярной ветвью в круге $|z| < 1$, при фиксированном θ , двузначной функции $\left\{1/(1-2z \cos \theta + z^2)^{1/2}\right\}$ такой, что $g(\rho, \theta) = 1/\sqrt{1-2\rho \cos \theta + \rho^2}$ при $0 \leq \rho < 1$, последний корень является корнем арифметическим из положительной величины. Действительно, $g(z, \theta)$ регулярна по z при $|z| < 1$, $g^2(z, \theta) = (h(e^{i\theta}z))^2(h(e^{-i\theta}z))^2 = (1 - e^{i\theta}z)^{-1}(1 - e^{-i\theta}z)^{-1} = (1 - 2z \cos \theta + z^2)^{-1}$ и для $0 \leq \rho < 1$ $g(\rho, \theta) = h(e^{i\theta}\rho) \cdot h(e^{-i\theta}\rho) = h(e^{i\theta}\rho) \cdot \overline{h(e^{i\theta}\rho)} = |h(e^{i\theta}\rho)|^2 > 0$ (поскольку коэффициенты Тейлора $C_k^{-\frac{1}{2}}$ функции h действительные).

Из представления (67) следует, что $g(z, \theta)$ имеет непрерывные частные производные по комплексной переменной z и по действительной переменной θ на множестве $\{z : |z| < 1\} \times \{\theta : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ (в регулярную функцию $h(w)$ подставляются функции, обладающие таким свойством и берётся произведение двух таких суперпозиций).

Воспользуемся теперь следующим предложением.

Предложение 4. Пусть $g(z, t)$ — функция, регулярная в круге $|z| < R$ при каждом действительном $t \in [\alpha, \beta]$, сама и все её частные производные по комплексной переменной z и действительной переменной t являются непрерывными функциями z и t на множестве $\{z : |z| < R\} \times \{t : \alpha \leq t \leq \beta\}$. Тогда в разложении этой функции в ряд Тейлора

$$g(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) z^k, \quad |z| < R, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (68)$$

коэффициенты $a_k(t) \in C^\infty([\alpha, \beta])$, и это разложение допускает почленное дифференцирование по z и по t произвольное число раз.

Доказательство. Как известно из ТФКП, коэффициенты $a_k(t)$ представимы контурными интегралами

$$a_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R_1} \frac{g(\xi, t)}{\xi^{k+1}} d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (69)$$

где R_1 — произвольное, удовлетворяющее неравенству $0 < R_1 < R$. Поскольку $\frac{1}{\xi^{k+1}} \frac{\partial^p}{\partial t^p} g(\xi, t) \in C(\{\xi : |\xi| = R_1\} \times \{t : \alpha \leq t \leq \beta\})$, то дифференцирования под знаком интеграла в представлении (68) законны и $a_k(t)$ дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$ произвольное число раз.

Покажем далее, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^p}{dt^p} a_k(t) z^k, \quad (70)$$

полученный почленным дифференцированием ряда (68) p раз по переменной t , $p \geq 0$ — произвольное целое, сходится равномерно по z и t на всяком множестве $\{z : |z| \leq r\} \times \{t : \alpha \leq t \leq \beta\}$, $0 < r < R$. В самом деле, для фиксированного $r < R$ возьмём в представлении (69) R_1 , удовлетворяющим

условию $r < R_1 < R$. На ограниченном замкнутом множестве $\{\xi : |\xi| = R_1\} \times \{t : \alpha \leq t \leq \beta\}$ функция $\frac{\partial^p}{\partial t^p} g(\xi, t)$ непрерывна, а потому (по теореме Вейерштрасса) ограничена по модулю некоторой постоянной $M_p : \left| \frac{\partial^p}{\partial t^p} g(\xi, t) \right| \leq M_p, |\xi| = R_1, t \in [\alpha, \beta]$. Поэтому, пользуясь (69), можем оценить:

$$\left| \frac{d^p}{dt^p} a_k(t) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \oint_{|\zeta|=R_1} \frac{\partial^p}{\partial t^p} g(\zeta, t) \frac{1}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{M_p}{2\pi R_1^{k+1}} \int_{|\xi|=R_1} ds = \frac{M_p}{R_1^k}.$$

Следовательно, члены ряда (70) можем оценить по модулю на множестве $|z| \leq r, \alpha \leq t \leq \beta$ членами числовой последовательности:

$$\left| \frac{d^p}{dt^p} a_k(t) z^k \right| \leq M_p \left(\frac{r}{R_1} \right)^k.$$

Поскольку числовой ряд $M_p \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R_1} \right)^k$ сходится при $r < R_1$, по признаку Вейерштрасса ряд (70) сходится равномерно по z и t при $|z| \leq r, t \in [\alpha, \beta]$.

