

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Ю. В. Нагребцкая, О. Е. Перминова

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## Практикум

Рекомендовано методическим советом УрФУ  
для студентов, обучающихся по программе бакалавриата  
по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика»,  
01.03.03 «Математика и математическое моделирование»,  
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2017

**Р е ц е н з е н т ы:**

кафедра физико-математических дисциплин  
Российского государственного  
профессионально-педагогического университета  
(заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук,  
доцент С. В. Анахов);

Л. Д. Сон, доктор физико-математических наук, профессор  
(Уральский государственный педагогический университет)

**Н а у ч н ы й   р е д а к т о р:**

доктор физико-математических наук, профессор М. В. Волков

**Нагребецкая, Ю. В.**

Н168      Дифференциальная геометрия : практикум / Ю. В. На-  
гребецкая, О. Е. Перминова ; [науч. ред. М. В. Волков] ; М-во  
образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. –  
Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. – 72 с.

ISBN 978-5-7996-2062-2

В практикум включены краткие теоретические сведения по основам диф-  
ференциальной геометрии, задания для самостоятельного выполнения и при-  
меры решения типовых задач.

Для студентов и преподавателей математических специальностей и на-  
правлений.

УДК 514.7(07)

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| От авторов .....                             | 4  |
| 1. Аффинные евклидовы пространства .....     | 8  |
| 2. Гладкие линии на плоскости .....          | 18 |
| 3. Кривые на плоскости .....                 | 26 |
| 4. Кривые в пространстве .....               | 37 |
| 5. Внутренняя геометрия поверхностей .....   | 45 |
| 6. Внешняя геометрия гиперповерхностей ..... | 58 |
| Библиографические ссылки .....               | 71 |

## ОТ АВТОРОВ

Практикум «Дифференциальная геометрия» предназначен для освоения дисциплины «Основы дифференциальной геометрии и топологии» студентами Института естественных наук и математики Уральского федерального университета, обучающимися по направлениям «Математика», «Механика и математическое моделирование», «Математика и компьютерные науки». В рамках указанных направлений дисциплина «Основы дифференциальной геометрии и топологии» систематически излагается в обязательном лекционном курсе. Овладение лекционным материалом требует от студента знаний и умений, приобретенных в ходе предшествующего изучения дисциплин «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра», «Математический анализ» и «Дифференциальные уравнения». Кроме лекций рабочая программа курса предполагает проведение практических занятий, в том числе выполнение аудиторных и домашних контрольных работ. Соответственно возникает необходимость в учебно-методическом пособии, в котором, во-первых, содержались бы краткие положения теории, во-вторых, были бы приведены решения типовых задач, а в-третьих, имелся бы набор заданий по основным темам курса. Все эти задачи и решает данный практикум.

Состоит практикум из 6 глав, охватывающих основные разделы курса: аффинные евклидовы пространства, гладкие линии на плоскости, кривые на плоскости, кривые в пространстве, внутренняя геометрия поверхностей, внешняя геометрия гиперповерхностей. При этом теория кривых и поверхностей излагается в пространствах произвольной размерности.

В начале каждой главы приводятся необходимые теоретические сведения: определения основных математических понятий, утверждения и теоремы (без доказательства), а также формулы, применяющиеся при решении помещенных далее задач. Для более

детального ознакомления с теоретическим материалом рекомендуется обратиться к учебному пособию С. В. Сизого «Лекции по дифференциальной геометрии» [3]. Все используемые в практикуме обозначения соответствуют обозначениям, принятым в «Лекциях...».

За теоретическими сведениями следует типовая задача с подробным ее решением, для наглядности сопровождающимся иллюстрациями, а за ней – 25 вариантов заданий, причем сложные задания снабжены указаниями к их решению. Задания нумеруются в пределах главы. На задания, требующие численного ответа или ответа в виде уравнения или формулы, в конце глав приводятся ответы. При подборе заданий авторы частично использовали хорошо себя зарекомендовавший сборник задач [2]. Кроме задач из этого сборника и авторских задач в комплект индивидуальных заданий входят задачи из работ [1] и [3].

Поскольку рабочей программой курса «Основы дифференциальной геометрии и топологии» предусмотрены три домашних контрольные работы, данный практикум может быть использован преподавателями для их составления. Каждая контрольная рассчитана на 25 индивидуальных вариантов, по две задачи в каждом. Формировать домашние контрольные работы рекомендуется следующим образом:

- контрольная работа № 1 составляется из задач главы 1 и главы 2;
- контрольная работа № 2 – из задач главы 3 и главы 4;
- контрольная работа № 3 – из задач главы 5 и главы 6.

При этом порядковый номер задачи из каждой главы должен соответствовать порядковому номеру фамилии студента в «Журнале студентов».

Домашние контрольные работы целесообразно предлагать студентам после прохождения ими на лекциях и на практических занятиях тем курса, соответствующих теме контрольной работы. За каждую контрольную работу студент получает баллы по балльно-рейтинговой системе УрФУ согласно технологической карте курса.

Перед тем как приступить к домашней контрольной работе, студентам следует ознакомиться с теоретическим материалом и разобраться с решением типовых задач, данных в практикуме по указанным в работе темам.

При выполнении домашней контрольной работы студенту необходимо руководствоваться изложенными ниже требованиями.

1. Контрольную работу следует выполнять на отдельных листах, листы должны быть скреплены. В начале первого листа обязательно указываются фамилия и инициалы студента, номер группы, номер варианта и номер контрольной работы.

2. Перед решением задачи желательно привести ее условие.

3. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним, для наглядности – иллюстрациями.

4. Если задача требует численного ответа или ответа в виде формулы, в конце задачи записывается ответ. Ответ должен быть сверен с ответом к соответствующему заданию в практикуме.

Задачи, помещенные в практикуме, дополняют и расширяют перечень задач учебного пособия [3], используемого в качестве задачника на практических занятиях по дифференциальной геометрии для студентов Института естественных наук и математики. Кроме того, эти задачи могут выдаваться студентам на практических занятиях в качестве домашних заданий с целью получения дополнительных баллов по балльно-рейтинговой системе УрФУ, а также включаться в комплект аудиторных контрольных работ. Теоретический материал может быть также использован при составлении заданий для мини-контролей на лекциях.

\* \* \*

Мы выражаем искреннюю признательность нашему коллеге Сергею Викторовичу Сизому, профессору кафедры алгебры и фундаментальной информатики, за блестящие лекции и практические занятия по дифференциальной геометрии, которые сделали наше знакомство с этой непростой дисциплиной ярким и увлекательным. Сергей Викторович также оказал ценную поддержку и помощь во всех вопросах, возникавших у нас по методике преподавания дифференциальной геометрии.

Благодарим научного редактора М. В. Волкова, рецензентов С. В. Анахова и Л. Д. Сона, чьи предложения и советы несомненно улучшили разработанное нами пособие.

Отдельное спасибо редактору Е. И. Маркиной за полезные замечания и доработку рукописи в ходе ее подготовки к печати.

Надеемся, что данный практикум будет способствовать более глубокому изучению студентами дисциплины «Основы дифференциальной геометрии и топологии», поскольку именно самостоятельное решение задач и получение практических навыков ведут к пониманию и скорейшему усвоению трудного теоретического материала.

# 1. АФФИННЫЕ ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Пусть  $(V, \vec{V}, +)$  – конечномерное евклидово аффинное пространство, где  $V$  – множество «точек»,  $\vec{V}$  – множество векторов, «+» – операция откладывания вектора от точки. Отображение  $A : V \rightarrow V$  называется аффинным оператором, если существует такой линейный оператор  $\bar{A} : \vec{V} \rightarrow \vec{V}$ , что для любой точки  $p \in V$  и вектора  $\vec{x} \in \vec{V}$  выполняется равенство

$$A(p + \vec{x}) = A(p) + \bar{A}(\vec{x}).$$

Обычно считают, что оператор  $\bar{A}$  обратим. Пусть  $(O, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  – некоторый репер аффинного пространства  $(V, \vec{V}, +)$ . Обозначим через  $\begin{bmatrix} \vec{x} \end{bmatrix}$  столбец координат вектора  $\vec{x} \in \vec{V}$  в базисе  $b = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ , через  $\begin{bmatrix} \bar{A} \end{bmatrix}$  – матрицу оператора  $\bar{A}$  в этом базисе и через  $[p]$  – координаты точки  $p$  в репере  $(O, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ , т. е. координаты вектора  $\overrightarrow{Op} = p - O$  в базисе  $b$ . Тогда для любой точки  $q \in V$  выполняется равенство  $\begin{bmatrix} A(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix}$ , где  $q_0 = A(O)$ .

**Утверждение.** Любой аффинный оператор плоскости переводит прямую в прямую, касательную в касательную, сохраняет параллельность прямых и отношение отрезков.

**Теорема об изометрии.** Отображение  $A$  конечномерного евклидова аффинного пространства в себя является изометрией тогда и только тогда, когда отображение  $A$  является аффинным оператором и соответствующий линейный оператор  $\bar{A}$  является ортогональным.

**Задача 1.** Пусть точки  $P_1, P_2, P_3$  лежат по одной на каждой стороне (или на продолжении сторон) некоторого треугольника, а точки  $P'_1, P'_2, P'_3$  получены отражением точек  $P_1, P_2, P_3$  относительно середин сторон этого треугольника. Тогда точки  $P_1, P_2, P_3$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точки  $P'_1, P'_2, P'_3$  лежат на одной прямой.

**Решение.** Докажем сначала, что существует аффинный оператор плоскости, переводящий произвольный треугольник  $OAB$  в прямоугольный равнобедренный треугольник  $OA'B'$  с единичными катетами. Пусть  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  – стандартный репер. Обозначим через  $\vec{c}_1 = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{c}_2 = \overrightarrow{OB}$ , и пусть  $A' = O + \vec{e}_1$ ,  $B' = O + \vec{e}_2$  (рис. 1).

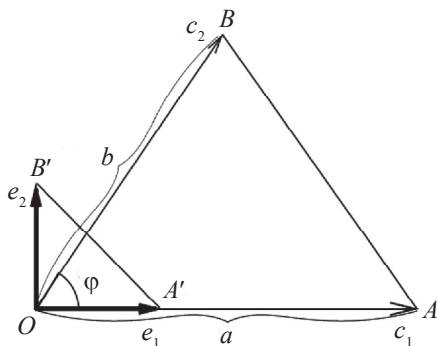


Рис. 1

Рассмотрим линейный оператор  $\vec{A}$  векторов плоскости, переводящий базис  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  в базис  $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ . Если  $|\overrightarrow{OA}| = a$ ,  $|\overrightarrow{OB}| = b$ ,  $\angle AOB = \varphi$ , то матрица оператора  $\vec{A}$  в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  равна  $[\vec{A}] = \begin{pmatrix} a & b \cos \varphi \\ 0 & b \sin \varphi \end{pmatrix}$ . Очевидно,  $\vec{A}$  – обратимый оператор. Линейный оператор  $\vec{B} = \vec{A}^{-1}$  переводит базис  $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$  в базис  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

Рассмотрим аффинный оператор  $V(x) = O + \vec{B}(\vec{x})$ , где  $\vec{x} = \overrightarrow{Ox}$ . Очевидно,  $V(O) = O$ ,  $V(A) = V(O + \vec{c}_1) = V(O) + V(\vec{c}_1) = O + \vec{e}_1 = A'$ , аналогично  $V(B) = B'$ . Таким образом, аффинный оператор  $V$  перево-

дит треугольник  $OAB$  в треугольник  $OA'B'$ . Обратный аффинный оператор  $A$  переводит треугольник  $OA'B'$  в треугольник  $OAB$ .

Поскольку аффинный оператор сохраняет параллельность прямых и отноше- ние отрезков и переводит прямую в прямую, теперь исходную задачу достаточно решить для треугольника  $OA'B'$ .

Введем прямоугольную систему координат  $xOy$ , как показано

на рис. 2. Пусть  $P_1\left(0, \frac{1}{2}-\alpha\right)$ ,  $P_2\left(\frac{1}{2}-\beta, \frac{1}{2}+\beta\right)$ ,  $P_3\left(\frac{1}{2}-\gamma, 0\right)$ , где  $\alpha$ ,

$\beta$ ,  $\gamma$  — произвольные числа. Тогда  $P'_1\left(0, \frac{1}{2}+\alpha\right)$ ,  $P'_2\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta\right)$ ,

$P'_3\left(\frac{1}{2}+\gamma, 0\right)$ . Далее  $\overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{1}{2}-\beta, \alpha+\beta\right)$ ,  $\overrightarrow{P_1P_3} = \left(\frac{1}{2}-\gamma, \alpha-\frac{1}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{P'_1P'_2} =$

$= \left(\frac{1}{2}+\beta, -\alpha-\beta\right)$ ,  $\overrightarrow{P'_1P'_3} = \left(\frac{1}{2}+\gamma, -\alpha-\frac{1}{2}\right)$ .

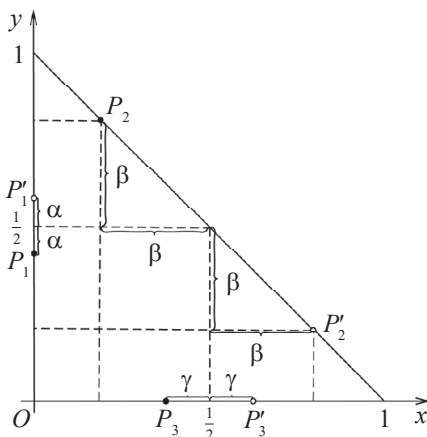


Рис. 2

Точки  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  лежат на одной прямой тогда и только тогда,

когда векторы  $\overrightarrow{P_1P_2}$  и  $\overrightarrow{P_1P_3}$  коллинеарны, т. е.  $\frac{1/2-\gamma}{1/2-\beta} = \frac{\alpha-1/2}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta = \frac{1}{4}.$$

Аналогично точки  $P'_1, P'_2, P'_3$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{P'_1 P'_2}$  и  $\overrightarrow{P'_1 P'_3}$  коллинеарны, т. е.  $\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta = \frac{1}{4}$ . Таким образом, точки  $P_1, P_2, P_3$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точки  $P'_1, P'_2, P'_3$  лежат на одной прямой.

## Задания

1. Вписанный эллипс касается параллельных сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $|PB| = |QC|$ , если эллипс касается стороны  $BC$  в ее середине.

*Указание.* Введите аффинный оператор, который переводит эллипс в окружность.

2. Пусть  $ABC$  – треугольник,  $BD$  – медиана треугольника  $ABC$ , а  $X, Y$  и  $Z$  – три точки на отрезке  $BC$  такие, что  $|BX| = |XY| = |YZ| = |ZC|$ . Пусть прямая  $AX$  пересекает  $BD$  в точке  $P$ . С помощью аффинной геометрии докажите, что  $|AP|/|AX| = 4/5$ .

*Указание.* Введите аффинный оператор, который переводит треугольник  $ABC$  в равнобедренный прямоугольный треугольник  $A'B'C'$  ( $\angle A'$  – прямой), и решите задачу для треугольника  $A'B'C'$ .

3. Эллипс вписан в четырехугольник так, что касается всех четырех его сторон в серединах. Докажите, что четырехугольник является параллелограммом.

