

**СБОРНИК
ЗАДАЧ
И ПРИМЕРОВ**

**ПО ТЕОРИИ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

В. А. ОЛЕЙНИКОВ, Н. С. ЗОТОВ,
А. М. ПРИШВИН, Н. В. СОЛОВЬЕВ

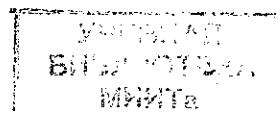
621-52
с-23

СБОРНИК
ЗАДАЧ
И ПРИМЕРОВ
ПО ТЕОРИИ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ

49304-69

(оптимальное, экстремальное
и программное управление)
Под ред. проф. А. В. ФАТЕЕВА

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов, обучающихся
по специальности «Автоматика и телемеханика»



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1969

ПРЕДИСЛОВИЕ

Олейников В. А., канд. техн. наук, и др. Сборник задач и примеров по теории автоматического управления (оптимальное, экстремальное и программное управление) «Высшая школа», 10 л. Стр. 200.

Задачник состоит из трех частей. В первой части собраны примеры и задачи по оптимальному управлению, которые решаются методами принципа максимума, динамического программирования и классического вариационного исчисления. Основное внимание уделяется расчету алгоритмов управления. Во второй части даются примеры и задачи из области экстремального управления. Основной упор здесь делается на анализ качества экстремальных систем различными способами. В третьей части рассматриваются примеры и задачи по программному управлению. Большинство задач посвящается синтезу систем с помощью логической алгебры.

Сборник содержит около 100 примеров и задач. В качестве примера берется типовая задача управления и проводится ее полное решение. Далее даётся несколько задач, варьирующих рассмотренный пример, для самостоятельной работы. Приведенные задачи носят не абстрактный характер, а являются конкретными приложениями к различным областям техники.

Учебное пособие предназначается для электротехнических, энергетических и политехнических вузов и факультетов. Может быть использовано студентами и аспирантами, изучающими указанные разделы теории управления.

Рисунков 78. Таблиц 40. Библиографий 21.

Рецензенты:

кафедра автоматики и телемеханики МЭИ;
проф. Н. И. Соколов и доц. Г. А. Степанянц

Теория автоматического управления непрерывно развивается. Наряду с теорией линейных, нелинейных и дискретных систем успешно развивается и находит практическое применение теория оптимальных, самонастраивающихся и программных систем. По теории линейных, нелинейных и дискретных систем имеются сборники примеров и задач (В. И. Анисимов, А. А. Вавилов, А. В. Фатеев «Сборник примеров и задач по линейной теории автоматического регулирования»; В. А. Бесекерский, И. П. Пальтов, Е. А. Фабрикант, С. М. Федоров, П. И. Чинаев «Сборник задач по теории автоматического регулирования»). Предлагаемый сборник примеров и задач, посвященный теории оптимальных, экстремальных и программных систем управления, является естественным продолжением и развитием учебных пособий по теории управления.

Цель сборника — помочь студентам на практических примерах и расчетах закрепить знания, полученные в теоретических курсах. Большинство примеров содержит подробные решения. Это покажет примерный объем вычислительной работы, который для решения большинства задач не превышает 2—3 часов. Помимо решенных примеров имеются задачи и для самостоятельного решения.

Сборник примеров и задач составлен применительно к разделу курса автоматического управления (оптимальные, экстремальные и программные системы), читаемого авторами студентам ряда специальностей в Ленинградском электротехническом институте им. В. И. Ульянова (Ленина). Однако все примеры и задачи подобраны и сформулированы таким образом, что их можно использовать для практических занятий в любом вузе.

Сборник состоит из трех глав.

В первой главе помещены примеры и задачи по оптимальному управлению. Большинство из них посвящено оптимальному быстродействию, поскольку теория оптимального управления помогает создать быстродействующие измерительные и самопишущие приборы, регуляторы, качественные следящие системы, системы управления производственными процессами и движущимися объектами.

Во второй главе даются примеры и задачи по расчету экстремальных систем, которым принадлежит большое будущее. Как по-

цессы имеют экстремальные характеристики. Часто работа в области экстремума дает значительный экономический эффект. Поэтому из широкого класса самонастраивающихся систем были выбраны примеры именно из области экстремальных.

В третьей главе подобраны задачи по программному управлению. Основное внимание уделено синтезу рациональных структур программных систем на базе логической алгебры.

Предлагаемый сборник, содержащий примеры и задачи по новым разделам теории автоматического управления, выпускается впервые. Поэтому он, конечно, не свободен от погрешностей методического и иного порядка. Авторы с признательностью встретят пожелания и замечания по его содержанию.

Авторы выражают признательность заведующему кафедрой автоматики и телемеханики ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), заслуженному деятелю науки и техники РСФСР, профессору А. В. Фатееву, по инициативе которого был написан сборник, и доцентам кафедры А. А. Вавилову и Л. П. Смольникову за многочисленные и плодотворные дискуссии, которые помогли уточнить содержание сборника и его построение. Авторы благодарны за решение задач аспирантам Д. И. Ликерману (7, 19), Л. П. Карташовой (20, 21, 23) и Манодж Кумар Гхош (62).

Авторы также благодарны рецензентам Н. И. Соколову и Г. А. Степанянцу, сделавшим ряд полезных замечаний, учтенных при доработке рукописи.

Авторы

ГЛАВА I

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

§ 1. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

Задача 1. Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU. \quad (1)$$

Данное уравнение характеризует объект, состоящий из интегрирующего и инерционного звеньев, соединенных последовательно.

Уравнением (1) приближенно описываются многие объекты управления: маломощные электрические следящие системы постоянного и переменного тока, двигатели которых управляются электронными усилителями, некоторые тепловые объекты, у которых регулирующий орган имеет интегрирующий электрический, гидравлический или пневматический привод; транспортные механизмы, двигатели которых управляются напряжением сети, и т. д.

Требуется найти алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = 0, \dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n, \dot{x} = 0$ за минимальное время; на управляющее воздействие наложено ограничение $|U| \leq U_{\max}$.

Решение. Обозначив $\frac{dx}{dt} = x_1$, запишем уравнение (1) в виде системы двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= kU; \\ \frac{dx}{dt} &= x_1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Систему (2) приведем к нормальному виду и обозначим

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{T} (kU - x_1) = f_1; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 = f_2. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Используя (3), составляем уравнения для сопряженных переменных ϕ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\phi_1}{dt} = - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \phi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \phi_2 \right] = \\ = - \left[\frac{\partial \frac{1}{T} (kU - x_1)}{\partial x_1} \phi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \phi_2 \right] = \frac{1}{T} \phi_1 - \phi_2; \\ \frac{d\phi_2}{dt} = - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \phi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x} \phi_2 \right] = \\ = - \left[\frac{\partial \frac{1}{T} (kU - x_1)}{\partial x} \phi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial x} \phi_2 \right] = 0. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Из уравнений (4) находим решения для функций ϕ_1 и ϕ_2 :

$$\left. \begin{array}{l} \phi_2 = C_1; \\ \phi_1 = -e^{\frac{t}{T}} \left[\int C_1 e^{-\frac{t}{T}} dt + C_2 \right] = C_0 - C_2 e^{\frac{t}{T}}. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Составим гамильтониан

$$H = \phi_1 \frac{1}{T} (kU - x_1) + \phi_2 x_1. \quad (6)$$

Учитывая значения ϕ_1 и ϕ_2 , полученные в системе (5), и рассматривая только член, зависящий от U , находим

$$H' = \phi_1 \frac{1}{T} kU = \left(C_0 - C_2 e^{\frac{t}{T}} \right) \frac{1}{T} kU. \quad (7)$$

Чтобы гамильтониан имел максимальное значение, как это требуется по принципу максимума, необходимо соблюсти равенство $U = U_{\max}$. Тогда

$$H'_{\max} = \left(C_0 - C_2 e^{\frac{T}{T}} \right) \frac{k}{T} U_{\max}. \quad (8)$$

Далее необходимо, чтобы U_{\max} меняло столько раз свой знак, сколько его меняет функция $\phi_1 = C_0 - C_2 e^{\frac{t}{T}}$:

$$\sigma = \operatorname{sign} \phi_1(t) = \operatorname{sign} \left(C_0 - C_2 e^{\frac{t}{T}} \right). \quad (9)$$

Отсюда следует, что оптимальное управление $U(t)$ является кусочно-постоянной функцией, которая принимает значения $\pm U_{\max}$ и имеет не более двух интервалов постоянства, так как функция ϕ_1 при любых значениях C_0 и C_2 не более одного раза меняет знак на отрезке времени T . Учитывая сказанное, получаем алгоритм управления

$$U(t) = \sigma U_{\max},$$

где $\sigma = \pm 1$.

После окончания управления $U = 0$. Отметим, что при определенной совокупности граничных условий управление может иметь и один интервал.

Задача 2. Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = kU, \quad (1)$$

Данное уравнение характеризует объект, состоящий из двух последовательно соединенных инерционных звеньев. Подобным уравнением приближенно описываются многие объекты управления: двигатели постоянного тока, управляемые генераторами, магнитными усилителями, электромашинными усилителями; маломощные двигатели переменного тока, управляемые магнитными усилителями; теплообменники и т. д.

Требуется найти алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = 0, \dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n, \dot{x} = 0$ за минимальное время, на управляющее воздействие наложено ограничение: $|U| \leq U_{\max}$.

Решение. Запишем уравнение (1) в виде системы двух уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = kU; \\ T_2 \frac{dx}{dt} + x = x_1. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Систему (2) приведем к нормальному виду и обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{T_1} (kU - x_1) = f_1; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{T_2} (x_1 - x) = f_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Используя уравнения системы (3), составим уравнения для сопряженных переменных ϕ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 \right] = \\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{T_1} (kU - x_1) \right) \psi_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{T_2} (x_1 - x) \right) \psi_2 \right] = \\ &= -\left[\frac{1}{T_1} \psi_1 - \frac{1}{T_2} \psi_2; \right. \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x} \psi_2 \right] = \\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T_1} (kU - x_1) \right) \psi_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T_2} (x_1 - x) \right) \psi_2 \right] = \\ &= \left. + \frac{1}{T_2} \psi_2. \right\} \quad (4) \end{aligned} \right.$$

Из уравнений (4) находим решения для ψ_1 и ψ_2 :

$$\left. \begin{aligned} \psi_2 &= C_0 e^{\frac{t}{T_2}}; \\ \psi_1 &= -e^{\frac{t}{T_1}} \left[\int \frac{1}{T_2} C_0 e^{\frac{t}{T_2}} dt + C_1 \right] = \\ &= C_1 e^{\frac{t}{T_1}} - C_2 e^{\frac{t}{T_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Составим функцию Гамильтона

$$H = \psi_1 \frac{1}{T_1} (kU - x_1) + \psi_2 \frac{1}{T_2} (x_1 - x). \quad (6)$$

Рассматривая только член, зависящий от U , и учитывая значения ψ_1 и ψ_2 , получим из выражения (6)

$$H' = \psi_1 \frac{1}{T_1} kU = \left(C_1 e^{\frac{t}{T_1}} - C_2 e^{\frac{t}{T_1}} \right) \frac{k}{T_1} U. \quad (7)$$

Чтобы гамильтониан имел максимальное значение, как это требуется по принципу максимума, необходимо соблюсти равенство $U = U_{\max}$ и обеспечить изменение знака U_{\max} столько раз, сколько его меняет функция ψ_1 . Иначе можно записать, что

$$H'_{\max} = \left(C_1 e^{\frac{t}{T_1}} - C_2 e^{\frac{t}{T_1}} \right) \frac{k}{T_1} U_{\max}, \quad (8)$$

т. е. управление будет определяться соотношением

$$U(t) = \sigma U_{\max},$$

$$\text{где } \sigma = \text{sign} \left(C_1 e^{\frac{t}{T_1}} - C_2 e^{\frac{t}{T_1}} \right).$$

Так как функция $\psi_1(t)$ при любых значениях C_1 и C_2 не более одного раза меняет знак на отрезке времени τ , то закон изменения

$$U(t) = \sigma U_{\max},$$

где $\sigma = \pm 1$.

После окончания управления необходимо управляющее воздействие сделать равным $U_n = \frac{x_n}{k}$.

Отметим, что при определенной совокупности граничных условий управление может иметь и один интервал.

Задача 3. Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^3 x}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU. \quad (1)$$

Данное уравнение характеризует объект управления, состоящий из последовательно соединенных интегрирующего и двух инерционных звеньев. Таким уравнением описываются, как правило, мощные следящие системы и транспортные механизмы, выполненные по системе генератор—двигатель; сложные тепловые объекты, у которых управляющий орган имеет интегрирующий привод, и т. д.

Требуется найти алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = 0, \dot{x} = 0, \ddot{x} = 0$ при $t = 0$ в по-

ложение $x = x_n$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$ за минимальное время; на управляющее воздействие наложено ограничение: $|U| \leq U_{\max}$.

Решение. Уравнение (1) можно записать в виде системы трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= kU; \\ T_2 \frac{dx_2}{dt} + x_2 &= x_1; \\ \frac{dx}{dt} &= x_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Систему (2) приведем к нормальному виду и обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{T_1} (kU - x_1) = f_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{T_2} (x_1 - x_2) = f_2; \\ \frac{dx}{dt} &= x_2 = f_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Используя выражения системы (3), составим уравнения для сопряженных переменных ψ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \psi_3 \right] = \\ &= \frac{1}{T_1} \psi_1 - \frac{1}{T_2} \psi_2; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \psi_3 \right] = \\ &= \frac{1}{T_2} \psi_2 - \psi_3; \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x} \psi_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x} \psi_3 \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из системы (4) находим решения для ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 :

$$\psi_3 = C_1;$$

$$\psi_2 = C_0 - C_2 e^{\frac{t}{T_2}};$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -e^{\frac{t}{T_1}} \left[\int \frac{1}{T_2} \left(C_0 - C_2 e^{\frac{t}{T_2}} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} dt + C_3 \right] = \\ &= C'_0 + C'_2 e^{\frac{t}{T_2}} - C_3 e^{\frac{t}{T_1}}. \end{aligned}$$

Составим гамильтониан

$$H = \psi_1 \frac{1}{T_1} (kU - x_1) + \psi_2 \frac{1}{T_2} (x_1 - x_2) + \psi_3 x_2.$$

Рассмотрим член, зависящий от U ,

$$H' = \psi_1 \frac{k}{T_1} U = \left(C'_0 + C'_2 e^{\frac{t}{T_2}} - C_3 e^{\frac{t}{T_1}} \right) \frac{k}{T_1} U.$$

Чтобы функция Гамильтона имела максимальное значение, как это требуется по принципу максимума, необходимо соблюсти равенство $U = U_{\max}$ и обеспечить изменение знака U_{\max} столько раз, сколько его будет меняться функция ψ_1 . Следовательно, алгоритм управления

$$U(t) = \sigma U_{\max},$$

$$\text{где } \sigma = \text{sign } \psi_1(t) = \text{sign} \left(C'_0 + C'_2 e^{\frac{t}{T_2}} - C_3 e^{\frac{t}{T_1}} \right).$$

Так как функция $\psi_1(t)$ при любых значениях C'_0 , C'_2 , C_3 не более двух раз меняет знак на отрезке времени t , то закон изменения

$$U(t) = \sigma U_{\max},$$

$$\text{где } \sigma = \begin{cases} +1, \\ -1. \end{cases}$$

После окончания управления $U = 0$.

Отметим, что при некоторой совокупности граничных условий управление может иметь один и два интервала управления.

Решения задач приведены для овладения принципом максимума.

К рассмотренным задачам можно применить также теорему об n интервалах и не пользоваться принципом максимума.

Задача 4. Объект управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = k_1 U; \\ \frac{dx}{dt} + f(x) = k_2 x_1. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Данная система уравнений описывает объект управления, включающий интегрирующее звено и нелинейное инерционное звено первого порядка. Система (1) характеризует многие объекты управления, в состав которых входят заслонки, задвижки, клапаны (с интегрирующим электрическим, гидравлическим и пневматическим приводом) и аппараты типа дробилок, мельниц, резервуаров и т. д.

Функцию $f(x)$ можно представить в виде члена x^n , где n лежит в пределах от 0 до ∞ . Примем, что $f(x) = k_3 \sqrt{x}$ (резервуар со свободным истечением вещества). Тогда систему (1) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = k_1 U = f_1; \\ \frac{dx}{dt} = k_2 x_1 - k_3 \sqrt{x} = f_2. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Требуется найти алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = 0, \dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n, \dot{x} = 0$ за минимальное время; на управляющее воздействие наложено ограничение: $|U| \leq U_{\max}$.

Решение. Используя выражения системы (2), запишем уравнения для сопряженных переменных ψ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\psi_1}{dt} = - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 \right] = -k_2 \psi_2; \\ \frac{d\psi_2}{dt} = - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x} \psi_2 \right] = \frac{k_3}{2\sqrt{x}} \psi_2. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Находим из уравнений системы (3) решения для ψ_1 и ψ_2 :

$$\left. \begin{array}{l} \psi_2 = C_1 e^{\int \frac{k_3}{2\sqrt{x}} dt}; \\ \psi_1 = -k_2 C_1 \int e^{\int \frac{k_3}{2\sqrt{x}} dt} dt + C_2. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Трудность теперь заключается в том, что в функции ψ_1 и ψ_2 входит координата $x(t)$, которая меняется в интервале управления. Закон ее изменения пока неизвестен. Однако, учитывая, что x_1 меняется с постоянной скоростью ($x_1 = k_1 U t$), примем в первом приближении, что и $x(t)$ пропорционально времени, т. е. $x(t) = t$. Тогда

$$\int \frac{k_3}{2\sqrt{t}} dt = \frac{k_3}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = k_3 t^{\frac{1}{2}}.$$

При этом функция

$$\psi_1 = -k_2 C_1 \int e^{k_3 \sqrt{t}} dt + C_2. \quad (5)$$

Интегрируя (5), получим

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 = -\frac{2k_2}{k_3} C_1 \left[\sqrt{t} e^{k_3 \sqrt{t}} - \frac{1}{k_3} e^{k_3 \sqrt{t}} \right] + C_2 = \\ = C_0 e^{k_3 \sqrt{t}} + C_2 - C_3 \sqrt{t} e^{k_3 \sqrt{t}} = \\ = e^{k_3 \sqrt{t}} (C_0 - C_3 \sqrt{t}) + C_2. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Составляем гамильтониан

$$H = \psi_1 k_1 U + \psi_2 (k_2 x_1 - k_3 \sqrt{x}).$$

Рассматриваем член, содержащий U ,

$$H' = \psi_1 k_1 U = [e^{k_3 \sqrt{t}} (C_0 - C_3 \sqrt{t}) + C_2] k_1 U.$$

Чтобы функция H' имела максимальное значение, необходимо соблюсти равенство $U = U_{\max}$ и обеспечить изменение знака U_{\max} столько раз, сколько его будет менять функция ψ_1 . Следовательно, закон изменения $U(t)$ выразится зависимостью

$$U(t) = \sigma U_{\max},$$

где

$$\sigma = \operatorname{sign} \psi_1(t) = \operatorname{sign} [e^{k_3 \sqrt{t}} (C_0 - C_3 \sqrt{t}) + C_2].$$

Функция $\psi_1(t)$ при любых значениях C_0, C_2 и C_3 не более одного раза меняет знак на отрезке времени t , поэтому закон изменения

$$U(t) = \sigma U_{\max},$$

где $\sigma = \pm 1$.

После окончания управления $U = 0$.

Задача 5. Объект управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = k_1 U; \\ x_2 = k_2 x_1^2; \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{T} (k_3 x_2 - x). \end{array} \right\} \quad (1)$$

Система (1) характеризует объект, состоящий из интегрирующего, нелинейного и инерционного звеньев. Такой системой может, например, описываться тепловой объект, у которого клапан имеет параболическую рабочую характеристику.

Требуется найти алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = 0, \dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n, \dot{x} = 0$ за минимальное время; на управляющее воздействие наложено ограничение: $|U| \leq U_{\max}$.

Решение. Приведем систему (1) к двум уравнениям:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = k_1 U = f_1; \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{T} (k_3 k_2 x_1^2 - x) = f_2. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Используя выражения системы (2), запишем уравнения для сопряженных функций ψ :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 \right] = - \frac{2k_3 k_2}{T} x_1 \psi_2; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x} \psi_2 \right] = - \frac{1}{T} \psi_2. \end{aligned}$$

Находим решения для функций ψ :

$$\begin{aligned} \psi_2 &= C_1 e^{\frac{t}{T}}; \\ \psi_1 &= \int - \frac{2k_3 k_2}{T} x_1 \psi_2 dt + C_2 = \int - \frac{2k_3 k_2}{T} x_1 C_1 e^{\frac{t}{T}} dt + C_2. \end{aligned}$$

В выражение для ψ_1 входит координата x_1 , которая меняется по линейному закону ($x_1 = kU t$). Примем $x_1 = t$, тогда функция

$$\begin{aligned} \psi_1 &= - \int \frac{2k_3 k_2 C_1}{T} t e^{\frac{t}{T}} dt + C_2 = \\ &= - \frac{2k_3 k_2 C_1}{T} T^2 e^{\frac{t}{T}} \left(\frac{t}{T} - 1 \right) + C_2 = - C'_1 t e^{\frac{t}{T}} + \\ &\quad + C_3 e^{\frac{t}{T}} + C_2 = e^{\frac{t}{T}} (C_3 - C'_1 t) + C_2. \end{aligned}$$

Из функции Гамильтона выделим член, зависящий от U :

$$H' = \psi_1 k_1 U = \left[e^{\frac{t}{T}} (C_3 - C'_1 t) + C_2 \right] k_1 U.$$

Основываясь на предыдущих выводах, можно записать, что

$$\begin{aligned} U(t) &= \operatorname{sign} \psi_1(t) U_{\max} = \\ &= \operatorname{sign} \left[e^{\frac{t}{T}} (C_3 - C'_1 t) + C_2 \right] U_{\max} = \sigma U_{\max}, \end{aligned}$$

где $\sigma = \pm 1$.

Функция $\psi_1(t)$ при любых значениях C'_1, C_2, C_3 может не более одного раза менять знак на интервале времени t .

После окончания управления $U = 0$.

Задача 6. Объект управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} J \frac{dx_1}{dt} = \frac{k_1 x_1 U}{x_1^2 + x_{10}^2}; \\ \frac{dx}{dt} = x_1. \end{array} \right\}$$

Указанной системой уравнений описываются некоторые технологические объекты и следящие системы, содержащие асинхронные короткозамкнутые двигатели. Определить алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = 0, \dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n, \dot{x} = 0$ за минимальное время; на управляющее воздействие наложено ограничение: $|U| \leq U_{\max}$.

Примечание: для решения задачи использовать [Л.1].

Задача 7. Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k \left(T_1 \frac{du}{dt} + U \right), \quad (1)$$

где $T_1 > T$.

Подобным уравнением приближенно описываются некоторые тепловые объекты, например нагревательные печи, определенные типы теплообменников, регуляторы и т. д.

Требуется найти алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = x_n$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = 0$, $\dot{x} = 0$ за минимальное время при ограничении управляющего воздействия $|U| \leq U_{\max}$.

Решение. Непосредственно применить принцип максимума к уравнению (1) нельзя, так как не только высшая производная, но и первая производная может претерпевать разрывы. Для устранения этой трудности используем следующий прием.

Применим метод разложения на множители, запишем уравнение (1) в виде двух уравнений с новыми координатами y_1 и y_2 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= kU = f_1; \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{1}{T} y_2 + \frac{k_1 k}{T} U = f_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Таким образом, имеем фиктивную систему, состоящую из двух параллельно соединенных звеньев. Новые координаты y_1 и y_2 уже не претерпевают нежелательных разрывов. Выходная координата равна сумме новых координат y_1 и y_2

$$x = y_1 + y_2. \quad (3)$$

Уравнение (3) является уравнением прямой линии в новых координатах y_1 , y_2 . По условию задачи в конце новых координат $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, поэтому прямая линия проходит через начало координат, т. е. $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$. С переходом к новым координатам изменилась и цель управления: необходимо попасть на прямую (3) и по ней сместиться в начало координат.

Указанная задача сводится к задаче с подвижным правым концом, т. е. за минимальное время из начального состояния y_{10} , y_{20} попасть на прямую (3).

Запишем уравнения для сопряженных функций ψ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \psi_2 \right] = 0; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial y_2} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \psi_2 \right] = -\frac{1}{T} \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из системы (4) находим функции ψ :

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= C_0; \\ \psi_2 &= C_1 e^{-\frac{t}{T}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Запишем условие трансверсальности на правом конце [Л. 5]

$$-\alpha\psi_1 + \alpha\psi_2 = 0, \quad (6)$$

где α ($\alpha \neq 0$) — касательный вектор прямой (3).

Подставляя в выражение (6) значения ψ_1 и ψ_2 , получим

$$-\alpha C_0 + \alpha C_1 e^{-\frac{t_1}{T}} = 0, \quad (7)$$

откуда

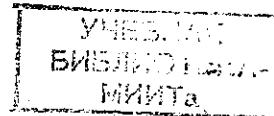
$$C_1 = C_0 e^{-\frac{t_1}{T}}.$$

Подставляя во второе уравнение системы (5) значение C_1 , получаем

$$\psi_2 = C_0 e^{-\frac{t_1}{T}} e^{\frac{t}{T}} = C_0 e^{\frac{t-t_1}{T}}.$$

Составляем гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= \dot{\psi}_1 kU + \dot{\psi}_2 \left(\frac{k_1 k}{T} U - \frac{1}{T} y_2 \right) = \\ &= C_0 kU + C_0 \frac{k_1 k}{T} U e^{\frac{t-t_1}{T}} - \frac{C_0}{T} e^{\frac{t-t_1}{T}} y_2. \end{aligned}$$



Группируем члены, зависящие от U :

$$H' = C_0 k \left(1 + \frac{k_1}{T} e^{\frac{t-t_1}{T}} \right) U.$$

Для максимума функции H' требуется выполнение условия $U = U_{\max}$ и соответствие знаков U и функции

$$\left(1 + \frac{k_1}{T} e^{\frac{t-t_1}{T}} \right).$$

Управляющее воздействие имеет один интервал знакопостоянства, так как функция $\left(1 + \frac{k_1}{T} e^{\frac{t-t_1}{T}} \right)$ знака не меняет.

Таким образом, закон изменения

$$U(t) = \text{sign} \left(1 + \frac{k_1}{T} e^{\frac{t-t_1}{T}} \right) U_{\max} = \sigma U_{\max},$$

где $\sigma = -1$.

Знак «-» указывает на то, что система тормозится.

Количество интервалов зависит от соотношения постоянных времени T и T_1 : если $T_1 > T$, то получается один интервал управления; если $T_1 < T$, то при некоторых начальных условиях получается два интервала управления; если $T_1 = 0$, то при любых начальных условиях получается два интервала, что соответствует задаче 1.

Задача 8. Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = T_3 \frac{du}{dt} + kU,$$

где $T_3 > T_1$, $T_3 > T_2$.

Найти алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n$, $\dot{x} = 0$ за минимальное время при ограничении управляющего воздействия: $|U| \leq U_{\max}$.

Примечание: задача решается методом, изложенным в задаче 7.

Задача 9. Объект управления описывается следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} J \frac{dx_1}{dt} &= kU; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Подобная система уравнений уже рассматривалась в задаче 1. Здесь введем некоторые ограничения, которые усложняют нахождение алгоритма управления.

Требуется найти алгоритм управления, переводящий систему из положения $x_1 = 0$, $x_2 = x_{2n}$ при $t = 0$ в положение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ за минимальное время τ при ограничении $Q = \int_0^\tau k_2 U^2 dt \leq Q_0$.

Практически такие задачи встречаются при управлении мощными приводами прокатных станов, подъемных машин; химическими реакциями с выделением или поглощением тепла и т. д. Данную задачу решим тремя способами: классическим вариационным исчислением, принципом максимума и динамическим программированием.

Решение задачи классическим вариационным исчислением. Запишем условия оптимального управления аналитически в следующем виде:

$$J_1 = \int_0^\tau dt = \min;$$

$$J_2 = \int_0^\tau x_1 dt = x_{2n};$$

$$J_3 = \int_0^\tau k_2 U^2 dt = Q \leq Q_0.$$

Для решения задачи нужно найти экстремаль функционала

$$J = \int_0^\tau (F + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2) dt = \int_0^\tau \Phi dt, \quad (2)$$

где λ_1 и λ_2 — множители Лагранжа;

$$F = 1, G_1 = x_1 \text{ и } G_2 = k_2 U^2.$$

Учитывая введенные обозначения и то, что $U = \frac{J}{k} \frac{dx_1}{dt}$, получим

$$\begin{aligned} J &= \int_0^t (1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 k_2 U^2) dt = \\ &= \int_0^t \left(1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 \frac{k_2 J^2}{k^2} \dot{x}_1^2 \right) dt = \int_0^t (1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 k_3 \dot{x}_1^2) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Записываем уравнение Эйлера для функционала (2)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} = \lambda_1 - 2\lambda_2 k_3 \ddot{x}_1 = 1 - 2\lambda_0 k_3 \ddot{x}_1 = 0 \quad (4)$$

или

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{1}{2\lambda_0 k_3},$$

где $\lambda_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Решая уравнение, имеем

$$x_1 = \frac{1}{4\lambda_0 k_3} t^2 + C_1 t + C_0. \quad (5)$$

Зная закон изменения координаты x_1 и используя уравнения объекта (1), находим

$$U = \frac{J}{k} \frac{dx_1}{dt} = \frac{J}{k} \left(\frac{1}{2\lambda_0 k_3} t + C_1 \right) = \frac{1}{2\lambda_0 k_2} t + \frac{J}{k} C_1.$$

Таким образом, для достижения заданных условий оптимальности управляющее воздействие U должно меняться по линейному закону.

Решение задачи с помощью принципа максимума с учетом дополнительного ограничения $|U| \leq U_{\max}$.

Обозначим

$$x_3 = \int_0^t k_2 U^2 dt.$$

Запишем систему (1) с учетом новой координаты:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{k}{J} U = k_1 U = f_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 = f_2; \\ \frac{dx_3}{dt} &= k_2 U^2 = f_3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

На основании уравнений системы (6) составляем уравнения для сопряженных переменных ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \psi_3 \right] = \psi_2; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \psi_3 \right] = 0; \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \psi_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \psi_3 \right] = 0. \end{aligned}$$

Проинтегрировав полученные уравнения, будем иметь

$$\psi_2 = C_2, \quad \psi_1 = C_2 t + C_1, \quad \psi_3 = C_3.$$

Составляем гамильтониан

$$H = \psi_1 k_1 U - \psi_2 x_1 + \psi_3 k_2 U^2.$$

Определяем закон управления $U(t)$, который обеспечивает цель управления при указанных выше ограничениях. Для этого преобразуем гамильтониан

$$H = \psi_3 k_2 \left[U + \frac{\psi_1 k_1}{2k_2 \psi_3} \right]^2 - \frac{\psi_1^2 k_1^2}{4k_2 \psi_3} - \psi_2 x_1.$$

При фиксированных значениях x_1 и ψ_i максимум H будет зависеть от соотношения слагаемых в квадратных скобках, поэтому

$$U(t) = \begin{cases} -\frac{\psi_1 k_1}{2k_2 \psi_3} & \text{при } \left| \frac{\psi_1 k_1}{2k_2 \psi_3} \right| \leq U_{\max}; \\ +U_{\max} & \text{при } \frac{\psi_1 k_1}{2k_2 \psi_3} > U_{\max}; \\ -U_{\max} & \text{при } \frac{\psi_1 k_1}{2k_2 \psi_3} \leq -U_{\max}. \end{cases} \quad (7)$$

Так как $\phi_1 = C_2 t + C_1$ при любых соотношениях C_1 и C_2 может менять знак не более одного раза, то при малых x_{2n} (т. е. при малых временах управления τ , когда $Q \leq Q_0$)

$$U(t) = \mp U_{\max}.$$

При больших x_{2n}

$$U(t) = -\frac{k_1 \psi_1}{2k_2 \psi_3} = -\frac{k_1}{2k_2 \psi_3} (C_2 t + C_1) = a + bt.$$

Таким образом, управляющее воздействие должно изменяться по линейному закону до значения $U = U_{\max}$, после чего оно должно поддерживаться на предельном значении.

Сравнивая результаты, полученные при решении задачи двумя разными способами, можно сделать следующий вывод. Применяя способ классического вариационного исчисления, был получен только линейный закон изменения U ; решая задачу с помощью принципа максимума, были получены более широкие пределы изменения U : релейный закон изменения или линейный с ограничением.

Решение задачи методом динамического программирования.

Составим уравнения Беллмана для критерия оптимальности $J = \int_0^t V dt$:

$$\left. \begin{aligned} V + \sum_{i=1}^n f_i(x, U) \frac{\partial S}{\partial x_i} &= 0; \\ \frac{\partial V}{\partial U} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x, U)}{\partial U} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

С учетом уравнений системы (6) уравнения Беллмана примут вид:

$$\left. \begin{aligned} 1 + k_1 U \frac{\partial S}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2} + k_2 U^2 \frac{\partial S}{\partial x_3} &= 0; \\ k_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} + 2k_2 U \frac{\partial S}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из второго уравнения системы (9) определяем

$$U = -\frac{k_1}{2k_2} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_1} / \frac{\partial S}{\partial x_3}.$$

Полученное значение U подставляем в первое уравнение системы (9), после чего имеем

$$\frac{\partial S}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_3} = \frac{k_1^2}{4k_2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) можно в общем виде записать следующим образом:

$$S = (1 + a_1 x_1)^{3/2} + a_2 x_2 + a_3 x_3. \quad (11)$$

Берем производные от решения для S по всем координатам:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{3}{2} a_1 \sqrt{1 + a_1 x_1};$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = a_2;$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_3} = a_3.$$

Подставляя полученные значения частных производных в уравнение (10), будем иметь:

$$a_3 - x_1 a_2 a_3 = \frac{9k_1^2}{16k_2} a_1^2 + \frac{9k_1^2}{16k_2} a_1^3 x_1.$$

Отсюда определяем коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 :

$$-a_2 a_3 = \frac{9k_1^2}{16k_2} a_1^3, \quad a_3 = \frac{9k_1^2}{16k_2} a_1^2.$$

Приняв $a_3 = 1$, получим:

$$a_1 = \frac{4}{3k_1} \sqrt{k_2};$$

$$a_2 = -\frac{4}{3k_1} \sqrt{k_2}.$$

Подставляя найденные значения частных производных во второе уравнение системы (9), окончательно получаем алгоритм управления

$$U = -\frac{1}{\sqrt{k_2}} \sqrt{1 + \frac{4}{3k_1} k_2 x_1} = -C_1 \sqrt{1 - C_2 x_1}.$$

Сравнивая полученное решение с предыдущими, видим, что алгоритм управления получился не в функции времени, а в функции координат системы. Если предполагается выполнять систему замкнутой, то метод динамического программирования всего быстрее приводит к цели, т. е. к определению обратных связей, необходимых для реализации оптимального управления.

Читатели могли заметить, что по трудоемкости определения алгоритма управления все три метода примерно равнозначны.

Задача 10. Объект управления описывается следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= k_1 U = f_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 = f_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Определить алгоритм управления, переводящий систему из положения $x_1 = 0, x_2 = x_{2n}$ при $t = 0$ в положение $x_1 = 0, x_2 = 0$ за фиксированное время T при ограничении $|U| \leq U_{\max}$. Задачу решить с помощью принципа максимума.

Решение. На основании системы уравнений (1) с учетом координаты $\frac{dx_0}{dt} = k_2 U^2$, которую нужно минимизировать, составляем уравнения для сопряженных переменных ϕ :

$$\frac{d\phi_0}{dt} = - \left[\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \phi_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \phi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_0} \phi_2 \right] = 0;$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = - \left[\frac{\partial f_0}{\partial x_1} \phi_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \phi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \phi_2 \right] = \psi_2;$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = - \left[\frac{\partial f_0}{\partial x_2} \phi_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \phi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \phi_2 \right] = 0.$$

Проинтегрировав полученные уравнения, будем иметь:

$$\phi_0 = C_0;$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= C_2; \\ \phi_1 &= C_2 t + C_1. \end{aligned}$$

Составим гамильтониан

$$H = \phi_1 k_1 U - \phi_2 x_1 + \phi_0 k_2 U^2.$$

После преобразований гамильтониан

$$H = \phi_0 k_2 \left(U + \frac{\psi_1 k_1}{2\phi_0 k_2} \right)^2 - \frac{\psi_1^2 k_1^2}{4\phi_0 k_2} - \phi_2 x_1.$$

Получили такое же выражение для гамильтониана, как и в задаче 9, поэтому закон изменения $U(t)$ будет таким же, т. е. при малых значениях x_{2n} функция $U(t) = \pm U_{\max}$ при больших значениях x_{2n} функция $U(t) = a + bt$.

Задача 11. Объект управления описывается следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= k_1 U = f_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 = f_2. \end{aligned} \right\}$$

Определить алгоритм управления, позволяющий зафиксированное время T достичь максимума x_{2n} при ограничении $Q_0 = \int_0^T k_2 U^2 dt$. Задачу решить методом классического вариационного исчисления.

Ответ. Алгоритм управления аналогичен полученным в задачах 9 и 10.

Задача 12. Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, U) = a_1 x_1 + m U.$$

Требуется найти закон управления, переводящий систему из положения $x_1 = x_{10}$ при $t = 0$ в положение $x_1 = 0$ при $t \rightarrow \infty$ и доставляющий минимум интегралу

$$J = \int_0^\infty V dt = \int_0^\infty (\alpha_1 x_1^2 + c U^2) dt.$$

Данная задача получила название аналитического конструирования регуляторов.

Решение методом классического вариационного исчисления. Рассматриваемая задача относится к задаче Лагранжа на условный экстремум, в которой уравнение объекта является уравнением связи.

Уравнение связи

$$F(x_1, U) = \dot{x}_1 - a_1 x_1 - mU = 0.$$

Для решения задачи составим функцию

$$\Phi = V + \lambda F(x_1, U) = \alpha_1 x_1^2 + cU^2 + \lambda (\dot{x}_1 - a_1 x_1 - mU) \quad (1)$$

где λ — множитель Лагранжа.

Далее необходимо определить закон изменения U , при котором функционал

$$J_1 = \int_0^\infty \Phi dt$$

будет принимать минимальное значение. Для этого переменные x_1 , λ , U должны удовлетворять уравнениям Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} &= 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial U} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{U}} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая уравнение (1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= 2\alpha_1 x_1 - a_1 \lambda; \\ U &= \frac{m}{2c} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Присоединяя к системе (2) уравнение связи (объекта), запишем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 + \frac{m^2}{2c} \lambda, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= 2\alpha_1 x_1 - a_1 \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решение системы (3) будет следующим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t}; \\ \lambda &= k_1 C_1 e^{\mu_1 t} + k_2 C_2 e^{\mu_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные;
 k_1 и k_2 — коэффициенты, определяемые из системы (3) при подстановке решения для x_1 ;
 μ_1 и μ_2 — корни характеристического уравнения системы (3), причем $\operatorname{Re} \mu_1 = -\operatorname{Re} \mu_2$; для определенности будем считать, что $\operatorname{Re} \mu_1 < 0$, $\operatorname{Re} \mu_2 > 0$.

Так как система управления должна быть устойчивой, то можно принять $C_2 = 0$. Тогда из системы (4) определяем

$$\lambda = k_1 x_1,$$

$$\text{где } k_1 = \frac{\mu_1 - a_1}{m^2/2c}.$$

Учитывая второе уравнение системы (2), получим закон управления

$$U = \frac{m}{2c} k_1 x_1.$$

Таким образом, для оптимального управления необходимо охватить объект жесткой линейной обратной связью по координате x_1 . Полученное решение справедливо только в линейной области, т. е. в области $|U| < |U_{\max}|$.

Решение задачи с помощью принципа максимума при введении дополнительного ограничения $|U| \leq |U|_{\max}$.

Введем дополнительную координату x_0 , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dx_0}{dt} = V = f_0(x, U).$$

Запишем систему уравнений с учетом координаты x_0 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \alpha_1 x_1^2 + cU^2, \\ \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 + mU. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Составим уравнения для сопряженных переменных ψ :

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_0}{dt} &= -\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \psi_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \psi_1\right) = 0; \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1} \psi_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1\right) = -2\alpha_1 x_1 \psi_0 - a_1 \psi_1.\end{aligned}$$

Функция Гамильтона

$$H = \psi_0 \frac{dx_0}{dt} + \psi_1 \frac{dx_1}{dt} = \psi_0 (\alpha_1 x_1^2 + cU^2) + \psi_1 (a_1 x_1 + mU).$$

Выпишем слагаемые, содержащие U :

$$H' = \psi_0 cU^2 + \psi_1 mU. \quad (6)$$

Так как выражение (6) достигает максимума одновременно с H , то будем искать закон управления, доставляющий максимум H' . Преобразуем (6)

$$\psi_0 cU^2 + \psi_1 mU = \psi_0 c \left(U + \frac{\psi_1 m}{2\psi_0 c} \right)^2 - \frac{m^2}{4\psi_0 c} \psi_1^2.$$

Принимая $\psi_0 = -1$, получим, что оптимальное управление определяется следующим образом:

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2c} m\psi_1 & \text{при } \left| \frac{1}{2c} m\psi_1 \right| \leqslant U_{\max}; \\ U_{\max} & \text{при } \frac{1}{2c} m\psi_1 \geqslant U_{\max}; \\ -U_{\max} & \text{при } \frac{1}{2c} m\psi_1 \leqslant -U_{\max}. \end{cases} \quad (7)$$

Определим зависимость $\psi_1 = f(x_1)$ для получения закона управления в виде $U(t) = \varphi(x_1)$. Для этого запишем систему уравнений, состоящую из уравнения объекта и сопряженного уравнения, подставляя при этом выражение $U(t) = \frac{1}{2c} m\psi_1$ при $\left| \frac{1}{2c} m\psi_1 \right| \leqslant U_{\max}$:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 + \frac{m^2}{2c} \psi_1; \\ \frac{d\psi_1}{dt} = 2\alpha_1 x_1 - a_1 \psi_1. \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) полностью совпадает с системой (3), если учесть, что роль множителей Лагранжа в принципе максимума выполняют переменные ψ_i . Поэтому решение дальше выполняется так же, как и при способе классического вариационного исчисления.

Решение задачи методом динамического программирования

Для решения задачи составим функциональные уравнения Беллмана:

$$V + \sum_{i=1}^n f_i(x, U) \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0;$$

$$\frac{\partial V}{\partial U} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x, U)}{\partial U} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0.$$

Учитывая условия задачи, получим:

$$\alpha_1 x_1^2 + cU^2 + (a_1 x_1 + mU) \frac{\partial S}{\partial x_1} = 0; \quad (9)$$

$$2cU + m \frac{\partial S}{\partial x_1} = 0. \quad (10)$$

Из уравнения (10) определяем

$$U = -\frac{m}{2c} \frac{\partial S}{\partial x_1}. \quad (11)$$

Подставим выражение (11) в уравнение (9)

$$\alpha_1 x_1^2 + a_1 x_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} - \frac{m^2}{4c} \left[\frac{\partial S}{\partial x_1} \right]^2 = 0. \quad (12)$$

Получили нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных. Решение для функции S необходимо искать в виде определено-положительной квадратичной формы координат, т. е.

$$S = \sum_{i, j=1}^n A_{i, j} x_i x_j.$$

Для данной задачи

$$\dot{S} = A_{11} x_1^2.$$

Далее необходимо определить коэффициент A_{11} , для чего найдем

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 2A_{11} x_1$$

и подставим в (12)

$$\alpha_1 x_1^2 + 2\alpha_1 A_{11} x_1^2 - \frac{m^2}{c} A_{11}^2 x_1^2 = 0.$$

Из полученного уравнения определим

$$A_{11} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_1 m^2/c}}{-m^2/c}.$$

Из двух значений A_{11} необходимо выбрать положительное, т. е.

$$A_{11} = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_1 m^2/c}}{m^2/c},$$

при $\alpha_1 < 0$.

Согласно (11), запишем закон управления

$$U = -\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_1 m^2/c}}{m} x_1.$$

§ 2. РАСЧЕТ АЛГОРИТМОВ И ПРОЦЕССОВ ДЛЯ РАЗОМКНУТЫХ СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

Задача 13. Дан объект управления, описываемый уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU, \quad (1)$$

где $T = 0,62$ сек; $k = 0,0023$; $|U| \leq U_{\max} = 220$ ед.

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 2,09$ ед., $\dot{x} = 0$ за минимальное время.

Из задачи 1 известно, что алгоритм управления будет состоять из двух интервалов управления $\pm U_{\max}$. Определить моменты переключения t_1 и t_2 и оптимальный переходный процесс $x(t)$.

Решение.

1. Определение моментов переключения.

Моменты переключения определяются функцией оптимального управления

$$t_i = f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \bar{x}_0; \bar{x}_n; U_{\max}).$$

Для нахождения этой функции применим метод стыкования решений дифференциальных уравнений со знакопеременной правой частью [Л. 2].

Решение уравнения (1) на первом интервале управления

$$x(t) = C'_0 t + C'_1 + C'_2 e^{-\alpha t},$$

где $C'_0 = kU$, C'_1 и C'_2 — постоянные интегрирования на первом интервале управления;

$-\alpha = -\frac{1}{T}$ — корень характеристического уравнения.