Перейдём к окончанию доказательства предложения 4. То, что разложение (68) допускает почленное дифференцирование по z , — хорошо известный результат ТФКП. То, что разложение (68) можно почленно дифференцировать и по t произвольное число раз, следует из хорошо известной теоремы математического анализа, поскольку установлено, что ряды (70) для любого $p \geq 0$ сходятся равномерно по $t \in [\alpha, \beta]$ (при каждом фиксированном $z : |z| < R$). Предложение 4 доказано.

Вернёмся к доказательству разложения (65). Разложим функцию (66), которая равна $g(\rho, \theta)$, где $g(z, \theta)$ определена (67), в ряд Тейлора в точке $\rho = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(\theta) \rho^l, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

где, согласно предложению 4, $a_l(\theta) = C^\infty([0, \pi])$, причём это разложение можно почленно дифференцировать по ρ и θ произвольное число раз. Поскольку функция (66), как функция x , гармоническая в шаре $|x| < 1$, получаем

$$0 \equiv \Delta_x \left(\frac{1}{|x - y|} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{da_l(\theta)}{d\theta} \right) + l(l+1)a_l(\theta) \right] \rho^{l-2}$$

Приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях ρ , находим, что функции $a_l(\theta) \in C^\infty([0, \pi])$ являются решениями уравнений (41) с $m = 0$. Но тогда, как было доказано выше $a_l(\theta) = c_l P_l(\cos \theta)$, где c_l — некоторые постоянные.

Итак, установлено, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos \theta) \rho^l, \quad 0 \leq \rho < 1.$$

Определим коэффициенты c_l подстановкой в последнее соотношение $\theta = 0$. Тогда, используя, что $P_l(1) = 1$, получаем:

$$\frac{1}{1 - \rho} = \sum_{l=0}^{\infty} \rho^l = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(1) \rho^l = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \rho^l.$$

Отсюда следует, что $c_l = 1 \quad \forall l \geq 0$. Итак, с подстановкой $t = \cos \theta$ разложение (65) установлено.

Лемма 11. Для многочленов Лежандра $P_l(t)$ имеет место рекуррентная формула

$$(l+1)P_{l+1}(t) - (2l+1)tP_l(t) + lP_{l-1}(t) \equiv 0, \quad t \in [-1, 1], \quad l \geq 0. \quad (71)$$

Доказательство. Дифференцируя по ρ разложение (65), умножая полученное соотношение на $(1 - 2t\rho + \rho^2)$

и пользуясь опять формулой (65), получим тождество

$$(t - \rho) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(t) \rho^l = (1 - 2t\rho + \rho^2) \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(t) \rho^{l-1}.$$

Приравнивая в этом соотношении коэффициенты при одинаковых степенях переменной ρ , приходим к формуле (71).

Перейдём к доказательству формулы (64). Начнём со случая $m = 0$ (при этом $P_l^0(t) = P_l(t)$). Выражая по формуле (71) $P_l(t)$ через $P_{l-1}(t)$ и $P_{l-2}(t)$ и пользуясь уже установленной ортогональностью многочленов Лежандра (леммой 8), находим, что

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l^2(t) dt &= \frac{(2l-1)}{l} \int_{-1}^1 P_l(t) t P_{l-1}(t) dt - \\ &\quad - \frac{(l-1)}{l} \int_{-1}^1 P_l(t) P_{l-2}(t) dt = \\ &= \frac{(2l-1)}{l} \int_{-1}^1 t P_l(t) P_{l-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь ещё раз воспользуемся формулой (71) и выразим $t P_l(t)$ через $P_{l+1}(t)$ и $P_{l-1}(t)$. Получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l^2(t) dt &= \frac{(2l-1)(l+1)}{(2l+1)l} \int_{-1}^1 P_{l+1}(t) P_{l-1}(t) dt + \\ &\quad + \frac{(2l-1)}{(2l+1)} \int_{-1}^1 P_{l-1}^2(t) dt = \\ &= \frac{(2l-1)}{(2l+1)} \cdot \int_{-1}^1 P_{l-1}^2(t) dt. \end{aligned}$$

