

Мышкис А.Д.

**Прикладная
математика для
инженеров.
Специальные курсы**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®
2016

УДК 510.2

ББК 22.1

М 96

Мышкис А. Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. — 3-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 688 с. — ISBN 978-5-9221-0747-1.

Учебное пособие для технических институтов, посвященное специальным разделам математики : теории поля, теории аналитических функций, операционному исчислению, линейной алгебре, тензорам, вариационному исчислению, интегральным уравнениям и дополнительным вопросам обыкновенных дифференциальных уравнений. Изложение ведется с позиций прикладной математики, особое внимание уделяется количественному описанию фактов. Отдельные главы, а в некоторых случаях и более мелкие разделы книги можно читать независимо.

Пособие адресовано студентам, аспирантам, инженерам, преподавателям и научным работникам, специализирующимся в области технических наук.

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к первому изданию	9
Предисловие к третьему изданию	10
Глава I. ТЕОРИЯ ПОЛЯ	11
§1. Введение	11
1. Понятие поля (11). 2. Скалярное поле (12). 3. Векторные линии, поток, дивергенция (13). 4. Линейный интеграл, циркуляция, ротор (16).	
§2. Оператор Гамильтона.	18
1. Операции первого порядка (18). 2. Правила действий (20). 3. Интегральные формулы (21). 4. Операции второго порядка (22). 5. Разрывные поля (23).	
§3. Специальные типы полей	25
1. Потенциальные поля (25). 2. Безвихревое поле в многосвязной области (26). 3. Соленоидальные поля (28). 4. Примеры (31). 5. Ньютонов потенциал (33). 6. Построение векторного поля по заданным ротору и дивергенции (35).	
Глава II. ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ	37
§1. Введение	37
§2. Дифференцирование и отображения.	40
1. Производная (40). 2. Условия Коши–Римана (41). 3. Сопряженные гармонические функции (42). 4. Геометрический смысл производной (43). 5. Конформные отображения (44). 6. Линейные отображения (45). 7. Расширенная комплексная плоскость (46). 8. Дробно-линейное отображение (47). 9. Степенные отображения (50). 10. Многочисленные функции и точки разветвления (52).	
11. Отображение $w = \frac{c}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ (55). 12. Показательное и связанные с ним отображения (58). 13. Поверхность Римана (60). 14. Приложение к теории плоских полей (61). 15. Примеры (64). 16. Краевые задачи и конформные отображения (66). 17. Общие замечания о конформных отображениях (69). 18. Применение метода малого параметра (72).	
§3. Интегрирование и степенные ряды.	75
1. Интеграл (75). 2. Интеграл от аналитической функции (76). 3. Ряды Лорана (78). 4. Разложение аналитической функции в ряд Лорана (79). 5. Ряд Тейлора (82). 6. Аналитические отображения	

и принципы максимума (85). 7. Аналитическое продолжение (87). 8. Варианты (90).	
§4. Особые точки и нули.	94
1. Изолированные особые точки (94). 2. Полюс (95). 3. Теорема Коши о вычетах (97). 4. Применение к несобственным интегралам (99). 5. Интегральные формулы Пуассона (107). 6. Поведение функции на бесконечности (110). 7. Логарифмические вычеты (112). 8. Теорема Руше (113). 9. Зависимость нулей от параметра (114). 10. Нули многочленов (117). 11. Результат двух многочленов (121). 12. Мероморфные функции (122). 13. Формула Кристоффеля–Шварца (126). 14. Понятие об эллиптических функциях (129).	
§5. Асимптотические разложения.	131
1. Введение (131). 2. Свойства (133). 3. Интеграл типа Фурье (136). 4. Интеграл с параметром в вещественном показателе (139). 5. Метод перевала (143).	
Глава III. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.	147
§1. Общая теория.	147
1. Преобразование Лапласа (147). 2. Образы простых функций (149). 3. Основные свойства преобразования Лапласа (151). 4. Обратное преобразование Лапласа (154). 5. Разложение преобразования в сумму (158). 6. Численное определение преобразования (162).	
§2. Приложения.	163
1. Основная идея (163). 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения (164). 3. Разностные и дифференциально-разностные уравнения (168). 4. Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения (169). 5. Уравнения с частными производными (170).	
§3. Варианты.	174
1. Дискретное преобразование Лапласа (174). 2. Преобразование Фурье растущих функций (176). 3. Другие интегральные преобразования на бесконечном интервале (178). 4. Интегральные преобразования на конечном интервале (182).	
Глава IV. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.	185
§1. Сопряженные отображения.	186
1. Прямая сумма (186). 2. Инвариантные подпространства (187). 3. Сопряженные отображения (188). 4. Разложение, связанное с сопряженными отображениями (189). 5. Отображение пространства в себя (191). 6. Самосопряженное отображение (192). 7. Экстремальное свойство собственных значений (193).	
§2. Квадратичные формы.	195
1. Введение (195). 2. Закон инерции квадратичных форм (197). 3. Метод Якоби и теорема Сильвестра (197). 4. Одновременное приведение двух квадратичных форм к диагональному виду (199).	
§3. Структура линейного отображения.	200
1. Отображение с единственным собственным вектором (200). 2. Отображение с единственным собственным значением (203).	

3. Общий случай (204). 4. Отображение вещественного пространства (207). 5. Применение к вычислению функций от матриц (209). 6. Другое представление отображения вещественного пространства (211). 7. Структура перестановочных отображений (213).	
§4. Некоторые численные методы	214
1. Метод Гаусса (214). 2. Норма матрицы и обусловленность системы (216). 3. Метод улучшения невязки (218). 4. Спектр симметрической матрицы (219). 5. Метод Якоби (220). 6. Вычисление старшего собственного значения путем итераций (221). 7. Вычисление последующих собственных значений (223). 8. Матрицы с неотрицательными элементами (224). 9. Метод А. Н. Крылова (226). 10. Метод малого параметра (226). 11. Метод непрерывного продолжения (227).	
§5. Задачи линейного программирования	230
1. Основная задача (230). 2. Примеры (231). 3. Геометрические замечания (232). 4. Геометрический смысл основной задачи (235). 5. Стандартный вид основной задачи (236). 6. Метод последовательного улучшения решения (238). 7. Приложение к матричным играм (241). 8. Варианты (248).	
Глава V. ТЕНЗОРЫ	251
§1. Тензорная алгебра.	252
1. Примеры (252). 2. Евклидовы тензоры, общее определение (254). 3. Действия над тензорами (255). 4. Тензоры 2-го ранга (257). 5. Примеры из механики (258). 6. Общие аффинные тензоры (260). 7. Аффинные тензоры в евклидовом пространстве (262). 8. Индефинитные метрические формы (264). 9. Замечание о размерностях (266).	
§2. Тензорные поля	267
1. Поле евклидова тензора (267). 2. Поступательный перенос вектора в криволинейных координатах (269). 3. Ковариантное дифференцирование (272). 4. Поле на многообразии евклидова пространства (275). 5. Внутренняя геометрия и римановы пространства (277).	
Глава VI. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.	281
§1. Первая вариация и необходимые условия экстремума	281
1. Примеры задач вариационного исчисления (281). 2. Функционал (284). 3. Функциональные пространства (285). 4. Вариация функционала (289). 5. Уточнение (292). 6. Необходимое условие экстремума (294). 7. Уравнение Эйлера (295). 8. Примеры (298). 9. Функционалы с производными высшего порядка (300). 10. Функционалы от нескольких функций (301). 11. Функционалы от функций нескольких переменных (303). 12. Условный экстремум с интегральными связями (305). 13. Условный экстремум с конечными или дифференциальными связями (308). 14. Задачи, сводящиеся к задаче Лагранжа (311). 15. Задачи с подвижными концами на плоскости (312). 16. Условия	

трансверсальности (314). 17. Задачи с подвижными концами в пространстве (316). 18. Трансверсальность для функций нескольких переменных (318). 19. Высвобождающие связи (320). 20. Разрывные задачи (321).	
§2. Вторая вариация и достаточные условия экстремума.	324
1. Вариации высших порядков (324). 2. Условия экстремума в терминах второй вариации (326). 3. Необходимые условия Лежандра (327). 4. Квадратичный функционал (328). 5. Условия Якоби (331). 6. Геодезические линии (334). 7. Условия сильного экстремума (337). 8. Вариационная теория собственных значений (338). 9. О существовании минимума (343). 10. Основное условие минимума (345). 11. Зависимость собственных значений от функционала (348).	
§3. Канонические уравнения и вариационные принципы.	350
1. Канонические уравнения (350). 2. Первые интегралы (352). 3. Канонические преобразования (353). 4. Контактные преобразования (355). 5. Теорема Нётер (357). 6. Случай функций нескольких переменных (360). 7. Уравнение Гамильтона–Якоби (361). 8. Плоскость Лобачевского (364). 9. Вариационные принципы (366). 10. Принцип Гамильтона в простейшем случае (368). 11. Принцип Гамильтона для систем с конечным числом степеней свободы (370). 12. Принцип Гамильтона для сплошных сред. Струна (373). 13. Стержень и пластинка (376). 14. Общая схема вариационного подхода к физическим полям (379). 15. Уравнения движения упругой среды (382). 16. Диссипативные системы (384). 17. Принцип минимума потенциальной энергии (385). 18. Примеры (387). 19. Запас устойчивости (389). 20. Вариационные принципы в конформных отображениях (391).	
§4. Прямые методы.	392
1. Метод Ритца для квадратичного функционала (393). 2. Применение к решению краевых задач (399). 3. Метод счетного множества переменных (400). 4. Метод Ритца для функционалов от функций нескольких переменных (402). 5. Метод Трефтца (406). 6. Метод Ритца для собственных значений (408). 7. Метод Ритца для неквадратичных функционалов (410). 8. Метод наименьших квадратов (413). 9. Метод Канторовича (414). 10. Метод Эйлера (416).	
Глава VII. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.	419
§1. Введение.	419
1. Примеры (419). 2. Основные классы интегральных уравнений (421). 3. Еще о пространстве Гильберта (423).	
§2. Теория Фредгольма.	424
1. Уравнения с вырожденными ядрами (424). 2. Общий случай (430). 3. Применение бесконечных систем алгебраических уравнений (434). 4. Применение численного интегрирования (437). 5. Уравнения с малыми ядрами (441). 6. Принцип сжимающих отображений (444). 7. Возмущение ядра (447). 8. Характер решений (449). 9. Уравнения Вольтерра 2-го	

рода (450).	10. Уравнения со слабой особенностью (452).
11. Уравнения с вполне непрерывными операторами (454).	
12. Уравнения с положительными ядрами (456).	
§3. Уравнения с симметричными ядрами	457
1. Аналогия с конечномерными уравнениями (457).	
2. Разложение ядра по собственным функциям (458).	
3. Следствия (460).	
4. Переход от несимметричного ядра к симметричному (464).	
5. Экстремальное свойство характеристических чисел (466).	
6. Уравнения с самосопряженными операторами (469).	
§4. Некоторые специальные классы уравнений	472
1. Уравнения Вольтерра 1-го рода (472).	
2. Уравнения Фредгольма 1-го рода с симметричным ядром (475).	
3. Понятие о некорректных задачах (477).	
4. Уравнения Фредгольма 1-го рода, общий случай (477).	
5. Применение производящих функций (480).	
6. Уравнение Вольтерра с разностным ядром (484).	
7. Уравнение Фредгольма с разностным ядром на оси (486).	
8. Уравнение Фредгольма с разностным ядром на полуоси (492).	
§5. Сингулярные интегральные уравнения	496
1. Сингулярные интегралы (496).	
2. Формулы обращения (499).	
3. Непосредственное применение формул обращения (501).	
4. Переход к краевой задаче, простой пример (503).	
5. Общий замкнутый контур (506).	
6. Незамкнутый контур (510).	
7. Приведение к бесконечной системе алгебраических уравнений (512).	
§6. Нелинейные интегральные уравнения	514
1. Переход к конечным уравнениям (514).	
2. Метод итераций (516).	
3. Метод малого параметра (518).	
4. Применение теории симметричных ядер (520).	
5. Применение теории неподвижных точек (521).	
6. Вариационные методы (524).	
7. Уравнения с параметром (525).	
8. Разветвление решений (526).	

Глава VIII. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 531

§1. Линейные уравнения и системы	531
1. Общие свойства (531).	
2. Периодические системы (536).	
3. Уравнение Хилла (538).	
4. Параметрический резонанс (543).	
5. Гамильтоновы системы (544).	
6. Неоднородные системы (546).	
7. Почти-периодические функции (549).	
8. Асимптотическое разложение решений при $t \rightarrow \infty$ (551).	
9. Еще об асимптотическом поведении решений (554).	
10. Осцилляция решений уравнений второго порядка (557).	
11. Системы, зависящие от параметра (561).	
12. Точки поворота (564).	
§2. Автономные системы.	567
1. Общие понятия (567).	
2. Предельное поведение траекторий (568).	
3. Точки покоя на плоскости, линейные системы (570).	
4. Общий случай (574).	
5. Циклы на плоскости (576).	
6. Вращение векторного поля (579).	
7. Точки покоя в пространстве (583).	
8. Циклы в пространстве (585).	
9. Структурно устойчивые системы (588).	
10. Разрывные системы (589).	
11. Системы на	

многообразиях (592). 12. Системы с интегральным инвариантом (594). 13. Эргодичность (596).	
§3. Устойчивость решений.	600
1. Введение (600). 2. Уравнения первого порядка (601). 3. Метод функций Ляпунова (603). 4. Устойчивость по первому приближению (607). 5. Особые случаи (611). 6. Специальные классы механических систем (617). 7. Системы автоматического регулирования (623). 8. Техническая устойчивость (628).	
§4. Нелинейные колебания	629
1. Введение (629). 2. Свободные колебания автономной консервативной системы с одной степенью свободы (636). 3. Вынужденные колебания системы с малой нелинейностью, основной случай (641). 4. Особые случаи (643). 5. Субгармонические колебания (648). 6. Еще о вынужденных колебаниях (649). 7. Автоколебания (651). 8. Релаксационные колебания (654). 9. Пограничный слой (657). 10. Непериодические колебания (659). 11. Асимптотические разложения по Н. М. Крылову–Н. Н. Боголюбову (665). 12. Системы с дискретным временем (668).	
Литература.	672
Предметный указатель	678
Указатель обозначений	687

Предисловие к первому изданию

Эта книга представляет собой пособие по специальным главам курса математики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений, написанное с единых позиций современной прикладной математики, какими их понимает автор. Книга предназначена в основном для студентов старших курсов высших технических учебных заведений и инженеров различных специальностей, но она может быть полезной также физикам и другим специалистам, имеющим дело с прикладной математикой. Книга основана на курсах лекций, прочитанных автором в разные годы, и рассчитана как на аудиторное обучение, так и на самообразование.

По стилю изложения книга близка к «Лекциям по высшей математике» (третье издание, издательство «Наука», 1969 г.; в дальнейшем будет именоваться «ЛВМ») того же автора и может рассматриваться как их продолжение, хотя и читается независимо. Она опирается на общий курс математики (этим объясняется ее название) и имеет целью развить и укрепить отвечающие современной прикладной математике взгляды на основные математические понятия и факты, а также облегчить применение математики к специальным дисциплинам. Значительное внимание обращается на развитие правильной интуиции и возможно больший показ работающего аппарата, тогда как формальная полнота формулировок и доказательств не является самоцелью. (Поэтому хочется специально подчеркнуть, что эта книга не может обучить доказательству теорем на уровне «чистой» математики, она имеет совсем другое назначение.)

По каждому из освещаемых разделов систематически излагается некоторый необходимый минимум — основные понятия и идеи, представление об области приложений и т. п. За дальнейшими сведениями и деталями читатель отсылается к дополнительной литературе, список которой приведен в конце книги; ссылки на этот список обозначаются номерами в квадратных скобках. При выборе этих разделов, в значительной мере условном, автор в некоторой степени ориентировался на официальную программу 1969 г. спецкурсов математики для вузов.

Отдельные главы, а в некоторых случаях и более мелкие разделы книги можно читать более или менее независимо, в соответствии с потребностью. Примеры, а также материал, который при первом чтении можно опустить, напечатаны петитом. Для облегчения чтения материал, уже освещенный в ЛВМ, в необходимых случаях кратко напоминает. Этой же цели должен служить подробный алфавитный указатель, помещенный в конце книги; с его помощью легко разыскать разъяснение встретившегося непонятого термина. В целом стоит отметить, что данная книга написана более сжато, чем ЛВМ, и не рассчитана на быстрое чтение.

В каждой главе параграфы, в каждом параграфе пункты и формулы нумеруются подряд, начиная с первого номера. При ссылках номерá

текущих главы и параграфа не упоминаются: например, в тексте § 3 гл. IV выражение «формула (2)» означает «формула (2) § 3 гл. IV», выражение «формула (1.2)» означает «формула (2) § 1 гл. IV», а «формула (III.4.2)» означает «формула (2) § 4 гл. III».

Содержание книги ясно из подробного оглавления. Из-за недостатка места за ее пределами остался ряд важнейших в современной прикладной математике разделов, таких, как математическая физика, элементы функционального анализа с приложением к теории численных методов, дополнительные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д. Конечно, хорошо бы написать продолжение, содержащее указанные разделы, но трудно сказать, удастся ли это осуществить...

Первоначальный текст рукописи был переработан на основе замечаний Р. С. Гутера, Н. Д. Копачевского, М. А. Красносельского, А. Д. Тюпцова, а также коллектива преподавателей кафедры высшей математики МИХМ, в частности Г. Л. Лунца и А. Г. Младова. Всем этим моим товарищам я рад выразить свою глубокую признательность.

А. Д. Мышкис

1 октября 1969 г.

Предисловие к третьему изданию

Второе издание этой книги, вышедшее в 2002 г., отличалось от первого только своим переплетом. В настоящее, третье издание не только внесены некоторые исправления и уточнения, но и включены небольшие добавления (в частности, в гл. I и II), чтобы чтение этой книги по возможности не требовало привлечения других источников.

Глава I

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Основные понятия теории скалярных и векторных полей (производная по направлению и градиент, векторные линии и поток, дивергенция, циркуляция и ротор) входят в общий курс математики; см., например, ЛВМ, пп. IX.9, XII.1, 2, 4, XVI.21–27 (там же приведены примеры физических полей, встречающихся в реальных исследованиях). Здесь мы коротко напомним эти понятия и продолжим изложение теории. Дальнейшие сведения см., например, в книгах [15, 53].

§1. Введение

1. Понятие поля. Говорят, что в пространстве задано *поле* некоторой величины, если в каждой точке пространства или некоторой его области определено значение этой величины. Например, при рассмотрении потока газа приходится исследовать температурное поле, поле плотностей, поле скоростей и т. д. Поле может быть *скалярным* или *векторным* в зависимости от характера исследуемой величины: например, поля температур или плотностей — скалярные, а поля скоростей или сил — векторные. Поле может быть *стационарным* (*установившимся*), если в каждой точке пространства оно не меняется с течением времени, или *нестационарным* (*неустановившимся*), если такое изменение имеет место.

Обозначим величину (для определенности, скалярную), образующую поле, буквой u , а произвольную точку пространства буквой M . Тогда каждому положению точки M отвечает значение величины u , т. е. u является *функцией точки* M , $u = f(M)$. Если поле нестационарное, то $u = f(M, t)$.

Если в пространство ввести координаты, то функция точки превращается в функцию координат. Например, если это декартовы координаты x, y, z , то $u(M) = u(x, y, z)$, где x, y, z — координаты точки M . (Обратно, при заданной системе координат любую функцию от них можно рассматривать как функцию точки.) Однако поле $u = f(M)$ как

функция точки $u = f(M)$ имеет смысл и может быть исследовано без всяких систем координат. Кроме того, если вводить системы координат различным способом, то выражение одного и того же поля через координаты получится, как правило, различным. Таким образом, при рассмотрении поля функция точки является первичной по отношению к функции координат этой точки.

Если исследуемая величина u по своему смыслу задана в плоскости, то соответствующее поле называется *плоским*. Такие поля получаются, например, при рассмотрении тепловых процессов в пластинке, толщиной которой мы пренебрегаем. Если поле пространственное, но в некоторой декартовой системе координат x, y, z оно не зависит от z , то это поле называется *плоскопараллельным*. В таких случаях часто бывает возможно отвлечься от координаты z , т. е. исследовать поле как плоское.

2. Скалярное поле. Пусть в пространстве задано стационарное поле скалярной величины u . (Для нестационарного поля дальнейшее рассмотрение надо проводить в любой, но фиксированный момент времени.) Пусть, кроме того, в пространстве задана точка M , из которой по некоторому направлению l выходит линия (L). Тогда *производной* от u по этому направлению в точке M называется скорость изменения поля (в расчете на единицу длины пройденного пути), когда точка, выходя из M , проходит бесконечно малый путь по линии (L):

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{N \rightarrow M} \frac{u(N) - u(M)}{|\sphericalangle MN|},$$

где N — точка линии L . Легко выводится формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad}_l u, \quad (1)$$

где в правой части стоит проекция вектора $\text{grad } u$, взятого в точке M , на направление l . Здесь $\text{grad } u$ — градиент поля u , вычисляемый в декартовых координатах по формуле

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2)$$

Из формулы (1) видно, что производная $\partial u / \partial l$ не зависит от конкретной линии L , а определяется полем u , выбором точки M и направления l . Из (1) следует также, что в каждой точке M вектор $\text{grad } u$ указывает направление, по которому поле возрастает быстрее всего, причем скорость этого возрастания равна модулю этого вектора. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что хотя определение (2) градиента «привязано» к конкретной системе координат, в действительности градиент скалярного поля не зависит от выбора этой системы — он образует векторное поле, однозначно определенное исходным полем u .

Покажем применение градиента к вычислению *скорости изменения скалярного поля вдоль траектории*. Пусть задано скалярное поле

u , вообще говоря, нестационарное, т.е. $u = u(M, t)$. Пусть, далее, задан закон движения $M = M(t)$ некоторой малой частицы. Значение u в M в процессе движения представляет собой сложную функцию времени: $u = u(M(t), t)$. Скорость изменения этого значения, в расчете на единицу времени, равна

$$\frac{du}{dt} = \text{grad } u \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3)$$

где v — скорость движения частицы. Здесь левая часть называется *полной производной* по времени. Первое слагаемое в правой части называется *переносной* (*конвективной скоростью*), а второе — *местной* (*локальной*). Реальный смысл этих слагаемых очевиден.

Градиент стационарного скалярного поля u непосредственно связан с *поверхностями уровня* этого поля, на которых оно имеет одинаковое значение $u(M) = \text{const}$; в зависимости от физического смысла поля они называются изотермическими, эквипотенциальными и т.п. поверхностями. А именно, в каждой точке M_0 вектор $\text{grad } u$ нормален (т.е. перпендикулярен касательной плоскости) к поверхности уровня $u(M) = u(M_0)$, проходящей через эту точку.

Все сказанное в этом пункте непосредственно распространяется на скалярные поля, определенные в евклидовом пространстве любой размерности; естественно изменяется только формула (2). Для случая плоского поля надо говорить не о поверхностях, а о линиях уровня.

3. Векторные линии, поток, дивергенция. Будем рассматривать стационарное векторное поле $\mathbf{A} = \mathbf{A}(M)$ в пространстве. Характерными физическими примерами таких полей могут служить поле скоростей $\mathbf{v}$ или поле *массовых скоростей* $\rho \mathbf{v}$ (ρ — плотность) для потока жидкости или газа, поле сил, поле электрической или магнитной напряженности и т.д.

Векторной линией поля $\mathbf{A}$ называется линия (L), в каждой точке которой вектор поля, отвечающий этой точке, касается (L); другими словами, это — линия, идущая в каждой своей точке вдоль поля и ориентированная в соответствии с направлением касающихся ее векторов поля. В зависимости от физического смысла поля векторная линия может называться *линией тока* для поля скоростей, *силовой линией* для поля сил и т.д.

Если ввести в пространство декартовы координаты x, y, z , то можно представить поле $\mathbf{A}$ в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k} \quad (4)$$

и записать систему дифференциальных уравнений для построения векторных линий этого поля в симметричном виде:

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)}.$$

Для плоского поля вместо этой системы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{A_x(x, y)} = \frac{dy}{A_y(x/y)}.$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что через каждую неособую точку проходит ровно одна интегральная линия, т.е. векторная линия поля, а вблизи такой точки эти линии напоминают совокупность параллельных отрезков, несколько искривленных. Вблизи особой точки (например, такой, в которой все знаменатели обращаются в нуль) семейство векторных линий может иметь очень сложный вид.

Пусть теперь в пространстве, в котором задано поле вектора $\mathbf{A}$, выбрана ориентированная замкнутая или незамкнутая поверхность (σ) (ориентированность означает указание наружной и внутренней сторон). *Потоком вектора $\mathbf{A}$ через поверхность (σ)* называется интеграл по поверхности

$$Q = \int_{(\sigma)} A_n d\sigma,$$

где A_n — проекция вектора $\mathbf{A}$ на внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ к (σ) . Выражение для потока можно преобразовать к виду

$$Q = \int_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{(\sigma)} (A_x(x, y, z) d\sigma_x + A_y(x, y, z) d\sigma_y + A_z(x, y, z) d\sigma_z).$$

Здесь в первом слагаемом в правой части надо подставить выражение $x = x(y, z)$ для (σ) , а $d\sigma_x$ заменить на $\text{sgn}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) dy dz$ и аналогично надо преобразовать два других слагаемых.

Физический смысл потока зависит от физического смысла поля $\mathbf{A}$. Так, для поля скоростей газа поток равен объему газа, пронесимого через воображаемую поверхность (σ) изнутри наружу за единицу времени. Для поля массовых скоростей вместо объема получается масса газа и т.д. Поток поля $\mathbf{A}$ через поверхность (σ) иначе называется *количеством векторных линий* этого поля, пересекающих (σ) изнутри наружу. Это «количество» понимается в алгебраическом смысле: если одна часть (σ) пересекается векторными линиями изнутри наружу, а другая часть — снаружи внутрь, то общее количество векторных линий, пересекающих (σ) изнутри наружу может быть любого знака или равным нулю в зависимости от того, какую часть пересекает больше линий.

Пусть теперь в пространстве, где задано поле $\mathbf{A}$, выбрана некоторая область (Ω) , ограниченная поверхностью (σ) , которую будем считать ориентированной так, что (Ω) прилегает к ее внутренней стороне.

Тогда поток $Q = \oint_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ вектора $\mathbf{A}$ через (σ) называется *обильностью источника* векторных линий в (Ω) (источник с отрицательной

обильностью называется также *стоком*). Представление о векторных линиях, начинающихся в (Ω) , оправдывается тем, что если область (Ω) разбита на несколько областей $(\Omega_1), \dots, (\Omega_k)$, то поток поля $\mathbf{A}$ через поверхность области (Ω) равен сумме аналогичных потоков, взятых для каждой из областей $(\Omega_1), \dots, (\Omega_k)$.

Из предыдущего абзаца следует, что обильность источника векторных линий представляет собой величину, распределенную в пространстве. Поэтому можно говорить не только о средней плотности источника Q/Ω (под Ω понимается объем области (Ω)), но и о плотности источника в любой точке M пространства, равной

$$\lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \frac{\Delta Q}{\Delta\Omega} = \lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \left(\oint_{(\Delta\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\sigma / \Delta\Omega \right), \quad (5)$$

где под $(\Delta\Omega)$ понимается малая область, содержащая точку M , а под $(\Delta\sigma)$ — ее поверхность. Эта плотность источника называется *дивергенцией* (*расходимостью*) векторного поля $\mathbf{A}$ и обозначается $\operatorname{div} \mathbf{A}$. Таким образом, дивергенция векторного поля — это количество векторных линий, начинающихся в бесконечно малом объеме, отнесенное к единице этого объема. Дивергенция векторного поля образует скалярное поле.

Формулу (5) можно записать в виде $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{dQ}{d\Omega}$, т. е. $dQ = \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega$. Получилось выражение для количества векторных линий, начинающихся в элементарном объеме $(d\Omega)$. Произведя суммирование, получаем выражение для количества векторных линий, начинающихся в конечной области (Ω) :

$$\oint_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\sigma = \int_{(\Omega)} \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega, \quad (6)$$

где (σ) — поверхность области (Ω) . Эта важная формула называется *формулой Остроградского*.

Физический смысл дивергенции векторного поля зависит от физического смысла этого поля. Так, если рассматривается поле скоростей $\mathbf{v}$ при течении газа, то $\operatorname{div} \mathbf{v}$ равна скорости относительного увеличения бесконечно малого объема в процессе движения: в зоне расширения дивергенция положительна, в зоне сжатия она отрицательна, а если объем не меняется, то она равна нулю. Для массовой скорости $\rho\mathbf{v}$ дивергенция равна плотности источника масс. Если массы малых частиц газа не меняются в процессе его движения, то $\operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0$; это *уравнение неразрывности*. Для поля электрической напряженности дивергенция пропорциональна плотности распределенных зарядов и т. д.

Если поле $\mathbf{A}$ имеет источники векторных линий, распределенные по поверхностям или линиям или даже сосредоточенные в отдельных

точках, то для сохранения справедливости формулы (6) в ее правую часть надо добавить интегралы, взятые по соответствующим поверхностям или линиям, а также отдельные слагаемые. Отметим еще, что определение (5) дивергенции и формула Остроградского (6) естественно преобразуются для рассмотрения плоских векторных полей.

Напомним простую формулу для вычисления дивергенции в декартовых координатах: если поле $\mathbf{A}$ задано в виде (4), то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (7)$$

В некоторых простых случаях удается найти дивергенцию непосредственно, опираясь на ее определение. В качестве примера найдем дивергенцию *центрально-симметричного поля* $\mathbf{A} = f(r)\mathbf{r}^0$. Поток этого поля через сферу радиуса r с центром в начале координат изнутри наружу равен $f(r) \cdot 4\pi r^2$. Значит, в слое между такими сферами радиусов r и $r + dr$ начинается $d(4\pi r^2 f(r))$ векторных линий поля. Так как дивергенция поля во всех точках упомянутого слоя одинакова, то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{d(4\pi r^2 f(r))}{4\pi r^2 dr} = r^{-2} \frac{d(r^2 f(r))}{dr}.$$

Мы видим, в частности, что дивергенция тождественно равна нулю вне начала координат, когда $f(r) \equiv Cr^{-2}$ ($C = \text{const}$). Для такого поля поток через рассмотренные сферы равен $\pi r^2 \cdot Cr^{-2} = 4\pi C$, т.е. рассматриваемое поле имеет источник векторных линий обильности $4\pi C$ в начале координат и сток такой же обильности на бесконечности, т.е. $\operatorname{div} \mathbf{A} = 4\pi C \delta(\mathbf{r})$, где δ — дельта-функция в пространстве. Такими являются гравитационное поле от точечной массы и электростатическое поле от точечного заряда.

4. Линейный интеграл, циркуляция, ротор. Пусть в пространстве, в котором задано поле вектора $\mathbf{A}$, выбрана ориентированная линия (L) , т.е. линия, для которой указано направление ее обхода. Тогда *линейным интегралом вектора $\mathbf{A}$ по линии (L)* называется интеграл

$$I = \int_{(L)} A_\tau dL, \quad (8)$$

где A_τ — проекция вектора $\mathbf{A}$ на касательную к (L) , проведенную в направлении обхода. Этот интеграл можно записать также в виде

$$I = \int_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(L)} (A_x dx + A_y dy + A_z dz). \quad (9)$$

Линейный интеграл обладает свойствами обычных интегралов; при перемене ориентации линии (L) он множится на -1 .

Физический смысл линейного интеграла особенно прост, если $\mathbf{A}$ — поле сил: тогда интеграл (8) равен работе, совершаемой полем, когда точка, на которую действует сила, проходит линию (L).

Если (L) — замкнутая линия, то линейный интеграл (8) называется *циркуляцией*.

Применяя декартовы координаты x, y, z , можно получить выражение для циркуляции поля, заданного в виде (4). Для этого надо ввести вектор, называемый *ротором* (*вихрем*) этого поля и обозначаемый $\text{rot } \mathbf{A}$ (или $\text{curl } \mathbf{A}$) по формуле

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (10)$$

Тогда для бесконечно малого замкнутого контура (ΔL), ограничивающего площадку (ΔS), справедлива формула

$$\oint_{(\Delta L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\text{rot}_n \mathbf{A})_0 \Delta S + \dots, \quad (11)$$

где rot_n означает проекцию ротора на нормаль к (ΔS), индекс 0 говорит о том, что ротор берется в какой-нибудь точке M_0 площадки (ΔS), а многоточием обозначены члены более высокого порядка, чем ΔS . При этом направление нормали выбирается в соответствии с направлением обхода контура: если система координат правая, применяется правило правого винта — а если левая — то правило левого винта.

Из формулы (11) следует, что

$$(\text{rot}_n \mathbf{A})_M = \lim_{(\Delta L) \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{(\Delta L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

Таким образом, в каждой точке пространства, в котором задано поле $\mathbf{A}$, вектор $\text{rot } \mathbf{A}$ направлен нормально той малой площадке, циркуляция по контуру которой самая большая, причем модуль $|\text{rot } \mathbf{A}|$ равен этой циркуляции в расчете на единицу площади площадки. Отсюда, в частности, видно, что хотя определение (10) ротора было «привязано» к выбранной системе координат, но в действительности ротор не зависит от этого выбора: $\text{rot } \mathbf{A}$ образует векторное поле, инвариантно связанное с полем $\mathbf{A}$. (Такая зависимость проявляется только при упомянутом выше переходе от правой системы координат к левой или обратно.)

Наиболее простой физический смысл ротор имеет при рассмотрении поля $\mathbf{v}$, скоростей частиц жидкости или газа для стационарного потока: оказывается, что вектор $\text{rot } \mathbf{v}$ равен удвоенному вектору угловой скорости частицы. Таким образом, отличие поля $\text{rot } \mathbf{v}$ от нуля говорит о завихренности потока.

Формулу (11) для бесконечно малой площадки (dS) с контуром (dL) можно записать в виде

$$\oint_{(dL)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\text{rot}_n \mathbf{A}) dS. \quad (12)$$

Однако нетрудно проверить, что если ориентированную поверхность (S) (уже не малую) с контуром (L) разрезать на части и все эти части ориентировать в соответствии с ориентацией (S), то циркуляция любого векторного поля по (L) окажется равной сумме циркуляции этого поля по контурам всех частей, так как все интегралы по «разрезам» взаимно уничтожаются. Поэтому, если все части считать бесконечно малыми и для каждой из них применить формулу (12), то мы придем к формуле

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(S)} \text{rot}_n \mathbf{A} dS \left(= \int_{(S)} \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right), \quad (13)$$

в которой под $d\mathbf{S}$ понимается вектор площадки (dS). Эта важная формула называется *формулой Стокса*.

Формула Стокса часто применяется к плоскому полю $\mathbf{A} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$. Будем считать систему координат x, y правой, и пусть некоторый замкнутый контур (L), ориентированный против часовой стрелки, ограничивает область (S). Тогда из формулы (10) следует, что

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

и потому, в силу (9), формула (13) приобретает вид

$$\oint_{(L)} (Pdx + Qdy) = \int_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS. \quad (14)$$

Этот частный случай формулы Стокса носит название *формулы Грина*.

Если система координат правая, но контур (L) обходится по часовой стрелке, то левую либо правую часть формулы (14) надо умножить на -1 . Случай левой системы координат предоставляется читателю.

§2. Оператор Гамильтона

1. Операции первого порядка. Гамильтон заметил, что операции (1.2), (1.7) и (1.10) можно более просто записать, если ввести символ

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

называемый *набла* (от греческого $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ — арфа, форма которой напоминает значок ∇). Сам по себе этот символ представляет собой знак действия над полем, т.е. оператор ¹⁾ Этот *оператор Гамильтона векторно-дифференциальный* и при своем действии обладает как свойствами вектора, так и свойствами оператора дифференцирования. «Умножение», т.е. действие оператора Гамильтона на скаляр (точнее, на скалярное поле) u и на вектор $\mathbf{A}$, производится по следующим естественным правилам:

$$\nabla u = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \text{grad } u, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{A}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \dots = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (3)$$

В формулах, содержащих ∇ , этот оператор действует как дифференциальный только на расположенный за ним множитель; результат такого действия дальнейшие множители уже не дифференцирует. Поэтому следует избегать записи вида ∇uv , которую более естественно понимать как $(\nabla u)v = (\text{grad } u)v = v \text{ grad } u$, но иногда ее понимают как $\nabla(uv) = \text{grad}(uv)$, а это, конечно, не одно и то же.

Если же в каком-либо выражении за наблой нет множителей, то оно представляет собой оператор; например,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \nabla &= (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

— это скалярный дифференциальный оператор, который может действовать на скалярное или векторное поле. На основании формулы для производной по направлению этот оператор можно записать также в виде $A \frac{\partial}{\partial l_A}$, где l_A — направление вектора $\mathbf{A}$. В частности, для скоро-

¹⁾ Мы говорим, что задан *оператор*, если каждой функции из некоторого класса функций поставлена в соответствие функция из того же или из некоторого другого класса функций; по поводу понятия оператора см., например, ЛВМ, пп. XIV.26 и XV.20.

сти (1.3) изменения скалярного или векторного поля вдоль траектории получаем выражение

$$\frac{d}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}.$$

2. Правила действий. При действиях с оператором ∇ надо пользоваться правилами векторной алгебры и правилами дифференцирования. Например,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \mathbf{B}, \\ \operatorname{grad}(\lambda u) &= \nabla(\lambda u) = \lambda \nabla u = \lambda \operatorname{grad} u \quad (\lambda = \text{const}), \end{aligned} \quad (4)$$

так как умножение на скаляр и дифференцирование обладают этим свойством линейности. В то же время в формуле (4) нельзя было бы считать λ зависящим от точки пространства, т.е. скалярным полем, так как тогда получилось бы, что мы вынесли переменную величину за знак производной. Чтобы охватить этот случай, заметим, что в обычной формуле для производной произведения

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (5)$$

первое слагаемое получается, если в процессе дифференцирования считать v постоянным, а второе — если в этом процессе считать u постоянным (продумайте этот подход, исходя из правила дифференцирования сложной функции). Поэтому дифференцирование (5) можно выполнить так:

$$(uv)' = (u_c v)' + (uv_c)' = u_c v' + u' v_c = uv' + u' v,$$

где индекс c указывает, что при дифференцировании к данной величине надо относиться как к постоянной; конечно, если величина стоит вне знака дифференцирования, то индекс c у нее можно снять. Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(uv) &= \nabla(uv) = \nabla(u_c v) + \nabla(uv_c) = \\ &= u \nabla v + v \nabla u = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u. \end{aligned}$$

Покажем еще несколько, примеров действия с наблой:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u\mathbf{A}) &= \nabla \cdot (u\mathbf{A}) = \nabla \cdot (u_c \mathbf{A}) + \nabla \cdot (u\mathbf{A}_c) = \\ &= u(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \nabla u \cdot \mathbf{A} = u \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{A}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{A}_c \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_c) =$$

(здесь надо воспользоваться формулой для векторно-векторного произведения¹⁾), однако расположить множители в таком порядке, чтобы

¹⁾ Напомним формулы векторной алгебры: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

набла действовала на тот множитель, который считается переменным)

$$\begin{aligned} &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A}_c \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_c) =$$

(здесь надо воспользоваться свойствами векторно-скалярного произведения и переставить сомножители в нужном порядке)

$$= -\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Продумайте эти вычисления!

3. Интегральные формулы. Из формулы Остроградского (1.6) можно получить две другие полезные формулы преобразования поверхностного интеграла в объемный. Для этого положим сначала в (4) $\mathbf{A} = u\mathbf{i}$; тогда получим

$$\oint_{(\sigma)} u \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{i}}) d\sigma = \oint_{(\Omega)} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega.$$

Помножив обе части на $\mathbf{i}$, а затем проделав то же с полями $\mathbf{A} = u\mathbf{j}$ и $\mathbf{A} = u\mathbf{k}$ и сложив результаты, получим (проверьте!)

$$\oint_{(\sigma)} u \mathbf{d}\sigma = \oint_{(\Omega)} \operatorname{grad} u d\Omega. \quad (7)$$

Эта формула имеет простой физический смысл. Пусть объем (Ω) заполнен покоящейся жидкостью и под действием поля внешних сил с объемной плотностью $\mathbf{f}$ в ней образовалось поле давлений u . Тогда $\operatorname{grad} u = \mathbf{f}$ (докажите это, рассмотрев силы, действующие на малый кубик со сторонами, параллельными осям координат), а. потому правая часть (11) равна сумме всех объемных сил, действующих на (Ω) . В то же время левая часть (11) равна с противоположным знаком сумме сил, действующих на поверхность (σ) . Поэтому равенство (11) — это необходимое условие равновесия: сумма всех объемных сил должна быть противоположна сумме всех поверхностных сил, т. е. общая сумма всех сил равна нулю.

Для вывода другой формулы подставим вместо $\mathbf{A}$ в формулу (1.6) $\mathbf{A} \times \mathbf{i} = A_z\mathbf{j} - A_y\mathbf{k}$. Так как $\operatorname{div}(A_z\mathbf{j} - A_y\mathbf{k}) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \operatorname{rot}_x \mathbf{A}$, а $(\mathbf{A} \times \mathbf{i}) \cdot \mathbf{d}\sigma = (\mathbf{d}\sigma \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{d}\sigma \times \mathbf{A})_x$, то формула (1.6) дает

$$\left(\int_{(\sigma)} \mathbf{d}\sigma \times \mathbf{A} \right)_x = \left(\int_{(\Omega)} \operatorname{rot} \mathbf{A} d\Omega \right)_x.$$

Помножив обе части на $\mathbf{i}$, а затем прибавив аналогичные выражения для двух других координат, получим, что

$$\int_{(\sigma)} \mathbf{d}\sigma \times \mathbf{A} = \int_{(\Omega)} \text{rot } \mathbf{A} \, d\Omega. \quad (8)$$

Если обе части каждой из формул (1.6), (7) и (8) разделить на Ω , а затем перейти к пределу, когда (Ω) стягивается в точку, мы получим инвариантные, не связанные с выбором системы координат определения величин $\text{div } \mathbf{A}$, $\text{grad } u$, $\text{rot } \mathbf{A}$ соответственно. Сравнение получающихся формул с формулами (2), (1) и (3) приводит к символической формуле для оператора Гамильтона

$$\nabla \dots = \lim \frac{1}{\Omega} \oint_{(\sigma)} \dots \mathbf{d}\sigma = \frac{1}{d\Omega} \oint_{(d\sigma)} \dots \mathbf{d}\sigma.$$

4. Операции второго порядка. После применения дифференциальной операции к полю получается новое поле, к которому можно вновь применять эти операции; повторное применение двух операций первого порядка, описанных в § 1, называется *дифференциальной операцией второго порядка*. Конечно, не всякие комбинации имеют смысл; например, не имеет смысла комбинация $\text{div div } \mathbf{A}$, так как $\text{div } \mathbf{A}$ образует скалярное поле, от которого уже нельзя брать дивергенцию. Мы предоставим читателю убедиться в том, что с помощью комбинации операций grad , div и rot можно получить ровно пять осмысленных дифференциальных операций второго порядка:

$$\text{div grad } u, \quad \text{rot grad } u, \quad \text{grad div } \mathbf{A}, \quad \text{div rot } \mathbf{A}, \quad \text{rot rot } \mathbf{A}. \quad (9)$$

Начнем со второй комбинации; ее можно записать в виде $\nabla \times (\nabla u)$. Но для «обычного» вектора $\mathbf{a}$ и «обычного» скаляра u всегда

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a}u) = 0 \quad (10)$$

(почему?). Значит, если вместо $\mathbf{a}$ в левую часть подставить его разложение по декартовым осям и произвести вычисления по формальным правилам векторной алгебры, то мы получим нуль. Но вычисление комбинации $\nabla \times (\nabla u)$ производится по тем же формальным правилам, что и (10) только вместо a_x, a_y, a_z надо взять $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Значит, и здесь получится нуль, т. е. всегда

$$\text{rot grad } u = 0. \quad (11)$$

Аналогично получаем (проверьте!), что всегда

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0. \quad (12)$$

Это простое свойство имеет важное следствие. Именно, для любого поля $\mathbf{A}$ можно наряду с векторными линиями рассматривать *вихревые линии*, т. е. векторные линии поля $\text{rot } \mathbf{A}$. Однако дивергенция любого векторного поля равна плотности источников векторных линий этого поля (п. 3). Поэтому формула (12) говорит, что вихревые линии не могут иметь ни источников, ни стоков, т. е. они не могут ни начинаться, ни кончаться.

Первую комбинацию (9) можно записать в виде $\nabla \cdot \nabla u = (\nabla \times \nabla)u = \nabla^2 u$ где ∇^2 — скалярный дифференциальный оператор второго порядка

$$\begin{aligned} \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

который называется *оператором Лапласа (лапласи́аном)* и иногда обозначается символом Δ . Итак,

$$\text{div grad } u = \nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (13)$$

Рассмотрим, наконец, последнюю комбинацию (9). Пользуясь формулой для векторно-векторного произведения и располагая множители так, чтобы наблы действовали на поле, получим

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (14)$$

5. Разрывные поля. Если поле имеет разрывы, то применение дифференциальных операций к нему требует особого внимания, так как в результате таких действий могут появиться дельта-функция и другие обобщенные функций¹⁾. Мы рассмотрим здесь только некоторые виды разрывов, наиболее распространенные в физических приложениях; систематически подобные вопросы рассмотрены в книге [30].

Напомним, что если функция $f(x)$ имеет конечный скачок при $x = a$, который мы обозначим через $[f(a)] = f(a+0) - f(a-0)$, то при ее дифференцировании получится

$$f'(x) = \varphi(x) + [f(a)]\delta(x-a), \quad (15)$$

где $\varphi(x) = f'(x)$ ($x \neq a$) — обычная, необобщенная функция.

Пусть теперь рассматривается скалярное поле u с конечным скачком на плоскости $x = 0$:

$$u = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ f(x, y, z) & (x > 0). \end{cases}$$

¹⁾ Первоначальные сведения о них можно найти в ЛВМ, пп. XIV.25 и 27, XVI.19.

Вычисляя по формуле (1) градиент и пользуясь правилом (15), получим

$$\operatorname{grad} u = \varphi(x, y, z) + f(+0, y, z)\delta(x)\mathbf{i}, \quad \text{где } \varphi = \begin{cases} \mathbf{0} & (x < 0), \\ \operatorname{grad} f & (x > 0). \end{cases}$$

Обращаем внимание читателя на то, что дельта-слагаемое появляется только у $\frac{\partial u}{\partial x}$, но не у $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$. Грубо говоря, дело в том, что если находиться на склоне крутого оврага, но двигаться вдоль оврага, то...(продумайте, что будет).

Если, поле u имеет конечный скачок $[u]$ при переходе с внутренней стороны некоторой ориентированной поверхности (S) на внешнюю сторону, то, пользуясь независимостью градиента от выбора осей координат, получим, что

$$\operatorname{grad} u = \varphi(x, y, z) + [u]\delta(s)\mathbf{n}^0, \quad (16)$$

где $\varphi = \operatorname{grad} f((x, y, z) \in (S))$, s — длина дуги, отсчитываемая от (S) в направлении внешней нормали, а $\mathbf{n}^0$ — единичный вектор этого направления, своего в каждой точке (S) , (Напомним, что « $\in$ » означает «принадлежит», а « $\notin$ » — «не принадлежит».) Если в пространстве введена криволинейная ортогональная система координат λ, μ, ν и (S) имеет уравнение $\lambda = \lambda_0$, то вместо $\delta(s)\mathbf{n}^0$ в формуле (20) надо написать $\frac{1}{l_\lambda}\delta(\lambda - \lambda_0)\mathbf{e}_\lambda$, где l_λ — коэффициент Ламе¹⁾, а $\mathbf{e}_\lambda$ — единичный вектор, касательный к координатной линии λ .

Аналогичное рассмотрение векторного поля $\mathbf{A}$, имеющего конечный скачок $[\mathbf{A}]$ на поверхности (S) , которое мы предоставляем читателю, приводит к формуле

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \psi(x, y, z) + [A_n]\delta(s), \quad (17)$$

где $\psi = \operatorname{div} \mathbf{A}((x, y, z) \in (S))$ — обычная (не обобщенная) функция. Так как выражение вида $\sigma\delta(s)$ можно истолковать как объемную плотность массы, распределенной по (S) с поверхностной плотностью σ , то из (21) вытекает, что на (S) распределен источник векторных линий с обильностью $[A_n]$ на единицу площади. (Получите этот результат непосредственно, рассмотрев поток вектора $\mathbf{A}$ через поверхность соответственно выбранного малого цилиндра.) Подобным образом, $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \chi(x, y, z) + \mathbf{n} \times [\mathbf{A}]\delta(s)$.

Рассмотрим теперь поля с точечной особенностью, для определенности, в начале координат. Как разъяснялось в ЛВМ, п. XIV.27, функция, заданная своими значениями в точках пространства и имеющая интегрируемые особенности, еще не является обобщенной, но при дифференцировании такой функции может получиться обобщенная

¹⁾ Для криволинейных координат λ, μ, ν в пространстве коэффициент Ламе l_λ — это коэффициент пропорциональности между приращением координаты λ и соответствующим приращением длины дуги координатной линии λ , т. е. $ds_\lambda = l_\lambda d\lambda$; аналогично определяются l_μ и l_ν .

функция. (Там рассматривались функции одного переменного, но тот же результат справедлив для функций любого числа переменных.) «Водораздел» между интегрируемыми и неинтегрируемыми функциями с точечной особенностью проходит по степенным порядкам особенностей; более точно, если $f(x, y, z)$ при $r \rightarrow 0$ ($r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) имеет порядок r^{-p} , то при $p < 3$ функция f интегрируемая, а при $p \geq 3$ — неинтегрируемая. С другой стороны, легко проверить на простых примерах, что при дифференцировании порядок степенной особенности повышается на единицу (например, $(x^{-5})' = -5x^{-6}$ и т. п.). Поэтому при применении дифференциальных операций первого порядка к полю, имеющему степенную изолированную особенность ниже второго порядка, получается особенность ниже третьего порядка, т. е. такое применение не требует привлечения обобщенных функций.

Значительный интерес, представляя изолированные степенные особенности второго порядка; они играют для изолированных особенностей в пространстве ту же роль, что конечные скачки для функций одного переменного. Если в формулах (1.6), (7) и (8) за (σ) принять малую сферу с центром в начале координат, то так как $\sigma = 4\pi r^2$, при $r \rightarrow 0$ левые части имеют конечные пределы, а потому подынтегральные функции в правых частях имеют дельта-слагаемые. Например, если поле $\mathbf{A}$ имеет в начале координат изолированную степенную особенность второго порядка, то $\operatorname{div} \mathbf{A}$ имеет слагаемое $k\delta(\mathbf{r}) = k\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, где $k = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$; другими словами, у

такого поля в начале координат имеется источник векторных линий (см. п. 1.3) обильности k .

Для пространственных полей с особенностью вдоль некоторой линии, а также для плоских полей аналогичную роль играют степенные особенности первого порядка.

§3. Специальные типы полей

1. Потенциальные поля. Векторное поле $\mathbf{A}$ называется *потенциальным*, если оно является градиентом некоторого скалярного поля, т. е. если

$$\mathbf{A} = -\operatorname{grad} \varphi (= \operatorname{grad} (-\varphi)); \quad (1)$$

при этом поле φ называется *потенциалом* (точнее, *скалярным потенциалом*) поля $\mathbf{A}$.

Обращаем внимание читателя на то, что часто потенциал определяется формулой $\mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi (= \operatorname{grad} \varphi)$. Так введенный потенциал отличается множителем (-1) от того, который мы будем рассматривать. Иногда для различения этих двух подходов применяются термины «потенциал» и «потенциальная функция», однако такая терминология не общепринята. Поэтому при чтении работы, в которой применяются

потенциалы, надо уточнять, в каком из этих двух смыслов употребляется это понятие.

Так как градиент постоянного скалярного поля и только такого поля равен нулю (почему?), то *потенциал любого поля, если он имеется, определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого*. Подбирая это слагаемое, можно пронормировать потенциал (т. е. избавиться от этого произвола), например, сделав это значение равным нулю в некоторой заданной точке. Чаще всего потенциал нормируют условием равенства нулю на бесконечности — если там потенциал имеет вполне определенное конечное значение.

Далеко не всякое поле является потенциальным. Именно, из (1) и общей формулы (2.11) сразу следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0, \quad (2)$$

т. е. *всякое потенциальное поле является безвихревым*. С другой стороны ¹⁾, известно, что *если поле $\mathbf{A}$ задано в односвязной области (G) , то условие (2) равносильно независимости интеграла $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ от контура интегрирования*, или, что то же, условию

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (3)$$

для любого замкнутого контура (L) , расположенного в (G) . Таким образом, *безвихревое поле, заданное в односвязной области, является бесциркуляционным*. Там же было показано, что из (3) следует, что выражение $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ является полным дифференциалом. Но равенство $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = d(-\varphi)$ равносильно (1) (почему?), т. е. *всякое бесциркуляционное поле является потенциальным; обратное тоже верно*, что мы предлагаем доказать желающим.

Если $\mathbf{A}$ — поле сил, то интеграл $\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ равен работе, производимой полем, когда частица, на которую оно действует, проходит линию (L) . Поэтому для такого поля условие (3) наиболее наглядно — поле потенциально тогда и только тогда, когда его работа по любому замкнутому контуру равна нулю.

Итак, *в односвязной области условия (1), (2) и (3) равносильны, т. е. условия потенциальности, отсутствия вихря и отсутствия циркуляции векторного поля эквивалентны*.

2. Безвихревое поле в многосвязной области. Рассмотрим безвихревое поле $\mathbf{A}$ в многосвязной области (G) . В этом случае циркуляция вектора $\mathbf{A}$ по замкнутому контуру уже не обязана равняться нулю; из доказательства формулы (3) вытекает только, что циркуля-

¹⁾ См., например, ЛБМ, пп. XVI.27 и XIV.24.

ция заведомо равна нулю, если контур внутри области (G) можно стянуть в точку. Например, на рис. 1, где область получается, если из пространства изъять два бесконечных цилиндра (такая область называется трехсвязной), заведомо равна нулю циркуляция вектора $\mathbf{A}$ по контуру (L).

Что касается замкнутых контуров, которые нельзя стянуть в точку, то о них можно утверждать лишь, что *если два контура (L_1) и (L'_1), можно путем непрерывной деформации перевести один в другой, не выходя за пределы области (G), то циркуляции вектора, $\mathbf{A}$ по этим контурам одинаковы*. Действительно, если соединить эти контуры линией AD (см, рис. 1) и рассмотреть изображенный пунктиром составной контур $ABCADEFDA$, то его уже можно стянуть а точку (почему?), откуда

$$\begin{aligned} \oint_{ABCADEFDA} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{ABCA} + \int_{AD} + \int_{DEFD} + \int_{DA} = \\ &= \oint_{(L'_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{AD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{(L_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{DA} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0. \end{aligned}$$

Но интегралы по соединительной линии взаимно уничтожаются (почему?) и мы, таким образом, получаем

$$\oint_{(L'_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{(L_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \oint_{(L'_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{(L_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

В то же время циркуляция по контуру (L_2) (рис. 1), вообще говоря, совершенно независима от циркуляции по (L_1). Легко проверить, что для случая трехсвязной области, изображенной на рис. 1, циркуляции по контурам (L_1) и (L_2) (эти циркуляции мы обозначим буквами Γ_1 и Γ_2) образуют *полную систему независимых циркуляций* в том смысле, что циркуляцию по любому другому замкнутому контуру легко выразить через Γ_1 и Γ_2 . Например, циркуляция по контуру (L_3) равна $\Gamma_1 + \Gamma_2$ (для доказательства этого надо деформировать (L_3) так, как это показано пунктиром); циркуляция по (L_4) равна $\Gamma_2 - 2\Gamma_1$ и т. д. Для $(k+1)$ -связной области (говорят также — области *порядка связности $k+1$*) число независимых циркуляций равно k . В самом простом случае, для двухсвязной области (такими являются пространство, из которого изъят бесконечный круговой цилиндр, внешность или внутренность тора и т. п.) имеется лишь одна независимая циркуляция.

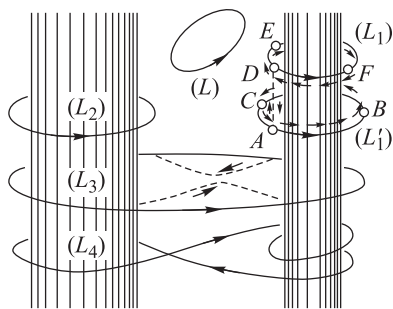


Рис. 1

Теперь легко понять, что будет, если для безвихревого поля в многосвязной области строить потенциал по той же формуле

$$\varphi(M) = \int_{\sim M_0 M} d\varphi = - \int_{\sim M_0 M} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

($\sim M_0 M$ — любая дуга, соединяющая фиксированную точку M_0 с текущей точкой M по области), что и в односвязном случае. Соотношение (1) будет выполнено, однако в данном случае функция $\varphi(M)$ (т. е. потенциал) будет, вообще говоря, многозначной. Например, если непрерывно продолжать значение функции $\varphi(M)$ вдоль линии (L_1) на рис. 1 и совершить при этом полный обход этой линии, то потенциал получит приращение $-\int_{(L_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma_1$. Тот же результат получится при

обходе контура (L'_1), а при обходе контура (L_2) потенциал получит приращение Γ_2 . По этой причине константы Γ_1 и Γ_2 называются также периодами потенциала.

Итак, потенциал безвихревого поля в многосвязной области является, вообще говоря, многозначной функцией; такое поле с многозначным потенциалом не считается потенциальным. Только в том частном случае, когда все периоды потенциала равны нулю — другими словами, когда поле бесциркуляционное, — потенциал является однозначным, т. е. поле — потенциальным.

3. Соленоидальные поля. Векторное поле $\mathbf{A}$ называется соленоидальным, если оно является ротором некоторого векторного поля, т. е. если

$$\mathbf{A} = \text{rot } \Phi; \quad (4)$$

при этом поле Φ называется векторным потенциалом поля $\mathbf{A}$.

Векторный потенциал соленоидального поля определен с точностью до градиента произвольного поля. В самом деле, если $\Phi_1 = \Phi + \text{grad } \psi$, то в силу (1.15)

$$\text{rot } \Phi_1 = \text{rot } \Phi + \text{rot grad } \psi = \mathbf{A} + 0 = \mathbf{A};$$

легко проверить и обратное. Пользуясь этим свойством и подбирая функцию ψ соответствующим образом, можно производить ту или иную нормировку векторного потенциала.

Поле, соленоидальное в некоторой области, не имеет внутри нее источников векторных линий, так как из (4) и общей формулы (1.12) следует, что

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (5)$$

Этим и объясняется название «соленоидальное поле», так как типичным векторным полем, не имеющим источников, является любое магнитное поле, в частности, поле, возникающее при прохождении тока через катушку (соленоид).

Проверим теперь, что поле, заданное во всем пространстве и не имеющее источников векторных линий, соленоидальное. Для этого будем искать векторный потенциал в специальном виде $\Phi = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j}$, тогда подстановка в (4) и приравнивание проекций дают

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = A_x, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = A_y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = A_z. \quad (6)$$

Из первого равенства можно определить Q с точностью до произвольной функции $f(x, y)$; например, можно положить

$$Q(x, y, z) = Q_0(x, y, z) + f(x, y), \quad \text{где} \quad Q_0(x, y, z) = - \int_0^z A_x(x, y, \zeta) d\zeta. \quad (7)$$

Аналогично из второго равенства (6) получим $P(x, y, z) = P_0(x, y, z) + f_1(x, y)$, где f_1 произвольна. Подставим выражения для Q и P в третье равенство (6), положив $f_1 \equiv 0$ (нам надо найти какой-нибудь векторный потенциал, а произвола в выборе f будет достаточно). Мы получим для нахождения f уравнение

$$\frac{\partial Q_0}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial P_0}{\partial y} = A_z, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = A_z - \frac{\partial Q_0}{\partial x} + \frac{\partial P_0}{\partial y}. \quad (8)$$

Однако последняя правая часть не зависит от z , так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z - \frac{\partial Q_0}{\partial x} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \right) &= \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Q_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P_0}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

в силу выполнения условия (5). Поэтому, обозначив правую часть (8) через $F(x, y)$, найдем $f(x, y) = \int_0^x F(\xi, y) d\xi$, т. е. потенциал Φ полностью построен.

Если поле рассматривается не во всем пространстве, а в некоторой области (G) , то возникают трудности с применением формулы (7). Более детальное исследование этого вопроса, которым мы здесь не будем заниматься, показывает, что для соленоидальности всякого векторного поля в (G) без дивергенции необходимо и достаточно, чтобы любую расположенную в (G) замкнутую, поверхность типа сферы можно было путем непрерывной деформации стянуть в точку, не выходя за пределы (G) . (Здесь выражение «типа сферы» означает поверхность, полученную из сферы путем непрерывной деформации; например, поверхность тора не имеет типа сферы.) Это свойство области называется *ациклическостью в размерности 2*, в отличие от односвязности, которая иначе

называется *ацикличностью в размерности 1*. (Примеры: выпуклые области ацикличны в размерностях 1 и 2; тор (тело) — в размерности 2, но не 1; пространство с изъятым шаром — в размерности 1, но не 2; пространство с изъятым тором — ни в размерности 1, ни в 2). Можно доказать, что область в трехмерном пространстве ациклична в размерности 1 тогда и только тогда, когда она ограничена и имеет связную (состоящую из одного куска) границу или когда она не ограничена и все компоненты связности (куски) ее границы также простираются в бесконечность.

Поток соленоидального поля через любую замкнутую поверхность (σ) равен нулю. Если поле задано всюду внутри (σ), то это вытекает из формулы Остроградского (1.4). Чтобы проверить утверждение в общем случае, разобьем (σ) на малые площадки ($d\sigma$) и ориентируем их контуры в соответствии с ориентацией (σ). Тогда сумма циркуляции $d\Gamma$ вектора Φ по всем этим контурам равна нулю (почему?). Однако $d\Gamma = \text{rot}_n \Phi d\sigma = A_n d\sigma$, откуда $\oint_{(\sigma)} A_n d\sigma = \oint d\Gamma = 0$, что и требовалось

доказать.

Обратно, если

$$\oint_{(\sigma)} A_n d\sigma = 0 \text{ для любой замкнутой поверхности } (\sigma) \quad (9)$$

в некоторой области (G), то поле $\mathbf{A}$ в этой области соленоидальное. Из (9) и инвариантного определения дивергенции вытекает (5), откуда с помощью доказанного в следующем за (5) абзаце получается наше утверждение, если (G) совпадает со всем пространством. Доказательство справедливости утверждения для любой области (G) более сложное, и мы не будем его проводить.

Теперь понятна роль требования ацикличности в размерности 2. Если это требование выполнено и, кроме того, $\text{div } \mathbf{A} = 0$ в (G), то для любой замкнутой поверхности (σ) в (G) поле $\mathbf{A}$ оказывается заданным всюду внутри (σ), и потому к (σ) можно применить формулу Остроградского, из которой и вытекает (9). Однако пусть (G) не ациклична, например (G) получается изъятием из пространства двух шаров, (K_1) и (K_2). а каждая из замкнутых поверхностей (σ_i) ($i = 1, 2$) содержит внутри себя шар (K_i) и не содержит точек другого шара. Тогда из (5), вообще говоря, не вытекают равенства

$$\int_{(\sigma_1)} A_n d\sigma = 0, \quad \int_{(\sigma_2)} A_n d\sigma = 0; \quad (10)$$

однако из (5) и (10) уже вытекает (9), т. е. поле $\mathbf{A}$ будет соленоидальным.

В заключение отметим, что поле $\mathbf{A}$ может быть *одновременно потенциальным и соленоидальным*, т. е. в рассматриваемой области не иметь ни вихрей, ни источников векторных линий. Тогда $\mathbf{A} = -\text{grad } \varphi$; но так как $\text{div } \mathbf{A} = 0$, то должно быть

$$\text{div grad } \varphi = 0, \text{ т. е. (см. п. 1.4) } \nabla^2 \varphi = 0. \quad (11)$$

Это уравнение называется *уравнением Лапласа*, а его решения называются *гармоническими функциями* (не путать с гармонической, т. е. синусоидальной зависимостью!). Итак, для того чтобы, потенциальное поле было также и соленоидальным, необходимо, а для поля, заданного во всем пространстве (или — более общий случай — в области, ациклической в размерности 2), и достаточно, чтобы потенциал был гармоническим.

Уравнение Лапласа встречалось еще в работах Л. Эйлера, но название свое получило по имени П. Лапласа, рассмотревшего это уравнение в своих работах по теорий тяготения в 1782 г.

4. Примеры. Рассмотрим центрально-симметричное поле в пространстве, определенное формулой

$$\mathbf{A}f(r)\mathbf{r}^0 = \frac{f(r)}{r}\mathbf{r} \quad \left(\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r}\right). \quad (12)$$

Из определения дивергенции легко получить (п. 1.3), что $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 f(r))$. В частности, центрально-симметричное поле без источников вне начала координат характеризуется тем, что

$$r^2 f(r) = \text{const}, \text{ откуда } f(r) = \frac{C}{r^2}, \quad \mathbf{A} = \frac{C}{r^3} \mathbf{r}. \quad (13)$$

Это так называемый *закон Кулона*, названный по имени видного французского физика Ш. Кулона (1736–1806), который впервые обнаружил применение этого закона в теории электрических и магнитных взаимодействий. Поток такого поля через любую сферу с центром в начале координат равен $\frac{C}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi C$, т. е. не зависит от r ; другими словами, в самом начале координат в данном случае имеется источник векторных линий обильности $4\pi C$, уходящих на бесконечность. Мы предоставляем читателю подумать, где начинаются и где заканчиваются (или куда уходят) векторные линии, если $f(r)$ при $r \rightarrow 0$ возрастает медленнее или быстрее, чем r^{-2} .

Однако точечный источник обильности $Q = 4\pi C$ имеет плотность $Q\delta(\mathbf{r}) = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, т. е. мы приходим к важной формуле

$$\operatorname{div} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{r} \right) = Q\delta(\mathbf{r}).$$

Аналогичное рассмотрение плоского центрально-симметричного поля вида (12) с $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ дает, что если вне начала координат нет источников, то $f(r) = \frac{C}{r}$, $Q = 2\pi C$,

$$\operatorname{div} \left(\frac{Q}{2\pi(x^2 + y^2)} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \right) = Q\delta(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) (= Q\delta(x)\delta(y)).$$

Получающуюся при этом картину можно истолковать как точечный источник векторных линий обильности Q на плоскости, либо как источник, распределенный в пространстве вдоль оси z с обильностью Q на единицу длины.

Диполь получается при наложении источника и стока равной обильности, расположенных в бесконечной близости друг от друга. Однако если при этом обильности источника и стока остаются конечными, то их поля просто взаимно уничтожаются. Поэтому указанные обильности должны быть бесконечно большими, причем такими, чтобы произведение обильности источника на расстояние между источником и стоком (это произведение называется *моментом* диполя) оставалось конечным. Наряду с моментом диполь имеет *ось*, проходящую через источник и сток в направлении от последнего к первому.

Векторное поле для случая диполя можно получить из рассмотрения рис. 2, где l — ось диполя. При достаточно малом h в любой точке M будет

$$\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{Q}{4\pi r^3} \mathbf{r} = Qh \frac{\frac{\mathbf{r}_1}{4\pi r_1^3} - \frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3}}{h} = m \frac{d}{dl} \left(\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3} \right), \quad (14)$$

где m — момент диполя; (Этот прием, посредством которого мы нашли поле (14), годится не только для поля (13), но для любого исходного поля.) Упрощая правую часть (14), получим (проверьте!)

$$\mathbf{A} = \frac{m}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \frac{d\mathbf{r}}{dl} - \frac{3\mathbf{r}}{r^4} \frac{dr}{dl} \right) = \frac{m}{4\pi r^3} \left(3 \frac{\mathbf{r}}{r} \cos \alpha - \mathbf{l}^0 \right).$$

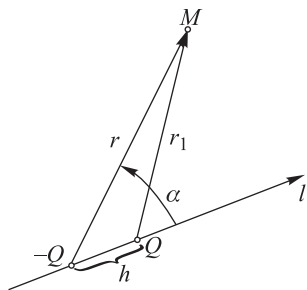


Рис. 2

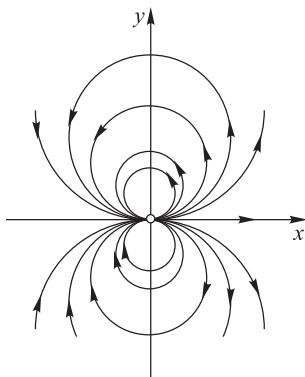


Рис. 3

Аналогичное рассмотрение диполя для плоского поля дает результат

$$\mathbf{A} = \frac{m}{2\pi r^2} \left(2 \frac{\mathbf{r}}{r} \cos \alpha - \mathbf{l}^0 \right).$$

Если для простоты считать ось l совпадающей с осью x , то поле в декартовых координатах приобретает вид

$$\mathbf{A} = \frac{m}{2\pi(x^2 + y^2)} \left(2 \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2} x - \mathbf{i} \right) = \frac{m[(x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}]}{2\pi(x^2 + y^2)^2}.$$

Интегрирование уравнения $\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y}$ для векторных линий дает (проверьте!) $x^2 + y^2 = Cy$. Векторные линии для плоского диполя изображены на рис. 3.

5. Ньютонов потенциал. Легко проверить, что поле (12) имеет потенциал $\varphi(r) = \int f(r)dr$. В частности, кулоново поле (13) имеет потенциал $\frac{C}{r} = \frac{Q}{4\pi r}$, где Q — обильность источника векторных линий, расположенного в точке $r = 0$. Пусть теперь источник векторных линий безвихревого поля $\mathbf{A}$ распределен в пространстве с объемной плотностью $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$. Такой источник можно получить в результате наложения бесконечно малых источников, каждый из которых расположен в некоторой точке $(x_0; y_0; z_0)$ и имеет обильность $f(\mathbf{r}_0)d\Omega_0$ ($d\Omega_0 = dx_0 dy_0 dz_0$), и потому потенциал в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ равен

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{f(\mathbf{r}_0)d\Omega_0}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Суммируя эти потенциалы, получаем потенциал поля $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{f|\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\Omega_0 = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{f(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} dx_0 dy_0 dz_0, \end{aligned} \quad (15)$$

где интеграл, распространен по всему пространству или, что равносильно, по объему, занятому источником, т. е. где $f \neq 0$. Выражение (15) называется *ньютоновым потенциалом* с плотностью f .

Приведенный вывод формулы (15) — это старый пример применения функции влияния¹⁾: переход от плотности источников безвихревого векторного поля к его потенциалу является линейным оператором с функцией влияния $\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$, где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы точек воздействия и наблюдения.

Полученный результат имеет простой физический смысл. Точечный заряд q , помещенный в начале координат, порождает в вакууме электрическое поле $\mathbf{E} = k \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_0$, где коэффициент k определяется выбором системы единиц. Это поле имеет в начале координат источник векторных линий обильности $Q = 4\pi kq$

¹⁾ См., например, ЛВМ, пп. XIV.26 и XVI.19

и потенциал $k \frac{q}{r}$. Таким образом, (15) представляет собой потенциал электрического поля, порожденного зарядами, распределенными в пространстве с объемной плотностью $\frac{1}{4\pi k} f(\mathbf{r})$. Аналогичный результат, но с противоположным знаком, получается для гравитационного поля, порожденного распределенными в пространстве массами.

Если функция f принимает конечные значения и финитна (т.е. вне некоторой конечной области тождественно равна нулю), как мы будем для простоты считать, то интеграл (15) имеет единственную особенность при $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$; однако после перехода к сферическим координатам с центром в точке $(x; y; z)$ и эта особенность пропадает. (Если же какое-либо из этих двух условий не выполнено, то надо еще заботиться о сходимости интеграла; например, для сходимости интеграла на бесконечности достаточно, чтобы $|f(x, y, z)|$ при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ убывала быстрее r^{-2} (почему?).)

Полученный результат допускает также следующую трактовку. Так как $f(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) = -\nabla^2 \varphi$ (п. 1.4), то ньютонов потенциал (15) представляет собой решение трехмерного уравнения Пуассона (выведенного С. Пуассоном в 1813 г.)

$$\nabla^2 \varphi = -f(x, y, z), \quad (16)$$

которое является неоднородным вариантом уравнения Лапласа (11). В предположениях предыдущего абзаца легко проверить, что $\varphi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$; можно показать (но мы здесь на этом не будем останавливаться), что при таком условии на бесконечности уравнение (16) имеет лишь одно решение, т.е. то, которое дается интегралом (15).

Существенность условия на бесконечности видна уже в случае $f \equiv 0$, так как если этого условия не ставить, то наряду с «основным» решением $\varphi \equiv 0$ появляются не только решения $\varphi = \text{const}$, не играющие роли в теории потенциала, но также и «нетривиальные» решения вида $\varphi = ax + by + cz$ — потенциалы диполей, расположенных на бесконечности, — и решения с еще большей скоростью роста.

Аналогичное рассмотрение плоских полей приводит взамен (15) к *логарифмическому потенциалу*

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2\pi} \int f(r_0) \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| d\sigma_0 = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int f(x_0, y_0) \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx_0 dy_0, \end{aligned}$$

который удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона. Если функция f финитна и принимает конечные значения, то при $r \rightarrow \infty$ этот потенциал обращается, вообще говоря, в бесконечность; однако производные от него стремятся к нулю. Этим условием решение уравнения Пуассона определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

6. Построение векторного поля по заданным ротору и дивергенции. При исследовании общих векторных полей возникает задача (см. конец этого пункта) о построении векторного поля Φ , если заданы

$$\operatorname{rot} \Phi = \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \operatorname{div} \Phi = \alpha(\mathbf{r}). \quad (17)$$

Мы будем рассматривать поля, заданные во всем пространстве, и считать поля $\mathbf{A}$ и α финитными или достаточно быстро стремящимися к нулю при $r \rightarrow \infty$; кроме того, должно выполняться необходимое условие $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (п. 3). Оказывается, что *эта задача при дополнительном естественном требовании*

$$\Phi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad (18)$$

имеет одно и только одно решение.

Для построения решения возьмем ротор от обеих частей первого уравнения (17) и воспользуемся формулой (1.14), получим

$$\nabla^2 \Phi = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Phi - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Phi = \operatorname{grad} \alpha - \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (19)$$

Так как правая часть задана, то получаем уравнение Пуассона вида (16), но уже для векторного поля; однако так как можно перейти к проекциям этого поля, то решение $\Phi(\mathbf{r})$ уравнения (19) все равно получится в виде ньютонова потенциала (продумайте!) и будет удовлетворять требованию (18). Чтобы проверить, что поле Φ , найденное из уравнения (19), удовлетворяет уравнениям (17), перепишем (19) в виде

$$\operatorname{grad} (\operatorname{div} \Phi - \alpha) = \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \Phi - \mathbf{A}). \quad (20)$$

Взяв дивергенцию от обеих частей, получим, что $\nabla^2 (\operatorname{div} \Phi - \alpha) = 0$, откуда из условия стремления к нулю при $r \rightarrow \infty$ получаем, что $\operatorname{div} \Phi - \alpha \equiv 0$, т.е. второе уравнение (17). Если же взять ротор от обеих частей (20), воспользоваться формулой (1.14) и учесть, что $\operatorname{div} (\operatorname{rot} \Phi - \mathbf{A}) = 0 - \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, то аналогично получим выполнение первого уравнения (17).

Построенное решение единственно. В самом деле, разность двух полей, удовлетворяющих уравнениям (20), удовлетворяет аналогичным однородным уравнениям (т.е. с $\mathbf{A} \equiv 0$, $\alpha \equiv 0$), и наше утверждение вытекает из (19) (почему?).

Из доказанного, в частности, следует *возможность представления любого финитного* (или достаточно быстро исчезающего на бесконечности) *поля $\mathbf{A}$ в виде суммы потенциального и соленоидального полей:*

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \Phi; \quad (21)$$

при дополнительных условиях $\operatorname{div} \Phi = 0$, $\varphi|_{\infty} = 0$, $\Phi|_{\infty} = 0$ такое представление однозначно.

В самом деле, взяв дивергенцию от обеих частей (21), получим $\nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \mathbf{A}$, откуда при условии $\varphi|_{\infty} = 0$ находим φ единственным способом. После этого, записав условия для Φ в виде

$$\operatorname{rot} \Phi = \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div} \Phi = 0, \quad \Phi|_{\infty} = 0,$$

мы можем применить доказанный выше результат, т. е. и Φ определяется единственным образом. Отметим, что в силу (19) уравнение для Φ имеет вид

$$\nabla^2 \Phi = \operatorname{grad} 0 - \operatorname{rot} (\mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi) = -\operatorname{rot} \mathbf{A},$$

т. е. Φ , как и φ , получается в виде ньютонова потенциала.

Глава II

ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы будем систематически исследовать комплексные функции от комплексного переменного. При этом будут предполагаться известными основные свойства комплексных чисел, включая простейшие алгебраические и трансцендентные действия над ними, а также понятие о степенных рядах с комплексными членами (см., например, ЛВМ, § VIII.1, пп. VIII.8 и 11, XVII.14); тем не менее в § 1 мы коротко напомним эти понятия и свойства.

Сейчас теория аналитических функций представляет собой значительно разработанную дисциплину, имеющую большое количество приложений. Некоторые разделы этой теории, например теория конформных отображений, непосредственно применяются к изучению плоских полей. Еще обширнее применения теории аналитических функций к исследованию сложных интегралов, рядов, уравнений и т.д., появляющихся в разнообразных приложениях аналитических методов математики.

Мы сможем здесь осветить лишь некоторые общие положения и отдельные специальные важные для приложений вопросы; систематическое изложение теории и приложений аналитических функций можно найти, в частности, в книгах [66, 74, 83, 92, 102, 104, 107, 120, 121].

§1. Введение

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — любые вещественные числа, а i — *мнимая единица*, удовлетворяющая равенству $i^2 = -1$. При этом x называется *вещественной частью*, а y — *мнимой частью* числа z , что записывается так: $x = \Re z$, $y = \Im z$. Комплексное равенство $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ равносильно двум вещественным: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Знаками неравенства комплексные числа соединять нельзя. Комплексное число $z = x + iy$ при $y = 0$

является вещественным, при $y \neq 0$ — мнимым, при $x = 0$ — чисто мнимым.

Комплексные числа изображаются на плоскости с декартовыми координатами x, y : число $z = x + iy$ изображается точкой (x, y) либо ее радиус-вектором; в этом случае о такой плоскости говорят как о *комплексной плоскости*. Соответствующие полярный радиус ρ и полярный угол φ называются *модулем* и *аргументом* и обозначаются $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$, т. е. $x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. При этом Arg означает *общее значение аргумента*, равное $\arg z + 2k\pi$, где $\arg$ — *главное значение аргумента*, заключенное в интервале $(-\pi, \pi]$, а k — любое целое число. Числу $z = 0$ может быть приписано любое значение аргумента.

Некоторые свойства алгебраических действий:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0),$$

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \arg z_2, \quad \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \arg z_2, \quad (z_2 \neq 0),$$

$$\left[\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \right]_{k+1} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

причем первый множитель в правой части — это «школьный» положительный корень n -й степени. Таким образом, корень n -й степени из любого комплексного числа $z \neq 0$ имеет n различных комплексных значений.

Для любого комплексного числа z через z^* (пишут также $\bar{z}$) будем обозначать *комплексно сопряженное* к z число $x - iy$. Ясно, что $|\bar{z}| = |z|$, $\operatorname{Arg} z^* = -\operatorname{Arg} z$, $zz^* = |z|^2$. Любое равенство, связывающее комплексные числа, остается справедливым, если все эти числа заменить на их комплексно сопряженные.

Любой многочлен n -й степени

$$P(z) = a_0 z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0) \quad (1)$$

можно разложить на сомножители 1-й степени:

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), \quad (2)$$

причем такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей. Числа $z_1, z_2, \dots, z_n$ называются *нулями многочлена* $P(z)$ или его *корнями*; в разложении они могут повторяться. Если корень в разложении не повторяется, он называется *простым*, в противном

случае — *кратным*, причем такой *кратности*, сколько раз он повторяется. Если некоторое число $z = c$ является корнем многочлена $P(z)$ кратности k , то $P^{(j)}(c) = 0$ при всех $j < k$ (начиная с $j = 0$), тогда как $P^{(k)}(c) \neq 0$ — или, что равносильно, $z - c$ при $z \rightarrow c$ имеет k -й порядок малости по сравнению с $z - c$.

Последний признак для произвольной функции $P(z)$ (не обязательно многочлена) является определением термина «кратность корня». Если какая-либо функция z определена как многочлен (1) с вещественными коэффициентами либо с помощью иной формулы, все параметры в которой вещественные, и если эта функция имеет мнимый корень, то она обязательно имеет и сопряженный корень, причем той же кратности. Тогда, объединяя попарно в разложении (2) множители, отвечающие сопряженным корням, получаем разложение рассматриваемого многочлена на сомножители первой и второй степени с вещественными коэффициентами.

Степенной ряд с комплексными членами имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots \quad (3)$$

Каждый такой ряд имеет определенный *радиус сходимости* $R \in [0, \infty)$. Это означает, что при $R = 0$ он сходится только при $z = z_0$, при $R = \infty$ он сходится при всех z , а при $0 < R < \infty$ он сходится при всех z из круга $|z - z_0| < R$ и расходится при всех z , для которых $|z - z_0| > R$.

С помощью ряда (3) определяются, в частности, элементарные функции от комплексного переменного: так, по определению,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

ряды, определяющие функции $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$, имеют аналогичный вид, но без множителей $(-1)^n$. Оправданием этих определений служит то, что для вещественного z суммы рядов дают хорошо известные разложения выписанных здесь элементарных функций в степенные ряды. Радиус сходимости всех рядов, выписанных в этом абзаце, равен бесконечности, т. е. мы получили определения рассматриваемых элементарных функций, пригодные для всех значений аргумента.

Подставляя в формулы предыдущего абзаца iz вместо z , приходим к весьма важным *формулам Эйлера*, выражающим связь между показательной, тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

К ним надо добавить *принцип аналитического продолжения*, согласно одной из версий которого для функций, определенных с помощью степенных рядов, любое тождество, справедливое для всех веществен-

ных значений независимых переменных, остается справедливым и для их комплексных значений. Например, из тождества $e^{x_1+x_2} \equiv x^{x_1} e^{x_2}$ вытекает аналогичное тождество для любых комплексных значений x_1, x_2 ; из тождества $\cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1$ следует, что $\cos^2 ix + \sin^2 ix \equiv 1$, т. е. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1$ и т. п.

Из первой формулы Эйлера вытекает *показательная форма комплексного числа*: из $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ следует, что $z = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Отсюда, в свою очередь, вытекает формула для *общего значения логарифмической функции*, которая обратна показательной: если $w = e^z$, то $z = \operatorname{Ln} w = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w$, где в правой части первое слагаемое представляет собой «обычный» натуральный логарифм положительного числа. Таким образом, логарифм любого комплексного (в том числе, и вещественного) числа, отличного от нуля, имеет бесконечное количество значений; из них одно (для которого взято Arg взято $\arg$) считается *главным* и обозначается $\ln$.

§2. Дифференцирование и отображения

1. Производная. Пусть на всей плоскости комплексного переменного z или на некоторой ее области задана (однозначная) функция $w = f(z)$, принимающая комплексные значения. Производная от такой функции определяется по обычной формуле

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad (1)$$

где предел должен быть вполне определенным при произвольном стремлении Δz к нулю. При этом остаются в силе все основные свойства производной и формулы дифференцирования, выведенные для функций от вещественного переменного.

Функция, непрерывная в некоторой области и имеющая в каждой ее точке конечную производную, называется аналитической в этой области. Грубо говоря, требование аналитичности функции $f(z)$ означает не только то, что она не должна иметь точек и линий разрыва, но также и то, что при вычислении значений $f(z)$ над z должны производиться действия (алгебраические, образование суммы ряда и другие предельные операции) как над комплексным агрегатом, без расчленения z на вещественную и мнимую части. Такой является, например, функция $w = z^2$, хотя ее и можно, обозначив $z = x + iy$, представить в виде $w = x^2 + i2xy - y^2$. В отличие от этого, такие величины, как, например, $s = x^2 - iy^2$ или $t = z^* (= x - iy)$, являющиеся функциями от z , так как, зная значение z , можно найти соответствующие значения $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, а с их помощью найти s и t ; однако эти функции не аналитические, так как выражения $s(x, y)$ и $t(x, y)$ нельзя «свернуть» в алгебраические или аналитические выражения вида $s(z)$ и $t(z)$.

Отметим, что с точки зрения приведенного определения такую функцию, как, например, $1/z$, нельзя считать аналитической на всей плоскости z . Эта функция аналитическая в области, полученной выбрасыванием из плоскости z точки $z = 0$, в которой непрерывность, а потому и аналитичность нарушаются. Такая точка называется *особой точкой* аналитической функции. Иногда употребляется другая терминология: функция $1/z$ называется аналитической во всей плоскости z , *регулярной* при $z \neq 0$ и имеющей *особенность* (особую точку) при $z = 0$.

2. Условия Коши–Римана. Пусть задана функция

$$w = f(z). \quad (2)$$

Обозначим

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z, \quad u = \operatorname{Re} w, \quad v = \operatorname{Im} w, \quad \text{т. е. } z = x + iy, \quad w = u + iv.$$

Тогда, если заданы x и y , то получается и z , откуда в силу (2) определяется w , а потому u и v ; таким образом,

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (3)$$

Обратно, задание функций (3) полностью определяет функцию (2). Итак, задание комплексной функции (2) от комплексного аргумента равносильно заданию двух вещественных функций (3) от двух вещественных аргументов каждая. Проверьте, например, что равенство $w = e^z$ равносильно системе из двух равенств

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y. \quad (4)$$

Если требовать, чтобы функция (2) была аналитической, то функции (3) будут удовлетворять определенным соотношениям, которые мы сейчас выведем. Заметим, что в силу (3)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d(u + iv)}{d(x + iy)} = \frac{(u + iv)'_x dx + (u + iv)'_y dy}{dx + i dy}. \quad (5)$$

Так как $dz = dx + i dy$ произвольно, то между dx и dy может быть произвольное отношение t . Разделив числитель и знаменатель правой части (5) на dy и поделив затем числитель на знаменатель, получим

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(u + iv)'_x t + (u + iv)'_y}{t + i} = (u + iv)'_x + \frac{(u + iv)'_y - (u + iv)'_x}{t + i}.$$

Для существования единой производной (1) необходимо и достаточно, чтобы полученное выражение не зависело от t , т. е. чтобы $(u + iv)'_y -$

$-i(u + iv)'_x = 0$ или, что равносильно, $u'_y + iv'_y = iu'_x - v'_x$. Приравнивая вещественные и мнимые части, получаем условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (6)$$

необходимые и достаточные для аналитичности функции (2). (Проверьте выполнение этих равенств для функций (4).)

Равенствам (6) можно придать более компактный вид. Пусть из некоторой точки плоскости x, y выходят направления n и m , причем n получается из m поворотом на 90° против часовой стрелки. Тогда, вычисляя производную по направлению и пользуясь равенствами (6), получим (проверьте!)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\widehat{n, x}) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(\widehat{n, y}) = \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y} \cos(\widehat{m, x}) + \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\widehat{m, x}) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\widehat{m, x}) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\widehat{m, x}) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\widehat{m, x}) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\widehat{m, y}) = \frac{\partial u}{\partial m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обратно, равенств (6) легко получить из (7) (как?).

3. Сопряженные гармонические функции. Из уравнений (6) можно исключить функцию v . Для этого продифференцируем первое равенство по x , а второе — по y ; тогда средние члены окажутся равными (почему?) и, приравнивая крайние члены, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом (ср. п. I.3.3), функция $u(x, y)$ гармоническая. Мы предлагаем читателю проверить, исключая из уравнений (6) функцию u , что и функция $v(x, y)$ гармоническая. Две гармонические функции, удовлетворяющие уравнениям Коши–Римана, называются *сопряженными*. Итак, *вещественная и мнимая части аналитической функции являются сопряженными гармоническими функциями*.

Из двух сопряженных гармонических функций приходится различать первую и вторую. Проверьте, что если поменять нумерацию этих функций, то для сохранения сопряженности одну из них надо помножить на -1 .

Для любой заданной гармонической функции можно построить сопряженную гармоническую функцию. Пусть, например, задана гармоническая функция $v(x, y)$; тогда уравнения (6), из которых надо найти функцию $u(x, y)$, можно совместно записать в виде

$$du \equiv \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy. \quad (8)$$

Получилась задача о построении функции по ее полному дифференциалу. Условие ее разрешимости ¹⁾ для правой части (8) равносильно требованию гармоничности функции v (проверьте!), так что задача действительно разрешима; решение определяется формулой

$$u(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} du + \text{const} = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy \right) + \text{const}$$

и определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Если область, в которой осуществляется построение, многосвязная, то построенная функция u может получиться многозначной; тогда при обходе вокруг «пустот» области она будет получать постоянные приращения (ср. п. 1.3.2).

4. Геометрический смысл производной. Функция (2) определяет отображение плоскости z (или некоторой ее области, если значения z берутся только из этой области) в плоскость w ; это отображение можно записать и в вещественном виде (3). Если функция (2) однозначная (а мы позже увидим, что в теории аналитических функций приходится рассматривать и многозначные функции, но это всегда будет оговариваться), то и отображение будет однозначным, т. е. каждой точке z будет отвечать единственная точка w . Если для разных z не может получиться одно и то же w , другими словами, если функция, обратная к (2), однозначная, то отображение (2) называется *однолистным*; это значит, что при отображении (2) плоскость z покрывает плоскость w только один раз. (В противном случае отображение называется *многолистным* — оно может быть двулистным, трехлистным и т. д., даже бесконечнолистным.) Однозначное однолистное отображение иначе называется взаимно однозначным. Такие отображения наиболее наглядны, так как каждому z отвечает ровно одно w , а каждому w — ровно одно z . При этом все время имеются в виду либо полные плоскости z и w , либо некоторые области в этих плоскостях.

Если функция (2) аналитическая, той соответствующее отображение называется *аналитическим*. Рассмотрим вид этого отображения в малой окрестности некоторой фиксированной точки z_0 , предполагая дополнительно, что

$$f'(z_0) \neq 0. \quad (9)$$

Обозначив

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \Delta z, & w_0 &= f(z_0), & w - w_0 &= \Delta w, \\ |f'(z_0)| &= k_0, & \arg f'(z_0) &= \alpha_0 \end{aligned}$$

¹⁾ Как доказывается в теории интеграла (см., например, ЛВМ, п. XIV.24), для существования функции $u(x, y)$ с заданным дифференциалом $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$.

получим с точностью до малых высшего порядка

$$\Delta w \approx dw = f'(z_0)\Delta z, \quad \text{т. е.} \quad |\Delta w| = k_0|\Delta z|, \quad \text{Arg } \Delta w = \text{Arg } \Delta z + \alpha_0.$$

Значит, если представить себе плоскости z и w совмещенными, то каждый малый вектор Δz с вершиной в точке z_0 при отображении будет перенесен вершиной в w_0 , растянут в k_0 раз и повернут на угол α_0 . Поэтому и вся малая окрестность точки z_0 при рассматриваемом отображении испытает, с точностью до малых высшего порядка, поступательный перенос, всестороннее растяжение и поворот, причем значения модуля и аргумента производной в точке z_0 служат соответственно коэффициентом растяжения и углом поворота.

Итак, если в некоторой области (G) плоскости z будет $f'(z) \neq 0$, то образ каждой малой фигуры, расположенной в (G) , будет, с точностью до малых высшего порядка, геометрически подобен прообразу; в частности, мы видим, что при аналитическом отображении малый круг переходит снова в круг (а не в эллипс, как для общих отображений¹⁾), а углы между пересекающимися линиями сохраняются. Из доказанного вытекает также, что при аналитическом отображении ориентация плоскости сохраняется, т. е. если обходить малый замкнутый контур плоскости z в некотором направлении, то и образ будет обходиться в том же направлении. Можно доказать, что и обратно, если некоторое отображение плоскости сохраняет подобие бесконечно малых фигур (или даже только углы между пересекающимися линиями) и ориентацию плоскости, то это отображение аналитическое.

Из свойства сохранения углов вытекает, в частности, что линии $u(x, y) = C_1$ и $v(x, y) = C_2$ плоскости x, y образуют два взаимно ортогональных семейства линий (почему?). Это дает возможность, задаваясь различными аналитическими функциями $f(z)$, получать разнообразные ортогональные системы координат на плоскости (примеры см. ниже). Выведите эту ортогональность также из равенства (7).

В отдельных точках, в которых условие (9) нарушается, вид отображения (2) будет иной, мы его рассмотрим в п. 3.6. Однако если $f(z) \neq \text{const}$, то наличие таких отдельных особых точек не нарушает наших общих выводов о характере аналитического отображения.

5. Конформные отображения. Взаимно однозначное отображение некоторой плоской области, при котором сохраняются подобие бесконечно малых фигур и ориентация плоскости, называется *конформным*; если подобие сохраняется, но ориентация меняется на противоположную, то отображение называется *антиконформным* (говорят также о конформных отображениях 1-го и соответственно 2-го рода). Из п. 4 вытекает, что для конформности отображения, осуществляемого функцией (2), необходимо и достаточно, чтобы

¹⁾ См., например, ЛВМ, п. XI.14

эта функция и обратная к ней в рассматриваемой области были однозначными и аналитическими. Так как $\frac{dz}{dw} = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-1}$, то условие аналитичности обратной функции равносильно условию $f'(z) \neq 0$.

При конформном отображении сохраняется подобие лишь бесконечно малых фигур, тогда как форма конечных фигур может существенно измениться. Например, квадрат $ABCD$ плоскости z , разбитый на 16 квадратиков, может отобразиться на показанную на рис. 4 криволинейную фигуру $A'B'C'D'$ с прямыми углами на плоскости w . Дело в том, что хотя каждый малый участок плоскости z при отображении испытывает всестороннее растяжение и поворот, но для разных участков коэффициенты растяжения и углы поворота различны, что и приводит к такому искажению.

Теперь легко разобраться в формуле антиконформного отображения плоскости z в плоскость w . Если совершить дополнительно зеркальное отображение $w_1 = w^*$, то получим конформное отображение (почему?), т. е. $w_1 = f(z)$.

Отсюда получаем, что $w[f(z)]^*$, где $f(z)$ — аналитическая функция.

Конформные отображения широко применяются в теории плоских полей. Ниже мы приведем ряд примеров таких отображений.

6. Линейные отображения. Линейные отображения определяют формулой

$$w = az + b, \quad (10)$$

где a и b — заданные комплексные числа. Это самый простой класс отображений. Так как $\frac{dw}{dz} = a = \text{const}$, то все малые участки плоскости испытывают одинаковое растяжение в $|a|$ раз и одинаковый поворот на угол $\arg a$. Значит, и вся плоскость z испытает равномерное всестороннее растяжение в $|a|$ раз и поворот на угол $\arg a$. Если считать плоскости z и w совмещенными и $b = 0$, то при отображении точка $z = 0$ остается на месте; если же $b \neq 0$, то неподвижная точка определяется из уравнения $az + b = z$.

Таким образом, линейное конформное отображение является линейным и в смысле общей теории отображений¹⁾. Отметим тут же, что общее линейное отображение плоскости не обязано быть конформным: так, растяжение вдоль одной оси и сдвиг меняют углы и потому не конформные.

Частные случаи: если $a = e^{i\alpha}$, где α вещественное, то отображение (10) представляет собой поворот плоскости на угол α ; например, если

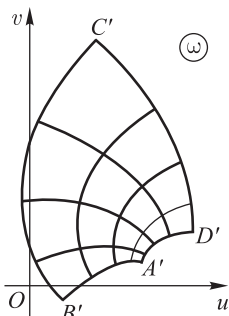


Рис. 4

¹⁾ Общее линейное отображение плоскости определяется линейным отображением ее декартовых координат; см., например, ЛВМ, п. XI.6.

$a = i = e^{i(\pi/2)}$ — это поворот на 90° в положительном направлении. Если a — вещественное, $a > 0$, то отображение (10) — это всестороннее растяжение в a раз. Если $a = 1$, т.е. $w = z + b$, то отображение сводится к поступательному переносу плоскости на вектор $\vec{Ob}$.

7. Расширенная комплексная плоскость. Перед рассмотрением дальнейших примеров сделаем несколько общих замечаний. В теории аналитических функций принято считать, что кроме обычных, конечных, точек комплексной плоскости z имеется еще одна *несобственная*, иначе, *бесконечно удаленная точка* $z = \infty$, служащая пределом любой последовательности конечных точек $z_1, z_2, z_3, \dots$, для которой $|z_n|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$.

Комплексная плоскость с добавленной к ней бесконечно удаленной точкой называется *расширенной комплексной плоскостью*.

Чтобы понять, на что похожа расширенная комплексная плоскость, допустим, что комплексной плоскости касается некоторая сфера (S) и все точки этой плоскости проецируются на сферу с помощью лучей,

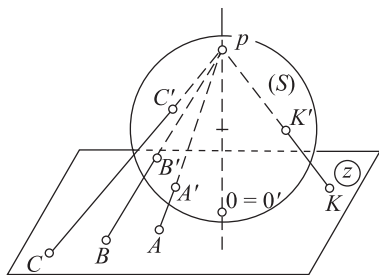


Рис. 5

проведенных через точку $P \in (S)$, противоположную точке касания O (рис. 5). Этим проецированием определяется взаимнооднозначное отображение комплексной плоскости на сферу (S) с выброшенной точкой P , которой не соответствует никакая конечная точка плоскости. Однако если последовательность $A, B, C, \dots$ точек плоскости произвольным образом уходит в бесконечность, то последовательность $A', B', C', \dots$ соответствующих точек (S) стремится

к P (почему?). Поэтому естественно к плоскости добавить бесконечно удаленную точку, считая, что она при этом соответствии отвечает самой точке P . Расширенная плоскость взаимно однозначно отображается на полную сферу, причем видно, что как само отображение, так и обратное к нему являются непрерывными (отображение f называется *непрерывным*, если из $x \rightarrow x_0$ всегда вытекает, что $f(x) \rightarrow f(x_0)$). Заметим, что бесконечно удаленная точка, подобно нулевой точке, не имеет определенного аргумента. Окрестностью точки $z = \infty$ естественно считать часть плоскости z , внешнюю по отношению к какой-либо замкнутой линии (продумайте это!).

Если между двумя множествами возможно установить взаимно однозначное непрерывное в обе стороны соответствие, то эти множества называются *гомеоморфными*, или топологически эквивалентными. Имеется специальный отдел математики — топология (от греческого «топос» — место, «логос» — слово, наука), — изучающий наиболее глубокие геометрические свойства множеств, многообразий, пространств, именно, свойства, сохраняющиеся при

гомеоморфизмах (взаимно однозначных непрерывных в обе стороны отображениях). Поэтому с точки зрения топологии гомеоморфные множества являются эквивалентными: все топологические свойства, которые имеют место в одном из них, имеют место и в другом. Например, точки зрения топологии окружность, эллипс или многоугольник эквивалентны между собой, но не эквивалентны отрезку или кругу. Вывод, сделанный в предыдущем абзаце, можно сформулировать так: *расширенная комплексная плоскость топологически эквивалентна сфере*.

Таким образом, символ ∞ имеет два различных смысла: «вещественная» и «комплексная» бесконечности. Обычно из контекста бывает ясно, какой из них имеется в виду, однако в сомнительных случаях не мешает делать объяснения по этому поводу.

8. Дробно-линейное отображение. Оно определяется формулой

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (11)$$

где a, b, c, d — заданные комплексные числа. Рассмотрим сначала частный случай:

$$w = \frac{k^2}{z}, \quad (12)$$

где $k > 0$. Переходя к модулю и аргументу, получим

$$|w| = \frac{k^2}{|z|}, \quad \text{Arg } w = -\text{Arg } z. \quad (13)$$

Допустим сначала для простоты, что аргумент не менялся бы, т. е. рассмотрим отображение $s = s(z)$, для которого

$$|s| = \frac{k^2}{|z|}, \quad \text{Arg } s = \text{Arg } z. \quad (14)$$

Если считать плоскости z и s совмещенными, то из второго равенства вытекает, что каждый луч с вершиной в начале координат преобразуется в себя (почему?). Но как? Из первого равенства (14) мы видим, что при $|z| = k$ будет и $|s| = k$; при $|z| < k$ будет $|s| > k$, причем, во сколько раз меньше $|z|$, во столько раз больше $|s|$, так что при $|z| \rightarrow 0$ будет $|s| \rightarrow \infty$; при $|z| > k$ картина аналогичная. На рис. 6 показаны образы нескольких точек, причем соответствующие друг другу точки снабжены одинаковыми индексами. Полезно обратить внимание на то, что из $|s| = \frac{k^2}{|z|}$ вытекает $|z| = \frac{k^2}{|s|}$, другими словами, прообраз переходит в образ, а образ — в прообраз. (Иначе говоря, рассматриваемое отображение плоскости в себя само себе обратное; такие отображения называются *инволюциями*.) Все точки окружности $|z| = k$ отображаются в себя, т. е. остаются на месте; concentрические окружности радиуса

$< k$ переходят в окружности радиуса $> k$ и обратно (рис. 6). Точки O и ∞ переходят друг в друга.

Отображение (14) называется *инверсией* или *зеркальным отражением плоскости z относительно окружности $|z| = k$* , а точки, переходящие друг в друга при инверсии, называются, симметричными относительно этой окружности. Последнее название объясняется, в частности, тем, что в малой окрестности любой точки инвариантной окружности это отображение, с точностью до малых высшего порядка, представляет собой обычное зеркальное отражение. (Можно проверить, что если на рис. 5 считать, что точка O — это начало координат, а сфера (S) имеет радиус $k/2$, то отображение (14), перенесенное на эту сферу, индуцирует зеркальное отражение сферы (S) относительно плоскости, проходящей через центр этой сферы параллельно плоскости z .)

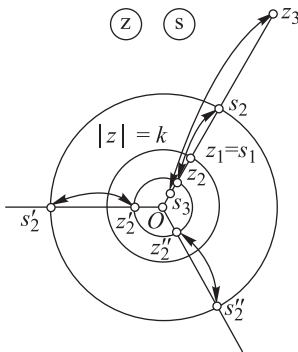


Рис. 6

Докажем следующее важное *круговое свойство* инверсии: *при инверсии все окружности, а также прямые преобразуются в окружности или в прямые* (причем окружность, равно как и прямая, может преобразоваться либо в окружность, либо в прямую). Для этого заметим, что уравнения всех окружностей и прямых плоскости x, y можно представить в единой форме

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0, \quad (15)$$

так как при $\alpha \neq 0$ получаются окружности (почему?), а при $\alpha = 0$ — прямые. Если обозначить $z = x + iy$, $s = p + iq$, то отображение (14) определяет формулы (выведите их!)

$$x = \frac{k^2 p}{p^2 + q^2}, \quad y = \frac{k^2 q}{p^2 + q^2}.$$

Подставляя эти формулы в (15), получим после преобразований уравнение линии-образа (проверьте!)

$$\delta(p^2 + q^2) + \beta k^2 p + \gamma k^2 q + \alpha k^4 = 0.$$

Так как $k = \text{const}$, то это уравнение снова имеет вид (15), только с другими коэффициентами. Значит, получается окружность или прямая. (Докажите, что прямая получится тогда и только тогда, когда исходная окружность или прямая проходили через начало координат.)

Отображение (13) получается из (14) с помощью добавочного отображения $|w| = |s|$, $\text{Arg } w = -\text{Arg } s$, т. е. $w = s^*$. Значит, отображение (13) представляет собой комбинацию инверсии и зеркального отражения плоскости относительно вещественной оси. Так как функция (12)

аналитична всюду, кроме точки $z = 0$, то она осуществляет конформное отображение плоскости z с выброшенной этой точкой на себя. Впрочем, его же можно рассматривать как конформное отображение расширенной плоскости на себя. Что касается инверсии, то она представляет собой антиконформное отображение (п. 5).

Перейдем теперь к общему дробно-линейному отображению (11). Преобразовав правую часть по формуле

$$w = \frac{a}{c} \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}} \right) = \left(\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2} \right) \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c},$$

мы видим, что w можно получить из z с помощью последовательных преобразований:

$$r = z + \frac{d}{c}, \quad t = \frac{1}{r}, \quad w = \left(\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2} \right) t + \frac{a}{c}.$$

Если изображать все переменные z, s, t, w на одной плоскости, то получается, что рассматриваемое отображение представляет собой последовательную комбинацию поступательного переноса, инверсии с зеркальным отражением и линейного отображения (п. 6). Так как все эти отображения обладают круговым свойством, то этим свойством обладает и общее дробно-линейное отображение. Отсюда же видно, что *такое отображение переводит точки, симметричные относительно окружности или прямой, в точки, симметричные относительно образа этой линии.*

Выражая из (11) z через w , проверяем, что *отображение, обратное к дробно-линейному, само является дробно-линейным*, хотя уже, в отличие от (12), вообще говоря, не совпадает с прямым отображением, т. е. не является инволюцией. Аналогично можно проверить, что результат последовательного выполнения дробно-линейных отображений снова является дробно-линейным отображением.

В правой части (11) имеется четыре комплексных параметра; но так как при умножении их на общий множитель функция (11) не меняется, то при выборе этой функции имеется не четыре, а только три комплексных степени свободы (или шесть вещественных, так как одна комплексная степень свободы равносильна двум вещественным¹⁾). Поэтому при таком выборе надо поставить три комплексных условия; например, можно выбрать какие-либо три значения z и задать соответствующие им (различные!) значения w ; тогда можно проверить, что отображение (11) определится однозначно.

Потребуем, например, чтобы при отображении (11) точки $z = 0, 1, \infty$ перешли соответственно в точки $w = -1, -i, 1$. Подставляя эти значения в (11),

¹⁾ Число степеней свободы — это минимальное число параметров, необходимых для выбора какого-либо объекта в совокупности этих объектов; см., например, ЛВМ, п. X.2.

получим, что должны иметь место равенства

$$\frac{b}{d} = -1, \quad \frac{a+b}{c+d} = -i, \quad \frac{a}{c} = 1.$$

Выражая все параметры через какой-нибудь один и подставляя в (11), находим требуемое отображение

$$w = \frac{z-i}{z+i} \quad (16)$$

(проверьте!). В силу кругового свойства при этом отображении окружность, проходящая через три заданные точки z , т.е. вещественную ось, переходит в окружность, проходящую через соответствующие точки w , т.е. *единичную окружность* $|w| = 1$. А в силу сохранения ориентации *верхняя полуплоскость*

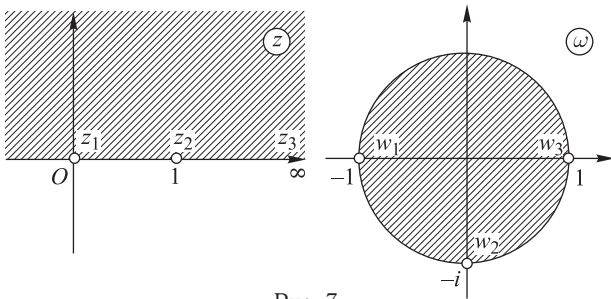


Рис. 7

$\operatorname{Re} z > 0$ отображается на *единичный круг* $|w| < 1$. (Продумайте! А на что отображается нижняя полуплоскость? См. рис. 7.)

Отображение (16) не единственное конформное отображение верхней полуплоскости на единичный круг, так как в качестве образов тех же точек $z = 0, 1, \infty$ можно было задать три любые точки единичной окружности, следующие друг за другом при ее обходе в положительном направлении. Поэтому совокупность таких отображений имеет три вещественных или, что то же, полторы комплексных степени свободы. Можно показать, что общий вид такого отображения $w = e^{i\alpha} \frac{z-p}{z-\bar{p}}$, где α — любое вещественное, а p — любое комплексное число, причем $\operatorname{Im} p > 0$.

9. Степенные отображения. Они определяются формулой

$$w = z^k, \quad (17)$$

где k — заданное вещественное число. Рассмотрим сначала частный случай

$$w = z^2. \quad (18)$$

Переходя к модулю и аргументу, получим

$$|w| = |z|^2, \quad \operatorname{Arg} w = 2\operatorname{Arg} z. \quad (19)$$

Допустим сначала для простоты, что модуль не менялся бы, т.е. рассмотрим отображение $s = s(z)$, для которого

$$|s| = |z|, \quad \text{Arg } s = 2\text{Arg } z. \quad (20)$$

Каждая точка при отображении поворачивается вокруг начала координат (почему?), причем точки, имевшие до отображения одинаковый аргумент, т.е. лежащие на одном луче с вершиной в начале координат, перейдут в точки, также имеющие одинаковый аргумент, причем в два раза больший (рис. 8). Таким образом, любой такой луч при отображении поворачивается вокруг своей вершины, как твердый стержень. Если теперь рассматривать всевозможные такие лучи, то получается такая картина, как будто приоткрытый веер из стержней, соединенных в начале координат шарниром, при отображении равномерно раскрывается в два раза шире. Чтобы при этом веер не перекрыл сам себя, нужно, чтобы он в исходном состоянии — т.е. прообраз — занимал угол, не больший 180° .

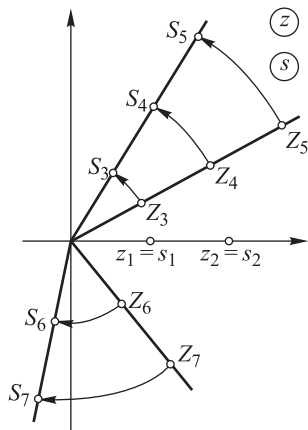


Рис. 8

Вернемся к отображению (19). По сравнению с отображением (20) здесь дополнительно происходит следующее: точки, для которых $|z| < 1$, приближаются к началу координат, так как для них $|w| = |z|^2 < |s| = |z|$; точки же, для которых $|z| > 1$, удаляются от него. Таким образом, при отображении точки скользят вдоль поворачивающихся лучей. Однако на общую картину это не влияет, и мы получаем, таким образом, что функция (18) осуществляет конформное отображение угла размера $\alpha < \pi$ с вершиной в начале координат на угол размера 2α . Конформность нарушается в самом начале координат, где $\frac{dw}{dz} = 2z|_{z=0} = 0$ (ср. п. 5); впрочем, это ясно и из того, что угол с вершиной в точке $z = 0$ при отображении увеличивается в два раза.

Если в предыдущем абзаце положить $\alpha = \pi$, то требуется некоторое уточнение: именно, отображаемую область нужно считать открытой, т.е. ее границу к ней не причислять. Тогда и область-образ будет открытой, и мы получаем отображение, показанное на рис. 9, где область-прообраз и область-образ заштрихованы; не причисленная к ним граница показана пунктиром, изображены еще некоторые линии до и после отображения. Мы видим, что функция (18) осуществляет конформное отображение открытой правой полуплоскости z (т.е. полуплоскости $\text{Re } z > 0$) на плоскость w с изъятой полуосью $v = 0$, $-\infty < u \leq 0$, или, как говорят иначе, на плоскость с *разрезом* вдоль указанной полуоси. Если бы мы рассматривали отображение замкнутой полуплоскости, то на границе после отображения произошло бы перекрытие (почему?), т.е. отображение потеряло бы однолиственность (п. 4).

Угол размера π в плоскости z не обязательно выбирать в положении, показанном на рис. 9. Проверьте, например, что та же функция (18) осуществляет конформное отображение открытой верхней (а также нижней) полуплоскости z на плоскость w с разрезом вдоль вещественной положительной полуоси.

Если рассматривать функцию (18) на всей плоскости z , то плоскость w окажется покрытой дважды (почему?). Значит, это отображение однозначное, но двулистное (п. 4). Из рис. 9 видно, что если точка

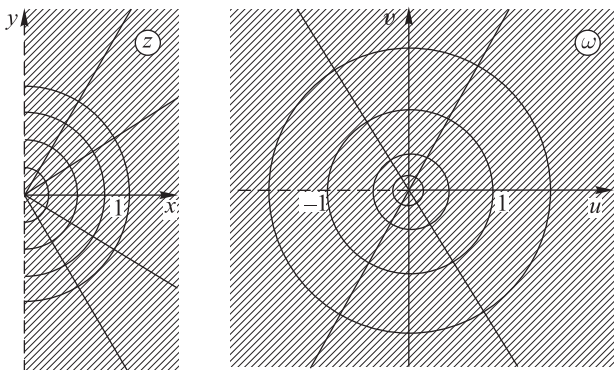


Рис. 9

z совершит полный оборот вокруг точки $z = 0$, то соответствующая точка w совершит два полных оборота вокруг точки $w = 0$.

Аналогичный характер имеет функция (17) при любом $k > 1$. Она осуществляет конформное отображение открытого угла размера $2\pi/k$ с вершиной в начале координат на плоскость w с разрезом вдоль некоторого луча с вершиной в начале координат. Отметим, что если k не целое, то это утверждение нуждается в уточнении, так как тогда функция (17) неоднозначна (почему?). Это делается так: для какого-нибудь конкретного z выбирают одно из значений z^k (чаще всего при $z = 1$ принимают $w = 1$), а для прочих z эти значения продолжают по непрерывности (ср. п. 10). Если k целое, а функцию (17) рассматривать на всей плоскости z , то соответствующее отображение будет k -листным.

Если $0 < k < 1$, то функция (17) осуществляет конформное отображение плоскости z с разрезом вдоль луча с вершиной в начале координат на открытый угол размера $2\pi k$ с вершиной в начале координат плоскости w . Случай $k < 0$ мы предоставляем разобрать читателю.

10. Многозначные функции и точки разветвления. Рассмотрим подробнее функцию (17) при $k = 1/2$, т. е. $w = \sqrt{z}$. Это функция двузначная. (Отметим распространенную ошибку: по аналогии с вещественными радикалами записывают эти два значения в виде

$w_1 = +\sqrt{z}$ и $w_2 = -\sqrt{z}$, забывая, что нет никакого «арифметического» значения корня из комплексного числа, и потому все равно надо уточнять, что такое $\sqrt{z}$; подобным образом, без специального уточнения значений корней нельзя писать $\sqrt{-z} = i\sqrt{z}$ и т.п.) Так, при $z = 1$ она принимает два значения: $w = 1$ и -1 . Остановимся на каком-то одном, например, $w = 1$, и будем, меняя z , непрерывно продолжать значение $\sqrt{z}$. Пусть, например, точка z проходит единичную окружность в положительном направлении, принимая положения $z_0, z_1, z_2, \dots$ (рис. 10). Так как $\text{Arg } w = \frac{1}{2} \text{Arg } z$, то соответствующая точка w пойдет

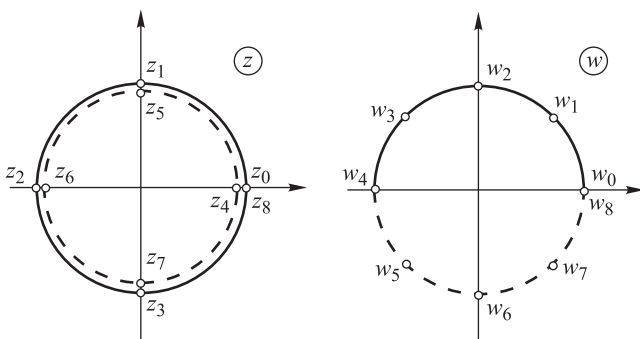


Рис. 10

в два раза медленнее, и когда точка z совершит полный оборот вокруг начала координат, придя в положение $z_4 = z_0 = 1$, точка w совершит только половорота и придет в положение $w_4 = -1$. Таким образом, исходя из одного значения $\sqrt{z}|_{z=1} = 1$ и непрерывно его продолжая, мы по необходимости приходим к другому значению $\sqrt{z}|_{z=1} = -1$. Если теперь точка z совершит еще один обход вокруг начала координат, показанный на рис. 10 пунктиром, то соответствующая точка w пройдет еще половорота и придет к исходному значению $w_8 = w_0 = 1$.

Ясно, что аналогичная картина будет при любом обходе вокруг начала координат плоскости z , не обязательно по окружности.

Разобранный пример, который является типичным, указывает на принципиальное различие многозначных функций комплексного переменного и вещественного переменного. Для многозначной функции вещественного переменного можно естественно ввести ее однозначные ветви: так, под $\sqrt{x}$ всегда понимается «арифметическая ветвь» двузначной функции $\pm\sqrt{x}$. В отличие от этого, значения многозначной функции комплексного переменного, как правило, настолько неразрывно связаны друг с другом, что непрерывно переходят одно в другое, когда независимая переменная совершает оборот вокруг определенных точек, называемых *точками разветвления (ветвления)* заданной функции. Для двузначной функции $w = \sqrt{z}$ такой точкой в силу

предыдущего является $z = 0$. Впрочем, точку $z = \infty$ также принято считать точкой разветвления этой функции, так как «совершить оборот вокруг бесконечности» — это значит обойти окружность большого радиуса с центром в конечной точке (рис. 5), а при этом, как и выше, значения $\sqrt{z}$ непрерывно перейдут одно в другое.

Поэтому, для того чтобы можно было говорить о непрерывных однозначных ветвях многозначной функции $f(z)$ порознь, нужно каким-то способом воспрепятствовать тому, чтобы точка z могла совершать обороты вокруг точек разветвления этой функции. Для этого обычно в плоскости z проводят разрезы (ср. п. 9), соединяющие точки разветвления, причем так, что если точке z запрещено пересекать эти разрезы, то значения $f(z)$ не могут переходить одно в другое. Например, если на рис. 9 поменять наименования плоскостей, то на плоскости z (на рис. 9 правой) будет как раз разрез, соединяющий точки разветвления $z = 0$ и $z = \infty$. В плоскости с таким разрезом можно определить однозначную ветвь функции $w = \sqrt{z}$, принимающую при $z = 1$ значение $w = 1$; эта ветвь осуществляет показанное на рис. 9 конформное отображение этой плоскости с разрезом на правую полуплоскость w . Другая ветвь, для которой $|w|_{z=1} = -1$, осуществляет отображение плоскости z с тем же разрезом на левую полуплоскость w . Каждая из этих ветвей имеет разрез линией своего разрыва, так как на разных берегах этого разреза ветвь принимает разные предельные значения, т. е. имеет конечный скачок. Так, из рис. 9 видно, что на разных берегах разреза в точке $z = -1$ изображенная там ветвь принимает предельные значения $w = -i$ (на нижнем) и i (на верхнем берегу).