*Указание.* Введите аффинный оператор, который переводит эллипс в окружность.

4. Аффинный оператор  $A(x) = p_0 + \vec{A}(\vec{x})$ ,  $p_0 = A(O)$ ,  $x = O + \vec{x}$  пространства  $\mathbb{R}^3$  переводит точки  $A(-1, 0, 1)$ ,  $B(2, 1, -1)$ ,  $C(1, 1, 1)$ ,  $D(0, 1, -1)$  в точки  $A'(1, 2, 3)$ ,  $B'(-1, -2, 1)$ ,  $C'(0, 1, 0)$ ,  $D'(-1, 0, 0)$  соответственно. Найдите координаты точки  $p_0$  и матрицу  $[\vec{A}]$  оператора  $\vec{A}$  в стандартном базисе.

5. В аффинном пространстве даны четыре различные точки  $A, B, C, D$ . Точки  $K, L, M, N$  делят отрезки  $AB, BC, CD, DA$  в одина-

ковом отношении  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ), при этом не являясь серединами этих отрезков. Докажите, что  $ABCD$  – параллелограмм тогда и только тогда, когда  $KLMN$  – параллелограмм.

*Указание.* Используйте то, что четыре различные точки тогда и только тогда образуют параллелограмм, когда их радиус-векторы  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$  удовлетворяют условию  $\vec{x}_1 + \vec{x}_3 = \vec{x}_2 + \vec{x}_4$ .

6. Докажите, что ортогональные проекции вершин  $n$ -мерного куба на любую большую диагональ этого куба делят ее на  $n$  равных частей.

*Указание.* Рассмотрите проекции радиус-векторов вершин на вектор – большую диагональ, выходящий из начала координат.

7. Докажите, что существует такое аффинное преобразование  $A(x) = p_0 + \vec{A}(\vec{x})$ ,  $p_0 = O + \vec{x}$ , которое переводит произвольный параллелограмм в произвольный прямоугольник, и найдите его матрицу  $[\vec{A}]$  и координаты точки  $p_0$ .

*Указание.* Докажите, что с помощью некоторого аффинного оператора данный параллелограмм можно перевести в квадрат с единичными сторонами; затем докажите, что с помощью другого аффинного оператора этот квадрат можно перевести в произвольный прямоугольник.

8. Докажите, что существует такой аффинный оператор  $A(x) = p_0 + \vec{A}(\vec{x})$ ,  $p_0 = A(O)$ ,  $x = O + \vec{x}$ , который переводит данную трапецию в равнобедренную трапецию с таким же отношением оснований; найдите его матрицу  $[\vec{A}]$  и координаты точки  $p_0$ .

*Указание.* Докажите, что данную трапецию можно перевести при помощи некоторого аффинного оператора в некоторую равнобедренную с единичной высотой и большим основанием, равным 2, а затем докажите, что полученную трапецию можно перевести в равнобедренную трапецию при помощи другого аффинного оператора.

9. Найдите параметрические уравнения аффинного подпространства пространства  $\mathbb{R}^4$ , заданного общими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -3. \end{cases}$$

*Указание.* Представьте аффинное пространство в виде  $W = \{p + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ , где  $p$  – частное решение данной неоднородной системы линейных уравнений, а  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы линейных уравнений.

10. Аффинный оператор  $A(x) = p_0 + \vec{A}(\vec{x})$ ,  $p_0 = A(O)$ ,  $x = O + \vec{x}$  пространства  $\mathbb{R}^2$  переводит точки  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(2, 3)$  в точки  $A'(0, 1)$ ,  $B'(1, 3)$ ,  $C'(2, 2)$ . Найдите координаты точки  $p_0$  и матрицу  $[\vec{A}]$  оператора  $A$  в стандартном базисе.

11. Пусть точка  $O$  является центром эллипса и  $X, Y$  – некоторые точки на эллипсе. Предположим, что касательные к эллипсу в точках  $X$  и  $Y$  пересекаются в точке  $P$ . Пусть  $Q$  – точка пересечения отрезков  $XU$  и  $OP$ , а  $R$  – точка пересечения отрезка  $OP$  с эллипсом. Докажите, что  $\frac{|OQ|}{|OR|} = \frac{|OR|}{|OP|}$ .

*Указание.* Введите аффинный оператор, который переводит эллипс в окружность.

12. Пусть  $ABC$  – треугольник и точка  $D$  лежит на стороне  $BC$ . Пусть точки  $X$  и  $Y$  – центры тяжести треугольников  $ABD$  и  $ACD$ . С помощью аффинной геометрии докажите, что прямая  $XU$  параллельна прямой  $BC$ .

*Указание.* Введите аффинный оператор, который переводит данный треугольник в равнобедренный прямоугольный треугольник с единичными катетами, и решите задачу для последнего.

13. Докажите, что если трапеция вписана в эллипс, то линия, соединяющая середины параллельных сторон трапеции, проходит через центр эллипса.

*Указание.* Введите аффинный оператор, который переводит эллипс в окружность.

14. Эллипс вписан в четырехугольник  $ABCD$ . Предполагая, что эллипс касается сторон  $BC$  и  $DA$  в их серединах, а стороны  $AB$  и  $CD$  параллельны, докажите, что четырехугольник является параллелограммом.

*Указание.* Введите аффинный оператор, который переводит эллипс в окружность.

15. Изометрия  $A(x) = p_0 + \bar{A}(\bar{x})$ ,  $p_0 = A(O)$ ,  $x = O + \bar{x}$  плоскости, сохраняющая ориентацию, переводит точку  $C(0, 0)$  в точку  $C'(0, 1)$ , а точку  $D(1, 0)$  – в точку  $D'\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} + 1\right)$ . Найдите координаты точки  $p_0$ , матрицу  $[\bar{A}]$  оператора  $\bar{A}$  и образ точки  $Q(1, 1)$  при этом отображении.

*Указание.* Используйте то, что  $\bar{A}$  – оператор поворота плоскости.

16. Найдите общее уравнение плоскости в  $\mathbb{R}^5$ , заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = 2 + t_1 + t_2, \\ x_2 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x_3 = -3 + t_1 + 2t_2, \\ x_4 = 3 + 3t_1 + t_2, \\ x_5 = 1 + t_1 + 3t_2, \end{cases}$$

т. е. найдите систему неоднородных линейных уравнений с переменными  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , множеством решений которой является данная плоскость.

*Указание.* Запишите параметрические уравнения плоскости в векторном виде:  $p = p_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2$  и докажите, что любая строка  $\vec{x}$  основной матрицы искомой системы удовлетворяет однородной системе линейных уравнений  $\langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle = 0, \langle \vec{a}_2, \vec{x} \rangle = 0$ .

17. Укажите все случаи взаимного расположения трех различных плоскостей пространства  $\mathbb{R}^3$ , заданных общими уравнениями

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1, \\a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2, \\a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3.\end{aligned}$$

Для каждого случая дайте необходимое и достаточное условие при помощи понятия ранга матрицы.

*Указание.* Рассмотрите различные значения, которые могут принимать ранги основной и расширенной матриц системы.

18. Докажите, что аффинный оператор  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A(x) = p_0 + \bar{A}(\bar{x})$ , где  $p_0 = A(O)$ ,  $x = O + \bar{x}$ , переводит гиперплоскость  $\mathbb{R}^n$  аффинного пространства в некоторую гиперплоскость этого же пространства. Напишите уравнение полученной гиперплоскости, если уравнение исходной гиперплоскости имеет вид

$$q = q_0 + t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_{n-1} \vec{a}_{n-1},$$

где  $t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1} \in \bar{\mathbb{R}}^n$ .

19. Найдите площадь треугольника  $ABC$  в пространстве  $\mathbb{R}^4$  для точек  $A(-1, 1, 0, 1)$ ,  $B(1, 2, -1, 0)$ ,  $C(1, -1, 1, 1)$ , если координаты указаны в репере  $(0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ , а матрица Грама базиса

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) \text{ равна } G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите угол между большой диагональю  $n$ -мерного куба со стороной  $a$  и его произвольным ребром и предел этого угла при  $n \rightarrow \infty$ .

*Указание.* Найдите угол между вектором – большой диагональю и вектором – ребром.

21. Укажите все случаи взаимного расположения трех прямых на плоскости, заданных общими уравнениями

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2,$$

$$a_{31}x + a_{32}y = b_3.$$

Для каждого случая дайте необходимое и достаточное условие при помощи понятия ранга матрицы.

*Указание.* Рассмотрите различные значения рангов матриц  $A = (a_{ij})$  и  $(A | b)$ , где  $b = (b_i)$ , а также, если это необходимо, рангов некоторых матриц с коэффициентами  $(a_{ij})$ ,  $(b_i)$ .

22. Найдите угол между вектором  $\vec{x} = (2, 1, 3, 1)$  и подпространством, порожденным векторами  $\vec{a} = (1, 1, 0, 0)$  и  $\vec{b} = (0, -1, 0, 1)$ .

*Указание.* Найдите векторы  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  – ортогональные проекции вектора  $\vec{x}$  на подпространства  $\vec{W} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  и  $\vec{W}^\perp$  соответственно. Затем найдите угол между векторами  $\vec{x}$  и  $\vec{x}_1$ .

23. Найдите ортонормированный базис, порождающий тот же орфлаг, что и базис  $(a_1, a_2)$ , подпространства  $\vec{W}$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , если матрица Грама базиса, в котором даны координаты  $\vec{a}_1 = {}^t(1, 0, 1)$ ,  $\vec{a}_2 = {}^t(0, 1, 1)$ , такова:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Пусть  $ABC$  – треугольник,  $BD$  – медиана треугольника  $ABC$ ,  $X$  и  $Y$  – две точки на отрезке  $BC$  такие, что  $|BX| = |XY| = |YC|$ . Пусть отрезок  $AX$  пересекает медиану  $BD$  в точке  $Z$ . Используя аффинную геометрию, докажите, что точка  $Z$  является серединой отрезка  $BD$ .

*Указание.* Введите аффинный оператор, который переводит данный треугольник в равнобедренный прямоугольный треугольник с единичными катетами, и решите задачу для последнего.

25. Опишите взаимное расположение двух гиперплоскостей, заданных уравнениями

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a = 0, \quad b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + b = 0,$$

в аффинном пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

*Указание.* Проведите рассуждения, аналогичные описанию взаимного расположения двух плоскостей в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

## ОТВЕТЫ

$$\text{№ 4. } [\vec{A}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 15/4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 9. } W = \left\{ {}^t(-1, 2, 0, 0) + t_1 \cdot {}^t(3, -1, 1, 0) + t_2 \cdot {}^t(-4, 1, 0, 1) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\text{№ 10. } [\vec{A}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 15. } [\vec{A}] = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(Q) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{4}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 16. } \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = -8, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ -5x_1 + 2x_2 + x_5 = -7. \end{cases}$$

$$\text{№ 19. } \frac{1}{2}\sqrt{94}.$$

$$\text{№ 20. Угол } \varphi_n = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{№ 22. } \arccos \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

$$\text{№ 23. } c_1 = {}^t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad c_2 = {}^t\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right).$$

## 2. ГЛАДКИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть гладкая линия  $l_1$  на плоскости дана как образ плоской гладкой регулярной кривой  $\alpha(t)$ . Тогда вектор  $\dot{\alpha}(t_0)$  направляет касательную к  $l_1$  в точке  $\alpha(t_0)$ .

Д л и н о й к р и в о й  $\alpha(t)$  от точки  $\alpha(t_1)$  до точки  $\alpha(t_2)$  называется число  $l[\alpha] \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\alpha}(t)| dt$ .

Пусть гладкая линия  $l_2$  на плоскости задана как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению  $F(x, y) = 0$ , где  $F$  – гладкая функция и  $\overrightarrow{\text{grad}} F \Big|_{l_2} \neq \vec{0}$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{\text{grad}} F$  перпендикулярен касательной к линии  $l_2$  в любой точке этой линии.

Две произвольные плоские гладкие линии *касаются* друг друга, если в общей точке они имеют общую касательную. Пусть  $f(t) = F(\alpha(t))$ . Если  $f(t_0) = f'(t_0) = \dots = f^{(k)}(t_0) = 0$ , а  $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ , то говорят, что линии  $l_1$  и  $l_2$  имеют в точке  $p_0 = \alpha(t_0)$  касание  $k$ -го порядка.

Пусть  $C^t, t \in I$  – семейство плоских гладких линий, заданных уравнением  $F(x, y, t) = 0$ , и для любого  $t \in I$  вектор  $\overrightarrow{\text{grad}} F \Big|_{C^t} \neq \vec{0}$ .

Линия  $C$  называется о г и б а ю щ е й семейства линий  $C^t$ , если:

(1)  $C$  является образом некоторой гладкой регулярной кривой  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

(2)  $C$  касается  $C^t$  в точке  $\alpha(t)$  для любого  $t \in I$ .

**Необходимое условие огибающей.** Для любой точки  $c = (x, y) = \alpha(t)$  огибающей  $C$  выполняются равенства

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0, \\ F_t'(x, y, t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Множество точек, удовлетворяющих системе (1), называется *дискриминантой*. В общем случае дискриминанта кроме точек

огибающей содержит точки самопересечения, особые точки кривых семейства и т. д.

**Задача 2.** Прямая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг точки, равномерно движущейся по второй прямой. Найдите огибающую этого семейства прямых.

**Решение.** Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось  $Ox$  совпадала со второй прямой, а ось  $Oy$  – с первоначальным положением первой прямой  $l$ .

Пусть прямая  $l$  вращается по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega$  и равномерно движется вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $v$ . Тогда точка  $A$  пересечения прямой  $l$  с осью  $Ox$  в момент времени  $t$  имеет координаты  $(vt, 0)$ , а прямая  $l$  наклонена к оси  $Ox$  под углом  $\varphi(t) = \pi/2 - \omega t$  (рис. 3). Следовательно, уравнение прямой  $l$  в момент времени  $t$  имеет вид  $y = \operatorname{tg} \varphi(t)(x - vt)$  или

$$y - \operatorname{ctg} \omega t \cdot (x - vt) = 0. \quad (2)$$

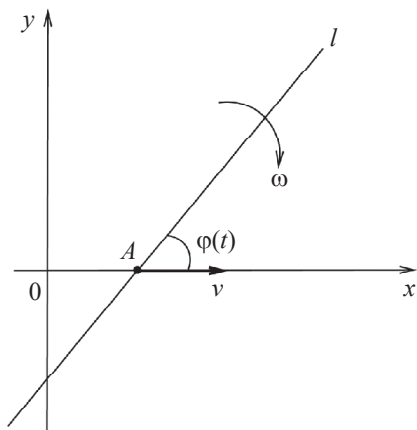


Рис. 3

Уравнение (2) при  $\omega t \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  описывает в неявном виде исходное семейство прямых. Продифференцируем его по  $t$ , получим

$\frac{\omega}{\sin^2 \omega t}(x - vt) + v \operatorname{ctg} \omega t = 0$  и умножим на  $\sin^2 \omega t$ . Таким образом, выполняется равенство

$$\omega(x - vt) + v \sin \omega t \cdot \cos \omega t = 0. \quad (3)$$

Уравнения (2), (3) задают дискриминанту. Заметим, что  $\overrightarrow{\operatorname{grad} F} = (-\operatorname{ctg} \omega t, 1) \neq \vec{0}$  для любого  $t$ . Исключим параметр  $t$  из системы уравнений (2), (3). Для этого выразим  $x - vt = -\frac{v}{\omega} \sin \omega t \cdot \cos \omega t$

из уравнения (3) и подставим в уравнение (2):  $y + \frac{v}{\omega} \cos^2 \omega t = 0$ .