Наконец, воспользуемся этим рекуррентным соотношением и тем, что $\int_{-1}^1 P_0^2(t) dt = \int_{-1}^1 dt = 2$. Получим окончательно

$$\int_{-1}^1 P_l^2(t) dt = \frac{(2l-1)}{(2l+1)} \cdot \frac{(2l-3)}{(2l-1)} \cdots \frac{1}{3} \int_{-1}^1 P_0^2(t) dt = \frac{2}{2l+1}.$$

Установим далее (64) при $m \geq 1$ — целом. Используя формулу (57), интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (P_l^m(t))^2 dt &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^m P_l^{(m)}(t) P_l^{(m)}(t) dt = \\ &= (1-t^2)^m P_l^{(m-1)}(t) P_l^{(m)}(t) \Big|_{-1}^1 - \\ &\quad - \int_{-1}^1 P_l^{(m-1)}(t) \left[(1-t^2)^m P_l^{(m)}(t) \right]' dt. \end{aligned} \quad (72)$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю. Выразим $\left[(1-t^2)^m P_l^{(m)}(t) \right]'$ с помощью уравнения (53) через $P_l^{(m-1)}(t)$.

$P_l^{(m)}(t)$ в силу леммы 6 удовлетворяет уравнению (53). Умножив это уравнение на $(1-t^2)^m$, имеем

$$\begin{aligned} (1-t^2)^{m+1} P_l^{(m+2)}(t) - (m+1)2t(1-t^2)^m P_l^{(m+1)}(t) = \\ = (m^2 + m - l^2 - l)(1-t^2)^m P_l^{(m)}(t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left[(1-t^2)^{m+1} P_l^{(m+1)}(t) \right]' = -(l-m)(l+m+1)(1-t^2)^m P_l^{(m)}(t).$$

Заменяя здесь $(m+1)$ на m и подставляя получившееся выражение в (72), приходим к рекуррентной формуле (относительно m):

$$\int_{-1}^1 (P_l^m(t))^2 dt = (l+m)(l-m+1) \int_{-1}^1 (P_l^{m-1}(t))^2 dt.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (P_l^m(t))^2 dt &= (l+m)(l-m+1) \times (l+m-1)(l-m+2) \times \\
 &\quad \times \dots \times (l+1)l \int_{-1}^1 P_l^2(t) dt = \\
 &= (l+m)(l-m+1) \dots (l-m+1) \cdot \frac{2}{(2l+1)} = \\
 &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{(2l+1)}.
 \end{aligned}$$

Итак, формула (64) установлена. С этой формулой установлена и формула (61).

Линейная независимость при каждом $l \geq 0$ системы (60) из $(2l+1)$ сферических функций является непосредственным следствием леммы 7. В самом деле, эта система — ортогональная система функций, скалярные квадраты которых отличны от нуля, а такая система линейно независима. Следовательно, система (60) при фиксированном l — максимальная линейно независимая система сферических функций веса l , система же (60) с $l = 0, 1, 2, \dots$ — это линейно независимая система всех сферических функций в $\mathbb{R}^3$ (точнее на $S_1 \subset \mathbb{R}^3$). Оказывается, что эта система является базисом в пространстве функций $L_2(S_1)$. Пространство $L_2(S_1)$ определяется как пространство функций на S_1 , каждая из которых измерима по Лебегу на S_1 (мы можем для простоты ограничиться, например, требованием, чтобы функция была кусочно-непрерывна и имела конечное число особых точек) и для каждой из которых конечна норма

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)_{S_1}},$$

где скалярное произведение $(u, v)_{S_1}$ определено (16). А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой $u(x) \in L_2(S_1)$ частичные суммы $\sum_N(x)$ ряда Фурье функции $u(x)$ по сферической системе (60)

$$\sum_N(x) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l c_l^m Y_l^m(x), \quad x \in S_1,$$

где

$$c_l^m = \frac{(u, Y_l^m)_{S_1}}{(Y_l^m, Y_l^m)_{S_1}} \quad (73)$$

— коэффициенты Фурье, сходятся по норме пространства $L_2(S_1)$ к функции $u(x)$, т.е.

$$\int_{S_1} \left| u(x) - \sum_N(x) \right|^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Доказательство этой теоремы мы здесь не имеем возможности привести. Результатам о поточечной сходимости рядов Фурье по сферическим функциям, а также по различным свойствам самих сферических функций посвящена специальная литература, см., например, [5].