Используя начальные условия при $t = 0$ ($x = 0$, $\dot{x} = 0$), определяем постоянные интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} x &= C'_1 + C'_2 = 0; \\ \dot{x} &= C'_0 - \alpha C'_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad C'_0 = kU \quad (2)$$

Из системы (2) находим:

$$\left. \begin{aligned} C'_1 &= -\frac{kU}{\alpha}; \\ C'_2 &= \frac{kU}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решение уравнения (1) на втором интервале управления

$$x(t) = C''_0 t + C''_1 + C''_2 e^{-\alpha t},$$

где $C''_0 = -kU$, C''_1 и C''_2 — постоянные интегрирования на втором интервале управления.

Используя условия на конец управления при $t = t_2$ ($x = x_n$, $\dot{x} = 0$), определяем постоянные интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} x_n &= C''_0 t_2 + C''_1 + C''_2 e^{-\alpha t_2}; \\ \dot{x} &= C''_0 - \alpha C''_2 e^{-\alpha t_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из системы (4) определяем:

и подставим в (12)

$$\alpha_1 x_1^2 + 2a_1 A_{11} x_1^2 - \frac{m^2}{c} A_{11}^2 x_1^2 = 0.$$

Из полученного уравнения определим

$$A_{11} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + \alpha_1 m^2/c}}{-m^2/c}.$$

Из двух значений A_{11} необходимо выбрать положительное, т. е.

$$A_{11} = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + \alpha_1 m^2/c}}{m^2/c},$$

при $a_1 < 0$.

Согласно (11), запишем закон управления

$$U = -\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + \alpha_1 m^2/c}}{m} x_1.$$

§ 2. РАСЧЕТ АЛГОРИТМОВ И ПРОЦЕССОВ ДЛЯ РАЗОМКНУТЫХ СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

Задача 13. Дан объект управления, описываемый уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU, \quad (1)$$

где $T = 0,62$ сек; $k = 0,0023$; $|U| \leq U_{\max} = 220$ ед.

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 2,09$ ед., $\dot{x} = 0$ за минимальное время.

Из задачи 1 известно, что алгоритм управления будет состоять из двух интервалов управления $\pm U_{\max}$. Определить моменты переключения t_1 и t_2 и оптимальный переходный процесс $x(t)$.

Решение.

1. Определение моментов переключения.

Моменты переключения определяются функцией оптимального управления

$$t_i = f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \bar{x}_0, \bar{x}_n; U_{\max}).$$

Для нахождения этой функции применим метод стыкования решений дифференциальных уравнений со знакопеременной правой частью [Л. 2].

Решение уравнения (1) на первом интервале управления

$$x(t) = C'_0 t + C'_1 + C'_2 e^{-\alpha t},$$

где $C'_0 = kU$, C'_1 и C'_2 — постоянные интегрирования на первом интервале управления;

$-\alpha = -\frac{1}{T}$ — корень характеристического уравнения.

Используя начальные условия при $t = 0$ ($x = 0$, $\dot{x} = 0$), определяем постоянные интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} x &= C'_1 + C'_2 = 0; \\ \dot{x} &= C'_0 - \alpha C'_2 = 0. \end{aligned} \right\} C'_0 = 0, C'_2 = 0. \quad (2)$$

Из системы (2) находим:

$$\left. \begin{aligned} C'_1 &= -\frac{kU}{\alpha}; \\ C'_2 &= \frac{kU}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решение уравнения (1) на втором интервале управления

$$x(t) = C''_0 t + C''_1 + C''_2 e^{-\alpha t},$$

где $C''_0 = -kU$, C''_1 и C''_2 — постоянные интегрирования на втором интервале управления.

Используя условия на конец управления при $t = t_2$ ($x = x_n$, $\dot{x} = 0$), определяем постоянные интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} x_n &= C''_0 t_2 + C''_1 + C''_2 e^{-\alpha t_2}; \\ \dot{x} &= C''_0 - \alpha C''_2 e^{-\alpha t_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из системы (4) определяем:

$$\left. \begin{array}{l} C_1' = x_n + kU t_2 + \frac{kU}{\alpha}; \\ C_2' = -\frac{kU}{\alpha e^{-\alpha t_2}}. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Стыкуем решения в момент переключения t_1 :

$$\left. \begin{array}{l} C_0' t_1 + C_1' + C_2' e^{-\alpha t_1} = C_0'' t_1 + C_1'' + C_2'' e^{-\alpha t_1}; \\ C_0' - \alpha C_2' e^{-\alpha t_1} = C_0'' - \alpha C_2'' e^{-\alpha t_1}. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Из системы (3) и (5) определяем:

$$\left. \begin{array}{l} C_1' - C_1'' = -x_n - kU t_2 - \frac{2kU}{\alpha}; \\ C_2' - C_2'' = \frac{kU}{\alpha} (1 + e^{\alpha t_2}). \end{array} \right\} \quad (7)$$

Исключая постоянные интегрирования C_1' , C_2' , C_1'' , C_2'' из системы уравнений (7), получаем два уравнения для определения моментов переключения:

$$\left. \begin{array}{l} e^{\alpha t_2} - 2e^{\alpha t_1} + 1 = 0; \\ t_2 - 2t_1 + \frac{x_n}{kU} = 0. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Определим моменты переключения. Из второго уравнения системы (8) выразим

$$t_2 = 2t_1 - \frac{x_n}{kU}. \quad (9)$$

Подставив уравнение (9) в первое уравнение системы (8), будем иметь

$$e^{\alpha(2t_1 - \frac{x_n}{kU})} - 2e^{\alpha t_1} + 1 = 0$$

или, умножив каждый член выражения на $e^{\frac{\alpha x_n}{kU}}$, получим

$$(e^{\alpha t_1})^2 - 2e^{\frac{\alpha x_n}{kU}} e^{\alpha t_1} + e^{\frac{\alpha x_n}{kU}} = 0.$$

Обозначим $e^{\alpha t_1} = y$, тогда

$$y^2 - 2e^{\frac{\alpha x_n}{kU}} y + e^{\frac{\alpha x_n}{kU}} = 0.$$

Подставляя численные значения коэффициентов, имеем

$$\frac{\alpha x_n}{kU} = \frac{1,6 \cdot 2,09}{0,0023 \cdot 220} = 6,7;$$

$$e^{6,7} = 812,4;$$

$$y^2 - 1624,8y + 812,4 = 0;$$

$$y_{1,2} = 812,4 \pm \sqrt{(812,4)^2 - 812,4};$$

$$y_1 = 1624,3; \quad y_2 = 0,5.$$

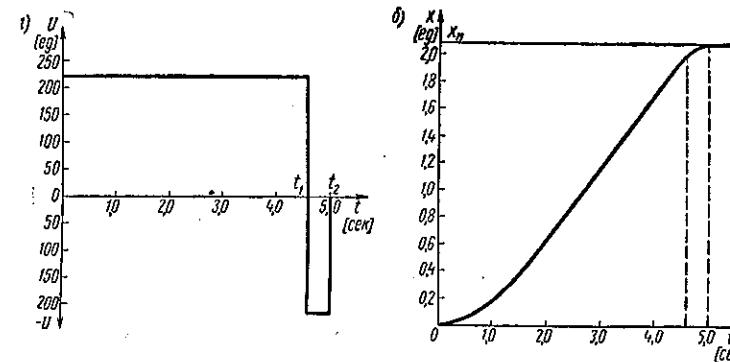


Рис. 1. Алгоритм управления (а) и оптимальная траектория (б) для системы второго порядка

Корень y_2 не является решением системы уравнений (8), так как число e в положительной степени всегда больше единицы. Поэтому $e^{\alpha t_1} = y_1$, откуда

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln y_1 = 0,62 \ln 1624,3 = 0,62 \cdot 7,42 = 4,6 \text{ сек.}$$

$$t_2 = 2t_1 - \frac{x_n}{kU} = 2 \cdot 4,6 - \frac{2,09}{0,5} = 5 \text{ сек.}$$

Алгоритм управления показан на рис. 1, а.

2. Определение оптимального процесса $x(t)$.

Решение уравнения (1) для первого интервала $0 \leq t \leq t_1$ с учетом уже известных постоянных интегрирования будет иметь вид

$$x(t) = kU t - \frac{kU}{\alpha} + \frac{kU}{\alpha} e^{-\alpha t} = \frac{kU}{\alpha} (at - 1 + e^{-\alpha t})$$

или

$$x(t) = kU t - (1 - e^{-\alpha t}) kU t.$$

Подставим численные значения параметров, тогда

$$x(t) = 0,5t - 0,31 \cdot (1 - e^{-1,6t}) \text{ при } 0 \leq t \leq 4,6.$$

Для удобства определения $x(t)$ составляем табл. 1.

Таблица 1

t	0	0,5	1,0	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,6
$e^{-1,6t}$	1	0,42	0,2	0,09	0,04	0,018	0,008			
$1 - e^{-1,6t}$	0	0,55	0,8	0,91	0,96	0,982	0,992			
$0,31(1 - e^{-1,6t})$	0	0,17	0,25	0,29	0,3	0,305	0,31	0,31	0,31	
$0,5t$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,3
$x(t)$	0	0,08	0,25	0,46	0,7	0,95	1,2	1,44	1,69	1,99

Решение уравнения (1) для второго интервала, считая условно, что он начинается с момента $t = t_1$ и длится $\Delta t = t_2 - t_1$, записывается как

$$x(t) = C'_0 t + C'_1 + C''_2 e^{-\alpha t} \text{ при } 0 \leq t \leq t_2 - t_1.$$

Определяем постоянные интегрирования при $t = 0$:

$$x_1 = C'_0 + C''_2;$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_1 = C'_0 - \alpha C''_2.$$

В момент переключения

$$x_1 = 1,98 \text{ ед.};$$

$$\dot{x}_1 = C'_0 - \alpha C''_2 e^{-\alpha t_1} = (1 - e^{-\alpha t_1}) kU = 0,5 \frac{\text{ед}}{\text{сек}}.$$

Тогда

$$C''_2 = \frac{C'_0 - \dot{x}_1}{\alpha} = -(kU + \dot{x}_1) T = -(0,5 + 0,5) \cdot 0,62 = -0,62;$$

$$C''_1 = x_1 - C''_2 = 1,98 + 0,62 = 2,6.$$

Подставляя численные значения постоянных интегрирования, имеем

$$x(t) = -0,5t + 2,6 - 0,62 e^{-1,6t} \text{ при } 0 \leq t \leq 0,4.$$

Для удобства определения $x(t)$ составляем табл. 2.

Таблица 2

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$e^{-1,6t}$	1	0,85	0,73	0,62	0,53
$0,62e^{-1,6t}$	0,62	0,53	0,456	0,378	0,33
$0,5t$	0	0,005	0,1	0,15	0,2
$0,62e^{-1,6t} + 0,5t$	0,62	0,58	0,556	0,528	0,53
$x(t)$	1,98	2,022	2,05	2,07	2,07

Проверяем производную в момент времени t_2

$$\dot{x}(t_2) = -0,5 + 0,62 \cdot 1,6 e^{-1,6 \cdot 0,4} = -0,5 + 0,52 = 0,02 \approx 0.$$

Таким образом, условия в конце управления выполнены.

Оптимальный процесс показан на рис. 1, б.

Варианты задачи 13 для самостоятельного решения
Дан объект управления, описываемый уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU.$$

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n$, $\dot{x} = 0$ за минимальное время.

Определить моменты переключения t_1 , t_2 и оптимальный переходный процесс $x(t)$.

Данные для расчета приведены в табл. 3.

Таблица 3

Параметры	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$T [\text{сек}]$	0,8 0,0025	1,0 0,005	1,2 0,005	1,5 0,0023
$U_{\max} [\text{ед.}]$	220	220	220	220
$x_n [\text{ед.}]$	2,09	4,18	2,09	2,09

Задача 14. Объект управления описывается следующей системой уравнений:
на первом интервале

$$T_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU; \quad (1)$$

на втором интервале

$$T_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -kU, \quad (2)$$

где $T_1 = 0,62$ сек; $T_2 = 1,2$ сек; $k = 0,0023$; $|U| \leq U_{\max} = 220$ ед.

Таким образом, параметры объекта будут разными на первом и втором интервалах управления. Подобные случаи встречаются довольно часто, например при торможении двигателя противовключением, когда в его якорь включается добавочное сопротивление.

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 2,09$ ед., $\dot{x} = 0$ за минимальное время. Алгоритм управления состоит из двух интервалов управления $\pm U_{\max}$. Определить моменты переключения t_1 и t_2 и оптимальный процесс $x(t)$.

Решение.

1. Определение моментов переключения.

Запишем решение на момент времени t_2 , т. е. на конец второго интервала:

$$x_n = -kU t_2 + C'_1 + C''_2 e^{-\alpha''_2 t_2};$$

$$\dot{x} = 0 = -kU - \alpha''_2 C''_2 e^{-\alpha''_2 t_2},$$

где $-\alpha''_2$ — корень характеристического уравнения (2).

Из полученных уравнений определяем:

$$C''_2 = -\frac{kU}{\alpha''_2 e^{-\alpha''_2 t_2}};$$

$$C'_1 = \frac{\alpha''_2 x_n + \alpha''_2 kU t_2 + kU}{\alpha''_2} = x_n + kU t_2 + \frac{kU}{\alpha''_2}.$$

Запишем решение на начало первого интервала, т. е. при $t = 0$:

$$x = C'_1 + C''_2 = 0;$$

$$\dot{x} = kU - \alpha'_2 C'_2 = 0,$$

где $-\alpha'_2$ — корень характеристического уравнения (1).

Из этих уравнений определяем:

$$C'_2 = -\frac{kU}{\alpha'_2};$$

$$C''_2 = \frac{kU}{\alpha''_2}.$$

Стыкуем решения в момент переключения:

$$kU t_1 + C'_1 + C''_2 e^{-\alpha''_2 t_1} = -kU t_1 + C'_1 + C''_2 e^{-\alpha''_2 t_1};$$

$$kU - \alpha'_2 C'_2 e^{-\alpha'_2 t_1} = -kU - \alpha''_2 C''_2 e^{-\alpha''_2 t_1}.$$

Исключая из уравнений постоянные интегрирования, получаем систему уравнений для определения моментов переключения:

$$2 - e^{-\alpha'_2 t_1} = e^{\alpha''_2 (t_2 - t_1)};$$

$$t_2 = 2t_1 + \frac{1}{\alpha'_2} e^{-\alpha'_2 t_1} + \frac{1}{\alpha''_2} e^{\alpha''_2 (t_2 - t_1)} - \frac{\alpha'_2 + \alpha''_2}{\alpha'_2 \alpha''_2} - \frac{x_n}{kU}.$$

Определяем численные значения коэффициентов, используя данные задачи:

$$\alpha'_2 = \frac{1}{T_1} = 1,6; \quad \alpha''_2 = \frac{1}{T_2} = 0,87; \quad kU = 0,5.$$

В цифрах уравнения примут вид:

$$2 - e^{-1,6t_1} = e^{0,87(t_2 - t_1)};$$

$$t_2 = 2t_1 + \frac{e^{-1,6t_1}}{1,6} + \frac{e^{0,87(t_2 - t_1)}}{0,87} - 6,0$$

или

$$t_2 = t_1 + \frac{\ln(2 - e^{-1,6t_1})}{0,87};$$

$$t_2 = 2t_1 + \frac{e^{-1,6t_1}}{1,6} + \frac{e^{0,87(t_2 - t_1)}}{0,87} - 6,0. \quad \left. \right\} \quad (1)$$

Для определения моментов переключения t_1 и t_2 по первому уравнению системы (1) рассчитываем зависимость $t_2 = f(t_1)$ (табл. 4), а затем методом подбора оп-

ределяем из второго уравнения системы (1) значения t_1 и t_2 .

Таблица 4

t_1	3,0	3,5	4,0	4,2	4,4	4,6
$e^{-1,6t_1}$	0,008	0,0036	0	0	0	0
$2 - e^{-1,6t_1}$	1,992	1,997	2,00	2,00	2,00	2,00
$\ln(2 - e^{-1,6t_1})$	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69
$\ln(2 - e^{-1,6t_1})$	0,86	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87
0,87						
t_2	3,86	4,37	4,87	5,07	5,27	5,47

Из табл. 4 видно, что вблизи ожидаемых моментов переключения $t_2 = t_1 + 0,87$, а следовательно, $t_2 - t_1 = 0,87$. Подставляя числа, можно из второго выражения получить момент переключения

$$t_1 = -0,87 + 2t_1 + \frac{e^{-1,6t_1}}{1,6} + \frac{e^{0,87 \cdot 0,87}}{0,87} = 6,0.$$

Член $\frac{e^{-1,6t_1}}{1,6}$ — очень мал и им можно пренебречь, тогда

$$t_1 = 0,87 + 6,0 - \frac{e^{0,69}}{0,87} = 4,44 \text{ сек};$$

$$t_2 = 5,31 \text{ сек.}$$

2. Определение оптимального процесса.

Для первого интервала при $0 \leq t \leq t_1$

$$x(t) = kU t - (1 - e^{-t/T_1}) k U T_1$$

или в цифрах

$$x(t) = 0,5t - 0,31(1 - e^{-1,6t}).$$

Расчет для различных значений t сведен в табл. 5.

Таблица 5

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	4,4
$e^{-1,6t}$	1	0,45	0,20	0,09	0,04	0,02	0,01	0,001	
$1 - e^{-1,6t}$	0	0,55	0,80	0,91	0,96	0,98	1		
$0,31(1 - e^{-1,6t})$	0	0,17	0,25	0,30	0,30	0,3	0,31	0,31	0,31
$0,5t$	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	2,0	2,2
$x(t)$	0	0,08	0,25	0,47	0,7	0,94	1,2	1,7	1,90

Для второго интервала при $t_1 \leq t \leq t_2$

$$x(t) = -kU(t - t_1) + \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{T_2}}\right)(\dot{x}_1 + kU)T_2 + x_1,$$

где \dot{x}_1 — скорость изменения управляемой координаты в момент переключения t_1 ;

x_1 — значение координаты в момент переключения t_2 .

Уравнение оптимального процесса в цифрах

$$x(t) = -0,5(t - t_1) + 1,25[1 - e^{-0,87(t-t_1)}] + 1,9.$$

Расчет для различных значений $t - t_1$ сведен в табл. 6.

Таблица 6

$t - t_1$	0	0,2	0,4	0,6	0,87
$0,87(t - t_1)$	0	0,16	0,32	0,48	0,70
$e^{-0,87(t-t_1)}$	0	0,85	0,73	0,62	0,50
$1 - e^{-0,87(t-t_1)}$	0	0,15	0,27	0,38	0,50
$1,25[1 - e^{-0,87(t-t_1)}]$	0	0,17	0,34	0,47	0,62
$0,5t$	0	0,1	0,2	0,3	0,43
$x(t)$	1,90	1,97	2,04	2,07	2,09

На рис. 2 показана оптимальная траектория.

Задача 15. Объект управления описывается уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k(U - Z), \quad (1)$$

где $T = 0,62$ сек; $k = 0,0023$; $|U| \geq U_{\max} = 220$ ед.;

$$Z = 23 \text{ ед.}$$

Член Z характеризует постоянную помеху, приведенную ко входу объекта управления. Таким уравнением, например, может описываться двигатель постоянного тока с учетом постоянного момента сопротивления.

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 2,09$ ед., $\dot{x} = 0$ за минимальное время. Алгоритм управления состоит из двух интервалов управления $\pm U_{\max}$. С изменением знака U_{\max} меняет знак и помеха Z . Определить моменты переключения t_1 и t_2 .

Решение. Обозначим $k(U - Z) = B$, тогда уравнение объекта управления

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = B.$$

При этом система уравнений для определения моментов переключения будет аналогична той, которая получена в задаче 13:

$$\left. \begin{aligned} e^{at_2} - 2e^{at_1} + 1 &= 0; \\ t_2 - 2t_1 + \frac{x_n}{B} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

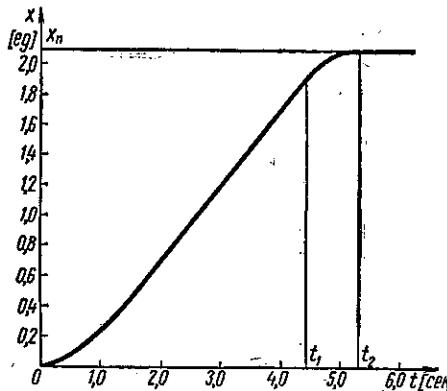


Рис. 2. Оптимальная траектория при разных значениях постоянной времени объекта на участках разгона и торможения

Решаем квадратное уравнение (см. задачу 13)

$$y^2 - 2e^{\frac{\alpha x_n}{B}} y + e^{\frac{\alpha x_n}{B}} = 0,$$

где $y = e^{at_1}$.

Подставив численные значения коэффициентов

$$x_n = 2,09; \quad B = 0,45; \quad \alpha = 1,6 \text{ и } e^{\frac{\alpha x_n}{B}} = 1719,$$

получим

$$y^2 - 3438y + 1719 = 0;$$

$$y_{1,2} = 1719 \pm \sqrt{1719^2 - 1719} = 1719 \pm \sqrt{2953242} = 1719 \pm 1718,5;$$

$$y_1 = 3437,5, \quad y_2 = 0,5.$$

Корнем уравнения может быть только y_1 , поэтому

$$e^{at_1} = y_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln y_1 = \frac{1}{1,6} \ln 3437,5 = \frac{8,15}{1,6} = 5,09 \text{ сек.}$$

Зная t_1 , определяем

$$t_2 = 2t_1 - \frac{x_n}{B} = 2 \cdot 5,09 - \frac{2,09}{0,45} = 5,5 \text{ сек.}$$

Задача 16. Объект управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений:
на первом интервале

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU; \quad (1)$$

на втором интервале

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0, \quad (2)$$

где $T = 0,62 \text{ сек.}$; $k = 0,0023$; $|U| \leq U_{\max} = 220 \text{ ед.}$

Уравнения (1) и (2) показывают, что объект управления нереверсиен; встречаются такие объекты довольно часто.

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 2,09 \text{ ед.}$, $\dot{x} = 0$ за минимальное время. Алгоритм управления состоит из одного интервала управления $+U_{\max}$. Определить момент переключения t_1 .

Решение. Записываем решение на начало управления при $t = 0$:

$$x = C'_1 + C'_2 = 0;$$

$$\dot{x} = C'_0 - \alpha C'_2 = 0;$$

$$C'_0 = kU.$$

Решение на конец управления

$$x_n = C'_1 + C'_2 e^{-\alpha t_1};$$

$$\dot{x} = -\alpha C'_2 e^{-\alpha t_1} = 0 \text{ при } t_2 = \infty.$$

Стыкуем решения на момент переключения:

$$C'_0 t_1 + C'_1 + C'_2 e^{-\alpha t_1} = C''_1 + C''_2 e^{-\alpha t_1};$$

$$C'_0 - \alpha C'_2 e^{-\alpha t_1} = -\alpha C''_2 e^{-\alpha t_1}.$$

Исключая постоянные интегрирования, получаем уравнение для определения t_1 :

$$x_n = kU t_1.$$

Подставив численные значения коэффициентов, получим

$$t_1 = \frac{x_n}{kU} = \frac{2,09}{0,0023 \cdot 220} = 4,18 \text{ сек.}$$

Время второго интервала равно бесконечности. Однако для данного управления в зоне допустимой ошибки выходной координаты, равной 5%, время переходного процесса будет минимальным по сравнению с другими видами управлений.

Задача 17. Дан объект управления, описываемый уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU,$$

где $T = 0,62$ сек; $k = 0,0023$; $|U| \leq U_{\max} = 220$ ед.

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 2,09$ ед., $\dot{x} = 0$ за минимальное время при ограничении скорости $\dot{x} \leq \dot{x}_{\max} = 0,4 \frac{\text{ед}}{\text{сек}}$. Известно [Л.2], что алгоритм управления должен состоять из двух интервалов $\pm U_{\max}$ и одного участка, на котором U пропорционально скорости ограничения \dot{x}_{\max} . Определить моменты переключения t_1 , t_2 , t_3 .

Решение. Из теории известно, что при ограничении какой-либо координаты оптимальное управление можно рассматривать как управление именно этой координатой, т. е. если в нашем примере ограничена скорость, то следует рассматривать управление скоростью, а управление выходной координатой получим на основании управления скоростью. Таким образом, необходимо максимальным управляющим воздействием $+U_{\max}$ разогнать систему до скорости ограничения \dot{x}_{\max} , далее эту ско-

рость поддерживать постоянной, а в конце управления максимальным управляющим воздействием затормозить систему, т. е. подать $-U_{\max}$. Задача сводится к определению времени разгона, торможения и движения с постоянной скоростью.

Определяем время разгона до скорости \dot{x}_{\max} . Решение уравнения, определяющего скорость, имеет вид

$$\dot{x}_{\max} = (1 - e^{-\alpha t_1}) kU = (1 - e^{-\alpha t_1}) kU_{\max},$$

где t_1 — время разгона.

Из выражения для \dot{x}_{\max} , подставив численные значения коэффициентов, определим

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{kU_{\max}}{kU_{\max} - \dot{x}_{\max}} = 0,62 \ln \frac{0,5}{0,5 - 0,4} = 1 \text{ сек.}$$

Далее определяем время торможения, учитывая, что в начале торможения $\dot{x} = \dot{x}_{\max}$. Время торможения t_2 также получается из решения основного уравнения

$$t_2 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{kU_{\max} + \dot{x}_{\max}}{kU_{\max}} = 0,62 \ln \frac{0,5 + 0,4}{0,5} = 0,37 \text{ сек.}$$

Путь, пройденный за время разгона

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^{t_1} \dot{x}(t) dt = \int_0^{t_1} (1 - e^{-\alpha t}) kU_{\max} dt = \int_0^{t_1} kU_{\max} dt - \\ &- \int_0^{t_1} kU_{\max} e^{-\alpha t} dt = kU_{\max} t \Big|_0^{t_1} + \frac{1}{\alpha} kU_{\max} e^{-\alpha t} \Big|_0^{t_1} = kU_{\max} t_1 - \\ &- (1 - e^{-\alpha t_1}) kU_{\max} T = 0,5 \cdot 1 - (1 - e^{-1,6 \cdot 1}) 0,5 \cdot 0,62 = \\ &= 0,25 \text{ ед.} \end{aligned}$$

Путь, пройденный за время торможения

$$\begin{aligned} x_2 &= \int_0^{t_2} \dot{x}(t) dt = \int_0^{t_2} [-kU_{\max} + (kU_{\max} + \dot{x}_{\max}) e^{-\alpha t}] dt = \\ &= \int_0^{t_2} -kU_{\max} dt + \int_0^{t_2} (kU_{\max} + \dot{x}_{\max}) e^{-\alpha t} dt = \\ &= -kU_{\max} t \Big|_0^{t_2} - \frac{1}{\alpha} (kU_{\max} + \dot{x}_{\max}) e^{-\alpha t} \Big|_0^{t_2} = -kU_{\max} t_2 + \end{aligned}$$

$$+ (1 - e^{-\alpha t_2}) \frac{kU_{\max} + \dot{x}_{\max}}{\alpha} = -0,5 \cdot 0,37 +$$

$$+ (1 - e^{-1,6 \cdot 0,37}) (0,5 + 0,4) \cdot 0,62 = 0,07 \text{ ед.}$$

Путь, пройденный за время разгона и торможения,

$$x = x_1 + x_2 = 0,25 + 0,07 = 0,32 \text{ ед.}$$

Путь, пройденный с постоянной скоростью,

$$x_3 = x_n - x = 2,09 - 0,32 = 1,77 \text{ ед.}$$

Время движения с постоянной скоростью

$$t_3 = \frac{x_3}{\dot{x}_{\max}} = \frac{1,77}{0,4} = 4,43 \text{ сек.}$$

Общее время оптимального процесса

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 1,0 + 0,37 + 4,43 = 5,8 \text{ сек.}$$

Значение времени движения получилось больше, чем в задаче 13, так как скорость движения объекта ограничена.

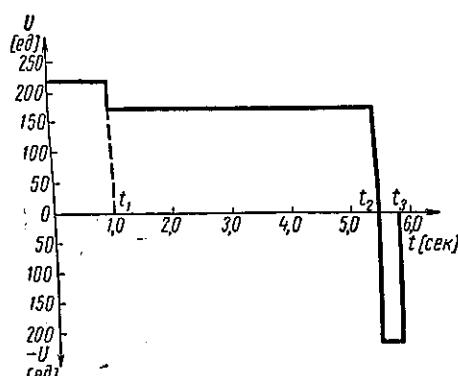


Рис. 3. Алгоритм оптимального управления с ограничением координаты

Алгоритм управления показан на рис. 3. Он состоит из трех участков, где U соответственно: максимально и положительно, пропорционально \dot{x}_{\max} , максимально и отрицательно. Скорости \dot{x}_{\max} соответствует управление

$$U = \frac{\dot{x}_{\max}}{k} = \frac{0,4}{0,0023} = 176 \text{ ед.}$$

Варианты задачи 17 для самостоятельного решения

Дан объект управления, описываемый уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU.$$

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n$, $\dot{x} = 0$ за минимальное время при ограничении скорости $\dot{x} \leq \dot{x}_{\max}$. Определить моменты переключения t_1 , t_2 , t_3 и построить оптимальный процесс.

Данные для расчета приведены в табл. 7.

Таблица 7

Параметры	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
T [сек]	0,8	1,0	1,2	1,5
k	0,0025	0,005	0,005	0,0023
U_{\max} [ед.]	220	220	220	220
x_n [ед.]	2,09	4,18	2,09	2,09
\dot{x}_{\max} [$\frac{\text{ед}}{\text{сек}}$]	0,3	0,8	0,9	0,4

Задача 18. Дан объект управления, описываемый уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = kU, \quad (1)$$

где $T_1 = 0,5$ сек; $T_2 = 0,3$ сек; $k = 2,15$; $|U| \leq U_{\max} = 127$ ед.

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 236$ ед., $\dot{x} = 0$ за минимальное время. При решении задачи 2 получили, что для данной системы алгоритм оптимального управления должен состоять из двух интервалов управления $\pm U_{\max}$. Определить моменты переключения t_1 , t_2 и построить оптимальный переходный процесс.

Решение

1. Определение моментов переключения.

Моменты переключения определяются функцией оптимального управления

$$t_i = f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \bar{x}_0, \bar{x}_n, U_{\max}).$$

Для нахождения этой функции используем метод стыкования решений дифференциальных уравнений со знакопеременной правой частью.

Запишем решение уравнения (1) на первом интервале

$$x(t) = C_0' + C_1' e^{-\alpha_1 t} + C_2' e^{-\alpha_2 t}, \quad (2)$$

где $C_0' = kU$, C_1' , C_2' — постоянные интегрирования на первом интервале управления;

$$-\alpha_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad -\alpha_2 = -\frac{1}{T_2} \text{ — корни характеристического уравнения.}$$

Используя начальные условия при $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, определяем постоянные интегрирования:

$$\begin{cases} x = C_0' + C_1' + C_2' = 0; \\ \dot{x} = -\alpha_1 C_1' - \alpha_2 C_2' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Из системы (3) определяем:

$$\begin{cases} C_1' = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} kU; \\ C_2' = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} kU. \end{cases} \quad (4)$$

Запишем решение уравнения (1) на втором интервале управления

$$x(t) = C_0'' + C_1'' e^{-\alpha_1 t} + C_2'' e^{-\alpha_2 t}, \quad (5)$$

где $C_0'' = -kU$, C_1'' , C_2'' — постоянные интегрирования на втором интервале управления.

Используя конечные условия при $t = t_2$, $x = x_n$, $\dot{x} = 0$, определяем постоянные интегрирования:

$$\begin{cases} x_n = C_0'' + C_1'' e^{-\alpha_1 t_2} + C_2'' e^{-\alpha_2 t_2}; \\ \dot{x} = -\alpha_1 C_1'' e^{-\alpha_1 t_2} - \alpha_2 C_2'' e^{-\alpha_2 t_2} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Из системы уравнений (6) получаем:

$$\begin{cases} C_1'' = -\frac{\alpha_2 (x_n + kU) e^{\alpha_1 t_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}; \\ C_2'' = \frac{\alpha_1 (x_n + kU) e^{\alpha_2 t_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{cases} \quad (7)$$

Стыкуем решения в момент переключения t_1 :

$$\left. \begin{array}{l} C_0' + C_1' e^{-\alpha_1 t_1} + C_2' e^{-\alpha_2 t_1} = C_0'' + C_1'' e^{-\alpha_1 t_1} + C_2'' e^{-\alpha_2 t_1}; \\ -\alpha_1 C_1' e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C_2' e^{-\alpha_2 t_1} = -\alpha_1 C_1'' e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C_2'' e^{-\alpha_2 t_1}. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Перепишем систему уравнений (8) в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} C_0' - C_0'' + (C_1' - C_1'') e^{-\alpha_1 t_1} + (C_2' - C_2'') e^{-\alpha_2 t_1} = 0; \\ \alpha_1 (C_1' - C_1'') e^{-\alpha_1 t_1} + \alpha_2 (C_2' - C_2'') e^{-\alpha_2 t_1} = 0. \end{array} \right\} \quad (9)$$

Выразим из уравнений (4) и (7) разности постоянных интегрирования:

$$\left. \begin{array}{l} C_1' - C_1'' = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} [kU + (x_n + kU) e^{\alpha_1 t_2}]; \\ C_2' - C_2'' = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} [kU + (x_n + kU) e^{\alpha_2 t_2}]. \end{array} \right\} \quad (10)$$

Подставив выражения систем (4) и (7) в уравнения системы (10), после упрощений получим систему уравнений для определения моментов переключения:

$$\left. \begin{array}{l} \left(1 + \frac{x_n}{kU}\right) e^{\alpha_1 t_2} - 2e^{\alpha_1 t_1} + 1 = 0; \\ \left(1 + \frac{x_n}{kU}\right) e^{\alpha_2 t_2} - 2e^{\alpha_2 t_1} + 1 = 0. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Определим численные значения коэффициентов:

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,5} = 2;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,3} = 3,3;$$

$$\frac{x_n}{kU} = \frac{236}{2,15 \cdot 127} = 0,86.$$

Подставив их в уравнения системы (11), получим:

$$\left. \begin{array}{l} 1,86e^{2t_2} - 2e^{2t_1} + 1 = 0; \\ 1,86e^{3,3t_2} - 2e^{3,3t_1} + 1 = 0. \end{array} \right\} \quad (12)$$

Эта система уравнений может быть решена только приближенно. Одним из приближенных методов является

графический метод, которым мы и воспользуемся. Для этого перепишем уравнения (12) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} e^{2t_1} &= \frac{1,86e^{2t_2} + 1}{2} = 0,93e^{2t_2} + 0,5; \\ e^{3,3t_1} &= \frac{1,86e^{3,3t_2} + 1}{2} = 0,93e^{3,3t_2} + 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Расчеты для t_1 при заданных значениях t_2 сведены в табл. 8.

Таблица 8

t_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
e^{2t_2}	1,22	1,40	1,84	2,25	2,77	3,39
e^{2t_1}	1,64	1,89	2,21	2,6	2,9	3,66
t_1	0,25	0,32	0,4	0,48	0,53	0,65
$e^{3,3t_2}$	1,39	1,93	2,69	3,74	5,2	7,24
$e^{3,3t_1}$	1,79	2,3	3	3,99	5,35	7,25
t_1	0,18	0,27	0,33	0,42	0,51	0,6

t_2	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
e^{2t_2}	4,18	5,1	6,23	7,69	9,3	11,02
e^{2t_1}	4,4	5,25	6,31	7,67	9,2	10,6
t_1	0,74	0,83	0,92	1,02	1,09	1,18
$e^{3,3t_2}$	10	14	19,49	27	37,7	52,46
$e^{3,3t_1}$	9,83	13,56	18,69	25,19	38,80	50,4
t_1	0,69	0,8	0,88	0,98	1,06	1,19

Зависимости $t_1 = f_1(t_2)$ и $t_1 = f_2(t_2)$ построены на рис. 4. По точке их пересечения находим моменты переключения $t_1 = 1,14$ сек и $t_2 = 1,16$ сек.

Разность моментов переключения $\Delta t = t_2 - t_1 = 0,02$ сек.

2. Построение оптимального процесса

Для построения оптимального процесса на первом интервале следует в выражение (2) подставить значения постоянных интегрирования из системы (4), тогда

$$x(t) = \left(1 + \frac{a_2}{a_1 - a_2} e^{-a_1 t} - \frac{a_1}{a_1 - a_2} e^{-a_2 t} \right) kU$$

или, после подстановки численных значений,

$$x(t) = (1 - 2,54e^{-2t} + 1,54e^{-3,3t}) \cdot 272.$$

Расчеты для t в интервале $0 \leq t \leq 1,14$ сведены в табл. 9.

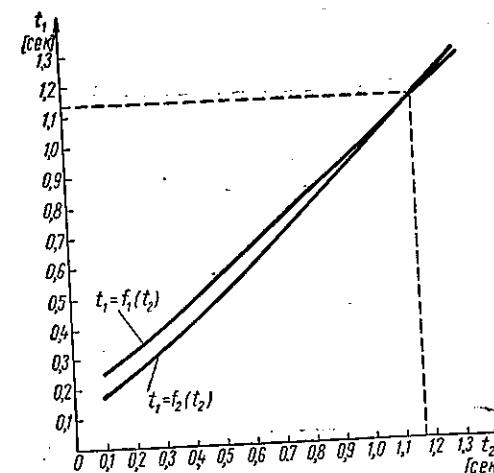


Рис. 4. Графическое решение системы двух трансцендентных уравнений

Таблица 9

t [сек]	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,14
e^{-2t}	1	0,67	0,45	0,29	0,190	0,13	0,098
$e^{-3,3t}$	1	0,52	0,27	0,14	0,07	0,04	0,023
$x(t)$	0	21,00	74,00	123,0	164,0	208,0	223,0

Оптимальный процесс на втором интервале, т. е. для $0 \leq t \leq t_2 - t_1$, описывается уравнением (5). Условно принимая момент переключения за начало отсчета $t=0$, можно записать:

$$x(0) = x_1;$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = \dot{x}_1;$$

$$C_1'' = \frac{\dot{x}_1 - C_2''}{\alpha_2} \quad x_1 = C_0'' + C_1'' + C_2'';$$

откуда определим постоянные интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} C_2'' &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} (x_1 + kU) + \frac{\dot{x}_1}{\alpha_1 - \alpha_2}; \\ C_1'' &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (x_1 + kU) - \frac{\dot{x}_1}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

После подстановки значений C_1'' и C_2'' в уравнение (5) имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= -kU - \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (x_1 + kU) + \frac{\dot{x}_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \right] e^{-\alpha_1 t} + \\ &\quad + \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} (x_1 + kU) + \frac{\dot{x}_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \right] e^{-\alpha_2 t} = \\ &= -kU + [(\alpha_1 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{-\alpha_1 t}) (x_1 + kU) + \\ &\quad + \dot{x}_1 (e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t})] \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Значение $x_1 = 223$ ед. получаем из решения на первом интервале. Определим

$$x_1 = (2,0 \cdot 2,54 \cdot e^{-2 \cdot 1,14} - 1,54 \cdot 3,3 \cdot e^{-3,3 \cdot 1,14}) \cdot 272 = 115 \frac{\text{ед}}{\text{сек}}.$$

Подставляя численные значения в выражение (15), получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= -272 - [(2e^{-3,3t} - 3,3e^{-2t}) \cdot 495 + \\ &\quad + 115 (e^{-3,3t} - e^{-2t})] \cdot 0,77. \end{aligned}$$

Так как второй интеграл очень мал, то определяем x сразу при $t = 0,02$ сек:

$$\begin{aligned} x(t) &= -272 - [(2 \cdot 0,93 - 3,3 \cdot 0,96) \cdot 495 + \\ &\quad + 115 (0,93 - 0,96)] 0,77 = -272 + 650 \cdot 0,77 = 227,5 \text{ ед.} \end{aligned}$$

Зависимость $x(t)$ представлена на рис. 5.

Варианты задачи 18 для самостоятельного решения

Решить задачу при следующих значениях параметров:

1. $T_1 = 0,5$ сек; $T_2 = 0,3$ сек; $k = 2,15$; $U = U_{\max} = 220$ ед.;
2. $T_1 = 0,8$ сек; $T_2 = 0,5$ сек; $k = 2,15$; $U = U_{\max} = 127$ ед.

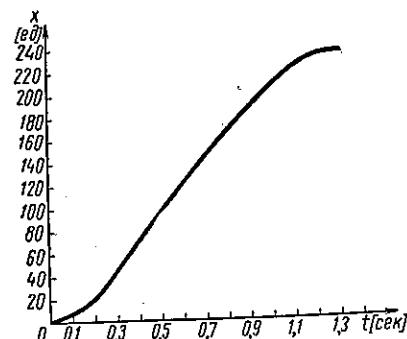


Рис. 5. Оптимальный переходный процесс

Требуется перевести объект из положения $x = 0$ $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_p = 236$ ед., $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ за минимальное время. Определить моменты переключения и построить оптимальный процесс.

Задача 19. Дан объект управления, описываемый уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = k \left(T_3 \frac{dU}{dt} + U \right), \quad (1)$$

где $T_1 = 1$ сек; $T_2 = 2$ сек; $T_3 = 0,5$ сек; $k = 1$; $|U| \leq U_{\max} = 10$ ед.

Требуется перевести объект из положения $x = 8$ ед., $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = 0$, $\dot{x} = 0$ за минимальное время и без перерегулирования. Задачу решить на основе принципа максимума. Определить алгоритм управления.

Решение. Непосредственно применить принцип максимума к уравнению (1) нельзя, так как управляемая

координата терпит разрыв второго рода при скачкообразном изменении U . Чтобы применить принцип максимума, воспользуемся методикой, изложенной в задаче 7, т. е. перейдем к новым переменным, которые уже не будут терпеть нежелаемых разрывов.

Запишем передаточную функцию объекта, используя его дифференциальное уравнение (1):

$$W(s) = \frac{x(s)}{U(s)} = \frac{k(T_3s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}.$$

Передаточную функцию разложим на простейшие множители

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) = \frac{k_1}{T_1s + 1} + \frac{k_2}{T_2s + 1},$$

где

$$k_1 = k \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1}; \quad k_2 = k \frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}.$$

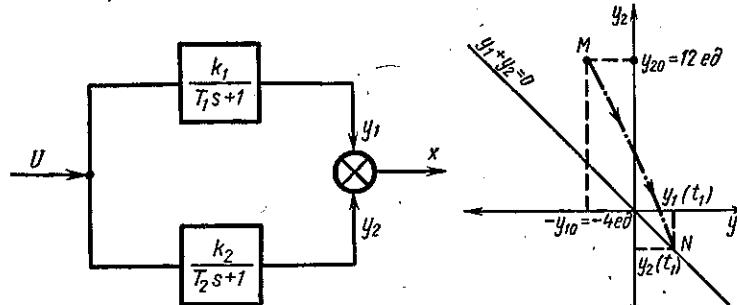


Рис. 6. Представление объекта управления в виде двух параллельных фиктивных звеньев

Рис. 7. Фазовый портрет для системы, состоящей из двух параллельных звеньев

Коэффициенты k_1 и k_2 найдены методом неопределенных коэффициентов. Объект управления представлен двумя фиктивными параллельно соединенными звеньями (рис. 6) с выходными координатами y_1 и y_2 . Координаты y_1 и y_2 непрерывны, а сумма их, умноженная на U , дает

$$x = (y_1 + y_2)U.$$

Так как по условию задачи $x = 0$, то

$$(y_1 + y_2)U = 0.$$

Если взять фазовую плоскость, образованную координатами y_1 и y_2 , то условие равенства нулю координаты x представится в ней прямой линией, проходящей через начало координат (рис. 7). Далее задача заключается в том, чтобы по оптимальной траектории из заданной точки попасть на линию $y_1 + y_2 = 0$. Здесь могут быть два варианта дальнейшего решения: удерживаться на линии $y_1 + y_2 = 0$ и не допускать ухода фазовых координат с этой линии или допустить уход координат с линии $y_1 + y_2 = 0$, т. е. допустить некоторое свободное движение после окончания управления.

Наиболее интересен первый вариант решения, который и будет представлен. Исходя из принципа максимума (см. задача 7), управляющее воздействие, необходимое для попадания изображающей точки на линию $y_1 + y_2 = 0$, определяется выражением

$$U_1 = -|U| \operatorname{sign} x(0) = -10 \text{ ед.},$$

т. е. имеется один интервал управления.

Для определения момента переключения запишем решение для координат y_1 и y_2 :

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0) e^{-t/T_1} + k_1 U (1 - e^{-t/T_1}); \\ y_2(t) &= y_2(0) e^{-t/T_2} + k_2 U (1 - e^{-t/T_2}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Определяем начальные условия для новых координат y_1 и y_2 :

$$y_1(0) = k_1 \frac{x(0)}{k} = -0,5 \frac{8}{1} = -4;$$

$$y_2(0) = k_2 \frac{x(0)}{k} = 1,5 \frac{8}{1} = 12;$$

Подставляя численные значения параметров в уравнения системы и учитывая условие $y_1 + y_2 = 0$, имеем

$$9e^{-t_1} - 27e^{-0,5t_1} + 10 = 0,$$

где t_1 — момент переключения.