Итак, дискриминанта задается системой

$$\begin{cases} x = vt - \frac{v}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t, \\ y = -\frac{v}{\omega} \cos^2 \omega t \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \frac{v}{2\omega}(2\omega t - \sin 2\omega t), \\ y = -\frac{v}{2\omega}(1 + \cos 2\omega t). \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим через  $a = \frac{v}{2\omega}$ ,  $\tau = 2\omega t$ . Тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} x = a(\tau - \sin \tau), \\ y = -a(1 + \cos \tau), \end{cases}$$

где  $\tau \neq 2\pi n$ .

Последняя система задает, очевидно, циклоиду  $\alpha(\tau) = (a(\tau - \sin \tau), a(1 - \cos \tau) - 2a)$ , опущенную на  $2a$  вдоль оси  $Oy$  (рис. 4).

Из рис. 4 видно, что кривая  $\alpha(\tau)$  является огибающей для исходного семейства прямых.

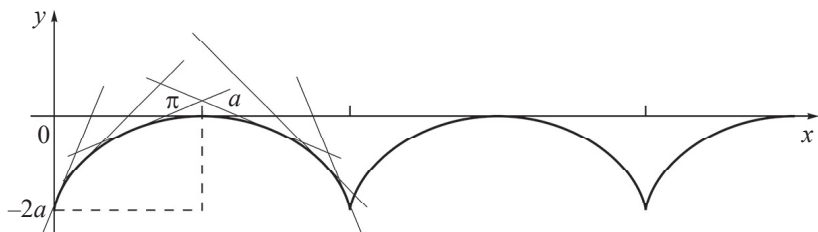


Рис. 4

**Ответ.** Огибающей является циклоида

$$\alpha(\tau) = (a(\tau - \sin \tau), a(1 - \cos \tau) - 2a).$$

## Задания

1. Найдите огибающую семейства прямых, являющихся одной из сторон прямого угла, перемещающегося на плоскости так, что другая его сторона проходит через фиксированную точку  $F$ , а вершина прямого угла описывает прямую. Сделайте чертеж.

*Указание.* Введите прямоугольную систему координат так, чтобы прямая, по которой скользит вершина прямого угла, совпадала бы с осью  $Oy$ , а точка  $F$  лежала бы на оси  $Ox$ .

2. Найдите огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах параболы  $y^2 = 2px$ , перпендикулярных к ее оси. Сделайте чертеж.

3. Найдите огибающую семейства линий  $t^2(x - a) - ty - a = 0$ . Сделайте чертеж.

4. Дано семейство парабол параметра  $p$ , оси которых параллельны оси  $Ox$ , а вершины описывают параболу  $y^2 = 2qx$ . Найдите огибающую этого семейства. Сделайте чертеж.

5. Покажите, что площадь, ограниченная цепной линией  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ , прямыми  $x = x_1$ ,  $x = x_2$  и осью абсцисс, пропорциональна длине соответствующей дуги с коэффициентом пропорциональности, равным  $a$ . Сделайте чертеж.

6. Найдите длину всей кривой, заданной уравнением  $\rho = a \sin^3 \left( \frac{\varphi}{3} \right)$ .

Сделайте чертеж.

*Указание.* Найдите сначала период этой кривой.

7. Найдите касательные к астройде  $\alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ , наиболее удаленные от начала координат. Сделайте чертеж.

8. Найдите огибающую семейства прямых, образующих с координатными осями треугольники постоянной площади. Сделайте чертеж.

9. Окружность радиуса  $r$  катится без скольжения по окружности радиуса  $R$ , где  $R = n \cdot r$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , оставаясь вне ее. Известно, что полученная линия (эпициклоида) имеет параметризацию

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \frac{r}{R} t - r \cos \frac{R + r}{R} t, \\ y = (R + r) \sin \frac{r}{R} t - r \sin \frac{R + r}{R} t. \end{cases}$$

Найдите длину одной арки эпициклоиды ( $t \in [0, 2\pi]$ ). Сделайте чертеж.

*Указание.* Используйте формулы синуса суммы (разности) или косинуса суммы (разности).

10. Составьте уравнения касательной и нормали к лемнискате Бернулли  $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$  в произвольной точке  $p_0 = (x_0, y_0)$ . Сделайте чертеж.

11. Найдите огибающую семейства линий  $3(y - t)^2 - 2(x - t)^3 = 0$ . Сделайте чертеж.

12. Покажите, что ордината любой точки цепной линии  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  есть среднее геометрическое ее параметра и радиуса кривизны в этой точке.

13. Составьте уравнение касательной и нормали к линии  $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$  в точке  $A\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ . Сделайте чертеж.

14. Найдите огибающую семейства окружностей, построенных как на диаметрах на хордах эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b$ ), параллельных его малой оси. Сделайте чертеж.

*Указание.* Примените параметризацию эллипса:

$$x = a \cos t, y = b \sin t.$$

15. Докажите, что только одна нормаль линии  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  проходит через начало координат.

16. Найдите огибающую семейства линий  $y^3 - (x - t)^2 = 0$ . Сделайте чертеж.

17. Составьте уравнение касательной к спирали Архимеда  $\rho = a\varphi$  ( $a > 0$ ) в произвольной точке. Сделайте чертеж. Докажите, что угол между касательной и радиус-вектором, проведенным из полюса в точку касания, стремится к  $\frac{\pi}{2}$  при  $\varphi \rightarrow \infty$ .

*Указание.* Примените параметризацию

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, y = \rho(\varphi) \sin \varphi$$

в полярных координатах.

18. Докажите, что линия  $y = e^{kx} \sin(mx)$  касается каждой из линий  $y = e^{kx}$  и  $y = e^{-kx}$  в точках пересечения с ними. Сделайте чертеж.

19. Покажите, что тангенс угла, образованного касательной к кривой  $\rho = \rho(\varphi)$  и радиус-вектором, проведенным в точку касания, задается формулой  $\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\dot{\rho}}$ .

*Указание.* Примените параметризацию

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, y = \rho(\varphi) \sin \varphi$$

в полярных координатах.

20. Пусть даны кривые в полярных координатах

$$\rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi).$$

Покажите, что они пересекаются под прямым углом тогда и только тогда, когда  $\rho_1 \rho_2 + \dot{\rho}_1 \dot{\rho}_2 = 0$ .

*Указание.* Примените параметризации

$$\alpha_i(\varphi) = (\rho_i(\varphi) \cos \varphi, \rho_i(\varphi) \sin \varphi), i \in \{1, 2\}.$$

21. Найдите параметрические уравнения огибающей семейства прямых, на которых лежит отрезок постоянной длины  $a$ , если его концы скользят по осям прямоугольной системы координат. Сделайте чертеж.

*Указание.* В качестве параметра возьмите острый угол наклона прямых к оси  $Ox$ .

22. Докажите, что кардиоиды  $\rho_1 = a(1 + \cos \varphi)$  и  $\rho_2 = a(1 - \cos \varphi)$  пересекаются под прямым углом. Сделайте чертеж.

*Указание.* Примените параметризации

$$\alpha_i(\varphi) = (\rho_i(\varphi) \cos \varphi, \rho_i(\varphi) \sin \varphi), i \in \{1, 2\}.$$

23. Найдите огибающую семейства линий  $x \cos t + y \sin t - p = 0$  при  $p = \text{const}$ . Сделайте чертеж.

24. Составьте уравнения парабол, оси которых параллельны координатным осям, имеющих с линией  $y = \ln x$  в точке  $M(1, 0)$  наивысший порядок касания. Сделайте чертеж.

25. Найдите угол, составленный касательной в произвольной точке логарифмической спирали  $\rho = ca^\varphi$  ( $a > 0$ ), с радиус-вектором точки касания. Докажите, что он постоянный. Сделайте чертеж.

*Указание.* Примените параметризацию

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, y = \rho(\varphi) \sin \varphi.$$

## Ответы

№ 1.  $y^2 = 4px$ .

№ 2.  $y^2 = 2p(x + p/2)$ .

№ 3.  $y^2 = -4a(x - a)$ .

№ 4.  $y^2 = 2(p + q)x$ .

№ 6.  $\frac{3}{2}\pi a$ .

$$\text{№ 7. } x \pm y = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad x \pm y = -\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{№ 8. } y = \pm \frac{S}{2x}.$$

$$\text{№ 9. } 8r \cdot \frac{n+1}{n}.$$

№ 10. Уравнение касательной:

$$x_0(x_0^2 + y_0^2 - a^2)(x - x_0) + y_0(x_0^2 + y_0^2 + a^2)(y - y_0) = 0.$$

Уравнение нормали:

$$y_0(x_0^2 + y_0^2 + a^2)(x - x_0) - x_0(x_0^2 + y_0^2 - a^2)(y - y_0) = 0.$$

№ 11. Уравнения дискриминанты:  $y = x$  и  $y = x - \frac{2}{9}$ . Прямая

$y = x - \frac{2}{9}$  — огибающая, прямая  $y = x$  состоит из особых точек семейства.

№ 13. Уравнение касательной:  $4x - 2y - a = 0$ .

Уравнение нормали:  $2x + 4y - 3a = 0$ .

$$\text{№ 14. Эллипс } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

№ 16. Уравнение дискриминанты, состоящей из особых точек семейства:  $y = 0$ .

$$\text{№ 17. } (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)x - (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)y - a\varphi^2 = 0.$$

$$\text{№ 21. Астроида } \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

$$\text{№ 23. } x^2 + y^2 = p^2.$$

$$\text{№ 24. } x = \frac{1}{2}y^2 + y + 1, \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}; \text{ касание второго порядка.}$$

$$\text{№ 25. } \arccos \frac{|\ln a|}{\sqrt{\ln^2 a + 1}}.$$

### 3. КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ

Гладкая кривая  $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется кривой единичной скорости, если  $|\dot{\alpha}(t)| = 1$  для любого  $t \in I$ .

**Теорема.** Любая гладкая регулярная кривая эквивалентна кривой единичной скорости.

Пусть  $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая регулярная кривая.

Длина  $s = l[\alpha] \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t |\dot{\alpha}(\tau)| d\tau$  кривой  $\alpha(t)$  от точки  $\alpha(t_0)$  до точки  $\alpha(t)$  называется натуральным параметром.

Кривая  $\beta(s) = \alpha(t(s))$ , где  $t = t(s)$  — функция, обратная к функции  $s = s(t)$ , называется *натуральной параметризацией кривой*  $\alpha(t)$ . Кривая  $\beta(s)$  является кривой единичной скорости, эквивалентной исходной кривой  $\alpha(t)$ .

Базис Френе плоской гладкой кривой  $\alpha(t)$  вычисляется следующим образом:

$$E_1(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|};$$

вектор  $E_2(t)$  получен поворотом вектора  $E_1(t)$  на угол, равный  $\frac{\pi}{2}$ .

Кривизна кривой  $\alpha(t)$  равна  $k(t) = \frac{\det[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)]}{|\dot{\alpha}(t)|^3}$ .

Для базиса Френе справедливы уравнения Френе:

$$\begin{cases} \dot{E}_1(t) = |\dot{\alpha}(t)| k(t) E_2(t), \\ \dot{E}_2(t) = -|\dot{\alpha}(t)| k(t) E_1(t). \end{cases}$$

Соприкасающейся окружностью к плоской бигулярной кривой  $\alpha(t)$  в точке  $\alpha(t_0)$  называется окружность с центром в центре кривизны  $\alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}E_2(t_0)$ , радиус которой равен радиусу кривизны  $R(t_0) = \frac{1}{|k(t_0)|}$  в точке  $\alpha(t_0)$ . Соприкасающаяся

окружность имеет с кривой касание не менее второго порядка. В точках, где кривизна экстремальна, соприкасающаяся окружность имеет с кривой касание не ниже третьего порядка.

Эволютой гладкой бигулярной кривой  $\alpha(t)$  называется множество ее центров кривизны. Кривая  $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}E_2(t)$  задает уравнение эволюты кривой  $\alpha(t)$ .

Эволюта – это гладкая бигулярная кривая. Она является огибающей нормалей к исходной кривой, а длина дуги эволюты равна модулю разности радиусов кривизны исходной кривой в соответствующих точках.

В точках, где кривизна кривой  $\alpha(t)$  принимает экстремальное значение, эволюта  $\beta(t)$  имеет особую точку – возврат первого рода.

Эвольвентой гладкой бигулярной кривой  $\beta(t)$  называется такая кривая  $\alpha(t)$ , что  $\beta(t)$  – эволюта для  $\alpha(t)$ . Если  $\beta(s)$  – бигулярная кривая единичной скорости, то уравнение  $\alpha_c(s) = \beta(s) + (c - s)E_1^\beta(s)$ , где  $c = \text{const}$ , задает семейство всех ее эвольвент.

Пусть  $k(s)$  – кривизна кривой единичной скорости  $\beta(s)$ . Тогда  $k(s) = \dot{\theta}(s)$ , где  $\theta(s)$  – угол наклона касательной к  $\beta(s)$  над осью  $Ox$ . Уравнения

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(\sigma) d\sigma + \theta_0,$$

$$\beta(s) = (x(s), y(s)) = \left( \int_{s_0}^s \cos \theta(\sigma) d\sigma + x_0, \int_{s_0}^s \sin \theta(\sigma) d\sigma + y_0 \right),$$

где  $\theta_0 = \theta(s_0)$ ,  $x_0 = x(s_0)$ ,  $y_0 = y(s_0)$ , называются *натуральными уравнениями кривой*  $\beta(s)$ . Натуральным уравнением кривой назы-

вается также зависимость (явная или неявная) кривизны  $k$  от натурального параметра  $s$ .