§ 6. Применение сферических функций для решения краевых задач для уравнения Лапласа в областях со сферической симметрией

Приведём здесь общую формальную схему метода Фурье решения таких задач. Рассмотрим сначала задачу Дирихле в шаровом слое $\Omega = \{x : r < |x| < R\} \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$, $R < \infty$: найти $u(x)$ в Ω , удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (74)$$

и граничному условию Дирихле

$$u|_{\Gamma_1} = u_1(x), \quad u|_{\Gamma_2} = u_2(x), \quad (75)$$

где $\Gamma_1 = \{x : |x| = r\}$ и $\Gamma_2 = \{x : |x| = R\}$ — внутренняя и внешняя компоненты границы шарового слоя Ω , $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — заданные, например, непрерывные функции на Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Обозначим, как и выше, через $\hat{u}(\rho, \theta, \varphi)$ выражение решения задачи в сферической системе. Разложим (мысленно) $\hat{u}(\rho, \theta, \varphi)$ при каждом фиксированном ρ в ряд Фурье по системе сферических функций (59):

$$\hat{u}(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{u}_l^m(\rho) \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi). \quad (76)$$

Подставим формально это разложение в уравнение (74), записанное в сферической системе, и получим

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\left(\frac{d^2}{d\rho^2} \hat{u}_l^m(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \hat{u}_l^m(\rho) \right) \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\hat{u}_l^m(\rho)}{\rho^2} \hat{\Delta}'_{\theta, \varphi} \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi) \right] = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{d^2}{d\rho^2} \hat{u}_l^m(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \hat{u}_l^m(\rho) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \hat{u}_l^m(\rho) \right) \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi) \equiv 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Далее, подстановка разложения (76) в граничные условия приводит ещё к двум равенствам

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{u}_l^m(r) \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi) = \hat{u}_1(r, \theta, \varphi), \\ & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{u}_l^m(R) \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi) = \hat{u}_2(R, \theta, \varphi), \end{aligned} \quad (78)$$

где $\hat{u}_1(r, \theta, \varphi)$ и $\hat{u}_2(R, \theta, \varphi)$ — выражения функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в сферической системе. Разложим функции $\hat{u}_1(r, \theta, \varphi)$ и $\hat{u}_2(R, \theta, \varphi)$

(они — функции только θ и φ) в ряды Фурье по сферической системе (59):

$$\begin{aligned}\hat{u}_1(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{1;l}^m \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi), \\ \hat{u}_2(R, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{2;l}^m \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi).\end{aligned}\tag{79}$$

В общем случае коэффициенты Фурье $a_{1;l}^m$ и $a_{2;l}^m$ можно найти по формуле (73). Во всяком случае мы их считаем известными величинами.

Обращаясь к соотношению (77), заключаем (в силу ортогональности сферических функций), что все коэффициенты в нём при сферических гармониках обращаются в нуль при всех $\rho : r < \rho < R$. Кроме того, подставляя разложения (79) ещё и в правые части равенств (78) и приравнивая коэффициенты при одинаковых сферических гармониках, приходим к следующей счётной системе уже несвязанных между собой краевых задач для коэффициентов Фурье $\hat{u}_l^m(\rho)$:

$$\frac{d}{d\rho^2} \hat{u}_l^m(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \hat{u}_l^m(\rho) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \hat{u}_l^m(\rho) = 0, \quad r < \rho < R, \tag{80}$$

$$\hat{u}_l^m(r) = a_{1;l}^m, \quad \hat{u}_l^m(R) = a_{2;l}^m, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad |m| \leq l. \tag{81}$$