Аналогичным образом функция $w = \sqrt[n]{z}$, где $n = 2, 3, 4, \dots$, является n -значной и имеет точки разветвления $z = 0$ и $z = \infty$, при обходе вокруг которых значения функции сменяют друг друга. После n -кратного обхода вокруг точки разветвления все значения функции приходят к своим исходным; такая точка называется точкой разветвления *порядка* n . Функция $w = z^{m/n}$, где $n = 2, 3, 4, \dots$, а m — целое число, не имеющее общих делителей с n , также имеет две точки разветвления $z = 0$ и $z = \infty$ порядка n . Таким образом, чем больше знаменатель, тем больше значений у функции и тем выше порядок точки разветвления. Функция $w = z^k = e^{k \operatorname{Ln} z}$, где k иррациональное, является бесконечнозначной, и при обходе вокруг точек разветвления $z = 0$ или $z = \infty$ эти значения сменяют друг друга, никогда не возвращаясь к исходному. Такие точки разветвления называются *логарифмическими*, иначе точками разветвления *бесконечного порядка*.

Наличие точек разветвления является характерным свойством многозначной аналитической функции. Конечно, такая, функция, как, например, $w = \sqrt{z^2} = \pm z$, не имеет точек разветвления, но ее ветви $w = z$ и $w = -z$ не переходят друг в друга при своем продолжении, т. е. она является не единой многозначной функцией, а скорее объединением двух однозначных. Подобным образом, если, скажем, функция $w = \sqrt{z}$ рассматривается в малой окрестности точки $z_0 \neq 0, \infty$, то две ее ветви

не сменяют одна другую и тоже не составляют единой многозначной функции. Однако можно доказать, что *если многозначная функция задана в односвязной области* (в частности, быть может, на всей плоскости) *и ее значения могут сменять друг друга при непрерывном продолжении по замкнутому контуру, то такая функция обязательно имеет в этой области хотя бы одну точку разветвления.* (Подумайте, какова здесь роль требования односвязности области.)

Для функций, заданных простыми формулами, точки разветвления обычно распознаются по обращению в нуль или в бесконечность выражений, стоящих под знаком радикала (точки конечного порядка) или логарифма (логарифмические точки). Рассмотрим, например, функцию

$$w = \sqrt{z^2 - 4}. \quad (21)$$

Это двузначная функция с точками разветвления, определяемыми из уравнения $z^2 - 4 = 0$, откуда $z_{1,2} = \pm 2$. Так как ее можно записать в виде $w = \sqrt{z-2} \times \sqrt{z+2}$, то если z обойдет по маленькой окружности вокруг точки $z_2 = 2$, а потому $z - 2$ — вокруг нуля, первый множитель перейдет к новому значению, а второй останется, каким был, т.е. вся функция (21) сменит значение. После вторичного обхода оба множителя, а потому и вся функция, вернуться к исходному значению; таким образом, точка z_1 и аналогично точка z_2 являются для функции (21) точками разветвления второго порядка. Точка $z = \infty$, хотя и обращает подкоренное выражение в бесконечность, не является для функции (21) точкой разветвления. В самом деле, эту функцию можно представить в виде

$$w = \sqrt{z^2 \left(1 - \frac{4}{z^2}\right)} = \sqrt{z^2} \sqrt{1 - \frac{4}{z^2}} = (\pm z) \sqrt{1 - \frac{4}{z^2}}.$$

Если z обходит большую окружность, то оба множителя, а потому и вся функция возвращаются к своим исходным значениям (почему?). Значит, в окрестности бесконечности здесь имеются две не связанные друг с другом ветви.

Мы предоставляем читателю проверить, что функция $\sqrt{z} + \sqrt[3]{z-1}$ шестизначная и имеет точки разветвления $z = 0$ второго порядка, $z = 1$ третьего порядка и $z = \infty$ шестого порядка.

11. Отображение $w = \frac{c}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$. Отображение

$$w = \frac{c}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right) \quad (c > 0) \quad (22)$$

применяется в гидро- и аэродинамике и часто связывается с именем Н. Е. Жуковского, который первым стал широко пользоваться методами теории аналитических функций в этих дисциплинах.

Введем в плоскости $z = x + iy$ полярные координаты, так что $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, т.е. $z = \rho e^{i\varphi}$. Тогда в силу (22)

$$w = \frac{c}{2} \left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}\right) = \frac{c}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \varphi + i \frac{c}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin \varphi = u + iv,$$

а потому

$$u = \frac{c}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{c}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi. \quad (23)$$

При $\rho = \text{const} > 1$ и φ , меняющемся от 0 до 2π , мы получаем параметрические уравнения эллипса (см., например, ЛВМ, (II.26)) с полуосями

$$a = \frac{c}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad b = \frac{c}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right).$$

Таким образом, окружность $\rho = \text{const} > 1$ плоскости z функцией (22) взаимно однозначно отображается на эллипс (23) плоскости w (рис. 11) Половина расстояния между его фокусами по известной формуле из аналитической геометрии ¹⁾ равна

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - b^2} &= \sqrt{\left[\frac{c}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \right]^2 - \left[\frac{c}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \right]^2} = \\ &= \frac{c}{2} \sqrt{\left(\rho^2 + 2 + \frac{1}{\rho^2} \right) - \left(\rho^2 - 2 + \frac{1}{\rho^2} \right)} = c. \end{aligned}$$

Таким образом, параметр отображения (22) получает геометрическое истолкование.

Если теперь рассматривать всевозможные $\rho > 1$, то в плоскости w получится семейство эллипсов (рис. 11), причем так как c не зависит от ρ , то все эти эллипсы имеют одинаковые фокусы. При $\rho \rightarrow \infty$ будет и $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ (причем $a - b \rightarrow 0$), а при $\rho \rightarrow 1 + 0$ будет $a \rightarrow c + 0$, $b \rightarrow +0$. Мы видим (рис. 11), что функция (22) осуществляет конформное отображение

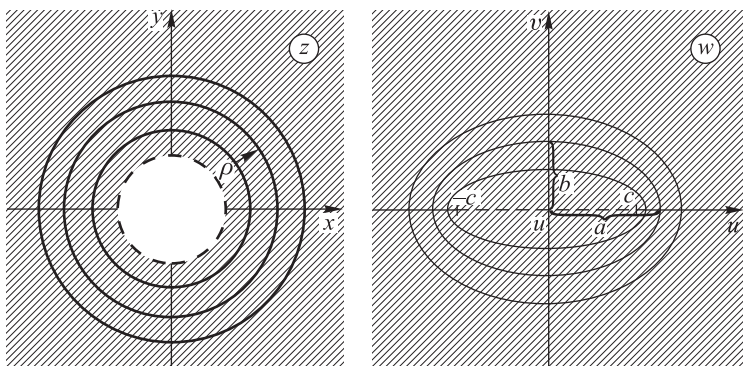


Рис. 11

внешней по отношению к единичной окружности части плоскости z на плоскость w с разрезом вдоль отрезка $-c, c$ вещественной оси. Сама единичная

¹⁾ См., например, ЛВМ, п. II.10.

окружность двулистно отображается на разрез, причем в точках $z = \pm 1$, где $\frac{dw}{dz} = \frac{c}{2} \times \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = 0$, конформность отображения нарушается (впрочем, это ясно и из рис. 11): Мы предоставляем читателю проверить, что открытый единичный круг плоскости z функцией (22) отображается на плоскость w с тем же разрезом (причем $0 \rightarrow \infty$). Поэтому функция (22), рассматриваемая на всей плоскости z , осуществляет двулистное отображение ее на плоскость w ; обратное отображение двузначное с точками разветвления второго порядка $w = \pm c$.

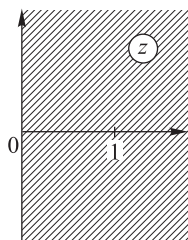


Рис. 12

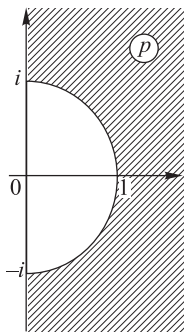


Рис. 13

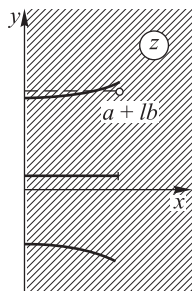


Рис. 14

Комбинация простых конформных отображений дает возможность значительно расширить класс отображаемых областей. Рассмотрим в качестве примера задачу об отображении области, показанной на рис. 12, на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$. Обращая отображение (22) при $c = 1$ и изменяя обозначения, получаем, что функция

$$p = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

отображает заданную область на область, показанную на рис. 13, при этом мы пользуемся однозначной ветвью корня, положительной при вещественных $z > 1$. Нетрудно проверить, далее, что дробно-линейное отображение

$$q = \frac{p - i}{p + i}$$

преобразует область рис. 13 на угол $\operatorname{Re} q > 0$, $\operatorname{Im} q < 0$; теперь остается совершить отображение $w = iq^2$. Комбинируя полученные формулы, получаем, что функция

$$w = i \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1} - i}{z + \sqrt{z^2 - 1} + i} \right)^2 \quad (24)$$

дает решение поставленной задачи.

Полученный результат можно применить для приближенного отображения области, показанной на рис. 14, на полуплоскость; эта область представляет собой полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ с некоторым числом разрезов, примыкающих к оси y не слишком близко друг к другу и не слишком, уклоняющихся от отрезков $y = \text{const}$. Для этого заменим приближенно один из разрезов на отрезок

$y = b$, $0 < x < a$ (рис. 14), и совершим отображение $z_1 = \Phi\left(\frac{1}{a}(z - ib)\right)$, где $\Phi(z)$ — функция (24). Тогда из заданной области мы получим полуплоскость $\operatorname{Re} z_1 > 0$ с разрезами того же типа, что раньше, но число их будет уже на один меньше. Затем заменяем приблизительно один из полученных разрезов на отрезок $y_1 = b_1$, $0 < x_1 < a_1$, совершаем отображение $z_2 = \Phi\left(\frac{1}{a_1}(z_1 - ib_1)\right)$ и т. д., пока все разрезы не распрямятся.

12. Показательное и связанные с ним отображения. Рассмотрим функцию

$$w = e^z.$$

Положив $z = x + iy$, получим

$$w = e^x e^{iy}, \quad \text{т. е.} \quad |w| = e^x, \quad \operatorname{Arg} w = y + 2k\pi. \quad (25)$$

Если $y = \text{const}$, $-\infty < x < \infty$, то $\operatorname{Arg} w = \text{const}$, $0 < |w| < \infty$; таким образом, прямая $y = \text{const}$ взаимно однозначно отображается на луч с вершиной в начале координат плоскости w (рис. 15). Если рассматривать такие прямые при различных y , получится семейство лучей

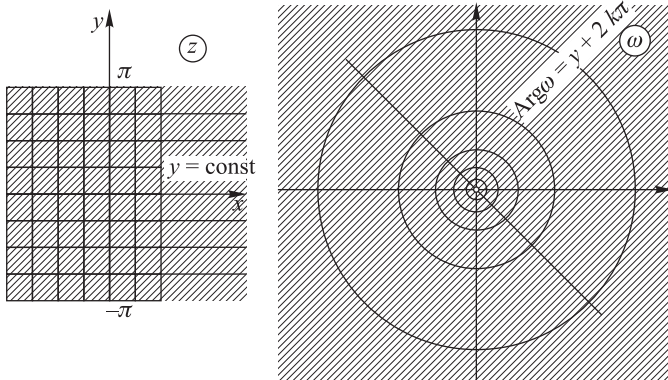


Рис. 15

с общей вершиной. Для заполнения такими лучами всей плоскости w нужно, чтобы определяющий их полярный угол изменился на 2π , например, чтобы $-\pi < y < \pi$, как на рис. 15. Таким образом, функция (25) осуществляет конформное отображение открытой полосы ширины 2π , параллельной вещественной оси, на плоскость w с разрезом вдоль луча с вершиной в начале координат (на рис. 15 — вдоль вещественной отрицательной полуоси).

При этом отображении прямые $x = \text{const}$ переходят в окружности $|w| = e^x = \text{const}$, т. е. декартова координатная сетка плоскости z переходит в полярную сетку плоскости w . При $x \rightarrow -\infty$ будет $w \rightarrow 0$, так

что левый «конец» полосы переходит в общее начало лучей — начало координат, тогда как правый «конец» — в бесконечно удаленную точку плоскости w .

Если рассматривать отображение (25) на всей плоскости z , то каждая горизонтальная полоса ширины 2π отобразится на всю плоскость w , так что в результате эта плоскость будет покрыта бесконечное число раз, т.е. отображение (25) является бесконечно-лиственным. Соответственно обратное отображение $z = \text{Ln } w$ является бесконечнозначным и имеет точки разветвления $w = 0$ и $w = \infty$ бесконечного порядка: если w описывает обороты в положительном направлении вокруг начала координат, то $\text{Ln } w$ вновь и вновь получает приращения по $2\pi i$, никогда не возвращаясь к исходному значению. Если на плоскости w провести разрез, соединяющий точки разветвления, то можно говорить об однозначных ветвях логарифмической функции; так, на рис. 15 показано конформное отображение плоскости w с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси на полосу $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y < \pi$, осуществляемое *главной ветвью логарифма*, $z = \ln w = \ln |w| + i \arg w$. (Напомним, что под $\arg$ понимается главное значение аргумента, $-\pi < \arg \leq \pi$.)

С показательным отображением непосредственно связаны некоторые другие. Так, отображение

$$w = \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

можно получить с помощью двух отображений

$$s = e^z, \quad w = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right).$$

Первое отображает (см. рис. 15) полуполосу $0 < x < \infty$, $-\pi < y < \pi$ на область $|s| > 1$, разрезанную вдоль интервала $s'' = 0$, $-\infty < s' < -1$ ($s = s' + is''$).

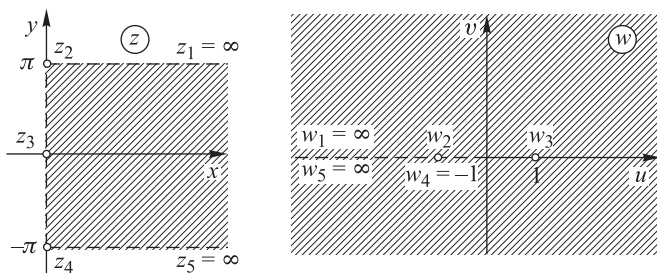


Рис. 16

Второе отображает эту область на плоскость w , разрезанную вдоль интервала $-1, 1$ вещественной оси (рис. 11); а так как при этом интервал $s'' = 0$, $-\infty < s' < -1$ переходит в интервал $v = 0$, $-\infty < u < -1$, то в итоге плоскость w получается с разрезом вдоль интервала $v = 0$, $-\infty < u < 1$. Итоговое

конформное отображение показано, на рис. 16, причем соответствующие друг другу граничные точки отображаемых областей имеют одинаковые индексы. Мы предоставляем читателю исследовать характер отображения $w = \operatorname{ch} z$ на всей плоскости w .

Аналогичными свойствами обладают отображения

$$w = \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad w = \sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

$$w = \operatorname{ch} z = \frac{1}{i} \sin iz = -i \operatorname{ch}\left(z + \frac{\pi i}{2}\right).$$

На этом мы заканчиваем рассмотрение простейших конформных отображений; один важный общий класс отображений будет рассмотрен в п. 4.13. Дальнейшие сведения об этих, а также о других элементарных конформных отображениях см. в книгах, указанных на стр. 37. Специально конформным отображениям посвящена книга [51], содержащая, в частности, каталог таких отображений.

13. Поверхность Римана. Понятие *поверхности Римана* оказывается полезным при рассмотрении многозначных аналитических функций. Вернемся к рассмотрению двузначной функции $w = \sqrt{z}$ (п. 10) и представим себе два наложенных друг на друга экземпляра плоскости z с разрезом вдоль полуоси $y = 0, -\infty < x < 0$. Будем считать, что точка z может произвольно перемещаться по любому из этих экземпляров плоскости (*листов*) и может также пресекать разрез, однако при каждом таком пересечении она *переходит с одного листа на другой*. Другими словами, листы следует представить себе как бы склеенными так, что верхний берег первого листа приклеивается к нижнему берегу второго, а нижний берег первого — к верхнему второго. Это склеивание условно показано на рис. 17; условность состоит в том, что при попытке изготовления такой конструкции, например, из бумаги возникнет линия самопересечения, показанная на рис. 17 бледно. Однако мы уже имели много случаев убедиться в том, что в математике поверхность (как и любое многообразие) вовсе не обязательно представлять себе изготовленной

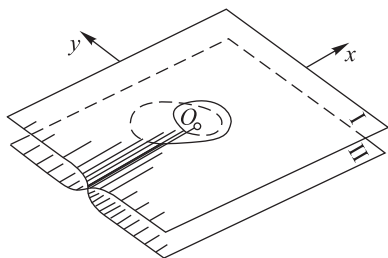


Рис. 17

из бумаги и вложенной в трехмерное физическое пространство. Поэтому ничто нам не мешает считать, что вдоль бывшего разреза верхний берег первого листа смыкается с нижним берегом только второго, но не первого листа, а верхний берег второго листа — с нижним берегом только первого, но не второго листа; тогда никакой линии самопересечения, конечно, не будет. Полученная при этом поверхность (S) и называется *поверхностью Римана* (или *римановой поверхностью*), отвечающей функции $w = \sqrt{z}$.

Рассмотрим теперь функцию, равную одной из ветвей $\sqrt{z}$, о которых говорилось в п. 10, на одном листе построенной поверхности и другой из ветвей $\sqrt{z}$ на другом листе. Эта функция будет однозначной и непрерывной на (S), так как в п. 10 при переходе через разрез ветви непрерывно сменяли одна

другую, а теперь эта смена обеспечивается тем что при переходе через бывший разрез точка одновременно переходит с одного бывшего листа (S) на другой (продумайте это!). На рис. 17 хорошо видно, что если точка z обходит вокруг начала координат O , то функция $\sqrt{z}$ приходит к исходному значению лишь после двух таких обходов. Отображение $w = \sqrt{z}$, а потому и $z = w^2$ является взаимно однозначным отображением римановой поверхности (S) переменной z на плоскость w .

Аналогично трехзначная функция $\sqrt[3]{z}$ является однозначной и непрерывной на своей римановой поверхности, которая конструируется из трех экземпляров плоскости z с такими же разрезами, как выше, если их приклеить в циклическом порядке, т. е. верхний берег первого листа подклеить к нижнему второго, верхний второго — к нижнему третьего и, наконец, верхний третьего — к нижнему первого. Бесконечнозначная функция $\text{Ln } z$ требует для этой же цели бесконечного числа таких же экземпляров плоскости z , которые подклеиваются друг к другу в виде последовательности, бесконечной в обе стороны.

Подобная конструкция возможна для любой многозначной функции $f(x)$. Чтобы построить риманову поверхность, отвечающую этой функции, надо взять столько экземпляров плоскости z , сколько значений принимает функция при каждом z (это число одно и то же для всех z , за исключением точек разветвления); затем надо провести разрезы, дающие возможность выделить все однозначные ветви этой функции, после чего вдоль разрезов подклеить одни листы к другим в соответствии с тем, как сменяют друг друга ветви при переходе через эти разрезы. На своей римановой поверхности функция $f(z)$ является однозначной, и при переходе через бывшие разрезы, теперь заклеенные, она уже не испытывает скачка, как ее однозначные ветви.

Если функция $w = g(z)$ однозначная и аналитическая во всей плоскости z (за исключением, быть может, отдельных точек разрыва), но многолистная, то она осуществляет взаимно однозначное отображение плоскости z на риманову поверхность, отвечающую обратной функции $g^-(w)$ к $g(z)$. Это отображение будет конформным, за исключением точек разрыва функции $g(z)$ и точек разрыва и точек разветвления функции $g^-(w)$. Если функция $g(z)$ многозначная и многолистная, то она осуществляет взаимно однозначное отображение своей римановой поверхности на риманову поверхность обратной функции.

В п. 7 мы уже говорили о том, что комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, топологически эквивалентна сфере. Можно доказать, что аналогичным образом расширенная риманова поверхность, отвечающая конечнозначной функции, топологически эквивалентна сфере, либо сфере с ручкой (что топологически то же — тору), либо сфере с двумя ручками (т. е. поверхности кренделя) и т. д. По числу этих ручек можно классифицировать римановы поверхности. Строение римановых поверхностей, отвечающих бесконечнозначным функциям, может быть значительно более сложным. (Но не обязательно! Например, из п. 12 следует, что риманова поверхность, отвечающая функции $\text{Ln } z$, гомеоморфна плоскости.)

14. Приложение к теории плоских полей. Пусть в некоторой плоской области (G) плоскости x, y задано векторное поле $\mathbf{A}$, не имеющее ни вихрей, ни источников векторных линий, т. е. для которого

$$\text{rot } \mathbf{A} = 0, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (26)$$

Такое поле может иметь различный физический смысл, однако для простоты и единообразия его можно трактовать как поле скоростей плоскопараллельного потока *идеальной* (т.е. без вязкости, которая всегда порождает вихри) несжимаемой жидкости.

В п. I.3.3 мы видели, что поле, обладающее свойствами (26), является градиентом гармонической функции $\varphi(x, y)$. Согласно п. 3 для этой функции можно построить сопряженную гармоническую функцию $\psi(x, y)$, называемую *функцией тока*; при этом величина $w = \varphi + i\psi$, называемая *комплексным потенциалом* поля $\mathbf{A}$, является аналитической функцией переменной $z = x + iy$.

Выясним смысл производной $\frac{dw}{dz}$. Так как в силу п. 2 ее можно вычислять, приняв $dz = dx$, то

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = A_x - iA_y$$

(во втором переходе мы использовали второе из равенств Коши–Римана (6), а в третьем — определение градиента). Поэтому, если в какой-либо точке z изобразить комплексное значение $\left(\frac{dw}{dz}\right)^*$ (не $\frac{dw}{dz}$!) вектором, мы как раз получим вектор поля $\mathbf{A}$ в этой точке (почему?).

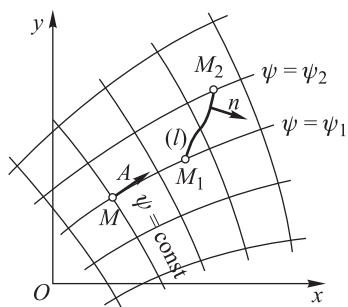


Рис. 18

Из этого, в частности, следует, что даже если аналитическая функция w получится многозначной, то ее производная $\frac{dw}{dz}$ должна быть однозначной, так что любые две однозначные ветви функции $w(z)$ отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Обратно, любая аналитическая функция $w(z) = \varphi + i\psi$ с однозначной производной $\frac{dw}{dz}$ служит комплексным потенциалом плоского поля $\mathbf{A}$, удовлетворяющего условиям (26). Таким образом, рассмотрение плоских полей, удовлетворяющих условиям (26), сводится к рассмотрению различных аналитических функций, что, конечно, гораздо проще.

Рассмотрим линию уровня функции тока, т.е. линию $\psi(x, y) = \text{const}$. Так как в любой точке M эта линия в силу п. 4 ортогональна проходящей через M линии $\varphi = \text{const}$, а вектор $\mathbf{A} = \text{grad } \varphi$ также ортогонален этой линии (п. I.1.2), то вектор $\mathbf{A}$ в точке M касается линии $\psi = \text{const}$ (рис. 18). Но так как M — любая точка, то линии $\psi = \text{const}$ — это как раз векторные линии поля $\mathbf{A}$; в частности, для поля скоростей — это линии тока, чем и объясняется название «функция тока».

Из формулы (7) вытекает еще следующее. Соединим какие-либо точки M_1 и M_2 любой линией (l) (рис. 18). Тогда

$$\psi_1 - \psi_2 = \int_{(l)} d\psi = \int_{(l)} \frac{\partial \psi}{\partial l} dl = \int_{(l)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \int_{(l)} (\text{grad } \varphi)_n dl = \int_{(l)} A_n dl,$$

т. е. *приращение функции тока вдоль любой линии (l) равно потоку поля через (l) слева направо по направлению движения вдоль (l) .*

Теперь, легко понять смысл возможной многозначности функции $w(z)$, которая может представиться, только если область (G) неодносвязна (ср. п. 1.3.2). Пусть точка z обходит в положительном направлении замкнутый контур (L) , внутри которого расположена «полость» (D) области (G) (рис. 19); эта полость может, в частности, состоять из единственной точки. Тогда приращение $\Delta_L \varphi = \Gamma_D$ функции φ равно (п. 1.3.2) циркуляции поля $\mathbf{A}$ по (L) ; а в силу предыдущего абзаца приращение $\Delta_L \psi = Q_D$ функции ψ равно потоку поля $\mathbf{A}$ через (L) в направлении изнутри наружу; приращение же $\Delta_L w = \Delta_L \varphi + i \Delta_L \psi = \Gamma_D + i Q_D$. Итак, *многозначность функции w свидетельствует о наличии в полостях области (G) источников циркуляции или источников векторных линий поля $\mathbf{A}$.* (Заметим, что внутри (G) таких источников в силу условий (26) не может быть.)

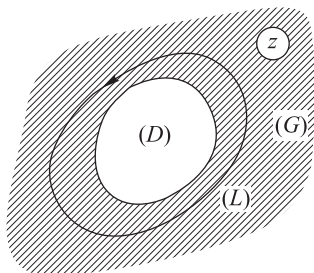


Рис. 19

Пусть область (G) конечносвязна, например, k -связна ($2 \leq k < \infty$); это значит, что у нее имеется $k - 1$ полостей $(D_1), (D_2), \dots, (D_{k-1})$. Выберем в (G) замкнутый контур (S) , охватывающий все эти полости, и будем проходить его в отрицательном направлении. Тогда в приращении $\Delta_S w = \Gamma_\infty + i Q_\infty$ величину Γ_∞ естественно трактовать как циркуляцию поля, порождаемую на бесконечности, а Q_∞ — как обильность источника векторных линий на бесконечности. Легко проверить (продумайте это!), что

$$\Gamma_{D_1} + \Gamma_{D_2} + \dots + \Gamma_{D_{k-1}} + \Gamma_\infty = 0,$$

$$Q_{D_1} + Q_{D_2} + \dots + Q_{D_{k-1}} + Q_\infty = 0.$$

Если область (G) конечная, то роль бесконечности играет внешняя компонента связности (т. е. связный кусок) границы (G) . Если область (G) бесконечная и имеет некоторые из компонент связности границы бесконечными (например, граница полосы, из которой вырезан круг, имеет две бесконечные и одну конечную компоненты связности), то при рассмотрении Γ_∞ и Q_∞ такие компоненты причисляются к бесконечно удаленной точке.

Подчеркнем в заключение, что функция $w(z)$ аналитична внутри (G) (или, что то же, в открытой области (G)). В отдельных точках границы (G) аналитичность может нарушаться.

15. Примеры. Рассмотрим комплексный потенциал

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln } z = \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Arg } z - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln |z|, \quad (27)$$

где Γ — вещественное число. Приравнявая $\psi = \text{Im } w$ постоянной, получим линии тока $\ln |z| = \text{const}$, т.е. окружности $|z| = \text{const}$ (рис. 20). Функция (27) аналитична в двусвязной области $z \neq 0$ и при обходе вокруг точки $z = 0$ $\Delta w = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot 2\pi = \Gamma$. Таким образом, в этой точке порождается циркуляция Γ (на рис. 20 показан случай $\Gamma > 0$). Точка $z = 0$ для потенциала (27) называется *вихревой точкой*, а соответствующее поле $\mathbf{A}$ называется *элементарным вихрем*; так как

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{x + iy} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{-y - ix}{x^2 + y^2},$$

то в силу п. 14

$$\mathbf{A} = \frac{\Gamma}{2\pi(x^2 + y^2)} (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}). \quad (28)$$

Любопытно, что поле элементарного вихря при $z \neq 0$ является безвихревым; если трактовать $\mathbf{A}$ как поле скоростей плоскопараллельного потока жидкости (тогда естественно говорить о *вихревой оси* ($x = y = 0$)), то малые объемы жидкости испытывают поступательный перенос и деформационные движения (подробнее об этом см. в п. V.I.5), тогда как угловые скорости равны нулю.

Если рассматривать поле во всей плоскости x, y , включая точку $z = 0$, то рассуждая аналогично п. I.3.4, получим, что

$$\text{div } \mathbf{A} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{A} = \Gamma \delta(x) \delta(y) \mathbf{k},$$

так что первое из условий (26) не выполняется. Значит, для применения рассмотрений п. 14 точку $x = y = 0$ необходимо исключить.

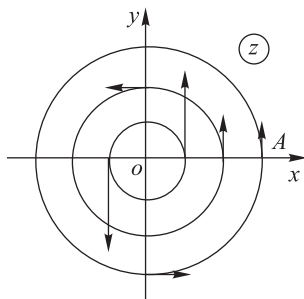


Рис. 20

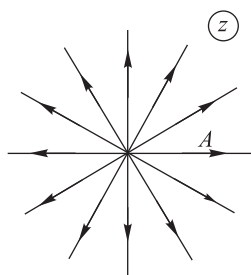


Рис. 21

Аналогичное рассмотрение комплексного потенциала

$$w = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Ln} z \quad (Q \text{ вещественное}) \quad (29)$$

приводит к точечному источнику, показанному на рис. 21 при $Q > 0$ и уже рассмотренному в п. I.3.4.

Из потенциалов, (27) и (29), можно получить другие распространенные поля. Так, диполь (п. I.3.4), расположенный в точке $z = 0$ с осью x и моментом M имеет комплексный потенциал

$$w = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{M/h}{2\pi} \operatorname{Ln}(z - h) + \frac{-M/h}{2\pi} \operatorname{Ln} z \right) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}. \quad (30)$$

Если источник поля распределен вдоль некоторой линии (L) с линейной плотностью $q = q(\zeta)$, где $\zeta \in (L)$, то соответствующее поле называется *простым слоем* и имеет потенциал

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{(L)} q(\zeta) \operatorname{Ln}(z - \zeta) |d\zeta|,$$

где $|d\zeta|$ равно элементу длины дуги (L). Результат аналогичных распределений вихря (27) вдоль линии называется *вихревой линией*, а диполя (30) с осью по нормали к линии — *двойным слоем*. Мы предоставляем читателю вывести формулы для соответствующих комплексных потенциалов

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \gamma(\zeta) \operatorname{Ln}(z - \zeta) |d\zeta|$$

и

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{(L)} \frac{m(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta.$$

Рассмотрим еще простой пример потенциала

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy. \quad (31)$$

Линии тока имеют вид гипербол $xy = \text{const}$ (рис. 22); векторные линии образуют так называемое седло (см., например, ЛВМ, п. XV.7). Чтобы найти направление поля вдоль этих линий, достаточно построить вектор поля в какой-либо одной неособой точке, тогда в остальных точках это направление можно продолжить

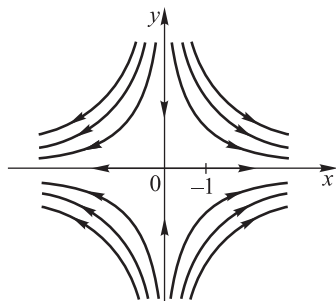


Рис. 22

по непрерывности в близких точках и направления поля близки). Так как, например,

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^* \bigg|_{z=1} = (2z)^* \bigg|_{z=1} = 2,$$

то направления будут такими, как показано на рис. 22 (проверьте!).

Любое поле можно рассматривать не на всей плоскости z , а на некоторой ее области. Если рассматривать поле с потенциалом (31) лишь в квадранте $x \geq 0, y \geq 0$, то таким, в частности, будет поле скоростей идеальной жидкости, обтекающей изнутри прямой угол.

16. Краевые задачи и конформные отображения. В п. 14 мы видели, что при построении в заданной плоской области (G) поля $\mathbf{A}$, удовлетворяющего условиям (26), имеется высокая степень произвола: это поле может иметь в качестве комплексного потенциала любую (вообще говоря, многозначную) аналитическую в (G) функцию $w(z)$ с однозначной производной. Поэтому если из таких полей надо выбрать какое-либо одно, вполне определенное, то должны быть указаны дополнительные условия, обеспечивающие разрешимость задачи и единственность решения. Обычно эти условия имеют вид некоторого скалярного *краевого условия*, т.е. равенства, связывающего проекций искомого поля (и, быть может, их производные) в каждой точке границы (S) области (G). (Поэтому краевое условие имеет здесь вид функционального равенства, т.е. равенства, связывающего функции, а не числового, как это бывает, когда искомой является функция одного аргумента; см., например, ЛВМ, п. XV.16.) В такую *краевую задачу* (т.е. задачу о построении поля при заданных краевых условиях) может входить также несколько числовых равенств.

Пусть, например, область (G) конечна (тогда краевая задача называется *внутренней*) и односвязна, а поле $\mathbf{A}$ истолковывается как поле скоростей идеальной жидкости. Тогда из физических соображений естественно, что это поле однозначно определяется, если в каждой точке $M \in (S)$ задать интенсивность потока, протекающего через (S) в этой точке, т.е. задать функцию

$$A_n|_M = g(M) \quad (M \in (S)), \quad (32)$$

где в качестве n для определенности берется направление внешней нормали. При этом должно выполняться условие

$$\int_{(S)} g(M) dS = 0 \quad (33)$$

(почему?). Можно доказать и математически, без всякой ссылки на физику, что задача о построении поля $\mathbf{A}$, удовлетворяющего уравнениям (26) и краевому условию (32), при необходимом соотношении (33) имеет ровно одно решение.

Если область (G) конечна, но k -связна ($k \geq 2$), то вокруг ее полостей могут возникнуть циркуляционные движения (см. п. 14); поэтому должны быть дополнительно заданы значения

$$\oint_{(L_j)} A_\tau dL = \Gamma_j \quad (j = 1, 2, \dots, k-1)$$

для замкнутых контуров $(L_1), (L_2), \dots, (L_{k-1})$, каждый из которых содержит внутри себя только одну из полостей области (G) . Если область (G) получается выбрасыванием из плоскости одной или нескольких конечных областей (тогда краевая задача называется *внешней*), то опять-таки из физических соображений следует, что дополнительно надо задать значение $\mathbf{A}_\infty$ поля на бесконечности («скорость набегающего потока жидкости»). Это условие также можно оправдать математически. Отметим, что при математическом уточнении надо потребовать, чтобы поле не имело на (S) особенностей типа диполей (п. 15) или более высокого порядка.

Имеется и много других типов краевых условий. Подробно различные краевые задачи исследуются в теории уравнений математической физики; здесь мы приведем только некоторые простые соображения, непосредственно примыкающие к материалу этой главы. Остановимся для определенности на внешней краевой задаче о построении плоского поля $\mathbf{A}$, удовлетворяющего вне некоторого замкнутого контура (S) условиям (26), а также краевому и добавочным условиям

$$A_n|_{(S)} \equiv 0, \quad \mathbf{A}_\infty \text{ задано}, \quad \oint_{(L)} A_\tau dL = \Gamma \text{ (задано)}. \quad (34)$$

Решение можно истолковать как поле скоростей идеальной жидкости, набегающей со скоростью $\mathbf{A}_\infty$ на непроницаемый контур (S) , которое имеет заданную циркуляцию Γ по некоторому контуру (L) , охватывающему (S) (рис. 23).

Будем искать комплексный потенциал $w(z)$ поля $\mathbf{A}$ (п. 14); тогда условия (34) можно переписать в виде

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{(S)} \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=\infty} = a \text{ задано},$$

$$\Delta_L w = \Gamma$$

$$(35)$$

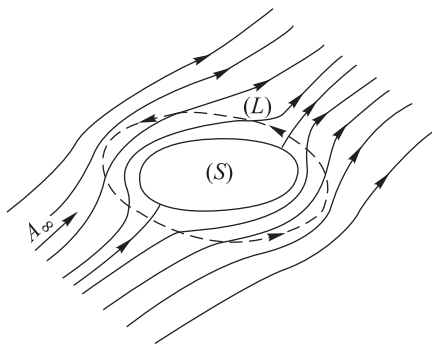


Рис. 23

(продумайте!). Первое из этих условий — функциональное — можно записать и так: $\left. \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right|_{(S)} \equiv 0$, т. е. $\text{Im } w|_{(S)} \equiv \text{const}$, вся (S) принадлежит одной из линий тока, что очевидно и из физических соображений.

Основная идея метода решения поставленной краевой задачи, основанного на применении конформных отображений, состоит в следующем. Пусть нам удалось осуществить конформное отображение $\zeta = f(z)$ области (G) , внешней по отношению к (S) , на область (H) плоскости ζ , внешнюю по отношению к некоторой замкнутой линии (T) . При этом отображении точки линии (S) отвечают точкам линии (T) , а точка $z = \infty$ отвечает точке $\zeta = \infty$. Пусть линия (T) оказалась настолько простой, что в области (H) мы можем решить аналогичную краевую задачу о построении аналитической функции $w(\zeta)$, удовлетворяющей условиям

$$\text{Im } w|_{(T)} = \text{const}, \quad \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty} = b, \quad \Delta_\Lambda w = \Gamma, \quad (36)$$

где значение постоянной b будет вскоре уточнено, а под (Λ) понимается какой-либо контур в (H) , охватывающий (T) . «Снесем» значения ω с точек (H) в соответствующие точки (G) , т.е. положим $w(z) = \omega(f(z))$. Тогда нетрудно проверить (проделайте это!), что эта функция аналитична внутри (G) и удовлетворяет первому и третьему из условий (35). Кроме того,

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty} = \left. \frac{d\omega}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty} \cdot \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=\infty} = b f'(\infty);$$

значит, и второе из условий (35) будет удовлетворено, если в (36) положить $b = a/f'(\infty)$.

Рассмотрим пример. Пусть (S) — это окружность $|z| = R$; a вещественно; $\Gamma = 0$. В силу п. 11 функция $\zeta = \frac{c}{2} \left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right)$ осуществляет конформное отображение области (G) , внешней по отношению к (S) , на область (H) , внешнюю по отношению к отрезку (T) с концами $\zeta = -c$ и $\zeta = c$. Для такой области краевая задача (36) с $b = \frac{a}{f'(\infty)} = \frac{2aR}{c}$ имеет простое решение $\omega = \frac{2aR}{c} \zeta$ (проверьте!). Снося эти значения в (G) , получим решение в плоскости z

$$w = \frac{2aR}{c} \frac{c}{2} \left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) = a \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$$

— потенциал бесциркуляционного обтекания окружности. Отсюда легко найти и потенциал циркуляционного обтекания окружности

$$w = a \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z$$

(проверьте!). Снося этот потенциал в различные области, можно получить решение задачи (36) для различных контуров (S) .

К внутренним краевым задачам конформное отображение применяется совершенно аналогично.

Конформные отображения применяются также к интересному и пока недостаточно изученному классу краевых задач, в которых граница области (G) заранее полностью или частично не задана; такие краевые задачи иногда называют *обратными*. Покажем для примера схему решения одной из таких задач, именно плоской задачи о свободном истечении струи невесомой идеальной жидкости. Пусть истечение происходит, как на рис. 24, причем твердые стенки, показанные жирно, заданы, а свободная поверхность ae струи заранее неизвестна. Точки b, c, d, e находятся на бесконечности; таким образом, точка $z = \infty$ является двойной точкой границы (G) : в далеких точках сосуда имеется источник, а в далеких точках струи — сток жидкости.

На не заданном заранее участке границы должно быть поставлено добавочное граничное условие. В рассматриваемой задаче условием, добавочным к $A_n = 0$ ($\mathbf{A}$ — вектор скорости), является равенство $A = \text{const}$, которое легко вытекает из закона сохранения энергии. Для построения линии ae и комплексного потенциала $w(z)$ поля $\mathbf{A}$ рассмотрим отображение области (G) в плоскость ζ , определяемое формулой $\zeta = w'(z)$. Вспомнив смысл этой производной (п. 14), а также граничные условия для поля $\mathbf{A}$, получим, что при этом

отображении образом области (G) служит четверть круга, т. е. область (H) с известной границей (см. рис. 25, где указаны также точки, отвечающие

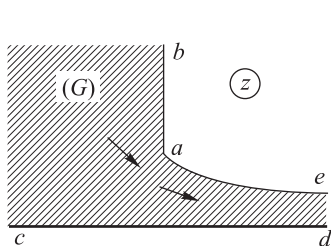


Рис. 24

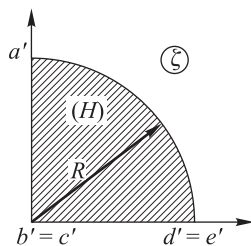


Рис. 25

обозначенным точкам контура (G)). Действительно, при таком отображении отрезок cd переходит в отрезок вещественной оси $c'd'$, включая нулевую точку (почему?), так как на cd будет $A_x > 0$, $A_y = 0$, а отрезок ba — в отрезок мнимой оси $b'a'$ в силу граничных условий $A_x = 0$, $A_y < 0$.

Задача о построении поля (26) в (H) , удовлетворяющего граничному условию $A_n = 0$ и имеющего источник обильности Q в c' и сток в d' , легко решается с помощью конформного отображения (H) на область более простого вида, на чем мы не будем здесь останавливаться. Оказывается, что соответствующий комплексный потенциал $\omega(\zeta)$ равен $-\frac{2Q}{\pi} \operatorname{Ln} \left(\frac{\zeta}{R} - \frac{R}{\zeta} \right)$; снося его

в (G) , получим потенциал $w = \omega(\zeta(z))$ исходной задачи. Но $\zeta = \frac{dw}{dz}$, т. е.

мы приходим к равенству $w = \omega \left(\frac{dw}{dz} \right)$, представляющему собой дифференциальное уравнение относительно функции $w(z)$, так что еще надо решить это уравнение (в этом и проявилась специфика обратной задачи), и только после этого мы получим искомый потенциал. Зная его, уже легко получить линию ae как линию тока, проходящую через заданную точку a . Вычисления, которые мы предоставляем желающим, приводят к уравнению линии ae :

$$z = h_0 i - \frac{2Q}{\pi} \ln \frac{(e^{it} - i)(1 + i)}{(e^{it} + i)(1 - i)} + \frac{2Q}{\pi} \frac{i}{R} (e^{it} - 1),$$

где h_0 — ширина струи на выходе, а параметр t меняется от 0 до $\pi/2$. Переход к пределу при $t \rightarrow \pi/2$ дает значение $h_\infty = h_0 - \frac{2Q}{\pi R}$ ширины струи на бесконечности. Но $h_\infty R = Q$ (почему?), откуда $R = \frac{Q}{h_0} \left(1 + \frac{2}{\pi} \right)$. Параметры h_0 и Q остаются произвольными.

17. Общие замечания о конформных отображениях. Здесь мы приведем без доказательства некоторые общие сведения о конформных отображениях. Доказательства этих фактов, которые полезно иметь в виду, порой довольно сложны; их можно найти в литературе, указанной в начале главы.

Прежде всего возникает вопрос о принципиальной возможности — независимо от технического осуществления — конформного отображения произвольной области (G) на любую другую область (H) . Будем *впредь считать эти области открытыми и не содержащими бесконечно удаленной точки*. Б. Риман в 1851 г. доказал, что *если каждая из областей (G) , (H) односвязна и не совпадает со всей плоскостью, то такое отображение всегда возможно*. При выборе этого отображения имеется три вещественные степени свободы. В частности, если задать образ в (H) одной из точек (G) (это два вещественных условия) и угол поворота малой окрестности этой точки (еще одно условие), то отображение определено однозначно. Для этой же цели можно задать образы одной внутренней и одной граничной точек (G) , или трех граничных точек (G) (в последнем случае образы на границе (H) должны располагаться в том же порядке, что прообразы на границе (G)).

Для многосвязных областей дело обстоит сложнее. Прежде всего, области различного порядка связности (п. I.3.2) конформно (и даже вообще гомеоморфно — см. п. 7) отобразить друг на друга невозможно; в частности, односвязную область (G) никогда нельзя конформно отобразить на неодносвязную область (H) . Впрочем, последнее легко понять: если отображение возможно и (S) — замнутый контур в (H) , окружающий какую-либо из полостей (H) , а (L) — соответствующий (S) контур в (G) , то, стягивая (L) в точку и следя за соответствующим изменением (S) , мы приходим к противоречию (продумайте это!).

Но и области одинакового порядка связности далеко не всегда можно конформно отобразить одна на другую. Например, можно доказать, что каждую двухсвязную область, отличную от плоскости с выколотой точкой, можно конформно отобразить на кольцо $R_0 < |z| < 1$, где $0 \leq R_0 < 1$ и число R_0 определено однозначно, т. е. кольца с разными R_0 друг на друга конформно отобразить нельзя. Для областей высшего порядка связности картина еще сложнее, и мы не будем ее здесь рассматривать.

При конформном отображении открытой области (G) на открытую область (H) граничные точки этих областей также находятся во взаимно однозначном соответствии. (Это выражают также словами: конформное отображение (G) на (H) можно продолжить до гомеоморфизма соответствующих замкнутых областей.) При этом надо иметь в виду, что граничная точка, к которой имеются существенно различные пути подхода из области (точнее — пути, не деформируемые один в другой в пределах области в достаточно малой окрестности этой точки), называется *кратной точкой границы*, т. е. считается за несколько точек в зависимости от числа таких путей. Например, для односвязной области, показанной на рис. 26 и имеющей вид бесконечной полосы с крестообразным разрезом, граничные точки полосы, за исключением точек $z = \infty$ и $z = a$, имеют кратность 1, т. е. являются простыми; точка $z = \infty$ и все точки разреза, за исключением центра креста, имеют

кратность 2; центр креста имеет кратность 4. На рис. 26 пунктиром показано, в каком порядке граничные точки этой области отображаются на точки окружности, если сама область конформно отображается на круг; в частности, центру креста отвечают четыре различные точки окружности.

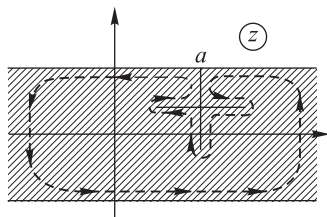


Рис. 26

Отображение сохраняет конформность и на границе областей, за исключением отдельных точек. Именно, пусть a — некоторая точка границы (G) , а a' — соответствующая точка границы (H) ; будем считать обе точки конечными. Тогда, если в a и a' граница без излома и имеет конечную кривизну (последнее требование можно существенно ослабить), то отображение в этих точках конформно. Если же область (G) образует вблизи точки a угол α , а область (H) вблизи a' — угол α' , то конформное отображение $(G) \rightarrow (H)$ имеет вблизи a с точностью до малых высшего порядка вид $\zeta = a' + C(z - a)^{\alpha'/\alpha}$ (ср. п. 9; заметим, что второе слагаемое в некоторых случаях имеет добавочный множитель типа $[\text{Ln}(z - a)]^\beta$), так что при $\alpha \neq \alpha'$ конформность отображения в точке a наверняка нарушается.

Иногда применяется следующее простое *правило симметрии* при конформном отображении. Допустим, что граница области (G) содержит прямолинейный участок ab и что вся область (G) расположена по одну сторону от прямой (l) , служащей продолжением этого участка; область (H) обладает теми же свойствами для участка $a'b'$ и прямой (l') . Пусть при конформном отображении $\zeta = f(z)$ области (G) на область (H) указанные участки соответствуют один другому. Произведем «удвоение» области (G) , присоединив к ней ее зеркальный образ относительно (l) , а также интервал ab (см. рис. 27, на котором исходная область (G) заштрихована). Обозначим: полученную «двойную» область через $(\tilde{G})$ и осуществим аналогичное удвоение области (H) до $(\tilde{H})$. Теперь легко расширить (продолжить) отображение f до конформного отображения $(\tilde{G})$ на $(\tilde{H})$: для этого надо, если z находится в (G) или на границе (G) , считать $f(z)$ таким же, как до удвоения, а если z_1 и z_2 симметричны относительно (l) (рис. 27), считать, что $f(z_1)$ и $f(z_2)$ симметричны относительно (l') . Мы предоставляем читателю проверить, что так определенное отображение конформно в зеркальном образе (G) , а потому и во всем $(\tilde{G})$.

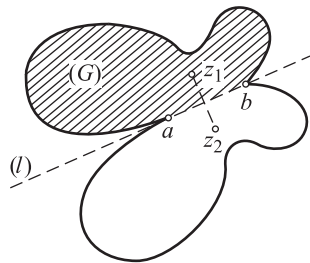


Рис. 27

Подобное продолжение конформного отображения на основе симметрии можно осуществлять и через дугу окружности (п. 8). Оказывается, что аналогичное продолжение можно производить через дугу без особых точек любой линии, если предварительно с помощью добавочного конформного отображения «распрямить» эту дугу; однако в общем случае указать более широкие области, на которые продолжается отображение, бывает весьма трудно (а продолжение нелинейного отображения на всю плоскость заведомо невозможно).

Ряд результатов получен различными авторами в проблеме изучения зависимости конформного отображения от изменения границы отображаемой области. Эти результаты в некоторых случаях дают возможность получить различные характеристики отображения области со сложной границей, заключив последнюю между двумя простыми границами, для которых отображение легко выписывается. Мы ограничимся для примера лишь формулировкой *принципа Линделёфа*, относящегося к изменению конформного отображения области на круг при ее уменьшении (см. ниже), отослав интересующихся за доказательствами, дальнейшими результатами и их приложениями к книге [66].

Итак, допустим, что односвязная область (G) с границей (S) целиком содержится в конечной односвязной области $(H) \neq (G)$ с границей (T) , и пусть функция $\chi(z)$ отображает конформно (G) на единичный круг, а $\psi(z)$ — область (H) на тот же круг, причем $0 \in (G)$, $\chi(0) = \psi(0) = 0$. Тогда оказывается, что при любом r , $0 < r < 1$, замкнутый контур $|\chi(z)| = r$ расположен строго внутри (без соприкосновений!) замкнутого контура $|\psi(z)| = r$; $|\chi'(0)| > |\psi'(0)|$; если (S) и (T) имеют по крайней мере одну общую точку z_0 , то $|\chi'(z_0)| < |\psi'(z_0)|$; если (S) и (T) имеют полярные уравнения соответственно $\rho = \alpha(\varphi)$ и $\rho = \beta(\varphi)$ с однозначными правыми частями, причем $\beta(\varphi_0) - \alpha(\varphi_0) = \max_{\varphi} [\beta(\varphi) - \alpha(\varphi)]$; то $\alpha(\varphi_0)|\chi'(\alpha(\varphi_0)e^{i\varphi_0})| \geq \beta(\varphi_0)|\psi'(\beta(\varphi_0)e^{i\varphi_0})|$.

Полезно иметь в виду также, что влияние изменения границы отображаемой области на небольшом участке при удалении от этого участка быстро затухает.

18. Применение метода малого параметра. Так как в реальных вычислениях точно отобразить конформно друг на друга удастся лишь области сравнительно простого вида, то разработан целый ряд методов приближенного конформного отображения, пригодных для более широких классов областей. Эти методы описаны в книгах [66] и особенно [44, 51, 84, 116]. Здесь мы рассмотрим только применение метода малого параметра¹⁾ для конформного отображения на круг области, близкой к кругу. Полученный результат можно применить к более общей задаче о конформном отображении мало измененной области (G) на область (H) , если (G) и (H) имеют сравнительно простой вид. В самом деле, пусть функции $g(z)$ и $h(z)$ осуществляют конформное отображение областей (G) и (H) соответственно на единичный круг, а область (G_1) получена из (G) малым изменением контура. Тогда

¹⁾ Метод малого параметра представляет собой один из наиболее универсальных приближенных методов. Его основная идея изложена, в частности, в ЛВМ, п. V.5.

область $g(G_1)$ близка к единичному кругу (почему?). Если функция f_1 осуществляет отображение этой области на единичный круг, то функция $h^-(f_1(g(z)))$, где черточкой обозначена обратная функция, осуществляет конформное отображение (G_1) на (H) .

Нам потребуется простая лемма.

Лемма. Для того чтобы функция, разложенная в комплексный ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad (37)$$

имела постоянный модуль, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* c_{n+p} = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \dots); \quad (38)$$

при выполнении этого условия

$$|f(t)|^2 \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (39)$$

Для доказательства нужно помножить равенство (37) на сопряженное $f^*(t) = \sum_n c_n^* e^{-int} = \sum_m c_m^* e^{-imt}$, что дает

$$\begin{aligned} |f(t)|^2 &= \sum_{n,m} c_n c_m^* e^{i(n-m)t} = \sum_{m,p} c_{m+p} c_m^* e^{ipt} = \\ &= \sum_m c_m c_m^* + \sum_{p \neq 0} \left(\sum_m c_{m+p} c_m^* \right) e^{ipt}, \end{aligned}$$

откуда вытекают условия (38) при $p \neq 0$ и равенство (39). Однако $\sum_n c_n^* c_{n-p} =$

$= \left(\sum_n c_n^* c_{n+p} \right)^*$ (проверьте!), так что условия (38) достаточно потребовать лишь при $p > 0$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к применению метода малого параметра. Пусть область (G) ограничена замкнутым контуром с уравнением

$$z = e^{it} + \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int}, \quad (40)$$

где α — вещественный малый параметр, а множителем при нем стоит произвольная периодическая функция с периодом 2π , что требуется для замкнутости контура. При $\alpha = 0$ область (G_α) представляет собой единичный круг, так что можно исходить из тождественного отображения $\zeta = z$. Следуя методу малого параметра, примем, что при $\alpha \neq 0$ искомое отображение области (G_α) на круг (H) имеет вид

$$\zeta = z + \alpha g_1(z) + \alpha^2 g_2(z) + \dots \quad (41)$$

Для нормировки отображения примем, что, как и при $\alpha = 0$,

$$\zeta|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=0} = 1. \quad (42)$$

Здесь четыре вещественных равенства (почему?), тогда как конформное отображение в силу п. 17 нормируется тремя. Поэтому введем дополнительную степень свободы, не фиксируя заранее радиус R круга (H) : $|\zeta| < R$.

Будем искать все функции $g_j(z)$ в виде сумм степенных рядов. Тогда из формул (41) и (42) вытекает, что у этих рядов свободные и линейные члены должны отсутствовать, т. е. получаем

$$\zeta = z + \alpha \sum_{k=2}^{\infty} a_{1k} z^k + \alpha^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{2k} z^k + \dots \quad (43)$$

Задача состоит в том, чтобы найти все коэффициенты a_{jk} .

Так как граница области (G) должна перейти в окружность $|\zeta| = R$, то функция от t , получающаяся в результате подстановки выражения (40) в правую часть (43), т. е.

$$\begin{aligned} e^{it} + \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int} + \alpha \sum_{k=2}^{\infty} a_{1k} \left[e^{it} + \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int} \right]^k + \\ + \alpha^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{2k} \left[e^{it} + \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int} \right]^k + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

должна иметь постоянный модуль R . Значит, можно воспользоваться доказанной выше леммой, имея в виду, что все коэффициенты c_n , которые можно получить с помощью перегруппировки членов в выражении (44), представляют собой ряды по степеням α ; поэтому каждое из равенств (38) порождает целую серию соотношений, полученных приравниванием нулю коэффициентов при каждой степени α . Выпишем начальные члены разложений коэффициентов c_n :

$$c_n = \alpha d_n + \dots (n \leq 0); \quad c_1 = 1 + \alpha d_1 + \dots; \quad c_n = \alpha(d_n + a_{1n}) + \dots (n \geq 2). \quad (45)$$

Подставляя эти разложения в (38) и выписывая коэффициенты при α , получим (проверьте!) $(d_{p+1} + a_{1,p+1}) + d_{1-p}^* = 0$, откуда

$$a_{1k} = -d_k - d_{2-k}^* \quad (k = 2, 3, 4, \dots). \quad (46)$$

Для получения коэффициентов a_{2k} надо было бы продолжить разложения (45) до членов с α^2 , а в разложениях (38) выписать коэффициент при α^2 , что мы предоставляем читателю. Заметим также, что из (38) и (45) вытекает начало разложения для R^2 :

$$R^2 = 1 + 2 \operatorname{Re} d_1 \alpha + \dots \quad (47)$$

Если бы мы хотели получить отображение области (G_α) на круг единичного радиуса, то следовало бы функцию (43) разделить на найденное значение R .

Линейную часть полученного результата можно представить также в интегральной форме, которая иногда оказывается предпочтительнее. Для этого

построим соответствующую функцию влияния (общую идею построения и применения такой функции можно найти в ЛВМ, п. XIV.26); но так как задача о построении конформного отображения нелинейна, то надо воспользоваться замечанием, сделанным в конце указанного пункта, т.е. найти пронормированный результат малого влияния. Поэтому допустим сначала, что полярное уравнение контура области (G_p) имеет вид $\rho = 1 + P\delta(\varphi - \varphi_0)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), где $|P| \ll 1$, а δ — дельта-функция. Это же уравнение можно записать в виде $z = e^{i\varphi} + P\delta(\varphi - \varphi_0)e^{i\varphi}$, откуда, сравнивая с (40), полагаем $t = \varphi$, $\alpha = P$, $d_n = \frac{1}{2\pi} e^{(1-n)i\varphi_0}$ (проверьте!). Будем считать, что (H) — единичный круг, для чего функцию (43) разделим на значение R из (47); учитывая формулу (46), получаем функцию влияния для возмущения отображающей функции

$$\begin{aligned} G(z; \varphi_0) &= \lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{P} \left(\frac{\zeta}{R} - z \right) - \lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{P} \left\{ \left[z - P \sum_{k=2}^{\infty} (d_k - d_{2-k}^*) z^k + \dots \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 - P \operatorname{Re} d_1 + \dots) - z \right\} = -z \operatorname{Re} d_1 - \sum_{k=2}^{\infty} (d_k - d_{2-k}^*) z^k = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(z + 2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{(1-k)i\varphi_0} z^k \right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\varphi_0} z}{1 - e^{-i\varphi_0} z} z \end{aligned}$$

(проверьте!). Отсюда по общей методике применения функции влияния, если контур отображаемой области имеет полярное уравнение $\rho = 1 + p(\varphi)$, где $|p(\varphi)| \ll 1$, то отображение, с точностью до малых высшего порядка, имеет вид

$$w = z + \int_0^{2\pi} G(z; \varphi_0) p(\varphi_0) d\varphi_0 = z - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-i\varphi_0} z}{1 - e^{-i\varphi_0} z} z p(\varphi) d\varphi.$$

По поводу дальнейших результатов в этом направлении (в частности, для областей иного вида), а также их приложений см. [66].

§3. Интегрирование и степенные ряды

1. Интеграл. Пусть в комплексной плоскости z задана ориентированная линия (L) , а в ее точках заданы значения некоторой функции $f(z)$. Тогда определение интеграла

$$\int_{(L)} f(z) dz = \lim \sum_{k=1}^n f(\sigma_k) \Delta z_k \quad (1)$$

дается совершенно аналогично тому, как для криволинейного интеграла по координате, причем смысл обозначений показан на рис. 28. Если линия (L) имеет конечную длину, а функция $f(z)$ в точках $z \in (L)$ принимает конечные значения, то и интеграл (1) имеет определенное

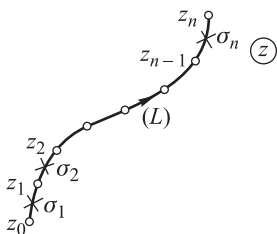


Рис. 28

конечное комплексное значение. Если же хотя бы одно из этих условий не выполняется, то интеграл $\int_{(L)} f(z) dz$ несобственный, и вопрос о его сходимости решается аналогично тому, как это делается для вещественных интегралов.

Интеграл (1) легко сводится к вещественным криволинейным интегралам. Для этого обозначим $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z = x + iy$; тогда

$$\int_{(L)} f dz = \int_{(L)} (u + iv)(dx + idy) = \int_{(L)} (u dx - v dy) + i \int_{(L)} (v dx + u dy). \quad (2)$$

Поэтому интеграл (1) обладает теми же простыми общими свойствами, что и криволинейные интегралы по координатам. Отметим, в частности, что при перемене ориентации линии (L) интеграл (1) умножается на -1 .

Если для функции $f(z)$ удастся найти первообразную $F(z)$, то для вычисления интеграла (1) можно воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница

$$\int_{(L)} f(z) dz = F(z) \Big|_{(L)},$$

где символ в правой части означает приращение функции $F(z)$, когда точка z проходит линию (L) в соответствии с ее ориентацией. Если при этом функция $F(z)$ получится многозначной (а функция $f(z)$ подразумевается однозначной), то надо начать от какого-либо одного ее значения, а затем следить за его непрерывным изменением.

Учитывая, что модуль суммы не превосходит суммы модулей, а $|dz| = dL$ (элементу длины), получим оценки интеграла

$$\left| \int_{(L)} f(z) dz \right| \leq \int_{(L)} |f(z)| dL \leq \max_{z \in (L)} |f(z)| \cdot L, \quad (3)$$

где под L , как обычно, понимается длина линии (L) .

2. Интеграл от аналитической функции. Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая во всех точках некоторой открытой области (G) . Тогда для интегралов в правой части (2) выполнено необходимое условие независимости интеграла от контура интегрирования. В самом деле, для интеграла $\int (P dx + Q dy)$ это условие имеет вид $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ (см. сноску на с. 43); оно же означает, что поле

$A = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ безвихревое. Если это условие применить к интегралам в правой части (2), то получатся как раз соотношения Коши–Римана (1.6) (проверьте!), которые для аналитической функции выполняются.

Применяя к интегралам (2) результаты пп. 1.3.1, 2, непосредственно получаем следующие утверждения.

Если область (G) односвязная, то интеграл

$$\int_{z_0}^z f(z)dz \quad (4)$$

при фиксированной z_0 зависит только от z , но не зависит от контура интегрирования, расположенного в (G) ; этот интеграл представляет собой первообразную к $f(z)$. Имеет место равенство

$$\oint_{(L)} f(z)dz = 0 \quad (5)$$

для любого замкнутого контура (L) в (G) .

Если область (G) не односвязная, то интеграл (4) представляет собой, вообще говоря, бесконечнозначную функцию z , различные ветви которой отличаются друг от друга на постоянное слагаемое и служат первообразными к $f(z)$. Равенство (5) гарантируется для замкнутых контуров, внутренность которых целиком принадлежит (G) . Для остальных замкнутых контуров (L) можно утверждать только, что интеграл $\oint_{(L)} f(z)dz$ остается неизменным, если контур (L)

непрерывно деформировать, не выводя его в процессе деформации за пределы (G) . (Это верно и для разомкнутых контуров, если в процессе деформации контура не менять его концы.)

В частности, мы видим, что *если функция $f(z)$ однозначная и аналитическая всюду внутри замкнутого контура (L) и на нем, то имеет место формула (5). Это важное предложение называют теоремой Коши.*

Отметим, что под словами «аналитичность на контуре» обычно понимается «аналитичность в некоторой полоске, содержащей этот контур». В теореме Коши и в других аналогичных предложениях достаточно требовать аналитичность функции строго внутри контура, а на самом контуре требовать только, чтобы функция сохраняла непрерывность.

Подчеркнем еще раз, что здесь и всюду в дальнейшем мы рассматриваем интегралы только от однозначных функций, о чем мы не будем впредь постоянно упоминать. Если подынтегральная функция по первоначальному определению многозначная, то мы будем пользоваться ее определенной ветвью и считать, что контур интегрирования не

пересекает разрезы. В более сложных вычислениях иногда приходится от этого условия отказываться; тогда нужно тщательно указывать, какие именно значения подынтегральной функции имеются в виду, а возможность применения интегральных теорем требует каждый раз специального исследования.

3. Ряды Лорана. *Ряды Лорана*, названные по имени французского математика П. Лорана (1813–1854), широко применяются в теории аналитических функций. Эти ряды являются обобщением степенных и имеют общий вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = \dots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (6)$$

Таким образом, по сравнению с обычными степенными рядами здесь допускаются также степени с целыми отрицательными показателями. Поэтому ряд Лорана, вообще говоря, бесконечен в обе стороны, хотя в частных случаях он может быть конечным в одну или даже в обе стороны. Ряды

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad \text{и} \quad \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots \quad (7)$$

называются соответственно *регулярной* (иначе *правильной*) и *сингулярной* (*главной*) *частями* ряда (6).

Первый ряд (7) — это обычный степенной ряд, а потому он сходится в некотором круге $|z| < R_2$. Второй ряд (7) — это степенной ряд относительно $\frac{1}{z}$, а потому он сходится в

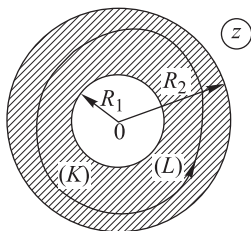


Рис. 29

некоторой области $\left| \frac{1}{z} \right| < \rho$, т. е. $|z| > \frac{1}{\rho} = R_1$. Чтобы сходились оба ряда (7), должно быть $R_1 < |z| < R_2$. В случае $R_1 < R_2$, а только он и представляет интерес, это условие определяет в плоскости z кольцо (K) (рис. 29), в точках которого и сходится ряд (6). Он может сходиться также в некоторых точках окружностей $|z| = R_1$, и $|z| = R_2$, тогда как при $|z| < R_1$ и $|z| > R_2$ ряд (6) расходится. Рисунок 29 относится к случаю, когда $R_1 > 0$, $R_2 < \infty$; подумайте, что будет, если одно или оба из этих условий нарушаются.

В силу предыдущего абзаца на ряды вида (6) естественно распространяются свойства обычных степенных рядов (см., например, ЛВМ, п. XVII.11). В частности, если обозначить сумму ряда (6) в (K) через $f(z)$, то формулу

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad z \in (K), \quad (8)$$

можно почленно дифференцировать любое число раз, а потому *сумма ряда Лорана представляет собой в кольце его сходимости аналитическую функцию*. При почленном интегрировании ряда (6) возникает осложнение, так как при $c_{-1} \neq 0$ получается сумма

$$F(z) = \left(\dots - \frac{c_{-3}}{2z^2} - \frac{c_{-2}}{z} + \text{const} + c_0z + \frac{c_1}{2}z^2 + \frac{c_2}{3}z^3 + \dots \right) + c_{-1} \text{Ln } z \quad (9)$$

ряда Лорана и многозначной логарифмической функции. Поэтому, если проинтегрировать формулу (8) по замкнутому контуру (L) , обходящему по (K) внутреннюю окружность один раз в положительном направлении (рис. 29), и воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница, мы получим

$$\oint_{(L)} f(z)dz = F(z)|_{(L)} = 0 + c_{-1} \cdot 2\pi i. \quad (10)$$

Все члены в правой части (9), кроме последнего, представляют собой однозначные функции и потому при обходе замкнутого контура не получают приращения.

Ряд Лорана может иметь также вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)^k;$$

тогда он сходится в некотором кольце с центром в точке z_0 . Такие ряды встречались уже в работах Л. Эйлера 1748 г.

4. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. В п. 3 мы показали, что сумма ряда Лорана представляет собой аналитическую функцию в кольце его сходимости. Сейчас мы проверим, что и, наоборот, *функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в некотором кольце (K) , разлагается в нем в ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)^k, \quad z \in (K), \quad (11)$$

где z_0 — центр кольца; эта важная теорема была доказана П. Лораном в 1843 г.

При доказательстве для простоты записи будем считать, что центр кольца находится в точке $z = 0$, т. е. кольцо определено неравенствами $R_1 < |z| < R_2$, где $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Положим $z = \rho e^{i\varphi}$, где ρ постоянно, $R_1 < \rho < R_2$. Тогда величина $f(\rho e^{i\varphi})$ будет функцией от φ , периодической с периодом 2π (почему?). Разложим ее в комплексный ряд Фурье

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(\rho) e^{ik\varphi}, \quad (12)$$

коэффициенты которого, зависящие от зафиксированного ρ , определяются формулой

$$C_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi. \quad (13)$$

Чтобы уточнить эту зависимость, продифференцируем обе части по ρ , учитывая, что ρ входит под знак интеграла как параметр¹⁾:

$$\frac{dC_k}{d\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} [f(\rho e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi}] d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} f'(\rho e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi.$$

Проинтегрируем теперь полученный интеграл по частям, положив $e^{-ik\varphi} = u$, $f'(\rho e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi = dv$, откуда $du = -e^{-ik\varphi} ik d\varphi$, $v = \frac{1}{i\rho} f(\rho e^{i\varphi})$ (проверьте!). Это дает

$$\frac{dC_k}{d\rho} = \frac{1}{2\pi} e^{-ik\varphi} \frac{1}{i\rho} f(\rho e^{i\varphi}) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{i\rho} f(\rho e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} ik d\varphi.$$

Внеинтегральный член равен нулю (почему?), и, сравнивая результат с (13), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dC_k}{d\rho} = \frac{k}{\rho} C_k, \quad \text{откуда} \quad \frac{dC_k}{C_k} = k \frac{d\rho}{\rho}, \quad C_k(\rho) = c_k \rho^k$$

(проверьте!). Подставляя этот результат в (12) и (13), получаем разложение

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \rho^k e^{ik\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\rho e^{i\varphi})^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

справедливое для всех $z \in (K)$. Итак, утверждение предыдущего абзаца доказано.

Чтобы получить формулу для коэффициентов c_k , поменяем в правой части (11) обозначение индекса суммирования k на l и затем поделим обе части на $(z - z_0)^{k+1}$; это даст

$$f(z)(z - z_0)^{-k-1} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l (z - z_0)^{l-k-1}. \quad (14)$$

Теперь проинтегрируем обе части по какому-либо замкнутому контуру (L) , обходящему по (K) точку z_0 один раз в положительном направлении. При этом надо воспользоваться тем, что для любого целого

¹⁾ Здесь применяется *правило Лейбница*: если подынтегральная функция «собственного» интеграла зависит от параметра (в данном случае ρ), то чтобы найти производную от этого интеграла по ρ , достаточно продифференцировать по ρ подынтегральную функцию. (Это правило справедливо и для несобственных сходящихся интегралов.)

$m \neq -1$ будет $\oint_{(L)} (z - z_0)^m dz = 0$, тогда как $\oint_{(L)} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i$ (почему?). Поэтому после интегрирования правой части (14) останется только член с $l = k$, и мы получим $\oint_{(L)} f(z)(z - z_0)^{-k-1} dz = c_k \cdot 2\pi i$, откуда

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (15)$$

Формула (11) может оказаться справедливой и за пределами кольца (K) . Пусть, например, это кольцо на рис. 30 заштриховано, а функция $f(z)$ аналитична на всей плоскости z , за исключением точек и линии разрыва, отмеченных на рис. 30 звездочками. Тогда в концентрическом с (K) кольце между окружностями (S_1) и (S_2) (рис. 30) все предыдущие рассуждения пригодны, и потому формула (14) и здесь справедлива. Как будет показано в п. 5, еще далее расширять кольцо сходимости нельзя, т.е. внутри (S_1) и снаружи от (S_2) ряд (14) расходится. Таким образом, окружности, ограничивающие область справедливости разложения аналитической функции в ряд Лорана, должны «сидеть» на точках или линиях разрыва этой функции. Подчеркнем, что в ряд Лорана можно разлагать только однозначную функцию. Конечно, можно проводить разложение в такой ряд и однозначной ветви многозначной функции; тогда на граничную окружность могут попасть и точки разветвления, через которые проходят линии разрыва разлагаемой ветви.

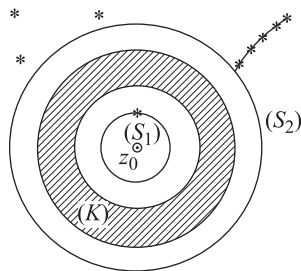


Рис. 30

Ряд Лорана для заданной функции существенно зависит от выбора кольца, в котором производится разложение. Например, функция $f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2}$ аналитична на всей плоскости z , за исключением точек $z = -1$ и $z = 2$. Пользуясь формулой $(1 - \alpha)^{-1} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$ ($|\alpha| < 1$), легко получить три разложения:

$$f(z) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(-1 - \frac{1}{2^2}\right)z + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)z^2 + \left(-1 - \frac{1}{2^4}\right)z^3 + \dots \quad (|z| < 1),$$

$$f(z) = \dots - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}z - \frac{1}{2^3}z^2 - \dots \quad (1 < |z| < 2),$$

$$f(z) = (1+1)\frac{1}{z} + (-1+2)\frac{1}{z^2} + (1+2^2)\frac{1}{z^3} + (-1+2^3)\frac{1}{z^4} + \dots \quad (|z| > 2)$$

(проверьте!).

5. Ряд Тейлора. Пусть дано, что функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, за исключением, быть может, его центра $z = z_0$, вблизи которого она ограничена. Тогда в «кольце» $0 < |z - z_0| < R$ справедливо разложение (11) с коэффициентами (15). Примем за (L) окружность $|z - z_0| = \rho \rightarrow 0$ и воспользуемся оценкой (3), получим

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{(L)} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \right| \cdot 2\pi\rho = \max_{(L)} |f(z)|\rho^{-k}.$$

Мы видим, что для $k < 0$ при $\rho \rightarrow 0$ правая часть стремится к нулю; но левая часть не зависит от ρ , а потому она просто равна нулю. Итак, в приведенных предположениях ряд Лорана не содержит сингулярной части, а потому превращается в обычный степенной ряд Тейлора. (Напомним, что всякий степенной ряд есть ряд Тейлора для своей суммы.)

Из сказанного вытекает, в частности, что *однозначная аналитическая функция в некоторой окрестности любой своей обыкновенной (т.е. не особой) точки разлагается в ряд Тейлора*. Этот на первый взгляд мало интересный результат влечет за собой целый ряд следствий. Так, из теории степенных рядов (см., например, ЛВМ, п. XVII.14) следует, что сумма степенного ряда имеет непрерывные производные всех порядков. Поэтому (первое следствие) и *функция, аналитическая в некоторой области, имеет в ней непрерывные производные всех порядков* — факт довольно удивительный, так как при определении аналитичности в п. 2.1 мы требовали наличия производной только первого порядка.

Вот второе следствие. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой области (G) и $f(z) \equiv 0$ в некоторой области (H) , содержащейся в (G) ; тогда и $f(z) \equiv 0$ всюду в (G) . В самом деле, пусть это не так и некоторая линия (L) ограничивает область, в которой $f(z) \equiv 0$ (рис. 31). Тогда в этой области и все производные $f^{(n)}(z) \equiv 0$, а в силу их непрерывности они равны нулю и на (L) . Но тогда, взяв любую точку $a \in (L)$ и разлагая $f(z)$ по степеням $z - a$, мы получим, что $f(z) \equiv 0$ и всюду в некоторой окрестности точки a , вопреки предположению, т.е. следствие доказано.

Третье следствие. Пусть функция $f(z) \not\equiv 0$ аналитична и $f(c) = 0$; тогда говорят, что точка $z = c$ является *нулем* функции $f(z)$. Разложение этой функции по степеням $z - c$ не может иметь все коэффициенты нулевыми (почему?), т.е. оно начинается с некоторого члена $c_n(z - c)^n$. Показатель n называется *кратностью (порядком)* рассматриваемого нуля (это то же, что кратность корня $z = c$ уравнения $f(z) = 0$, см. § 1; в частности, если $n = 1$, то нуль называется *простым*, в противном случае — *кратным*). Таким образом, мы видим, что *однозначная аналитическая функция $f(z) \not\equiv 0$ имеет все нули конечного и притом целого порядка*. Нули нецелого или бесконечного

порядков могут появиться только в точках разветвления многозначной функции (например, $z^{3/2}$, $z^{1/z}$).

Полезно обратить внимание на то, что для вещественных функций вещественного переменного, обладающих производными (даже любого порядка), ни одно из перечисленных свойств, вообще говоря, не имеет места. (Продумайте это!)

Можно проверить также утверждение, сделанное в предпоследнем абзаце п. 4 о кольце сходимости. Для этого надо применить только что доказанное второе следствие к разности между левой и правой частями формулы (11). Так как эта разность равна нулю в области, заштрихованной на рис. 30, то она равна нулю и всюду, где ряд (11) сходится, а функция $f(z)$ аналитична (почему?). Если бы ряд сходиллся в более широком кольце, чем показано на рис. 30, то так как сумма этого ряда в своем кольце сходимости не имеет особых точек, и функция $f(z)$ не имела бы там особых точек, вопреки предположению. Значит, утверждение доказано.

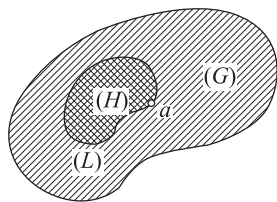


Рис. 31

Из этого утверждения вытекает, в частности, важный вывод о *радиусе сходимости* ряда Тейлора при разложении однозначной аналитической функции $f(z)$ по степеням $z - c$, где c — любая обыкновенная точка этой функции: *этот радиус равен расстоянию от c до ближайшей особой точки функции $f(z)$* . (Напомним, что если проводится разложение однозначной ветви многозначной функции, то к числу особых точек надо отнести и точки разветвления.) В частности, если функция $f(z)$ при конечных z не имеет особых точек — такая аналитическая функция называется *целой*, — то радиус сходимости равен бесконечности. Этот вывод дает возможность находить радиус сходимости ряда Тейлора, не исследуя остаточного члена этого ряда.

Вычислим, например, радиус сходимости разложения функции

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad (16)$$

по степеням z . Так как числитель и знаменатель — целые функции, то частное будет однозначной аналитической функцией для всех z , за исключением тех, при которых знаменатель равен нулю. Значит, функция (16) имеет особые точки при

$$z = \frac{\pi}{2}i + k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(проверьте!). Ближайшими к точке $z = 0$ являются $\pm \frac{\pi}{2}i$, значит, радиус сходимости рассматриваемого разложения равен $\frac{\pi}{2}$.

Интересно, что если считать независимую переменную вещественной, т. е. рассматривать разложение функции $\operatorname{th} x$ по степеням x , то коэффициенты ряда,

а потому и радиус сходимости будут такими же, как и для комплексного случая, т. е. интервалом сходимости будет $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Это может показаться странным, так как точки $x = \pm \frac{\pi}{2}$ не являются особыми для функции $\operatorname{th} x$, и потому непонятно, что препятствует ряду сходиться на большем интервале. Положение разъясняется при переходе к комплексному переменному: мнимые особые точки $z = \pm \frac{\pi}{2}i$ определили *круг сходимости*, а указанный интервал получился в результате пересечения этого круга с осью x (рис. 32). Так мнимые особые точки повлияли на чисто вещественное явление.

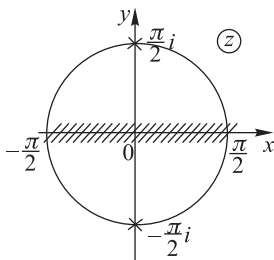


Рис. 32

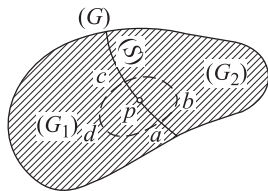


Рис. 33

Из доказанного выше первого следствия вытекает иногда применяемое обращение теоремы Коши из п. 2, называемое *теоремой Морера*: если функция $f(z)$ непрерывна в открытой области (G) и для любого контура (L) в (G) имеет место формула (5), то эта функция аналитична в (G) . В самом деле, тогда интеграл (4) не зависит от контура интегрирования, а при зафиксированном z_0 зависит только от z , т. е. $\int_{z_0}^z f(z)dz = \Phi(z)$. Но тогда $\Phi'(z) = f(z)$,

т. е. $\Phi(z)$ — аналитическая функция. Так как она имеет производные всех порядков, то и $f(z) = \Phi'(z)$ имеет производную, т. е. аналитична.

Из теоремы Морера вытекает, в частности, что если область (G) разделена линией (S) на части (G_1) и (G_2) (рис. 33) и на (G_1) задана аналитическая функция $f_1(z)$, а на (G_2) — аналитическая функция $f_2(z)$, причем эти функции имеют на (S) одинаковые и притом непрерывные предельные значения, то «составная» функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & (z \in (G_1)), \\ f_2(z) & (z \in (G_2)), \\ f_1(z) = f_2(z) & (z \in (S)), \end{cases}$$

аналитическая в (G) . В самом деле, эта функция, очевидно, непрерывная, а формула (4) для контуров вида $abcd$ (рис. 33) вытекает из равенства

$$\int_{abcd} f(z)dz = \int_{abcra} f(z)dz + \int_{apcda} f(z)dz = \int_{abcra} f_2(z)dz + \int_{apcda} f_1(z)dz.$$

Таким образом, аналитическая функция может иметь линию разрыва, но не «линию излома», вдоль которой сама функция была бы непрерывна, но ее

производная претерпевала бы разрыв. Другими словами, непрерывных кусочно-аналитических функций не бывает.

Предоставляем читателю доказать другое следствие из теоремы Морера: *если последовательность функций, аналитических в открытой области (G) , равномерно сходится¹⁾, то и предельная функция аналитична в (G) .*

6. Аналитические отображения и принципы максимума.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в некоторой открытой области (G) . Мы уже говорили в п.2.4, что тогда отображение $z \rightarrow w$ называется аналитическим, и если в некоторой точке $z_0 \in (G)$ будет $f'(z_0) \neq 0$, то отображение малой окрестности точки z_0 , с точностью до малых высшего порядка, сводится к поступательному переносу, всестороннему растяжению и повороту. Но что будет, если $f'(z_0) = 0$, однако $f(z) \not\equiv \text{const}$? Тогда в ряде Тейлора по степеням $z - z_0$ линейный член отсутствует, и потому этот ряд имеет вид

$$f(z) = f(z_0) + c_n(z - z_0)^n + \text{высшие степени} \quad (n \geq 2), \quad (17)$$

где в правой части выписан первый после постоянного член ряда с коэффициентом, отличным от нуля. Значит, с точностью до малых высшего порядка, $w - w_0 = c_n(z - z_0)^n$, т.е. малая окрестность точки z_0 испытывает n -листное отображение (n раз покрывает окрестность точки w_0), описанное в п.2.9; умножение на c_n добавляет всестороннее растяжение и поворот этой окрестности, от чего картина отображения принципиально не меняется. Ясно, что при этом отображение $z \rightarrow w$ не может быть взаимно однозначным.

Из сказанного вытекают различные полезные следствия. Так, из формулы (17), справедливой и при $n = 1$ (т.е. при $f'(z_0) \neq 0$), видно, что в малой окрестности точки z_0 значение $w_0 = f(z_0)$ принимается только при $z = z_0$, а в остальных точках этой окрестности будет $f'(z) \neq w_0$.

Отсюда, в свою очередь, получается следующее. Пусть функция $f(z) \not\equiv 0$ аналитична в некоторой конечной замкнутой области (K) ; это, по определению, означает, что она аналитична в некоторой открытой области (G) , содержащей (K) . Тогда $f(z)$ может иметь в (K) лишь конечное число нулей. В самом деле, в противном случае можно воспользоваться доказываемой в университетских курсах математического анализа и наглядно очевидной теоремой Больцано–Вейерштрасса, согласно которой из всякого бесконечного ограниченного множества точек евклидова пространства можно выделить сходящуюся последовательность точек. Но предел последовательности нулей функции будет нулем той же функции, и мы приходим к противоречию с утверждением предыдущего абзаца (продумайте это!).

Если функция $f(z)$ аналитична на всей плоскости z , то она может иметь бесконечное число нулей: например, такой будет $f(z) = \sin z$. Но так как в

¹⁾ Последовательность $\{f_n\}$ функций равномерно сходится к функции f в области (G) , если $\sup_{(G)} |f_n - f| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

каждом конечном круге она имеет лишь конечное число нулей, то, выбирая расширяющуюся последовательность кругов, в пределе исчерпывающую плоскость, мы получим, что *все нули такой функции $f(z)$ можно расположить в последовательность $z_1, z_2, z_3, \dots$, уходящую на бесконечность*.

Применяя доказанное к разности двух функций, получаем, например, такое усиление второго следствия из п.5: *если две функции аналитичны в некоторой области (G) и совпадают в ней на дуге какой-либо линии, то они совпадают в (G) тождественно*. Между прочим, отсюда вытекает простое доказательство возможности перехода от вещественных тождеств к комплексным, о которой мы упоминали в § 1. Как доказать, например, что $\sin^2 z = 1 - \cos^2 z$? Левая и правая части представляют собой аналитические функции z , совпадающие при вещественных z , т. е. на прямой $\operatorname{Im} z = 0$. Значит, они совпадают и при всех z .

Пусть функция $f(z) \not\equiv \text{const}$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 . Тогда маленький круг (K_z) с центром z_0 отображается функцией $f(z)$ на маленький круг (K_w) с центром в $f(z_0)$ (с поправками высшего порядка малости) (рис. 34). Выберем в (K_w) вблизи w_0 какую-либо точку w , для которой $|w| > |w_0|$. Эта точка w будет служить

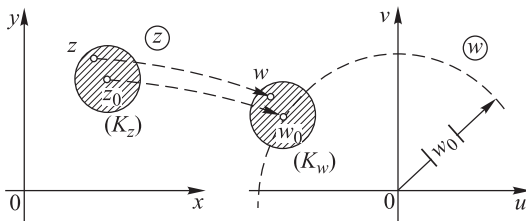


Рис. 34

образом некоторой точки $z \in (K_z)$. Таким образом, в любой близости от z_0 можно найти точку z , для которой $|f(z)| > |f(z_0)|$, и потому $|f(z)|$ не может иметь z_0 точкой максимума (продумайте это!).

Отсюда получаем такое следствие. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой конечной замкнутой области (K) . Тогда $|f(z)|$, как вещественная непрерывная функция, принимает на (K) наибольшее значение¹⁾. Из доказанного вытекает, что это значение *достигается обязательно на границе (K)* .

Аналогично проверяется, что и $\operatorname{Re} f(z)$ не может иметь z_0 точкой экстремума (продумайте!). Отсюда легко вывести, что *функция, непрерывная в конечной замкнутой области и гармоническая во всех ее внутренних точках, достигает наибольшего и наименьшего значений на границе этой области*.

Утверждения, подобные тем, которые были доказаны в двух последних абзацах, носят название *принципов максимума*.

¹⁾ Вещественная непрерывная функция, определенная на замкнутом ограниченном подмножестве (K) n -мерного пространства, принимает на (K) свои наибольшее и наименьшее значения.

7. Аналитическое продолжение. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области (G) , а $g(z)$ — в области (D) , причем (G) и (D) имеют общую область (H) (рис. 35), в которой $f(z) \equiv g(z)$. Тогда «составная» функция

$$f_1(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in (G)), \\ g(z) & (z \in (D)) \end{cases}$$

будет, очевидно, аналитической в «составной» области (G_1) , состоящей из всех точек (G) и (D) . (В силу п. 5 для этого достаточно даже, чтобы (G) и (D) примыкали друг к другу по линии, на которой обе функции имеют одинаковые и притом непрерывные предельные значения.) Эта функция $f_1(z)$ называется *аналитическим продолжением* каждой из функций $f(z)$ и $g(z)$. Такое продолжение получается обычно, если имеются две формулы, задающие аналитические функции и пригодные для различных областей z , которые имеют общую часть, где обе формулы дают одинаковый результат.

Функция $f_1(z)$ в свою очередь может быть аналитически продолжена на еще более широкую область и т. д. Теоретически говоря, после всевозможных таких продолжений мы приходим к *полной*, т. е. уже далее не продолжаемой аналитической функции $F(z)$. Эта функция $F(z)$ определяется функцией $f(z)$ однозначно, так как из п. 6 легко следует, что если вдоль какого-либо контура (L) плоскости z , начинающегося в (G) , функцию $f(z)$ возможно аналитически продолжить, то только одним способом. Однако если такой контур (L) при своем продолжении вновь попадет в (G) (рис. 35), то совсем не обязательно, чтобы мы вернулись к значениям $f(z)$. Другими словами, даже если исходная функция была однозначной, то результат ее аналитического продолжения может оказаться многозначной (даже бесконечнозначной) функцией.

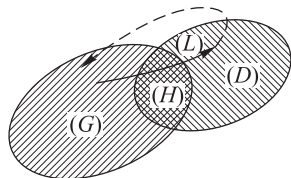


Рис. 35

Так как аналитическое продолжение осуществляется всегда через некоторую дугу на границе области определения функции, то непродолжаемость аналитической функции обычно распознается по тому, что эта функция определена на всей комплексной плоскости, без разрезов, хотя и может иметь на ней особые точки, в частности точки разветвления.

Приведем примеры. Сумма ряда

$$S(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots,$$

сходящегося при $|z| < 1$, представляет собой функцию, аналитическую в этом круге. Но там эта сумма равна

$$F(z) = \frac{1}{1-z},$$

а последнее выражение представляет функцию, аналитическую во всей плоскости z , за исключением точки $z = 1$. Значит, аналитическим продолжением функции $S(z)$ служит полная аналитическая функция $F(z)$. Говорят также, что $F(z)$ является *расширением* функции $S(z)$, а $S(z)$ — *сужением* функции $F(z)$.

Подобным образом бесконечнозначная функция $\text{Ln}(1+z)$ представляет собой полное аналитическое продолжение суммы ряда $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$, сходящегося в том же круге $|z| < 1$.

Интеграл, определяющий гамма-функцию,

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = \int_0^{\infty} \exp[-x + (p-1) \ln x] dx, \quad (18)$$

как нетрудно проверить, сходится не только для вещественных, но и для мнимых p , если $\text{Re } p > 0$. Так как правила дифференцирования интеграла по параметру (см. сноску на с. 80) непосредственно распространяются и на комплексные значения параметра, то интеграл (18) имеет производную по p и потому представляет аналитическую функцию от p в полуплоскости $\text{Re } p > 0$. Как и для вещественных p , легко проверяется, что в этой полуплоскости $\Gamma(p+1) \equiv p\Gamma(p)$. Поэтому функция

$$\Gamma_1(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p},$$

определенная и аналитическая в полуплоскости $\text{Re } p > -1$ (почему?), за исключением особой точки при $p = 0$, в первой полуплоскости совпадает с $\Gamma(p)$; таким образом, $\Gamma_1(p)$ представляет собой аналитическое продолжение функции $\Gamma(p)$ с первой полуплоскости на вторую. Аналогичным образом функция $\Gamma_2(p) = \frac{\Gamma_1(p+1)}{p}$ представляет собой аналитическое продолжение функции $\Gamma_1(p)$ на еще более широкую полуплоскость $\text{Re } p > -2$. Продолжая таким образом, мы получаем полную гамма-функцию, которая также обозначается через $\Gamma(p)$ и представляет собой однозначную аналитическую функцию на всей плоскости p , за исключением особых точек $p = 0, -1, -2, \dots$. Тождество $\Gamma(p+1) \equiv p\Gamma(p)$ выполняется на всей плоскости p .

Один из общих способов аналитического продолжения основан на правиле симметрии (п. 2.16). Из этого правила следует, например, что если граница области определения аналитической функции $f(z)$ содержит отрезок вещественной оси и на этом отрезке функция $f(z)$ принимает вещественные значения, то формула $f(z^*) = [f(z)]^*$ осуществляет аналитическое продолжение функции $f(z)$ через этот отрезок.

Для аналитического продолжения функции, заданной разложением в степенной ряд, может оказаться полезным следующее *преобразование Эйлера*. Допустим, что требуется продолжить функцию

$$f(z) = \gamma_0 c_0 + \gamma_1 c_1 z + \gamma_2 c_2 z^2 + \dots, \quad (19)$$

причем функция $g(z)$, разложение которой вокруг точки $z = 0$ имеет вид

$$g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad (20)$$

известна на всей плоскости z (т. е. $g(z)$ уже продолжена на всю плоскость z). Чтобы выразить $f(z)$ через $g(z)$, умножим обе части (20) на γ_0 и вычтем из (19), получим

$$f - \gamma_0 g = (\gamma_1 - \gamma_0) c_1 z + (\gamma_2 - \gamma_0) c_2 z^2 + (\gamma_3 - \gamma_0) c_3 z^3 + \dots \quad (21)$$

Теперь продифференцируем обе части (20), умножим результат на $(\gamma_1 - \gamma_0)z = \Delta\gamma_0 z$ и вычтем из (21), получим

$$f - \gamma_0 g - \Delta\gamma_0 z g' = (\gamma_2 - 2\gamma_1 + \gamma_0)c_2 z^2 + (\gamma_3 - 3\gamma_1 + 2\gamma_0)c_3 z^3 + \dots \quad (22)$$

Теперь продифференцируем (20) еще раз, умножим результат на $\frac{1}{2!}(\gamma_2 - 2\gamma_1 + \gamma_0)z^2 = \frac{1}{2!}\Delta^2\gamma_0 z^2$ и вычтем из (22) и т. д. Можно показать, что подмеченная закономерность будет проявляться и дальше, и в пределе мы приходим к разложению

$$f(z) = \gamma_0 g(z) + \frac{\Delta\gamma_0}{1!} z g'(z) + \frac{\Delta^2\gamma_0}{2!} z^2 g''(z) + \dots, \quad (23)$$

справедливому в некоторой окрестности точки $z = 0$, если коэффициенты γ_n не растут при $n \rightarrow \infty$ по абсолютной величине слишком быстро (допускается рост не выше экспоненциального). Однако правая часть (23) может оказаться аналитической далеко за пределами круга сходимости ряда (19) и, таким образом, дать аналитическое продолжение функции $f(z)$.

Так, допустим, что γ_n представляет собой многочлен от n некоторой степени k . Тогда $\Delta\gamma_n$ есть многочлен от n степени $k - 1$ (почему?) и т. д., а потому ряд в правой части (23) обрывается, и мы получаем конечное представление суммы ряда (19) через функцию $g(z)$, т. е. функция $f(z)$ оказывается продолженной на всю плоскость z .

Другой полезный частный случай получится, если положить

$$g(z) = (1 + z)^{-p}.$$

Тогда $c_0 = 1$, $c_1 = -\frac{p}{1!}$, $c_2 = \frac{p(p+1)}{2!}$ и т. д., и из (19) и (23) получим формулу

$$\begin{aligned} \gamma_0 - \frac{p}{1!} \gamma_1 z + \frac{p(p+1)}{2!} \gamma_2 z^2 - \dots = \\ = (1+z)^{-p} \left[\gamma_0 - \frac{p}{1!} \Delta\gamma_0 \frac{z}{1+z} + \frac{p(p+1)}{2!} \Delta^2\gamma_0 \left(\frac{z}{1+z} \right)^2 - \dots \right] \end{aligned}$$

(проверьте!). Результат особенно прост, если взять $p = 1$.

Возьмем, например, $p = 1$; $\gamma_n = \frac{1}{n+1}$. Тогда с помощью последовательного вычисления разностей легко проверить, что $\Delta^k \gamma_n = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)}$, откуда получаем $\Delta^k \gamma_0 = \frac{(-1)^k}{k+1}$, т. е.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots = \\ = \frac{1}{1+z} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{z}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{z+1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{z}{z+1} \right)^3 + \dots \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Ряд в левой части сходится при $|z| < 1$ (это разложение функции $\frac{\ln(1+z)}{z}$ по степеням z). Ряд в правой части сходится при $\left| \frac{z}{z+1} \right| < 1$, т.е. $|x+iy|^2 < < |x+iy+1|^2$ или $x > -\frac{1}{2}$. Значит, формула (24) осуществляет аналитическое продолжение ряда, стоящего в левой части, на полуплоскость $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$.

8. Варианты. Аналитические функции вещественного переменного. Если у функции $w = f(x)$ независимая переменная x по своему смыслу вещественна, то принятое в п. 2.1 определение аналитичности неприемлемо. В этом случае, исходя из результатов п. 5, говорят, что *функция аналитична на интервале $a < x < b$, если для любого x_0 из этого интервала она разлагается в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$, сходящийся в некоторой окрестности x_0* . Чтобы установить связь этого определения с определением п. 2.1, подставим

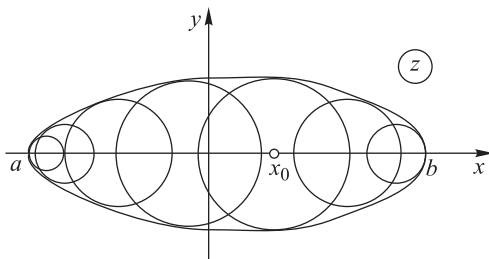


Рис. 36

мысленно в тейлоровское разложение функции $f(x)$ вместо вещественного x комплексное z ; тогда получится функция $f(z)$, аналитическая в некотором круге с центром x_0 и принимающая заданные значения при $z = x$. Если проделать это для разных x_0 , мы получим функцию $f(z)$, аналитическую в смысле п. 2.1 в некоторой области (плоскости z), содержащей интервал a, b вещественной оси (рис. 36) и совпадающей при $z = x$ с исходной функцией $f(x)$. (Подумайте, почему при определении $f(z)$ при разных x_0 мы не можем получить противоречие.) Итак, пользуясь терминологией п. 7, можно сказать, что аналитическая функция вещественного переменного допускает расширение (аналитическое продолжение) до аналитической функции комплексного переменного и, наоборот, первая является сужением второй.

Аналитические функции нескольких переменных. Будем говорить для простоты записи о функциях двух переменных. Функция $f(z_1, z_2)$ двух комплексных переменных z_1, z_2 , определенная в некоторой открытой области (G) двумерного комплексного числового пространства Z_2 , называется аналитической в этой области, если в некоторой окрестности любой точки $(z_{10}, z_{20}) \in (G)$ эта функция разлагается в двойной ряд Тейлора по степеням $(z_1 - z_{10}), (z_2 - z_{20})$. Подобным образом определяется и понятие аналитической функции двух вещественных переменных.

(Обращаем внимание читателя на недоразумения, которые иногда возникают из-за неточной терминологии. Например, рассмотрим функцию $w = y - x^2$

для вещественных x, y . Это аналитическая функция, равная нулю на линии $y = x^2$, но не тождественно равная нулю. Может показаться, что это противоречит свойствам аналитических функций, доказанным в п. 6. Но на самом деле ничего страшного нет: дело в том, что рассматриваемая функция аналитична как функция вещественных (или даже комплексных!) переменных x, y , но не аналитична как функция переменного $z = x + iy$.)

Если $f(x_1, x_2)$ — аналитическая функция вещественных переменных x_1, x_2 , то она аналитична и по каждому из этих переменных в отдельности, т. е. при зафиксированном другом. (Впрочем, обратное тоже верно, за исключением специально построенных примеров, не имеющих практического значения.) Более того, если имеется любая *аналитическая линия* (L): $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$ (это значит, что функции φ_1 и φ_2 аналитичны), проходящая по области, где функция f аналитична, то и сложная функция $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ аналитическая. Из этого свойства, которое выводится из возможности подстановки ряда в ряд (см., например, ЛВМ, п. XVII.12), вытекает, например, что если малая дуга линии (L) содержится в каком-либо множестве уровня функции f , то и вся линия (L) содержится в этом множестве (почему?).

Иногда приходится рассматривать неявные аналитические функции. Пусть, например, рассматривается уравнение

$$f(z_1, z_2) = 0, \quad (25)$$

причем функция f аналитична и выполняются условия

$$f(c_1, c_2) = 0, \quad f'_{z_2}(c_1, c_2) \neq 0 \quad (26)$$

(второе известно как условие существования неявной функции). Тогда можно доказать, что в достаточной близости от точки $(c_1; c_2)$ уравнение (25) может быть (и притом однозначно) разрешено относительно z_2 ; кроме того, получающаяся функция $z_2(z_1)$ также является аналитической, т. е. разлагается в ряд Тейлора по степеням $z_1 - c_1$. Это разложение можно найти либо с помощью последовательного дифференцирования равенства (25), в котором считается $z_2 = z_2(z_1)$, и вычисления производных $\left. \frac{d^k z_2}{dz_1^k} \right|_{(c_1; c_2)}$, либо с помощью непосредственного применения метода неопределенных коэффициентов. Отсюда, в частности, видно, что если аналитическая функция f является *вещественной*, т. е. принимает при вещественных значениях аргументов сама вещественные значения, а также числа c_1, c_2 вещественные, то и аналитическая функция $z_2(z_1)$ вещественна.

Если не предполагать второго условия (26), то положение осложняется, но в случае двух независимых переменных может быть без труда разобрано до конца. Будем для простоты предполагать, что $c_1 = c_2 = 0$ (в противном случае надо предварительно ввести новые переменные $\tilde{z}_k = z_k - c_k$), и рассмотрим разложение функции f по степеням z_1, z_2 , перенумеровав в каком-либо порядке все его фактически присутствующие, т. е. с не равными нулю коэффициентами члены:

$$f(z_1, z_2) = \sum_k d_k z_1^{m_k} z_2^{n_k}, \quad (27)$$

где все $d_k \neq 0$, все m_k и n_k — целые ≥ 0 . Уже самые простые примеры, как $f = z_1 + z_1^3 - z_2^3$ и т. п., показывают, что в общем случае решения уравнения (25) в виде ряда по целым степеням z_1 может и не существовать. Однако те же

примеры подсказывают, что можно попытаться построить решение в виде суммы ряда более общего вида

$$z_2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s^k, \quad \text{где } s^{q'} = z_1, \quad \text{т. е. } z_2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_1^{k/q'}, \quad (28)$$

(q' целое > 0), называемого рядом Пуизо. Можно доказать (на чем мы здесь не будем останавливаться), что это и есть решение уравнения (25) в самом общем случае.

Особенно просто — и часто вполне достаточно — найти главный, т. е. первый фактически присутствующий член в разложении (28). В самом деле, если $z_2 = As^p + \dots$ (многоточием обозначены члены высшего порядка малости), где $z_1 = s^q$, то из (27) получаем

$$f(z_1, z_2(z_1)) = \sum_k d_k A^{n_k} s^{pn_k + qm_k} + \dots, \quad (29)$$

Так как сумма этих степеней должна равняться нулю (почему?), то все члены должны взаимно уничтожиться; в частности, в выражении (29) должно быть по крайней мере два главных члена (с наименьшими степенями s), так как главные члены не могут «погаситься» членами высшего порядка малости. Но $d_k A^{n_k} \neq 0$, и потому мы приходим к выводу: целые числа $p \geq 1, q \geq 1$ должны быть такими, чтобы среди сумм $pn_k + qm_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) было по крайней мере две одинаковых, тогда как все остальные были бы большими. Если такие p, q найдены, то коэффициент a_p должен удовлетворять алгебраическому уравнению при естественном смысле обозначений

$$\sum d_k A^{n_k} = 0 \quad (pn_k + qm_k = \min). \quad (30)$$

В конкретных примерах можно действовать следующим образом. Отметим на плоскости с координатами m, n все наборы показателей, фигурирующие в разложении (27); так, на рис. 37 показана картина, отвечающая функции

$$f(z_1, z_2) \equiv z_1^6 - 2z_1^3 z_2^2 + 3z_1^2 z_2^3 + \frac{1}{2} z_1^5 z_2^3 - z_1 z_2^4 + z_1 z_2^5 - z_2^7 + z_2^8, \quad (31)$$

(проверьте!). Из первого условия (26) вытекает, что начало координат не отмечено (другими словами, в разложении (27) отсутствует свободный член); кроме того, всегда можно предполагать, что на каждой из осей m, n имеется по крайней мере одна отмеченная точка, так как в противном случае уравнение (25) можно сократить на степень z_1 или z_2 . Если теперь некоторая прямая проходит по крайней мере через две отмеченные точки и отделяет остальные от начала координат, то, записав ее уравнение в виде $pn + qm = \text{const}$, мы получим как раз искомые p, q (их следует брать минимально возможными, т. е. без общих делителей), после чего из уравнения (30) можно найти соответствующий коэффициент A^{n_k} . (Отрезки таких прямых образуют ломаную, называемую *диаграммой Ньютона*; на рис. 37 она показана сплошными линиями.) Так, мы предоставим читателю проверить с помощью рис. 37, что для уравнения (25) с функцией (31) возможные главные члены решений имеют вид

$$z_2 = (\sqrt[3]{-1})_1 s, \quad z_2 = (\sqrt[3]{-1})_2 s, \quad z_2 = (\sqrt[3]{-1})_3 s, \quad \text{где } s^3 = z_1 \quad (\text{для прямой } aa)$$

$$z_2 = 2z_1, \quad z_2 = z_1 \quad (\text{для прямой } bb)$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} s^3, \quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} s^3, \quad \text{где } s^3 = z_1 \quad (\text{для прямой } cc).$$

Первые три формулы в случае комплексного z_1 образуют единую трехзначную функцию $z_2 = (\sqrt[3]{-z_1})$; аналогично две последние можно записать в виде

$z_2 = \sqrt[3]{\frac{z_1}{2}}$. Такое кажущееся увеличение числа решений возникает всегда при $q > 1$, так как из п. 5 легко вытекает, что если одна ветвь многозначной функции удовлетворяет уравнению вида (25), то и все остальные ветви — тоже. Впрочем, если, как это часто бывает, считать z_1 вещественным, то под s надо понимать какую-либо определенную ветвь многозначной функции; тогда все найденные семь решений следует считать различными.

При построении дальнейших членов разложения (28) надо иметь в виду, что значение q' в формуле (28) может либо равняться найденному для главного члена значению q , либо же иметь добавочный неизвестный заранее целочисленный множитель. Поэтому в уравнении (25) надо сделать замену $z_1 = s^q$, $z_2 = s^p(A + z_3)$ и перейти к уравнению для $z_3(s)$. Если для преобразованного уравнения выполнено условие существования неявной функции, т. е. в соответствующей диаграмме Ньютона точка $(0; 1)$ будет отмеченной, то z_3 будет получено в виде ряда по целым степеням s , откуда, в частности, $q' = q$. Если же это условие не выполнено, то надо вновь искать возможные главные члены разложения $z_3(s)$, т. е. положить $z_3 = A_1 s^{p_1} + \dots$, $s = s_1^{q_1}$, после чего совершить замену переменных $s = s_1^{q_1}$, $z_3 = s_1^{p_1}(A_1 + z_4)$ и т. д. В реальных примерах после одной-двух таких замен мы приходим к случаю, когда выполнено второе условие (26), и потому можно далее применить хотя бы метод неопределенных коэффициентов. В более полных курсах (см., например, [19, 58, 131]) показывается, что общее число решений уравнения (25) с одним и тем же главным членом As^p равно кратности A как корня уравнения (30). Отсюда, в частности, вытекает, что общее число решений $z_2(z_1)$ уравнения (25) вблизи начала координат равно наименьшему из показателей степени в разложении $f(0, z_2)$. Если для всех главных членов этих решений уравнения (30) имеют только простые корни, как в примере (31), то после первой же из описанных замен условие существования неявной функции начинает удовлетворяться.

В приложениях часто бывает, что все участвующие величины должны быть вещественными. Тогда общее число решений уравнения (25) может оказаться меньшим, чем указано в предыдущем абзаце, так как вещественное уравнение может иметь несколько пар мнимых сопряженных решений (см., § 1), которые теперь приходится отбросить. Так, в примере (31) получается пять решений при $z_1 > 0$ и три — при $z_1 < 0$. (Легко понять, что если в случае простых корней уравнения (30) старший коэффициент получится вещественным, то и дальнейшие, а с ними и все решение также будут вещественными.) Если уравнение (25) содержит некоторый параметр, то при переходе его через

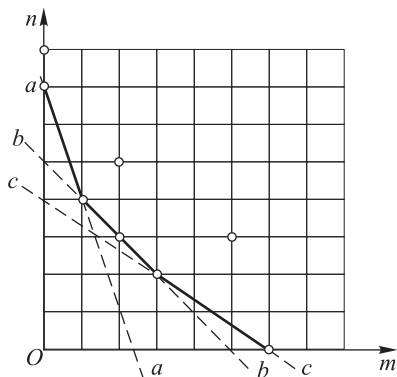


Рис. 37

некоторые значения число вещественных решений может скачком измениться; такие значения часто играют в прикладных задачах важную роль.

§4. Особые точки и нули

1. Изолированные особые точки. В этом параграфе мы будем рассматривать только изолированные особые точки однозначных аналитических функций; при этом особая точка называется *изолированной*, если в некоторой ее окрестности аналитичность функции нарушается только в одной этой точке. Из первого абзаца п. 3.5 вытекает, что в такой точке функция обязательно становится неограниченной (хотя и не всегда обращается в бесконечность, см. п. 2).

Отметим сразу, что иногда говорят об *устраняемых* особых точках, которые пропадают после правильного определения значений функции в этих точках: например, функция $\frac{\sin z}{z}$ не определена при $z = 0$, т.е. формально имеет там как бы особую точку; но если положить $\left. \frac{\sin z}{z} \right|_{z=0} = 1$ (так как $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$), то особой точки не остается. Впредь мы будем считать такие неопределенности устраненными, т.е. не будем считать их за особые точки.

Итак, пусть однозначная аналитическая функция $f(z)$ имеет при $z = a$ изолированную особую точку. Тогда из п. 3.4 вытекает, что в некоторой окрестности точки a эту функцию можно представить в виде суммы ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \\ + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \quad (1)$$

Этот ряд сходится во всей окрестности, за исключением, конечно, самой точки a . Наружной границей области сходимости ряда служит окружность с центром в a , проходящая через ближайшую к a другую особую точку функции $f(z)$ (к которым причисляются и точки разветвления, если $f(z)$ представляет собой однозначную ветвь многозначной функции). Если особых точек, кроме a , нет, то ряд (1) сходится на всей плоскости z при $z \neq a$.

Чаще всего оказывается, что в сингулярной части разложения (1) содержится лишь конечное число членов, т.е. это разложение имеет первый член (хотя может не иметь последнего). Такая особая точка называется *полюсом*. Если же в разложении (1) присутствует бесконечное число членов с отрицательными показателями, то $z = a$ называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

Коэффициент c_{-1} разложения (1) называется *вычетом* функции $f(z)$ в ее особой точке $z = a$ и обозначается $\text{Выч}_{z=a} f(z)$, или по-француз-

ски $\operatorname{Res}_{z=a} f(z)$. Важность этого коэффициента при вычислении интегралов ясна из п. 3.

Разложение многозначной аналитической функции $f(z)$ в окрестности своей точки разветвления $z = a$ имеет более сложный вид. Так, если это точка разветвления конечного порядка n , то, обозначив $z - a = \zeta^n$, получим, что если ζ опишет маленькую окружность с центром $\zeta = 0$, то z обойдет n раз вокруг точки a , и потому $f(z)$ вернется к исходному значению. Значит, $f(z)$ представляет собой однозначную аналитическую функцию ζ и потому разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k/n}. \quad (2)$$

Последний ряд (2) по целым степеням величины $(z-a)^{1/n}$ иногда называют *рядом Лорана-Пуизо*; все n значений функции получатся, если придавать в нем этой величине ее n возможных значений.

2. Полюс. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности ее полюса имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots; \quad (3)$$

если при этом $c_{-n} \neq 0$, то говорят, что этот полюс имеет *порядок (кратность) n* . Таким образом, полюс может быть *простой* (если $n = 1$) или *кратный* (порядка 2, 3 и т.д.). Для полюса порядка n в разложении (3) член $\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ при $z \rightarrow a$ является главным (в каком смысле?), т.е. при $z \rightarrow a$ величина $f(z)$ бесконечно большая, эквивалентная $\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$; если принять $\frac{1}{z-a}$ за эталон, то это величина порядка n . Мы видим, в частности, что в своем полюсе функция обязательно обращается в бесконечность.

Довольно часто полюсы появляются при рассмотрении отношения

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad (4)$$

двух аналитических функций, для которых точка a является обыкновенной (не особой), однако $h(a) = 0$. Если при этом $g(a) \neq 0$, то $f(z)$ имеет при $z = a$ полюс, причем такого порядка, каков порядок нуля у $h(z)$ (п. 3.5). Если же и $g(a) = 0$, причем $g(z)$ имеет при $z = a$ нуль порядка p , а $h(z)$ — нуль порядка $q > p$, то $f(z)$ имеет при $z = a$ полюс порядка $q - p$ (что будет при $q \leq p$?).

Все эти утверждения легко получаются, если разложить $g(z)$ и $h(z)$ в ряды по степеням $z - a$, затем вынести из числителя и знаменателя наибольшие возможные степени и поделить ряд на ряд, как это описано, например, в ЛВМ, п. XVII.12.

Легко проверить, что если какая-либо однозначная аналитическая функция (не обязательно первоначально заданная в виде (4)) имеет при $z \rightarrow a$ рост не выше конечного порядка по сравнению с $\frac{1}{z-a}$, т.е. если $f(z) = O\left(\frac{1}{(z-a)^n}\right)$, то функция $g(z) = (z-a)^n f(z)$ уже не имеет при $z = a$ особенности, и потому особая точка $z = a$ для $f(z)$ может быть только полюсом. Этим и объясняется распространенность полюсов.

Вычет функции особенно просто вычислить в полюсе первого порядка. В самом деле, если

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots,$$

то $(z-a)f(z) = c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + \dots$, и потому

$$\text{Выч}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)].$$

В частности, для функции (4), если $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, (последнее как раз и означает, что в знаменателе стоит нуль первого порядка), получаем

$$\text{Выч}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)(z-a)}{h(z)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g'(z)(z-a) + g(z)}{h'(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}. \quad (5)$$

Здесь мы применили правило Лопиталя, которое, как можно убедиться, имеет место и для аналитических функций комплексного переменного. (Вывод этого на основе формулы Тейлора мы предоставляем желающим.)

Для общего случая полюса порядка n из (3) получаем

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + \dots$$

Если продифференцировать обе части $n-1$ раз, получим $[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)} = (n-1)!c_{-1} +$ члены, содержащие положительные степени $z-a$ (проверьте!). Отсюда, переходя к пределу при $z \rightarrow a$, выводим требуемую формулу

$$\text{Выч}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}. \quad (6)$$

При ее применении порядок n полюса должен быть предварительно найден, как это было описано выше. Формула (6) справедлива и в случае, когда порядок полюса меньше n (но не больше n), так как в предыдущем рассуждении c_{-n} могло равняться нулю.

Поведение функции $f(z)$ в окрестности своей существенно особой точки $z = a$ значительно сложнее. Мы видели, что значения $f(z)$ при $z \rightarrow a$ не ограничены степенной функцией ни с каким показателем; тем не менее

оказывается, что они не являются и бесконечно большими! В самом деле, задав любое комплексное число k , легко доказать, что функция $\frac{1}{f(z) - k}$ не может быть ограниченной в окрестности точки a (в противном случае надо воспользоваться разложением этой функции в ряд Тейлора; продумайте это!). Но это значит, что функция $f(z)$ вблизи a принимает значения, как угодно близкие к k , причем для любого k . Эту любопытную теорему доказал в 1868 г. русский математик Ю. В. Сохоцкий (1842–1929). Из нее вытекает, что существенно особую точку никак нельзя считать просто полюсом бесконечного порядка!

Примером существенно особой точки может служить точка $z = 0$ для функции

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \quad (7)$$

Подумайте о характере изменения этой функции при различных способах приближения z к нулю.

Формулы типа (6) для существенно особых точек уже непригодны. Впрочем, если удалось получить разложение в окрестности этой точки в ряд Лорана, то вычет сразу получается; так, из формулы (7) следует, что $\text{Выч}_{z=0} e^{1/z} = 1$.

3. Теорема Коши о вычетах. Вычеты имеют важное применение к вычислению интегралов по замкнутому контуру вида

$$\oint_{(L)} f(z) dz.$$

Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая всюду на (L) и всюду внутри (L) , за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \dots, z_N$, расположенных внутри (L) ; контур (L) ориентирован в положительном направлении. Разобьем область, ограниченную этим контуром извне, на N частей так, чтобы внутри каждой из них имелась лишь одна особая точка (см. рис. 38, где принято $N = 3$), и ориентируем контур (L_k) каждой из этих частей в положительном направлении. Тогда

$$\oint_{(L)} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \oint_{(L_k)} f(z) dz, \quad (8)$$

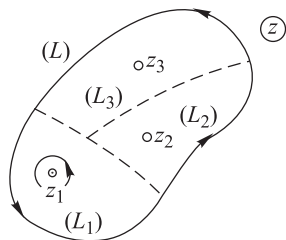


Рис. 38

так как в правой части интегралы по пунктирным линиям взаимно уничтожаются (почему?). Теперь продеформируем каждый контур (L_k) в маленькую окружность с центром в z_k (на рис. 38 это показано для $k = 1$); как указано в п. 3.2, при этой деформации интегралы не меняются. Для

маленькой окружности действует разложение $f(z)$ вокруг z_k в ряд Лорана, и потому в силу (2.10)

$$\oint_{(L_k)} f(z) dz = 2\pi i \cdot c_{-1} \text{ (для этого ряда)} = 2\pi i \cdot \operatorname{Выч}_{z=z_k} f(z).$$

Подставляя в (8), получаем *теорему Коши о вычетах*

$$\oint_{(L)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Выч}_{z=z_k} f(z). \quad (9)$$

Подчеркнем, что в правой части суммирование распространяется на все особые точки функции $f(z)$, расположенные внутри (L) . Если таких точек нет, то интеграл равен нулю, так как сумма без слагаемых равна нулю; таким образом, теорема Коши из п. 3.2 представляет собой частный случай общей теоремы (9).

Бывает, что мы заранее не знаем, является ли некоторая точка особой; например, там может оказаться устранимая особенность. Тогда, применяя формулу (9), надо эту точку включить в число точек z_k , имея в виду, конечно, что *вычет функции в неособой конечной точке всегда полагается равным нулю*. При этом формулы (5) и (6) остаются в силе.

Теорема Коши о вычетах дает возможность получать точные значения рассматриваемых интегралов, минуя вычисление соответствующих неопределенных интегралов, которые могут оказаться громоздкими или вовсе не берущимися в конечном виде. Поэтому применение этой теоремы часто оказывается весьма полезным в аналитических исследованиях. Отметим, что она может применяться и к вычислению вещественных интегралов с помощью их искусственного сведения к комплексным.

Приведем простой пример. Пусть надо вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b \cos t + c \sin t}, \quad (10)$$

при условии $b^2 + c^2 < a^2$, равносильном требованию, чтобы знаменатель не обращался в нуль. Переходя с помощью формул Эйлера от тригонометрических функций к показательным и выполняя подстановку $e^{it} = z$, получим (проверьте!)

$$I = \oint_{(L)} \frac{2}{(bi + c)z^2 + 2iaz + (bi - c)} dz,$$

где (L) — единичная окружность, ориентированная в положительном направлении. Подынтегральная функция имеет два простых полюса, из которых внутри (L) находится только один:

$$z_1 = -\frac{a - \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{bi + c} i.$$

Отсюда по формулам (9) и (5) получаем окончательно

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}.$$

Здесь существенным было то, что интеграл (10) взят по периоду подынтегральной функции: в других пределах контур (L) мог получиться незамкнутым, и тогда формулу (9) применить было бы нельзя.