**Задача 3.** Доказать, что эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная данной.

**Решение.** Кривая  $\alpha(t) = {}^t(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$  задает циклоиду. Рассмотрим первую арку циклоиды ( $t \in (0, 2\pi)$ ). Кривая

$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} E_2(t)$  – эволюта для кривой  $\alpha(t)$ . Здесь

$k(t) = \frac{\det [\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)]}{|\dot{\alpha}(t)|^3}$  – кривизна кривой  $\alpha(t)$ , а  $(E_1(t), E_2(t))$  – базис Френе. Найдем  $\dot{\alpha}(t)$ ,  $\ddot{\alpha}(t)$ :  $\dot{\alpha}(t) = {}^t(a(1 - \cos t), a \sin t)$ ,  $\ddot{\alpha}(t) = {}^t(a \sin t, a \cos t)$ . Найдем также  $|\dot{\alpha}(t)|$  с учетом того, что  $t \in (0; 2\pi)$ :

$$|\dot{\alpha}(t)| = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| = 2a \sin \frac{t}{2}. \quad \text{Тогда } \det [\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)] =$$

$$= a^2 (\cos t - 1) = -2a^2 \sin^2 \frac{t}{2}. \quad \text{Следовательно, } k(t) = -\frac{1}{4a \sin \frac{t}{2}}.$$

Найдем  $E_1(t)$ :

$$E_1(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} = \frac{1}{2a \sin \frac{t}{2}} {}^t \left( 2a \sin^2 \frac{t}{2}, 2a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) = {}^t \left( \sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2} \right).$$

Следовательно,  $E_2(t) = {}^t \left( -\cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \right)$ . Тогда

$$\frac{1}{k(t)} E_2(t) = {}^t \left( 4a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}, -4a \sin^2 \frac{t}{2} \right) = {}^t (2a \sin t, 2a (\cos t - 1)).$$

Значит,  $\beta(t) = {}^t(x(t), y(t)) = {}^t(a(t + \sin t), a(\cos t - 1))$ . Сделаем параллельный перенос системы координат  $xOy$ :

$$\begin{cases} x = x' + \pi a, \\ y = y' - 2a. \end{cases}$$

В системе координат  $x'O'y'$  эволюта примет вид

$$\beta'(t) = '(x'(t), y'(t)) = '(a(t - \pi + \sin t), a(1 + \cos t)).$$

Сделав замену параметра  $\tau = t - \pi$ , получим

$$\beta'(\tau) = '(a(\tau - \sin \tau), a(1 - \cos \tau)).$$

А это и есть уравнение циклоиды, смещенной относительно исходной вправо на  $\pi a$  и вниз на  $2a$  (рис. 5), что и требовалось показать.

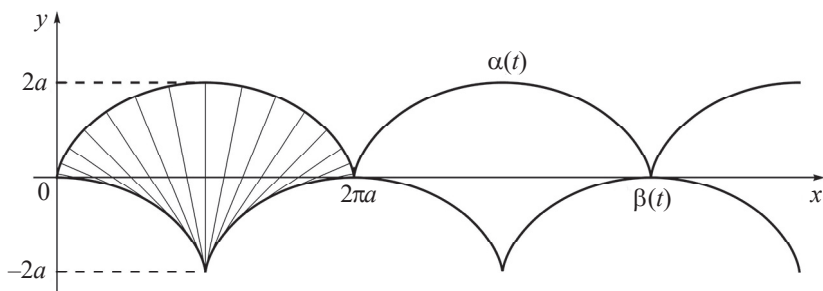


Рис. 5

## Задания

1. Найдите кривизну кривой  $y = \sin x$ . Где кривизна равна нулю, а где принимает максимальное по модулю значение?

2. Найдите кривизну кривой  $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ . В какой точке она принимает максимальное значение? Сделайте чертеж.

3. Найдите кривизну линии  $y^2 = 2px$ . В каких точках модуль кривизны принимает максимальное значение? Сделайте чертеж.

4. Составьте натуральные уравнения кардиоиды  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ .

Указание. Используйте тригонометрические формулы

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

и формулы для синуса (косинуса) суммы или разности. Найдите кривизну  $k = k(\varphi)$  и длину дуги  $s = s(\varphi)$ . Выразите  $k$  через  $s$  явно или неявно, исключая параметр  $\varphi$ .

5. Найдите кривизну эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b$ ). В каких точках она принимает максимальное и минимальное значения? Сделайте чертеж.

*Указание.* Примените параметризацию эллипса:

$$x = a \cos t, y = b \sin t.$$

6. Найдите кривизну правой ветви гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

В каких точках она принимает максимальное по модулю значение? Сделайте чертеж.

*Указание.* Примените параметризацию гиперболы:

$$x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t.$$

7. Найдите базис Френе и кривизну цепной линии  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ .

Ответ выразите через  $y$ . Сделайте чертеж.

8. Докажите формулу кривизны в полярных координатах

$$k(\varphi) = \frac{\rho^2 - \rho \ddot{\rho} + 2\dot{\rho}^2}{(\dot{\rho}^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ для кривой } \rho = \rho(\varphi).$$

*Указание.* Примените параметризацию кривой:

$$\alpha(\varphi) = (\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi).$$

9. Найдите кривизну кардиоиды  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$  ( $a > 0$ ). В каких точках она принимает минимальное по модулю значение? Сделайте чертеж.

*Указание.* Используйте формулу для кривизны в полярных координатах (см. задание 8).

10. Найдите кривизну спирали Архимеда  $\rho = a\varphi$  ( $a > 0$ ). Покажите, что функция  $k(\varphi)$  строго убывает с увеличением  $\varphi$  и при  $\varphi \rightarrow \infty$  кривизна стремится к 0. Сделайте чертеж.

*Указание.* Используйте формулу для кривизны в полярных координатах (см. задание 8).

11. Найдите координаты центра и радиус соприкасающейся окружности параболы  $y^2 = 2px$ . В какой точке параболы окружность имеет с ней касание третьего порядка?

*Указание.* Используйте то, что центр соприкасающейся окружности – это центр кривизны, а соприкасающаяся окружность имеет касание не ниже третьего порядка в точке, где кривизна экстремальна.

12. На удлиненной циклоиде  $\alpha(t) = (at - d \sin t, a - d \cos t)$  ( $d > a$ ) найдите точки, где модуль кривизны принимает экстремальное значение. Сделайте чертеж.

*Указание.* Пусть  $u = \cos t$ . Выразите модуль кривизны  $K(t) = |k(t)|$  через  $u = u(t)$  ( $K(t) = K(u(t))$ ). Тогда  $\dot{K}(t) = \dot{K}(u) \cdot \dot{u}(t)$ . Покажите, что  $\dot{K}(u) > 0$  для любого  $u \in [-1, 1]$ . Таким образом, точки экстремума функции  $K(t)$  – это точки экстремума функции  $u(t)$ .

13. Найдите радиус кривизны параболы  $y = \frac{x^2}{2p}$  и докажите, что он равен  $\frac{p}{\cos^3 \alpha}$ , где  $\alpha$  – угол наклона касательной к оси абсцисс.

*Указание.* Используйте то, что  $\tan \alpha = y'(x)$ .

14. Найдите эволюту эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b$ ). Сделайте чертеж.

*Указание.* Примените параметризацию эллипса:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

15. Составьте натуральные уравнения кривой  $y = x^{3/2}$ .

*Указание.* Найдите кривизну  $k(t)$  кривой  $\alpha(t) = (t, y(t))$ ; найдите длину  $s = s(t)$  дуги этой кривой и выразите  $k$  через  $s$ , исключив параметр  $t$ .

16. Составьте уравнение и начертите эволюту гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Указание.* Примените параметризацию гиперболы:

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t.$$

17. Найдите эволюту логарифмической спирали  $\rho = ce^{\phi}$  и покажите, что она является логарифмической спиралью, полученной из данной поворотом вокруг полюса на некоторый угол.

*Указание.* Используя параметризацию

$$\alpha(\varphi) = (\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi)$$

и формулу для кривизны в полярных координатах (см. задание 8), найдите эволюту  $\beta(\varphi)$  и покажите, что  $\beta(\varphi) = J\alpha(\varphi)$ , где  $J$  – матрица оператора поворота на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

18. Составьте уравнение и начертите эволюту кривой  $y = \ln x$ . Найдите особую точку эволюты – возврат первого рода.

*Указание.* Найдите точку  $t = t_0$  локального максимума модуля кривизны. При  $t = t_0$  эволюта имеет особую точку – возврат первого рода.

19. Найдите кривую  $\beta(s)$  единичной скорости, которая задается натуральным уравнением  $k = \frac{a}{a^2 + s^2}$ , если  $\beta(0) = (0, 0)$ . Докажите, что эта кривая – натуральная параметризация цепной линии  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ .

*Указание.* Найдите кривую  $\beta(s)$ , используя натуральные уравнения.

20. Найдите эволюту кардиоиды  $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ . Покажите, что она тоже является кардиоидой. Сделайте чертеж.

*Указание.* При нахождении кривизны используйте формулу в полярных координатах (см. задание 8). Докажите, что эволюта  $\beta(\varphi)$  получена из исходной кардиоиды  $\alpha(\varphi)$  сжатием в 3 раза, поворотом вокруг полюса на  $\pi$  и сдвигом вдоль полярной оси влево на  $(2/3)a$ .

21. Найдите соприкасающиеся окружности к гиперболе  $xy = 1$  в точках, где радиус кривизны достигает своего минимального значения. Сделайте чертеж.

*Указание.* Докажите, что радиус кривизны достигает своего минимального значения в точках  $M_1(1, 1)$ ,  $M_2(-1, -1)$ .

22. Найдите параболу  $y = ax^2 + bx + c$ , имеющую с синусоидой  $y = \sin x$  в точке  $A(\pi/2, 1)$  общую касательную и одинаковую кривизну. Сделайте чертеж.

23. Найдите параметризацию эволюты кривой  $y = \sin x$ . Сделайте чертеж. Найдите особые точки и асимптоты эволюты.

*Указание.* Используйте то, что эволюта  $\beta(x)$  кривой  $\alpha(x)$  имеет особую точку (возврат первого рода) при  $x = x_1$ , где кривизна  $k(x)$  кривой  $\alpha(x)$  экстремальна; и эволюта имеет асимптоту при  $x = x_2$ , если  $k(x_2) = 0$ .

24. Составьте параметризацию кривой, для которой радиус кривизны равен  $R(\theta) = a \cdot \theta$  ( $a > 0$ ), где  $\theta$  – угол наклона касательной к оси  $Ox$ , если известно, что при  $\theta = 0$  кривая проходит через точку  $p_0 = (a, 0)$ . Докажите, что кривая является эвольвентой окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ , выходящей из точки  $p_0$ . Сделайте чертеж.

*Указание.* Используя то, что  $R(s) = \frac{1}{k(s)}$  и  $k(s) = \dot{\theta}(s)$ , решите дифференциальное уравнение относительно  $\theta = \theta(s)$  с начальным условием  $\theta(0) = 0$ , где  $s$  – натуральный параметр. Затем найдите натуральную параметризацию  $\beta(s)$  искомой кривой, учитывая, что  $\theta(s)$  – угол, образованный вектором  $\dot{\beta}(s)$  и осью  $Ox$ . Найдите искомую кривую в виде  $\gamma(\theta) = \beta(s(\theta))$ , где  $s = s(\theta)$  – функция, обратная к функции  $\theta = \theta(s)$ .

25. Найдите кривизну астроида  $\alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ . В каких точках ее модуль принимает минимальное значение, при каких стремится к  $\infty$ ? Сделайте чертеж.

*Указание.* Используйте формулу для кривизны в полярных координатах (см. задание 8).

## Ответы

№ 1.  $k(x) = -\frac{\sin x}{\sqrt{(2 - \sin^2 x)^3}}$ ,  $k(x) = 0$  при  $x = \pi n$ ; значение  $|k(x)|$  максимально при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

№ 2. Кривизна  $k(x) = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}}$  максимальна при  $x = 0$ .

№ 3.  $k = -\frac{p^2}{\sqrt{(y^2 + p^2)^3}} = -\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{(p + 2x)^3}}$ , значение  $|k(x)|$  макси-

мально при  $x = 0$  ( $y = 0$ ).

№ 4.  $s^2 + 9R^2 = 16a^2$  ( $R = 1/k$ ).

№ 5. Кривизна  $k(t) = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}} = \frac{a^4 b^4}{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}$

максимальна в точках  $(\pm a, 0)$  и минимальна в точках  $(0, \pm b)$ .

№ 6. Кривизна  $k(t) = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^3}} = -\frac{a^4 b^4}{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}$ ,

значение  $|k(t)|$  максимально в точке  $(a, 0)$ .

№ 7.  $E_1 = \left( \frac{a}{y}, \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{y} \right)$ ,  $E_2 = \left( -\frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{y}, \frac{a}{y} \right)$ ,  $k = \frac{a}{y^2}$ .

№ 9. Кривизна  $k(\varphi) = \frac{3}{4a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|}$  минимальна при  $\varphi = 0$ .

№ 10.  $k(\varphi) = \frac{2 + \varphi^2}{a(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

№ 11.  $\left( p + \frac{3y_0^2}{2p}, -\frac{y_0^3}{p^2} \right)$  – координаты центра,  $\frac{(p^2 + y_0^2)^{3/2}}{p^2}$  – ради-

ус соприкасающейся окружности к параболе в точке  $M_0(x_0, y_0)$ . Со-прикасающаяся окружность имеет касание третьего порядка с параболой в начале координат.

№ 12.  $k(t) = d \cdot \frac{a \cos t - d}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos t)^{\frac{3}{2}}}$ , значение  $|k(t)|$  максималь-

но в точках  $(2\pi n, a - d)$ , т. е. при  $t = 2\pi n$ , и минимально в точках  $(\pi(2n + 1), a + d)$ , т. е. при  $t = \pi(2n + 1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{№ 13. } R = \frac{(x^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

$$\text{№ 14. } \beta(t) = \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right) - \text{астроида.}$$

$$\text{№ 15. } k(t) = \frac{6}{\sqrt{t}(9t+4)^{3/2}}, \quad s = \frac{(9t+4)^{3/2} - 8}{27},$$

$$k(s) = \frac{18}{(27s+8) \left( (27s+8)^{\frac{2}{3}} - 4 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\text{№ 16. } \beta(t) = \left( \frac{a^2 + b^2}{a} \operatorname{ch}^3 t, -\frac{a^2 + b^2}{b} \operatorname{sh}^3 t \right).$$

$$\text{№ 17. } \beta(\varphi) = ce^{\varphi \cdot t} (-\sin \varphi, \cos \varphi).$$

$$\text{№ 18. Эволюта } \beta(x) = \left( \frac{2x^2 + 1}{x}, \ln x - x^2 - 1 \right) \text{ имеет возврат}$$

первого рода при  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{№ 19. } \beta(s) = \left( a \ln \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a}, \sqrt{s^2 + a^2} \right).$$

$$\text{№ 20. } \beta(\varphi) = \frac{a}{3} (\cos^2 \varphi + \cos \varphi - 2, \sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi).$$

$$\text{№ 21. } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2, (x+2)^2 + (y+2)^2 = 2.$$

$$\text{№ 22. } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{2}x + 1 - \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\text{№ 23. } \beta(x) = \left( x + \cos x \cdot \frac{1 + \cos^2 x}{\sin x}, -\frac{2 \cos^2 x}{\sin x} \right).$$

$$\text{№ 24. } \beta(\theta) = a (\theta \sin \theta + \cos \theta, \sin \theta - \theta \cos \theta).$$

№ 25.  $k(t) = -\frac{2}{3a} \frac{1}{|\sin 2t|}$ , значение  $|k(t)|$  минимально при

$$t \in \left\{ \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4} \right\}, \quad |k(t)| \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}, \quad t \rightarrow \pi.$$

## 4. КРИВЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Базис Френе  $(E_1(t), E_2(t), E_3(t))$  бирегулярной кривой  $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^3$  вычисляется следующим образом:

$$E_1(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|}, \quad E_3(t) = \frac{\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)|}, \quad E_2(t) = E_3(t) \times E_1(t).$$

Кривизна  $k_1(t)$  и кручение  $k_2(t)$  вычисляются по формулам

$$k_1(t) = \frac{|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)|}{|\dot{\alpha}(t)|^3}, \quad k_2(t) = \frac{(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t))}{|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)|^2}.$$

Для базиса Френе справедливы уравнения Френе:

$$\begin{cases} \dot{E}_1(t) = |\dot{\alpha}(t)| k_1(t) E_2(t), \\ \dot{E}_2(t) = |\dot{\alpha}(t)| (-k_1(t) E_1(t) + k_2(t) E_3(t)), \\ \dot{E}_3(t) = -|\dot{\alpha}(t)| k_2(t) E_2(t). \end{cases}$$

Векторы  $E_1(t)$ ,  $E_2(t)$ ,  $E_3(t)$  являются направляющими векторами для касательной, нормали и бинормали к кривой в точке  $\alpha(t)$  соответственно, а также нормальными векторами для нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскостей к кривой в этой же точке соответственно.