Каждая такая задача имеет единственное решение. В самом деле, т.к. уравнение (80) — однородное уравнение Эйлера, линейно независимые решения следует искать в виде $\hat{u}_l^m(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя эту функцию в уравнение, приходим к квадратному уравнению для μ :

$$\mu(\mu + 1) - l(l + 1) = 0.$$

Последнее уравнение имеет два решения $\mu_1 = l$, $\mu_2 = -(l + 1)$. Поэтому

$$\hat{u}_l^m(\rho) = c_{1;l}^m \rho^l + c_{2;l}^m \rho^{-(l+1)}, \tag{82}$$

где $c_{1;l}^m$ и $c_{2;l}^m$ — некоторые постоянные, которые нужно определить из граничных условий (81). Используя эти граничные условия, приходим для каждого l и каждого m к следующей системе 2-х уравнений для $c_{1;l}^m$ и $c_{2;l}^m$:

$$\begin{aligned} r^l c_{1;l}^m + r^{-(l+1)} c_{2;l}^m &= a_{1;l}^m, \\ R^l c_{1;l}^m + R^{-(l+1)} c_{2;l}^m &= a_{2;l}^m. \end{aligned} \quad (83)$$

Определитель этой системы отличен от нуля:

$$\delta_l = \begin{vmatrix} r^l & r^{-(l+1)} \\ R^l & R^{-(l+1)} \end{vmatrix} = -\frac{R^l}{r^{l+1}} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{2l+1} \right) < 0,$$

поскольку $0 < \frac{r}{R} < 1$. Решая системы (83), находим постоянные $c_{1;l}^m$ и $c_{2;l}^m$, далее по формуле (82) функции $\hat{u}_l^m(\rho)$, а затем по формуле (76) и решение задачи Дирихле (74), (75) в шаровом слое.

Перейдём, наконец, к рассмотрению задачи Дирихле ещё в шаре и вне шара.

Задача Дирихле в шаре радиуса $R > 0$

Формулировка задачи изменится следующим образом. В уравнении (74) областью Ω является шар $|x| < R$, а граничные условия (75) заменятся на одно условие

$$u|_{\Gamma} = u_0(x), \quad \Gamma = \partial\Omega = \{x : |x| = R\}. \quad (84)$$

Решение u этой задачи, выраженное в сферической системе опять мысленно разлагаем при каждом фиксированном ρ , $0 < \rho < R$, в ряд Фурье (76) по сферическим функциям. Вместо граничных условий (78) с (79) имеем одно граничное условие

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{u}_l^m(R) \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi) = \hat{u}_0(R, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^m \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi),$$

где a_l^m — коэффициенты Фурье граничной функции $\hat{u}_0(R, \theta, \varphi)$ по сферической системе (59).

Действуя как и для случая сферического слоя, приходим для каждого $l = 0, 1, 2, \dots$ и каждого $|m| \leq l$ к уравнению (80) и одному граничному условию

$$\hat{u}_l^m(R) = a_l^m. \quad (85)$$

Но общее решение уравнения (80) имеет вид (82) и зависит от двух постоянных $c_{1;l}^m$ и $c_{2;l}^m$. Нужно ещё одно условие на $\hat{u}_l^m(\rho)$, чтобы однозначно определить эти две постоянные.

Таким вторым условием является условие ограниченности функции $\hat{u}_l^m(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$. Покажем это. Поскольку решение $u(x)$ заведомо принадлежит $C(\bar{\Omega})$, то оно ограничено в Ω (в силу теоремы Вейерштрасса), т.е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|\hat{u}(\rho, \theta, \varphi)| \leq M \quad \forall \rho, \theta, \varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Функции $\hat{u}_l^m(\rho)$ являются коэффициентами Фурье по сферической системе функций $\hat{u}(\rho, \theta, \varphi)$ при каждом фиксированном ρ . В силу формулы (73) для коэффициентов Фурье и формулы (16) для скалярного произведения имеем

$$\hat{u}_l^m(\rho) = \frac{1}{(\hat{Y}_l^m, \hat{Y}_l^m)_{S_1}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta. \quad (86)$$

Но функция $\hat{Y}_l^m(\theta, \varphi)$ является ограниченной при $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, т.е. $|\hat{Y}_l^m(\theta, \varphi)| \leq M_l^m$ — некоторая постоянная. Поэтому при всех $\rho : 0 < \rho \leq R$ мы можем оценить

$$\begin{aligned} |\hat{u}_l^m(\rho)| &\leq M \cdot M_l^m \frac{1}{(\hat{Y}_l^m, \hat{Y}_l^m)_{S_1}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{4\pi M M_l^m}{(\hat{Y}_l^m, \hat{Y}_l^m)_{S_1}}. \end{aligned} \quad (87)$$

Таким образом, ограниченность $\hat{u}_l^m(\rho)$ на $(0, R]$ установлена.