Из теоремы Коши о вычетах вытекает, в частности, *интегральная формула Коши*, дающая представление аналитической функции внутри замкнутого контура через ее значения на этом контуре. Для вывода этой формулы рассмотрим интеграл

$$\oint_{(L)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (11)$$

где функция $f(z)$ однозначная и аналитическая всюду внутри контура (L) и на нем, а точка z_0 находится внутри (L). Тогда подынтегральная функция, т.е. $\frac{f(z)}{z - z_0}$, имеет внутри (L) ровно одну особую точку — простой полюс $z = z_0$ с вычетом $f(z_0)$ (почему?). Значит, по теореме Коши интеграл (11) равен $2\pi i f(z_0)$, откуда и получается интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (12)$$

(Чему равна правая часть, если точка z_0 находится вне (L)?)

Если продифференцировать обе части (12) по параметру z_0 , получаются формулы

$$f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz, \quad f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz, \dots,$$

которые иногда применяются для оценки производных.

4. Применение к несобственным интегралам. Теорема Коши о вычетах широко применяется при вычислении несобственных интегралов, причем при таких применениях довольно часто приходится проявлять высокое аналитическое искусство. Мы здесь укажем лишь простые результаты в этом направлении; дальнейшие сведения можно найти в указанных выше общих курсах (см., в частности, [66]) и в специальной литературе.

Рассмотрим сходящийся несобственный интеграл общего вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (13)$$

предполагая, что функция f определена не только для вещественных, но и для мнимых значений аргумента так, что $f(z)$ является

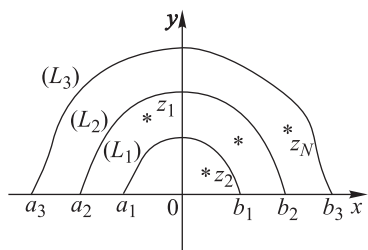


Рис. 39

однозначной аналитической функцией в полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_N$, причем все $\text{Im } z_k > 0$. Непосредственно применить теорему о вычетах к интегралу (13) нельзя, так как нет замкнутого контура; поэтому производится искусственное «замыкание» контура с помощью некоторой последовательности дуг $(L_1), (L_2), (L_3), \dots$ (рис. 39). Тогда каждая дуга (L_n) вместе с отрезком a_n, b_n оси x , на

который она опирается, образует замкнутый контур $(L_n)'$. Пусть для данной функции $f(z)$ дуги (L_n) удалось подобрать так, что

1°. $a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$;

2°. Для достаточно больших n все особые точки $z_1, z_2, \dots, z_N$ расположены внутри $(L_n)'$;

3°. $\int_{(L_n)} f(z) dz \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда интеграл (13) легко вычислить. В самом деле, для достаточно больших n в силу теоремы о вычетах и условия 2°

$$\oint_{(L_n)'} f(z) dz = \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx + \int_{(L_n)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч } f(z); \quad (14)$$

Если теперь $n \rightarrow \infty$, то первое слагаемое в средней части по условию 1° стремится к I , а второе по условию 3° — к нулю, так что в пределе получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч } f(z). \quad (15)$$

Для некоторых классов интегралов (13) последовательность дуг (L_n) с требуемыми свойствами оказывается нетрудно подобрать. Так будет, в частности, если $f(z)$ в верхней полуплоскости при $z \rightarrow \infty$ стремится к нулю быстрее, чем $1/z$, т. е.

$$f(z) = o\left(\frac{1}{z}\right)^1 \quad (z \rightarrow \infty, \text{Im } z \geq 0) \quad (16)$$

¹⁾ Для величин α, β , переменных в некотором процессе, пишут $\alpha = o(\beta)$, если $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$ в этом процессе.

В самом деле, тогда в качестве (L_n) можно взять просто полуокружность радиуса n с центром в точке $z = 0$; тогда условие 3° (первые два условия очевидны) сразу следует из оценки (2.3).

Пример. Вычислим для вещественных $\omega \geq 0, p > 0$ интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + p^2} e^{i\omega x} dx \quad (\omega \geq 0, p > 0). \quad (17)$$

встречающийся в физике. (Интересно, что соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции.) Здесь при $z = x + iy$, $y \geq 0$

$$\left| \frac{1}{z^2 + p^2} e^{i\omega z} \right| = \left| \frac{1}{z^2 + p^2} \right| |e^{i\omega x}| |e^{-\omega y}| \leq \left| \frac{1}{z^2 + p^2} \right| = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (z \rightarrow \infty),$$

т. е. условие (16) выполнено. Значит, по формуле (15),

$$I = 2\pi i \operatorname{Выч}_{z=pi} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + p^2} = 2\pi i \cdot \frac{e^{i\omega pi}}{2pi} = \frac{\pi}{p} e^{-\omega p}.$$

Если функция $f(z)$ имеет также некоторое число вещественных изолированных особых точек $x_1, x_2, \dots, x_M$, то интеграл (13) является сингулярным¹⁾. Однако легко проверить, что если сингулярные части лорановских разложений функции $f(z)$ вокруг этих точек *содержат лишь нечетные степени*, то интеграл (13) обладает главным значением, причем взамен формулы (15) получается

$$\begin{aligned} \text{в. п.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 2\pi i \sum_{k=1}^M \operatorname{Выч}_{z=z_k} f(z) + \\ &+ \pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Выч}_{z=x_k} f(z). \end{aligned} \quad (18)$$

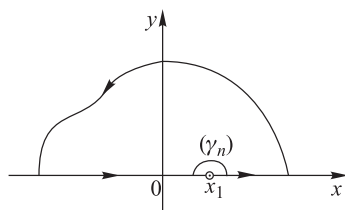


Рис. 40

В самом деле, пусть для простоты $M = 1$; выберем вместо контуров, показанных на рис. 39, контуры с добавочной полуокружностью (γ_n) радиуса ε_n ,

¹⁾ Расходящийся интеграл $\int_a^b f(x) dx$, имеющий особенность при $x = c$ ($-\infty < a < c < b < \infty$), называют *сингулярным с главным значением*

$$\text{в. п.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right),$$

если этот предел существует (и конечен). Если на интервале (a, b) имеется k ($0 < k < \infty$) особенностей, то главное значение интеграла определяется после разбиения интервала $[a, b]$ на k интервалов, внутри каждого из которых имеется только одна особенность.

произвольно стремящегося к нулю при $n \rightarrow \infty$ (рис. 40). Тогда в средней части (14) вместо первого слагаемого будет стоять

$$\int_{a_n}^{x_1 - \varepsilon_n} f(x) dx + \int_{(\gamma_n)} f(z) dz + \int_{x_1 + \varepsilon_n}^{b_n} f(x) dx.$$

Однако средний интеграл в приведенных предположениях при $n \rightarrow \infty$ стремится к $-\pi i$ Выч $f(z)$ (почему?). Отсюда и вытекает формула (18), из которой видно, что особые точки, расположенные на оси интегрирования, дают в интеграл половинный вклад. (Проверьте, что если x_1 — полюс и в сингулярной части его лорановского разложения имеется по крайней мере одна четная степень, то интеграл (13) главным значением не обладает.)

Оказывается, что для интегралов, обобщающих (17),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \quad (\omega > 0) \quad (19)$$

условие (16), поставленное для применимости описанного метода, можно существенно ослабить, заменив его на следующие:

$$f(z) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty, \operatorname{Im} z \geq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty. \quad (20)$$

(В частности, в качестве $f(x)$ можно взять любую правильную рациональную дробь, не имеющую вещественных полюсов; в этом случае при вычислении интеграла (19) единственная возможная трудность состоит в вычислении нулей знаменателя.) И в этом случае соответствующий интеграл по «верхней» полуокружности

$$I_R = \int_{(L_R)} f(z) e^{i\omega z} dz$$

радиуса R с центром в точке $z = 0$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Для доказательства надо положить $z = R e^{i\varphi}$ и применить первую оценку (3.3):

$$\begin{aligned} |I_R| &= \int_0^\pi |f(R e^{i\varphi})| |\exp(i\omega R \cos \varphi - \omega R \sin \varphi)| R d\varphi = \\ &= R \int_0^\pi |f(R e^{i\varphi})| \exp(-\omega R \sin \varphi) d\varphi \leq \max_{(L_R)} |f(z)| \cdot R \int_0^\pi \exp(-\omega R \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Так как первый множитель в правой части в силу условия (20) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, то достаточно проверить, что второй при этом остается ограниченным. Однако

$$\begin{aligned} R \int_0^{\pi} \exp(-\omega R \sin \varphi) d\varphi &= 2R \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\omega R \frac{\sin \varphi}{\varphi} \varphi\right) d\varphi \leq \\ &\leq 2R \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\omega R \frac{2}{\pi} \varphi\right) d\varphi; \quad (21) \end{aligned}$$

в последнем переходе использовано неравенство

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} > \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right),$$

которое легко вытекает из рассмотрения графика синуса. Но правая часть (21) меньше, чем

$$2R \int_0^{\infty} \exp\left(-\omega R \frac{2}{\pi} \varphi\right) d\varphi = \frac{\pi}{\omega} = \text{const},$$

откуда и вытекает наше утверждение $I_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ при условии (20); это утверждение называется *леммой Жордана* по имени французского математика К. Жордана (1838–1922). (Так же называется легко выводимое из доказанного утверждение

$$\int_{(M_R)} f(z) e^{\omega z} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\omega > 0) \quad (22)$$

при условии $f(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$, $\text{Re } z \leq 0$), где (M_R) — «левая» полуокружность радиуса R с центром в точке $z = 0$.)

Отметим, что сходимость (вообще говоря, неабсолютная!) интеграла (19) при условии (20) доказывается так же, как это было сделано в ЛВМ, п. XIV.15

для интеграла $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sin x dx$, т. е. с помощью интегрирования по частям.

Если функция $f(z)$ имеет при $\text{Im } z > 0$ бесконечную последовательность особых точек, уходящую на бесконечность, то при применении описанного метода R не может произвольно возрастать, а должно пробегать некоторую последовательность $R_1, R_2, R_3, \dots \rightarrow \infty$. Как видно из проведенного доказательства, и выполнение условия (20) можно было требовать лишь на полуокружностях (L_R) , т. е. сформулировать его так:

$$\max_{0 \leq \varphi \leq \pi} |f(R_n e^{i\varphi})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

тогда как поведение $f(z)$ между этими полуокружностями несущественно. После применения теоремы о вычетах и перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$, интеграл (19) получится равным сумме бесконечного ряда; аналогичное замечание относится и к формуле (15).

Иногда контур интегрирования для интеграла, содержащего параметр, приходится замыкать для различных значений этого параметра по-разному. Так,

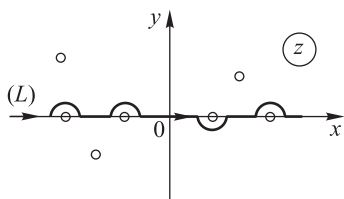


Рис. 41

в физике встречаются интегралы вида

$$I = \int_{(L)} f(z) e^{i\omega z} dz, \quad (23)$$

где функция $f(z)$ однозначная и аналитическая на всей плоскости z , за исключением конечного числа особых точек, среди которых могут быть и вещественные (на рис. 41 особые точки отмечены), причем

$f(z) \rightarrow 0$; контур (L) идет вдоль вещественной оси, но обходит расположенные на ней особые точки сверху или снизу; $\omega \neq 0$ вещественное. Для вычисления интеграла (23) при $\omega > 0$ надо замкнуть (L) большой верхней полуокружностью, что в силу леммы Жордана даст

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_s \\ \text{верх}}} \text{Выч}[f(z) e^{i\omega z}] \quad (\omega > 0),$$

где сумма распространена на все особые точки z_s функции $f(z)$, расположенные выше (L) (в том числе лежащие на оси x и обходимые снизу). При $\omega < 0$ надо замкнуть (L) большой нижней полуокружностью и учесть, что тогда замкнутый контур будет проходиться в отрицательном направлении; это даст

$$I = -2\pi i \sum_{\substack{z=z_s \\ \text{нижн}}} \text{Выч}[f(z) e^{i\omega z}] \quad (\omega < 0).$$

Особенного внимания требуют манипуляции с многозначными функциями, которые иногда появляются после аналитического продолжения подынтегральной функции. Рассмотрим в качестве примера вещественный интеграл

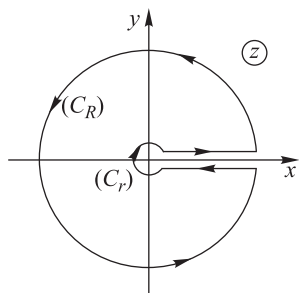


Рис. 42

$$\int_0^\infty f(x) x^{a-1} dx \quad (0 < a < 1), \quad (24)$$

где функция $f(x)$ допускает продолжение на всю плоскость $z = x + iy$ до функции $f(z)$, однозначной и аналитической всюду, за исключением точек $z_1, z_2, \dots, z_N$, не лежащих на полуоси $0 \leq x < \infty$. Для вычисления этого интеграла рассмотрим вспомогательный комплексный интеграл

$$I_R = \int_{(S_{Rr})} f(z) z^{a-1} dz, \quad (25)$$

где замкнутый контур (S_{Rr}) , показанный на рис. 42, состоит из двух окружностей радиусов R и r и отрезка $r \leq x \leq R$, проходящего дважды в противоположных направлениях и изображенного для наглядности на рис. 42 дважды. Так как подынтегральная функция в (25) многозначна, то надо еще

уточнить, какой ветвью мы пользуемся. Поэтому проведем разрез вдоль полуоси $0 \leq x < \infty$ (он контуром (S_{Rr}) не пересекается, что очень важно!) и условимся пользоваться ветвью функции z^{a-1} , равной x^{a-1} на его верхнем берегу. Тогда на нижнем берегу эта ветвь равна $e^{2\pi i(a-1)}x^{a-1}$ (почему?), так что два интеграла по отрезку $r \leq x \leq R$ не уничтожаются взаимно, как это было бы для однозначной подынтегральной функции; это и дает возможность вычислить интеграл (24). При достаточно малом r и достаточно большом R имеем

$$I_R = \int_{(C_r)} f(z)z^{a-1}dz + \int_{(C_R)} f(z)z^{a-1}dz + (1 - e^{2\pi i(a-1)}) \int_r^R f(x)x^{a-1}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}_{z=z_k}[f(z)z^{a-1}]. \quad (26)$$

Однако $\int_{(C_r)} f(z)z^{a-1}dz \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ (почему?); значит, если

$$\int_{(C_r)} f(z)z^{a-1}dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

то, переходя в (26) к пределу при $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, получаем, что интеграл (24) сходится и равен правой части (26), деленной на $1 - e^{2\pi i(a-1)}$.

Если дополнительно дано, что функция $f(x)$ четная или нечетная, т.е. $f(-x) \equiv \varepsilon f(x)$, где $\varepsilon = 1$ либо $\varepsilon = -1$, то можно воспользоваться контуром, показанным на рис. 43. Это привело бы к аналогичному результату с делителем $1 + \varepsilon e^{\pi i(a-1)}$.

Применяя полученный результат, находим, в частности, при $0 < a < 1$ (проверьте!)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(a-1)}} \text{Выч}_{z=-1} \left(\frac{z^{a-1}}{1+z} \right) = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(a-1)}} e^{\pi i(a-1)} \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Однако в силу известных формул (см., например, ЛВМ, (XIV.73) и (XIV.70)) этот же интеграл равен $B(a, 1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a)$. Приравняв результаты, а затем пользуясь теоремой п. 3.6 о совпадении двух аналитических функций, приходим к интересному тождеству для гамма-функции

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) \equiv \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (27)$$

справедливому для любого комплексного z . Из него, в частности, следует, что функция $\Gamma(z)$ совсем не имеет нулей, а при $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) имеет простой полюс с вычетом $\frac{(-1)^n}{n!}$ (почему?).

Подобно (24) рассматриваются интегралы вида

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha f(x) dx \quad (-1 < \alpha < 1, \alpha \neq 0),$$

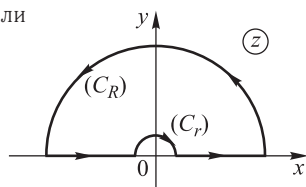


Рис. 43

где функция $f(z)$ однозначная аналитическая на всей плоскости z , за исключением конечного числа точек, не лежащих на интервале интегрирования, а на бесконечности удовлетворяет условию (16). (Для этого нужно выбрать в качестве контура интегрирования совокупность двух эллипсов с эксцентриситетом $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 1$ и полюсами $z = \pm 1$.) Докажите, что этот интеграл равен

$$\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \sum \text{Выч} \left[\left(\frac{z-1}{z+1} \right)^\alpha f(z) \right], \quad (28)$$

где сумма распространяется на все особые точки функции $f(z)$, а в качестве степени берется ее однозначная вне интервала интегрирования ветвь, равная единице при $z = \infty$. (Если условие (16) не выполняется, то в правой части (28) в сумму должен войти также вычет при $z = \infty$; см. по этому поводу п. 6.)

Для других типов интегралов применяются другие способы «замыкания» контура интегрирования; именно в выборе такого «замыкания» и состоит главная хитрость этой теории.

С вычислением несобственных интегралов непосредственно связано вычисление сумм рядов вида

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k),$$

где функция $f(z)$ — однозначная аналитическая на всей плоскости z , за исключением изолированных особых точек

$z_j \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; прочие предположения будут указаны далее. Для этого рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I_n = \int_{(L_n)} \operatorname{ctg}(\pi z) f(z) dz, \quad (29)$$

распространенный по контуру, показанному на рис. 44. Допустим, что на (L_n) нет особых точек функции $f(z)$ и

$$\int_{(L_n)} |f(z)| |dz| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда и $I_n \rightarrow 0$, так как на совокупности контуров функция $\operatorname{ctg} \pi z$ ограничена. Однако по теореме Коши о вычетах этот интеграл равен

$$2\pi i \left[\sum_{k=-n}^n \frac{1}{\pi} f(k) + \sum_{z=z_j} \text{Выч} \operatorname{ctg}(\pi z) f(z) \right],$$

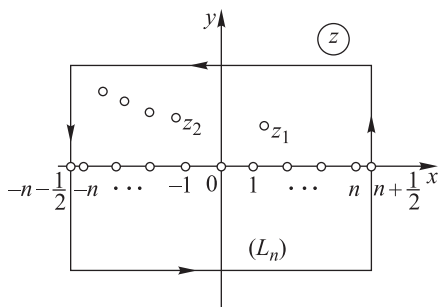


Рис. 44

где вторая сумма взята по всем особым точкам функции $f(z)$, попавшим внутрь (L_n) , Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем отсюда, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = -\pi \sum_j \operatorname{Выч}_{z=z_j} \operatorname{ctg}(\pi z) f(z), \quad (30)$$

где сумма в правой части распространена по всем особым точкам функции $f(z)$ в плоскости z . При этом требуется дополнительно, чтобы, если таких точек бесконечное число, ряд в правой части был сходящимся.

Если среди особых точек функции $f(z)$ были целые вещественные точки, то из этого же рассуждения следует, что формула (30) остается справедливой, если из суммы в левой части исключить все такие точки.

Пример.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k \neq 0)}}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Выч}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = \\ &= -\frac{\pi}{2} \operatorname{Выч}_{z=0} \left[\left(\frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} + \dots \right) : z^2 \right] = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Рассматривая взамен (29) интеграл $\int_{(L_n)} \frac{f(z)}{\sin(\pi z)} dz$ легко в тех же предположениях доказать еще формулу

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f(k) = -\pi \sum_j \operatorname{Выч}_{z=z_j} \frac{f(z)}{\sin(\pi z)}.$$

5. Интегральные формулы Пуассона. Это формулы, дающие выражения для гармонической функции в полуплоскости или в круге через значения этой функции на границе области. Для вывода первой формулы рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{1}{x - (\xi + i\eta)} - \frac{1}{x - (\xi - i\eta)} \right] dx \quad (\eta > 0), \quad (31)$$

где функция $f(z)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ и

$$|f(z)| = o(|z|) \quad (z \rightarrow \infty, \operatorname{Im} z \geq 0).$$

Тогда для всей подынтегральной функции выполнено условие (16) (почему?). Вычисляя интеграл (31), как описано в п. 4, получаем $2\pi i f(\xi + i\eta)$. Отсюда, производя сложение в квадратной скобке, приходим к формуле

$$f(\xi + i\eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx. \quad (31')$$

Отделяя вещественную часть, получаем формулу Пуассона

$$u(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx \quad (\eta > 0),$$

которая дает представление гармонической функции в верхней полуплоскости через граничные значения этой функции.

Взяв в квадратных скобках в (31) сумму дробей вместо их разности, мы аналогичным образом получаем формулы (проверьте!)

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \xi)v(x, 0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx, \\ v(\xi, \eta) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \xi)u(x, 0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx, \end{aligned} \quad (\eta > 0), \quad (32)$$

посредством которых каждая из двух сопряженных гармонических функций выражается через граничные значения другой. Для справедливости этих формул достаточно, чтобы

$$|f(z)| = o(1) \text{ (т. е. } f(z) \rightarrow 0 \text{) } (z \rightarrow \infty, \operatorname{Im} z \geq 0).$$

Впрочем, из леммы Жордана следует, что если $f(z) = f_1(z)e^{i\omega z}$ ($\omega > 0$), то достаточно, чтобы $|f_1(z)| = o(|z|)$ (а для справедливости (31') — чтобы $|f_1(z)| = o(|z|^2)$).

Рассматривая сингулярный интеграл $\int \frac{f(x)}{x - \xi} d\xi$, как указано в п. 4, мы, аналогично (32), приходим к формулам

$$u(\xi, 0) = \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x, 0)}{x - \xi} dx, \quad v(\xi, 0) = -\frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0)}{x - \xi} d\xi. \quad (33)$$

Иногда этим формулам придают другой вид: заметив, что $\text{v. p.} \int \frac{dx}{x - \xi} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} u(\xi, 0) &= \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x, 0) - v(\xi, 0)}{x - \xi} dx, \\ v(\xi, 0) &= -\frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0) - u(\xi, 0)}{x - \xi} dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Эти интегралы при $x = \xi$ регулярны, а при $x = \pm\infty$ сингулярны (почему?).

Выбирая различные конкретные функции $f(z)$, можно получить с помощью формул (33) и (34) значения многих интересных интегралов. Например, поло-

жив $f(z) = e^{iz}$, $\xi = 0$, из первой формулы (33) получаем значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Аналогичные формулы рассматриваются при интегрировании по окружности. Для этого надо взамен (31) исходить из интеграла

$$\oint f(z) \left[\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - a^2/\zeta^*} \right] dz, \quad (35)$$

взятого по окружности $z = a e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), где $\zeta = r e^{i\vartheta}$ ($r < a$), а функция $f(z)$ предполагается аналитической всюду при $|z| \leq a$; точки ζ и a^2/ζ^* симметричны относительно окружности $|z| = a$ (п. 2.8). Так как интеграл (35) равен $2\pi i f(\zeta)$, то, воспользовавшись простым преобразованием

$$\begin{aligned} (z - \zeta) \left(z - \frac{a^2}{\zeta^*} \right) &= (a e^{i\varphi} - r e^{i\vartheta}) \left(a e^{i\varphi} - \frac{a^2}{r} e^{i\vartheta} \right) = \\ &= \frac{a}{r} e^{i(\varphi + \vartheta)} [a^2 - 2ar \cos(\varphi - \vartheta) + r^2], \end{aligned}$$

получаем

$$f(r e^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \vartheta) + r^2} f(a e^{i\varphi}) d\varphi \quad (0 \leq r < a) \quad (36)$$

(проверьте все эти вычисления!). Здесь также можно отделить вещественную часть и получить формулу, дающую представление гармонической функции в круге через ее значения на окружности.

Положив в (36) $r = 0$, получаем интересную формулу

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a e^{i\varphi}) d\varphi, \quad (37)$$

т. е. значение аналитической (а потому и гармонической) функции в центре круга равно ее среднему значению на окружности.

Взяв в (35) сумму дробей вместо разности и воспользовавшись формулой (37), получаем формулу

$$f(r e^{i\vartheta}) = f(0) - \frac{iar}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi - \vartheta)}{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \vartheta) + r^2} f(a e^{i\varphi}) d\varphi,$$

из которой легко получить формулы, аналогичные (32).

Мы предоставляем читателю, исходя из интеграла $\oint \frac{f(z)}{z-\zeta} d\zeta$ ($r=a$) и формулы (37), доказать, что

$$f(a e^{i\vartheta}) = f(0) - \frac{i}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} f(a e^{i\varphi}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi,$$

а отсюда вывести формулы

$$\left. \begin{aligned} u(a, \vartheta) &= u(0) + \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} v(a, \varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi, \\ v(a, \vartheta) &= v(0) - \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} u(a, \varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(Отметим, что при $\vartheta = 0$ здесь надо считать, что $\text{v. p.} \int_0^{2\pi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon}$).

Например, положив $f(z) = z^n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), т. е. $u = \rho^n \cos n\vartheta$, $v = \rho^n \sin n\vartheta$, и положив $a = 1$, мы получаем полезные формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi &= \cos n\vartheta, \\ \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi &= -\sin n\vartheta. \end{aligned}$$

Воспользовавшись тождеством $\operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} = -\frac{\sin \varphi + \sin \vartheta}{\cos \varphi - \cos \vartheta}$, перейдя к интегрированию от $-\pi$ до π и применяя правило интегрирования четных и нечетных функций, мы можем переписать предыдущие соотношения в виде

$$\begin{aligned} \text{v. p.} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \vartheta} d\varphi &= \pi \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}, \\ \text{v. p.} \int_0^{\pi} \frac{\sin n\varphi \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \vartheta} d\varphi &= -\pi \cos n\vartheta \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Положив при выводе $n = 0$, мы получаем, что первая группа формул верна и при $n = 0$. Эти формулы нам понадобятся в п. VII.5.7.

6. Поведение функции на бесконечности. Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в окрестности точки $z = \infty$, т. е. для всех достаточно больших $|z|$. Тогда из п. 3.4 вытекает, что она допускает в этой окрестности разложение в ряд Лорана (3.8)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k.$$

(Впрочем, можно применять и более общее разложение (3.11).) Наличие особой точки при $z = \infty$ и ее тип, по определению, распознаются так: надо сделать замену $z = \frac{1}{\zeta}$, после чего посмотреть, что будет у полученной функции при $\zeta = 0$. Поэтому полюс при $z = \infty$ будет, если в соответствующем разложении (28) присутствует конечное число (причем не менее одной) степеней с положительными показателями, а существенно особая точка будет, если таких степеней бесконечное число. Если же $f(z)$ ограничена на бесконечности, то из первого абзаца п. 3.5 (примененного после перехода от z к ζ) вытекает, что в разложении (3.8) нет положительных показателей, откуда, в частности, вытекает, что $f(\infty)$ имеет определенное конечное значение; тогда говорят, что функция $f(z)$ *аналитична в точке $z = \infty$* .

Из последнего утверждения вытекает, в частности, *теорема Коши–Лиувилля: если функция $f(z)$ однозначна, аналитична и ограничена на всей плоскости z , то она постоянная*. В самом деле, в силу принципа максимума модуля из п. 3.6 для любого $R > 0$

$$\max_{|z| \leq R} |f(z) - f(\infty)| = \max_{|z|=R} |f(z) - f(\infty)|;$$

если теперь $R \rightarrow \infty$, то правая, а потому и левая части стремятся к нулю, откуда и получается теорема.

Из нее в свою очередь следует, что *если $f(z)$ однозначна и аналитична на всей плоскости z , за исключением особых точек, которые при конечных z и при $z = \infty$ могут быть только полюсами, то $f(z)$ — рациональная функция* (обратное утверждение мы предоставляем читателю). В самом деле, прежде всего, из сформулированных требований вытекает, что особых точек может быть только конечное число: в противном случае из теоремы Больцано–Вейерштрасса (п. 3.6) следовало бы наличие неизолированной особой точки при конечном z или при $z = \infty$. Установив это, выпишем разложение $f(z)$ около каждой из ее особых точек в ряд Лорана и составим сумму $g(z)$ всех сингулярных частей этих рядов (отметим, что в разложении вокруг точки $z = \infty$ сингулярной является сумма степеней с положительными показателями степени). Если особые точки могут быть только полюсами, то все эти сингулярные части состоят из конечного числа членов, и потому функция $g(z)$ рациональная. С другой стороны, нетрудно проверить, что разность $f(z) - g(z)$ ограничена на всей плоскости z (продумайте это!), и потому по теореме Лиувилля есть константа; отсюда и вытекает утверждение, сделанное в начале этого абзаца.

В частности, *однозначная аналитическая функция, не имеющая конечных особых точек и с полюсом на бесконечности, есть целая рациональная функция* (полином). Можно проверить, что алгебраические иррациональные функции всегда обладают точками разветвления. Таким образом, среди однозначных аналитических функций, обладающих конечным числом особых точек на всей плоскости z , существенными особыми точками (конечными или бесконечно удаленной) обладают трансцендентные функции и только они.

Вычетом функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ называется число $-c_{-1}$, составленное для разложения (3.8) в окрестности этой точки. (Обра-

тите внимание на то, что этот вычет может быть отличен от нуля и для функции, аналитической в точке $z = \infty$!) Докажем теперь, что *сумма всех вычетов однозначной аналитической функции, имеющей на всей плоскости z конечное число особых точек, равна нулю*. В самом деле, пусть окружность $|z| = R$, ориентированная в положительном направлении, содержит внутри себя все конечные особые точки $z_1, z_2, \dots, z_N$ функции $f(z)$. Тогда по теореме о вычетах

$$\oint_{|z|=R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}_{z=z_k} f(z).$$

С другой стороны, написав разложение (3.8) в окрестности точки $z = \infty$, получим, что тот же интеграл равен $2\pi i c_{-1} = -2\pi i \text{Выч}_{z=\infty} f(z)$.

Приравнявая результаты и сокращая на $2\pi i$, получаем сформулированное выше утверждение, которое иногда немного сокращает труд по вычислению вычетов.

7. Логарифмические вычеты. Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в окрестности некоторой (конечной) точки z_0 , за исключением, быть может, самой этой точки, в которой $f(z)$ имеет либо нуль, либо полюс. Тогда функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ имеет при $z = z_0$ изолированную особенность и ее вычет

$$\text{Выч}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (39)$$

по определению называется *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0 (название объясняется тем, что $\frac{f'}{f} = (\text{Ln } f)'$).

Если $f(z)$ имеет в точке z_0 нуль (полюс) порядка n , то логарифмический вычет (39) равен n (соответственно $-n$). В самом деле, в обоих случаях можно написать

$$f(z) = (z - z_0)^\nu g(z),$$

где $\nu = n$ в случае нуля и $\nu = -n$ в случае полюса, а функция $g(z)$ аналитична в точке z_0 , причем $g(z_0) \neq 0$ (продумайте это!). Отсюда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu g(z) + (z - z_0)g'(z)}{(z - z_0)g(z)}$$

и, подсчитывая вычет этой функции по формуле (5), получаем

$$\text{Выч}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu g(z_0) + (z_0 - z_0)g'(z_0)}{g(z_0) + (z_0 - z_0)g'(z_0)} = \nu,$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы Коши о вычетах (9), примененной к f'/f , и доказанного сейчас предложения вытекает теорема о логарифмических вычетах. Пусть функция $f(z)$ — однозначная, аналитическая и отличная от нуля всюду на замкнутом положительно ориентированном контуре (L) и всюду внутри него, за исключением, быть может, конечного числа нулей и полюсов, расположенных внутри (L) . Тогда имеет место формула

$$\oint_{(L)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P), \quad (40)$$

где N и P — общее число нулей, соответственно полюсов, расположенных внутри (L) , причем каждый нуль и каждый полюс учитываются со своей кратностью (простой нуль или простой полюс считаются за один, двойной — за два и т. д.).

Так как левая часть формулы (40) равна

$$\oint_{(L)} d \operatorname{Ln} f(z) = \Delta_{(L)} \operatorname{Ln} f(z) = \Delta_{(L)} [\ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z)] = i \Delta_{(L)} \operatorname{Arg} f(z)$$

(буквами $\Delta_{(L)}$ обозначено приращение, когда точка z проходит контур (L)), то из (40) получаем

$$(N - P) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{(L)} \operatorname{Arg} f(z). \quad (41)$$

В правой части здесь стоит число оборотов, которые совершает точка $f(z)$ в положительном направлении вокруг начала координат, когда точка z проходит контур (L) . Форма (41) теоремы о логарифмических вычетах называется *принципом аргумента*.

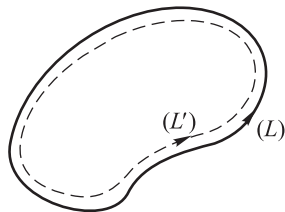


Рис. 45

Заметим, что в формулировке этого принципа требование аналитичности функции $f(z)$ на самом контуре (L) (другими словами, в некоторой полоске, содержащей этот контур) можно ослабить: достаточно требовать, чтобы функция $f(z)$ оставалась на нем непрерывной и была отлична от нуля. Для доказательства можно, например, применить формулу (41) к контуру $(L)'$, аппроксимирующему (L) изнутри (рис. 45), после чего перейти к пределу при $(L)' \rightarrow (L)$.

8. Теорема Руше. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ — однозначные и аналитические всюду внутри замкнутого контура (L) и на нем, причем на (L) имеет место строгое неравенство $|g(z)| < |f(z)|$. Тогда внутри (L) функции $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют одно и то же число нулей (здесь и далее каждый нуль считается со своей кратностью). Для доказательства этой теоремы Рушэ применим принцип

аргумента к функции $f_\alpha(z) = f(z) + \alpha g(z)$, где α — вещественный параметр, $0 \leq \alpha \leq 1$. Если точка z проходит (L) в положительном направлении, то точка $f_\alpha(z)$ описывает ориентированный замкнутый контур (M_α) , обходящий N_α раз вокруг начала координат (см. рис. 46, на котором $N_\alpha = 3$). В силу формулы (41), где в данном случае

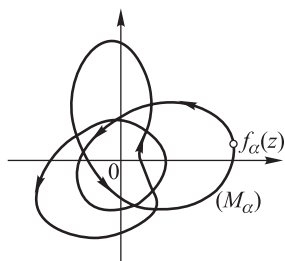


Рис. 46

$P = 0$, N_α как раз равно числу нулей функции $f_\alpha(z)$ внутри (L) . Если α изменится мало, то и контур (M_α) изменится мало, а потому число оборотов N_α останется неизменным (продумайте это!). Опасным мог бы быть только случай, если бы контур (M_α) при некотором α прошел через начало координат, т. е. для некоторого $\tilde{z} \in (L)$ было бы

$$f_\alpha(\tilde{z}) = f(\tilde{z}) + \alpha g(\tilde{z}) = 0;$$

но тогда $|f(\tilde{z})| = \alpha |g(\tilde{z})| \leq |g(\tilde{z})|$, вопреки условию теоремы, т. е. описанный случай невозможен. Значит, N_α остается постоянным во всем диапазоне изменения α , откуда, в частности, получаем $N_0 = N_1$, т. е. утверждение теоремы.

В этом доказательстве, которое мы советуем тщательно продумать, применены сразу два метода, распространенных в современных теоретических исследованиях по прикладной математике. Прежде всего, это *метод искусственного введения параметра* (ведь в исходной формулировке не было никакого параметра), который применяется для непрерывного перехода от одного из двух заданных объектов к другому. Во-вторых, это *метод непрерывного продолжения по параметру*: для доказательства справедливости какого-либо свойства (в данном примере — равенства $N_\alpha = N_0$) в конечном интервале изменения параметра убеждаются, что оно выполняется в некоторой точке интервала и что в малой окрестности каждой точки интервала оно либо всюду выполнено, либо всюду не выполнено. Это простое рассуждение позволяет переходить от утверждений локального (по параметру) характера к соответствующим утверждениям тотального характера.

Среди следствий из теоремы Руше отметим «основную теорему алгебры», которую мы докажем здесь в усиленной формулировке: *всякий многочлен степени n*

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

имеет ровно n комплексных нулей. Для доказательства нужно принять $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$, обозначить через (L) окружность $|z| = R$ с любым достаточно большим R и непосредственно применить теорему Руше, что мы предоставим сделать читателю.

9. Зависимость нулей от параметра. Пусть $f_\alpha(z) = f(z; \alpha)$ — целая функция переменного z , т. е. однозначная аналитическая функция на всей плоскости z , зависящая также от некоторого параметра

α . (Аналогично можно рассмотреть функцию с любой областью аналитичности, даже зависящей от α .) Пусть в любой конечной части плоскости эта функция зависит от α непрерывно в смысле равномерного уклонения, т. е. при выбранном α и малом $\Delta\alpha$ равномерное уклонение $f_{\alpha+\Delta\alpha}(z)$ от $f_\alpha(z)$ будет малым. Тогда оказывается, что *нули функции $f_\alpha(z)$, т. е. корни уравнения*

$$f_\alpha(z) = 0 \quad (42)$$

зависят от α непрерывно; доказательство и подробное описание этого свойства сейчас последуют.

Допустим сначала, что $\tilde{z}$ — простой, т. е. не кратный корень уравнения (42) при некотором значении $\tilde{\alpha}$, причем $f_{\tilde{\alpha}}(z) \neq 0$, а $(\tilde{L})$ — любая фиксированная достаточно малая окружность с центром в $\tilde{z}$. Тогда из утверждения второго абзаца п. 3.6 следует, что $f_{\tilde{\alpha}}(z) \neq 0$ на (L) , а потому и $\min_{z \in (\tilde{L})} |f_{\tilde{\alpha}}(z)| = h > 0$. Если теперь $\Delta\alpha$ достаточно мало, то в силу условия теоремы разность $f_{\tilde{\alpha}+\Delta\alpha}(z) - f_{\tilde{\alpha}}(z)$ будет на $(\tilde{L})$ по модулю меньше фиксированного числа h . Но тогда из теоремы Руше, в которой указанную разность надо принять за $g(z)$, вытекает, что функция $f_{\tilde{\alpha}+\Delta\alpha}(z)$ имеет, как и $f_{\tilde{\alpha}}(z)$, внутри $(\tilde{L})$ ровно один простой нуль, т. е. при малом изменении α корень $\tilde{z}$ уравнения (42) изменился как угодно мало.

Если теперь $\tilde{z}$ — корень кратности k , то аналогичное рассуждение показывает, что при малом изменении α из $\tilde{z}$ возникает какое-то количество корней уравнения (42), расположенных вблизи $\tilde{z}$, сумма кратностей которых равна k . Таким образом, может либо сохраниться один корень кратности k , либо взамен $\tilde{z}$ появиться k простых корней, либо же получиться какой-нибудь промежуточный случай. Этим еще раз подтверждается, что корень кратности k естественно считать за k совпавших друг с другом корней, которые при изменении параметра могут полностью или частично разойтись.

Не следует думать, что доказанное сейчас утверждение является чем-то само собой разумеющимся. Если пользоваться только вещественными числами, то оно, вообще говоря, оказывается несправедливым. Например, если в уравнении $x^2 + \alpha = 0$ вещественный параметр α , возрастая, проходит через нуль и становится положительным, то тогда пришлось бы сказать, что два корня $\pm\sqrt{-\alpha}$ совпали, после чего исчезли. Лишь привлечение совокупности комплексных чисел, достаточно полной для решения уравнений, позволяет получить доказанное выше утверждение, которое можно трактовать как *устойчивость корней уравнения относительно изменения самого этого уравнения*.

Если параметр α вещественный, то в силу доказанного корни уравнения (42) будут при непрерывном изменении α описывать некоторые непрерывные линии в плоскости z . (При этом мы впредь оставляем в стороне более сложный случай, когда при некоторых из рассматриваемых значений α будет $f_\alpha(z) \equiv 0$.) Отметим некоторую специфику, возникающую при продолжении этих линий: если, например, два простых корня $z_1(\alpha)$ и $z_2(\alpha)$ при некотором значении $\alpha = \alpha_0$ сольются

в один двойной корень, а затем вновь разойдутся, то, как правило, в принципе невозможно распознать, какой именно корень пошел по одному пути, а какой — по другому; так что нумерацию корней после α_0 приходится осуществлять заново. Так, поведение корней в примере

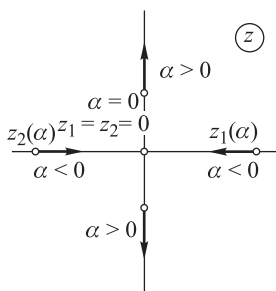


Рис. 47

предыдущего абзаца показано на рис. 47. Корни в момент их слияния при $\alpha = 0$ теряют индивидуальность, и сказать, какой именно из них после этого пошел вверх, а какой вниз, невозможно.

При продолжении корней уравнения (42) может оказаться, что при каком-либо конечном $\alpha = \alpha_0$ один или несколько из корней уйдут на бесконечность и таким образом пропадут, так как мы здесь рассматриваем только конечные корни; при переходе α через α_0 эти корни вернутся из бесконечности. За счет этого общее число корней на плоскости

при отдельных значениях параметра может понижаться, что не противоречит доказанной выше устойчивости этих корней.

Из всего сказанного вытекает следующее правило для подсчета числа корней уравнения (42) в заданной области (G) плоскости z . Допустим сначала, что эта область конечная и при некотором значении α_0 известно число N этих корней в (G) . Тогда если при любом α из рассматриваемого диапазона на границе (Γ) корней нет, то при каждом таком α число корней в (G) равно N (почему?). Если при каком-то $\tilde{\alpha}$ на (Γ) имеются один или несколько корней, то, установив, входят ли эти корни при изменении α внутрь (G) или, наоборот, выходят из (G) , мы определяем, насколько изменится число корней при переходе α через $\tilde{\alpha}$. Если область (G) бесконечная, то при этом исследовании надо иметь в виду также возможность ухода корней, расположенных внутри (G) , на бесконечность и прихода из нее; здесь иногда помогает рассмотрение асимптотического выражения для функции f при $z \rightarrow \infty$.

Важным частным случаем является тот, когда *аналитическая функция* $f(z)$ является *вещественной*, т. е. принимает при вещественных z вещественные значения. Тейлоровское разложение ее по степеням $z - z_0$ должно иметь при вещественных z_0 вещественные коэффициенты, а потому при мнимых сопряженных z функция принимает сопряженные значения, т. е. $f(z^*) \equiv [f(z)]^*$ (продумайте это, исходя из свойств сопряженных чисел). Отсюда следует, что если $f(c) = 0$, то $f(c^*) = 0$, если $f'(c) = 0$, то и $f'(c^*) = 0$ (так как производная от вещественной аналитической функции будет снова вещественной), и т. д. Итак, вещественная аналитическая функция вместе с мнимым нулем всегда обладает сопряженным нулем, причем той же кратности.

Отсюда, в частности, вытекает, что если левая часть уравнения (42) — вещественная аналитическая функция, то его простые вещественные корни не могут при изменении параметра «самостоятельно»

сойти с вещественной оси, они обязаны в момент схода слиться в кратный корень (см. рис. 47).

Численное построение линий $z_k(\alpha)$ можно осуществить по способу непрерывного продолжения, который будет описан во второй половине п. IV.4.11, перейдя предварительно от комплексного уравнения (42) к системе двух вещественных уравнений относительно $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$. В момент слияния корней соответствующая система дифференциальных уравнений вырождается; поэтому непосредственно после такого слияния лучше воспользоваться разложением корней по степеням приращения параметра (п. 3.8), а уже продолжать эти разложения, решая дифференциальные уравнения. По расположению поля направлений можно выяснить и характер указанного выше пересечения траекториями корней контура (Γ) .

10. Нули многочленов. Применим соображения п. 9 к исследованию зависимости от вещественного параметра α нулей многочлена

$$P_\alpha(z) = a_0(\alpha)z^n + a_1(\alpha)z^{n-1} + \dots + a_n(\alpha), \quad (43)$$

коэффициенты которого непрерывно зависят от α . Как было показано в конце п. 8, при $a_0(\alpha) \neq 0$ имеется ровно n таких нулей, $z_1(\alpha), z_2(\alpha), \dots, z_n(\alpha)$, среди которых, впрочем, могут быть и совпадающие. При изменении α эти нули опишут n траекторий (с оговоркой п. 9 о произволе в нумерации этих траекторий после их встречи).

Если при каком-то значении $\alpha = \tilde{\alpha}$ степень многочлена (43) понижается на $k \geq 1$, т. е. если $a_0(\tilde{\alpha}) = a_1(\tilde{\alpha}) = \dots = a_{k-1}(\tilde{\alpha}) = 0$, $a_k(\tilde{\alpha}) \neq 0$, то в этот момент остается лишь $n - k$ нулей; это означает, что при данном значении параметра $\tilde{\alpha}$ ровно k траекторий ушло на бесконечность. Если при переходе через $\tilde{\alpha}$ станет вновь $a_0(\alpha) \neq 0$, то это значит, что траектории возвратились из бесконечности.

Допустим, что $a_0(\alpha) \neq 0$ при всех рассматриваемых значениях α и что нас интересует число $N(\alpha)$ нулей многочлена (43) в правой полуплоскости, т. е. в области $\operatorname{Re} z > 0$, причем для некоторого значения $\alpha = \alpha_0$ это значение N_0 известно. (Такая задача естественно возникает в вопросах устойчивости, см. п. VIII.3.4) Для простоты будем считать коэффициенты многочлена (43) вещественными, хотя аналогично рассматривается и случай комплексных коэффициентов.

Так как нули меняются непрерывно и не могут уйти на бесконечность или прийти оттуда, то $N(\alpha)$ может измениться лишь при значении $\alpha = \tilde{\alpha}$, для которого по крайней мере один нуль $\tilde{z}$ попадет на границу области, т. е. будет $\operatorname{Re} \tilde{z} = 0$. Обозначим $\tilde{z} = i\tilde{y}$ ($\tilde{y}$ — вещественное); тогда, подставляя в (43) и отделяя вещественную часть от мнимой, получим два равенства

$$\begin{aligned} a_0(\tilde{\alpha})\tilde{y}^n - a_2(\tilde{\alpha})\tilde{y}^{n-2} + a_4(\tilde{\alpha})\tilde{y}^{n-4} - \dots &= 0 \\ \text{и} \\ a_1(\tilde{\alpha})\tilde{y}^{n-1} - a_3(\tilde{\alpha})\tilde{y}^{n-3} + a_5(\tilde{\alpha})\tilde{y}^{n-5} - \dots &= 0, \end{aligned} \quad (44)$$

которые оба должны выполняться. Исключая из них $\tilde{y}$, мы приходим к соотношению между коэффициентами; оно и определяет значения

α , при которых число $N(\alpha)$ может измениться. При этом, если найдены значения $\tilde{\alpha}$, $\tilde{y}$, удовлетворяющие обоим равенствам (44), то при переходе возрастающего α через $\tilde{\alpha}$ значение $N(\alpha)$ увеличится или уменьшится на единицу за счет прохода нуля через $i\tilde{y}$ в зависимости от того, будет ли

$$\operatorname{Re} \frac{dz}{d\alpha} = -\operatorname{Re} \frac{\partial P_{\alpha}/\partial \alpha}{\partial P_{\alpha}/\partial z} \bigg|_{\alpha=\tilde{\alpha}, z=i\tilde{y}} \quad (45)$$

положительным или отрицательным.

Если полином содержит несколько вещественных параметров, например $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, то аналогичным образом можно выделить в k -мерном пространстве параметров области, которым отвечает то или иное значение $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$; такое разбиение пространства параметров называется *D-разбиением*, оно наиболее наглядно при $k = 1$ или 2 . Области *D-разбиения* отделены друг от друга $(k - 1)$ -мерными поверхностями, уравнения которых получаются из требования наличия у полинома чисто мнимого нуля. (Напомним, что число 0 мы относим к чисто мнимым числам.) Аналогично определяется *D-разбиение* для любой целой функции, содержащей параметры, однако при этом в пространстве параметров могут добавиться поверхности, для которых нули с $\operatorname{Re} z > 0$ уходят в бесконечность. В последние годы появился ряд работ, в которых осуществляется *D-разбиение* для различных классов полиномов и квазиполиномов, т. е. функций вида

$$\sum_{k=1}^m a_k z^n k e^{\lambda k} k^z \quad \text{все } n_k \geq 0 \text{ целые).} \quad (46)$$

Особенно важен случай, когда все нули полинома имеют отрицательную вещественную часть, т. е. находятся в левой полуплоскости. Такой полином называется *устойчивым* (почему?) или *гурвицевым* по имени немецкого математика А. Гурвица (1859–1919), доказавшего в 1895 г. следующую теорему, которую мы здесь приведем без доказательства (см., например, [133]). Для *устойчивости полинома*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 > 0) \quad (47)$$

с вещественными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы при всех $k = 1, 2, \dots, n$ было

$$\Delta k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ a_{-1} & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2-k} & a_{4-k} & a_{6-k} & \dots & a_{2k-k} \end{vmatrix} > 0,$$

где все коэффициенты a_j с $j < 0$ или $j > n$ надо положить равными нулю. Этот критерий Гурвица очень удобен для полиномов невысоких степеней.

Полезно иметь в виду также следующее простое необходимое условие: у устойчивого полинома (47) с вещественными коэффициентами все они (коэффициенты) положительные. Это сразу вытекает из возможности разложить вещественный полином на вещественные линейные и квадратичные множители; если же исходный полином устойчивый, то эти множители будут иметь положительные коэффициенты (почему?) и, раскрывая скобки, приходим к сформулированному необходимому условию. Подчеркнем, что оно является достаточным лишь при $n = 1$ и $n = 2$ (проверьте!). Однако можно доказать, что если оно выполнено и $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$ и т. д. (через один), то многочлен (47) устойчивый; это несколько облегчает проверку условий Гурвица.

Общая проблема определения числа нулей с положительной вещественной частью у заданной целой функции называется *проблемой Рауса–Гурвица*. Если для полинома (47) все определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ отличны от нуля, то, как показал Гурвиц, искомое число нулей равно числу перемен знака в ряду чисел $1, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

Рассмотрим, например, полином $z^3 + 3z^2 + 3z + \alpha$ с вещественным параметром α . Применение уравнений (44) приводит к значениям (проверьте!) $\tilde{\alpha} = 0$ и 9, которые и осуществляют D -разбиение оси α на три части. Проверка знака выражения (45), которую мы предоставляем читателю, показывает, что при переходе через $\alpha = 0$ число N нулей с положительной вещественной частью убывает на единицу, а при переходе через $\alpha = 9$ — возрастает на два. Так как при $\alpha = 1$ таких нулей нет (почему?), то получаем, что $N = 1$ при $-\infty < \alpha < 0$, $N = 0$ при $0 < \alpha < 9$ (это интервал устойчивости рассматриваемого полинома) и $N = 2$ при $9 < \alpha < \infty$. (Получите этот же результат из признака Гурвица.)

Другой способ решения проблемы Рауса–Гурвица основан на непосредственном применении принципа аргумента п. 7. Мы опишем этот способ применительно к многочленам

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

хотя он распространяется и на многие другие классы функций. Допустим, что многочлен $P(z)$ не имеет нулей на мнимой оси и имеет неизвестное нам число N нулей в правой полуплоскости. Тогда в силу принципа аргумента при достаточно большом R образом замкнутой линии (L_R) , показанной на рис. 48, а, служит замкнутая линия (L'_R) , схематически показанная на рис. 48, б и N раз обходящая вокруг начала координат; другими словами, $\frac{1}{2\pi} \Delta_{(L)} \text{Arg } P(z) = N$. Однако в силу асимптотического выражения $P(z) \sim a_0 z^n$, пригодного для больших $|z|$, соответствующее приращение вдоль полуокружности таково: $\Delta \text{Arg } P(z) \approx n\pi$. Поэтому, если обозначить

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \Delta_{-\infty < y < \infty} \text{Arg } P(iy), \quad (48)$$

то получаем, что

$$N = \frac{n}{2} - \mu. \quad (49)$$

(Подумайте, откуда здесь знак минус; проверьте, что на рис. 48, б принято $N = 4$, $n = 5$, $\mu = -\frac{3}{2}$). Формула (49) и дает решение проблемы, причем значение μ из (48) можно подсчитать на компьютере (для больших $|y|$ удобно заменить y на $\eta = \frac{1}{y}$, чтобы $\eta \rightarrow 0$), либо

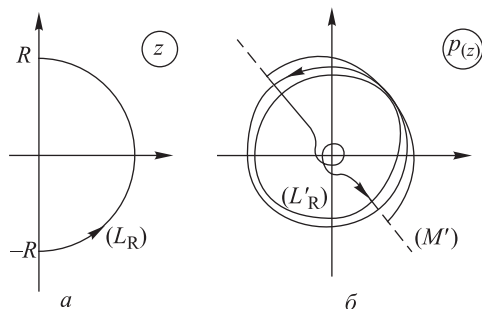


Рис. 48

путем ориентировочного построения от руки линии (M') (рис. 48, б) по точкам после вычисления необходимых значений $P(iy)$.

В частности, полагая $N = 0$, мы получаем $\mu = n/2$ — необходимое и достаточное условие устойчивости многочлена, которое иногда называется *критерием А. В. Михайлова*.

Если полином $P(z)$ устойчивый и y пробегает вещественные значения от $-\infty$ до ∞ , то $\text{Arg } P(iy)$ монотонно (почему?) возрастает на πn . Поэтому точка $P(iy)$ пересекает вещественную, а также мнимую оси по n раз каждую (быть может, один раз в пределе, при $y \rightarrow \pm\infty$). Но это означает, что если разложить

$$P(iy) = Q(y) + iR(y), \quad (50)$$

где Q, R — вещественные многочлены, то нули этих многочленов будут вещественными, простыми и перемежающимися (между двумя соседними нулями одного многочлена лежит ровно один нуль другого). Обратно, если после разложения (50) нули многочленов Q, R обладают указанными свойствами (а их нетрудно проверить с помощью вычисления на компьютере, то нули многочлена $P(z)$ находятся либо все в левой полуплоскости, либо все в правой, а в какой именно — легко узнать, выяснив с помощью вычисления, в какую сторону закручива-

ется точка $P(iy)$. (Докажите это обратное утверждение, разобрав на основании сведений о нулях, как ведет себя точка $P(iy)$ при возрастании y от $-\infty$ до ∞ .)

11. Результат двух многочленов. В связи с материалом п. 10 остановимся на вопросе, который встречается в различных разделах математики. Допустим, что заданы два многочлена $P(z)$ и $Q(z)$. Как исключить z из системы двух уравнений

$$P(z) = 0, \quad Q(z) = 0, \quad (51)$$

другими словами, каково условие на коэффициенты этих многочленов, необходимое и достаточное для наличия у уравнений (51) по крайней мере одного общего решения? (Продумайте равносильность этих двух формулировок.)

Для простоты изложения мы примем, что многочлен $P(z)$ имеет третью, а $Q(z)$ — вторую степени, т. е. уравнения (51) имеют вид

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0, \quad b_0 z^2 + b_1 z + b_2 = 0; \quad (52)$$

впрочем, из результата будет ясен ответ и для любых степеней. Допустим, что уравнения (52) имеют общее решение $z = z_0$ и умножим результат подстановки z_0 в первое уравнение на z_0 , а результат подстановки z_0 во второе уравнение — на z_0^2 и z_0 . Получатся равенства

$$\begin{aligned} a_0 z_0^4 + a_1 z_0^3 + a_2 z_0^2 + a_3 z_0 &= 0, \\ a_0 z_0^3 + a_1 z_0^2 + a_2 z_0 + a_3 \cdot 1 &= 0, \\ b_0 z_0^4 + b_1 z_0^3 + b_2 z_0^2 &= 0, \\ b_0 z_0^3 + b_1 z_0^2 + b_2 z_0 &= 0, \\ b_0 z_0^2 + b_1 z_0 + b_2 \cdot 1 &= 0, \end{aligned}$$

их можно рассматривать как систему из пяти алгебраических однородных уравнений первой степени относительно пяти величин: $z_0^4, z_0^3, \dots, 1$. Поскольку эти величины не все равны нулю, то определитель системы должен равняться нулю (см., например, ЛВМ, п. VI.6):

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (53)$$

Этот определитель, который аналогичным образом составляется и для многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ других степеней (его порядок равен сумме степеней многочленов P и Q), называется *результантом* этих многочленов. Мы сейчас проверили, что равенство (53) необходимо для наличия у уравнений (52) общего конечного корня. Если имеется общий бесконечный корень, т. е. если $a_0 = b_0 = 0$ (см. п. 10), то ясно, что (53) все равно выполняется. Можно проверить, что *равенство результата нулю является не только необходимым,*

но и достаточным для наличия у двух многочленов общего конечного или бесконечного нуля (см., например, [62]).

Результант многочленов $P(z)$ и $P'(z)$ называется *дискриминантом* многочлена $P(z)$. Равенство дискриминанта нулю необходимо и достаточно для наличия у $P(z)$ кратного или бесконечного нуля (почему?). (Составьте дискриминант многочлена $az^2 + bz + c$; в чем отличие от дискриминанта, известного из школьного курса?)

С помощью составления результата возможно, во всяком случае в принципе, перейти от системы уравнений

$$P(z_1, z_2) = 0, \quad Q(z_1, z_2) = 0,$$

где P и Q — многочлены, к алгебраическому уравнению $D(z_1) = 0$ с одним неизвестным; впрочем, в конкретных примерах это может привести к непреодолимо громоздким выкладкам. Аналогично применяется результат к построению решения системы уравнений

$$P(z_1, z_2, z_3) = 0, \quad Q(z_1, z_2, z_3) = 0,$$

в окрестности точки $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ с помощью диаграммы Ньютона (п. 3.8) для получающегося уравнения $D(z_1, z_2) = 0$.

12. Мероморфные функции. Однозначная аналитическая функция, заданная на всей плоскости z и имеющая при конечных z из особых точек только полюсы, называется *мероморфной* функцией. Так как в каждой конечной части плоскости такая функция может иметь лишь конечное число полюсов (почему?), то если всех полюсов бесконечное число, они накапливаются к бесконечно удаленной точке, которая будет в этом случае *неизолированной* особой точкой. Типичным примером мероморфной функции служит $\operatorname{tg} z$ с полюсами при $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и неизолированной особой точкой при $z = \infty$.

Если мероморфная функция $f(z)$ имеет лишь конечное число полюсов, то, составив сумму $s(z)$ сингулярных частей соответствующих лорановских разложений во всех полюсах, мы получаем представление $f(z) = s(z) + [f(z) - s(z)]$ функции $f(z)$ в виде суммы рациональной и целой функций. Оказывается, что аналогичное представление возможно для широкого класса мероморфных функций с бесконечным числом полюсов, однако при этом $s(z)$ будет, естественно, суммой бесконечного ряда из рациональных функций. Мы приведем здесь лишь самую простую теорему в этом направлении.

Пусть для мероморфной функции $f(z)$ с бесконечным числом полюсов возможно подобрать последовательность замкнутых контуров $(L_1), (L_2), \dots, (L_n), \dots$, каждый из которых содержится внутри следующего, причем

- 1°. $\min_{z \in (L_n)} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, т. е. контуры уходят на бесконечность.
- 2°. $L_n = O\left(\min_{z \in (L_n)} |z|\right)$, т. е. длина контура имеет не более высокий порядок, чем минимальное его расстояние от начала координат, и
- 3°. $\sup_n \max_{z \in (L_n)} |f(z)| < \infty$ (под $\sup$ понимается верхняя граница), т. е. функция $f(z)$ на совокупности всех контуров ограничена. Тогда имеет место представление

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [s_n(z) - s_n(z_0)] + f(z_0), \quad (54)$$

где $s_n(z)$ — сумма сингулярных частей лорановских разложений функции $f(z)$ у всех ее полюсов, расположенных между (L_{n-1}) и (L_n) (при $n = 1$ расположенных внутри (L_1)), а z_0 — любая неособая точка функции $f(z)$. При этом ряд (54) сходится равномерно в каждой конечной части плоскости z .

Для доказательства зафиксируем неособые точки z_0, z и рассмотрим вспомогательную функцию от ζ :

$$F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} = \frac{(\zeta - z_0)f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}. \quad (55)$$

Она имеет полюсы $\zeta = z$ с вычетом $f(z)$, $\zeta = z_0$ с вычетом $-f(z)$ (почему?) и, кроме того, все те же полюсы $\zeta = z_1, z_2, z_3, \dots$, что и функция $f(\zeta)$. Применение формулы (6) к каждому сингулярному слагаемому вида $\frac{A}{(\zeta - z_k)^p}$ в разложении $f(\zeta)$ показывает (проверьте!), что

$$\text{Выч}_{\zeta=z_k} F(\zeta) = -f_k(z) + f_k(z_0)$$

где $f_k(z)$ — сингулярная часть разложения функции в точке $z = z_k$. Поэтому в силу теоремы Коши о вычетах

$$\oint_{(L_N)} F(\zeta) d\zeta = 2\pi i \left\{ f(z) - f(z_0) - \sum_{n=1}^N [s_n(z) - s_n(z_0)] \right\}.$$

Если теперь $N \rightarrow \infty$, то из формулы (55), оценки (2.3) и условия теоремы следует, что левая часть стремится к нулю, причем для переменного z равномерно в каждой конечной части плоскости z . Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Применим доказанную теорему к функции $f(z) = \operatorname{tg} z$, приняв $z_0 = 0$ и выбрав за $(L_1), (L_2), \dots$ квадраты, один из которых изображен на рис. 49. Так как

$$\operatorname{tg}(\pm n\pi + iy) = \operatorname{tg} iy = i \operatorname{th} y,$$

$$|\operatorname{tg}(x \pm in\pi)| = \left| \frac{\operatorname{tg} x \pm i \operatorname{th} n\pi}{1 \mp i \operatorname{th} n\pi \operatorname{tg} x} \right| \leq \frac{(|\operatorname{tg} x| + 1)^2}{1 + \operatorname{th}^2 n\pi \operatorname{tg}^2 x} \leq \frac{(|\operatorname{tg} x| + 1)^2}{1 + \operatorname{th}^2 \pi \operatorname{tg}^2 x} \leq \operatorname{const}$$

(проверьте!), то условие 3° теоремы выполнено, прочие же условия очевидны. Но функция $\operatorname{tg} z$ имеет полюсы при $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ с сингулярной частью $-\left[z - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right]^{-1}$ (проверьте!); поэтому формула (54) дает

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{-1}{z - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \right]. \quad (56)$$

Если здесь объединить члены с $k = 0$ и с $k = -1$, члены с $k = 1$ и с $k = -2$ и т. д. (строго говоря, так и надо было делать по формуле (54)), то получим

$$\operatorname{tg} z = -2z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}.$$

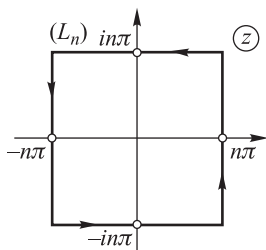


Рис. 49

Если в формуле (56) произвести суммирование сначала от $k = -n$ до $k = n$, а затем перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, то легко проверить, что сумма вторых слагаемых стремится к нулю, т. е.

$$\operatorname{tg} z = \text{v. p.} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-1}{z - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}, \quad (57)$$

где по определению $\text{v. p.} \sum_{k=-\infty}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n$ (ср. сноску на с. 101) Ряд (57) расходящийся, и сумма его берется в смысле главного значения.

Интегрирование формулы (57) от 0 до z и потенцирование полученного результата приводит к еще одной интересной формуле

$$\cos z = \text{v. p.} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\pi/2 + k\pi}\right),$$

где *бесконечное произведение* $\prod_{k=-\infty}^{\infty}$ и его главное значение определяются аналогично тому, как это делается для бесконечного ряда.

Для некоторых других целых функций $f(z)$ разложение в бесконечное произведение удастся получить, проводя аналогичные манипуляции с разложением мероморфной функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в ряд. Так, можно проверить (мы не станем здесь

этого доказывать), что мероморфная функция $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ удовлетворяет приведенным выше условиям теоремы о разложении (54), и потому, приняв $z_0 = 1$, получаем (проверьте!)

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z+n} + \frac{1}{1+n}\right) + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}.$$

Этот результат обычно преобразуют к следующему виду, обозначив $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} &= -\frac{1}{z} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{z+n} + \frac{1}{n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \mathfrak{A} = \\ &= -\mathfrak{A} - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right). \end{aligned} \quad (58)$$

Интегрирование от 1 до z дает

$$-\ln \Gamma(z) = \mathfrak{A}z - \mathfrak{A} + \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-1}{n} - \ln \frac{n+z}{n+1}\right). \quad (59)$$

Полагая $z = 2$, получаем

$$\begin{aligned}
 \Theta &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+2}{n+1} \right) = \\
 &= -\ln 2 + \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln \frac{3}{2} - \ln \frac{4}{3} - \dots - \ln \frac{N+2}{N+1} \right) = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N - \ln \frac{N+2}{N} \right) = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right) - \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \frac{N+2}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right);
 \end{aligned}$$

этот предел называется постоянной Эйлера. Подставляя в (59) выражение

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$$

(проверьте!) и потенцируя, получаем требуемое разложение

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\Theta z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n}.$$

Логарифмическая производная $\psi_1(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ определенная формулой (58), а также ее производные

$$\psi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}, \dots, \quad \psi_p(z) = (-1)^p (p-1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^p} \quad (60)$$

применяются при вычислении сумм числовых рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)},$$

где P и Q — многочлены, причем знаменатель имеет все нули вещественные и его степень по крайней мере на 2 превышает степень числителя. Для этого надо отношение $\frac{P(z)}{Q(z)}$ разложить на простейшие рациональные дроби (см., например, ЛВМ, п. VIII.10), после чего воспользоваться формулами (60) и (58). Отметим простую формулу

$$\psi_p(z+1) = \psi_p(z) + (-1)^{p-1} (p-1)! z^{-p}$$

(докажите ее!), которая дает возможность ограничиться таблицами значений $\psi_p(z)$ только на интервале длины 1.

13. Формула Кристоффеля–Шварца. Сначала отметим важное применение принципа аргумента п.7 к конформным отображениям. Пусть в некоторой открытой односвязной конечной области (G) задана аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная вплоть до границы (Γ) этой области. Пусть при этом образом (Γ) служит граница (D) открытой конечной области (H) плоскости w , причем если точка w совершает один обход (Γ) в положительном направлении, то соответствующая точка z совершает один обход (D) в положительном направлении (взаимная однозначность заранее не предполагается). Тогда функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области (G) на (H) . Для доказательства применим формулу (41) к функции $f(z) - w_0$, где w_0 — любая точка (H) ; из этой формулы получаем, что на w_0 отображается ровно одна точка $z \in (G)$. Аналогично, если w_0 находится во внешней области к (D) , то на w_0 не отображается ни одна точка (G) . Отсюда с помощью результатов первого абзаца п.3.6 и вытекает высказанное утверждение о конформности.

Доказанное утверждение позволяет при проверке конформности отображения ограничиться рассмотрением его свойств только на границе области. Это утверждение легко распространяется и на неограниченные области (с помощью аппроксимации их конечными), если под положительным направлением обхода контура такой области понимать такое направление, при котором эта область остается слева.

Рассмотрим теперь в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функцию

$$w = C \int_{z_0}^z (\zeta - a_1)^{-\alpha_1} (\zeta - a_2)^{-\alpha_2} \dots (\zeta - a_n)^{-\alpha_n} d\zeta + C_1. \quad (61)$$

где $C \neq 0$, C_1 — произвольные комплексные постоянные, $\text{Im } z > 0$, все a_k , α_k — произвольные вещественные постоянные, причем $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, все $|\alpha_k| < 1$, $\sum_k \alpha_k = 2$. Подынтегральную функцию можно считать в верх-

ней полуплоскости однозначной, если положить $(\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} = \exp[(\alpha_k - 1) \ln(\zeta - a_k)]$ (п.2.12). Поэтому функция (61) осуществляет аналитическое отображение верхней полуплоскости (G) плоскости z на некоторую область (H) плоскости w ; вид этой области сейчас будет выяснен.

Так как

$$\frac{dw}{dz} = C(z - a_1)^{-\alpha_1} (z - a_2)^{-\alpha_2} \dots (z - a_n)^{-\alpha_n},$$

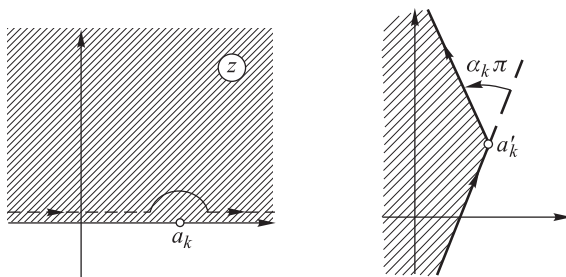
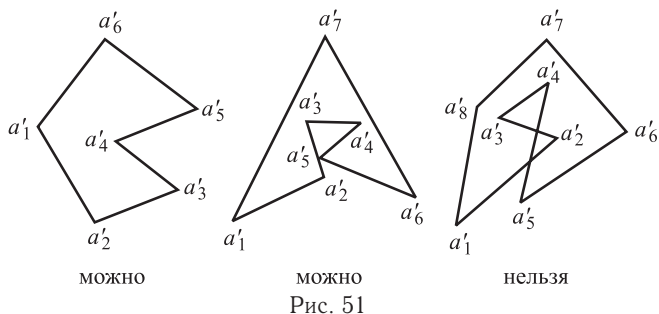


Рис. 50

то при изменении z вдоль вещественной оси — границы области (G) — аргумент $\frac{dw}{dz}$ остается постоянным, т.е. w изменяется вдоль прямолинейного отрезка (п.2.4), пока z не переходит через одну из точек a_k . При таком переходе $\text{Arg}(z - a_k)$ возрастает на $-\pi$, а потому $\text{Arg} \frac{dw}{dz}$ — на $\alpha_k \pi$, т.е. точка w начинает следовать вдоль нового направления, составляющего угол $\alpha_k \pi$ с предыдущим (рис.50). Таким образом, ось x отображается на n -угольник с вершинами $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$. (Точка $z = \infty$, $\text{Im } z \geq 0$, как мы предоставим доказать читателю на основе равенства $\sum \alpha_k = 2$, отображается на одну из точек отрезка $a'_n a'_1$.) Если этот n -угольник получится без «внутренних» самопересечений (рис.51), то из теоремы, доказанной в начале этого пункта,



вытекает, что функция (61) осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости z на внутренность указанного n -угольника. Проверьте, что таких самопересечений наверняка не будет, если все $\alpha_k > 0$ или если $n \leq 4$. Формула (61) называется *формулой Кристоффеля–Шварца*.

Справедливо и обратное утверждение, которое мы здесь не будем доказывать: если в плоскости w задан n -угольник, то параметры в формуле (61) всегда можно подобрать так, чтобы получить отображение именно на этот n -угольник; однако на практике этот подбор может оказаться далеко не простым. Впрочем, читатель может легко проверить (хотя это служит только подтверждением, но не доказательством сформулированного обратного утверждения), что число таких существенных действительных параметров как раз на 3 превосходит число параметров при задании n -угольника, в соответствии с тремя степенями свободы при отображении полуплоскости на себя (п.2.16). Эта свобода дает возможность, в частности, произвольно задать три из значений a_k , а разыскивать лишь остальные. Особенно часто полагают $a_n = \infty$; для этого надо в формуле (61) вместо C написать $C(-a_n)^{\alpha_n}$, а затем совершить переход к пределу при $a_n \rightarrow \infty$, откуда видно, что при $a_n = \infty$ последний множитель в подынтегральной функции надо просто устранить. Если какое-либо из α_k в формуле (61) будет ≥ 1 (но обязательно ≤ 3), то интеграл при $z = a_k$ расходится, т.е. соответствующая вершина «многоугольника» уйдет на бесконечность. Поворот направления обхода контура в этой вершине, как и ранее, равен $\alpha_k \pi$. Проверьте, например, что «четырехугольнику» рис.52 отвечают значения $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{5}{2}$, $\alpha_4 = -\frac{1}{2}$.

Пусть, например, требуется конформно отобразить верхнюю полуплоскость z на «четыреугольник» (H) , показанный на рис. 53. Здесь $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = -\frac{1}{2}$; примем $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_4 = \infty$, тогда формула (61) дает

$$\begin{aligned} w = C \int \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z}(z-a_3)} &= |z=s^2| = 2C \int \frac{ds}{(s^2+1)(s^2-a_3)} = \\ &= \frac{2C}{1+a_3} \left(\int \frac{ds}{s^2-a_3} - \int \frac{ds}{s^2+1} \right) = \\ &= \frac{2C}{1+a_3} \left(\frac{1}{2\sqrt{a_3}} \operatorname{Ln} \frac{s-\sqrt{a_3}}{s+\sqrt{a_3}} - \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{s-i}{s+i} \right) + C_1 \quad (s = \sqrt{z}). \end{aligned} \quad (62)$$

(При вычислении последнего интеграла мы воспользовались логарифмом, более удобным при действиях с комплексными величинами, чем арктангенс.)

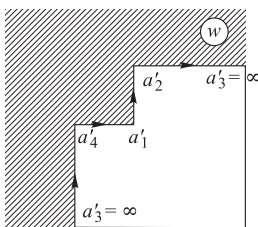


Рис. 52

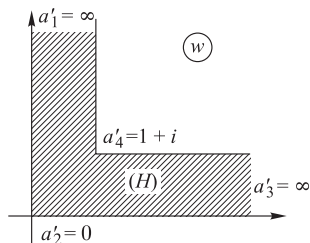


Рис. 53

При дальнейших преобразованиях требуется добавочное внимание в связи с применением многозначных функций. Так как z меняется в верхней полуплоскости, то в качестве области изменения s можно принять первый либо третий квадрант; примем впредь для определенности первый. Чтобы уточнить ветви логарифма, воспользуемся условием $f(a_2) = a_2$, т. е. $f(0) = 0$:

$$\frac{2C}{1+a_3} \left(\frac{1}{2\sqrt{a_3}} \operatorname{Ln}(-1) - \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}(-1) \right) + C_1 = 0.$$

Выражая отсюда C_1 и подставляя в (62), получим

$$w = \frac{C}{1+a_3} \left(\frac{1}{2\sqrt{a_3}} \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{a_3}-s}{\sqrt{a_3}+s} - \frac{1}{i} \operatorname{Ln} \frac{i-s}{i+s} \right), \quad (63)$$

причем то же условие $w(0) = 0$ показывает, что надо выбрать ветви логарифма, удовлетворяющие условию $\operatorname{Ln} 1 = 0$. Легко проверить, что если s изменяется в первом квадранте, то дробь, стоящая под знаком логарифма в (63), описывает нижнюю и соответственно верхнюю половины единичного круга; поэтому при $\operatorname{Im} z > 0$ надо пользоваться главной ветвью логарифма (продумайте это!). Далее, чтобы область (H) получилась правильно повернутой, необходимо, чтобы $\frac{dw}{dz}$ при вещественном $z > 0$ было вещественным; отсюда в силу первого равенства (62) вытекает, что и C вещественно. Наконец, остается условие $w(\infty) = 1+i$. Подставляя $s = \infty$ в (63) и учитывая сделанное выше замечание об областях изменения дробей, стоящих под знаком Ln , получаем

$$1+i = \frac{C}{1+a_3} \left(\frac{1}{\sqrt{a_3}}(-\pi i) - \frac{1}{i} \pi i \right), \text{ откуда } C = -\frac{2}{\pi}, \quad a_3 = 1.$$

Подставляя эти значения в (63), получаем окончательно

$$w = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{1+s}{1-s} + i \ln \frac{i+s}{i-s} \right), \quad s = \sqrt{z}, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Советуем читателю внимательно продумать приведенные рассуждения. Беспечное обращение с многозначными функциями может привести к прямым ошибкам в ответе.

14. Понятие об эллиптических функциях. Интеграл (61), как правило, не выражается через элементарные функции. В частности, при отображении полуплоскости на внутренность прямоугольника получается эллиптический интеграл; в общем случае эллиптическими называются интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx, \quad (64)$$

где R — рациональная функция от своих двух аргументов, а $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени. Хотя при выполнении определенных равенств, связывающих коэффициенты, интеграл (64) выражается через элементарные функции (тогда он называется *псевдоэллиптическим*), но, как правило, рассчитывать на это не приходится. Можно показать (см., например, [6]), что интеграл (64) с помощью элементарных преобразований всегда можно представить в виде комбинации элементарных функций и интегралов вида

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad \int \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt, \quad \int \frac{dt}{(1+lt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (65)$$

где k и l — постоянные; это *нормальные эллиптические интегралы Лежандра* соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода. Однако не следует слишком надеяться на эти преобразования: как правило, они громоздки, а интегралы 3-го рода весьма неудобны в обращении и даже не затабулированы. Поэтому на практике, если интеграл (64) не сводится как-то просто к интегралам 1-го или 2-го рода, то лучше воспользоваться приближенным или численным интегрированием.

Совершив в первых двух интегралах (65) подстановку $t = \sin \varphi$ и перейдем, чтобы избавиться от произвольных постоянных, к определенным интегралам с нулевым нижним и переменным верхним пределами. Мы получим функции, имеющие специальные обозначения:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

Величины φ и k называются соответственно *амплитудой* и *модулем* этих эллиптических интегралов; в большинстве приложений эти величины вещественны. Такие интегралы при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq k \leq 1$ подробно затабулированы; для других значений φ надо воспользоваться четностью и периодичностью подынтегральной функции, а случай $k > 1$ сводится к $k < 1$ с помощью подстановки $k \sin \psi = \sin \psi_1$ (проверьте, считая интегралы вещественными!).

Особенно часто применяются *полные* эллиптические интегралы

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Например, мы предоставляем читателю вывести, исходя из канонического уравнения эллипса и общей формулы длины дуги, что длина эллипса с большей полуосью a и эксцентриситетом ε равна $4aE(\varepsilon)$; отсюда и происходит название «эллиптический интеграл».

Вернемся к первому интегралу (65), причем будем теперь считать независимую переменную комплексной. Сравнивая с формулой (61), получаем, что функция

$$w = \int_0^z [(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)]^{-1/2} d\zeta \quad (0 < k < 1) \quad (66)$$

(в которой однозначная ветвь подынтегральной функции выбрана так, что она равна единице при $\zeta = 0$) осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости z на внутренность прямоугольника плоскости w ; при этом в вершины прямоугольника переходят точки $z = \pm 1$ и $z = \pm \frac{1}{k}$. При $z = \pm 1$ получаем $w = \pm K(k)$, а при $z = \pm 1/k$ будет

$$\begin{aligned} w &= \pm K(k) + i \int_1^{1/k} [(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)]^{-1/2} dt = \\ &= |t = (1 - k'^2 \tau^2)^{-1/2}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}| = \\ &= \pm K(k) + i \int_0^1 [(1 - \tau^2)(1 - k'^2 \tau^2)]^{-1/2} d\tau = \pm K(k) + iK(k') \end{aligned}$$

(проверьте!). Это и есть вершины упомянутого прямоугольника.

Поэтому обратная к (66) функция, которая обозначается $z = \operatorname{sn} w$ (подробнее, $\operatorname{sn}(w, k)$) и называется *эллиптическим синусом*, осуществляет конформное отображение внутренности указанного прямоугольника на верхнюю полуплоскость z . Пользуясь правилом симметрии (п. 2.17), несложно показать (см., например, [66]), что функцию $\operatorname{sn} w$ можно продолжить с этого прямоугольника на всю плоскость w , после чего получится однозначная мероморфная функция с простыми полюсами в точках $w = iK(k') + 2mK(k) + 2inK(k')$, где m и n — любые целые числа. Она обладает интересным свойством

$$\operatorname{sn}(w + 4mK(k) + 2inK(k')) \equiv \operatorname{sn} w \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

т.е. имеет два независимых периода $4K(k)$ и $2iK(k')$. Функции комплексного переменного, обладающие таким свойством, называются *двокопериодическими*.

Эллиптический синус называется также *синусом амплитуды*. (Это название объясняется тем, что если в интеграле (66) совершить, как выше, подстановку $z = \sin \varphi$, то φ — верхний предел полученного интеграла — принято называть его амплитудой, т.е. амплитудой для w .) Аналогично вводятся функции *косинус амплитуды* $\operatorname{cn} w = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 w}$ и *дельта амплитуды* $\operatorname{dn} w = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 w}$, нормированные условием равенства единице при $w = 0$. Можно показать, что эти функции также мероморфные и двокопериодические. Между функциями $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$ и $\operatorname{dn} w$, введенными Якоби, имеются многочисленные соотношения. Отметим, что для вещественных w эти функции принимают вещественные значения, причем периодичны; их графики при

некотором k показаны на рис. 54. В частности, $\operatorname{sn} x = \sin \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — функция, обратная к возрастающей функции $x(\varphi) = F(\varphi, k)$.

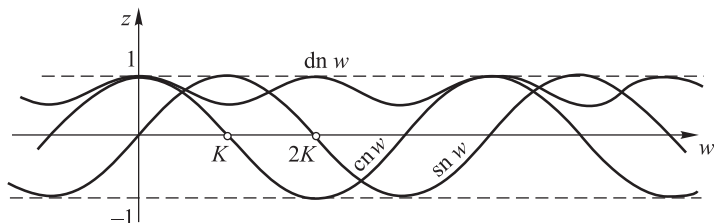


Рис. 54

Имеется ряд других эллиптических функций, тесно связанных с описанными здесь. Свойства этих функций можно найти в [6] и в различных курсах специальных функций.

§5. Асимптотические разложения

Сейчас асимптотические разложения широко применяются в прикладной математике в качестве эффективного аппарата как для вывода приближенных формул в «околопредельных» ситуациях, так и для вычислений. Теория асимптотических разложений непосредственно связана с теорией аналитических функций (хотя многие результаты первой имеют чисто вещественный характер) и иногда, даже при анализе прикладных задач, требует проведения сложных и тонких математических рассуждений. Здесь мы приведем лишь некоторые общие сведения об асимптотических разложениях, отослав читателя за дальнейшими сведениями к книгам [16, 52, 139].

1. Введение. Как уже говорилось, функция $f(x)$, по определению, допускает при $x \rightarrow \infty$ асимптотическое разложение

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots, \quad (1)$$

если для любого $n = 0, -1, 2, \dots$ имеет место представление

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (\text{при } x \rightarrow \infty). \quad (2)$$

(Если сравнить эту формулу с формулой следующего приближения, то видно, что остаточный член можно записать также в виде $O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$.)

При этом вовсе не требуется обязательно, чтобы ряд, стоящий в правой части (1), сходилась в обычном смысле к $f(x)$ и даже чтобы он вообще

сходиллся к какой-либо функции; например, с помощью последовательного интегрирования по частям легко получить разложение

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{x-s}}{s} ds \sim \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots (x \rightarrow \infty) \quad (3)$$

(проделайте это!), хотя ряд, стоящий в правой части, расходится при любом x . Так, частные суммы ряда последовательно равны:

при $x = 2$

$$0,50; 0,25; 0,50; 0,125; 0,875; \dots;$$

при $x = 5$

$$0,200; 0,160; 0,176; 0,166; 0,174; 0,166; 0,176; 0,163; 0,183; \dots;$$

при $x = 10$

$$0,10000; 0,09000; 0,09200; 0,09140; 0,09164; 0,09152; 0,09159; \\ 0,09154; 0,09158; 0,09155; 0,09158; 0,09154; 0,09159; \dots$$

Интересно, что из вывода формулы (3) легко понять, что при любом фиксированном $x > 0$ остаточный член при переходе от каждого n к следующему меняет знак. В этом случае, самом удобном для вычислений, точное значение разлагаемой величины заключено между любыми двумя последовательными частными суммами ряда, что дает возможность получить двустороннюю оценку этого значения. Так, в разобранным примере

$$0,25 < f(2) < 0,50; 0,166 < f(5) < 0,174; \\ 0,09155 < f(10) < 0,09158,$$

т.е. можно принять $f(2) = 0,4$; $f(5) = 0,170$; $f(10) = 0,09156$. Мы видим, что с ростом x точность результата повышается.

Если двустороннюю оценку получить не удастся, то иногда, имея выражение для остаточного члена в виде интеграла и т.п., оказывается возможным получить его оценку и тем самым получить представление о точности результата. Но и если точная оценка остаточного члена неизвестна, то, вычисляя последовательные частные суммы, удастся получить приближенное значение разлагаемой величины и правдоподобную оценку ошибки, так как обычно, когда частные суммы ряда отчетливо сближаются (а значение x не слишком малó), они оказываются приближенно равными этой величине, а ошибка — по порядку равной первому из отброшенных членов.

Применяются также разложения вида

$$f(x) \sim g(x) \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots \right), \quad (4) \\ f(x) \sim a_0 + a_1 x^{-p} + a_2 x^{-2p} + \dots \quad (p > 0)$$

и т.п. Смысл этих формул аналогичен смыслу формулы (1).

При рассмотрении асимптотического разложения однозначной аналитической функции

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots \quad (5)$$

должно быть указано, какие способы удаления z на бесконечность допускаются. Если формула (5) справедлива при произвольном способе $z \rightarrow \infty$, то нетрудно показать (попробуйте!), что в правой части (5) стоит разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ на бесконечности (п. 4.6) и равенство (5) является не асимптотическим, а точным. Более содержательная теория получается, если требовать, чтобы равенство (5) имело место, только когда $z \rightarrow \infty$, оставаясь внутри некоторого заданного угла, другими словами, если аргумент z удовлетворяет некоторому заданному неравенству вида $\alpha \leq \text{Arg } z \leq \beta$. (В частности, если $\alpha = \beta = 0$, мы получаем разложение (1).) Довольно типичной является следующая картина: задается неравенство $\alpha < \text{Arg } z < \beta$, а формула

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + o\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

имеет место при $z \rightarrow \infty$ в любом «строого внутреннем» угле $\alpha' \leq \text{Arg } z \leq \beta'$, т. е. $\alpha < \alpha' \leq \beta' < \beta$. Интересно, что тогда в разных углах, не имеющих общих лучей, одна и та же функция $f(z)$ может иметь различные асимптотические разложения; это явление называется *явлением Стокса*.

2. Свойства. Мы будем для простоты говорить о разложениях вида (1) при $x \rightarrow \infty$; аналогичные свойства имеют место и для разложений (4). Первое, кстати, можно переписать в виде $\frac{f(x)}{g(x)} \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots$, т. е. свести к (1); второе сводится к (1) подстановкой $x^p = y$.

Прежде всего заметим, что далеко не каждая функция, даже конечная при $x \rightarrow \infty$, допускает разложение (1); например, такое разложение невозможно для $f(x) = \sin x, x^{-p}$ ($p > 0$ не целое), $\frac{\ln x}{x}$ и т. п. С другой стороны, легко доказать, что если разложение все же возможно, то его коэффициенты определены однозначно, т. е. у одной и той же функции не может быть двух различных разложений вида (1). В самом деле, если кроме (1) имеет место формула $f(x) \sim a'_0 + \frac{a'_1}{x} + \dots$ и $n \geq 0$ — наименьший номер, для которого $a_n \neq a'_n$, то наряду с (2) можно написать, что

$$\begin{aligned} f(x) &= a'_0 + \frac{a'_1}{x} + \dots + \frac{a'_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) = \\ &= a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \end{aligned}$$

и, вычитая, мы приходим к противоречию (продумайте!). Этим свойством, в частности, объясняется оговорка об общих лучах, сделанная в последней фразе п. 1.

В то же время две различные функции могут иметь одинаковое разложение (1). В самом деле, функция, стремящаяся к нулю при $x \rightarrow \infty$ быстрее любой степени x (например, e^{-x}), имеет тождественно нулевое разложение (почему?). Значит, добавление такой функции к левой части (1) не меняет правой части. Таким образом, по заданному разложению разлагаемая функция определяется лишь с точностью до слагаемого указанного типа; однако в конкретных задачах эта небольшая неопределенность обычно оказывается несущественной.

Переходим к действиям над разложениями (1). Исходя из формулы (2), легко проверить, что такие разложения можно почленно складывать, умножать на число (при умножении на функцию надо перейти к первому разложению (4)). Аналогично проверяется, что разложения (1) можно перемножать по правилу умножения многочленов, а также делить столбиком или по методу неопределенных коэффициентов (см., например, ЛВМ, п. XVII.12), если у знаменателя коэффициент $a_0 \neq 0$. Возможно асимптотическое разложение функции $F(f(x))$ с помощью подстановки ряда в ряд, если $F(y)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $y - a_0$ аналогично для $F(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$.

Асимптотическое равенство (1) можно почленно интегрировать, что дает

$$\int_{x_0}^x f(s) ds - a_0 x - a_1 \ln x \sim b_0 - \frac{a_2}{x} - \frac{a_3}{2x^2} - \frac{a_4}{3x^3} - \dots, \quad (6)$$

где b_0 — некоторая постоянная, зависящая от $x_0 \leq \infty$. Для доказательства перенесем в формуле (2) первые два слагаемых правой части в левую и проинтегрируем результат от x до ∞ , заметив, что

$$\int_x^\infty o\left(\frac{1}{s^p}\right) ds = o\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right) \quad (p > 1, x \rightarrow \infty); \text{ это даст}$$

$$\int_x^\infty \left[f(s) - a_0 - \frac{a_1}{s} \right] ds \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \frac{a_4}{3x^3} + \dots$$

Поменяв с обеих сторон знаки и добавив $\int_{x_0}^\infty \left[f(s) - a_0 - \frac{a_1}{s} \right] ds =$

$$= \int_{x_0}^\infty O\left(\frac{1}{s^2}\right) ds = \text{const}, \text{ получаем (6) (проверьте!).}$$

Из доказанного нетрудно вывести, что равенство (1) можно и почленно дифференцировать, т. е.

$$f'(x) \sim -\frac{a_1}{x^2} - \frac{2a_2}{x^3} - \frac{3a_3}{x^4} - \dots, \quad (7)$$

если известно, что функция $f'(x)$ допускает асимптотическое разложение. (Попробуйте доказать это, исходя из разложения функции $f'(x)$ и проверив с помощью интегрирования, что оно обязательно имеет вид (7).)

Если отказаться от последнего условия, то возможно построить искусственные примеры, в которых дифференцирование асимптотического равенства оказывается незаконным. Однако в примерах, представляющих практический интерес, такая ситуация не возникает. Отчасти это объясняется тем, что для разложений (5), сходящихся внутри угла $\alpha < \text{Arg } z < \beta$ (в смысле, указанном в конце п. 1), возможно доказать, что почленное дифференцирование законно всегда, причем получающаяся формула асимптотична в том же смысле, что исходная. А в реальных примерах асимптотическая формула, справедливая при $x \rightarrow \infty$, обычно справедлива и в некотором угле $|\text{Arg } z| < \varepsilon$.

Отметим, что в более сложных задачах иногда удается получить не полное разложение вида (1), а только формулу типа (2) при фиксированном n . Даже и такие формулы, хотя бы при $n = 0$, а тем более при больших n , могут оказаться очень полезными.

При рассмотрении асимптотических разложений функций от нескольких аргументов надо иметь в виду, что такие разложения могут оказаться различными для различных соотношений между аргументами. Пусть, например, дана функция.

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \sin \frac{1}{x+y} + \sin \frac{1}{x^2}, \quad (8)$$

причем $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$. Тогда если x и y одного порядка, $y = kx$, то разложение имеет вид

$$f(x, kx) = \frac{1}{k} + \frac{1}{(1+k)x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3!(1+k)^3 x^3} + \dots,$$

где $k = y/x$ заключено между положительными постоянными и, в частности, может быть само постоянным. Если y второго порядка по сравнению с x , т. е. $y = kx^2$, то

$$f(x, kx^2) = \frac{1}{kx} + \frac{k+1}{kx^2} - \frac{1}{k^2 x^3} + \dots,$$

В (8) возможно положить $y = \infty$, что даст

$$f(x, \infty) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3!x^6} + \frac{1}{5!x^{10}} - \dots;$$

с другой стороны, положить $x = \infty$ в (8) невозможно.

Из-за того, что соотношение между аргументами недостаточно уточнялось, не раз возникали недоразумения.

3. Интеграл типа Фурье. Рассмотрим интеграл

$$I(\nu) = \int_a^b f(x) e^{i\nu x} dx, \quad (9)$$

предполагая, что функция $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков на конечном интервале $a \leq x \leq b$; такие интегралы часто появляются в теории интегрального преобразования Фурье (см., например, ЛВМ, § XVII.5). Легко получить полное асимптотическое разложение интеграла (9) при вещественном $\nu \rightarrow \pm\infty$. Для этого произведем интегрирование по частям несколько раз, например, два раза, дифференцируя функцию $f(x)$:

$$\begin{aligned} I(\nu) &= \int_a^b f(x) e^{i\nu x} dx = \left. f(x) \frac{e^{i\nu x}}{i\nu} \right|_a^b - \frac{1}{i\nu} \int_a^b f'(x) e^{i\nu x} dx = \\ &= \left(f(x) \frac{e^{i\nu x}}{i\nu} - f'(x) \frac{e^{i\nu x}}{(i\nu)^2} \right) \Big|_a^b + \frac{1}{(i\nu)^2} \int_a^b f''(x) e^{i\nu x} dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Видно прежде всего, что $I(\nu) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \pm\infty$; а так как последний интеграл в (10) того же типа, что (9), т. е. и он стремится к нулю при $\nu \rightarrow \pm\infty$, то, проводя дальнейшее интегрирование по частям, получаем при естественном смысле обозначений

$$I(\nu) \sim e^{i\nu a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\nu^n} f^{(n-1)}(a) - e^{i\nu b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\nu^n} f^{(n-1)}(b) \quad (11)$$

(проверьте!).

Эта же формула верна и если $a = -\infty$ (тогда первая сумма обращается в нуль), либо если $b = \infty$ (тогда вторая сумма обращается в нуль), если интеграл (9) абсолютно сходится.

В самом деле, для «хороших» функций $\varphi(x)$ из сходимости интеграла $\int_a^\infty |\varphi(x)| dx$ вытекает, что $\varphi(\infty) = 0$ и что $\int_a^\infty |\varphi'(x)| dx < \infty$, а последнее дает возможность перейти и к дальнейшим производным. Последнее неравенство гарантируется, например, если $\varphi(x)$ имеет конечное число интервалов монотонности, так как на каждом таком интервале $\int_\alpha^\beta |\varphi'(x)| dx = |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|$. Однако

в общем случае утверждения первой фразы этого абзаца допускают построение искусственных противоречащих примеров: первому утверждению противоречит функция вида $x \exp\left(e^x \ln \frac{2 + \sin x}{3}\right)$ с очень тонкими «столбиками», уходя-

щими на бесконечность, а второму — функции с бесконечно учащающимися колебаниями, например $\frac{1}{x^2} \sin x^2$ (продумайте эти примеры!). Мы не будем здесь принимать во внимание эти искусственные примеры и потому не будем делать соответствующие оговорки; более полные формулировки со всеми оговорками интересующийся читатель может найти в указанной литературе.

Отсюда, в частности, получается вывод об асимптотическом поведении фурье-образа заданной абсолютно интегрируемой при $-\infty < x < \infty$ функции $f(x)$. Допустим, что для некоторого целого $m \geq 0$ все ее производные порядка $< m$ непрерывны, тогда как $f^{(m)}(x)$ имеет по крайней мере один разрыв, причем 1-го рода. Тогда, разбивая интеграл

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

на части, отвечающие участкам непрерывности $f^{(m)}(x)$, и проводя интегрирование по частям $m+1$ раз, как было описано выше, получаем, что $\hat{f}(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \pm\infty$ со скоростью $|k|^{-(m+1)}$. Если же у $f(x)$ непрерывны производные всех порядков при $-\infty < x < \infty$, то $\hat{f}(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \pm\infty$ быстрее любой отрицательной степени.

Рассмотрим еще случай, когда в интеграле (9) пределы интегрирования конечны, но подынтегральная функция на одном из этих пределов обращается в бесконечность. Пусть, например, интеграл имеет вид

$$I(\nu) = \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x) e^{i\nu x} dx, \quad (12)$$

где $0 < \alpha < 1$ (это нужно для сходимости интеграла), а $f(x)$ такая же, как в интеграле (9), причем $f(a) \neq 0$ (в противном случае надо сначала несколько раз произвести интегрирование по частям). Мы ограничимся выводом лишь главного члена асимптотического разложения интеграла (12) при $\nu \rightarrow \infty$. Для этого представим сначала $I(\nu)$ в виде

$$I(\nu) = \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(a) e^{i\nu x} dx + \int_a^b (x-a)^{\alpha} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} e^{i\nu x} dx.$$

Так как во втором интеграле подынтегральная функция уже непрерывна, то с помощью интегрирования по частям легко доказать, что он равен $O\left(\frac{1}{\nu}\right)$. В первом же интеграле замена $x = a + \frac{t}{\nu}$ дает

$$f(a) \int_0^{\nu(b-a)} t^{\alpha-1} \nu^{1-\alpha} e^{i a \nu t} e^{i t} \frac{dt}{\nu} = f(a) e^{i a \nu} \nu^{-\alpha} \int_0^{\nu(b-a)} t^{\alpha-1} e^{i t} dt.$$

Последний интеграл при $\nu \rightarrow \infty$ стремится к интегралу $\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{it} dt$, который, как можно показать, равен $e^{i\pi\alpha/2}\Gamma(\alpha)$.

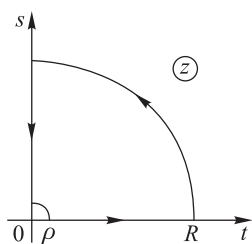


Рис. 55

Для доказательства надо рассмотреть интеграл

$$J = \oint_{(L_{R\rho})} \exp [iz + (\alpha - 1) \ln z] dz$$

по замкнутому контуру, показанному на рис. 55, в комплексной плоскости $z = t + is$. По теореме Коши п. 3.2 $J = 0$. При $\rho \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ соответствующие интегралы по дугам окружностей стремятся к нулю в силу оценки (2.3) и леммы Жордана п. 4.4. Поэтому в пределе получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp [it + (\alpha - 1) \ln t] dt &= - \int_0^{\infty} \exp [i \cdot is + (\alpha - 1) \ln is] i ds = \\ &= i \int_0^{\infty} e^{-s} e^{i(\alpha-1)\pi/2} s^{\alpha-1} ds = e^{i\pi\alpha/2} \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Подводя итог, получаем окончательно

$$I(\nu) = f(a) e^{i\pi\alpha/2} \Gamma(\alpha) e^{ia\nu} \nu^{-\alpha} + o(\nu^{-\alpha}) \quad (\nu \rightarrow \infty) \quad (13)$$

(продумайте!) Нетрудно показать, что вместо $o(\nu^{-\alpha})$ здесь можно написать $O(\nu^{-1})$. По поводу дальнейших членов разложения см. [52].

Полученные результаты можно применить к более общему интегралу

$$I_1(\nu) = \int_a^b f(x) e^{i\nu\varphi(x)} dx$$

с непрерывными функциями f , φ и φ' . Если $\varphi'(x) > 0$ ($a \leq x \leq b$), то можно сделать замену $\varphi(x) = y$, в силу которой

$$I_1(\nu) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi^{-1}(y)) \varphi'^{-1}(y) e^{i\nu y} dy, \quad (14)$$

где под φ^- понимается функция, обратная к φ (т.е. $x = \varphi^-(y)$). Получился интеграл типа (9), для которого можно пользоваться разложением (11). Ограничиваясь первым членом, получим при $\nu \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned} I_1(\nu) &= \frac{i}{\nu} [e^{i\nu y} f(\varphi^-(y)) \varphi'^-(y)]_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) = \\ &= \frac{i}{\nu} \left[e^{i\nu \varphi(x)} \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \right]_b^a + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \end{aligned}$$

(проверьте!).

Та же формула получается, если $\varphi'(x) < 0$ ($a \leq x \leq b$). Если же $\varphi(x)$ имеет при $a \leq x \leq b$ по крайней мере одну стационарную точку, то формула принципиально меняется; мы сейчас покажем, что старший член асимптотического разложения $I_1(\nu)$ определяется поведением функций f и φ именно в этих точках. Для этого заметим прежде всего, что с помощью разбиения интервала интегрирования на части можно перейти к случаю, когда на таком интервале (концы которого мы опять обозначим через a, b) имеется лишь одна стационарная точка функции $\varphi(x)$, причем в конце интервала. Мы предположим для определенности, что $\varphi'(a) = 0$, $\varphi'(x) > 0$ ($a < x \leq b$), $\varphi''(a) > 0$; прочие случаи разбираются аналогично. Тогда замена $y = \varphi(x)$ вблизи точки $x = a$, с точностью до малых высшего порядка, имеет вид $y = \varphi(a) + \frac{\varphi''(a)}{2} (x - a)^2$, откуда

$$\varphi^-(y) = a + \sqrt{\frac{2}{\varphi''(a)}(y - \varphi(a))}, \quad \varphi'^-(y) = [2\varphi''(a)(y - \varphi(a))]^{-1/2}.$$

Поэтому интеграл (14) имеет тип (12), и формула (13) дает

$$\begin{aligned} I_1(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{2\varphi''(a)}} f(\varphi^-(\varphi(a))) e^{i\pi/4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{i\varphi(a)\nu} \nu^{-1/2} + o(\nu^{-1/2}) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\varphi''(a)}} f(a)(1+i) e^{i\varphi(a)\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right). \end{aligned}$$

И здесь вместо $o\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)$ на самом деле можно поставить $O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)$.

4. Интеграл с параметром в вещественном показателе. Перейдем теперь к интегралам вида

$$I(\nu) = \int_a^b f(x) e^{\nu \varphi(x)} dx \quad (\nu \rightarrow \infty) \quad (15)$$

с вещественными непрерывными функциями f и φ . Естественно, что при большом ν наиболее существенными оказываются те x , при ко-

торых $\varphi(x)$ достигает наибольшего на интервале $a \leq x \leq b$ значения (продумайте это!). Как и в конце п. 3, можно считать, что такое значение x только одно и притом в конце интервала интегрирования. Пусть для определенности $\varphi(a) > \varphi(x)$ ($a < x \leq b$), причем

$$\varphi(x) - \varphi(a) \sim -k(x-a)^\alpha \quad (k, \alpha > 0, x \rightarrow a+0) \quad (16)$$

и $f(a) \neq 0$. Заменяя, подобно п. 2, в интеграле (15) $f(x)$ на $f(a)$, а $\varphi(x)$ на его выражение из (16), получим при $\nu \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} I(\nu) &\sim \int_a^b f(a) e^{\nu[\varphi(a) - k(x-a)^\alpha]} dx = |k\nu(x-a)^\alpha = y| = \\ &= f(a) e^{\nu\varphi(a)} \int_0^{k\nu(b-a)^\alpha} e^{-y} (k\nu)^{-1/\alpha} \alpha^{-1} y^{1/\alpha-1} dy \sim \\ &\sim \frac{f(a)}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{\nu\varphi(a)} (k\nu)^{-1/\alpha}. \quad (17) \end{aligned}$$

Законность указанных замен вытекает из того, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_{a+\varepsilon}^b f(x) e^{\nu\varphi(x)} dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \cdot \exp \left[\nu \max_{a+\varepsilon \leq x \leq b} \varphi(x) \right],$$

т.е. получается выражение значительно меньшее, чем правая часть (17), а потому основной вклад в интеграл (15) дает $\int_a^{a+\varepsilon}$. Эту законность

можно обосновать и с помощью более тщательного математического анализа, проведенного в специальной литературе. Если $\varphi(x)$ достигает наибольшего значения при $x = b$, причем $\varphi(x) - \varphi(b) \sim -k(b-x)^\alpha$ ($x \rightarrow b-0$), то в правой части (17) надо заменить a на b . Если наибольшее значение достигается во внутренней точке с интервала интегрирования, причем $\varphi(x) - \varphi(c) \sim -k|x-c|^\alpha$ ($x \rightarrow c$), то с помощью разбиения интеграла на два получаем, что в правой части (17), где вместо a надо поставить c , появится добавочный множитель 2.

В качестве примера рассмотрим асимптотическое поведение гамма-функции

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = \int_0^\infty \exp \left\{ p \left[-\frac{x}{p} + \frac{p-1}{p} \ln x \right] \right\} dx$$

при $p \rightarrow \infty$. Так как квадратная скобка принимает максимальное значение при $x = p-1$ (почему?), то сделаем предварительную замену

переменной $x = (p-1)t$, чтобы зафиксировать точку максимума. Получится

$$\Gamma(p) = (p-1)^p \int_0^{\infty} \exp \{ (p-1)[-t + \ln t] \} dt.$$

Обозначив $\varphi(t) = -t + \ln t$, получим, что $\varphi'(1) = 0$, $\varphi''(1) = -1$, т. е. $\varphi(t) - \varphi(1) \sim -\frac{1}{2}(t-1)^2$ ($t \rightarrow 1$), а потому по соответственно измененной формуле (17) получаем

$$\Gamma(p) \sim (p-1)^p \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{(p-1)(-1)} \left[\frac{1}{2}(p-1)\right]^{-1/2} \sim \sqrt{2\pi} p^{p-1/2} e^{-p}.$$

(Обратите внимание, что $(p-1)^p$ при $p \rightarrow \infty$ эквивалентно не p^p , как это может сначала показаться, а p^p/e .) Эту важную формулу иногда записывают также в виде

$$\begin{aligned} n! = \Gamma(n+1) &\sim \sqrt{2\pi} (n+1)^{n+1/2} e^{-(n+1)} \sim \\ &\sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (18)$$

и называют *формулой Стирлинга* по имени шотландского математика Д. Стирлинга (1692–1770), получившего в 1730 г. асимптотическое разложение для $\ln(n!)$ (это был первый случай применения асимптотически сходящегося ряда), из которого сразу следует формула (18). В 1812 г. Лаплас получил более полную формулу

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \dots \right),$$

из которой, в частности, видно, что формула (18) имеет относительную погрешность $\approx \frac{1}{12n}$, тогда как добавление в правой части множителя $1 + \frac{1}{12n}$ понижает эту погрешность до $\frac{1}{288n^2}$.

В некоторых случаях удается применить описанный метод к интегралам, более общего вида, чем (15), у которых функции f и φ зависят, кроме x , также от ν . Покажем это на примере интеграла

$$K_\nu(a) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\nu x - a \operatorname{ch} x) dx \quad (0 < a = \text{const}, \nu \rightarrow \infty),$$

играющего важную роль в теории функций Бесселя. Так как показатель достигает максимума при значении $x = \operatorname{arsh} \frac{\nu}{a}$, зависящем от ν , то для нормировки совершим замену $x = \operatorname{arsh} \frac{\nu}{a} + t$, что даст (проверьте!)

$$K_\nu(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + a^2}}{a} \right)^\nu \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-a^2 \operatorname{ch} t}{\nu + \sqrt{\nu^2 + a^2}} \right) e^{\nu(t - e^t)} dt. \quad (19)$$

Получился интеграл типа (15), у которого, однако, функция f зависит также от ν . Но характер этой функции при большом ν (продумайте его!) дает возможность применить описанную методику и к интегралу (19), что дает при $\nu \rightarrow \infty$

$$K_\nu(a) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + a^2}}{a} \right)^\nu \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-\nu} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1/2} \sim \sqrt{\pi} (ea)^{-\nu} (2\nu)^{\nu-1/2}.$$

Покажем еще, как находить дальнейшие члены асимптотического разложения (17), считая для простоты $a = 0$, $\varphi(a) = 0$, $\alpha = 1$, $k = 1$ (этих условий легко добиться с помощью простых замен). Пусть вблизи $x = 0$ имеют место разложения

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{\alpha_k} \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots \rightarrow \infty, \alpha_1 \neq 0),$$

$$\varphi(x) = -x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{\beta_k} \quad (1 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots \rightarrow \infty).$$

Сделав в интеграле (15) замену $\nu x = s$, получим

$$I(\nu) = \int_0^{\nu b} \nu^{-(\alpha_1+1)} s^{\alpha_1} e^{-s} \left[a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \nu^{-(\alpha_k-\alpha_1)} s^{\alpha_k-\alpha_1} \right] \times \\ \times \exp \sum_{k=1}^{\infty} b_k \nu^{-(\beta_k-1)} s^{\beta_k} ds. \quad (20)$$

Если разложить экспоненту в ряд Маклорена, раскрыть скобки (в том числе квадратные скобки в (20)) и привести подобные члены, мы получим выражение вида

$$I(\nu) = \int_0^{\nu b} \nu^{-(\alpha_1+1)} s^{\alpha_1} e^{-s} \left(a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \nu^{-\gamma_k} s^{\delta_k} \right) ds, \quad (21)$$

где

$$0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \dots \rightarrow \infty, \quad \delta_k \geq \gamma_k.$$

(Чтобы фактически получить разложение (21), можно задаться показателем степени ν , до которого будет производиться асимптотическое разложение, и все появляющиеся при вычислениях члены с высшими степенями отбрасывать; см. примеры в ЛВМ, п. XVII.12. Можно также, совершив в преобразованном произведении квадратной скобки и экспоненты в (20), равном $f\left(\frac{s}{\nu}\right) \left(\frac{s}{\nu}\right)^{-\alpha_1} \exp \left\{ \varphi\left(\frac{s}{\nu}\right) + \frac{s}{\nu} \right\}$, замену $s = t^k$, после которой все показатели при t станут целыми, применить разложение по t в ряд Маклорена.) Интеграл (21) надо разбить на сумму, в каждом слагаемом заменить верхний предел на ∞ , что не влияет на асимптотическое разложение (почему?); это даст окончательно

$$I(\nu) \sim a_1 \Gamma(\alpha_1 + 1) \nu^{-(\alpha_1+1)} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \Gamma(\alpha_1 + \delta_k + 1) \nu^{-(\alpha_1+\gamma_k+1)}.$$

5. Метод перевала. Функция $f(x)$ в пп.3 и 4 могла принимать и комплексные значения; это не сказывается на полученных там асимптотических формулах. Однако если $\varphi(x)$ принимает комплексные значения, то положение существенно осложняется, так как точка x_0 , в которой $|e^{\nu\varphi(x)}|$, т.е. $e^{\nu \operatorname{Re} \varphi(x)}$, принимает наибольшее значение, не обязана быть стационарной для $\operatorname{Im} \varphi(x)$, т.е. вблизи x_0 значения $e^{\nu\varphi(x)}$ могут сильно осциллировать и потому взаимно уничтожаться, не давая главный вклад в асимптотическое выражение для интеграла. Поэтому при вычислении асимптотического выражения для комплексного интеграла

$$I(\nu) = \int_{(L)} f(z) e^{\nu\varphi(z)} dz \quad (22)$$

нельзя просто записать контур (L) в параметрическом виде $z = z(t)$, перейти к переменной интегрирования t и затем автоматически применить результаты пп.3 и 4. Однако если f и φ — однозначные аналитические функции, то можно предварительно воспользоваться вытекающей из п.3.2 возможностью деформировать контур (L) без изменения значения интеграла (22).

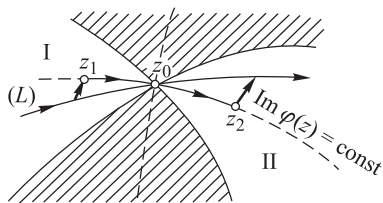


Рис. 56

Допустим, что контур (L) удалось подобрать таким, чтобы он прошел через точку z_0 , в которой $\varphi'(z_0) = 0$, причем $|e^{\varphi(z)}|$ достигает в z_0 наибольшего на (L) значения. Схема окрестности точки z_0 при условии $\varphi''(z_0) \neq 0$ показана на рис.56, где заштрихована область $|e^{\varphi(z)}| > |e^{\varphi(z_0)}|$, т.е. $\operatorname{Re} \varphi(z) > \operatorname{Re} \varphi(z_0)$, и пунктиром показана линия $\operatorname{Im} \varphi(z) = \operatorname{Im} \varphi(z_0)$. При построении этой области надо представить $\varphi(z)$ вблизи z_0 в виде $\varphi(z) = \varphi(z_0) + \frac{\varphi''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots$, а затем записать: $z = x + iy$, $\varphi''(z_0) = a + ib$; тогда последнее неравенство, с точностью до членов высшего порядка, можно переписать в виде $\operatorname{Re} \{ (a + ib)[(x - x_0) + i(y - y_0)]^2 \} > 0$, т.е. $a(x - x_0)^2 - 2b(x - x_0)(y - y_0) - a(y - y_0)^2 > 0$. (Продумайте эту схему и постройте аналогичную схему для случая $\varphi''(z_0) = 0$.) Мы будем предполагать, что контур (L) , проходя через «перевал» z_0 , переходит в окрестности этой точки из «ложбины» I , т.е. одной из областей, где $\operatorname{Re} \varphi(z) < \operatorname{Re} \varphi(z_0)$, в другую «ложбину» II ; поэтому метод получения асимптотической формулы на основе деформации исходного контура интегрирования в контур, обладающий описанным свойством, называется *методом перевала*.

Деформируем малый участок контура (L) , показанного на рис.56 жирно, так, чтобы после деформации часть контура прошла через перевал по линии $\operatorname{Im} \varphi(z) = \operatorname{Im} \varphi(z_0)$. (В силу п.2.4 эта линия в каждой

своей точке направлена, если идти от z_0 , по вектору $-\text{grad Re } \varphi(z)$, а потому и по вектору $-\text{grad } |e^{\varphi(z)}|$; поэтому упомянутое сейчас деформирование называется *методом наибоыстрейшего спуска*.) Если дугу $z_1 z_0 z_2$ (рис. 56) представить в параметрическом виде $z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$), то соответствующую часть интеграла (22) можно представить в виде

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) e^{\nu [\text{Re } \varphi(z(t)) + i \text{Im } \varphi(z(t))]} dt = e^{i\nu \text{Im } \varphi(z_0)} \int_a^b f_1(t) e^{\nu \varphi_1(t)} dt, \quad (23)$$

где обозначено $f_1(t) = f(z(t)) z'(t)$, $\varphi_1(t) = \text{Re } \varphi(z(t))$. К последнему интегралу можно при вещественном $\nu \rightarrow \infty$ применить методику п. 4, а в ряде случаев получить и его полное асимптотическое разложение. Оно и будет служить разложением интеграла (22), так как аналогично п. 4 можно доказать, что интеграл по (L) с выброшенной дугой $z_1 z_0 z_2$ при $\nu \rightarrow \infty$ будет значительно меньше каждого члена этого разложения.

Ограничимся случаем $\varphi''(z_0) \neq 0$, $f(z_0) \neq 0$ и найдем первый член разложения интеграла (22) при $\nu \rightarrow \infty$. Так как в окрестности z_0 будет $\varphi(z) = \varphi(z_0) + \frac{\varphi''(z_0)}{2} (z - z_0)^2 + \dots$, а вдоль дуги $z_1 z_0 z_2$ меняется только $\text{Re } \varphi(z)$ и притом убывает от z_0 , то параметр t можно ввести по формуле $\varphi(z) = \varphi(z_0) - t^2$, откуда $z = z_0 + \sqrt{\frac{-2}{\varphi''(z_0)}} t + \dots$, где для корня берется то из двух значений, при котором точка z переходит из ложбины I в ложбину II , когда t , возрастая, переходит через нуль. Применяя к правой части (23) соответственно измененную формулу (17), получим

$$\begin{aligned} I(\nu) &\sim e^{i\nu \text{Im } \varphi(z_0)} \cdot 2 \frac{f_1(0)}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{\nu \varphi_1(0)} \left(-\frac{\varphi_1''(0)}{2} \nu\right)^{-1/2} = \\ &= e^{i\nu \text{Im } \varphi(z_0)} f(z_0) \sqrt{\frac{-2}{\varphi''(z_0)}} \sqrt{\pi} e^{\nu \text{Re } \varphi(z_0)} \nu^{-1/2} = f(z_0) \sqrt{\frac{-2\pi}{\varphi''(z_0) \nu}} e^{\nu \varphi(z_0)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Можно доказать, что это асимптотическое равенство допускает следующее уточнение:

$$I(\nu) = \left[f(z_0) + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right] \sqrt{\frac{-2\pi}{\varphi''(z_0) \nu}} e^{\nu \varphi(z_0)},$$

в котором указан порядок ошибки. Эта формула справедлива и в случае $f(z_0) = 0$.

В качестве примера рассмотрим выражение

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \oint_{(L)} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - \mu)^{n+1}} dz, \quad (25)$$

где (L) — какой-либо замкнутый контур, обходящий вокруг точки $z = \mu$ в положительном направлении; можно показать, что P_n — это многочлены Лежандра (см., например, ЛВМ, п. XVII.20). Будем считать, что μ — постоянное вещественное число, причем $|\mu| < 1$, так что можно обозначить $\mu = \cos \theta$; где $0 < \theta < \pi$.

Если контур (L) выбрать симметричным относительно оси x и обозначить интеграл в (24) по верхней половине через $A + iB$, то интеграл по нижней половине будет равен $-(A - iB) = -A + iB$ (почему?), а весь интеграл будет равен $2iB$; значит, при интегрировании можно ограничиться верхней половиной контура, а от результата взять мнимую часть. Представим интеграл в виде (22), где $f(z) = \frac{1}{z - \mu}$, $\nu = n$, $\varphi(z) = \operatorname{Ln} \frac{z^2 - 1}{z - \mu}$, причем надо взять какую-либо однозначную ветвь этой функции, имеющей точки разветвления при $z = 1, -1, \mu$. Так как

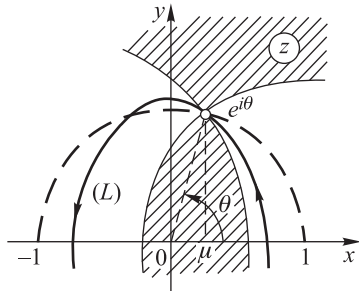


Рис. 57

$\varphi'(z) = \frac{z^2 - 2\mu z + 1}{(z^2 - 1)(z - \mu)}$, то $|\varphi(z)|$ имеет точки перевала (т.е. точки, где $\varphi'(z) = 0$) при $z = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1} = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = e^{\pm i\theta}$. Легко проверить, что линия $\operatorname{Re} \varphi(z) = \operatorname{Re} \varphi(e^{i\theta})$ состоит из двух окружностей с центрами в точках ± 1 , проходящих через точку перевала $z_0 = e^{i\theta}$ (рис. 57). Так как $\varphi''(z_0) = (i e^{i\theta} \sin \theta)^{-1}$ (проверьте!), то формула (24) дает асимптотическое представление при $n \rightarrow \infty$

$$P_n(\cos \theta) \sim \frac{1}{2^{n+1}\pi i} 2i \operatorname{Im} \left[\frac{1}{e^{i\theta} - \cos \theta} \sqrt{-\frac{2\pi}{n}} i e^{i\theta} \sin \theta \left(\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{i\theta} - \cos \theta} \right)^n \right].$$

Так как выписанный радикал должен иметь отрицательную вещественную часть (почему?), то он равен $\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \sin \theta e^{i(3\pi/4 + \theta/2)}$. Упрощая, получим окончательно при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &\sim \frac{1}{2^n \pi} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{i \sin \theta} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \sin \theta e^{i(3\pi/4 + \theta/2)} (2e^{i\theta})^n \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \sin \left(n\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Из доказательства видно, что это асимптотическое равенство расшифровывается как

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \sin \left(n\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + O(n^{-3/2}),$$

а не $\sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \sin \left(n\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ (продумайте разницу!). Подобное уточнение относится и к другим случаям, когда главный член асимптотического выражения имеет нули.