Решая полученное уравнение относительно t_1 , имеем $t_1 = 1,68$ сек.

Таким образом, за время t_1 из точки $y_1 = -4$ и $y_2 = 12$ (см. рис. 7) попадаем на прямую $y_1 + y_2 = 0$, т. е. достигаем заданного значения координаты x при

приложении максимального воздействия $U = -10$ ед. Теперь следует управляющим воздействием удержать координату на прямой $y_1 + y_2 = 0$, т. е. соблюсти равенство $x = 0$.

Запишем решение для свободного движения координат y_1 , y_2 и x :

$$y_1(t) = y_2(t_1) e^{-t/T_1};$$

$$y_2(t) = -y_2(t_1) e^{-t/T_2};$$

$$x(t) = y_2(t_1) e^{-t/T_1} - y_2(t_1) e^{-t/T_2}.$$

Но

$$y_2(t_1) e^{-t/T_1} \doteq \frac{y_2(t_1) T_1}{T_1 s + 1};$$

$$-y_2(t_1) e^{-t/T_2} \doteq -\frac{y_2(t_1) T_2}{T_2 s + 1}.$$

Тогда

$$y_1(t) + y_2(t) \doteq y_2(t_1) \left[\frac{T_1}{T_1 s + 1} - \frac{T_2}{T_2 s + 1} \right].$$

При этом закон изменения управляющего воздействия на втором участке

$$U_2(s) \left[\frac{k_1}{T_1 s + 1} + \frac{k_2}{T_2 s + 1} \right] = y_2(t_1) \left[\frac{T_1}{T_1 s + 1} - \frac{T_2}{T_2 s + 1} \right],$$

откуда

$$U_2(s) = \frac{y_2(t_1)(T_1 - T_2)}{T_3 s + 1}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, имеем

$$U_2(t) = y_2(t_1) \frac{T_1 - T_2}{T_3} e^{-t/T_3}.$$

Определяем $y_2(t_1)$ в момент $t_1 = 1,68$ сек и, подставляя его в выражение для $U_2(t)$, получаем

$$U_2(t) = -6,68 e^{-2(t-t_1)} \text{ для } t_1 \leq t \leq \infty.$$

Полностью алгоритм управления показан на рис. 8. Очевидно, такой алгоритм можно реализовать только системой с переменной структурой. После достижения заданного значения следует включением некоторого звена компенсировать нуль передаточной функции.

Задача 20. Дан объект управления, описываемый следующими уравнениями:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c; \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (2)$$

В качестве объекта управления рассматривается трехфазный асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором со следующими параметрами: $U_n = 110$ в; $M_k =$

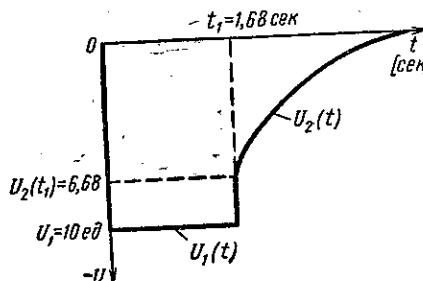


Рис. 8. Алгоритм управления для объекта, содержащего производную от управляющего воздействия

$= 17,5$ нм — критический момент при напряжении U_n ; $s_k = 0,585$ — критическое скольжение; $\omega_0 = 157$ рад/сек — скорость холостого хода; $J = 0,25$ кгм² — момент инерции движущихся частей, приведенный к валу двигателя; $M_c = 0$.

Требуется перевести объект из положения $\varphi = 0$, $\omega = 0$ при $t = 0$ в положение $\varphi = \varphi_n = 2,09$ рад, $\omega = 0$ за минимальное время при заданном ограничении величины напряжения, приложенного к двигателю, т. е. при

$$0 \leq U \leq U_{max} = U_n. \quad (3)$$

Задачу решить аналитически. Определить алгоритм управления и рассчитать моменты переключения.

Решение. В первом приближении уравнение механической характеристики асинхронного двигателя выражается следующей зависимостью:

$$M_d = \frac{2M_k}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} = \frac{2M_k s_k s}{s^2 + s_k^2}, \quad (4)$$

$$\text{где } s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = 1 - \frac{\omega}{\omega_0}.$$

В уравнение (4) управляющее воздействие — напряжение — на двигателе явно не входит. Однако условие (3) соответствует ограничению критического момента

$$0 < M_k \leq M_{k,\max} = M_{k,h}.$$

Учитывая (4), уравнение (1) переопределяется: при прямом порядке следования фаз статора

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{2M_k s_k s}{s^2 + s_k^2}; \quad (5)$$

при обратном порядке следования фаз статора

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2M_k s_k (2-s)}{(2-s)^2 + s_k^2}. \quad (6)$$

Введя переменную, определяющую направление вращения двигателя $\kappa = \pm 1$, объединим формулы (5) и (6)

$$J \omega_0 \frac{d\Omega}{dt} = \kappa \frac{M_k a (1-\kappa \Omega)}{(1-\kappa \Omega)^2 + b}, \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= 2s_k; \\ b &= s_k^2; \\ \Omega &= \frac{\omega}{\omega_0}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

На основании принципа максимума можно заключить [Л.1], что для осуществления оптимального управления необходимо, чтобы $M_k = M_{k,h}$ в течение всего процесса управления, а параметр κ менял знак не более одного раза. Таким образом, алгоритм управления качественно определен. Далее необходимо найти время переключения чередования фаз и время снятия управляющего воздействия.

Перепишем уравнение (7)

$$\frac{J \omega_0}{M_{k,h}} \frac{d\Omega}{dt} = \kappa \frac{a (1-\kappa \Omega)}{(1-\kappa \Omega)^2 + b}. \quad (9)$$

Обозначим $\sqrt{\frac{J}{M_{k,h}}}$ через T и введем безразмерное время $\tau = \frac{t}{T}$, тогда уравнение (9) будет иметь вид

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \beta \kappa \frac{a (1-\kappa \Omega)}{(1-\kappa \Omega)^2 + b}, \quad (10)$$

где

$$\beta = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M_{k,h}}{J}}.$$

Разделим переменные в уравнении (10)

$$d\tau = \frac{(1-\kappa \Omega)^2 + b}{\kappa a \beta (1-\kappa \Omega)} d\Omega. \quad (11)$$

Проинтегрируем уравнение (11) для $\kappa = +1$; при этом $0 \leq \tau \leq \tau_1$, $\Omega_0 \leq \Omega \leq \Omega_1$

$$\int_0^{\tau_1} d\tau = \frac{1}{a \beta} \int_{\Omega_0}^{\Omega_1} \frac{(1-\Omega)^2 + b}{(1-\Omega)} d\Omega.$$

После интегрирования

$$\tau_1 = \frac{1}{a \beta} \left[(\Omega_1 - \Omega_0) - \frac{\Omega_1^2 - \Omega_0^2}{2} - b \ln \frac{1-\Omega_1}{1-\Omega_0} \right]. \quad (12)$$

Проинтегрируем уравнение (11) для $\kappa = -1$, при этом $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = -\frac{1}{a \beta} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{(1+\Omega)^2 + b}{1+\Omega} d\Omega.$$

После интегрирования получим

$$\tau_2 = \frac{1}{a \beta} \left[(\Omega_1 - \Omega_2) + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2} - b \ln \frac{1+\Omega_2}{1+\Omega_1} \right] + \tau_1. \quad (13)$$

В выражениях (12) и (13) Ω_0 соответствует начальной скорости $\omega_{\text{нач}} = 0$; Ω_1 соответствует максимальной

скорости в конце интервала разгона; Ω_2 соответствует конечной скорости $\omega_{\text{кон}} = 0$.

Поскольку $\Omega_0 = \Omega_2 = 0$, остается определить Ω_1 .

Так как $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \Omega \omega_0$, а $t = \tau T$, то

$$d\tau = \frac{d\varphi}{\Omega \omega_0} \sqrt{\frac{M_{\text{к.н}}}{J}}.$$

С учетом последнего выражения уравнение (10) можно представить в виде

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{\gamma z}{\Omega} \cdot \frac{a(1-z\Omega)}{(1-z\Omega)^2 + b}, \quad (14)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{M_{\text{к.н}}}{J \omega_0^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим выражения для угла поворота φ в интервале разгона $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, когда $z = +1$, и в интервале торможения $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, когда $z = -1$:

$$\varphi_1 = \frac{1}{a\gamma} \left[\frac{\Omega_1^2 - \Omega_0^2}{2} - \frac{\Omega_1^3 - \Omega_0^3}{3} - b(\Omega_1 - \Omega_0) - b \ln \frac{1 - \Omega_1}{1 - \Omega_0} \right]; \quad (15)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{1}{a\gamma} \left[\frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2} - \frac{\Omega_2^3 - \Omega_1^3}{3} - b(\Omega_2 - \Omega_1) + b \ln \frac{1 + \Omega_2}{1 + \Omega_1} \right]. \quad (16)$$

Из уравнений (15) и (16) найдем φ_2 , учитывая, что $\Omega_0 = \Omega_2 = 0$

$$\varphi_2 = \frac{\Omega_1^2}{a\gamma} + \frac{b}{a\gamma} \ln \frac{1}{1 - \Omega_1^2}. \quad (17)$$

Вычисляем значения коэффициентов уравнения (17):

$$a = 2s_k = 1,17;$$

$$b = s_k^2 = 0,28;$$

$$\gamma = \frac{M_{\text{к.н}}}{J \omega_0^2} = \frac{17,5}{0,25 \cdot 157^2} = 0,003.$$

Определяем угол поворота вала двигателя φ_2 , соответствующий углу поворота вала исполнительного механизма на $2,09 \text{ rad}$, при коэффициенте редукции $k_p = 0,01$

$$\varphi_2 = 2,09 \cdot 100 = 209,0 \text{ rad}.$$

Преобразуем уравнение (17) к виду, удобному для графического решения, и подставим значения коэффициентов, тогда получим

$$0,73 - \Omega_1^2 = 0,28 \ln \frac{1}{1 - \Omega_1^2}. \quad (18)$$

Для графического построения левой и правой частей уравнения составим табл. 10.

Таблица 10

Ω_1	0,2	0,4	0,6	0,7	0,73	0,75	0,8
Ω_1^2	0,04	0,16	0,36	0,49	0,53	0,56	0,64
$0,73 - \Omega_1^2$	0,69	0,57	0,37	0,24	0,20	0,17	0,09
$1 - \Omega_1^2$	0,96	0,84	0,64	0,51	0,47	0,44	0,36
$\frac{1}{1 - \Omega_1^2}$	1,04	1,19	1,56	1,96	2,13	2,28	2,78
$\ln \frac{1}{1 - \Omega_1^2}$	0,04	0,17	0,44	0,67	0,76	0,83	1,02
$0,28 \ln \frac{1}{1 - \Omega_1^2}$	0,01	0,05	0,12	0,19	0,21	0,23	0,29

Из пересечения двух кривых (рис. 9) находим решение уравнения (16): $\Omega_1 = 0,725$.

Подставляя значение Ω_1 в уравнение (12) и учитывая, что $\Omega_0 = 0$, $\beta = 0,053$, определяем

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{1,17 \cdot 0,053} \left[0,725 - \frac{0,725^2}{2} - \right. \\ &\quad \left. - 0,28 \ln (1 - 0,725) \right] = 12,2. \end{aligned}$$

Из уравнения (13), учитывая, что $\Omega_2 = 0$, найдем

$$\tau_2 = \frac{1}{1,17 \cdot 0,053} \left[0,725 + \frac{0,725^2}{2} - 0,28 \ln \frac{1}{1,725} \right] + 12,2 = 29,1.$$

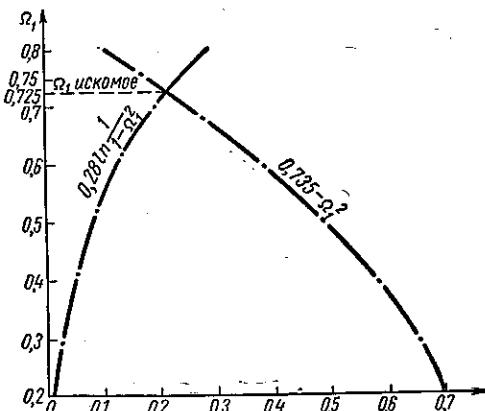


Рис. 9. Графическое решение трансцендентных уравнений для объекта, содержащего нелинейность

Определим истинное время t_1 и t_2 из соотношений
 $t = \tau T$ и $T = \sqrt{\frac{J}{M_{\text{к.в}}}}$:

$$t_1 = \tau_1 T = 12,2 \cdot \sqrt{\frac{0,25}{17,5}} = 1,47 \text{ сек};$$

$$t_2 = \tau_2 T = 29,1 \cdot \sqrt{\frac{0,25}{17,5}} = 3,5 \text{ сек.}$$

Вычисляем координаты переключения ω_1 и φ_1 в момент времени t_1 :

$$\omega_1 = \omega_0 \Omega_1 = 157 \cdot 0,725 = 113 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{1,17 \cdot 0,003} \left[\frac{0,725^2}{2} - \frac{0,725^3}{3} - 0,28 \cdot 0,72 - 0,28 \ln(1 - 0,725) \right] = 84 \text{ рад.}$$

Для построения скорости и угла поворота во временной плоскости приходится пользоваться уравнениями для τ_1 , τ_2 и φ_1 , φ_2 , поскольку явно выразить эти координаты от времени не удается.

Читателю предоставляется возможность построить эти зависимости самостоятельно.

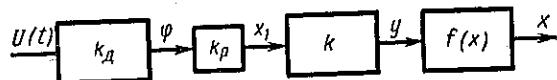


Рис. 10. Блок-схема объекта управления, содержащего нелинейность

Задача 21. Данна система, блок-схема которой представлена на рис. 10. Динамика рассматриваемой системы описывается следующими уравнениями:

$$\frac{dx_1}{dt} = k_d k_p U; \quad (1)$$

$$y = kx_1; \quad (2)$$

$$a \frac{dx}{dt} = y - f(x), \quad (3)$$

где

$$k_d k_p = k_1 = 0,0001;$$

$$k = 20;$$

$$a = 10;$$

$$|U| \leq U_{\max} = 100 \text{ ед.}$$

Нелинейное звено $f(x)$ имеет характеристику $k_0 \sqrt{x}$, где $k_0 = 2$.

Требуется перевести объект управления из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 0,62$ ед., $\dot{x} = 0$ за минимальное время.

Перепишем уравнения (1), (3), подставив в (3) вместо y его значение из (2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= k_1 U; \\ \frac{dx}{dt} &= k_2 x_1 - k_3 \sqrt{x}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$k_2 = \frac{k}{a};$$

$$k_3 = \frac{k_0}{a}.$$

Полученная система уравнений рассматривалась в задаче 4, где на основании принципа максимума было показано, что для достижения оптимального управления необходимо иметь два интервала знакопостоянства $\pm U_{\max}$. Определить моменты переключения и построить оптимальный переходный процесс.

Решение. Найти моменты переключения t_1 и t_2 интегрированием системы уравнений (4), как в предыдущей задаче, невозможно, так как второе уравнение системы не приводится к квадратуре.

Уравнение фазовой траектории

$$\frac{dx}{dx_1} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{x_1}{U} - \frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{U}$$

тоже не интегрируется.

Для решения задачи используем графо-аналитический метод, разработанный А. В. Башарином [Л. 4] для синтеза нелинейных систем управления.

В уравнениях системы (4) перейдем к конечным приращениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta x_1}{k_1 U} &= \Delta t; \\ \frac{\Delta x}{y - k_0 \sqrt{x}} &= \frac{\Delta t}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В прямоугольной системе координат $k_1 U$, x_1 и x , z ($z = k_0 \sqrt{x}$) построим статические характеристики интегрирующего звена и объекта.

Первая характеристика (рис. 11, а) совпадает с осью ординат, вторая является нелинейной характеристикой вида $z = k_0 \sqrt{x}$ (рис. 11, б).

Построим еще дополнительную прямоугольную систему x_1 , y , в которой проведем луч $y = k_k x_1$ (рис. 11, б).

Отложим в первой координатной системе управляемую

щее воздействие $\pm k_1 U_{\max}$ — две прямые, параллельные оси ординат.

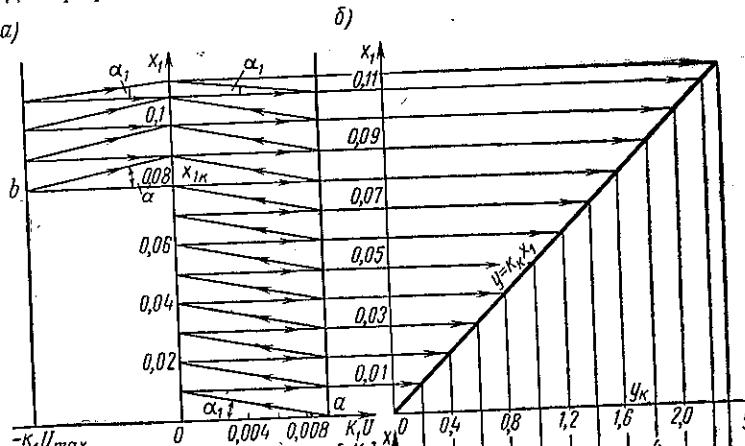
Найдем значения углов лучей построения:

$$\alpha = \arctg \Delta t \cdot \frac{m_{k_1} U}{m_{x_1}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\Delta t}{a} \cdot \frac{m_y \cdot z}{m_x},$$

где приращение $\Delta t = 1$ сек.

а)



б)

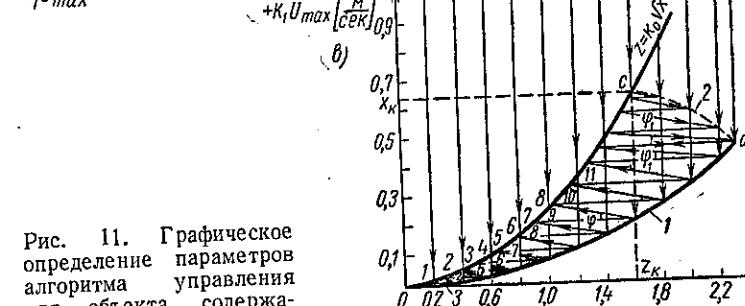


Рис. 11. Графическое определение параметров алгоритма управления для объекта, содержащего нелинейность

В первой координатной системе лучи построения проводим под углом α , начиная из точки a ($x_1 = 0$, $k_1 U = +k_1 U_{\max}$). Во второй координатной системе — под углом φ из начала координат ($x = 0$, $y = z = 0$). Точка

a и начало координат в системе *x, z* характеризуют начальное состояние системы. Конечное состояние системы характеризуется точкой *b* ($x_1 = x_{1k}$, $k_1 U = -k_1 U_{\max}$) в первой координатной системе и точкой *c* ($x = x_k$, $y = z = y_k = z_k$) во второй системе координат. Поэтому одновременно проводим построение из точек *b* и *c*, что соответствует *попутному* во времени движению системы. Ход построения пояснен стрелками.

В точке *d*, где пересекаются участки 1 и 2 фазовой траектории, построение заканчивается. Эта точка пересечения *d* «улавливается» уменьшением углов лучей построения. Так, углы α_1 и Φ_1 соответствуют времени $\frac{\Delta t}{2}$. Время движения по участку фазовой траектории и время $t_2 - t_1$ движения по второму участку фазовой траектории подсчитывается сложением интервалов Δt .

$$t_1 = 11 \Delta t + \frac{\Delta t}{2} = 11 \cdot 1 + 0,5 = 11,5 \text{ сек};$$

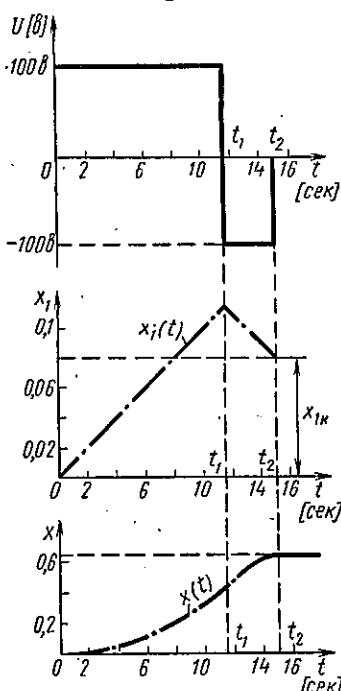
$$t_2 - t_1 = 3 \Delta t + \frac{\Delta t}{2} = 3 \cdot 1 + 0,5 = 3,5 \text{ сек.}$$

При решении первой половины задачи, т. е. определении моментов переключения, попутно легко построить изменение координат во времени $x_1(t)$ и $x(t)$ (рис. 12), поскольку из построения известны приращения координат в любой момент времени.

Задача 22. Дан объект управления, описываемый следующими уравнениями:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c;$$

Рис. 12. Алгоритм управления и траектории движения для управляемой и промежуточной координат



$$\frac{d\varphi}{dt} = k_p \omega,$$

где $J = 0,25 \text{ кгм}^2$; $M_c = 4 \text{ нм}$; $k_p = 0,01$.

В качестве объекта управления рассматривается трехфазный асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором, механическая характеристика которого приведена на рис. 13.

Требуется перевести объект из положения $\varphi = 0$, $\omega = 0$ при $t = 0$ в положение $\varphi = \varphi_n = 2,09 \text{ рад}$, $\omega = 0$ за минимальное время при заданном ограничении вели-

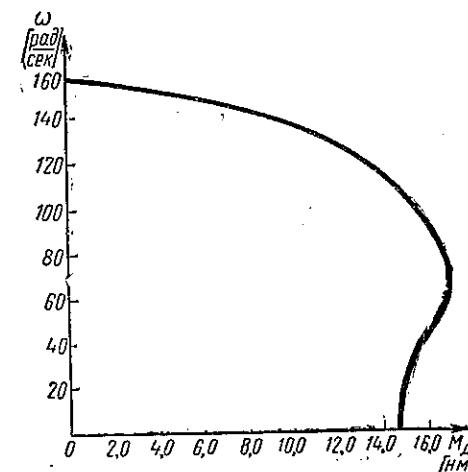


Рис. 13. Механическая характеристика асинхронного двигателя

чины напряжения, приложенного к двигателю $0 \leq U \leq U_{\max} = U_n$. Из задачи 20 известно, что алгоритм управления должен иметь два интервала управления с одной сменой порядка следования фаз. Используя графо-аналитический метод, определить моменты переключения и построить оптимальную траекторию.

Задача 23. Дан объект управления, описываемый следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} &= M_d - M_c; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $J = 0,25 \text{ кгм}^2$; $M_c = 4 \text{ нм}$.

В качестве объекта управления рассматривается трехфазный асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором, характеристика которого задана графически (рис. 14). Коэффициент передачи редуктора $k_p = 0,01$.

Требуется перевести объект из положения $\varphi = 0$, $\omega = 0$ при $t = 0$ в положение $\varphi = \varphi_n = 2,09 \text{ рад}$, $\omega = 0$ за минимальное время при заданных ограничениях: напряжения, приложенного к двигателю $0 \leq U \leq U_{\max} = U_n = 110 \text{ в}$; скорости двигателя $\omega_d \leq \omega_{\text{огр}} = 80 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$, что соответствует ограничению скорости объекта до $0,8 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$ при заданном коэффициенте передачи редуктора.

Из предыдущих задач известно, что алгоритм управления должен состоять из двух интервалов $\pm M_d$, что соответствует *прямому* и *обратному* порядку следования фаз, и одного участка, на котором M_d соответствует скорости ограничения $\omega_{\text{огр}}$. Определить моменты переключения t_1 , t_2 , t_3 и построить оптимальный переходный процесс, используя граffо-аналитический метод.

Решение. Управление объектом осуществляется путем изменения напряжения, подводимого к двигателю. Условно обозначим напряжение, приложенное к двигателю при прямом порядке следования фаз через $+U_{\max}$ (что соответствует $+M_d$), а при обратном — через $-U_{\max}$ (что соответствует $-M_d$).

Как и в задаче 21, проделаем предварительные построения для графического решения. В прямоугольной системе координат строим статические характеристики звеньев системы.

Если считать в первом уравнении системы (1) $M_d = f(\omega, U)$ как входное нелинейное воздействие, то двигатель без нагрузки с выходом по скорости можно представить как последовательное соединение нелинейного звена, выполняющего преобразование $M_d = f(\omega, U)$, и интегрирующего звена (рис. 15).

Статическая характеристика первого звена совпадает с осью ординат ω (см. рис. 14).

Первому участку алгоритма управления двигателем соответствует нелинейное управление $M_d = f(\omega, +U_{\max})$ — характеристика разгона. Участку отрицательного напряжения управления $-U_{\max}$ соответствует характеристика

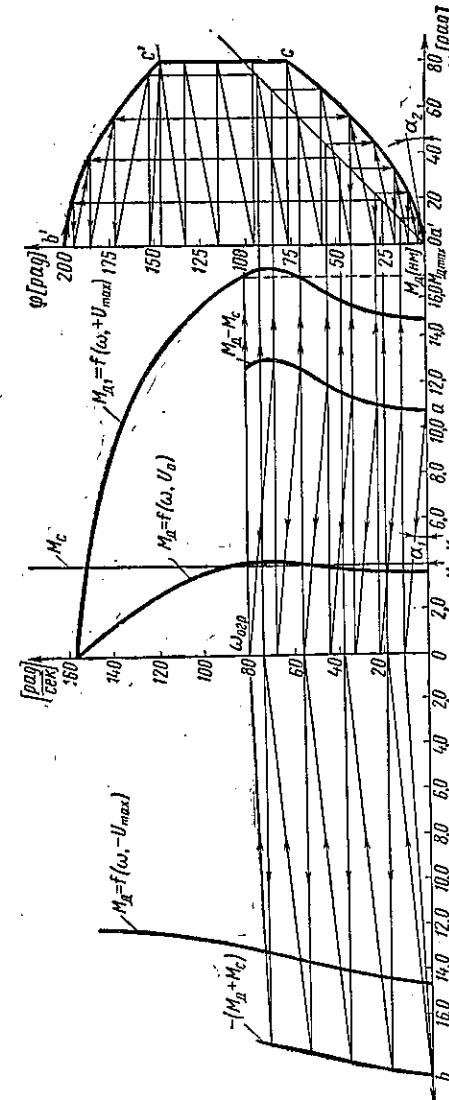


Рис. 14. Графическое определение параметров алгоритма управления для системы с асинхронным двигателем при ограничении координаты

торможения. Участку движения с постоянной скоростью будет соответствовать какое-то напряжение $U_0 < U_{\max}$, которое необходимо определить.

Определяем точки начального и конечного состояния (см. рис. 14). Это точки a , a' ($t = 0$, $U = +U_{\max}$, $\omega = 0$, $\varphi = 0$) и точки b , b' ($t = T$, $U = -U_{\max}$, $\omega = 0$, $\varphi = \varphi_n$), где

$$\varphi_n = \Phi_{n,0} = \frac{\varphi_{n,0}}{k_p} = \frac{2,09}{0,01} = 209 \text{ рад.}$$

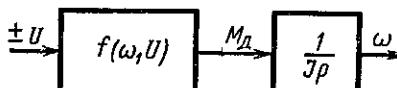


Рис. 15. Структурная схема системы управления с асинхронным двигателем

Уравнения системы (1) в приращениях имеют следующий вид:

$$\frac{\Delta \omega}{M_d - M_c} = \frac{\Delta t}{J};$$

$$\frac{\Delta \varphi}{\omega} = \Delta t.$$

Задаемся $\Delta t = 0,25$ сек и определяем тангенсы углов наклона лучей построения:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\Delta t}{J} \cdot \frac{m_M}{m_\omega} = \frac{0,25 \cdot 1}{0,25 \cdot 10} = 0,1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \Delta t \cdot \frac{m_\omega}{m_\varphi} = \frac{0,25 \cdot 10}{12,5} = 0,2.$$

На каждом интервале Δt_i определяется разность $M_d - M_c$ и ω_i , причем ω_i определяется автоматически как сумма всех предыдущих приращений. Перенос ω_i во вторую координатную систему осуществляется с помощью вспомогательного луча, проведенного под углом 45° .

Графическое решение заключается в определении приращений координат ω и φ , что аналогично интегрированию. Начиная строить лучи из начальных и конечных точек одновременно в первой координатной системе под углом α_1 , во второй — под углом α_2 (ход построения мож-

но проследить по стрелкам на рис. 14), дойдем до скорости ограничения. Число лучей равно числу интервалов времени участков разгона и торможения. Поэтому простым сложением на этих участках получаем время разгона $t_p = 1,75$ сек и время торможения $t_t = 1,08$ сек.

Режим с постоянной скоростью возможен в случае динамического равновесия $M_d = M_c$, тогда $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

Следовательно, в момент, когда двигатель достигнет скорости ограничения, нужно перевести его на механическую характеристику, момент которой при $\omega = \omega_{\text{огр}}$ равен моменту сопротивления. Для этого нужно мгновенно переключить управляющее напряжение с величины $+U_{\max}$ до значения $U = U_{\text{огр}}$, которое приближенно определяется из пропорции

$$M_{\text{дmax}} \propto U_{\text{max}}^2,$$

$$M_c \propto U_{\text{огр}}^2.$$

Из пропорции

$$U_{\text{огр}} = \sqrt{\frac{M_c U_{\text{max}}^2}{M_{\text{дmax}}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 110^2}{16,6}} = 54 \text{ в.}$$

Время движения с постоянной скоростью определяется числом лучей на отрезке $c - c'$ на фазовой плоскости $\varphi - \omega$. Этот участок фазовой траектории соответствует изменению угла поворота φ по линейному закону, так как $\omega = \text{const}$.

Из построения на рис. 14 видно, что $t_0 = 0,91$ сек.

Таким образом, моменты переключения оптимального управления определены:

$$t_1 = t_p = 1,75 \text{ сек.}$$

$$t_2 = t_p + t_0 = 1,75 + 0,91 = 2,66 \text{ сек.}$$

$$t_3 = t_p + t_0 + t_t = 2,66 + 1,08 = 3,74 \text{ сек.}$$

Варианты задачи 23 для самостоятельного решения

Дан объект управления, описываемый системой уравнений (1). В качестве привода используется трехфазный асинхронный двигатель. Данные, необходимые для расчета, приведены в табл. 11.

Таблица 11

Параметры	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
U_n [в]	220	220	220	220
P_n [вт]	10000	7000	2800	1700
ω_c [рад/сек]	157	105	78,5	105
$\omega_{n,d}$ [рад/сек]	152	100	76,5	149
$\omega_{n,ob}$ [рад/сек]	1,5	1,0	0,7	1,5
$\omega_{ogr,ob}$ [рад/сек]	1,2	0,8	Нет	1,0
φ_{nob} [рад]	2,09	4,18	1,57	2,09
J [кгм ²]	0,5	0,5	1,0	0,2
$M_{пуск}$	1,8	1,8	1,7	1,9
M_k	2,2	2,2	2,2	2,5
M_e	$0,2 M_n$	$0,2 M_n$	$0,2 M_n$	$0,2 M_n$

В табл. 11 $\omega_{n,d}$ — номинальная скорость двигателя;
 $\omega_{n,ob}$ — номинальная скорость объекта.

Механическую характеристику двигателя рассчитать по уравнению

$$M_d = \frac{2M_k(1+\epsilon)}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s} + 2\epsilon}. \quad (2)$$

Полагая $\epsilon \approx s_k$, что в большинстве случаев справедливо, ибо

$$s_k = \pm \sqrt{\frac{r_2}{r_1^2 + x_k^2}}; \quad \epsilon = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + x_k^2}}; \quad \text{а } r_1 \approx r_2 \quad [\text{Л. 4}].$$

Величину s_k можно определить из уравнения (2)

$$\frac{M_k}{M_n} = \frac{\frac{s_n}{s_k} + \frac{s_k}{s_n} + 2s_k}{2(1+s_k)} = \lambda_M,$$

Зная s_k , нетрудно рассчитать и построить механическую характеристику.

Требуется перевести объект управления из положения $\varphi = 0$, $\omega = 0$ при $t = 0$ в положение $\varphi = \varphi_{n,ob}$, $\omega = 0$ за минимальное время при заданных ограничениях напряжения, приложенного к двигателю $0 \leq U \leq U_{max} = U_n$, и скорости движения объекта $\omega_{ob} \leq \omega_{ogr,ob}$. Определить моменты переключения и построить оптимальный переходный процесс, используя для решения задачи графоаналитический метод.

Задача 24. Дан объект управления, описываемый уравнением

$$T_1 \dot{T}_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = kU, \quad (1)$$

где $T_1 = 0,5$ сек; $T_2 = 1,0$ сек; $k = 1$.

Требуется перевести объект управления из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 1$ ед., $\dot{x} = 0$ за минимальное время при ограничении управляющего воздействия $0 \leq U \leq U_{max} = 2$ ед., т. е. смена знака управляющего воздействия недопустима. Определить моменты переключения и построить оптимальный переходный процесс.

Решение

1. Определение моментов переключения

Для определения моментов переключения воспользуемся методом стыкования решений дифференциального уравнения. Запишем решение уравнения (1) на первом интервале:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= C'_0 + C'_1 e^{-\alpha_1 t} + C'_2 e^{-\alpha_2 t}; \\ \dot{x}(t) &= -\alpha_1 C'_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 C'_2 e^{-\alpha_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $C'_0 = kU$; C'_1, C'_2 — постоянные интегрирования на первом интервале управления;

$-\alpha_1 = -\frac{1}{T_1}$; $-\alpha_2 = -\frac{1}{T_2}$ — корни характеристического уравнения.

Используя начальные условия при $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, определяем постоянные интегрирования:

$$x = C'_0 + C'_1 + C'_2 = 0;$$

$$\dot{x} = -\alpha_1 C'_1 - \alpha_2 C'_2 = 0,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} C_1' &= \frac{kUT_1}{T_2 - T_1}; \\ C_2' &= -\frac{kUT_2}{T_2 - T_1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Запишем решение уравнения (1) на втором интервале управления:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= C_1'' e^{-\alpha_1 t} + C_2'' e^{-\alpha_2 t}; \\ \dot{x}(t) &= -\alpha_1 C_1'' e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 C_2'' e^{-\alpha_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Учитывая конечные условия при $t = t_2$, $x = x_n$, $\dot{x} = 0$, определяем постоянные интегрирования на втором интервале:

$$\begin{aligned} x_n &= C_1'' e^{-\alpha_1 t_2} + C_2'' e^{-\alpha_2 t_2}; \\ \dot{x} &= -\alpha_1 C_1'' e^{-\alpha_1 t_2} - \alpha_2 C_2'' e^{-\alpha_2 t_2} = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} C_1'' &= \frac{x_n e^{t_2/T_1}}{T_1 - T_2}; \\ C_2'' &= -\frac{x_n e^{t_2/T_2}}{T_1 - T_2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Производим стыкование решений в момент времени t_1 :

$$\begin{aligned} C_0' + C_1' e^{-\alpha_1 t_1} + C_2' e^{-\alpha_2 t_1} &= C_1'' e^{-\alpha_1 t_1} + C_2'' e^{-\alpha_2 t_1}; \\ -\alpha_1 C_1' e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C_2' e^{-\alpha_2 t_1} &= -\alpha_1 C_1'' e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C_2'' e^{-\alpha_2 t_1} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (C_1' - C_1'') e^{-\alpha_1 t_1} + (C_2' - C_2'') e^{-\alpha_2 t_1} &= -C_0'; \\ \alpha_1 (C_1' - C_1'') e^{-\alpha_1 t_1} + \alpha_2 (C_2' - C_2'') e^{-\alpha_2 t_1} &= 0. \end{aligned}$$

Исключая постоянные интегрирования, получим систему уравнений для определения моментов переключения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_n}{kU} e^{\alpha_1 t_2} - e^{\alpha_1 t_1} + 1 &= 0; \\ \frac{x_n}{kU} e^{\alpha_2 t_2} - e^{\alpha_2 t_1} + 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подставим в уравнения системы (6) численные значения:

$$\left. \begin{aligned} 0,5 e^{2t_2} - e^{2t_1} + 1 &= 0; \\ 0,5 e^{2t_2} - e^{t_1} + 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Уравнения системы (7) выразим относительно t_1 :

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 0,5 \ln(0,5 e^{2t_2} + 1) = f_1(t_2); \\ t_1 &= \ln(0,5 e^{2t_2} + 1) = f_2(t_2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Решаем графически полученную систему уравнений. Расчет сводим в табл. 12. По данным таблицы построим зависимости $t_1 = f_1(t_2)$ и $t_1 = f_2(t_2)$ (рис. 16). Из рисунка получаем $t_1 = 1,1$ сек; $t_2 = 1,4$ сек.

Таблица 12

	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,50	1,75
$2t_2$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
e^{t_2}	1,28	1,65	2,12	2,72	3,49	4,48	5,75
e^{2t_2}	1,65	2,72	4,48	7,39	12,18	20,09	33,12
$0,5 e^{t_2} + 1$	1,64	1,82	2,06	2,36	2,75	3,24	3,88
$0,5 e^{2t_2} + 1$	1,82	2,36	3,24	4,69	7,09	11,04	17,56
$t_1 = f_2(t_2)$	0,49	0,60	0,72	0,86	1,01	1,18	1,35
$\ln(0,5 e^{2t_2} + 1)$	0,60	0,86	1,18	1,54	1,96	2,40	2,92
$t_1 = f_1(t_2)$	0,3	0,43	0,59	0,77	0,98	1,20	1,46

2. Определение оптимальной траектории

Запишем уравнение движения управляемой координаты на первом интервале $0 \leq t \leq t_1$, подставив в выражение (2) значения постоянных интегрирования из системы (3)

$$x(t) = kU + \frac{kUT_1}{T_2 - T_1} e^{-\alpha_1 t} - \frac{kUT_2}{T_2 - T_1} e^{-\alpha_2 t}$$

или в цифрах, для интервала $0 \leq t \leq 1,1$

$$x(t) = 2(1 + e^{-2t} - 2e^{-t}).$$

Движение управляемой координаты на втором интервале определяется уравнением (4). Вычислим постоянные интегрирования C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{0,5 e^{2t_2}}{-0,5} = -e^{2t_2} = -16,4;$$

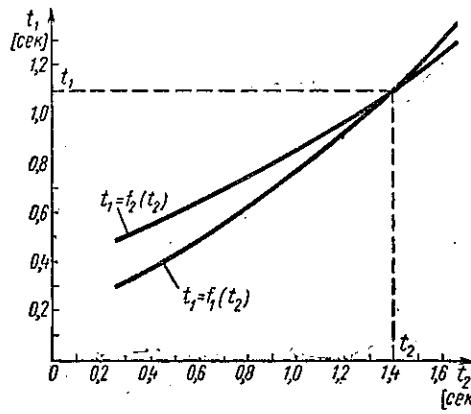


Рис. 16. Графическое решение системы трансцендентных уравнений

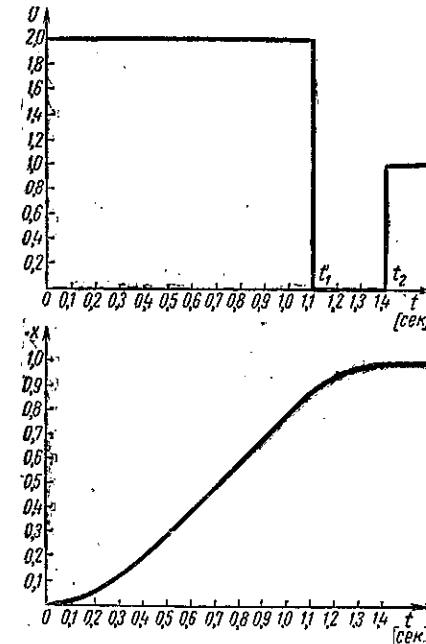


Рис. 17. Алгоритм управления и переходный процесс для нереверсивного объекта управления

$$C''_2 = \frac{e^{t_2}}{0,5} = 8.$$

Тогда для интервала \$t_1 \leq t \leq t_2\$

$$x(t) = -16,4 e^{-2t} + 8e^{-t}.$$

Результаты расчета сведены в табл. 13. Зависимость \$x(t)\$ представлена на рис. 17, там же представлен и алгоритм управления.

Таблица 13

t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
$x(t)$	0	0,06	0,22	0,4	0,6	0,78	0,9	0,93	0,98	1,01

§ 3. РАСЧЕТ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

Задача. 25. Объект управления описывается уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = kU,$$

где \$T_1 = 0,5\$ сек; \$T_2 = 0,3\$ сек; \$k = 2,15\$; \$|U| \leq U_{\max} = 127\$ ед.

На объект действует помеха, которая искажает расчетную траекторию. Расчетные и реальные значения координат приведены в табл. 14.

Экстраполировать помеху полиномом \$x_f = a_0 + a_1 t\$ [Л.2], используя расчетные и реальные значения координат на все интервалы управления. Определение коэффициентов полинома произвести двумя способами.

Таблица 14

t [сек]	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
x_p	0	20,98	74,02	122,62	163,50	196,20
x	0	23,08	81,42	134,89	178,9	215,8
\dot{x}	—	—	287,76	—	—	—
\ddot{x}_p	—	—	261,60	—	—	—

Решение

1. Определение коэффициентов полинома помехи по замеру координаты и ее производных.

Так как в точке $t_1 = 0,4$ сек замерена сама координата и ее производная \dot{x} , то можно для определения полинома помехи записать следующие уравнения на момент времени t_1 :

$$\left. \begin{array}{l} x - x_p = a_0 + a_1 t_1; \\ \dot{x} - \dot{x}_p = a_1. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Подставляя численные значения из табл. 14 в уравнения системы (1), получаем

$$81,42 - 74,02 = a_0 + a_1 \cdot 0,4;$$

$$287,76 - 261,6 = a_1.$$

$$\text{Отсюда } a_1 = 26,16; a_0 = -3,06; x_f = -3,06 + 26,16t.$$

2. Определение коэффициентов полинома помехи по нескольким замерам координаты.

Если замерить производную \dot{x} невозможно, то используется второй метод определения коэффициентов полинома помехи по нескольким замерам самой координаты. Допустим, удалось замерить координаты в точках $t_1 = 0,4$ сек и $t_2 = 0,6$ сек. На основании реальных и расчетных значений координат составим уравнения для определения коэффициентов полинома помехи:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_{1p} = a_0 + a_1 t_1; \\ x_2 - x_{2p} = a_0 + a_1 t_2. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Подставляя численные значения из табл. 14 в уравнения системы (2), получаем:

$$81,42 - 74,02 = a_0 + a_1 \cdot 0,4;$$

$$134,89 - 122,62 = a_0 + a_1 \cdot 0,6.$$

Отсюда

$$a_1 = 24,3; a_0 = -2,32; x_f = -2,32 + 24,3t.$$

Разница в коэффициентах полинома помехи получилась потому, что при определении первым способом бралась только одна точка траектории, при определении вторым способом — линеаризованный участок ее от t_1 до t_2 .

Задача 26. Объект управления описывается уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = kU, \quad (1)$$

где $T_1 = 0,5$ сек; $T_2 = 0,3$ сек; $k = 2,15$; $|U| \leq U_{\max} = 127$ ед.

С момента времени $t_n = 0,4$ сек на объект действует помеха $x_f = a_0 + a_1 t$, где

$$a_0 = -3,06; a_1 = 26,16.$$

Определить моменты переключения t_1 и t_2 с учетом помехи, действующей на объект, и рассчитать оптимальную траекторию.

Решение

1. Определение моментов переключения.

Поставленная задача при заданных значениях параметров, но без учета помехи, была уже решена (задача 18), откуда стало известно, что алгоритм управления должен иметь два интервала знакопостоянства $\pm U_{\max}$. Необходимо получить систему уравнений для определения новых моментов переключения с учетом полинома помехи.

Снова воспользуемся методом стыкования решений дифференциальных уравнений со знакопеременной правой частью.