**Задача 4.** Составьте уравнение нормали и соприкасающейся плоскости винтовой линии  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ . Докажите, что нормаль пересекает ось винтовой линии под прямым углом, а бинормаль образует с ней постоянный угол. Найдите кривизну и кручение винтовой линии. При каких значениях  $a$  и  $b$  кривизна и кручение равны? При каком значении  $b$  при фиксированном  $a$  кручение принимает максимальное значение?

**Решение.** Найдем сначала первые три производные кривой  $\alpha(t)$ :

$$\dot{\alpha}(t) = '(-a \sin t, a \cos t, b),$$

$$\ddot{\alpha}(t) = '(-a \cos t, -a \sin t, 0),$$

$$\ddot{\alpha}(t) = '(a \sin t, -a \cos t, 0).$$

Тогда  $\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = a(b \sin t, -b \cos t, a)$  и

$$(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = (\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = a^2 b, \quad |\dot{\alpha}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}| = a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Теперь можно найти векторы базиса Френе, а также кривизну и кручение:

$$E_1 = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a \sin t, a \cos t, b),$$

$$E_3 = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b \sin t, -b \cos t, a),$$

$$E_2 = E_3 \times E_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b \sin t & -b \cos t & a \\ -a \sin t & a \cos t & b \end{vmatrix} = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

$$k_1 = \frac{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$k_2(t) = \frac{(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t))}{|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)|^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Нормаль к кривой в точке  $\alpha(t)$  направляет вектор  $E_2(t)$ , следовательно  $\frac{x - a \cos t}{-\cos t} = \frac{y - a \sin t}{-\sin t} = \frac{z - bt}{0}$  – каноническое уравнение

нормали. Очевидно, точка  $(0, 0, bt)$ , принадлежащая оси  $Oz$ , лежит на нормали. Кроме того, вектор  $E_2(t)$  параллелен плоскости  $xOy$ . Значит, действительно, нормаль пересекает ось  $Oz$  под прямым углом.

Бинормаль направляет вектор  $E_3(t)$ . Обозначим через  $\varphi$  угол между векторами  $E_3(t)$  и  $e_3$ . Поскольку

$$\langle E_3(t), e_3 \rangle = \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{const},$$

бинормаль образует с осью  $Oz$  постоянный угол. Соприкасающаяся плоскость в точке  $\alpha(t)$  имеет в качестве нормального вектора вектор  $E_3(t)$ . Поэтому мы можем записать уравнение этой плоскости в общем виде:

$$b \sin t (x - a \cos t) - b \cos t (y - a \sin t) + a (z - bt) = 0,$$

или

$$b \sin t \cdot x - b \cos t \cdot y + a \cdot z - abt = 0.$$

Очевидно,  $k_1(t) = k_2(t)$  тогда и только тогда, когда  $a = b$ . Най-

дем  $\frac{dk_2}{db} = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$ . Следовательно,  $\frac{dk_2}{db} = 0$  при  $b = a$ ,  $\frac{dk_2}{db} > 0$

при  $b < a$ ,  $\frac{dk_2}{db} < 0$  при  $b > a$ . Значит, при  $b = a$  кручение принимает максимальное значение.

**Ответ.**  $\frac{x - a \cos t}{-\cos t} = \frac{y - a \sin t}{-\sin t} = \frac{z - bt}{0}$  – уравнение нормали,

$b \sin t \cdot x - b \cos t \cdot y + a \cdot z - abt = 0$  – уравнение соприкасающейся

плоскости;  $k_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}$  – кривизна,  $k_2(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}$  – кручение;

$k_1(t) = k_2(t)$  тогда и только тогда, когда  $a = b$ ; кручение максимально при  $b = a$ .

## Задания

1. Докажите, что для кривой единичной скорости справедливо

$$\text{тождество } (\dot{E}_3, \ddot{E}_3, \ddot{\ddot{E}}_3) = k_2^5 \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\bullet}.$$

2. Покажите, что коническая спираль

$$\alpha(\varphi) = {}'(a \cdot e^{\varphi} \cos \varphi, a \cdot e^{\varphi} \sin \varphi, a e^{\varphi})$$

лежит на конусе  $x^2 + y^2 = z^2$ . Найдите ее радиус кривизны и докажите, что он пропорционален расстоянию от точки спирали до оси конуса.

*Указание.* Радиус кривизны  $R(\varphi) = \frac{1}{k_1(\varphi)}$  должен быть равен значению  $b\rho(\varphi)$  для любого  $\varphi$ , где  $\rho(\varphi) = \sqrt{x^2(\varphi) + y^2(\varphi)}$ ,  $b = \text{const}$ .

3. Докажите, что для кривой  $\alpha(t) = {}'(a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at)$  кривизна и кручение равны.

4. Найдите уравнения соприкасающихся плоскостей кривой  $\alpha(t) = {}'(t, t^2, t^3)$ , проходящих через данную точку  $M_0(2, -1/3, -6)$ .

5. На бинормальных винтовой линии отложены отрезки равной длины. Докажите, что концы этих отрезков лежат на другой винтовой линии.

*Указание.* Если  $\alpha(t) = {}'(a \cos t, a \sin t, bt)$  – исходная винтовая линия, то  $\beta(t) = \alpha(t) + cE_3(t)$  – кривая, задающая полученную линию. Докажите, что  $\beta(t)$  – винтовая линия.

6. Докажите, что для кривой  $\alpha(t) = {}'(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$  кривизна и кручение равны.

7. Докажите, что для кривой единичной скорости выполняется тождество  $(\dot{E}_1, \ddot{E}_1, \ddot{\ddot{E}}_1) = k_1^5 \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{\bullet}$ .

8. Найдите кривизну и кручение линии  $\alpha(t) = {}'(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ .

*Указание.* Перейдите к гиперболическим функциям  $\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t$  либо используйте тождество  $(e^t + e^{-t})^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2$ .

9. На нормалях винтовой линии  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  отложены отрезки равной длины  $c$ ,  $c \neq a$ . Докажите, что концы этих отрезков лежат на другой винтовой линии.

*Указание.* Докажите, что кривая  $\beta(t) = \alpha(t) + cE_2(t)$ , задающая полученную линию, является винтовой линией.

10. Найдите кривизну и кручение линии

$$\alpha(t) = \left( ct, \sqrt{2}c \ln t, \frac{c}{t} \right), \quad c > 0.$$

11. Найдите значения  $a$  и  $b$ , при которых кривизна кривой  $\alpha(t) = (a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, bt)$  во всех точках равна кручению данной кривой.

*Указание.* Найдите кривизну  $k_1(t)$  и кручение  $k_2(t)$  кривой  $\alpha(t)$  и используйте тождество  $k_1(t) = k_2(t)$ .

12. Покажите, что прямая, проведенная из произвольной точки кривой  $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$  параллельно плоскости  $z = 0$  до встречи с осью  $Oz$ , лежит в соприкасающейся плоскости кривой в этой точке.

13. При каком условии центр кривизны винтовой линии лежит на том же цилиндре, что и сама винтовая линия?

*Указание.* Покажите, что множество центров кривизны винтовой линии является тоже винтовой линией, и найдите параметризацию последней.

14. Напишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к линии пересечения двух цилиндров  $x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$  в произвольной точке  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  ( $y_0 \neq 1$ ).

*Указание.* Используйте то, что векторы  $\overrightarrow{\operatorname{grad} F} \Big|_{p_0}, \overrightarrow{\operatorname{grad} \Phi} \Big|_{p_0}$  перпендикулярны касательным плоскостям к поверхностям, заданным неявно уравнениями  $F(x, y, z) = 0, \Phi(x, y, z) = 0$  соответственно, а значит, эти векторы перпендикулярны касательной к линии пересечения этих поверхностей.

15. Покажите, что все нормальные плоскости кривой  $\alpha(t) = (a \sin^2 t, a \sin t \cdot \cos t, a \cos t)$  проходят через начало координат.

16. Составьте уравнение касательной прямой и нормальной плоскости линии, заданной пересечением двух поверхностей  $F(x, y, z) = 0, \Phi(x, y, z) = 0$  в точке  $p_0(x_0, y_0, z_0)$  ( $F(p_0) = \Phi(p_0)$ ), если известно, что в точке  $p_0$  эти поверхности не касаются.

*Указание.* Используйте то, что векторы  $\overrightarrow{\operatorname{grad} F} \Big|_{p_0}, \overrightarrow{\operatorname{grad} \Phi} \Big|_{p_0}$  перпендикулярны касательным плоскостям к поверхностям, заданным

неявно уравнениями  $F(x, y, z) = 0$ ,  $\Phi(x, y, z) = 0$  соответственно, а значит, эти векторы перпендикулярны касательной к линии пересечения этих поверхностей.

17. Найдите длину дуги линии  $x^3 = 3a^2y$ ,  $2xz = a^2$  между плоскостями  $y = \frac{a}{3}$ ,  $y = 9a$ .

*Указание.* Выразите  $y$  и  $z$  через  $x$  и рассмотрите кривую  $\alpha(x) = {}^t(x, y(x), z(x))$ .

18. Докажите, что линия  $\alpha(t) = {}^t(e^{t/\sqrt{2}} \cos t, e^{t/\sqrt{2}} \sin t, e^{t/\sqrt{2}})$  лежит на конусе  $x^2 + y^2 = z^2$  и пересекает его образующие под углом  $45^\circ$ .

*Указание.* Найдите параметризацию прямолинейной образующей  $\beta(\theta)$  конуса с данным направляющим вектором  $\vec{a}(\varphi)$ , полученным поворотом на угол  $\varphi$  вокруг оси  $Oz$  вектора  $\vec{a}_0$ ,  $|\vec{a}_0| = 1$ , направляющего прямолинейную образующую конуса в плоскости  $xOz$ . Затем найдите значения  $t$  и  $\theta$  такие, что точка  $\alpha(t) = \beta(\theta)$  является точкой пересечения прямолинейной образующей и кривой. Найдите косинус угла между векторами  $\dot{\alpha}(t)$  и  $\vec{a}(\varphi)$ .

19. Дана кривая  $\alpha(t) = {}^t(t, t^2, t^3)$ . Напишите уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в произвольной точке. Какая линия получается в пересечении касательных к кривой  $\alpha(t)$  с плоскостью  $xOy$ ?

20. Найдите такую функцию  $f(t)$ , чтобы кривая

$$\alpha(t) = {}^t(a \cos t, a \sin t, f(t))$$

была плоской.

*Указание.* Используйте то, что кривая является плоской тогда и только тогда, когда справедливо тождество  $(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)) = 0$ .

21. Найдите репер Френе в произвольной точке для кривой  $\alpha(t) = {}^t(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$  ( $\sin 2t > 0$ ).

*Указание.* Во всех формулах используйте выражения через  $\sin t$ ,  $\cos t$ .

22. На бинормальных кривой  $\alpha(t) = {}^t(\cos \varphi \cdot \cos t, \cos \varphi \cdot \sin t, t \sin \varphi)$ ,  $\varphi = \text{const}$ ,  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$  в положительном направлении отложены отрезки постоянной длины, равной единице. Напишите уравнение

соприкасающейся плоскости кривой  $\beta(t)$ , состоящей из концов этих отрезков.

*Указание.* Ищите кривую в виде  $\beta(t) = \alpha(t) + E_3(t)$ . Используйте при этом формулы синуса (косинуса) разности.

23. Покажите, что замкнутая кривая  $\alpha(t) = {}^t(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$  имеет длину  $s = 10$ .

*Указание.* Найдите период этой кривой.

24. Найдите точки на кривой  $\alpha(t) = {}^t\left(\frac{2}{t}, \ln t, -t^2\right)$ ,  $t > 0$ , в которых бинормаль параллельна плоскости  $x - y + 8z + 2 = 0$ .

25. От каждой точки кривой

$$\alpha(t) = {}^t\left(a(t - \sin t), a(1 - \cos t), 4a \sin \frac{t}{2}\right)$$

на главной ее нормали в направлении вектора  $E_2(t)$  отложен отрезок

длины  $a\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}$ . Докажите, что линия, составленная из концов

этих отрезков, есть синусоида, лежащая в плоскости  $y = a$ . Напишите уравнение этой синусоиды.

*Указание.* Для нахождения вектора  $E_2(t)$  найдите натуральную параметризацию  $\beta(s)$  кривой  $\alpha(t)$ , затем найдите вектор  $E_2(s) = \frac{\ddot{\beta}(s)}{|\ddot{\beta}(s)|}$ .

Тогда  $E_2(t) = E_2(s(t))$ . Кривая  $\gamma(t) = \alpha(t) + a\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} \cdot E_2(t)$  – искомая.

## Ответы

№ 2.  $R(\varphi) = \frac{3\sqrt{2}}{2}ae^{\varphi}$ .

№ 4.  $3x + 3y + z + 1 = 0$  ( $t_1 = -1$ ),  $3x - 3y + z - 1 = 0$  ( $t_2 = 1$ ),  $108x - 18y + z - 216 = 0$  ( $t_3 = 6$ ).

№ 8.  $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{4\operatorname{ch}^2 t}$ ,  $k_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4\operatorname{ch}^2 t}$ .

$$\text{№ 10. } k_1 = k_2 = \frac{\sqrt{2} t^2}{c(1+t^2)^2}.$$

$$\text{№ 11. При } a = b.$$

$$\text{№ 13. При } a = b.$$

$$\text{№ 14. Уравнение касательной: } \frac{x-x_0}{y_0 z_0} = \frac{y-y_0}{-x_0 z_0} = \frac{z-z_0}{x_0 y_0}.$$

$$\text{Уравнение нормальной плоскости: } \frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1.$$

$$\text{№ 16. Уравнение касательной: } \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}}.$$

$$\text{Уравнение нормальной плоскости: } \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{№ 17. } 9a.$$

$$\text{№ 19. Парабола } y = \frac{3}{4}x^2.$$

$$\text{№ 20. } f(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3.$$

$$\text{№ 21. } E_1 = {}^t \left( -\frac{3}{5} \cos t, \frac{3}{5} \sin t, -\frac{4}{5} \right), \quad E_2 = {}^t (\sin t, \cos t, 0),$$

$$E_3 = {}^t \left( \frac{4}{5} \cos t, -\frac{4}{5} \sin t, -\frac{3}{5} \right).$$

$$\text{№ 22. } x \sin \varphi \sin(t - \varphi) - y \sin \varphi \cos(t - \varphi) + z - t \sin \varphi - \cos \varphi = 0.$$

$$\text{№ 24. } M(1, \ln 2, -4), t = 2.$$

$$\text{№ 25. } y = a, \quad z = 3a \sin \frac{x}{2a}.$$

## 5. ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  – гладкое отображение,  $U$  – открытое связное множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f(u) = {}^t(f_1(u), \dots, f_m(u))$ ,  $f_i(u): U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = {}^t(u^1, \dots, u^n)$ .