Рассмотрим еще пример:

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{(L)} e^{ix \sin z - i\nu z} dz, \quad (26)$$

где $x > 0$ и ν — вещественные параметры, а (L) — произвольный контур, «идуший от ∞i в $\pi - \infty i$ » (рис. 58), т.е. имеющий асимптоты $x = 0$ и $x = \pi$. Нетрудно проверить, что интеграл (26) сходящийся (причем с весьма большой скоростью) и не зависит от конкретного выбора линии (L) . Функция $H_{\nu}^{(1)}(x)$ называется *функцией Хэнкеля 1-го рода*; можно доказать, что она равна $J_{\nu}(x) + iY_{\nu}(x)$, где J и Y — так называемые функции Бесселя соответственно, 1-го и 2-го рода. Рассмотрим поведение функции (26) при постоянном ν и $x \rightarrow \infty$. Для этого в формуле (26) надо заменить ν на x , после чего обозначить $f(z) = e^{-izx}$, $\varphi(z) = i \sin z$. Точкой перевала служит $z = \frac{\pi}{2}$, и применение формулы (24), которое мы предоставляем читателю, дает

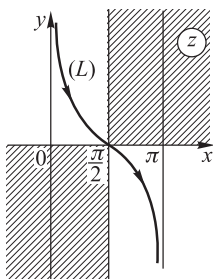


Рис. 58

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \exp \left[i \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + O \left(\frac{1}{x} \right) \right\} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (27)$$

Отсюда, в частности, получаются и асимптотические формулы для функций Бесселя при $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} J_{\nu}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}), \\ Y_{\nu}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}). \end{aligned} \quad (28)$$

Глава III

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление, созданное в конце прошлого века английским физиком О. Хевисайдом (1850–1925) без достаточного обоснования, было позже обосновано на базе теории аналитических функций. Оно непосредственно связано с теорией преобразования Фурье, краткие сведения о которой можно найти, в частности, в ЛВМ, § XVII.5; его поэтому полезно (но не обязательно!) читателю просмотреть. Сейчас операционное исчисление широко применяется в прикладной математике, в технической физике и в инженерных дисциплинах, по нему имеется целый ряд руководств; укажем, в частности, книги [34, 36, 47, 50, 54, 75], а также соответствующие главы книг [3, 66, 102] и других.

§1. Общая теория

1. Преобразование Лапласа. Операционное исчисление основано на так называемом преобразовании Лапласа. Пусть задана (вообще говоря, комплексная) функция $f(t)$ вещественного аргумента t , $0 \leq t < \infty$. Ее *лаплас-образом* называется функция

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1)$$

от комплексного переменного p . Формула (1) и определяет *преобразование Лапласа*, т.е. оператор (см. сноску на с. 19) специального вида, для которого функция $f(t)$ является прообразом (*оригиналом*), а функция $F(p)$ — образом (*изображением*). Эту связь между прообразом и образом мы будем в этой главе записывать так: $f(t) \rightarrow F(p)$, имея в виду всегда преобразование Лапласа; применяются также записи $f(t) = \pm F(p)$ и другие.

Так как интеграл (1) несобственный из-за бесконечного верхнего предела, то для его сходимости нужно принять некоторые меры

предосторожности. Мы будем считать, что *функция $f(t)$ конечна при конечных t* (достаточно требовать абсолютную интегрируемость), а *при $t \rightarrow \infty$ либо остается конечной, либо, если растет по модулю, то не быстрее экспоненты*. В общем случае можно написать

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}, \quad (2)$$

где M и s_0 — некоторые постоянные. Функции, растущие при $t \rightarrow \infty$ быстрее экспоненты, конечно, имеются, например e^{t^2} , однако практическое значение их пока весьма, невелико; таким образом, ограничение (2) не является обременительным.

Если представить $p = s + ir$, то легко проверить, что при условии (2) и при $s > s_0$ интеграл (1) абсолютно сходится; в самом деле, тогда

$$|e^{-pt} f(t)| = |e^{-st} e^{-irt} f(t)| = e^{-st} |f(t)| \leq M e^{-(s-s_0)t}, \quad (3)$$

а интеграл от затухающей экспоненты сходится. Таким образом, функция $F(p)$ определена, во всяком случае, в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. В этом состоит существенное отличие преобразования Лапласа от преобразования Фурье: там требовалось, чтобы преобразуемая функция обращалась в нуль на бесконечности, а здесь добавление гасящего множителя e^{-st} позволяет преобразовывать функции, экспоненциально растущие на бесконечности.

Для разных преобразов значений s_0 , вообще говоря, различны. Поэтому если в рассмотрении участвует несколько преобразов, то можно просто считать, что значение $\operatorname{Re} p$ достаточно велико, не уточняя, насколько именно, если этого не требуется.

Можно проверить, что при $\operatorname{Re} p > s_0$ интеграл (1), зависящий от p как от параметра, имеет производную по p , которая вычисляется по известному правилу Лейбница (см. сноску на с. 80; то, что теперь параметр комплексный, не играет при этом роли).

Для этого достаточно заметить, что если p меняется в малой окрестности какого-либо значения, то для всех таких p можно провести, единую оценку вида (3), подставив вместо s наименьшее значение из этой окрестности; значит, интеграл (1), а также и интеграл, полученный после дифференцирования по p , сходятся в этой окрестности правильно¹⁾, чем и обосновывается законность дифференцирования.

Итак, $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ является однозначной аналитической функцией.

Из формулы (1) видно, что если складываются преобразы, то складываются и образы; если преобраз умножить на константу, то и образ

¹⁾ Говорят, что интеграл $\int_a^\infty f(t; p) dt$ сходится правильно, если $\int_a^\infty \max_p |f(t; p)| dt < \infty$. О свойствах таких интегралов см. ЛВМ, п. XIV.5.

умножится на ту же константу. Другими словами, *преобразование Лапласа представляет собой линейный оператор*. Отсюда вытекает, что если прообраз, а потому и образ зависят от некоторого параметра λ , то производная по параметру от прообраза преобразуется в производную по параметру от образа.

2. Образы простых функций. 1. Образ экспоненты вычисляем непосредственно:

$$e^{at} \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt = \frac{e^{(-p+a)t}}{-p+a} \Big|_{t=0}^{\infty} = 0 - \frac{1}{-p+a} = \frac{1}{p-a}; \quad (4)$$

на верхнем пределе получается нуль, так как в п. 1 мы видели, что $\operatorname{Re} p$ можно считать достаточно большой, а $e^{-\infty} = 0$.

В частности, полагая $a = 0$, видим, что

$$1 \rightarrow \frac{1}{p}.$$

2. В левую и правую части (4) a входит как параметр; производя дифференцирование по параметру (см. конец п. 1), получим

$$t e^{at} \rightarrow \frac{1}{(p-a)^2}, \quad t^2 e^{at} \rightarrow \frac{1 \cdot 2}{(p-a)^3}, \dots, \quad t^n e^{at} \rightarrow \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

В частности,

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (5)$$

Эта формула легко обобщается на любые вещественные $n > -1$ (это неравенство нужно для интегрируемости прообраза при $t = 0$):

$$t^n \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt = |pt = \tau| = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \frac{\tau^n}{p^n} \frac{d\tau}{p} = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} \quad (6)$$

(см. п. II.3.18). При замене переменной интегрирования можно было считать

$p > 0$ вещественным; однако образ, являющийся аналитической функцией и равный правой части (6) при вещественных p , должен равняться ей и при мнимых p (почему?).

3. Если в формуле (4) считать $a = \alpha + i\beta$ комплексным, то получаем

$$e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t \rightarrow \frac{1}{p - \alpha - i\beta} = \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} + i \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Отсюда легко вывести, что образом $F_1(p)$ первого слагаемого в левой части служит первое слагаемое $\Phi_1(p)$ в правой части, аналогично со вторыми слагаемыми $F_2(p)$ и $\Phi_2(p)$.

В самом деле, в силу линейности преобразования Лапласа образом левой части служит $F_1(p) + iF_2(p)$, так что $F_1(p) + iF_2(p) \equiv \Phi_1(p) + i\Phi_2(p)$. Но все выписанные функции принимают при вещественных p вещественные значения (почему?), так что при вещественных p получаем $F_1(p) = \Phi_1(p)$, $F_2(p) = \Phi_2(p)$; однако аналитические функции, совпадающие при вещественных p , совпадают тождественно (см. п. II.3.6), что и требовалось доказать.

Итак, получаем

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \cos \beta t &\rightarrow \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}, \\ e^{\alpha t} \sin \beta t &\rightarrow \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

4. Пусть $f(t)$ периодична с периодом $T > 0$; тогда ее образ можно вычислить по формуле (проверьте!)

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t) dt = |nT + \tau = t| = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-pnt} e^{-p\tau} f(\tau + nT) d\tau = \\ &= \int_0^T e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-pT})^n = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-p\tau} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

5. Образ дельта-функции $\delta(t)$ ¹⁾. Так как интегрирование в (1) начинается от значения $t = 0$, где сосредоточена вся особенность дельта-функции, то требуется уточнить, какая часть этой особенности интегрируется. Будем считать, что особенность интегрируется полностью, т.е. в условной записи, нижним пределом интегрирования служит -0 (или, что то же, вместо $\delta(t)$ берется $\delta(t - 0)$). Тогда получим

$$\delta(t) \rightarrow \int_{-0}^{+0} e^{-pt} \delta(t) dt + \int_{+0}^{\infty} e^{-pt} \delta(t) dt = 1 \cdot \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt + 0 = 1. \quad (8)$$

Соберем полученные формулы перехода, которые в приложениях встречаются чаще всего, в маленькую таблицу:

¹⁾ См. сноску на с. 23.

$f(t)$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} \quad (n > -1)$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}} \quad (n > -1)$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$
$\delta(t)$	1

В каждом курсе операционного исчисления имеются таблицы, по которым можно найти образы, а также прообразы разнообразных функций. Наиболее полные таблицы имеются в книгах [35, 37].

3. Основные свойства преобразования Лапласа. 1. Пусть $f(t) \rightarrow F(p)$. Тогда при постоянном $k > 0$

$$\begin{aligned}
 f(kt) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(kt) dt &= |kt = \tau| = \int_0^{\infty} e^{-p(\tau/k)} f(\tau) \frac{d\tau}{k} = \\
 &= \frac{1}{k} \int_0^{\infty} e^{-(p/k)t} f(t) dt = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)
 \end{aligned}$$

(проверьте выкладки!).

2. Пусть $f(t) \rightarrow F(p)$. Тогда при постоянном τ

$$\begin{aligned}
 f(t-\tau) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt &= |t-\tau = s| = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-p(s+\tau)} f(s) ds = \\
 &= \int_{-\tau}^0 e^{-pt} e^{-p\tau} f(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-p\tau} f(t) dt = e^{-p\tau} F(p) + e^{-p\tau} \int_{-\tau}^0 e^{-pt} f(t) dt.
 \end{aligned}$$

Полученный результат имеет особенно простой вид, если $\tau > 0$ и $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$; тогда получаем

$$f(t-\tau) \rightarrow e^{-p\tau} F(p).$$

В такой форме этот результат называется *теоремой запаздывания*, так как независимая переменная t в операционном исчислении обычно трактуется как время, а тогда $f(t - \tau)$ означает тот же закон во времени, что $f(t)$, но включенный на τ позже.

3. Пусть $f(t) \rightarrow F(p)$. Тогда при любом постоянном комплексном c

$$e^{ct} f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{ct} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-c)t} f(t) dt = F(p-c).$$

Этот результат называется *теоремой смещения*.

4. Пусть $f(t) \rightarrow F(p)$. Тогда при помощи интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} f'(t) &\rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) = \\ &= e^{-pt} f(t) \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} (-p) dt = pF(p) - f(+0). \end{aligned} \quad (9)$$

Результат подстановки верхнего предела равен нулю, так как $f(t)$, если и растет, то не быстрее экспоненты, а в п.1 мы видели, что вещественную часть p можно считать как угодно большой. В правой части мы написали $f(+0)$, так как функция $f(t)$, вообще говоря, может при $t = 0$ иметь скачок.

Повторяя дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} f''(t) &= [f'(t)]' \rightarrow p[pF(p) - f(+0)] - f'(+0) = \\ &= p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0), \end{aligned} \quad (10)$$

вообще

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0).$$

Особенно простой вид приобретает формула (9), если $f(+0) = 0$; тогда $f'(t) \rightarrow pF(p)$; аналогичное замечание относится к формулам для последующих производных.

Возможна следующая трактовка формулы (9), полезная для выяснения сути дела. Будем считать, что преобразуемые функции $f(t)$ определены на всей оси t (не только при $t \geq 0$) и $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$; кроме того, пусть в основной формуле (1) нижним пределом служит $-\infty$ или, что равносильно, -0 . Тогда формула (9) всегда имеет вид $f'(t) \rightarrow pF(p)$. Однако если $f(+0) \neq 0$ (и конечно), то $f'(t)$ имеет δ -слагаемое $f(+0)\delta(t)$. Если на минуту обозначить через $[f'(t)]$ функцию $f'(t)$ с отброшенным этим слагаемым, то

$$pF(p) \rightarrow f'(t) = [f'(t)] + f(+0)\delta(t).$$

Отсюда в силу примера 5 п. 2 (где теперь не нужно уточнять, какая часть особенности дельта-функции интегрируется) получаем, что образом функции $[f'(t)]$ — а это по существу и есть функция, рассмотренная в формуле (9), — служит $pF(p) - f(+0)$. При рассмотрении $f''(t)$ появится функция $\delta'(t)$ и т. д. Если не бояться этих функций, то картина в целом упрощается, хотя некоторые из излагаемых в дальнейшем фактов приходится продумать заново.

Впрочем, мы далее не будем пользоваться такой трактовкой.

Мы предоставляем читателю доказать, что если $f(t) \rightarrow F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{p} F(p). \quad (11)$$

5. Дифференцируя обе части формулы (1) по p , получаем (проверьте!)

$$tf(t) \rightarrow -F'(p).$$

Отсюда, если функция $\frac{f(t)}{t}$ конечна или хотя бы абсолютно интегрируема при $t = 0$ и если на минуту обозначить ее образ через $\Phi(p)$, то $f(t) = t \frac{f(t)}{t} \rightarrow -\Phi'(p)$, т. е.

$$\Phi'(p) = -F(p), \quad \text{и потому} \quad \Phi(p) = - \int F(p) dp.$$

Но так как из (1) видно, что образ любой (необобщенной) функции при вещественном $p = +\infty$ обращается в нуль, то получаем окончательно

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow - \int_{+\infty}^p F(q) dq. \quad (12)$$

6. *Сверткой* двух функций $f_1(t), f_2(t)$, заданных при $0 \leq t < \infty$, называется новая функция от t , определенная формулой

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (0 \leq t < \infty). \quad (13)$$

(Следует иметь в виду, что значение этой функции при любом $t > 0$ зависит от значений свертываемых функций на всем интервале $0 \leq \tau \leq t$, так что точнее было бы писать не $f_1(t) * f_2(t)$, а $(f_1 * f_2)(t)$; однако это практически не очень удобно.)

Если в правой части (12) совершить замену переменной $\tau = t - \tau_1$, то получим (проверьте!), что

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t). \quad (14)$$

Можно было бы проверить, что и прочие обычные свойства умножения выполняются и для свертывания; впрочем, это будет вскоре ясно из других соображений.

В качестве примера свернем t^2 с t :

$$t^2 * t = \int_0^t \tau^2(t - \tau) d\tau = \left(t \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4} \right) \Big|_{\tau=0}^t = \frac{1}{12} t^4.$$

Пусть теперь $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$; тогда

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &\rightarrow \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right) dt = \\ &= \int_0^\infty dt \int_0^t e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Переставляя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &\rightarrow \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t - \tau) dt = |t - \tau = t_1| = \\ &= \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-p\tau} e^{-pt_1} f_2(t_1) dt_1 = \\ &= \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-pt_1} f_2(t_1) dt_1 = F_1(p) F_2(p). \end{aligned}$$

Таким образом, *при свертывании прообразов, образы перемножаются*. Этим свойства умножения распространяются на свертывание, например формула (13) после перехода к образам означает обычную перестановочность умножения. Из этой же связи между свертыванием и умножением и из формулы (8) видно, что дельта-функция при свертывании играет ту же роль, что тождественная единица при умножении, т. е. свертывание с дельта-функцией оставляет любую функцию неизменной; впрочем, это легко проверить непосредственно.

Исходя из формул п. 2 и применяя доказанные здесь свойства, можно получить большое число формул перехода от прообразов к образам, однако мы не будем здесь этим заниматься.

4. Обратное преобразование Лапласа. Напомним формулы для прямого и обратного преобразований Фурье (см., например, ЛВМ, (XVII.138) и (XVII.141)):

$$\widehat{\varphi}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-irt} dt, \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(r) e^{irt} dr, \quad (15)$$

справедливые для любой абсолютно интегрируемой функции $\varphi(t)$. Чтобы их применить к преобразованию (1), обозначим $p = s + ir$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2\pi f(t) e^{-st} & (t > 0), \\ 0 & (t < 0), \end{cases} \quad (16)$$

где s фиксировано и достаточно велико (должно быть $s > s_0$, где s_0 входит в оценку (2)). Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \varphi(t) e^{-irt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-irt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2\pi f(t) e^{-st} e^{-irt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+ir)t} f(t) dt = F(s + ir). \end{aligned}$$

(Теперь видно, что обозначение (15) понадобилось, чтобы записать интеграл (1) в виде первого интеграла (14).) Поэтому из второй формулы (14) вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s + ir) e^{irt} dr = \begin{cases} 2\pi f(t) e^{-st} & (t > 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases} \quad (17)$$

Из первой строки (17) получаем, что при $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+ir)t} F(s + ir) dr. \quad (18)$$

Когда r меняется от $-\infty$ до ∞ , значение $p = s + ir$ проходит в комплексной плоскости прямую, параллельную мнимой оси; мы будем условно писать, что p меняется от $s - i\infty$ до $s + i\infty$. При этом $dp = i dr$, так что из (18) получаем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (t > 0). \quad (19)$$

Это и есть *формула обращения* для преобразования Лапласа.

Обратите внимание на то, что в правой части s — произвольное постоянное достаточно большое число. Проведенное доказательство показывает, что результат интегрирования не зависит от конкретного выбора такого s . (Докажите это независимо с помощью теоремы Коши п. II.3.2, выведя сначала из (2) оценку

$$|F(s + ir)| \leq \frac{M}{s - s_0} \quad (s > s_0)$$

Из второй формулы (17) видно, что при $t < 0$ правая часть (19) равна нулю. Отсюда на основе аналогичного свойства для преобразования Фурье¹⁾ заключаем, что при $t = 0$ правая часть (19) равна $\frac{1}{2} f(+0)$. Из доказанного вытекает также важный вывод, что не только образ по прообразу, но и прообраз по образу восстанавливаются однозначно, т. е. оператор, определенный формулой (1), является взаимно однозначным.

Отметим, что интеграл (19) может получиться расходящимся при $p = s \pm \pm i\infty$. Специальное исследование показывает, что тогда его надо понимать в смысле главного значения²⁾.

Как известно, для преобразования Фурье имеет место равенство Парсеваля³⁾ Для рассмотренных функций φ и $\widehat{\varphi}$ оно приобретает вид (проверьте!)

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s + ir)|^2 dr \quad (s \geq s_0)$$

и в такой форме иногда применяется.

Иногда приходится исходить из образа, т. е. из $F(p)$, и находить соответствующую функцию $f(t)$. При этом возникает вопрос, какие функции $F(p)$ могут служить образами. Мы видели, что функция $F(p)$ должна быть аналитической в каждой полуплоскости $\text{Re } p \geq s$ ($s > s_0$). Кроме того, из (1) и (2) можно без особого труда вывести, что если $f(t)$ — обычная (не обобщенная, т. е. не типа $\delta(t)$) функция, то в этой полуплоскости $F(p) \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$. Оказывается, что этих условий в основном и достаточно, чтобы функция $F(p)$ могла служить образом при преобразовании Лапласа. В самом деле, предположим дополнительно, что $\int_{-\infty}^{\infty} |F(s + ir)| dr < \infty$ (это условие

можно значительно ослабить), и определим функцию $f(t)$ при $t > 0$ формулой (19). Однако при $t < 0$ интеграл (19) равен нулю. (Для доказательства этого надо обозначить $t = -\omega$, $p = s - z$, перейти, как это делалось в п. II.4.4, от интегрирования по прямой к интегрированию по левой полуокружности

¹⁾ Можно показать, что если функция φ в первой формуле (14) имеет разрыв 1-го рода при $t = t_0$, то из второй формулы (14) получается $\varphi(t_0) = [\varphi(t_0 - 0) + \varphi(t_0 + 0)]/2$.

²⁾ См. сноску на с. 101.

³⁾ Это равенство имеет вид: $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(r)|^2 dr$.

плоскости z и воспользоваться леммой Жордана (II.4.22).). Значит, можно перейти к формулам (17), а оттуда с помощью (15) и (14) — к последнему равенству (16), которое и означает, что $F(p)$ — это лаплас-образ функции $f(t)$.

Рассмотрим в качестве примера функцию

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-\sqrt{p}}, \quad (20)$$

нормированную условием $\sqrt{p}|_{p=1} = 1$. Из (19) получаем прообраз

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} \frac{1}{p} e^{-\sqrt{p}} dp \quad (t > 0). \quad (21)$$

Для вычисления этого интеграла применим теорию интегрирования аналитических функций (п. II.4.4). Если плоскость p разрезать вдоль вещественной отрицательной полуоси, то подынтегральную функцию можно считать однозначной (почему?). Пусть интеграл берется сначала по контуру, показанному на рис. 59, где кривыми линиями служат окружности радиусов $R \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$. Тогда интеграл по участку I в силу (21) стремится к $2\pi i f(t)$. Интегралы по участкам II и VI в силу леммы Жордана (II.4.22) (в которой надо положить $(\omega = t, z = p - s)$ и заметить, что в ней в качестве (M_R) можно было взять лишь часть указанной там полуокружности) стремятся к нулю. Интеграл по участку IV стремится к $-2\pi i$ (докажите это, разложив экспоненты под знаком интеграла в ряды). На участках III и V , где $p = -\xi$, $0 < \xi < \infty$, будет соответственно $\sqrt{p} = i\sqrt{\xi}$ и $\sqrt{p} = -i\sqrt{\xi}$ (продумайте!), сумма соответствующих интегралов стремится к

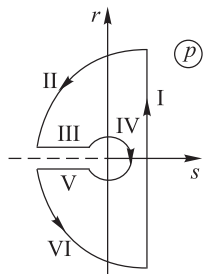


Рис. 59

$$\int_0^{\infty} e^{-t\xi} \frac{1}{-\xi} (e^{i\sqrt{\xi}} - e^{-i\sqrt{\xi}})(-d\xi) = 2i \int_0^{\infty} e^{-t\xi} \frac{\sin \sqrt{\xi}}{\xi} d\xi.$$

Но интеграл по всему контуру равен нулю; поэтому, переходя к пределу, получаем, сокращая на $2i$:

$$\pi f(t) - \pi + \int_0^{\infty} e^{-t\xi} \frac{\sin \sqrt{\xi}}{\xi} d\xi = 0. \quad (22)$$

Чтобы вычислить интеграл $I(t)$ в левой части, продифференцируем его по параметру t :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= - \int_0^{\infty} e^{-t\xi} \sin \sqrt{\xi} d\xi = |t\xi = x^2| = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot 2 \frac{x}{t} dx = \\ &= -\frac{1}{t} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + \frac{ix}{\sqrt{t}}} x dx = -\frac{1}{t} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x - \frac{i}{2\sqrt{t}}\right)^2 - \frac{1}{4t}} \left[\left(x - \frac{i}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{i}{2\sqrt{t}} \right] dx. \end{aligned}$$

Если раскрыть квадратные скобки и разбить интеграл на два, то первый берется и равен нулю (проверьте), тогда как второй равен

$$\frac{i}{2\sqrt{t}} e^{-1/4t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{i}{2\sqrt{t}} e^{-1/4t} \sqrt{\pi}. \quad (23)$$

(Переход от интеграла с $\left(x - \frac{i}{2\sqrt{t}}\right)^2$ в показателе к интегралу (23) осуществляется с помощью применения теоремы Коши, п. II.3.2.) Но так как $I(\infty) = 0$, то

$$I(t) = - \int_{\infty}^t \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau^{-3/2} e^{-1/4\tau} d\tau.$$

Поэтому из (22) получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} \tau^{-3/2} e^{-1/4\tau} d\tau = \left| \frac{1}{4\tau} = s^2 \right| = \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1/2\sqrt{t}} e^{-s^2} ds = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right)^{1)}. \end{aligned}$$

Это и есть прообраз функции (20). Пользуясь свойством 4 из п. 3, получаем также

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2} e^{-1/4t} \rightarrow e^{-\sqrt{p}}. \quad (24)$$

Мы предоставляем читателю доказать в качестве упражнения, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-1/4t} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}}. \quad (25)$$

5. Разложение прообраза в сумму. В п. 1 мы видели, что функция $F(p)$ однозначная и аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. Во многих случаях (см., например, п. 2) эта функция и во всей плоскости p является однозначной аналитической, за исключением отдельных изолированных особых точек. Конечно, это, вообще говоря, не обязательно, так как функция $F(p)$ при своем продолжении на всю плоскость p может иметь и точки разветвления (п. II.2.10), как в примере (20). Однако мы сейчас предположим, что функция $F(p)$ однозначна во всей плоскости p .

Допустим дополнительно, что $F(p)$ имеет конечное число особых точек $p_1, p_2, \dots, p_n$ и стремится к нулю при произвольном (а не только для $\operatorname{Re} p \geq s$, как раньше) стремлении $p \rightarrow \infty$. Тогда интеграл

¹⁾ Erf (error function, функция ошибок) определяется формулой: $\operatorname{Erf} x = \int_0^x e^{-s^2} ds$.

(19) можно вычислить на основе теории вычетов, как это описано в п. II.4.4, с помощью леммы Жордана (II.4.22) Это дает (проверьте!)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)] = \sum_{k=1}^n \text{Выч}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)]. \quad (26)$$

В частности, все указанные требования на функцию $F(p)$ выполнены, если она представляет собой правильную рациональную дробь (почему?). Особенно простой получается формула, если

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

где многочлен $Q(p)$ имеет все нули $p_1, p_2, \dots, p_n$ простые и его степень n выше степени многочлена $P(p)$. Тогда для вычисления вычетов можно пользоваться формулой (II.4.5), и мы получаем

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Выч}_{p=p_k} \frac{P(p) e^{pt}}{Q(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Если $F(p)$ имеет бесконечное количество изолированных особых точек $p_1, p_2, \dots$, то из теоремы Больцано–Вейерштрасса (п. II.3.6) легко вывести, что $p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. Тогда, конечно, условие $F(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ не может выполняться (почему?), однако бывают случаи, когда оно выполняется на некоторой последовательности левых полуокружностей с центром в точке $p = s$, радиусы которых неограниченно возрастают. В таких случаях, рассуждая, как в п. II.4.4, получаем представление $f(t)$ в виде суммы бесконечного ряда, аналогичного (26).

Имеется еще один важный случай, когда прообраз функции $F(p)$ оказывается возможным разложить в ряд простого вида: так будет, если она оказывается аналитической в точке $p = \infty$ (п. II.4.6); В самом деле, тогда в окрестности этой точки имеет место разложение

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} p^{-k}, \quad (27)$$

причем так как $F(\infty) = 0$ (почему?), то $c_0 = 0$, т. е. суммирование на самом деле производится от $k = 1$. В силу (5) отдельный член ряда (27) имеет прообраз $c_{-k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$, а так как прообраз суммы равен сумме прообразов, то получаем

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (28)$$

(Здесь мы воспользовались законом линейности для бесконечного числа слагаемых, что требует обоснования; однако более подробное

исследование, которого мы не будем проводить, показывает, что тут все в порядке.)

Приведем пример. Пусть

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad (29)$$

где радикал считается, положительным для вещественных $p > 0$. Эта функция при продолжении на всю плоскость p становится двузначной, но если ограничиться, только окрестностью точки $p = \infty$, то рассматриваемая ветвь функции. $F(p)$ однозначна, и имеет разложение по формуле бинорма Ньютона

$$F(p) = \frac{1}{p} (1 + p^{-2})^{-1/2} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{(-1/2)}{1} p^{-2} + \frac{(-1/2) \cdot (-3/2)}{1 \cdot 2} p^{-4} + \frac{(-1/2) \cdot (-3/2) \cdot (-5/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{-6} + \dots \right).$$

Раскрыв скобки и воспользовавшись формулой (28), получим прообраз

$$f(t) = 1 - \frac{1}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2} \cdot \frac{t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 2^3} \cdot \frac{t^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

Произведя сокращение, получим после простых преобразований

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{(1!)^2 \cdot 2^2} + \frac{t^4}{(2!)^2 \cdot 2^4} - \frac{t^6}{(3!)^2 \cdot 2^6} + \dots$$

Но это как раз разложение функции Бесселя $J_0(t)$ (см., например, ЛВМ, (XV.173)), которая, таким образом, и служит прообразом функции (29).

Отметим, что лаплас-образ, т. е. функция вида (1), далеко не всегда имеет разложение вида (27); однако она, как правило, имеет асимптотическое разложение (п. II.5.1) аналогичного вида, действующее при $\operatorname{Re} p \geq s > s_0$, $|p| \rightarrow \infty$. Это доказывается, как в п. II.5.3; например, если $f(t)$ допускает при малых t разложение в ряд Тейлора

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad (30)$$

то с помощью последовательного интегрирования по частям интеграла (1) легко получить разложение (проделайте это!)

$$F(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{p^{k+1}}. \quad (31)$$

Обратно, по этому разложению легко восстановить ряд (30) (т. е. значения $f(t)$ при малых t), но никак не всю функцию $f(t)$, так как произвольное изменение ее значений при конечных и больших t никак не сказывается на разложении (31). В частности, из (31) мы видим, что

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p)] \quad (\operatorname{Re} p \geq s)$$

Легко доказать и обратную формулу при $s_0 \leq 0$:

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p)]. \quad (32)$$

В самом деле,

$$pF(p) = \int_0^{\infty} f(t)(pe^{-pt} dt) = f(0) + \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt \xrightarrow{p \rightarrow 0} f(0) + \int_0^{\infty} f'(t) dt = f(\infty).$$

Отметим интересное приложение формулы (32). Применим сначала свойство (10) к формуле (11), это даст

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \rightarrow \frac{1}{p} \int_p^{\infty} f(q) dq;$$

отсюда в силу (32) получаем, изменяя обозначения τ на t , q на p :

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(p) dp.$$

Эта формула дает возможность легко вычислить многие интегралы, для которых неопределенные не выражаются через элементарные функции; Например, из второй формулы (7) при $\alpha = -\gamma \leq 0$ получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\gamma t}}{t} \sin \beta t dt = \int_0^{\infty} \frac{\beta}{(p + \gamma)^2 + \beta^2} dp = \operatorname{arcth} \frac{p + \gamma}{\beta} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcth} \frac{\gamma}{\beta}.$$

Имеются методы более детального изучения поведения $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Приведем без доказательства, в частности, такой результат. Пусть функция $F(p)$ при своем продолжении в полуплоскость $\operatorname{Re} p \leq s_0$ имеет одну особую точку p_0 с наибольшей вещественной частью (т. е. $F(p)$ — однозначная аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \operatorname{Re} p_0$, за исключением точки p_0); пусть в окрестности p_0 функция $F(p)$ имеет разложение

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (p - p_0)^{\lambda_k},$$

где все λ_k вещественны и $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty$. Пусть в формуле обращения (19) от интегрирования по прямой оказывается возможным перейти к интегрированию по пути, показанному на рис. 60. Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$f(t) \sim e^{p_0 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\lambda_k)} t^{-\lambda_k - 1}, \quad (33)$$

понимаемое в естественном смысле (п. II.5.1). Если наибольшую вещественную часть имеет несколько особых точек функции $F(p)$, то соответствующие разложения (33) надо сложить.

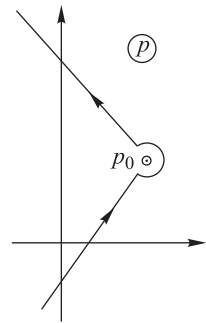


Рис. 60

6. Численное определение прообраза. Формулу обращения (19) или равносильную ей формулу (18) можно использовать для численного определения прообраза $f(t)$ по заданному образу $F(p)$, применяя численное интегрирование, в результате которого $f(t)$ окажется приближенно представленной в виде произведения e^{st} на сумму ряда Фурье. Однако известно (см., например, ЛВМ, п. XVII.25), что такой ряд сходится тем быстрее, чем разлагаемая функция «глаже», т. е. имеет больше непрерывных производных. Разрывы у функции $f(t)$ и у ее производных легко выявляются по виду $F(p)$: например, если $f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0) = h \neq 0$ ($t_0 > 0$), то легко проверить, что $F(p)$ содержит слагаемое вида $h \frac{e^{-t_0 p}}{p}$ аналогично выявляются разрывы $f'(t)$ и т. д. Поэтому за счет выделения из $F(p)$ таких слагаемых возможно добиться того, что прообраз оставшейся функции уже достаточно гладок. Потеря гладкости на всей оси t может произойти также из-за того, что интеграл (18), как мы видели, вообще говоря, имеет скачок при $t = 0$. Здесь также можно улучшить картину за счет выделения из $F(p)$ «опасных» слагаемых с известными прообразами: так, если $f(+0)$ конечно и не равно нулю, то $F(p)$ при $p \rightarrow \infty$ ($\text{Re } p$ велико) имеет главный член вида $\frac{c}{p}$ ($c = f(+0)$) и т. д. в соответствии с (6). Кроме того, если $f(+0) = 0$ (т. е. $(pF(p))|_{p=\infty} = 0$), а $f'(+0)$ конечно (т. е. $(p^2 F(p))|_{p=\infty}$ конечно), то можно продолжить интеграл (18) с вынесенным множителем e^{st} нечетным образом с полуоси $t \geq 0$ на полуось $t \leq 0$, т. е. рассмотреть функцию

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{st} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{irt} F(s + ir) dr - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-irt} F(s + ir) dr \right] = \\ &= \frac{i}{\pi} e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} \sin rt \cdot F(s + ir) dr. \end{aligned}$$

Тогда $\tilde{f}(t)$ и $\tilde{f}'(t)$ не имеют разрывов при $t = 0$.

Допустим, что такое продолжение осуществлено, и воспользуемся формулой трапеций с узлами $r = \frac{2\pi}{T} n$, где $T > 0$ — некоторое фиксированное число, а $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Мы получим приближенное представление $\tilde{f}(t)$, а потому и $f(t)$, при $t > 0$ в виде произведения экспоненты на сумму ряда Фурье (проверьте!):

$$f(t) \approx \frac{2i}{T} e^{st} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F\left(s + i \frac{2\pi n}{T}\right) - F\left(s - i \frac{2\pi n}{T}\right) \right] \sin \frac{2\pi n}{T} t \quad (t > 0).$$

Конечно, при этом T должно быть выбрано заметно большим тех значений t , для которых нам требуется знать $f(t)$.

Приведем еще один способ численного построения прообраза, основанный на использовании значений $F(p)$ при вещественных p . Будем считать, что $s_0 < 0$ (этого всегда можно добиться с помощью применения теоремы смещения) и что $f(+0) = 0$ (см. выше). Пусть при некотором вещественном $q > 0$ известны значения

$$b_n = F((2n + 1)q) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Совершим в интеграле (1) замену переменной $e^{-qt} = \cos \vartheta$ и обозначим

$$f(t) = \left(-\frac{1}{q} \ln \cos \vartheta \right) = \tilde{f}(\vartheta) \quad \left(0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right);$$

при этом $\tilde{f}(0) = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Эта замена дает (проверьте!)

$$qb_n = \int_0^{\pi/2} (\cos \vartheta)^{2n} \sin \vartheta \tilde{f}(\vartheta) d\vartheta. \quad (34)$$

Ясно, что задачи о построении функций $f(t)$ и $f(\vartheta)$ равносильны.

Будем считать функцию $\tilde{f}(\vartheta)$ продолженной нечетным образом через точку $\vartheta = 0$ и четным — через точку $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (т. е. $\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \equiv \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)$). Тогда эта функция будет 2π -периодичной, и ее можно разложить в ряд Фурье:

$$\tilde{f}(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(2n+1)\vartheta \quad (35)$$

(продумайте!); в частности, эта формула справедлива при $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Подставив (35) в (34), после несложных выкладок получим для коэффициентов c_n треугольную систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{4}{\pi} qb_0, \\ c_0 + c_1 &= \frac{4^2}{\pi} qb_1, \\ 2c_0 + 3c_1 + c_2 &= \frac{4^3}{\pi} qb_2, \\ 5c_0 + 9c_1 + 5c_2 + c_3 &= \frac{4^4}{\pi} qb_3, \end{aligned} \right\}$$

из которой и находим коэффициенты c_n , дающие возможность получить значения функции $\tilde{f}(\vartheta)$ по формуле (35).

Заодно мы получили утверждение, представляющее теоретический интерес: *функция $f(t)$, а потому и $F(p)$, полностью определяется значениями $F(p_n)$ для последовательности вещественных значений $p_n \rightarrow \infty$, образующих арифметическую прогрессию.*

§2. Приложения

1. Основная идея. Допустим, что некоторой процесс описывается функциями времени $x(t), y(t), \dots$, которые и являются искомыми. На математическом языке это обычно означает, что между этими, а также некоторыми заданными функциями составляются уравнения, которые

требуется решить. Однако часто оказывается, что уравнения, связывающие *образы* искомых функций, значительно проще и их значительно легче решить, чем уравнения для исходных функций–прообразов. (Например, в п. 1.3 мы видели, что если неизвестная функция дифференцируется, то ее образ множится на p , а если она интегрируется, то ее образ делится на p , так что действия над образами значительно проще, чем над прообразами.) Тогда от уравнений для прообразов мы переходим к уравнениям для образов, решая, находим образы искомых функций, а затем уже возвращаемся к прообразам.

Конечно, далеко не любые уравнения удастся решить таким способом. Прежде всего, требуется, чтобы уравнения были линейными или могли быть легко преобразованы в линейные. Желательно, чтобы коэффициенты были постоянными, в противном случае положение, как правило, существенно осложняется. Однако если эти условия выполнены, то *операционный метод*, т.е. переход от прообразов к образам, часто значительно облегчает отыскание требуемых функций времени. Такой метод опирается на разработанную систему правил и формул перехода, которые и составляют операционное исчисление; преобразование Лапласа обычно используется лишь для установления этих правил и основных формул, но для их приложения оно уже не требуется.

Может получиться, что в сложном исследовании участвует целая цепочка подобных рассуждений, так что найденные функции времени используются для отыскания еще каких-то функций и т.д. В таких случаях оказывается полезным проводить все исследование в образах и лишь на самом последнем этапе перейти к прообразам функций, которые в конечном счете и требуются.

Приведем несколько примеров такого приложения.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, а также системы таких уравнений составляют наиболее обширную область приложения операционного исчисления. Пусть, например, требуется решить уравнение

$$ax'' + bx' + cx = f(t) \quad \left(x = x(t), \quad ' = \frac{d}{dt} \right) \quad (1)$$

при начальном условии

$$x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta. \quad (2)$$

Совершая над обеими частями уравнения (1) преобразование Лапласа и пользуясь свойством линейности (сумма переходит в сумму, см. п. 1.1) и свойством 4 из п. 1.3, получаем

$$a(p^2 X - \alpha p - \beta) + b(pX - \alpha) + cX = F(p) \quad (X = X(p)),$$

где под $X(p)$ понимается лаплас-образ искомой функции $x(t)$, а под $F(p)$ — образ заданной функции $f(t)$. Мы видим, что относительно

X получилось *алгебраическое уравнение* первой степени. Решая его, получаем

$$(ap^2 + bp + c)X = F(p) + a\alpha p + a\beta + b\alpha, \quad (3)$$

т. е.

$$X = \frac{F(p) + a\alpha p + a\beta + b\alpha}{ap^2 + bp + c}. \quad (4)$$

(Обратите внимание, что в знаменателе получился характеристический многочлен уравнения (1); так будет всегда.) Если $x(t)$ — не окончательная искомая функция, а предназначается для использования, скажем, в качестве правой части некоторого другого уравнения вида (1), то можно считать, что задача уже решена: ведь в формуле вида (4) используется не сама правая часть, а именно ее образ. Если же $x(t)$ — окончательная искомая функция, то надо еще от формулы (4) перейти к прообразу по методам пп. 1.4, 1.5; при этом вычеты в формуле (1.26) будут браться по нулям характеристического многочлена (почему?), а также по особым точкам функции $F(p)$.

Таким образом, при решении дифференциального уравнения операционным методом начальные условия учитываются с самого начала процесса решения, что очень удобно. Вычисления приобретают наиболее простой вид, если начальные условия (2) нулевые: тогда просто

$$X(p) = \frac{F(p)}{D(p)} = Z(p)F(p), \quad (5)$$

где $D(p)$ — характеристический многочлен, а $Z(p) = \frac{1}{D(p)}$ называется *передаточной функцией*. Как известно, во многих случаях $f(t)$ в уравнении (1) можно трактовать как внешнее воздействие на какую-либо физическую систему, которая определяется коэффициентами в левой части, а $x(t)$ — как отклик системы на это воздействие (иначе, $f(t)$ — входная, а $x(t)$ — выходная функции; см. рис. 61). Таким образом, в случае нулевых начальных условий образ отклика получается из образа воздействия простым умножением на передаточную функцию. Это делает особенно удобным



Рис. 61

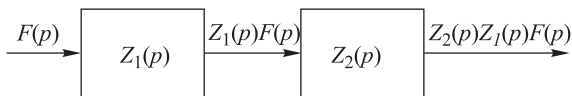


Рис. 62

рассмотрение в лаплас-образах агрегатов, в которых выходная функция для некоторой системы служит исходной функцией для следующей и т. д. (рис. 62).

Если начальные условия не нулевые, то формулу (4) можно записать в виде

$$X(p) = Z(p)F(p) + (a\alpha p + a\beta + b\alpha)Z(p),$$

т. е. к отклику добавляется слагаемое, определяемое свойствами системы и начальными данными, но не зависящее от внешнего воздействия.

Нетрудно понять, каков смысл прообраза $z(t)$ передаточной функции. Так как $Z(p)$ в (5) получается из $X(p)$ при $F(p) \equiv 1$, то из примера 5 п. 1.2 вытекает, что $z(t)$ представляет собой отклик системы на внешнее воздействие $\delta(t)$, т. е. на единичный импульс, подействовавший на нее в начальный момент времени, если система перед этим покоилась. Это можно понять и из других соображений: непосредственно после импульса внешнее воздействие прекращается, т. е. как бы $f(t) \equiv 0$, но система приобретает начальные условия $x(+0) = 0$, $x'(+0) = \frac{1}{a}$; но тогда из (4) получается, что $X(p) = Z(p)$.

На основе свойства 6 из п. 1.3 формула (5) в прообразах имеет вид

$$x(t) = \int_0^t z(t - \tau)f(\tau) d\tau. \quad (6)$$

В такой форме решение можно получить из общих соображений, связанных с построением функции влияния ¹⁾. Функция влияния здесь имеет вид $z(t - \tau)$, а не $z(t, \tau)$ (как в общем случае), так как рассматриваемая система не только линейная, но и автономная (не меняет своих свойств с течением времени), так что при сдвиге воздействия во времени соответствующий отклик сдвигается на столько же, не меняя своей формы.

Саму передаточную функцию $Z(p)$ можно еще трактовать следующим образом. Допустим, что при фиксированном комплексном p внешнее воздействие имеет вид $f(t) = e^{pt}$. Тогда уравнение (1) имеет в качестве одного из своих частных решений $x(t) = \frac{1}{D(p)} e^{pt} = Z(p) e^{pt}$ (если только $D(p) \neq 0$, т. е. если отсутствует резонанс). В частности, если $p = i\omega$ чисто мнимое, то речь идет о коэффициенте усиления гармонического внешнего воздействия; тогда $Z(i\omega)$ называется *частотной характеристикой* рассматриваемой физической системы. При этом, если система устойчивая, т. е. если свободные колебания в ней затухают (это значит, что $Z(p)$ имеет полюсы только при $\operatorname{Re} p < 0$), то при внешнем воздействии $e^{i\omega t}$ и при любых начальных условиях соответствующее решение (т. е. отклик) с ростом t приближается к $Z(i\omega) e^{i\omega t}$ с экспоненциальной скоростью.

Иногда предпочитают рассматривать результат $z_1(t)$ воздействия на систему не импульсной, а единичной функции $f(t) \equiv 1$. Тогда при нулевых начальных условиях из (5) получаем

$$Z_1(p) = Z(p) \cdot \frac{1}{p}, \text{ т. е. } Z(p) = pZ_1(p),$$

¹⁾ Функция влияния в данной ситуации — это отклик системы на единичный импульс, подействовавший на нее в некоторый момент $\tau > 0$, если при $t > 0$ система находилась в состоянии ненагруженного равновесия.

откуда при любой функции $f(t)$ из (5) следует, что

$$X(p) = pZ_1(p)F(p).$$

Возвращаясь к прообразам, получаем тогда

$$x(t) = \left(\int_0^t z_1(\tau) f(t-\tau) d\tau \right)' = z_1(t)f(0) + \int_0^t z_1(\tau) f'(t-\tau) d\tau.$$

Эту формулу легко получить и из (6), заметив, что $z(t) = z_1'(t)$.

Операционный метод можно применить не только к начальной, но и к краевым задачам, хотя для них вычисления получаются более громоздкими. Пусть, например требуется решить уравнение (1) для $0 \leq t \leq a$ при краевых условиях $x(0) = \alpha$, $x(T) = \gamma$. Будем считать решение продолженным с этого отрезка на всю полуось $0 \leq t < \infty$ и обозначим через β неизвестное значение $x'(0)$. Тогда, совершая над (1) преобразование Лапласа, мы можем перейти к формуле (4), в которой β — пока неизвестный параметр. Переходя к прообразам, получаем для решения выражение вида $x = \varphi(t; \beta)$, после чего β находим из второго краевого условия $\varphi(T; \beta) = \gamma$.

Приведем еще пример решения дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$tx'' + x' + tx = 0. \quad (7)$$

Обозначим $x'(0) = \alpha$, $x(0) = \beta$. Переходя к лаплас-образам и используя свойства 4 и 5 из п. 1.3, получим уравнение

$$-(p^2 X - \beta p - \alpha)' + (pX - \beta) - X' = 0, \quad \text{т. е.} \quad (p^2 + 1) \frac{dX}{dp} + pX = 0.$$

Таким образом, для $X(p)$ получилось обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Решая его, находим

$$X(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}},$$

откуда

$$x(t) = C J_0(t)$$

(см. (1.29)). Уравнение (7) — это частный случай уравнения Бесселя (см., например, ЛВМ (XV.167) при $p = 0$). Получилось только одно решение, так как другое при $t = 0$ бесконечно, а потому к нему нельзя применить свойство 4 из п. 1.3.

Если рассматривается не одиночное уравнение вида (1), а система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то после перехода к лаплас-образам получаем матричное уравнение вида

$$\mathbf{D}(p)\mathbf{X}(p) = \mathbf{F}(p), \quad (8)$$

где $\mathbf{D}(p)$ — характеристическая матрица, $\mathbf{X}(p)$ — столбец из образов искомых функций, $\mathbf{F}(p)$ — столбец из образов заданных функций (для нулевых начальных данных это столбец из образов неоднородных чле-

нов системы, а для ненулевых начальных данных надо внести поправку на эти данные, как в уравнении (3)). Решая уравнение (8), получаем

$$\mathbf{X}(p) = \mathbf{Z}(p)\mathbf{F}(p),$$

где $\mathbf{Z}(p) = [\mathbf{D}(p)]^{-1}$ — *передаточная матрица*. По правилу построения обратной матрицы (см., например, ЛВМ, п. XI.3) ее элементы будут иметь в знаменателе характеристический многочлен $\det \mathbf{D}(p)$, Поэтому при переходе к прообразам придется брать вычеты по нулям этого многочлена, т. е. по корням характеристического уравнения.

3. Разностные и дифференциально-разностные уравнения.

Здесь имеются в виду разностные уравнения для функций. Пусть, например, рассматривается уравнение

$$ax(t) + bx(t-h) + cx(t-k) = f(t) \quad (0 \leq t < \infty), \quad (9)$$

где $0 < h < k$. В качестве начального условия можно задать $x(t)$ при $-k \leq t < 0$. Тогда в принципе возможно применить следующий *метод шагов*: пока t меняется от 0 до h , второе и третье слагаемые в левой части (9) заданы (почему?), т. е. можно найти решение $x(t)$ при $0 \leq t < h$; затем считаем, что t меняется от h до $2h$; тогда $x(t-h)$ и $x(t-k)$ уже найдены (почему?), и из (9) можно найти $x(t)$ при $h \leq t < 2h$ и т. д. Этот метод удобен как численный даже для нелинейных и неавтономных случаев, но для исследования решения он не очень хорош.

Для линейных автономных систем возможно применить операционный метод. Для этого применим к обеим частям (9) преобразование Лапласа, воспользовавшись свойством 2 из п. 1.3; получим

$$aX + be^{-ph}X + be^{-pk} \int_{-h}^0 e^{-pt}x(t)dt + ce^{-pk}X + ce^{-pk} \int_{-k}^0 e^{-pt}x(t)dt = F(p), \quad (10)$$

откуда легко найти $X(p)$ (заметим, что в интегральных членах значения $x(t)$ берутся при $t < 0$, т. е. эти значения заданы в силу начального условия). Как и в п. 1, наиболее прост случай нулевого начального условия: тогда из (10) получаем опять формулу вида (5), где передаточная функция имеет вид

$$Z(p) = \frac{1}{a + be^{-ph} + ce^{-pk}}. \quad (11)$$

Полюсы этой функции, по которым будут братья вычеты, сравнительно просто определить, если h и k соизмеримы (имеют рациональ-

ное отношение), т. е. $h = m\tau$, $k = n\tau$, где m и n — целые; тогда для нахождения нулей знаменателя надо решить алгебраическое уравнение

$$a + bu^m + cu^n = 0 \quad (u = e^{-p\tau}),$$

после чего положить $p = -\frac{1}{\tau} \operatorname{Ln} u$. В несоизмеримом случае приходится численно решать трансцендентное характеристическое уравнение.

Аналогично исследуются дифференциально-разностные уравнения, например, вида

$$ax'(t) + bx(t) + cx'(t - h_1) + dx(t - h_2) = f(t) \quad (0 \leq t < \infty), \quad (12)$$

где $h_1 > 0, h_2 > 0$. В качестве начального условия можно задать $x(t)$ при $-h \leq t < 0$, где h — большее из чисел h_1, h_2 ; кроме того, задается значение $x(+0)$, которое не обязано совпадать с $x(-0)$. И здесь можно применить метод шагов, причем размер каждого шага равен меньшему из чисел h_1, h_2 . Мы предоставляем читателю получить лаплас-образ решения и передаточную функцию

$$Z(p) = (ap + b + cpe^{-h_1 p} + de^{-h_2 p})^{-1}.$$

Нахождение ее полюсов сводится к вычислению нулей квазиполинома (см. (II.4.46)).

Обращаем внимание читателя на то, что при решении начальной задачи для уравнения вида (12) в этом уравнении обязательно должен присутствовать член со старшей производной при наибольшем значении аргумента: например, в уравнение (12) нельзя было бы добавить член $x''(t - h_1)$. В противном случае можно доказать, что характеристический квазиполином обязательно будет иметь нули с как угодно большой вещественной частью, что не дает возможности построить решение операционным методом (почему?).

4. Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения.

Операционный метод можно применить и ко многим интегральным уравнениям, а также *интегро-дифференциальным уравнениям* (в которые искомая функция входит как под знак интеграла, так и под знак производной). Здесь мы не будем излагать теорию таких уравнений, а приведем два простых примера.

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^t x(\tau)g(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (0 \leq t < \infty),$$

где f и g — заданные функции, а x — искомая. Применяя свойство 6 из п. 1.3, получим $X(p)G(p) = F(p)$, т. е.

$$X(p) = \frac{F(p)}{G(p)}. \quad (13)$$

Впрочем, здесь еще надо проверить, что правая часть может служить лаплас-образом (п. 1.4), а это далеко не при любых функциях f и g будет так, ибо правая часть может не стремиться к нулю при $\operatorname{Re} p \geq s$, $|p| \rightarrow \infty$.

Интересно, что операционным методом могут быть, в виде исключения, решены даже некоторые нелинейные интегральные уравнения специального вида. Например, уравнение

$$\int_0^t x(\tau)g(t-\tau) d\tau = f(t) \quad (0 \leq t < \infty),$$

после перехода к образам принимает вид $X^2(p) = F(p)$, откуда $X(p) = \sqrt{F(p)}$ и т. д.

2. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$x'(t) + \int_0^t x(\tau)g(t-\tau) d\tau = f(t) \quad (0 \leq t < \infty),$$

где дополнительно задано $x(+0) = \alpha$. Переход к образам дает

$$pX(p) - \alpha + X(p)G(p) = F(p),$$

откуда легко найти

$$X(p) = \frac{F(p) + \alpha}{p + G(p)}.$$

В данном случае условие стремления правой части к нулю выполнено (почему?), так что мы действительно получили лаплас-образ решения.

5. Уравнения с частными производными. Теория уравнений с частными производными весьма обширна, и мы также не будем ее здесь касаться, а только приведем пример применения операционного исчисления к решению так называемого *уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (14)$$

В курсах уравнений математической физики доказывается, что этому уравнению удовлетворяет температура $u = u(t, x)$ в момент времени t в точке x прямолинейного стержня, если тепло подается или отводится только через его концы. *Коэффициент теплопроводности* a определяется только материалом стержня.

Рассмотрим сначала случай, когда стержень бесконечен, т. е. $-\infty < x < \infty$, причем будем считать заданным распределение температур в нем в начальный момент времени:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (\text{задано}). \quad (15)$$

Таким образом, математическая задача состоит в решении уравнения (14) при заданном начальном условии (15). Для решения этой задачи совершим преобразование Лапласа над обеими частями уравнения (14), считая x параметром, т.е. $u(t, x) \rightarrow U(p, x)$. Применяя правило дифференцирования по параметру (см. сноску на с. 80) и формулу (1.9), получим

$$pU - \varphi(x) = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

А это уравнение при любом фиксированном p представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, которое можно переписать в виде

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - pU = -\varphi(x). \quad (16)$$

В этом и состоит идея применений) преобразования Лапласа: оно превращает одну из независимых переменных; (по которой производится преобразование) в параметр, понижая тем самым, число этих переменных на единицу. Естественно, что чем меньше независимых переменных, тем, вообще говоря, уравнение проще; в частности, если их было две, то после перехода к лаплас-образам остается одна независимая переменная, т.е. получается обыкновенное дифференциальное уравнение, что и произошло в рассматриваемом примере.

Вернемся к решению уравнения (16), причем сначала будем считать, что $\varphi(x) = \delta(x)$ (дельта-функции). Тогда при $x \neq 0$ уравнение (16) является однородным и потому имеет решение

$$U = C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x};$$

при этом величины C_1 и C_2 при $x < 0$ и $x > 0$, вообще говоря, различны и, кроме того, могут зависеть от p (они постоянны только по x). Условимся при больших $\operatorname{Re} p$ под $\sqrt{\frac{p}{a}}$ понимать ветвь, которая при вещественных $p > 0$ принимает положительные значения. Тогда из условия обращения $U(p, x)$ в нуль при $p \rightarrow \infty$ (как любого лаплас-образа), получаем, что

$$U(p, x) = \begin{cases} C_1(p) e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} & (x < 0), \\ C_2(p) e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} & (x > 0). \end{cases} \quad (17)$$

Однако, интегрируя (16) при $\varphi(x) = \delta(x)$ от -0 до $+0$ два раза, приходим к равенствам

$$a \left(\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=+0} - \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=-0} \right) = -1, \quad U|_{x=+0} - U|_{x=-0} = 0.$$

Отсюда получаем, что в (17) $C_1 = C_2 = \frac{1}{2\sqrt{ap}}$ (проверьте!), т. е.

$$U(p, x) = \frac{1}{2\sqrt{ap}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} |x|} \quad (x \geq 0) \quad (18)$$

Правая часть (18) получается из правой части табличной формулы (1.25) заменой p на $\frac{x^2}{a} p$ с последующим умножением на $\frac{|x|}{2a} p$. Поэтому из формулы (1.25) и свойства 1 из п. 1.3 вытекает, что преобразованием функции (18) служит (проверьте!)

$$u(t, x) = \frac{|x|}{2a} \frac{a}{x^2} \frac{1}{\sqrt{\pi \left(\frac{a}{x^2} t\right)}} e^{-\frac{1}{4(a/x^2)t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}. \quad (19)$$

Если теперь $\varphi(x) = \delta(x - \xi)$, то в силу инвариантности уравнения (14) относительно сдвигов по x и соответствующее решение получится из (19) заменой x на $x - \xi$. Отсюда, если $\varphi(x)$ произвольна, то, применяя принцип суперпозиции, получим окончательное решение задачи

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} \varphi(\xi) d\xi,$$

полученное впервые Пуассоном иным методом.

Рассмотрим еще одну задачу для уравнения (14), именно задачу о разогреве полубесконечного стержня с конца, причем допустим, что закон изменения температуры на этом конце известен, а в начальный момент времени стержень не разогрет. Задача математически сводится к решению уравнения (14) для $0 \leq t < \infty$, $0 \leq x < \infty$ при начальном условии

$$u|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq x < \infty)$$

и граничном условии

$$u|_{x=0} = \varphi(t) \quad (\text{задано}). \quad (20)$$

Совершая преобразование Лапласа по t над уравнением (14) и условием (20), получим

$$pU(p, x) = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U(p, 0) = \Phi(p).$$

Решение этой задачи дает, подобно (17),

$$U(p, x) = \Phi(p) e^{-\sqrt{p/a} x}. \quad (21)$$

Так как преобразованием функции $e^{-\sqrt{p/a} x}$, согласно (1.24), служит

$$\frac{a}{x^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{x^2} t\right)^{3/2} e^{-1/[4(at/x^2)]} = \frac{x}{2\sqrt{\pi a} t^{3/2}} e^{-x^2/4at},$$

то в силу свойства 6 из п. 1.3 прообразом функции (21) служит

$$u(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t (t - \tau)^{-3/2} e^{-x^2/4a\tau(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau.$$

Это и есть решение поставленной задачи.

Как видим, при применении операционного метода приходится пользоваться не только основными свойствами преобразования Лапласа, но также разнообразными формулами перехода от конкретных прообразов к образам и обратно.

Приведем еще пример решения, приводящего к сумме бесконечно-го ряда. Именно, рассмотрим задачу о разогреве конечного стержня. Будем решать уравнение (14) при $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t < \infty$ при начальном условии

$$u|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq x \leq l)$$

(стержень не был разогрет) и граничных условиях

$$u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (0 \leq t < \infty) \quad (22)$$

(на левом конце поддерживается постоянная температура u_0 , а на правом — нулевая температура). Совершая преобразование Лапласа над уравнением (14) и условиями (22), получаем

$$pU = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U|_{x=0} = \frac{u_0}{p}, \quad U|_{x=l} = 0.$$

Решение этой краевой задачи при любом значении параметра p , которое мы предоставляем читателю, имеет вид

$$U(p, x) = \frac{u_0}{p} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} (l - x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} l}.$$

При фиксированном x эта функция однозначная (почему?) и аналитическая на всей плоскости p , за исключением точки $p_0 = 0$ и точек, определяемых из уравнения

$$\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} l = 0, \quad \text{откуда} \quad e^{2\sqrt{\frac{p}{a}} l} = 1, \quad 2\sqrt{\frac{p}{a}} l = 2k\pi i,$$

$$p_k = -\frac{ak^2\pi^2}{l^2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

В этих точках функция U имеет полюсы первого порядка. Пользуясь формулой (1.26) (но для бесконечного числа членов) и формулой (II.4.5), получаем

$$u(t, x) = u_0 \left[\frac{l-x}{l} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^2}{ak^2\pi^2} \frac{\operatorname{sh} \left(i \frac{k\pi}{l} (l-x) \right)}{\operatorname{ch} \left(i \frac{k\pi}{l} l \right)} \frac{1}{2} \frac{l}{iak\pi} e^{-\frac{ak^2\pi^2}{l^2} t} \right] =$$

$$= u_0 \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} e^{-\frac{ak^2\pi^2}{l^2} t} \right). \quad (23)$$

Интересно отметить, что будет после установления процесса, т. е. при $t \rightarrow \infty$. Из предельной формулы (1.32) вытекает, что

$$u(\infty, x) = \lim_{p \rightarrow 0} [pU(p, x)] = \lim_{p \rightarrow 0} u_0 \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p/a} (l-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{p/a} l} = u_0 \frac{l-x}{l}.$$

Впрочем, этот же результат вытекает и из формулы (23), описывающей переходный процесс.

В заключение отметим, что операционное исчисление имеет и разнообразные интересные математические приложения к вычислению определенных интегралов, установлению различных формул, связывающих специальные функции, и т. д.; см., например, [3, 37].

§3. Варианты

Помимо интегральных преобразований Фурье и Лапласа, имеется целый ряд других аналогичных преобразований, приспособленных для решения различных классов задач. Это приложение проводится по схеме §2: поставленная задача формулируется в терминах образов искомых функций, и если она окажется достаточно простой, то решается, после чего выполняется обратное преобразование. Здесь мы кратко укажем на некоторые из этих преобразований, отослав интересующегося читателя к дальнейшей литературе.

1. Дискретное преобразование Лапласа. В теории импульсных систем широко применяется *дискретное преобразование Лапласа*, которое ставит в соответствие последовательности чисел $x_0, x_1, x_2, \dots$ — ее мы будем сокращенно обозначать $\{x_n\}$ — функцию $X(p)$ от комплексного переменного $p = s + ir$ по формуле

$$\{x_n\} \rightarrow X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-np}. \quad (1)$$

Если x_n при $n \rightarrow \infty$ остается ограниченным или растет по модулю не быстрее экспоненты, то функция $X(p)$ аналитична при достаточно больших s и 2π -периодична по r . Легко доказать формулы преобразования

$$\begin{aligned} \{1, 0, 0, \dots\} &\rightarrow 1; \quad \{1, 1, 1, \dots\} \rightarrow \frac{e^p}{e^p - 1}, \\ \{e^{an}\} &\rightarrow \frac{e^p}{e^p - e^a}, \quad \{n^k e^{an}\} \rightarrow \frac{k! e^p}{(e^p - e^a)^{k+1}} \end{aligned} \quad (2)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$) и т. д. Свойства этого преобразования напоминают свойства из п. 1.3; они подробно изложены в книгах [34, 130]. Отметим, например, такое:

$$\begin{aligned} \{x_{n+1}\} &\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} e^{-np} = |n+1 = m| = \sum_{m=1}^{\infty} x_m e^{-(m-1)p} = \\ &e^p \left(\sum_{m=0}^{\infty} x_m e^{-mp} - x_0 \right) = e^p X(p) - x_0 e^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Дискретное преобразование Лапласа можно применить, в частности, к решению линейных разностных числовых уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть, например, надо решить уравнение

$$\alpha x_n + \beta x_{n+1} + \gamma x_{n+2} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

если x_0 и x_1 заданы. Совершая дискретное преобразование Лапласа над всеми членами уравнения (4) и применяя линейность и свойство (3), получаем

$$\alpha X(p) + \beta(e^p X(p) - x_0 e^p) + \gamma(e^{2p} X(p) - x_0 e^{2p} - x_1 e^p) = 0,$$

откуда

$$X(p) = \frac{\gamma x_0 e^{2p} + (\beta x_0 + \gamma x_1) e^p}{\gamma e^{2p} + \beta e^p + \alpha}. \quad (5)$$

Теперь надо либо разложить эту рациональную относительно e^p функцию на сумму простейших рациональных дробей и воспользоваться формулами (2) (записав их в виде

$$\frac{1}{e^p - e^a} \leftarrow e^{-a} \{e^{an}\} - \{e^{-a}, 0, 0, \dots\}$$

и т. п. для кратных знаменателей), либо воспользоваться формулой обращения.

Формула обращения преобразования (1), записанного в виде

$$X(s + ir) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_n e^{-ns}) e^{-inr},$$

где считается, что $x_n = 0$ при $n < 0$, сразу вытекает из формулы для коэффициентов комплексного ряда Фурье:

$$x_n e^{-ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(s + ir) e^{inr} dr,$$

откуда

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\pi}^{s+i\pi} X(p) e^{np} dp \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (6)$$

где s — любое достаточно большое число. Из доказательства видно также, что при $n = -1, -2, \dots$ интеграл (6) равен нулю.

Иногда пользуются несколько более простым z -преобразованием, которое получается из преобразования (1) простой заменой $e^p = z$. Обозначим z -образ последовательности $\{x_n\}$ через $\tilde{X}(z)$; тогда

$$\tilde{X}(z) = X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}. \quad (7)$$

Так как $\operatorname{Re} p$ должно быть велико, а $\operatorname{Im} p$ произвольно, то ряд (7) сходится для любых z с достаточно большим $|z|$, т. е. представляет собой разложение в ряд Лорана на бесконечности функции $\tilde{X}(z)$, аналитической в точке $z = \infty$ (п. II.4.6). Соответственно просто изменяются формулы (2) (например, $\{k^n\} \rightarrow \rightarrow \frac{z}{z-k}$ и т. п.) и свойства. Формулу обращения (6) можно переписать в виде

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \tilde{X}(z) z^{n-1} dz \quad (n = 0, 1, \dots),$$

где R достаточно велико, а окружность $|z| = R$ ориентирована в положительном направлении. К вычислению этого интеграла можно применить теорию вычетов (продумайте это для примера (5)).

В заключение отметим, что дискретное преобразование Лапласа последовательности $\{x_n\}$ — это не что иное, как обычное преобразование Лапласа импульсной функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t-n)$$

(проверьте!).

2. Преобразование Фурье растущих функций. Применение преобразования Фурье бывает затруднено тем, что преобразуемая функция должна быть абсолютно интегрируемой и потому должна на бесконечности обращаться в нуль, рассмотрение фурье-образа как аналитической функции позволяет устранить это затруднение. Пусть сначала

$$f(x) \equiv 0 \quad (-\infty < x < x_0) \quad |f(x)| \leq M e^{\alpha x} \quad (x_0 < x < \infty); \quad (8)$$

будем в формуле преобразования Фурье

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (9)$$

считать k комплексным. Тогда легко проверить, что $\hat{f}(k)$ будет аналитической функцией k , во всяком случае, при $\text{Im } k < -\alpha$. Обозначив $ik = p$, $\hat{f}(k) = F(p)$, мы (при $x_0 \geq 0$) приходим к преобразованию Лапласа (1.1), так что все рассмотренные выше свойства преобразования Лапласа легко переформулировать и на преобразование (9). В частности, формула обращения имеет вид

$$f(x) = \int_{-\infty + is}^{\infty + is} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \quad (\text{Im } k = s < -\alpha).$$

Если функция $f(x)$ растет и при $x \rightarrow -\infty$, то можно применить следующий прием. Пусть

$$|f(x)| \leq M_+ e^{\alpha_+ x} \quad (0 < x < \infty), \quad |f(x)| \leq M_- e^{\alpha_- x} \quad (-\infty < x < 0).$$

Положим

$$f_+(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0), \\ f(x) & (0 < x < \infty), \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} f(x) & (-\infty < x < 0), \\ 0 & (0 < x < \infty). \end{cases}$$

Тогда их фурье-образы $\hat{f}_+(k)$ и $\hat{f}_-(k)$ будут аналитическими функциями k , первая при $\text{Im } k < -\alpha_+$, а вторая — при $\text{Im } k > -\alpha_-$. Формула обращения имеет вид

$$f(x) = \int_{-\infty + is_+}^{\infty + is_+} \hat{f}_+(k) e^{ikx} dk + \int_{-\infty + is_-}^{\infty + is_-} \hat{f}_-(k) e^{ikx} dk, \quad (10)$$

где $s_+ < -\alpha_+$, $s_- > -\alpha_-$.

Легко проверить, что если в оценке (8) M заменить на функцию $M(x)$ со сходящимся интегралом, то при $\text{Im } k \leq -\alpha$ интеграл (9) будет правильно сходящимся (см. сноску на с. 148), а потому функция $\hat{f}(k)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\text{Im } k \leq -\alpha$, включая граничную прямую. Аналогично формулируются свойства непрерывности функций $\hat{f}_+(k)$ и $\hat{f}_-(k)$. В частности, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, то можно принять $\alpha_+ = \alpha_- = 0$, и получается такая картина: функция $\hat{f}_+(k)$ аналитична в нижней полуплоскости k и непрерывна на граничной вещественной оси (но может в точках этой оси потерять аналитичность), функция $\hat{f}_-(k)$ аналитична в верхней полуплоскости и также непрерывна на вещественной оси, но уже «с другой стороны», а на самой оси $\hat{f}_+(k) + \hat{f}_-(k) = f(k)$. (Последнее видно, если в равенстве (10) перейти к пределу при $s_+ \rightarrow 0$, $s_- \rightarrow 0$.)

Покажем применение введенных понятий к выводу формулы Пуассона для суммы ряда

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\beta n) \quad (\beta > 0),$$

где $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) — непрерывная суммируемая функция. Для этого будем исходить из формулы (10), в которой s_+ и s_- — любые положительные числа. Подставим $x = \beta n$ и произведем суммирование по n от $-\infty$ до ∞ . Но первый интеграл, равный $\hat{f}_+(x)$, обращается в нуль при $n < 0$, так что

суммировать достаточно по $n \geq 0$, аналогичным свойством обладает второй интеграл, а потому

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty+is_+}^{\infty+is_+} \hat{f}_+(k) e^{ik\beta n} dk + \sum_{n=0}^{-\infty} \int_{-\infty+is_-}^{\infty+is_-} \hat{f}_-(k) e^{ik\beta n} dk = \\ &= \int_{-\infty+is_+}^{\infty+is_+} \hat{f}_+(k) (1 - e^{i\beta k})^{-1} dk + \int_{-\infty+is_-}^{\infty+is_-} \hat{f}_-(k) (1 - e^{-i\beta k})^{-1} dk. \quad (11) \end{aligned}$$

Примем для простоты, что функция $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ стремится к нулю с экспоненциальной скоростью. (На самом деле оказывается, что это предположение можно снять.) Тогда можно принять $s_+ > 0$, $s_- < 0$ и контур первого интеграла в правой части (11) замкнуть большой полуокружностью снизу, а второго интеграла — сверху. Интегралы по полуокружностям стремятся к нулю и, применяя теорему Коши о вычетах, находим

$$\begin{aligned} S &= -2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{-i\beta} \hat{f}_+ \left(\frac{2\pi n}{\beta} \right) + 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\beta} \hat{f}_- \left(\frac{2\pi n}{\beta} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f} \left(\frac{2\pi n}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Полученная формула

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\beta n) = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f} \left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)$$

применяется в теоретических исследованиях и в вычислениях. (Докажите ее

также с помощью формулы $\int f g^* dx = 2\pi \int \hat{f} \hat{g}^* dk$, вытекающей из равенства

Парсеваля (см. сноску ³⁾ на с. 156), подобрав соответствующую функцию $g(x)$ и воспользовавшись формулой

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\beta n x} = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(x - \frac{2\pi n}{\beta} \right).$$

3. Другие интегральные преобразования на бесконечном интервале. Каждое интегральное преобразование определяется (с точностью до обозначений) формулой вида

$$F(p) = \int_a^b K(p, t) f(t) dt, \quad (12)$$

где $K(p, t)$ — ядро, которое и определяет преобразование: так, для преобразования Фурье

$$a = -\infty, \quad b = \infty, \quad K(p, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-ipt},$$

для преобразования Лапласа

$$a = 0, b = \infty, K(p, t) = e^{-pt},$$

для косинус- и синус-преобразований Фурье (см., например, ЛВМ, п. XVII.32) $a = 0, b = \infty$ а $K(p, t)$ соответственно равно $\frac{1}{\pi} \cos pt$ и $\frac{1}{\pi} \sin pt$.

Остальные интегральные преобразования так или иначе связаны с преобразованием Фурье. Так, рассмотрим *преобразование Меллина*

$$F(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} f(t) dt, \quad (13)$$

где $p = s + ir$ — комплексная переменная. Замена переменной по формуле $t = e^{-x}$ показывает (проверьте!), что при фиксированном s функция $F(s + ir)$ служит фурье-образом функции $2\pi e^{-sx} f(e^{-x})$. Отсюда по формуле обращения для преобразования Фурье

$$2\pi e^{-sx} f(e^{-x}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s + ir) e^{irx} dr,$$

откуда получаем формулу обращения для преобразования (13)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} t^{-p} F(p) dp. \quad (14)$$

Мы предоставляем читателю продумать, какой должна быть функция $f(t)$, чтобы ее преобразование (13) имело смысл в некоторой области плоскости p , и каким должно быть s в формуле (14). Различные свойства и приложения преобразования Меллина, как и других интегральных преобразований, содержатся в книгах [36, 113].

Преобразование Гильберта широко применяется в теории сингулярных интегральных уравнений (§ VII.5). Допустим, что функция $f(t)$ вещественна и абсолютно интегрируема на всей оси t ; $\hat{f}(\omega)$ — ее фурье-образ; функции $\tilde{f}(\omega)$ и $F(t)$ определены формулами

$$\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} \hat{f}(\omega) & (\omega > 0), \\ 0 & (\omega < 0), \end{cases} \quad F(t) = -2 \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (15)$$

Заметив, что вещественность функции $f(t)$ равносильна свойству ее фурье-образа

$$\hat{f}(-\omega) = [\hat{f}(\omega)]^*$$

(докажите это!), получаем, что

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega + \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} [\hat{f}(\omega)]^* d\omega = \\ &= |\omega = -\omega_1| \int_0^{\infty} e^{i\omega_1 t} \hat{f}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^0 e^{i\omega_1 t} \hat{f}(\omega_1) d\omega_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega = f(t). \end{aligned}$$

Мы получили, что фурье-прообразом функции $\tilde{f}(\omega)$ служит

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} + i \operatorname{Im} \int_0^{\infty} = \frac{1}{2} [f(t) - iF(t)],$$

т. е.

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2} [\hat{f}(\omega) - i\hat{F}(\omega)].$$

Поэтому при $\omega > 0$

$$\hat{F}(\omega) = [\hat{F}(-\omega)]^* = [2i\tilde{f}(-\omega) - i\hat{f}(-\omega)]^* = 0 + i\hat{f}(\omega)$$

и

$$2 \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \hat{F}(\omega) d\omega = 2 \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} i\hat{f}(\omega) d\omega = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega = f(t). \quad (16)$$

Из второй формулы (15), переставляя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} F(t) &= -2 \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) d\tau = \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^N e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1 - \cos N(\tau - t)}{\tau - t} d\tau. \end{aligned}$$

Разбивая последний интеграл на три:

$$\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty}, \quad (17)$$

где $\varepsilon > 0$ — малое фиксированное число, получаем, что при $N \rightarrow \infty$ из-за частой осцилляции косинуса 1-й и 3-й интегралы стремятся соответственно к

$$\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad \text{и} \quad \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

(формально это можно доказать с помощью замены $N(\tau - t) = s$). Что касается среднего интеграла (17), то разлагая $f(\tau)$ в ряд по степеням $\tau - t$, получаем, что он стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вспомнив определение главного значения (в. р.) сингулярного интеграла (см. сноску на с. 101), получаем окончательно

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \text{в. р.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Подобным образом, из формулы (16) приходим к формуле

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \text{v. p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Эти две формулы, справедливые в силу их линейности и для комплексных функций от вещественного аргумента, и определяют преобразование Гильберта и обратное к нему. (Докажите, что при этом преобразовании $\sin t \rightarrow \cos t$; см. по этому поводу также формулы (II.4.33).)

Некоторые из интегральных преобразований выводятся из формул *кратного преобразования Фурье* для функций нескольких переменных. Приведем, например, формулы для двойного преобразования Фурье:

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi x + \eta y)} f(x, y) dx dy, \quad (18)$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x + \eta y)} F(\xi, \eta) d\xi, d\eta. \quad (19)$$

Эти формулы получаются просто с помощью последовательного выполнения преобразования Фурье по каждой из независимых переменных. Аналогично выглядят формулы для любого числа независимых переменных.

Допустим теперь, что функция $f(x, y)$ после перехода к полярным координатам ρ, φ оказывается не зависящей от φ , т. е. $f = f(\rho)$. Тогда, переходя к полярным координатам σ, ψ в плоскости ξ, η , перепишем правую часть (18) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{-i(\sigma \cos \psi \cdot \rho \cos \varphi + \sigma \sin \psi \cdot \rho \sin \varphi)} f(\rho) d\varphi = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} f(\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{-i\sigma \rho \cos(\varphi - \psi)} d\varphi. \end{aligned}$$

В силу периодичности косинуса внутренний интеграл равен

$$2 \int_0^{\pi} e^{-i\sigma \rho \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(\sigma \rho)$$

(см., например, ЛВМ, п. XVII.24). Мы видим, что функция (18) также оказывается радиально-симметричной, т. е. $F = F(\sigma)$, где

$$F(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(\sigma \rho) f(\rho) \rho d\rho. \quad (20)$$

Аналогичным образом формула (19) дает

$$f(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(\sigma\rho) F(\sigma) \sigma d\sigma. \quad (21)$$

Формулы (20) и (21) определяют *преобразование Ханкеля* и его обращение. Обычно они пишутся без коэффициентов перед интегралами, так как $2\pi F(\sigma)$ можно вновь обозначить через $F(\sigma)$. Преобразованием Ханкеля называется также преобразование, которое получится, если для любого фиксированного $n = 0, 1, 2, \dots$ принять $f = f(\rho) e^{in\varphi}$. Проверьте, что тогда $F = F(\sigma) e^{in\varphi}$, где $f(\rho)$ и $F(\sigma)$ связаны формулами

$$F(\sigma) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{\infty} J_n(\sigma\rho) f(\rho) \rho d\rho, \quad f(\rho) = 2\pi i^n \int_0^{\infty} J_n(\sigma\rho) F(\sigma) \sigma d\sigma.$$

Свойства преобразования Ханкеля и формулы преобразования конкретных функций можно получить либо непосредственно, либо возвращаясь к преобразованию Фурье (18), (19), так как

$$f(\rho) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad F(\sigma) = F\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right).$$

4. Интегральные преобразования на конечном интервале.

Применяется также интегральные преобразования на конечном интервале — обычно с теми же ядрами, что были указаны выше, но с конечными a и b в формуле (12). Свойства и приложения таких преобразований указаны в гл. VI книги [113]. Мы остановимся здесь для примера на конечном синус-преобразовании Фурье

$$F(p) = \int_0^{\pi} \sin pt \cdot f(t) dt; \quad (22)$$

будем эту связь между функциями $f(t)$ и $F(p)$ обозначать, как и раньше, знаком $f(t) \rightarrow F(p)$. Верхний предел интегрирования может быть и другим: проверьте, что если

$$\Phi(p) = \int_0^l \sin pt \cdot f(t) dt,$$

то

$$\frac{l}{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{\pi}{l} p\right).$$

Если функция $f(t)$ в формуле (22) абсолютно интегрируема при $0 \leq t \leq \pi$, то функция $F(p)$ аналитична на всей плоскости p , т. е. является целой функцией. Формулу для разложения $f(t)$ в ряд Фурье по синусам

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt,$$

где

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

можно записать в виде

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} F(k) \sin kt \quad (0 \leq t \leq \pi) \quad (23)$$

и трактовать как формулу обращения преобразования (22).

Обозначим образ функции $f''(t)$ через $F_2(p)$; тогда

$$\begin{aligned} F_2(p) &= \int_0^{\pi} \sin pt \cdot f''(t) \, dt = \sin pt \cdot f'(t) \Big|_{t=0}^{\pi} - p \int_0^{\pi} \cos pt \cdot f'(t) \, dt = \\ &= \sin \pi p \cdot f'(\pi) - p \cos pt \cdot f(t) \Big|_{t=0}^{\pi} - p^2 \int_0^{\pi} \sin pt \cdot f(t) \, dt = \\ &= -p^2 F(p) + \sin \pi p \cdot f'(\pi) - p \cos \pi p \cdot f(\pi) + pf(0); \quad (24) \end{aligned}$$

при этом $f'(\pi)$ понимается как $f'(\pi - 0)$ и т. п.

Другие свойства преобразования (22) можно либо доказать непосредственно, либо же заметив, что $F(p)$ в формуле (22) представляет собой обычное синус-преобразование Фурье функции

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & (0 \leq t \leq \pi), \\ 0 & (\pi \leq t < \infty); \end{cases}$$

этот подход возможен и к другим интегральным преобразованиям на конечном интервале.

Свойства преобразований можно, как и в §2, применить к решению различных уравнений. Пусть, например, требуется решить уравнение (2.14) для $0 \leq t < \infty$, $0 \leq x \leq \pi$, если задано начальное условие (2.15) (для $0 \leq x \leq \pi$) и граничные условия

$$u|_{x=0} = \psi(t), \quad u|_{x=\pi} = \chi(t), \quad (\text{заданы}, 0 \leq t < \infty).$$

Совершив над $u(t, x)$ преобразование типа (22) по x , т. е. обозначим $u(t, x) \rightarrow U(t, p)$, считая t параметром. Тогда в силу формул (24) и (2.14) получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -ap^2 U + \sin \pi p \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} - p \cos \pi p \cdot \chi(t) + p\psi(t), \quad (25)$$

тогда как начальное условие даст

$$U|_{t=0} = \Phi(p) = \int_0^{\pi} \sin px \cdot \varphi(x) \, dx. \quad (26)$$

Имея в виду применение формулы обращения (23), положим в (25) p равным любому целому $k = 1, 2, 3, \dots$. Тогда второй член в правой части (25) выпадет,

и мы получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое при начальном условии (26) имеет решение

$$U = (Ut, k) = \Phi(k) e^{-ak^2 t} + k \int_0^t \left[(-1)^{k+1} \chi(\tau) + \psi(\tau) \right] e^{-ak^2(t-\tau)} d\tau$$

(проверьте!). Теперь искомое решение $u(t, x)$ получается с помощью формулы обращения типа (23):

$$u(t, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} U(t, k) \sin kx.$$

Глава IV

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Язык, «психология» и методы линейной алгебры все более широко применяются в современной прикладной математике. Линейная алгебра предоставляет естественный аппарат для единообразного изучения различных линейных физических и математических процессов, часто подсказывает само направление исследования. С помощью методов линейной алгебры изучаются и нелинейные задачи на основе линеаризации; многие нелинейные методы испытываются на линейных моделях. По этой причине элементы линейной алгебры в последние годы введены в общий курс математики для вузов. Мы будем предполагать знание этих элементов в том или ином объеме (определители и системы линейных алгебраических уравнений, матрицы и квадратичные формы, линейные пространства и линейные отображения); в частности, достаточно просмотреть ЛВМ, §§ VI.1,2, VII.1–3,6, XI.1–3, включая мелкий шрифт.

Однако более сложные приложения требуют более глубокого изучения линейных отображений, квадратичных форм и других объектов линейной алгебры. Поэтому здесь будут изложены дополнительные сведения из линейной алгебры, как углубляющие указанные элементы, так и принципиально новые. Дальнейший материал можно найти, например, в книгах [28, 118, 134].

Напомним, что *линейным пространством* называется совокупность (R) некоторых объектов, над которыми можно выполнять *линейные действия* — сложение их друг с другом и умножение их на числа, — причем эти действия должны удовлетворять некоторым естественным требованиям, *аксиомам линейного пространства*. В зависимости от того, допускается умножение только на вещественные или на любые комплексные числа, (R) называется *линейным пространством над полем вещественных или над полем комплексных чисел* или, короче, *вещественным или комплексным линейным пространством*. Мы, будем рассматривать только конечномерные пространства; в n -мерном пространстве (R) любая совокупность из n линейно независимых векторов (элементов) называется *базисом* и каждый элемент

$\mathbf{x} \in (R)$ ($\in$ — знак принадлежности) однозначно разлагается по базисным векторам.

Линейное пространство называется *евклидовым*, если в нем введено понятие *скалярного произведения*, удовлетворяющее определенным естественным аксиомам; евклидово пространство также может быть вещественным или комплексным. Основной пример n -мерного евклидова пространства — это совокупность всех n -мерных *числовых векторов*, т.е. столбцевых матриц высоты n , причем скалярное произведение в этом пространстве определено по правилу:

$$\text{если } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad \begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n && (\text{в вещественном случае}), \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_1 y_1^* + \dots + x_n y_n^* && (\text{в комплексном случае}), \end{aligned}$$

где звездочкой обозначается комплексно сопряженное число. (Мы будем в этой главе обозначать числовые векторы прямым полужирным шрифтом, в отличие от элементов произвольного линейного пространства, для которых будет применяться полужирный курсив.) В обоих случаях годится формула $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^* \mathbf{x}$, где звездочкой обозначается переход к *сопряженной матрице*, получающейся из исходной матрицы с помощью ее транспонирования и для матриц с комплексными элементами замены этих элементов на комплексно сопряженные. Другие n -мерные линейные или евклидовы пространства в определенном смысле равносильны (изоморфны) этому. В евклидовом пространстве можно говорить об *ортогональности* (перпендикулярности) векторов, о *норме* (длине) вектора и о *евклидовых базисах*, составленных из попарно ортогональных нормированных векторов.

Одним из центральных является понятие *линейного отображения* $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in (R)$, $\mathbf{y} \in (S)$) *линейного пространства* (R) в *линейное пространство* (S) ; при этом $\mathbf{x}$ пробегает все (R) и требуется, чтобы $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x}$. Совокупность $\mathbf{A}(R)$ всех образов, на которую отображается (R) , не обязана совпадать с (S) , а представляет собой, вообще говоря, некоторое (линейное) подпространство (S) . (Обратите внимание на различие терминов «*отображение в*» и «*отображение на*», т.е. заведомо на все.) Если в (R) и в (S) выбраны базисы, то каждый вектор $\mathbf{x} \in (R)$ (соответственно $\mathbf{y} \in (S)$) полностью характеризуется набором $\mathbf{x}$ (соответственно $\mathbf{y}$) своих координат, и имеет место соотношение $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, где $\mathbf{A}$ — *матрица отображения* $\mathbf{A}$ в выбранных базисах.

§1. Сопряженные отображения

1. Прямая сумма. Пусть у пространства (R) указаны какие-то его подпространства $(R_1), (R_2), \dots, (R_m)$, причем размерность подпространства (R_k) равна $n_k \geq 0$. Тогда говорят, что (R) *разложено в*

прямую сумму этих подпространств, если каждый вектор $\mathbf{x} \in (R)$ можно представить и притом единственным способом в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_m, \text{ где } \mathbf{x}_1 \in (R_1), \mathbf{x}_2 \in (R_2), \dots, \mathbf{x}_m \in (R_m). \quad (1)$$

Например, в трехмерном пространстве применяется как разложение вектора по трем осям (это значит, что $m = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$), так и разложение по оси и не параллельной ей плоскости (это значит, что $m = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$).

Легко проверить свойства разложения в прямую сумму:

1. *Любая совокупность ненулевых векторов $\mathbf{a}_k \in (R_k)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) линейно независима.* В самом деле, если, например, $\mathbf{a}_1 = \alpha \mathbf{a}_2 + \dots + \gamma \mathbf{a}_m$, то, обозначив $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{x}_2 = -\alpha \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{x}_m = -\gamma \mathbf{a}_m$, получим, что

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_m = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0},$$

а это противоречит (так как $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$) единственности представления вектора $\mathbf{0}$ в виде (1).

2. $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. В самом деле, если в каждом пространстве (R_k) выбрать базис из n_k векторов, то совокупность всех этих векторов при всех $k = 1, 2, \dots, m$ образует базис (R) (продумайте, почему).

Мы предоставляем читателю проверить, что и обратно, если у (R) даны подпространства $(R_1), (R_2), \dots, (R_m)$ и выполнено первое свойство, то совокупность $(\bar{R})$ векторов $\mathbf{x}$ вида (1) представляет собой подпространство пространства (R) и разлагается в прямую сумму своих подпространств $(R_1), (R_2), \dots, (R_m)$. Если к тому же выполнено второе свойство, то $(\bar{R}) = (R)$.

2. Инвариантные подпространства. Пусть задано отображение A пространства (R) в себя. Подпространство (R_1) пространства (R) называется *инвариантным* (относительно отображения A), если это отображение переводит (R_1) в себя, т.е. если для всех $\mathbf{x} \in (R_1)$ будет $A\mathbf{x} \in (R_1)$. При этом мы будем впредь исключать тривиальный случай, когда (R_1) нульмерно, т.е. состоит только из нуль-вектора.

Пусть, например, рассматривается вращение трехмерного пространства вокруг некоторой оси. Тогда совокупность векторов, параллельных этой оси, образует одномерное инвариантное подпространство; совокупность векторов, перпендикулярных этой оси, образует двумерное инвариантное подпространство; совокупность всех векторов образует трехмерное инвариантное подпространство (так как каждое пространство можно считать подпространством самого себя). Другой пример: совокупность собственных векторов, отвечающих заданному собственному значению отображения A , представляет собой инвариантное подпространство (почему?).

Пусть пространство (R) разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств (R_k) размерности n_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Выберем в (R) базис $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_n$ так, чтобы первые n_1 его векторов содержались в (R_1) , следующие n_2 — в (R_2) и

т. д. В таком базисе матрица $\mathbf{A}$ отображения A имеет характерную структуру. В самом деле, вспомните, что j -й столбец матрицы $\mathbf{A}$ — это столбец из координат вектора $A\mathbf{I}_j$ в выбранном базисе. Значит, при $j = 1, 2, \dots, n_1$ только первые n_1 элементов у этих столбцов могут быть отличными от нуля (почему?); при $j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$ могут быть отличными от нуля только элементы с такими же номерами и т. д. Мы получаем (продумайте это!), что матрица $\mathbf{A}$ имеет следующий вид (в условной записи):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m \\ 0 & & & & \end{pmatrix}; \quad (2)$$

по диагонали разместились квадратные матрицы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$ соответственно порядков $n_1, n_2, \dots, n_m$, а все прочие элементы равны нулю. Матрица вида (2) называется *квазидиагональной* с набором порядков $(n_1, n_2, \dots, n_m)$. Например, матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

квазидиагональные, с наборами порядков $(1, 1, 1)$, $(1, 2)$, (3) соответственно (впрочем, первой матрице можно также приписать набор порядков $(1, 2)$, $(2, 1)$ или (3)).

Обратно, если в некотором базисе матрица отображения A имеет вид (2), то подпространство (R_1) , *натянутое* на первые n_1 базисных векторов (т. е. составленное из всех линейных комбинаций этих векторов), подпространство (R_2) , *натянутое* на следующие n_2 базисных векторов, и т. д. — все инвариантны. Из (1) получаем

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 + \dots + A\mathbf{x}_m.$$

Таким образом, если выяснить, как действует отображение A в каждой подпространстве (R_k) (т. е. какова структура матриц $\mathbf{A}_k$), то мы получим и структуру всего отображения A : оно сводится к независимому действию над компонентами вектора в инвариантных *прямых слагаемых* $(R_1), (R_2), \dots, (R_m)$.

3. Сопряженные отображения. Пусть даны евклидовы комплексные пространства $(R), (S)$ (для вещественных пространств все рассмотрения совершенно аналогичны) и дано линейное отображение A пространства (R) в (S) ; коротко это записывают так: $(R) \xrightarrow{A} (S)$ или $A : (R) \rightarrow (S)$ (не путать с переходом к пределу!). Тогда

линейное отображение $B : (S) \rightarrow (R)$ называется *сопряженным* к A , если

$$(Ax, y)_{(S)} = (x, By)_{(R)} \text{ для всех } x \in (R), y \in (S); \quad (3)$$

здесь индекс указывает, в каком пространстве берется скалярное произведение. Сопряженное к A отображение обозначается, буквой A^* . Подчеркнем еще раз, что *если A отображает (R) в (S) , то A^* отображает (S) в (R)* .

Выберем в (R) евклидов базис $p_1, p_2, \dots, p_n$, а в (S) — евклидов базис $q_1, q_2, \dots, q_m$. Пусть в этих базисах A будет иметь матрицу A , а B — матрицу B . Тогда легко проверить, что *для справедливости соотношения (3) необходимо и достаточно, чтобы $B = A^*$* ; другими словами, *в евклидовых базисах сопряженные отображения имеют сопряженные матрицы и обратно*. В самом деле, в силу правила построения матрицы отображения в заданных базисах (см., например, ЛВМ, п. XI.6), элементами матрицы A служат числа $a_{jk} = (Ap_k, q_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m$), а элементами матрицы B — числа (Bq_k, p_j) . Отсюда в силу (3) получаем $b_{jk} = (Bq_k, p_j) = (Ap_j, q_k)^* = a_{kj}^*$, т.е. $B = A^*$. Обратно, если $B = A^*$,

$$x = \sum_{r=1}^n \alpha_r p_r, \quad y = \sum_{s=1}^m \beta_s q_s, \text{ то левая часть (3) равна } \sum_{r,s} \alpha_r \beta_s^* a_{sr}, \text{ а}$$

$$\text{правая часть равна } \sum_{r,s} \alpha_r \beta_s^* b_{rs}^* = \sum_{r,s} \alpha_r \beta_s^* a_{sr}.$$

Из доказанного вытекает, что для всякого отображения имеется сопряженное и притом только одно (именно, отображение с сопряженной матрицей); сопряженное к сопряженному отображению есть исходное отображение, т.е. $A^{**} = A$, отображения A^* и A взаимно сопряженные.

Если $(S) = (R)$ и $A^* = A$, то отображение A называется *самосопряженным*. В евклидовом базисе ему отвечает матрица $A = A^*$, т.е. $a_{ik} = a_{kj}^*$, такая матрица называется *самосопряженной* или *эрмитовой* по имени французского математика Ш. Эрмита (1822–1901). Для вещественных матриц самосопряженность равносильна симметричности.

Геометрические примеры сопряженных отображений легко получить с помощью транспонирования соответствующей матрицы. Пусть, например, мы рассматриваем отображения вещественной плоскости в себя; тогда растяжение вдоль оси, всестороннее растяжение, зеркальное отражение, проектирование на прямую — это самосопряженные отображения. Поворот на угол α сопряжен с поворотом на угол $-\alpha$, а сдвиг вдоль некоторой оси сопряжен с аналогичным сдвигом вдоль перпендикулярной оси.

4. Разложение, связанное с сопряженными отображениями.

Прямое разложение (п. 1) евклидова пространства называется ортогональным, если векторы из различных прямых слагаемых обязательно ортогональны друг другу. Например, трехмерное пространство можно представить в виде ортогональной прямой суммы плоскости и перпендикулярной ей прямой. Для любого подпространства (R_1) пространства

(R) можно указать и притом единственным способом *ортогональное дополнение*, т.е. подпространство (R_2), образующее вместе с (R_1) ортогональное прямое разложение (R): для этого нужно взять совокупность всех векторов из (R), каждый из которых ортогонален (R_1), т.е. всем векторам из (R_1). Отметим, в частности, что $\mathbf{0}$ и (R) служат ортогональными дополнениями друг друга.

Пусть дано линейное отображение A пространства (R) в пространство (S). Совокупность всех векторов $\mathbf{x} \in (R)$, для которых $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, называется *ядром* этого отображения, это ядро обозначается $A^{-1}(\mathbf{0})$; совокупность всех векторов вида $A\mathbf{x} (\mathbf{x} \in (R))$ называется *образом* при отображении A ; он обозначается $A(R)$. Мы предоставим читателю проверить, что $A^{-1}(\mathbf{0})$ представляет собой линейное подпространство (R), а $A(R)$ — линейное подпространство (S), причем размерность $A(R)$ равна рангу матрицы отображения A при произвольно выбранных базисах в (R) и (S).

Пусть теперь пространства (R) и (S) евклидовы. Тогда (R) разлагается в ортогональную прямую сумму своих подпространств $A^{-1}(\mathbf{0})$ и $A^*(S)$.

В самом деле, легко проверить ортогональность этих подпространств: если $\mathbf{x}_1 \in A^{-1}(\mathbf{0})$, $\mathbf{x}_2 \in A^*(S)$, то по определению $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2 = A^*\mathbf{y} (\mathbf{y} \in (S))$ и в силу формулы (3) $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_{(R)} = (\mathbf{x}_1, A^*\mathbf{y})_{(R)} = A(\mathbf{x}_1, \mathbf{y})_{(S)} = (\mathbf{0}, \mathbf{y})_{(S)} = 0$. Остается проверить, что каждый вектор $\mathbf{x} \in (R)$ можно представить в виде суммы $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in A^{-1}(\mathbf{0})$, $\mathbf{x}_2 \in A^*(S)$. Обозначим через $\mathbf{x}_2$ проекцию вектора $\mathbf{x}$ на подпространство $A^*(S)$; тогда $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}')_{(R)} = 0$ для любого вектора $\mathbf{x}' \in A^*(S)$. Другими словами, $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2, A^*\mathbf{y})_{(R)} = 0$ для любого $\mathbf{y} \in (S)$. В силу (3) получаем, что $(A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2), \mathbf{y})_{(S)} = 0$, а так как $\mathbf{y}$ произвольно, то $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$. Значит, $\mathbf{x} - \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \in A^{-1}(\mathbf{0})$, т.е. справедливость ортогонального разложения доказана.

Так как отображения A и A^* взаимно сопряженные, то, применяя доказанное утверждение к A^* , мы получим, что и (S) разлагается в ортогональную прямую сумму своих подпространств $A^{*-1}(\mathbf{0})$ и $A(R)$. Другими словами, *уравнение $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ при заданном $\mathbf{b} \in (S)$ имеет по крайней мере одно решение $\mathbf{x} \in (R)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{b}$ ортогонально $A^{*-1}(\mathbf{0})$, т.е. ортогонально всем линейно независимым решениям уравнения $A^*\mathbf{y} = \mathbf{0} (\mathbf{y} \in (S))$* . Оказывается, что это свойство имеет место и для целого ряда классов линейных уравнений в бесконечномерных пространствах.

Из доказанного ортогонального разложения вытекает, в частности, что

$$\dim A^{-1}(\mathbf{0}) + \dim A^*(S) = \dim (R), \quad \dim A^{*-1}(\mathbf{0}) + \dim A(R) = \dim (S),$$

где буквами $\dim$ обозначается размерность, от французского dimension. Кроме того, если ввести в (R) и (S) евклидовы базисы, то видно, что всегда $\dim A(R) = \dim A^*(S)$ (у сопряженных матриц ранги одинаковы!). Отсюда вытекает, что $\dim A^{-1}(\mathbf{0}) = \dim A^{*-1}(\mathbf{0}) =$

$= \dim(R) - \dim(S)$. В частности, если $(R) = (S)$, т. е. рассматривается отображение пространства в себя, то $\dim A^{-1}(\mathbf{0}) = \dim A^{*-1}(\mathbf{0})$, т. е. число линейно независимых решений уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равно аналогичному числу для уравнения $A^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

5. Отображение пространства в себя. Если $(R) = (S)$, то можно говорить о собственных значениях и собственных векторах отображения A , а также A^* . Легко доказать, что если λ служит собственным значением отображения A , то λ^* служит собственным значением отображения A^* , причем той же кратности. В самом деле, после выбора в (R) евклидова базиса соответствующие характеристические уравнения $\det(A - \lambda I) = 0$ и $\det(A^* - \lambda^* I) = 0$ получаются одно из другого заменой всех коэффициентов на их сопряженные значения, и потому наше утверждение вытекает из свойств сопряженных комплексных чисел (см. § II.1).

Докажем следующее свойство ортогональности: если $\mathbf{p}$ и λ — собственный вектор и соответствующее собственное значение для отображения A , а $\mathbf{q}$ и μ — для отображения A^* , причем $\lambda \neq \mu^*$, то $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$. Это вытекает из сравнения правого и левого членов в цепочке равенств

$$\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\lambda\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (A\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p}, A^*\mathbf{q}) = (\mathbf{p}, \mu\mathbf{q}) = \mu^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Отсюда вытекает такое следствие. Пусть все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ отображения A простые (различные) и $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ — соответствующие ненулевые собственные векторы; тогда они обязательно линейно независимы (докажите!) и поэтому могут быть приняты за базис в (R) . Мы видели, что $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ — собственные значения отображения A^* ; пусть $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ — соответствующие ненулевые собственные векторы. Тогда эти два базиса (R) биортогональны друг другу, т. е.

$$(\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_k) = 0 \quad (j \neq k). \quad (4)$$

При разложении любого вектора по заданному базису знание биортогонального базиса позволяет просто вычислить коэффициенты разложения: в самом деле, умножив равенство

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{p}_n$$

скалярно на $\mathbf{q}_k$ и воспользовавшись формулой (4), получим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{q}_k) = \alpha_k(\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k), \text{ т. е. } \alpha_k = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{q}_k)}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Ортогональный базис — это базис, биортогональный сам с собой.

Для каждого базиса $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ независимо от его происхождения, можно построить биортогональный базис $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$, который определяется одно-

значно с точностью до скалярных множителей. В самом деле, $\mathbf{q}_1$ надо взять ортогональным к $(n-1)$ -мерному подпространству, натянутому на $\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$, и т. п.; проверьте, что такие векторы $\mathbf{q}_j$ будут линейно независимыми, т. е. будут на самом деле образовывать базис. В n -мерном евклидовом пространстве нетрудно ввести понятие векторного произведения $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}]$, обладающего свойствами, аналогичными свойствам обычного векторного произведения двух векторов в трехмерном пространстве. Тогда можно просто положить $\mathbf{q}_1 = [\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_n]$ и т. п.

6. Самосопряженное отображение. Пусть A — самосопряженное отображение пространства (R) в себя; это значит, что $A^* = A$, т. е.

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y}) \quad \text{для всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in (R). \quad (5)$$

Напомним, что для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица A отображения A в любом евклидовом базисе была эрмитовой, т. е. чтобы $A^* = A$.

Все собственные значения самосопряженного отображения вещественны. В самом деле, если $A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1$ ($\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$), то, подставляя в (5) $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{x}_1$ получим после сокращения на $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = |\mathbf{x}_1|^2 \neq 0$, что $\lambda = \lambda^*$, откуда и следует наше утверждение.

Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству для самосопряженного отображения A также является инвариантным. В самом деле, пусть (R_1) — инвариантное подпространство (R) , а (R_2) — ортогональное дополнение к (R_1) . Возьмем любой вектор $\mathbf{x} \in (R_2)$; надо доказать, что и $A\mathbf{x} \in (R_2)$, т. е. $A\mathbf{x}$ ортогонален любому вектору $\mathbf{y} \in (R_1)$. Однако это вытекает из (5), так как $A\mathbf{y} \in (R_1)$.

Отсюда вытекает важное следствие: *в (R) можно выбрать евклидов базис из собственных векторов заданного самосопряженного отображения A .* В самом деле, выберем сначала какой-нибудь собственный вектор $\mathbf{l}_1$, притом единичной длины. Тогда в силу доказанного $(n-1)$ -мерное подпространство (S) всех векторов, ортогональных $\mathbf{l}_1$, будет инвариантным. Значит, можно рассматривать A только на (S) , это будет самосопряженное отображение (S) в себя; выберем какой-нибудь собственный вектор $\mathbf{l}_2$ этого отображения, затем рассмотрим $(n-2)$ -мерное подпространство всех векторов из (S) , ортогональных $\mathbf{l}_2$, и т. д. Продолжая таким образом, мы построим искомый базис.

Это следствие можно сформулировать на чисто матричном языке. Как известно, при переходе от одного декартова базиса к другому матрица отображения преобразуется по формуле $A' = H^{-1}AH$, где матрица перехода H удовлетворяет соотношениям

$$H^*H = HH^* = I \text{ т. е. } H^* = H^{-1};$$

такие матрицы H называются *унитарными* (вещественные унитарные матрицы называются *ортогональными*). Таким образом, мы получаем, что для каждой эрмитовой матрицы A можно подобрать такую унитарную матрицу H , что матрица $H^{-1}AH$ будет диагональной с собственными значениями матрицы A на главной диагонали.

На основании доказанной вещественности собственных значений получаем, что *следствия, приведенные в последних двух абзацах, справедливы и для самосопряженного отображения вещественного евклидова пространства в себя, а также для вещественных симметричных матриц.*

7. Экстремальное свойство собственных значений. Пусть A — самосопряженное отображение вещественного пространства (R) в себя. Поставим каждому вектору x в соответствие значение (Ax, x) , получим числовую функцию, заданную на (R) . Рассмотрим значения этой функции на *единичной сфере* этого пространства, т.е. на $(n-1)$ -мерном многообразии (S) векторов, удовлетворяющих соотношению $|x| = 1$. Тогда *собственные векторы отображения A — это векторы, в которых функция (Ax, x) принимает стационарные значения на (S) , а сами эти значения равны соответствующим собственным значениям. В частности, наибольшее и наименьшее собственные значения равны соответственно наибольшему и наименьшему значениям функции (Ax, x) на (S) , тогда как на собственных векторах, которым отвечают промежуточные собственные значения, эта функция имеет минимакс.*

Для доказательства введем в (R) евклидов базис из собственных векторов $l_1, l_2, \dots, l_n$ отображения A , тогда каждый вектор $x \in (R)$ можно разложить по этому базису: $x = x_1 l_1 + x_2 l_2 + \dots + x_n l_n$. Рассматриваемая функция запишется в виде

$$(Ax, x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения отображения A , а уравнение сферы (S) примет вид

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Таким образом, мы пришли к обычной задаче на условный экстремум (см., например, ЛВМ, п. XII.10). Для отыскания условных стационарных значений пользуемся методом Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (f - \mu g) \equiv 2\lambda_k x_k - 2\mu x_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

где буквой μ обозначен множитель Лагранжа. Так как все x_k не могут равняться нулю, то из (6) получаем, что какая-нибудь из разностей $\lambda_k - \mu$ равна нулю, например, при $k = j$. Но тогда из (6) видим, что все координаты x_k , для которых $\lambda_k \neq \lambda_j$, должны равняться нулю; а этим условием и определяются собственные векторы, которым отвечает собственное значение λ_j (почему?).

Утверждение о максимальном (и аналогично о минимальном) собственном значении сразу получается, если считать все λ_k занумерованными в порядке $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ и представить

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \\ - (\lambda_1 - \lambda_2)x_2^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)x_3^2 - \dots - (\lambda_1 - \lambda_n)x_n^2$$

(продумайте это!). Отметим, что если собственное значение λ_1 является d -кратным, где $d \geq 2$, то максимум функции $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в l_1 является *нестрогим*, так как она принимает постоянное значение λ_1 на всем $(d-1)$ -мерном пересечении (S) с подпространством, натянутым на векторы $l_1, l_2, \dots, l_d$.

На рис. 63 показана возможная картина линий уровня функции $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ на единичной сфере в трехмерном пространстве с отмеченными направлениями убывания функции. При этом рис. 63, а иллюстрирует случай $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, а рис. 63, б — случай $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$ (продумайте эти рисунки!).

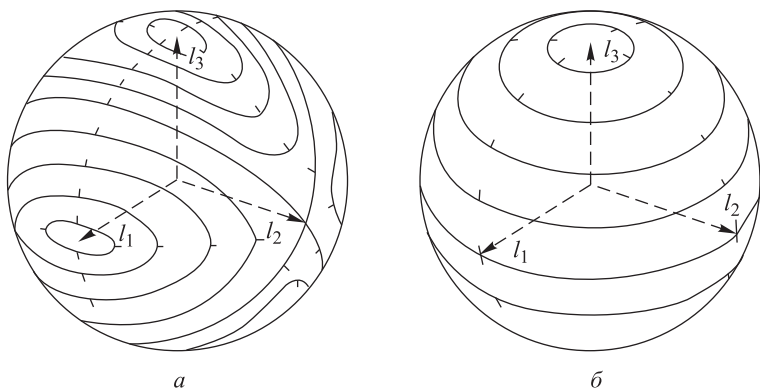


Рис. 63

Доказанные свойства справедливы и для самосопряженного отображения комплексного евклидова пространства (R) в себя. При этом полезно иметь в виду следующее свойство: *отображение A такого пространства (R) в себя является самосопряженным тогда и только тогда, когда функция $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ принимает в (R) только вещественные значения.* В самом деле, для самосопряженного A имеем $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})^* = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{x})$, т.е. $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ вещественно; при этом в базисе из собственных векторов будет $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1|x_1|^2 + \lambda_2|x_2|^2 + \dots + \lambda_n|x_n|^2$, $|\mathbf{x}|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$ (проверьте!), откуда и вытекают упомянутые свойства. Обратно, легко проверить, что любое отображение A можно представить в виде $A_1 + iA_2$, где $A_1 = \frac{A + A^*}{2}$, $A_2 = \frac{A - A^*}{2i}$ — самосопряженные отображения; поэтому если значения $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (A_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) + i(A_2\mathbf{x}, \mathbf{x})$ вещественны, то $(A_2\mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv 0$, откуда $A_2\mathbf{x} \equiv 0$ (почему?), т.е. $A = A_1$, $A = A^*$.

Иногда взамен функции $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in (S)$) рассматривают функцию $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(A\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ на всем пространстве (R) (кроме вектора $\mathbf{x} = 0$, в котором функция φ имеет разрыв). Так как функция φ постоянна на

каждой прямой, проходящей через начало координат, то доказанные выше стационарные и экстремальные свойства собственных значений можно сформулировать и в терминах функции φ .

Эти экстремальные свойства применяются для оценок и приближенного вычисления наибольшего и наименьшего собственных значений и приближенного вычисления соответствующих собственных векторов для заданного самосопряженного отображения или для заданной симметрической матрицы с помощью численного решения задачи на экстремум функции нескольких переменных. Этот метод предложил выдающийся английский физик Дж. Рэлей (1842–1919).

Для вычисления второго по величине собственного значения λ_2 и соответствующего собственного вектора $\mathbf{l}_2$ можно воспользоваться тем, что, как видно из предыдущего, λ_2 равно максимуму функции $\varphi(\mathbf{x})$ на подпространстве векторов, удовлетворяющих условию $(\mathbf{x}, \mathbf{l}_1) = 0$. Для вычисления λ_3 надо воспользоваться двумя условиями $(\mathbf{x}, \mathbf{l}_1) = 0$, $(\mathbf{x}, \mathbf{l}_2) = 0$ и т. д.

При вычислении и особенно исследовании собственных значений иногда пользуются также следующей *теоремой Р. Куранта*, которая дает выражение для каждого собственного значения, не связанное с построением предшествующих ему собственных векторов:

$$\lambda_k = \lim_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1} \in (R)} \left[\lim_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1) = \dots = (\mathbf{x}, \mathbf{a}_{k-1}) = 0 \\ |\mathbf{x}| = 1}} (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right] \quad (k = 1, \dots, n). \quad (7)$$

Здесь максимум при выбранных векторах $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}$ берется по совокупности ортогональных им всем векторов единичной длины, а затем берется наименьшее значение этого максимума, зависящего от выбора совокупности векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}$, для всевозможных таких совокупностей.

В самом деле, при заданных $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}$ среди векторов вида $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{l}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{l}_k$ обязательно найдется по крайней мере один, удовлетворяющий условиям $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1) = \dots = (\mathbf{x}, \mathbf{a}_{k-1}) = 0$, $|\mathbf{x}| = 1$ (почему?); но для него $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1 \alpha_1^2 + \dots + \lambda_k \alpha_k^2 \geq \lambda_k$; значит, и вся правая часть (7) не меньше λ_k . Но если выбрать $\mathbf{a}_1 = \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1} = \mathbf{l}_{k-1}$, то выражение в квадратных скобках (7) равно λ_k ; (проверьте!), а потому и вся правая часть (7) равна λ_k .

§2. Квадратичные формы

1. Введение. *Формой* от нескольких переменных в алгебре называют однородный, многочлен от этих переменных; в соответствии со степенью этого многочлена форма может быть *линейной*, *квадратичной*, *третьей степени* и т. д. Здесь мы будем рассматривать квадратичные формы с вещественными коэффициентами от вещественных переменных. Как известно из вводного курса линейной алгебры, квадратичную форму F от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно записать в виде $F = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — столбец из этих переменных, а $\mathbf{A}$ — симметрическая матрица этой формы. При линейной замене переменных по

формуле $\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x}'$ форма преобразуется по формуле $F = \mathbf{x}'^* \mathbf{A}' \mathbf{x}'$, где $\mathbf{A}' = \mathbf{H}^* \mathbf{A} \mathbf{H}$ (докажите!).

Из результатов п. 1.6 вытекает, что всегда можно подобрать такую ортогональную матрицу $\mathbf{H}$, что матрица $\mathbf{A}'$ будет диагональной, т. е. в новых переменных квадратичная форма будет иметь вид

$$F = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2, \quad (1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения исходной матрицы $\mathbf{A}$. Такая квадратичная форма, без попарных произведений переменных, также называется диагональной.

Если все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ положительны, форма F называется положительно определенной, если все $\lambda_k < 0$, — отрицательно определенной; те и другие формы называются *дефинитными*; для них характерно то, что они равны нулю только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (почему?). Если имеются $\lambda_k = 0$, форма F называется *вырожденной*; для этого необходимо и достаточно, чтобы $\det \mathbf{A} = 0$. Из (1) видно, что вырожденная форма после соответствующей линейной замены становится функцией менее чем n переменных.

Описанное приведение квадратичной формы к диагональному виду (1) имеет простой геометрический смысл. Уравнение $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ определяет в n -мерном пространстве E_n многообразие (M) размерности $n - 1$, которое естественно называть поверхностью второго порядка; при этом, так как $F(-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \equiv F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то (M) имеет центр симметрии в начале координат O . Замена переменных по формуле $\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x}'$ с ортогональной матрицей $\mathbf{H}$ означает поворот осей координат вокруг O (быть может, в комбинации с зеркальным отражением одной из них); значит, производится такой поворот осей, после которого уравнение поверхности (M) примет вид

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2 = 1, \quad (2)$$

называемый каноническим (вспомните канонические уравнения линий и поверхностей второго порядка). Из уравнения (2) видно, что оси $x_1', x_2', \dots, x_n'$ служат осями симметрии поверхности (S) , они называются ее *главными осями*; поэтому и описанное преобразование квадратичной формы называется *приведением ее к главным осям*.

Если форма F была невырожденной, то может получиться $n + 1$ тип поверхностей, в зависимости от числа положительных и отрицательных из чисел λ_k . В частности, если все $\lambda_k > 0$, получается эллипсоид с полуосями $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$, (почему?), если все $\lambda_k < 0$, получается мнимая поверхность; в остальных случаях получаются гиперboloиды различных типов. (Что будет, если форма F вырожденная?)

В заключение скажем об *эрмитовых квадратичных формах* вида $F = \mathbf{z}^* \mathbf{A} \mathbf{z}$ с эрмитовой (п. 1.3) матрицей $\mathbf{A}$ и комплексным столбцом $\mathbf{z}$. Так как $F^* = F$ (почему?), то такая форма принимает только веще-

ственные значения. После соответствующего унитарного преобразования $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{z}'$ (п. 1.6) получаем

$$F = \mathbf{z}'^* \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mathbf{z}' = \lambda_1 |z'_1|^2 + \lambda_2 |z'_2|^2 + \dots + \lambda_n |z'_n|^2.$$

2. Закон инерции квадратичных форм. Вернемся к вещественным квадратичным формам $F = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$. Такую форму можно привести к диагональному виду многими различными способами, не требуя ортогональности приводящей матрицы $\mathbf{H}$ (см., например, п. 3). При этом коэффициенты при квадратах неизвестных в диагональном виде отнюдь не являются инвариантными. Однако *количества положительных, нулевых и отрицательных этих коэффициентов не зависят от способа приведения квадратичной формы к диагональному виду*; этот факт называется *законом инерции квадратичных форм*. Набор этих количеств называется *сигнатурой* заданной формы, *только сигнатура и является инвариантом формы при ее произвольных преобразованиях*.

Для доказательства закона инерции допустим, что форма F приведена к диагональному виду двумя способами: $\mathbf{x} = \mathbf{H}' \mathbf{x}'$ и $\mathbf{x} = \mathbf{H}'' \mathbf{x}''$. Приравнявая результаты, получим

$$\lambda'_1 x'^2_1 + \lambda'_2 x'^2_2 + \dots + \lambda'_n x'^2_n \equiv \lambda''_1 x''^2_1 + \lambda''_2 x''^2_2 + \dots + \lambda''_n x''^2_n. \quad (3)$$

Мы докажем только, что количества положительных коэффициентов слева и справа одинаковы; тогда, поменяв знаки, получим как следствие, что и количества отрицательных коэффициентов одинаковы, а из этих двух фактов вытекает, что и количества нулевых коэффициентов одинаковы.