Решение уравнения (1) на первом и втором интервалах хорошо известно:

$$x(t) = C_0 + C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} + a_0 + a_1 t;$$

$$\dot{x}(t) = -a_1 C_1 e^{-a_1 t} - a_2 C_2 e^{-a_2 t} + a_1.$$

Из решения уравнения определим постоянные интегрирования. Для этого примем момент времени $t = -0,4$ сек за новый отсчет времени $t = 0$. Этим самым как бы начнем управление с точки $x_{1p} = 74,02$; $\dot{x}_{1p} = 261,6$ (табл. 14). Тогда решение на начало управления будет иметь вид:

$$C'_0 + C'_1 + C'_2 + a_0 = x_{1p};$$

$$-a_1 C'_1 - a_2 C'_2 + a_1 = \dot{x}_{1p}.$$

Значения постоянных интегрирования на втором ин-

тервале найдем из конечных условий, записав решение на конец второго интервала при $t = t_2$, $x = x_n$, $\dot{x} = 0$:

$$x_n = C_0'' + C_1'' e^{-\alpha_1 t_2} + C_2'' e^{-\alpha_2 t_2} + a_0 + a_1 t_2;$$

$$\dot{x} = -\alpha_1 C_1'' e^{-\alpha_1 t_2} - \alpha_2 C_2'' e^{-\alpha_2 t_2} + a_1 = 0.$$

Производим стыкование решений на момент переключения t_1 :

$$\begin{aligned} &C_0' + C_1' e^{-\alpha_1 t_1} + C_2' e^{-\alpha_2 t_1} + a_0 + a_1 t_1 = \\ &= C_0'' + C_1'' e^{-\alpha_1 t_1} + C_2'' e^{-\alpha_2 t_1} + a_0 + a_1 t_1; \\ &-\alpha_1 C_1' e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C_2' e^{-\alpha_2 t_1} + a_1 = \\ &= -\alpha_1 C_1'' e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C_2'' e^{-\alpha_2 t_1} + a_1. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений постоянные интегрирования, получаем систему уравнений для определения моментов переключения:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{x_n - a_0}{kU} - \frac{a_1}{\alpha_2 kU} - \frac{a_1 t_2}{kU}\right) e^{\alpha_1 t_2} - 2e^{\alpha_1 t_1} + \\ &+ \left(1 + \frac{a_0 - x_{1p}}{kU} + \frac{a_1 - x_{1p}}{\alpha_2 kU}\right) = 0; \\ &\left(1 + \frac{x_n - a_0}{kU} - \frac{a_1}{\alpha_1 kU} - \frac{a_1 t_2}{kU}\right) e^{\alpha_2 t_2} - 2e^{\alpha_2 t_1} + \\ &+ \left(1 + \frac{a_0 - x_{1p}}{kU} + \frac{a_1 - x_{1p}}{\alpha_1 kU}\right) = 0. \end{aligned}$$

Подставим численные значения в последние уравнения:

$$(1,85 - 0,096t_2) e^{2t_2} - 2e^{2t_1} + 0,4 = 0;$$

$$(1,83 - 0,096t_2) e^{3,3t_2} - 2e^{3,3t_1} + 0,22 = 0.$$

Эти два трансцендентных уравнения решаем приближенно графически. Для этого запишем их несколько иначе:

$$t_1 = 0,5 \ln \frac{(1,85 - 0,096t_2) e^{2t_2} + 0,4}{2}; \quad (2)$$

$$t_1 = 0,3 \ln \frac{(1,83 - 0,096t_2) e^{3,3t_2} + 0,22}{2}. \quad (3)$$

Задаваясь значениями t_2 , определяем t_1 для корней α_1 и α_2 . Расчет сводим в табл. 15.

Таблица 15

t_2	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
t_1	—	0,28	0,32	0,38	0,45	0,52	0,59	0,66
t_1	—	0,09	0,16	0,26	0,36	0,47	0,57	0,67

На рис. 18 показано графическое решение уравнений (2) и (3), из которого определяем: $t_1 = 0,64$ сек, $t_2 = 0,67$ сек, откуда $\Delta t = t_2 - t_1 = 0,67 - 0,64 = 0,03$ сек.

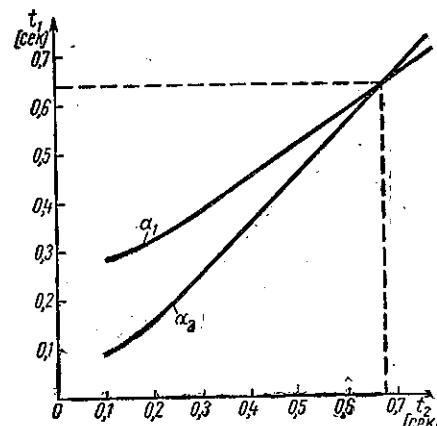


Рис. 18. Графическое решение трансцендентных уравнений для определения моментов переключения при воздействии помехи

Первое переключение следует сделать через 0,64 сек после определения выходных координат x и \dot{x} , следовательно, за это время нужно успеть провести приведенные выше расчеты. Это, конечно, может сделать только быстродействующая вычислительная машина.

2. Определение оптимальной траектории.

Для проверки правильности расчетов построим оптимальную траекторию. Решение дифференциального уравнения с учетом помехи имеет вид

$$x(t) = C'_0 + C'_1 e^{-\alpha_1 t} + C'_2 e^{-\alpha_2 t} + a_0 + a_1 t.$$

Постоянные интегрирования определяем из начальных условий при $t = 0$ ($t_n = 0,4$):

$$C'_0 + C'_1 + C'_2 + a_0 = x_{1p};$$

$$-\alpha_1 C'_1 - \alpha_2 C'_2 + a_1 = \dot{x}_{1p};$$

$$C'_0 = 272,0;$$

$$C'_1 = -274,0;$$

$$C'_2 = 86,0.$$

После определения постоянных интегрирования, имеем

$$x(t) = 272 - 274e^{-2t} + 86e^{-3,3t} - 3,06 + 26,16t.$$

Подставляя t от 0 до 0,64 сек, получаем участок траектории после замера координат, т. е. с момента времени $t = 0,4$ сек до момента $t_1 = 1,04$ сек.

Расчеты сводим в табл. 16.

Таблица 16

t	0	0,2	0,4	0,6	0,64
$x(t)$	74,02	134,89	179,95	215,92	220,90

Принимаем опять момент времени t_1 за 0 и определяем траекторию на участке торможения:

$$x(t) = C''_0 + C''_1 e^{-\alpha_1 t} + C''_2 e^{-\alpha_2 t} + a_0 + a_1 t = x_2 = 220,9;$$

$$\dot{x}(t) = -\alpha_1 C''_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 C''_2 e^{-\alpha_2 t} + a_1 = \dot{x}_2 = 143,5.$$

Определяем постоянные интегрирования и, подставляя их в решение, имеем

$$x(t) = -272 + 1333e^{-2t} - 835,8e^{-3,3t} - 3,06 + 26,16t.$$

Берем сразу промежуток времени $\Delta t = 0,03$ сек, тогда

$$x_n = -272 + 1333e^{-0,06} - 835,8e^{-0,1} - 3,06 + 26,16 \cdot 0,03 = 232,8.$$

На рис. 19 приведен алгоритм управления и переходный процесс с учетом помехи (сплошной линией) и без помехи (пунктирной линией), а также переходный процесс при воздействии помехи, но без пересчета алгоритма управления (штрихпунктирной линией).

Вариант задачи 26 для самостоятельного решения

На рис. 20 показаны переходные процессы: расчетный (1) и реальный (2). Объект описывается уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^3 x}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU,$$

где

$$T_1 = 0,5 \text{ сек};$$

$$T_2 = 0,66 \text{ сек};$$

$$k = 1; U_{\max} = 1.$$

Помеха экстраполируется полиномом

$$x_f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2.$$

Определить коэффициенты полинома помехи, делая замеры координат реального процесса в следующие моменты времени: 0,75 сек; 1 сек; 1,25 сек. Рассчитать новые моменты переключения с учетом действия помехи и построить переходный процесс.

Задача 27. Объект управления описывается уравнением

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU, \quad (1)$$

где $T = 0,62$ сек; $k = 0,0023$; $|U| \leq U_{\max} = 220$ ед.

Произвести синтез системы оптимальной по быстродействию методом фазовой плоскости. При этом необходимо уменьшить ошибку системы $\epsilon = x_0 - x$ от величины

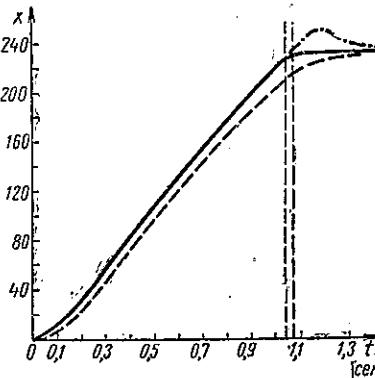
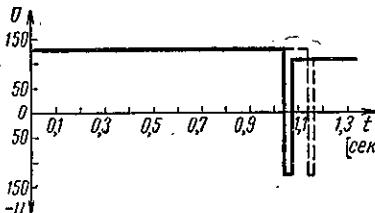


Рис. 19. Алгоритм управления и переходный процесс при учете помехи

$\dot{\epsilon} = \ddot{\epsilon}_0 = -0,5$; $\dot{\epsilon} = 0$ при $t = 0$ до величины $\epsilon = \epsilon_n = 0$; $\epsilon_n = 0$ за минимальное время. Определить функцию переключения.

Решение. Запишем уравнение (1) относительно ошибки системы

$$T \frac{d^2\epsilon}{dt^2} + \frac{d\epsilon}{dt} = -kU. \quad (2)$$

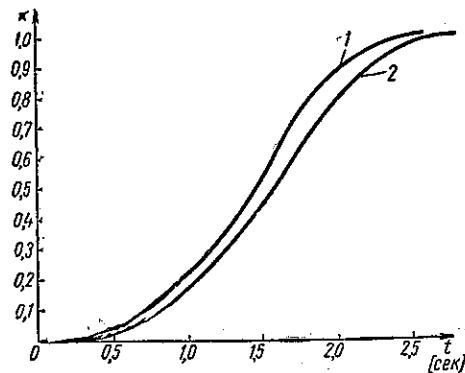


Рис. 20. Расчетный 1 и реальный 2 переходный процесс в объекте управления

Найдем уравнения фазовых траекторий, для чего перепишем уравнение (2) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = y; \quad (3)$$

$$T \frac{dy}{dt} = -kU - y. \quad (4)$$

Разделим уравнение (3) на (4)

$$\frac{d\epsilon}{dy} = T \frac{y}{-kU - y}. \quad (5)$$

Проинтегрируем выражение (5)

$$\int d\epsilon = -T \int \frac{y}{-kU - y} dy,$$

откуда

$$\epsilon = -Ty + TkU \ln|kU + y| + C.$$

Полученное уравнение используется для построения семейства фазовых траекторий.

Определим постоянную интегрирования C из начальных условий $\epsilon = \epsilon_0$ при $y = y_0$ и подставим в решение для ошибки

$$\epsilon = \epsilon_0 - T(y - y_0) + TkU \ln|kU + y| - TkU \ln|kU + y_0|. \quad (6)$$

Знак управляющего сигнала может изменяться не более одного раза. Запишем уравнение (6) с учетом знака U

$$\epsilon = \epsilon_0 - T(y - y_0) \pm TkU \ln|y \pm kU| \mp TkU \ln|y_0 \pm kU|. \quad (7)$$

Обозначим $\sigma = \pm 1$, тогда

$$\epsilon = \epsilon_0 - T(y - y_0) + \sigma TkU \ln|y + \sigma kU| - \sigma TkU \ln|y_0 + \sigma kU|. \quad (8)$$

Подставим численные значения коэффициентов в уравнение (8)

$$\epsilon = \epsilon_0 - 0,62(y - y_0) + \sigma \cdot 0,31 \ln|y + 0,5\sigma| - \sigma \cdot 0,31 \ln|y_0 + 0,5\sigma|. \quad (9)$$

Для заданных начальных условий ($\epsilon_0 = -0,5$; $y_0 = 0$) находим уравнение фазовой траектории для первого участка движения при $\sigma = -1$

$$\epsilon = -0,5 - 0,62y - 0,31 \ln|y - 0,5| + 0,31 \ln 0,5. \quad (10)$$

Это уравнение соответствует траектории AB (рис. 21).

Определим уравнение фазовой траектории при нулевых начальных условиях, т. е. траектории, проходящей через начало координат $\epsilon = 0$, $y = 0$

$$\epsilon = -0,62y + \sigma \cdot 0,31 \ln|y + 0,5\sigma| - \sigma \cdot 0,31 \ln 0,5. \quad (11)$$

Уравнение (11) является уравнением линии переключения (MON). Эта траектория является единственной, по которой можно попасть в начало координат.

Преобразуем уравнение (11), учитывая, что $\sigma = -\operatorname{sign} y$:

$$\varepsilon = -0,62y - \operatorname{sign} y \cdot 0,31 \ln |y - 0,5 \operatorname{sign} y| + \operatorname{sign} y \cdot 0,31 \ln 0,5.$$

Запишем закон регулирования (функцию переключения):

$$\mu = \varepsilon + 0,62y + 0,31 \operatorname{sign} y \ln |y - 0,5 \operatorname{sign} y| - \operatorname{sign} y \cdot 0,31 \ln 0,5.$$

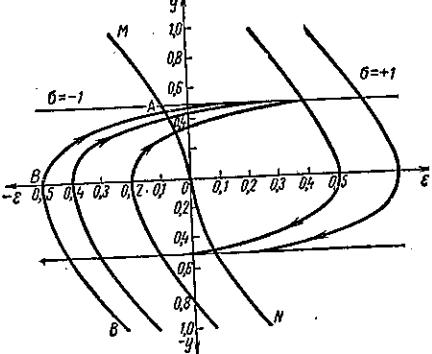


Рис. 21. Фазовые траектории при оптимальном управлении

В точке переключения A функция μ обращается в нуль.

Структурная схема оптимальной системы приведена на рис. 22.

Для реализации оптимального закона необходимы нелинейные преобразователи и идеальный релейный элемент (без зоны нечувствительности).

Задача 28. Объект управления описывается уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU,$$

где $T = 1$ сек; $|kU| \leq U_{\max} = 1 \frac{1}{\text{сек}}$.

Произвести синтез системы оптимальной по быстродействию методом фазовой плоскости при отработке линейно изменяющегося входного сигнала $x_0 = at$, где $a = 0,5 \frac{1}{\text{сек}}$. Начальные условия: $x(0) = 2$; $y(0) = 0$ при $t = 0$.

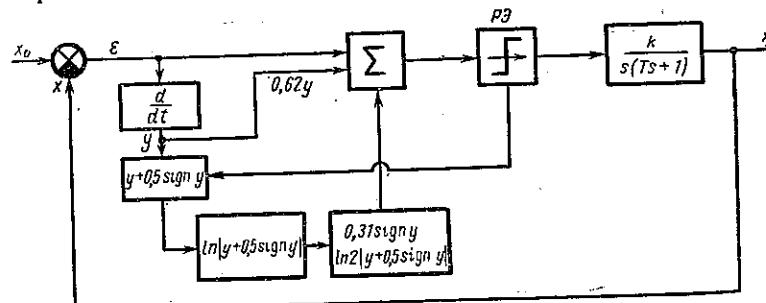


Рис. 22. Структурная схема замкнутой оптимальной системы

Решение. Запишем уравнение объекта относительно ошибки системы $\varepsilon = x_0 - x$

$$T \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt} = -\sigma U_{\max} + a,$$

где $\sigma = \pm 1$.

Отсюда можно определить условие управляемости объектом

$$|a| < |U_{\max}|.$$

Составляем уравнение фазовых траекторий

$$\varepsilon = -Ty - T(a - \sigma U_{\max}) \ln |y - a + \sigma U_{\max}| + C.$$

Учитывая начальные условия при $t = 0$, получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - T(y - y_0) - T(a - \sigma U_{\max}) \ln |y - a + \sigma U_{\max}| + T(a - \sigma U_{\max}) \ln |y_0 - a + \sigma U_{\max}|.$$

Запишем уравнение фазовой траектории для первого участка движения AB при $\varepsilon_0 = -2$; $y_0 = 0$; $\sigma = -1$ (рис. 23)

$$\varepsilon = -2 - y - 1,5 \ln |y - 1,5| + 1,5 \ln 1,5.$$

Функцию переключения можно получить, если принять $y_0 = \epsilon_0 = 0$ и ввести функцию $\mu = \epsilon + y + (0,5 + \text{sign } y) \ln |y - a - \text{sign } y| - (0,5 + \text{sign } y) \ln |0,5 + \text{sign } y|$, которая обращается в нуль в момент переключения знака управляющего сигнала. Как видно из формулы, функция переключения и фазовый портрет системы зависит, в отличие от задачи 27, от скорости изменения входного сигнала, поэтому фазовый портрет системы является квазистационарным.

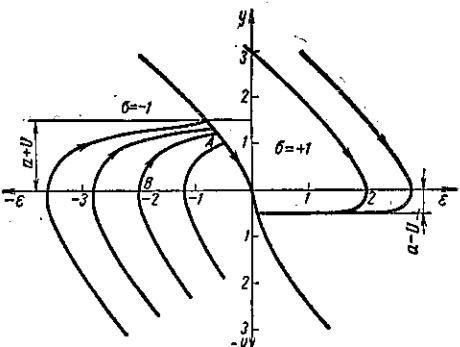


Рис. 23. Фазовый портрет при отработке линейно изменяющегося входного сигнала

Задача 29. Дан объект управления, описываемый уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU, \quad (1)$$

где $T = 0,62$ сек; $k = 0,0023$; $|U| \leq U_{\max} = 220$ ед.

Синтезировать замкнутую систему оптимального управления, переводящую объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 2,09$ ед., $\dot{x} = 0$ за минимальное время. Рассчитать коэффициенты обратных связей, линии переключения и функцию переключения замкнутой оптимальной системы.

Решение. Обозначив $\frac{dx}{dt} = y$, уравнение (1) представим в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dy}{dt} + y &= kU; \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Записываем решения для x и y :

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= C_0 t + C_1 + C_2 e^{-at}; \\ y(t) &= C_0 - aC_2 e^{-at}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если исключить из этих двух уравнений t , то получим зависимость $x = f(y)$, т. е. фазовую траекторию. Из второго уравнения системы (3) определяем t

$$e^{-at} = \frac{C_0 - y}{aC_2}, \quad (4)$$

отсюда

$$t = \frac{1}{a} \ln \frac{aC_2}{C_0 - y}. \quad (5)$$

После подстановки уравнений (4) и (5) в уравнение $x(t)$ имеем

$$x = \frac{C_0}{a} \ln \frac{aC_2}{C_0 - y} + C_1 + \frac{C_0 - y}{a}. \quad (6)$$

Полученная функция $x = f(y)$ является фазовой траекторией.

Построим фазовую траекторию для первого интервала управления (при разгоне). Эта траектория будет являться одновременно и линией переключения, так как имеется всего два интервала управления.

Подставив значения постоянных интегрирования из задачи 13 и меняя y от нуля до значения kU , получим фазовую траекторию

$$\begin{aligned} x &= \frac{kU}{a} \ln \frac{akU}{a(kU - y)} - \frac{kU}{a} + \frac{kU - y}{a} = \\ &= \left(kU \ln \frac{kU}{kU - y} - y \right) T = \left(0,5 \ln \frac{0,5}{0,5 - y} - y \right) \cdot 0,62. \end{aligned}$$

Для удобства расчета составляем табл. 17.

Таблица 17

y	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45	0,48	0,49
$\frac{0,5}{0,5-y}$	1	1,25	1,66	2,5	5	10	25	50
$\ln \frac{0,5}{0,5-y}$	0	0,22	0,51	0,92	1,61	2,3	3,23	3,90
$x = f(y)$	0	0,003	0,035	0,10	0,25	0,44	0,7	1,22

Второй участок траектории (при торможении) будет также описываться уравнением (6), но только теперь постоянные интегрирования следует определить, исходя из новых начальных условий. При этом получаем:

$$C_0'' = -kU;$$

$$C_1'' = x_1 + \frac{y_1 + kU}{\alpha};$$

$$C_2'' = -\frac{y_1 + kU}{\alpha}.$$

Тогда фазовая траектория будет описываться уравнением

$$x = -kUT \ln \frac{kU + y_1}{kU + y} + x_1 + (y_1 - y)T. \quad (7)$$

Подставляя численные значения коэффициентов (значения x_1 и $y_1 = \dot{x}_1$ берем из задачи 13), имеем

$$x = -0,31 \ln \frac{1}{0,5+y} + 1,98 + (0,5-y) \cdot 0,62.$$

Расчеты сводим в табл. 18.

Таблица 18

y	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4
$\frac{1}{0,5+y}$	1	1,11	1,25	1,42	1,66	2	2,5	3,33	5	10
$\ln \frac{1}{0,5+y}$	0	0,1	0,23	0,35	0,51	0,69	0,93	1,2	1,61	2,3
$0,5-y$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$x = f(y)$	1,98	2,01	2,03	2,07	2,08	2,08	2,06	2,03	1,96	1,8

Уравнение фазовой траектории, если ее строить не из точки x_1 , а из точки x_n , запишется как

$$x = -kUT \ln \frac{kU}{kU + y} + x_n - yT. \quad (8)$$

Так как вид траектории не зависит от начальных условий, то можно сделать шаблон и по нему строить

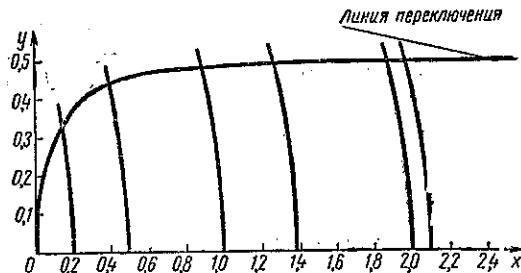


Рис. 24. Фазовые траектории при оптимальном управлении

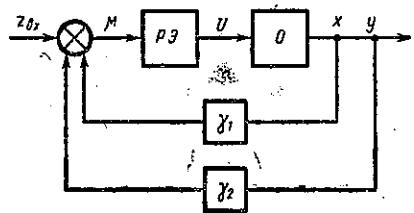


Рис. 25. Блок-схема замкнутой оптимальной системы

фазовые траектории при торможении (рис. 24). По фазовым траекториям определяют координаты x и y в момент переключения (x_1 , y_1) при заданном значении координаты x_n . А зная x_1 и y_1 , подбирают и коэффициенты обратных связей. Схема с обратными связями показана на рис. 25.

Составим функцию переключения для момента переключения и конца управления:

$$\mu = z_{Bx} - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 y_1 = 0;$$

$$\mu = z_{Bx} - \gamma_1 x_n = 0,$$

откуда

$$\gamma_1 = \frac{z_{bx}}{x_n};$$

$$\gamma_2 = \frac{z_{bx} - z_{bx} \cdot \frac{x_1}{x_n}}{y_1}.$$

По фазовым траекториям находим γ_1 и γ_2 для различных x_n . Примем, что обратные связи по координатам x и y осуществляются с помощью датчиков, дающих на выходе величины в тех же единицах, что и z_{bx} ; при этом отработка координаты $x_n = 2,09$ ед. соответствует сигналу с датчика обратной связи в 5 ед., а при $y = 0,5$ со второго датчика снимается сигнал в 0,5 ед. Исходя из этого, $\gamma_1 = 1$. Таким образом, остается определить только $\gamma_2 = f(y)$. Примем $z_{bx} = 5$ ед. Задаемся значениями y : 0,5; 0,49; 0,48; 0,44; 0,34 и для них подсчитываем γ_2 (табл. 19).

Таблица 19

y	0,5	0,49	0,48	0,44	0,34
γ_2	0,60	0,60	0,60	0,5	0,37

Для расчета релейного звена построим функцию переключения для $x_n = 2,09$ ед.

$$\mu = z_{bx} - x - 0,6y.$$

Беря значения x и y с фазовой траектории, получаем значения μ . Расчеты сведены в табл. 20 при $z_{bx} = 5$ ед

Таблица 20

x	0	0,2	0,5	1	1,4	1,88	1,9	1,95	1,98	2,09
y	0	0,37	0,45	0,48	0,5	0,5	0,45	0,3	0,1	0
μ	5	4,28	3,48	2,12	1,2	0	-0,02	0,05	-0,01	0

Изменение коэффициента γ_2 и функция переключения μ показаны на рис. 26.

Эту функцию следует преобразовать в релейный сигнал с помощью любого усилителя, имеющего зону насыщения и малую зону нечувствительности.

Задача 30. Объект управления описывается уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU,$$

где $T = 0,62$ сек; $k = -0,0023$; $|U| \leq U_{\max} = 220$ ед.

Синтезировать замкнутую систему оптимального управления, переводящую объект из положения $x = 0$,

$x = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 2,09$ ед.,

$x = 0$ за минимальное время при заданном ограничении производной от управляемой координаты

$x \leq x_{\max} = 0,4 \frac{\text{ед}}{\text{сек}}$. Определить функцию переключения и составить структурную схему.

Решение. Определим, как и в задаче 17, время разгона до x_{\max} .

$$t_1 = T \ln \frac{kU_{\max}}{kU_{\max} - x_{\max}} = 0,62 \ln \frac{0,5}{0,5 - 0,4} = 1 \text{ сек.}$$

Значение координаты x , отработанной за время t_1 , будет

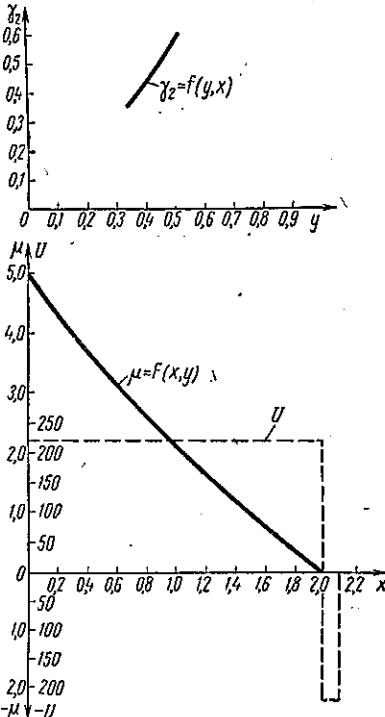


Рис. 26. Зависимость коэффициента обратной связи γ_2 от промежуточной координаты и функция переключения μ для замкнутой оптимальной системы

$$x_1 = kU_{\max}(t_1 - T) + T(kU_{\max} - \dot{x}_{\max}) = \\ = 0,5(1 - 0,62) + 0,62(0,5 - 0,4) = 0,25 \text{ ед.}$$

Определим время торможения противовключением с \dot{x}_{\max} до $\dot{x} = 0$

$$t_2 = T \ln \frac{\dot{x}_{\max} + kU_{\max}}{kU_{\max}} = 0,62 \ln \frac{0,4 + 0,5}{0,5} = 0,37 \text{ сек.}$$

Отсюда определяем значение координаты x , пройденной за время торможения t_2 :

$$x_2 = -kU_{\max}t_2 + \dot{x}_{\max}T = \\ = 0,5 \cdot 0,37 + 0,4 \cdot 0,62 = 0,063 \text{ ед.}$$

Значение координаты, пройденной с $\dot{x} = \dot{x}_{\max} = \text{const}$, будет

$$x_{\text{const}} = x_n - x_1 - x_2 = 2,09 - 0,25 - 0,063 = 1,78 \text{ ед.}$$

Перейдем теперь к определению функции переключения.

Известно, что при ограничении значения производной $|x^l| \leq |x_{\max}^l|$ в системе n -го порядка для осуществления оптимального управления необходимо иметь $N = (n - l)(l + 1) \geq n$ интервалов управления и l участков стабилизации. Осуществить оптимальное управление в этом случае невозможно с помощью только одной функции переключения μ , как это сделано в задаче 29. Необходимо и достаточно иметь две функции переключения $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$.

Функция $\mu_1(t)$ формирует моменты переключения для оптимального управления координатой x^l для вывода ее на координату x_{\max}^l и переключает затем систему на режим стабилизации x_{\max}^l . После окончания участка стабилизации снова $\mu_1(t)$ формирует моменты переключения и т. д.

Функция $\mu_2(t)$ формирует моменты переключения для начала управления координатой x^l . Функция $\mu_2(t)$ является задающей по отношению к $\mu_1(t)$, т. е. определяет знак и момент включения $\mu_1(t)$.

В общем виде функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ имеют следующий вид:

$$\mu_1(t) = x_{\max}^l - x^l(t) - k_1 x^{l+1}(t) - \dots - k_{n-l+1} x^{n-1}(t);$$

$$\mu_2(t) = [x(t_m) - x(t)] + k_1 [x(t_m) - \dot{x}(t)] + \dots + \\ + k_{l-1} [x^{l-1}(t_m) - x^{l-1}(t)],$$

где t_m — момент времени, соответствующий окончанию последнего участка стабилизации x_{\max}^l .

В функцию $\mu_1(t)$ входит координата x^l и ее высшие производные до x^{n-1} .

В функцию $\mu_2(t)$ входит координата x и ее производные до x^{l-1} . Таким образом, каждая функция управляет только «своими» координатами.

Для рассматриваемого примера ($n = 2$, $l = 1$) число интервалов управления для вывода производной \dot{x} на значение $\dot{x} = \dot{x}_{\max}$ равно $n - l = 1$, т. е. необходим один интервал управления. Общее число интервалов для управления координатой x $N = (n - l)(l + 1) = 1 \cdot 2 = 2$. Число участков стабилизации $N_{\text{ст}} = l = 1$.

Определим $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ согласно общим выражениям:

$$\mu_1(t) = \dot{x}_{\max} - \dot{x}(t);$$

$$\mu_2(t) = x(t_m) - x(t) = (x_1 + x_{\text{const}}) - x(t).$$

В момент окончания стабилизации ($t = t_m$) $\mu_2(t) = 0$.

На последнем интервале управления $\mu_1(t) = -\dot{x}(t)$, так как в конечной точке $\dot{x} = 0$. На последнем интервале управления функция $\mu_2(t) = 0$.

Возможно обе функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ объединить в одну, так как $\mu_2(t)$ — задающая по отношению к $\mu_1(t)$

$$\mu_1(t) = \text{sign } \mu_2(0) \cdot [\dot{x}_{\max} - \dot{x}(t)] = \\ = \text{sign}(x_1 + x_{\text{const}}) \cdot [\dot{x}_{\max} - \dot{x}(t)],$$

где $\mu_2(0)$ — значение $\mu_2(t)$ при $t = 0$; знак $\mu_2(0)$ определяет знак \dot{x}_{\max} .

Так как

$$x_1 + x_{\text{const}} = x_n - x_2,$$

то

$$\mu_2(t) = (x_n - x_2) - x(t),$$

где x_n — уставка системы, значение координаты которой необходимо отработать.

График работы системы представлен на рис. 27 и не требует особых пояснений.

На рис. 28 изображена структурная схема оптимальной системы. При постоянных параметрах системы $x_2 = \text{const}$ и определяется как путь торможения с установленнойся скоростью \dot{x}_{\max} .

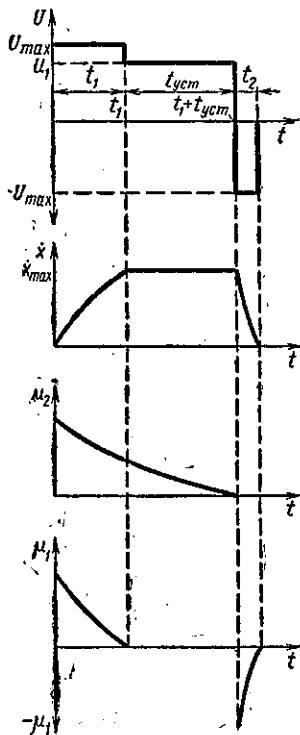
Реализация системы достаточно проста.

В суммирующем устройстве $CY1$ происходит вычисление $\mu_2(t) = (x_n - x_2) - x(t)$, где $x(t)$ — текущее значение управляемой координаты x . Функция $\mu_2(t)$ поступает на вход релейного элемента $P\mathcal{E}1$, на выходе которого формируются управляющие сигналы.

Рис. 27. Оптимальные траектории и функции переключения для замкнутой оптимальной системы с ограничением производной

При $t = 0$ $x(0) = 0$, в $CY1$ задано x_n , которое необходимо отработать, и постоянно задано $x_2 = \text{const}$. Поэтому $\mu_2(t) \neq 0$ и $P\mathcal{E}1$ сработает, подав сигнал в $CY2$.

В суммирующем устройстве $CY2$ производится вычисление $\mu_1(t) = \dot{x}_{\max} - \dot{x}(t)$, где $\dot{x}(t)$ — текущее значение производной от координаты x [в случае двигателя $\dot{x}(t)$



измеряется тахогенератором]. $P\mathcal{E}1$ подключает к $CY2$ x_{\max} определенного знака, в зависимости от знака $\mu_2(0)$.

При $t = 0$ $\dot{x}(t) = 0$, $P\mathcal{E}2$ сработает и подаст на вход объекта сигнал $U = U_{\max}$, начинается движение коорди-

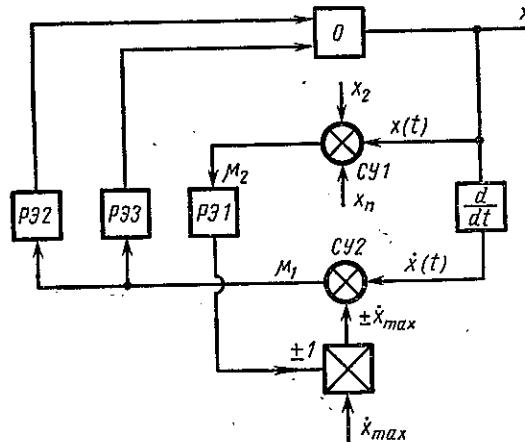


Рис. 28. Структурная схема оптимальной системы с ограничением производной

наты x и \dot{x} . Как только $\dot{x}(t)$ сравняется с \dot{x}_{\max} , отключается $P\mathcal{E}2$ и включается $P\mathcal{E}3$, который переключает вход объекта на меньший сигнал, соответствующий в установленном режиме $\dot{x}_{\max} = kU_1$.

Далее идет участок стабилизации. Затем при $\mu_2(t) = 0$ от $CY2$ отключается сигнал, задающий значение ограниченной координаты \dot{x}_{\max} . При этом $\mu_1(t) = -\dot{x}(t)$, т. е. изменяет знак. Переключается $P\mathcal{E}2$ и реверсирует входной сигнал, подавая на вход объекта $U = -U_{\max}$. Отключается $P\mathcal{E}3$.

В конце управления $\dot{x}(t) = 0$ и $P\mathcal{E}2$ отключается.

Для выбора релейного элемента построим функции переключения μ_1 и μ_2 , используя такие же датчики, как и в задаче 29. Для этого строим фазовую траекторию

с ограничением координаты x (рис. 29, а). Входной сигнал $U = U_1$, пропорциональный величине \dot{x}_{\max} , равен 176 ед., а сигнал, снимаемый с датчика обратной связи при координате $x = 2,09$, равен 5 ед.

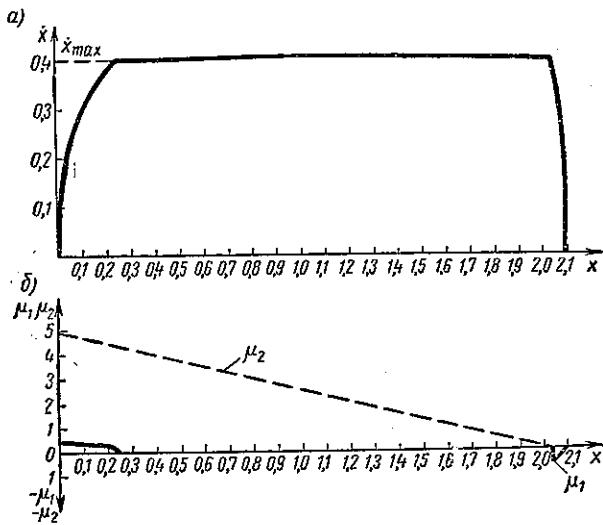


Рис. 29. Фазовая траектория (а) и функция переключения (б) для системы с ограничением производной

Используя фазовую траекторию (рис. 29, а), строим функции μ_1 и μ_2 в зависимости от x по формулам:

$$\mu_1 = kU_1 - \gamma_1 U(x);$$

$$\mu_2 = U_2 - \gamma_2 U(x),$$

где $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$;

U_2 — постоянная уставка, которая может быть определена из уравнения $\mu_2 = U_2 - \gamma_2 U(x_n - x_2) = 0$,

$$U_2 = \gamma_2 \cdot 5 \frac{2,03}{2,09} = 4,85 \text{ ед.}$$

Функции μ_1 и μ_2 показаны на рис. 29, б.

Из рис. 29, б видно, что для нормального срабатывания реле сигнала, пропорциональный μ_1 , следует увеличить или за счет выбора другого датчика скорости, или за счет его усиления электронным усилителем.

Алгоритм управления $U(t)$ не отличается от приведенного в задаче 17.

Недостаток схемы состоит в том, что x_2 не является постоянной величиной, а зависит от многих факторов. Поэтому система, оптимальная при $x_2 = \text{const}$, не будет оптимальной при изменении x_2 .

Предлагается читателям самим построить функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$.

Задача 31. Объект управления описывается уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = kU, \quad (1)$$

где $T = 0,3$ сек; $T_2 = 0,5$ сек; $k = k_1 k_2$; $k_1 = 2$; $k_2 = 1,07$; $|U| \leq U_{\max} = 220$ ед.

Синтезировать замкнутую систему оптимального управления, переводящую объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 236$ ед., $\dot{x} = 0$ за минимальное время. Рассчитать коэффициенты обратных связей замкнутой оптимальной системы.

Решение. Поскольку уравнение (1) описывает объект, состоящий из двух инерционных звеньев, соединенных последовательно, то оно может быть записано в виде двух уравнений:

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = k_1 U; \quad (2)$$

$$T_2 \frac{dx}{dt} + x = k_2 y. \quad (3)$$

Такое представление в целом ряде случаев облегчает решение поставленной задачи, так как часто легче контролировать промежуточную координату, чем производную от выходной координаты. Запишем решение уравнения (2), приняв, что при $t = 0$ $y = y_0$

$$y(t) = k_1 U + (y_0 - k_1 U) e^{-t/T_1}. \quad (4)$$

Тогда уравнение (3) при подстановке значения y из выражения (4) перепишется

$$T_2 \frac{dx}{dt} + x = k_2 [k_1 U + (y_0 - k_1 U) e^{-t/T_1}]$$

или

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T_2} x = \frac{k_2}{T_2} [k_1 U + (y_0 - k_1 U) e^{-t/T_1}]. \quad (5)$$

Общий интеграл уравнения (5)

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int_{T_1}^t dt} \left\{ \int \frac{k_2}{T_2} [k_1 U + (y_0 - k_1 U) e^{-t/T_1}] e^{\int_{T_1}^t dt} dt + C_2 \right\} = \\ &= e^{-t/T_2} \left[k_1 k_2 U e^{t/T_2} (y_0 - k_1 U) \frac{k_2 T_1}{T_1 - T_2} e^{\frac{t(T_1 - T_2)}{T_1 T_2}} + C_2 \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $e^{\int_{T_1}^t dt}$ — интегрирующий множитель.

После определения постоянной интегрирования C_2 из условия, что в момент времени $t = 0$, $x = x_0$, выражение (6) перепишется:

$$\begin{aligned} x(t) &= k_1 k_2 U + (y_0 - k_1 U) \frac{k_2 T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \\ &+ \left[x_0 - k_1 k_2 U - (y_0 - k_1 U) \frac{k_2 T_1}{T_1 - T_2} \right] e^{-t/T_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если из полученных уравнений (4) и (7) исключить время, то получим зависимость $x = f(y)$, т. е. уравнение фазовой траектории.

Из выражения (4) определим

$$e^{-t/T_1} = \frac{y(t) - k_1 U}{y_0 - k_1 U} = \frac{y - y_{\max}}{y_0 - y_{\max}}. \quad (8)$$

Подставляя значение e^{-t/T_1} в выражение (7), получим

$$\begin{aligned} x(t) &= k_1 k_2 U + (y - y_{\max}) \frac{k_2 T_1}{T_1 - T_2} + \left[x_0 - k_1 k_2 U - \right. \\ &\quad \left. - (y_0 - k_1 U) \frac{k_2 T_1}{T_1 - T_2} \right] e^{-t/T_2}, \end{aligned}$$

или

$$x(t) = x_{\max} + (x - x_{\max}) \frac{T_1}{T_1 - T_2} +$$

$$+ \left[x_0 - x_{\max} - (x_0 - x_{\max}) \frac{T_1}{T_1 - T_2} \right] e^{-t/T_2}.$$

После упрощения

$$T_2(x - x_{\max}) = T_2(x_0 - x_{\max}) e^{-t/T_2},$$

откуда имеем

$$e^{-t/T_2} = \frac{x - x_{\max}}{x_0 - x_{\max}}. \quad (9)$$

Прологарифмировав выражения (8) и (9), получаем:

$$t = T_1 \ln \frac{y_0 - y_{\max}}{y - y_{\max}}; \quad (10)$$

$$t = T_2 \ln \frac{x_0 - x_{\max}}{x - x_{\max}}. \quad (11)$$

Приравнивая выражение (10) и (11) (берем значения x и y в одни и те же моменты времени), находим уравнение фазовой траектории

$$T_1 \ln \frac{y_0 - y_{\max}}{y - y_{\max}} = T_2 \ln \frac{x_0 - x_{\max}}{x - x_{\max}}. \quad (12)$$

Считаем, что оба звена линейны во всем диапазоне изменения входных воздействий, т. е.

$$y_{\max} = k_2 U_{\max} = 2 \cdot 220 = 440 \text{ ед.};$$

$$x_{\max} = k_1 y_{\max} = 1,07 \cdot 440 = 472 \text{ ед.}$$

Подставим численные значения параметров в уравнение (12)

$$0,3 \ln \frac{440}{440 - y} = 0,5 \ln \frac{472}{472 - x}. \quad (13)$$

Меняя y от 0 до значения, соответствующего x_n , т. е. до $y_n = \frac{x_n}{k_2} = \frac{236}{1,07} = 220$ ед., определяем x и строим фазовую траекторию на первом интервале (рис. 30).

Уравнение фазовой траектории для участка торможения будет

$$T_1 \ln \frac{y_0 + y_{\max}}{y + y_{\max}} = T_2 \ln \frac{x_0 + x_{\max}}{x + x_{\max}}. \quad (14)$$

Задаваясь значениями x_0 и y_0 , лежащими на линии

переключения, получаем различные траектории при торможении. Допустим $x_0 = 100$ и $y_0 = 244$ (см. рис. 30). Подставляя эти значения в уравнение фазовой траектории (14), получаем

$$0,3 \ln \frac{244 + 440}{y + 440} = 0,5 \ln \frac{100 + 472}{x + 472}. \quad (15)$$

Фазовые траектории при различных начальных условиях показаны на рис. 30.

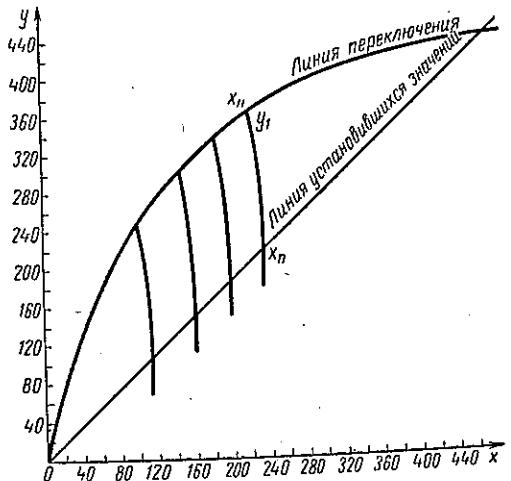


Рис. 30. Фазовые траектории системы, состоящей из двух инерционных звеньев

Теперь можно рассчитать коэффициенты обратных связей γ_1 и γ_2 . Примем, что выходная координата x замеряется датчиком, который обеспечивает на выходе напряжение $U_{oc} = U_{oc,n} = 110$ ед. при $x = x_n = 236$ ед. и имеет линейную характеристику.

Для траектории x_{11}, x_n можно составить следующие два уравнения:

$$z_{bx} - \gamma_1 U_{oc,n} - \gamma_2 y_n = 0;$$

$$z_{bx} - \gamma_1 U_{oc,1} - \gamma_2 y_1 = 0$$

или, в цифрах,

$$110 - \gamma_1 \cdot 110 - \gamma_2 \cdot 220 = 0;$$

$$110 - \gamma_1 \cdot 105 - \gamma_2 \cdot 364 = 0,$$

$$\text{откуда } \gamma_1 = 0,93; \\ \gamma_2 = 0,032.$$

Произведя аналогичные расчеты для других фазовых траекторий, получим зависимости $\gamma_1 = f(x)$ и $\gamma_2 = F(y)$, показанные на рис. 31.

Блок-схема системы представлена на рис. 32.

Задача 32. Произвести синтез оптимального автомата для задач 14, 15, 16, 18.

Рассчитать коэффициенты обратных связей, линии и функции переключения.

Задача 33. Рассчитать коэффициенты обратных связей, линии и функции переключения для приборной следящей системы (рис. 33), состоящей из двигателя АДП и электронного усилителя Y . Система должна отрабатывать угол от 0 до 32 рад.

Обратная связь по положению обеспечивается потенциометром, дающим при повороте на угол 32 рад напряжение 5 в; обратная связь по скорости осуществляется с помощью тахогенератора, который при номинальной скорости 157 рад/сек дает напряжение 110 в. Механическая характеристика двигателя представлена на рис. 34. Задачу решить графо-аналитическим методом.