Дифференциалом отображения  $f$  в точке  $p \in U$  называется такое линейное отображение  $d_p f: \overrightarrow{\mathbb{R}}^n \rightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^m$ , что  $d_p f(v) = f'(p)v$  для любого  $v \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^n$ . Здесь  $f'(p) = [f_{u^1}, \dots, f_{u^n}]$  – матрица Якоби отображения  $f$  в точке  $p$ ,  $f_{u^i} = {}^t(f_{1u^i}, \dots, f_{mu^i})$  – частная производная  $f$  по  $u^i$ .

Отображение  $f$  называется *поверхностью*, если  $\text{rang } f'(p) = n$ , или, что то же самое, частные производные  $f_{u^1}, \dots, f_{u^n}$  линейно независимы.

Кривая  $\gamma(u^i) = f(u_0^1, \dots, u_0^{i-1}, u^i, u_0^{i+1}, \dots, u_0^n)$ ,  $u^i \in I \subseteq \mathbb{R}$  называется  $u^i$ -*линией* поверхности  $f$  в точке  $p = {}^t(u_0^1, \dots, u_0^n)$ . Частная производная  $f_{u^i}$  является касательным вектором к  $u^i$ -линии в точке  $p$ .

Касательное пространство  $T_p f$  к поверхности  $f$  в точке  $p \in U$  – это множество всех касательных векторов  $\dot{\beta}(t)$  кривых  $\beta(t) = f(\alpha(t))$  для гладких кривых  $\alpha: I \rightarrow U$ , проходящих через точку  $p \in U$ .

Касательное пространство  $T_p f$  является подпространством аффинного пространства  $\mathbb{R}^m$ , а частные производные  $f_{u^1}, \dots, f_{u^n}$  являются базисом соответствующего ему линейного подпространства. Этот базис называется *стандартным базисом* касательного пространства  $T_p f$ . Касательный вектор  $\dot{\beta}$  является образом касательного вектора  $\dot{\alpha}$  при действии дифференциала  $d_p f$ . Кроме того, координаты  $\left[ \dot{\beta} \right]_{f_u}$  касательного вектора  $\dot{\beta}$  в стандартном базисе

$f_u = (f_{u^1}, \dots, f_{u^n})$  касательного пространства совпадают с координатами  $[\dot{\alpha}]_e$  касательного вектора  $\dot{\alpha}$  в стандартном базисе  $e = (e_1, \dots, e_n)$  пространства  $\overline{\mathbb{R}}^n$ .

Первой фундаментальной формой поверхности  $f$  в точке  $p$  называется билинейная форма, определяемая равенством  $\mathbf{I}_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{\overline{\mathbb{R}}^m}$  для касательных векторов  $X, Y \in T_p f$ .

Пусть  $\alpha(t): I \rightarrow U$ ,  $\delta(\tau): J \rightarrow U$  — гладкие кривые, проходящие через точку  $p \in U$ , и  $\beta = f \circ \alpha$ ,  $\gamma = f \circ \delta$ ,  $X = d\beta = \dot{\beta}dt$ ,  $Y = d\gamma = \dot{\gamma}d\tau$ ,  $\alpha(t) = (u^1(t), \dots, u^n(t))$ ,  $\delta(\tau) = (v^1(\tau), \dots, v^n(\tau))$ . Тогда

$$[X]_{f_u} = [d\beta]_{f_u} = [d\alpha]_e = {}^t(du^1, \dots, du^n),$$

$$[Y]_{f_u} = [d\gamma]_{f_u} = [d\delta]_e = {}^t(dv^1, \dots, dv^n).$$

Обозначим через  $[\mathbf{I}_p] = (g_{ij})$ , где  $g_{ij} = \langle f_{u^i}, f_{u^j} \rangle$ , матрицу первой фундаментальной формы. Получим явное представление первой фундаментальной формы

$$\mathbf{I}_p(X, Y) = {}^t[X][\mathbf{I}_p][Y] = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} du^i dv^j.$$

Первой квадратичной формой поверхности  $f$  в точке  $p$  называется квадратичная форма

$$\mathbf{I}_p(X, X) = {}^t[X][\mathbf{I}_p][X] = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} du^i du^j.$$

Длина кривой  $\beta$  на поверхности  $f$  равна

$$l[\beta] = \int_I \sqrt{\mathbf{I}_p(X, X)} = \int_I \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} du^i du^j}.$$

Угол  $\varphi$  между кривыми  $\beta$  и  $\gamma$  на поверхности  $f$  в их точке пересечения вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\mathbf{I}_p(d\beta, d\gamma)}{\sqrt{\mathbf{I}_p(d\beta, d\beta)}\sqrt{\mathbf{I}_p(d\gamma, d\gamma)}} = \frac{\mathbf{I}_p(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{I}_p(X, X)}\sqrt{\mathbf{I}_p(Y, Y)}} = \\ &= \frac{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} du^i dv^j}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} du^i du^j} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dv^i dv^j}}.\end{aligned}$$

Две кривые на поверхности называются *ортогональными*, если угол между ними в точке их пересечения прямой.

Объем (площадь для  $n = 2$ ) области  $f(U)$  поверхности равен:

$$\text{vol } f(U) = \int_U \sqrt{g(p)} du^1 du^2 \dots du^n,$$

где  $g(p) = \det(g_{ij}(p))$ .

*Поверхностью вращения* называется поверхность  $f$ , полученная вращением кривой  $\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))$ , где  $x(u) \neq 0$ , вокруг оси  $Oz$ . Ее параметризация  $f(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u))$ ;  $u$ -линии,  $v$ -линии поверхности вращения называются, соответственно, *меридианами* и *параллелями* поверхности  $f$ .

*Локсодромой* на поверхности вращения называется линия, которая пересекает все меридианы под постоянным углом.

**Задача 5.** На прямом геликоиде  $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$  (рис. 6) найти  $u$ -линии,  $v$ -линии; стандартный базис касательного пространства  $T_p f$  и уравнение касательной плоскости; матрицу первой фундаментальной формы и саму первую фундаментальную форму; периметр и сумму углов криволинейного треугольника, образованного кривыми  $u = \frac{av^2}{2}$ ,  $u = 0$ ,  $v = 1$ , на поверхности.

**Решение.** Прямолинейная образующая  $\alpha(u) = (u \cos v_0, u \sin v_0, av_0)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , пересекающая ось  $Oz$  под прямым углом в точке  $(0, 0, av_0)$  с направляющим вектором  $\vec{s} = (\cos v_0, \sin v_0, 0)$ , является  $u$ -линией поверхности; винтовая линия  $\beta(v) = (u_0 \cos v, u_0 \sin v, av)$  является  $v$ -линией поверхности (см. рис. 6).

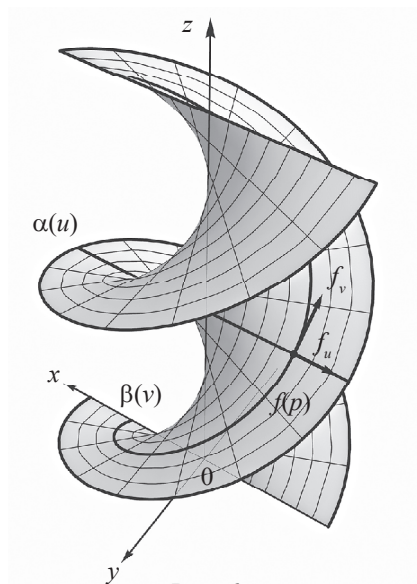


Рис. 6

Векторы  $f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$ ,  $f_v = {}^t(-u \sin v, u \cos v, a)$  образуют стандартный базис касательного пространства  $T_p f$ . Найдём вектор

$$n = f_u \times f_v = {}^t(a \sin v, -a \cos v, u),$$

вектор нормали касательной плоскости. Мы видим, что  $\vec{n} \neq \vec{0}$ , т. е. векторы  $f_u$  и  $f_v$  не коллинеарны для любых  $u, v \in \mathbb{R}$ , значит, отображение  $f(u, v)$  действительно является поверхностью. Касательная плоскость  $T_p f$  проходит через точку  $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$ , следовательно, ее уравнение

$$a \sin v(x - u \cos v) + (-a \cos v)(y - u \sin v) + u(z - av) = 0.$$

После преобразований получим  $ax \sin v - ay \cos v + zu - auv = 0$ .

Найдём коэффициенты матрицы  $[I_p]$  первой фундаментальной формы:

$$g_{11} = \langle f_u, f_u \rangle = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v \rangle = \langle f_v, f_u \rangle = 0,$$

$$g_{22} = \langle f_v, f_v \rangle = u^2 + a^2.$$

Таким образом,

$$[\mathbf{I}_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_p(X, Y) = du_1 du_2 + (u^2 + a^2) dv_1 dv_2,$$

где  $[X]_{f_u} = {}^t(du_1, dv_1)$ ,  $[Y]_{f_v} = {}^t(du_2, dv_2)$ .

Пусть  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  – стороны заданного криволинейного треугольника на геликоиде, а кривые  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – их прообразы в области определения поверхности ( $\beta_i = f \circ \alpha_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) (рис. 7).

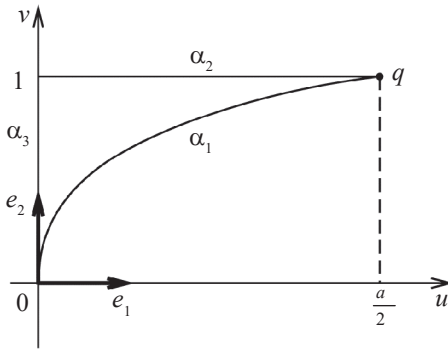


Рис. 7

Параметризуем эти кривые:

$$\alpha_1(t) = (u_1(t), v_1(t)) = \left( \frac{at^2}{2}, t \right), \quad t \in [0, 1],$$

$$\alpha_2(\tau) = (u_2(\tau), v_2(\tau)) = {}^t(\tau, 1), \quad \tau \in \left[ 0, \frac{a}{2} \right],$$

$$\alpha_3(\theta) = (u_3(\theta), v_3(\theta)) = {}^t(0, \theta), \quad \theta \in [0, 1].$$

Тогда

$$[d\alpha_1]_{e_1, e_2} = [d\beta_1]_{f_u, f_v} = {}^t(du_1, dv_1) = {}^t(at dt, dt),$$

$$[d\alpha_2]_{e_1, e_2} = [d\beta_2]_{f_u, f_v} = {}^t(du_2, dv_2) = {}^t(d\tau, 0),$$

$$[d\alpha_3]_{e_1, e_2} = [d\beta_3]_{f_u, f_v} = {}^t(du_3, dv_3) = {}^t(0, d\theta).$$

Найдем длину кривой  $\beta_1$ :

$$\begin{aligned}
 l[\beta_1] &= \int_0^1 \sqrt{I_p(d\beta_1, d\beta_1)} = \int_0^1 \sqrt{g_{11}(p) du_1^2 + 2g_{12}(p) du_1 dv_1 + g_{22}(p) dv_1^2} = \\
 &= \int_0^1 \sqrt{(at dt)^2 + (u_1(t)^2 + a^2) dt^2} = \int_0^1 \sqrt{(at dt)^2 + \left(\frac{a^2 t^4}{4} + a^2\right) dt^2} = \\
 &= a \int_0^1 \sqrt{\frac{t^4}{4} + t^2 + 1} dt = a \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^2} dt = a \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} + 1\right) dt = \frac{7}{6} a.
 \end{aligned}$$

Найдем длину кривой  $\beta_2$ :

$$\begin{aligned}
 l[\beta_2] &= \int_0^1 \sqrt{I_p(d\beta_2, d\beta_2)} = \int_0^{a/2} \sqrt{g_{11}(p) du_2^2 + 2g_{12}(p) du_2 dv_2 + g_{22}(p) dv_2^2} = \\
 &= \int_0^{a/2} \sqrt{d\tau^2} = \int_0^{a/2} d\tau = \frac{a}{2}.
 \end{aligned}$$

Как мы видим, длины кривых  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  совпадают. Это следствие того, что образ кривой  $\beta_2$  на поверхности – это отрезок  $u$ -линии, которая является прямолинейной образующей геликоида.

Наконец, найдем длину кривой  $\beta_3$ :

$$\begin{aligned}
 l[\beta_3] &= \int_0^1 \sqrt{I_p(d\beta_3, d\beta_3)} = \int_0^1 \sqrt{g_{11}(p) du_3^2 + 2g_{12}(p) du_3 dv_3 + g_{22}(p) dv_3^2} = \\
 &= \int_0^1 \sqrt{(u_3(\theta)^2 + a^2) d\theta^2} = \int_0^1 \sqrt{a^2 d\theta^2} = \int_0^1 a d\theta = a.
 \end{aligned}$$

Таким образом, периметр заданного треугольника равен  $\frac{8}{3} a$ .

Найдем угол  $\varphi$  между кривыми  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . По определению он равен углу между касательными векторами  $d\beta_1$  и  $d\beta_2$  в точке их пересечения  $f(q)$ , где  $q$  – точка пересечения кривых  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Очевидно,  $\alpha_1(t) = \alpha_2(\tau)$  при  $t=1$ ,  $\tau = \frac{a}{2}$ , т. е.  $q = \left(\frac{a}{2}, 1\right)$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &= \frac{I_q(d\beta_1, d\beta_2)}{\sqrt{I_q(d\beta_1, d\beta_1)} \sqrt{I_q(d\beta_2, d\beta_2)}} = \\
 &= \frac{g_{11}(q) du_1 du_2 + 2g_{12}(q)(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + g_{22}(q) dv_1 dv_2}{\sqrt{g_{11}(q) du_1^2 + 2g_{12}(q) du_1 dv_1 + g_{22}(q) dv_1^2}} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{g_{11}(q) du_2^2 + 2g_{12}(q) du_2 dv_2 + g_{22}(q) dv_2^2}} = \\
 &= \frac{at \cdot dt \cdot d\tau}{\sqrt{(at dt)^2 + \left(\frac{a^2 t^4}{4} + a^2\right) dt^2} \sqrt{d\tau^2}} \bigg|_{\substack{t=1, \\ \tau=\frac{a}{2}}} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,  $\varphi = \arccos \frac{2}{3}$ .

Угол  $\psi$  между кривыми  $\beta_2$  и  $\beta_3$  равен углу между векторами  $d\beta_2$  и  $d\beta_3$  или, что то же самое, углу между векторами  $\dot{\beta}_2$  и  $\dot{\beta}_3$  в точке пересечения кривых  $\beta_2$  и  $\beta_3$ . Заметим, что  $\dot{\beta}_2$  и  $\dot{\beta}_3$  — это касательные вектора к  $u$ -линии и  $v$ -линии соответственно. Следовательно,  $\dot{\beta}_2 = f_u$ ,  $\dot{\beta}_3 = f_v$ . Но  $\langle f_u, f_v \rangle = g_{12} = 0$  в любой точке поверхности, значит, угол  $\psi$  прямой.