Допустим, что в левой части формулы (3) положительные коэффициенты $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{k'}$, а в правой — коэффициенты $\lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_{k''}$, причем, для определенности, $k'' > k'$. Приравняем

$$x'_1 = 0, \quad x'_2 = 0, \dots, \quad x'_{k'} = 0, \quad x''_{k''+1} = 0, \quad x''_{k''+2} = 0, \dots, \quad x''_n = 0.$$

Если сюда подставить выражения всех x'_j и x''_j через $x_1, x_2, \dots, x_n$, то мы получим относительно последних систему линейных однородных уравнений, причем уравнений будет $k' + (n - k'') < n$, а неизвестных n . Такая система обязательно имеет по крайней мере одно ненулевое решение (почему?). Найдя соответствующие значения всех x'_j и x''_j и подставив их в (3), получим, что левая часть ≤ 0 , а правая > 0 (подумайте это!). Полученное противоречие и доказывает закон инерции.

3. Метод Якоби и теорема Сильвестра. Здесь мы опишем предложенный К. Якоби метод приведения вещественной квадратичной формы $F = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ к диагональному виду, не требующий решения алгеб-

для нахождения α_{13} и α_{23} , так как α_{12} уже найдено. Можно показать, что определитель этой системы равен Δ_2 , и так как по условию $\Delta_2 \neq 0$, то возможно найти α_{13} , α_{23} . Из формулы преобразования матрицы квадратичной формы получаем, что

$$p_1 p_2 p_3 = \Delta_3, \text{ откуда } p_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}.$$

Продолжая далее таким же образом, мы получим требуемое преобразование, приводящее исходную форму к диагональному виду

$$\Delta_1 x_1'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2'^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} x_3'^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n'^2. \quad (7)$$

Следствие. Если все $\Delta_k \neq 0$, то форма $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ имеет сигнатуру $(n - s, 0, s)$, где s — число перемен знака в последовательности $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. В самом деле, это число как раз равно числу отрицательных коэффициентов в формуле (7). А так как нулевые коэффициенты по условию отсутствуют, то остальные $n - s$ коэффициентов положительные.

Теорема Сильвестра (Д.Сильвэстр, 1814–1897, английский математик). Для положительной определенности формы $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы $\mathbf{A}$ были положительны. В самом деле, если все $\Delta_k \neq 0$, то утверждение вытекает из предыдущего абзаца. Пусть теперь некоторый минор

$\Delta_k = 0$; это значит, что сумма $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ как квадратичная форма

от $x_1, x_2, \dots, x_k$ является вырожденной, а потому наверняка можно подобрать ненулевую (нетривиальную) комбинацию значений $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_k = b_k$, обращающую эту форму в нуль. Но тогда исходная форма при ненулевой комбинации значений $x_1 = b_1, \dots, x_k = b_k, x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0$ обращается в нуль и потому не может быть дефинитной. Теорема доказана. Отметим, что она оказывается справедливой и для эрмитовых квадратичных форм (п. 1).

4. Одновременное приведение двух квадратичных форм к диагональному виду. Пусть заданы две вещественные квадратичные формы $F = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ и $G = \mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x}$, из которых первая положительно определенная. Тогда существует единое вещественное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{H} \mathbf{x}'$, приводящее первую форму к сумме квадратов, а вторую — к диагональному виду.

В самом деле, осуществим сначала преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{K} \mathbf{y}$, приводящее форму F к диагональному виду $p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + \dots + p_n y_n^2$. Тогда все $p_k > 0$; и потому можно осуществить преобразование $p_i y_i^2 = y_i'^2$, т. е. $y_1 = \frac{1}{\sqrt{p_1}} y_1', y_2 = \frac{1}{\sqrt{p_2}} y_2', \dots, y_n = \frac{1}{\sqrt{p_n}} y_n'$, коротко $\mathbf{y} = \mathbf{L} \mathbf{y}'$, приводящее F к виду

$$F = y_1'^2 + y_2'^2 + \dots + y_n'^2 = \mathbf{y}'^* \mathbf{y}'.$$

В результате обоих этих преобразований из G получается $G = \mathbf{y}'^* \mathbf{L}^* \mathbf{K}^* \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{L} \mathbf{y}' = \mathbf{y}'^* \mathbf{B}' \mathbf{y}'$, где $\mathbf{B}' = \mathbf{L}^* \mathbf{K}^* \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{L}$ ($\mathbf{B}'^* = \mathbf{B}'$). Осушествим теперь приведение формы $\mathbf{y}'^* \mathbf{B}' \mathbf{y}'$ к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования $\mathbf{y}' = \mathbf{H}' \mathbf{x}'$. Получим окончательно

$$\mathbf{x} = \mathbf{K} \mathbf{L} \mathbf{H}' \mathbf{x}' = \mathbf{H} \mathbf{x}', \quad \text{где } \mathbf{H} = \mathbf{K} \mathbf{L} \mathbf{H}';$$

форма G станет диагональной по выбору $\mathbf{H}'$, а форма F перейдет в $\mathbf{x}'^* \mathbf{x}' = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots x_n'^2$ (почему?). Утверждение доказано.

Нетрудно установить, какие получатся коэффициенты у формы G . В самом деле, из равенств $\mathbf{H}^* \mathbf{A} \mathbf{H} = \mathbf{I}$, $\mathbf{H}^* \mathbf{B} \mathbf{H} = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n)$ вытекает, что

$$(\det \mathbf{H})^2 \det(\lambda \mathbf{A} - \mathbf{B}) = (\lambda - g_1)(\lambda - g_2) \dots (\lambda - g_n)$$

(почему?). Значит, диагональные коэффициенты g_j — это корни уравнения $\det(\lambda \mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0$, или, так как $\lambda \mathbf{A} - \mathbf{B} = -\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})$, это собственные значения матрицы $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$. Заодно мы видим, что при сделанных предположениях матрица $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, хотя, вообще говоря, не симметрическая, должна иметь все собственные значения вещественные.

Это утверждение имеет важное применение в теории колебаний (п. VIII.3.6).

§3. Структура линейного отображения

Рассмотрим линейное отображение A комплексного линейного n -мерного пространства (R) в себя. В элементах линейной алгебры легко доказывается, что если это отображение имеет n различных собственных значений, то каждому из этих значений λ_k отвечает один линейно независимый собственный вектор $\mathbf{l}_k$. В базисе из собственных векторов матрица отображения имеет диагональный вид $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, т.е. координаты векторов преобразуются по формулам

$$y'_1 = \lambda_1 x'_1, \quad y'_2 = \lambda_2 x'_2, \quad \dots, \quad y'_n = \lambda_n x'_n,$$

где штрихом обозначены координаты в указанном базисе. Таким образом, отображение A сводится к комбинации растяжения в λ_1 раз в направлении $\mathbf{l}_1$, растяжения в λ_2 раз в направлении $\mathbf{l}_2$ и т.д.

Однако если характеристическое уравнение для собственных значений имеет кратные корни, то отображение A имеет, вообще говоря, более сложную структуру. Цель этого параграфа состоит в описании этой структуры.

1. Отображение с единственным собственным вектором. Заметим прежде всего, что отображение A имеет в силу основной теоремы алгебры по крайней мере одно собственное значение, которому отвечает d -мерное ($d \geq 1$) подпространство собственных векторов. В этом

пункте мы будем считать, что собственное значение только одно и $d = 1$, т.е. собственный вектор определен с точностью до скалярного множителя однозначно. Будем считать сначала, что $\lambda = 0$, т.е. собственные векторы определяются равенством $Ax = 0$.

Нам понадобится следующая простая лемма: *если отображение A имеет только нулевое собственное значение и для некоторых $x \in (R)$ и $k = 0, 1, 2, \dots$ элементы $x, Ax, A^2x, \dots, A^kx$ линейно зависимы, то $A^kx = 0$.*

Доказательство. Пусть $x \neq 0$, и пусть, присоединяя к x последовательно векторы $Ax, A^2x, \dots$, мы обнаружим, что векторы $x, Ax, A^2x, \dots, A^{l-1}x$ еще линейно независимы, а векторы $x, Ax, A^2x, \dots, A^{l-1}x, A^l x$ уже линейно зависимы ($l \leq k$). Тогда $A^l x$ линейно выражается через предыдущие векторы (почему?), т.е. выполняется соотношение вида

$$A^l x + a_1 A^{l-1} x + \dots + a_{l-1} Ax + a_j x = 0, \quad (1)$$

где $a_1, \dots, a_{l-1}, a_l$ — некоторые скаляры. Как известно из алгебры, многочлен

$$P(z) = z^l + a_1 z^{l-1} + \dots + a_{l-1} z + a_l$$

можно разложить на линейные множители

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_l) \quad (2)$$

(см. § II.1). Поэтому в силу (1) получим

$$(A - z_1 I)(A - z_2 I) \dots (A - z_l I)x = 0, \quad (3)$$

где I — тождественное отображение. Обозначим $(A - z_2 I) \dots (A - z_l I)x$ через y , тогда $y \neq 0$ (почему?). Из (3) получим

$$(A - z_1 I)y = 0, \quad \text{т.е.} \quad Ay = z_1 y.$$

Значит, z_1 — собственное значение, т.е., по предположению $z_1 = 0$. Но так как в разложении (2) сомножители можно переставлять, то и $z_2 = \dots = z_l = 0$, т.е. $P(z) \equiv z^l$, откуда $a_1 = \dots = a_{l-1} = a_l = 0$, и из (1) получаем, что $A^l x = 0$, но тогда и $A^k x = A^{k-l} A^l x = 0$. Лемма доказана.

Будем теперь для простоты считать, что $n = 3$, т.е. что основное пространство (R) , в котором действует отображение A , трехмерно. По предположению, подпространство (S_1) собственных векторов одномерно. Выберем такой вектор $x_0 \notin (S_1)$ ($\notin$ — знак не принадлежности); могут представиться два случая.

1. Пусть $A^2 x_0 \neq 0$. Обозначим тогда $l_1 = x_0, l_2 = Ax_0, l_3 = A^2 x_0$. В силу доказанной леммы эти векторы линейно независимы и потому образуют базис в (R) . Так как $Al_1 = l_2, Al_2 = l_3, Al_3 = 0$ (последнее вытекает из той же леммы, так как $Al_3 = A^3 x_0$), то матрица отображения в выбранном базисе имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор l_3 собственный, т. е. натянутое на него подпространство совпадает с (S_1) . Легко проверить (проделайте это!), что двумерное подпространство (S_2) , натянутое на векторы l_2 и l_3 , определяется соотношением $A^2x = 0$.

2. Пусть $A^2x_0 = 0$. Обозначим через $y_0 \neq 0$ какой-либо собственный вектор и выберем любой вектор $x_1 \in (R)$ вне двумерного подпространства, натянутого на x_0 и y_0 . Тогда $A^2x_1 \neq 0$, так как в противном случае можно написать (проверьте!):

$$\begin{aligned} A(Ax_0) &= 0, & Ax_0 &= \alpha y_0 \quad (\alpha \neq 0); & A(Ax_1) &= 0, \\ Ax_1 &= \beta y_0 \quad (\beta \neq 0), \\ A(\beta x_0 - \alpha x_1) &= \beta \alpha y_0 - \alpha \beta y_0 = 0, & \beta x_0 - \alpha x_1 &= \gamma y_0, \\ x_1 &= \frac{\beta}{\alpha} x_0 - \frac{\gamma}{\alpha} y_0, \end{aligned}$$

и мы пришли, бы к противоречию. Итак, если обозначить $l_1 = x_1, l_2 = Ax_1, l_3 = A^2x_1$, то мы возвращаемся к случаю 1.

Мы предполагали, что собственное значение λ равно нулю. Чтобы рассмотреть общий случай, достаточно воспользоваться простым свойством: *x является собственным вектором отображения A , отвечающим собственному значению λ , в том и только том случае, если он является собственным вектором отображения $A - \alpha I$, отвечающим собственному значению $\lambda - \alpha$* . В самом деле, равенства $Ax = \lambda x$ и $(A - \alpha I)x = (\lambda - \alpha)x$ равносильны.

Поэтому если отображение A имеет собственное значение λ , то отображение $A_1 = A - \lambda I$ имеет нулевое собственное значение, и мы приходим к исследованному случаю. Выберем для отображения A_1 векторы l_1, l_2, l_3 , как описано выше. Тогда в терминах отображения A получим $(A - \lambda I)l_1 = l_2$ и т. д., т. е.

$$Al_1 = \lambda l_1 + l_2, \quad Al_2 = \lambda l_2 + l_3, \quad Al_3 = \lambda l_3, \quad (4)$$

а потому матрица отображения A в таком базисе имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Такая матрица называется *жордановой клеткой*; для других n она имеет вид:

$$n = 1 : (\lambda); \quad n = 2 : \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}; \quad n = 4 : \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Векторы l_1, l_2 , связанные соотношениями (4) (и аналогичными соотношениями при других n) называются *присоединенными* к собственному вектору l_3 . Подпространства (S_1) , (S_2) и $(S_3) = (R)$, натянутые соответственно на векторы l_3 ; l_2 и l_3 ; l_1, l_2 и l_3 , определяются соотношениями $(A - \lambda I)x = 0$; $(A - \lambda I)^2 x = 0$; $(A - \lambda I)^3 x = 0$.

2. Отображение с единственным собственным значением. Будем опять для простоты считать, что $n = 3$, а собственное значение равно нулю. Случай, когда подпространство (S) собственных векторов одномерно, был разобран в п. 1. Пусть теперь (S) двумерно; выберем произвольно $l_1 \in (S)$ ($l_1 \in (R)$) и обозначим $l_2 = Al_1$. Тогда $l_2 \in (S)$ (в противном случае $A^2 l_1 \neq 0$ и в силу леммы п. 1 векторы l_1, l_2 и Al_2 можно принять за базис с теми же свойствами, что в п. 1, а это противоречит двумерности (S)); выберем произвольно $l_3 \in (S)$, $l_3 \neq l_2$. Тогда векторы l_1, l_2, l_3 составляют базис (R) , причем

$$Al_1 = l_2, \quad Al_2 = 0, \quad Al_3 = 0.$$

Для произвольного собственного значения мы получаем в этом случае аналогично п. 1

$$Al_1 = \lambda l_1 + l_2, \quad Al_2 = \lambda l_2, \quad Al_3 = \lambda l_3.$$

Таким образом, векторы l_2 и l_3 собственные, а вектор l_1 присоединен к l_2 ; в выбранном базисе отображение имеет матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Получилась квазидиагональная матрица (п. 1.2), составленная из жордановых клеток второго и первого порядков. Соотношения $(A - \lambda I)x = 0$ и $(A - \lambda I)^2 x = 0$ определяют соответственно (S) и (R) .

Наконец, в случае, когда (S) трехмерно, т.е. $(S) = (R)$, можно выбрать базис l_1, l_2, l_3 произвольно, и матрица будет иметь вид

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Получается диагональная матрица, т.е. квазидиагональная матрица из трех жордановых клеток первого порядка. Все векторы (R) удовлетворяют соотношению $(A - \lambda I)x = 0$.

Оказывается, что аналогичный результат имеет место при любой размерности p пространства (R) , если отображение A имеет единственное собственное значение λ . Именно, после соответствующего выбора базиса $l_1, l_2, \dots, l_p$ матрица A' этого отображения приобре-

тает квазидиагональный вид, составленный из жордановых клеток некоторых порядков $p_1, p_2, \dots, p_d$, где $p_1 + p_2 + \dots + p_d = p$, причем в каждой клетке на диагонали стоит λ . Таким образом, векторы $l_1, l_2, \dots, l_{p_1-1}$ будут присоединенными к собственному вектору l_{p_1} , векторы $l_{p_1+1}, l_{p_1+2}, \dots, l_{p_1+p_2-1}$ — к собственному вектору $l_{p_1+p_2}$ и т. д. При этом d -мерное подпространство (S_1) , натянутое на векторы $l_{p_1}, l_{p_1+p_2}, \dots, l_{p_1+p_2+\dots+p_d} = l_p$ — это как раз подпространство собственных векторов, т. е. решений уравнения $(A - \lambda I)x = 0$. Подпространство (S_2) , натянутое на все собственные векторы и на присоединенные векторы, непосредственно предшествующие собственным, — это подпространство решений уравнения $(A - \lambda I)^2 x = 0$ и т. д.

Обозначим через d_k размерность подпространства (S_k) ($d_1 = d$). При переходе от (S_1) к (S_2) размерность увеличилась на $d_2 - d_1$. Но она должна увеличиться на количество добавленных присоединенных векторов, т. е. на количество жордановых клеток, порядок которых больше единицы (почему?). Значит, количество клеток, порядок которых равен единице, равно $d_1 - (d_2 - d_1) = 2d_1 - d_2$. Аналогично получаем, что количество клеток, порядок которых равен двум, равно $(d_2 - d_1) - (d_3 - d_2) = 2d_2 - d_1 - d_3$ и т. д. (Проверьте, что сумма полученных выражений равна числу d_1 всех клеток.)

3. Общий случай. Пусть задано произвольное линейное отображение A линейного комплексного n -мерного пространства (R) в себя. Вектор $x \in (R)$ называется *корневым вектором* этого отображения, отвечающим значению λ , если $(A - \lambda I)^k x = 0$ для некоторого $k = 1, 2, 3; \dots$ Легко проверить следующие свойства.

1. *Совокупность (R') всех корневых векторов, отвечающих заданному значению λ , образует инвариантное подпространство (R) .* В самом деле, если x_1 и x_2 — два таких вектора, т. е. $(A - \lambda I)^{k_1} x_1 = 0$, $(A - \lambda I)^{k_2} x_2 = 0$, а $x = \alpha x_1 + \beta x_2$ и, для определенности, $k_1 \geq k_2$, то $(A - \lambda I)^{k_1} x = 0$ (почему?), т. е. и x такой вектор. Значит, (R') есть подпространство (R) . Его инвариантность вытекает из равенства $(A - \lambda I)^k (Ax) \equiv A[(A - \lambda I)^k x]$ (продумайте это!).

2. *(R') имеет ненулевую размерность тогда и только тогда, когда λ есть собственное значение отображения A .* В самом деле, если λ — собственное значение, то (R') , во всяком случае, содержит соответствующее подпространство собственных векторов (для них $(A - \lambda I)x = 0$). Обратно, пусть (R') имеет ненулевую размерность, т. е. для заданного λ имеется по крайней мере один корневой вектор $x \neq 0$. Пусть k — наименьший показатель, для которого $(A - \lambda I)^k x = 0$. Обозначив $(A - \lambda I)^{k-1} x = y$, получим, что $y \neq 0$, $(A - \lambda I)y = 0$, т. е. λ — собственное значение отображения A .

В соответствии с этим свойством будем рассматривать только корневые векторы, отвечающие собственным значениям отображения A . Обозначим все различные собственные значения через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, а соответствующие подпространства корневых векторов — через $(R_1), (R_2), \dots, (R_m)$.

3. (R) разлагается в прямую сумму подпространств корневых векторов $(R_1), (R_2), \dots, (R_m)$.

Доказательство этого громоздко и будет проведено по этапам. Докажем сначала *теорему Гамильтона–Кэли*: пусть $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ — характеристический многочлен какой-либо матрицы $\mathbf{A}$; тогда $P(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Другими словами каждая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Для доказательства обозначим через $\mathbf{Q}(\lambda)$ транспонированную матрицу из алгебраических дополнений к $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$; обе они — полиномиальные матрицы, т. е. их элементами служат многочлены от λ . Тогда

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{Q}(\lambda) = P(\lambda)\mathbf{I} \quad (6)$$

(почему?). С другой стороны, легко проверить, что любой многочлен вида $P(u) - P(v)$ делится нацело на $u - v$, т. е. $P(u) - P(v) \equiv (u - v)\Phi(u, v)$, где Φ — некоторый многочлен от двух переменных. Отсюда и из (6) получаем (продумайте эти вычисления с матрицами!)

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A}) &= P(\lambda \mathbf{I}) + (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\Phi(\mathbf{A}, \lambda \mathbf{I}) = \\ &= P(\lambda)\mathbf{I} + (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\Phi(\mathbf{A}, \lambda \mathbf{I}) = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})[\mathbf{Q}(\lambda) + \Phi(\mathbf{A}, \lambda \mathbf{I})] = \\ &= \mathbf{A}[\mathbf{Q}(\lambda) + \Phi(\mathbf{A}, \lambda \mathbf{I})] - \lambda[\mathbf{Q}(\lambda) + \Phi(\mathbf{A}, \lambda \mathbf{I})]. \end{aligned}$$

Но последняя квадратная скобка должна тождественно (по λ) равняться нулю, так как в противном случае ее элемент, содержащий λ в наивысшей степени, остался бы с λ и во всей правой части (почему?), а в левую часть λ не входит. Это и доказывает теорему Гамильтона–Кэли.

При доказательстве свойства 3 для простоты будем считать, что отображение $\mathbf{A}$ имеет лишь два различных собственных значения λ_1, λ_2 , и обозначим через $P(\lambda)$ характеристический многочлен этого отображения (т. е. матрицы $\mathbf{A}$ в любом базисе, так как известно, что этот многочлен не зависит от выбора базиса). Тогда $P(\lambda) \equiv (\lambda_1 - \lambda)^{n_1}(\lambda_2 - \lambda)^{n_2}$. Будем временно под (R_j) понимать подпространство векторов, для которых $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{n_j} \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Разложив для дальнейшего рациональную функцию $1/P(\lambda)$ на сумму дробей вида $a_{jk}(\lambda - \lambda_j)^{-k}$ ($j = 1, 2$; $k = 1, \dots, n_j$), а затем умножив обе части разложения на $P(\lambda)$, мы придем к тождеству вида

$$1 \equiv D_1(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{n_1} + D_2(\lambda)(\lambda - \lambda_2)^{n_2},$$

где $D_j(\lambda)$ — некоторые многочлены; отсюда

$$1 \equiv D_1(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^{n_1} + D_2(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})^{n_2}. \quad (7)$$

В силу (7) для любого вектора $\mathbf{x}$ можно написать

$$\mathbf{x} = D_2(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})^{n_2} \mathbf{x} + D_1(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^{n_1} \mathbf{x}. \quad (8)$$

Однако из теоремы Гамильтона–Кэли следует, что первое слагаемое в правой части принадлежит (R_1) , а второе — (R_2) (почему?). Значит, разложение по

этим подпространствам возможно. Чтобы доказать его единственность, допустим, что

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in (R_1), \quad \mathbf{x}_2 \in (R_2).$$

Применяя к обеим частям отображение $D_1(A)(A - \lambda_1 I)^{n_1}$ и пользуясь тождеством (7) и определением пространств (R_j) , получим

$$\mathbf{0} = D_1(A)(A - \lambda_1 I)^{n_1} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - D_2(A)(A - \lambda_2 I)^{n_2} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2;$$

аналогично $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Итак, разложение (R) в прямую сумму (R_1) и (R_2) доказано.

Осталось проверить, что временное определение (R_j) равносильно исходному, т.е. если $(A - \lambda_j I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$ при каком-нибудь k , то и $(A - \lambda_j I)^{n_j} \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Но, применив достаточное число раз левую часть (7) к левой части (8), а правую — к правой и пользуясь теоремой Гамильтона–Кэли, получим в таком случае $\mathbf{x} = [D_2(A)]^r (A - \lambda_2 I)^{n_2 r} \mathbf{x}$, откуда и следует наше утверждение. Итак, свойство 3 полностью доказано.

В силу свойств 1–3 и п. 2 вопрос о строении отображения A в (R) сводится к аналогичному вопросу для каждого из подпространств (R_j) . А этот последний решается на основе свойства

4. *Отображение A имеет в подпространстве (R_j) единственное собственное значение λ_j .* В самом деле, пусть $\mathbf{x} \in (R_j)$, $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. По определению (R_j) будет $(A - \lambda_j I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Если в левой части раскрыть скобки и воспользоваться тем, что $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$, $A^3\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$ и т.д., то получим (проверьте!) $(\lambda - \lambda_j)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$, откуда $\lambda = \lambda_j$.

Теперь из результатов пп. 1.2 и 2 вытекает, что после выбора в каждом из подпространств (R_j) соответствующего базиса из собственных и присоединенных векторов матрица отображения A примет квазидиагональный вид, составленный из жордановых клеток. Матрица такой формы называется *нормальной* или *жордановой*. При этом у каждой клетки на главной диагонали стоит одно из собственных значений отображения A , а каждому собственному значению отвечает столько клеток, сколько ему отвечает линейно независимых собственных векторов. Порядки (размеры) клеток определяются, как описано в конце п. 2, т.е. по размерностям подпространств векторов, удовлетворяющих при данном j соотношениям $(A - \lambda_j I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $(A - \lambda_j I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$ и т.д. Порядок, в котором жордановы клетки следуют друг за другом, несуществен, так как, если изменить порядок нумерации инвариантных подпространств, то и «маленькие» матрицы, из которых составлена квазидиагональная матрица, соответственно переставляются.

Полученный результат можно сформулировать на чисто матричном языке. Рассмотрим любую комплексную квадратную матрицу A порядка n . Ее можно истолковать как матрицу некоторого отображения A комплексного n -мерного линейного пространства с как-то выбранным базисом. При переходе к новому базису матрица отображения преобразуется по формуле $A' = H^{-1}AH$, где H — невырожденная матрица перехода. Таким образом, мы получаем, что для каждой

матрицы $\mathbf{A}$ можно подобрать такую невырожденную матрицу $\mathbf{H}$, что матрица $\mathbf{A}' = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}$ будет иметь нормальную (жорданову) форму. При этом на главной диагонали каждой жордановой клетки, из которых составлена $\mathbf{A}'$, стоит одно из собственных значений матрицы $\mathbf{A}$. Размеры клеток определяются, как описано выше, причем в конкретных примерах можно исходить из того, что размерность подпространства векторов, удовлетворяющих соотношению $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, равна $n - \text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^k$ (см., например, ЛВМ, пп. XI.5,6), так что и размеры клеток выражаются через характеристики исходной матрицы $\mathbf{A}$.

В книгах [28, 118, 134] описан другой способ выяснения порядков жордановых клеток, который мы не будем здесь рассматривать. В нем матрице $\mathbf{A}$ по определенному довольно громоздкому правилу сопоставляется серия многочленов вида $(\lambda - \lambda_j)^k$, называемых *элементарными делителями* матрицы $\mathbf{A}$. После приведения матрицы $\mathbf{A}$ к жордановой форме $\mathbf{A}'$ каждому из этих делителей отвечает в $\mathbf{A}'$ жорданова клетка порядка k с числом λ_j на главной диагонали.

4. Отображение вещественного пространства. Пусть теперь $\mathbf{A}$ — линейное отображение вещественного пространства (R) в себя. Тогда, если характеристическое уравнение для отыскания собственных значений имеет только вещественные корни, то все предыдущие рассмотрения остаются в силе, т. е. в соответственно подобранном базисе матрица отображения $\mathbf{A}$ имеет жорданову форму. Другими словами, (R) разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств (R_j) , в каждом из которых матрица отображения $\mathbf{A}$ в соответствующем базисе имеет вид жордановой клетки с собственным значением λ_j на главной диагонали. (Здесь мы применяем более «мелкое» разложение (R) , чем в п. 3, так что теперь различным j могут отвечать одинаковые λ_j .) Если какое-либо из (R_j) одномерно, то отображение $\mathbf{A}$ на нем сводится к растяжению в λ_j раз; так будет, в частности, если λ_j — простое собственное значение или в более общем случае, если количество линейно независимых собственных векторов, отвечающих λ_j , равно его кратности как корня характеристического уравнения. (Из п. 3 следует, что указанное количество всегда меньше, либо равно этой кратности.) Если (R_j) двумерно, то в соответствующих осях на (R_j) отображение приобретает вид

$$y_1 = \lambda_j x_1, \quad y_2 = x_1 + \lambda_j x_2,$$

где $x_1; x_2$ — координаты вектора-прообраза, а $y_1; y_2$ — координаты вектора-образа. При $\lambda_j \neq 0$ это комбинация всестороннего растяжения в λ_j раз и сдвига вдоль оси x_2 (что будет при $\lambda_j = 0$). Мы предлагаем читателю разобрать геометрический смысл отображения, отвечающего жордановой клетке третьего порядка.

Пусть теперь характеристическое уравнение может иметь мнимые (т. е. невещественные) корни. Такой корень $\lambda = \mu + i\nu$ (μ и

$\nu \neq 0$ вещественные) не является собственным значением отображения A в (R) . Поэтому расширим (R) до комплексного линейного пространства (S) комплексной размерности n так, чтобы базис $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ пространства (R) одновременно служил базисом (S) ; для этого, достаточно рассмотреть совокупность формальных выражений вида $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$ с любыми комплексными α_k и естественными правилами сложения и умножения на число. Отображение A также можно продолжить до линейного отображения (S) в себя, так как, если даны образы базисных векторов, то линейное отображение полностью определяется. Матрица продолженного отображения в базисе $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ та же, что матрица исходного отображения, поэтому корень $\lambda = \mu + i\nu$ будет собственным значением продолженного отображения.

Из алгебры известно, что алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами вместе с мнимым корнем всегда обладает сопряженным мнимым корнем, причем той же кратности (см. § II.1). Поэтому $\lambda^* = \mu - i\nu$ также будет собственным значением продолженного отображения A . Записывая соотношения вида (4) в координатах относительно базиса $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ и переходя к сопряженным числам, мы получим, что если l_1, l_2, l_3 — присоединенные и собственный вектор для собственного значения λ , то векторы l_1^*, l_2^*, l_3^* с сопряженными координатами являются присоединенными и собственным вектором для собственного значения λ^* . Эти векторы не принадлежат (R) , так как их координаты мнимые. Отделяя у этих координат вещественные части от мнимых, мы получим принадлежащие (R) векторы l'_k, l''_k ($k = 1, 2, 3$), для которых

$$l_k = l'_k + i l''_k, \quad l_k^* = l'_k - i l''_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

После подстановки этих векторов в (4), получим (проверьте!)

$$A l'_k = \mu l'_k - \nu l''_k + l'_{k+1}, \quad A l''_k = \nu l'_k + \mu l''_k + l''_{k+1} \quad (k = 1, 2)$$

$$A l'_3 = \mu l'_3 - \nu l''_3, \quad A l''_3 = \nu l'_3 - \mu l''_3.$$

Соотношения между сопряженными векторами l_k^* не дадут ничего нового. Поэтому, если в общем базисе заменить шесть векторов l_k, l_k^* ($k = 1, 2, 3$) на шесть векторов l'_k, l''_k ($k = 1, 2, 3$), то в инвариантном подпространстве (R) , натянутом на последние векторы, отображение A будет иметь матрицу

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mu & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\nu & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \nu \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\nu & \mu \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Так можно поступить со всеми мнимыми собственными значениями. В результате мы получим базис (R) , в котором матрица отображения A имеет квазидиагональный вид, составленный из вещественных матриц типа (5) (любого порядка) и вещественных матриц типа (9) (любого четного порядка). Аналогично формулируется теорема о приведении матрицы к *вещественному нормальному виду*, причем матрица перехода H здесь также будет вещественной.

Матрица (9) в простейшем случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}.$$

Если представить $\mu = M \cos \alpha$, $-\nu = M \sin \alpha$ ($M > 0$) и считать l'_1, l''_1 декартовым базисом на плоскости, то легко проверить, что соответствующее преобразование состоит в комбинации всестороннего растяжения в M раз и поворота на угол α . Для недекартова базиса получается «аффинно преобразованный поворот» плоскости.

5. Применение к вычислению функций от матриц. Пусть скалярная (обычная) функция $f(x)$ допускает разложение в ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

а A — квадратная матрица. Тогда по определению

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n + \dots \quad (10)$$

В соответствии с п. 3 представим $A = HA'H^{-1}$, где A' — жорданова матрица; тогда $A^3 = HA'H^{-1}HA'H^{-1}HA'H^{-1} = HA'^2H^{-1}$, $A^3 = HA'^3H^{-1}$ и т. д., и мы получаем

$$f(A) = Ha_0Ih^{-1} + Ha_1A'h^{-1} + Ha_2A'^2h^{-1} + \dots = Hf(A')H^{-1}$$

Для вычисления $f(A')$ воспользуемся простым непосредственно проверяемым свойством: *при умножении двух квазидиагональных матриц с одинаковыми наборами порядков получается квазидиагональная матрица с таким же набором порядков по следующему правилу:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & & B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & \\ & A_2B_2 & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_mB_m \end{pmatrix},$$

т.е. одинаково расположенные матрицы, стоящие на диагонали, перемножаются независимо от остальных матриц. Из этого свойства вытекает, в частности, что для квазидиагональной матрицы

$$f \left[\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} f(\mathbf{A}_1) & & \\ & f(\mathbf{A}_2) & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & f(\mathbf{A}_m) \end{pmatrix}$$

(почему?). Значит надо вычислить $f(\mathbf{A}_k)$, где $\mathbf{A}_k$ — жорданова клетка. Рассмотрим для определенности клетку (5); ее последовательные степени равны (проверьте!)

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 & 0 \\ 1 & 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 & 0 \\ 3\lambda^2 & \lambda^3 & 0 \\ 3\lambda & 3\lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 4\lambda^3 & \lambda^4 & 0 \\ 6\lambda^2 & 4\lambda^3 & \lambda^4 \end{pmatrix}, \quad \text{и т. д.,}$$

причем коэффициенты вычисляются по тому же правилу, что при последовательном раскрытии скобок в выражениях $(\lambda + 1)^2, (\lambda + 1)^3, (\lambda + 1)^4$ и т. д. Значит, вообще

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ \binom{n}{1} \lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \binom{n}{2} \lambda^{n-2} & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix},$$

где $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ — биномиальный коэффициент. Подставляя в (10) и учитывая, что

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots = f(\lambda),$$

$$a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + 4a_4\lambda^3 + \dots = f'(\lambda) = \frac{1}{1!}f'(\lambda),$$

$$\begin{aligned} \binom{2}{2}a_2 + \binom{3}{2}a_3\lambda + \binom{4}{2}a_4\lambda^2 + \dots &= \\ &= \frac{1}{2!}(2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3\lambda + 4 \cdot 3a_4\lambda^2 + \dots) = \frac{1}{2!}f''(\lambda), \end{aligned}$$

получим окончательно

$$f \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 & 0 \\ \frac{1}{1!}f'(\lambda) & f(\lambda) & 0 \\ \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & f(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Аналогичный результат получается для жордановых клеток любого порядка, чем и завершается вычисление $f(\mathbf{A})$.

В качестве примера рассмотрим вопрос о логарифмировании матрицы $\mathbf{A}$, т.е. о подборе матрицы $\mathbf{B}$, для которой $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{A}$. Оказывается, что такой логарифм всегда существует, если матрица $\mathbf{A}$ не имеет нулевых собственных значений. Для доказательства, как и выше, достаточно рассмотреть логарифмирование жордановой клетки (5) при $\lambda \neq 0$. Однако

$$\begin{aligned} \ln \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} &= \ln \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \text{Ln } \lambda \cdot \mathbf{I} + \ln \left[\mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (12) \end{aligned}$$

где $\text{Ln } \lambda$ — общее значение логарифма. (Отметим, что при преобразовании логарифма произведения в сумму логарифмов, которое для матриц возможно не всегда, мы пользовались равенством $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$, справедливым для перестановочных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, см., например, ЛВМ, п. XVII.18.) Последний логарифм в правой части (12) можно вычислить с помощью разложения $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \dots$, правая часть которого в данном случае содержит лишь конечное число слагаемых (почему?).

По поводу решения более сложных матричных уравнений и дальнейших свойств матриц см. [23].

Иногда применяются функции вида $f(t\mathbf{A})$, где t — параметр. Тогда взамен (11) надо пользоваться формулой

$$f \left[\begin{pmatrix} t\lambda & 0 & 0 \\ t & t\lambda & 0 \\ 0 & t & t\lambda \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} f(t\lambda) & 0 & 0 \\ \frac{t}{1!} f'(t\lambda) & f(t\lambda) & 0 \\ \frac{t^2}{2!} f''(t\lambda) & \frac{t}{1!} f'(t\lambda) & f(t\lambda) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

проверить которую мы предоставляем читателю. Например,

$$\exp \begin{pmatrix} t\lambda & 0 & 0 \\ t & t\lambda & 0 \\ 0 & t & t\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 & 0 \\ \frac{t}{1!} e^{t\lambda} & e^{t\lambda} & 0 \\ \frac{t^2}{2!} e^{t\lambda} & \frac{t}{1!} e^{t\lambda} & e^{t\lambda} \end{pmatrix} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{t}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & \frac{t}{1!} & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Другое представление отображения вещественного пространства. Пусть $\mathbf{A}$ — линейное отображение вещественного

евклидова пространства (R) в себя. В п. 1.6 было доказано, что если это отображение самосопряженное, то оно просто представляет собой комбинацию равномерных растяжений вдоль взаимно перпендикулярных направлений собственных векторов, причем коэффициентами, растяжения служат соответствующие собственные значения. Мы сейчас, покажем, что *общее отображение A представляет собой комбинацию самосопряженного отображения и ортогонального отображения* (вращения (R) вокруг начала координат); *при этом квадратами коэффициентов растяжения служат собственные значения самосопряженного отображения AA^* .*

Это утверждение можно сформулировать и на матричном языке. Будем рассматривать заданную вещественную квадратную матрицу A как матрицу отображения в некотором евклидовом базисе. Тогда после перехода к базису из собственных векторов упомянутого самосопряженного множителя получим

$$H^{-1}AH = UL \quad \text{откуда} \quad A = HULH^{-1} = K\Lambda L, \quad (14)$$

где Λ — вещественная диагональная матрица, а H и U , а потому и K и L — ортогональные матрицы; при этом у Λ^2 на диагонали стоят собственные значения матрицы AA^* (Проверьте, что последняя матрица симметрическая и все ее собственные значения неотрицательные.) Обратно, если имеет место представление (14), то, переписав его в виде $A = (KL)(L^{-1}\Lambda L) = (KL)(L^*\Lambda L)$, получаем утверждение предыдущего абзаца о строении отображения A .

Для доказательства формулы (14) приведем симметрическую матрицу AA^* к диагональному виду, а так как у полученной диагональной матрицы на диагонали будут стоять неотрицательные числа, то ее можно представить в виде квадрата другой вещественной диагональной матрицы:

$$K^{-1}(AA^*)L = \Lambda^2 \quad (15)$$

(K — ортогональная, а L — диагональная матрицы). Так как диагональные элементы μ_j матрицы Λ можно считать занумерованными в порядке $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$, ($\mu_n \geq 0$), то будем считать, что первые k ($0 \leq k \leq n$) из этих элементов положительные, а остальные равны нулю. Построим теперь числовые векторы $v_j = \frac{1}{\mu_j} w_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$), где w_j — j -й столбец матрицы A^*K ; так как из (15) следует, что эти векторы ортогональные и нормированные, то их можно дополнить векторами $v_{k+1}, \dots, v_n$ до ортогональной матрицы V ; практически это можно сделать с помощью процесса ортогонализации (см., например, ЛВМ, п. VII.21). Из построения матрицы V следует, что

$$A^*K = V\Lambda \quad \text{откуда} \quad A = K\Lambda V^* = K\Lambda L,$$

где обозначено $L = V^*$. Возможность представления (14) доказана.

7. Структура перестановочных отображений. Лемма. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — квадратные матрицы порядка n , причем $\mathbf{A}$ диагональная и имеет первые n_1 элементов, главной диагонали равными λ_1 , следующие n_2 элементов равными λ_2 и т.д.; а все числа λ_k попарно различны. Тогда для равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ необходимо и достаточно, чтобы матрица $\mathbf{B}$ была квазидиагональной с набором порядков $(n_1, n_2, \dots)$.

В самом деле, легко проверить общие равенства

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 b_{11} & \alpha_1 b_{12} & \dots & \alpha_1 b_{1n} \\ \alpha_2 b_{21} & \alpha_2 b_{22} & \dots & \alpha_2 b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n b_{n1} & \alpha_n b_{n2} & \dots & \alpha_n b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 b_{11} & \alpha_1 b_{12} & \dots & \alpha_1 b_{1n} \\ \alpha_2 b_{21} & \alpha_2 b_{22} & \dots & \alpha_2 b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n b_{n1} & \alpha_n b_{n2} & \dots & \alpha_n b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для совпадения правых частей необходимо и достаточно, чтобы для всех j, k имели место равенства $\alpha_j b_{jk} = \alpha_k b_{jk}$, т.е. чтобы при $\alpha_j \neq \alpha_k$ было $b_{jk} = 0$. Отсюда и вытекает утверждение леммы.

Пусть теперь дана произвольная совокупность $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ линейных отображений комплексного пространства (R) в себя, причем каждое из этих отображений имеет жордановы клетки только первого порядка, т.е. имеет в некотором базисе диагональную матрицу. Тогда для попарной перестановочности всех этих отображений, т.е. для справедливости равенств $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, $\mathbf{AC} = \mathbf{CA}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$..., необходимо и достаточно, чтобы в некотором общем для всех отображений базисе каждое из них имело диагональную матрицу.

Достаточность сразу следует из того, что диагональные матрицы всегда перестановочны. Для доказательства необходимости допустим, что все заданные отображения попарно перестановочны, и выберем базис в (R) так, чтобы матрица отображения $\mathbf{A}$ имела вид, описанный в лемме. Тогда из этой леммы будет следовать, что подпространство (R_1) , натянутое на первые n_1 базисных векторов (оно же — подпространство собственных векторов отображения $\mathbf{A}$, отвечающих собственному значению λ_1), подпространство (R_2) , натянутое на следующие n_2 базисных векторов, и т.д. — все они инвариантны для каждого из заданных отображений. Поэтому можно рассмотреть отображение $\mathbf{B}$ на каждом из подпространств (R_j) и выбрать в нем базис так, чтобы матрица отображения $\mathbf{B}$ (n_j -го порядка!) приобрела вид, описанный в лемме. Такое изменение базиса внутри каждого из подпространств (R_j) не изменит вида матрицы отображения $\mathbf{A}$ (почему?) и приведет к разложению каждого (R_j) в прямую сумму подпространств (R_{jk}) , инвариантных для каждого из отображений. Далее выбираем в каждом (R_{jk}) базис,

и исключаем x_2 и т. д., пока не приходим к одному уравнению с одним неизвестным x_n . Из последнего уравнения находим x_n , затем, зная x_n из предыдущего уравнения находим x_{n-1} и т. д., наконец, из уравнения (3), зная $x_n, \dots, x_2$, находим x_1 , на чем решение и заканчивается.

Для возможности выполнения первого шага в описанном варианте должно быть $a_{11} \neq 0$. В системе (4)

$$a'_{22} = a_{22} - a_{21}a'_{12} = a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

где Δ_k — k -й главный минор матрицы $\mathbf{A}$ (п. 2.3); значит, для возможности выполнения второго шага в методе Гаусса должно быть $\Delta_2 \neq 0$. Можно проверить, что последующие коэффициенты, на которые придется производить деление, равны Δ_3/Δ_2 , Δ_4/Δ_3 и т. д., так что для возможности доведения вычислений по описанной схеме до конца необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы $\mathbf{A}$ были отличны от нуля. Более того, если даже это условие выполнено, но какой-либо из главных миноров окажется слишком близким к нулю, то точность вычислений может существенно понизиться. В этом случае, который обнаруживается в процессе вычислений, можно производить деление на какой-либо из других, не малых коэффициентов, что равносильно перенумерации неизвестных и уравнений (даже если эта перенумерация фактически не выписывается).

Нетрудно проверить, что с матричной точки зрения метод Гаусса равносильен представлению матрицы $\mathbf{A}$ в уравнении (2) в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{B}, \quad (5)$$

где $\mathbf{H}$ — *нижняя треугольная матрица*, т. е. матрица, имеющая все элементы выше главной диагонали равными нулю, а $\mathbf{B}$ — *верхняя треугольная матрица*. При этом строками матрицы $\mathbf{B}$ служат коэффициенты уравнений (3), (4) и т. д., т. е. все элементы ее главной диагонали равны единице. Это вытекает из формул (проверьте их!)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}k^{-1} & a_{12}k^{-1} \dots a_{1n}k^{-1} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ -\alpha & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ -\gamma & 0 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + \alpha a_{11} & a_{22} + \alpha a_{12} \dots a_{2n} + \alpha a_{1n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} + \gamma a_{11} & a_{n2} + \gamma a_{12} \dots a_{nn} + \gamma a_{1n} \end{pmatrix},$$

из которых видно, что каждый переход в методе Гаусса равносильен выделению из матрицы коэффициентов в качестве левого сомножителя некоторой нижней треугольной матрицы. А так как произведение нижних треугольных матриц будет снова нижней треугольной матрицей

(почему?), то после выполнения всех переходов мы и приходим к разложению (5).

После того как система (2) переписана в виде $\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ее очень просто решить, обозначив $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ и перейдя, таким образом, к последовательности двух треугольных систем $\mathbf{H}\mathbf{y} = \mathbf{b}$, $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Впрочем, если в методе Гаусса производить действия не только над левыми частями системы (2), но и над правыми, то мы прямо переходим к треугольной системе $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b}$ с известной правой частью.

Полезные соображения по поводу метода Гаусса см. в книге [117].

2. Норма матрицы и обусловленность системы. Пусть линейное отображение A вещественного евклидова пространства (R) в себя имеет в некотором декартовом базисе (квадратную) матрицу $\mathbf{A}$. Тогда нормой $\|A\|$ этого отображения, а также нормой $\|\mathbf{A}\|$ матрицы $\mathbf{A}$ называется наибольший коэффициент удлинения векторов при рассматриваемом отображении, т. е.

$$\|A\| = \|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x} \in (R)} \frac{|\mathbf{A}\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \left[\sum_j \left(\sum_k a_{jk} x_k \right)^2 \right]^{1/2} \left[\sum_j x_j^2 \right]^{-1/2} \right\}. \quad (6)$$

Легко доказываются следующие свойства нормы (докажите их!)

1. $\|\mathbf{0}\| = 0$, норма прочих матриц положительна.
2. $|\mathbf{A}\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{A}\| |\mathbf{x}|$; при этом имеются векторы $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, для которых это неравенство обращается в равенство.
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$.
4. $\|\lambda \mathbf{A}\| = |\lambda| \|\mathbf{A}\|$.
5. $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$; отсюда следует, в частности, что $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \geq \|\mathbf{I}\| = 1$.
6. Норма ортогональной матрицы равна 1.
7. Норма симметрической матрицы равна наибольшей из абсолютных, величин ее собственных значений.
8. Квадрат нормы любой матрицы $\mathbf{A}$ равен наибольшему из собственных значений матрицы $\mathbf{AA}^*$.

(При доказательстве свойств 7 и 8 вспомните результаты п. 3.6.)

Эти свойства немедленно распространяются на отображения, и также на комплексные матрицы и отображения.

Вычисление нормы по свойству 8 требует определенных усилий. Можно пользоваться простой оценкой, которая вытекает из определения (6) и неравенства Коши–Буняковского–Шварца ¹⁾:

$$\left(\sum_k a_{jk} x_k \right)^2 \leq \left(\sum_k a_{jk}^2 \right) \left(\sum_k x_k^2 \right),$$

¹⁾ Это неравенство для любых n -мерных вещественных числовых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ имеет вид $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b})$ и сразу следует из того, что $(\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \mathbf{a} + t\mathbf{b}) \geq 0$ при всех вещественных t .

откуда

$$\|\mathbf{A}\| \leq \left[\sum_j \left(\sum_k a_{jk}^2 \right) \right]^{1/2}.$$

Оценку нормы снизу можно получить из следствия из свойства 5.

Норма матрицы применяется, в частности, при изучении важного в вычислительном отношении понятия *обусловленности* линейной системы (2). Допустим, что в правой части допущена некоторая погрешность $\Delta \mathbf{b}$; тогда и решение будет иметь погрешность $\Delta \mathbf{x}$, причем так как $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$ (коэффициенты системы считаем для простоты абсолютно точными), то $\mathbf{A}\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{b}$. Отсюда и из (2) получаем

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{b}, \quad |\Delta \mathbf{x}| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| |\Delta \mathbf{b}|, \quad |\mathbf{b}| \leq \|\mathbf{A}\| |\mathbf{x}|, \quad (7)$$

откуда

$$\frac{|\Delta \mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{|\Delta \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}, \quad (8)$$

при этом для некоторых ненулевых $\mathbf{b}$ и $\Delta \mathbf{b}$ оба неравенства (7), а потому и неравенство (8), обращаются в равенства.

Таким образом, произведение $\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$, называемое *мерой обусловленности* системы (2) (или матрицы $\mathbf{A}$), равно наибольшему возможному коэффициенту увеличения относительной погрешности решения по сравнению с относительной погрешностью столбца правых частей. Если эта мера, которая не может быть меньше единицы, будет близка к единице, то система (2) называется *хорошо обусловленной*; относительная погрешность решения такой системы будет близка к относительной погрешности известных параметров этой системы. Если мера обусловленности велика, то система (2) называется *плохо обусловленной* и при ее решении относительная погрешность может существенно возрасти; такие системы неудобны для численного решения.

Нетрудно проверить (продумайте это!), что мера обусловленности матрицы $\mathbf{A}$ равна отношению наибольшей к наименьшей из полуосей эллипсоидов, которые служат образами сфер при отображении $\mathbf{A}$. Квадрат этой меры равен отношению наибольшего собственного значения матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ к ее наименьшему собственному значению.

Таким образом, при решении линейных систем опасность состоит не просто в малости определителя, как это иногда пишут для краткости: если бы это было так, то за счет простого умножения всех уравнений системы на одно и то же большое число можно было бы любую плохую систему сделать хорошей. На самом деле опасна плохая обусловленность системы, а мера обусловленности при таком умножении не меняется.

При простых преобразованиях системы, например при умножении всех членов какого-либо из уравнений системы на одно и то же число и т. п., мера

обусловленности, вообще говоря, меняется. Проверьте, например, что мера обусловленности системы

$$kx + 2ky = k, \quad x + y = 2$$

равна $\left(5k^2 + 2 + \sqrt{25k^4 + 16k^2 + 4}\right) / 2|k|$, хотя решение, конечно, не зависит от k ; найдите, при каком k эта мера принимает самое малое значение и объясните, почему она стремится к бесконечности при $k \rightarrow 0$ и при $k \rightarrow \pm\infty$.

Отметим в заключение, что применяются и другие определения нормы матрицы и меры обусловленности.

3. Метод улучшения невязки. Даже при применении «точного» метода Гаусса к уравнению (2) из-за ошибок округления может получиться приближенное решение $\mathbf{x}_1$, точность которого нас не устраивает. Если тогда обозначить $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{z}$, то для $\mathbf{z}$ получается уравнение

$$\mathbf{Az} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_1, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{Az} = \mathbf{r}_1, \quad (9)$$

где через $\mathbf{r}_1$ обозначена невязка $\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_1$ приближенного решения $\mathbf{x}_1$. Так как обычно $|\mathbf{r}_1| \ll |\mathbf{b}|$, то уравнение (9) удастся решить с гораздо более высокой абсолютной точностью, чем (2), что дает возможность повысить относительную точность исходного приближенного решения (продумайте это!).

Если заметить, что решение уравнения (2) равносильно отысканию минимума квадрата невязки, т. е. минимума функции

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = |\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|^2 \quad (10)$$

(квадрат берется для удобства вычислений), то к рассматриваемой задаче оказывается возможным применить прямые методы отыскания минимума. Отметим, в частности, метод наискорейшего спуска¹⁾. Так как $\text{grad}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}$, и потому

$$\begin{aligned} \text{grad} |\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|^2 &= 2 \text{grad}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}, (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})_{\text{const}}) = \\ &= 2 \text{grad}(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})_{\text{const}}) = 2\mathbf{A}^*(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}), \end{aligned}$$

то последующее приближение в данном методе выражается через предыдущее по формуле

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - 2t\mathbf{A}^*(\mathbf{Ax}_k - \mathbf{b}) = \mathbf{x}_k + 2t\mathbf{A}^*\mathbf{r}_k,$$

где $t = t_k$ подбирается из условия минимизации функции (10). Применение необходимого условия минимума по t , которое мы предоставляем читателю, приводит к формуле

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + |\mathbf{A}^*\mathbf{r}_k|^{-2} |\mathbf{AA}^*\mathbf{r}_k| \mathbf{A}^*\mathbf{r}_k,$$

¹⁾ В этом методе, начиная от нулевого приближения $\mathbf{x}_0$, надо двигаться по лучу, имеющему направление $-\text{grad} F|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ (см. п. 1.1.2), следя за изменением функции F , пока она не достигнет наименьшего значения для некоторого $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$, после чего надо двигаться по направлению $-\text{grad} F|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}$ и т. д.

по, которой и можно производить итерации, начиная с какого угодно нулевого приближения.

В частном случае, когда матрица $\mathbf{A}$ симметрическая и форма $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x})$ положительно определенная, решение уравнения (2) служит единственным минимумом функции $(\mathbf{Ax} - 2\mathbf{b}, \mathbf{x})$. Докажите это и постройте на этой основе более удобный итерационный способ решения уравнения (2) в рассматриваемом случае

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + |\mathbf{r}_k|^2 (\mathbf{Ar}_k, \mathbf{r}_k)^{-1} \mathbf{r}_k.$$

Такие матрицы возникают, в частности, в задачах вариационного исчисления (см. п. VI.4.1).

4. Спектр симметрической матрицы. Перейдем теперь к задаче о вычислении спектра (совокупности собственных значений) матрицы $\mathbf{A}$ и начнем со случая, когда $\mathbf{A}$ — вещественная симметрическая матрица. Ее наибольшее и наименьшее собственные значения (а во многих задачах, связанных со спектром, именно эти значения играют наибольшую роль) можно находить численно на основе экстремального свойстве из п. 1.7. Покажем, как это сделать с помощью метода наискорейшего спуска. Для этого будем исходить из любого вектора $\mathbf{x}_0$ единичной длины. Годограф векторной функции ¹⁾

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_0 + \text{grad}(\mathbf{Ax}, \mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} t}{|\mathbf{x}_0 + \text{grad}(\mathbf{Ax}, \mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} t} = \frac{\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{Ax}_0 t}{|\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{Ax}_0 t|} \quad (11)$$

представляет собой дугу большого круга на единичной сфере, направленную при $t = 0$ в сторону наибоыстрейшего возрастания функции $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x})$ на этой сфере. Подберем t таким, чтобы величина

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{Ax}_0 t), \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{Ax}_0 t)}{(\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{Ax}_0 t, \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{Ax}_0 t)} \quad (12)$$

принимала для этого t наибольшее или наименьшее значения, т. е. найдем относительные экстремумы функции $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x})$ на рассматриваемой дуге. Применение необходимого условия экстремума по t к функции (12), которое мы предоставляем читателю, приводит к уравнению

$$4(\alpha_0 \gamma_0 - \beta_0^2) t^2 + 2(\alpha_0 \delta_0 - \beta_0 \gamma_0) t + (\beta_0 \delta_0 - \gamma_0^2) = 0, \quad (13)$$

в котором обозначено

$$\alpha_0 = (\mathbf{A}^3 \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0), \quad \beta_0 = (\mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0), \quad \gamma_0 = (\mathbf{Ax}_0, \mathbf{x}_0), \quad \delta_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0).$$

Положительный и отрицательный корни уравнения (13), подставленные в правую часть (11), и дают точки относительного максимума и

¹⁾ Годограф векторной функции $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$ — это линия, которую описывает конец вектора $\mathbf{f}(t)$, отложенный от начала координат, при изменении t .

минимума соответственно. Затем над полученными векторами надо повторить описанную процедуру (продвигаясь, конечно, только в нужном направлении изменения величины $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x})$) и т. д. После необходимого количества итераций мы получаем не только наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы $\mathbf{A}$, но также и соответствующие собственные векторы.

Если нас интересуют и промежуточные собственные значения и соответствующие собственные векторы, то надо два найденных собственных вектора $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ дополнить до евклидова базиса $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots$ и выразить квадратичную форму $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x})$ в новых координатах: $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = (\mathbf{A}'\mathbf{y}, \mathbf{y})$; затем в силу ортогональности собственных векторов надо положить $y_1 = y_2 = 0$, т. е. перейти к форме от $n - 2$ координат и проделать над ней описанные действия, и т. д.

Бывают задачи, в которых надо найти наименьшую из абсолютных величин собственных значений матрицы $\mathbf{A}$. Тогда надо найти наименьшее собственное значение матрицы $\mathbf{A}^2$ и из него извлечь квадратный корень (почему?). Эта задача возникает, в частности, при рассмотрении *отстройки от резонанса* системы $\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + e^{i\omega t}\mathbf{c}$, где надо положить $\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mu\mathbf{I}$ (продумайте термин «отстройка от резонанса»).

Полезные качественные и вычислительные соображения, связанные с определением спектра матриц, содержатся в книге [58].

5. Метод Якоби. Этот метод вычисления собственных значений и собственных векторов для вещественной симметрической матрицы $\mathbf{A}$ был предложен К. Якоби в 1846 г. и принадлежит к числу итерационных методов. Геометрический смысл его состоит в следующем. Мы уже знаем (п. 2.1), что уравнение $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax} = 1$ задает в E_n поверхность (M) второго порядка — для определенности, эллипсоид — и задача состоит в отыскании главных осей этого эллипсоида. Выберем какие-либо два из исходных базисных векторов $\mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j$ (у $\mathbf{l}_i$ i -я координата равна единице, остальные равны нулю, аналогично для $\mathbf{l}_j$; $i \neq j$); тогда плоскость, натянутая на векторы $\mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j$, пересечет (M) по некоторому эллипсу $(M)_{ij}$. Перейдем к новому базису в E_n , направив векторы $\mathbf{l}'_i, \mathbf{l}'_j$ по главным осям эллипса $(M)_{ij}$ и оставив базисные векторы с другими номерами без изменения. Затем среди базисных векторов $\mathbf{l}'_1, \mathbf{l}'_2, \dots, \mathbf{l}'_n$ опять выберем какие-либо два и повернем их в их плоскости, чтобы они пошли по главным осям эллипса, получающегося в пересечении этой плоскости с (M) , и т. д.

Этот процесс будет, вообще говоря, бесконечным. В самом деле, пусть, например, $n = 3$ и векторы $\mathbf{l}'_1, \mathbf{l}'_2$ получены из $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ поворотом вокруг $\mathbf{l}_3$, так что $\mathbf{l}'_3 = \mathbf{l}_3$. Пусть, далее, $\mathbf{l}''_2, \mathbf{l}''_3$ получены из $\mathbf{l}'_2, \mathbf{l}'_3$ поворотом вокруг $\mathbf{l}'_1$, так что $\mathbf{l}''_1 = \mathbf{l}'_1$. Но после этого $\mathbf{l}''_1, \mathbf{l}''_2$ уже не будут направлены по главным осям эллипса, получающегося в плоскости этих векторов, так что требуется новый поворот и т. д. Главные оси эллипсоида получаются только в пределе.

Аналитическое оформление метода имеет следующий вид. Выбирается один из элементов $a_{ij} \neq 0$ ($i \neq j$) матрицы $\mathbf{A}$ (предпочтительно из числа больших по абсолютной величине). Если приравнять нулю все координаты, кроме x_i и x_j , то форма $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ примет вид

$$a_{ii}x_i^2 + 2a_{ij}x_ix_j + a_{jj}x_j^2.$$

Как известно из аналитической геометрии (см., например, ЛВМ, п. II.13), для приведения этой формы к диагональному виду надо повернуть оси координат на угол φ_1 , определяемый из равенства $\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}$. При этом координаты меняются по формулам $x_i = x'_i \cos \varphi_1 - x'_j \sin \varphi_1$, $x_j = x'_i \sin \varphi_1 + x'_j \cos \varphi_1$, $x_s = x'_s$ ($s \neq j, i$). В новых координатах матрица квадратичной формы будет иметь вид $\mathbf{A}' = \mathbf{H}_1^* \mathbf{A} \mathbf{H}_1$, где элементы матрицы $\mathbf{H}_1$ определяются так: $h_{ii} = h_{jj} = \cos \varphi_1$, прочие диагональные элементы равны единице; $h_{ij} = -\sin \varphi_1$, $h_{ji} = \sin \varphi_1$, прочие недиагональные элементы равны нулю. У матрицы $\mathbf{A}'$ выбираем какой-либо элемент $a'_{rk} \neq 0$ ($r \neq k$), находим поворот плоскости x'_r, x'_k на угол φ_2 , определяемый из равенства $\operatorname{tg} 2\varphi_2 = \frac{2a'_{rk}}{a'_{rr} - a'_{kk}}$, в результате чего матрица преобразуется по формуле $\mathbf{A}'' = \mathbf{H}_2^* \mathbf{A}' \mathbf{H}_2$, где матрица $\mathbf{H}_2$ определяется аналогично $\mathbf{H}_1$, и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока внедиагональные члены матрицы $\mathbf{A}^{(m)}$ не станут по абсолютной величине достаточно малыми; тогда его можно прекратить и принять диагональные элементы матрицы $\mathbf{A}^{(m)}$ за собственные значения матрицы $\mathbf{A}$. Кроме того, так как $\mathbf{A}^{(m)} = \mathbf{H}^* \mathbf{A} \mathbf{H}$, где $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \dots \mathbf{H}_m$, то окончательная связь между координатами имеет вид $\mathbf{x} = \mathbf{H} \mathbf{x}^{(m)}$; отсюда соответствующими собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$ служат столбцы матрицы $\mathbf{H}$ (почему?).

6. Вычисление старшего собственного значения путем итераций. Перейдем теперь к общим квадратным матрицам с, вообще говоря, комплексными элементами. Пусть задана матрица $\mathbf{A}$, все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (заранее неизвестные) простые, причем значение $|\lambda_1|$ строго больше остальных $|\lambda_k|$. Обозначим соответствующие собственные векторы, также заранее неизвестные, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, выберем произвольный вектор $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}$ и будем строить последовательность векторов $\mathbf{y}_m$ по формулам $\mathbf{y}_1 = \mathbf{A} \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{A} \mathbf{y}_1, \dots$. Так как $\mathbf{y}_0$ допускает разложение $\mathbf{y}_1 = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{A} \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{A} \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{A} \mathbf{x}_n = \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{x}_n, \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{A} \mathbf{y}_1 = \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{x}_n \end{aligned}$$

и т. д., вообще

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_m &= \alpha_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^m \mathbf{x}_n = \\ &= \lambda_1^m \left[\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{x}_n \right]. \end{aligned}$$

По предположению о $|\lambda_1|$, при больших m будет $\mathbf{y}_m \sim \lambda_1^m \alpha_1 \mathbf{x}_1$. Значит, если обозначить через $\mathbf{y}_m^{(k)}$ k -й элемент столбца $\mathbf{y}_m$, то

$$\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_{m+1}^{(k)}}{y_m^{(k)}}, \quad (14)$$

если только $\alpha_1 x_1(k) \neq 0$. За собственный вектор $\mathbf{x}_1$ можно принять $\lim_{m \rightarrow \infty} (\mu_m, \mathbf{y}_m)$, где μ_m — нормировочные множители ($\mu_m = \frac{1}{|\mathbf{y}_m|}$ или $\frac{1}{y_m^{(k)}}$ и т. п.).

Рассмотрение присоединенных векторов показывает, что для осуществимости данного метода существенно только предположение о $|\lambda_1|$ и о простоте собственного значения λ_1 (более точно, λ_1 не должны отвечать жордановы клетки выше первого порядка), тогда как прочие собственные значения могут быть кратными. Выполнение же этих существенных предположений выясняется в процессе вычислений из самого существования предела (14), который не должен зависеть ни от k (кроме особых случаев, когда $x_1^{(k)} = 0$, они распознаются по более медленному возрастанию $y_m^{(k)}$), ни от $\mathbf{y}_0$ (кроме весьма специальных случаев, когда $\alpha_1 = 0$; если брать элементы $\mathbf{y}_0$ наугад, можно ручаться, что этого не будет).

Если имеются два простых старших по модулю собственных значения λ_1, λ_2 , причем $\lambda_2 = -\lambda_1$, то для больших m получится $\mathbf{y}_m \sim \lambda_1^m [\alpha_1 \mathbf{x}_1 + (-1)^m \alpha_2 \mathbf{x}_2]$, т. е. существует два различных предела вида (14) для четных и для нечетных m ; так этот случай и распознается. Здесь можно положить

$$\lambda_1^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_{m+2}^{(k)}}{y_m^{(k)}},$$

До сих пор мы считали матрицу $\mathbf{A}$, вообще говоря, комплексной, хотя, конечно, для вещественных матриц вычисления существенно проще. Если матрица $\mathbf{A}$ вещественная, то имеется еще один важный случай, когда она имеет два старших мнимых сопряженных простых собственных значения, т. е. $\lambda_2 = \lambda_1^* \neq \lambda_1$. Тогда и соответственные элементы собственных векторов сопряженные, т. е. для вещественного $\mathbf{y}_0$ для больших m будет

$$\mathbf{y}_m^{(k)} \sim \lambda_1^m \alpha_1 x_1^{(k)} + \lambda_1^{*m} \alpha_1^* x_1^{(k)*} = 2A r^m \cos(ma + b), \quad (15)$$

где обозначено $\alpha_1 x_1^{(k)} = A e^{ib}$, $\lambda_1 = r e^{ia}$. С ростом m знак $y_m^{(k)}$ будет меняться сложным образом, чем и распознается данный случай. Если обозначить через

$$\lambda^2 = p\lambda + q = 0 \quad (16)$$

квадратное уравнение с вещественными коэффициентами, которому удовлетворяют λ_1, λ_1^* , то из равенств (15), в которых $\sim$ заменено на $=$, легко получить (проделайте это!), что

$$y_{m+2}^{(k)} + p y_{m+1}^{(k)} + q y_m^{(k)} = 0.$$

Придавая в этом соотношении k какие-нибудь два значения, мы получим значения p, q , которые должны стабилизироваться (стремиться к пределам) с ростом m и не зависеть от выбора k ; после этого из (16) находим λ_1, λ_1^* . Соответствующий собственный вектор $\lambda_1^m \alpha_1 \mathbf{x}_1$ находим из (15), выбрав для m два последовательных больших значения.

7. Вычисление последующих собственных значений. Если у матрицы $\mathbf{A}$ порядка n известен собственный вектор $\mathbf{x}_1$, отвечающий собственному значению λ_1 , то задачу о разыскании остальных собственных векторов и значений можно свести к аналогичной задаче для некоторой матрицы $\mathbf{A}_1$ порядка $n - 1$. К последней задаче можно, применить метод п. 6, после чего опять понизить порядок на единицу и т. д.

Для перехода к матрице $\mathbf{A}_1$ обозначим первую строку матрицы $\mathbf{A}$ буквой $\mathbf{r}$ и условимся нормировать собственные векторы $\mathbf{x}_k$ матрицы $\mathbf{A}$ (определенные, с точностью до скалярного множителя) так, чтобы их первая координата равнялась единице. Обозначим $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{x}_1 \mathbf{r}$; тогда из последнего условия вытекает, что первая строка матрицы $\mathbf{B}$ состоит из одних нулей (почему?). Далее, мы предоставляем читателю доказать равенство $\mathbf{r} \mathbf{x}_k = \lambda_k$. Из этого соотношения и из равенства

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$$

следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1 \mathbf{r} \mathbf{x}_k - \mathbf{A} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1 \mathbf{r} \mathbf{x}_1 = \\ &= \lambda_k \mathbf{x}_k - \lambda_k \mathbf{x}_1 - \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 = \lambda_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1), \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathbf{B} = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1) = \lambda_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1). \quad (17)$$

Обозначим через $\mathbf{y}_k$ столбец высоты $n - 1$, получающийся из $\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1$, отбрасыванием верхнего, нулевого элемента; через $\mathbf{A}_1$ обозначим матрицу порядка $n - 1$, получающуюся из $\mathbf{B}$ зачеркиванием первой строки и первого столбца. Тогда из (17) следует, что $\mathbf{A}_1 \mathbf{y}_k = \lambda_k \mathbf{y}_k$ (почему?), т. е. $\mathbf{y}_k$ ($k = 2, 3, \dots, n$) — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}_1$, отвечающий собственному значению λ_k ; вектор $\mathbf{y}_1$ нулевой и потому неинтересен. Найдя вектор $\mathbf{y}_k$, надо к нему сверху приписать нуль,

после чего к полученному вектору прибавить $\mathbf{x}_1$ тогда мы получим $\mathbf{x}_k$; при этом $\mathbf{y}_k$ нормируется так, чтобы $\mathbf{r}\mathbf{x}_k = \lambda_k$, тогда из (17) легко получить, что $\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k\mathbf{x}_k$.

Может оказаться, что указанная в последней фразе нормировка невозможна, тогда при любом выборе нормировочного множителя при $\mathbf{y}_k$ будет $\mathbf{r}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1) = 0$, т. е. $\mathbf{r}\mathbf{x}_k = \lambda_1$. В этом случае легко проверить, что собственному значению λ_k отвечает собственный вектор $\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1$, верхний элемент которого равен нулю и потому не поддается нормировке на единицу. Если же верхний элемент у $\mathbf{x}_1$ равнялся нулю, то взамен верхнего можно использовать любой другой элемент. Поэтому описанный метод применим во всех случаях, когда собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ простые. Если матрица $\mathbf{A}$ вещественная и найдена пара мнимых сопряженных собственных значений, а также пара соответствующих собственных векторов $\mathbf{x}_{1,2} = \tilde{\mathbf{x}}_1 \pm i\tilde{\mathbf{x}}_2$, то можно показать, что задачу о разыскании прочих собственных значений и соответствующих векторов можно за один шаг свести к аналогичной задаче для вещественной матрицы $\mathbf{A}_2$ $(n-2)$ -го порядка. Для этого векторы $\mathbf{x}_{1,2}$ нормируются условием $\tilde{a}_1\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1\tilde{a}_2 = 1$, где $\tilde{a}_j, \tilde{b}_j$ — первые два элемента вектора $\tilde{\mathbf{x}}_j$ ($j = 1, 2$). Тогда матрица $\mathbf{C} = \mathbf{A} - (\tilde{b}_2\tilde{\mathbf{x}}_1 - \tilde{b}_1\tilde{\mathbf{x}}_2)\mathbf{r} + (\tilde{a}_2\tilde{\mathbf{x}}_1 - \tilde{a}_1\tilde{\mathbf{x}}_2)\mathbf{s}$ имеет первые две строки нулевые, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ — первые две строки матрицы $\mathbf{A}$. Вычеркнув из $\mathbf{C}$ эти строки, а также первые два столбца, получим $\mathbf{A}_2$. Если $\mathbf{A}_2\mathbf{z}_k = \lambda_k\mathbf{z}_k$, то, приписав к $\mathbf{z}_k$ сверху два нуля и прибавив вектор $(u\tilde{b}_2 - v\tilde{a}_2)\tilde{\mathbf{x}}_1 + (v\tilde{a}_1 - u\tilde{b}_1)\tilde{\mathbf{x}}_2$, получим собственный вектор $\mathbf{x}_k$ матрицы $\mathbf{A}$, отвечающий собственному значению λ_k ; при этом скаляры u, v подбираются так, чтобы $\mathbf{r}\mathbf{x}_k = u\lambda_k$, $\mathbf{s}\mathbf{x}_k = v\lambda_k$. Все это мы предоставляем доказать желающим.

8. Матрицы с неотрицательными элементами. Матрицы с вещественными неотрицательными элементами встречаются в ряде прикладных задач. Для таких матриц развита теория, позволяющая, в частности, эффективно оценивать их наибольшее собственное значение (см., например, [23, 56]).

Итак, пусть матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию

$$a_{jk} \geq 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

Мы будем, писать в этом пункте $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ (читается: вектор $\mathbf{x}$ следует за вектором $\mathbf{y}$ или совпадает с ним), если $x_1 \geq y_1, x_2 \geq y_2, \dots, x_n \geq y_n$; заметим, что если $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, то $\mathbf{A}\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{A}\mathbf{y}$. Докажем сначала, что при условии (18) матрица $\mathbf{A}$ имеет по крайней мере один собственный вектор $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{0}$; собственное значение, отвечающее этому вектору, должно быть вещественным неотрицательным (почему?).

Для доказательства допустим для наглядности, что $n = 3$, и будем рассматривать $\mathbf{A}$ как матрицу отображения некоторого вещественного евклидова пространства в себя (рис. 64). Тогда из условия (18) вытекает, что каждый луч (l) с вершиной в начале координат O , расположенный в первом октанте, преобразуется в луч (l') , расположенный там же, если только не переходит весь в начало координат (почему?). В последнем варианте векторы, параллельные (l) , являются собственными (им отвечает собственное значение $\lambda = 0$), так что наше утверждение доказано; поэтому впредь мы будем этот вариант считать исключенным.

Нам нужно доказать, что по крайней мере один луч из первого октанта отображается на себя. Для этого рассмотрим треугольник (T) , определенный условиями

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Так как между его точками и лучами первого октанта имеется естественное взаимно однозначное соответствие, то отображение лучей на лучи индуцирует отображение треугольника (T) в себя (рис. 64), которое будет непрерывным. Однако латвийский математик П. Боль (1865–1921) в 1904 г. и независимо голландский математик Л. Брауэр (1882–1966) в 1911–1913 гг. доказали замечательную теорему о том, что *при любом непрерывном отображении замкнутого ограниченного выпуклого конечномерного тела в себя по крайней мере одна точка остается неподвижной*, т.е. переходит в себя (впрочем, это вытекает из результатов п. VIII.2.6). Отсюда и следует наше утверждение о луче, а потому и о собственном векторе.

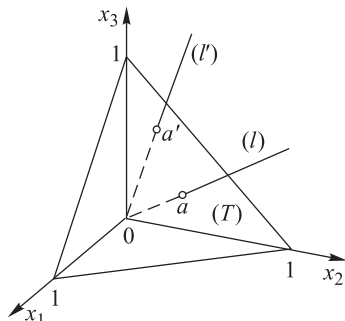


Рис. 64

Предположим дополнительно, что неравенства (18) строгие (впрочем, для дальнейшего достаточно, чтобы выполнялось (18) и все элементы какой-нибудь из матриц $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots$ были отличны от нуля). Тогда все элементы построенного в предыдущем абзаце собственного вектора $\mathbf{x}_0$ строго положительны и соответствующее собственное значение $\Lambda > 0$ (почему?). Докажем, что *если некоторый вектор $\mathbf{x}_1$, у которого по крайней мере один элемент положительный, удовлетворяет неравенству $\mathbf{A}\mathbf{x} \succ \alpha\mathbf{x}_1$, то $\Lambda \geq \alpha$* . В самом деле, пусть k — наибольшее возможное значение, для которого $\mathbf{x}_0 \succ k\mathbf{x}_1$. Тогда $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \succ \mathbf{A}(k\mathbf{x}_1)$, т.е. $\Lambda\mathbf{x}_0 \succ k\alpha\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_0 \succ \left(\frac{\alpha}{\Lambda}k\right)\mathbf{x}_1$ и неравенство $\alpha > \Lambda$ противоречило бы определению k . Аналогично доказывается, что *если вектор $\mathbf{x}_2$ имеет все элементы положительными и удовлетворяет неравенству $\beta\mathbf{x}_2 \succ \mathbf{A}\mathbf{x}_2$, то $\beta \geq \Lambda$* .

Из первого утверждения сразу следует, что вещественные собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ не могут превосходить Λ , а из второго — что *любой собственный вектор $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ отвечает собственному значению Λ* . Оказывается, что справедливы более сильные утверждения, на доказательстве которых мы здесь не будем останавливаться: *собственное значение Λ простое, а все остальные собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ (в том числе мнимые, если такие имеются) по модулю меньше Λ* . Поэтому при $\Lambda < 1$ уравнение $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \delta$ имеет ровно одно решение, причем если $\delta \succ \mathbf{0}$, то и $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ (это следует из метода итераций, см., например, ЛВМ, п. XVII.18).

Из доказанных выше неравенств $\Lambda \geq \alpha$ и $\Lambda \leq \beta$ можно получить простые двусторонние оценки для Λ . Так, полагая $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = (1, 1, \dots, 1)^*$ и подбирая соответствующие α и β , мы получаем оценку

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n a_{jk} \leq \Lambda \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n a_{jk}$$

(докажите эту оценку, а также, выбирая по-другому вектор $\mathbf{x}_1$, оценку $\Lambda \geq \max_{1 \leq j \leq n} a_{jj}$).

Более специальный класс, чем матрицы с неотрицательными элементами, составляют осцилляционные матрицы: именно, матрица $\mathbf{A}$ называется *осцилляционной*, если все ее миноры неотрицательны, а у некоторой степени $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots$ все миноры положительны (впрочем, второе требование можно заменить на такое, равносильное: $\det \mathbf{A} > 0$, все $a_{j,j+1} > 0, a_{j+1,j} > 0$). Это, казалось бы, трудно проверяемое свойство на самом деле может вытекать из теоретических соображений, в результате чего осцилляционные матрицы появляются в некоторых задачах теории колебаний. У осцилляционных матриц все собственные значения положительные и простые, а отвечающие им собственные векторы имеют все увеличивающееся число перемен знака у элементов, напоминая последовательность функций $\sin kx$ ($0 \leq x \leq \pi, k = 1, 2, \dots, n$). Свойства и приложения осцилляционных матриц описаны в книгах [23, 24].

9. Метод А. Н. Крылова. При раскрытии характеристического многочлена $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ оказывается удобным следующий метод, предложенный А. Н. Крыловым. Если матрица $\mathbf{A}$ имеет порядок n , то

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \equiv (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n,$$

и задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$. В силу теоремы Гамильтона–Кэли (п. 3.3) имеем

$$(-1)^n \mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + a_2 \mathbf{A}^{n-2} + \dots + a_{n-1} \mathbf{A} + a_n \mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Помножив обе части справа на произвольный столбец $\mathbf{x}_0$ высоты n и перенеся первое слагаемое в правую часть, получим

$$a_1 \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}_0 + a_2 \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{x}_0 + \dots + a_{n-1} \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + a_n \mathbf{x}_0 = (-1)^{n+1} \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0.$$

Если записать это векторное равенство по координатам, то получим систему из n уравнений первой степени с n неизвестными $a_1, a_2, \dots, a_n$, откуда и находим это неизвестные. Отметим, что при этом степени матрицы $\mathbf{A}$ вычислять не нужно, а надо последовательно вычислять $\mathbf{A} \mathbf{x}_0, \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{A} \mathbf{x}_0), \mathbf{A}^3 \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0)$ и т. д.

Метод А. Н. Крылова имеет варианты, более удобные для вычислений; на этих вариантах мы здесь не будем останавливаться.

10. Метод малого параметра. Рассмотрим лишь один из вариантов применения метода малого параметра. Пусть у матрицы $\mathbf{A}$ все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и соответствующие собственные векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ известны, а требуется определить собственные значения и собственные векторы матрицы $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B}$, где ε — малый параметр. Мы предположим для простоты, что все значения λ_k различные; чтобы избежать произвольных скалярных множителей в собственных векторах, будем считать эти векторы единичной длины.

Разложим k -е собственное значение $\tilde{\lambda}_k$ и соответствующий собственный вектор $\tilde{\mathbf{x}}_k$ матрицы $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B}$, зависящие от ε , в ряды по степеням ε :

$$\tilde{\lambda}_k = \lambda_k + \varepsilon \mu_k + \dots, \quad \tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k + \varepsilon \mathbf{y}_k + \dots; \quad (19)$$

при этом мы учли, что для $\varepsilon = 0$ должны получиться заданные результаты $\lambda_k, \mathbf{x}_k$. По определению собственных векторов имеем

$$(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B})(\mathbf{x}_k + \varepsilon \mathbf{y}_k + \dots) = (\lambda_k + \varepsilon \mu_k + \dots)(\mathbf{x}_k + \varepsilon \mathbf{y}_k + \dots).$$

Раскрывая скобки и приравнявая коэффициенты при ε , получим

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_k + \mathbf{B}\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{y}_k + \mu_k \mathbf{x}_k \quad \text{т.е.} \quad (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})\mathbf{y}_k = -\mathbf{B}\mathbf{x}_k + \mu_k \mathbf{x}_k. \quad (20)$$

Если рассматривать последнее равенство как уравнение для нахождения $\mathbf{y}_k$, то, как известно из п. 1.4, для существования решения необходимо и достаточно выполнение условия ортогональности

$$(-\mathbf{B}\mathbf{x}_k) + \mu_k \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) \equiv -\mathbf{z}_k^* \mathbf{B}\mathbf{x}_k + \mu_k \mathbf{z}_k^* \mathbf{x}_k = 0,$$

где $\mathbf{z}_k$ — единственный, с точностью до скалярного множителя, собственный вектор матрицы $\mathbf{A}^* - \lambda_k^* \mathbf{I}$. Отсюда находим $\mu_k = \frac{\mathbf{z}_k^* \mathbf{B}\mathbf{x}_k}{\mathbf{z}_k^* \mathbf{x}_k}$. При таком выборе μ_k уравнение (20) для $\mathbf{y}_k$ имеет однопараметрическое семейство решений $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k0} + C\mathbf{x}_k$, где C — произвольная постоянная. Параметр C находим из условия нормировки вектора $\tilde{\mathbf{x}}_k$; так как из этого условия вытекает, что $\mathbf{y}_k^* \mathbf{x}_k = 0$ (почему?).

Более простой результат получится, если матрица $\mathbf{A}$ эрмитова (п. 1.3). Умножив первое равенство (20) слева на $\mathbf{x}_j^*$ ($j \neq k$) и воспользовавшись ортогональностью собственных векторов, а также равенством $\mathbf{x}_j^* \mathbf{A}\mathbf{y}_k = (\mathbf{y}_k^* \mathbf{A}\mathbf{x}_j)^* = (\mathbf{y}_k^* \lambda_j \mathbf{x}_j)^* = \lambda_j \mathbf{x}_j^* \mathbf{y}_k$, получим, что $\mathbf{x}_j^* \mathbf{y}_k = \frac{\mathbf{x}_j^* \mathbf{B}\mathbf{x}_k}{\lambda_k - \lambda_j}$, откуда окончательно (проверьте!)

$$\mathbf{y}_k = \sum_{j \neq k} \frac{\mathbf{x}_j^* \mathbf{B}\mathbf{x}_k}{\lambda_k - \lambda_j} \mathbf{x}_j, \quad \mu_k = \mathbf{x}_k^* \mathbf{B}\mathbf{x}_k.$$

Аналогично можно найти дальнейшие члены разложений (19). Случай кратных собственных значений затронут в книге [28].

11. Метод непрерывного продолжения. С методом малого параметра непосредственно связан метод продолжения решения по параметру, также один из наиболее универсальных методов. Пусть формулировка задачи включает некоторый параметр λ , который меняется существенно, не мало, и решение задачи известно при некотором значении $\lambda = \lambda_0$. Метод состоит в построении дифференциального уравнения с независимым переменным λ относительно искомого решения. Численное решение дифференциального уравнения с начальным условием при $\lambda = \lambda_0$, обычно не представляющее существенных трудностей и дает требуемый результат.

Покажем этот метод на примере построения обратной матрицы. Пусть элементы квадратной матрицы $\mathbf{A}$ зависят от λ , $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\lambda)$, и

при $\lambda = \lambda_0$ известна (например, вычислена по методу Гаусса) обратная матрица $\mathbf{A}_0^{-1}$. Дифференцируя равенство $\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{A}^{-1}(\lambda) = \mathbf{I}$ по λ , легко получим (проверьте!)

$$\frac{d(\mathbf{A}^{-1})}{d\lambda} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{A}}{d\lambda} \mathbf{A}^{-1}. \quad (21)$$

Обозначив $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{A}^{-1} = (b_{ij})$ и приравнявая выражения для элементов матрицы в обеих частях (21), получим систему из n^2 дифференциальных уравнений относительно функций $b_{ij}(\lambda)$. Решая эту систему численно при заданном начальном условии, мы и получим $\mathbf{A}^{-1}(\lambda)$.

Если интервал изменения λ достаточно велик, то следует время от времени проводить коррекцию построенного решения. Это можно делать следующим образом. Пусть при некотором $\lambda = \lambda_1$ мы получили для $\mathbf{A}^{-1}(\lambda_1)$ приближенное значение $\mathbf{B}_1$; обозначим $\mathbf{A}^{-1}(\lambda_1) - \mathbf{B}_1 = \Delta\mathbf{B}_1$, это и есть поправка, которую надо найти. Обозначив далее $\mathbf{A}^{-1}(\lambda_1) = \mathbf{A}_1$ (это известная матрица), получим $\mathbf{A}^{-1}(\lambda_1)\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}$, т. е.

$$(\mathbf{B}_1 + \Delta\mathbf{B}_1)\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}, \quad \Delta\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1,$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{B}_1 &= (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1)\mathbf{A}_1^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1)(\mathbf{B}_1 + \Delta\mathbf{B}_1) = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1)\mathbf{B}_1 + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1)\Delta\mathbf{B}_1. \end{aligned}$$

Итерируя последнюю формулу, получим (проверьте!)

$$\Delta\mathbf{B}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1)\mathbf{B}_1 + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1)^2\mathbf{B}_1 + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1)^3\mathbf{B}_1 + \dots \quad (22)$$

Так как $\mathbf{B}_1 \approx \mathbf{A}_1^{-1}$, то $\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 \approx \mathbf{I}$, и мы получаем в правой части хорошо сходящийся ряд.

Метод непрерывного продолжения по параметру можно применить и для решения нелинейных уравнений. Допустим, что задана система уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) &= 0, \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

и для некоторого $\lambda = \lambda_0$ известно какое-либо (не обязательно единственное) из решений $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Если теперь менять λ , то и решение будет изменяться, т. е. $x_i = x_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Дифференцируя равенства (23) по λ , получим

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \lambda} = -\frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

откуда

$$\frac{\partial x_i}{\partial \lambda} = -\sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial \lambda} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (24)$$

где $b_{ij} = b_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda)$ — элементы матрицы, обратной к $\mathbf{A} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$. Эти элементы удовлетворяют системе из n^2 уравнений, полученных из равенства (21). Эта система не может быть решена независимо, так как элементы матрицы $\mathbf{A}$ зависят от заранее неизвестных величин x_i ; однако если присоединить к этой системе уравнения (24), мы получим замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно $n^2 + n$ функций $x_i(\lambda)$ и $b_{ij}(\lambda)$, которую можно численно решить для заданных при $\lambda = \lambda_0$ начальных условий.

Для корректировки решения можно по мере его продолжения при отдельных значениях λ применять к системе (23) метод Ньютона (см., например, ЛВМ, п. XII.12), выбрав результат продолжения в качестве нулевого приближения. Так как естественно ожидать, что это приближение будет в достаточной близости от точного решения, то метод будет быстро сходиться, даже если при его применении пользоваться после линеаризации найденными приближенными значениями b_{ij} . После уточнения значений x_i можно уточнить и значения b_{ij} по формуле, аналогичной (22), а затем, приняв уточненные значения за начальные данные, вновь решать дифференциальные уравнения.

Продолжение решения прекращается, если при конечном λ по крайней мере одно из x_i обратится в бесконечность (это возможно, так как решаемая система дифференциальных уравнений нелинейна, ср. ЛВМ, гл. XV, пп. 15 и 31), либо если при конечных x_i получится $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = 0$, так как тогда правые части (24) обратятся в бесконечность (почему?). В последнем случае нарушается условие существования неявных функций (ср. ЛВМ, пп. IX.13 и XII.3), и решение может разветвиться на несколько или стать мнимым; мы не будем здесь исследовать этот вопрос.

Этот метод настолько эффективен, что если исходная система уравнений

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots \\ \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (25)$$

не содержала параметров, то для ее решения иногда применяется *метод искусственного введения параметра*. Он состоит в построении системы (23) с параметром (обычно в том или ином смысле родственной (25)), изменяющимся, скажем, в пределах $0 \leq \lambda \leq 1$, притом такой, чтобы при $\lambda = 0$ система (23) легко решалась, а при $\lambda = 1$ она становилась равносильной (25). Тогда, исходя из решения системы (23) и продолжая его по параметру, если это окажется возможным, мы при $\lambda = 1$ придем к решению системы (25). При этом важно правильно угадать вид системы (23), чтобы и при всех промежуточных значениях λ продолжаемое решение находилось на ветви, приводящей при $\lambda = 1$ к интересующему нас решению системы (25).

§5. Задачи линейного программирования

1. Основная задача. *Основной задачей линейного программирования является отыскание экстремума линейной функции в области, заданной системой линейных равенств и линейных неравенств. Таким образом, если обозначить число независимых переменных через n , то речь идет об отыскании экстремума функции цели (критерия качества)*

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

при условиях

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (2)$$

$$d_{j1}x_1 + d_{j2}x_2 + \dots + d_{jn}x_n \geq e_j \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (3)$$

Неравенства вида $d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \leq e$ можно отдельно не рассматривать, так как они приводятся к неравенствам вида (3) после умножения обеих сторон на -1 .

Естественно требовать, чтобы уравнения (2) были непротиворечивыми и независимыми, а $k < n$ (почему?). Тогда k из независимых переменных можно выразить через остальные $n - k$; подставив эти выражения в правую часть (1) и в левую часть (3), мы получим аналогичную задачу, но все условия, наложенные на независимые переменные, будут иметь вид неравенств. Таким образом, с принципиальной точки зрения поставленная задача представляет собой частный случай задачи на экстремум с ограничениями (см. ЛВМ, п. XII.11). Однако применение общей методики в данном случае мало что дает. Вскоре мы увидим, что заданные ограничения определяют в пространстве независимых переменных многогранник, а функция цели достигает экстремума в каких-либо из его вершин. Поэтому в принципе было бы достаточно сравнить значения z во всех вершинах и выбрать из этих значений крайние. Но если число ограничений велико, то и число вершин велико, все их надо находить, и потому такой «слепой» способ оказывается непомерно громоздким. Методы линейного программирования дают возможность организовать целенаправленный перебор вершин, при котором объем вычислений значительно сокращается.

Появление линейного программирования связано с применением математики в вопросах планово-экономического характера. Впервые подобные задачи систематически изучали советский математик, лауреат Нобелевской премии, Л. В. Канторович (1912–1986) и его сотрудники, начиная с 1939 г.; с 1948 г. задачи такого рода независимо начинали интенсивно исследовать математики США, которые и ввели сам термин «линейное программирование» (не совсем удачный, так как он может быть спутан с программированием для вычислительных машин). Сейчас этот раздел математики значительно разработан и продолжает

интенсивно развиваться, как и примыкающие к нему разделы. Здесь мы сможем дать лишь представление о подходе к задачам линейного программирования, отослав читателя, желающего ближе познакомиться с этим предметом, к книгам, специально ему посвященным (см., например, [26, 42, 46, 100, 101, 140]).

2. Примеры. Укажем несколько примеров, приводящих к задачам линейного программирования. Каждый из них имеет варианты, из которых мы приведем только один.

1. *Задача о смесях.* Пусть имеются продукты $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$, каждый из которых содержит компоненты $K_1, K_2, \dots, K_n$ (например, продуктами могут служить удобрения, а компонентами — химические элементы, из которых они состоят; продуктами могут служить продукты питания, а компонентами — жиры, белки, углеводы и витамины, и т. п.). Пусть каждый килограмм продукта Π_i стоит c_i рублей и содержит α_{ij} кг компоненты K_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Пусть из заданных продуктов составляется смесь, которая должна содержать b_1 кг компоненты K_1 , b_2 кг компоненты K_2 , ..., b_n кг компоненты K_n . Это, вообще говоря, можно сделать многими способами. Задача состоит в том, чтобы общая цена необходимых для смеси продуктов была минимальной.

Для математической формулировки задачи обозначим через x_i количество килограммов продукта Π_i в смеси. Тогда функцией цели (1) служит цена смеси $\mathcal{C} = \sum_{i=1}^m c_i x_i$, и задача состоит в ее минимизации при условиях

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m); \quad \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i = b_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Если количество каких-либо продуктов ограничено, то добавятся еще неравенства вида $x_i \leq e_i$, т. е. $-x_i \geq -e_i$.

2. *Транспортная задача.* Пусть заводы $З_1, З_2, \dots, З_m$ производят некоторую продукцию, причем каждый завод $З_i$ производит ее в количестве a_i тонн в год. Эта продукция доставляется потребителям $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$, причем каждому потребителю Π_j в количестве b_j тонн в год. Предполагается, что выполнено условие баланса $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$,

т. е. общее производство равно общему потреблению. Пусть расстояние от завода $З_i$ до потребителя Π_j по дороге равно α_{ij} км. Задача состоит в таком распределении продукции (прикреплении потребителей к заводам), при котором общий объем перевозок был бы минимальным.

Для математической формулировки задачи обозначим через x_{ij} количество тонн продукции, доставляемой в год с завода $З_i$ потребителю

П_ж. Тогда функцией цели служит общий объем перевозок

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij},$$

измеряемый в тонно-километрах, и задача состоит в ее минимизации при условиях

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n);$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

(продумайте их!).

Наличие двух индексов у неизвестных не имеет принципиального значения, так как неизвестные можно расположить и в едином порядке, например, обозначив $y_1 = x_{11}, y_2 = x_{12}, \dots, y_n = x_{1n}, y_{n+1} = x_{21}, y_{n+2} = x_{22}, \dots, y_{2n} = x_{2n}, y_{2n+1} = x_{31}$ и т. д. вплоть до $y_N = x_{mn}$ ($N = mn$). Тогда получится частный случай общей задачи п. 1. На практике такого изменения обозначений можно и не делать.

Задачу можно усложнить наличием различных видов транспорта, введением стоимости перевозки; ограничением пропускной способности дорог и т. п. Все это будут задачи того же типа.

Аналогичный характер имеет задача об организации производства, когда определенное количество ресурсов (сырья, рабочей силы и т. д.) отпущено на производство нескольких видов продукции и требуется так распределить эти ресурсы, чтобы по какому-либо выбранному критерию получить наибольшую выгоду, а также многие другие задачи математической экономики. Важнейшую роль в этих задачах играет правильный выбор функции цели, от которого может существенно зависеть искомое *оптимальное решение*, т. е. решение, придающее этой функции экстремальное (в нужную сторону) значение при заданных условиях. Так, если максимизируется выгода в задаче об организации производства и при этом может потребоваться перестройка уже налаженного производственного процесса, то функция цели должна учитывать затраты на эту перестройку (т. е. «игра может не стоить свеч») и т. п.

Подчеркнем, что в правильно поставленной задаче функция цели должна быть только одна. Поэтому распространенные выражения вида «получить максимальную выгоду при минимальных затратах» неправильны; надо говорить: «получить максимальную выгоду при заданных затратах» (функцией цели служит выгода) или «получить заданную выгоду при минимальных затратах» (функцией цели служат затраты).

3. Геометрические замечания. Как известно из аналитической геометрии, уравнение $ax + by = c$ на плоскости определяет прямую,

ограничивающую две полуплоскости, в одной из которых будет выполняться неравенство $ax + by \geq c$, а в другой — неравенство $ax + by \leq c$. (Мы считаем полуплоскости замкнутыми, т. е. причисляем к ним граничную прямую.) Уравнение: $ax + by + cz = d$ в пространстве определяет плоскость, ограничивающую два полупространства: $ax + by + cz \geq d$

и $ax + by + cz \leq d$. Аналогично уравнение $\sum_{j=1}^n a_j x_j = b$ определяет в n -мерном вещественном числовом пространстве $(n-1)$ -мерную плоскость (S) (иногда говорят «гиперплоскость»), ограничивающую два полупространства: $(\Pi^+)(f(x) \geq b)$ и $(\Pi^-)(f(x) \leq b)$, где, по определению, $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, $f(x) = \sum_{j=1}^n a_j x_j$. Плоскость (S) разделяет эти

полупространства, так как, если следовать вдоль любого непрерывного пути из любой точки $p \in (\Pi^+)$ в любую точку $q \in (\Pi^-)$, то значение $f(x)$ вдоль этого пути непрерывно переходит от $f(p) \geq b$ до $f(q) \leq b$ и потому по дороге должно хотя бы один раз равняться b , а тогда $x \in (S)$.

Если заданы две точки $p(p_1; p_2; \dots; p_n)$, $q(q_1; q_2; \dots; q_n)$ в E_n , то координаты точки x , расположенной на отрезке pq и делящей его в отношении $\frac{px}{xq} = \lambda$, находятся, как в аналитической геометрии на плоскости или в пространстве, по формулам

$$x_i = \frac{p_i + \lambda q_i}{1 + \lambda} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если обозначить $\frac{1}{1 + \lambda} = \alpha$, $\frac{\lambda}{1 + \lambda} = \beta$, то можно также записать

$$x_i = \alpha p_i + \beta q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \text{ где } 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha + \beta = 1. \quad (4)$$

Множество (M) точек E_n называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. Так, плоскость любого числа измерений, полуплоскость или полупространство, отрезок, круг, угол (как часть плоскости), меньший 180° , — все это выпуклые множества. В отличие от этого, угол, больший 180° , совокупность из конечного числа $k \geq 2$ точек (как и вообще любое несвязное множество), окружность (как и любая кривая линия), любая неплоская поверхность — это невыпуклые множества. В связи с последними примерами отметим, что термин «выпуклость» может иметь различный смысл: выпуклые линии и поверхности в наглядно-геометрическом смысле, если их рассматривать как множества точек, не являются выпуклыми множествами.

(Аналогично вводится понятие *выпуклости множества (M) векторов* в линейном пространстве: здесь вместе с любыми двумя векторами p, q множество (M) должно содержать каждый вектор $\alpha p + \beta q$, где $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha + \beta = 1$).

Пересечение (т. е. общая часть) *любого количества выпуклых множеств в одном пространстве всегда является выпуклым множеством*. В самом деле, любые две точки p, q пересечения принадлежат каждому из пересекающихся множеств; в силу их выпуклости и отрезок pq принадлежит каждому из этих множеств, а потому и пересечению.

Пусть теперь дано произвольное, вообще говоря, невыпуклое множество (M) точек. Обозначим через (M_1) пересечение всех выпуклых множеств, содержащих (M) (такие есть, например все пространство). Тогда множество (M_1) выпуклое, содержит (M) и содержится во всяком выпуклом множестве, содержащем (M) (почему?); другими словами, (M_1) — минимальное выпуклое множество, содержащее (M) , оно называется *выпуклой оболочкой множества (M)* . На рис. 65 показан пример выпуклой оболочки плоского множества, состоящего из двух компонент связности, причем (M) заштриховано густо, а (M_1) — редко. Если (M) состоит из конечного числа точек $p_1, p_2, \dots, p_k$, то (M_1) представляет собой *выпуклый многогранник*, размерность которого равна наибольшему числу линейно независимых векторов из $\overrightarrow{p_1 p_2}, \overrightarrow{p_1 p_3}, \dots, \overrightarrow{p_1 p_n}$, а вершинами которого служат некоторые (не обязательно все!) из точек (M) . Обратно, всякий выпуклый многогранник представляет собой выпуклую оболочку совокупности своих вершин. Если (M) представляет собой совокупность всех точек некоторого количества лучей с общей вершиной O , то (M_1) есть *выпуклый конус* (так говорят, хотя точнее было бы говорить «полуконус») с вершиной O , *натянутый* на (M) ; в частности, (M_1) может совпасть со всем пространством E_n . (Какой вид имеет (M_1) , если (M) состоит из конечного числа лучей с общей вершиной?)

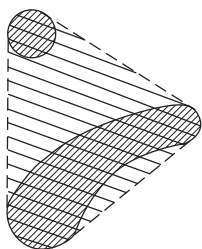


Рис. 65

Пусть (M) состоит из трех точек p, q, r ; тогда (M_1) представляет собой треугольник, который, впрочем, может вырождаться в отрезок, если эти точки лежат на одной прямой. Этот треугольник можно получить, соединив r отрезками со всеми точками отрезка pq . Поэтому в силу (4) любая точка (M_1) имеет координаты

$$x_i = \alpha' r_i \beta' (\alpha p_i + \beta q_i) = \alpha_1 p_i + \alpha_2 q_i + \alpha_3 r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где все $\alpha_i \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta' \alpha + \beta' \beta + \alpha' = \beta'(\alpha + \beta) + \alpha' = \beta' + \alpha' = 1$.

Аналогично можно проверить, что если (M) состоит из k точек $p, q, \dots, s$, то координаты всех точек (M_1) (и только их) можно представить в виде

$$x_i = \alpha_1 p_i + \alpha_2 q_i + \dots + \alpha_k s_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где все

$$\alpha_i \geq 0 \text{ и } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1. \quad (6)$$

Если же допускать для α_j и отрицательные значения, но сохранить второе условие (6), то совокупность всех точек с координатами (5) заполнит плоскость (S) минимальной размерности $l \leq k - 1$ ($l \leq n$), содержащую все точки $p, q, \dots, s$. В частности, если $l = k - 1$ (т. е. две точки не совпадают, три точки не лежат на одной прямой и т. п.), то величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ определяются точкой $x \in (S)$ однозначно, они называются *барицентрическими координатами* точки x ; их k , но так как их сумма равна единице, то имеется $k - 1 = l$ степеней свободы, как и должно быть. Название объясняется тем, что если в точках $p, q, \dots, s$ поместить соответственно массы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, то центр тяжести полученной системы точек окажется как раз в x . Когда $l = k - 1$, множество (M_1) называется *l-мерным симплексом*: нульмерный симплекс — это точка, одномерный — это отрезок, двумерный — треугольник, трехмерный — тетраэдр и т. д.

Аналогично решается задача о построении выпуклой оболочки для множества, состоящего из конечного числа лучей с общей вершиной O . Если эти лучи параллельны векторам $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \dots, \mathbf{s}$ соответственно и одинаково направлены с ними, то требуемая оболочка получится, если из O отложить все векторы вида $\alpha_1 \mathbf{p} + \alpha_2 \mathbf{q} + \dots + \alpha_k \mathbf{s}$, где все $\alpha_i \geq 0$.

4. Геометрический смысл основной задачи. Допустим сначала для простоты, что $n = 2$ и условия вида (2) отсутствуют. Тогда каждое из условий (3) определяет некоторую полуплоскость, и область (G) , в которой сравниваются значения функции цели, получается в результате пересечения этих полуплоскостей. На рис. 66 показан случай пересечения пяти полуплоскостей, каждая из которых заштрихована вблизи ограничивающей ее прямой. Мы видим, что в данном примере область (G) представляет собой выпуклый четырехугольник $ABCD$. Возможны и принципиально иные случаи: например, если полуплоскость, примыкающую к (l_4) , заменить на другую полуплоскость, примыкающую к (l_4) , то область (G) будет неограниченной; если вместо этого проделать то же с (l_1) , то (G) станет *пустым множеством*, т. е. не будет содержать ни одной точки, система неравенств (3) окажется противоречивой.

Аналогичным образом при любом n совокупность неравенств (3) определяет либо выпуклый многогранник, либо выпуклое *многогранное тело*, простирающееся в бесконечность, либо, наконец, пустое множество. При этом многогранник и многогранное тело, вообще говоря, будут n -мерными, однако возможны специальные случаи, когда размерность получится меньшей: например, если на рис. 66 поступательно перенести прямую (l_1) так, чтобы она прошла через точку B , то система неравенств (3) определит единственную эту точку, т. е. «нульмерный многогранник». Сходные выводы получаются и в случае, когда имеются также условия вида (2), так как эти условия, если не противоречат друг другу, определяют в E_n некоторую плоскость

(размерности $n - \text{rang}(a_{il})$), на которой и надо рассматривать ограничения (3).

Вернемся опять к рис. 66. и изобразим на той же плоскости линии уровня функции цели (1) (рис. 67). Так как это линейная функция,

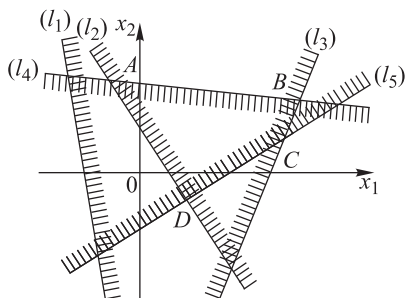


Рис. 66

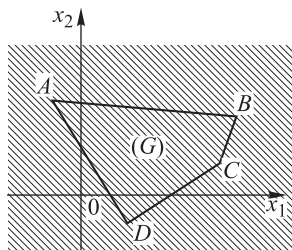


Рис. 67

то линии уровня будут параллельными прямыми. Если эта функция убывает в направлении, указанном на рис. 67 черточками, то очевидно, что она принимает наибольшее в области (G) значение в вершине B и наименьшее — в вершине D . Впрочем, если линии уровня параллельны одной из сторон четырехугольника $ABCD$, то экстремальное значение будет достигаться во всех точках этой стороны.

Аналогичным образом при любом n поверхности уровня функции цели представляют собой параллельные друг другу $(n - 1)$ -мерные плоскости. Если (G) — многогранник, то функция цели принимает наибольшее и наименьшее значения, вообще говоря, в двух вершинах, крайних в определенном смысле (в каком?). При специальных направлениях поверхностей уровня эти значения могут достигаться на гранях (G) размерности ≥ 1 . Если (G) — неограниченное многогранное тело, то может получиться, что функция цели на (G) будет неограниченной сверху или снизу (или и сверху и снизу); тогда соответствующая задача на экстремум решения не имеет.

5. Стандартный вид основной задачи. Перед решением задачи (1)–(3) ее приводят к тому или иному стандартному виду в зависимости от применяемого метода. Мы будем рассматривать метод, в котором стандартным видом ограничений, взамен (2), (3), является

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (8)$$

Можно показать, что от ограничений любого вида (2), (3) можно перейти к этому стандартному виду. Неравенства (8) чаще всего присутствуют в постановке задачи (см. примеры п. 2); если же это не так, то нужно выбрать какие-либо из n линейно независи-

мых левых частей (2), (3), обозначить через $y_1, y_2, \dots, y_n$ разности между этими левыми частями и соответствующими правыми частями, после чего всюду перейти от величин x к величинам y . Если неравенства (8) уже присутствуют и, кроме того, имеется ограничение вида (3): $d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \geq e$, то надо обозначить $d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n - e = x_{n+1}$, в результате чего число независимых переменных увеличится на единицу, а указанное ограничение заменится на условия

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n - x_{n+1} = e \quad x_{n+1} \geq 0,$$

из которых первое присоединится к (7), а второе — к (8). Если имеется еще одно ограничение вида (3), то надо ввести x_{n+2} и т. д. Наконец, если в равенстве вида (2) будет $b_i < 0$, то надо с обеих сторон поменять знаки. Так мы приходим к стандартному виду ограничений (7), (8).

Мы будем рассматривать задачу о наименьшем значении функции (1) при условиях (7), (8). Задачу о наибольшем значении можно рассмотреть аналогично, а можно воспользоваться простым равенством

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) = -\min(-c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n).$$

Поставленная задача допускает еще одно геометрическое истолкование, отличное от приведенного в п. 4. Для этого введем k -мерные числовые векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — столбцы матрицы коэффициентов a_{ij} ; k -мерный столбец $\mathbf{b}$ из правых частей b_i ; $(k+1)$ -мерные столбцы $\mathbf{a}'_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), полученные присоединением к $\mathbf{a}_j$ снизу коэффициента c_j функции (1). Условия (7) можно записать в виде векторного равенства

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Если произвольно менять все $x_j \geq 0$, то левая часть опишет конус (ср. п. 3), который мы будем называть *натянутым на векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ и обозначать через K ; этот конус представляет собой совокупность векторов, но его можно, отложив все векторы от начала координат, рассматривать и как совокупность точек E_k , координаты которых мы будем обозначать $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$. Система (7), (8) непротиворечива тогда и только тогда, когда $\mathbf{b} \in K$ (почему?).

С другой стороны, совокупность всевозможных векторов вида

$$x_1\mathbf{a}'_1 + x_2\mathbf{a}'_2 + \dots + x_n\mathbf{a}'_n, \quad \text{где все } x_j \geq 0 \quad (9)$$

образует конус K' в пространстве E_{k+1} с координатами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, z$, который при проецировании на E_k отображается на K . При этом, если какой-либо из векторов (9) проецируется на $\mathbf{b}$, то выполняются соотношения (7), (8), и потому соответствующее значение $z = x_1c_1 + x_2c_2 + \dots + x_nc_n$ — одно из значений (1), подлежащих сравнению. Так как из этих значений нужна выбрать наименьшее, то задача сводится к отысканию координаты z самой низкой (считая «верхом» положительное направление оси z) точки пересечения прямой $\xi_1 = b_1, \xi_2 = b_2, \dots, \xi_k = b_k$ с конусом K' .

6. Метод последовательного улучшения решения. Этот метод решения задачи линейного программирования, записанной в стандартной форме, называется также *симплексным методом* и имеет простой

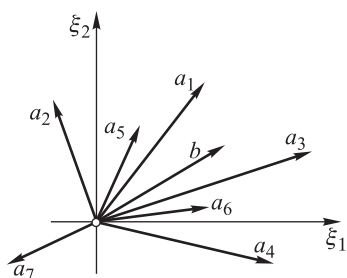


Рис. 68

геометрический смысл, который мы покажем для случая $k = 2$. Допустим, что векторы a_j и b в плоскости E_2 расположены, как на рис. 68; на каждый вектор a_j проецируется вектор a'_j , не показанный на рисунке. Пусть из векторов a_j указаны какие-либо два, например a_3 и a_5 , причем такие, что если принять их за базис в E_2 , то вектор b будет иметь положительные координаты: $b = \alpha_1 a_3 + \beta_1 a_5$; $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0$. Тогда значения $x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$, $x_3 = \alpha_1, x_5 = \beta_1$ удовлетворяют всем

условиям (7), (8), и потому соответствующее значение (1) получается в результате пересечения плоскости (Π_1) , проведенной через векторы a'_3 и a'_5 , с прямой (l) , проведенной через конец вектора b параллельно оси z . (Напомним, что мы считаем все векторы отложенными из начала координат.) Если среди векторов a'_j нет ни одного, лежащего ниже (Π_1) , то и весь конус K' расположен выше (Π_1) , и лишь имеет грани в (Π_1) , так что полученное значение $z = \alpha_1 c_3 + \beta_1 c_5$ и будет искомым наименьшим значением z . Но пусть какой-нибудь из векторов a'_j расположен ниже (Π_1) например это a'_1 ; тогда мы заменяем в базисе a_5 на a_1 . (Замена a_3 на a_1 при изображенном на рис. 68 положении векторов привела бы к отрицательному коэффициенту разложения вектора b по новому базису a_1, a_5 .) После этого проводим через a'_1 и a'_3 плоскость (Π_2) и повторяем то же рассуждение, что выше с (Π_1) . Если, например, вектор a'_4 расположен ниже (Π_2) , то мы переходим к базису a_1, a_4 в E_2 и т. д. Так как после каждого шага соответствующее значение (1) уменьшается, а всех вариантов (способов выбора базиса из заданных векторов a_j) имеется лишь конечное число, то через конечное число шагов мы придем к неуклучшаемому варианту, т. е. к решению задачи.

Если задача поставлена неправильно, то возможен также следующий случай: пусть, например, вектор a'_7 (рис. 68) окажется ниже плоскости, проведенной через a'_1 и a'_4 . Тогда нельзя перейти ни к базису a_1, a_7 , ни к базису a_4, a_7 , не нарушив требования положительности координат вектора b . Но в этом случае прямая (l) углубляется в конус K' как угодно далеко вниз (почему?), т. е. поставленная задача на наименьшее значение решения не имеет.

В случае любого k процедура аналогичная. Мы исходим из некоторого базиса в E_k , выбранного из заданных векторов a_j , причем такого, в котором все координаты вектора b положительны; эти координаты служат значениями x_j с соответствующими номерами, тогда как остальные x_j равны нулю. Затем мы заменяем один из векторов в

базисе на один из оставшихся $\mathbf{a}_j$, затем еще один и т. д., все время следя за тем, чтобы все координаты вектора $\mathbf{b}$ были положительными, а соответствующие значения (1) убывали. Тогда, если задача поставлена правильно, то через конечное число шагов мы приходим к неуклучшаемому варианту, т. е. к решению задачи.

Теперь перейдем к формальному описанию процедуры, так как пользоваться только геометрическими соображениями при вычислениях затруднительно. Мы предположим (*условие невырожденности*), что заданный вектор $\mathbf{b}$ не разлагается ни по каким $k - 1$ из заданных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Естественно считать также, что $k < n$ (почему?).

Мы исходим из какого-либо базиса $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$, выбранного среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ так, чтобы в разложении

$$\mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{a}_{i_1} + \alpha_2 \mathbf{a}_{i_2} + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_{i_k} \quad (10)$$

были все $\alpha_j > 0$ (о выборе этого базиса см. ниже). Затем надо найти коэффициенты разложений всех векторов $\mathbf{a}_j$ по этому базису:

$$\mathbf{a}_i = p_{i1} \mathbf{a}_{i_1} + p_{i2} \mathbf{a}_{i_2} + \dots + p_{ik} \mathbf{a}_{i_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (11)$$

это делается при каждом i с помощью решения системы из k уравнений 1-й степени с k неизвестными. Если мысленно представить себе плоскость (Π_1) , проведенную, через векторы $\mathbf{a}'_{i_1}, \mathbf{a}'_{i_2}, \dots, \mathbf{a}'_{i_k}$, то перемещению на вектор $\mathbf{a}_{i_j}$ в плоскости E_k отвечает перемещение точки в (Π_1) на c_{ij} вдоль оси z (почему?). Вычислим выражения, смысл которых показан на рис. 69,

$$d_i - c_1 = p_{i1}c_{i_1} + p_{i2}c_{i_2} + \dots + p_{ik}c_{i_k} - c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (12)$$

Если все они ≤ 0 , то в силу предыдущего мы получаем решение поставленной задачи: $x_{i_1} = \alpha_1, x_{i_2} = \alpha_2, \dots, x_{i_k} = \alpha_k$, прочие $x_i = 0$; этому решению отвечает значение

$$z = z_{\min} = \alpha_1 c_{i_1} + \alpha_2 c_{i_2} + \dots + \alpha_k c_{i_k}.$$

Пусть теперь какая-либо из разностей (12) положительна, например при $i = r$ (на рис. 69 $r = 2$); если положительны несколько разностей, то из них естественно выбрать наибольшую. Тогда из (10) и (11) при $i = r$ вытекает, что при любом $\theta > 0$

$$\mathbf{b} = (\alpha_1 - \theta p_{r1}) \mathbf{a}_{i_1} + (\alpha_2 - \theta p_{r2}) \mathbf{a}_{i_2} + \dots + (\alpha_k - \theta p_{rk}) \mathbf{a}_{i_k} + \theta \mathbf{a}_r. \quad (13)$$

При этом могут быть два случая. Если $p_{r1} \leq 0, p_{r2} \leq 0, \dots, p_{rk} \leq 0$, то при как угодно большом θ все коэффициенты в разложении (13) будут положительны, и такому разложению будет отвечать значение $z \rightarrow -\infty$. Значит, поставленная задача решения не имеет.

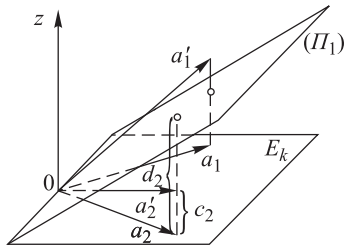


Рис. 69

Если же имеются $p_{rj} > 0$, то θ можно увеличивать только до значения

$$\theta = \frac{\alpha_s}{p_{rs}} = \min_{(p_{rj} > 0)} \frac{\alpha_j}{p_{rj}} \quad (14)$$

(почему?). При таком θ в правой части (13) член с $\mathbf{a}_{i_s}$ пропадет, тогда как остальные коэффициенты будут положительными. Заменяем в базисе $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ вектор $\mathbf{a}_{i_s}$ на $\mathbf{a}_r$ и перенумеруем полученные k векторов

заново так: $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_k$. Тогда из равенства (11) при $i = r$ легко выразить вектор $\mathbf{a}_{i_s}$ через эти k векторов; отсюда, в частности, следует, что и векторы $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_k$ образуют базис в E_k . Подставляя полученное выражение для $\mathbf{a}_{i_s}$ в (10) и (11), мы получим разложения вида

$$\mathbf{b} = \alpha'_1 \mathbf{a}'_1 + \alpha'_2 \mathbf{a}'_2 + \dots + \alpha'_k \mathbf{a}'_k, \quad (15)$$

$$\mathbf{a}_i = p'_{i1} \mathbf{a}'_1 + p'_{i2} \mathbf{a}'_2 + \dots + p'_{ik} \mathbf{a}'_k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Теперь все подготовлено к следующему шагу. Вновь составляем выражения вида (12), проверяем их знаки и т.д. Совершая так шаг за шагом, мы за конечное число шагов (обычно от k до $2k$) приходим к окончательному, т.е. неумлучшаемому, решению, либо доказываем неразрешимость задачи.

Условие невырожденности, сформулированное выше, не требует специальной проверки. Вырожденность обнаружится сама, если в разложении (15) или в каком-либо из дальнейших аналогичных разложений некоторые из коэффициентов окажутся равными нулю. Тогда можно наугад и притом достаточно мало изменить заданный вектор $\mathbf{b}$. После этого задача станет невырожденной и ее решение можно будет довести до конца; а построенный окончательный базис в измененной задаче, если изменения достаточно малы, будет давать решение и исходной задачи.

Нам остается сказать о выборе исходного базиса $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$. В некоторых случаях его удастся подобрать просто, рассматривая заданные векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$, либо из реального смысла поставленной задачи, исходя из какого-либо решения, подлежащего улучшению.

Если это не удастся сделать, то можно применить следующий искусственный метод. Введем в задачу новые независимые переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}$, записав функцию цели и условия в виде

$$\left. \begin{aligned} z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + \omega x_{n+1} + \omega x_{n+2} + \dots + \omega x_{n+k}, \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + x_{n+i} &= b_i \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+k} \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Здесь ω — весьма большое число, которое можно не уточнять оставляя его при вычислениях в виде буквы и считая, что $a\omega + b > c\omega + d$ (a, b, c, d — обычные числа) всякий раз, если $a > c$ либо если $a = c$ и $b > d$; нелинейные выражения от ω в процессе вычислений появиться не могут. При таком условии решить старую задачу (1), (7), (8) — все равно, что решить новую задачу (16) и обнаружить после этого, что $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n+k} = 0$ (почему?).

Однако совокупность векторов $\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+2}, \dots, \mathbf{a}_{n+k}$ — это как раз основной базис в E_k ; если все $b_i > 0$ (это условие невырожденности), его можно принять в задаче (16) за исходный базис, который для первоначальной задачи называется *искусственным*. Затем по описанному выше способу мы осуществляем последовательную замену векторов в базисе, пока не придем к окончательному решению новой задачи. Если при этом все векторы искусственного базиса окажутся замененными, то это решение будет одновременно решением исходной задачи. Если же в окончательном базисе останется хотя бы один искусственно введенный вектор, то это значит, что условиям (7), (8) не удовлетворяет ни один набор значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е. эти условия противоречивы.