Поведение заданной системы описывается следующими уравнениями:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c;$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega,$$

где

$$J = 5 \cdot 10^{-5} \text{ кгм}^2;$$

$$M_c = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Нм}.$$

Решение. Запишем данные уравнения в приращениях:

$$\frac{\Delta\omega}{M_d - M_c} = \frac{\Delta t}{J};$$

$$\frac{\Delta\phi}{\omega} = \Delta t.$$

Графо-аналитический расчет приходится вести в двух координатных системах (см. рис. 34), поэтому необхо-

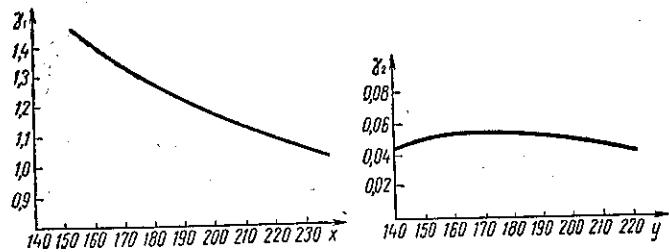


Рис. 31. Зависимость коэффициентов обратных связей γ_1 и γ_2 от координат системы

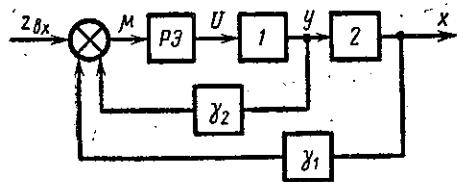


Рис. 32. Блок-схема оптимальной системы, состоящей из двух инерционных звеньев

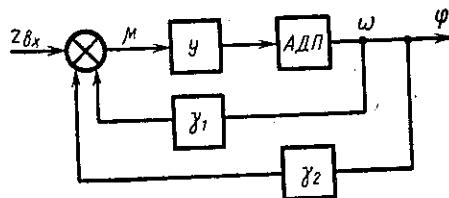


Рис. 33. Блок-схема оптимальной системы

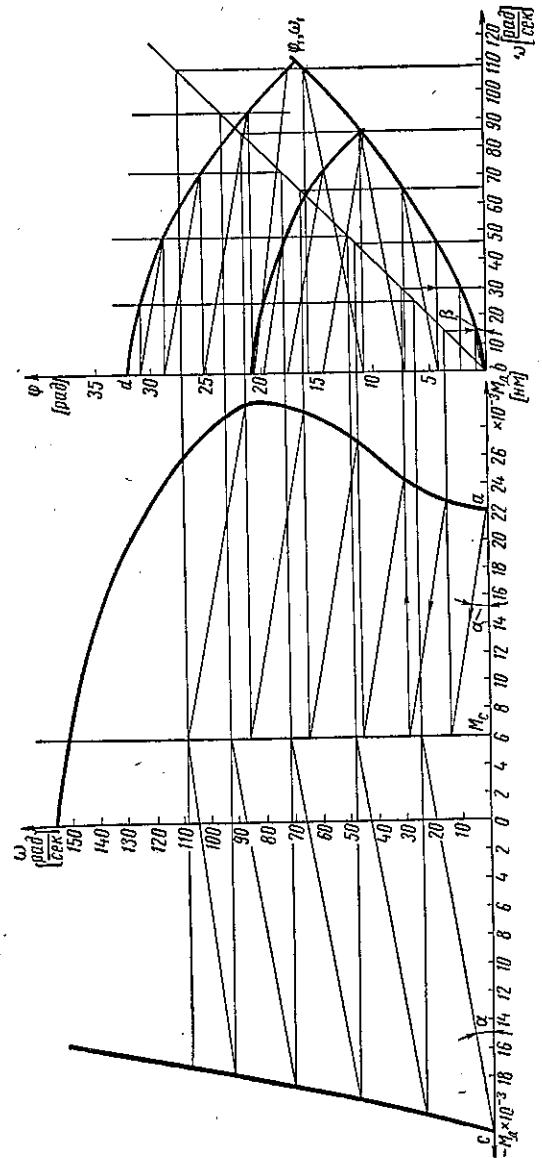
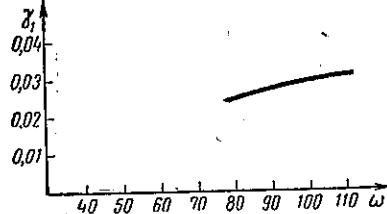


Рис. 34. Графическое построение фазовых траекторий для системы управления, содержащей нелинейность

димо определить два угла построения. Задаемся величиной $\Delta t = 0,05$ сек, тогда:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\Delta t}{J} \frac{m_M}{m_\omega} = \operatorname{arctg} \frac{0,05 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-5} \cdot 10} = \operatorname{arctg} 0,2 = 11^\circ;$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\Delta t m_\omega}{m_\varphi} = \operatorname{arctg} \frac{0,05 \cdot 10}{2,5} = \operatorname{arctg} 0,2 = 11^\circ.$$



Начинаем построение из точек начального a, b и конечного c, d состояний системы, т. е. необходимо отработать угол $\varphi_n = 32$ рад.

В результате построений, которые ясны из рис. 34, получаем фазовую траекторию. Аналогичные построения можно сделать и для других конечных значений угла φ , например для $\varphi_n = 21$ рад (см. рис. 34).

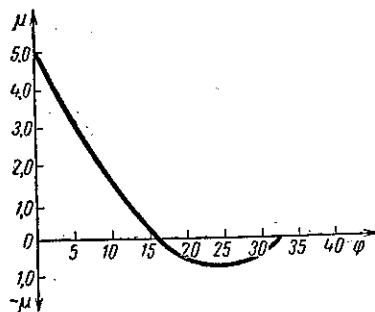
Таким образом, на фазовой траектории получаем точки переключений. Далее, используя фазовые траектории, рассчитываем коэффициенты обратных связей γ_1 и γ_2 и функцию переключения μ . Расчеты эти аналогичны тем, которые мы производили в задаче 29:

$$\mu = z_{bx} - \gamma_2 \varphi_n = 0; \quad (1)$$

$$\mu = z_{bx} - \gamma_1 \varphi_1 - \gamma_2 \varphi_1 = 0. \quad (2)$$

Рис. 35. Зависимости $\gamma_1 = f(\omega)$ и $\mu = F(\varphi)$ для оптимальной системы, содержащей нелинейность

Коэффициент γ_2 остается постоянным независимо от отрабатываемого угла, так как задающее напряжение пропорционально отрабатываемому углу. Допустим, что $z_{bx} = 5$ в при $\varphi_n = 32$ рад. Подставляя в формулы (1),



(2) значения ω и φ в вольтах (так они снимаются с датчиков обратных связей), получим:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{z_{bx}}{\varphi_n} = \frac{5}{32} = 1; \\ \gamma_1 &= \frac{z_{bx} - \gamma_2 \varphi_1}{\omega_1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Используя фазовые траектории, нетрудно рассчитать зависимость $\gamma_1 = f(\omega)$ по формуле (3).

Имея значения γ_1 и γ_2 для каждого из отрабатываемых углов, можно рассчитать и построить зависимости $\mu = F(\varphi)$. На рис. 35 приведены зависимости $\gamma_1 = f(\omega)$ и $\mu = F(\varphi)$ для $\varphi_n = 32$ ед.

§ 4. УПРАВЛЕНИЕ, БЛИЗКОЕ К ОПТИМАЛЬНОМУ

Задача 34. Объект управления описывается уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = kU,$$

где $T_1 = 0,5$ сек; $T_2 = 1,0$ сек; $k = 1$; $0 \leq U \leq U_{\max} = 2$ ед.

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 1$ за минимальное время при одном интервале управления. Отклонение от заданного значения не должно превышать 5%, т. е. $x_{\max} = 1,05$. Это превышение заданного значения получается за счет неравенства нулю производной от выходной координаты в конце управления. Определить момент переключения, при котором отклонение не превышает заданного значения.

Решение. Запишем решение на момент времени t_2 , за который примем достижение координатой максимального значения. В этот момент $x = x_{\max}$, а $\dot{x} = 0$. Таким образом, получаем систему уравнений для момента t_2 :

$$\left. \begin{aligned} x_{\max} &= C_0 + C_1 e^{-\alpha_1 t_2} + C_2 e^{-\alpha_2 t_2}; \\ \dot{x} &= -\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 t_2} - \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 t_2} = 0, \end{aligned} \right\}$$

где $C_0 = kU$,

В момент времени t_1 произведемстыкование решений:

$$C'_0 + C'_1 e^{-\alpha_1 t_1} + C'_2 e^{-\alpha_2 t_1} = C''_0 + C''_1 e^{-\alpha_1 t_1} + C''_2 e^{-\alpha_2 t_1};$$

$$-\alpha_1 C'_1 e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C'_2 e^{-\alpha_2 t_1} = -\alpha_1 C''_1 e^{-\alpha_1 t_1} - \alpha_2 C''_2 e^{-\alpha_2 t_1}.$$

Записываем решение на начало управления при $t=0$, когда $x=0$, $\dot{x}=0$:

$$C'_0 + C'_1 + C'_2 = 0;$$

$$-\alpha_1 C'_1 - \alpha_2 C'_2 = 0.$$

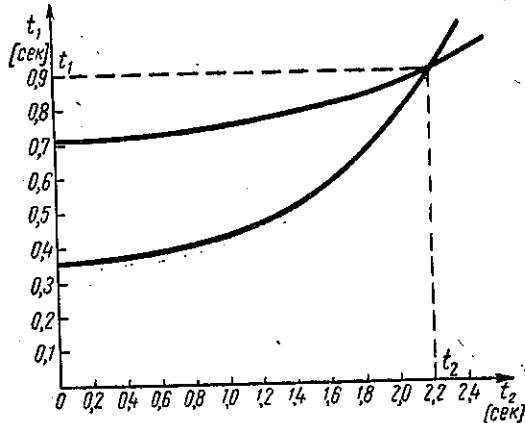


Рис. 36. Графическое решение трансцендентных уравнений для определения моментов переключения в системе, близкой к оптимальной

Известным методом, исключая постоянные интегрирования, получаем систему уравнений для определения момента переключения:

$$\frac{x_{\max} - x_n}{kU_{\max}} e^{\alpha_1 t_2} - \left(1 - \frac{x_n}{kU_{\max}}\right) e^{\alpha_1 t_1} + 1 = 0;$$

$$\frac{x_{\max} - x_n}{kU_{\max}} e^{\alpha_2 t_2} - \left(1 - \frac{x_n}{kU_{\max}}\right) e^{\alpha_2 t_1} + 1 = 0.$$

Подставляя численные значения параметров, имеем:

$$0,025e^{2t_2} - 0,5e^{2t_1} + 1 = 0;$$

$$0,025e^{t_2} - 0,5e^{t_1} + 1 = 0.$$

Решаем полученную систему графически:

$$t_1 = 0,5 \ln (0,05 e^{2t_2} + 2);$$

$$t_1 = \ln (0,05 e^{t_2} + 2).$$

Решение показано на рис. 36, из которого находим $t_2 = 2,2$ сек и $t_1 = 0,9$ сек. Время t_1 показывает момент переключения с U_{\max} до U_n , а время t_2 — момент достижения управляемой координатой максимального значения.

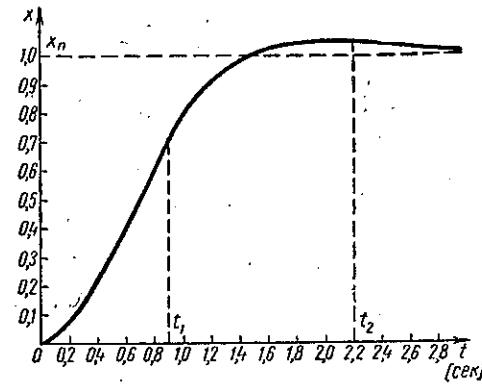


Рис. 37. Переходный процесс в системе, близкой к оптимальной

Для проверки строим переходный процесс (рис. 37). На интервале управления $0 \leq t \leq t_1$

$$x(t) = C'_0 + C'_1 e^{-\alpha_1 t} + C'_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

После подстановки численных значений

$$x(t) = 2(1 + e^{-2t} - 2e^{-t}).$$

После переключения на интервале $t_1 \leq t \leq \infty$

$$x(t) = C''_0 + C''_1 e^{-\alpha_1 t} + C''_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

Определяя постоянные интегрирования и подставляя их численные значения, имеем

$$x(t) = 1 - 4,07e^{-2t} + 0,9e^{-t}.$$

Процесс не заканчивается за конечное время и поэтому принципиально не может быть оптимальным.

Для проверки в момент времени $t_2 = 2,2$ сек находим

$$x_{\max} = 1 - 4,07e^{-4,4} + 0,9e^{-2,2} = 1,049;$$

в момент времени t_1

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 4,07e^{-1,8} + 0,9e^{-0,9} = 1 - 4,07 \cdot 0,165 + \\ &\quad + 0,9 \cdot 0,4 = 0,70. \end{aligned}$$

Варианты задачи 34 для самостоятельного решения

Рассчитать алгоритм управления объектом, который описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = k U_{\max},$$

если при одном интервале управления необходимо получить минимальное время движения управляемой координаты при заданном перерегулировании. В установившемся режиме $x_n = k U_n$. Данные для расчета сведены в табл. 21.

Таблица 21

Параметры	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
T_1 [сек]	0,2	0,3	0,6
T_2 [сек]	0,5	0,7	1,5
x_n	1	1	1
k	1	1	1
U_{\max}	2,0	2,5	3,0
$\sigma\%$	a) 5% б) 10%	a) 5% б) 10%	a) 5% б) 10%

Задача 35. Дан объект управления, описываемый уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = k \left(T_3 \frac{dU}{dt} + U \right), \quad (1)$$

где $T_1 = 1,0$ сек; $T_2 = 0,5$ сек; $T_3 = 0,3$ сек; $k = 1$; $U \leq U_{\max} = 2$ ед.

Требуется перевести объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ в положение $x = x_n = 1$ за минимально возможное время при одном интервале управления.

Так как в конце управления $\dot{x} \neq 0$, то будет наблюдаться перерегулирование. Определить момент переключения, если управление прекращается, когда выходная координата достигает заданного значения x_n . Подсчитать величину перерегулирования.

Решение. Момент переключения находится из решения дифференциального уравнения (1)

$$x(t) = C_0 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}. \quad (2)$$

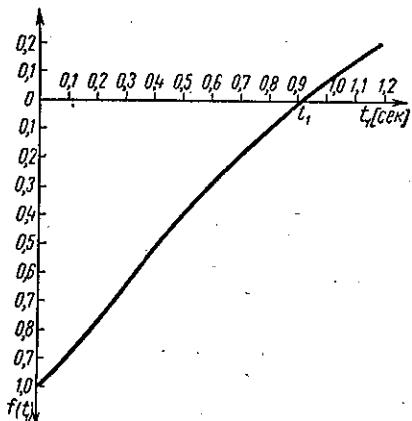


Рис. 38. Графическое решение трансцендентного уравнения

После определения постоянных интегрирования при нулевых начальных условиях получим

$$x(t) = \left(1 - \frac{T_1 - T_3}{T_1 - T_2} e^{-t_1/T_1} + \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_2} e^{-t_1/T_2} \right) k U_{\max}. \quad (3)$$

Поскольку переключение максимального сигнала U_{\max} до заданной величины U_n делаем при достижении управляемой координатой значения x_n , то t_1 определяется из уравнения

$$\left(1 - \frac{T_1 - T_3}{T_1 - T_2} e^{-t_1/T_1} + \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_2} e^{-t_1/T_2} \right) k U_{\max} - x_n = 0. \quad (4)$$

Полученное уравнение решаем графическим методом при заданных значениях параметров

$$f(t_1) = \left(1 - 1,4 e^{-t_1} + 0,4 e^{-2t_1} \right) 2 - 1 = 0. \quad (5)$$

Задаваясь различными значениями t_1 , строим зависимость $f(t_1)$ на рис. 38, из которой определяем $t_1 = 0,92$ сек.

Строим на рис. 39 переходный процесс до переключения ($0 \leq t \leq 0,92$)

$$x(t) = (1 - 1,4e^{-t} + 0,4e^{-2t}) 2.$$

Определим переходный процесс после переключения. Для удобства определения постоянных интегрирования

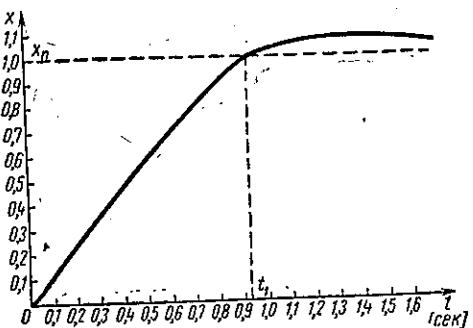


Рис. 39. Переходный процесс в объекте при одном интервале управления

примем момент времени t_1 за начало нового отсчета тогда

$$C_0 + C_1 + C_2 = x_n$$

где $C_0 = kU_n$.

Так как

$$\dot{x}(t) = -\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 t} + \frac{T_3 k}{T_1 T_2} kU,$$

где $\frac{T_3}{T_1 T_2} kU$ — член, обусловленный производной от входного сигнала,

то при $t = 0$ имеем

$$-\frac{1}{T_1} C_1 - \frac{1}{T_2} C_2 = \dot{x}_1 - \frac{T_3 k}{T_1 T_2} (U_{\max} - U_n).$$

Определив постоянные интегрирования, получим

$$x(t) = U_n + \left[\frac{\dot{x}_1 T_1 T_2}{T_1 - T_2} - \frac{T_3 k}{T_1 - T_2} (U_{\max} - U_n) \right] e^{-t/T_1} -$$

$$- \left[\frac{\dot{x}_1 T_1 T_2}{T_1 - T_2} - \frac{T_3 k}{T_1 - T_2} (U_{\max} - U_n) \right] e^{-t/T_2}. \quad (6)$$

Определяем значение производной в момент переключения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left[\frac{1,4}{T_1} e^{-t_1/T_1} - \frac{0,4}{T_2} e^{-t_1/T_2} \right] kU_{\max} = \\ &= (1,4e^{-0,92} - 0,8e^{-1,84}) \cdot 2 = (1,4 \cdot 0,39 - 0,8 \cdot 0,15) \cdot 2 = 0,86. \end{aligned}$$

После подстановки численных значений в уравнение (6) получим

$$x(t) = 1 + 0,264e^{-t} - 0,264e^{-2t} = 1 + 0,264(e^{-t} - e^{-2t}).$$

Продолжение процесса показано также на рис. 39.

Процесс получил с перерегулированием примерно на 7%, а время его равно бесконечности. Такой процесс не может быть оптимальным. Однако если полученное отклонение допустимо, то применять близкое к оптимальному управление возможно.

Если желательно уменьшить перерегулирование, то переключение следует сделать раньше, а не в момент достижения координатой заданного значения. Алгоритм, близкий к оптимальному, реализовать значительно проще оптимального и в этом его большое преимущество.

Задача 36. Определить близкое к оптимальному управление по параметрам, данным в задаче 35 при $T_3 = 0,6; 0,8; 1,2$. Построить переходные процессы.

Задача 37. Объект управления описывается уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kU, \quad (1)$$

где $T = 0,62$ сек; $k = 0,0023$; $U \leq U_{\max} = 220$ ед.

Требуется перевести объект из положения $x=0, \dot{x}=0$ при $t=0$ в положение $x=x_n=2,09$ за минимально возможное время при одном интервале управления. Заданная координата должна быть отработана с ошибкой, не превышающей $x_{\text{доп}}=0,06$ ед. Определить алгоритм управления.

Решение. При одном интервале управления система будет иметь свободный выбег, что приведет к ошибке в отработке заданной координаты. Свободный выбег

Системы определяется запасом кинетической энергии и может быть рассчитан по формуле

$$x = \dot{x}_0 T, \quad (2)$$

где \dot{x}_0 — скорость, с которой началось торможение. Очевидно, что чем меньше \dot{x}_0 , тем меньше свободный выбег.

Допустимую скорость можно определить из допустимого по координате выбега

$$\dot{x}_{0 \text{ доп}} = \frac{x_{\text{доп}}}{T}. \quad (3)$$

Зная $\dot{x}_{0 \text{ доп}}$, нетрудно найти и соответствующее управляющее воздействие

$$U_{\text{доп}} = \frac{\dot{x}_{0 \text{ доп}}}{k}. \quad (4)$$

Подставив в выражения (3) и (4) численные значения, получим:

$$\dot{x}_{0 \text{ доп}} = \frac{0,06}{0,62} \approx 0,1 \frac{\text{ед}}{\text{сек}};$$

$$U_{\text{доп}} = \frac{\dot{x}_{0 \text{ доп}}}{k} = \frac{0,1}{0,0023} \approx 44 \text{ ед.}$$

Таким образом, при подходе к заданной точке следует снизить управляющее воздействие с максимальной величины до 44 ед., тогда дальнейшее движение происходит со скоростью, равной 0,1 ед/сек. Эту пониженную скорость часто называют ползучей скоростью.

За время снижения скорости система пройдет некоторый путь x , который необходимо учесть. Теоретически время, необходимое для снижения скорости до $\dot{x}_{0 \text{ доп}}$ при изменении управляющего воздействия от 220 до 44 ед. равно бесконечности, однако с достаточной для инженерных расчетов точностью его можно принять равным

$$\tau = 3T = 3 \cdot 0,62 = 1,86 \text{ сек.}$$

Определим путь, пройденный за время снижения скорости от \dot{x}_0 до $\dot{x}_{0 \text{ доп}}$

$$x = \dot{x}_{0 \text{ доп}} \tau + (1 - e^{-\tau/T}) T (\dot{x}_0 - \dot{x}_{0 \text{ доп}}) = 0,2 \text{ ед.}$$

Следовательно, за 0,2 ед. до конечной точки следует производить переключение управляющего воздействия до 44 ед.

Алгоритм управления показан на рис. 40, из которого видно, что один интервал управления состоит из двух участков.

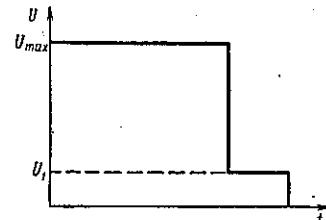


Рис. 40. Алгоритм управления, близкий к оптимальному

§ 5. РАСЧЕТ АЛГОРИТМОВ И ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ $J = \int f(x, U) dt$

Задача 38. Рассчитать алгоритм управления и оптимальные процессы для привода с двигателем постоянного тока при ограничении его нагрева. Данные двигателя: $P_n = 1,2 \text{ квт}$; $U_c = 220 \text{ в}$; $R = 3 \text{ ом}$; $n_n = 700 \text{ об/мин}$; $i_n = 7a$; $J = 0,5 \text{ кгм}^2$. Привод описывается следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} &= kM_d = kc_m i; \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $k = 0,01$, а момент нагрузки $M_c = 0$.

Требуется перевести координаты объекта из положения при $t = 0$, $\Phi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ в положение $\Phi_n = 200 \text{ рад}$, $\omega_n = 0$ за минимальное время τ при ограничении на нагрев

$$\int_0^\tau Ri^2 dt \leq 150 \text{ вт} = A.$$

Решение. В задаче 9 нами был получен оптимальный закон изменения управляющего воздействия в виде $U(t) = C_1 t + C_0$. Так как для двигателя управляющим

воздействием является ток i , то его закон изменения будет аналогичен закону изменения U , т. е.

$$i = C_1 t + C_0.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_0 определяем из следующих условий: в начале управления при $t=0$ $i=i_0$, отсюда

$$C_0 = i_0;$$

в конце управления при $t=\tau$ $i=-i_0$, отсюда

$$C_1 = -\frac{2i_0}{\tau}.$$

Подставим значения постоянных интегрирования в выражение для тока

$$i = i_0 - \frac{2i_0}{\tau} t. \quad (2)$$

Определяем ток i_0 из условия ограничения

$$\int_0^{\tau} R i^2 dt = \int_0^{\tau} R \left(i_0 - \frac{2i_0}{\tau} t \right)^2 dt = R i_0^2 \left[\int_0^{\tau} dt - \int_0^{\tau} \frac{4}{\tau} t dt + \int_0^{\tau} \frac{4}{\tau^2} t^2 dt \right] = R i_0^2 \left[t - \frac{2}{\tau} t^2 + \frac{4}{3\tau^2} t^3 \right]_0^{\tau} = \frac{R i_0^2}{3} \tau = A,$$

отсюда

$$i_0 = \sqrt{\frac{3A}{R\tau}}. \quad (3)$$

В полученном выражении неизвестно время оптимального процесса τ . Его можно найти следующим путем. Из первого уравнения привода определяем

$$\omega = \int_0^t \frac{k c_M}{J} i dt = \int_0^t \frac{k c_M}{J} \left(i_0 - \frac{2i_0}{\tau} t \right) dt = \frac{k c_M i_0}{J} \left(t - \frac{t^2}{\tau} \right). \quad (4)$$

Из второго уравнения находим Φ_0 , отработанное за время τ :

$$\Phi_0 = \int_0^{\tau} \omega dt = \frac{k c_M i_0}{J} \int_0^{\tau} \left(t - \frac{t^2}{\tau} \right) dt = \frac{k c_M i_0}{J} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\tau} \right) \Big|_0^{\tau} = \frac{k c_M i_0}{6J} \tau^2,$$

отсюда

$$i_0 = \frac{6\Phi_0 J}{k c_M \tau^2}. \quad (5)$$

Приравняем правые части уравнений (3) и (5):

$$\sqrt{\frac{3A}{R\tau}} = \frac{6\Phi_0 J}{k c_M \tau^2},$$

откуда

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{12\Phi_0^2 J^2 R}{k^2 c_M^2 A}}.$$

Подставляя численные значения, имеем

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 0,25 \cdot 3}{10^{-4} \cdot 0,058 \cdot 150}} = 1,61 \text{ сек},$$

где

$$c_M = 975 \frac{P_H}{n_H i_H} = 0,24.$$

Определяем i_0

$$i_0 = \sqrt{\frac{3A}{R\tau}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 150}{3 \cdot 1,61}} = 9,66 \text{ а.}$$

Зная i_0 и τ , можно найти закон изменения $\omega(t)$

$$\omega = \frac{k c_M i_0}{J} \left(t - \frac{t^2}{\tau} \right) = 0,048 \left(t - 0,62t^2 \right).$$

Наконец, найдем закон изменения напряжения на двигателе, так как практически можно управлять только им. Для этого воспользуемся основным уравнением двигателя

$$U = c_e \omega + R i = \frac{c_e k c_M}{J} i_0 \left(t - \frac{t^2}{\tau} \right) + R \left(1 - \frac{2}{\tau} t \right) i_0 = R i_0 + \left(\frac{c_e k c_M}{J} - \frac{2R}{\tau} \right) i_0 t - \frac{c_e k c_M}{J \tau} i_0 t^2,$$

где

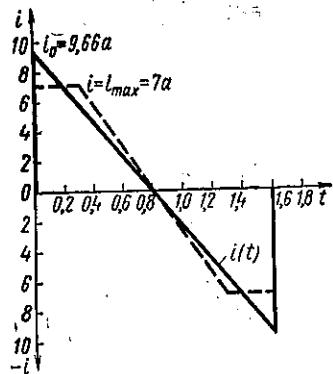
$$c_e = \frac{U - R i_H}{\omega_H} = 2,7.$$

Подставив численные значения коэффициентов, получим

$$U = 28,98 - 34,77t - 0,07t^2.$$

График изменения тока $i(t)$ показан на рис. 41 сплошной линией. Зависимости $\omega(t)$ и $U(t)$ предлагаются построить читателям.

Задача 39. По условиям задачи 38 определить алгоритмы управления и получить зависимости $i(t)$, $\omega(t)$, $U(t)$ при дополнительном ограничении на ток $i = i_{\max} =$



= 7 а. При решении задачи использовать результаты, полученные при решении задачи 9, с помощью принципа максимума. Для облегчения решения на рис. 41 показан пунктиром график изменения тока $i(t)$ при дополнительном ограничении.

Задача 40. По условиям задачи 38 определить зависимости $i(\omega)$ и $U(\omega)$ для конструирования обратных связей.

Решение. Определяем сначала $i(\omega)$. Используя уравнение двигателя и выражение для тока, находим

$$\omega = \int_0^t \frac{c_m}{J} dt = \frac{c_m i_0}{J} \int_0^t \left(1 - \frac{2}{\tau} t\right) dt = \frac{c_m i_0}{J} \left(t - \frac{1}{\tau} t^2\right).$$

Решим полученное квадратное уравнение относительно t

$$t = \frac{\tau}{2} \pm \sqrt{\frac{\tau^2}{4} - \frac{J\tau}{c_m i_0} \omega}.$$

Используя еще раз выражение для тока, получаем зависимость

$$\begin{aligned} i(\omega) &= i_0 - \frac{2i_0}{\tau} \left(\frac{\tau}{2} \pm \sqrt{\frac{\tau^2}{4} - \frac{J\tau}{c_m i_0} \omega} \right) = \\ &= \pm \frac{2i_0}{\tau} \sqrt{\frac{\tau^2}{4} - \frac{J\tau}{c_m i_0} \omega}. \end{aligned}$$

Подставляя вместо i_0 его значение из условия ограничения, окончательно имеем

$$i(\omega) = \pm \sqrt{\frac{3A}{R\tau} - \frac{4J}{c_m \tau}} \sqrt{\frac{3A}{R\tau}} \omega. \quad (1)$$

После подстановки численных значений параметров получаем уравнение обратной связи для данных условий работы

$$i(\omega) = \pm \sqrt{93,75 - 68,25 \omega}.$$

Следовательно, для реализации замкнутой системы необходимо применение нелинейной обратной связи, параметры которой меняются при изменении τ и A .

Определим $U(\omega)$, для чего используем уравнение равновесия напряжений

$$U = Ri + c_e \omega.$$

Подставляя вместо i его значение из формулы (1), получаем

$$U(\omega) = \pm R \sqrt{\frac{3A}{R\tau} - \frac{4J}{c_m \tau}} \sqrt{\frac{3A}{R\tau}} \omega + c_e \omega. \quad (2)$$

После подстановки численных значений

$$U(\omega) = \pm 3 \sqrt{93,75 - 68,25 \omega} + 2,7 \omega.$$

Таким образом, и зависимость $U(\omega)$ требует сложных нелинейных обратных связей.

Задача 41. Определить численные значения коэффициентов обратной связи для задачи 12 при следующих исходных данных: уравнение объекта управления

$$\frac{dx_1}{dt} = -0,5x_1 + U;$$

критерий оптимальности

$$J = \int_0^\infty (x_1^2 + U^2) dt \quad |U| \leqslant 1.$$

Решение выполнить по принципу максимума.

Решение. Согласно системе уравнений (8) из задачи 12, запишем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -0,5x_1 + 0,5\psi; \\ \frac{d\psi}{dt} &= 2x_1 + 0,5\psi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

РАСЧЕТ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Для решения системы (1) составим характеристический определитель:

$$\begin{vmatrix} -0,5 - \mu & 0,5 \\ 2 & 0,5 - \mu \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение

$$\mu^2 - 1,25 = 0,$$

корни которого $\mu_1 = -1,12$; $\mu_2 = 1,12$.

Запишем решение для x_1 и ψ :

$$x_1 = C_1 e^{\mu_1 t},$$

$$\psi = k_1 C_1 e^{\mu_1 t} = \frac{\mu_1 + 0,5}{0,5} C_1 e^{\mu_1 t},$$

откуда определяем

$$\psi = k_1 x_1 = \frac{\mu_1 + 0,5}{0,5} x_1 = -1,24 x_1.$$

Находим закон управления в линейной зоне $|U| < 1$

$$U = \frac{m^2}{2c} \psi = -0,62 x_1.$$

С учетом ограничения управляющего сигнала закон управления будет иметь следующий вид:

$$U = \begin{cases} 1 & \text{при } -0,62 x \geq 1; \\ -0,62 & \text{при } |0,62 x| \leq 1; \\ -1 & \text{при } -0,62 x \leq -1. \end{cases}$$

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Задача 42. Объект управления представляет собой камеру сгорания, показанную на рис. 42. Топливо, поступающее в камеру сгорания, является смесью простейших горючих газов H_2 , CO , CH_4 ; воздух содержит 23% кислорода; теплоемкость воздуха $c_v = 0,23 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$;

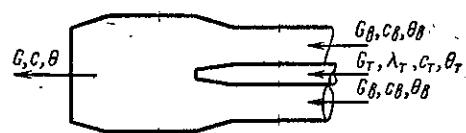


Рис. 42. Схематическая конструкция камеры сгорания

температура подаваемого воздуха $\theta_v = 20^\circ\text{C}$; теплоемкость продуктов сгорания $c = 0,23 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$; максимальный расход топлива $G_t = 0,5 \frac{\text{кг}}{\text{сек}}$; топливо содержит 2% водорода, 80% метана и 18% окиси углерода; теплотворная способность метана $\lambda_{CH_4} = 11\,000 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$, окиси углерода — $\lambda_{CO} = 2400 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$; водорода — $\lambda_H = 3000 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$.

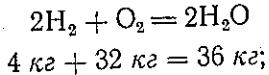
Определить статическую характеристику камеры сгорания, т. е. зависимость температуры от расхода воздуха $\theta = f(G_v)$ и необходимость использования экстремальной системы при изменении количества топлива и состава топлива ($1 \text{ ккал} = 4,1868 \cdot 10^3 \text{ дж}$).

Решение. Определяем среднюю теплотворную способность 1 кг топлива

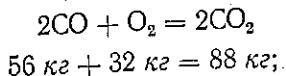
$$\lambda_t = \lambda_H \cdot 0,02 + \lambda_{CH_4} \cdot 0,8 + \lambda_{CO} \cdot 0,18 = 60 + 8800 + \\ + 432 = 9292 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}.$$

Для упрощения дальнейших расчетов примем, что
 $\lambda_t = 9300 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$.

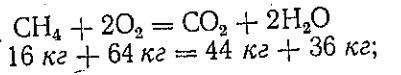
Определяем количество воздуха, необходимого для полного сгорания 1 кг топлива, для чего записываем реакции окисления:
водород



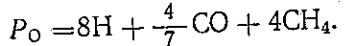
окись углерода



метан



Общее количество кислорода, необходимое для окисления горючих газов,



Подставляя весовые количества газов, имеем

$$P_O = 8 \cdot 0,02 + \frac{4}{7} \cdot 0,18 + 4 \cdot 0,8 = 3,46 \text{ кг.}$$

Подсчитываем количество воздуха, содержащего 3,46 кг кислорода,

$$P_B = \frac{P_O}{0,23} = \frac{3,46}{0,23} = 15 \text{ кг.}$$

Если в камеру сгорания подается $G_t = 0,5 \text{ кг/сек}$, то для его полного сгорания потребуется $G_B = 7,5 \text{ кг/сек}$.

После этих предварительных расчетов можно приступить к определению статической характеристики камеры сгорания $\theta = f(G_B)$.

Для этого запишем уравнение теплового баланса

$$G_t \lambda_t dt + G_B c_B \theta_B dt + G_t c_t \theta_t dt = Pcd\theta + Gc\theta dt. \quad (1)$$

Разделим правую и левую части уравнения (1) на dt

$$G_t \lambda_t + G_B c_B \theta_B + G_t c_t \theta_t = P_c \frac{d\theta}{dt} + Gc\theta. \quad (2)$$

Уравнение (2) показывает, что количество тепла, поступающего с воздухом, топливом и в результате горения, уравновешивается отводимым теплом и повышением температуры воздуха в камере. В установившемся режиме $\frac{d\theta}{dt} = 0$, поэтому из уравнения (2) получим уравнение установившегося режима

$$G_t \lambda_t + G_B c_B \theta_B + G_t c_t \theta_t = Gc\theta.$$

Отсюда находим θ , т. е. температуру на выходе камеры сгорания

$$\theta = \frac{G_t \lambda_t + G_B c_B \theta_B + G_t c_t \theta_t}{Gc} = \frac{G_t \lambda_t + G_B c_B \theta_B + G_t c_t \theta_t}{(G_t + G_B)c}, \quad (3)$$

так как $G = G_t + G_B$.

Сделаем некоторые допущения, которые принципиально не повлияют на вид статической характеристики. Пренебрежем членом $G_t c_t \theta_t$, т. е. количеством тепла, которое вносится с топливом. При постоянном расходе топлива этот член постоянен и мал по сравнению с членом $G_t \lambda_t$. Далее считаем, что c не зависит от температуры и давления в камере сгорания, т. е. считаем $c = \text{const}$ во всем интервале температур камеры сгорания.

Тогда, подставляя в уравнение (3) численные значения параметров, имеем

$$\theta = \frac{G_t \lambda_t + 4,6 G_B}{(0,5 + G_B) 0,23}. \quad (4)$$

Член $G_t \lambda_t$ будет зависеть от G_B до тех пор, пока G_B не станет равным 7,5 кг/сек. Эта зависимость дается простой пропорцией

$$\frac{1 \text{ кг}}{15 \text{ кг}} = \frac{G_t}{G_B}; \quad G_t = \frac{G_B}{15}.$$

Тогда формула (4) примет вид:

$$\text{для } 0 \leq G_B \leq 7,5 \frac{\text{кг}}{\text{сек}}$$

Таблица 22

		0	1	2	4	6	7,5	8	10	12
$G_B \frac{\text{кг}}{\text{сек}}$	0	624,6	1249,2	2498,4	3737,6	4684,5	—	—	—	—
$624,6 G_B$	0	—	—	—	—	—	4686,8	4696	4705,2	
$4650 + 4,6 G_B$	—	—	—	—	—	—	1,955	2,415	2,875	
$(0,5 + G_B) 0,23$	0,115	0,345	0,575	1,035	1,495	1,84	—	—	—	
0	0	1810	2113	2411	2500	2546	2400	1945	1637	
		14	16	18	20	22	24	26	28	30
$G_B \frac{\text{кг}}{\text{сек}}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$624,6 G_B$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$4650 + 4,6 G_B$	4717,4	4723,6	4732,8	4742	4751,2	4760,4	4769,6	4778,8	4788	
$(0,5 + G_B) 0,23$	3,335	3,795	4,255	4,715	5,175	5,635	6,095	6,555	7,015	
0	1414	1245	1112	1006	918	845	783	730	682,5	

$$\theta = \frac{(620 + 4,6) G_B}{(0,5 + G_B) 0,23} = \frac{624,6 G_B}{0,1 + 0,23 G_B};$$

для

$$G_B > 7,5 \frac{\text{кг}}{\text{сек}}$$

$$\theta = \frac{4650 + 4,6 G_B}{(0,5 + G_B) 0,23}.$$

Строим статическую характеристику по полученным формулам. Расчеты сводим в табл. 22.

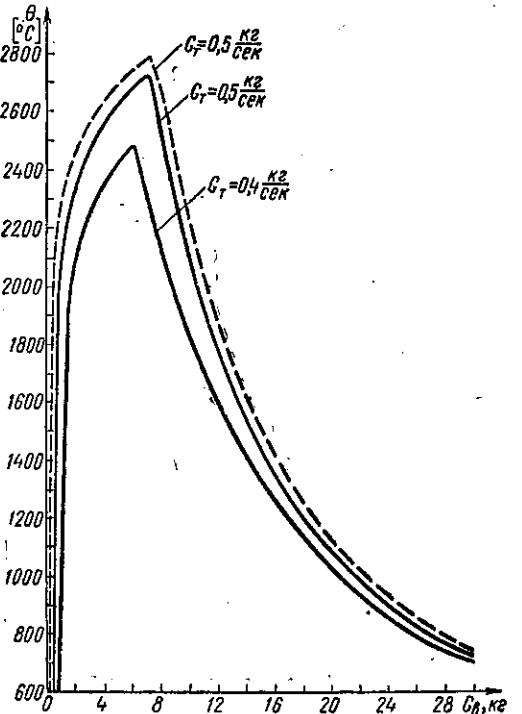


Рис. 43. Статические характеристики камеры сгорания

Статическая характеристика показана на рис. 43 сплошной линией и имеет ярко выраженный экстремум.

Если теперь изменить количество топлива до $0,4 \text{ кг/сек}$, то статическая характеристика сдвигнется влево, а вели-

чина максимума уменьшится. Примерный ход характеристики при $G_t = 0,4 \text{ кг/сек}$ показан на рис. 43.

Из формул видно, что в камере сгорания протекают два противоположных процесса: нагревание объема камеры за счет сгорания топлива и охлаждение его за счет подачи наружного воздуха.

Если изменится температура поступающего воздуха, то статические характеристики будут перемещаться вверх или вниз, не изменяя положения экстремума, как показано на рисунке пунктирной линией.

Изменение количества топлива не требует применения экстремальной системы, так как нетрудно измерять количество топлива и регулировать количество воздуха по заранее рассчитанному закону. Если построить характеристики $\theta = f\left(\frac{G_v}{G_t}\right)$, то при изменении количества топлива абсцисса экстремума не изменится.

Экстремальные характеристики будут дрейфовать и при изменении качественного и качественного состава топлива.

Пусть изменится качественный состав топлива и подаваемый в камеру сгорания газ содержит 2% водорода, 50% метана, 48% окиси углерода, тогда средняя теплотворная способность топлива

$$\lambda_t = 3000 \cdot 0,02 + 11000 \cdot 0,5 + 2400 \cdot 0,48 = 6712 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}.$$

Количество кислорода, необходимое для окисления топлива,

$$P_o = 8 \cdot 0,02 + \frac{4}{7} \cdot 0,48 + 4 \cdot 0,5 = 2,43,$$

тогда

$$P_v = \frac{2,43}{0,23} = 10,57 \text{ кг.}$$

Подставляя значения G_v и λ_t в выражение (4), получим:

при $G_v \leqslant 5,28 \frac{\text{кг}}{\text{сек}}$

$$\theta = \frac{(635 + 4,6) G_v}{(0,5 + G_v) 0,23},$$

при $G_v \geqslant 5,28 \frac{\text{кг}}{\text{сек}}$

$$\theta = \frac{3356 + 4,6 G_v}{(0,5 + G_v) 0,23}.$$

Если подавать, как и ранее, 7,5 кг/сек воздуха, то $\theta = 1842^\circ\text{C}$, в то время как экстремальное значение температуры $\theta = 2540^\circ$.

Контроль за составом газа и регулирование подачи воздуха в зависимости от состава представляет определенную трудность даже при небольшом количестве компонентов топлива. Природные газы имеют в своем составе до 9 компонентов, поэтому наиболее целесообразно применить поиск экстремума.

Задача 43. Определить характеристику передачи энергии по линии при изменении полезной нагрузки.

Решение. Объект управления состоит из линии связи с активным сопротивлением r_d и переменной нагрузкой r_n (рис. 44). Напряжение U , приложенное к схеме, при изменении нагрузки не меняется. Параметры объекта следующие:

$$r_d = 1 \text{ ом}, \quad U = 200 \text{ в}, \quad r_n = 0,2 \div 2 \text{ ом}.$$

Определить зависимость мощности, выделяемой в нагрузке, от изменения сопротивления нагрузки, т. е. $P = f(r_n)$.

Мощность, выделяемая на нагрузке

$$P = r_n I^2 = U^2 \frac{r_n}{(r_n + r_d)^2}.$$

Определяем при каком значении r_n мощность имеет максимум

$$\frac{dP}{dr_n} = \frac{U^2 (r_d - r_n)}{(r_d + r_n)^3} = 0,$$

т. е. при $r_d = r_n$.

Таким образом, при равенстве сопротивления нагрузки и линии мощность в нагрузке будет максимальной. Строим теперь зависимость $P = f(r_n)$, сводя расчеты в табл. 23.

Таблица 23

$r_n, \text{ ом}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$P, \text{ квт}$	5,55	8,16	9,37	9,87	10	9,92	9,72	9,32	9,18	8,88

По данным таблицы построена экстремальная характеристика на рис. 45. Однако несмотря на экстремальность характеристики применение экстремальной системы в данном случае нецелесообразно из-за отсутствия неконтролируемого дрейфа характеристик, так как достаточно один раз установить r_n .

Задача 44. Определить экстремальную характеристику последовательного колебательного контура $i = f(\omega)$ ку

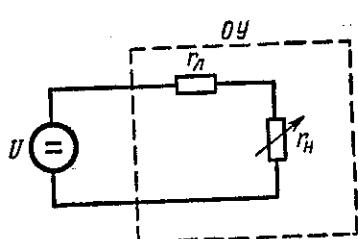


Рис. 44. Электрическая цепь, состоящая из источника, линии связи и переменной нагрузки

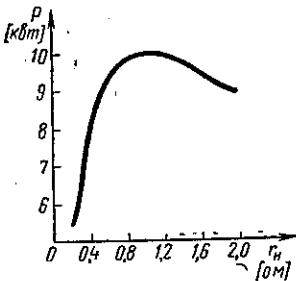


Рис. 45. Экстремальная зависимость мощности от сопротивления нагрузки

при следующих его параметрах: $r = 4 \text{ ом}$, $L = 1,0 \text{ гн}$, $C = 10 \text{ мф}$.

Ответ: резонансная частота $\omega_0 = 314 \frac{1}{\text{сек}}$.

Задача 45. В предыдущих задачах нами было получено аналитическое выражение для экстремальных характеристик. Однако не все объекты управления можно описать аналитически, поэтому экстремальные характеристики приходится снимать экспериментально, например, к. п. д. различных машин и установок и т. д. Если для анализов движения экстремальных систем требуется аналитическое выражение экстремальной характеристики, то необходимо интерполировать экспериментальные характеристики аналитическими зависимостями. Практикой установлено, что большинство экстремальных характеристик аппроксимируется параболами.

Определить интерполирующую функцию второго порядка для части экстремальной характеристики объекта, заданной в виде табл. 24.