Обратимся теперь к формуле (82) для $\hat{u}_l^m(\rho)$. Если бы коэффициент $c_{2;l}^m$ не обращался бы в нуль, тогда, поскольку $-(l+1) \leq -1$, $l \geq 0$, мы бы имели, что $\hat{u}_l^m(\rho) \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$, что противоречит только что установленной ограниченности функции $\hat{u}_l^m(\rho)$. Поэтому

$$\hat{u}_l^m(\rho) = c_{1;l}^m \rho^l.$$

Подставляя это выражение в граничное условие (85), определяем постоянную $c_{1;l}^m$:

$$c_{1;l}^m = \frac{a_l^m}{R^l}.$$

Окончательно приходим к следующему выражению для решения задачи Дирихле в шаре (в сферической системе)

$$\hat{u}(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^m \left(\frac{\rho}{R}\right)^l \cdot \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi).$$

Задача Дирихле во внешности шара радиуса $r > 0$

В уравнении (74) областью Ω теперь является множество $\Omega = \{x : |x| > r\}$. При этом ищется решение $u(x)$, стремящееся к нулю на бесконечности

$$u(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (88)$$

и удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{\Gamma} = u_0(x), \quad \Gamma = \partial\Omega = \{x : |x| = r\}. \quad (89)$$

Совершенно аналогично уже рассмотренным случаям получаем, что решение этой задачи имеет представление (в сферической системе) (76), где коэффициенты $\hat{u}_l^m(\rho)$ являются решениями на полубесконечном интервале $(r, +\infty)$ уравнений (80) и удовлетворяют граничному условию

$$\hat{u}_l^m(r) = a_l^m, \quad (90)$$

где a_l^m — коэффициенты Фурье в разложении функции $\hat{u}_0(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^m \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi)$ по сферической системе (59).

Вторым условием, позволяющим однозначно определить каждую из функций $\hat{u}_l^m(\rho)$, является условие стремления к нулю на ∞ :

$$\hat{u}_l^m(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty.$$

В самом деле, используя выражение (86), можем получить оценку, аналогичную (87), с заменой постоянной M на функцию $M(\rho) = \max_{\theta, \varphi} |\hat{u}(\rho, \theta, \varphi)|$. В силу условия (88) $M(\rho) \rightarrow 0$, а вместе с этим и $|\hat{u}_l^m(\rho)| \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$. Использование этого условия в представлении (82) общего решения уравнения (80) позволяет однозначно определить первый коэффициент: $c_{1;l}^m = 0$.

Обращаясь к граничному условию (90), однозначно определяем и $c_{2;l}^m$ и в результате приходим к следующей формуле (в сферической системе) для решения внешней задачи Дирихле:

$$\hat{u}(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^m \left(\frac{r}{\rho} \right)^{l+1} \hat{Y}_l^m(\theta, \varphi).$$

Можно показать, что при условии непрерывности граничной функции, которая задаётся, во всех рассматриваемых случаях получающиеся для решения ряды (76) сходятся, причём со всеми производными равномерно во всякой подобласти, которая с замыканием содержится в исходной области Ω , и дают классическое решение задачи Дирихле из $C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (с условием (88) в случае внешней задачи).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
3. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. I. Основные операции анализа. – М.: ГИФМЛ, 1963.
4. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958.
5. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: ИЛ, 1952.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Оператор Лапласа в сферической системе	4
§ 2. Оператор Лапласа–Бельтрами на сфере и его свойства. Сферические и шаровые функции	9
§ 3. Подсчёт максимального числа линейно независимых сферических функций веса l	22
§ 4. Выражение сферических функций в сферической системе координат. Уравнение Лежандра	28
§ 5. Ортогональность сферических функций и функций Лежандра. Производящая функция и рекуррентное соотношение. Базисность	36
§ 6. Применение сферических функций для решения краевых задач для уравнения Лапласа в областях со сферической симметрией	46
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	53