Используя некоторые из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, иногда оказывается возможным организовать аналогичным образом исходный базис, введя менее чем k искусственных векторов.

В заключение отметим, что из-за основной ориентировки на приложения к экономике в линейном программировании применяется следующая терминология: всякий набор значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющий условиям (7), (8), называется *планом*; если у плана $n - k$ из значений x_i равны нулю, то план называется *опорным*, каждый такой план определяет (во всяком случае, если задача невырожденная) базис в E_k ; план, доставляющий минимальное значение функции цели, называется *оптимальным*. Как мы видели, оптимальный план — это один из опорных планов.

Универсальный, симплексный метод пригоден для любых задач линейного программирования. Однако для отдельных классов задач — таких, например, как транспортная (п. 2), — разработаны более удобные специальные методы, которые можно найти в литературе, указанной в п. 1.

Еще раз подчеркнем, что при небольшом числе неизвестных и неравенств задачу линейного программирования нетрудно решить простым перебором. Однако когда число переменных, как в реальных задачах, достигает десятков и сотен, количественные трудности перерастают в качественные, простой перебор становится невозможным и задача требует принципиально иного подхода, и породившего новую область математики — линейное программирование.

7. Приложение к матричным играм. *Теория игр* — это сравнительно недавно возникшая область математики, изучающая задачи о выработке *оптимальной стратегии* (наивыгоднейшей линии по-

ведения) в той или иной *конфликтной ситуации*, т.е. ситуации, в которой «враждующие стороны» преследуют противоположные цели и результат каждого мероприятия одной из сторон зависит от того, какой образ действий выберет «противник». Рассматриваемые в этой теории математические схемы охватывают как собственно игры, так и различные ситуации, возникающие из многих практических вопросов: рациональные производственные и экономические решения, вопросы военной тактики, вопросы выбора системы экспериментов («игра человека с природой») и т.д.

Впервые систематически задачи теории игр рассмотрел в 1909 г. немецкий математик Э. Цермело (1871–1953), основополагающие результаты получил в 1928 г. Дж. Нейман; значительное внимание к этим задачам было привлечено в годы второй мировой войны и непосредственно после нее. Сейчас имеется целый ряд курсов по теории игр, из которых мы укажем на [11, 22, 77, 78].

Здесь мы рассмотрим только один вид игр, именно *матричную игру с двумя участниками*, имеющую следующую схему. Пусть каждый из противников A и B , независимо один от другого, называет номер, A — от 1 до n , а B — от 1 до m . При этом, если A назвал номер i , а B — номер j , то игрок B выплачивает игроку A выигрыш a_{ij} (конечно, если $a_{ij} < 0$, то на самом деле выигрывает B); здесь (a_{ij}) — *платежная матрица*, известная обоим игрокам. Такая игра может многократно повторяться.

Специфику игры можно понять уже на самом простом примере

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

т.е. когда каждый из игроков независимо от другого называет одну из цифр, 1 или 2, и если цифры совпадут, то выигрывает A , а если не совпадут, то B , причем размер выигрыша во всех случаях одинаков. Ясно, что если игра совершается лишь один раз, то ни один из игроков не имеет преимуществ перед другим, и дать никаких указаний по выбору хода нельзя. Однако если игра повторяется и после каждой «партии» оба игрока узнают о ходе противника, то возникает борьба стратегий, в которой каждый стремится разгадать стратегию противника. Например, если A будет все время называть одну и ту же цифру, или называть 1 и 2 попеременно, или, скажем, называть ту цифру, которую в предыдущей партии назвал B , и т.п., то B , разгадав эту стратегию, может все время выигрывать; но, с другой стороны, и A может разгадать стратегию B . Если B существенно сильнее A (например, если A — человек, а B — ЭЦВМ с хорошо составленной программой), то даже очень сложная *чистая стратегия* A , т.е. такая, в которой каждый следующий ход A по какому-то продуманному заранее правилу однозначно определяется результатами предыдущих встреч, рано или поздно разгадывается B . Более того, если A , желая сбить с толку B , начинает называть цифры, по собственному мнению, наугад, то и в

этих ходах игрок B может подметить какую-то закономерность (хотя не такую жесткую, как в чистой стратегии) и в результате выигрывать чаще, чем A .

Однако имеется простой способ избежать проигрыша даже самому сильному противнику. Для этого надо, чтобы выбор каждого хода игроком A был совершенно случайным, с вероятностью 0,5 для обоих исходов: например, A может перед каждым ходом подбрасывать монету и называть 1, если выпадет цифра, и 2, если выпадет герб. Такая стратегия, в которой каждый ход является случайным, но заранее устанавливается его вероятность, называется *смешанной*.

Вернемся к случаю общей платежной матрицы (a_{ij}) и допустим, что оба игрока выбрали смешанную стратегию, так что игрок A называет номер i с вероятностью p_i , а игрок B называет номер j с вероятностью q_j ; при этом, конечно,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^m q_j = 1; \quad \text{все } p_i \geq 0, \quad q_j \geq 0.$$

При таких стратегиях среднее значение выигрыша игрока A за одну игру, подсчитанное по простым правилам теории вероятностей (см., например, ЛВМ, пп. XVIII.4 и 13), равно

$$v = v(p, q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j,$$

где для краткости обозначено $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$.

Допустим, что A старается увеличить это значение за счет подбора стратегии, а B этому сопротивляется, причем для простоты будем считать, что стратегии обоих друг другу известны. Тогда при любой стратегии p игрок B выберет стратегию q , для которой $v = \min_q v(p, q)$, и потому самый большой средний выигрыш игрока A будет равным

$$v' = \max_p \left(\min_q v(p, q) \right). \quad (18)$$

Обратно, если B старается минимизировать свой средний проигрыш, а A этому сопротивляется, то получаем значение

$$v'' = \min_q \left(\max_p v(p, q) \right). \quad (19)$$

Основная *теорема Дж. Неймана* состоит в том, что эти значения равны, $v' = v''$; это общее значение называется *ценой игры*. При этом существует пара стратегий (не обязательно единственная), $p = \tilde{p}$ и $q = \tilde{q}$, для которой

$$v' = v(\tilde{p}, \tilde{q}) = \max_p v(p, \tilde{q}) = \min_q v(\tilde{p}, q).$$

Отсюда вытекает (продумайте!), что при применении смешанных стратегий эти стратегии $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ являются оптимальными (наиболее выгодными) сразу для обеих сторон: если A выберет стратегию, отличную от $\tilde{p}$, то B сможет, вообще говоря, уменьшить свой проигрыш (во всяком случае, не увеличить его); а если B выберет стратегию, отличную от $\tilde{q}$, то на этом A может лишь выгадать. В случае $n = m = 2$, когда имеются лишь две независимые переменные p_1 , q_1 возможная картина линий уровня среднего выигрыша показана на рис. 70; впрочем, точка $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1)$ может попасть на границу квадрата и не быть стационарной точкой функции $v(p_1, q_1)$.

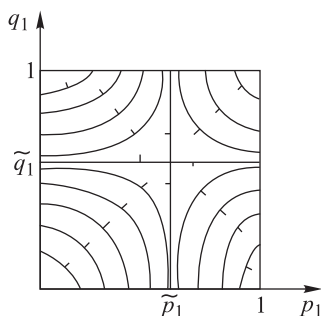


Рис. 70

В частности, для примера (17) будет $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = 1/2$, $v' = 0$ (проверьте!).

Не следует думать, что равенство выражений (18) и (19) вытекает просто из возможности перестановки порядка действий $\max_p$ и $\min_q$. На самом деле такая перестановка, вообще говоря, невозможна. Проверьте, например, что

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left[\min_{0 \leq y \leq 1} (x + y - 1)^2 \right] = 0, \quad \min_{0 \leq y \leq 1} \left[\max_{0 \leq x \leq 1} (x + y - 1)^2 \right] = \frac{1}{4}.$$

Еще более простой пример: если i и j меняются от 1 до n и $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases}$, то $\max_i \left(\min_j \delta_{ij} \right) = 0$, $\min_j \left(\max_i \delta_{ij} \right) = 1$. На самом деле доказательство теоремы Неймана совсем не простое, и мы его здесь не приводим.

Чтобы отыскать цену игры и оптимальные стратегии, предположим, что все $a_{ij} > 0$. Этого всегда можно достичь, добавляя ко всем исходным a_{ij} одно и то же достаточно большое число a . Тогда просто ко всем выигрышам добавится a , т. е. от полученной цены придется a вычесть; а на оптимальных стратегиях такое добавление не скажется. Заметим далее, что для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

$$\min_q (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_m q_m)$$

равен наименьшему из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (почему?). Значит, при заданных $p_1, p_2, \dots, p_n$

$$\min_q v(p, q) = \min_q \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} p_i \right) q_j$$

равен наименьшему из чисел $\sum_{i=1}^n a_{ij}p_i$, для $j = 1, 2, \dots, m$. Если обозначить этот минимум через v_p то ясно, что $v_p > 0$ и

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}p_i \geq v_p \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (20)$$

причем по крайней мере для одного j это неравенство должно обратиться в равенство. Обозначив $p_i/v_p = x_i$, получим, что

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \geq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (22)$$

тогда как

$$\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{v_p}. \quad (23)$$

Так как $v_{\tilde{p}} = v'$ (почему?), то для значений $x_i = \tilde{x}_i = \tilde{p}_i/v'$ удовлетворяются условия (21), (22), а левая часть (23) равна $1/v'$. С другой стороны, пусть x'_i — решение задачи о минимуме суммы (23) при условиях (21), (22). Вычислим соответствующее значение v'_p по формуле (23) и положим $p'_i = x'_i v'_p$. Тогда $\sum p'_i = 1$ и так как по крайней мере одно из неравенств (22) при $x_i = x'_i$ должно обратиться в равенство (почему?), то из (22) и (20) получаем, что формально введенное v'_p как раз равно v_p и потому меньше или равно v' , откуда $\frac{1}{v_p} \leq \frac{1}{v'}$. Значит, по смыслу задачи на минимум, $v' = v'_p$, т.е., цена игры получается с помощью сформулированной задачи на минимум, которая является одной из задач линейного программирования (п. 1); вероятности $\tilde{p}_i$ для оптимальной стратегии пропорциональны компонентам $\tilde{x}_i$ оптимального плана. Оптимальную стратегию $\tilde{q}$ можно найти аналогичным образом.

Рассмотрим численный пример. Пусть платежная матрица (a_{ij}) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{т.е. } n = 2, m = 3).$$

Добавив ко всем элементам число 3, мы приходим к задаче на минимум суммы $x_1 + x_2$ при условиях

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad 4x_1 + x_2 \geq 1, \quad 3x_1 + 6x_2 \geq 1, \quad 2x_1 + 4x_2 \geq 1.$$

Переходя к стандартному виду (п. 5), введем переменные x_3, x_4, x_5 :

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad 3x_1 + 6x_2 - x_4 = 1, \quad 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 1,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.$$

Согласно методу последовательного улучшения решения (п.6) положим

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Не будем искать опорный базис, а введем искусственный базис, как в п.6:

$$\mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

заменяв функцию цели на $z = x_1 + x_2 + \omega x_6 + \omega x_7 + \omega x_8$. Составим разложения вида (10), (11), а также выражения (12):

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_6 + \mathbf{a}_7 + \mathbf{a}_8;$$

$$\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{a}_6 + 3\mathbf{a}_7 + 2\mathbf{a}_8, \quad d_1 - c_1 = 4\omega + 3\omega + 2\omega - 1 = 9\omega - 1 > 0;$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_6 + 6\mathbf{a}_7 + 4\mathbf{a}_8, \quad d_2 - c_2 = \omega + 6\omega + 4\omega - 1 = 11\omega - 1 > 0;$$

$$\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_6, \quad d_3 - c_3 = -\omega < 0;$$

$$\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_7, \quad d_4 - c_4 = -\omega < 0;$$

$$\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_8, \quad d_5 - c_5 = -\omega < 0.$$

Наибольшее значение для $d_i - c_i$ получается при $i = 2$, поэтому введем в опорный базис вектор $\mathbf{a}_2$; так как наименьшее значение (14) достигается при $i = 7$ (почему?), то из базиса исключаем $\mathbf{a}_7$. Так как $\mathbf{a}_7 = \frac{1}{6}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{6}\mathbf{a}_6 - \frac{2}{3}\mathbf{a}_8$, то получаем.

$$\mathbf{b} = \frac{1}{6}\mathbf{a}_2 + \frac{5}{6}\mathbf{a}_6 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_8;$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{6}\mathbf{a}_2 + \frac{7}{2}\mathbf{a}_6, \quad d'_1 - c_1 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}\omega;$$

$$\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_6, \quad d'_3 - c_3 = -\omega;$$

$$\mathbf{a}_4 = -\frac{1}{6}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{6}\mathbf{a}_6 + \frac{2}{3}\mathbf{a}_8, \quad d'_4 - c_4 = -\frac{1}{6} + \frac{5}{4}\omega;$$

$$\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_8, \quad d'_5 - c_5 = -\omega;$$

$$\mathbf{a}_7 = \frac{1}{6}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{6}\mathbf{a}_6 - \frac{2}{3}\mathbf{a}_8, \quad d'_7 - c_7 = \frac{1}{6} - \frac{11}{6}\omega.$$

Теперь надо ввести в базис $\mathbf{a}_1$, а исключить $\mathbf{a}_6$ (проверьте!). Так как $\mathbf{a}_6 = \frac{2}{7}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{7}\mathbf{a}_2$, то

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \frac{5}{21}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{21}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_8; \\ \mathbf{a}_3 &= -\frac{2}{7}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{7}\mathbf{a}_2, \quad d_3'' - c_3 = -\frac{1}{7}; \\ \mathbf{a}_4 &= \frac{1}{21}\mathbf{a}_1 - \frac{4}{21}\mathbf{a}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{a}_8, \quad d_4'' - c_4 = -\frac{1}{7} + \frac{2}{3}\omega; \\ \mathbf{a}_5 &= -\mathbf{a}_8, \quad d_5'' - c_5 = -\omega; \\ \mathbf{a}_6 &= \frac{2}{7}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{7}\mathbf{a}_2, \quad d_6'' - c_6 = \frac{1}{7} - \omega; \\ \mathbf{a}_7 &= -\frac{1}{21}\mathbf{a}_1 + \frac{4}{21}\mathbf{a}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{a}_8, \quad d_7'' - c_7 = \frac{1}{7} - \frac{5}{3}\omega.\end{aligned}$$

Теперь надо ввести $\mathbf{a}_4$ и исключить $\mathbf{a}_8$; так как искусственные векторы все исключены, то можно ими больше не заниматься. Имеем $\mathbf{a}_8 = -\frac{1}{14}\mathbf{a}_1 + \frac{2}{7}\mathbf{a}_2 + \frac{3}{2}\mathbf{a}_4$, откуда

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \frac{3}{14}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{7}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_4; \\ \mathbf{a}_3 &= -\frac{2}{7}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{7}\mathbf{a}_2, \quad d_3''' - c_3 = -\frac{1}{7}; \\ \mathbf{a}_5 &= \frac{1}{14}\mathbf{a}_1 - \frac{2}{7}\mathbf{a}_2 - \frac{3}{2}\mathbf{a}_4, \quad d_5''' - c_5 = -\frac{1}{7}.\end{aligned}$$

Так как разности (12) получились отрицательными, то мы пришли к оптимальному плану $x_1 = \frac{3}{14}$, $x_2 = \frac{1}{7}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = 0$. По формуле (23) получаем, вычитая добавленное число 3, цену игры

$$v' = \frac{1}{x_1 + x_2} - 3 = -\frac{1}{5}; \quad \text{при этом} \quad \tilde{p}_1 = \frac{3}{5}, \tilde{p}_2 = \frac{2}{5}.$$

Мы предоставляем читателю проверить, что оптимальная стратегия второго игрока имеет вид $\tilde{q}_1 = \frac{2}{5}$, $\tilde{q}_2 = 0$, $\tilde{q}_3 = \frac{3}{5}$. Это можно сделать либо с помощью независимого решения задачи на максимизацию суммы $y_1 + y_2 + y_3$ условиях

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0, \quad 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1, \quad y_1 + 6y_2 + 4y_3 \leq 1, \quad (24)$$

либо же просто, положив $y_1 + y_2 + y_3 = \left(3 - \frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{14}$ и приняв во внимание, что для оптимального решения по крайней мере одно из неравенств (24) должно обратиться в равенство. Первый способ более громоздкий, но в нем заодно проверяется найденная цена игры.

Итак, приведенная игра невыгодна для первого игрока. Если второй игрок положит два белых и три черных шарика в урну и будет перед каждым ходом наугад вытягивать их, называя номер 1 при вытягивании белого шарика и номер 3 при вытягивании черного, то никакой игрок не сможет бороться с такой стратегией.

8. Варианты. Имеются различные классы задач, близкие по своей постановке к основной задаче линейного программирования (п. 1), но не сводящиеся к ней. Решение таких задач, хотя часто и значительно более сложное, чем разобранные выше, все же в большинстве случаев удастся довести до практически приемлемого результата. Не имея возможности осветить здесь разработанные методы решения этих задач, мы приведем для ориентировки читателя применяемую терминологию, отослав по поводу методов к специальной литературе (см., в частности, [42, 63, 126]).

Иногда по смыслу поставленной задачи все или некоторые из искомых величин x_j могут принимать значения лишь из заранее заданного дискретного набора, например принимать лишь целые значения; тогда говорят о *целочисленном (линейном) программировании*. Если ожидаемые отличные от нуля значения искомых величин достаточно велики, то часто поступают так: сначала решают задачу, не обращая внимания на требование целочисленности, а затем округляют значения искомых переменных в полученном решении до ближайших целых чисел, удовлетворяющих ограничениям задачи. Однако если значения невелики, то этот метод может оказаться неприемлемым. В указанной литературе приведены алгоритмы для решения задачи целочисленного линейного программирования, однако эти алгоритмы пока еще недостаточно эффективны.

Если параметры, входящие в постановку задачи (коэффициенты, входящие в функцию цели и в условия), могут изменяться и требуется изучить влияние этого изменения на оптимальное решение задачи, то говорят о *параметрическом программировании*. Пусть, например, меняются только коэффициенты функции цели. Тогда из геометрического смысла основной задачи (см., в частности, рис. 67) вытекает, что решение остается неизменным до некоторого момента, после чего оно скачком заменяется на другое решение, отвечающее соседней вершине многогранника, в котором рассматривается функция цели; после этого решение опять остается неизменным до некоторого момента, когда оно меняется скачком, и т. д.

Иногда — особенно, если рассматривается управление некоторым процессом, развивающимся во времени — требуется принятие целой серии последовательных решений, причем решение, принятое на любом этапе, существенно влияет на формулировку задачи на последующих этапах. Тогда говорят о *многоэтапном или динамическом программировании*.

Если число неизвестных величин и условий весьма велико, то общий метод построения оптимального решения может оказаться чрезмерно громоздким и даже недоступным мощности современных вычислительных машин. Тогда стараются разбить искомые величины на группы и приблизиться к оптимальному решению для всей системы с помощью решения аналогичных задач для отдельных групп с последующим внесением поправок на взаимное влияние этих групп друг

на друга. Такое направление в решении «больших» задач с помощью решения «малых» называется *блочным программированием*.

Основную идею блочного решения задач можно понять на следующем простом примере. Пусть требуется решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + \alpha_1z + \beta_1t &= c_1, \\ a_2x + b_2y + \alpha_2z + \beta_2t &= c_2, \\ \alpha_3x + \beta_3y + a_3z + b_3t &= c_3, \\ \alpha_4x + \beta_4y + a_4z + b_4t &= c_4, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

в которой коэффициенты α_i и β_i сравнительно малы. Тогда можно в качестве нулевого приближения положить их равными нулю и решить две полученные системы уравнений, каждая из которых имеет лишь две неизвестных; это, конечно, проще, чем решать полную систему (25). Для внесения поправок можно подставить найденные значения неизвестных в члены с α_i, β_i и вновь решить полученные две системы, а если надо, провести итерацию этого процесса; конечно, перед проведением итераций надо обратить матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$, чтобы не делать этого каждый раз заново.

Таким образом, матрица коэффициентов системы (25) оказалась разбитой на четыре квадратные матрицы второго порядка, роль которых в описанном процессе различна. В общем случае матрица, разбитая на какое-то число (вообще говоря, прямоугольных) матриц меньшего размера, называется *блочной*.

Если выбор плана осуществляется в условиях неполной информации, то параметры, входящие в формулировку задачи, являются случайными величинами; тогда говорят о *стохастическом программировании*.

Обширный класс составляют задачи *нелинейного программирования*, в которых функция цели или функции, задающие ограничения, или и та и другие нелинейны. В самом общем виде эта задача необозрима по сложности. Однако при различных существенных предположениях о классе рассматриваемых функций известны алгоритмы для решения соответствующих задач, хотя в целом эти алгоритмы существенно сложнее, чем в линейном случае.

В частности, сравнительно более разработаны задачи *выпуклого программирования*, в которых функция цели и область, в которой ее значения сравниваются, предполагаются выпуклыми. При этом функция $f(x)$, где $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, называется *выпуклой*, если при любых $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ и для любых точек $x = a, b$

$$f(\alpha a + \beta b) \leq \alpha f(a) + \beta f(b). \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что это условие равносильно следующему: пересечение поверхности $z = f(x)$ в $(n+1)$ -мерном пространстве z, x с любой

2-мерной плоскостью, параллельной оси z , представляет собой линию, выпуклую книзу (считая «верхом» положительное направление оси z).

Из (26) следует, что если $f(a) \leq c$, $f(b) \leq c$, то и $f(\alpha a + \beta b) \leq c$; таким образом, при любом c множество всех точек, в которых $f(x) \leq c$, является выпуклым. Поэтому основная задача выпуклого программирования ставится так: найти минимум функции $f(x)$ при условиях $\varphi_i(x) \leq c_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), где все функции f и φ_i выпуклые. Отметим, что любая линейная функция выпукла (почему?), так что линейное программирование — частный случай выпуклого. В число функций φ_i обычно входят функции $-x_i$, причем соответствующие $c_i = 0$; тогда в число ограничений оказываются включенными неравенства $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Из (26) нетрудно вывести также, что если в некоторой точке $x = a$ выпуклой области (G) функция f имеет локальный минимум — внутренний или краевой, то во всех точках $x \in (G)$ будет $f(x) \geq f(a)$, т.е. указанный минимум обязательно является также и тотальным (продумайте это!). Это свойство существенно облегчает построение оптимального решения.

Частным случаем выпуклой функции является квадратичная функция

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^n b_ix_i + c,$$

если симметрическая матрица (a_{ij}) имеет все собственные значения ≥ 0 . Если при этом все ограничения линейные, то говорят о *квадратичном программировании*. Такие задачи после линейных разработаны в наибольшей степени.

Глава V

ТЕНЗОРЫ

Понятие *тэнзора* (от латинского *tendo* — напрягаю, растягиваю) принадлежит к числу основных, фундаментальных математических понятий и широко применяется сейчас в механике, электродинамике, теории относительности и т. д. Первоначально возникшее в работах XIX века по теории упругости, оно было систематически исследовано в 1886–1901 гг. итальянским геометром Г. Риччи-Курбáстро (1853–1925) и итальянским математиком и механиком Т. Лёви-Чивíта (1873–1942). Внимание к новому аппарату существенно возросло после создания в 1915–1916 гг. великим ученым, физиком А. Эйнштейном (1879–1955) общей теории относительности, математическая часть которой целиком основана на тензорном исчислении.

Физические величины, которые нам встречались до сих пор, были либо скалярными, либо векторными. Однако существуют физические величины более сложной природы. Например, однородное напряженное состояние упругого тела характеризуется плотностью $\mathbf{p}$ силы, с которой одна часть тела действует на другую через мысленно выделенную плоскость (Q) (рис. 71); однако при этом $\mathbf{p}$ для различных направлений плоскости (Q) будет различным. Таким образом, величина, характеризующая напряженное состояние, уже не является вектором, она представляет собой тензор 2-го ранга (определение см. в п. 2). Оказывается, что и многие другие важные величины, характеризующие состояние сплошных сред, также являются тензорами.

К настоящему времени тензорная алгебра, а также тензорный анализ (т. е. теория тензорных полей, связанная с применением дифференцирования и интегрирования) представляют собой значительно разработанные дисциплины. В этой главе мы осветим лишь самые простые

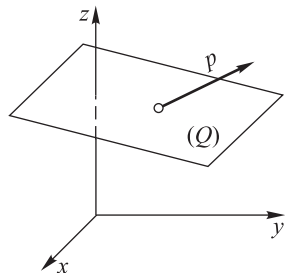


Рис. 71

вопросы. Специально тензорному исчислению посвящен ряд книг, из которых мы укажем на [15, 53, 79, 99, 110]; главы, содержащие основы тензорного исчисления, имеются также в [39, 98, 103] и в других книгах.

§1. Тензорная алгебра

1. Примеры. К понятию тензора можно прийти уже, размышляя над описанием векторов в обычном пространстве с помощью чисел. Как известно из векторной алгебры, все действия над векторами удобно осуществлять, выбрав евклидов базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, после чего можно любой вектор $\mathbf{a}$ разложить по этому базису

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1)$$

и взамен действий над векторами осуществлять действия над их проекциями, т. е. над числами — коэффициентами разложений. Более того, даже задавать конкретные векторы обычно бывает удобнее с помощью разложения (1), чем каким-то геометрическим способом.

Однако задумаемся теперь, что это за векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. В некоторых случаях, когда в задаче имеется естественная система отсчета направлений (например, во многих задачах статики), эти векторы можно описать вполне точно, «привязав» их к данным задачи. Но во многих случаях привлечение такой «абсолютной» системы отсчета является весьма искусственным либо вообще невозможно. Тогда получается на первый взгляд парадокс: мы пользуемся проекциями вполне определенного вектора, которые зависят от выбора базиса, но не уточняем, как этот базис выбирается...

Эта трудность будет преодолена, если с самого начала отказаться от выбора какого-то одного базиса, а считать, что все базисы равноправны и каждому выбору базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ отвечает набор значений a_x, a_y, a_z в соответствии с формулой (1). Подобный набор величин, приобретающих определенные значения лишь после выбора базиса и преобразующихся по определенному правилу при замене базиса (см. ниже), и называется *тензором* (или *тензорной величиной*), а сами эти величины, составляющие в определенном порядке тензор, называются его *компонентами*. (Отметим некоторое несоответствие: в векторной алгебре принято компонентами вектора $\mathbf{a}$ называть векторы $a_x \mathbf{i}, a_y \mathbf{j}, a_z \mathbf{k}$. Однако в этой главе мы будем компонентами называть величины a_x, a_y, a_z .)

Оказывается, удобнее писать $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и a_1, a_2, a_3 вместо $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и a_x, a_y, a_z , так что

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i.$$

В тензорном исчислении принято не писать знак суммы по повторяющемуся индексу, а при повторении индекса всегда осуществлять такое суммирование, т. е. писать последнюю формулу в виде

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i (= a_j \mathbf{e}_j = a_k \mathbf{e}_k = \dots). \quad (2)$$

Здесь индекс суммирования является *немой* и может быть обозначен любой буквой, а пределы суммирования определяются размерностью пространства, в котором рассматривается тензор.

Выведем закон преобразования проекций вектора при замене базиса, впрочем, известный из теории линейных отображений (ЛВМ, п. XI.7). Переход от евклидова базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (коротко $\mathbf{e}_i$) к другому евклидову базису $\mathbf{e}'_i$ осуществляется по формулам

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \mathbf{e}_j, \quad \text{коротко} \quad \mathbf{e}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{e}_j, \quad (3)$$

где индекс i , в отличие от немого индекса j , называется *свободным*. Записав формулу (2) в новом базисе и подставив в нее (3), получим

$$\mathbf{a} = a'_i \mathbf{e}'_i = a'_i \alpha_{ij} \mathbf{e}_j.$$

Но так как результат должен равняться (2), т. е. $\alpha_j \mathbf{e}_j$, то

$$a_j = \alpha_{ij} a'_i, \quad \text{т. е.} \quad a_i = \alpha_{ji} a'_j. \quad (4)$$

Так как матрица (α_{ij}) перехода от одного евклидова базиса к другому ортогональная, а потому обратна к своей транспонированной, то, решая равенства (4) относительно величин a'_i , получим

$$a'_i = \alpha_{ij} a_j \quad (5)$$

(продумайте эти переходы). Это и есть требуемый закон.

Применение тензорной записи сокращает вычисления (в частности, делает их независимыми от размерности пространства), но требует некоторых навыков в действиях со свободными и немymi индексами. Покажем пример. Пусть мы хотим подставить выражение (5) для штрихованных координат в правую часть (4). Тогда надо в (5) заменить обозначение свободного индекса на j , а для этого надо предварительно заменить немой индекс любой другой буквой (но не i , так как i занято в (4)!). Таким образом, $a'_j = \alpha_{jk} a_k$, откуда получаем

$$a_i = \alpha_{ji} \alpha_{jk} a_k. \quad (6)$$

Немецкий математик Л. Кронекар (1823–1891) в 1866 г. ввел полезное сокращенное обозначение, *символ Кронекера*:

$$\delta_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \quad \delta_{kk} = 1.$$

С помощью этого символа можно написать $a_i = \delta_{ik} a_k$ (почему?), откуда в силу (6) получаем

$$\alpha_{ji} \alpha_{jk} = \delta_{ik}.$$

Эта формула равносильна требованию ортогональности матрицы (α_{ij}) .

В качестве другого важного примера тензора укажем на совокупность девяти элементов матрицы (a_{ij}) заданного линейного отображения A линейного пространства в себя. Эти элементы приобретают определенные значения лишь после выбора базиса $\mathbf{e}_i$, причем, если $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, то координаты векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ связаны соотношением $y_i = a_{ij} x_j$ (в тензорной записи). После замены $\mathbf{e}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{e}_j$ евклидова базиса в силу второй формулы (4) получаем

$$\alpha_{ki} y'_k = a_{ij} \alpha_{sj} x'_s. \quad (7)$$

Заметим, что переход от первой формулы (4) к (5) осуществляется простой перестановкой коэффициента из одной части равенства в другую. Поэтому из (7) получаем $y'_k = \alpha_{ki} a_{ij} \alpha_{sj} x'_s$, откуда

$$a'_{ks} = \alpha_{ki} a_{ij} \alpha_{sj}, \quad \text{т. е.} \quad a'_{ij} = \alpha_{ik} a_{ks} \alpha_{ks}.$$

В последней формуле индексы i, j свободные, а индексы k, s немые, по ним осуществляется двойное суммирование.

2. Евклидовы тензоры, общее определение. Обобщая примеры п. 1, мы приходим к следующему определению. Пусть в n -мерном вещественном евклидовом пространстве (R) каждому евклидову базису $\mathbf{e}_i$ отвечает набор из n^p вещественных величин $a_{ij\dots s}$ (здесь p индексов, каждый из которых может принимать значения $1, 2, \dots, n$). Пусть при переходе к новому евклидову базису $\mathbf{e}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{e}_j$ эти величины преобразуются по формуле

$$a'_{ij\dots s} = \alpha_{ii_1} \alpha_{jj_1} \dots \alpha_{ss_1} a_{i_1 j_1 \dots s_1}, \quad (8)$$

где в правой части подразумевается p -кратное суммирование по немym индексам $i_1, j_1, \dots, s_1$. Тогда мы говорим, что в (R) задан *евклидов тензор* размерности n и *ранга (валентности) p с компонентами $a_{ij\dots s}$* . Здесь слово «евклидов» указывает на то, что мы пользуемся только евклидовыми базисами; общие базисы и соответственно общие тензоры будут рассмотрены в п. 6.

Таким образом, в силу п. 1 проекции вектора образуют тензор (мы будем опускать слово «евклидов») ранга 1, а элементы матрицы отображения — тензор ранга 2. Тензор ранга 0 имеет лишь одну компоненту, не зависящую от выбора базиса; такой тензор, естественно, называется *скаляром*.

Чтобы задать конкретный тензор, достаточно задать значения всех его компонент при каком-то одном выборе базиса (причем это можно сделать совершенно произвольно), так как их значения при любом другом выборе базиса получаются из формулы (8).

К понятию тензора возможен и иной подход, которым мы будем широко пользоваться. Вспомним о том, что вектор мы рассматриваем обычно не как тройку чисел, а как выражение (2), даже если мы не думаем о его геометрическом смысле. Поэтому введем формальную сумму

$$\mathbf{T} = a_{ij\dots s} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_s, \quad (9)$$

коэффициенты которой образуют тензор в описанном выше смысле, т.е. приобретают определенные значения после конкретного выбора базиса, а при замене базиса преобразуются по формуле (8). Если на минуту забыть эту формулу, а просто подставить в правую часть выражения $\mathbf{e}_i = \alpha_{i1i} \mathbf{e}'_{i1}, \mathbf{e}_j = \alpha_{j1j} \mathbf{e}'_{j1}, \dots$, затем по обычным формальным правилам раскрыть скобки (не переставляя векторов-сомножителей!) и привести подобные члены, мы получим

$$\mathbf{T} = a_{ij\dots s} \alpha_{i1i} \alpha_{j1j} \dots \alpha_{s1s} \mathbf{e}'_{i1} \mathbf{e}'_{j1} \dots \mathbf{e}'_{s1},$$

или, после изменения обозначения немых индексов и применения формулы (8),

$$\mathbf{T} = (a_{i_1 j_1 \dots s_1} \alpha_{i_1 i_1} \alpha_{j_1 j_1} \dots \alpha_{s_1 s_1}) \mathbf{e}'_{i_1} \mathbf{e}'_{j_1} \dots \mathbf{e}'_{s_1} = a'_{ij\dots s} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j \dots \mathbf{e}'_s = \mathbf{T}',$$

если под $\mathbf{T}'$ понимать выражение (9) в новом базисе.

Поэтому впредь мы, как правило, *под тензором будем понимать сумму (9), остающуюся инвариантной при любой замене базиса*. Другими словами, мы будем не исходить из формулы (8), а при переходе от одного базиса к другому просто подставлять выражения старых базисных векторов через новые, тогда коэффициенты сами собой преобразуются нужным образом. При этом в принципе не важно, задан ли тензор $\mathbf{T}$ своим выражением во всех базисах (конечно, если эти выражения в описанном смысле согласованы, т.е. получаются одно из другого) или сначала только в одном каком-нибудь, так как из этого одного выражения легко получить с помощью подстановки и выражение в любом другом базисе.

Например, пусть двумерный тензор 2-го ранга в некотором фиксированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ имеет компоненты $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; тогда в этом базисе его можно записать в виде

$$2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1. \quad (10)$$

Упрощения здесь невозможны; обращаем, в частности, внимание, что тензорное выражение вида $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ не имеет ничего общего со скалярным произведением $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$.

3. Действия над тензорами. Будем считать пространство (R) , а потому и размерность рассматриваемых тензоров фиксированными. Мы будем для простоты показывать действия над тензорами невысоких рангов, хотя те же правила остаются в силе для любых рангов.

1. *Линейные действия* над тензорами одинаковых рангов осуществляются по естественным правилам:

$$a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + b_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = (a_{ij} + b_{ij})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

т. е. складываются соответственные компоненты;

$$\lambda(a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = (\lambda a_{ij})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j.$$

При этом выполняются аксиомы линейных действий, т. е. *совокупность всех тензоров заданного ранга p образует линейное пространство размерности n^p* .

2. *Тензорное умножение* тензоров осуществляется по правилу

$$(a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)(b_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k) = (a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)(b_{rsk}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k) = (\text{по определению}) = \\ = a_{ij}b_{rsk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_r\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k. \quad (11)$$

Таким образом, при умножении тензоров рангов p и q получается тензор ранга $p + q$, компоненты которого находятся с помощью умножения каждой компоненты первого тензора на каждую компоненту второго; при этом обозначения индексов у первого и второго тензоров должны различаться, в противном случае эти обозначения надо предварительно изменить, как в примере (11). Легко проверить (мы не будем этого делать), что правая часть (11) действительно представляет собой тензор.

В частности, при тензорном произведении векторов получается тензор 2-го ранга

$$\mathbf{ab} = (a_i\mathbf{e}_i)(b_i\mathbf{e}_i) = a_ib_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad (12)$$

который называется *диáда*. Каждое из трех слагаемых в (10) — это частный пример диады.

3. *Свертывание (сокращение)* тензора состоит в отождествлении двух индексов у его компонент. При этом отождествленный индекс оказывается дважды повторенным, т. е. он становится немым (по нему производится суммирование), и потому ранг тензора уменьшается на 2. Например, после свертывания тензора 3-го ранга с компонентами a_{ijk} по первому и третьему индексам получается тензор 1-го ранга с компонентами $b_j = a_{iji}$. Проверим, что это действительно тензор. Пусть произведена замена (3); тогда новые значения компонент будут равны (проверьте!)

$$b'_j = a'_{iji} = \alpha_{ii_1}\alpha_{jj_1}\alpha_{ik_1}a_{i_1j_1k_1} = (\alpha_{ii_1}\alpha_{ik_1})\alpha_{jj_1}a_{i_1j_1k_1} = \\ = \delta_{i_1k_1}\alpha_{jj_1}a_{i_1j_1k_1} = \alpha_{jj_1}a_{i_1j_1k_1} = \alpha_{jj_1}b_{j_1},$$

что и требовалось доказать.

В частности, при свертывании тензора 2-го ранга с компонентами a_{ij} получается скаляр a_{ii} . Таким образом, мы видим, что сумма диагональных элементов матрицы линейного отображения (такая сумма на-

зывается *следом матрицы*) в евклидовом базисе не зависит от выбора этого базиса. Впрочем, это вытекает из того, что такая сумма равна сумме всех корней соответствующего характеристического уравнения (почему?).

Если два вектора $a_i \mathbf{e}_i$ и $b_i \mathbf{e}_i$ перемножить тензорно, а затем свернуть полученную диаду (12), то мы приходим к скалярному произведению $a_i b_i$ исходных векторов. Аналогично можно определить *скалярное произведение* любых *тензоров* рангов $p \geq 1$ и $q \geq 1$; при этом получится тензор ранга $p + q - 2$. В частности, скалярное произведение тензора 2-го ранга на вектор вычисляется так:

$$(a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (x_i \mathbf{e}_i) = (a_{ij} x_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)_{k=j} = a_{ij} x_i \mathbf{e}_i.$$

Получается образ вектора $\mathbf{x}$ при отображении, отвечающем тензору $a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$.

4. *Перестановка индексов* Например, из тензора $a_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ с помощью перестановки индексов можно получить тензор $a_{kji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ и еще четыре других тензора (каких?). Вообще говоря, все эти тензоры различные. Тензор называется *симметрическим* по всем или некоторым индексам, если при перестановке любых двух из этих индексов он не меняется; тензор называется *кососимметрическим* по указанным индексам, если при любой такой перестановке он множится на -1 . Легко проверить, что для симметричности (кососимметричности) тензора достаточно, чтобы он обладал этим свойством при каком-то одном выборе базиса.

4. Тензоры 2-го ранга. Как было сказано выше, такой тензор можно истолковать как набор элементов матрицы заданного линейного отображения при произвольном выборе евклидова базиса. Поэтому теория тензоров 2-го ранга непосредственно связана с теорией матриц. (Обратите внимание, в частности, что умножению матриц отвечает не тензорное, а скалярное умножение соответствующих тензоров!) *Каждый тензор 2-го ранга можно представить и притом единственным способом в виде суммы симметрического и кососимметрического тензоров.* Это осуществляется по формуле

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]}, \quad \text{где } a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), \quad a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji});$$

при этом переход от тензора $\mathbf{T} = a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ к $a_{(ij)} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ называется *симметрированием*, а к $a_{[ij]} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ — *альтернированием* тензора $\mathbf{T}$. Доказательство единственности указанного представления мы предоставляем читателю. Нетрудно определить аналогичные действия и для тензоров любого ранга.

Для *симметрического тензора* $a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ всегда можно выбрать базис так, что все внедиагональные компоненты, т. е. a_{ij} при $i \neq j$, окажутся равными нулю; при этом диагональные элементы будут равняться собственным значениям матрицы (a_{ij}) . Все это хорошо из-

вестно из теории симметрических матриц (п. IV.1.6). Выбор такого базиса называется *приведением тензора к главным осям*, так как этот базис будет направлен по главным осям поверхности второго порядка $a_{ij}x_ix_j = 1$ (п. IV.2.1), кстати, не зависящей от выбора базиса (попробуйте это доказать!).

Для *кососимметрического тензора $\mathbf{T}$ в трехмерном пространстве всегда можно подобрать такой вектор $\mathbf{b}$, что для любого вектора $\mathbf{x}$ будет $\mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \times \mathbf{x}$* . В самом деле, достаточно указать вектор $\mathbf{b}$ при каком-то одном выборе базиса, так как ни левая, ни правая части не зависят от этого выбора. Но при выборе базиса тензору $\mathbf{T}$ отвечает вполне определенная кососимметрическая матрица, общий вид которой $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_2 + \beta x_3)\mathbf{e}_1 + (-\alpha x_1 + \gamma x_3)\mathbf{e}_2 + (-\beta x_1 - \gamma x_2)\mathbf{e}_3.$$

Однако тот же результат получится при векторном умножении вектора $\mathbf{b} = -\gamma\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 - \alpha\mathbf{e}_3$ на $\mathbf{x}$ (проверьте!).

5. Примеры из механики. Мы будем рассматривать точки и векторы в обычном пространстве, но пользоваться тензорными обозначениями.

1. Если зафиксировать начало координат, то координаты x_i любой заданной точки, равные проекциям ее радиуса-вектора на оси координат, образуют тензор 1-го ранга. Перемножив его тензорно на себя, получим диаду с компонентами x_ix_j .

Пусть теперь задано материальное (вообще говоря, неоднородное) тело (Ω) с плотностью ρ . Тогда набор величин

$$\int_{(\Omega)} x_ix_j\rho d\Omega = \int_{(\Omega)} x_ix_j dm \quad (dm = \rho d\Omega) \quad (13)$$

образует тензор 2-го ранга, так как после перехода к интегральной сумме мы получаем линейную комбинацию диад $(x_ix_j)_M\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ для разных точек $M \in (\Omega)$. Свернув этот тензор, умножив полученный скаляр на *единичный тензор* с компонентами δ_{ij} (п. 1) и производя вычитание, получим симметрический *тензор инерции* тела (Ω) относительно выбранного начала координат

$$J_{ij} = \int_{(\Omega)} (\delta_{ij}x_kx_k - x_ix_j) dm.$$

Его диагональные элементы $J_{11} = \int (x_2^2 + x_3^2) dm$, аналогично J_{22}, J_{33} , называются *моментами инерции* тела (Ω) относительно соответству-

ющих осей координат; внедиагональные элементы, взятые с обратным знаком, т.е. выражения (13) при $i \neq j$, называются *произведениями инерции* или *центробежными моментами инерции*. Главные оси тензора инерции, в которых центробежные моменты отсутствуют, называются *главными осями инерции*. Так как моменты инерции положительны, то квадратичная форма $J_{ij}x_ix_j$ положительно определенная (почему?), и потому уравнение $J_{ij}x_ix_j = 1$ определяет *эллипсоид инерции*, введенный Коши в 1827 г. Чтобы получить J_{11} , надо положить в этом уравнении $x_2 = x_3 = 0$, тогда $J_{11} = x_1^{-2}$, и так как ось x_1 можно выбрать произвольно, то мы получаем, что момент инерции тела (Ω) относительно любой оси, проходящей через начало координат, равен обратному квадрату расстояния от начала координат до точки пересечения этой оси с эллипсоидом инерции.

Введенные величины широко применяются при изучении вращательного движения твердого тела. В частности, можно показать, что главные оси инерции имеют непосредственный физический смысл: если тело (Ω) закреплено в начале координат и приведено во вращение вокруг одной из этих осей, то при отсутствии внешних сил это тело продолжает вращаться вокруг этой оси как вокруг неподвижной. Моменты инерции служат мерой инерции тела в отношении вращательного движения, а через произведения инерции выражаются реакции, возникающие в закрепленных точках оси вращения.

2. Пусть в пространстве зафиксировано начало координат и задано некоторое линейное однородное векторное поле $\mathbf{A}$, т.е. поле, представляющее собой линейную однородную функцию координат. (Другими словами, если рассматривать $\mathbf{A}$ как функцию радиуса-вектора $\mathbf{r}$, то должно быть $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{A}(\mathbf{r}_2)$.) Тогда $A_i = a_{ij}x_j$ (a_{ij} — некоторый заданный тензор 2-го ранга). В силу п. 4 его можно представить в виде суммы симметрического и кососимметрического тензоров, откуда

$$\mathbf{A} = a_{(ij)}x_j\mathbf{e}_i + \mathbf{b} \times \mathbf{r} \quad (14)$$

для соответственно подобранного вектора $\mathbf{b}$.

В частности, если $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ представляет собой поле скоростей точек сплошной среды, то второе слагаемое в (14) означает вращение всего пространства как абсолютно твердого тела с угловой скоростью b вокруг оси, параллельной $\mathbf{b}$. Смысл первого слагаемого становится ясным, если выбрать в качестве осей координат главные оси тензора $a_{(ij)}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$. В таких осях оно примет вид $\lambda_i x_i \mathbf{e}_i$, т.е. означает сумму трех так называемых деформационных движений в направлении этих осей.

Если поле $\mathbf{A}$ нелинейное, то в малой окрестности любой точки M_0 по формуле Тейлора можно представить

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_j} \right)_0 (x_j - x_{j0}) + \dots = \mathbf{A}_0 + \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)_0 (x_j - x_{j0})\mathbf{e}_i + \dots,$$

где нулевым индексом обозначено значение в M_0 , а многоточием обозначены члены высшего порядка малости. В этом случае разложение

(14) можно применить к группе членов первого порядка малости, т. е. оно справедливо с точностью до малых высшего порядка. В частности, для $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ мы получаем утверждение о поведении малых объемов среды в процессе движения, причем деформационные движения и вращение определяются тензором $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ и к ним добавляется еще поступательное перемещение со скоростью $\mathbf{v}_0$.

Если $\mathbf{A} = \mathbf{u}$ — поле перемещений точек среды, то после применения формулы Тейлора и разложения, аналогичного (14), мы получим, что второе слагаемое, с точностью до малых высшего порядка, определяет простой поворот окрестности точки M_0 (почему?). Поэтому в вопросах, связанных с изменением формы этой окрестности, основную роль играет тензор с компонентами $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, отвечающий первому слагаемому. Он называется *тензором деформации*.

В связи с рассмотрением формулы Тейлора отметим тензор k -го ранга

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_k},$$

где значения производных функции $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ взяты в фиксированной точке. Этот тензор при подстановке dx_i вместо $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ превращается в $d^k f$.

6. Общие аффинные тензоры. До сих пор при рассмотрении тензоров мы пользовались только евклидовыми базисами. Однако имеется ряд вопросов, в которых приходится пользоваться общими базисами, т. е. общими аффинными координатами в пространстве. Тогда теория тензоров приобретает новые черты. В этом пункте мы рассмотрим тензоры в общем n -мерном линейном пространстве, т. е. когда отсутствуют понятия евклидова базиса, ортогонального отображения и т. п.

Упомянутые новые черты проявляются уже при $n = 1$. Тогда базис состоит из одного вектора $\mathbf{e}$; выбрать его — это все равно, что указать на прямой единицу масштаба и направление отсчета. Пусть мы увеличили единицу масштаба в два раза, т. е. $\mathbf{e}' = 2\mathbf{e}$. Тогда ясно, что координата любой точки уменьшится в два раза, т. е. $x' = \frac{1}{2}x$. Такая величина, меняющаяся «противоположным способом», по отношению к базисным векторам (точное определение см. ниже) называется *контравариантной*. С другой стороны, рассмотрим на той же прямой линейную функцию $y = ax$. После указанной замены, ее выражение будет $y = 2ax'$, т. е. можно написать $y = a'x'$, где $a' = 2a$. Таким образом, коэффициент у линейной функции меняется по тому же закону, что и базисный вектор; такие величины называются *ковариантными*. Именно различие между ко- и контравариантностью и является характерным для общих аффинных тензоров.

Переходим к общему определению аффинного тензора. Рассмотрим для определенности тензор 3-го ранга. Он, как и в п. 2, задается

системой n^3 компонент, занумерованных тремя индексами и приобретающих конкретные значения только при конкретном выборе базиса в пространстве. Однако теперь обязательно должно быть указано, какие из этих индексов являются ковариантными, а какие — контравариантными; первые пишутся снизу, а вторые — сверху (их, конечно, не следует путать с показателями степени, которые здесь не будут встречаться). Пусть, например, первый и третий индексы ковариантные, а второй — контравариантный (здесь возможны любые сочетания); тогда компоненты записываются в виде $a_{i \cdot k}^{\cdot j}$, где точка означает пропущенный индекс. Такой тензор называется смешанным: «два раза ковариантным и один раз контравариантным». Если все индексы ковариантные (соответственно контравариантные), то и тензор называется *ковариантным* (*контравариантным*).

Тензорное правило суммирования (п. 1) применяется теперь только для индекса, встречающегося один раз сверху, а другой — снизу, например:

$$a_{i \cdot k}^{\cdot j} b^i = a_{1 \cdot k}^{\cdot j} b^1 + a_{2 \cdot k}^{\cdot j} b^2 + \dots + a_{n \cdot k}^{\cdot j} b^n;$$

результат можно обозначить, например, через $c_{\cdot k}^{\cdot j}$ или $c_k^{\cdot j}$.

Закон преобразования компонент при замене базиса имеет следующий вид. Пусть мы от базиса $\mathbf{e}_i$, переходим к базису $\mathbf{e}'_i = \alpha_i^{\cdot j} \mathbf{e}_j$. Тогда старый базис через новый выражается по формулам $\mathbf{e}_j = \beta_j^{\cdot i} \mathbf{e}'_i$, где каждая из матриц $(\alpha_i^{\cdot j})$ и $(\beta_j^{\cdot i})$ обратна к транспонированной другой (продумайте это!); это соотношение между матрицами можно записать в виде

$$\alpha_i^{\cdot j} \beta_j^{\cdot k} = \alpha_j^{\cdot i} \beta_{\cdot k}^j = \delta_{\cdot k}^i = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k). \end{cases} \quad (15)$$

Если тензор в базисе $\mathbf{e}_i$ имел компоненты $a_{i \cdot k}^{\cdot j}$, то в базисе $\mathbf{e}'_i$ он должен иметь компоненты

$$\left(a_{i \cdot k}^{\cdot j} \right)' = \alpha_i^{\cdot i_1} \beta_{j_1}^{\cdot j} \alpha_{\cdot k_1}^{\cdot k} a_{i_1 \cdot k_1}^{\cdot j_1}. \quad (16)$$

Другими словами, на ковариантные индексы действует матрица $(\alpha_i^{\cdot j})$, а на контравариантные — матрица $(\beta_j^{\cdot i})$. формула (16) (и аналогичная ей для тензоров любых рангов) и служит определением *аффинного тензора*.

Аффинный тензор можно записать в виде, аналогичном (9). Для этого надо выбрать в пространстве *взаимный базис* $\mathbf{e}^i$ к $\mathbf{e}_i$, который при переходе к $\mathbf{e}'_i = \alpha_i^{\cdot j} \mathbf{e}_j$ преобразовывался бы по формуле $(\mathbf{e}^i)' = \beta_j^{\cdot i} \mathbf{e}^j$. (Это можно сделать так: при некотором фиксированном базисе $\mathbf{e}_i$ выбрать $\mathbf{e}^i$ произвольно, а при изменении первого базиса менять второй по указанному закону.) Тогда тензор с компонентами $a_{i \cdot k}^{\cdot j}$ можно записать в виде

$$\mathbf{T} = a_{i \cdot k}^{\cdot j} \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k. \quad (17)$$

Легко проверить, что при замене всех компонент и базисных векторов на штрихованные будет $\mathbf{T}' = \mathbf{T}$. (Прodelайте это, опираясь на равенства (16) и (15).)

Нетрудно показать, подобно п. 1, что координаты вектора образуют контравариантный тензор 1-го ранга, т.е. вектор надо записывать в виде $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$. В самом деле, если $\mathbf{e}'_i = \alpha_i^j \mathbf{e}_j$, то $x^i \mathbf{e}_i = (x^i)' \mathbf{e}'_i = (x^i)' \alpha_i^j \mathbf{e}_j = (x^j)' \alpha_j^i \mathbf{e}_i$, откуда $x^i = \alpha_j^i (x^j)'$ и $(x^j)' = \beta_j^i x^i$, $(x^i)' = \beta_j^i x^j$, что и означает контравариантность. В отличие от этого, коэффициенты линейной формы образуют ковариантный тензор 1-го ранга, т.е. такую форму надо записывать в виде $y = a_i x^i$. В частности, для заданной функции $u(x^i)$ значения производных $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ в заданной точке, как коэффициенты в du , образуют такой тензор; он обозначается $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}$. Коэффициенты квадратичной формы образуют дважды ковариантный симметрический тензор 2-го ранга, а элементы матрицы заданного отображения $y^i = a_j^i x^j$ — смешанный тензор 2-го ранга. Смешанный тензор образует также набор производных $\frac{\partial A^i}{\partial x^j}$ для заданного векторного поля $\mathbf{A}$, этот тензор обозначается $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}}$. Все это мы предоставляем доказывать желающим.

Отметим, что если матрица (α_i^j) ортогональная, то $(\beta_j^i) = (\alpha_i^j)$ (почему?). Этим и объясняется то, что в п. 2, когда мы пользовались только заменами базиса с помощью ортогональных матриц, различие между ко- и контравариантными индексами не проявлялось.

Действия над аффинными тензорами аналогичны действиям над евклидовыми тензорами. Естественно, что складывать можно только тензоры, у компонент которых одинаковые по номеру индексы расположены одинаково, т.е. оба вверху или оба внизу. Свертывание возможно только по индексам, один из которых ковариантен, а другой контравариантен. Перестановка возможна только ковариантных индексов между собой, либо контравариантных индексов между собой.

7. Аффинные тензоры в евклидовом пространстве. Общими аффинными базисами можно пользоваться и в евклидовом пространстве. Здесь взаимный базис (п. 6) легко построить явно. Именно, достаточно для любого базиса $\mathbf{e}_i$ выбрать базис $\mathbf{e}^i$ так, чтобы

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j. \quad (18)$$

Это делается так: каждый вектор $\mathbf{e}^j$ располагается перпендикулярно $(n-1)$ -мерной плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{e}_i$ ($i \neq j$), а длина его выбирается такой, чтобы $\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_j = 1$; ясно, что этими условиями вектор $\mathbf{e}^j$ однозначно определяется (ср. п. IV.1.5). Из соотношений (18) легко вывести (прodelайте это!), что базис $\mathbf{e}^i$ действительно является взаимным к базису $\mathbf{e}_i$ в смысле п. 6; кроме того, в силу симметрии формул (18) и базис $\mathbf{e}_i$ взаимен к базису $\mathbf{e}^j$. При описанном построении

евклидов базис можно определить как базис, взаимный сам себе. (Почему?) Поэтому для евклидовых базисов сумма (17) переходит в выражение вида (9).

В евклидовом пространстве существенную роль играют *ко-* и *контравариантный метрические тензоры*, компоненты которых определяются формулами

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j. \quad (19)$$

Это симметрические тензоры 2-го ранга, удовлетворяющие соотношению

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_{.i}^k. \quad (20)$$

В самом деле, левая часть представляет собой смешанный тензор 2-го ранга. Если выбрать в качестве $\mathbf{e}_i$ евклидов базис, то формула (20) легко проверяется. Но величины $\delta_{.i}^k$ сами образуют смешанный тензор 2-го ранга (почему?), и потому совпадение левой части с правой в каком-то одном базисе влечет их совпадение в любом базисе.

Из (20) следует, что при любом фиксированном выборе базиса симметрические матрицы (g_{ij}) и (g^{ij}) обратны друг другу. Легко проверить, что отвечающие им квадратичные формы являются положительно определенными. (Докажите это!) Мы предоставляем читателю также проверить формулы

$$g_{ij}\mathbf{e}^j = \mathbf{e}_i, \quad g^{ij}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}^i. \quad (21)$$

Мы ввели ковариантный метрический тензор по формуле $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, исходя из заданного в пространстве скалярного произведения. Однако иногда приходится делать обратное. Именно, если в линейном пространстве (R) задан симметрический ковариантный тензор 2-го ранга с компонентами g_{ij} , причем квадратичная форма $g_{ij}x^ix^j$ положительно определенная, то можно по определению положить

$$(x^i\mathbf{e}_i) \cdot (y^j\mathbf{e}_j) = g_{ij}x^iy^j,$$

и тогда (R) превратится в евклидово пространство, для которого исходный тензор будет ковариантным метрическим тензором.

С помощью метрических тензоров (19) осуществляется *поднимание* или *опускание индексов* у произвольных тензоров: так, если дан тензор $\mathbf{T} = a^i\mathbf{e}_i$ (вектор), то, пользуясь формулами (21), получаем, что $\mathbf{T} = a^ig_{ij}\mathbf{e}^j = (a^jg_{ji})\mathbf{e}^i = a_i\mathbf{e}^i$, где по определению $a_i = g_{ij}a^j$. Аналогично

$$a^i = g^{ij}a_j, \quad a_{ij}^{\cdot k} = g_{jj_1}g^{kk_1}a_{i \cdot k_1}^{j_1} \quad \text{и т. п.}$$

С помощью такого поднимания или опускания индексов можно переходить от одних тензорных соотношений к другим, равносильным, которые иногда оказываются удобнее.

8. Индефинитные метрические формы. Требование положительной определенности метрической формы $g_{ij}x^ix^j$ равносильно тому, что $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), а последнее неравенство служит одной из аксиом скалярного произведения. В последние годы широко применяются *псевдоевклидовы пространства*, т. е. вещественные линейные пространства с *псевдоскалярным произведением*; для такого произведения последняя аксиома уже не требуется, тогда как все остальные аксиомы предполагаются выполненными. Другими словами, от метрической формы $g_{ij}x^ix^j$ уже не требуется положительной определенности, она может быть *индефинитной* (т. е. не дефинитной, см. этот термин в п. IV.2.1; мы говорим об индефинитности, так как легко проверить, что отрицательно определенные метрические формы не дают ничего существенно нового.)

Выбрав соответствующий базис, можно привести метрическую форму к диагональному виду, после чего, изменяя длины базисных векторов, сделать те диагональные коэффициенты, которые отличны от нуля, равными ± 1 (ср. начало п. VI.2.4). В таком базисе псевдоскалярное произведение равно

$$(\mathbf{y}^i \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{y}^j \mathbf{e}_j) = \lambda_1 x^1 y^1 + \lambda_2 x^2 y^2 + \dots + \lambda_n x^n y^n, \quad (22)$$

где коэффициенты λ_i могут принимать только три значения: ± 1 и 0. Отсюда следует, что *псевдоевклидовы пространства* (R) и (S), *метрические формы которых имеют одинаковую сигнатуру* (п. IV.2.2), *изоморфны между собой*; это значит, что между элементами (R) и (S) можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные действия и псевдоскалярное произведение. Для этого надо в обоих пространствах выбрать базисы так, чтобы формулы (22) получились одинаковыми, после чего сопоставить друг другу векторы с одинаковыми наборами коэффициентов разложения по этим базисам. С другой стороны, с помощью закона инерции квадратичных форм (п. IV.2.2) легко доказать, что пространства с метрическими формами различной сигнатуры не могут быть изоморфными.

Для пространств с индефинитной метрической формой характерно наличие векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, для которых $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, т. е. ненулевых векторов, ортогональных самим себе или, что то же, имеющих нулевую *псевдодлину*, по определению равную $\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. Если некоторые из собственных значений матрицы (g_{ij}) отрицательные, то существуют векторы $\mathbf{x}$, для которых $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0$, т. е. имеющие мнимую псевдодлину. Все это требует при рассмотрении псевдоевклидовых пространств некоторой перестройки интуиции, воспитанной на евклидовых пространствах.

Основной пример псевдоевклидова пространства заданной сигнатуры — это совокупность векторов в числовом вещественном n -мерном пространстве E_n , где псевдоскалярное произведение двух векторов с координатами x^i и y^i по определению полагается равным (22), при наборе коэффициентов λ_i в соответствии с заданной сигнатурой.

С точки зрения введенной терминологии, евклидовы пространства — это псевдоевклидовы пространства с сигнатурой $(n; 0; 0)$. В теории относительности большую роль играют псевдоевклидовы пространства с сигнатурой $(n-1; 0; 1)$; такое пространство называется *пространством Лоренца* по имени выдающегося голландского физика, создателя электронной теории Г. Лоренца (1853–1928), а линейное отображение пространства Лоренца в себя, сохраняющее псевдодлину (точнее, ее квадрат), называется *преобразованием Лоренца*.

(Из формулы $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{4}[(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2]$ вытекает, что из сохранения псевдодлины вытекает сохранение скалярных произведений; обратное очевидно.) Преобразования Лоренца играют для пространства Лоренца ту же роль, что движения — для евклидова пространства.

Рассмотрим более подробно случай лоренцевой плоскости, т.е. случай $n = 2$. Точки такой плоскости удобно представлять себе как точки обычной плоскости с координатами x, t и псевдоскалярным произведением, вычисляемым по формуле

$$(x_1 \mathbf{i} + t_1 \mathbf{j}) \cdot (x_2 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j}) = x_1 x_2 - t_1 t_2,$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, как обычно, — это векторы, идущие из начала координат в точки $(1; 0)$ и $(0; 1)$ соответственно. Отсюда квадрат псевдодлины вычисляется по формуле

$$|\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{t}\mathbf{j}|^2 = (\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{t}\mathbf{j})^2 = x^2 - t^2.$$

Координата x в физике истолковывается как пространственная координата, а координата t — как время. Векторы вида $\mathbf{a}$ (рис. 72), параллельные одной из прямых $t = \pm x$, имеют нулевую псевдодлину. Более пологие векторы вида $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{i}$ имеют положительную псевдодлину; такие векторы называются *пространственноподобными*. Более крутые векторы вида $\mathbf{d}, \mathbf{j}$ имеют мнимую псевдодлину, они называются *временноподобными*. Если записать преобразование Лоренца в виде $x_1 = \alpha x + \beta t$, $t_1 = \gamma x + \delta t$, то из основного условия

$x_1^2 - t_1^2 \equiv x^2 - t^2$ при дополнительных требованиях $\delta > 0$, $\left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right| > 0$ (они естественны из физических соображений) Легко вывести формулы

$$\begin{aligned} x_1 &= (\operatorname{ch} \varphi) x - (\operatorname{sh} \varphi) t, & x &= (\operatorname{ch} \varphi) x_1 + (\operatorname{sh} \varphi) t_1, \\ t_1 &= (-\operatorname{sh} \varphi) x + (\operatorname{ch} \varphi) t, & t &= (\operatorname{sh} \varphi) x_1 + (\operatorname{ch} \varphi) t_1, \end{aligned}$$

что мы предоставим читателю. Здесь φ — параметр, определяющий преобразование, аналогичный углу поворота при вращении; последовательное выполнение двух преобразований с параметрами φ_1, φ_2 равносильно выполнению одного преобразования с параметром $\varphi_1 + \varphi_2$ (проверьте это с помощью умножения матриц!). Если истолковывать это преобразование как отображение плоскости x, t при зафиксированном начале координат на себя, то оно называется *гиперболическим поворотом* плоскости относительно прямых $x = \pm t$, переходящих при этом повороте в себя. Название объясняется тем, что при таком отображении гиперболы $x^2 - t^2 = C$ также переходят в себя. На рис. 73 показаны образы нескольких точек при таком повороте. Подбирая φ , можно перевести ось x в любое из пространственноподобных положений, которые, таким образом, в этой теории все равноправны. (Подобно тому как на евклидовой плоскости вообще все направления оси x равноправны.) Соответственно меняется ось t ; в связи с этим следует заметить, что изображение осей x и t на рис. 72 и 73 взаимно перпендикулярными никакой роли не играет, оси x_1 и t_1 на рис. 73 ничуть не «хуже» осей x и t .

В теории относительности каждая точка плоскости x, t истолковывается как событие, состоящее в указании «где» и «когда», причем мир для простоты считается одномерным. Оси x, t и x_1, t_1 на рис. 73 — это собственные оси пространства и времени для двух наблюдателей, движущихся равномерно

друг относительно друга, второй относительно первого со скоростью $\text{th } \varphi$ (почему?). Так как $|\text{th } \varphi| < 1$, то эта скорость всегда меньше единицы. (В физике величины x, t размерны и метрическая форма имеет вид $x^2 - c^2 t^2$, где постоянная c — предельная скорость распространения сигналов — равна скорости света; тогда и относительная скорость движения наблюдателей меньше c .) Из формулы $\text{th}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\text{th } \varphi_1 + \text{th } \varphi_2}{1 + \text{th } \varphi_1 \text{th } \varphi_2}$ получаем правило

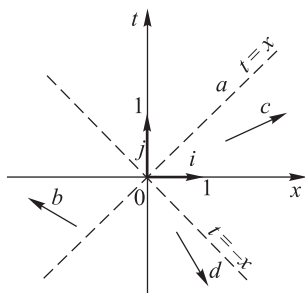


Рис. 72

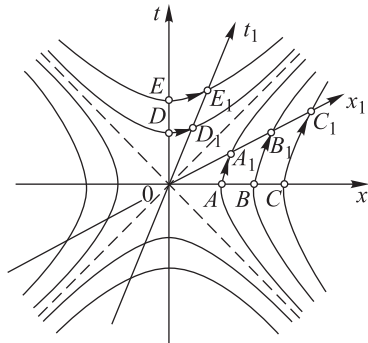


Рис. 73

сложения относительных скоростей. Из рис. 73 видна относительность понятия одновременности событий; так, события A, B, C , одновременные с точки зрения первого из наблюдателей, не одновременны с точки зрения второго. (Которое с его точки зрения произошло раньше?)

В пространстве Лоренца при $n > 2$ совокупность пространственноподобных радиусов-векторов отделена от совокупности времениподобных векторов *световым конусом* векторов нулевой псевдодлины. Первая совокупность связна, т.е. все пространственноподобные направления равноправны. Вторая совокупность состоит из двух компонент связности (кусков); это означает, что ни в какой системе отсчета нельзя, увы, начать двигаться назад во времени.

9. Замечание о размерностях. В предыдущем изложении мы, как обычно в математических рассуждениях, считали все участвующие величины безразмерными. Тогда теория получается более простой; поэтому при действиях с размерными величинами часто в самом начале исследования с помощью выбора характерных единиц переходят к безразмерным величинам, чтобы в дальнейшем только с ними иметь дело. Однако это не всегда удобно.

При действиях с размерными тензорными величинами применяются два различных подхода; об этом иногда забывают, что приводит к недоразумениям уже в линейной алгебре. Именно, в разложении $x = x^i e_i$ размерного вектора (и аналогично тензора любого ранга) можно считать либо

1) скалярные (в смысле векторной алгебры) величины x^i имеющими ту же размерность, что x , а векторы e_i безразмерными, либо

2) величины x^i безразмерными, а векторы e_i имеющими ту же размерность, что x .

Векторная алгебра, тензорная алгебра допускают любой из этих подходов; однако всегда надо отчетливо представлять, какой именно подход применяется. Более универсальным является первый подход, он позволяет пользоваться в одном рассмотрении тензорами (в частности, векторами) самых разнообразных размерностей. Здесь размерность каждого вновь вводимого тензора может быть произвольной, одинаковой для всех компонент, называемых при таком подходе *физическими составляющими* тензора; размерность суммы и произведения тензоров получается по обычным правилам. В этом подходе приходится пользоваться не вполне наглядным пространством безразмерных векторов, в котором и выбираются базисы: например, говорить о векторе, имеющем заданное направление и модуль, равный 5 (не 5 единиц длины!). (Однако небольшое размышление показывает, что такой вектор не намного абстрактнее, чем просто безразмерное число 5.) Метрический тензор здесь безразмерен, так что при поднимании и опускании индексов (п. 6) размерность тензора не меняется.

Второй подход более нагляден, он не требует какого-либо иного пространства, кроме пространства векторов $\mathbf{x}$, но он, естественно, имеет более узкую область применения. Здесь возможны те же действия, что и с безразмерными величинами; впрочем, пользоваться метрическим тензором не совсем удобно. Векторы взаимного базиса имеют размерность, обратную размерности $\mathbf{x}$. Здесь уже нельзя считать тензор простым набором компонент, а надо пользоваться выражением вида (17), которое и определяет размерность тензора: в общем случае она равна размерности $\mathbf{x}$ в степени, показатель которой равен разности между числом контравариантных и ковариантных индексов у компонент,

§2. Тензорные поля

1. Поле евклидова тензора. Ограничимся для определенности полями в трехмерном пространстве, хотя аналогичное рассмотрение можно провести для любого числа измерений. Пусть в каждой точке M пространства или некоторой его области задан евклидов тензор (п. 1.2)

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(M) = a_{ij\dots s}(M)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\dots\mathbf{e}_s \quad (1)$$

(одинакового ранга для всех M), тогда мы говорим, что задано *поле евклидова тензора* $\mathbf{T}$; далее в этом пункте мы будем слово «евклидова» опускать. Скалярное и векторное поля — это частные случаи тензорных полей, если ранг равен соответственно нулю и единице. Поля ранга 2 широко применяются и имеют непосредственный физический смысл в механике сплошной среды: например, такими полями описывается состояние упругого тела (ср. конец п. 1.5). При действиях над этими полями получаются поля и более высокого ранга.

Над тензорными полями можно производить те же алгебраические действия, что над одиночными тензорами (п. 1.3), а также действия *тензорного анализа*, основанные на дифференцировании и интегрировании. Так, производная от поля (1) вычисляется по естественной формуле

$$\nabla \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial a_{ij\dots s}}{\partial x_t} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t. \quad (2)$$

Легко проверить (проделайте это!), что при замене евклидова базиса величины $\frac{\partial a_{ij\dots s}}{\partial x_t}$, которые иначе обозначаются $a_{ij\dots s,t}$, преобразуются по тензорному правилу (п. 1.2), т. е. выражение (2) есть тензор, причем на единицу высшего ранга, чем (1). Производная (2) от суммы и произведения полей вычисляется по обычным формулам дифференциального исчисления. Через производную выражается и дифференциал

$$d\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = a_{ij\dots s,t} dx_t \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \dots \mathbf{e}_s,$$

играющий обычную роль.

Через производную, так определенную, выражаются, в частности, основные операции векторного анализа: именно,

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = u_{,i} \mathbf{e}_i; \quad \text{div } \mathbf{A} = \mathbf{A}_{,i,i};$$

$$(\mathbf{a}, \nabla)u = a_i u_{,i}; \quad (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b} = a_j b_{i,j} \mathbf{e}_i.$$

Чтобы получить ротор, надо ввести *псевдотензор* (отличающийся от обычного тензора тем, что при изменении «смысла» тройки базисных векторов компоненты получают добавочный множитель -1) третьего ранга ε с компонентами в любой системе координат $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$, прочие $\varepsilon_{ijk} = 0$. Тогда легко проверить, что $\text{rot } \mathbf{a} = -\varepsilon_{ijk} a_{j,k} \mathbf{e}_i$.

По аналогии с дивергенцией векторного поля вводится дивергенция тензорного поля: например, для полей ранга 2

$$\text{div}_I(a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = a_{ij,i} \mathbf{e}_j, \quad \text{div}_{II}(a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = a_{ij,j} \mathbf{e}_i,$$

т. е. получается поле на единицу меньшего ранга. Для несимметрических тензоров надо указывать, по которому индексу берется дивергенция.

Естественно вводятся понятия интеграла от тензорного поля по линии, поверхности и объему. Это тензор того же ранга, что интегрируемый (почему?). При вычислении потока $\int \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ (и аналогично циркуляции) тензора он скалярно множится на вектор, т. е. получается тензор (одиночный, не поле!) на единицу меньшего ранга; если тензор $\mathbf{T}$ не симметрический, то при этом надо указывать, по которому его индексу берется скалярное произведение, а потому и поток.

На тензорные поля легко распространить формулу Остроградского (1.2.4). Рассмотрим, например, поле тензора второго ранга $\mathbf{T} = a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$. Зафиксируем базис в пространстве и применим к векторному полю $a_{ij}\mathbf{e}_i$ формулу (1.2.4); мы получим

$$\oint_{(\sigma)} a_{ij}n_i d\sigma = \int_{\Omega} a_{ij,i} d\Omega.$$

Помножив обе части на $\mathbf{e}_j$ и просуммировав по j , мы придем к требуемой формуле

$$\oint_{(\sigma)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{d}\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T} d\Omega,$$

в которой поток и дивергенция взяты по одному и тому же индексу. Окончательная формула не связана с конкретным выбором базиса, т. е. имеет тензорный смысл. Она справедлива для тензоров любого ранга и дает возможность истолковать дивергенцию как отношение потока поля через бесконечно малую замкнутую поверхность к объему, ограниченному этой поверхностью,

2. Поступательный перенос вектора в криволинейных координатах. В дальнейшем мы будем рассматривать тензорные (в частности, векторные) поля, заданные с помощью криволинейных координат в линейном или евклидовом пространстве любой размерности n . (Первоначальный материал по криволинейным координатам см., например, в ЛВМ, пп. XVI.14–16.) Для простоты можно представлять себе, что $n = 2$ или 3 , так как рассуждения одинаковы при всех n .

Пусть в некоторой области (G) линейного пространства (R) введены общие криволинейные координаты $x^1, x^2, \dots, x^n$. Тогда в каждой точке $M \in (G)$ векторы $\mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\right)_M$, вообще говоря, можно принять за базис; однако этот базис свой в каждой точке M , т. е. получается поле базисов. (В этом случае вместо «базис» говорят также *repér*, что по-французски означает «метка», «значок», т. е. получается поле реперов.) При переходе к другой, также общей системе координат $x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}$ ¹⁾ базис преобразуется по формуле

$$\mathbf{e}'_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_j.$$

(Заметим, что, как легко проверить, в производной $\frac{\partial}{\partial x^j}$ индекс j ковариантен, а $\frac{\partial}{\partial x_j}$ — контравариантен; тем самым в выражении $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$ подразумевается суммирование по j .) Поэтому в силу п. 1.6 координаты

¹⁾ Штрих относится не к номеру, а к координате, т. е. $x^{1'} = (x^1)'$.

любого вектора $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ при такой замене преобразуются по формуле $a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} a^j$.

Рассмотрим теперь задачу, важную для дальнейшего. Пусть вектор $\mathbf{a}$ поступательно, т. е. без изменения длины и направления, переносится в пространстве и в каждый момент этого переноса раскладывается по базису, отвечающему положению начала этого вектора. Если базис в каждой точке свой, то ясно, что координаты вектора будут по мере его переноса меняться. По какому закону?

Так как вектор $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ постоянен, то

$$d\mathbf{a} = (da^i) \mathbf{e}_i + a^i d\mathbf{e}_i = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Однако по формуле полного дифференциала

$$d\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} dx^j = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k dx^j, \quad (4)$$

где через Γ_{ij}^k обозначены коэффициенты разложения вектора $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j}$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Эти важные коэффициенты были введены в 1869 г. немецким математиком Э. Кристоффелем (1829–1900) и называются *символами Кристоффеля 2-го рода или коэффициентами связности*, так как с их помощью связываются одинаковые векторы в разных точках пространства; они обозначаются также $\{i_K^j\}$. Расположение индексов в этих символах выбрано таким, чтобы применять тензорное правило суммирования (п. 1.6), хотя *символы Кристоффеля не являются тензорами*; в каждой точке пространства они зависят не только от базиса в этой точке, но и от характера изменения базиса при отходе от нее. Поэтому при замене системы координат символы Кристоффеля преобразуются не по тензорному, а по некоторому более сложному закону, на котором мы не будем останавливаться. Отметим, что $\Gamma_{ij}^k \equiv \Gamma_{ji}^k$ и что для любой аффинной системы координат все $\Gamma_{ij}^k = 0$ (почему?).

Подставив (4) в (3) и приравняв коэффициенты при базисных векторах, получим соотношения

$$da^k + a^i \Gamma_{ij}^k dx^j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

которые в совокупности равносильны условию $d\mathbf{a} = \mathbf{0}$, т. е. дают решение поставленной задачи.

Если (R) не только линейное, но евклидово пространство, то возможно выразить символы Кристоффеля через коэффициенты метрического тензора (п. 1.7). Для этого помножим равенство $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k$ скалярно на $\mathbf{e}_l$, это даст (см. (1.19))

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_l = g_{lk} \Gamma_{ij}^k. \quad (6)$$

Это выражение называется *символом Кристоффеля 1-го рода* и обозначается $\Gamma_{l,ij}$, $[ij, l]$ или $[{}^i e^j]$. Таким образом,

$$\Gamma_{l,ij} = g_{lk} \Gamma_{ij}^k, \quad \Gamma_{ij}^k = g^{lk} \Gamma_{l,ij}; \quad (7)$$

второе вытекает из взаимной обратности матриц (g_{lk}) и (g^{lk}) (п. 1.7). Продифференцируем теперь равенство $e_l \cdot e_k = g_{lk}$ по x^m ; с учетом (6) и (4) получим

$$\Gamma_{k,lm} + \Gamma_{l,km} = \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m}. \quad (8)$$

Произведя здесь два раза циклическую перестановку индексов и учитывая, что всегда $\Gamma_{r,st} = \Gamma_{r,ts}$, получим вместе с (8) систему из трех уравнений с тремя неизвестными, решив которую, придем к формуле (проверьте!)

$$\Gamma_{l,km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \right).$$

Отсюда с помощью (7) находим

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (9)$$

Вычислим в качестве примера выражения для коэффициентов связности в полярной системе координат ρ, φ на плоскости. Так как

$$\mathbf{r} = \rho \cos \varphi \mathbf{i} + \rho \sin \varphi \mathbf{j},$$

то, применяя индексы ρ, φ вместо 1, 2, получим

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{r}'_\rho = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{r}'_\varphi = -\rho \sin \varphi \mathbf{i} + \rho \cos \varphi \mathbf{j}. \quad (10)$$

(Обращаем внимание читателя на то, что в ЛВМ, п. XVI.28, аналогичное обозначение применялось для векторов того же направления, но дополнительно нормированных длиной на единицу.) Отсюда

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \rho} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \rho} = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j},$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\rho \cos \varphi \mathbf{i} - \rho \sin \varphi \mathbf{j}.$$

Разлагая эти векторы по базису (10), найдем искомые коэффициенты $\Gamma_{\rho\rho}^\rho = \Gamma_{\rho\rho}^\varphi = \Gamma_{\rho\varphi}^\rho = \Gamma_{\rho\varphi}^\varphi = 0$, $\Gamma_{\varphi\varphi}^\rho = \frac{1}{\rho}$, $\Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = -\rho$ (проверьте!).

Если система координат x_i ортогональная, то в базисе $\mathbf{e}_i$ компоненты ковариантного метрического тензора $g_{ii} = l_i^2$, $g_{ij} = 0$ ($i \neq j$), где l_i — коэффициенты Ламе. Поэтому с помощью формулы (9) и символы Γ_{ij}^k выражаются через коэффициенты Ламе. (Вычислите таким способом коэффициенты связности для полярных координат.)

Выведем еще формулы для дифференцирования взаимного базиса (пп. 1.6,7), считая для простоты (R) евклидовым; тот же результат

справедлив для общего линейного пространства. Продифференцируем равенство (1.18) по x^k и подставим разложение производной базисного вектора по своему базису:

$$0 = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}^j + \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}^j + \mathbf{e}_i \cdot M_{jks} \mathbf{e}^s,$$

где M_{jks} — какие-то коэффициенты. Применяя равенства (1.18), получим $\Gamma_{ik}^j + M_{jki} = 0$, т. е. $M_{jki} = -\Gamma_{ik}^j$. Изменив обозначения индексов, получаем окончательно

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k, \quad \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^j} = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{e}^k. \quad (11)$$

3. Ковариантное дифференцирование. Пусть в евклидовом пространстве задана криволинейная система координат x^i и векторное поле $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$. Тогда в силу п. 2 получим (проверьте!)

$$d\mathbf{a} = (da^i + a^j \Gamma_{jk}^i dx^k) \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i a^j \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}^k \cdot dx^s \mathbf{e}_s. \quad (12)$$

Так как вектор $dx^s \mathbf{e}_s = d\mathbf{r}$ произволен, и, как и $d\mathbf{a}$, не зависит от выбора системы координат, в частности, от базиса $\mathbf{e}_i$, то и выражение

$$\nabla \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i a^j \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}^k \quad (13)$$

— *ковариантная производная вектора $\mathbf{a}$* — является тензором (смешанным тензором 2-го ранга), причем этот тензор не зависит от конкретного выбора системы координат. Для его компонент принято обозначение

$$a_{\cdot k}^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i a^j$$

Аналогично определяется производная от тензора любого ранга. Проверьте, например, опираясь на формулы (11), что

$$\begin{aligned} \nabla (a_{\cdot k}^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k) &= \\ &= \left(\frac{\partial a_{\cdot k}^j}{\partial x^l} \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k + a_{\cdot k}^j \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^l} \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k + a_{\cdot k}^j \mathbf{e}^i \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^l} \mathbf{e}^k + a_{\cdot k}^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial x^l} \right) \mathbf{e}^l = \\ &= \left(\frac{\partial a_{\cdot k}^j}{\partial x^l} - \Gamma_{li}^s a_{\cdot s, k}^j + \Gamma_{sl}^j a_{\cdot s, k}^i - \Gamma_{lk}^s a_{\cdot s}^j \right) \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k \mathbf{e}^l \end{aligned}$$

(при этом для приведения подобных членов мы изменяли обозначение немых индексов $a_{\cdot k}^j \Gamma_{li}^s \mathbf{e}^s = a_{\cdot s, k}^j \Gamma_{li}^s \mathbf{e}^i$ и т. п.). Отсюда

$$a_{\cdot k, l}^j = \frac{\partial a_{\cdot k}^j}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^s a_{\cdot s, k}^j + \Gamma_{sl}^j a_{\cdot s, k}^i - \Gamma_{kl}^s a_{\cdot s}^j. \quad (14)$$

Итак, получается тензор на единицу высшего ранга, чем исходный, с одной добавочной ковариантностью. (Продумайте закон, по которому составлена правая часть (14).)

В частности, ковариантная производная скалярного поля

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x^i} \mathbf{e}^i = g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \mathbf{e}_i$$

есть *градиент* этого поля. *Дивергенция* векторного поля получается с помощью свертывания поля (13), т. е.

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{a} = a^i_{,i} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ji} a^j. \quad (15)$$

Этому выражению можно придать более компактный вид, если воспользоваться определителем $g = \det(g_{ij})$ и заметить, что производная от определителя по любому его элементу всегда равна алгебраическому дополнению этого элемента (почему?). Но эти дополнения связаны с элементами обратной матрицы (как?), откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x^i} &= \frac{\partial g}{\partial g_{jk}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = g g^{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = |\text{см. (8)}| = \\ &= g g^{jk} (\Gamma_{k,ji} + \Gamma_{j,ki}) = |\text{см. (7)}| = g (\Gamma^j_{ji} + \Gamma^k_{ki}) = 2g \Gamma^j_{ji}. \end{aligned}$$

Отсюда правую часть (15) можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i} a^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} a^i)}{\partial x^i}.$$

Можно доказать, что ротор векторного поля в трехмерном пространстве равен

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} &\left(\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} \right) \mathbf{e}_2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_3 \right), \quad (16) \end{aligned}$$

где $a_i = g_{ij} a^j$ (см. п. 1.7). Для этого надо проверить — на чем мы не будем останавливаться — что правая часть (16) действительно является вектором, т. е. остается инвариантной при любой замене системы координат; после этого из справедливости (16) в декартовой системе координат вытекает, что эта формула верна и в любой системе.

Из формулы (12) и аналогичной формулы для тензоров любого ранга вытекает, что

$$d\mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla_i \mathbf{T}) dx^i, \quad (17)$$

где в скалярном произведении осуществляется свертывание (п. 1.3) по ковариантному индексу дифференцирования и контравариантному индексу у dx^i ; под $\nabla_i \mathbf{T}$ понимаются тензорные компоненты тензора $\nabla \mathbf{T}$, определенные формулой $\nabla \mathbf{T} = (\nabla_i \mathbf{T}) \mathbf{e}^i$. Из (1.7), в частности, вытекает формула

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \left(\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \mathbf{e}_i \right)$$

для скорости изменения тензорного поля вдоль траектории (ср. п. 1.2.1). Для скалярного и векторного полей получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } u \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt},$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial a^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i a^j \right) v^k \right) \mathbf{e}_i.$$

Обычные правила для производной суммы и произведения справедливы и для ковариантной производной. Это вытекает из того, что последняя определена через дифференциал, для которого эти правила справедливы.

Ковариантная производная метрического тензора $\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ равна нулю. В самом деле, в декартовых координатах $\mathbf{g} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n$, т.е. этот тензор постоянен во всем пространстве; значит, $d\mathbf{g} = \mathbf{0}$, и потому $\nabla \mathbf{g} = \mathbf{0}$ (продумайте!). Аналогично и $\nabla(g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \mathbf{0}$. Другими словами, $g_{ij,l} = g_{i,l}^j = 0$.

Над полем можно совершать несколько последовательных операций дифференцирования. В частности, важную роль играет *оператор Лапласа–Бельтрами* (Е. Бельтрами (1835–1900) — итальянский геометр), обозначаемый $\Delta_2 u$:

$$\Delta_2 u = \text{div grad } u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right). \quad (18)$$

Так как это выражение не зависит от выбора системы координат, а в декартовых координатах превращается в лапласиан (I.2.17), то (18) можно рассматривать как инвариантную запись лапласиана в произвольной системе координат.

Подобным образом можно переписать в произвольной системе координат любое дифференциальное выражение, примененное к заданному полю. Для этого достаточно результат на основе правил тензорного исчисления переписать в *тензорно-инвариантной форме*, т.е. так, чтобы этот результат не зависел от выбора системы координат и в какой-нибудь определенной системе имел заданный вид. Тензорно-инвариантная запись основных уравнений широко применяется в теоретической физике, механике сплошной среды и т.д.

4. Поле на многообразии евклидова пространства. Мы начнем с рассмотрения обычной двумерной поверхности (S) в обычном трехмерном пространстве. Если на (S) задана система координат x^1, x^2 , то для любой точки $M \in (S)$ векторы $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}$ расположены в касательной плоскости (P_M) к (S) в M (рис. 74). При замене системы координат эти векторы преобразуются по тому же правилу, что было указано в начале п. 2; это дает возможность задавать скалярные, векторные и, в общем случае, тензорные поля на (S) в точности так же, как в евклидовом пространстве.

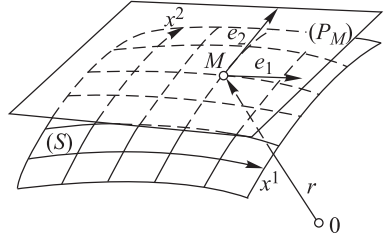


Рис. 74

При малом изменении координат будет

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} dx^2 = (dx^i) \mathbf{e}_i,$$

а квадрат длины этого вектора равен

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (dx^i \mathbf{e}_i) \cdot (dx^j \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (19)$$

Это выражение, коэффициенты которого составляют ковариантный метрический тензор, называется *первой основной квадратичной формой поверхности* (S) ; она была введена К. Гауссом в 1828 г. Если эта форма известна, то можно найти угол между линиями на (S) в точке их пересечения по формуле

$$\cos(d\mathbf{r}, \tilde{d}\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{r} \cdot \tilde{d}\mathbf{r}}{ds \cdot \tilde{ds}} = \frac{g_{ij} dx^i \tilde{dx}^j}{\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \sqrt{g_{ij} \tilde{dx}^i \tilde{dx}^j}},$$

длину любой линии (L) , расположенной на (S) ,

$$L = \int_{(L)} ds = \int_{(L)} \sqrt{g_{ij}(x^1, x^2) dx^i dx^j},$$

площадь любой фигуры (σ)

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{(\sigma)} |\partial_{x^1} \mathbf{r} \times \partial_{x^2} \mathbf{r}| = \int_{(\sigma)} \sqrt{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|^2} dx^1 dx^2 = \\ &= \int_{(\sigma)} \sqrt{(|\mathbf{e}_1|^2 |\mathbf{e}_2|^2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2)} dx^1 dx^2 = \int_{(\sigma)} \sqrt{g} dx^1 dx^2 \quad (g = \det(g_{ij})) \end{aligned}$$

(продумайте эти формулы!).

(20)

Формулы вида (11) теперь придется видоизменить, так как вектор $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}$, вообще говоря, не параллелен плоскости (P_M) (почему?). Поэтому ограничимся разложением проекции этого вектора на плоскость (P_M) :

$$\text{пр}_{(P)} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k; \quad (21)$$

мы не пишем индекс M , так как это разложение можно осуществить в любой точке (S) . Тогда формула (6) все равно верна, а с ней и формула (9) для коэффициентов связности (проверьте!). Вторая формула (11), как и первая, верна после проектирования обеих ее частей на касательную плоскость.

Рассмотрим в качестве примера сферу радиуса R и введем на ней сферические координаты ϑ, φ (ЛБМ, п. X.1). Здесь

$$\mathbf{r} = R(\sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = R(\cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \vartheta \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{e}_\varphi = R(-\sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{j}),$$

откуда

$$g_{\vartheta\vartheta} = \mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_\vartheta = R^2, \quad g_{\vartheta\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2 \vartheta,$$

и применение формулы (9) дает

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta = \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = \text{ctg} \vartheta, \quad \Gamma_{\vartheta\vartheta}^\vartheta = \Gamma_{\vartheta\varphi}^\vartheta = \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = 0.$$

(Получите эти формулы также с помощью разложения (21).)

Соответственно изменяются рассуждения, приведенные в начале п. 3, так как вектор $d\mathbf{a}$, вообще говоря, имеет добавочную компоненту, направленную по нормали к (S) . Однако ковариантная производная по определению получается после проектирования на (P) , т.е. после отбрасывания этой компоненты, так что формула (13) все равно справедлива, причем тензор $\nabla \mathbf{a}$ не зависит от выбора системы координат на (S) .

С помощью аналогичного проектирования вводятся коэффициенты связности для любого n -мерного многообразия в m -мерном пространстве и понятие ковариантной производной тензорного поля любого ранга на этом многообразии. Основные формулы пп. 2, 3, связанные с этими понятиями, остаются в силе, однако члены с полными дифференциалами могут содержать добавочные нормальные слагаемые. Замечательно, что утверждение $\nabla \mathbf{g} = \mathbf{0}$ также остается справедливым, хотя приведенное в п. 3 доказательство, конечно, уже не годится. Однако это утверждение можно было доказать и формально, вычислив $g_{ij,l}$ по формулам, аналогичным (14), и подставив выражения (9) для коэффициентов связности; а так как эти формулы и эти выражения справедливы и для многообразия, то справедливо и вытекающее из них равенство $g_{ij,l} = 0$.

5. Внутренняя геометрия и римановы пространства. Вернемся к началу п. 4 и допустим, что поверхность (S) подвергнута изгибанию без растяжений или сжатий, т. е. как лист бумаги, вместе с координатной сеткой на ней. При этом все длины линий на (S) не изменятся, а потому и квадратичная форма (19) останется инвариантной, все ее коэффициенты не изменятся (хотя зависимость $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2)$ станет уже иной). Обратно, если на поверхностях (S) и $(\tilde{S})$ как-то введены координаты x_i и $\tilde{x}^i$ и в соответствующих точках (для которых $x_i = \tilde{x}^i$) квадратичные формы (19) одинаковы (т. е. $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$), то эти поверхности можно наложить друг на друга без растяжений и сжатий. Для этого достаточно каждой точке (S) сопоставить соответствующую точку $(\tilde{S})$ и заметить, что при этом отображении длины, углы и площади, которые в силу п. 4 выражаются через коэффициенты g_{ij} , сохраняются. Такие две поверхности (S) и $(\tilde{S})$ называются *изометричными*.

Все геометрические свойства, одинаковые для изометричных поверхностей, относятся к *внутренней геометрии* этих поверхностей. Например, малые куски плоскости, цилиндрических и конических поверхностей имеют одинаковую внутреннюю геометрию, так как каждый из этих кусков можно развернуть на другой. К внутренней геометрии относятся все величины, выражающиеся через коэффициенты g_{ij} — не только длины, углы и площади, но и коэффициенты связности, а также выражающийся через них результат абсолютного дифференцирования поля, заданного на поверхности. С другой стороны, кривизна линии, расположенной на поверхности, или расстояние между двумя точками поверхности (равное длине отрезка прямой в пространстве) не относятся к внутренней геометрии, так как при изгибании поверхности эти величины меняются. Не относится к внутренней геометрии и полный дифференциал da поля касательных векторов $\mathbf{a}$, определенного на поверхности, так как при ее изгибании нормальная составляющая da изменяется (ср. п. 4).

Аналогично определяется внутренняя геометрия любого n -мерного многообразия. В ней несущественно, как именно вложено это многообразие в содержащее его евклидово пространство высшей размерности, а важен только метрический тензор g_{ij} этого многообразия в зависимости от координат на нем.

Чтобы перейти к общему понятию риманова пространства, остается сделать еще один шаг — полностью отказаться от рассмотрения объемлющего евклидова пространства, оставив только многообразие с метрическим тензором на нем. Этот шаг, сделанный Б. Риманом в 1854 г., важен потому, что многообразие как совокупность каких-то объектов с n степенями свободы может появиться вне всякой связи с евклидовыми пространствами.

Итак, *риманово пространство* (R) — это n -мерное многообразие, в каждой точке которого задан метрический тензор g_{ik} . Это симметрический дважды ковариантный тензор; другими словами, коэффициенты g_{ij} принимают в каждой точке (R) определенные значения после выбора в окрестности этой точки системы координат x^i , а при переходе к новой системе координат x'^i они меняются по тензорному правилу

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^j} g_{i_1 j_1}.$$

С помощью метрического тензора в (R) вводится понятие элемента длины: по определению

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (22)$$

Чтобы этот элемент получился положительным, требуют, чтобы квадратичная форма (22) была положительно определенной.

Знание элемента длины дает возможность, как в п. 4, находить длину любой линии в (R) и угол между линиями в точке их пересечения. Взяв формулы (20) получится формула $\int_{(\sigma)} \sqrt{g} dx^1 dx^2 \dots dx^n = \sigma$ для n -мерного объ-

ема любой области (σ) , так как можно доказать, что именно по такой формуле вычисляется n -мерный объем области n -мерного многообразия в евклидовом пространстве. Мы предоставляем читателю продумать, как надо вычислять k -мерный $(2 \leq k \leq n-1)$ объем области n -мерного многообразия, расположенного в (R) , основываясь на том, что такое многообразие само является римановым пространством. Умение вычислять объемы дает возможность обычным образом ввести интеграл от функции, заданной на области в (R) или на области многообразия меньшей размерности, расположенного в (R) .

Некоторая трудность возникает при рассмотрении векторов в (R) , так как (R) не является линейным пространством; это то же, что рассматривать векторы на кривой поверхности, не пользуясь объемлющим эту поверхность пространством. Однако эта трудность не очень существенна, так как на самом деле в теории поля достаточно пользоваться только бесконечно малыми векторами, тогда как конечные векторы получаются в результате их той или иной нормировки, которую можно указывать с помощью скалярного множителя, а не

геометрически. Например, вектор скорости $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ не обязательно изображать в виде вектора конечной длины, его можно изобразить в виде бесконечно малого вектора $d\mathbf{r}$, при котором стоит множитель $1/dt$, или даже, что формально проще, в виде малого вектора неопределенной длины в направлении $d\mathbf{r}$, при котором указан модуль, т. е. v . Подобно этому, векторное поле $\mathbf{a}$ на (R) можно задать, указав в каждой точке $M \in (R)$ направление поля с помощью бесконечно малого вектора и при нем значение модуля a . Этих данных вполне достаточно для того, чтобы производить любые действия над такими векторами, как бы начинающимися в точке M , фактически их никуда не откладывая. В частности, если на (R) задана система координат x^i , то в каждой точке M вектор $\mathbf{e}_1$, аналогично $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, задается направлением вектора $\partial_{x^i} \mathbf{r}$ (причем вектор $\mathbf{r}$ сам по себе не рассматривается), и модулем, равным $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \right| = \sqrt{g_{11}}$.

Это дает возможность записывать векторные и тензорные поля в обычном виде $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$, и т. п. и производить над ними алгебраические действия, если они сводятся к действиям над векторами или тензорами, заданными в одной и той же точке.

Более серьезен вопрос об установлении *связности* в (R) , т. е. правила параллельного переноса векторов в (R) , без чего невозможны действия над векторами, заданными в различных точках (R) , в частности, бессмысленно выражение $d\mathbf{a}$ (почему?). Связность устанавливается с таким расчетом, чтобы для многообразия, расположенного в евклидовом пространстве, мы получили процедуру, формулируемую в терминах внутренней геометрии. Однако мы уже упоминали, что для такого многообразия $d\mathbf{a}$ состоит из двух слагаемых: касательного $\nabla \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$, не меняющегося при изгибании многообразия, и нормального, зависящего от этого изгиба. Поэтому естественно по определению

положить

$$d\mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \quad (23)$$

где $d\mathbf{r}$ — вектор бесконечно малого перемещения, а $\nabla \mathbf{a}$, как и раньше, вычисляется по формуле (13), в которой коэффициенты связности Γ_{jk}^i определяются формулами (9) через коэффициенты заданного на (R) метрического тензора. Аналогично (23) определяется дифференциал для тензорного поля любого ранга.

Дифференциал и ковариантная производная полей в римановом пространстве обладают свойствами, аналогичными тем, которые были описаны в пп. 2, 3 для полей, заданных в евклидовом пространстве. Однако здесь имеются и новые черты, которые проявляются при поступательном переносе вектора $\mathbf{a}$ началом вдоль некоторой линии; при этом должно быть $d\mathbf{a} = \mathbf{0}$, т.е. как и в п. 2, должны выполняться соотношения (5). Оказывается, что в любой, даже малой, но конечной окрестности исходной точки направление вектора после этого переноса, вообще говоря, зависит от пути переноса. Поэтому ни в какой области риманова пространства, вообще говоря, не существует поля параллельных векторов.

Этот факт легко понять на примере двумерной сферы, рассматриваемой как риманово двумерное пространство, т.е. во внутренней геометрии. Векторы этого пространства можно изображать в виде векторов, касательных к сфере, а поступательность переноса такого вектора в смысле геометрий риманова пространства означает, что при бесконечно малом перемещении начала вектора его проекция на касательную плоскость должна измениться на малую высшего порядка. Если это начало обходит контур $ABCA$, показанный на рис. 75 и составленный из дуг экватора и двух меридианов, а вектор $\mathbf{a}$ в начальный момент занимал положение $\mathbf{a}_0$, то в процессе поступательного переноса вектор будет принимать положения, изображенные на рис. 75, что вытекает даже из простых соображений симметрии. Мы видим, что в конце поступательного переноса вектор $\mathbf{a}$ займет положение $\mathbf{a}_1$, отличное от $\mathbf{a}_0$.

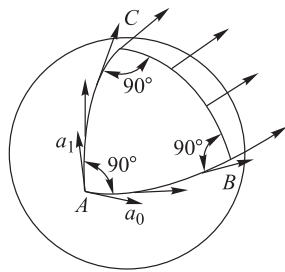


Рис. 75

Если поступательно переносить сразу два вектора, то их скалярное произведение остается неизменным, так как $d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = d\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{b} = 0$. (Отметим, что из условия $d\mathbf{a} = \mathbf{0}$ не вытекает, что $\mathbf{a} = \text{const}$, так как в римановом пространстве последнее равенство бессмысленно.) Отсюда, в частности, следует, что и модуль вектора, равно как и угол между двумя векторами, в процессе поступательного переноса не меняются (почему?).

Пусть в двумерном римановом пространстве (R) выбрана область (σ) с контуром (L) ; обозначим через $\alpha_{(\sigma)}$ угол, на который повернется произвольный вектор $\mathbf{a}$, если его поступательно перенести началом вдоль (L) . Угол будем считать положительным, если, как на рис. 75, вектор поворачивается в направлении обхода контура. Из предыдущего абзаца следует, что угол $\alpha_{(\sigma)}$ не зависит от конкретного выбора вектора $\mathbf{a}$; легко проверить также, что он не зависит и от выбора на (L) места старта. (Строго говоря, приведенное определение годится лишь для достаточно малых областей (σ) , чего нам

будет достаточно; к большим областям (σ) обычно можно перейти с помощью непрерывного деформирования малых.)

Легко проверить также (продумайте!), что для угла $\alpha_{(\sigma)}$ справедлив закон сложения: если (σ) разбита на два куска (σ_1) и (σ_2) , то $\alpha_{(\sigma)} = \alpha_{(\sigma_1)} + \alpha_{(\sigma_2)}$. Это дает возможность стандартным способом (см. п. I.1.4) ввести плотность величины α

$$K(M) = \lim_{(\sigma) \rightarrow M} \frac{\alpha_{(\sigma)}}{\sigma} \quad (M \in (R)); \quad (24)$$

эта величина называется кривизной пространства (R) в точке M ; обратно, величина α равна интегралу от своей плотности;

$$\alpha_{(\sigma)} = \int_{(\sigma)} K d\sigma.$$

Так, для сферы радиуса R средняя кривизна области $ABCA$ на рис. 75 равна $\frac{\pi}{2} : \frac{4\pi R^2}{8} = \frac{1}{R^2}$ (проверьте!). Но так как сфера во всех своих точках одинакова, то и ее кривизна одинакова во всех точках и потому равна $1/R^2$. Можно доказать, что во внутренней геометрии двумерной поверхности, расположенной в трехмерном пространстве, введенная сейчас кривизна — это как раз полная кривизна, рассмотренная в ЛВМ, п. XII.9.

В римановом пространстве (R) размерности ≥ 3 предел (24) зависит не только от точки M , но и от направления площадки (σ) , поэтому кривизна (R) в M уже не является скаляром. Можно показать, что эта кривизна полностью характеризуется некоторым *тензором кривизны*, который имеет ранг 4 и выражается через коэффициенты связности.

В заключение отметим, что в последнее время широко применяются многообразия с заданным на них метрическим тензором, для которого квадратичная форма (22) уже не является положительно определенной; такие многообразия называются *псевдоримановыми пространствами*. Согласно общей теории относительности четырехмерное физическое «пространство-время» является именно таким пространством. Его трехмерное «пространственное» сечение, характеризующее состояние физического пространства в некоторый момент времени, является римановым пространством и имеет в каждой точке определенный тензор кривизны. Из этого при некоторых дополнительных физических предположениях можно вывести, что вселенная имеет конечный объем (т. е. замкнута, наподобие сферы), и получить оценку этого объема. Подчеркнем, что вопрос «В какую сторону искривлена вселенная?», который первым приходит в голову и мучил меня в детстве, на самом деле бессмысленный, так как ответ на него можно дать только с позиций внутренней геометрии, а с этих позиций риманово пространство не может быть искривленным ни в какую сторону.

Теория римановых пространств подробно изложена в книгах [99] (где изложены также математические основы теории относительности) и [136].

Глава VI

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Вариационное исчисление, основанное в XVIII в. Л. Эйлером и Ж. Лагранжем, было значительно развито в XIX в. в трудах ряда математиков и в настоящее время превратилось в один из важнейших разделов теоретической и прикладной математики. Вариационные принципы, имеющие глубокое идейное значение, дают пути к единообразной трактовке различных физических и прикладных задач и общие подходы к их исследованию; вариационные методы решения задач оказываются одними из наиболее эффективных в качественном и количественном отношениях.

Вариационное исчисление непосредственно примыкает к элементарной теории экстремумов (см., например, ЛБМ, §§ IV.6 и XII.2), которую мы советуем сейчас просмотреть. По нему имеется целый ряд курсов; см., например, [5, 12, 29, 64, 65, 105, 106, 129, 137, 138].

§1. Первая вариация и необходимые условия экстремума

1. Примеры задач вариационного исчисления. Исторически первой задачей, известной в глубокой древности и отнесенной впоследствии к задачам вариационного исчисления, явилась так называемая *задача Дидо*. Легенда говорит, что Дидо — царица одного из государств Древней Греции, преследуемая царем соседнего государства, бежала в Северную Африку и попросила у местного населения участок земли, который можно охватить шкурой вола. Получив согласие на столь ничтожную просьбу, она на глазах у изумленных зрителей разрезала шкуру на тонкие ремешки и, связав их друг с другом, охватила полученной нитью изрядный по тем временам участок; развернув на нем строительство, она основала на этом участке знаменитый в древности город Карфаген.

Уже античные ученые заинтересовались математической стороной этой легенды: допустим, что нить уже связана; как тогда надо расположить ее, чтобы охваченный ею участок имел наибольшую площадь?

Эта задача имеет ряд вариантов. Рассмотрим, например, такой: пусть концы нити расположены в заданных точках A и B (рис. 76) на берегу моря. Если тогда выбрать оси координат, как на рис. 76, то задача сводится к максимизации площади, т. е. интеграла

$$S = \int_a^b y(x) dx \quad (1)$$

($y = y(x)$ — уравнение сухопутной границы участка), при заданном значении длины нити, т. е. интеграла

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (2)$$

и заданных краевых значениях

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (3)$$

Уже в древности было обнаружено, что искомой формой нити служит дуга окружности. В п. 11 мы вернемся к этой задаче.

Другая знаменитая задача, которая привела к зарождению методов вариационного исчисления, была предложена в 1696 г. И. Бернулли и решена различными способами Я. Бернулли, Г. Лейбницем, Г. Лопиталем и И. Ньютоном. Она состоит в следующем. Допустим,

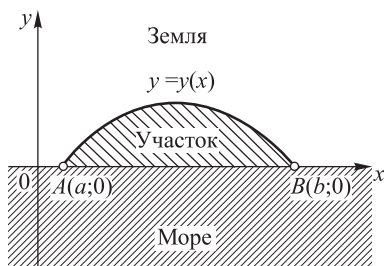


Рис. 76

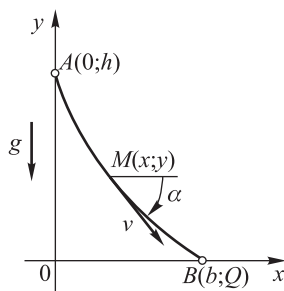


Рис. 77

что под влиянием тяготения материальная точка M скатывается по некоторой линии $y = y(x)$ без начальной скорости и без трения из заданной точки A в заданную точку B (рис. 77) за некоторое время T . Спрашивается, как выбрать путь скатывания $y = y(x)$ (скажем, как

построить ледяную горку, по которой скатываются саночки), чтобы T было минимально возможным. И здесь легко перейти к чисто математической задаче. Будем сначала считать, что линия скатывания $y = y(x)$ задана. Тогда в силу закона сохранения энергии

$$gm(h - y) = \frac{mv^2}{2} \quad \text{т.е.} \quad v = \sqrt{2g(h - y)},$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \alpha = \frac{\sqrt{2g(h - y)}}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \text{т.е.} \quad dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h - y)}} dx,$$

и потому

$$T = \int dt = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h - y)}} dx. \quad (4)$$

Однако вспомним теперь, что на самом деле, линия $y = y(x)$ не задана, а ищется. Таким образом, речь идет о подборе функции $y(x)$, минимизирующей значение интеграла (4); при этом функция $y(x)$ должна дополнительно удовлетворять граничным условиям

$$y(0) = h, \quad y(b) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим, наконец, задачу о форме равновесия мыльной пленки, натянутой на два колечка, насаженных на общую ось (рис. 78), причем для простоты будем считать колечки равными. Если пренебречь весом пленки, то из теории поверхностного натяжения будет следовать, что пленка расположится так, чтобы иметь минимально возможную площадь. Исходя из наглядных соображений, примем гипотезу, что пленка примет форму поверхности вращения, уравнение сечения которой обозначим через $y = y(x)$. Тогда математически задача сведется к минимизации интеграла

$$S = 2\pi \int_{-b}^b y \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (6)$$

равного площади поверхности вращения, при граничных условиях

$$y(-b) = R, \quad y(b) = R. \quad (7)$$

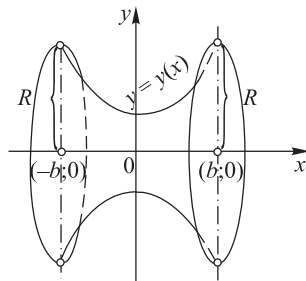


Рис. 78

2. Функционал. Нетрудно уяснить общие черты приведенных задач. Прежде всего, все они являются задачами на экстремум — максимум или минимум. Мы уже сталкивались с задачами на экстремум, которые решались средствами дифференциального исчисления. Если задача сводилась к рассмотрению экстремума функции $f(x)$ одного переменного, то искомым было значение x — это задача с одной степенью свободы. Если надо было найти экстремум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных, то искомым был набор значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ — это задача с n степенями свободы. В задачах же п. 1 искомой является линия, или, на аналитическом языке, функция, от которой требуется только, чтобы она удовлетворяла заданным граничным условиям. Но при произвольном выборе такой функции имеется бесконечное число степеней свободы (почему?); таким образом, можно сказать, что *вариационное исчисление изучает экстремумы в задачах с бесконечным числом степеней свободы*.

К сказанному возможен еще такой подход. Рассмотрим, например, интеграл (6); если в него вместо $y(x)$ подставить любую функцию $y(x)$, заданную при $-b \leq x \leq b$ и удовлетворяющую граничным условиям (7), то он примет определенное численное значение. Такой закон, по которому каждой функции из некоторого класса функций ставится в соответствие определенное число, называется *функционалом*. (Здесь для простоты считаем все величины безразмерными; в общем случае вместо «число» надо было бы говорить «скалярная величина».) Задача состоит в подборе функции $y(x)$, для которой интеграл (6) принимает минимальное значение. Таким образом, *вариационное исчисление изучает экстремумы функционалов*.

Приведем несколько конкретных примеров функционалов. Пусть

$$I = I\{y\} = \int_0^2 y^2 dx. \quad (8)$$

Этот функционал определен для всех функций $y(x)$, заданных при $0 \leq x \leq 2$ и принимающих там конечные значения (или даже бесконечные, если интеграл (8) получится сходящимся). Например,

$$\text{для функции } y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 2) \text{ получится } I = \int_0^2 x^4 dx = 6,4;$$

$$- \text{ " } - \quad y = \sin x \quad (0 \leq x \leq 2) \quad - \text{ " } - \quad I = 1 - \frac{\sin 4}{4} = 1,19;$$

$$- \text{ " } - \quad y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \quad (0 \leq x \leq 2) \quad - \text{ " } - \quad I = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ и т. д.}$$

Обратите внимание на то, что $I\{y\}$ — это отнюдь не то, что раньше понималось под сложной функцией, скажем, $F(y(x)) = [y(x)]^2$ и т. п.

Такая функция при подстановке каждой $y(x)$ дает новую функцию, значение которой при каждом $x = x_0$, т. е. $F(y(x_0))$, полностью определяется значением $y(x_0)$. В отличие от этого, функционал $I\{y\}$ при каждой конкретной функции $y(x)$ есть число, которое определяется, вообще говоря, не каким-то одним ее значением, а всей зависимостью $y(x)$. Можно сказать, что функционал — это функция, у которой значениями независимой переменной $y(x)$ служат обычные функции, а значениями зависимой переменной I служат числа (продумайте это!).

Формула

$$I\{y\} = \int_0^2 (xy + y') dx$$

определяет другой функционал, причем *линейный*, т. е.

$$J\{Cy\} = CJ\{y\} \quad (C = \text{const}), \quad J\{y_1 + y_2\} = J\{y_1\} + J\{y_2\}. \quad (9)$$

Формула

$$K\{y\} = \int_1^3 y^2 dx$$

определяет еще один функционал, отличный от (8), так как $K\{y\}$ задан на другом классе функций $y(x)$, именно, определенных при $1 \leq x \leq 3$. В то же время функционал

$$L\{z\} = \int_0^2 z^2 dx$$

совпадает с (8), т. е. можно написать $I\{y\} \equiv L\{y\}$, и т. д.

3. Функциональные пространства. При рассмотрении функционалов и их экстремумов бывает полезно уточнить *область определения функционала*, т. е. совокупность функций, для которых он рассматривается. Обычно эта совокупность представляет собой некоторое линейное пространство (общее понятие линейного пространства см., например, в ЛВМ, § VII.6) — или его часть, — состоящее из функций, над которыми линейные действия выполняются по простейшим правилам. Такие пространства называются *функциональными пространствами*, они чаще всего бесконечномерные.

Функциональные пространства обычно являются *нормированными*, т. е. в них имеется понятие *нормы*, характеризующей отклонение функции от тождественного нуля. Норма функции f обозначается через $\|f\|$, она представляет собой конечное действительное число и должна удовлетворять следующим требованиям (*аксиомы нормы*):

1. $\|f\| \geq 0$, причем $\|f\| = 0$ только для тождественно нулевой функции f .

$$2. \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \quad (\lambda = \text{const}).$$

$$3. \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

В ЛВМ, п. XVII.7 мы отмечали, что понятие уклонения функций может быть введено по-разному. Соответственно этому рассматривают различные функциональные пространства, состоящие из функций, заданных на каком-либо интервале $a \leq x \leq b$. (Отметим, что все функции, составляющие линейное функциональное пространство, должны быть заданы на одном и том же интервале, так как в противном случае, их нельзя было бы складывать друг с другом.) Эти пространства подробно изучаются в курсах функционального анализа; наиболее употребительны следующие пространства. (*Мы будем для простоты в этой главе считать все участвующие величины вещественными, а все области определения функций конечными.*)

1. Пространство $C[a, b]$ функций, заданных и непрерывных на конечном интервале $a \leq x \leq b$, с нормой

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Эта норма отвечает равномерному уклонению функций друг от друга.

2. Пространство $C_1[a, b]$ функций, заданных и непрерывных при $a \leq x \leq b$ вместе со своей производной, с нормой

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|. \quad (10)$$

(В качестве нормы в C_1 можно взять также не сумму, а наибольшее из слагаемых, стоящих в правой части; это различие оказывается несущественным.)

Аналогично вводится пространство $C_n[a, b]$ при $n = 2, 3, 4, \dots$

3. Пространство Гильберта $L_2[a, b]$ функций, заданных при $a \leq x \leq b$ и не обязательно непрерывных, для которых норма

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} \quad (11)$$

принимает конечное значение. При конечных a, b это означает, что функция $f(x)$ должна быть либо конечной, либо, во всяком случае, *квадратично суммируемой* (термин *суммируемая функция* всегда означает абсолютно интегрируемая). Эта норма отвечает среднеквадратичному уклонению двух функций друг от друга.

Можно проверить (мы предоставляем это желающим), что каждая из указанных здесь норм удовлетворяет необходимым аксиомам 1–3.

Если из текста не ясно, какая именно норма имеется в виду, то надо писать более подробно: $\|f\|_{C[a, b]}$ и т. п. Подчеркнем, что в норми-

рованном пространстве норма каждого элемента конечна. Проверьте, например, что

$$\|x^2\|_{L_2[0,1]} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \left\| \frac{1}{x} \right\|_{L_2[0,1]} = \infty;$$

стало быть, функция $y = x^2$ входит в пространство $L_2[0, 1]$ (является его элементом, обобщенным вектором), а функция $y = \frac{1}{x}$ не входит.

В нормированном пространстве вводится понятие расстояния ρ между любыми элементами f, g по формуле

$$\rho(f, g) = \|f - g\|;$$

для функциональных пространств такое расстояние есть как раз отклонение функций f и g друг от друга.

В курсах функционального анализа доказывается, что указанные здесь пространства обладают важным свойством *полноты*; это означает, что любая последовательность $f_1, f_2, f_3 \dots$ элементов пространства, для которой $\|f_n - f_m\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, имеет в этом пространстве предел. Грубо говоря, полнота пространства $\xrightarrow{m \rightarrow \infty}$ означает, что никакая последовательность его элементов не может в смысле выбранной нормы сходиться к элементу, не принадлежащему пространству. (При этом сходимости $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ означает, естественно, что $\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.) Например, если норму (11) ввести в совокупность всех *непрерывных* функций на конечном интервале $a \leq x \leq b$, то хоть все аксиомы линейного пространства и нормы выполнены, но такое пространство не будет полным, так как предел в смысле среднего квадратичного отклонения последовательности непрерывных функций может быть разрывной функцией. И лишь после *пополнения* этой совокупности по выбранной норме, т. е. после присоединения всех среднеквадратичных пределов последовательностей непрерывных функций мы получаем все пространство $L_2[a, b]$, которое уже является полным.

Линейное нормированное полное пространство коротко называется *банховым пространством* по имени одного из крупнейших польских математиков С. Банаха (1892–1945), который впервые и притом глубоко исследовал свойства таких пространств.

Подчеркнем, что всякая функция из $C_1[a, b]$ принадлежит $C[a, b]$, а всякая функция из $C[a, b]$ принадлежит $L_2[a, b]$. Тем не менее $C_1[a, b]$ нельзя считать подпространством $C[a, b]$, так как эти пространства рассматриваются неразрывно от своих норм, а нормы в C и в C_1 различные.

Отчетливое представление о функциональных пространствах полезно при рассмотрении экстремумов функционалов. В самом деле, пусть функционал $I\{y\}$ имеет при $y = \bar{y}(x)$ локальный максимум. Это значит, что для всех функций $y(x)$, не тождественно равных $\bar{y}(x)$ и *достаточно близких* к $\bar{y}(x)$, будет $I\{y\} < I\{\bar{y}\}$. Но что означает выражение

«достаточно близкие функции», например, можно ли считать на рис. 79 функцию $y(x)$ близкой к $\bar{y}(x)$? Так как существуют различные виды уклонений функций, то ответ на этот вопрос зависит от того, какой вид уклонения, т.е. какое функциональное пространство, принять за основу. Так, на рис. 79 $y(x)$ близка к $\bar{y}(x)$, если их рассматривать в $C[a, b]$, но далека в $C_1[a, b]$ (продумайте это!).