Таблица 24

x	1	3	5	6
$y = f(x)$	2	4	8	11

Решение. В качестве интерполирующей функции выберем интерполяционный многочлен Лагранжа

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} + \\ & + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \\ & + \dots + f(x_n) \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

или, для указанных в таблице значений,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & 2 \frac{(x - 3)(x - 5)(x - 6)}{(1 - 3)(1 - 5)(1 - 6)} + 4 \frac{(x - 1)(x - 5)(x - 6)}{(3 - 1)(3 - 5)(3 - 6)} + \\ & + 8 \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 6)}{(5 - 1)(5 - 3)(5 - 6)} + 11 \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 5)}{(6 - 1)(6 - 3)(6 - 5)} = \\ & = 2 \frac{x^3 - 14x^2 + 63x - 90}{(-2)(-4)(-5)} + 4 \frac{x^3 - 12x^2 + 41x - 30}{2(-2)(-3)} + \\ & + 8 \frac{x^3 - 10x^2 + 27x - 18}{4 \cdot 2 \cdot (-1)} + 11 \frac{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}{5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{1}{60} x^3 + \\ & + \frac{1}{10} x^2 + \frac{23}{60} x + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку в условии задано интерполировать функцией второго порядка, то отбросим член, содержащий x^3 , и получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{10} x^2 + \frac{23}{60} x + \frac{3}{2}.$$

При этом на погрешность интерполяции накладывается дополнительная погрешность, появляющаяся за счет отбрасывания членов, содержащих x в степени, большей двух. Однако эта погрешность легко вычисляется.

Задача 46. Определить интерполирующую функцию второго порядка для характеристики объекта, заданной графически (рис. 46).

Решение. В случае графического задания характеристики объекта целесообразно воспользоваться интерпо-

ляционным многочленом Лагранжа для равноотстоящих узлов. Для этого выберем на оси абсцисс узлы интерполяции (рис. 46), равноотстоящие друг от друга, и определим для них значение ординат. Эти значения сведены в табл. 25.

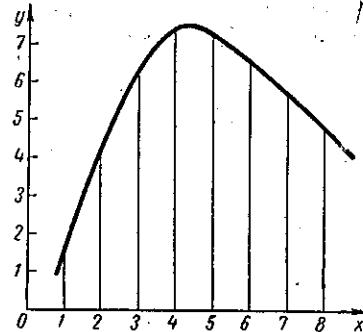


Рис. 46. Экстремальная характеристика объекта

Таблица 25

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,5	4	6,5	7,5	7,2	6,5	5,6	4,8

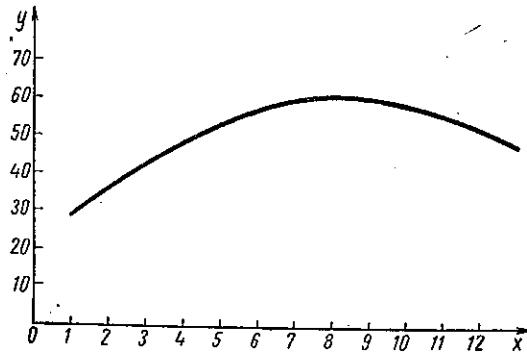


Рис. 47. Экстремальная характеристика объекта

Запишем интерполяционный многочлен

$$\varphi(x) = \varphi_8(x) = (-1)^8 \frac{t(t-1)\dots(t-8)}{8!} \sum_{i=0}^8 (-1)^i \frac{C_n^i y_i}{t-i}.$$

Коэффициенты перед y_i можно взять из таблиц коэффициентов Лагранжа, при этом

$$(x_1 - x_0) = (x_2 - x_1) = \dots = (x_n - x_{n-1}) = h,$$

$$t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Вычислить интерполяционный многочлен самостоятельно.

Задача 47. На рис. 47 приведена экстремальная характеристика объекта. Определить интерполирующую функцию второго порядка для заданной характеристики.

§ 2. РАСЧЕТ ПРОЦЕССОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Задача 48. Определить качественные показатели непрерывной экстремальной системы: скорость изменения входной величины v , потери на поиск P , время выхода в экстремальную область τ .

Объект управления безынерционный, а его статическая характеристика описывается уравнением

$$y = -kx^2.$$

Зона поиска на выходе $\Delta y = 4\%$; период автоколебаний $T = 1$ сек; начальное рассогласование $A = 3$ ед.; $k = 1$.

Решение. Так как управляющее воздействие изменяется с постоянной скоростью, то

$$y = -k(vt)^2.$$

Находим v , используя заданный период автоколебаний и зону поиска на выходе

$$-\Delta y = -kv^2 \left(\frac{T}{2}\right)^2,$$

откуда

$$v = \frac{2}{T} \sqrt{\frac{\Delta y}{k}} = 2 \sqrt{0,04} = 0,4 \frac{\text{ед}}{\text{сек}}.$$

Время выхода в экстремальную область

$$\tau = \frac{A}{v} (1 - \sqrt{\Delta y}) = \frac{3}{0,4} (1 - \sqrt{0,04}) = 6 \text{ сек.}$$

Потери на поиск

$$P = \frac{\Delta y}{3} = \frac{0,04}{3} = 0,0133 \text{ ед.}$$

Задача 49. Как изменяется скорость входной величины и время выхода в экстремальную область, если уменьшить период автоколебаний в 2 раза?

Ответ: $v = 0,8 \frac{\text{ед}}{\text{сек}}$; $\tau = 3 \text{ сек.}$

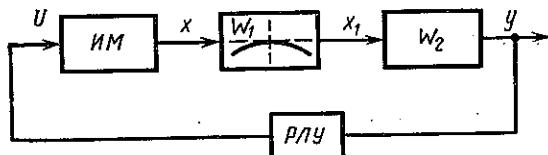


Рис. 48. Экстремальный объект, состоящий из двух звеньев W_1 и W_2 с исполнительным механизмом

Задача 50. Какова будет зона поиска на выходе, если период $T = 1 \text{ сек}$, а скорость изменения входной величины $v = 0,8 \frac{\text{ед}}{\text{сек}}$?

Ответ: $\Delta y = 0,16 \text{ ед. (16\%)}$.

Задача 51. Каков будет период автоколебаний, если $v = 1 \frac{\text{ед}}{\text{сек}}$, $\Delta y = 0,09 \text{ ед. (9\%)}$?

Ответ: $T = 0,6 \text{ сек.}$

Задача 52. Экстремальный объект управления состоит из двух звеньев (рис. 48).

Уравнение первого звена

$$x_1 = -kx^2,$$

где $k = 1$.

Уравнение второго звена

$$T \frac{dy}{dt} + y = x_1,$$

где $T = 1 \text{ сек.}$

Уравнение исполнительного механизма

$$\frac{dx}{dt} = \pm v,$$

где $v = 1 \frac{\text{ед}}{\text{сек}}$.

В начальном состоянии объекта (при $t = 0$) $x_0 = -2$, $y_0 = -4$. Зона нечувствительности прибора, измеряющего отклонение от экстремума, $\Delta y_H = 0,2 \text{ ед.}$

Определить фазовую траекторию экстремальной системы и параметры предельного цикла, предполагая, что она работает по принципу запоминания экстремума.

Решение. Сводя расчеты в табл. 26, построим экстремальную характеристику.

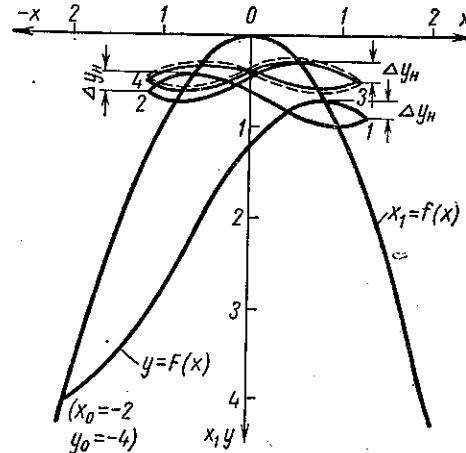


Рис. 49. Экстремальная характеристика объекта и процесс выхода системы на предельный цикл

Таблица 26

$\pm x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
x_1	0	0,04	0,16	0,36	0,64	1	1,44	1,96
$\pm x$	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
x_1	2,56	3,24	4	4,84	5,76	6,76	7,84	9

Экстремальная зависимость $x_1 = f(x)$ показана на рис. 49. Далее необходимо получить уравнение фазовой траектории:

$$T \frac{dy}{dt} + y = -kx^2;$$

$$\frac{dy}{dt} = (-kx^2 - y) \frac{1}{T};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\pm vT} (-kx^2 - y)$$

или, окончательно,

$$\frac{dy}{dx} \pm \frac{1}{vT} y = \mp \frac{k}{vT} x^2.$$

Обозначим

$$\frac{1}{vT} = b,$$

$$\frac{k}{vT} = b_1,$$

тогда

$$\frac{dy}{dx} \pm by = \mp b_1 x^2.$$

Примем на первом интервале значение скорости положительным, так как начальная точка находится слева от экстремума, тогда уравнение для первого интервала запишется как

$$\frac{dy}{dx} + by = -b_1 x^2$$

Решение этого уравнения хорошо известно

$$y = e^{-\int b dx} \left[\int -b_1 x^2 e^{\int b dx} + C \right] = \\ = e^{-bx} \left[-b_1 \int x^2 e^{bx} dx + C \right].$$

Стоящий в скобках интеграл — табличный, поэтому окончательно имеем

$$y = -\frac{b_1}{b} x^2 + \frac{2b_1}{b^3} (bx - 1) + Ce^{-bx}.$$

После замены b и b_1 параметрами системы окончательно получаем решение

$$y = -k(x - vT)^2 - kv^2 T^2 + Ce^{-\frac{x}{Tv}}.$$

Постоянную интегрирования определяем из начальных условий при $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда

$$y_0 = -k(x_0 - vT)^2 - kv^2 T^2 + Ce^{-\frac{x_0}{Tv}},$$

откуда

$$C = \frac{y_0 + k(x_0 - vT)^2 + kv^2 T^2}{e^{-\frac{x_0}{Tv}}}.$$

Подставляя C в решение уравнения, имеем

$$y = -k(x - vT)^2 - kv^2 T^2 + [y_0 + k(x_0 - vT)^2 + \\ + kv^2 T^2] \cdot e^{-\frac{x-x_0}{Tv}}.$$

После подстановки начальных условий и численных значений параметров

$$y = -(x - 1)^2 - 1 + 6e^{-(2+x)}.$$

Меняя x от значения, равного двум, до того значения, когда от достигнутого максимума y уменьшится на $\Delta y_n = 0,2$ (до зоны нечувствительности), получим один отрезок фазовой траектории. Расчеты сводим в табл. 27.

Таблица 27

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	+0,5	+1	+1,5	+2
$e^{-(2+x)}$	1	0,6	0,37	0,22	0,14	0,08	0,05	0,03	0,018
$6e^{-(2+x)}$	6	3,6	2,22	1,32	0,84	0,48	0,3	0,18	0,108
$-(x-1)^2$	-9	-6,25	-4	-2,25	1	-0,25	0	-0,25	-1
$-(x-1)^2 - 1$	-10	-7,25	-5	-3,25	-2	-0,25	-1	-1,25	-2
y	-4	-3,65	-2,78	-1,93	-1,16	-0,77	-0,7	-1,07	-1,9

В результате построения (см. рис. 49) получим точку 1 с координатами $y_{10} = -0,9$, $x_{10} = 1,3$. В этой точке произойдет переключение сигнала v с плюса на минус, и координата x начнет теперь уменьшаться с постоянной скоростью. Дифференциальное уравнение, описывающее движение на втором участке, имеет вид

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{vT} y = \frac{k}{vT} x^2$$

или

$$\frac{dy}{dx} = by = b_1 x^2.$$

Решение данного уравнения

$$y = -k(x+vT)^2 - kv^2 T^2 + [y_{10} + k(x_{10}+vT)^2 + kv^2 T^2] e^{-\frac{x-x_{10}}{vT}}.$$

После подстановки численных значений параметров и начальных условий $y_{10} = -0,9$ и $x_{10} = 1,3$ имеем

$$y = -(x+1)^2 - 1 + 5,39 e^{x-1,3}.$$

Меняя x от значения, равного 1,3, до значения, при котором вновь достигнутый максимум уменьшится на величину зоны нечувствительности $\Delta y_n = 0,2$, получим второй участок фазовой траектории. Расчеты сводим в табл. 28.

Таблица 28

x	1,3	1	0,5	0	-0,5	-1	-1,5
$5,39 e^{x-1,3}$	5,39	4	2,43	1,46	0,86	0,54	0,32
$-(x+1)^2 - 1$	-6,29	-5	-3,25	-2	-1,25	-1	-1,25
y	-0,9	-1	-0,82	-0,54	-0,39	-0,46	-0,93

На рис. 49 показан второй участок фазовой траектории. Учитывая зону нечувствительности $\Delta y_n = 0,2$, получаем в точку 2 с координатами $y_{20} = -0,6$, $x_{20} = -1,15$. В этой точке происходит смена знака v с минуса на плюс. Следующий участок фазовой траектории описывается таким же уравнением, как и участок 1, но с другими значениями координат y_0 и x_0 .

После подстановки значений параметров и начальных условий получаем выражение для фазовой траектории на третьем участке

$$y = -(x-1)^2 - 1 + 5e^{-(1,15+x)}.$$

Расчеты сводим в табл. 29.

Таблица 29

x	-1,15	-1	-0,5	0	-0,5	1	1,5
$5e^{-(1,15+x)}$	5	4,3	2,6	1,6	0,95	0,6	0,35
$-(x-1)^2 - 1$	-5,6	-5	-3,25	-2	-1,25	-1	-1,25
y	-0,06	-0,7	-0,05	-0,4	-0,3	-0,4	-0,9

На рис. 49 показан третий участок фазовой траектории. В конце движения получим точку 3 с координатами $y_{30} = -0,5$, $x_{30} = 1,15$.

Уравнение, описывающее фазовую траекторию на четвертом участке, имеет вид

$$y = -(x+1)^2 - 1 + 5,1 e^{x-1,15}.$$

По уравнению видно, что мы получили предельный цикл. При положительном v он описывается уравнением

$$y = -(x-1)^2 - 1 + 5e^{-(1,15+x)},$$

при отрицательном v — уравнением

$$y_1 = -(x+1)^2 - 1 + 5e^{x-1,15}.$$

По предельному циклу можно определить показатели качества экстремальной системы. Зона поиска на входе будет определяться значениями x в крайних точках, т. е. $x = \pm 1,15$. Зона поиска на выходе определяется разностью $\Delta y = y_{\max} - y_{\min} = 0,35$. Потери на поиск определяются как разность $y_{\max} - y_{\text{сред}}$, а $y_{\text{сред}}$ является горизонтальной осью симметрии предельного цикла. В нашем случае потери на поиск $P = 0,25$. Период автоколебаний $T = \frac{2x_{\max}}{v} = 2,3$ сек.

Задача 53. Рассчитать и построить переходный процесс для экстремальной системы, т. е. движение выходной координаты во времени, работающей по принципу запоминания экстремума. Данные для расчета взять в задаче 52.

Решение. Уравнение, которое определяет движение выходной координаты y на первом участке, имеет вид

$$T \frac{dy}{dt} + y = -k(x_0 + vt)^2,$$

где x_0 — значение координаты в начальный момент движения.

Запишем это уравнение в несколько ином виде

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T} y = -\frac{k}{T} (x_0 + vt)^2.$$

Обозначив

$$\frac{1}{T} = b,$$

$$\frac{k}{T} = b_v,$$

имеем

$$\frac{dy}{dt} + by = -b_1(x_0 + vt)^2.$$

Применяя метод решения дифференциального уравнения с помощью интегрирующего множителя $\mu = e^{\int b dt}$ получаем

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int b dt} \left[-b_1 \int (x_0 + vt)^2 e^{\int b dt} dt + C \right] = \\ &= e^{-bt} \left[-b_1 \int (x_0 + vt)^2 e^{bt} dt + C \right] = -\frac{b_1}{b} x_0^2 - \\ &\quad - \frac{2x_0 v b_1}{b^2} (bt - 1) - \frac{b_1 v^2}{b} t^2 + \frac{2b_1}{b^3} (bt - 1) + Ce^{-bt}. \end{aligned}$$

Для упрощения дальнейших преобразований подставим численные значения параметров, взятые из задачи 52, тогда

$$y = -t^2 + 6t - 10 + Ce^{-t}.$$

Определяем C , исходя из начальных условий. Известно, что при $t = 0$, $y = y_0 = -4$ (из задачи 52), следовательно, $C = 6$.

Таким образом, на первом участке движение описывается уравнением

$$y = -t^2 + 6t - 10 + 6e^{-t}.$$

Меняя t от нуля до значения, соответствующего точке переключения, получаем изменение y во времени на первом участке. Расчеты сводим в табл. 30.

Таблица 30

t	0	0,5	1	1,5	2
$6e^{-t}$	6	3,6	2,22	1,32	0,84
$6t$	0	3	6	9	12
$-t^2 - 10$	-10	-10,25	-11	-12,25	-14
$-6t + 6e^{-t}$	6	6,6	8,22	10,32	12,84
y	-4	-3,65	-2,78	-1,93	-1,16

t	2,5	2,8	3	3,2	3,5
$6e^{-t}$	0,48	0,36	0,3	0,24	0,18
$6t$	15	16,8	18	19,2	21
$-t^2 - 10$	-16,25	-17,84	-19	-20,24	-22,25
$-6t + 6e^{-t}$	15,48	17,16	18,3	19,44	21,18
y	-0,77	-0,68	-0,7	-0,8	-1,07

Процесс на первом участке показан на рис. 50.

В тот момент, когда y станет равным $y_{\max} - \Delta_y$, произойдет переключение управляющего воздействия. Уравнение, описывающее дальнейшее движение, будет иметь вид

$$\frac{dy}{dt} + by = -b_1(x_0 - vt)^2 = -b_1(x_0^2 - 2x_0 vt + v^2 t^2).$$



Рис. 50. Изменение выходной координаты экстремальной системы во времени

Решая это уравнение с помощью интегрирующего множителя, имеем

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int b dx} \left[-b_1 \int (x_0^2 - 2x_0 vt + v^2 t^2) e^{\int b dt} dt + C \right] = \\ &= -\frac{b_1}{b} x_0^2 + \frac{2x_0 v b_1}{b^2} (bt - 1) - \frac{v^2 b_1}{b} t^2 + \\ &\quad + \frac{2v^2 b_1}{b^3} (bt - 1) + Ce^{-bt}. \end{aligned}$$

После подстановки численных значений коэффициентов и значения $x_0 = 1,3$ в момент переключения имеем

$$y = -1,69 + 2,6(t-1) - t^2 + 2(t-1) + Ce^{-t}$$

или

$$y = -t^2 + 4,6t - 6,29 + Ce^{-t}.$$

Определяем C из условия, что при $t = 0$, $y_0 = 0,9$, тогда

$$-0,9 = -6,29 + C,$$

откуда $C = 5,39$.

Окончательно имеем

$$y = -t^2 + 4,6t - 6,29 + 5,39e^{-t}.$$

Расчеты сведены в табл. 31.

Таблица 31

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$5,39 e^{-t}$	5,39	3,234	1,836	1,186	0,7	0,43
$4,6 t$	0	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5
$-t^2 - 6,29$	-6,29	-6,54	-7,29	-8,54	-10,29	-12,54
$5,39e^{-t} + 4,6t$	5,39	5,534	5,456	8,086	9,9	11,93
y	-0,9	-1,006	-0,84	-0,46	-0,3	-0,6

Продолжая указанные решения до тех пор, пока коэффициенты решения дифференциального уравнения не будут одинаковыми, получим предельный цикл. Переходный процесс выхода на экстремум и автоколебания показаны на рис. 50. По переходному процессу можно определить время выхода на предельный цикл.

Задача 54. Уравнения экстремальной системы взять такие же, как и в задаче 52.

Уравнение динамики объекта

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx_1,$$

где $T = 1$ сек.

Уравнение статической характеристики объекта

$$x_1 = -kx^2,$$

где $k = 1$.

Уравнение исполнительного механизма

$$\frac{dx}{dt} = \pm v,$$

где

$$v = 1 \frac{e\partial}{\text{сек}}.$$

Зона нечувствительности $\Delta y_n = 0,2$.

Определить параметры предельного цикла: T_n — период автоколебаний, P — потери на поиск для системы, работающей по принципу запоминания экстремума.

Решение. Составим уравнение для определения параметров предельного цикла.

Уравнение положительного предельного полуцикла (рис. 51) имеет вид

$$y = -k(x - vT)^2 - kv^2 T^2 + De^{-\frac{x-x_0}{vT}}.$$

Уравнение для момента реверса

$$y_c = -k(x_c - vT)^2 - kv^2 T^2 + De^{-\frac{x_c - x_0}{vT}}. \quad (1)$$

Уравнение для точки максимума B

$$y_B = -kx_B^2,$$

а для точки C

$$y_C = -kx_B^2 - \Delta y_n,$$

откуда определяем

$$x_B = \sqrt{\frac{-y_C - \Delta y_n}{k}}.$$

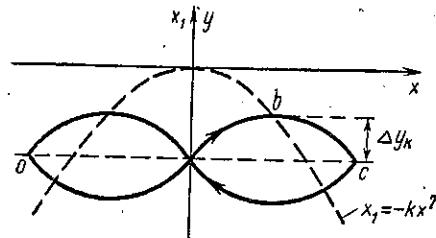


Рис. 51. Предельный цикл экстремальной системы

Подставляя последнее выражение в уравнение для y , получим

$$-kx_B^2 = -k(x_B - vT)^2 - kv^2 T^2 + De^{-\frac{x_B - x_0}{vT}};$$

$$-2kx_B vT + 2kv^2 T^2 = De^{-\frac{x_B - x_0}{vT}};$$

$$2kv^2 T^2 - 2k vT \sqrt{\frac{-y_C - \Delta y_n}{k}} = De^{-\frac{x_B - x_0}{vT}}, \quad (2)$$

где D — постоянная, определяемая начальными условиями для полуцикла

$$D = [y_0 + k(x_0 - vT)^2 + kv^2T^2] = [y_c + k(-x_c - vT)^2 + kv^2T^2],$$

так как $y_0 = y_c$; $x_0 = -x_c$.

Таким образом, имеем два уравнения (1) и (2), в которых неизвестными являются y_c и x_c . Решив эти уравнения, определим тем самым параметры предельного цикла. Уравнения (1) и (2) трансцендентные, аналитическое решение их невозможно, поэтому применим метод подбора.

Подставим в уравнение (1), (2) численные значения параметров экстремальной системы

$$y_c = -x_c^2 + 2x_c - 2 + [y_c + x_c^2 + 2x_c + 2] e^{-2x_c}$$

или

$$y_c = \frac{-x_c^2 + 2x_c - 2 + [x_c^2 + 2x_c + 2] e^{-2x_c}}{1 - e^{-2x_c}}; \quad (3)$$

$$2(1 - \sqrt{y_c - 0,2}) = (y_c + x_c^2 + 2x_c + 2) e^{-x_c - \sqrt{y_c - 0,2}}. \quad (4)$$

Нужно решить систему двух трансцендентных уравнений (3) и (4).

Построим зависимость для уравнения (3) (рис. 52), а также зависимость

$$A = 2(1 - \sqrt{y_c - 0,2}) = f(y_c),$$

которая не зависит от x_c , и зависимость

$$B = (y_c + x_c^2 + 2x_c + 2) e^{-x_c - \sqrt{y_c - 0,2}} = \varphi(y_c)$$

при различных $x_c = \text{const}$.

Решению уравнений (3), (4) удовлетворяют значения $x_c = 1$ и $y_c = -0,4$ (на рис. 52 для удобства изображены положительные значения y_c). При $x_c = 2$ нельзя подобрать значения y_c , удовлетворяющего обоим графикам.

Определим период поисковых колебаний T_n . Очевидно, что T_n равен отрезку времени, необходимому для прохождения от значения x_0 до значения x_c (т. е. $2x_c$) с постоянной скоростью изменения входной координаты объекта $\frac{dx}{dt} = v$. Отсюда

$$T_n = \frac{2x_c}{v} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2 \text{ сек.}$$

Определим точность системы, т. е. потери на поиск

$$P = \frac{1}{3} kx_c =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} \text{ ед.}$$

Задача 55. Экстремальный объект управления состоит из двух инерционных звеньев, описываемых уравнениями:

$$T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = k_1 x; \quad (5)$$

$$T_2 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = k_2 y, \quad (6)$$

где $T_1 = 100$ сек., $T_2 = 10$ сек., $k_1 = k_2 = 1$.

Запишем передаточные функции этих звеньев:

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1};$$

$$W_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}.$$

Между инерционными звеньями включено нелинейное звено с экстремальной характеристикой

$$y = -kx_1^2,$$

где $k = 1$.

Второе нелинейное звено, управляющее исполнительным механизмом и выявляющее отклонение выходной величины от экстремума, представим в виде эквивалентного реле, характеристика которого представлена на рис. 53, а. Зона нечувствительности $\Delta = 0,5$ ед.

Исполнительный механизм — интегрирующий — описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = k_3 U,$$

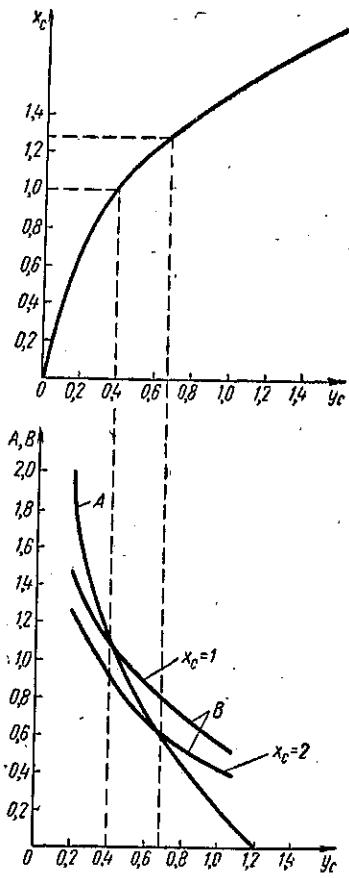


Рис. 52. Графическое решение системы двух трансцендентных уравнений для определения параметров предельного цикла

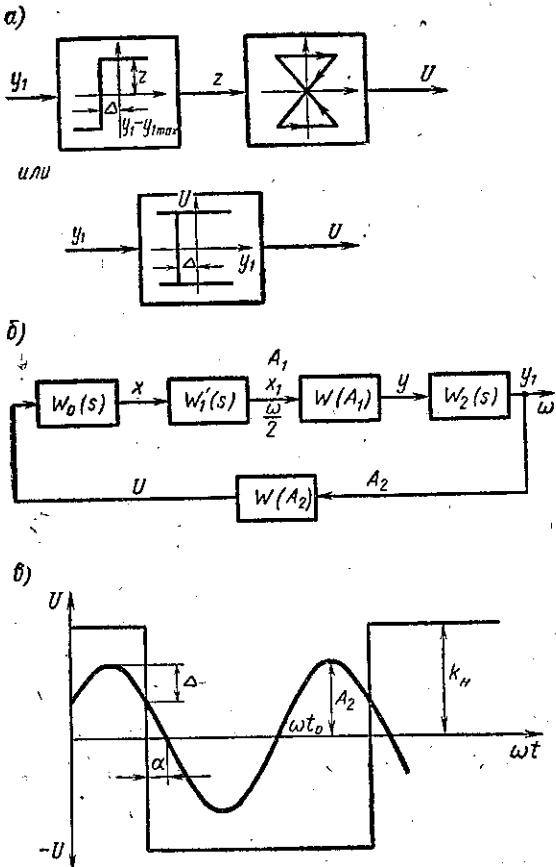


Рис. 53. Блок-схема экстремальной системы и принцип действия релейного элемента

где $k_3 = 0,001 \frac{1}{\text{сек}}$;

$$U = 100 \text{ ед.}$$

Блок-схема экстремальной системы показана на рис. 53, б. Определить методом гармонического баланса параметры предельного цикла: период, амплитуду автоколебаний и потери на поиск.

Решение. Запишем условие существования автоколебаний в замкнутой экстремальной системе

$$W_1\left(j \frac{\omega}{2}\right) W(A_1) W_2(j\omega) W(A_2) = \\ = R_1\left(\frac{\omega}{2}\right) R(A_1) R_2(\omega) R(A_2) e^{j(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_{A_1} + \varphi_2 + \varphi_{A_2})} = 1,$$

$$\text{где } W_1\left(j \frac{\omega}{2}\right) = W_0\left(j \frac{\omega}{2}\right) W'_1\left(j \frac{\omega}{2}\right).$$

Чтобы использовать условие существования автоколебаний, необходимо провести гармоническую линеаризацию нелинейных звеньев W_{n1} и W_{n2} .

В экстремальной системе частота колебаний на выходе объекта в два раза больше частоты на входе. Поэтому применяем метод гармонического баланса в общем виде, т. е. производим гармоническую линеаризацию нелинейных элементов не по основной гармонике входного сигнала, а по кратным гармоникам, содержащимся в выходном сигнале каждого нелинейного элемента. Для звена $W(A_1)$ найдем коэффициент гармонической линеаризации при $\omega = 2\omega_1$, где ω_1 — частота входного сигнала. Для звена $W(A_2)$ найдем коэффициенты гармонической линеаризации при $\omega_1 = \frac{\omega}{2}$. За основную частоту примем частоту на выходе объекта, т. е. ω и все фазовые соотношения нужно учитывать в масштабе частоты ω .

Определим выражение для эквивалентного комплексного коэффициента передачи нелинейного элемента $W(A_1)$

$$W(A_1) = U(A_1) + jV(A_1),$$

$$\Phi = \frac{\omega}{2} t,$$

$$\text{где } U(A_1) = \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} F(A_1 \sin \Phi) \sin 2\Phi d\Phi \text{ -- коэффициент гар-}$$

монической линеаризации, характеризующий отношение амплитуды синфазной составляющей второй гармоники на выходе звена $W(A_1)$ к амплитуде синусоидальных колебаний на входе звена $W(A_1)$:

$$V(A_1) = \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{\pi} F(A_1 \sin \varphi) \cos 2\varphi d\varphi — \text{коэффициент гармонической линеаризации},$$

характеризующий отношение амплитуды квадратурной составляющей второй гармоники на выходе звена $W(A_1)$ к амплитуде синусоидальных колебаний на входе.

За начало отсчета фаз принят момент перехода входного сигнала через нуль в сторону возрастающих значений.

Определим выходную величину первого нелинейного звена

$$F(x) = -kx^2 = -x^2,$$

где $x = A_1 \sin \varphi$.

Следовательно,

$$F(A_1 \sin \varphi) = -A_1^2 \sin^2 \varphi.$$

Подставляя $F(A_1 \sin \varphi)$ в выражения для $U(A_1)$ и $V(A_1)$, а затем интегрируя, получаем:

$$U(A_1) = -\frac{2}{\pi} A_1 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{4A_1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi = 0;$$

$$V(A_1) = -\frac{2}{\pi} A_1 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \cos 2\varphi d\varphi = \frac{A_1}{2};$$

$$R(A_1) = \sqrt{[U(A_1)]^2 + [V(A_1)]^2} = \frac{A_1}{2};$$

$$\Phi_{A_1} = \operatorname{arctg} \frac{V(A_1)}{U(A_1)} = \frac{\pi}{2},$$

тогда

$$W(A_1) = \frac{A_1}{2} e^{j \frac{\pi}{2}}.$$

Определим коэффициенты гармонической линеаризации для звена $W(A_2)$. На рис. 53, в изображена работа

нелинейного элемента W_{n2} . Нелинейный элемент представляет собой последовательное соединение релейного элемента с зоной нечувствительности и специального нелинейного элемента типа храпового механизма (шаговый искатель, триггер со счетным входом). Сигнал на выходе звена $W(A_2)$ появляется каждый раз, когда входной сигнал изменится в сторону уменьшения от максимального своего значения на величину Δ . Поэтому частота выходного сигнала в два раза меньше входного, это необходимо учесть при определении коэффициентов гармонической линеаризации.

Запишем комплексный коэффициент передачи для нелинейности A_2

$$W(A_2) = U(A_2) + jV(A_2).$$

Для определения $U(A_2)$ и $V(A_2)$ обратимся к рис. 53, в. Входные колебания имеют частоту ω и амплитуду A_2 . Выходные колебания прямоугольной формы имеют амплитуду $U = k_n$, частоту $\frac{\omega}{2}$ и сдвиг фазы α . Поэтому выражения для $U(A_2)$ и $V(A_2)$ будут иметь следующий вид:

$$U(A_2) = \frac{1}{\pi A_2} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} k_n \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{4k_n}{\pi A_2} \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$V(A_2) = \frac{1}{\pi A_2} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} k_n \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{4k_n}{\pi A_2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

За начало отсчета примем момент перехода входного сигнала через нуль в сторону возрастающих значений, тогда имеем

$$W(A_2) = \frac{4k_n}{\pi A_2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + j \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{4k_n}{\pi A_2} e^{j \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)},$$

где отсчет фазовых углов ведется в масштабе частоты, равной $\frac{\omega}{2}$. В масштабе частоты, равной ω , получим

$$W(A_2) = \frac{4k_n}{\pi A_2} e^{j \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)},$$

так как $\omega t_1 = 2 \frac{\omega}{2} t_1$, $\alpha = \arcsin \frac{\Delta - A_2}{A_2}$.

Запишем выражения для частотных характеристик линейных звеньев в комплексной форме:

$$W_1\left(j \frac{\omega}{2}\right) = \frac{4k_1}{\pi \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 4}} e^{-2j\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} T_1\right)};$$

$$W_2(j\omega) = \frac{k_2}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}} e^{-j \operatorname{arctg} \omega T_2}.$$

Частотные характеристики звеньев, включенных до звена $W(A_1)$, рассматриваются при частоте $\frac{\omega}{2}$, фазовые углы этих звеньев удваиваются, так как за основную частоту принята частота на выходе звена $W(A_1)$, т. е. ω . Частотные характеристики звеньев, включенных после звена $W(A_2)$, рассматриваются при частоте ω . Перепишем условие, при котором в релейной экстремальной системе существуют автоколебания

$$W(A_1) W_1\left(j \frac{\omega}{2}\right) W(A_2) W_2(j\omega) = 1. \quad (1)$$

Рассмотрим аналитический способ определения частоты и амплитуды автоколебаний. Подставим в уравнение (1) выражения для сомножителей, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{8kk_h k_1 k_2}{\pi \omega \sqrt{\omega^2 T_1^2 + 4} \sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1}} \times \\ & \times \frac{A_1}{A_2} e^{-i\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha + 2\operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} T_1 + \operatorname{arctg} \omega T_2\right)} = 1, \end{aligned} \quad (2)$$

Определим по рис. 53, б значение A_1

$$A_1 = A_2 |W(A_2)| \left| k_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right| = \frac{16k_1 k_h}{\pi \omega \sqrt{\omega^2 T_1^2 + 4}}$$

и подставим в уравнение (2)

$$\frac{128kk_h^2 k_1^2 k_2}{\pi^2 \omega^2 (\omega^2 T_1^2 + 4) \sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1} A_2} e^{i\varphi_0} = 1,$$

где $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha - 2\operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} T_1 - \operatorname{arctg} \omega T_2$.

Запишем баланс амплитуд

$$\frac{128kk_h^2 k_1^2 k_2}{\pi^2 \omega^2 (\omega^2 T_1^2 + 4) \sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1} A_2} = 1 \quad (3)$$

и баланс фаз

$$\varphi_0 = 0. \quad (4)$$

Определим A_2 из условия баланса фаз

$$\frac{\pi}{2} - \alpha - 2\operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} T_1 - \operatorname{arctg} \omega T_2 = 0;$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta - A_2}{A_2} - 2\operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} T_1 - \operatorname{arctg} \omega T_2 = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta - A_2}{A_2} &= \cos \left[2\operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} T_1 + \operatorname{arctg} \omega T_2 \right] = \cos (2\beta + \gamma) = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\beta} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{4 - \omega^2 T_1^2 - 4\omega^2 T_1 T_2}{(4 + \omega^2 T_1^2) \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}, \end{aligned}$$

где $\beta = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} T_1$; $\gamma = \operatorname{arctg} \omega T_2$;

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\Delta}{1 + \cos (2\beta + \gamma)} = \\ &= \Delta \frac{(4 + \omega^2 T_1^2) \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{(4 + \omega^2 T_1^2) \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} + 4 - \omega^2 T_1^2 - 4\omega^2 T_1 T_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив значение A_2 в уравнение (3), после преобразований получим

$$\begin{aligned} & \frac{128kk_h^2 k_1^2 k_2 T_1^2}{\pi^2 \Delta} = \\ & = \frac{\omega^2 T_1^2 (\omega^2 T_1^2 + 4)^2 (\omega^2 T_2^2 + 1)}{(4 + \omega^2 T_1^2) \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} + 4 - \omega^2 T_1^2 - 4\omega^2 T_1 T_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решаем уравнение (6) графически (рис. 54):

$$D = \frac{\omega^2 T_1^2 (\omega^2 T_1^2 + 4)(\omega^2 T_2^2 + 1)}{(4 + \omega^2 T_1^2) \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2 + 4 - \omega^2 T_1^2 - 4\omega^2 T_1 T_2}};$$

$$\frac{C}{\Delta} = \frac{128 k k_H k_1^2 k_2 T_1^2}{\pi^2 \Delta} = \frac{128 \cdot 100^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4}{3,14^2 \cdot 0,5} = 2,6 \cdot 10^3,$$

следовательно, значение $\omega T_1 = 3,5$.

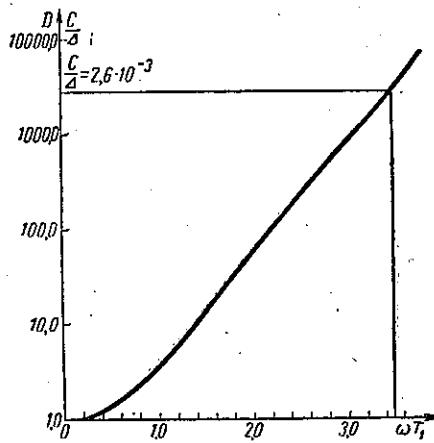


Рис. 54. Графическое решение уравнения для аналитического определения параметров предельного цикла

Частота автоколебаний

$$\omega = \frac{3,5}{T_1} = \frac{3,5}{100} = 0,035 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Амплитуда автоколебаний

$$A_2 = 0,5 \frac{(4 + 12,0) \sqrt{1 + 0,49}}{16 \cdot \sqrt{1,49 + 4 + 12,2 - 9,8}} = 6.$$

Определим потери на поиск

$$P = A_2 |W(A_2)| \left| W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right| W(A_1) = \frac{128 k k_H k_1^2 k_2 T_1^2}{\pi^2 \omega^2 T_1^2 (\omega^2 T_1^2 + 4)} =$$

$$= \frac{C}{\omega^2 T_1^2 (\omega^2 T_1^2 + 4)} = \frac{1,3 \cdot 10^3}{12,2 \cdot 16,2} = 6,6.$$

Задача 56. По условиям задачи 55 определить параметры предельного цикла с помощью амплитудно-фазовых характеристик (метод Гольдфарба).

Решение. Как известно, по методу Гольдфарба строится амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы $W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) W_2(j\omega)$ и обратная характеристика нелинейных звеньев $\frac{1}{W(A_1) W(A_2)}$. Точка пересечения двух годографов определяет наличие автоколебаний и их параметры.

Наличие двух нелинейных элементов усложняет решение, поэтому преобразуем выражение для существования автоколебаний

$$W(A_1) W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) W_2(j\omega) W(A_2) = 1,$$

где

$$W(A_1) = \frac{k A_1}{2} = \frac{k A_2 W(A_2)}{2} \left| W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right| =$$

$$= \frac{2 k k_H}{\pi} \left| W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right| e^{j \frac{\pi}{2}};$$

$$\frac{2 k k_H}{\pi} \left| W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right| W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) W_2(j\omega) W(A_2) e^{j \frac{\pi}{2}} = 1,$$

где

$$\begin{aligned} & \left| W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right| W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) = \\ & = \left| W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right| \left| W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right| e^{-2j \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\omega}{2} T_1 \right)} = \\ & = \left[W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Фазовый сдвиг в выражении $\left| W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right|^2$ учитывается в масштабе частоты $\frac{\omega}{2}$, так как проделанные

преобразований являются формальными, но позволяющими существенно упростить решение задачи.

Уравнение для определения автоколебаний

$$\frac{2k_{H_1}}{\pi} \left[W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right]^2 W_2(j\omega) e^{j \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{W(A_2)}.$$

Обозначим левую часть уравнения через $W_3(j\omega)$, тогда

$$W_3(j\omega) = \frac{1}{W(A_2)}.$$

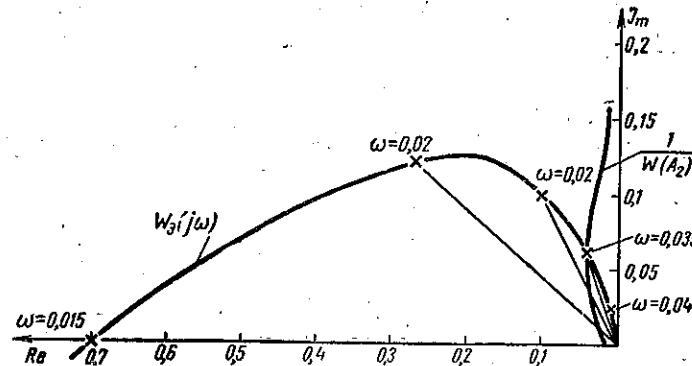


Рис. 55. Определение параметров предельного цикла с помощью амплитудно-фазовых характеристик

На рис. 55 построена амплитудно-фазовая характеристика

$$W_3(j\omega) = \frac{2k_{H_1}}{\pi} \left[W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right]^2 W_2(j\omega) e^{j \frac{\pi}{2}}$$

и обратная характеристика нелинейного элемента $\frac{1}{W(A_2)}$:

$$W(A_2) = \frac{4k_{H_1}}{\pi A_2} e^{j(\pi - \alpha)};$$

$$\frac{1}{W(A_2)} = \frac{\pi A_2}{4k_{H_1}} e^{-j(\pi - \alpha)},$$

где $\alpha = \arcsin \frac{\Delta - A_2}{A_2}$;

$$\frac{1}{W(A_2)} = -\frac{\pi}{4k_{H_1}} \left[-\sqrt{A_2^2 - (\Delta - A_2)^2} - j(\Delta - A_2) \right].$$

Из полученного уравнения определяются значения минимой и действительной частей характеристики $\frac{1}{W(A_2)}$.

Точка пересечения $W_3(j\omega)$ и $\frac{1}{W(A_2)}$ определяет $\omega = 0,035 \frac{1}{\text{сек}}$ и $A_2 = 6,0$, что совпадает с результатами, полученными аналитическим способом.

Данные по расчету $W_3(j\omega)$ сведены в табл. 32.

Таблица 32

ω	0	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04
R	∞	2	0,7	0,3	0,15	0,075	0,045	0,024
φ°	90°	-162°	-180°	-203°	-225°	-240°	-245°	-260°

Построение $\frac{1}{W(A_2)}$ произведено согласно табл. 33.

Таблица 33

A_2	0,25	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0
Im	-0,002	0	0,004	0,012	0,028	0,043	0,059
Re	0	-0,004	-0,007	-0,011	-0,0154	-0,0194	-0,022

Задача 57. Используя данные задач 55 и 56, определить параметры предельного цикла с помощью эквивалентных логарифмических характеристик.