Наконец, угол  $\mu$  между кривыми  $\beta_1$  и  $\beta_3$  равен нулю. Действительно,  $\dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_3(0) = e_2$  и  $\dot{\beta}_1(0) = d_o f(\dot{\alpha}_1(0))$ ,  $\dot{\beta}_3(0) = d_o f(\dot{\alpha}_3(0))$ . Следовательно,  $\dot{\beta}_1(0) = \dot{\beta}_3(0)$ . Поскольку  $\mu$  — это угол между векторами  $\dot{\beta}_1(0)$  и  $\dot{\beta}_3(0)$ , то  $\mu = 0$ .

Таким образом, сумма углов заданного криволинейного треугольника равна  $\varphi + \psi + \mu = \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{2}{3}$ .

**Ответ.** Прямолинейная образующая является  $u$ -линией, винтовая линия является  $v$ -линией.

Стандартный базис касательного пространства:

$$f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0) \quad f_v = {}^t(-u \sin v, u \cos v, 0);$$

уравнение касательной плоскости:

$$ax \sin v - ay \cos v + zu - auv = 0.$$

Матрица первой фундаментальной формы:  $[\mathbf{I}_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix};$

первая фундаментальная форма:

$$\mathbf{I}_p(X, Y) = du_1 du_2 + (u^2 + a^2) dv_1 dv_2,$$

где  $X = {}^t(du_1, dv_1), Y = {}^t(du_2, dv_2);$

периметр треугольника равен  $\frac{8}{3}a$  ;

сумма углов треугольника равна  $\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{2}{3}$  .

## Задания

1. На поверхности с первой квадратичной формой  $\mathbf{I}_p(X, X) = du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2$ , где  $X = {}^t(du, dv)$ , найдите длину дуги кривой, заданной линией  $u = v$ , между точками  $M_1(u_1, v_1)$  и  $M_2(u_2, v_2)$ .

2. Найдите угол между кривыми, заданными линиями  $v = 2u$ ,  $v = -2u$ , на поверхности, имеющей первую квадратичную форму  $\mathbf{I}_p(X, X) = du^2 + dv^2$ , где  $X = {}^t(du, dv)$ .

3. Найдите угол между кривыми, заданными линиями  $v = u + 1$  и  $v = 3 - u$ , на поверхности  $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, u^2)$ .

4. Найдите уравнения локсодром на произвольной поверхности вращения.

5. Покажите, что площади областей на параболоидах  $z = a \frac{x^2 + y^2}{2}$ ,  $z = axu$ , проектирующиеся на одну и ту же область плоскости  $xOy$ , равны.

*Указание.* Докажите, что для этих поверхностей равны определители матриц первой фундаментальной формы.

6. На поверхности  $f(u, v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv)$  ( $u^2 + v^2 \neq 0$ ) вычислите длину дуги кривой, заданной линией  $v = au$ , между точками ее пересечения с  $v$ -линиями  $u = 1$ ,  $u = 2$ .

7. Поверхность  $f$  является частью фигуры, образованной касательными к кривой единичной скорости  $\beta(s)$ , где  $s$  – натуральный параметр. Найдите матрицу первой фундаментальной формы поверхности  $f$ .

*Указание.* Примените параметризацию  $f(s, v) = \beta(s) + vE_1(s)$ , где  $E_1(s)$  – направляющий вектор касательной, т. е. первый вектор базиса Френе кривой  $\beta(s)$ .

8. Поверхность  $f$  является частью фигуры, образованной главными нормальными к кривой единичной скорости  $\beta(s)$ , где  $s$  – натуральный параметр. Найдите матрицу первой фундаментальной формы поверхности  $f$ .

*Указание.* Примените параметризацию  $f(s, v) = \beta(s) + vE_2(s)$ , где  $E_2(s)$  – направляющий вектор главной нормали, т. е. второй вектор базиса Френе кривой  $\beta(s)$ .

9. Поверхность  $f$  является частью фигуры, образованной бинормальными к кривой единичной скорости  $\beta(s)$ , где  $s$  – натуральный параметр. Найдите матрицу первой фундаментальной формы поверхности  $f$ .

*Указание.* Примените параметризацию  $f(s, v) = \beta(s) + vE_3(s)$ , где  $E_3(s)$  – направляющий вектор бинормали, т. е. третий вектор базиса Френе кривой  $\beta(s)$ .

10. Напишите уравнение касательной плоскости к псевдосфере  $f(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a (\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u))$  в произвольной точке.

11. Докажите, что касательные плоскости к поверхности  $x^2 + y^2 = z^2$  образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема. Найдите этот объем.

12. Покажите, что касательная плоскость в произвольной точке конуса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  проходит через его вершину.

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, cu).$$

13. Пусть поверхность есть часть фигуры, образованной касательными к кривой единичной скорости  $\beta(s)$ . Напишите уравнение касательной плоскости в произвольной точке поверхности. Исследуйте ее поведение при смещении точки касания вдоль прямых образующих поверхности.

*Указание.* Примените параметризацию  $f(s, v) = \beta(s) + vE_1(s)$ , где  $E_1(s)$  – направляющий вектор касательной, т. е. первый вектор базиса Френе кривой  $\beta(s)$ .

14. Найдите кривые на сфере

$$f(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u),$$

ортогональные к кривым, заданным семейством линий  $u + v = c$ .

15. Докажите, что на прямом геликоиде

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$$

дифференциальное уравнение  $du^2 - (u^2 + a^2)dv^2 = 0$  задает ортогональную сеть, т. е. два семейства взаимно ортогональных кривых.

16. На поверхности гиперболического параболоида  $z = xy$  найдите кривые, ортогональные к ее прямолинейным образующим.

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = (u, v, uuv)$$

гиперболического параболоида и докажите, что  $u$ -линии,  $v$ -линии и только они являются его прямолинейными образующими.

17. Покажите, что касательная плоскость в произвольной точке конической поверхности проходит через его вершину.

*Указание.* Примените параметризацию  $f(u, v) = \alpha(u) \cdot v$  конической поверхности с вершиной в начале координат, где  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  – гладкая регулярная кривая, и напишите уравнение касательной плоскости в векторном виде.

18. Напишите уравнение нормали к параболоиду вращения  $z = x^2 + y^2$  в произвольной точке. Убедитесь, что все нормали пересекают ось  $Oz$ .

19. Напишите параметризацию цилиндра  $S_a^2 \times \mathbb{R}$ , расположенного в пространстве  $\mathbb{R}^4$ , где  $S_a^2$  – двумерная сфера радиуса  $a$ , расположенная в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Найдите базис касательного пространства, нормальный вектор и уравнение касательной гиперплоскости в произвольной точке этого цилиндра.

*Указание.* Примените параметризацию сферы  $S_a^2$ :

$$g(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u).$$

20. Определите, под каким углом пересекаются кривые, заданные линиями  $u + v = 0$  и  $u - v = 0$ , на торе

$$f(u, v) = (a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v).$$

21. Докажите, что на поверхности

$$f(u, v) = (u + \cos v, u - \sin v, \lambda u), \lambda \neq 0$$

кривые, заданные линиями  $u = \sin v, u = 1$ , касаются в точке  $M(1, 0, \lambda)$ .

22. Найдите объем поверхности трехмерной сферы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$$

в  $\mathbb{R}^4$ .

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v, w) = (R \cos u \cos v \cos w, R \cos u \sin v \cos w, R \sin u \cos w, R \sin u \sin w),$$

где  $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), v \in [0, 2\pi], w \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

23. Найдите объем шара

$$f(u, v, w) = (w \cos u \cos v, w \cos u \sin v, w \sin u),$$

где  $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), v \in [-\pi, \pi], w \in [0, R]$ .

24. Найдите уравнения линий на прямом геликоиде

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av),$$

делящих пополам углы между  $u$ -линиями,  $v$ -линиями.

25. Найдите параметризацию двумерной полусферы радиуса  $R$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  в цилиндрических (полярных) координатах.

Проверьте, что это поверхность. Найдите матрицу ее первой фундаментальной формы. Проверьте, что ее площадь равна  $2\pi R^2$ .

## Ответы

№ 1.  $|\operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1|$ .

№ 2.  $\arccos(3/5)$ .

№ 3.  $\arccos(2/3)$ .

№ 4.  $v = \int_0^u \frac{du}{x(u)} \cdot \operatorname{tg} \varphi + v_0, \quad \varphi = \operatorname{const}, \quad v_0 = \operatorname{const}.$

№ 6.  $3\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}.$

№ 7.  $[\mathbf{I}_p] = \begin{pmatrix} 1 + k_1^2 v^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $k_1$  – кривизна кривой  $\beta(s)$ .

№ 8.  $[\mathbf{I}_p] = \begin{pmatrix} (1 - k_1 v)^2 + k_2^2 v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $k_1$  – кривизна, а  $k_2$  – кручение кривой  $\beta(s)$ .

№ 9.  $[\mathbf{I}_p] = \begin{pmatrix} 1 + k_2^2 v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $k_2$  – кручение кривой  $\beta(s)$ .

№ 10.

$\cos u \cos v \cdot x + \cos u \sin v \cdot y - \sin u \cdot z + a \ln(\operatorname{tg}(u/2)) \cdot \sin u = 0.$

№ 11.  $(9/2)a^3.$

№ 13.  $(r - \beta(s), \dot{\beta}(s), \ddot{\beta}(s)) = 0$  – уравнение касательной плоскости. Вдоль прямолинейных образующих касательная плоскость постоянна (не зависит от  $v$ ).

№ 14.  $v = \operatorname{tg} u + c.$

№ 16.  $(1 + a^2 x^2)y^2 = C_1, (1 + a^2 y^2)x^2 = C_2.$

№ 18. Уравнения нормальной плоскости: 
$$\begin{cases} x = u - 2ut, \\ y = v - 2vt, \\ z = u^2 + v^2 + t. \end{cases}$$

№ 19.  $x \cos u \cos v + y \cos u \sin v + z \sin u - a = 0$  – уравнение касательной плоскости.

$$\text{№ 20. } \arccos \frac{|a^2 - b^2|}{a^2 + b^2}.$$

$$\text{№ 21. } \arccos \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

$$\text{№ 22. } 2\pi^2 R^3.$$

$$\text{№ 23. } \frac{4}{3}\pi R^3.$$

$$\text{№ 24. } v = \pm \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C.$$

$$\text{№ 25. } [\mathbf{I}_\rho] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ R^2 - \rho^2 & \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}.$$

## 6. ВНЕШНЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , где  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  — гиперповерхность,  $f_{u^1}, \dots, f_{u^n}$  — стандартный базис касательного пространства  $T_p f$ . Векторное поле  $N(p) = \frac{f_{u^1} \times \dots \times f_{u^n}}{|f_{u^1} \times \dots \times f_{u^n}|}$ ,  $p \in U$  называется **н о р м а л ь н ы м** **г а у с с о в ы м** **п о л е м**. Отображение  $N: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  является гладким. Образ дифференциала нормального гауссова поля лежит в касательном пространстве  $\left(d_p N(\bar{\mathbb{R}}^n) \subseteq T_p f\right)$ .

**О с н о в н ы м** **о п е р а т о р о м** гиперповерхности  $f$  в точке  $p$  называется оператор  $L_p = -d_p N \circ [d_p f]^{-1}$  касательного пространства  $T_p f$ . Отсюда, в частности, следует, что  $L_p(f_{u^i}) = -N_{u^i}$ . Если  $X$  — касательный вектор,  $X = \dot{\beta}$  для кривой  $\beta = f \circ \alpha$  на гиперповерхности, где  $\alpha: I \rightarrow U$  — гладкая регулярная кривая,  $p = \alpha(t_0)$ , то

$$L_p(X) = -\frac{\partial N}{\partial \dot{\alpha}} = -N(\alpha(t))^\bullet \Big|_{t=t_0}$$

Следовательно, образ касательного вектора  $X$  при действии основного оператора — это производная вектора  $N$  по направлению касательного вектора  $\dot{\alpha}$  в точке  $p$ , взятая с отрицательным знаком.

Пусть  $X, Y \in T_p f$ , тогда билинейная форма  $\Pi_p(X, Y)$ , определенная на  $T_p f$  равенством  $\Pi_p(X, Y) = \langle L_p(X), Y \rangle$ , называется **в т о р о й** **ф у н д а м е н т а л ь н о й** **ф о р м о й** гиперповерхности. Коэффициенты матрицы  $[\Pi_p]$  второй фундаментальной формы вычисляются по следующей формуле:

$$h_{ij} = -\langle N_{u^i}, f_{u^j} \rangle = \langle N, f_{u^i u^j} \rangle.$$

Таким образом, если

$$[X]_{f_u} = {}^t(du^1, \dots, du^n), [Y]_{f_u} = (dv^1, \dots, dv^n),$$

то

$$\Pi_p(X, Y) = {}^t[X]_{f_u} [\Pi_p] [Y]_{f_u} = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} du^i dv^j.$$

Основной оператор  $L_p$  гиперповерхности  $f$  самосопряжен. Следовательно, его собственные значения  $k_1, k_2, \dots, k_n$  вещественны, и существует ортогональный базис  $X_1, X_2, \dots, X_n$  из соответствующих им собственных векторов. Значения  $k_1, k_2, \dots, k_n$  называются главными кривизнами, а векторы  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — главными направлениями. Матрица основного оператора равна  $[L_p] = [\mathbf{I}_p]^{-1} [\Pi_p]$ . Главные кривизны находятся из уравнения  $\det([\Pi_p] - k[\mathbf{I}_p]) = 0$ , а соответствующие им главные направления — из системы линейных однородных уравнений  $([\Pi_p] - k[\mathbf{I}_p])X = 0$ .

Полной гауссовой кривизной гиперповерхности называется число  $K = \det[L_p] = \frac{\det[\Pi_p]}{\det[\mathbf{I}_p]}$ . Кроме того,  $K = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ .

Средней кривизной гиперповерхности называется число  $H = \frac{1}{n} \operatorname{tr}[L_p]$ . Кроме того,  $H = \frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \dots + k_n)$ .

Образ  $\beta = f \circ \alpha$  кривой  $\alpha: I \rightarrow U$  на гиперповерхности  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  называется *линией кривизны*, если для любого  $t \in I$  касательный вектор  $\dot{\beta}(t)$  является главным направлением (векторы  $L_p(\dot{\beta})$  и  $\dot{\beta}$  коллинеарны). Образ кривой  $\beta(t) = {}^t(u(t), v(t))$  на гиперповерхности  $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  является линией кривизны, если

$$\text{выполняется равенство } \begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Вектор  $X \in T_p f$  называется *асимптотическим* на гиперповерхности  $f$  в точке  $p$ , если вектор  $L_p(X)$  перпендикулярен вектору  $X$ , т. е.  $\Pi_p(X, X) = 0$ .

Образ  $\beta = f \circ \alpha$  кривой  $\alpha: I \rightarrow U$  на гиперповерхности  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  называется *асимптотической линией*, если для любого  $t \in I$  касательный вектор  $\dot{\beta}(t)$  является асимптотическим. Образ кривой  $\beta(t) = (u(t), v(t))$  на гиперповерхности  $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  является асимптотической линией, если выполняется равенство:  $h_{11} du^2 + 2h_{12} dudv + h_{22} dv^2 = 0$ . Если поверхность минимальна, т. е.  $H = 0$ , то ее асимптотические линии перпендикулярны.