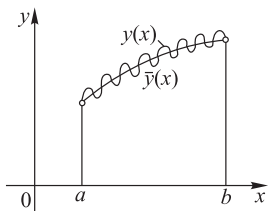


Рис. 79

Соответственно этому рассматриваются различные типы экстремумов функционалов. В дальнейшем мы будем исследовать, как правило, функционалы, которые естественно рассматривать либо в C_1 либо в C . Тогда, если $I\{y\} < I\{\bar{y}\}$ для всех y , близких к $\bar{y}$ в смысле C , то говорят, что на функции $\bar{y}(x)$ достигается *сильный максимум* функционала $I\{y\}$; если же $I\{y\} < I\{\bar{y}\}$ для всех y , близких к $\bar{y}$ в смысле C_1 , то говорят о *слабом максимуме*. При этом сильный экстремум всегда будет также и слабым (почему?), но обратное не обязательно.

Это видно из следующего простого примера. Пусть точка может двигаться по плоскости со скоростью, зависящей от направления движения по закону, изображенному на рис. 80, где α — угол, который составляет вектор скорости $\mathbf{v}$ точки с направлением фиксированной оси (l). (Подобная картина может возникнуть при движении парусно-весельной лодки, если выбрать ось (l) в направлении, противоположном ветру.) Пусть требуется пройти из точки A в точку B за минимальное время, причем отрезок AB параллелен оси (l) (рис. 81). Каждой линии (S), соединяющей A с B , т.е. каждой возможной трассе отвечает определенное время T ее прохождения, т.е. получается задача на минимум функционала $T\{S\}$. Нетрудно видеть, что прямолинейная трасса (AB) осуществляет слабый минимум h/v_0 времени, так как для близких по направлению путей вида $(AB)_1$ будет длина больше, а скорость меньше (см. рис. 80 и 81). В то же время, если рост угло-скоростной характеристики

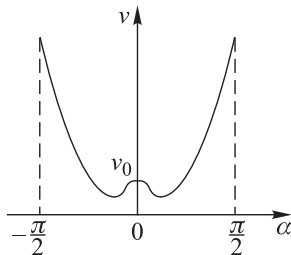


Рис. 80

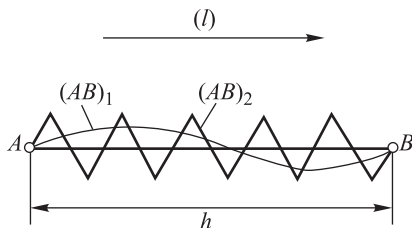


Рис. 81

при α , близком к $\pm\pi/2$, достаточно крутой, то пилообразная трасса вида $(AB)_2$ с весьма малыми участками поворота может дать время, меньшее h/v_0 . (Продумайте это!) При этом такая трасса может пройти в любой близости от (AB) , т.е. слабый минимум здесь не будет сильным. (Эта задача еще более

эффектна, если скорость, завися от α , уменьшается при удалении от отрезка AB , например, если вдоль этого отрезка течение наиболее сильно. Тогда, чем мельче зубчики пилообразной трассы, тем меньше время ее прохождения. Конечно, реально картина получится несколько иной, так как направление движения нельзя изменить как угодно быстро, что в данной задаче не учитывалось.)

В заключение отметим, что при применении описанных и других функциональных пространств надо проявлять определенную гибкость, не цепляясь догматически за раз навсегда выбранное пространство. Например, если задача была первоначально поставлена в C_1 но решения там не оказалось, надо подумать, нет ли решения в C или в еще более широком пространстве, а если, такое решение найдется, то каков его физический смысл и т.д. В процессе этого исследования могут обнаружиться такие стороны изучаемой задачи, которые первоначально было бы трудно предвидеть.

4. Вариация функционала. Вариация — одно из центральных понятий при изучении нелинейных функционалов, оно играет ту же роль, что понятие дифференциала при изучении нелинейных функций. Дифференциал нелинейной функции — это главная линейная часть ее приращения, замена приращения на дифференциал означает линеаризацию функции при малом изменении аргумента; *вариация нелинейного функционала — это главная линейная часть его приращения*, замена приращения на вариацию означает линеаризацию функционала при переходе от одной функции (от которой зависит значение функционала) к другой, близкий функции.

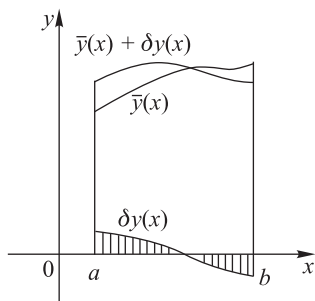


Рис. 82

Рассмотрим, например, функционал (8). Пусть функция $y(x)$, от которой зависит его значение, сначала совпадала с некоторой $\bar{y}(x)$, а затем мы перешли к некоторой другой, близкой функции $\bar{y}(x) + \delta y(x)$. Здесь $\delta y(x)$ (символ δy надо понимать как единый) — это *вариация функции $y(x)$* , т.е. произвольная функция, мало уклоняющаяся от нуля и добавляемая к исходной функции $\bar{y}(x)$ для получения новой, *проварианной* функции $\bar{y}(x) + \delta y(x)$ (рис. 82). (При этом малое уклонение от нуля понимается в смысле той нормы, которая, согласно п.3, принята за основу; например, на рис. 82 малость понимается в смысле C_1)

При переходе от $\bar{y}(x)$ к $\bar{y}(x) + \delta y(x)$ функционал (8) получит приращение

$$\begin{aligned} \Delta I &= I\{\bar{y} + \delta y\} - I\{\bar{y}\} = \\ &= \int_0^2 [\bar{y} + \delta y]^2 dx - \int_0^2 \bar{y}^2 dx = 2 \int_0^2 \bar{y}(x) \cdot \delta y(x) dx + \int_0^2 [\delta y(x)]^2 dx. \quad (12) \end{aligned}$$

Пусть теперь функция $\bar{y}(x)$ зафиксирована, а функцию $\delta y(x)$ можно выбирать произвольно. Мы видим, что тогда ΔI состоит из двух частей, каждая из которых представляет собой функционал относительно $\delta y = y - \bar{y}$. Первая часть

$$2 \int_0^2 \bar{y}(x) \delta y(x) dx \quad (13)$$

обладает свойством линейности, т. е. это линейный функционал (п. 2), тогда как вторая часть

$$\int_0^2 [\delta y(x)]^2 dx$$

при малых δy имеет высший порядок малости. Таким образом, (13) представляет собой главную (т. е. с точностью до члена высшего порядка малости) линейную часть приращения (12) функционала (8) при переходе от $\bar{y}(x)$ к $\bar{y}(x) + \delta y(x)$. Выражение (13) и называется (*первой*) *вариацией δI функционала (8)*; можно написать

$$\delta I = \delta \int_0^2 y^2 dx = 2 \int_0^2 y(x) \cdot \delta y(x) dx.$$

(В силу произвольности функции $\bar{y}(x)$ мы заменили ее обозначение на $y(x)$.)

Разобранный пример является типичным. Если задан произвольный функционал $I\{y\}$ и мы переходим от функции $y(x)$ к функции $y(x) + \delta y(x)$, то, как правило, приращение функционала

$$\Delta I = I\{y + \delta y\} - I\{y\}$$

можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\Delta I = I_1\{y; \delta y\} + R_1\{y; \delta y\}, \quad (14)$$

первое из которых при фиксированной функции $y(x)$ представляет собой линейный функционал относительно $\delta y(x)$, а второе имеет относительно $\delta y(x)$ высший порядок малости. Тогда первое слагаемое в правой части (14) и называется *вариацией функционала I* , т. е.

$$\delta I = I_1\{y; \delta y\}.$$

В случаях, когда слагаемым высшего порядка малости можно пренебречь, можно сказать просто, что вариация функционала — это его бесконечно малое изменение, т. е. изменение, полученное за счет

бесконечно малой вариации функции, от которой зависит этот функционал. Замена приращения функционала на его вариацию означает *линеаризацию* этого функционала. Все эти рассуждения совершенно аналогичны рассуждениям, проводимым при введении понятия дифференциала функции (ЛВМ, пп. IV.7,8).

В конкретных примерах вариация функционалов вычисляется с помощью формулы Тейлора (см., например, ЛВМ, пп. IV.15 и XII.6). Пусть, например, рассматривается функционал вида

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y) dx, \quad (15)$$

где в процессе интегрирования y считается зависящим от x , $y = y(x)$. Тогда

$$\Delta I = \int_a^b [F(x, y + \delta y) dx - F(x, y)] dx. \quad (16)$$

Но так как

$F(x, y + \delta y) = F(x, y) + F'_y(x, y)\delta y +$ члены высшего порядка малости,

то, подставляя в (16) и отбрасывая эти члены, получим

$$\delta I = \delta \int_a^b F(x, y) dx = \int_a^b F'_y(x, y)\delta y dx. \quad (17)$$

Для функционала

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (18)$$

аналогично получаем (проверьте!)

$$\delta I = \int_a^b [F'_y(x, y, y')\delta y + F'_{y'}(x, y, y')\delta y'] dx, \quad (19)$$

где $\delta y'$ можно понимать и как $\delta(y')$ и как $(\delta y)'$, так как производная от разности двух функций равна разности их производных.

5. Уточнение. Чтобы уточнить смысл разложения (14), нужно указать функциональное пространство (п. 3), в котором — или на части которого — рассматривается выбранный функционал. Например, функционал (15) естественно рассматривать в $C[a, b]$, функционал (18) — в $C_1[a, b]$ и т. д.; в некоторых случаях это пространство подсказывается физическими соображениями, о чем в дальнейшем будет сказано, в других — удобством, законченностью результатов, традициями и т. п. Пусть пространство, а потому и вид нормы $\|f\|$ выбраны. Тогда второе слагаемое в (14) при выбранной функции $y(x)$ должно удовлетворять оценке

$$|R_1\{y; \delta y\}| = o(\|\delta y\|) \quad (\text{при } \|\delta y\| \rightarrow 0); \quad (20)$$

это и означает, что оно имеет высший порядок малости относительно δy . При этом фактически обычно удовлетворяется более сильная оценка

$$|R_1\{y; \delta y\}| = O(\|\delta y\|^2) \quad (\text{при } \|\delta y\| \rightarrow 0),$$

т. е. R_1 относительно δy имеет не менее чем второй порядок малости.

Первое, линейное относительно δy слагаемое в (14) должно при выбранной $y(x)$ удовлетворять оценке

$$|I_1\{y; \delta y\}| \leq K\|\delta y\|. \quad (21)$$

При этом все равно, требовать ли ее выполнения для всех вообще δy или для всех δy с достаточно малой нормой, так как в силу первого свойства линейности (9) при умножении δy на константу C обе части умножатся на $|C|$.

Линейный функционал, удовлетворяющий оценке вида (21), называется *ограниченным*, а наименьшее возможное значение постоянной K , при которой выполняется оценка (21), называется *нормой* этого линейного функционала. Эта норма представляет собой положительное число, лишь для нулевого функционала (все значения которого равны нулю) она равна нулю. Например, можно было бы проверить, что если первое слагаемое в правой части (12) при фиксированной $\overline{y}(x)$ рассматривать в зависимости от $\delta y \in C[0, 2]$, то оно будет представлять собой ограниченный линейный функционал с нормой

$$2 \int_0^2 |\overline{y}(x)| dx$$

(попробуйте это доказать!).

Приведем еще пример. Пусть линейный относительно $y(x)$ функционал

$$I_1\{y\} = 3y'(0) + \int_0^1 xy(x) dx \quad (22)$$

рассматривается в пространстве $C_1[0, 1]$. Тогда этот функционал ограничен, так как

$$|I_1\{y\}| \leq 3 \max_{0 \leq x \leq 1} |y'(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |y(x)| \int_0^1 x dx \leq 3\|y\|_{C_1[0,1]}$$

(см. (10)). Но если то же выражение (22) рассматривать в пространстве $C[0, 1]$, то оно будет представлять собой линейный *неограниченный* функционал. В самом деле, для последовательности функций $y_n(x) = \frac{1}{2} \sin nx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) будет

$$I_1\{y_n\} = 3 + \int_0^1 \frac{x}{n} \sin nx \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3, \quad \|y_n\|_{C[0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

а такого для ограниченного функционала не может быть (почему?). Более того, для функции $y = \sqrt{x}$, принадлежащей $C[0, 1]$ (но не принадлежащей $C_1[0, 1]$!), функционал (22) не имеет конечного значения.

Разобранный пример является типичным. В курсах функционального анализа доказывается, что *если линейный функционал определен на всем банаховом пространстве (R) (т.е. в каждой точке (R) принимает определенное конечное значение), то он ограничен в (R)* .

Скажем еще о возможности линеаризации функционала. Хорошо известно, что наряду с функциями $f(x)$, дифференцируемыми при всех x , имеются — и применяются — также функции, даже непрерывные, но теряющие дифференцируемость при отдельных значениях x ; типичными примерами служат функции $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = |x|$, непрерывные, но не дифференцируемые, т.е. не допускающие линеаризации, при $x = 0$ (вспомните их графики!). Аналогичным образом и функционал $I\{y\}$, даже непрерывный (т.е. мало меняющий свое значение при малой относительно выбранной нормы вариации функции $y(x)$), может в некоторых точках функционального пространства, т.е. для некоторых функций $y(x)$, быть нелинеаризуемым.

Рассмотрим например, функционал

$$I\{y\} = \int_0^1 \sqrt[3]{y} \, dx \quad (23)$$

в пространстве $C[0, 1]$. Он непрерывен, однако вблизи «точки», т.е. функции $y(x) \equiv 0$ ($0 \leq x \leq 1$) не допускает линеаризации (продумайте это!). Функционал (23) нелинеаризуем также в окрестности любой функции, имеющей целый интервал нулей, но не равной нулю тождественно. Можно было бы проверить, что линеаризация функционала (23) теряется в окрестности любой функции $y(x)$, имеющей по крайней мере один нуль порядка $\geq 3/2$, тогда как нули порядка $< 3/2$ для линеаризации опасности не представляют.

Для более общего функционала (15) в $C[a, b]$ с непрерывной функцией $F(x, y)$, как видно из формулы (17), для линеаризации представляют опасность точки и линии (конечно, если они имеются), в которых $F'_y(x, y)$ терпит разрыв. Если $y = \varphi(x)$ — такая особая линия, то линеаризация невозможна для любой функции $y(x)$, совпадающей с $\varphi(x)$ во всех точках какого-либо интервала. Если $F'_y(x, y)$ при $y - \varphi(x) \rightarrow 0$ обращается в бесконечность порядка p , то линеаризация невозможна для любой функции $y(x)$, у которой $y(x) - \varphi(x)$ имеет по крайней мере один нуль порядка $\geq 1/p$.

В заключение отметим еще один возможный подход к понятию вариации. Допустим, что в функционал, например, вида (15) мы подставляем функцию $y(x)$ какого-либо специального вида $y = \varphi(x; \lambda)$, содержащую скалярный параметр λ , который мы можем произвольно менять, в результате чего зависи-

мость $y(x)$ будет меняться. Тогда, и значение функционала I станет функцией λ , $I = I(\lambda)$. Производя линеаризацию, получим

$$\delta y = \partial_\lambda \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} d\lambda, \quad \delta I = d_\lambda I = \frac{dI}{d\lambda} d\lambda. \quad (24)$$

Отсюда легко получить формулу (17) (как?). При таком подходе надо иметь в виду, что если мы хотим, чтобы вариации δy были произвольными, то и одно-параметрическое семейство $\varphi(x; \lambda)$ надо считать произвольным, а не каким-то одним, фиксированным. Аналогичный подход возможен и в случае, когда зависимость $y(x)$ включает более одного параметра.

6. Необходимое условие экстремума. Это условие совершенно аналогично необходимому условию экстремума функции одной или нескольких переменных. Допустим, что некоторая функция $\bar{y}(x)$ реализует локальный максимум или минимум функционала $I\{y\}$ в выбранном функциональном пространстве (R) , причем этот функционал имеет вариацию $\delta I\{\bar{y}; \delta y\}$, т.е. допускает вблизи $y = \bar{y}(x)$ линеаризацию. Кроме того, будем считать, что рассматривается *внутренний* (не *граничный*) экстремум, т.е. функционал $I\{y\}$ определен для *всех* y , достаточно близких к $\bar{y}$ в смысле выбранной нормы; это будет предполагаться всюду далее, если не оговорено противоположное.

Тогда для любой $\delta y \in (R)$ должно быть

$$\delta I\{\bar{y}; \delta y\} = 0. \quad (25)$$

В самом деле, пусть для определенности при $y = \bar{y}(x)$ функционал I имеет минимум и $\delta I\{\bar{y}; \delta y\} > 0$ для некоторой δy . Подставим в (14) $k\delta y$ вместо δy , где k — скаляр; получим

$$\begin{aligned} \Delta I = I\{\bar{y} + k\delta y\} - I\{\bar{y}\} &= I_1\{\bar{y}; k\delta y\} + R_1\{\bar{y}; k\delta y\} = \\ &= k \left(I_1\{\bar{y}; \delta y\} + \frac{1}{k} R_1\{\bar{y}; k\delta y\} \right). \end{aligned}$$

Однако при малых $|k|$ левая часть должна быть положительной, а правая имеет знак k (докажите это, учитывая оценку члена R_1), т.е. может быть как больше нуля, так и меньше нуля. Полученное противоречие и доказывает необходимость условия (25).

Условие (25) вытекает также из второй формулы (24). В самом деле, если $\bar{y}(x) = \varphi(x; \bar{\lambda})$, то функция $I(\lambda)$ имеет при $\lambda = \bar{\lambda}$ экстремум, откуда $\left. \frac{dI}{d\lambda} \right|_{\lambda=\bar{\lambda}} = 0$ и мы получаем (25).

Как видно из п. I, в конкретных задачах часто рассматривается экстремум функционала не среди всех функций, составляющих определенное функциональное пространство, а только среди функций, удовлетворяющих некоторым добавочным линейным неоднородным условиям, например

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (\text{заданы}). \quad (26)$$

В этом случае условие (25) должно выполняться для любой вариации δy , удовлетворяющей соответствующим однородным условиям, т. е. для условий (26)

$$\delta y(a) = 0, \quad \delta y(b) = 0. \quad (27)$$

В самом деле, для таких δy функция $y + k\delta y$ также удовлетворяет условиям (26) (почему?), а потому можно повторить то же доказательство, что было приведено выше для (25).

Линейные неоднородные условия определяют в пространстве (R) гиперплоскость (ср. ЛВМ, п. VII.19, но теперь речь идет о гиперплоскостях в бесконечномерном функциональном пространстве). Если ставится задача об экстремуме функционала $I\{y\}$ на некотором криволинейном многообразии (S) пространства (R) , то, проводя линеаризацию в точке экстремума $\bar{y} \in (S)$, получаем, что условие (25) должно выполняться для любой δy , принадлежащей касательной гиперплоскости к (S) , проведенной в $\bar{y}$.

7. Уравнение Эйлера. Во многих задачах удается, пользуясь необходимым условием экстремума, найти искомое решение $\bar{y}(x)$. Однако форма (25) этого условия не совсем удобна, так как она включает в себя произвольную функцию δy . Поэтому необходимое условие преобразуют к другой, равносильной форме, содержащей только искомое решение. Такое преобразование различно для разных классов функционалов, и *дальнейшее содержание §1 в основном посвящено рассмотрению этих классов*; читатель может судить о них по заголовкам пунктов и знакомиться с этими пунктами по мере потребности. Необходимое условие, получающееся для решения, обычно состоит из двух частей: из *уравнения Эйлера* (обычно дифференциального), которому решение должно удовлетворять внутри области своего определения, и из добавочных граничных условий, которые могут быть частично заданы заранее, а частично — выведены из условия (25).

Начнем с простых частных случаев.

Необходимое условие (25) экстремума для функционала

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y) dx \quad (28)$$

в силу формулы (17) имеет вид

$$\int_a^b F'_y(x, \bar{y}(x)) \delta y dx = 0. \quad (29)$$

Если, для определенности, задача рассматривается для всех непрерывных $y(x)$, т. е. в $C[a, b]$, то условие (29) должно выполняться для любой непрерывной функции $\delta y(x)$. Но отсюда легко следует, что

$$F'_y(x, \bar{y}(x)) \equiv 0. \quad (30)$$

В самом деле, обозначив на минуту левую часть через $\varphi(x)$ и положив просто $\delta y = \varphi(x)$, получим в силу (29)

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx = 0, \quad (31)$$

откуда и следует, что $\varphi(x) \equiv 0$ (почему?), т. е. (30). Таким образом, уравнение Эйлера для функционала (28) имеет вид

$$F'_y(x, y) = 0. \quad (32)$$

Это условие можно получить также, заменив приближенно интеграл (28) на интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^n F(\xi_k, \bar{y}_k) \Delta x_k \quad (\bar{y}_k = \bar{y}(\xi_k)). \quad (33)$$

Так как функция $\bar{y}(x)$ произвольна, то мы можем менять значение $\bar{y}_k$, зафиксировав все остальные. Если при этом сумма (33) имеет экстремальное значение, то производная от нее по $\bar{y}_k$ должна равняться нулю, и мы приходим к (32).

Часто встречается функционал

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (18)$$

значения которого мы будем сравнивать для всех непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$ (т. е. для $y \in C_1[a, b]$), удовлетворяющих заданным граничным условиям

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (26)$$

На основании формул (25) и (19) получаем, что должно быть

$$\int_a^b [F'_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \delta y + F'_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \delta y'] dx = 0 \quad (34)$$

для любой функции $\delta y \in C_1[a, b]$, удовлетворяющей условиям (27).

Чтобы выяснить отсюда, какому уравнению должна удовлетворять функция $\bar{y}(x)$, проинтегрируем второй член (34) по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^b F'_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \delta y' dx &= \\ &= [F'_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \delta y]_{x=a}^b - \int_a^b [F'_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))]'\delta y dx = \\ &= - \int_a^b [F'_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))]'\delta y dx, \quad (35) \end{aligned}$$

так как в силу условий (27) проинтегрированный член равен нулю. Подставляя (35) в (34), получаем

$$\int_a^b \{F'_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - [F'_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))]\}' \delta y dx = 0.$$

Но отсюда следует, что выражение в фигурных скобках тождественно равно нулю при $a \leq x \leq b$, т. е. в сокращенной записи

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0, \quad (36)$$

где под $\frac{d}{dx}$ понимается полная производная, составленная с учетом зависимости y и y' от x . Для доказательства этого обозначим на минуту выражение в фигурных скобках через $\varphi(x)$. Если $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, то можно просто положить $\delta y = \varphi(x)$ и рассуждать, как при выводе (30). В общем случае можно положить, что $\delta y = \varphi(x)$ на интервале $a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ весьма мало, а к точкам $x = a$ и $x = b$ значение $\delta y(x)$ спадает до нуля. Устремляя ε к нулю, мы опять приходим к (31), а оттуда к (36).

Таким образом, для функционала (18) при условиях (26) уравнением Эйлера служит (36). Если раскрыть выражение полной производной по формуле производной сложной функции (и писать y вместо $\bar{y}$), мы получим

$$F'_y(x, y, y') - F''_{xy'}(x, y, y') - F''_{yy'}(x, y, y')y' - F'''_{y'y'}(x, y, y')y'' = 0 \quad (37)$$

(проверьте!). Мы видим, что это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. (Исключением является случай, когда $F'''_{y'y'} \equiv 0$, т. е. когда функция F линейно зависит от y' . Мы не будем здесь рассматривать этот вырожденный случай.) Всякое решение

уравнения Эйлера (37) называется *экстремалью* функционала (18), оно придает этому функционалу *стационарное* значение в следующем смысле: если $y(x)$ — любое такое решение, взятое на некотором интервале $a_1 \leq x \leq b_1$ ($a \leq a_1 < b \leq b_1$; в частности, может быть $a_1 = a, b_1 = b$) и если произвольно проварьировать $y(x)$ на этом интервале, не меняя значения $y(a_1)$ и $y(b_1)$, то

$$\delta \int_{a_1}^{b_1} F(x, y, y') dx = 0.$$

Это доказывается с помощью тех же преобразований, которые были проделаны в предыдущем абзаце (проверьте!). Экстремальями называются также графики решений, т.е. интегральные линии уравнения (37).

Совокупность экстремалей, как общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, образует двухпараметрическое семейство функций. Двух граничных условий (26) в принципе как раз достаточно для отыскания требуемых частных решений. Правда, уравнение Эйлера редко интегрируется в квадратурах, и потому приходится пользоваться численным интегрированием краевых задач, по поводу которого мы отсылаем читателя к соответствующим руководствам.

Отметим, что из возможности двух равносильных определений экстремалей — как интегральных линий уравнения Эйлера и как линий, придающих функционалу стационарные значения, — вытекает, в частности, следующее *свойство инвариантности уравнения Эйлера*. Допустим, что мы в функционале (18) перешли от переменных x, y к новым переменным $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ и составили уравнение Эйлера для нового функционала. Так как при этом отображении линии стационарности одного функционала переходят в линии стационарности другого функционала, то и одно уравнение Эйлера после указанной замены переходит в другое.

8. Примеры. Имеется важный частный случай, когда уравнение Эйлера (36) допускает первый интеграл, т.е. переход к дифференциальному уравнению первого порядка: это случай, когда функция F в функционале (18) не зависит от x . В самом деле, тогда в уравнении (37) отсутствует второй член, и после умножения обеих частей на y' это уравнение можно записать так (проверьте!):

$$[F(y, y') - y' F'_{y'}(y, y')]'_x = 0.$$

Интегрируя, получаем упомянутый первый интеграл

$$F(y, y') - y' F'_{y'}(y, y') = C_1, \quad (38)$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Случай, когда $F = F(x, y')$, мы предоставляем разобрать читателю.

Рассмотрим второй пример п. 1, в котором требовалось минимизировать функционал (4) при граничных условиях (5). Это как раз пример функционала вида (18) с $F = F(y, y')$. Применение первого интеграла (38) дает (проверьте!)

$$\frac{1}{\sqrt{h-y}\sqrt{1+y'^2}} = C_1. \quad (39)$$

Полученное уравнение можно преобразовать к форме $y' = f(y)$, после чего совершить разделение переменных; однако быстрее совершить искусственную подстановку

$$h - y = \frac{1 - \cos t}{2C_1^2} \quad \left(dy = -\frac{\sin t}{2C_1^2} dt \right). \quad (40)$$

Вычисления, которые мы предоставляем читателю, дают в силу (39)

$$dx = \pm \frac{1}{2C_1^2} (1 - \cos t) dt, \quad x = \frac{1}{2C_1^2} (t - \sin t) + C_2 \quad (41)$$

($\pm$ можно не писать, так как t можно заменить на $-t$). Уравнения (40) и (41) совместно определяют циклоиду (см., например, ЛВМ

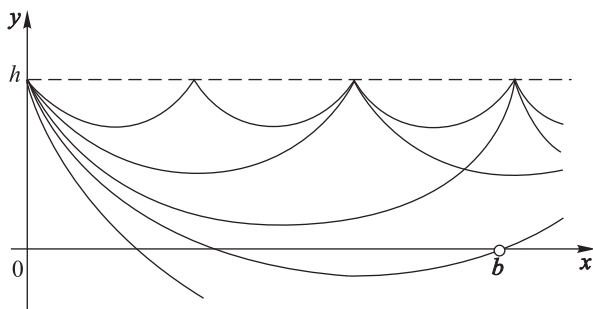


Рис. 83

(II.12)), полученную при качении круга радиуса $R = \frac{1}{2C_1^2}$ по прямой $y = h$. Так как линия должна пройти через точку $(0; h)$, то там должна быть точка возврата циклоиды, т.е. можно принять $C_2 = 0$. Семейство таких циклоид показано на рис.83. Значение R , которое остается пока произвольным, выбирается так, чтобы удовлетворить второму граничному условию, т.е. так, чтобы циклоида прошла через точку $(b; 0)$. Подставляя эти координаты в (40) и (41) и исключая t , легко составить трансцендентное уравнение для R . Имея изображение

одной из арок циклоиды, с каким-либо R , легко найти требуемое R из соображений подобия (продумайте это!). Интересен случай, когда $b > \pi h$: тогда искомая линия частично проходит ниже точки финиша, чего можно было заранее и не предвидеть. Но дело в том, что если трасса достаточно длинна, то выгодно сначала заглубить ее, чтобы точка набрала достаточную скорость, быстро прошла трассу, а у финиша уже поднялась на требуемую высоту.

Аналогичное применение интеграла (38) к третьему примеру п. 1 приводит к уравнению

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

(проверьте!). Интегрирование этого уравнения, которое мы предоставляем читателю, дает

$$y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}, \quad (42)$$

причем из соображений симметрии следует, что $C_2 = 0$. Эта линия получается из графика $y = \operatorname{ch} x$ подобным преобразованием с коэффициентом подобия C_1 , который находится из граничного условия; она называется *цепной линией*, а соответствующая поверхность вращения — *катеноидом*.

9. Функционалы с производными высшего порядка. Рассмотрим функционал вида

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx \quad (43)$$

с граничными условиями

$$y(a) = y_a, \quad y'(a) = y'_a, \quad y(b) = y_b, \quad y'(b) = y'_b \quad (\text{заданы}). \quad (44)$$

Вариация функционала (43) имеет вид

$$\delta I = \int_a^b (F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y' + F'_{y''} \delta y'') dx. \quad (45)$$

Применяя необходимое условие экстремума (25) и рассуждая, как в п. 7 (причем последнее слагаемое в (45) придется интегрировать по частям два раза), приходим к соответствующему уравнению Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка; четырех граничных условий (44) в принципе как раз достаточно, чтобы получить искомое частное решение $y(x)$, реализующее экстремум.

Функционалы с производными порядка до $k > 2$ включительно рассматриваются аналогично; уравнение Эйлера для такого функционала имеет порядок $2k$.

10. Функционалы от нескольких функций. Функционал может зависеть не от одной, а от нескольких функций одного переменного. Так будет, в частности, в таких задачах на экстремум, где искомой является не плоская, а пространственная линия (почему?); впрочем, такие задачи возникают и независимо от их геометрического истолкования.

Рассмотрим функционал

$$I\{y_1, y_2\} = \int_a^b F(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2) dx, \quad (46)$$

зависящий от двух функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, заданных при $a \leq x \leq b$ причем никакой связи между этими функциями не предполагается — одну из них можно зафиксировать, а другую произвольно варьировать. Фиксируя $y_2(x)$ и варьируя $y_1(x)$, мы получаем *частную вариацию* $\delta_{y_1} I$, аналогичную частному дифференциалу)

$$\delta_{y_1} I\{y_1, y_2; \delta y_1\} = \int_a^b (F'_{y_1} \delta y_1 + F'_{y'_1} \delta y'_1) dx. \quad (47)$$

Аналогично выражается частная вариация по y_2

$$\delta_{y_2} I\{y_1, y_2; \delta y_2\} = \int_a^b (F'_{y_2} \delta y_2 + F'_{y'_2} \delta y'_2) dx. \quad (48)$$

Если ставится задача об экстремуме функционала (46) при простейших граничных условиях

$$y_1(a) = y_{1a}, \quad y_1(b) = y_{1b}, \quad y_2(a) = y_{2a}, \quad y_2(b) = y_{2b} \quad (\text{заданы}), \quad (49)$$

то для функций $\overline{y}_1(x)$, $\overline{y}_2(x)$, реализующих экстремум, обе частные вариации необходимо должны равняться нулю. Рассуждая, как в п. 7, мы приходим к *системе* уравнений Эйлера

$$F'_{y_1} - \frac{d}{dx} F'_{y'_1} = 0, \quad F'_{y_2} - \frac{d}{dx} F'_{y'_2} = 0. \quad (50)$$

Общее решение этой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка содержит четыре произвольных постоянных, которые определяются из четырех граничных условий.

Аналогично рассматриваются функционалы, зависящие от большего числа функций, а также функционалы, зависящие от нескольких функций и выражающиеся через производные более высокого порядка.

Если ввести векторную функцию скалярного аргумента

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

то функционал (46) можно считать зависящим от этой функции

$$I\{\mathbf{y}\} = \int_a^b F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx. \quad (51)$$

Естественно говорить о полной вариации этого функционала, равной сумме частных вариаций (47) и (48), т. е., после простых преобразований,

$$\delta I\{\mathbf{y}; \delta \mathbf{y}\} = \int_a^b (F'_{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} + F'_{\mathbf{y}'} \cdot \delta \mathbf{y}') dx,$$

где под $F'_{\mathbf{y}}$ понимается вектор типа градиента (п. I.1.2)

$$F'_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} F'_{y_1} \\ F'_{y_2} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

а точка означает скалярное произведение. Граничные условия (49) и систему уравнений Эйлера (50) можно также записать в векторном виде

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a, \quad \mathbf{y}(b) = \mathbf{y}_b, \quad F'_{\mathbf{y}} - \frac{d}{dx} F'_{\mathbf{y}'} = \mathbf{0}.$$

Как видим, получаются в точности те же формулы, что в скалярном случае. Такая векторная запись удобна тем, что она одинакова при любом числе функций, от которых зависит функционал. Кроме того, в ряде задач именно векторная функция является первичной, тогда как скалярные функции — ее проекции — появляются лишь после введения в пространстве $\mathbf{y}$ декартового базиса. В таких задачах векторная запись особенно предпочтительна своей инвариантностью, т. е. независимостью от выбора базиса.

С функционалами от нескольких функций непосредственно связаны функционалы, заданные в параметрической форме. Пусть первоначально был задан функционал вида (18) или более общего вида

$$I((L)) = \int_{(L)} F(x, y, y') dx, \quad (53)$$

где (L) — произвольная ориентированная линия. Такую линию часто бывает удобно записать в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, что даст

$$I((L)) = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \dot{x} dt = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt, \quad (54)$$

т. е. мы получаем функционал вида (46). Характерные свойства полученной функции F_1 таковы: она не включает новую независимую переменную t и является однородной функцией измерения 1 относительно $\dot{x}, \dot{y}$ ¹⁾ (Легко проверить, что и обратно, если эти свойства выполнены, то из (54) можно получить (53).) Система уравнений Эйлера оказывается зависимой (проверьте это, продифференцировав тождество Эйлера $F'_{1\dot{x}}\dot{x} + F'_{1\dot{y}}\dot{y} = F$). Поэтому в общем решении остается произвольная функция, отвечающая различным способам параметризации линии (L). Задавшись таким способом, мы эту функцию исключаем: например, добавочное равенство $\dot{x} = 1$ означает, что за параметр взята координата x ; равенство $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ — что за параметр взята длина дуги, и т. д.

Случай функционалов, зависящих от линий в пространстве высшей размерности, рассматривается аналогично.

11. Функционалы от функций нескольких переменных. Функционал может зависеть также от функции нескольких переменных; будем для определенности рассматривать функции $z(x, y)$ двух независимых переменных, заданных в некоторой области (G) плоскости x, y , т. е. при $(x; y) \in (G)$. Тогда функционал, аналогичный (18), имеет вид

$$I\{z\} = \int_{(G)} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dG, \quad (55)$$

а его вариация равна

$$\delta I\{z; \delta z\} = \int_{(G)} \left(F'_z \delta z + F'_p \delta \frac{\partial z}{\partial x} + F'_q \delta \frac{\partial z}{\partial y} \right) dG, \quad (56)$$

где p и q — стандартные сокращенные обозначения для $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, а $\delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(\delta z)}{\partial x}$. Граничное условие, аналогичное (26), состоит в том, что значение функции $z(x, y)$ задано на контуре (Γ) области (G), т. е.

$$z \Big|_{M \in (\Gamma)} = \varphi(M) \quad (\text{задано; } M = (x; y)). \quad (57)$$

Геометрически это означает (рис. 84), что сравниваются между собой всевозможные поверхности, имеющие уравнение вида $z = z(x, y)$ и «натянутые» на один и тот же контур (показанный на рис. 84 жирно) с уравнением (57).

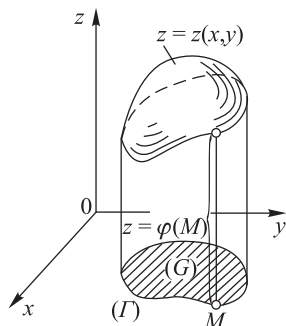


Рис. 84

¹⁾ Последнее означает, что $F_1(x, y, pz, pv) \equiv pF_1(x, y, z, v)$.

Для получения необходимого условия экстремума функционала (55) при условии (57) надо воспользоваться общим условием (25), а затем, как в п. 7, произвести интегрирование по частям по схеме

$$\int_{(G)} F'_p \frac{\partial(\delta z)}{\partial x} dG = \int dy \int F'_p \frac{\partial(\delta z)}{\partial x} dx = \int dy \left[(F'_p \delta z) \Big| - \int \frac{\partial F'_p}{\partial x} \delta z dx \right], \quad (58)$$

где вертикальная черта означает двойную подстановку граничных для x значений. Но аналогично п. 7 из условия (57) получаем, что $(\delta z) \Big|_{(\Gamma)} = 0$, а потому результат этой подстановки равен нулю, т. е.

правая часть (58) равна $-\int_{(G)} \frac{\partial F'_p}{\partial x} \delta z dG$. Преобразуя подобным же

образом последний член в (56), приходим к уравнению Эйлера для функционала (55)

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q = 0; \quad (59)$$

оно было получено впервые М. В. Остроградским в 1834 г. и потому называется также *уравнением Остроградского*. Обращаем внимание на своеобразие производных $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ в этом уравнении: например, производная $\frac{\partial}{\partial x}$ берется при зафиксированном y , но с учетом того, что в F'_p в качестве z , $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ подставлены их выражения через x, y . Поэтому развернутая форма уравнения (59) такова (проверьте!);

$$F''_{pp} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2F''_{pq} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + F''_{qq} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F''_{zp} \frac{\partial z}{\partial x} + F''_{zq} \frac{\partial z}{\partial y} + F''_{xp} + F''_{yq} - F'_z = 0.$$

Это уравнение с *частными производными* второго порядка, так что вариационная задача сводится к решению этого уравнения при граничном условии (57). Общую теорию таких граничных задач мы в этой книге не будем рассматривать.

Случай более чем двух независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ рассматривается аналогично; в этом случае принято обозначение $\frac{\partial z}{\partial x_k} = p_k$.

Подобным образом разбирается случай, когда функционал имеет вид

$$I\{z\} = \int_{(G)} F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dG$$

при граничном условии

$$z \Big|_{M \in (\Gamma)} = \varphi(M), \quad \frac{\partial z}{\partial n} \Big|_{M \in (\Gamma)} = \psi(M),$$

где под n понимается направление внутренней нормали к (Γ) . Мы предоставляем читателю проверить, что уравнение Эйлера будет иметь вид

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_p - \frac{\partial}{\partial y} F'_q + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F'_r + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F'_s + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F'_t = 0,$$

где под r, s, t понимаются соответственно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. При доказательстве этого следует обратить внимание на то, что из равенств $(\delta z)_{(\Gamma)} = 0$, $\left(\frac{\partial}{\partial n} \delta z\right)_{(\Gamma)} = 0$, следуют равенства $\left(\frac{\partial}{\partial x} \delta z\right)_{(\Gamma)} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta z\right)_{(\Gamma)} = 0$.

Если, подобно п. 10, z в (55) представляет собой k -мерный вектор, то соответствующее уравнение Эйлера имеет вид (59), где z , p и q — векторы, а дифференцирование по вектору понимается аналогично (52). Это система из k уравнений с частными производными второго порядка.

12. Условный экстремум с интегральными связями. Вернемся к функционалу (18) и предположим, что функция $y(x)$ берется не произвольной, а должна, кроме граничных условий (26), удовлетворять дополнительному условию вида

$$I\{y\} = \int_a^b G(x, y, y') dx = g \quad (\text{задано}). \quad (60)$$

Тогда и вариация δy должна удовлетворять дополнительному условию, полученному линеаризацией (60):

$$\delta I\{y; \delta y\} = \int_a^b (G'_y \delta y + G'_{y'} \delta y') dx = 0.$$

Пусть функция $\bar{y}(x)$ реализует экстремум (или просто стационарное значение) функционала (18) при граничных условиях (26) и связи (60). Тогда можно рассуждать следующим образом. Разобьем отрезок $a \leq x \leq b$ на большое число n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$, обозначим $x_k = a + kh$, $\bar{y}_k = y(x_k)$. Заменяя интеграл на интегральную сумму, а производную на разделенную разность (не стремясь к особой точности аппроксимации, так как мы рассматриваем только принципиальную картину), получаем, что требуется найти экстремум величины

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(x_k, \bar{y}_k, \frac{\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k}{h}\right) h \quad (61)$$

при заданных $\bar{y}_0 = y_a$, $\bar{y}_n = y_b$ и при условии

$$\sum_{k=0}^{n-1} G\left(x_k, \bar{y}_k, \frac{\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k}{h}\right) h = g. \quad (62)$$

Так как теперь мы имеем дело с функциями конечного числа независимых переменных $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1}$, то можно применить теорию условного экстремума для функций нескольких переменных (см., например, ЛВМ, п. XII.10). Согласно этой теории при отыскании такого экстремума следует написать условия безусловного экстремума для функции

$$\sum_{k=0}^{n-1} F\left(x_k, \bar{y}_k, \frac{\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k}{h}\right) h - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} G\left(x_k, \bar{y}_k, \frac{\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k}{h}\right) h. \quad (63)$$

Возвращаясь к интегралам, получаем, что для отыскания функции $\bar{y}(x)$, реализующей условный экстремум, следует написать уравнение Эйлера для функции

$$F^*(x, y, y'; \lambda) = F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y'). \quad (64)$$

(К этому выводу можно было бы прийти и без перехода к интегральным суммам, непосредственно рассматривая задачу (18), (60).) Общее решение этого уравнения содержит две произвольные постоянные и параметр λ , которые находятся из двух граничных условий (26) и уравнения связи (60). Параметр λ (множитель Лагранжа), как показано в ЛВМ (там же), равен $\frac{dI(\bar{y})}{dg}$.

Если имеется несколько условий вида (60)

$$\int_a^b G_i(x, y, y') dx = g_i \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (65)$$

то взамен (64) надо воспользоваться функцией

$$F^* = F - \sum_{i=1}^p \lambda_i G_i.$$

Теперь мы можем вернуться к первому примеру п. 1, где требовалось максимизировать функционал (1) при граничных условиях (3) и связи интегрального вида (2). (Отметим, что по аналогии с этим примером вариационные задачи с интегральными связями вида (65) или другого подобного вида часто называют *изопериметрическими*.) Согласно доказанному нужно решить уравнение Эйлера для функции

$$F^*(x, y, y'; \lambda) = y - \lambda \sqrt{1 + y'^2}. \quad (66)$$

Так как в нее не входит x , можно воспользоваться первым интегралом (38), что даст

$$y - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1.$$

Разрешая это уравнение относительно y' , получим

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}}{y - C_1},$$

откуда, разделяя переменные и интегрируя, приходим к уравнению окружности

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2.$$

Постоянные C_1, C_2, λ определяются граничными условиями (3) и связью (2). Другими словами, из всех дуг окружностей, изображенных на рис. 85, надо выбрать ту, которая имеет заданную длину L .

Некоторое сомнение могут вызвать дуги вида $aABCb$, вдоль которых y не является однозначной функцией x , а ведь этой однозначностью мы пользовались при выводах. Но здесь, как и во многих других аналогичных случаях, можно прибегнуть к следующему рассуждению. Пусть линия типа $aABCb$, которую мы еще не знаем, реализует искомый экстремум. Возьмем любую ее малую дугу AB и выберем новые оси координат ξ, η так, чтобы эту дугу можно было записать в виде $\eta = \eta(\xi)$ с однозначной $\eta(\xi)$ (рис. 85). Но если зафиксировать точки A и B и менять дугу AB , сохраняя ее длину, то мы не сможем увеличить площадь участка (почему?). Другими словами, *дуга линии, решающей задачу на экстремум, сама решает аналогичную задачу на экстремум.* (Конечно, то же остается в силе, если речь идет не об экстремуме, а о стационарном значении функционала.) Но дуга AB в силу однозначности $\eta(\xi)$ представляет собой дугу окружности. А если всякая малая дуга линии (L) есть дуга окружности, то и вся (L) — дуга окружности, что и требовалось доказать.

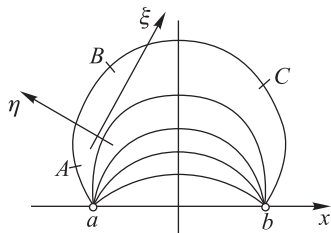


Рис. 85

Можно сослаться также на инвариантность уравнения Эйлера, о которой говорилось в конце п. 7. В самом деле, всегда можно выбрать криволинейные координаты u, v , в которых вся рассматриваемая линия получит однозначное представление $v = v(u)$. Но тогда она должна в новых координатах удовлетворять уравнению Эйлера, а в силу указанной инвариантности — и в старых тоже.

Дуга окружности является одновременно решением задачи на условный экстремум, *двойственной* исходной: найти линию наименьшей длины, ограничивающей заданную площадь. Это можно доказать с помощью рассуждения, также имеющего довольно общий характер. Пусть заданная площадь равна S и соответствующая линия (L) имеет минимально возможную длину L , но не является дугой окружности. Тогда в силу исходной задачи (L) можно изменить, перейдя к близкой линии (L') с длиной $L' = L$ и площадью $S' > S$. Теперь можно деформировать (L') в (L''), уменьшив одновременно и длину и площадь (например, с помощью равномерного сжатия к оси x), доведя площадь до $S'' = S$, но тогда $L'' < L'$, т. е. $L'' < L$, и мы приходим в противоречие с определением линии (L).

Двойственность задач на условный экстремум становится еще более ясной, если говорить не об экстремальном, а о стационарном значении функционала (18) при связи (60) или (60) при связи (18). В самом деле, первая задача сводится к решению уравнения Эйлера для $F - \lambda_1 G$, а вторая — к решению для $G - \lambda_2 F$. Но

$$G - \lambda_2 F = -\lambda_2 \left(F - \frac{1}{\lambda_2} G \right) = -\lambda_2 (F - \lambda_1 G) \quad \left(\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} \right),$$

и после сокращения мы получаем то же уравнение, что в первой задаче. Исключением служат случаи $\lambda_2 = \frac{dJ(\bar{y})}{dI(\bar{y})} = 0$ или $\lambda_1 = \frac{dI(\bar{y})}{dJ(\bar{y})} = 0$, имеющие характер вырождения. Отметим, что аналогичная двойственность имеет место и для задач на экстремум с конечным числом степеней свободы.

Вариационные задачи на экстремум с интегральными связями сейчас широко распространены. Во многих случаях возникает ситуация, в которой требуется распорядиться определенными ресурсами, чтобы получить максимальную выгоду. Если при этом возможная линия поведения определяется произвольной функцией, то для ее отыскания получается вариационная задача, в которой задание ресурсов определяет интегральные связи.

13. Условный экстремум с конечными или дифференциальными связями. Рассмотрим для определенности задачу на экстремум функционала

$$I\{y_1, y_2, y_3\} = \int_a^b F(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, y_3, y'_3) dx \quad (67)$$

с тремя искомыми функциями $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$. Пусть на них наложена *конечная* (иначе *голономная*) *связь*

$$H(x, y_1, y_2, y_3) = h(x) \quad (\text{задано}). \quad (68)$$

Тогда вариации этих функций должны быть связаны очевидным соотношением

$$H'_{y_1} \delta y_1 + H'_{y_2} \delta y_2 + H'_{y_3} \delta y_3 = 0.$$

Пусть ставится задача об экстремуме (или просто о стационарном значении) функционала (67) при конечной связи (68) и граничных условиях

$$y_k(a) = y_{ka}, \quad y_k(b) = y_{kb} \quad (k = 1, 2, 3),$$

удовлетворяющих уравнению связи, т. е.

$$H(a, y_{1a}, y_{2a}, y_{3a}) = h(a), \quad H(b, y_{1b}, y_{2b}, y_{3b}) = h(b).$$

(Это условия согласования граничных условий со связью.)

Если удастся более или менее просто выразить из (68) одну из искоемых функций через остальные, например представить $y_3 = \varphi(x, y_1, y_2)$, то это выражение можно подставить в (67) и перейти тем самым к задаче на безусловный экстремум с двумя искомыми функциями $y_1(x), y_2(x)$ (п. 10). В общем случае можно рассуждать, как в п. 12, но тогда взамен (62) появятся соотношения

$$H(x_k, \bar{y}_{1k}, \bar{y}_{2k}, \bar{y}_{3k}) = h(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (69)$$

В силу правила отыскания условного экстремума надо для каждой левой части (69) взять свой множитель Лагранжа, т.е. искать безусловный экстремум для функции

$$\sum_{k=0}^{n-1} F\left(x_k, \bar{y}_k, \frac{\bar{y}_{1,k+1} - \bar{y}_{1k}}{h}, \dots\right) h - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k H(x_k, \bar{y}_{1k}, \bar{y}_{2k}, \bar{y}_{3k}).$$

Возвращаясь к интегралам, получаем, что для отыскания функций $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \bar{y}_3(x)$, реализующих условный экстремум, следует написать систему уравнений Эйлера для функции

$$F(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, y_3, y'_3) - r(x)H(x, y_1, y_2, y_3) \quad (70)$$

с фиксированной (т.е. не варьируемой), но неизвестной заранее функцией $r(x)$ (функциональным множителем Лагранжа). Уравнения Эйлера вместе с уравнением связи (68) образуют систему из четырех уравнений с четырьмя искомыми функциями $y_1(x), y_2(x), y_3(x), r(x)$; произвольные постоянные, которые появятся при ее интегрировании, определяются граничными условиями.

Подобным образом, если на функции y_1, y_2, y_3 наложены две независимые конечные связи (а более двух таких связей, в отличие от интегральных, на три функции не может быть наложено)

$$H_1(x, y_1, y_2, y_3) = h_1(x), \quad H_2(x, y_1, y_2, y_3) = h_2(x),$$

то взамен функции (70) надо пользоваться функцией

$$F - r_1(x)H_1 - r_2(x)H_2.$$

Если, кроме этого, имеются интегральные связи (65), то к правой части надо добавить $-\sum_i \lambda_i G_i$.

Аналогичным образом рассматриваются *дифференциальные* (иначе *неголономные*) связи вида

$$H(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, y_3, y'_3) = h(x);$$

и здесь к функции F надо добавить $-r(x)H$. Отличие будет в том, что в систему уравнений Эйлера теперь войдет не только $r(x)$, но и

$r'(x)$ (почему?). Задача на экстремум функционала с конечными или дифференциальными связями называется также *задачей Лагранжа*.

Рассмотрим в качестве примера задачу С.А. Чаплыгина об облете максимальной площади самолетом за заданное время T при постоянном ветре. Обозначим через v скорость ветра и выберем ось y в направлении этой скорости; через V обозначим скорость самолета относительно воздуха. Тогда должно выполняться соотношение (продумайте его!)

$$\dot{x}^2 + (\dot{y} - v)^2 = V^2, \quad (71)$$

где точкой обозначена производная по времени. Вспомнив выражение (см., например, ЛБМ (XIV.31))

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x}) dt \quad (72)$$

для площади, ограниченной замкнутым контуром ($x(0) = x(T) = x_0, y(0) = y(T) = y_0$), получаем задачу о максимизации интеграла (72) при дифференциальной связи (71). Согласно доказанному нужно составить систему уравнений Эйлера для функции

$$\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - r(t)[\dot{x}^2 + (\dot{y} - v)^2].$$

Эта система имеет вид (проверьте!)

$$\frac{1}{2}\dot{y} - \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2}y - r(t) \cdot 2\dot{x} \right] = 0, \quad -\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2}x - r(t) \cdot 2(\dot{y} - v) \right] = 0,$$

Интегрирование по t дает

$$y + 2r(t)\dot{x} = C_1, \quad -x + 2r(t)(\dot{y} - v) = C_2. \quad (73)$$

С помощью параллельного переноса осей координат всегда можно добиться того, чтобы $C_1 = C_2 = 0$ (почему?), как мы и будем впредь для простоты считать. Исключая $r(t)$ из (73), получим

$$\frac{-y}{\dot{x}} = \frac{x}{\dot{y} - v}, \quad \text{откуда} \quad dt = \frac{x dx + y dy}{vy}.$$

Подставляя это выражение в (71), получим дифференциальное уравнение, связывающее только величины x и y :

$$v^2(x^2 + y^2)dx^2 = V^2(x dx + y dy)^2. \quad (74)$$

Это уравнение проще решить с помощью перехода к полярным координатам ρ, φ . Подставляя в (74) $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ и извлекая корень, получим (проверьте!)

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\pm v \sin \varphi}{V \pm v \cos \varphi} d\varphi = \frac{\pm \varepsilon \sin \varphi}{1 \pm \varepsilon \cos \varphi} d\varphi \quad \left(\varepsilon = \frac{v}{V} \right).$$

Интегрируя и потенцируя, находим полярное уравнение искомого семейства линий

$$\rho = \frac{C}{1 \pm \varepsilon \cos \varphi},$$

где C — произвольная постоянная. Так как по смыслу задачи $\varepsilon < 1$, то, сравнивая с уравнением ЛВМ (II.29), видим, что получилось семейство всех эллипсов с одинаковым эксцентриситетом $\varepsilon = v/V$, большая ось которых перпендикулярна направлению ветра.

Для функционалов от функций нескольких переменных, помимо конечных (или дифференциальных) и интегральных связей, встречаются связи промежуточного типа. Пусть, например, на функцию $z(x, y)$ в функционале (55) наложена связь вида

$$\int G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = g(x), \quad (75)$$

где интегрирование проводится по y (т. е. интеграл однократный) в пределах заданной области. Тогда рассуждение, аналогичное проведенному в начале этого пункта, показывает, что уравнение Эйлера надо составить для функции $F - r(x)G$, в результате чего получится уравнение с двумя неизвестными функциями $z(x, y)$ и $r(x)$, к которому для решения надо присоединить интегро-дифференциальное уравнение связи (75).

14. Задачи, сводящиеся к задаче Лагранжа. К задаче Лагранжа сводятся многочисленные другие классы задач вариационного исчисления на условный экстремум. Укажем примеры таких задач, по образцу которых можно и в других случаях осуществлять аналогичное сведение.

Так, разобранный в п. 12 задача об экстремуме функционала (18) при интегральной связи (60) сводится к задаче Лагранжа, если ввести новую искомую функцию

$$z(x) = \int_a^x G(s, y(s), y'(s)) ds.$$

Тогда получается задача об экстремуме функционала (18) при дифференциальной связи $z' = G(x, y, y')$ и граничных условиях

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad z(a) = 0, \quad z(b) = g.$$

Пусть требуется найти две функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, связанные между собой уравнением

$$f(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2) = 0 \quad (76)$$

и удовлетворяющие граничным условиям

$$y_1(a) = y_{1a}, \quad y_2(a) = y_{2a}, \quad y_2(b) = y_{2b}, \quad (77)$$

для которых $y_1(b)$ принимает экстремальное (по сравнению с другими функциями, удовлетворяющими тем же соотношениям) значение. Эта задача Майера сводится к задаче Лагранжа с помощью введения новой искомой функции

$$y_1 = y'_1. \quad (78)$$

Тогда задача сводится к экстремизации функционала

$$\int_a^b y_3 dx$$

при дифференциальных связях (76) и (78) и граничных условиях (77), т. е. к задаче Лагранжа. (Может показаться, что в ней слишком мало граничных условий; однако в пп. 15, 16 мы увидим, как исследовать задачи, в которых граничных условий меньше, чем было в подробно разобранных ранее случаях.)

Аналогично рассматривается задача Майера с любым числом n искомым функций, связанных между собой системой из m дифференциальных уравнений, конечно, если $m < n$ (зачем это требование?).

Подобный характер имеет также задача, которую мы предоставим рассмотреть читателю, об экстремуме значения $y(b)$ для решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y, \varphi(x))$, включающего произвольную функцию (скажем, некоторый коэффициент) $\varphi(x)$, удовлетворяющую соотношению вида

$$\int_a^b G(x, y, \varphi) dx = g, \text{ при заданном начальном условии } y(a) = y_a.$$

В задаче Больца требуется экстремизировать функционал

$$\int_a^b F(x, y, y', \lambda) dx + \varphi(y(a), y(b), \lambda) \quad (79)$$

с параметром λ (этих параметров, как и искомым функций, может быть любое число, могут быть добавлены конечные, дифференциальные и интегральные связи). Она сводится к задаче Лагранжа об экстремуме функционала

$$\int_a^b [F(x, x_1, y'_1, y_2) + y_3] dx$$

при дифференциальных связях

$$y'_2 = 0, \quad y'_3 = 0$$

и добавочном граничном условии

$$(b - a)y_3(a) - \varphi(y_1(a), y_1(b), y_2(a)) = 0 \quad (80)$$

(проверьте!). В связи с (80) отметим, что граничное условие может связывать значения искомым функций на обоих концах интервала, где они строятся.

Задача об экстремуме функционала, аналогичного (79) в двумерном и трехмерном случаях, равного сумме интегралов по области и по ее границе, рассмотрена в [106].

15. Задачи с подвижными концами на плоскости. Вернемся опять к функционалу вида (18). До сих пор мы рассматривали для него только граничные условия вида (26), другими словами, считали концы

линии $y = y(x)$ фиксированными. Однако бывают задачи с граничными условиями другого вида.

Пусть значения функционала (18) сравниваются для функций $y(x) \in C_1[a, b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$f_1(y(a), y'(a)) = 0, \quad f_2(y(b), y'(b)) = 0 \quad (81)$$

более общего, чем (26), вида. Другими словами, задается не ордината концевой точки, а соотношение между ординатой и наклоном линии в ней. Пусть функция $y = \bar{y}(x)$ реализует экстремальное значение функционала. Тогда этот экстремум достигается и среди более узкого множества функций с граничными значениями

$$y(a) = \bar{y}(a), \quad y'(a) = \bar{y}'(a), \quad y(b) = \bar{y}(b), \quad y'(b) = \bar{y}'(b),$$

так как для этих функций условия (81) все равно выполняются. Поэтому, произвольно варьируя $\bar{y}(x)$ *внутри* интервала $a \leq x \leq b$ и рассуждая, как в п. 6, мы получим, что функция $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (36). Однако теперь две произвольные постоянные, входящие в общее решение этого уравнения, надо определять из двух граничных условий (81).

Ясно, что это рассуждение имеет общий характер, т. е. при любых граничных условиях функция, реализующая экстремум функционала, будет решением уравнения Эйлера.

Рассмотрим теперь *естественную вариационную задачу*, в которой граничные условия полностью сняты, т. е. значения функционала (18) сравниваются для *всех* функций $y(x) \in C_1[a, b]$. Тогда, прежде всего, рассуждая как выше, получаем, что функция $\bar{y}(x)$, реализующая в этом случае экстремум, удовлетворяет уравнению Эйлера. При произвольной ее вариации получим с помощью интегрирования по частям

$$\delta I\{\bar{y}; \delta y\} = \int_a^b (F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y') dx = F'_{y'} \delta y \Big|_{x=a}^b + \int_a^b \left(F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right) \delta y dx.$$

Однако последняя скобка равна нулю, т. е.

$$\delta I\{\bar{y}; \delta y\} = F'_{y'}(b, \bar{y}(b), \bar{y}'(b)) \delta y(b) - F'_{y'}(a, \bar{y}(a), \bar{y}'(a)) \delta y(a).$$

В силу необходимого условия (25) и *произвольности* $\delta y(a), \delta y(b)$, получаем отсюда, что искомая функция $\bar{y}(x)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$F'_{y'}(a, y(a), y'(a)) = 0, \quad F'_{y'}(b, y(b), y'(b)) = 0, \quad (82)$$

называемым *естественными*. Конечно, если условие (81) снято только на одном конце, то и естественное условие ставится только на этом конце.

Мы предоставляем читателю доказать, что естественные граничные условия для несколько более общего функционала

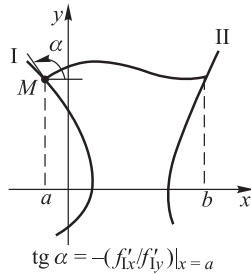
$$\int_a^b F(x, y, y') dx + \varphi_1(y) \Big|_{x=a} + \varphi_2(y) \Big|_{x=b} \quad (83)$$

имеют вид

$$(F'_{y'} - \varphi'_1) \Big|_{x=a} = 0, \quad (F'_{y'} + \varphi'_2) \Big|_{x=b} = 0. \quad (84)$$

16. Условия трансверсальности. Рассмотрим теперь более общую естественную вариационную задачу для функционала вида (18), в которой значения a, b не зафиксированы заранее, но требуется, чтобы концевые точки $(a; y(a))$ и $(b; y(b))$ лежали на заданных линиях с уравнением соответственно

$$f_I(x, y) = 0 \text{ и } f_{II}(x, y) = 0 \quad (85)$$



(рис. 86). Отметим, что теперь сравниваемые функции $y(x)$ уже не образуют линейного пространства (почему?). Однако подход к понятию вариации функционала, указанный в конце п. 5, полностью сохраняет силу, хотя формулы для вариации изменяются, так как надо учитывать возможность изменения пределов интегрирования. Линеаризуя, получаем

Рис. 86

$$\delta \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_a^b (F'_{y'} \delta y + F'_{y'} \delta y') dx + F(x, y, y') \Big|_{x=b} \delta b - F(x, y, y') \Big|_{x=a} \delta a.$$

Рассуждая, как в начале п. 15, получаем, что функция $y(x)$, реализующая экстремум функционала, удовлетворяет уравнению Эйлера. Поэтому, пользуясь необходимым условием (25) и проводя интегрирование по частям, получаем

$$[F'_{y'} \delta y]_{x=b} - [F'_{y'} \delta y]_{x=a} + F|_{x=b} \delta b - F|_{x=a} \delta a = 0. \quad (86)$$

С другой стороны, уравнения (85) дают

$$\left. \begin{aligned} f'_{Ix} \Big|_{x=a} \delta a + f'_{Iy} \Big|_{x=a} \delta[y(a)] &= 0, \\ f'_{IIx} \Big|_{x=b} \delta b + f'_{IIy} \Big|_{x=b} \delta[y(b)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Однако $\delta y|_{x=b}$, и $\delta[y(b)]$ не одно и то же! Из рис. 87 после отбрасывания малых высшего порядка видно, что

$$\delta[y(b)] = \delta y \Big|_{x=b} + y' \Big|_{x=b} \delta b, \quad (88)$$

и аналогично для $\delta[y(a)]$. Подставляя эти выражения в (87), находя после этого $\delta y|_{x=a}$ и $\delta y|_{x=b}$ и подставляя в (86), а затем пользуясь произволом $\delta a, \delta b$, приходим к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} [F'_{y'}(f'_{Ix} - y' f'_{Iy}) - F f'_{Iy}] \Big|_{x=a} &= 0, \\ [F'_{y'}(f'_{Ixx} - y' f'_{IIy}) - F f'_{IIy}] \Big|_{x=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

(проверьте!), которые и служат естественными граничными условиями в рассмотренной задаче. Если известно направление линии I (или II) в некоторой ее точке M (рис. 86), то известно и соответствующее значение $f'_x : f'_y$ и потому условия (89) определяют направления, которые в этой точке может иметь экстремальная линия. Эти последние направления называются *трансверсальными* первому, а условия (89) называются *условиями трансверсальности*.

Обратите внимание на то, что условия (82) представляют собой частный случай условий (89) (почему?). Таким образом, в каждой точке плоскости x, y каждому направлению с угловым коэффициентом k отвечает некоторая совокупность трансверсальных направлений, угловой коэффициент l которых определяется из уравнения

$$(k - l)F'_{y'}(x, y, l) + F(x, y, l) = 0. \quad (90)$$

Рассмотрим, например, вариант задачи Дидо (п. 1), в котором концы A и B

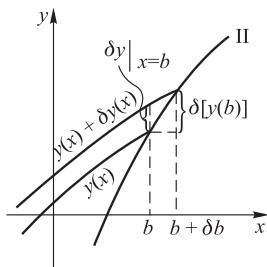


Рис. 87

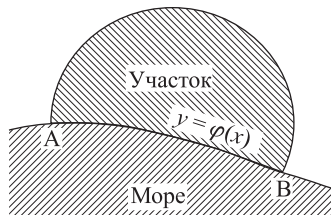


Рис. 88

нити находятся на берегу с произвольным уравнением $y = \varphi(x)$ (рис. 88) и заранее не фиксируются. Тогда формула для площади взамен (1) принимает вид

$$S = \int_a^b [y - \varphi(x)] dx.$$

Соответственно надо изменить и функцию (66), что скажется только на условиях трансверсальности, которые принимают вид (проверьте!)

$$(k - l) \frac{-\lambda l}{\sqrt{1 + l^2}} + y - \varphi(x) - \lambda \sqrt{1 + l^2} = 0,$$

а так как они ставятся на линии $y = \varphi(x)$, то получаем

$$-(k - l)\lambda l - \lambda(1 + l^2) = 0, \quad \text{т. е.} \quad kl + 1 = 0, \quad l = -\frac{1}{k}.$$

Это хорошо известное условие перпендикулярности двух направлений. Итак, если положение концов нити заранее не задано, то нить в своих концах должна быть направлена нормально к берегу.

Заметим, что мы вывели условия трансверсальности (90) для задачи на безусловный экстремум, а применили ее к задаче на экстремум с интегральной связью. Однако можно показать, что необходимые условия в задачах со свободными концами и в других подобных задачах вариационного исчисления без изменения распространяются на задачи с интегральными, конечными и дифференциальными связями, если эти условия применять к соответственно измененному посредством множителей Лагранжа функционалу.

Отметим в заключение, что в процессе вывода условий трансверсальности мы, по существу, получили выражение для вариации функционала (18) при произвольных вариациях функции $y(x)$ и пределов интегрирования

$$\delta \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_a^b \left(F'_{y'} - \frac{d}{dx} F'_{y''} \right) \delta y dx + F'_{y'} \Big|_{x=b} \delta[y(b)] + \\ + (F - y' F'_{y'}) \Big|_{x=b} \delta b - F'_{y'} \Big|_{x=a} \delta[y(a)] - F - y' F'_{y'} \Big|_{x=a} \delta a. \quad (91)$$

Оно дает, в частности, возможность рассмотреть также задачу, в которой на конце линии сняты вообще какие бы то ни было условия, т.е. этот конец может произвольно варьироваться. Тогда из (91) получаем, что на таком конце должны выполняться равенства

$$F = 0, \quad F'_{y'} = 0.$$

Эти два равенства (равно как уравнение связи и условие трансверсальности в разобранном выше случае) вместе с выражениями для y и y' из общего решения уравнения Эйлера дают одно соотношение между двумя произвольными постоянными в этом решении, отвечающее рассматриваемому концу линии.

17. Задачи с подвижными концами в пространстве. Рассмотрим функционал (46), который можно трактовать как функционал от линии в пространстве x, y_1, y_2 . В п. 10 концы этой линии были закреплены (на каждом конце задано x, y_1, y_2). Подобно п. 10 рассматривается случай, когда на каждом из концов задано по три независимых уравнения, связывающих x, y_1, y'_1, y_2, y'_2 .

Однако бывают и задачи, в которых таких уравнений задается два или одно. (Хоть одно обычно задается.) Мы рассмотрим здесь только случай конечных связей, т.е. связей, наложенных на координаты. Так как оба конца исследуются аналогично, то будем для простоты варьировать только конец $x = b$. Заметим, что из п. 15 следует, что функции $y_1(x), y_2(x)$, реализующие экстремум функционала, удовлетворяют системе уравнений Эйлера.

Пусть сначала конец $x = b$ имеет две степени свободы, т.е. на него наложена одна связь вида

$$f(x, y_1, y_2) = 0. \quad (92)$$

Аналогично, (86) и (87) получаем, что равенство

$$\left[F'_{y'_1} \delta y_1 \right]_{x=b} + \left[F'_{y'_2} \delta y_2 \right]_{x=b} + F \Big|_{x=b} \delta b = 0 \quad (93)$$

должно выполняться всякий раз, как

$$f'_x|_b \delta b + f'_{y_1}|_b (\delta y_1|_b + y'_1|_b \delta b) + f'_{y_2}|_b (\delta y_2|_b + y'_2|_b \delta b) = 0.$$

Отсюда заключаем, что при $x = b$ выполняются равенства

$$\frac{f'_{y_1}}{F'_{y'_1}} = \frac{f'_{y_2}}{F'_{y'_2}} = \frac{f'_x + f'_{y_1} y'_1 + f'_{y_2} y'_2}{F}, \quad (94)$$

которые и служат в данной задаче условиями трансверсальности, заменяя два недостающих граничных условия. В каждой точке пространства (x, y_1, y_2) в зависимости от направления касательной плоскости к (92) (оно определяет значения f'_x, f'_{y_1}, f'_{y_2} с точностью до коэффициента пропорциональности), из двух уравнений (94) можно определить два неизвестных y'_1, y'_2 ; вообще говоря, получается одно или несколько, т. е. дискретное множество (одномерных) направлений, трансверсальных этой касательной плоскости.

Рассмотрим частный случай. Пусть дан функционал от линий, на плоскости x, y в параметрической форме (54), имеющий специальный вид

$$I\{L\} = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} \Phi(x, y) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (95)$$

Если на один из концов линии наложена связь

$$f(x, y) = 0, \quad (96)$$

то из (94) получаем условие трансверсальности

$$f'_x : \frac{\Phi \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = f'_y : \frac{\Phi \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\dot{x}}{f'_x} = \frac{\dot{y}}{f'_y}.$$

Но это означает ортогональность экстремали $x = x(t)$, $y = y(t)$ и (96) (почему?). Итак, для интеграла (95) условие трансверсальности превращается в, условие ортогональности. Можно было бы доказать, что (95) представляет собой самый общий вид функционала, для которого в каждой точке плоскости x, y трансверсальность превращается в ортогональность. Аналогичный результат справедлив и для функционалов, заданных на линиях в евклидовом пространстве любого числа измерений.

Полученное утверждение имеет наглядное оптическое истолкование. Пусть свет распространяется в изотропной но, вообще говоря, неоднородной среде, так что его скорость в каждой точке равна $c(x, y)$ (мы рассмотрим для простоты плоскую задачу). Тогда функционал (95) с $\Phi = \frac{1}{c}$ есть время, за которое свет может пройти линию (L) (почему?). Однако из волновой теории света вытекает, что световыми лучами служат линии, для которых это время принимает стационарное значение, т. е. экстремали. Если из некоторой точки исходят во все стороны световые лучи, то линия (в пространстве — поверхность), которой они достигнут за одно и то же время, называется фронтом волны. Так как для точек этой линии рассматриваемый функционал принимает стационарное (даже постоянное на экстремалих) значение, то доказанное утверждение о

трансверсальности означает просто, что световые лучи в каждой точке ортогональны фронту волны.

Пусть теперь на конец $x = b$ наложено две связи:

$$f_1(x, y_1, y_2) = 0, \quad f_2(x, y_1, y_2) = 0. \quad (97)$$

Тогда равенство (93) должно выполняться всякий раз, как

$$f'_{ix}|_b \delta b + f'_{iy_1}|_b (\delta y_1|_b + y'_1|_b \delta b) + f'_{iy_2}|_b (\delta y_2|_b + y'_2|_b \delta b) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда легко вытекает (как?) соотношение

$$\begin{vmatrix} F'_{y'_1} & F'_{y'_2} & F \\ f'_{1y_1} & f'_{1y_2} & f'_{1x} + f'_{1y_1}y'_1 + f'_{1y_2}y'_2 \\ f'_{2y_1} & f'_{2y_2} & f'_{2x} + f'_{2y_1}y'_1 + f'_{2y_2}y'_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (98)$$

которое и служит соотношением трансверсальности. В каждой точке M пространства в зависимости от направления l линии (97) в ней соотношение (98) определяет, вообще говоря, одну или несколько конических поверхностей с вершиной M , составленных из направлений, трансверсальных к l в M .

Функционалы, зависящие от любого числа n искоемых функций, рассматриваются аналогично. Если один из концов искомой линии $n + 1$ -мерного пространства $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ может свободно скользить по k -мерному многообразию (S) , то в каждой точке M пространства в зависимости от расположения k -мерной касательной гиперплоскости (P) к (S) определяется, вообще говоря, одна или несколько $(n + 1 - k)$ -мерных конических гиперповерхностей с вершиной M , составленных из направлений, трансверсальных к (P) в M .

Подобным образом разбираются и функционалы вида (43), зависящие от производных выше первого порядка. Впрочем, с помощью обозначения $y' = z$ задачу можно преобразовать в задачу на экстремум функционала

$$\int_a^b F(x, y, z, z') dx$$

с дифференциальной связью $y' - z = 0$. В силу п. 12 дело сводится к условиям трансверсальности типа (94) или (98) для функции $F(x, y, z, z') - r(x)(y' - z)$. Мы предоставляем читателю получить таким способом, например, концевые условия

$$F'_{y''} = 0, \quad f'_y F - \left(F'_{y'} - \frac{d}{dx} F'_{y''} \right) (f'_x + f'_y y') = 0,$$

если на соответствующий конец наложена связь вида $f(x, y) = 0$.

18. Трансверсальность для функций нескольких переменных.

Рассмотрим еще задачу с подвижной границей на экстремум функционала от функции нескольких переменных. Пусть рассматривается функционал вида (55), но область (G) заранее не фиксирована, она своя для каждой из сравниваемых поверхностей $z = z(x, y)$ ($(x, y) \in (G)$), от которых требуется только, чтобы их контуры $(x, y; z(x, y))$ ($(x, y) \in (\Gamma)$) располагались на заданной поверхности (S) с уравнением

$$f(x, y, z) = 0. \quad (99)$$

Как и в п. 15, получаем, что для поверхности $z = \bar{z}(x, y)$, реализующей экстремум, удовлетворяется уравнение Эйлера (59). Варьируя функционал (55) с учетом возможного изменения области (G) , интегрируя по частям по образцу (58) и учитывая уравнение Эйлера, получаем

$$\delta I\{\bar{z}; \delta z\} = \int_{(\Gamma)} F \delta s \, d\Gamma + \oint_{(\Gamma)} \delta z (F'_p \, dy - F'_q \, dx), \quad (100)$$

причем во втором интеграле контур проходится в положительном направлении; в первом интеграле, полученном от вариации области (G) , δs означает ширину (вообще говоря, непостоянную и любого знака!) колючка, добавленного к (G) при этой вариации (рис. 89).

Если обозначить через $\mathbf{n}$ орт внешней нормали к контуру (Γ) в любой его точке, то при переходе от точки (Γ) по нормали к точке проварьированного контура получаем

$$\delta x = n_x \delta s, \quad \delta y = n_y \delta s,$$

откуда в силу (99)

$$f'_x n_x \delta s + f'_y n_y \delta s + f'_z \left(\delta z + \frac{\partial z}{\partial x} n_x \delta s + \frac{\partial z}{\partial y} n_y \delta s \right) = 0.$$

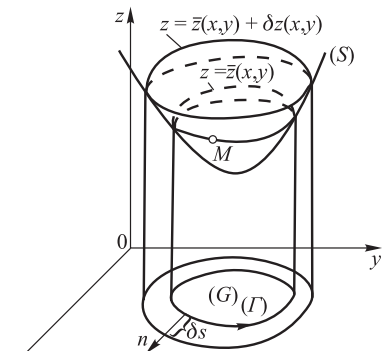


Рис. 89

Выразим отсюда δz и подставим во второй интеграл (100), а затем преобразуем его в криволинейный интеграл по длине дуги с помощью формул $dx = -n_y d\Gamma$, $dy = n_x d\Gamma$; получим (проверьте!)

$$\delta I = \int_{(\Gamma)} \left[F - (F'_p n_x + F'_q n_y) \left(\frac{f'_x n_x + f'_y n_y}{f'_z} + \frac{\partial z}{\partial x} n_x + \frac{\partial z}{\partial y} n_y \right) \right] \delta s \, d\Gamma.$$

Пользуясь необходимым условием экстремума (25) и произвольностью δs , получаем, что выражение в квадратных скобках, стоящее под знаком интеграла, должно равняться нулю в каждой точке (Γ) . Это и есть условие трансверсальности в рассматриваемой задаче. Оно в каждой точке M пространства связывает значения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем эта связь зависит от расположения касательной плоскости к (S) в M .

Если рассматривается экстремум функционала, аналогичного (83), для функции двух переменных

$$\int_{(\Gamma)} F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) dG + \int_{(\Gamma)} \varphi(x, y, z) d\Gamma$$

с фиксированной областью (G) , то, подставляя в последнем интеграле (100) $dy = \cos(\widehat{\mathbf{n}}, x) d\Gamma$, $dx = -\cos(\widehat{\mathbf{n}}, y) d\Gamma$ и пользуясь произволом $\delta z|_{(\Gamma)}$, приходим к естественному граничному условию

$$F'_p \cos(\widehat{\mathbf{n}}, x) + F'_q \cos(\widehat{\mathbf{n}}, y) + \varphi'_z = 0. \quad (101)$$

Этот результат аналогичным образом распространяется на функции от любого числа независимых переменных.

19. Высвобождающие связи. Вернемся к функционалу (18) и допустим, что на переменные x, y наложена высвобождающая конечная связь вида

$$f(x, y) \geq 0.$$

Другими словами, графики сравниваемых функций $y(x)$ должны быть расположены в заданной замкнутой (т. е. с присоединенной границей) области $(\bar{G})$ плоскости x, y . Типичным примером является задача о кратчайшем пути, соединяющем по заданной области $(\bar{G})$ две заданные точки (рис. 90, где область $(\bar{G})$ — незаштрихованная часть плоскости); здесь речь идет о минимизации функционала

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (102)$$

График функции $\bar{y}(x)$, реализующей экстремум, состоит из участков, расположенных строго внутри $(\bar{G})$ (на рис. 90 это AD , EK и LB), и участков, расположенных на границе (G) (DE и KL).

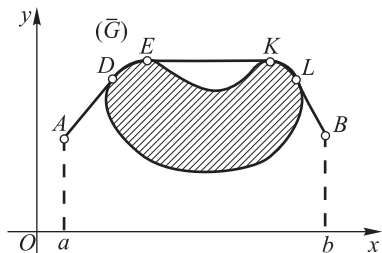


Рис. 90

Рассуждение, аналогичное проведенному в п. 13, показывает, что первые участки являются экстремальями, т. е. вдоль них удовлетворяется уравнение Эйлера. Конечно, участки второго типа экстремальями не являются, так что и в целом значение $I\{\bar{y}\}$, вообще говоря, не будет стационарным, а имеет характер краевого экстремума (см., например, ЛВМ, пп. IV.19, XII.11). Необходимое условие на этих участках зависит от типа экстремума и от направления, в

котором происходит высвобождение от связи. Пусть например, идет речь о минимуме, а высвобождение на некотором участке происходит, как на рис. 90, в сторону увеличения y . Варьируя y на этом участке и выполняя интегрирование по частям, получаем обычное выражение для вариаций $\int \left(F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right) \delta y dx$. Но теперь уже требуется, чтобы $\delta I \geq 0$ при любой $\delta y \geq 0$; отсюда заключаем, что на рассматриваемом участке должно быть

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \geq 0 \quad (103)$$

(продумайте это!). Это и есть требуемое необходимое условие. При однократной перемене типа экстремума или направления высвобождения это неравенство надо заменить на противоположное.

Например, для функционала (102) неравенство (103) равносильно тому, что $y'' \leq 0$ (проверьте!), т.е. мы получаем наглядно очевидный факт, что экстремальная линия на рис. 90 может огибать заштрихованную зону лишь на участках, выпуклых наружу от зоны (почему?).

Чтобы выяснять условие в точке выхода графика функции $\bar{y}(x)$ на границу области $(\bar{G})$, рассмотрим значение δI при произвольной вариации δy вблизи этой точки (рис. 91). Аналогично формуле (91), но с учетом отбрасываемого интеграла по DD' получаем

$$\delta I = F'_{y'}|_{x=c} k \delta c + (F - y' F'_{y'})|_{x=c} \delta c - F(c, \bar{y}(c), k) \delta c,$$

где под k понимается угловой коэффициент границы области в точке D выхода. Так как δc может быть любого знака, то получаем необходимое условие в точке выхода на границу:

$$F'_{y'}(c, \bar{y}(c), \bar{y}'(c)) [k - \bar{y}'(c)] + F(c, \bar{y}(c), \bar{y}'(c)) - F(c, \bar{y}(c), k) = 0. \quad (104)$$

Это условие, наверняка выполняется, если $\bar{y}'(c) = k$, т.е. если в точке выхода график $\bar{y}(x)$ не претерпевает излома. Имеется простой случай, когда такое отсутствие излома необходимо. В самом деле, левая часть (104) равна

$$- \int_{\bar{y}'(c)}^k dr \int_{\bar{y}'(c)}^r F''_{y'y'}(c, \bar{y}(c), q) dq$$

(проверьте!). Значит, если $F''_{y'y'}$ в точке D при всех y' не меняет знака и не тождественно равна нулю, то обязательно $\bar{y}'(c) = k$. В частности, достаточно, чтобы функция $F''_{y'y'}(x, y, y')$ была непрерывна и не имела нулей.

В связи со сказанным отметим, что вообще возможность обращения $F''_{y'y'}(x, y, y')$ в нуль вызывает значительные осложнения в задачах на экстремум функционала (18) в областях, где такие значения могут появиться (поэтому любой набор таких значений называется особым элементом функционала (18)). В самом деле, при таких значениях уравнение Эйлера (37) вырождается, понижая свой порядок, а уже на простых примерах можно увидеть, что в случае подобного вырождения начальные условия могут определять более одного решения или вообще ни одного решения и т.п. Проверьте, что для функционала, вида (46) с любым числом n функций y_k аналогичную роль играет обращение в нуль определителя n -го порядка $\det(F''_{y'_k y'_l})$.

Задача с высвобождающей связью для линий в трехмерном пространстве рассмотрена в [65], § 79.

20. Разрывные задачи. Во многих задачах вариационного исчисления экстремум достигается не на гладких, а на кусочно-гладких линиях, т.е. на линиях с изломами (угловыми точками). Такие задачи

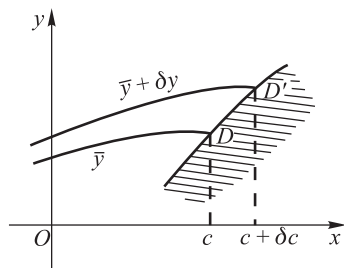


Рис. 91

называются *разрывными*, причем обычно имеется в виду разрыв не у самой искомой функции, а у ее производной, входящей в выражение для функционала.

Рассмотрим сначала случай, когда разрыв предусмотрен самой постановкой задачи. Разберем задачу об *отражении экстремали*, в которой ищется экстремум функционала

$$I\{y_1, y_2\} = \int_{a_1}^b F_1(x, y_1, y_1') + \int_{a_2}^b F_2(x, y_2, y_2') dx,$$

где функции $y_1(x), y_2(x)$ удовлетворяют граничным условиям (рис. 92)

$$y_1(a_1) = y_{10}, \quad y_2(a_2) = y_{20}, \quad y_1(b) = y_2(b). \quad (105)$$

Рассуждение, аналогичное проведенному в п. 13, показывает, что для пары функций $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x)$, реализующих экстремум, $\bar{y}_1$ будет решением уравнений Эйлера для F_1 а $\bar{y}_2$ — для F_2 (в частности, если $F_1 \equiv F_2$, получаем кусочно-гладкую экстремаль для единого уравнения Эйлера). Как и в п. 13, получаем

$$\begin{aligned} \delta I\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \delta y_1, \delta y_2\} = \\ = F'_{1y'_1}(b, \bar{y}_1(b), \bar{y}'_1(b))\delta y_1(b) + \\ + F'_{2y'_2}(b, \bar{y}_2(b), \bar{y}'_2(b))\delta y_2(b). \end{aligned}$$

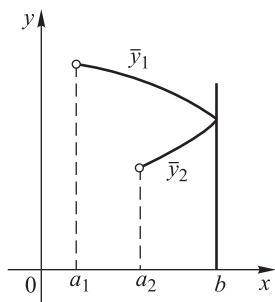


Рис. 92

Поэтому из общего необходимого условия экстремума и равенства (105) получаем необходимое условие на линии отражения

$$F'_{1y'_1}(b, y_1(b), y'_1(b)) + F'_{2y'_2}(b, y_2(b), y'_2(b)) = 0.$$

Если $a_2 > b$, то лучше говорить о *преломлении экстремали*.

Если линия отражения расположена произвольно, то, рассуждая, как при выводе формулы (90), получаем более общее условие отражения

$$(k - l_1)F'_{1y'_1}(x, y, l_1) + F_1(x, y, l_1) + (k - l_2)F'_{2y'_2}(x, y, l_2) + F_2(x, y, l_2) = 0, \quad (106)$$

где k, l_1, l_2 — это соответственно угловые коэффициенты линии отражения, падающей экстремали и отраженной экстремали в точке отражения.

Рассмотрим теперь случай, когда излом экстремали постановкой задачи не подразумевался. Именно, пусть функционал (18) при граничных условиях (26) рассматривается не только на функциях из $C_1[a, b]$, т. е. на гладких функциях, но и на кусочно-гладких функциях $y(x)$. Тогда, как и в п. 13, получаем, что если кусочно-гладкая функция $y(x)$ реализует хотя бы слабый экстремум этого функционала (нетрудно уточнить, что это означает), то в промежутках

между точками излома она удовлетворяет уравнению Эйлера. Если же точка M излома имеет некоторую абсциссу x , то, записав функционал (18) в виде

$$\int_a^b F dx = \int_a^x F dx + \int_b^x (-F) dx$$

и проведя через M произвольную линию, мы можем принять ее за линию преломления и применить условие (106), которое, таким образом, должно быть по k тождеством. Полагая $F_1 = F$, $F_2 = -F$ и приравнявая коэффициенты при k и свободные члены в (106) нулю, получаем (проверьте!), что при переходе через точку излома значения

$$F'_{y'}(x, y, y') \text{ и } F(x, y, y') - y' F'_{y'}(x, y, y') \quad (107)$$

должны изменяться непрерывно, хотя y' при этом переходе испытывает скачок. Другими словами, каждое из выражений по обе стороны от точки излома должно иметь одинаковое значение. Эти условия называются *условиями Вейерштрасса–Эрдмана*. Из первого вытекает, что излом может быть только в точках $(x; y)$, в которых $F'_{y'y'}(x, y, y')$ может обращаться в нуль (в противном случае функция $F'_{y'}(x, y, l)$ была бы монотонна по l , и потому из равенства $F'_{y'}(x, y, l_1) = F'_{y'}(x, y, l_2)$ вытекало бы, что $l_1 = l_2$, т. е. излома нет). Из второго условия (107) можно вывести, что в точке $(x; y)$ излома выражение $F'_{y'y'}(x, y, y')$ при изменении y' должно обратиться в нуль по крайней мере два раза.

Для функционала от нескольких функций, например вида (46), условие Вейерштрасса–Эрдмана, как легко проверить, состоит в непрерывности выражений $F'_{y'_1}, F'_{y'_2}$ и $F - y'_1 F'_{y'_1} - y'_2 F'_{y'_2}$ при переходе через точку излома.

Интересный случай решения с изломами может получиться в третьей задаче п. 1. В п. 8 мы показали, что для получения сечения искомой поверхности вращения нужно подобно растянуть график $y = \operatorname{sh} x$ от начала координат так, чтобы он прошел через след колечка на плоскости x, y ; так, на рис. 93 жирно показано сечение, если следом служит точка M_1 . Все такие подобно преобразованные кривые заполняют в первом квадранте некоторый угол $\frac{y}{x} \geq k = \operatorname{tg} \alpha$ (получите трансцендентное уравнение для k и найдите из него численно $k = 1,5088796$. Но как быть, если след колечка попадет подобно M_2 в угол $\frac{y}{x} < k$? Другими словами, что произойдет с пленкой, если колечки раздвинуть достаточно далеко? Тогда пленке «выгодно» по возможности сжать свой перешеек, и она расцепится на два кружка, натянутых на колечки. Если условно принять, что эти кружки соединены по оси вращения цилиндром нулевой ширины (это не изменит значения площади), то получается, что сечением поверхности в первом квадранте служит ломаная ONM_2 . Условия Вейерштрасса–Эрдмана выполняются во всех точках оси x ,

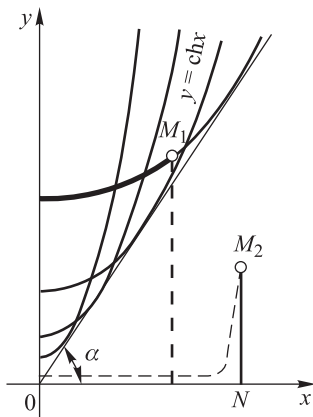


Рис. 93

так как там все сравниваемые выражения тождественно равны нулю. (Строго говоря, наши рассуждения, связанные с условиями Вейерштрасса–Эрдмана, неприменимы к участку NM_2 , где y не является функцией x . Однако задачу можно преобразовать к равносильной параметрической форме п. 10 с функционалом вида $\int F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$, а для такого функционала нетрудно проверить, что условия Вейерштрасса–Эрдмана состоят в непрерывности F'_x и F'_y , откуда мы вновь придем к особой роли точек оси x , которая, впрочем, ясна и из самой постановки задачи.)

Если для следа M_2 колечка пользоваться только гладкими решениями, то мы сможем как угодно приблизиться к минимальной площади с помощью линий вида, показанного на рис. 93 пунктиром, однако сама минимальная площадь при этом достигнута не будет. Таким образом, данная задача на минимум, первоначально поставленная в пространстве C_1 , оказывается не имеющей в этом пространстве решения и, чтобы получить решение, потребовалось соответствующим образом расширить пространство. В таких случаях обычно говорят, что мы получили *обобщенное* решение первоначальной задачи.

§2. Вторая вариация и достаточные условия экстремума

Вспоминая о глубокой аналогии между дифференциальным и вариационным исчислениями (пп. 1.4 и 5), естественно, ожидать, что при переходе к достаточным условиям экстремума функционалов будет введено понятие, играющее в этом вопросе ту же роль, что дифференциал второго порядка при исследовании экстремума функций. Этим понятием является вторая вариация.

1. Вариации высших порядков. Замена приращения функционала на его вариацию (п. 1.4), как и замена приращения функции на ее дифференциал, может быть уточнена с помощью добавления членов высшего порядка малости. Это приводит к разложению в ряд

$$I\{y + \delta y\} - I\{y\} = \delta I\{y; \delta y\} + \frac{1}{2!} \delta^2 I\{y; \delta y\} + \frac{1}{3!} \delta^3 I\{y; \delta y\} + \dots \quad (1)$$

совершенно аналогичный ряду Тейлора для функций. Здесь $\delta^2 I, \delta^3 I, \dots$ — *вариации* соответственно *второго, третьего* и т. д. *порядков* (коротко — *вторая, третья* и т. д. *вариации*) *функционала* I . Каждая из них получается с помощью варьирования предыдущей (т. е. $\delta^2 I = \delta(\delta I)$ и т. д.), в процессе которого δy считается не зависящим от y , т. е. не варьируется. Каждая из этих вариаций обладает относительно δy свойством однородности с соответствующим показателем:

$$\delta^n I\{y; C\delta y\} = C^n \delta^n I\{y; \delta y\} \quad (C = \text{const});$$

это означает, что члены в правой части (1) имеют последовательно первый, второй, третий и т. д. порядки малости относительно δy (точ-

нее говоря, относительно $\|\delta y\|$, см. п. 1.3, где норма берется в том пространстве, в котором рассматривается функционал), если только не обращаются в нуль.

В §1 мы пользовались только первым членом ряда (1). В этом параграфе мы будем пользоваться также и вторым членом, т. е. более точной формулой

$$I\{y + \delta y\} - I\{y\} = \delta I\{y; \delta y\} + \frac{1}{2!} \delta^2 I\{y; \delta y\} + O(\|\delta y\|^3). \quad (2)$$

В конкретных примерах разложение (1), а потому и (2) получаются с помощью обычного ряда Тейлора. Например, для функционала (1.18) получаем

$$\begin{aligned} I\{y + \delta y\} = \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx = \int_a^b [F + (F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y') + \\ + \frac{1}{2!} (F''_{yy} \delta y^2 + 2F''_{yy'} \delta y \delta y' + F''_{y'y} \delta y'^2) + \dots] dx, \end{aligned}$$

где в F, F'_y и т. д. должны быть подставлены значения x, y, y' . Отсюда получаем для первой вариации выражение (1.19), а для второй —

$$\delta^2 I\{y; \delta y\} = \int_a^b (F''_{yy} \delta y^2 + 2F''_{yy'} \delta y \delta y' + F''_{y'y} \delta y'^2) dx; \quad (3)$$

отметим, что здесь, конечно, $\delta y^2 = (\delta y)^2, \delta y'^2 = (\delta y')^2$.

$\delta^2 I\{y; \delta y\}$ при фиксированной функции $y(x)$ представляет собой *квадратичный функционал* относительно δy . В общем случае понятие квадратичного функционала $f(y)$ в любом линейном пространстве (R) вводят так. Сначала определяется понятие *билинейного функционала* $\varphi(y_1, y_2)$, определенного при всех $y_1 \in (R), y_2 \in (R)$ и линейного по каждому из этих элементов в отдельности; затем полагают по определению

$$f(y) = \varphi(y, y).$$

Если пространство (R) нормированное, то квадратичный функционал $f(y)$ в нем называют *ограниченным*, если он удовлетворяет оценке

$$|f(y)| \leq K \|y\|^2;$$

при этом наименьшее возможное значение K называется *нормой* этого функционала. В задачах вариационного исчисления пространство (R) , в котором рассматривается функционал, обычно подбирается так, чтобы он был ограниченным.

Аналогично вводятся понятия *полилинейного функционала* $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ и отвечающего ему функционала $f(y) = \varphi(y, y, \dots, y)$. В правой части (1) слагаемые имеют относительно δy именно такой характер.

Чтобы получить формулу (1), можно при зафиксированных y и δy рассмотреть числовую функцию $I\{y + \lambda \delta y\}$ числового переменного λ и разложить ее в обычный ряд Тейлора по степеням λ :

$$I\{y + \lambda \delta y\} = I\{y\} + \left[\frac{d}{d\lambda} I\{y + \lambda \delta y\} \right]_{\lambda=0} \lambda + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} I\{y + \lambda \delta y\} \right]_{\lambda=0} \lambda^2 + \dots \quad (4)$$

Выражения в квадратных скобках и представляют собой вариации соответствующих порядков. Полагая в (4) $\lambda = 1$, получаем (1).

Другой способ вывода формулы (1) аналогичен примененному в п. 1.12 при получении функции (64). Заменяв приближенно функцию $y(x)$ набором конечного числа ее значений, мы заменяем тем самым функционал $I\{y\}$ на функцию $I(y_0, y_1, \dots, y_n)$ от конечного числа числовых переменных. Разложив приращение

$$\Delta I = I(y_0 + \delta y_0, y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n) - I(y_0, y_1, \dots, y_n)$$

по степеням приращений этих переменных и вернувшись обратно к функционалам, мы и получаем разложение (1). Из этого рассуждения роль второй вариации в теории экстремумов становится совершенно очевидной.

2. Условия экстремума в терминах второй вариации. Пусть функционал $I\{y\}$ принимает для $y = \bar{y}$ стационарное значение, т. е. $\delta I\{\bar{y}; \delta y\} \equiv 0$; другими словами, пусть выполнено основное необходимое условие (1.25) для экстремума. Тогда при $y = \bar{y}$ в правой части (2) первый член отсутствует, и потому главным становится второй. Поэтому, рассуждая, как при рассмотрении экстремума функции нескольких переменных (см., например, ЛВМ. п. XII.7), приходим к следующим выводам:

если $\delta^2 I > 0$ для любой δy (конечно, кроме вариации $\delta y \equiv 0$, когда $\delta^2 I = 0$), то при $y = \bar{y}$ функционал $I\{y\}$ имеет минимум;

если $\delta^2 I < 0$ для любой δy , то при $y = \bar{y}$ функционал $I\{y\}$ имеет максимум;

если $\delta^2 I$ может принимать значения обоих знаков, то при $y = \bar{y}$ функционал $I(y)$ имеет минимакс и экстремума не будет.

Единственный случай, когда по $\delta^2 I$ нельзя судить о наличии экстремума, тот, когда $\delta^2 I$ знака менять не может, но может обращаться в нуль (в частности, если она тождественно по δy равна нулю). Мы не будем разбирать этот сложный случай.

Более тщательный анализ показывает, что достаточное условие минимума в общем случае имеет вид $\delta^2 I\{\bar{y}; \delta y\} \geq C \|\delta y\|^2$ ($C = \text{const} > 0$). Это условие для функциональных пространств более сильное, чем просто $\delta^2 I > 0$. Однако для обычных задач вариационного исчисления это уточнение несущественно.

Эти формулировки, как и условие (1.25), желательно преобразовать к равносильному виду требования, наложенного непосредственно на искомую функцию $\bar{y}(x)$. Это преобразование проводится различно для

разных классов функционалов, и мы покажем его для некоторых таких классов.

Отметим, что тип экстремума (слабый или сильный и т. п. — см. п. 1.3) определяется выбором пространства, в котором рассматриваются функционал $I\{y\}$ и разложения (1) и (2).

3. Необходимые условия Лежандра. Рассмотрим функционал (1.18) при граничных условиях (1.26) или более общих граничных условиях, о которых говорилось в п. 1.13. Мы видели, что вторая вариация такого функционала выражается по формуле (3). Легко проверить, что:

если $F''_{y'y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))$ допускает при $a \leq x \leq b$ (не обязательно для всех таких x) положительные значения, то и $\delta^2 I\{\bar{y}; \delta y\}$ допускает положительные значения;

если $F''_{y'y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))$ допускает при $a \leq x \leq b$ отрицательные значения, то и $\delta^2 I\{\bar{y}; \delta y\}$ допускает отрицательные значения.

В самом деле, обозначим для краткости коэффициенты квадратичной формы под знаком интеграла (3), после подстановки в них $y = \bar{y}(x)$, соответственно, через $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\chi(x)$, и пусть $\chi(x_0) > 0$ ($a < x_0 < b$) (мы считаем все рассматриваемые функции и их производные непрерывными, так что если $\chi(x) \leq 0$ при $a < x < b$, то это верно и при $a \leq x \leq b$). Выберем в качестве δy функцию, график которой изображен жирно на рис. 94. (При этом, если желать иметь дело только с функциями из C_1 то уголки можно как угодно мало скруглить.) Тогда

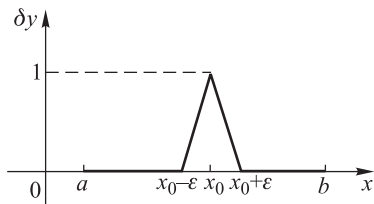


Рис. 94

$$\delta^2 I\{\bar{y}; \delta y\} = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x) \delta y^2 dx + 2 \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \psi(x) \delta y \delta y' dx + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \chi(x) \delta y'^2 dx. \quad (5)$$

Заменяя при малом ε коэффициенты их значениями в точке x_0 , получаем приближенные выражения для слагаемых в правой части (5)

$$\varphi(x_0) \cdot \frac{2}{3} \varepsilon, \quad \psi(x_0) \cdot 0, \quad \chi(x_0) \cdot \frac{2}{\varepsilon}.$$

Значит, при малом ε вся сумма (5) положительна, что и требовалось доказать.

Сравнивая полученный результат с утверждениями п. 2, приходим к *необходимым условиям Лежандра*: если функционал (1.18) при некоторых граничных условиях имеет при $y = \bar{y}$ (хотя бы слабый) минимум, то $F''_{y'y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$), если же максимум, то $F''_{y'y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \leq 0$ ($a \leq x \leq b$). Заодно мы получаем

достаточное условие для минимакса: если для экстремали $\bar{y}$ функция $F''_{y'y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))$ принимает при $a \leq x \leq b$ значения обоих знаков, то при $y = \bar{y}$ функционал (1.18) имеет минимакс. (Продумайте все эти утверждения!)

Необходимые условия Лежандра не являются достаточными; см. по этому поводу п. 5.

Аналогично рассматриваются функционалы от нескольких функций, например от двух функций, вида (1.46). Здесь разложения (1) и (2) также имеют место, но y и δy уже являются векторными функциями. Вторая вариация, взамен (3), приобретает вид

$$\delta^2 I\{\bar{y}; \delta y\} = \int_a^b \left(\sum_{i,j} F''_{y_i y_j} \delta y_i \delta y_j + \sum_{i,j} F''_{y_i y'_j} \delta y_i \delta y'_j + \sum_{i,j} F''_{y'_i y'_j} \delta y'_i \delta y'_j \right) dx,$$

где индексы i, j принимают независимо один от другого для функционала (1.46) значения 1, 2, а в случае n искоемых функций — все n значений. Рассуждая, как выше, приходим к необходимым условиям Лежандра и в этом случае: если функция $y = \bar{y}(x)$ доставляет рассматриваемому функционалу при некоторых граничных условиях минимум, то квадратичная форма

$$\sum_{i,j} F''_{y'_i y'_j}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \xi_i \xi_j \quad (6)$$

при любом $x(a \leq x \leq b)$ не должна принимать отрицательные значения, т. е. должна быть неотрицательной (все собственные значения ее матрицы должны быть ≥ 0); если для $y = \bar{y}$ будет максимум, то форма (6) должна быть всюду на отрезке $a \leq x \leq b$ неположительной. Если же для экстремали $\bar{y}(x)$ матрица $(F''_{y'_i y'_j})$ имеет, хотя бы при различных x , собственные значения обоих знаков, то при $y = \bar{y}$ функционал (1.46) имеет минимакс.

4. Квадратичный функционал. Рассмотрим функционал

$$I\{y\} = \int_a^b [P(x)y'^2 + Q(x)y^2] dx \quad (7)$$

при граничных условиях

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \quad (8)$$

с непрерывными (достаточно — конечными) коэффициентами $P(x), Q(x)$, причем впредь всегда будет требоваться, чтобы

$$P(x) > 0 \quad (a \leq x \leq b). \quad (9)$$

Уравнение Эйлера для квадратичного функционала (7) имеет вид

$$(P(x)y')' - Q(x)y = 0, \quad (10)$$

т. е. является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Ему, а также условиям (8), удовлетворяет, в частности, функция $y \equiv 0$; таким образом, она придает рассматриваемому функционалу стационарное значение, что, впрочем, очевидно и непосредственно (почему?). Но будет ли это значение экстремальным? Ответ на этот вопрос дают следующие утверждения.

Рассмотрим решение $y = Y(x)$ уравнения (10) при начальном условии

$$y(a) = 0, \quad y'(a) = C \neq 0. \quad (11)$$

Если $Y(x)$ при $a < x \leq b$ не имеет нулей, то значение $I\{0\} = 0$ является минимальным. Если $Y(x)$ имеет при $a < x < b$ по крайней мере один нуль, то значение $I\{0\} = 0$ минимаксное.

Отметим, что при перемене значения C начальные условия (11) изменяются пропорционально, а потому и функция $Y(x)$ умножается на константу, т. е. ее нули не зависят от C , можно было считать, например, $C = 1$. Первый нуль $\tilde{a}$ функции $Y(x)$ при $x > a$ называется точкой, сопряженной с точкой $x = a$ (относительно уравнения (10) или относительно функционала (7)); если таких нулей нет, а уравнение (10) определено при $a \leq x < \infty$, то можно условно принять $\tilde{a} = \infty$. Таким образом, утверждения предыдущего абзаца можно сформулировать так: если $\tilde{a} > b$, то функционал $I\{y\}$ имеет при $y \equiv 0$ минимум, а если $\tilde{a} < b$, — то минимакс. (Можно проверить, что если $\tilde{a} = b$, то при $y \equiv 0$ будет нестрогий минимум.)

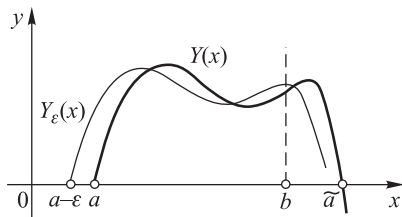


Рис. 95

Докажем сначала первое утверждение. Пусть $\tilde{a} > b$; тогда, прежде всего, из непрерывной зависимости решения и его производной от начальных данных следует, что решение $Y_\varepsilon(x)$ уравнения (10) при начальных условиях $y(a - \varepsilon) = 0$, $y'(a - \varepsilon) = C$ будет для достаточно малых $\varepsilon > 0$ отлично от нуля на всем интервале $a \leq x \leq b$ (рис. 95). Прибавим к правой части (7) слагаемое

$$\int_a^b d[v(x)y^2] \Big|_a^b = 0$$

(в силу (8)), где функцию $v(x)$ подберем так, чтобы новая подынтегральная функция

$$\begin{aligned} Py'^2 + Qy^2 + (vy^2)' &= Py'^2 + 2vy'y + (v' + Q)y^2 = \\ &= P \left(y'^2 + 2 \frac{v}{P} y'y + \frac{v' + Q}{P} y^2 \right) \end{aligned}$$

представляла собой полный квадрат. Для этого должно быть $\frac{v' + Q}{P} = \left(\frac{v}{P}\right)^2$, и легко непосредственно убедиться, что функция $v = -\frac{PY'_\varepsilon}{Y_\varepsilon}$ удовлетворяет этому уравнению (проверьте!). Но отсюда получаем, что при $y \neq 0$ будет $I\{y\} > 0$, что и требовалось доказать. (Продумайте это искусственное доказательство; где было использовано условие $\tilde{a} > b$?)

Докажем теперь второе утверждение. Пусть $\tilde{a} < b$ тогда положим,

$$w(x) = Y(x) \quad (a \leq x \leq \tilde{a}), \quad w(x) \equiv 0 \quad (\tilde{a} \leq x \leq b)$$

Это кусочно-гладкая экстремаль (п. 1.20). Но так как в точке $x = \tilde{a}$ излома условия Вейерштрасса–Эрдмана не выполняются (проверьте!), то значение $I\{w\} = 0$ не экстремально, и потому имеются функции $w_1(x), w_2(x)$, для которых $I\{w_1\} > 0$, $I\{w_2\} < 0$. Но тогда и $I\{\lambda w_1\} > 0$, $I\{\lambda w_2\} < 0$ при любом $\lambda = \text{const} \neq 0$, т. е. при $y \equiv 0$ будет минимум. Оба утверждения доказаны.

Рассмотрим частный случай, когда коэффициенты $P > 0$ и Q постоянны. Ясно, что если $Q \geq 0$, то значение $I\{0\}$ минимальное. Пусть теперь $Q < 0$; тогда уравнение (10) при начальном условии (11) имеет решение $y = C \sqrt{\frac{P}{|Q|}} \sin \sqrt{\frac{|Q|}{P}} (x - a)$ (проверьте!), которое для значений $x > a$ обращается в нуль при $x = \tilde{a} = a + \pi \sqrt{\frac{P}{|Q|}}$. Значит, если в рассматриваемом случае разность $b - a$ будет меньше чем $\pi \sqrt{\frac{P}{|Q|}}$, то значение $b - a$ минимальное, а если больше, — то минимаксное.

Квадратичный функционал общего вида

$$I\{y\} = \int_a^b [P(x)y'^2 + R(x)y'y + Q(x)y^2] dx \quad (12)$$

при граничных условиях (8) приводится к виду (7) с помощью интегрирования среднего члена по частям:

$$I\{y\} = \int_a^b \left[P(x)y'^2 + \left(Q(x) - \frac{1}{2} R'(x) \right) y^2 \right] dx; \quad (13)$$

при этом уравнения Эйлера для функционалов (12) и (13) совпадают (проверьте все это!). Значит, полученные нами выводы о характере значения $I\{0\}$ автоматически распространяются на функционалы вида (12).

Рассмотрим теперь функционал, аналогичный (7), зависящий от любого числа функций

$$I\{y\} = \int_a^b [y'^* P(x) y' + y'^* Q(x) y] dx, \quad (14)$$

где $\mathbf{y}$ — столбец (числовой вектор, зависящий от x), $\mathbf{P}(x)$, $\mathbf{Q}(x)$ — квадратные симметрические матрицы, непрерывно зависящие от x , звездочка означает транспонирование. Если граничные условия имеют вид

$$\mathbf{y}(a) = 0, \quad \mathbf{y}(b) = 0,$$

то более общий квадратичный функционал, с добавочным членом $\mathbf{y}^{*\mathbf{R}}(x)\mathbf{y}$ под знаком интеграла в случае симметрической матрицы $\mathbf{R}(x)$ приводится к виду (14) (как?). Системам уравнений Эйлера для функционала (14) в матричной записи такова:

$$(\mathbf{P}(x)\mathbf{y}') - \mathbf{Q}(x)\mathbf{y} = 0. \quad (15)$$

(Проверьте, перейдя к скалярной записи функционала и применив равенство $\frac{d}{dy_i} \sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j = 2 \sum_j a_{ij} y_j$).

Пусть квадратичная форма $\xi^* \mathbf{P}(x) \xi$ — положительно определенная при каждом рассматриваемом значении x . Обозначим через $\mathbf{Y}^k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) решение системы (15) при начальных условиях $\mathbf{y}(a) = 0$, $\mathbf{y}'(a) = \mathbf{C}^k$, где векторы $\mathbf{C}^k$ произвольны, лишь бы определитель матрицы $(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2, \dots, \mathbf{C}^n)$ был $\neq 0$. Тогда сопряженной с a точкой $\tilde{a}$ называется первое значение $x > a$, для которого $\det(\mathbf{Y}^1(x), \mathbf{Y}^2(x), \dots, \mathbf{Y}^n(x)) = 0$. (Можно показать, что $\tilde{a}$ не зависит от выбора векторов $\mathbf{C}^k$.) Рассуждая таким же образом, как в скалярном случае, можно доказать те же утверждения о характере значения $I\{0\} = 0$, что были приведены в третьем абзаце этого пункта.

5. Условия Якоби. Полученные в п.4 результаты можно применить к квадратичному относительно δy функционалу (3). Пусть для некоторой функции $\bar{y}(x)$ удовлетворяются уравнение Эйлера (1.36) и граничные условия (1.26), т.е. она придает функционалу (1.18) при таких условиях стационарное значение. Обозначим для краткости $\bar{F}_{yy}'' = F_{yy}''(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))$ и т.д. Тогда, прежде всего, в силу п.3, если $\bar{F}_{y'y'}''$ меняет знак на интервале $a \leq x \leq b$, то значение $I\{\bar{y}\}$ минимаксное. Кроме того, мы уже упоминали в п.1.15, что наличие нулей у $\bar{F}_{y'y'}''$ всегда вызывает существенные осложнения. Поэтому мы будем предполагать, что $\bar{F}_{y'y'}''$ сохраняет знак для определенности $\bar{F}_{y'y'}'' > 0$ ($a \leq x \leq b$).

Обозначим на минуту $\delta y = z$ в функционале (3), куда подставлено $y = \bar{y}(x)$; тогда уравнением Эйлера для него будет

$$\left(\bar{F}_{y'y'}'' z' \right)' + \left(\frac{d}{dt} \bar{F}_{yy}'' - \bar{F}_{yy}'' \right) z = 0. \quad (16)$$

Оно называется *уравнением Якоби* для исходного функционала (1.18). Обозначим через $\tilde{a}$ точку, сопряженную с a относительно этого уравнения; обратите внимание, что, в отличие от квадратичного исходно-

го функционала, для общего функционала (1.18) такая сопряженная точка зависит не только от функционала, но и от выбора экстремали $\bar{y}(x)$. Тогда, если $\tilde{a} > b$, то в силу п.4 функционал (3) имеет при $\delta y = 0$ минимум, а потому согласно п.2 функционал $I\{y\}$ имеет при $y = \bar{y}(x)$ слабый минимум; если же $\tilde{a} < b$, функционал $I\{y\}$ имеет при $y = \bar{y}(x)$ слабый минимакс. Ясно, что если $\bar{F}''_{y'y'} < 0$ ($a \leq x \leq b$), то вместо минимума надо говорить о максимуме. Эти условия экстремума, выраженные в терминах сопряженных точек, называются *условиями Якоби*.

Условия Якоби имеют простой геометрический смысл. Рассмотрим однопараметрическое семейство экстремалей, удовлетворяющих первому из граничных условий (1.26), т.е. проходящих через заданную точку $A(a; y_A)$. Такое семейство называется *центральной полем экстремалей* (продумайте это название); типичный вид такого поля показан на рис. 96. Зафиксируем одну из этих экстремалей $\bar{y}(x)$; подставляя $y = \bar{y}(x) + \delta y$ в уравнение Эйлера (1.37) и отбрасывая члены выше первого относительно δy порядка малости (т.е. варьируя уравнение (1.37), что мы предоставим читателю), мы получаем как

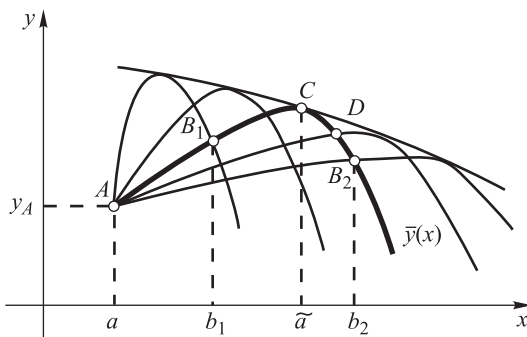


Рис. 96

раз уравнение (16). Таким образом, (16) — это линеаризованное уравнение для экстремалей, близких к $\bar{y}(x)$. В частности, мы видим, что $\tilde{a}$ — это абсцисса первой после A точки пересечения экстремали $y = \bar{y}(x)$ с бесконечно близкой экстремалью центрального поля, т.е. абсцисса первой точки C касания экстремали $y = \bar{y}(x)$ с огибающей семейства (рис. 96). Если $\bar{F}''_{y'y'} > 0$ и конечная точка B_1 экстремали находится до C, то функционал I принимает на экстремали AB_1 слабо минимальное значение (по сравнению с близкими линиями с теми же концами). Однако если конечная точка экстремали B_2 расположена после C, то, «срезая» эту экстремаль (т.е. переходя к кусочно-ломаной экстремали ADB_2 , и т.д., вплоть до «нижней» дуги AB_2), мы уменьшаем значение функционала, откуда и получается минимакс.

В качестве примера рассмотрим задачу о минимальной поверхности вращения (пп. 1.1 и 1.7). Здесь $F = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}$, т.е. $F''_{y'y'} > 0$ при $y > 0$, и потому максимальных значений у функционала нет. Выбрав конкретную экстремаль

$y = k \operatorname{ch} \frac{x}{k}$ (см. (1.42)), получим уравнение Якоби (проверьте!)

$$\left(\frac{k}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{k}} z' \right)' + \frac{1}{k} \frac{z}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{k}} = 0. \quad (17)$$

Так как это линейное однородное уравнение имеет одним из частных решений $z = \operatorname{sh} \frac{x}{k}$, то оно допускает понижение порядка по формуле $z = u \operatorname{sh} \frac{x}{k}$, что приводит к общему решению (проделайте вычисления!) уравнения (17)

$$z = C_1 \operatorname{sh} \frac{x}{k} + C_2 \left(\operatorname{ch} \frac{x}{k} - \frac{x}{k} \operatorname{sh} \frac{x}{k} \right).$$

При $a = -b < 0$ начальное условие $z(a) = 0$, $z'(a) \neq 0$ удовлетворяется при $C_1 = \frac{\operatorname{ch}(b/k)}{\operatorname{sh}(b/k)} - \frac{b}{k}$, $C_2 = 1$, откуда после преобразований получаем

$$z = \frac{\operatorname{sh} \frac{x+b}{k}}{\operatorname{sh} \frac{b}{k}} - \frac{x+b}{k} \operatorname{sh} \frac{x}{k} = \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{x+b}{k}}{\operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{sh} \frac{x}{k}} - \frac{x+b}{k} \right) \operatorname{sh} \frac{x}{k}.$$

Таким образом, сопряженная с $-b$ точка $\widetilde{-b}$ представляет собой первый нуль этой функции при $x > -b$. Так как при $-b < x \leq 0$ эта функция положительна, а с помощью дифференцирования легко убедиться, что при $0 < x < \infty$ последняя круглая скобка монотонно убывает от ∞ до $-\infty$, то неравенства $\widetilde{-b} > b$ и $\widetilde{-b} < b$ равносильны неравенствам

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{2b}{k}}{\operatorname{sh} \frac{b}{k}} - \frac{2b}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k} > 0, \text{ т. е. } \operatorname{ch} \frac{b}{k} - \frac{b}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k} > 0,$$

или соответственно < 0 . А эти неравенства равносильны тому, что точка $\left(b; k \operatorname{ch} \frac{b}{k} \right)$ лежит на

цепной линии $y = k \operatorname{ch} \frac{x}{k}$ до ее соприкосновения с огибающей семейства этих линий (рис. 93) или после. Значит, из двух цепных линий, проходящих через след M колечка (рис. 97), первая порождает геликоид с минимальной площадью, а вторая — с минимаксной площадью.

Можно показать (мы не будем здесь этим заниматься), что первая поверхность имеет минимальную площадь и среди всех не обязательно осесимметричных поверхностей, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Тем самым высказанная в п. 1.1 гипотеза об осесимметричной форме равновесия мыльной пленки оправдывается. Это не является чем-то само собой разумеющимся, так как задача с симметричными (в данном примере осесимметричными) условиями может, вообще говоря, иметь несимметричное решение. Аналогично выводятся условия Якоби для функционала

$$I\{\mathbf{y}\} = \int_a^b F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx, \quad \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a, \quad \mathbf{y}(b) = \mathbf{y}_b, \quad (18)$$

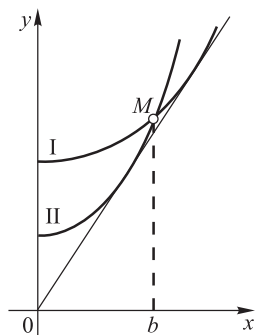


Рис. 97

зависящего от векторной функции $\mathbf{y}(x)$, другими словами, от нескольких скалярных функций. Здесь выражение для второй вариации, взамен (3), имеет вид

$$\delta^2 I\{\mathbf{y}; \delta \mathbf{y}\} = \int_a^b \left[\delta \mathbf{y}^* (F''_{y_i y_j}) \delta \mathbf{y} + 2 \delta \mathbf{y}^* (F''_{y_i y'_j}) \delta \mathbf{y}' + \delta \mathbf{y}'^* (F''_{y'_i y'_j}) \delta \mathbf{y}' \right] dx. \quad (19)$$

Если матрица $(F''_{y'_i y'_j})$ симметрическая, то для выяснения знака этого квадратичного функционала можно воспользоваться результатами, приведенными в конце п. 4.