Решение. Из задачи 56 имеем уравнение для определения автоколебаний в комплексной форме

$$W_3(j\omega) W(A_2) = 1,$$

где

$$W_3(j\omega) = \frac{2k_{H_1}}{\pi} \left[W_1 \left(j \frac{\omega}{2} \right) \right]^2 W_2(j\omega) e^{j \frac{\pi}{2}};$$

$$W(A_2) = \frac{4k_{H_1}}{\pi A_2} e^{j(\pi - \alpha)};$$

$$W_3(j\omega) = \frac{2k_{H_1}}{\pi} R_1^2(\omega) e^{2j\varphi_1(\omega)} e^{j \frac{\pi}{2}} R_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}; \quad (1)$$

$$W(A_2) = \frac{4k_{H_1}}{\pi} R(A_2) e^{j[\pi - \alpha(A_2)]};$$

$$W_s(j\omega) W(A_2) = \frac{8k_{ll}}{\pi^2} R_1^2(\omega) R_2(\omega) e^{i[2\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \frac{\pi}{2}]} \times \\ \times R(A_2) e^{i[\pi - \alpha(A_2)]} = 1.$$

Запишем условия, при которых возможно существование периодического решения:

$$\frac{8k_{ll}^2}{\pi^2} R_1^2(\omega) R_2(\omega) = \frac{1}{R(A_2)}; \quad (1)$$

$$2\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \frac{\pi}{2} = -\pi + \alpha(A_2). \quad (2)$$

Определим логарифмическую амплитудно-частотную характеристику линейной части с учетом коэффициента передачи нелинейного элемента, равного $\frac{4k_{ll}}{\pi}$,

$$20 \lg \frac{8k_{ll}}{\pi^2} + 40 \lg R_1(\omega) + 20 \lg R_2(\omega) = -20 \lg R(A_2)$$

и логарифмическую характеристику нелинейного элемента $\frac{1}{R(A_2)}$

$$R(A_2) = \frac{1}{A_2};$$

$$20 \lg \frac{1}{R(A_2)} = -20 \lg A_2 = L(A_2).$$

Логарифмическая амплитудная характеристика нелинейного элемента представляет собой прямую с наклоном 20 об/дек:

$$R_1(\omega) = \frac{4k_1}{\sqrt{\omega^2 T_1^2 + 4}};$$

$$40 \lg R_1(\omega) \cong 40 \lg k_1 - 40 \lg \frac{\omega}{2} - 40 \lg \frac{\omega}{2} T_1;$$

$$20 \lg R_2(\omega) \cong -20 \lg \omega T_2.$$

Подставим в левую часть уравнения (1) полученные выражения для логарифмических амплитудно-частотных характеристик, а в правую — значения $20 \lg \frac{1}{R(A_2)}$.

$$20 \lg \frac{8k_{ll}^2}{\pi^2} + 40 \lg 4k_1 - 40 \lg \frac{\omega}{2} - 40 \lg \frac{\omega}{2} T_1 - \\ - 20 \lg \omega T_2 = 20 \lg A_2.$$

Сокращенно можно записать:

$$\left. \begin{aligned} L_s(\omega) &= L(A_2); \\ \varphi_s(\omega) &= \varphi(A_2). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

На рис. 56 построены $L_s(\omega)$ и $\varphi_s(\omega)$, $L(A_2) = 20 \lg A_2$ и $\varphi(A_2)$. Чтобы определить существование автоколебаний

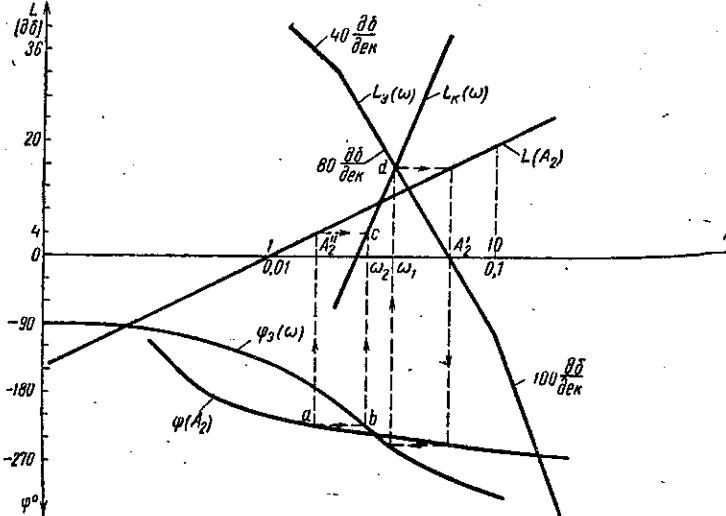


Рис. 56. Определение параметров предельного цикла с помощью логарифмических характеристик

ний, нужно уравнения (1) и (2) решить совместно, т. е. найти такие значения A_2 и ω , при которых удовлетворились бы одновременно уравнения (1) и (2).

Решение находится путем нескольких проб. Задаемся значением A_2 , например A_2'' , определяем соответствующее значение $\varphi(A_2'')$, проводим прямую ab , параллельную оси ω , до пересечения с $\varphi_s(\omega)$, затем определяем точку c , как показано на рис. 56. Точка c определяет значение $L(\omega_2)$, равное $L(A_2'')$, которое в данном случае

не совпадает с $L_s(\omega)$. Поэтому задаемся следующим значением A_2 , например A'_2 , и, проделывая те же построения, что и для A'_2 , определяем точку d , которая находится на $L_s(\omega)$. Следовательно, значения $A'_2 = 6$ и частоты $\omega = \omega_1 = 0,035 \frac{1}{\text{сек}}$ определяют амплитуду и частоту автоколебаний экстремальной системы.

Задаваясь несколькими значениями A_2 , можно построить характеристику $L_k(\omega)$, определяющую значения $L(A'_2) = L_k(\omega)$. Точка пересечения $L_k(\omega)$ и $L_s(\omega)$ даст значение частоты автоколебаний, а условие $L_s(\omega) = L(A_2)$ даст значение амплитуды автоколебаний.

Задача 58. Экстремальный объект управления описывается следующими уравнениями:

$$T \frac{dx}{dt} + x = k_2 x_1,$$

где $T = 2$ сек, $k_2 = 1$;

$$\varphi = -kx^2.$$

Исполнительный механизм — интегрирующий, его уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} = k_1 U,$$

где $k_1 = 0,1 \frac{1}{\text{сек}}$.

Зона нечувствительности релейного элемента $\Delta = 0,1$. Начальное отклонение $x_0 = 2$, $y_0 = 0$. Принцип работы системы — шаговый. Закон формирования управляющего сигнала

$$U_n = \text{sign}(\varphi_n - \varphi_{n-1} + \Delta) U_{n-1}.$$

Определить параметры предельного цикла и процесс выхода в экстремальную область.

Решение. Управляющий сигнал будем считать в виде δ -функции, т. е. в виде импульсов бесконечно большой амплитуды и бесконечно малой длительности с площадью, равной единице. При этом предположении изменение координаты x_1 будет

$$\Delta x_1 = k_1 U \Delta t = k_1,$$

так как $U \Delta t = 1$. Отсюда реальная длительность включения исполнительного механизма $t_u = \frac{1}{U_p}$, где U_p — реальный управляющий сигнал с релейного элемента. Длительность шага нужно выбрать значительно больше времени включения исполнительного механизма, например $T_w = 4$ сек.

Для решения задачи применим метод z -преобразования и разностной фазовой плоскости.

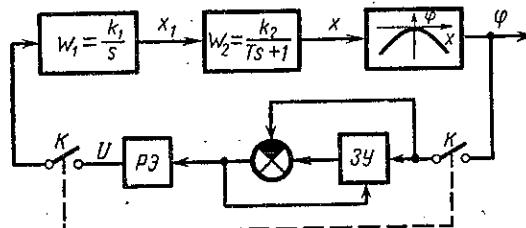


Рис. 57. Структурная схема шаговой экстремальной системы

Из структурной схемы, изображенной на рис. 57, видно, что система состоит из линейных и нелинейных звеньев. Уравнение линейной части системы имеет вид

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k_1 k_2 U,$$

передаточная функция

$$W(s) = \frac{x(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{s} \frac{k_2}{Ts+1} = W'_1(s) + W'_2(s) = \frac{k_3}{s} - \frac{k_3}{s + \frac{1}{T}}.$$

Подвернем полученную передаточную функцию z -преобразованию:

$$W'_1(z) = \frac{k_3 z}{z - 1},$$

$$W'_2(z) = \frac{k_3 z}{z - d},$$

где $d = e^{-\frac{T_w}{T}}$.

Релейное звено подает на линейную часть воздействие в виде единичного скачка $U = \text{sign}(n)$, z -преобразование от которого

$$U(z) = \frac{z}{z-1}.$$

При этом z -преобразование выходного сигнала записывается как

$$x(z) = [W_1(z) - W_2(z)] U(z) = \frac{k_3(1-d)z^2}{(z-1)^2(z-d)},$$

где $k_3 = k_1 k_2$.

Проделаем операцию обратного z -преобразования, для чего разложим $x(z)$ на составляющие и затем определим $x(n)$

$$\begin{aligned} x(z) = & \left[\frac{z}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1-d} - \frac{z}{z-1} \cdot \frac{d}{(1-d)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{z}{z-d} \cdot \frac{d}{(1-d)^2} \right] k_3(1-d); \end{aligned}$$

учитывая, что $\frac{z}{(z-1)^2} = n$, $\frac{z}{z-1} = 1$, $\frac{z}{z-d} = d^n$, получим

$$x(n) = k_3 n - \frac{k_3 d}{1-d} + \frac{k_3 d}{1-d} d^n.$$

Для определения параметров предельного цикла применим метод разностной фазовой плоскости. Определим первую разность выходного сигнала

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n,$$

где

$$x_{n+1} = k_3(n+1) - \frac{k_3 d}{1-d} + \frac{k_3 d}{1-d} d^{n+1};$$

$$x_n = k_3 n - \frac{k_3 d}{1-d} + \frac{k_3 d}{1-d} d^n,$$

или

$$\Delta x_n = k_3 + \frac{k_3 d}{1-d} d^n(d-1) = k_3(1-d^{n+1}).$$

Обозначим $\Delta x_n = k_3(1-d^{n+1}) = y$. Первая разность есть аналог первой производной в непрерывных системах. Для нахождения уравнения фазовых траекторий необходимо из выражения для $x(n)$ исключить n и y .

Определим n из выражения y :

$$d^{n+1} = \frac{k_3 - y}{k_3},$$

$$d^n = \frac{k_3 - y}{dk_3};$$

$$d^n = e^{-an},$$

где

$$a = \frac{T_m}{T};$$

$$n = -\frac{1}{a} \ln \left| 1 - \frac{y}{k_3} \right| - 1.$$

Подставим значение n в выражение для $x(n)$

$$\begin{aligned} x(n) = & -\frac{k_3}{a} \ln \left| 1 - \frac{y}{k_3} \right| - k_3 - \frac{k_3 d}{1-d} + \frac{k_3 - y}{1-d} = \\ = & -\frac{k_3}{a} \ln \left| 1 - \frac{y}{k_3} \right| - \frac{y}{1-d}. \end{aligned}$$

С учетом начальных условий

$$x = -\frac{k_3}{a} \ln \left| 1 - \frac{y}{k_3} \right| - \frac{y}{1-d} + C.$$

При $x = x_0$, $y = y_0$

$$x = x_0 - \frac{y - y_0}{1-d} - \frac{k_3}{a} \ln \left| 1 - \frac{y}{k_3} \right| + \frac{k}{a} \ln \left| 1 - \frac{y_0}{k_3} \right|.$$

Подставим численные значения. При $x_0 = 2$, $y_0 = 0$

$$x = 2 - 1,2y - \frac{1}{20} \ln |1 - 10y|.$$

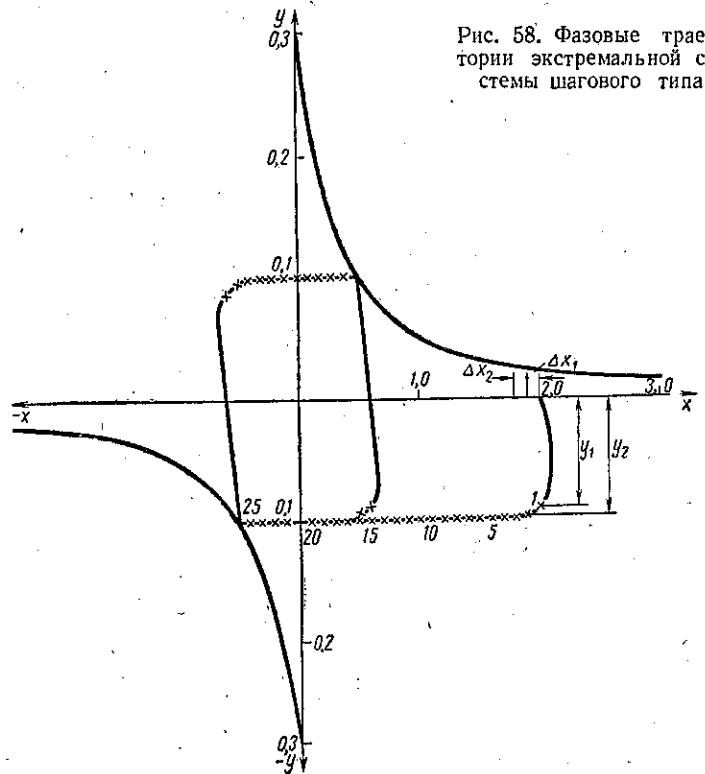
Определим уравнение линии переключения, для чего преобразуем выражение для $U_n = \text{sign}(\varphi_n - \varphi_{n-1} + \Delta) U_{n-1}$.

Подставим значения $\varphi_n = -kx_n^2$ и $\varphi_{n-1} = -kx_{n-1}^2$ в выражение для U_n

$$U_n = -\operatorname{sign}(kx_n^2 - kx_{n-1}^2 - \Delta) U_{n-1}.$$

Так как $x_n = x_{n-1} + \Delta x_n = x_{n-1} + y$, то

$$k(x_n^2 - x_{n-1}^2) = k(x_{n-1} + y)^2 - kx_{n-1}^2 = 2kx_{n-1}y + ky^2.$$



Для определения уравнения линии переключения полагаем $U_n = 0$

$$2kx_{n-1}y + ky^2 - \Delta = 0,$$

отсюда

$$x_{n-1} = \frac{\Delta - ky^2}{2ky}.$$

При $\Delta = 0,1$, $k = 1$ находим уравнение линии переключения

$$x = \frac{0,1 - y^2}{2y}.$$

Уравнение фазовых траекторий в общем виде

$$x = x_0 - \frac{y - y_0}{1 - d} \mp \frac{k_3}{a} \ln \left| 1 \mp \frac{y}{k_3} \right| \pm \frac{k_3}{a} \ln \left| 1 \mp \frac{y_0}{k_3} \right|,$$

где верхние знаки берутся для $U_n > 0$, нижние — для $U_n < 0$. Для $x_0 = 2$, $y < 0$, $U < 0$ уравнение фазовых траекторий для первого участка

$$x = 2 - 1,2y + \frac{1}{20} \ln |1 + 10y|.$$

На рис. 58 показаны фазовые траектории экстремальной системы. На разностной фазовой плоскости легко получить отметки времени, так как значение координаты в момент времени n равно значению x_{n-1} , сложенному с приращением Δx_n за один шаг.

Из рис. 58 нетрудно определить интересующие нас параметры: время выхода на предельный цикл $\tau = 26 T_w = 26 \cdot 4 = 104$ сек, период автоколебаний $T = 27 \cdot 4 = 108$ сек; амплитуду автоколебаний на входе $A = \pm 0,6$ ед.

Задача 59. Экстремальный объект управления описывается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= x; \\ T \frac{dx_2}{dt} + x_2 &= x \end{aligned} \right\} \text{— уравнения динамики объекта};$$

$\Phi = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2$ — статическая характеристика объекта, где $T = 100$ сек; $k_1 = 0,1$; $k_2 = 0,4$.

Исполнительный механизм — интегрирующий, его уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kU,$$

где $k = 0,4$.

Точность поиска $\Delta = 2\%$. Начальные отклонения: $x_{10} = 10$, $x_{20} = 50$, $T_w = 50$ сек. Метод поиска экстремума — шаговый.

Определить параметры предельного цикла и время выхода в экстремальную область.

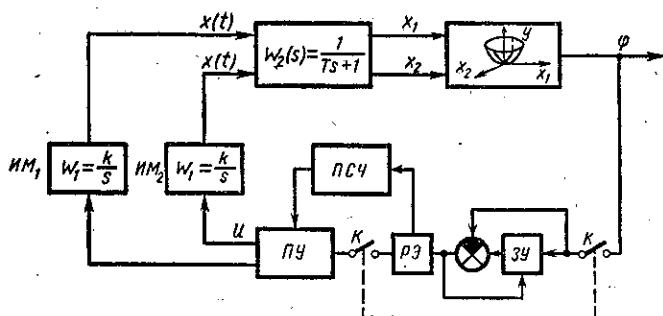


Рис. 59. Структурная схема экстремальной системы, работающей по принципу Гаусса — Зайделя

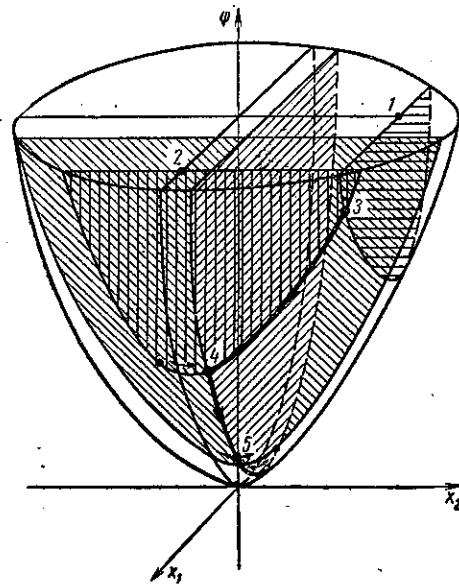


Рис. 60. Поиск экстремума по методу Гаусса — Зайделя

1 — x_{z0} ; 2 — x_{t0} ; 3 — q_0 — исходная точка на экстремальной поверхности; 4, 5 — первые точки переключения

Решение. Так как управляемая величина зависит от двух переменных, то автоматический поиск следует производить по двум координатам: x_1 и x_2 .

Структурная схема системы представлена на рис. 59. Поиск экстремума будем осуществлять по методу Гаусса — Зайделя. Это означает, что система ищет экстремум сначала по одной координате, при фиксированном значении второй, а затем — по другой. Принцип

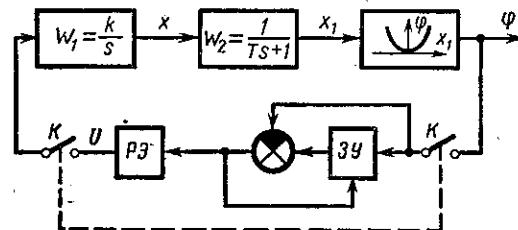


Рис. 61. Структурная схема экстремальной системы шагового типа

такого поиска ясен из рис. 60. Поскольку поиск ведется по каждой из координат независимо, то и расчет можно осуществить только для одной координаты.

Структурная схема системы, которую необходимо рассчитать, представлена на рис. 61.

Передаточная функция линейной части системы та же, как и в задаче 58.

Очевидно, применив метод z -преобразования и разностную фазовую плоскость, получим те же выражения для линий переключения и для фазовых траекторий, что и в задаче 58.

Уравнение линии переключения выводится из алгоритма управления при $U_n = 0$:

$$U_n = \operatorname{sign}(\varphi_n - \varphi_{n-1} - \Delta) U_{n-1}.$$

Учитывая, что $\varphi_n = k_1 x_{1n}^2$, $\varphi_{n-1} = k_1 x_{1n-1}^2$, а
получим

$$x_{1n} = x_{1n-1} + \Delta x_{1n} = x_{1n-1} + y,$$

$$(k_1 y^2 + 2k_1 y x_1 - \Delta) = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{\Delta - k_1 y^2}{2k_1 y}.$$

Последнее уравнение является уравнением линии переключения для первой координаты.

Для второй координаты уравнение линии переключения имеет такой же вид и получается аналогично

$$x_2 = \frac{\Delta - k_2 y^2}{2k_2 y}.$$

Учитывая величины Δ , k_1 и k_2 , заданные в условии задачи, рассчитаем и построим линии переключения для обеих координат:

$$x_1 = \frac{0,2 - y^2}{2y};$$

$$x_2 = \frac{0,05 - y^2}{2y}.$$

Расчет сведен в табл. 34.

Таблица 34

y	$\pm 0,44$	$\pm 0,25$	$\pm 0,5$	$\pm 1,0$	$\pm 2,0$
x_1	0	$\mp 0,27$	$\mp 0,05$	$\mp 0,4$	$\mp 0,95$
y	$\pm 0,22$	$\pm 0,1$	$\pm 0,25$	± 1	
x_2	0	$\pm 0,2$	$\mp 0,025$	$\mp 0,475$	

Линии переключения построены на разностной фазовой плоскости (рис. 62 — для координаты x_1 ; рис. 63 — для координаты x_2).

Необходимо также построить фазовые траектории (рис. 62 и 63), чтобы по ним определить параметры предельного цикла.

Уравнение фазовых траекторий с учетом начальных условий (см. задачу 58) для координаты x_1

$$x_1 = x_{10} - \frac{y - y_0}{1 - d} \mp \frac{k}{a} \ln \left| 1 \pm \frac{y}{k} \right| \pm \frac{k}{a} \ln \left| 1 \mp \frac{y_0}{k} \right|;$$

для координаты x_2

$$x_2 = x_{20} - \frac{y - y_0}{1 - d} \mp \frac{k}{a} \ln \left| 1 \mp \frac{y}{k} \right| \pm \frac{k}{a} \ln \left| 1 \mp \frac{y_0}{k} \right|.$$

Рассчитываем фазовую траекторию $y = f_1(x_1)$. На первом участке $x_{10} = 10$, $y_0 = 0$

$$x_1 = x_{10} - \frac{y}{1 - d} + \frac{k}{a} \ln \left| 1 + \frac{y}{k} \right|,$$

так как $U_n < 0$, $y < 0$,

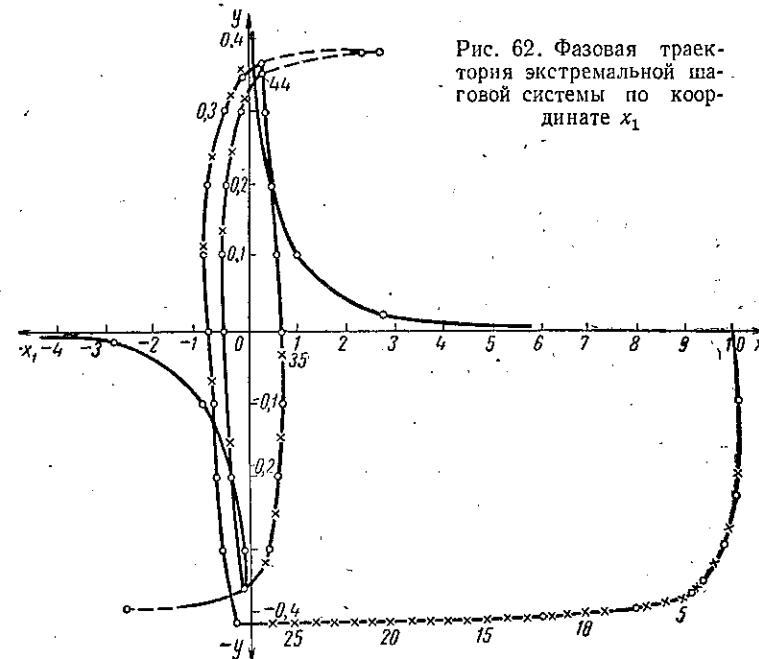


Рис. 62. Фазовая траектория экстремальной шаговой системы по координате x_1

где

$$a = \frac{T_{ш}}{T} = \frac{50}{100} = 0,5;$$

$$d = e^{-a} = e^{-0,5} = 0,606.$$

Тогда в цифрах

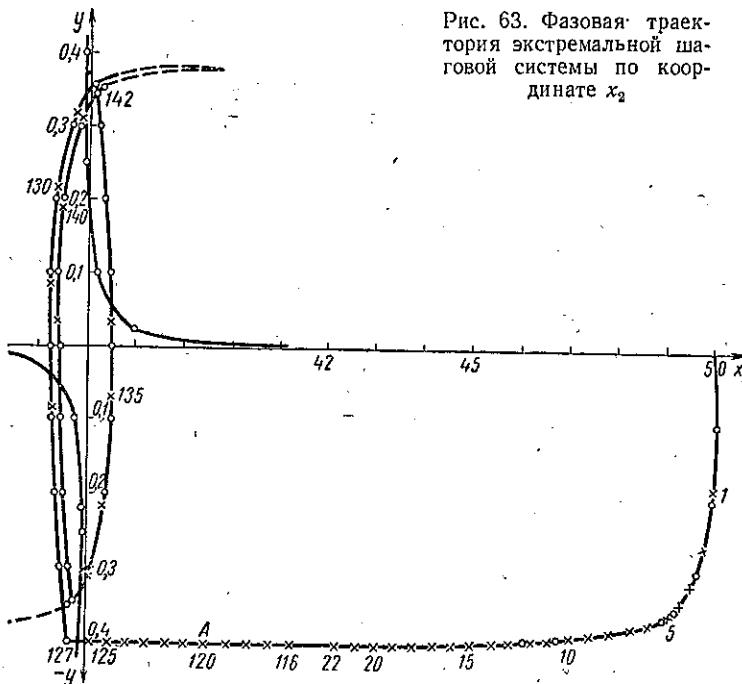
$$x_1 = 10 - 2,54y + 0,8 \ln |1 + 2,5y|.$$

Задаемся значениями y и вычисляем x_1 . Результаты расчета представлены в табл. 35.

Таблица 35

y	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,35	-0,36	-0,38	-0,39	-0,399
x_1	10	100,3	9,95	9,65	9,23	9,07	6,74	6,14	4,33

Из рис. 62 получаем, что первое переключение произойдет при $x_1 = x_{10}' = -0,4$ и $y = y_0' = -0,4$, после

Рис. 63. Фазовая траектория экстремальной шаговой системы по координате x_2

чего движение на фазовой плоскости будет описываться уравнением

$$x_1 = x_{10}' - \frac{y - y_0'}{1 - d} - \frac{k}{a} \ln \left| 1 - \frac{y}{k} \right| + \frac{k}{a} \ln \left| 1 - \frac{y_0'}{k} \right|$$

или, в цифрах,

$$x_1 = -0,4 - 2,54(y + 0,4) - 0,8 \ln |1 - 2,5y| + 0,8 \ln 2 = \\ = -0,86 - 2,54y - 0,8 \ln |1 - 2,5y|.$$

Расчеты сведены в табл. 36.

Таблица 36

y	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,35	0,38
x_1	-0,4	-0,55	-0,69	-0,79	-0,86	-0,83	-0,84	-0,53	-0,1	2,39

При втором переключении $x_1 = x_{10}'' = 0,25$ $y = y_0'' = 0,36$.

Движение описывается уравнением

$$x_1 = 0,25 - 2,54(y - 0,36) + 0,8 \ln |1 + 2,5y| - \\ - 0,8 \ln |1 + 2,5 \cdot 0,36| = 0,64 - 2,54y + 0,8 \ln |1 + 2,5y|.$$

Расчет представлен в табл. 37.

Таблица 37

y	0,36	0,3	0,2	0,1	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,35	-0,38
x_1	0,25	0,32	0,43	0,53	0,64	0,61	0,58	0,29	-0,45	-2,642

После третьего переключения $x_1 = x_{10}''' = -0,15$, $y = y_0''' = -0,35$ и уравнение фазовой траектории, с учетом новых начальных условий, запишется как

$$x_1 = -0,15 - 2,54(y + 0,35) - 0,8 \ln |1 - 2,5y| + \\ + 0,8 \ln |1 + 2,5 \cdot 0,35| = -0,53 - 2,54y - 0,8 \ln |1 - 2,5y|.$$

Расчет приведен в табл. 38.

Таблица 38

y	-0,35	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,2	0,3	0,35	0,38
x_1	-0,15	-0,23	-0,31	-0,5	-0,53	-0,48	-0,18	0,24	2,73

Из рис. 62 видно, что после третьего переключения выходим на предельный цикл.

Расчет фазовой траектории $y = f_2(x_2)$ производится аналогично. Сама фазовая траектория представлена на рис. 63. Непосредственно из графиков определяем интересующие нас параметры:

время выхода на предельный цикл по координате x ,

$$t_1 = 44 \cdot 50 = 2200 \text{ сек.}$$

время выхода на предельный цикл по координате x_2

$$t_2 = 148 \cdot 50 = 7400 \text{ сек.}$$

время выхода системы на экстремум

$$t = t_1 + t_2 = 2200 + 7400 = 9600 \text{ сек.}$$

период автоколебаний по x_1

$$T_1 = 500 \text{ сек};$$

период автоколебаний по x_2

$$T_2 = 400 \text{ сек}.$$

Задача 60. Экстремальный объект описывается следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dx}{dt} + x &= k_1 \varphi; \\ \varphi &= k(y_1^2 + y_2^2), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $T = 20$ сек; $k_1 = 1$; $k = 0,8$.

Исполнительные механизмы — интегрирующие:

$$\frac{dy_1}{dt} = k_2 U;$$

$$\frac{dy_2}{dt} = k_3 U,$$

где $k_2 = k_3 = 0,01$ ед/сек.

Зона нечувствительности релейного — логического элемента, измеряющего проекции градиента $\Delta = 0,5$ ед. Начальные условия: $y_1 = 2$ ед., $y_2 = 1$ ед. Экстремальная система осуществляет поиск по методу градиента.

Определить во времени процесс выхода координаты x в экстремум и построить фазовую траекторию.

Решение. При поиске по методу градиента управляющие воздействия должны меняться пропорционально проекциям градиента. Определяем проекции градиента:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 2ky_1;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 2ky_2.$$

Подставляем найденные значения градиентов в уравнения исполнительного механизма с обратным знаком, так как перемещение должно происходить в сторону убывания градиента:

$$\frac{dy_1}{dt} = -k_2 2ky_1;$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -k_3 2ky_2.$$

Решая полученные уравнения, имеем:

$$y_1 = y_{10} e^{-2k_2 kt};$$

$$y_2 = y_{20} e^{-2k_3 kt}.$$

Таким образом, проекции градиента меняются по экспоненциальному закону.

Определяем изменение координаты x , подставляя в первое уравнение системы (1) значение φ

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T} x = \frac{k_1}{T} (y_{10}^2 e^{-4k_2 kt} + y_{20}^2 e^{-4k_3 kt}).$$

Решая полученное уравнение, имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t/T} \left[\frac{k_1}{T} \int (y_{10}^2 e^{-4k_2 kt} + y_{20}^2 e^{-4k_3 kt}) e^{t/T} dt + C \right] = \\ &= \frac{k_1 (y_{10}^2 + y_{20}^2)}{1 - T4k_2 k} e^{-4k_2 kt} + Ce^{-t/T}, \end{aligned}$$

так как $k_2 = k_3$.

Находим постоянную интегрирования из начальных условий при $t = 0$, $x = x_0$:

$$x_0 = \frac{k_1 (y_{10}^2 + y_{20}^2)}{1 - T4k_2 k} + C;$$

$$C = x_0 - \frac{k_1 (y_{10}^2 + y_{20}^2)}{1 - 4Tk_2 k}.$$

Учитывая постоянную интегрирования, получаем окончательное решение для x

$$x(t) = \frac{k_1 (y_{10}^2 + y_{20}^2)}{1 - 4Tk_2 k} e^{-4k_2 kt} + \left[x_0 - \frac{k_1 (y_{10}^2 + y_{20}^2)}{1 - 4Tk_2 k} \right] e^{-t/T},$$

где $x_0 = k (y_{10}^2 + y_{20}^2)$.

Подставляя численные значения параметров, имеем

$$x(t) = 13,9e^{-0,032t} - 9,9e^{-0,05t}.$$

Задаваясь временем t , строим переходный процесс, который показан на рис. 64. Процесс закончится тогда, когда проекции градиентов примут значение, равное зоне нечувствительности Δ . Зона нечувствительности по проекциям градиента будет соответствовать координате Δx ,

которую определяем по уравнению параболоида вращения

$$\Delta x = k_1 k (\Delta^2 + \Delta^2) = 2k_1 \cdot k \Delta^2 = 2 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 0.4 \text{ ед.}$$

Когда координата x достигнет значения Δx , движение в системе прекратится, что и показано на рис. 64. Из рис. 64 определяем время выхода в экстремум $t_1 = 82.5$ сек.

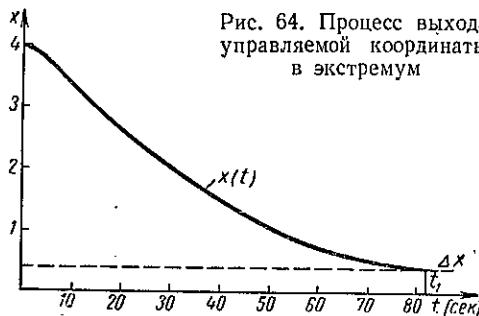


Рис. 64. Процесс выхода управляемой координаты в экстремум

Построение фазовой траектории удобнее всего провести в параметрической форме. Для этого запишем уравнения движения по координатам:

$$y_1 = y_{10} e^{-2k_2 kt} = 2e^{-0.016t},$$

$$y_2 = y_{20} e^{-2k_3 kt} = e^{-0.016t},$$

$$x = 13.9 e^{-0.032t} - 9.9 e^{-0.05t}.$$

Задаваясь одинаковыми значениями t для всех трех уравнений, строим фазовую траекторию, которая показана на рис. 65.

Задача 61. По условиям задачи 60 определить характер движения системы к экстремуму, если поиск осуществляется по методу наискорейшего спуска.

Решение. При поиске по методу наискорейшего спуска перемещения по координатам y_1 и y_2 осуществляются с постоянной скоростью, равной значению градиентов в начальной точке. Учитывая это, можно получить уравнения движения экстремальной системы.

Градиенты в начальной точке:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 2ky_{10};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 2ky_{20}.$$

Скорости исполнительных механизмов

$$\frac{dy_1}{dt} = 2k_2 k y_{10};$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 2k_3 k y_{20}$$

или

$$y_1 = 2k_2 k y_{10} t;$$

$$y_2 = 2k_3 k y_{20} t.$$

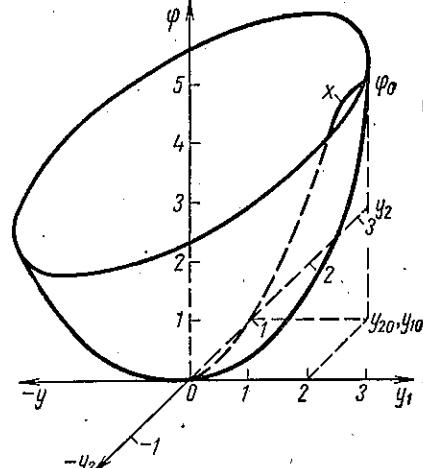


Рис. 65. Фазовая траектория выхода координаты в экстремум

Запишем дифференциальное уравнение объекта с учетом воздействий по координатам y_1 и y_2

$$T \frac{dx}{dt} + x = k_1 [(y_{10} - 2k_2 k y_{10} t)^2 + (y_{20} - 2k_3 k y_{20} t)^2].$$

После раскрытия скобок имеем

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T} x = A_1 - A_2 t + A_3 t^2,$$

где

$$A_1 = \frac{k_1}{T} (y_{10}^2 + y_{20}^2);$$

$$A_2 = \frac{4k}{T} (k_2 y_{10}^2 + k_3 y_{20}^2);$$

$$A_3 = \frac{4k^2}{T} (k_2^2 y_{10}^2 + k_3^2 y_{20}^2).$$

Полученное уравнение аналогично уравнению задачи 60, поэтому предоставляем читателям самим построить процесс выхода в экстремум и автоколебания.

Задача 62. В задаче 42 была получена экстремальная характеристика камеры сгорания. Аппроксимировать указанную характеристику параболой даже в окрестности максимума без больших погрешностей нельзя. Аппроксимация более сложными функциями, чем парабола, затруднит определение показателей экстремальной системы. Важно отметить, что экстремальная система с подобными характеристиками будет иметь несимметричные автоколебания. Поэтому применим для расчета экстремальной системы графо-аналитический метод.

Экстремальная система состоит из исполнительного механизма с постоянной скоростью, экстремального звена и линейного инерционного звена, которые описываются следующими уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 U = v, \quad (1)$$

где $v = 0,5$ ед/сек:

$$y = f(x) \text{ (рис. 66, } a\text{);}$$

$$T \frac{dy_1}{dt} + y_1 = ky, \quad (2)$$

где $k = 1$; $T = 10$ сек.

Зона нечувствительности измерительного прибора и реле $\Delta = 30$ ед. Структурная схема системы дана на рис. 66, б. Начальное состояние системы: $x_0 = 6$ ед., $y_0 = 1760$ ед.

Определить предельный цикл, фазовую траекторию и переходный процесс выхода в экстремальную область.

Решение. Запишем уравнение (2) в приращениях:

$$\frac{\Delta y_1}{ky - y_1} = \frac{\Delta t}{T}.$$

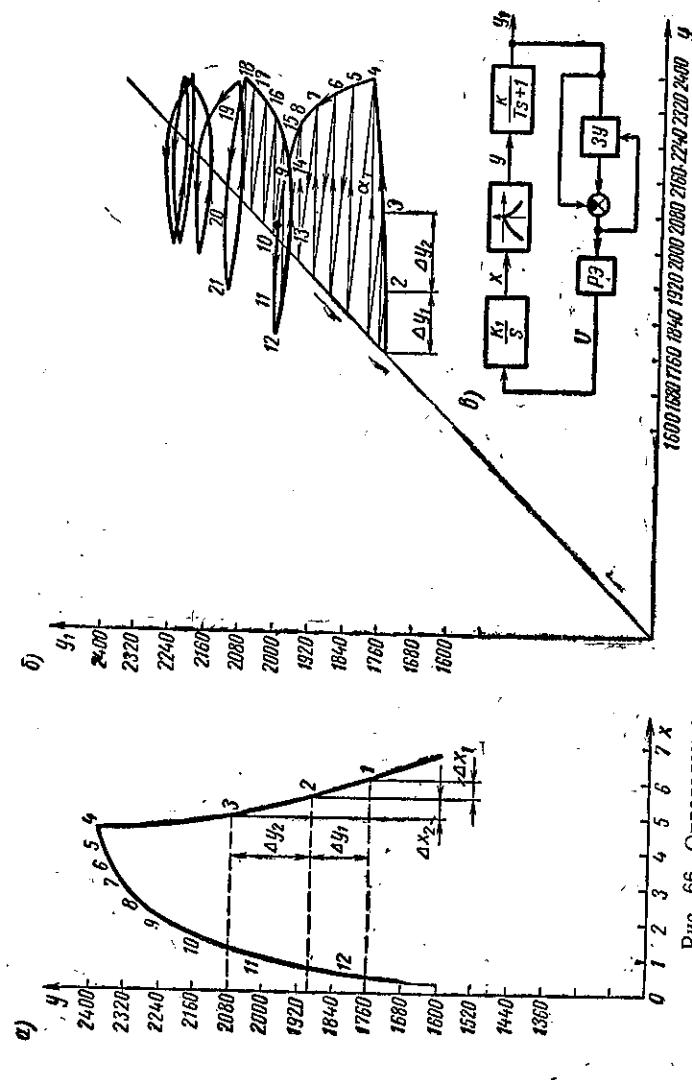


Рис. 66. Определение процесса поиска экстремума графическим способом:
а — экстремальная характеристика объекта; б — структурная схема экстремальной системы, работающей по принципу запоминания экстремума;
в — предельный цикл; в — структурная схема экстремальной системы, работающей по принципу запоминания экстремума

Определяем тангенс угла наклона луча построения с учетом масштабов, выбирая $\Delta t = 1$ сек

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{m_y}{m_{y_1}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{80}{80} = \frac{1}{10},$$

отсюда $\alpha = 5^\circ$.

Начинаем построение. Возьмем две координатные системы (рис. 66) y , x -и y_1 , y , в которых изобразим статические характеристики $y = f(x)$ и $y_1 = ky$. Определяем приращение Δx за промежуток времени Δt

$$\Delta x = v\Delta t = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \text{ ед.}$$

Откладывая приращение на статической характеристике $y = f(x)$, получаем приращение Δy . Приращение Δy сносим во вторую координатную систему, где откладываем его от точки установившегося состояния $y = 1760$ и $y_1 = 1760$. Из конца отрезка Δy проводим луч под углом α и получаем приращение величины Δy_1 за время Δt . Повторяя указанные построения, которые на рис. 66 отмечены точками 1—12, получим в координатных осях y_1 , y фазовую траекторию. В точке 12 произойдет реверс управляющего сигнала, так как отклонение от экстремума равно Δ , и сработает логическая схема управления. Если раньше x менялось в сторону уменьшения, то теперь будет увеличиваться. Проделывая указанные построения, получим новый полувиток фазовой траектории при изменении x в сторону увеличения. В точке 21 опять произойдет реверс и x будет снова уменьшаться. Проделывая дальше такие же построения, получим предельный цикл. По предельному циклу определяем потери на поиск $P = 150$ ед. и амплитуду автоколебаний $A = 32$ ед. Период автоколебаний можно подсчитать по количеству приращений Δt в предельном цикле (рис. 66, а)

$$T = \Delta t \cdot 9 = 9 \text{ сек.}$$

Амплитуда автоколебаний на входе $A \approx 5$ ед.

Используя данное построение, можно получить процесс во времени $y_1 = f(t)$. Для этого в координатных осях y_1 , t для каждого приращения следует отложить соответствующее приращение Δy_1 . Для практики предлагаем построить процесс во времени читателям.

Из построенных фазовых траекторий видно, что автоколебания не симметричны. Убедиться в несимметрич-

ности автоколебаний можно и по процессу во времени $y_1 = f(t)$.

Задача 63. Экстремальный объект управления состоит из двух одинаковых инерционных звеньев, имеющих передаточные функции:

$$W_1(s) = \frac{x_1(s)}{x(s)} = \frac{k_1}{Ts + 1};$$

$$W_2(s) = \frac{y_1(s)}{y(s)} = \frac{k_1}{Ts + 1},$$

где $T = 90$ сек; $k_1 = k_2 = 0,74$.

Между апериодическими звеньями включено нелинейное звено с экстремальной характеристикой

$$y = -kx^2,$$

где $k = 0,46$.

Характеристика реле имеет зону нечувствительности $\Delta = 0,5$ ед. Исполнительный механизм — интегрирующий

$$\frac{dx}{dt} = k_3 U,$$

где $k_3 = 0,01 \frac{1}{\text{сек}}$; $U = 10$ ед.

Блок-схема системы аналогична схеме, изображенной на рис. 53, б.

Определить методом гармонического баланса амплитуду автоколебаний, потери на поиск и период автоколебаний.

Ответ: Потери на поиск $P = 6,4$ ед.; амплитуда автоколебаний $A_2 = 2$ ед.; период автоколебаний $T_n = 484$ сек.

Как изменятся P , A_2 и T_n , если коэффициент k_3 уменьшить в два раза?

Ответ: $P = 3$ ед., $A_2 = 2,7$ ед., $T_n = 628$ сек.

По данным решения построить предельный цикл и анализировать влияние скорости исполнительного механизма на качество экстремальной системы.

Задача 64. Экстремальный объект управления состоит из двух одинаковых инерционных звеньев, имеющих передаточную функцию

$$W(s) = \frac{y_1(s)}{y(s)} = \frac{k_1}{(Ts + 1)^2},$$

где $T = 90$ сек; $k_1 = 0,74$.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СИСТЕМ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Перед апериодическими звеньями включено нелинейное звено с экстремальной характеристикой

$$y = -kx^2,$$

где $k = 0,46$.

Характеристика реле имеет зону нечувствительности $\Delta = 0,5$ ед. Исполнительный механизм — интегрирующий

$$\frac{dx}{dt} = k_3 U,$$

где $k_3 = 0,01 \frac{1}{\text{сек}}$; $U = 10$ ед.

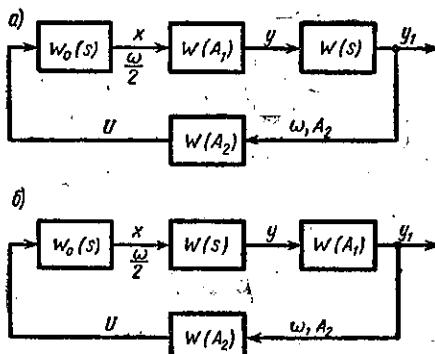


Рис. 67. Блок-схемы экстремальных систем

Блок-схема системы показана на рис. 67, а.

Определить методом амплитудно-фазовых характеристик параметры предельного цикла P , A_2 , T .

Задача 65. Блок-схема экстремальной системы показана на рис. 67, б. Параметры звеньев такие же, как и в задаче 64.

Методом эквивалентных логарифмических характеристик определить параметры предельного цикла P , A_2 , T . Полученные результаты сравнить с результатами задач 63, 64.

Основные теоремы алгебры логики

1. $x + y = y + x.$
2. $xy = y \cdot x.$
3. $(x + y) + z = x + (y + z).$
4. $(xy)z = x(yz).$
5. $(x + y)z = xz + yz.$
6. $xy + z = (x + z)(y + z).$
7. $\overline{x + y} = \overline{x}\overline{y}.$
8. $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}.$
9. $\overline{x}x = 0.$
10. $\overline{x} + x = 1.$
11. $x \cdot 1 = x.$
12. $0 + x = x.$
13. $x + 1 = 1.$
14. $x \cdot 0 = 0.$
15. $\overline{0} = 1.$
16. $\overline{1} = 0.$
17. $xxx\dots x = x.$
18. $x + x + x + \dots + x = x.$
19. $x + xy + xz + \dots + xw = x.$
20. $x(x + y)(x + z)\dots(x + w) = x.$
21. $xf(x, \bar{x}, y, z, \dots, w) = xf(1, 0, y, z, \dots, w).$
22. $\bar{x}f(x, \bar{x}, y, z, \dots, w) = \bar{x}f(0, 1, y, z, \dots, w).$
23. $x + f(x, \bar{x}, y, z, \dots, w) = x + f(0, 1, y, z, \dots, w).$
24. $\bar{x} + f(x, \bar{x}, y, z, \dots, w) = \bar{x} + f(1, 0, y, z, \dots, w).$

§ 1. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ РЕЛЕЙНЫХ И БЕСКОНТАКТНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Задача 66. Упростить выражение

$$\bar{w} + \bar{z} + (x + wz)(y + z).$$

Решение. Используя теорему о том, что инверсия произведения равна сумме инверсий переменных, можем данное выражение переписать в виде

$$(\bar{w}\bar{z}) + (x + wz)(y + z),$$

а далее, на основании теоремы о том, что

$$\bar{x}_1 + f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}_1 + f(1, x_2, \dots, x_n),$$

получаем

$$(\bar{w}\bar{z}) + (x + 1)(y + z) = \bar{w} + \bar{z} + y + z = 1,$$

так как $x + 1 = 1$, а $(\bar{w}\bar{z}) = \bar{w} + \bar{z}$.