Для гиперповерхности  $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  точка  $f(p)$  ( $p \in I$ ) называется *эллиптической*, если в этой точке  $K = k_1 k_2 > 0$ ; *гиперболической*, если  $K = k_1 k_2 < 0$ ; *параболической*, если  $K = 0$ ,  $H \neq 0$ , т. е. точно одна из главных кривизн  $k_1, k_2$  равна нулю; *сингулярной*, если  $K = H = 0$ , т. е.  $k_1 = k_2 = 0$ .

Эллиптическая точка называется *омбилической*, если  $k_1 = k_2$ . Омбилические точки находятся из равенств

$$\frac{h_{11}(p)}{g_{11}(p)} = \frac{h_{12}(p)}{g_{12}(p)} = \frac{h_{22}(p)}{g_{22}(p)}.$$

**Задача 6.** Для прямого геликоида  $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$  найти в произвольной точке матрицы второй фундаментальной формы и основного оператора гиперповерхности, главные кривизны и главные направления, полную гауссову кривизну и среднюю кривизну, линии кривизны и асимптотические линии; определить тип произвольной точки.

**Решение.** В предыдущей задаче мы уже нашли векторы

$$f_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad f_v = (-u \sin v, u \cos v, a),$$

$$f_u \times f_v = (a \sin v, -a \cos v, u).$$

Найдем нормальное гауссово поле

$$N = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} (a \sin v, -a \cos v, u).$$

Коэффициенты  $h_{ij}$  матрицы второй фундаментальной формы можно вычислять либо по формуле  $h_{ij} = -\langle N_{u^i}, f_{u^j} \rangle$ , либо по формуле  $h_{ij} = \langle N, f_{u^i u^j} \rangle$ . Но вычислять  $N_u, N_v$  сложно, поэтому будем пользоваться второй формулой. Для этого найдем  $f_{uu} = \vec{0}$ ,  $f_{uv} = f_{vu} = {}^t(-\sin v, \cos v, 0)$ ,  $f_{vv} = {}^t(-u \cos v, -u \sin v, 0)$ . Следовательно,  $h_{11} = \langle N, f_{uu} \rangle = 0$ ,  $h_{12} = h_{21} = \langle N, f_{uv} \rangle = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$ ,  $h_{22} = \langle N, f_{vv} \rangle = 0$ . Таким образом, матрица второй фундаментальной формы равна

$$[\mathbf{\Pi}_p] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица основного оператора гиперповерхности будет равна

$$\begin{aligned} [L_p] &= [\mathbf{I}_p]^{-1} [\mathbf{\Pi}_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2 + a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{(u^2 + a^2)^3}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем главные кривизны  $k_1, k_2$  из уравнения  $\det([\mathbf{\Pi}_p] - k[\mathbf{I}_p]) = 0$ .

Вычислим

$$\det \left( [\Pi_p] - k [\mathbf{I}_p] \right) = \begin{vmatrix} -k & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & -k(u^2 + a^2) \end{vmatrix} = k^2 (u^2 + a^2) - \frac{a^2}{u^2 + a^2}.$$

Решая уравнение относительно  $k$ , найдем  $k_{1,2} = \pm \frac{a}{u^2 + a^2}$ .

Найдем главные направления  $X_1, X_2$ , решая систему однородных линейных уравнений  $([\Pi_p] - k [\mathbf{I}_p])X = 0$ , подставляя вместо  $k$  значения  $k_1, k_2$ . При  $k = k_1$  имеем систему

$$\begin{cases} -\frac{a}{u^2 + a^2} x_1 - \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} x_2 = 0, \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} x_1 - a x_2 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы получено из второго умножением на  $\frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}$ . Следовательно, система равносильна второму уравнению:  $-\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} x_1 - a x_2 = 0$ . Откуда  $x_1 = -\sqrt{u^2 + a^2} \cdot x_2$ . Находим

фундаментальную систему решений – вектор  $X_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{u^2 + a^2} \\ 1 \end{pmatrix}$ . Этот вектор и есть главное направление, соответствующее главной кривизне  $k_1$ . Аналогично находим вектор  $X_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{u^2 + a^2} \\ 1 \end{pmatrix}$  – главное направление, соответствующее главной кривизне  $k_2$ .

Проверка. Главные направления должны быть перпендикулярны. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_p(X_1, X_2) &= {}^t[X_1][\mathbf{I}_p][X_2] = \\ &= -\sqrt{u^2 + a^2} \cdot \sqrt{u^2 + a^2} + (u^2 + a^2) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Найдем полную гауссову кривизну

$$K = \det [L_p] = \frac{\det [\mathbf{II}_p]}{\det [\mathbf{I}_p]} = -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2}$$

и среднюю гауссову кривизну  $H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} [L_p] = 0$ .

Проверка.  $K = k_1 k_2 = -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2}, H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$ .

Найдем линии кривизны поверхности из дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. из уравнения

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2 + a^2 \\ 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению  $a\sqrt{u^2 + a^2} dv^2 - \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} du^2 = 0$  или двум дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными  $dv = \pm \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du$ .

Следовательно, линии  $v = \pm \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$  задают линии кривизны на поверхности.

**Проверка.** Для линий кривизны  $\beta_{1,2}(u) = f(\alpha_{1,2}(u))$ , где  $\alpha_{1,2}(u) = \left( u, \pm \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C \right)$ , справедливо равенство

$$\left[ d\beta_{1,2} \right]_{f_u} = \left[ d\alpha_{1,2} \right]_e = {}'(du, dv) = \left( du, \pm \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} \right).$$

А координаты главных направлений  $\left[ X_{1,2} \right]_{f_u} = \left( \mp \sqrt{u^2 + a^2}, 1 \right)$ .

Очевидно, векторы  $d\beta_1$  и  $X_2$ ,  $d\beta_2$  и  $X_1$  коллинеарны. Таким образом, кривые  $\alpha_{1,2}(u)$  действительно задают линии кривизны.

Найдем асимптотические линии из уравнения

$$h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 = 0,$$

т. е. из уравнения  $-2 \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} dudv = 0$ .

Из последнего уравнения следует, что  $du = 0$  или  $dv = 0$ , т. е.  $u = u_0$ ,  $v = v_0$  для некоторых констант  $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ . Таким образом, асимптотическими линиями являются  $u$ -линии и  $v$ -линии.

**Проверка.** Касательными векторами к  $u$ -линиям,  $v$ -линиям являются векторы  $f_u, f_v$ , т. е.  $f_u, f_v$  – асимптотические направления. Поскольку поверхность является минимальной ( $H = 0$ ), асимптотические направления должны быть перпендикулярны. Действительно,  $\langle f_u, f_v \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$ .

Полная гауссова кривизна  $K = -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2}$  отрицательна для произвольной точки поверхности. Следовательно, все точки поверхности гиперболические.

**Ответ.**  $\left[ \Pi_p \right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix};$

$$[L_p] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{(u^2 + a^2)^3}} & 0 \end{pmatrix};$$

$$k_{1,2} = \pm \frac{a}{u^2 + a^2}, \quad X_{1,2} = {}^t(\mp \sqrt{u^2 + a^2}, 1); \quad K = -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2}; \quad H = 0;$$

линии  $v = \pm \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$  задают линии кривизны; асимптотические линии – это  $u$ -линии,  $v$ -линии; все точки поверхности гиперболические.

## Задания

1. Найдите линии кривизны параболоида вращения  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$ .

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(au \cos v, au \sin v, u^2).$$

2. Найдите линии кривизны произвольной цилиндрической поверхности, т. е. поверхности  $f(u, v) = \alpha(u) + v\vec{b}$ , где  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{b} = \text{const}$ ,  $\vec{b} \in \overline{\mathbb{R}}^2$ .

*Указание.* Докажите, что прямолинейная образующая является линией кривизны; при этом можно считать, что  $\alpha$  – кривая единичной скорости и  $|\vec{b}| = 1$ .

3. Докажите, что на плоскости и сфере любая линия является линией кривизны.

*Указание.* Докажите, что на плоскости и сфере главные кривизны в каждой точке равны ( $k_1 = k_2$ ).

4. Вычислите главные кривизны поверхности  $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$  в точке  $M(0, 0, 0)$ .

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{p} + \frac{v^2}{q} \right) \right).$$

5. Найдите асимптотические линии катеноида

$$f(u, v) = (ch\,u \cos v, ch\,u \sin v, u).$$

6. Покажите, что кривая  $\alpha(t) = \left( \frac{2}{1+t}, \frac{2}{1-t}, t \right)$  является асимп-

тотической линией поверхности  $z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$ .

Указание. Найдите асимптотические линии этой поверхности, применив параметризацию

$$f(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} \right),$$

и покажите, что данная кривая  $\alpha$  — одна из них.

7. Найдите полную кривизну произвольной поверхности вращения  $f(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u))$ , где  $x(u) > 0$ , с осью вращения  $Oz$ .

8. Покажите, что  $u$ -линии,  $v$ -линии поверхности

$$f(u, v) = (3u - u^3 + 3uv^2, v^3 - 3u^2v - 3v, 3(u^2 - v^2))$$

являются линиями кривизны.

9. Найдите омбилические точки на параболоиде вращения

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}.$$

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u^2).$$

Используйте, что в омбилических точках  $k_1 = k_2$ .

10. Исследуйте характер точек на поверхности, полученной вращением синусоиды  $y = \sin x$  ( $x \neq k\pi$ ) вокруг оси  $Oy$ .

11. Найдите омбилические точки на эллипсоиде вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > c.$$

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u).$$

Используйте, что в омбилических точках  $k_1 = k_2$ .

12. Исследуйте характер точек на поверхности  $x + y = z^3$ .

*Указание.* Применив параметризацию  $f(u, v) = {}^t(v, u^3 - v, u)$ , докажите, что  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$  при  $y \neq -x$  и  $k_1 = k_2 = 0$  при  $y = -x$ .

13. Исследуйте характер точек на эллиптическом конусе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad \text{без вершины.}$$

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(au \cos v, bu \sin v, cu)$$

и докажете, что  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ .

14. Исследуйте характер точек на поверхности, полученной вращением линии  $y = \ln x$  ( $x > 0, x \neq 1$ ) вокруг оси  $Ox$ .

15. Найдите полную кривизну параболоида вращения  $z = x^2 + y^2$ .

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, u^2).$$

16. Исследуйте характер точек на поверхности, полученной вращением линии  $y = \sin x$  ( $x \neq k\pi$ ) вокруг оси  $Ox$ .

17. Исследуйте характер точек на поверхности, полученной вращением линии  $y = \ln x$  ( $x > 0$ ) вокруг оси  $Oy$ .

18. Исследуйте характер точек на гиперболическом параболоиде

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right).$$

19. Прямая перемещается параллельно плоскости  $xOy$ , пересекая ось  $Oz$  и линию  $\alpha(u) = {}^t(u, u^2, u^3)$ . Докажите, что  $u$ -линии,  $v$ -линии поверхности, описываемой этой прямой, являются асимптотическими.

*Указание.* Покажите, что  $f(u, v) = \alpha(u) + v\alpha^*(u)$ , где  $\alpha^*(u)$  – проекция кривой  $\alpha(u)$  на плоскость  $xOy$ , является параметризацией искомой поверхности.

20. Найдите линии кривизны произвольной поверхности вращения.

21. Найдите среднюю кривизну круглого цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$ .

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a \cos v, a \sin v, u).$$

22. Найдите главные кривизны в вершинах двуполостного гиперболоида  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v, b \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v, c \operatorname{sh} u).$$

23. Найдите полную кривизну двуполостного гиперболоида вращения  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ .

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a \operatorname{sh} u \cos v, a \operatorname{sh} u \sin v, c \operatorname{ch} u).$$

24. Найдите полную кривизну эллипсоида вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

*Указание.* Примените параметризацию

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u).$$

25. Найдите полную кривизну однополостного гиперболоида вращения  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Указание. Примените параметризацию

$$f(u, v) = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, c \operatorname{sh} u).$$

## Ответы

№ 1. Линиями кривизны являются  $u$ -линии,  $v$ -линии.

№ 2. Прямолинейные образующие и ортогональные им плоские сечения.

№ 4.  $k_1 = \frac{1}{p}, k_2 = \frac{1}{q}.$

№ 5.  $u \pm v = C.$

№ 7.  $K = \frac{\begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{z} & \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}}{x(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^2}.$

№ 9. Вершина параболоида.

№ 10. Пусть  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Точки поверхности при

$$x \in \left(-\pi - \pi n, -\frac{\pi}{2} - \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n\right)$$

эллиптические, при

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} - \pi n, -\pi n\right) \cup \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$$

гиперболические, а при  $x = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n$  параболические.

№ 11.  $M_{1,2}(0, 0, \pm c).$

№ 12. Точки поверхности при  $y \neq -x$  параболические, точки при  $y = -x$  сингулярные.

№ 13. Все точки поверхности параболические.

№ 14. При  $x > 1$  точки поверхности эллиптические, при  $0 < x < 1$  гиперболические.

$$\text{№ 15. } K = \frac{4}{(1 + 4u^2)^2}.$$

№ 16. Все точки поверхности эллиптические.

№ 17. Все точки поверхности гиперболические.

№ 18. Все точки поверхности гиперболические.

№ 20. Параллели и меридианы.

$$\text{№ 21. } H = \frac{1}{2a}.$$

$$\text{№ 22. } k_1 = a/b^2, k_2 = a/c^2.$$

$$\text{№ 23. } K = \frac{c^2}{(a \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u)^2}.$$

$$\text{№ 24. } K = \frac{c^2}{(a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u)^2}.$$

$$\text{№ 25. } K = -\frac{c^2}{(a^2 \operatorname{sh}^2 u + c^2 \operatorname{ch}^2 u)^2}.$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. М. : Наука, 1970. 384 с.
2. *Сборник задач по дифференциальной геометрии* / под ред. А. С. Феденко. М. : Наука, 1979. 272 с.
3. *Сизый С. В.* Лекции по дифференциальной геометрии. М. : Физматлит, 2007. 376 с.

НаGREбeцкая Юлиa Bацлaвoвнa  
Пeрминoвa Oльгa Eвгeньeвнa

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пpактикyм

Зaвeдyющий peдaкциeй *М. А. Овeчкинa*  
Peдaктoр *Е. И. Mаркинa*  
Кoppeктoр *Е. И. Mаркинa*  
Компьютepнaя вepсткa *Г. Б. Гoлoвинa*

Плaн издaний 2017 г. Пoдпиcaнo в пeчaть 23.06.17.  
Фoрмaт 60×84/16. Бyмaгa офceтнaя. Гaрнитypa Times.  
Уч.-изд. л. 3,2. Усл. пeч. л. 4,19. Тираж 50 экз. Зaкaз 81.

Издaтeльствo Уpaльскoгo yнивepситeтa  
620000, Eкaтepинбyрг-83, yл. Тyргeнeвa, 4.

Отпeчaтaнo в Издaтeльскo-пoлигpaфичeскoм цeнтpe УрФУ  
620000, Eкaтepинбyрг-83, yл. Тyргeнeвa, 4.  
Тeл.: + (343) 350-56-64, 350-93-22  
Фaкс +7 (343) 358-93-06  
E-mail: [press-urfu@mail.ru](mailto:press-urfu@mail.ru)  
<http://print.urfu.ru>