Все выражение предельно упростились на основании того, что

$$\bar{z} + z = 1$$

и

$$1 + \bar{w} + w = 1.$$

Задача 67. Упростить выражение

$$xy + \bar{x}\bar{y}z + yz.$$

Решение. $xy + \bar{x}\bar{y}z + yz = y(x + \bar{x}z) + yz = y(x + \bar{z}) + yz = y(x + \bar{z} + z) = y.$

При решении задачи использовались теоремы:

$$1. x + \bar{y}x = x + y;$$

$$2. x + \bar{x} = 1.$$

Задача 68. Упростить выражение

$$(x\bar{y} + z)(\bar{x} + w)\bar{z}$$

Решение. Используя теорему о том, что $\bar{x}f(x, \bar{x}, y, \dots, w) = \bar{x}f(0, 1, y, \dots, w)$, имеем

$$\begin{aligned} (\bar{x}\bar{y} + z)(\bar{x} + y)\bar{z} &= \bar{z}(\bar{x}\bar{y} + 0)(\bar{x} + y) = \\ &= \bar{z}(x\bar{y} + x\bar{y}) = z(0 + 0) = 0. \end{aligned}$$

Задача 69. Упростить выражение

$$x\bar{y} + z + (\bar{x} + y)\bar{z}.$$

Решение. Согласно теореме $x + f(x, \bar{x}, y, z, \dots, w) = x + f(0, 1, y, z, \dots, w)$,

имеем

$$z + (\bar{x} + y) + x\bar{y} = z + \bar{x} + y + \bar{y}x.$$

Учитывая, что $y + \bar{y}x = y + x$, далее получаем

$$z + \bar{x} + x + y = z + y + 1 = 1.$$

Это выражение можно было бы упростить, используя другой способ. Поскольку $x\bar{y} = \bar{x} + y$, то исходное выражение по приведенной выше теореме примет вид

$$x\bar{y} + z + \bar{z} = x\bar{y} + 1 = 1.$$

Задача 70. Упростить выражение

$$a + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}e + \dots$$

Решение. Последовательно используя теорему $x + f(x, \bar{x}, y, z, \dots, w) = x + f(0, 1, y, z, \dots, w)$, получаем

$$\begin{aligned} a + b + \bar{b}c + \bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{d}e + \dots &= \\ = a + b + c + \bar{c}\bar{d} + \bar{c}\bar{d}e + \dots &= a + b + c + d + \bar{d}e + \dots = \\ &= a + b + c + d + e + \dots \end{aligned}$$

Задача 71. Упростить выражение

$$\bar{a}d(\bar{b} + c) + (b + \bar{c})\bar{a}\bar{d} + (\bar{b} + c)(b + \bar{c}) = F.$$

Решение. Упростить это выражение в таком виде не представляется возможным. Возьмем инверсию этого выражения и упростим ее

$$\begin{aligned} \bar{F} &= (a + \bar{d} + \bar{b}\bar{c})(a + d + \bar{b}\bar{c})(b\bar{c} + \bar{b}\bar{c}) = \\ &= \bar{b}\bar{c}(a + \bar{d} + \bar{b}\bar{c})(a + d + \bar{b}\bar{c}) + \bar{b}\bar{c}(a + d + \bar{b}\bar{c})(a + d + \bar{b}\bar{c}) = \end{aligned}$$

Используя теоремы

$$xf(x, \bar{x}, y, z, \dots, w) = xf(1, 0, y, z, \dots, w);$$

$$\bar{x}f(x, \bar{x}, y, z, \dots, w) = \bar{x}f(0, 1, y, z, \dots, w),$$

получим

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \bar{bc}(a + \bar{d} + \bar{c})(a + d) + \bar{bc}(a + \bar{d})(a + d + c) = \\ &= \bar{bc}(a + \bar{d} + 1)(a + d) + \bar{bc}(a + \bar{d})(a + d + 1) = \\ &= (a + d)\bar{bc} + (a + \bar{d})\bar{bc}. \end{aligned}$$

Берем обратную инверсию, так как $F = \bar{F}$

$$F = (\bar{a}\bar{d} + \bar{b} + c)(\bar{a}\bar{d} + b + \bar{c}).$$

Задача 72. Доказать справедливость следующего равенства, не используя метод перебора:

$$bc + abd + a\bar{c} = bc + \bar{ac}.$$

Решение. Рассмотрим сначала левую часть выражения: $bc + abd + a\bar{c}$. Берем инверсию этого выражения и упрощаем ее

$$\begin{aligned} &(\bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + \bar{d})(\bar{a} + c) = \\ &= \bar{b}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{d})(\bar{a} + c) + \bar{c}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{d})(\bar{a} + c) = \\ &= \bar{b}(\bar{a} + c) + \bar{a}\bar{c}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{d}) = \bar{b}(\bar{a} + c) + \bar{a}\bar{c} = \\ &= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}c. \end{aligned}$$

Берем обратную инверсию

$$(a + b)(a + c)(b + \bar{c}).$$

Рассмотрим теперь правую часть: $bc + a\bar{c}$.

Возьмем инверсию от этого выражения

$$\begin{aligned} bc + a\bar{c} &= (\bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + c) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}c + \bar{c}\bar{c} = \\ &= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}c. \end{aligned}$$

Снова берем инверсию

$$\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}c = (a + b)(a + c)(b + \bar{c}).$$

Равенство доказано.

Задача 73. Доказать равенство

$$abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{b}cd + \bar{b}\bar{c}d + ad = abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{b}cd + \bar{b}\bar{c}d.$$

Решение. Рассмотрим правую часть равенства

$$abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{b}cd + \bar{b}\bar{c}d = a(bc + \bar{b}\bar{c}) + d(\bar{b}c + \bar{b}\bar{c}).$$

Берем инверсию

$$\begin{aligned} &[\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})(b + c)] [\bar{d} + (b + \bar{c})(\bar{b} + c)] = \\ &= \bar{a}\bar{d} + \bar{d}(\bar{b} + \bar{c})(b + c) + \bar{a}(b + \bar{c})(\bar{b} + c) + \\ &+ (\bar{b} + \bar{c})(b + c)(\bar{b} + c)(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{d} + \bar{d}(\bar{c}b + \bar{b}c) + \\ &+ \bar{a}(bc + \bar{b}\bar{c}) + \bar{b}cbc + \bar{b}cbc + \bar{b}c\bar{b}\bar{c} + \bar{b}c\bar{c}\bar{b} = \\ &= \bar{a}\bar{d} + \bar{d}(\bar{b}c + \bar{b}\bar{c}) + \bar{a}(bc + \bar{b}\bar{c}). \end{aligned}$$

Берем обратную инверсию

$$\begin{aligned} &(a + d)[d + (c + \bar{b})(b + \bar{c})] [a + (b + c)(\bar{b} + \bar{c})] = \\ &= ad + a(bc + \bar{b}\bar{c}) + ad + d(\bar{b}c + \bar{b}\bar{c}) = \\ &= ad + abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{b}cd + \bar{b}\bar{c}d, \end{aligned}$$

т. е. равно левой части исходного уравнения.
Задача 74. Доказать равенство

$$ab + \bar{c}d + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d = (a + \bar{d})(b + \bar{c}).$$

Решение. Рассмотрим левую часть равенства

$$\begin{aligned} ab + \bar{c}d + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d &= a(b + \bar{b}\bar{c}d) + \bar{d}(\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c) = \\ &= a(b + \bar{c}d) + \bar{d}(\bar{c} + \bar{a}b) = ab + a\bar{c}d + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{d} = \\ &= b(a + \bar{a}\bar{d}) + \bar{c}(ad + \bar{d}) = b(a + \bar{d}) + \bar{c}(a + \bar{d}) = \\ &= (a + \bar{d})(b + \bar{c}), \end{aligned}$$

т. е. равно правой части нашего равенства.

Задача 75. Преобразовать с целью упрощения контактную схему, изображенную на рис. 68, а.

Решение. Напишем структурную формулу заданной схемы

$$\begin{aligned} f &= (a + b)[x(a + y) + \bar{x}(a + c) + (y + z)\bar{z}a] = \\ &= a[x(a + y) + \bar{x}(a + c) + (y + z)\bar{z}a] + \\ &+ b[x(a + y) + \bar{x}(a + c) + (y + z)\bar{z}a]. \end{aligned}$$

На основании теоремы

$$xf(x, \bar{x}, y, z, \dots, w) = xf(1, 0, y, z, \dots, w)$$

имеем

$$\begin{aligned} f &= a[x(1+y) + \bar{x}(1+c) + (y+z)\bar{z}\cdot 1] + \\ &+ b[x(a+y) + \bar{x}(a+c) + (y+z)\bar{z}a]. \end{aligned}$$

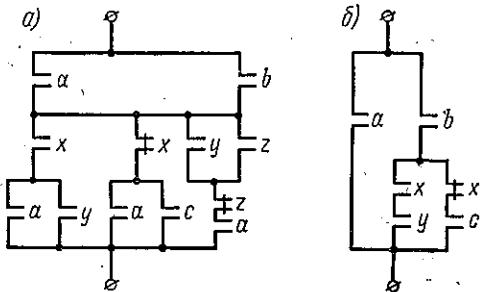


Рис. 68. Контактная схема до упрощения и после

Учитывая, что $1+x=1$, получаем

$$f = a[x + \bar{x} + (y+z)\bar{z}] + b[x(a+y) + \bar{x}(a+c) + (y+z)\bar{z}a]$$

и далее, поскольку $x + \bar{x} = 1$,

$$\begin{aligned} f &= a[1 + (y+z)\bar{z}] + b[x(a+y) + \bar{x}(a+c) + \\ &+ (y+z)\bar{z}a] = a + b[x(a+y) + \bar{x}(a+c) + (y+z)\bar{z}a], \end{aligned}$$

На основании теоремы $x+f(x, \bar{x}, y, z, \dots, w)=$

$$= x + f(0, 1, y, z, \dots, w)$$

$$\begin{aligned} f &= a + b[x(0+y) + \bar{x}(0+c) + (y+z)\bar{z}\cdot 0] = \\ &= a + b(xy + \bar{x}c). \end{aligned}$$

Данной структурной формуле соответствует схема, изображенная на рис. 68, б.

Задача 76. Преобразовать с целью упрощения контактную схему, изображенную на рис. 69, а.

Решение. Напишем структурную формулу заданной схемы

$$f = ab(z+x) + \bar{a}b(\bar{x}+z) + x(\bar{a}+b);$$

$$\begin{aligned} f &= abx + abz + \bar{a}b\bar{x} + \bar{a}bz + \bar{a}x + bx = \\ &= bz(a+\bar{a}) + \bar{a}(x+b\bar{x}) + bx(1+a) = \\ &= bz + \bar{a}(x+b) + bx = \\ &= \bar{a}(x+b) + b(x+z). \end{aligned}$$

Упрощенная схема с минимальным числом контактов представлена на рис. 69, б.

Задача 77. Преобразовать с целью упрощения контактную схему, изображенную на рис. 70, а.

Решение. Запишем структурную формулу заданной схемы

$$f = x[(y+b)x + y(z+\bar{x}y)] + \bar{x}[(y+c)x + (a+\bar{a}\bar{x})y].$$

Преобразуем это выражение, используя теоремы алгебры логики релейных схем

$$\begin{aligned} f &= x[(y+b)1 + y(z+0\cdot y)] + \bar{x}[(y+c)0 + (a+\bar{a}\cdot 1)y] = \\ &= x[y+b+yz] + \bar{x}[0+1y] = x[y(1+z)+b] + \bar{xy} = \\ &= x(y+b) + \bar{xy} = xy + xb + \bar{xy} = y(x+\bar{x}) + xb = \\ &= y + xb. \end{aligned}$$

Схема, равносильная данной, приведена на рис. 70, б.

Задача 78. Упростить контактную схему, изображенную на рис. 71, а.

Решение. Запишем структурную формулу схемы

$$f = a\bar{b}(xy + \bar{x}y\bar{z}) + \bar{x}[\bar{a}y + \bar{b}(x+y)a].$$

Преобразуем ее

$$\begin{aligned} f &= a\bar{b}y(x + \bar{x}\bar{z}) + \bar{x}[\bar{a}y + a\bar{b}(x+y)] = \\ &= a\bar{b}xy + a\bar{b}y\bar{z} + \bar{a}\bar{x}y + a\bar{b}\bar{x}y = \\ &= a\bar{b}y(x + \bar{x}) + a\bar{b}y\bar{z} + \bar{a}\bar{x}y = \\ &= a\bar{b}y + a\bar{b}y\bar{z} + \bar{a}\bar{x}y = a\bar{b}y(1+z) + \bar{a}\bar{x}y = \\ &= y(a\bar{b} + \bar{a}\bar{x}). \end{aligned}$$

Равносильная схема с минимальным числом контактов изображена на рис. 71, б.

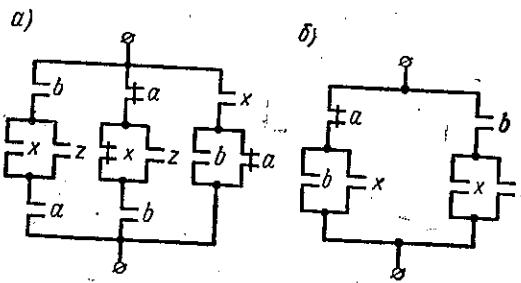


Рис. 69. Контактная схема до упрощения и после

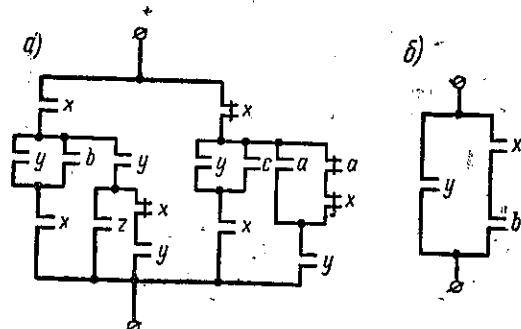


Рис. 70. Контактная схема до упрощения и после

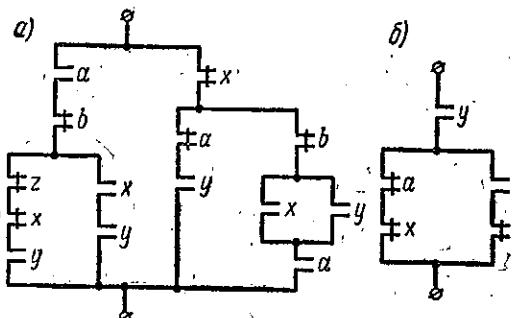


Рис. 71. Контактная схема до упрощения и после

Задача 79. Упростить следующие выражения:

1. $(xy + z)(x + \bar{y})z$.
2. $xy + z + (x + y)z$.
3. $(x + \bar{y})(y + \bar{z})(z + \bar{x})(xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z})$.
4. $(a + x)(xy + az)$.
5. $abc + c(\bar{a} + b)$.
6. $(a + x)(b + y)xy$.
7. $(ab + \bar{a}c + bc) + a\bar{c}$.

Задача 80. Доказать следующие равенства:

1. $ab + \bar{a}\bar{b} + bc = ab + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}c$.
2. $ab + \bar{a}\bar{b} + bcd = ab + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}cd$.
3. $(a + \bar{b})(b + \bar{c})(c + \bar{a}) = (\bar{a} + b)(\bar{b} + c)(\bar{c} + a)$.
4. $(a + \bar{b})(b + \bar{c})(c + \bar{d})(d + \bar{a}) = (\bar{a} + b)(\bar{b} + c)(\bar{c} + d)(\bar{d} + a)$.
5. $abx + \bar{a}\bar{b}\bar{x} + \bar{b}xy + \bar{b}\bar{x}\bar{y} = ab\bar{y} + \bar{a}\bar{b}\bar{y} + axy + \bar{a}\bar{x}\bar{y}$.

Задача 81. Написать структурные формулы схем, изображенных на рис. 72, а, б, в, г. Посмотреть, нельзя ли уменьшить число контактов.

Задача 82. Упростить схемы, изображенные на рис. 73, а, б.

Задача 83. Синтезировать систему управления двумя монтею, схема соединения которых показана на рис. 74, а.

Монтею служат для перекачивания агрессивных или взрывоопасных жидкостей с помощью воздуха или инертного газа. Перекачка жидкости проходит следующим образом. Допустим, следует перекачать жидкость из монтею 1 в монтею 2. Сначала в монтею 2 открываются вентили D и A , и сжатым воздухом происходит продувка. Вентили B и M должны быть закрыты. После продувки закрывается вентиль D , открываются B и C , начинается передавливание жидкости. После передавливания происходит продувка монтею 1, при которой вентили C и E открыты, а вентиль K и B закрыты. На этом цикл работы системы кончается. Положение вентиля контрол-

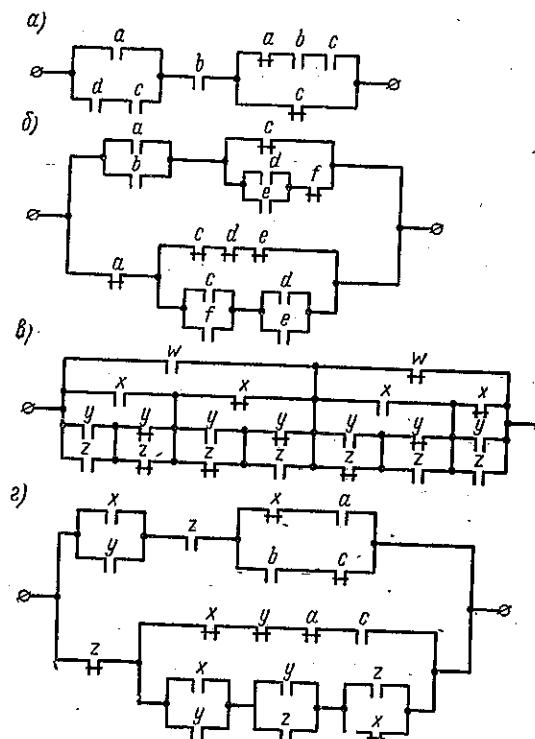


Рис. 72. Контактные схемы к задаче 81

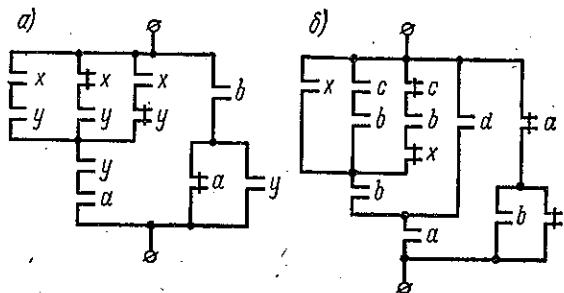


Рис. 73. Контактные схемы к задаче 82

лируется конечными выключателями. Открытому вентилю соответствует индекс 1, закрытому — 2.

Требуется синтезировать систему, обеспечивающую правильность работы монтажю 1. Управление монтажю 1 сводится к управлению вентилем C , распределяющим подачу сжатого воздуха.

Решение. Составляем таблицу состояний вентилей (табл. 39).

Таблица 39*

Операция \ Вентили	C	A	B	D	M	K	E
Перекачка из монтажю 1 в 2	1	1	1	2	2	2	2
Продувка монтажю 1	1	—	2	—	—	2	1
Перекачка из монтажю 2 в 1	2	2	1	1	2	2	1
Наполнение монтажю 1	2	—	2	—	—	1	1

* Цифра 1 соответствует открытому состоянию вентилей, а цифра 2 — закрытому.

По таблице состояний записываем логические уравнения, характеризующие работу монтажю.

При перекачке из монтажю 1 в монтажю 2 условие открытия вентиля C запишется как

$$F_{C_1} = AB\bar{M}\bar{K}\bar{D}\bar{E}. \quad (1)$$

При продувке монтажю 1 условие открытия вентиля C выразится зависимостью

$$F_{C_1} = \bar{B}\bar{K}E. \quad (2)$$

Запишем такие же уравнения и для закрытия вен-

тиля C . Уравнение, соответствующее перекачке жидкости из монтежю 2 в монтежю 1

$$F_{C_2'} = \bar{A} \bar{B} \bar{D} \bar{E} \bar{M} \bar{K}. \quad (3)$$

Выражение, соответствующее перекачке из какого-либо другого агрегата в монтежю 1 через вентиль K

$$F_{C_2''} = \bar{B} K E. \quad (4)$$

Очевидно, условия открытия и закрытия вентиля C записутся соответственно:

$$F_{C_1} = F_{C_1'} + F_{C_1''} = A B M \bar{K} \bar{D} \bar{E} + \bar{B} K E; \quad (5)$$

$$F_{C_2} = F_{C_2'} + F_{C_2''} = \bar{A} \bar{B} \bar{M} \bar{K} D E + \bar{B} K E. \quad (6)$$

Преобразуем полученные уравнения с целью получения минимума контактов для реализации условий открытия и закрытия вентиля C . В уравнении (5) можно вынести за скобки член \bar{K} , а в уравнении (6) — E . Здесь мы используем распределительный закон:

$$F_{C_1} = \bar{K} (A B \bar{M} \bar{D} \bar{E} + \bar{B} E); \quad (7)$$

$$F_{C_2} = E (\bar{A} \bar{B} \bar{M} \bar{K} D + \bar{B} K). \quad (8)$$

Дальнейшее упрощение не представляется возможным.

По данным выражениям строим релейную структурную схему (рис. 74, б) и схему на логических элементах (рис. 74, в).

Схемы составлены из условия, что конечники фиксируют закрытое состояние вентилей.

Задача 84. Для системы транспортеров, изображенной на рис. 75, требуется найти условия включения приводных двигателей подводящих лент. Известно, что подводящая лента может включаться только тогда, когда двигается одна из отводящих лент x и y . Загрузка той или иной ленты определяется положением клапанов A и B .

Решение. Составим таблицу, в которую занесем позиции переключающих клапанов, при которых может работать та или иная подводящая лента. С помощью этой таблицы (рис. 76) можно составить уравнения сра-

батывания элементов, управляющих двигателями подводящих лент. Например, для реле S первый кружок в строке таблицы, соответствующей данному реле, означает следующее: если замкнуты конечные выключатели клапанов A_1 и B_1 и работает привод ленты y , то включение возможно при условии, что все остальные подводя-

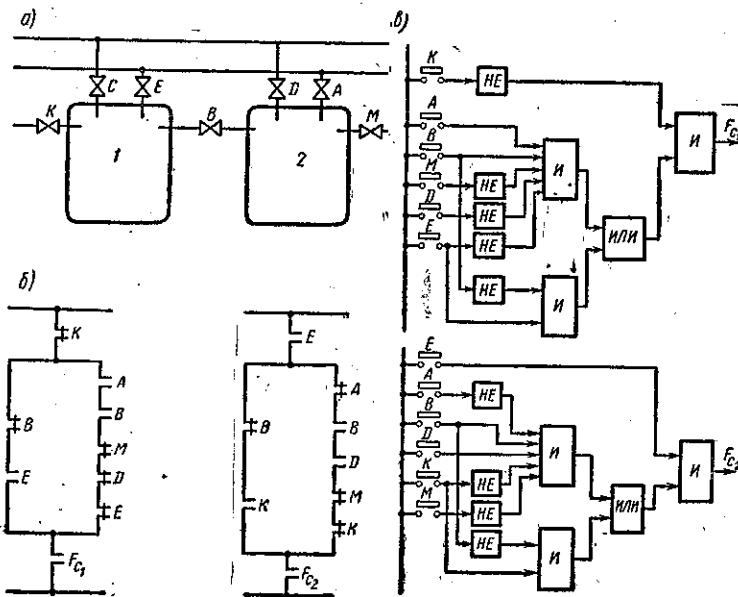


Рис. 74. Схемы управления двумя монтажами:
а — схема соединения двух монтажей; б — релейная схема управления системой;
в — схема управления системой на логических элементах

щие ленты T , U , V выключены (так как каждая из них в этой позиции клапанов также могла бы разгружаться на ленту y). Таким образом, первое условие включения реле S записывается как

$$F_{S_1} = A_1 B_1 y \bar{t}, \bar{u}, \bar{v}.$$

Следующий кружок в первой строке таблицы (см. рис. 76) соответствует другому возможному варианту включения привода S

$$F_{S_2} = A_2 B_2 x.$$

Аналогичным путем по таблице можно составить остальные варианты включения реле S . Сумма всех девяти условий срабатывания является общей функцией, выражающей условия работы ленты S ,

$$F_S = A_1 B_1 \bar{y} \bar{t} \bar{u} \bar{v} + A_2 B_1 x + A_3 B_1 x \bar{t} + \\ + A_1 B_2 \bar{y} \bar{t} \bar{v} + A_2 B_2 x \bar{u} + A_3 B_2 x \bar{t} \bar{u} + \\ + A_1 B_3 y \bar{t} + A_2 B_3 x \bar{u} \bar{v} + A_3 B_3 x \bar{t} \bar{u} \bar{v}. \quad (1)$$

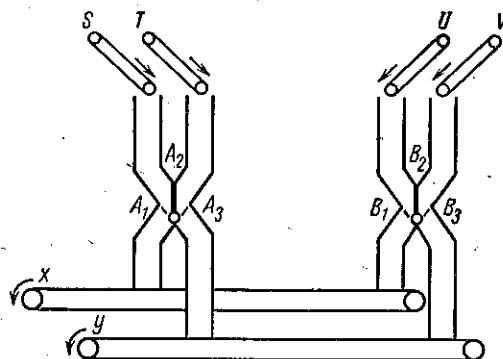


Рис. 75. Система транспортеров

Вынося за скобки x и y и производя алгебраические преобразования, получаем

$$F_S = x (A_2 + A_3 \bar{t}) [B_1 + \bar{u} (B_2 + B_3 \bar{v})] + \\ + y A_1 \bar{t} [\bar{v} (B_1 \bar{u} + B_2) + B_3]. \quad (2)$$

Аналогичным путем после составления исходного уравнения и алгебраических преобразований получим общее выражение для условий работы ленты T , управляемой тем же клапаном A , что и лента S ,

$$F_T = x (A_3 \bar{s}) [B_1 + \bar{u} (B_2 + B_3 \bar{v})] + \\ + y (A_2 + A_1 \bar{s}) [\bar{v} (B_1 \bar{u} + B_2) + B_3].$$

При рассмотрении выражений для F_S и F_T видно, что многочлены в квадратных скобках попарно равны. Это позволяет упростить общую схему для реле S и T . Изобразим схему для F_S (рис. 77, а). Из рис. 77, а

Позиция клапана	$A_1 B_1$	$A_2 B_1$	$A_3 B_1$	$A_1 B_2$	$A_2 B_2$	$A_3 B_2$	$A_1 B_3$	$A_2 B_3$	$A_3 B_3$
Лента	x	y	x	y	x	y	x	y	x
S		○	○			○	○	○	○
T	○	○	○			○	○	○	○
U	○	○	○	○	○	○	○	○	○
V	○	○	○	○	○	○	○	○	○

Рис. 76. Режимы работы транспортеров

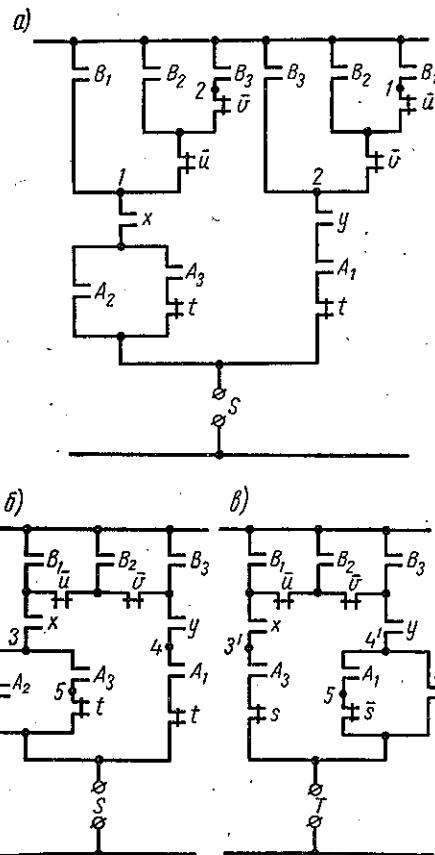


Рис. 77. Схемы управления лентами S и T :
а — схема управления лентой S до упрощения;
б — схема управления лентой S после упрощения;
в — схема управления лентой T после упрощения

видно, что перед контактами x и y включены одинаковые схемы, только x включен в точку 1, а y — в точку 2, следовательно, схему можно упростить и представить в виде, изображенном на рис. 77, б. Рассуждая аналогично, получим упрощенную схему и для F_T , которая представлена на рис. 77, в.

В схемах 77, б и 77, в точки 3, 3' и 4, 4' можно объединить, так как прохождение сигнала до этих точек идет по одинаковым цепям.

После контакта A_1 идут контакты \bar{t} и \bar{s} , после контакта A_3 включены те же самые контакты, следовательно, точки 5 и 5' можно объединить, поставив последовательно с \bar{t} и \bar{s} развязывающие диоды для исключения ложных цепей. Окончательная схема дана на рис. 78.

При рассмотрении этих схем видно постепенное уменьшение числа контактов. Если первоначально, в соответствии с исходным условием (1), требовалось $4 \times 42 = 168$ контактов, а после алгебраических упрощений, согласно формуле (2), $4 \times 17 = 68$ контактов, то в окончательном варианте (см. рис. 78) требуется $2 \times 13 = 26$ контактов.

Рис. 78. Окончательная схема управления лентами S и T

после алгебраических упрощений, согласно формуле (2), $4 \times 17 = 68$ контактов, то в окончательном варианте (см. рис. 78) требуется $2 \times 13 = 26$ контактов.

Примечание. Задача 84 взята из [Л.14], где можно найти более строгое доказательство произведенных упрощений.

§ 2. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ РАЗЛИЧНЫХ КРИВЫХ

Задача 85. Аналитически найти узлы интерполяции и наклон интерполирующих прямых при обработке окружности радиусом $R = 40$ мм фрезой диаметром $d = 10$ мм с допуском на обработку $\epsilon = \pm 0,1$ мм (по диаметру). За точность обработки принять точность интерполяции.



Решение.

1. Определяем погрешность интерполяции, исходя из допуска на обработку,

$$\epsilon = |\Delta| = 0,1 \text{ мм.}$$

2. Определяем число сторон правильного многоугольника, интерполирующего окружность с погрешностью ϵ ,

$$n = \frac{\pi}{\arccos\left(1 - \frac{\epsilon}{R_{\max}}\right)},$$

где n — число сторон;
 R_{\max} — допустимый максимальный радиус эвклидистанты;

$$R_{\max} = R + \frac{d}{2} + \frac{\epsilon}{2};$$

$$R_{\max} = 40 + 5 + 0,05 = 45,05 \text{ мм.}$$

Подставив численные значения, находим

$$n = \frac{\pi}{\arccos\left(1 - \frac{0,1}{45,05}\right)} = \frac{\pi}{\arccos \frac{44,95}{45,05}} = 45.$$

Центральный угол многоугольника

$$\alpha = 2\arccos\left(1 - \frac{\epsilon}{R_{\max}}\right) = 8^\circ.$$

3. Определяем сторону правильного многоугольника

$$a = 2R_{\max} \sin \frac{\alpha}{2} = 90,1 \sin 4^\circ = 6,285 \text{ мм.}$$

4. Определяем узлы интерполяции:

$$\Delta x_i = a \cos \frac{2i-1}{2} \alpha;$$

$$\Delta y_i = a \sin \frac{2i-1}{2} \alpha;$$

$$\cos \alpha_i = \cos \frac{2i-1}{2} \alpha;$$

$$\sin \alpha_i = \sin \frac{2i-1}{2} \alpha;$$

$$\alpha_i = \frac{2i-1}{2} \alpha;$$

$$x_i = \sum_{i=0}^t \Delta x_i;$$

$$y_i = \sum_{i=0}^t \Delta y_i.$$

Нетрудно заметить, что при нечетном n все вычисления необходимо проводить до $\alpha_i = 180^\circ$, при четном n —до $\alpha_i = 90^\circ$; затем значения $\cos \alpha_i$ и $\sin \alpha_i$ повторяются с учетом знака в данной четверти. При n , кратном четырем, вычисления можно производить лишь до $\alpha_i = 45^\circ$, поэтому примем $n = 48$, тогда

$$\alpha_i = \frac{2\pi}{48} = 7^\circ 30';$$

$$a = 90,1 \sin 3^\circ 45' = 5,8892 \text{ мм.}$$

Произведем вычисления Δx_i , Δy_i , $\cos \alpha_i$, $\sin \alpha_i$, x_i , y_i и сведем их в табл. 40.

Задача 86. Графически определить узлы интерполяции и наклон интерполирующих прямых для обработки окружности радиуса $R = 40$ мм фрезой диаметром $d = 10$ мм. Допуск на обработку $\epsilon = \pm 0,1$ мм (по диаметру). Решать в масштабе 10 : 1.

Задача 87. Определить влияние масштаба на точность определения узлов интерполяций графическим методом, решив предыдущую задачу в масштабе 2 : 1, и сравнить результаты.

Задача 88. Аналитически определить узлы интерполяции и наклон прямых при линейной интерполяции параболы с точностью $\epsilon = 0,5$ мм:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где

$$a = 1; b = 2; c = 1.$$

Решение. Узлы интерполяции для параболы вида $y = ax^2$ определяются соотношением

$$\Delta x_i = 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{a}} = \text{const.}$$

Таблица 40

x_i	0	5,879	11,653	17,238	22,522	27,422	31,852	35,738	39,012	41,618	43,512	44,661	45,0454
y_i	0	0,3854	1,5344	3,4284	6,0344	9,3084	13,1944	17,6244	22,5544	27,8084	33,3384	39,1474	45,0464
Δx_i	5,879	5,779	5,58	5,284	4,900	4,43	3,886	3,274	2,606	1,894	1,149	0,3854	-0,3854
Δy_i	0,3854	1,149	1,894	2,606	3,274	3,886	4,43	4,900	5,284	5,58	5,779	5,879	5,879
$\sin \alpha_i$	0,0654	0,195	0,3215	0,4423	0,5535	0,6534	0,7519	0,8315	0,8969	0,9469	0,9808	0,9978	+0,9978
$\cos \alpha_i$	0,9978	0,9808	0,9469	0,8969	0,8315	0,7519	0,6594	0,5555	0,4423	0,3215	0,195	0,0654	-0,0654
α_i	3°45'	11°15'	18°45'	26°15'	33°45'	41°15'	48°45'	56°15'	63°45'	71°15'	78°45'	85°15'	93°45'

Продолжение табл. 40

x_i	44,661	48,512	41,618	39,012	35,738	31,852	27,422	22,522	17,238	11,653	5,879	0	-5,879	-11,6538
y_i	50,9254	56,7044	62,2844	67,5684	72,4684	76,8984	80,7844	84,0584	86,6644	88,5584	89,7079	0,0928	89,7074	88,5584
Δx_i	-1,149	-1,894	-2,606	-3,274	-3,886	-4,43	-4,900	-5,284	-5,58	-5,779	-5,879	-5,879	-5,779	-5,779
Δy_i	5,779	5,58	5,284	4,9	4,43	3,886	3,274	2,606	1,894	1,149	0,3854	-0,3854	-1,149	-1,149
$\sin \alpha_i$	+0,9808	+0,9469	+0,8969	+0,8315	+0,7513	+0,6534	+0,5555	+0,4423	+0,3215	+0,195	+0,0654	-0,0654	-0,195	-0,195
$\cos \alpha_i$	-0,195	-0,3215	-0,4423	-0,5555	-0,6594	-0,7519	-0,8315	-0,8963	-0,9469	-0,9808	-0,9978	-0,9978	-0,9808	-0,9808
α_i	101°15'	108°45'	116°15'	123°45'	131°15'	138°45'	146°15'	153°45'	161°15'	168°45'	176°15'	183°45'	191°15'	191°15'

Приведем заданную параболу к такому виду. Введем обозначения:

$$x = p - \frac{b}{2a};$$

$$y = q + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

тогда

$$q + \frac{4ac - b^2}{4a} = a \left(p - \frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(p - \frac{b}{2a} \right) + c;$$

$$q + c - \frac{b^2}{4a} = ap^2 - bp + \frac{b^2}{4a} + bp - \frac{b^2}{2a} + c;$$

$$q - \frac{b^2}{4a} = ap^2 - \frac{b^2}{4a};$$

$$q = ap^2;$$

тогда

$$\Delta p_i = \pm 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{a}}; \quad \Delta q_i = (2|i| - 1)4\epsilon;$$

$$p_0 = 0; \quad q_0 = 0;$$

$$p_1 = 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{a}}; \quad q_1 = 4\epsilon;$$

$$p_i = p_0 + 2i \sqrt{\frac{\epsilon}{a}}; \quad q_i = \sum_{l=0}^i (2|i| - 1)4\epsilon.$$

Переходя к координатам x, y , получим

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{b^2 - 4ac}{4a};$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{a}}; \quad y_1 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} + 4\epsilon;$$

$$x_i = -\frac{b}{2a} + 2i \sqrt{\frac{\epsilon}{a}}; \quad y_i = \frac{b^2 - 4ac}{4a} + 4i^2\epsilon.$$

Отсюда углы наклона интерполирующих прямых

$$k_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i};$$

$$k_i = \frac{(2|i| - 1)4\epsilon}{\pm 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{a}}};$$

$$k_i = \pm 2(2|i| - 1)\sqrt{a\epsilon}.$$

Подставляя значения a, b, c, ϵ , получаем:

$$x_0 = -1;$$

$$y_0 = 0;$$

$$\Delta x = \pm \sqrt{0,5};$$

$$k_i = \pm 2[2|i| - 1]\sqrt{0,5}.$$

Задача 89. Найти узлы интерполяции и наклон интерполирующих прямых для параболы (задача 88) при следующих значениях коэффициентов:

1. $a = 2; b = 2; c = 1.$
2. $a = 0,5; b = 2; c = 1.$
3. $a = 1; b = 1; c = 0,5.$
4. $a = 1; b = 1; c = 2.$

Задача 90. Аналитически найти узлы интерполяции и наклон интерполирующих прямых для кривой $y = a\sqrt{x}$. Точность интерполяции равна ϵ .

Задача 91. Определить количество разрядов накопителя цифрового интерполятора для воспроизведения прямой линии длиной в 1 м с точностью $\delta = \Delta l/l = 0,1\%$ при подаче $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1$ м/мин.

Решение. Параметрическое задание прямой линии:

$$y = vt \sin \alpha;$$

$$x = vt \cos \alpha.$$

Погрешность воспроизведения определяется погрешностью задания $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$:

$$|\Delta y| = vt \cos \alpha \Delta \sin \alpha;$$

$$|\Delta x| = vt \sin \alpha \Delta \cos \alpha.$$

При $\cos \alpha = 1$ погрешность воспроизведения прямой линии полностью определяется Δy , а при $\sin \alpha = 1$ — только Δx , отсюда можно определить погрешность задания $\Delta \sin \alpha$ и $\Delta \cos \alpha$

$$vt(\Delta \sin \alpha)_{\max} = vt(\Delta \cos \alpha)_{\max} = l\delta,$$

так как $vt = l$, то

$$(\Delta \sin \alpha)_{\max} = (\Delta \cos \alpha)_{\max} = \delta;$$

$$(\Delta \sin \alpha)_{\max} = (\Delta \cos \alpha)_{\max} = \frac{1}{2^n} = \delta,$$

где n — число разрядов.

Отсюда

$$\frac{1}{\delta} = 2^n;$$

$$n = -\frac{\lg \delta}{\lg 2};$$

$$n = -\frac{\lg 0,001}{\lg 2} = \frac{3}{\lg 2} \cong 10.$$

Задача 92. Определить количество разрядов при воспроизведении параболы вида $z = 0,05x^2 + x$, если цена одного импульса перемещения по осям $\lambda = 0,001$, $x_{\max} = 20$, и погрешность воспроизведения не должна превышать одного импульса по каждой из осей. Ход решения приведен в [20].

Ответ: $n = 45$.

Задача 93. Рассчитать программу обработки окружности на цифровом линейном интерполяторе, имеющем 10 разрядов. Радиус окружности $R = 0,1$ м, точность воспроизведения по радиусу $\delta = 0,01$ мм. Подача $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1$ м/мин. Цена импульса $\lambda = 0,005$ мм.

Задача 94. Какова чистота обработки поверхности фрезерным станком с программным управлением, с ценой шага 0,01 мм, если чистота обработки фрезой на обычном станке $\Delta 5$?

1. Л. П. Смольников, Ф. Ф. Котченко. Оптимальная по быстродействию автоматическая система с асинхронным исполнительным двигателем. «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», № 6, 1963.

2. Ю. Г. Антамонов. Автоматическое управление с применением вычислительных машин. Судпромгиз, 1962.

3. А. А. Красовский и Г. С. Поспелов. Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, 1962.

4. А. В. Башарин. Расчет динамики и синтез нелинейных систем управления. Госэнергоиздат, 1960.

5. Л. С. Понtryгин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.

6. А. А. Фельдбаум. Основы теории оптимальных автоматических систем. Физматгиз, 1963.

7. П. И. Чинаев. Самонастраивающиеся системы. Машгиз, 1963.

8. В. И. Кунцевич. Системы экстремального управления. Киев, Гос. изд. техн. лит. УССР, 1961.

9. И. С. Моросанов. Метод Гольдфарба при исследовании периодических режимов в СЭР с независимым поиском. Сб. «Метод Гольдфарба в теории регулирования». Госэнергоиздат, 1962.

10. И. С. Моросанов. Релейные экстремальные системы. «Наука», 1964.

11. М. А. Гаврилов. Теория релейно-контактных схем. М., 1950.

12. С. Колдуэлл. Логический синтез релейных устройств. Изд. иностр. лит., 1962.

13. А. Н. Юрасов. Теория построения релейных схем. Госэнергоиздат., 1962.

14. Вернер Цюльсдорф. Основы автоматического управления. Машгиз, 1960.

15. Н. В. Ковальский, Ю. В. Крементуло, В. Е. Ревуцкий, Б. А. Сигов. Цифровое программное управление. Киев, Гос. изд. техн. лит. УССР, 1962.

16. Б. М. Анисимов. Алгоритм для автоматической подготовки информации к станкам с программным управлением. «Автоматическое управление и вычислительная техника», Вып. 4. Машгиз, 1961.

17. Применение вычислительной техники для автоматизации производства. Труды совещания НТО приборостроительной промышленности. Машгиз, 1961.

18. Л. А. Срибнер, Л. К. Шраго. Проектирование позиционных систем программного управления. Машгиз, 1962.

19. Вопросы программного управления металлорежущими станками. Сб. статей под ред. А. М. Дорошевича. Изд. иностр. лит., 1959.

ОГЛАВЛЕНИЕ

20. А. А. Воронов и др. Цифровые аналоги для систем автоматического управления. «Изв. АН СССР» 1960.
21. А. М. Пришвин, Г. М. Розенберг. К вопросу о кусочно-линейной аппроксимации некоторых кривых. «Изв. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина)», вып. I III. Л., 1964.
22. В. Г. Болтянский. Математические методы оптимального управления. Наука, 1966.
23. А. А. Павлов. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. Наука, 1966.
24. Л. П. Смольников. Синтез квазиоптимальных систем автоматического управления. Энергия, 1967.
25. В. П. Чистов, В. И. Бондаренко, В. А. Святославский. Оптимальное управление электрическими приводами. Энергия, 1968.
26. Л. М. Либерзон, А. Б. Родов. Системы экстремального управления. Энергия, Библиотека по автоматике, выпуск 154, 1965.

	Стр
Предисловие	3
Глава I. Расчет оптимальных систем управления	
§ 1. Применение принципа максимума для нахождения оптимальных алгоритмов	5
§ 2. Расчет алгоритмов и процессов для разомкнутых систем, оптимальных по быстродействию	30
§ 3. Расчет замкнутых систем управления, оптимальных по быстродействию	75
§ 4. Управление, близкое к оптимальному	105
§ 5. Расчет алгоритмов и процессов для функционалов $J = \int f(x, U) dt$	113
Глава II. Расчет экстремальных систем управления	
§ 1. Определение экстремальных характеристик объектов управления	119
§ 2. Расчет процессов в экстремальных системах управления	129
Глава III. Примеры расчета систем программного управления	
§ 1. Анализ и синтез релейных и бесконтактных логических схем	176
§ 2. Примеры определения параметров интерполяции различных кривых	190
Литература	197

авто

кусо
им.

упра

быст

том:

с к и
1968

упр:

Виктор Алексеевич Олейников
Николай Васильевич Соловьев
Александр Михайлович Пришвин
Николай Сергеевич Зотов

СБОРНИК
ЗАДАЧ И ПРИМЕРОВ
ПО ТЕОРИИ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ
(оптимальное, экстремальное
и программное управление)

Редактор С. М. Оводова
Техн. редактор Э. М. Чижевский
Корректор М. Н. Мелейникова

T-09404. Сдано в набор 25/1-68 г. Подп. к печати
10/VI-68 г. Формат 84x108^{1/2}. Объем 6,25 печ. л. Усл.
печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 8. Изд. № СТД-40. Тираж 30 000 экз.
Цена 38 коп.

Тематический план издательства «Высшая школа»
(вузы и техникумы) на 1968. Позиция № 86
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.

Ярославский полиграфкомбинат. Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Ярославль, ул. Свободы, 97. Зак. 786