6. Геодезические линии. Из условий Якоби вытекает, в частности, такое следствие. Пусть вдоль некоторой экстремали $y = \overline{y}(x)$ ($a \leq x \leq b$) будет $F''_{y'_i y'_i} > 0$, а коэффициенты уравнения (16) ограничены. Тогда *любой достаточно малый кусок этой экстремали*

ли ($a_1 \leq x \leq b_1$) *реализует минимум функционала* $\int_{a_1}^{b_1} F(x, y, y') dx$

($y(a_1) = \overline{y}(a_1)$, $y(b_1) = \overline{y}(b_1)$). Аналогичное утверждение справедливо и для функционалов от нескольких функций, например вида (1.46), если матрица $(F''_{y'_i y'_i})$ имеет в каждой точке экстремали все собственные значения положительные.

Для доказательства последнего утверждения можно оценить каждый член в средней квадратичной форме под знаком интеграла (19) по формуле (докажите ее!)

$$A \delta y_i \delta y'_j \geq \frac{|A|}{2\varepsilon} (\delta y_i)^2 - |A| \frac{\varepsilon}{2} (\delta y'_j)^2, \quad (20)$$

где $\varepsilon > 0$ — любое положительное число. После этой оценки объединим первые слагаемые в правой части (20) с первой квадратичной формой в (19), а вторые — с третьей. Тогда при фиксированном достаточно малом ε третья квадратичная форма останется положительно определенной, так как свойство формы быть положительно определенной устойчиво относительно изменения коэффициентов (почему?). Значит, в силу приведенных утверждений о функционале (14) при достаточно малом $b - a$ функционал, полученный после оценки (20), будет принимать только положительные значения, а значит, и исходный функционал также.

Отметим еще аналогичное свойство для функционалов $\int_{(G)} F(\mathbf{x}, y, y'_x) dG$ от

функций нескольких переменных. Здесь для реализации минимума необходимо, чтобы матрица $(F''_{p_i p_j})$ была неотрицательно определенной, и достаточно, чтобы она была положительно определенной, а область (G) — достаточно малой.

Эта локальная гарантированность экстремума особенно наглядна при рассмотрении *геодезических линий* на заданной поверхности (S) , т.е. линий, длина которых имеет между любыми двумя их точками стационарное значение. Другими словами, если мало изменить по

отклонению и по направлению (т.е. в смысле C_1) любую дугу (l_{AB}) такой линии, не меняя концов A, B этой дуги и не вылезая из (S), то длина изменится на малую высшего порядка. Так как отклонение на большом участке AB можно получить в результате наложения отклонений на малых участках (AB_1 , A_1B_2 и A_2B на рис. 98), то достаточно требовать, чтобы длина малых участков геодезической линии имела стационарное значение. (Это рассуждение имеет общий характер, оно применимо и к другим вариационным задачам.) Но на малом участке всегда можно, выбрав соответственно декартовы координаты, представить поверхность уравнением $z = \varphi(x, y)$, а линию на ней — уравнением $y = y(x)$, $z = \varphi(x, y(x))$ (почему?). Значит, речь идет о стационарном значении функционала

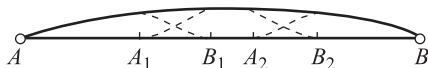


Рис. 98

$$\int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + [\varphi'_x(x, y) + \varphi'_y(x, y)y']^2} dx \quad (21)$$

при заданных значениях $y(a), y(b)$. Так как соответствующее уравнение Эйлера (1.36) второго порядка, то мы приходим к выводу, что через каждую точку (S) в каждом направлении проходит ровно одна геодезическая линия. Так как $F''_{yy'} > 0$ (проверьте!), то любая малая дуга геодезической линии реализует не только стационарное, но даже минимальное значение длины (причем, как будет показано в п. 7, не только слабый, но даже сильный минимум).

В то же время большие участки геодезических линий могут придавать длине не минимальное, а минимаксное значение. Это хорошо видно, если в качестве (S) взять сферу, на которой геодезическими служат дуги *больших кругов*, т.е. сечений сферы плоскостями, проходящими через ее центр. Если такая дуга меньше полуокружности, то ее длина минимальна по сравнению с длинами дуг с теми же концами; вообразите, например, что между этими концами натянута нить, которая при таком натяжении для любой поверхности (S) должна пойти по геодезической (почему?). Но если дуга большого круга больше полуокружности, то ее длина имеет минимаксное значение, так как с помощью как угодно малой деформации этой дуги, без смещения ее концов, можно ее длину как увеличить, так и уменьшить (как это сделать?).

Если поверхность (S) произвольная, то чтобы выяснить, до каких пор геодезическая линия (l), выходящая из некоторой точки A , реализует минимум длины, нужно в силу условий Якоби взять первую точку $\bar{A}$ пересечения (l) с другой геодезической, выходящей из A по бесконечно близкому с (l) направлению. Точка $\bar{A}$, сопряженная с A вдоль (l), и отделяет дуги минимальной длины, с началом в A , от дуг минимаксной длины. Если указанного пересечения нет, то все дуги (l) с началом в A реализуют минимальную длину.

На геодезических линиях видна еще одна особенность многих задач вариационного исчисления, Рассмотрим две точки A, B на поверхности прямого кругового цилиндра (рис. 99). Так как при разворачивании цилиндра на плоскость (как и при любом изгибании поверхности без изменения длин на ней) геодезические переходят в геодезические (почему?), а на плоскости геодезическими служат прямые, то на прямом круговом цилиндре геодезическими являются винтовые линии с любым шагом h и их предельные формы — окружности (когда $h = 0$) и прямые ($h = \infty$). Однако точки A, B можно соединить бесконечным числом дуг винтовых линий (три из них показаны на рис. 99), для каждой из которых длина имеет минимальное значение. Таким образом, задача о минимальной

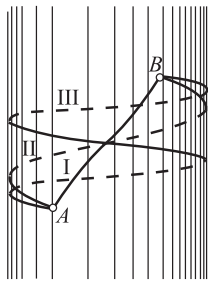


Рис. 99

длине дуги, соединяющей две точки, имеет в данном случае бесконечное число решений, из которых одно реализует тотальный минимум (на рис. 99 это дуга I), а все остальные — только локальные. Такая многозначность решения встречается в ряде задач вариационного исчисления, хотя, конечно, она далеко не обязательна, например в задачах п. 1 ее не было.

Геодезические линии на поверхности (S) имеют интересную механическую интерпретацию, для получения которой запишем функционал (21) в параметрической форме

$$\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

с конечной связью $H(x, y, z) = 0$ — уравнением поверхности (S) . В силу п. 1.13 для получения геодезических надо написать систему уравнений Эйлера для вспомогательной функции

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \lambda(t)H(x, y, z).$$

Это даст

$$-\lambda(t)H'_x - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \text{ и т. д.}$$

Помножив эти уравнения на орты осей и сложив результаты, получим

$$\frac{d\tau}{dt} + \lambda(t) \operatorname{grad} H = 0,$$

где τ — единичный вектор касательной к искомой линии (L) . Но так как вектор $\frac{d\tau}{dt}$ направлен по главной нормали к (L) , а вектор $\operatorname{grad} H$ — по нормали к (S) (ЛВМ, пп. VII.24 и XII.2), то мы получаем, что главная нормаль к геодезической должна в каждой ее точке совпадать с нормалью к поверхности. Но у точки, движущейся без тангенциального ускорения по некоторой линии, вектор ускорения, а потому и силы направлены по главной нормали к линии. Поэтому траекториями материальных точек, движущихся по поверхности «по

инерции», т. е. без внешних сил и без трения, служат геодезические линии на этой поверхности. (Продумайте это!)

Понятие геодезических линий вводится аналогичным образом в многообразиях евклидовых пространств любого числа измерений, а также в общих римановых пространствах (пп. V.2.4, 5). Эти геодезические, свойства которых те же, что и для линий на поверхности, играют в теории этих многообразий и пространств центральную роль, ту же, что прямые линии для евклидовых пространств. Мы еще остановимся на этом в §4.

7. Условия сильного экстремума. Рассмотрим теперь условия сильного экстремума (п. 1.3) для функционала. (1.18) при граничном условии (1.26). Пусть $\bar{y}(x)$ ($a \leq x \leq b$) — экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям и описанным в п. 5 условиям Якоби, достаточным для слабого минимума. Так как эти условия «почти необходимые» (сомнительным является только «тонкий» случай, когда строгие неравенства в условиях Якоби могут обратиться в равенства), а в п. 1.3 мы видели, что возможны «грубые» примеры, когда слабый минимум не является сильным, то ясно, что условия Якоби существенно недостаточны для сильного минимума. Добавочное условие, достаточное вместе с условиями Якоби для сильного минимума (и «почти необходимое» в том же смысле), получил К. Вейерштрасс.

Введем функцию Вейерштрасса

$$E(x, y, p, q) = F(x, y, q) - F(x, y, p) - (q - p)F'_p(x, y, p).$$

(Обозначив $q = p + h$, легко увидеть, что это есть нелинейная часть разложения функции $F(x, y, p + h)$ по степеням h .) Тогда упомянутое добавочное условие имеет вид

$$E(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), q) > 0 \quad (a \leq x \leq b) \quad (22)$$

для всех $q \neq \bar{y}'(x)$ (ясно, что $E(x, y, p, p) \equiv 0$). Если же

$$E(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), q) < 0 \quad (23)$$

хотя бы для одного набора значений x, q , то сильного минимума при $y = \bar{y}$ не будет. Из простой формулы

$$\varphi(q) - \varphi(p) - (q - p)\varphi'(p) = \int_p^q dr \int_p^r \varphi''(s) ds$$

(проверьте ее!) вытекает, что условие (22) выполняется, в частности, если $F''_{pp}(x, y, p) > 0$ для $y = \bar{y}(x)$ и всех значений p . (Отсюда, между прочим, вытекает упомянутое в п. 6 утверждение о том, что малые куски геодезических реализуют сильный минимум длины.)

Доказательство приведенных утверждений, связанных с функцией Вейерштрасса, можно найти в курсах вариационного исчисления. Мы здесь при-

ведем только грубые соображения по этому поводу. Допустим, что дуга BD экстремали заменена на «зубец» BCD (рис. 100) с наклоном q участка CD , существенно отличающимся от наклона $p = \bar{y}'(b_1)$ экстремали в точке D . Тогда линия $ABCDE$ будет близка к экстремали AE в смысле $C[a, b]$, но не в смысле $C_1[a, b]$. Обозначив для краткости $x_D - x_C = h$, и пользуясь на интервале a_1, b_1 формулой (1.91), получим выражение для δI при такой замене:

$$\delta I = F'_{y'}(b_1, y_1, p)(-qh) + [F(b_1, y_1, p) - pF'_{y'}(b_1, y_1, p)](-h) + \\ + F(b_1, y_1, q)h = E(b_1, \bar{y}(b_1), \bar{y}'(b_1), q)h.$$

Значит, если для каких-либо x, q выполняется условие (23), то, приняв это x за b_1 , можно описанным способом уменьшить значение $I\{\bar{y}\}$, т. е. сильного минимума при $y = \bar{y}$ не будет. Если же для

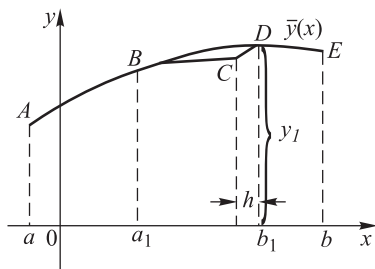


Рис. 100

любых x, q выполнено неравенство (22), то любая описанная деформация приводит к увеличению $I\{\bar{y}\}$, а комбинируя такие деформации, можно прийти к более или менее любой линии, близкой к исходной экстремали в смысле C , но не C_1 . Если же близость будет и в смысле C_1 , то действуют условия Якоби.

Для функционала (18) условия сильного минимума совершенно аналогичные, причем функция Вейерштрасса имеет вид

$$E\{x, y, p, q\} = F\{x, y, q\} - F\{x, y, p\} - (q^* - p^*)F'_p(x, y, p).$$

Максимум для $I\{y\}$ служит минимумом для $-I\{y\}$. Поэтому в дальнейшем мы будем обычно говорить именно о минимуме функционалов.

8. Вариационная теория собственных значений. К исследованию квадратичного функционала (7) при условии (9) имеется еще один, весьма полезный подход, совершенно аналогичный исследованию квадратичных форм и самосопряженных отображений на основе экстремального свойства собственных значений (пп. IV.1.6, 7). Мы будем рассматривать функционал (7) при граничных условиях (8).

Исходя из упомянутой аналогии с теорией квадратичных форм, рассмотрим значения функционала (7) при интегральной связи

$$\int_a^b y^2 dx = 1. \quad (24)$$

Эти значения ограничены снизу, так как при условиях (9) и (24)

$$I\{y\} \geq \int_a^b Q(x)y^2 dx \geq \min_{a \leq x \leq b} Q(x) \int_a^b y^2 dx = \min Q(x).$$

Возьмем функцию $y_1(x)$, для которой это значение является наименьшим. (Существование такой функции требует доказательства, так как, например, в п. 1.20 мы видели, что в других задачах бывают случаи, когда значения функционала ограничены снизу, но наименьшее значение не достигается, во всяком случае, если не вводят обобщенных решений. См. по этому поводу п. 9.) Согласно правилу п. 1.12 функция $y_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(P(x)y_1')' - [Q(x)y_1 - \lambda_1 y_1] = 0. \quad (25)$$

Если обозначить для краткости

$$L[y] = -(P(x)y_1')' + Q(x)y, \quad (26)$$

то уравнение (25) можно переписать так:

$$L[y] = \lambda_1 y_1 \quad (27)$$

Если трактовать выражение $L[y]$ как линейный оператор в пространстве функций, то формула (27) показывает, что y_1 является собственным вектором (говорят также — *собственной функцией*) этого оператора, отвечающим собственному значению λ_1 .

Для дальнейшего полезна формула, справедливая для любых функций $u(x), v(x)$, удовлетворяющих граничным условиям (8):

$$\int_a^b (Lu) v \, dx = \int_a^b u Lv \, dx; \quad (28)$$

мы предоставляем читателю доказать ее с помощью интегрирования по частям.

Конечно, при этом подразумевается, что функции берутся только такие, у которых рассматриваемые здесь производные конечны или, во всяком случае, таковы, что встречающиеся тут интегралы абсолютно сходятся; мы не будем впредь это оговаривать. Наглядно рассматривать такие функции как элементы гильбертова пространства $L_2[a, b]$ (п. 1.3); в частности, тогда формула (28) означает, что оператор L , рассматриваемый на подпространстве функций, удовлетворяющих условиям (8), является самосопряженным (п. IV.1.6).

Построив функцию $y_1(x)$, мы ищем минимум функционала (7) при тех же граничных условиях и двух интегральных связях

$$\int_a^b y^2 \, dx = 1, \quad \int_a^b y_1(x) y \, dx = 0. \quad (29)$$

Функция $y_2(x)$, реализующая этот минимум, в силу п. 1.11 должна удовлетворять уравнению $L[y_2] = \lambda_2 y_2 + \mu_2 y_1$ (проверьте!). Однако если

умножить обе части на y_1 и проинтегрировать от a до b , а затем воспользоваться формулами (28), (27) и (29) (проделайте это!), то мы получаем, что $\mu_2 = 0$, т. е. $y_2(x)$ является собственной функцией оператора L , отвечающей собственному значению λ_2 .

Третья собственная функция $y_3(x)$, отвечающая собственному значению λ_3 , реализует минимум функционала (7) при граничных условиях (8) и интегральных связях

$$\int_a^b y^2 dx = 1, \quad \int_a^b y_1(x) y dx = 0, \quad \int_a^b y_2(x) y dx = 0.$$

и т. д. Таким путем мы получаем бесконечную последовательность

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots \quad (30)$$

собственных функций оператора L для граничных условий (8). Все эти функции в силу наложенных при их построении связей ортогональны друг другу и *нормированы*; последнее означает здесь, что они удовлетворяют условию (24).

Ясно, что $I\{y_1\} \leq I\{y_2\} \leq I\{y_3\} \leq \dots$, так как при наложении дополнительных связей множество сравниваемых функций сужается, и потому наименьшее значение функционала на этом множестве может измениться только в сторону увеличения. (Продумайте это общее соображение!) Можно доказать (на этом мы не будем здесь останавливаться), что последовательность $I\{y_n\}$ стремится к бесконечности. Наконец, с помощью интегрирования по частям первого члена в интеграле (7) легко доказать формулу

$$I\{y\} = \int_a^b L[y]y dx + P(x)yy'|_a^b, \quad (31)$$

из которой с помощью равенств $L[y_n] = \lambda_n y_n$ и (24) получаем, что

$$I\{y_n\} = \int_a^b \lambda_n y_n y_n dx = \lambda_n. \quad (32)$$

Набор значений λ_n называется *спектром* оператора L при условиях (8).

Важнейшим свойством последовательности (30) является то, что она не только ортогональная, но и полная, т. е. в ряд по ней может быть разложена любая функция. Исчерпывающее доказательство этой полноты содержится в курсах интегральных уравнений и спектральной теории дифференциальных операторов. Однако причину полноты

нетрудно понять: в самом деле, если подобно п. 1.12 заменить каждую функцию $y(x)$ набором ее значений $y_0, y_1, \dots, y_n$ (а еще лучше говорить о величинах $\sqrt{h} y_k$, где h — шаг по x), то функционал (7) превратится в квадратичную форму от этих значений; тогда описанная процедура вращается в точности в описанную в п. IV.1.7 процедуру отыскания собственных векторов квадратичной формы, а эта совокупность, как было показано, обладает свойством полноты.

Рассмотрим, например, функционал

$$I\{y\} = \int_0^t y'^2 dx \quad (33)$$

при граничных условиях (8), т. е.

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (34)$$

Уравнение для собственных функций приобретает вид $-y'' = \lambda y$, $y(0) = y(l) = 0$. Решение этого уравнения, которое мы предоставляем читателю, приводит к последовательности собственных функций и соответствующих собственных значений

$$y_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (35)$$

Ряд по найденным собственным функциям — это хорошо известный ряд Фурье по синусам.

Отметим, что при рассмотрении полноты в последнем перед петитом абзаце аппроксимирующую квадратичную форму надо рассматривать не во всем $(n+1)$ -мерном пространстве $y_0, y_1, \dots, y_n$, а в его $(n-1)$ -мерном подпространстве, определяемом равенствами $y_0 = 0$, $y_n = 0$. Поэтому и разложением по собственным функциям чаще всего пользуются для функций, удовлетворяющих условиям (8). И действительно, для равномерной сходимости ряда по найденным в предыдущем абзаце синусам нужны не только непрерывность разлагаемой функции $f(x)$, но и равенства $f(0) = f(l) = 0$. Для общего функционала (7) и граничных условий (8) ситуация аналогичная. (Если же мы хотим, чтобы и после почленного дифференцирования ряд сходил равномерно, то $f(x)$ должна иметь непрерывную производную и т. д.) Но если рассматривать более свободную сходимость разложения в среднем квадратичном, т. е. в смысле $L_2[a, b]$, то функция $f(x)$, как и для рядов Фурье, может не только не удовлетворять условиям (8), но и не быть непрерывной, а только квадратично суммируемой.

Оператор L и его собственные значения часто рассматриваются при граничных условиях, отличных от (8). Здесь также возможен вариационный подход. Так, можно осуществить описанное выше построение, если на одном или на обоих концах граничное значение для функционала (7) снято (т. е. не ставится). Тогда в силу п. 1.15 собственные функции будут на этом конце удовлетворять естественному граничному условию (1.82), которое для функционала (7) превращается просто в $y' = 0$. Все приведенные рассуждения и свойства остаются справедливыми и для этого случая.

Если взамен (7) рассматривается более общий функционал

$$I\{y\} = \int_a^b [P(x)y'^2 + Q(x)y^2] dx + \alpha[y(a)]^2 + \beta[y(b)]^2, \quad (36)$$

причем граничные условия не ставятся, то в силу п. 1.13 естественные граничные условия (см. (1.84)) будут иметь вид

$$(P(x)y' - \alpha y)_{x=a} = 0, \quad (P(x)y' + \beta y)_{x=b} = 0 \quad (37)$$

Схема построения собственных значений и собственных функций остается без изменения, однако минимизируется, конечно, уже функционал (36), а не (7). Интересно, что при этом формула (28) для функций, удовлетворяющих условиям (37), остается в силе, равно как и окончательная формула (32), в которой I вычисляется в силу (36). (Проверьте это с помощью интегрирования по частям.)

Могло бы показаться, что тот же результат можно получить, минимизируя функционал (7) при условии (24) на совокупности функций, удовлетворяющих

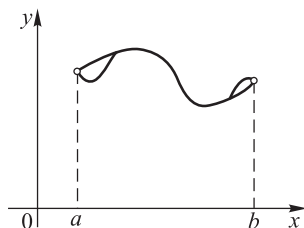


Рис. 101

граничным условиям (37), затем добавить условие ортогональности и т. д. Однако существенно заметить, что это не так. Дело в том, что любую функцию — скажем, из C_1 — можно как угодно мало изменить вместе с значением функционала (7), после чего она будет удовлетворять условиям (37). Для этого надо, зная концевые значения y , подсчитать из (37) концевые значения y' , после чего соответственно изогнуть кончики графика $y(x)$, как на рис. 101. Поэтому, в принципе нет разницы, ищется ли наименьшее значение функционала

(7) на функциях, удовлетворяющих, условиям (37), или вообще на всех функциях. Но так как функция $y_0(x)$, реализующая минимум функционала (7) (при условии (24)) на совокупности всех функций, удовлетворяет условиям $y'(a) = y'(b) = 0$, то мы получаем, что на функциях, удовлетворяющих (37), функционал (7) наименьшего значения не достигает, а при приближении к его нижней грани мы в пределе получаем функцию $y_0(x)$, которая условиями (37) не удовлетворяет. (Подумайте, почему в случае граничных условий (8) аналогичное рассуждение не проходит.)

Совершенно аналогично строится теория собственных значений для операторов от функций нескольких переменных. Например, минимизация квадратичного функционала

$$I\{x\} = \int_{(G)} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + Q(x, y)z^2 \right] dG \quad (38)$$

при связи

$$\int_{(G)} z^2 dG = 1 \quad (39)$$

и граничном условии

$$z|_{(\Gamma)} = 0 \quad (40)$$

приводит к первой собственной функции $z_1(x, y)$ и наименьшему собственному значению λ_1 оператора

$$L[z] = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + Q(x, y)z \quad (41)$$

при условии (40). Добавочная связь $\int_{(G)} z z_1 dG = 0$ приводит ко второй соб-

ственной функции, отвечающей следующему по величине собственному значению и т. д. (Впрочем, можно показать, что для задач с двумя независимыми переменными более естественно снабжать собственные значения и собственные функции двумя индексами.) При этом оказывается, что все основные утверждения, приведенные выше для функционала (7), остаются и здесь в силе.

Если снять граничное условие (40) со всего контура или с какой-либо его части, то на этой части собственные функции будут удовлетворять естественному граничному условию (см. (1.101))

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cos(\widehat{\mathbf{n}}, x) + \frac{\partial z}{\partial y} \cos(\widehat{\mathbf{n}}, y) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial z}{\partial n} = 0.$$

Аналогично, если вместо (38) рассматривается функционал

$$\int_{(G)} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + Q(x, y)z^2 \right] dG + \int_{(\Gamma)} \varphi(x, y)z^2 d\Gamma,$$

при снятых граничных условиях, то описанная конструкция приводит к собственным функциям оператора для естественных граничных условий

$$\left[\frac{\partial z}{\partial n} + \varphi(x, y)z \right]_{(\Gamma)} = 0.$$

9. О существовании минимума. Остановимся еще на вопросе о существовании функции, реализующей наименьшее значение функционала; этот вопрос проявляется и во многих других аналогичных задачах. Пусть, например, рассматривается функционал

$$I\{y\} = \int_a^b [P(x)y'^2 + Q(x)y^2] dx \quad (7)$$

с $P(x) > 0$ при граничных условиях

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \quad (8)$$

и интегральной связи

$$\int_a^b y^2 dx = 1. \quad (24)$$

Мы уже упоминали о том, что значения этого функционала ограничены снизу. Поэтому, если наименьшее его значение и не достигается, то, во всяком случае, можно построить последовательность функций $Y_n(x)$, удовлетворяющих условиям (8) и (24), для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} I\{Y_n\}$ принимает наименьшее возможное значение; любая из таких последовательностей называется *минимизирующей* функционал I . (Подобно тому как среди положительных чисел нет наименьшего, но последовательность $1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$ имеет наименьший возможный предел нуль, она будет одной из минимизирующих, как и последовательность $\{\sqrt{2}/n^2\}$, и т. п.)

Если бы последовательность функций $Y_n(x)$ или какая-либо ее подпоследовательность сходилась — скажем, равномерно — к некоторой предельной функции $Y(x)$, то $Y(x)$ как раз реализует требуемое наименьшее значение функционала. В самом деле,

$$\int_a^b Y^2(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b Y_n^2(x) dx = 1,$$

$$\int_a^b Q(x)Y^2(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b Q(x)Y_n^2(x) dx,$$

тогда как

$$\int_a^b P(x)Y'^2(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b P(x)Y_n'^2(x) dx.$$

(Последнее соотношение кажется сначала странным, так как может показаться, что правая часть обязательно равна левой. Но на самом деле она может

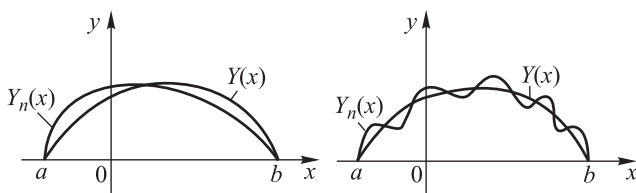


Рис. 102

оказаться и больше левой; обе эти возможности проиллюстрированы на рис. 102.) Поэтому

$$I\{Y\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I\{Y_n\},$$

но так как последовательность Y_n минимизирующая, то $I\{Y\}$ и есть наименьшее значение функционала I при заданных условиях. (Продумайте это рассуждение!)

При установлении существования такой сходящейся последовательности важнейшую роль играет понятие компактности. Именно, некоторое множество (M) точек нормированного или более общего метрического пространства (R) называется *компактным* в (R), если у всякой последовательности точек (M)

имеется по крайней мере одна сходящаяся подпоследовательность. В этих терминах теорему Больцано–Вейерштрасса (стр. 85) можно сформулировать так: *если (R) — конечномерное евклидово пространство, то всякое ограниченное множество его точек (M) компактно в нем.* Легко видеть, с другой стороны, что *неограниченное множество всегда некомпактно*, для этого достаточно взять в нем любую последовательность точек, уходящую на бесконечность. Таким образом, *для конечномерного евклидова пространства (R) компактность множества (M) в (R) равносильна ограниченности (M) .*

Однако характерной чертой бесконечномерных пространств, значительно усложняющей их исследование, является то, что в них ограниченные множества не обязаны быть компактными! Характерным примером служит последовательность функций $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$, ограниченная, но не компактная в пространстве $C[a, b]$ при любых фиксированных a, b : конечные перепады «высот» на отрезках, длина которых стремится к нулю, не дают возможности перейти к равномерному пределу. (Продумайте этот пример!) Тем не менее можно вполне строго доказать, что упомянутая выше минимизирующая последовательность Y_n не только ограничена, но и компактна в $C[a, b]$, так как подобные перепады высот привели бы к безграничному увеличению

интеграла $\int_a^b Y_n'^2(x) dx$, а с ним к $I\{Y_n\}$. Этим и обеспечивается наличие у последовательности Y_n равномерно сходящейся подпоследовательности, для предела которой рассматриваемый функционал принимает, как мы видели, наименьшее значение.

Конечно, приведенные рассуждения имеют лишь наводящий характер и при математическом анализе нуждаются в уточнении во многих пунктах (см., например, [86]). Тем не менее общая схема, этих рассуждений — проверка ограниченности функционала снизу, выбор минимизирующей последовательности и доказательство ее компактности в соответственно подобранном пространстве — лежит в основе многих теоретических работ, посвященных обоснованию разрешимости задач на экстремум функционала. Правда, такие рассуждения часто бывают недостаточно конструктивны, т. е. не дают указаний на то, как же искомое решение построить хотя бы приближенно. Однако такое обоснование служит подтверждением правильности постановки математической задачи и тем самым вдохновляет на поиски эффективных методов приближенного и численного нахождения решения и установления его свойств.

10. Основное условие минимума. В терминах собственных значений можно сформулировать основное условие минимума квадратичного функционала, имеющее весьма универсальный характер. Будем считать, что в каждом из граничных условий (37) для функционала (7) один из коэффициентов равен нулю, и потому в силу (31), для функций $y(x)$, удовлетворяющих этим условиям, имеет место формула

$$I\{y\} = \int_a^b L[y]y \, dy. \quad (42)$$

Воспользовавшись полнотой системы (30) собственных функций оператора L при условиях (37), разложим $y(x)$ в ряд по этой системе:

$$y(x) = \xi_1 y_1(x) + \xi_2 y_2(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n y_n(x), \quad (43)$$

где коэффициенты ξ_i находятся по обычным формулам для ряда по ортогональным функциям

$$\xi_n = \int_a^b y y_n dx$$

(в данном случае знаменатель $\int_a^b y_n^2 dx$ отсутствует из-за нормировки собственных функций). Подставив разложение (43) в (42), производя перемножение и пользуясь ортогональностью и нормировкой собственных функций, получим

$$\begin{aligned} I\{y\} &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n L[y_n] \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m y_m dx = \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \xi_n \xi_m \int_a^b \lambda_n y_n y_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Так как коэффициенты ξ_n могут быть произвольными, то мы приходим к следующим основным выводам: *если все собственные значения λ_n положительны, то функция $y \equiv 0$ реализует тотальный минимум функционала (42) при условиях (37); если имеется по крайней мере одно отрицательное собственное значение, то при $y \equiv 0$ будет минимакс.* Эти же выводы можно сформулировать в терминах наименьшего собственного значения $\lambda_{\min}$ (такое обязательно имеется, так как $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, в рассматриваемом сейчас случае просто $\lambda_{\min} = \lambda_1$): если $\lambda_{\min} > 0$, то будет минимум, если $\lambda_{\min} < 0$, то минимакс. (Видно также, что если $\lambda_{\min} = 0$, то при $y \equiv 0$ будет нестрогий минимум.)

Приведенное доказательство имеет совершенно общий характер, поэтому полученные выводы справедливы и для многих других классов квадратичных функционалов; это особенно ясно, если с самого начала исходить из записи такого функционала в виде правой части (42). Существенно только, чтобы оператор L при выбранных граничных условиях был самосопряженным, т.е. для него выполнялась формула вида (28) (этим обеспечивается вещественность собственных значений), и чтобы соответствующая система собственных функций была полной. В частности, эти выводы справедливы для функционалов от функций нескольких переменных, когда условия Якоби уже неприменимы.

Для функционалов I более общего вида, не обязательно квадратичных, полученные выводы можно, как и в п. 5, применить к $\delta^2 I$ и получить достаточные, а также необходимые условия локального слабого минимума в терминах собственных значений оператора, отвечающего линеаризованному уравнению Эйлера. (Единственным отличием является то, что в случае $\lambda_{\min} = 0$ уже не обязан быть нестрогий минимум, так как тогда начинают влиять члены выше второго порядка малости.)

Реальная задача на экстремум функционала обычно содержит параметры, от которых непрерывно зависят собственные значения соответствующего оператора; впрочем, эта зависимость может иметь и разрывы, если при достижении некоторых соотношений между параметрами сама задача претерпевает разрыв или в каком-то смысле вырождается. Более прост случай, когда этот параметр α один. Тогда, найдя (обычно численно) зависимость $\lambda_{\min}$ от α и подсчитав ее нули и точки разрыва, если они имеются, мы получаем возможные критические значения для α , при которых $\lambda_{\min}$ сменяет знак, и потому минимум сменяется на минимакс или обратно. Если параметров два, мы получаем аналогичным образом критические линии в плоскости параметров. Если параметров более двух, то ситуация, конечно, сложнее, однако и тогда можно предпринять попытку получить с помощью интерполяции приближенную формулу для критической гиперповерхности.

Формула (44) совершенно аналогична формуле приведения квадратичной формы к главным осям (п. IV.2.1), она приводит квадратичный функционал $I\{y\}$ к диагональной форме после перехода в пространстве $L_2[a, b]$ к евклидову базису, состоящему из соответствующих собственных функций (30). Однако, в отличие от конечномерного случая, это приведение действует не во всем пространстве, а только в подпространстве функций y , для которых ряд в правой части (44) сходится. Это объясняется тем, что функционал $I\{y\}$, как видно из (32), неограничен (см. п. 1).

Рассмотрим, например, функционал (33) при граничных условиях (34), для которого собственные значения и собственные функции имеют вид (35). Тогда прежде всего для сходимости ряда (44) требуется, чтобы функция $y(x)$ была непрерывной и удовлетворяла тем же условиям (34), так как в противном случае ξ_n имеет порядок $1/n$ (см., например, ЛВМ, п. XVII.25) и потому $\lambda_n \xi_n^2$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, для конечности значения $I\{y\}$ функция $y(x)$ должна иметь квадратично суммируемую производную. Совокупность функций $y(x)$, удовлетворяющих этим требованиям, и составляет подпространство, в котором действует формула (44).

Между прочим, обращаем внимание читателя на кажущийся парадокс, возникающий для разобранного примера функционала: для функции $y \equiv 1$ левая часть (44) равна нулю, тогда как правая — бесконечности. Объяснение в том, что при применении разложению (43) при граничных условиях (34) надо, рассматривая не $y \equiv 1$; а функцию

$$y(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi), \\ 0 & (x = 0, x = \pi); \end{cases}$$

а тогда y' имеет дельта-слагаемые, которые квадратично не суммируемы; таким образом, обе части равенства (44) на самом деле равны бесконечности.

Для более общих квадратичных функционалов, рассмотренных в этом пункте, подпространство, в котором происходит приведение к главным осям,

также состоит из функций с квадратично суммируемой производной, причем граничные условия определяются постановкой исходной задачи на минимум функционала.

11. Зависимость собственных значений от функционала. Рассмотрим функционал (7) с граничными условиями (8). Как мы видели, соответствующий оператор (26) имеет при этих условиях последовательность собственных функций (30) и соответствующих собственных значений (32). Как изменятся эти собственные значения; если заменить коэффициенты $P(x)$, $Q(x)$ или пределы интегрирования a, b или вид граничных условий? В некоторых случаях удастся ответить на этот вопрос.

Если увеличить коэффициенты P, Q , то все собственные значения увеличатся; точнее, если

$$\tilde{P}(x) \geq P(x), \quad \tilde{Q}(x) \geq Q(x), \quad (a \leq x \leq b), \quad (45)$$

то $\tilde{\lambda}_n > \lambda_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$; $\tilde{\lambda}_n$ — новые собственные значения), за исключением тривиального случая, когда оба неравенства (45) обращаются в равенства.

Доказательство для первого собственного значения сразу вытекает из его построения по методу п. 8:

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{I}\{\tilde{y}_1\} > I\{\tilde{y}_1\} \geq I\{y_1\} = \lambda_1.$$

(Продумайте каждый из этих переходов!)

Утверждение для n -го собственного значения вытекает аналогичным образом из следующей *теоремы Р. Куранта*: λ_n есть наибольшее из чисел $\lambda(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1})$ при всевозможном выборе функций $\rho_1(x), \dots, \rho_{n-1}(x)$ ($a \leq x \leq b$), где $\lambda(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1})$ есть минимум функционала (7) на функциях, удовлетворяющих условиям (8) и (24) и ортогональных каждой из функций $\rho_i(x)$ (ср. конец п. IV.1.7).

При добавлении к $Q(x)$ константы ко всем собственным значениям добавляется та же константа. В самом деле, в силу всегда присутствующей в п. 8 связи (24)

$$\int_a^b [P(x)y'^2 + (Q(x) + C)y^2] dx = \int_a^b [P(x)y'^2 + Q(x)y^2] dx + C,$$

так что ко всем значениям функционала (7) попросту прибавляется C .

Из доказанных двух свойств сразу вытекает самая грубая оценка собственных значений:

$$\begin{aligned} \min P(x) \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2 + \min Q(x) &\leq \lambda_n \leq \\ &\leq \max P(x) \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2 + \max Q(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (46)$$

В самом деле, при оценке λ_n , например, сверху можно на основании первого свойства заменить коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ их наибольшими значениями, затем на основании второго свойства совсем устранить член с y^2 и воспользоваться результатом (35) для функционала (33). (Продумайте это!)

Для получения более тонкой оценки собственных значений совершим замену переменных

$$y = \varphi(x)z, \quad dx = \psi(x) dt,$$

причем такую, чтобы уравнение связи (24), а также условия ортогональности типа (29) в новых переменных сохранили бы свой вид, а функционал (7) перешел бы в интеграл вида

$$\int_0^t \left[z'^2 + r(t)zz' + s(t)z^2 \right] dt = \int_0^t \left[z'^2 + \left(s(t) - \frac{1}{2}r'(t) \right) z^2 \right] dt.$$

Из первого требования получаем, что $\varphi^2\psi = 1$, а из второго — что $P\varphi^2/\psi = 1$ (проверьте!). Отсюда

$$\varphi(x) = [P(x)]^{-1/4}, \quad \psi(x) = \sqrt{P(x)},$$

т. е.

$$t = \int_a^x [P(x)]^{-1/2} dx, \quad l = \int_a^b [P(x)]^{-1/2} dx;$$

кроме того, $s - \frac{1}{2}r' = \frac{1}{4}P'' - \frac{1}{16}P^{-1}P'^2 + Q$ (проверьте!). Заметив, что при рассматриваемой замене собственные значения остаются неизменными, получаем, применив формулу (46), и доказанные свойства об изменении собственных значений:

$$\begin{aligned} & \left(n\pi / \int_a^b P^{-1/2} dx \right)^2 + \min \left(\frac{1}{4}P'' - \frac{1}{16}P^{-1}P'^2 + Q \right) \leq \lambda_n \leq \\ & \leq \left(n\pi / \int_a^b P^{-1/2} dx \right)^2 + \max \left(\frac{1}{4}P'' - \frac{1}{16}P^{-1}P'^2 + Q \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (47)$$

В отличие от оценки (46), здесь разность между левой и правой частями ограничена при $n \rightarrow \infty$.

При увеличении a или уменьшении b все собственные значения увеличиваются.

В самом деле, пусть, например, $\tilde{a} = a, \tilde{b} > b$; продолжим функцию $y_1(x)$ на интервал $b \leq x \leq \tilde{b}$ тождественным нулем и обозначим продолженную функцию через $z(x)$. Тогда

$$\lambda_1 = I(y_1) = \tilde{I}(z) > \tilde{I}(\tilde{y}_1) = \tilde{\lambda}_1.$$

Неравенства для дальнейших собственных значений получаются аналогично из теоремы Куранта.

Если на одном или обоих концах интервала a, b граничное условие для функционала (7) снято, то, как уже было сказано, собственные функции будут на этом конце удовлетворять граничному условию $y' = 0$. Все приведенные выше утверждения о собственных значениях сохраняют силу и для таких граничных условий, причем доказательства почти не изменяются. К этим утверждениям можно добавить еще такое: *при замене на каком-либо из концов интервала a, b условия $y = 0$ на условие $y' = 0$ все собственные значения уменьшаются*. В самом деле, в силу только что сказанного такая замена означает просто, что на соответствующем конце граничное условие совсем снимается; но тогда совокупность сравниваемых значений функционала (7) расширяется, и наименьшее значение в ней уменьшается.

Аналогичными свойствами обладают собственные значения в ряде других задач, в которых для построения этих значений возможно применить вариационные методы. Например, из рассмотрения функционала (38) вытекает такой результат: при сужении области (G) все собственные значения оператора (41) при граничном условии (40) увеличиваются и т. д.

§3. Канонические уравнения и вариационные принципы

1. Канонические уравнения. Во многих исследованиях общего характера оказывается удобным преобразовать уравнения Эйлера к канонической форме, позволяющей более единообразно трактовать различные классы вариационных задач. Это особенно полезно в ряде задач физики и механики, где вводимые при таком преобразовании переменные имеют непосредственный физический смысл.

Мы будем рассматривать задачу о стационарном, в частности экстремальном, значении функционала

$$I\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx, \quad (1)$$

при каких-то граничных условиях. В силу п. 1.10 система уравнений Эйлера для этого функционала имеет вид

$$F'_{y_i} - \frac{d}{dt} F'_{y'_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (2)$$

она представляет собой систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с n искомыми функциями

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x). \quad (3)$$

Введем величины

$$p_i = F'_{y'_i}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

которые вместе с переменными y_i называются *каноническими переменными* для функционала (1), причем величины y_i и p_i называются *сопряженными* друг другу; для любых выбранных функций (3) величины (4) также представляют собой некоторые функции x . Введем, кроме того, *функцию Гамильтона*, отвечающую функционалу (1):

$$H(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n) = -F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) + \sum_{i=1}^n y'_i p_i; \quad (5)$$

при этом в правой части величины y'_i считаются выраженными через $x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$ в силу соотношений (4), которые можно рассматривать как систему из n конечных уравнений с n неизвестными $y'_1, \dots, y'_n$.

Как известно из теории неявных функций (см., например, ЛВМ, пп. IX.13 и XII.3), решение такой системы является принципиально возможным, во всяком случае локально, если соответствующий якобиан отличен от нуля. Этот якобиан есть $\det(F''_{y'_i y'_j})$, и на существенность его отличия от нуля мы уже обращали внимание в п. 1.19.

В качестве примера предлагаем читателю проверить, что функция Гамильтона для функционала (1.102) имеет вид

$$H = -\sqrt{1 - p^2}.$$

Дифференцируя формулу (5) и пользуясь равенствами (4), получаем

$$\begin{aligned} dH = -F'_x dx - \sum F'_{y_i} dy_i - \sum F'_{y'_i} d(y'_i) + \sum d(y'_i) p_i + \\ + \sum y'_i dp_i = -F'_x dx - \sum F'_{y_i} dy_i + \sum y'_i dp_i. \end{aligned}$$

Значит, если считать канонические переменные и x независимыми, то

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -F'_x, \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = -F'_{y_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = y'_i. \quad (6)$$

Если теперь функции (3) удовлетворяют уравнениям Эйлера (2), то из второго и третьего равенств (6) получаем

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Это и есть *каноническая форма уравнений Эйлера* или просто *каноническая система уравнений*, отвечающая функционалу (1); она представляет собой систему из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с $2n$ искомыми функциями $y_i(x), p_i(x)$.

Интересно отметить, что p_i и H — это те самые величины, которые в силу условий Вейерштрасса–Эрдмана (п. 1.20) должны были вместе с x и y_i

оставаться непрерывными при переходе через точку излома кусочно-гладкой экстремали. Это становится более ясным, если переписать выражение для произвольной вариации функционала (1), наподобие (1.91) в векторной записи

$$\delta \int_a^b F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx = \int_a^b \left(F'_{\mathbf{y}} - \frac{d}{dx} F'_{\mathbf{y}'} \right) \cdot \delta \mathbf{y} dx + (\mathbf{p} \cdot \delta[\mathbf{y}(x)] - H \delta x) \Big|_{x=a}^b \quad (8)$$

и вспомнить вывод условий Вейерштрасса–Эрдмана.

2. Первые интегралы. Пусть задана некоторая функция $\Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$. Если ее рассматривать вдоль решения системы уравнений (7), т.е. подставить вместо независимых переменных y_i, p_i решение этой системы, то мы получим сложную функцию x , для которой

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} = \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right)$$

называется *скобкой Пуассона* функций Φ и H и обозначается $[\Phi, H]$. Таким образом, формулу (9) можно записать так:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + [\Phi, H]. \quad (10)$$

Отметим простые свойства скобок Пуассона (докажите!)

$$\begin{aligned} [\Phi, \Psi] &= -[\Psi, \Phi]; \quad [\Phi, \Phi] \equiv 0, \quad [\Phi_1 + \Phi_2, \Psi] = [\Phi_1, \Psi] + [\Phi_2, \Psi]; \\ [C\Phi, \Psi] &= C[\Phi, \Psi] \quad (C = \text{const}); \quad [\Phi_1 \Phi_2, \Psi] = \Phi_1 [\Phi_2, \Psi] + \Phi_2 [\Phi_1, \Psi]. \end{aligned}$$

Из (10) мы видим, в частности, что соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + [\Phi, H] \equiv 0 \quad (11)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы вдоль любого решения системы (7) было

$$\Phi(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n) = \text{const};$$

таким образом, мы получаем первый интеграл системы (7). Как известно, знание k независимых первых интегралов позволяет понизить число уравнений в системе на k .

Пусть, в частности, функция H не зависит от x . Положив тогда $\Phi = H$, видим, что соотношение (11) выполняется. Итак, в рассматриваемом случае функция H постоянна вдоль любого решения системы (7), т. е. вдоль любой экстремали. $\left(\text{Докажите это же, вычислив } \frac{dH}{dx} \right.$
 в силу уравнений (7). $\left. \right)$ При $n = 1$ мы получаем как раз первый интеграл (1.38).

Другим простым случаем, когда можно найти первый интеграл, является тот, когда функция H не зависит от какой-либо из переменных y_i или p_i ; тогда можно положить $\Phi = p_i$ или соответственно $\Phi = y_i$ (проверьте!).

3. Канонические преобразования. При изучении применения канонических уравнений (7) не обязательно все время помнить о первоначальном происхождении величин p_i ; эти уравнения можно рассматривать в $(2n + 1)$ -мерном пространстве x, y, p (а если H не зависит от x , то и в $2n$ -мерном пространстве y, p) как обычные дифференциальные уравнения, независимо от первоначальной связи между рассматриваемыми величинами. При этом H рассматривается как некоторая заданная функция $2n + 1$ переменных x, y, p , определяющая правые части системы (7). Естественность такого подхода основана, в частности, на замечательной симметрии, с которой переменные y и p входят в систему (7).

Конечно, не любая система обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве x, y, p имеет канонический вид. Именно, если задана система

$$\frac{dy_i}{dx} = \Phi_i(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n), \quad \frac{dp_i}{dx} = \Psi_i(\dots) \quad (i = 1, \dots, n),$$

то она является канонической тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_j} \equiv \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j} \equiv \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial p_i} \equiv 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

(почему?). Поэтому если в канонической системе (7) совершить замену переменных

$$Y_i = g_i(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n), \quad P_i = h_i(\dots) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (12)$$

то полученная в переменных x, Y, P система уравнений уже не обязана быть канонической. Если все же такая каноничность сохраняется, то преобразование (12) называется *каноническим* (для исходной системы (7), так как преобразование по тем же формулам (12) другой канонической системы может нарушить каноничность).

Мы укажем здесь важный класс канонических преобразований, заметив для этого, что систему (7) можно рассматривать как систему уравнений Эйлера для функционала

$$I\{y, p\} = \int_a^b \left(\sum_i p_i y'_i - H \right) dx \quad (13)$$

(проверьте!). Но мы уже упоминали в п. 1.7, что, если в системе уравнений Эйлера совершить замену переменных, то получится такой же результат, как если заменить переменные в функционале, после чего составить уравнения Эйлера для измененного таким образом функционала. Значит, если после замены (12) функционал (13) примет вид

$$\int_a^b \left(\sum_i P_i Y'_i - \tilde{H}(x, Y, P) \right) dx + \text{const}$$

(мы сокращенно пишем Y вместо $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$), то преобразование (12) каноническое. Так будет, если преобразование (12) удовлетворяет тождеству вида

$$\begin{aligned} \sum p_i dy_i - H(x, y, p) dx = \\ = \sum P_i dY_i - \tilde{H}(x, Y, P) dx + d\Phi(x, y, Y), \end{aligned} \quad (14)$$

где функция $\Phi(x, y, Y)$ называется *производящей функцией* канонического преобразования (12). (Заметим, что $\int d\Phi = \Phi \Big|_a^b$, а так как при построении экстремалей можно искомые функции считать на концах интервала заданными, то последний член в (14) доставляет рассматриваемому функционалу лишь несущественное постоянное слагаемое.) Знание производящей функции позволяет восстановить все преобразование рассматриваемого класса, так как из (14) вытекает, что если принять x, y, Y за независимые переменные, то имеют место формулы

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad P_i = \frac{\partial \Phi}{\partial Y_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (15)$$

Обратно, ясно, что из (15) вытекает (14). Таким образом, для получения канонического преобразования можно задаться (вообще говоря, произвольной) функцией $\Phi(x, y, Y)$, затем написать формулы (15); из первых n формул выразить, если это окажется возможным, Y через

x, y, p , после чего подставить результат в следующие n уравнений (15), что и приведет к каноническому преобразованию (12).

Иногда оказывается более удобным выбирать производящую функцию Φ как функцию переменных x, y, P . Если тогда, взамен (15), положить

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad Y_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

то вместо (14) получится тождество

$$\sum p_i dy_i - H dx = \sum P_i dY_i - \tilde{H} dx + d\left(\Phi - \sum p_i \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}\right)$$

(проверьте!). Поэтому и здесь преобразование $y, p \rightarrow Y, P$ оказывается каноническим.

Рассмотрения канонических преобразований упрощаются, если функция Гамильтона H не зависит от x ; тогда естественно принять, что и функции g_i, h_i в (12), а также Φ в (14) не зависят от x . Из (15) мы видим, что тогда $\tilde{H} = H$, т.е. функция Гамильтона при рассматриваемых канонических преобразованиях остается инвариантной, а из (14) — что разность

$$\sum p_i dy_i - \sum P_i dY_i$$

должна быть полным дифференциалом функции $\Phi(y, Y)$. Можно доказать (мы пропустим доказательство), что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$[Y_i, Y_j] = 0, \quad [P_i, P_j] = 0, \quad [P_i, Y_j] = 0 \quad (i \neq j), \quad [P_i, Y_i] = 1,$$

где квадратными скобками обозначены скобки Пуассона (п. 2). Если это условие выполнено, то для любых функций Ψ_1, Ψ_2 скобка Пуассона $[\Psi_1, \Psi_2]$, вычисленная в переменных y, p , принимает то же значение, что и в переменных Y, P , т.е. она является инвариантной относительно таких канонических преобразований.

4. Контактные преобразования. Первые $2n$ формул (15) допускают замечательное геометрическое истолкование. Рассмотрим два n -мерных пространства: y и Y ; при этом значение x будет считаться произвольным, но зафиксированным, так что зависимость от x мы указывать не будем. Поставим каждой точке $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ первого пространства $(n-1)$ -мерную поверхность второго пространства с уравнением

$$\Phi(y, Y) = C, \tag{16}$$

где C — некоторая зафиксированная постоянная. Пусть теперь y может сдвигаться на произвольный бесконечно малый вектор dy , перпендикулярный некоторому выбранному направлению α^0 (нулик означает единичный вектор соответствующего направления). Тогда в пространстве Y получается «беско-

нечно узкое» $(n - 1)$ -параметрическое семейство поверхностей, пересекающихся в некоторой точке Y (их может быть и несколько), зависящей не только от выбора точки y , но и от выбора направления α^0 . Направление общего перпендикуляра к этим поверхностям в Y обозначим через A^0 , оно также зависит от y и α^0 . Таким образом, здесь преобразуется не точка в точку, а *линейный элемент* $(y; \alpha^0)$ (т. е. точка с элементом $(n - 1)$ -мерной касательной плоскости в ней, так как направление плоскости задается перпендикуляром к ней) в линейный элемент $(Y; A^0)$. Такое преобразование называется *контактным*, или *преобразованием прикосновения*, а функция Φ (строго говоря, $\Phi - C$), которая его порождает, называется *производящей функцией* для этого преобразования.

Если в пространстве y дана $(n - 1)$ -мерная поверхность (s) , то в каждой ее точке имеется касательная плоскость, т. е. этой точке отвечает точка пространства Y , и мы получаем $(n - 1)$ -мерную поверхность (S) , соответствующую (s) . (При этом особым точкам (s) , например коническим, отвечают целые многообразия на (S) .) Если поверхности (s_1) и (s_2) касались в некоторой точке y , то и соответствующие поверхности (S_1) и (S_2) касаются в соответствующей точке Y ; но если (s_1) и (s_2) пересекались в y под ненулевым углом, то в пространстве Y точке y будут отвечать две различные точки $Y_1 \in (S_1)$ и $Y_2 \in (S_2)$.

В качестве простого наглядного примера разберите при $n = 3$ контактное преобразование с производящей функцией

$$\Phi = (Y_1 - y_1)^2 + (Y_2 - y_2)^2 + (Y_3 - y_3)^2,$$

причем пространства y и Y здесь удобно считать совмещенными.

Построение контактного преобразования непосредственно связано с теорией огибающих, упомянутой при $n = 2$ в ЛВМ, п. XII.5 ¹⁾ Рассмотрим при любом n k -параметрическое семейство $(n - 1)$ -мерных поверхностей $(1 \leq k \leq n - 1)$ с уравнением

$$F(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; C_1, C_2, \dots, C_k) = \text{const.} \quad (17)$$

Тогда аналогично случаю $n = 2$ легко проверить, что огибающая этого семейства, вообще говоря (за исключением различных особых случаев), представляет собой $(n - 1)$ -мерную поверхность, уравнение которой получается исключением параметров из уравнения (17) семейства и уравнений

$$F'_{C_i}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; C_1, C_2, \dots, C_k) = 0 \quad (i = 1, \dots, k). \quad (18)$$

При этом каждая из поверхностей (17) прилегает к огибающей по $(n - 1 - k)$ -мерному многообразию, получающемуся в результате пересечения этой поверхности со всеми бесконечно близкими поверхностями семейства; впрочем, достаточно ограничиться пересечением с k поверхностями, каждая из которых получается бесконечно малой вариацией одного из параметров семейства. (Случаи $n = 3, k = 1$ и $n = 3, k = 2$ показаны на рис. 103; вторая картинка одновременно иллюстрирует контактное преобразование линейного, элемента при $n = 3$). В частности, если $k = n - 1$, каждая из поверхностей семейства

¹⁾ Напомним, что *огибающей семейства линий* с уравнением $F(x_1, x_2; C) = 0$ на плоскости x_1, x_2 (C — параметр) называется линия, не входящая в это семейство, каждой точки которой касается одна из линий этого семейства. Уравнение огибающей получается исключением C из уравнения семейства и уравнения $F'_C(x_1, x_2; C) = 0$.

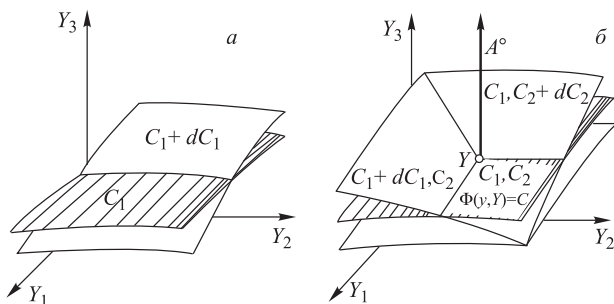


Рис. 103

прилегают к огибающей поверхности, вообще говоря, не по многообразию, а по одной или нескольким дискретным точкам.

Так как уравнения (18) можно короче записать в виде $\partial_C F = 0$, где $C = (C_1, C_2, \dots, C_k)$, $\partial_C F = F'_{C_1} dC_1 + F'_{C_2} dC_2 + \dots + F'_{C_n} dC_n$, то, возвращаясь к (16), видим, что контактное преобразование получается добавлением к (16) условия

$$\partial_y \Phi(y, Y) = 0 \quad \text{для всех } dy \perp \alpha^0$$

или, что равносильно,

$$\text{grad } d_y \Phi(y, Y) \parallel \alpha^0, \quad (19)$$

где под $\text{grad } d_y$ понимается градиент в пространстве y при зафиксированном Y . При этом направление нормали к поверхности определяется уравнением

$$\text{grad } d_Y \Phi(y, Y) \parallel \mathbf{A}^0, \quad (20)$$

При заданных y и α^0 соотношения (16) и (19) образуют систему из n уравнений с n неизвестными $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, найдя которые, мы можем из (20) найти $\mathbf{A}^0$. Интересно отметить, что в силу полной симметрии полученных соотношений относительно обоих пространств рассмотренное нами отображение является одновременно контактным преобразованием из пространства Y в пространство y с той же производящей функцией (16).

Применяя полученные результаты к каноническому преобразованию (15), мы видим, что его производящая функция Φ определяет такое контактное преобразование из пространства y в пространство Y , при котором линейный элемент $(y; \mathbf{p}^0)$ преобразуется в линейный элемент $(Y; \mathbf{P}^0)$.

5. Теорема Нётер. Эта теорема дает возможность для функционалов, обладающих определенной инвариантностью, получать первые интегралы для системы уравнений Эйлера, что во многих задачах может иметь принципиальное и практическое значение.

Сначала введем общее понятие *непрерывной группы преобразований* (отображений) пространства E_n (или области в нем) в себя, причем для краткости запишем будем вместо точки $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ рассматривать ее радиус-вектор x . Тогда формулы отображения

$$\bar{x}_i = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

можно коротко записывать так:

$$\bar{x} = \Phi(x). \quad (22)$$

(Конечно, это не означает, что прямолинейные отрезки при отображении остаются прямолинейными! Формула (22) говорит только об отображении концов радиусов-векторов по закону (21).)

Пусть задано однопараметрическое семейство взаимно однозначных отображений

$$\bar{x} = \Phi(x; t), \quad (23)$$

где t — вещественный скалярный параметр. Такое семейство называется непрерывной группой преобразований, если результат последовательного выполнения отображений с параметрами t_1 и t_2 равносильен отображению того же семейства с параметром $t_1 + t_2$ (это *групповое свойство*). Отсюда, в частности, вытекает, что отображение с параметром $t = 1$ — тождественное, т.е. $\Phi(x; 0) \equiv x$, а также, что отображения $\Phi(x; t)$ и $\Phi(x; -t)$ взаимно обратные (почему?). Например, отображение $\Phi(x; t)$ может состоять в поступательном переносе пространства на t вдоль некоторой фиксированной оси; при $n = 3$ — в повороте на t вокруг фиксированной оси; могут быть, конечно, и нелинейные отображения. Параметр t удобно истолковывать как время, а семейство отображений (23) — как поток в E_n ; тогда групповое свойство просто означает, что этот поток стационарный. Векторное поле

$$\Phi_0(x) = \Phi'_t(x; 0) \quad (24)$$

— это соответствующее поле скоростей, так что при малом Δt

$$\begin{aligned} \Delta \bar{x} &= \Phi(x; t + \Delta t) - \Phi(x; t) = \\ &= \Phi(\bar{x}; \Delta t) - \bar{x} = \Phi_0(\bar{x})\Delta t + o(\Delta t); \end{aligned} \quad (25)$$

поэтому вспомогательное отображение $\bar{x} = \Phi_0(x)$, уже не зависящее от параметра, называется не совсем удачно *бесконечно малым производящим отображением* для группы (23). Обратно, из (25) следует, что семейство отображений (23) получается из своего производящего отображения при помощи решения системы дифференциальных уравнений в векторной записи

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \Phi_0(\bar{x}); \quad \bar{x}|_{t=0} = x.$$

Вернемся к функционалу (1) и допустим, что в $(n+1)$ -мерном пространстве x, y задана *однопараметрическая группа отображений*

$$\bar{x} = \varphi(x, y; t), \quad \bar{y} = \Phi(x, y; t), \quad (26)$$

оставляющая этот функционал инвариантным. (Запись (26) по существу равноценна (23), но приходится писать более громоздко, так как в функционале (1) роль координаты x отличается от $y_1, \dots, y_n$). Это означает, что если трактовать (1) как функционал от линии $y = y(x)$ $a \leq x \leq b$, то он должен принимать одинаковые значения на всех линиях, полученных друг из друга с помощью отображения (26).

Обозначим в соответствии с (24)

$$\varphi_0(x, y) = \varphi'_t(x, y, 0), \quad \Phi_0(x, y) = \Phi'_t(x, y, 0)$$

и сравним значения функционала на некоторой дуге экстремали и на линии, полученной из этой дуги отображением (26) с бесконечно малым t . Тогда левая часть формулы (8) равна нулю в силу инвариантности функционала, а в правой части интеграл пропадает, и в силу (25) мы получаем

$$(\mathbf{p} \cdot \Phi_0 t - H\varphi_0 t)|_{x=a}^b = 0,$$

т. е.

$$(\mathbf{p} \cdot \Phi_0 - H\varphi_0)|_{y=y(b)}^{x=b} = (\mathbf{p} \cdot \Phi_0 - H\varphi_0)|_{y=y(a)}^{x=a}.$$

Последнее равенство справедливо для любых двух точек выбранной экстремали. Таким образом, вдоль каждой экстремали будет

$$\mathbf{p} \cdot \Phi_0(x, \mathbf{y}) - H(x, \mathbf{y}, \mathbf{p})\varphi_0(x, \mathbf{y}) = \text{const}, \quad (27)$$

т. е. мы получили первый интеграл системы уравнений Эйлера. В этом и состоит теорема немецкого математика Э. Нётер (1883–1935) для функционалов вида (1).

Пусть, например, функция F в этом функционале не зависит от x . Это значит, что функционал инвариантен относительно группы преобразований $\bar{x} = x + \alpha$, $\bar{y} = y$; но тогда $\Phi_0 = 0$, $\varphi_0 = 1$, и потому мы получаем из (27) первый интеграл $H = \text{const}$, уже отмеченный в п. 2.

Группа преобразований, оставляющих функционал инвариантным, может содержать более одного параметра. Например, при $n = 3$ можно рассматривать двухпараметрическую группу всех винтовых движений вдоль некоторой оси или трехпараметрическую (почему?) группу всех вращений вокруг некоторой точки и т. д. (Отметим, что последняя группа *некоммутативна*, т. е. результат последовательного выполнения двух отображений здесь, вообще говоря, зависит от порядка, в котором они выполняются.) Если имеется k параметров, то формула для отображений, взамен (23), имеет вид

$$\bar{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{x}; t_1, t_2, \dots, t^k). \quad (28)$$

При этом семейство (28) должно содержать тождественное отображение, вместе с каждым отображением — обратное к нему и вместе с любыми двумя отображениями — результат их последовательного выполнения. Тогда с помощью вычисления частных производных по каждому из параметров возможно составить k независимых первых интегралов типа (27) для системы уравнений Эйлера и тем самым понизить на k число уравнений в этой системе.

Теория непрерывных групп преобразований, называемых также *группами Ли* (С. Ли (1842–1899) — норвежский математик), к настоящему времени значительно разработана и имеет многочисленные применения.

Бывают случаи, когда функционал остается инвариантным для группы преобразований, зависящей от некоторого числа k произвольных функций. (Например, при рассмотрении параметрической формы (1.54) функционала он оказывается инвариантным относительно любой замены вида $\bar{t} = \bar{t}(t)$ переменной интегрирования, так как такая замена означает введение новой параметризации вдоль линии (L), а значение функционала не зависит от выбора параметризации; таким образом, в данном случае $k = 1$.) Тогда вторая теорема Нётер говорит о том, что в системе уравнений Эйлера имеется k независимых соотношений, т. е. k уравнений из системы можно отбросить.

6. Случай функций нескольких переменных. Докажем теперь теорему Нётер для функционалов от функций нескольких переменных, например вида (1.55), однако вместо x, y будем писать x_1, x_2 , так как получаемые формулы справедливы для любого числа m независимых переменных. Прежде всего по аналогии с вычислением (1.58) получаем взамен (1.91) общую формулу для вариации функционала при изменении как функции, так и границы области интегрирования:

$$\begin{aligned} \delta \int_{(G)} F\left(\mathbf{x}, z, \frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}}\right) dG = \\ = \int_{(G)} (F'_z - \operatorname{div} F'_\mathbf{p}) \delta z dG + \int_{(\Gamma)} (F'_\mathbf{p})_n \delta z d\Gamma + \int_{(\Gamma)} F(\delta \mathbf{r})_n d\Gamma; \quad (29) \end{aligned}$$

здесь, как обычно, $F'_\mathbf{p}$ — вектор с проекциями F'_{p_i} , а $\mathbf{r} = \sum x_i \mathbf{e}_i$ — радиус-вектор. Кроме того, аналогично (1.88) получаем

$$\delta z|_{(\Gamma)} = \delta[z(\mathbf{x})] - \operatorname{grad} z \cdot \delta \mathbf{r}.$$

(Кстати, если принять, что точки (Γ) варьируются по нормали к (Γ) , то с помощью формулы (29) легко вывести условия Вейерштрасса для кусочно-гладких экстремальных поверхностей, что мы предоставляем читателю (см. (1.107)): при переходе через линию излома выражения $(F'_\mathbf{p})_n$ и $F - (F'_\mathbf{p})_n z'_n$ должны изменяться непрерывно.)

Если вариация границы области получилась в результате вариации всех точек области, то $\delta \mathbf{r}$ задано во всей области (G) , и потому к контурным интегралам в (29) можно применить формулу Остроградского $\int_{(\Gamma)} A_n d\Gamma = \int_{(G)} \operatorname{div} \mathbf{A} dG$

и формулу для $\delta z|_{(\Gamma)}$, что даст

$$\begin{aligned} \delta \int_{(G)} F\left(\mathbf{x}, z, \frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}}\right) dG = \\ = \int_{(G)} [(F'_z - \operatorname{div} F'_\mathbf{p}) \delta z + \operatorname{div} F'_\mathbf{p} (\delta[z(\mathbf{x})] - \operatorname{grad} z \cdot \delta \mathbf{r}) + F \delta \mathbf{r}] dG. \quad (30) \end{aligned}$$

Пусть теперь задана однопараметрическая группа отображений

$$\bar{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, z; t), \quad \bar{z} = \Phi(\mathbf{x}, z; t), \quad (31)$$

оставляющая рассматриваемый функционал инвариантным в том же смысле, что было описано выше. Отправляясь от формулы (30) и рассуждая как при выводе равенства (27), получаем, что для любой экстремали $z = z(\mathbf{x})$ и любой области (G) будет

$$\int_{(G)} \operatorname{div} [F'_\mathbf{p}(\Phi_0 - \operatorname{grad} z \cdot \varphi_0) + F \varphi_0] dG = 0.$$

Отсюда в силу произвола области (G) заключаем, что

$$\operatorname{div} [F_p'(\Phi_0 - \operatorname{grad} z \cdot \varphi_0) + F\varphi_0] = 0. \quad (32)$$

Это соотношение, справедливое вдоль любой экстремали $z(x)$, и заменяет первый интеграл (27) для функционала вида (1.55); отметим, что в соотношении (32) $\mathbf{p}$ означает, в отличие от (27), вектор с проекциями z'_{x_i} .

Та же формула (32) получается для семейства отображений более общего чем (31) вида

$$\bar{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, z, z'_x; t), \quad \bar{z} = \Phi(\mathbf{x}, z, z'_x; t),$$

оставляющих функционал вида (1.55) инвариантным. Эти формулы при зафиксированном t и любой выбранной функции $z(\mathbf{x})$ дают функцию $\bar{z}(\bar{\mathbf{x}})$ в параметрическом виде (почему?) и тем самым, как и (31), преобразуют поверхности в поверхности. (При этом требуется, чтобы

$$\varphi(\mathbf{x}, z, z'_x; 0) \equiv \mathbf{x}, \quad \Phi(\mathbf{x}, z, z'_x; 0) \equiv z.)$$

Формула (32) утверждает отсутствие источников векторных линий в пространстве $\mathbf{x}, y$ векторного поля

$$F_p'(\Phi_0 - \operatorname{grad} z \cdot \varphi_0) + F\varphi_0$$

(рассмотрения п. I.1.3 по поводу дивергенции и источников векторных линий проводятся одинаково для любого числа измерений) для каждого решения $z(\mathbf{x})$ уравнения Эйлера; тем самым она выражает некоторый закон сохранения, физический смысл которого различен для разных конкретных функционалов.

Формула, аналогичная (32), справедлива и для функционалов вида $\int F(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}) dG$ от любого числа n функций от m переменных. При этом под F_p' надо понимать матрицу $(F'_{\partial z_i / \partial x_j})$ размера $m \times n$, а под $\operatorname{grad} z$ — матрицу $(\frac{\partial z_i}{\partial x_j})$ размера $n \times m$.

7. Уравнение Гамильтона–Якоби. Рассмотрим функционал (1). Так как общее решение соответствующей системы уравнений Эйлера содержит $2n$ произвольных постоянных, то при задании двух точек A и B в пространстве $x, y_1, y_2, \dots, y_n$, через которые должна пройти экстремаль, для определения этих постоянных получается как раз $2n$ конечных уравнений; таким образом, вообще говоря, имеется некоторая дискретная совокупность (одна или больше, а иногда и ни одной) экстремалей, соединяющих эти две точки. Обозначим через I_{AB} значение функционала для каждой из таких экстремалей, считая A ее началом и B — концом.

Будем считать точку A зафиксированной, а точку $B(x; y_1; y_2; \dots; y_n)$ текущей и обозначим

$$S(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = I_{AB}. \quad (33)$$

Это, вообще говоря, многозначная функция, определенная для тех точек, которые можно соединить с A экстремалью. Рассмотрим ка-

кую-либо однозначную ветвь этой функции. Если точка B меняет свое положение, то из (8) получаем

$$dS = -H dx + \sum_{i=1}^n p_i dy_i$$

(продумайте обозначения!). Другими словами,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial y_i} = p_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда получаем, что функция (33) удовлетворяет уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H \left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial y_n} \right) = 0, \quad (34)$$

называемому *уравнением Гамильтона–Якоби*.

Легко проверить, что для любого однопараметрического семейства решений $S = \tilde{S}(x, y_1, y_2, \dots, y_n; \alpha)$ уравнения (34) каждая экстремаль должна удовлетворять соотношению

$$\tilde{S}'_{\alpha}(x, y_1, y_2, \dots, y_n; \alpha) = \beta. \quad (35)$$

В самом деле, применяя уравнения (7), получим

$$\frac{d\tilde{S}'_{\alpha}}{dx} = \frac{\partial \tilde{S}'_{\alpha}}{\partial x} + \sum_i \frac{\partial \tilde{S}'_{\alpha}}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x \partial \alpha} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y_i \partial \alpha}.$$

Однако правая часть представляет собой результат дифференцирования по α левой части (34), куда подставлено $S = \tilde{S}$, и потому равна нулю; отсюда и вытекает (35). Соотношение (35) позволяет исключить в системе уравнений Эйлера (2) одну из неизвестных функций и тем самым понизить порядок системы на два, т. е. до $2n - 2$ (в расчете на эквивалентное уравнение высшего порядка).

Аналогичным образом знание k -параметрического семейства решений уравнения (34) позволяет с помощью соотношений

$$\tilde{S}'_{\alpha_i}(x, y_1, y_2, \dots, y_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (36)$$

понизить порядок системы (2) на $2k$. При $k = n$ соотношения (36) дают общее решение системы уравнений Эйлера (2).

Если функция Гамильтона H не зависит от x , то при решении уравнения (34) можно ограничиться функциями вида

$$S = -hx + W(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (h = \text{const});$$

тогда это уравнение можно переписать так:

$$H \left(y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \frac{\partial W}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial y_n} \right) = h.$$

Допустим, что возможно найти функцию $W(y, P)$ ($y = (y_1, \dots, y_n)$, $P = (P_1, \dots, P_n)$), содержащую n параметров P и обращающую левую часть в постоянную $h = h(p)$. Примем W за производящую функцию канонического преобразования (п. 3), т. е. положим

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial y_i}, \quad Y_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}, \quad \tilde{H} = H(y, p) = h(P).$$

Таким образом, каноническая система уравнений в новых переменных приобретает вид

$$\frac{dP_i}{dx} = 0, \quad \frac{dY_i}{dx} = \frac{\partial h}{\partial P_i}$$

и потому имеет общее решение

$$P_i = C_i, \quad Y_i = h'_{P_i}(C_1, C_2, \dots, C_n)x + D_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где C_i, D_i — произвольные постоянные.

Величине I_{AB} , о которой говорилось в первом абзаце этого пункта, можно дать замечательное геометрическое истолкование. При этом удобно рассматривать координаты как равноправные и потому перейти к параметрической форме типа (1.54) для функционала. Для n координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ эта форма такова:

$$I\{L\} = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt, \quad (37)$$

где функция F_1 однородная измерения 1 относительно $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$; примем, что всегда $t_{\text{нач}} < t_{\text{кон}}$.

Допустим, что $F_1 > 0$ (конечно, кроме значений $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dots = \dot{x}_n = 0$, для которых в силу однородности $F_1 = 0$) и что для любых точек A, B функционал (37) достигает на семействе линий, соединяющих A с B , наименьшее значение, которое мы обозначим через $\rho(A, B)$. Легко проверить (предумайте это!), что величина ρ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(A, B) > 0$ ($A \neq B$), $\rho(A, A) = 0$;
2. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;
3. (неравенство треугольника) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Эти три свойства называются *аксиомами метрики*, и всякий раз, как они выполняются, величину $\rho(A, B)$ можно принять за обобщенное расстояние между точками A и B . Пространство с таким обобщенным расстоянием (*метрикой*) между точками называется *метрическим пространством*. Теперь значение функционала (37) естественно трактовать как (обобщенную) длину линии (L) , отвечающую выбранной метрике, экстремали — как геодезические линии (п. 2.6) в этой метрике, а I_{AB} — как длину этих геодезических, соединяющих A с B . Элемент длины, как видно из (37), равен

$$dI = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, dx_1, dx_2, \dots, dx_n), \quad (38)$$

откуда во многих примерах можно перейти к обычной форме метрического тензора в римановом пространстве (п. V.2.5).

Пространство, в котором все это происходило, могло быть не евклидовым, а любым многообразием с обобщенными координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Функционал (37), заданный в этом пространстве и удовлетворяющий указанным требованиям, превращает это многообразие в метрическое пространство, а если

квадрат правой части (38) представляет собой квадратичную форму относительно дифференциалов, — то и в риманово пространство.

Если указанные требования не выполнены, то представляют интерес, в частности, случаи, когда некоторые пары точек вообще нельзя соединить линиями, на которых функционал принимал бы вещественное значение: например, так будет для функционала $\int \sqrt{dx_1^2 - dx_2^2}$, если $|x_{1B} - x_{1A}| < |x_{2B} - x_{2A}|$ (почему?). Понятие обобщенного расстояния между такими точками теряет смысл.

8. Плоскость Лобачевского. Приведем один замечательный пример. Пусть в полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$ рассматривается функционал

$$I\{(L)\} = \int_{(L)} \frac{1}{y} \sqrt{x^2 + \dot{y}^2} dt.$$

В силу п. 1.17 экстремали этого функционала можно трактовать как лучи света, распространяющегося в указанной полуплоскости и имеющего в каждой точке $(x; y)$ скорость, пропорциональную y . В метрике, отвечающей этому функционалу, квадрат элемента длины

$$dI^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2). \quad (39)$$

Интегрирование соответствующих уравнений Эйлера, которое мы предоставляем читателю, показывает, что экстремалими, т. е. геодезическими линиями в новой метрике, служат всевозможные верхние полуокружности с центрами на оси x , а также их предельные положения — полупрямые $x = \text{const}$, $y > 0$. Если условиться называть эти экстремали «прямыми», указанную полуплоскость — «плоскостью», а точки понимать в обычном смысле, то можно проверить, что будут выполняться все аксиомы евклидовой геометрии на плоскости, за исключением аксиомы о параллельных. (Убедитесь, например, в том, что через каждые две точки проходит ровно одна «прямая».) В то же время через точку A , лежащую вне «прямой» (l) (рис. 104), можно провести целый пучок прямых,

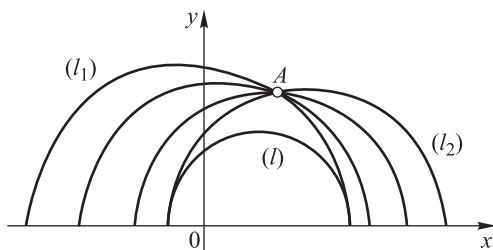


Рис. 104

которые при своем безграничном продолжении не пересекают (l) . (Обратите внимание, что в силу формулы (39) подходу по «прямой» к оси x отвечает удаление по новой метрике в бесконечность.) Этот пучок ограничен двумя «прямыми», одна из которых асимптотически приближается (конечно, имеется в виду по новой метрике) к (l) в одну сторону, а другая — в другую.

Такая геометрия, в которой выполнены все евклидовы аксиомы, за исключением аксиомы о параллельных, называется *геометрией Лобачевского*; ее открыли в начале XIX века независимо друг от друга выдающийся венгерский математик Я. Бойаи (1802–1860), К. Гаусс и Н. И. Лобачевский, причем последний разработал ее наиболее далеко и первым опубликовал сообщение о этом открытии.

Многие результаты планиметрии Лобачевского можно получить, исходя из ее указанной здесь реализации. Так, из изотропности правой части (39) вытекает, что угол между двумя линиями в точке их пересечения по Лобачевскому — это обычный угол между этими линиями в плоскости x, y . Отсюда вытекает, что «движениями» плоскости Лобачевского следует считать конформные отображения верхней полуплоскости в себя (п. II.2.8), которые по необходимости являются дробно-линейными и потому не только сохраняют углы, но в силу кругового свойства сохраняют «прямолинейность». Из (39) вытекает формула для «площади» фигуры (S):

$$S = \iint_{(S)} \frac{1}{y^2} dx dy,$$

откуда, выполнив интегрирование по y , получаем также, что

$$S = \oint_{(L)} \frac{1}{y} dx, \quad (40)$$

где контур (L) фигуры (S) проходится в положительном направлении.

Отсюда получается весьма интересная формула для площади треугольника ABC с углами α, β, γ (рис. 105). Так как вдоль дуги AB можно перейти к параметрическому представлению $x = a + R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, то вклад этой дуги в интеграл (40) равен

$$\int_{AB} \frac{1}{R \sin \varphi} d(a + R \cos \varphi) = \varphi_{AB},$$

т. е. углу, под которым дуга AB видна из своего центра. Аналогично находим вклады двух других сторон, т. е.

$$S = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} - \varphi_{AC}. \quad (41)$$

Не так как при обходе замкнутого контура ABC касательная совершает поворот на угол $-\varphi_{AB} + (\pi - \beta) - \varphi_{BC} + (\pi - \gamma) + \varphi_{AC} + (\pi - \alpha)$, который должен равняться 2π , то из (41) получаем окончательно

$$S = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Мы видим, что в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника всегда меньше π , а площадь треугольника зависит только от суммы его углов: чем

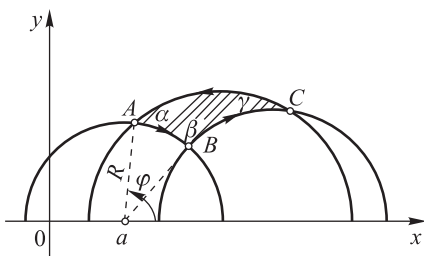


Рис. 105

меньше площадь, тем эта сумма ближе к π . Кроме того, получается, что в геометрии Лобачевского нет понятия подобия: из равенства соответственных углов двух треугольников вытекает равенство самих треугольников (докажите это!).

Аналогичную конструкцию (продумайте ее!) можно осуществить в n -пространстве $z > 0$ пространства x, y, z для интерпретации стереометрии Лобачевского.

9. Вариационные принципы. Каждый вариационный принцип утверждает, что *для некоторого класса задач, если заданы условия задачи, то из всех мыслимых состояний, процессов и т. п., в определенном смысле совместимых с этими условиями, на самом деле реализуются такое состояние, такой процесс, которые придат некоторому характерному для этого принципа функционалу стационарное значение*. Иногда говорят не о стационарном, а об экстремальном значении, что имеет близкий, но не всегда равноценный смысл. Таким образом, вариационный принцип характеризуется указанием класса задач, понятием совместимости сравниваемых процессов (будем для определенности говорить о процессах) с условиями задачи и определенного на этих процессах функционала, который должен принимать стационарное или экстремальное значение.

Мы уже упоминали во введении к этой главе о значении вариационных принципов и основанных на них вариационных методах решения задач. Эти принципы естественно излагаются в специальных дисциплинах, вне курса математики, так как каждый из таких принципов обычно действует внутри одной дисциплины. Тем не менее мы упомянем о нескольких из них либо из-за их универсального значения, выходящего за рамки одной дисциплины, либо из-за необходимости на них ссылаться в курсе математики, либо же просто для примера. Некоторые принципы (впрочем, мы таких здесь не будем рассматривать) представляют помимо специального также общематематический интерес.

Имеются две основные группы вариационных принципов. К одной из них, восходящей еще к Ферма и имеющей дело с задачами «чистой» и прикладной физики и ряда других дисциплин, в наибольшей степени применимо определение, данное в начале этого пункта. Здесь идет речь об изучении объективно существующих процессов. Такой принцип, независимо от его исторического происхождения, обычно может быть выведен из локальной теории процесса (например, из его дифференциального уравнения, которое оказывается уравнением Эйлера для функционала, характеризующего принцип). В этом случае в принципе обычно говорится о стационарном значении функционала, так как для локальных свойств экстремальность этого значения несущественна. (Тем не менее бывают классы задач, в которых и экстремальность несет дополнительную информацию, например говорит об устойчивости процесса.) Отметим, что даже если вариационный принцип оказывается эквивалентным дифференциальному уравнению, этот принцип все рав-

но часто приносит большую пользу из-за его более универсального (по сравнению с уравнениям) вида, облегчающего возможность аналогий и обобщений, а также из-за удобства применения численных методов.

Другая основная группа вариационных принципов развилась лишь в последние десятилетия и имеет дело с задачами теории регулирования, математической экономики и ряда других дисциплин. Здесь идет речь о выработке в заданных условиях определенной стратегии, линии поведения, которая обеспечивала бы в этих условиях максимальную пользу. Значение этой пользы, функции цели (п. IV.5.1) и служит функционалом, определенным на совокупности стратегий, причем в данных задачах, конечно, требуется максимизировать этот функционал. Задачи этой второй группы обычно называют задачами *оптимального управления, оптимального регулирования и т. п.* Здесь мы не будем их касаться. Отметим только, что для многих из этих задач характерно наличие высвобождающих связей (п. I.19), так что решение задачи на экстремум может и не придавать функционалу стационарного значения. Поэтому для построения таких решений приходится вырабатывать свои специфические методы, отличные от методов классического вариационного исчисления, основанных главным образом на использовании стационарности.

Одним из самых простых и наглядных вариационных принципов первой группы является принцип Ферма в геометрической оптике. В первоначальной формулировке этот принцип говорил, что из всех возможных путей, идущих из одной заданной точки в другую, луч света выбирает такой, который он проходит за минимальное время. Здесь сравниваются между собой всевозможные пути, совместимые с геометрией оптического устройства, а минимизируемым функционалом служит время прохождения светом этих путей. Из принципа Ферма вытекают законы распространения света в однородной и неоднородной средах, законы отражения и преломления. Однако приведенная формулировка принципа представляется несколько загадочной: как может свет «сравнить» все пути и «выбрать» из них оптимальный? Разгадка основана на том, что можно указать случаи, когда время прохождения светом реального пути имеет не минимальное, а минимаксное значение ([41], § XII.10). Таким образом, в принципе Ферма существенно не минимальное, а стационарное время прохождения светом пути; а в такой локальной форме этот принцип можно вывести из волновой теории света (на путях, не обеспечивающих указанной стационарности, происходит интерференция). Минимальность же времени, прохождения в простейших случаях вытекает из структуры функционала, который должен принять стационарное значение. (Докажите, например, перейдя к интегрированию по x , что на каждой достаточно малой дуге экстремали функционал (1.95) принимает сильное и даже тотальное минимальное значение среди всех линий, соединяющих две заданные точки.)

10. Принцип Гамильтона в простейшем случае. Вариационный принцип Гамильтона, являющийся одним из наиболее универсальных принципов современного естествознания, мы рассмотрим сначала на простом примере. Пусть материальная точка массы m может двигаться по оси x , причем в процессе движения на эту точку действует направленная по оси x сила $f(x, t)$, зависимость которой от координаты x и времени t предполагается заранее заданной. Тогда закон $x(t)$ движения точки должен удовлетворять хорошо известному дифференциальному уравнению Ньютона

$$m\ddot{x} = f(x, t). \quad (42)$$

Обозначим первообразную по x для функции $-f(x, t)$ через $U(x, t)$, например можно положить

$$U(x, t) = - \int_{x_0}^x f(s, t) ds;$$

это потенциал рассматриваемого силового поля (п. I.3.1); кроме того, обозначим

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

это кинетическая энергия движущейся точки. В таких обозначениях уравнение (42) можно переписать в виде

$$-U'_x - \frac{d}{dt} T'_x = 0. \quad (43)$$

Если же заметить, что U не зависит от $\dot{x}$, а T — от x , и обозначить

$$L(t, x, \dot{x}) = T - U$$

(это *функция Лагранжа* для рассматриваемой механической системы), то уравнение (43) можно записать так:

$$L'_x - \frac{d}{dt} L'_x = 0. \quad (44)$$

Но это как раз уравнение Эйлера для функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt, \quad (45)$$

имеющего несколько странное название *действие*. Так как в силу предыдущего условие его стационарности при зафиксированных значениях

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

полностью равносильно уравнению (42), то мы видим, что дифференциальный закон движения Ньютона можно сформулировать так: *если заданы начальное и конечное состояния системы* (т. е. моменты времени и положения точки в эти моменты), *то из всех возможных законов движения на самом деле реализуется такой, для которого действие принимает стационарное значение*. В этом состоит вариационный принцип Гамильтона.

Из структуры подынтегральной функции (45) легко вывести (см. начало п.2.6.), что для любого реального закона движения точки на любом достаточно малом интервале времени действие принимает не просто стационарное, а минимальное значение; поэтому принцип Гамильтона иногда называют также *принципом минимального действия*. Однако такое название не совсем удачное, так как уже на самых простых примерах легко проверить, что для больших промежутков времени действие будет иметь не минимальное, а минимаксное значение. Поэтому лучше говорить о принципе не минимального, а стационарного действия.

Рассмотрим, например, линейный осциллятор. Здесь $f = -kx$, где k — постоянный коэффициент упругости, откуда $U = \frac{kx^2}{2}$,

$$L = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2)$$

и (45) превращается в квадратичный функционал с постоянными коэффициентами. Этот случай был в других обозначениях рассмотрен в п.2.4, где было показано, что при $t_1 - t_0 < \pi\sqrt{m/k}$ значение функционала получается минимальным, а при $t_1 - t_0 > \pi\sqrt{m/k}$ — минимаксным. Отметим, что $\pi\sqrt{m/k} = \pi/\omega_0$ — это полупериод свободных колебаний осциллятора, т. е. промежуток времени между соседними моментами прохождения осциллятором положения равновесия $x = 0$.

Как видим, вывод вариационного принципа свелся в данном случае к искусственной подгонке уравнения движения (42) к виду уравнения Эйлера (44). Тем не менее этот переход оказывается полезным не только ввиду дальнейших обобщений; в §4 мы увидим, что целый ряд задач и для одномерного случая значительно удобнее решать после такого перехода.

В связи с подобными переходами возникает следующий общий вопрос: можно ли заданное дифференциальное уравнение представить в виде уравнения Эйлера для некоторого функционала? Ограничимся функционалами (1.18); тогда из (1.37) ясно, что речь идет о дифференциальных уравнениях вида

$$U(x, y, y')y'' + V(x, y, y') = 0. \quad (46)$$

Из равенств

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &\equiv -F''_{zz}(x, y, z), \\ V(x, y, z) &\equiv F'_y(x, y, z) - F''_{zz}(x, y, z) - F''_{yz}(x, y, z)z \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

легко вывести необходимое условие для возможности подбора F :

$$V'_z \equiv U'_x + U'_y z. \quad (48)$$

Можно проверить, что оно является и достаточным, причем F подбирается так: сначала из первого равенства (47) находим F с точностью до слагаемого, линейного относительно z , а это слагаемое находим, подставляя полученное выражение для F во второе равенство (47). Условие (48) теоретически всегда можно обеспечить, умножив обе части исходного уравнения (46) на соответственно подобранный множитель $R(x, y, y')$, хотя на практике это может оказаться затруднительным. Если условие (48) уже выполнено, то функция F определяется с точностью до слагаемого, которое получится, если в равенствах (47) положить $U \equiv V \equiv 0$ (почему?). Но тогда из первого равенства (47) получаем, что

$$F = (a(x, y)z + b(x, y)).$$

Подставляя это выражение во второе равенство (47), видим, что

$$a'_x \equiv b'_x, \text{ т. е. } a = \varphi'(x, y), \quad b = \varphi'_x(x, y).$$

Таким образом, неопределенное слагаемое в F имеет вид

$$\Phi'_y(x, y)y' + \varphi'_x(x, y) = \frac{d}{dx}\varphi(x, y).$$

Это можно было предвидеть, так как добавление такого члена к F , например при граничных условиях (1.26), приводит просто к добавлению к $I\{y\}$ постоянного слагаемого.

Результаты последнего абзаца непосредственно переносятся на функционалы вида (45) от векторных функций $y(x)$, а также на функционалы от функций нескольких переменных. Например, уравнение Эйлера–Остроградского (1.69) остается неизменным при добавлении к функции F любого выражения *дивергентного типа*

$$\frac{\partial}{\partial x} A(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} B(x, y, z)$$

(проверьте!).

11. Принцип Гамильтона для систем с конечным числом степеней свободы. Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений, обобщающих уравнение (42):

$$m_i \ddot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Этими уравнениями описывается, например, система из r точек в пространстве, на которые не наложено никаких связей и действуют силы, зависящие от координат всех точек и от времени. (При этом x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты первой точки массы $m_1 = m_2 = m_3$; x_4, x_5, x_6 — координаты второй точки массы $m_4 = m_5 = m_6$ и т. д.; $N = 3r$ — число степеней свободы такой системы.) Пусть силовое поле имеет потенциал $U(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$, т. е.

$$f_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (49)$$

Такой потенциал (*потенциальная энергия* системы), в отличие от п. 10, имеется не всегда, а только для потенциальных полей, признаком которых служат равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

(ср. п. I.3.1). Рассуждая, как в п. I.3.1, легко показать, что U равно работе, которую совершает силовое поле в фиксированный момент времени при переводе системы из любого текущего состояния $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ в некоторое заданное $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0})$; при этом такая работа не должна зависеть от способа перевода, что и является критерием потенциальности. Произвол в выборе конечного состояния равносильно добавлению к U произвольной функции времени, что несущественно для дальнейшего.

Обозначив далее

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2, \quad L(t, x_1, x_2, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N) = T - U$$

и проведя рассуждения по образцу п. 10, мы приходим к тому же выводу о стационарном значении действия, т.е. интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1, x_2, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N) dt$$

для реального закона движения.

В курсах механики несложно доказывается, что принцип Гамильтона остается справедливым и в случае, когда на рассматриваемую систему точек наложены голономные связи

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \nu; \nu < N). \quad (50)$$

Тогда в формулировке принципа Гамильтона сравнению подлежат только законы движения, совместимые с этими связями, т.е. удовлетворяющие уравнениям (50); другими словами, речь идет об условно стационарном значении (п. 1.13). Чтобы избавиться от этой условности, которая не всегда удобна, обычно выбирают *обобщенные координаты* $q_1, q_2, \dots, q_n$ (где $n = N - \nu$ есть число степеней свободы в системе), характеризующие положение системы. Через них выражаются координаты точек системы

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (51)$$

(это, по существу, общее решение системы уравнений (50) в параметрической форме), а потому и потенциал $U(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, кине-

тическая энергия $T(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ и функция Лагранжа $L = T - U$. Так как уравнения связей учтены теперь самим выбором координат q_i , то мы переходим к задаче на безусловно стационарное значение функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) dt \quad (52)$$

при заданных начальном и конечном состояниях системы.

Заметим, что T , а потому и L представляют собой многочлены второй степени относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ с коэффициентами, зависящими от $q_1, q_2, \dots, q_n$, причем квадратичная форма, составленная из членов второй степени, положительно определенная (почему?); в остальном функция L совершенно произвольная. Поэтому методы и результаты исследования механических систем с конечным числом степеней свободы можно применить к любому функционалу (1), у которого подынтегральная функция имеет описанную структуру. Из этого, в частности, в силу начала п. 2.6 вытекает, что реальный закон движения, т.е. экстремаль функционала (52) на каждом достаточно малом временном интервале придает этому функционалу сильно минимальное значение.

Если система *автономная*, т.е. в потенциал и в уравнения связей (50) не входит t , то t не входит и в правые части (51), а потому T представляет собой квадратичную форму относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$. Тогда функция Гамильтона (см. (5)) имеет особенно простой смысл:

$$H = -L + \sum \dot{q}_i p_i = -(T - U) + \sum \dot{q}_i T'_{\dot{q}_i} = -(T - U) + 2T = T + U$$

(мы воспользовались теоремой Эйлера об однородных функциях, см., например, ЛВМ, п. IX.12), т.е. H есть полная энергия системы. Так как в автономном случае функция L под знаком интеграла (52) не зависит от t , то в силу п. 2 мы получаем первый интеграл: $H = \text{const}$ для любого реального закона движения системы. Таким образом, в автономном случае полная энергия в процессе движения остается постоянной. Это свойство системы называется ее *консервативностью*.

Канонические переменные $p_i = T'_{\dot{q}_i}$ называются *обобщенными импульсами*; для декартовой системы координат это обычные импульсы $m_i \dot{x}_i$.

В некоторых случаях для получения первых интегралов удастся применить теорему Нётер п. 5 (см. примеры в [29]). Докажите, например, с помощью этой теоремы, а также непосредственно с помощью уравнений Эйлера, что если функция L не зависит от одной из координат q_i , то имеет место первый интеграл $p_i = \text{const}$ (*закон сохранения импульса*).

Для автономных систем принцип стационарного действия имеет интересное геометрическое истолкование. Мы видели, что в этом случае имеет место первый интеграл .

$$T(q, \dot{q}) + U(q) = h \quad (= \text{const}) \quad (53)$$

(для краткости вместо $q_1, q_2, \dots, q_n$ пишем просто q). Поэтому ограничимся сравнением законов движения, удовлетворяющих дифференциальной связи (53), с заданным значением h . Но так как

$$2T = (T - U) + (T + U) = (T - U) + h,$$

то принцип стационарного действия можно переписать в форме

$$\delta \int T(q, \dot{q}) dt = 0. \quad (54)$$

Однако

$$T = \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j, \text{ откуда } dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}(q) dq_i dq_j}$$

Подставляя в (54) и учитывая, что $T = h - U$, получаем

$$\delta \int \sqrt{[h - U(q)] \sum_{i,j} a_{ij}(q) dq_i dq_j} = 0. \quad (55)$$

Таким образом, время t полностью исключено и связь (53) можно не учитывать: при заданной траектории движения системы в пространстве q из этой связи можно определить dt и тем самым получить закон движения системы по этой траектории.

Введем теперь в пространстве q -состояний системы — метрику по формуле

$$ds^2 = [h - U(q)] \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) dq_i dq_j. \quad (56)$$

Тогда основное уравнение (55) можно переписать в виде $\delta \int ds = 0$, т.е. мы получаем (п.2.6), что траекториями реальных движений $q(t)$ системы будут служить геодезические линии в этой метрике. Различным потенциальным силовым полям и различным значениям полной энергии h отвечают различные способы введения метрики (56) в пространство состояний системы.

12. Принцип Гамильтона для сплошных сред. Струна. Рассмотренный в п.10 принцип Гамильтона обладает той замечательной особенностью, что он формулируется не в терминах координат, а в терминах кинетической и потенциальной энергий системы. Это дает возможность с помощью предельного перехода распространить принцип на сплошные среды, а также на физические поля, для которых имеется естественная замена этих видов энергии, например на электромагнитные и т.п. Принцип Гамильтона сохраняет свое действие и при переходе к релятивистской механике.

Рассмотрим несколько примеров. Выведем сначала уравнение плоских поперечных малых колебаний струны, натянутой с силой P между точками $x = 0$ и $x = l$ оси x , если на струну действует поперечная сила с плотностью

$f(x, t)$. При этом *струной* считается одномерная среда, работающая только на растяжение, но не на изгиб, т. е. не сопротивляющаяся изгибу.

Будем считать, что сила натяжения P в процессе колебания не меняется (это оправдано, если колебания малы по амплитуде) и что каждая точка x струны в процессе колебаний смещается перпендикулярно оси x ; обозначим ординату этой точки в момент t через $u(x, t)$. Функция $u(x, t)$ и определяет закон колебания, ее график в фиксированный момент времени представляет форму струны в этот момент.

Если перевести струну в некоторый момент t из состояния $u(x, t)$ в ненагруженное состояние равновесия $u \equiv 0$, то будет произведена работа

$$P \left(\int_0^l \sqrt{1 + u_x'^2} dx - l \right) - \int_0^l f(x, t) u dx$$

(продумайте это выражение!), которую и надо принять за потенциальную энергию U рассматриваемой системы. Разлагая радикал в ряд и отбрасывая в предположении малости $|u|$ члены с $u_x'^4$, получим

$$U = \int_0^l \left[\frac{P}{2} u_x'^2 - f(x, t) u \right] dx;$$

при этом члены в квадратных скобках считаем одного порядка малости. Кинетическая энергия струны равна

$$T = \int \frac{dm \cdot \dot{u}^2}{2} = \int_0^l \frac{\rho}{2} u_t'^2 dx,$$

где ρ — линейная плотность струны. Поэтому функция Лагранжа такова

$$L = T - U = \int_0^l \left[\frac{\rho}{2} u_t'^2 - \frac{P}{2} u_x'^2 + f(x, t) u \right] dx. \quad (57)$$

(Более точно называть это выражение не функцией, а оператором, преобразующим функцию $u(x, t)$ в некоторую функцию от t .) Действие выразится двойным интегралом

$$I\{u\} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \left[\frac{\rho}{2} u_t'^2 - \frac{P}{2} u_x'^2 + f(x, t) u \right] dx. \quad (58)$$

Так как действие должно иметь стационарное значение, то должно удовлетворяться соответствующее уравнение Эйлера (1.59)

$$f(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_t') = \frac{\partial}{\partial x} (-P u_x') = 0. \quad (59)$$

Будем считать ρ постоянным (т. е. струну однородной) и обозначим

$$a = \sqrt{\frac{P}{\rho}}, \quad f_1(x, t) = \frac{1}{\rho} f(x, t).$$

Тогда из (59) получим окончательное уравнение колебаний струны

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f_1(x, t). \quad (60)$$

Из (57) видно, что функция Лагранжа имеет плотность

$$\Lambda = \frac{\rho}{2} u_t'^2 - \frac{P}{2} u_x'^2 + f(x, t)u.$$

Если вспомнить о возможности приближенной замены, по образцу п.1.12, струны на систему материальных точек с конечным числом степеней свободы, то ясно, что для струны можно говорить о плотности импульса

$$\Pi = \frac{\partial \Lambda}{\partial u_t'} = \rho u_t',$$

а также о плотности функции Гамильтона

$$\eta = -\Lambda + u_t' \Pi = \frac{\rho}{2} u_t'^2 + \frac{P}{2} u_x'^2 - f(x, t)u.$$

из которой сама функция Гамильтона получается интегрированием:

$$H = \int_0^l \left[\frac{1}{2\rho} \Pi^2 + \frac{P}{2} u_x'^2 - f(x, t)u \right] dx. \quad (61)$$

Из п.11 следует, что в автономном случае, когда f не зависит от t , функция H постоянна вдоль каждого решения (закон сохранения полной энергии). Это можно вывести и непосредственно из уравнения (60), так как, дифференцируя интеграл (61) по параметру t и пользуясь граничными условиями $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \int_0^l (\rho u_t' u_{tt}' + P u_x' u_{xt}' - f_t' u - f u_t') dx = \\ &= \int_0^l \left[\rho u_t' \left(\frac{P}{\rho} u_{xx}'' + \frac{f}{\rho} \right) + P u_x' u_{xt}' - f_t' u - f u_t' \right] dx = \\ &= \int_0^l [P(u_t' u_x')_x - f_t' u] dx = - \int_0^l f_t' u dx, \end{aligned}$$

откуда и вытекает наше утверждение. Интересно отметить, что, в отличие от п.10, значение действия (58) является минимаксным для как угодно малого интервала времени. В самом деле, пусть для простоты $f \equiv 0$; положим при некотором $k = 1, 2, 3, \dots$

$$u_0(x, t) = \begin{cases} \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{ak\pi}{l} t & \left(0 \leq t \leq \frac{l}{ak} \right), \\ 0 & \left(t > \frac{l}{ak} \right). \end{cases}$$

При $t_0 = 0$ и как угодно малом фиксированном $t_1 > 0$ всегда можно выбрать k так, чтобы $\frac{l}{ak} < t_1$. Легко проверить непосредственно, что $I\{u_0\} = 0$ и что на линии излома $t = \frac{l}{ak}$ условия Вейерштрасса–Эрдмана (п. 1.20) не выполняются. Отсюда и вытекает наше утверждение о минимаксности (продумайте, почему!).

Мы предлагаем читателю вывести уравнение малых поперечных колебаний мембраны

$$u''_{tt} = a^2 (u''_{xx} + u''_{yy}) + f_1(x, y, t), \quad (62)$$

натянутой с силой P на единицу длины. Мембрана, как и струна, работает только на растяжение; смысл букв в (62) аналогичен их смыслу в (60).

Важным обобщением уравнений (60) и (62), а также аналогичного уравнения в трехмерном пространстве является уравнение *Клейна–Гордона*. Оно получается, если допустить, что на струну или мембрану наложена равномерно распределенная линейная упругая связь, стремящаяся воззратить их в положение $u \equiv 0$. Докажите, что это сводится к добавлению в правой части (60) или (62) добавочного члена $-ku$ ($k > 0$).

13. Стержень и пластинка. Рассмотрим теперь продольные колебания прямолинейного стержня, расположенного вдоль оси x , в ненагруженном состоянии равновесия от $x = 0$ до $x = l$. Пусть $u(x, t)$ — отклонение точки x стержня в момент t вдоль оси x . Будем считать для общности, что на стержень действует продольная внешняя сила с плотностью $f(x, t)$ и что концы стержня упруго заделаны с коэффициентами упругости α_0 и α_l соответственно. Так как при относительном удлинении $\frac{\partial u}{\partial x}$ элемента dx стержня в этом элементе по закону Гука возникает сила упругости

$$P = FE \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (63)$$

где F — площадь поперечного сечения, а E — модуль упругости, определяющийся материалом стержня, то работа, необходимая для такого удлинения из состояния $u \equiv 0$, равна

$$dA = \frac{1}{2} FE \frac{\partial u}{\partial x} \partial_x u = \frac{1}{2} FE u_x'^2 dx.$$

(Откуда взялся коэффициент $1/2$?) Поэтому потенциальная энергия стержня в произвольно растянутом состоянии равна

$$U = \int_0^l \left[\frac{1}{2} FE u_x'^2 - f(x, t)u \right] dx + \frac{1}{2} \alpha_0 u^2 \Big|_{x=0} + \frac{1}{2} \alpha_l u^2 \Big|_{x=l}.$$

Кинетическая энергия стержня равна

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \rho F u_t'^2 dx,$$

где ρ — объемная плотность материала стержня. Считая стержень однородным и применяя принцип Гамильтона, получаем дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня

$$f(x, t) - \rho F u''_{tt} + F E u''_{xx} = 0,$$

т. е. то же уравнение (6)), в котором $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $f_1 = \frac{f}{\rho F}$. Естественные граничные условия в силу п. 1.15 (см. (1.84)) имеют вид

$$(F E u'_x - \alpha_0 u)_{x=0} = 0, \quad (F E u'_x + \alpha_l u)_{x=l} = 0; \quad (64)$$

они называются (однородными) *граничными условиями 3-го рода*. (Получите их непосредственно из формулы (63) и продумайте смысл знака перед α .) Если какой-либо из концов, например правый, свободен, то $\alpha_l = 0$, и соответствующее граничное условие принимает вид

$$u'_x|_{x=l} = 0,$$

это *граничное условие 2-го рода*. Наконец, абсолютно жесткой заделке отвечает $\alpha_l = \infty$; поделив второе условие (64) на α_l и устремив α_l к ∞ , получаем *граничное условие 1-го рода*.

$$u|_{x=l} = 0.$$

В качестве следующего примера рассмотрим *поперечные колебания* такого же стержня; при этом примем, что при таких колебаниях стержень работает только на изгиб. При изгибе в каждом элементе стержня возникает восстанавливающий момент M , который мы будем считать пропорциональным кривизне $k = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$ с постоянным коэффициентом пропорциональности μ (зависящим от материала стержня и момента инерции поперечного сечения стержня). Работа, необходимая для такого изгиба из прямолинейного состояния, равна $\frac{1}{2} M |d\varphi| = \frac{1}{2} \mu k^2 ds$. Примем для общности, что на стержень действует поперечная внешняя сила, распределенная с плотностью f . Если вспомнить, что

$$ds = \sqrt{1 + u_x'^2} dx, \quad k = |u''_{xx}|(1 + u_x'^2)^{-3/2},$$

и произвести линеаризацию, мы получим выражение для действия

$$\int_{t_0}^{t_1} ds \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho u_t'^2 - \frac{1}{2} \mu u''_{xx}{}^2 + f(x, t) u \right] dx.$$

Соответствующее уравнение Эйлера имеет вид

$$\rho u''_{tt} = -\mu u''''_{xxxx} + f(x, t).$$

Вид граничных условий определяется режимом, поддерживаемым на концах стержня. Если какой-либо из концов абсолютно жестко неподвижно заделан, то на этом конце граничное условие имеет вид

$$u = 0, \quad u'_x = 0. \quad (65)$$

(В случае абсолютно жесткой заделки возможно также принудительное движение, когда правые части в граничном условии представляют собой заданные функции времени.) Если конец свободно оперт, то соответствующее граничное условие имеет вид

$$u = 0, \quad u''_{xx} = 0; \quad (66)$$

последнее равенство вытекает из формулы $M = \mu k$, но может быть получено и как естественное граничное условие, что мы предоставляем читателю. Рассмотрим еще случай, когда на концы наложены линейные упругие связи, сопротивляющиеся поперечному перемещению и повороту этих концов. Тогда к выражению для потенциальной энергии надо добавить члены

$$\frac{1}{2} [\alpha_0 u^2 + \beta_0 u_x'^2]_{x=0} + \frac{1}{2} [\alpha_l u^2 + \beta_l u_x'^2]_{x=l}$$

и рассматривать естественные граничные условия, имеющие в данном случае вид (проверьте!)

$$\begin{aligned} (\mu u''_{xx} + \beta_l u'_x)_{x=l} &= 0, & (\mu u'''_{xxx} - \alpha_l u)_{x=l} &= 0, \\ (\mu u''_{xx} - \beta_0 u'_x)_{x=0} &= 0, & (\mu u'''_{xxx} + \alpha_0 u)_{x=0} &= 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Граничные условия (65) и (66) получаются из этих как предельные случаи. Если на концах приложены еще внешняя сила и внешний момент, производящие работу, при перемещении и повороте концов, то получатся неоднородные условия вида (67). (Разберите этот случай!)

В рассмотренной задаче о поперечных колебаниях стержня, прямолинейного в ненагруженном состоянии равновесия, часто вместо термина *стержень* употребляется термин *балка*. В двумерном случае в аналогичной задаче говорят о *пластинке*; здесь требуется, чтобы она в ненагруженном состоянии равновесия была плоской.

Чтобы получить выражение для потенциальной энергии элемента пластинки в точке M_0 , выберем декартовы координаты с началом M_0 так, чтобы плоскость x, y касалась элемента. Тогда уравнение пластинки вблизи M_0 имеет вид

$$z = \frac{1}{2} [(z''_{xx})_0 x^2 + 2(z''_{xy})_0 xy + (z''_{yy})_0 y^2] + \text{члены высшего порядка малости.} \quad (68)$$

Примем по аналогии с одномерной задачей, что в случае малых деформаций потенциальная энергия элемента пластинки является квадратичной формой относительно производных второго порядка. Так как эта энергия не может зависеть от выбора осей координат, то, приводя квадратичную форму в (68) к главным осям, получим

$$dU = (Ak_1^2 + Bk_1k_2 + Ck_2^2) dS,$$

где k_1 и k_2 — соответствующие собственные значения, равные по абсолютной величине (см., например, ЛВМ, п. XII.9) кривизнам главных нормальных сечений в M_0 , а dS — площадь рассматриваемого элемента. Примем пластинку изотропной; тогда $A = C$, обозначим это общее значение через $\mu/2$. Применяя

соотношения между собственными значениями, т. е. корнями характеристического уравнения и коэффициентами этого уравнения, получим (проверьте!)

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} (k_1^2 + k_2^2) + B k_1 k_2 &= \frac{\mu}{2} (k_1 + k_2)^2 + (B - \mu) k_1 k_2 = \\ &= \frac{\mu}{2} (z''_{xx} + z''_{yy})^2 + (B - \mu) (z''_{xx} z''_{yy} = z''_{xy})^2. \end{aligned}$$

Поэтому потенциальная энергия изогнутой пластинки равна

$$\frac{1}{2} \int \left[\mu (u''_{xx} + 2u''_{xx} u''_{yy} + u''_{yy})^2 + 2(B - \mu) (u''_{xx} u''_{yy} - u''_{xy})^2 \right] dS.$$

(При этом мы перешли от проектирования элементов пластинки на касательные плоскости к проектированию их на единую плоскость $u = 0$ ненагруженного равновесного состояния пластинки; однако при малых колебаниях поправочные члены имеют высший порядок малости и при линеаризации должны быть отброшены.) Составляя интеграл действия, получаем соответствующее уравнение Эйлера

$$\rho u''_{tt} = -\mu (u^{IV}_{xxxx} + 2u^{IV}_{xxyy} + u^{IV}_{yyyy}). \quad (69)$$

Оператор, действующий на u в круглых скобках полученного выражения, называется *бигармоническим*:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2; \quad (70)$$

пользуясь значком Δ для оператора Лапласа, можно уравнение (69) записать в виде

$$\rho u''_{tt} = -\mu \Delta^2 u.$$

Рассмотрение соответствующего неоднородного уравнения, а также граничных условий мы предоставляем читателю.

14. Общая схема вариационного подхода к физическим полям.

Мы уже упоминали в п. 12, что принцип Гамильтона в соответственном видоизменении можно применять к весьма широкому классу физических полей. В частности, большое число примеров такого применения содержится в гл. 3 книги [92], к которой мы и отсылаем читателя (см. также [29]). Здесь мы сделаем только несколько общих замечаний по этому поводу и разберем один тип полей.

В основе принципа Гамильтона всегда лежит функция Лагранжа, а для полей — плотность функции Лагранжа. Составление этой функции далеко не всегда так просто, как в задачах механики, так как для других типов полей часто бывает трудно отчетливо отделить кинетическую энергию от потенциальной; например, энергия заряда, движущегося в магнитном поле, имеет черты как кинетической энергии (зависит от скорости движения), так и потенциальной (зависит от поля). Поэтому иногда приходится, как мы это делали в п. 10, исходить в простейших задачах из уравнений движения, «подгонять» их под вид уравнений Эйлера, а затем, сравнивая несколько подобных задач, постараться разумно определить функцию Лагранжа, которую можно было бы распространить и на более сложные задачи. Помогает при этом выявление

скалярных инвариантов рассматриваемой физической задачи, так как функция Лагранжа и ее плотность должны выражаться через эти инварианты.

Пусть плотность L функции Лагранжа выбрана; обычно она выражается через некоторые скалярные *полевые переменные* $\psi_i = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. величины, значения которых характеризуют состояние поля в данной точке пространства $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ в данный момент времени $t = \xi_4$, и через их производные $\psi_{ik} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_k}$. (Некоторые из полевых переменных могут служить компонентами вектора или тензора.) Кроме того, в случае неоднородного поля или неаффинных координат L может зависеть также от ξ_1, ξ_2, ξ_3 , а в неавтономном — от ξ_4 . Тогда *полный лагранжев интеграл*, который служит обобщением интеграла действия, имеет вид

$$\iiint J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \quad (71)$$

и должен быть инвариантом относительно преобразований, допустимых в рассматриваемой теории (скажем, преобразований Лоренца в релятивистской теории и т. п.). Требование стационарности интеграла (71) при заданных граничных условиях приводит в силу п. 1.11 к системе уравнений Эйлера

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{ik}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (72)$$

которые в механике, как известно, называются уравнениями Лагранжа.

Отметим, что при включении в рассмотрение точечных, линейных и поверхностных масс, зарядов и т. п. к интегралу (71) могут добавиться интегралы низшей размерности. С помощью дельта-функции их всегда можно объединить с интегралом (71), хотя на практике это может оказаться и нецелесообразным.

Как мы упоминали в п. 10 для более специального случая, при добавлении к L выражения дивергентного типа

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial}{\partial \xi_k} A_k(\xi_1, \dots, \xi_4, \psi_1, \dots, \psi_n)$$

к интегралу (71) добавится слагаемое, определяемое граничными условиями, а система уравнений Лагранжа–Эйлера (72) не изменится. Этим иногда пользуются для упрощения вида плотности функции Лагранжа.

Величина

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \psi_{i4}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (73)$$

называется *плотностью канонического импульса*, в задачах механики это плотность обобщенного импульса. Переписав уравнение (72) в виде, подобном закону Ньютона,

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \psi_i} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{ik}} \right),$$

мы получаем в правой части аналог плотности обобщенной силы; при этом первый член часто бывает связан с наличием внешних сил, действующих на поле, а второй — с воздействием поля на величину ψ_i .

Квадратная матрица $\mathbf{W}$ четвертого порядка с элементами

$$W_{ij} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi_i} \frac{\partial L}{\partial \psi_{rj}} \quad (i \neq j), \quad W_{ii} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi_i} \frac{\partial L}{\partial \psi_{ri}} - L \quad (74)$$

называется *матрицей напряжения-энергии*. В частности,

$$H = W_{44} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \psi_r}{\partial t} p_r - L = \sum_{r=1}^n \psi_{r4} p_r - L \quad (75)$$

есть плотность энергии поля. Если L , а также пространственная область (G) , занятая полем, и значения всех величин ψ_i на границе (G) не зависят от t , то и интеграл $\iiint_{(G)} H d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ не зависит от t (проверьте!).

Выразив, если это окажется возможным, из равенств (73) величины ψ_{i4} через все остальное и подставив результат в (75), получим выражение H через координаты, полевые переменные, их пространственные производные и канонические импульсы. Если переписать интеграл (71) в виде

$$\iiint \left(-H + \sum \frac{\partial \psi_r}{\partial t} p_r \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$$

и записать соответствующую систему уравнений Эйлера (ср. п. 4), то получим каноническую форму

$$\frac{\partial p_r}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_r} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial H}{\partial \psi_{rk}}, \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (76)$$

системы (72). (Докажите, что уравнения (72) и (76) равносильны, и выведите вид правых частей (76) с помощью конечномерной аппроксимации поля по примеру п. 1.12.)

Исходя из выражений (74) и пользуясь уравнениями (72), легко проверить непосредственно (проделайте это!), что

$$\sum_{j=1}^4 \frac{\partial W_{ij}}{\partial \xi_j} = -\frac{\partial L}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4); \quad (77)$$

здесь в левой части стоят полные производные, составленные с учетом зависимости W_{ij} от всех ψ_r и ψ_{rs} , тогда как в правой части производная берется лишь по ξ_i , явно входящему в L .

Будем для простоты считать координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 декартовыми ($\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$, $\xi_3 = z$) и обозначим

$$\mathbf{S} = W_{41}\mathbf{i} + W_{42}\mathbf{j} + W_{43}\mathbf{k}.$$

Тогда, если L не зависит от t , то из (77) при $i = 4$ получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{S}$ представляет плотность потока энергии поля; поэтому он называется *вектором интенсивности поля*. Вектор

$$\mathbf{P} = W_{14}\mathbf{i} + W_{24}\mathbf{j} + W_{34}\mathbf{k} = \sum_{r=1}^n p_r \operatorname{grad} \psi_r$$

(проверьте!) называется *плотностью импульса поля*. Из (77) мы видим, что если L не зависит от ξ_1, ξ_2, ξ_3 , то

$$\sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \nabla \cdot (W_{ij} \mathbf{e}_j) = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}).$$

Остановимся еще на следствии из теоремы Нётер (п. 6) для рассматриваемых полей, причем для простоты мы будем считать поле заданным во всем пространстве ξ_1, ξ_2, ξ_3 и быстро убывающим на бесконечности. Пусть полный лагранжев интеграл (71) инвариантен относительно однопараметрического семейства отображений, в векторной записи

$$\bar{\xi} = \varphi(\xi, \psi, \psi'_\xi, \alpha), \quad \bar{\psi} = \Phi(\xi, \psi, \psi'_\xi, \alpha), \quad (78)$$

где α — скалярный параметр. (Эта инвариантность означает, что если для любого поля $\psi(\xi)$ при любом α вычислить поле $\bar{\psi}(\bar{\xi})$ в силу формул (78), то

$\int L(\xi, \psi, \psi'_\xi) d\xi = \int L(\bar{\xi}, \bar{\psi}, \bar{\psi}'_\xi) d\bar{\xi}$. Тогда в силу п. 6 векторное поле

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{ik}} \right)^* [\Phi_0 - (\psi_{ik})\varphi_0] + L\varphi_0, \quad \text{где } \varphi_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}, \quad \Phi_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

не имеет в четырехмерном пространстве ξ источников векторных линий. Но тогда поток этого поля через любые две гиперплоскости $t(= \xi_4) = \text{const}$ одинаков (почему?), т. е. мы приходим к закону сохранения во времени интеграла

$$\iiint \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{ik}} \right)^* [\Phi_0 - (\psi_{ik})\varphi_0] + L\varphi_0 \right\}_t d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

где значок t означает временную проекцию вектора.

Пусть, например, плотность L функции Лагранжа не зависит от одной из координат ξ_j . Тогда можно положить $\bar{\xi}_j = \xi_j + \alpha$, прочие $\bar{\xi}_k = \xi_k$, $\bar{\psi} = \psi$, откуда $\varphi_0 = \mathbf{e}_j$, $\Phi_0 = 0$, и мы приходим к независимости от времени интеграла $\iiint W_{i4} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ (проверьте!). Итак, если плотность функции Лагранжа не зависит от пространственных координат; то имеет место закон сохранения импульса, а если не зависит от времени, — то закон сохранения полной энергии (последнее уже было показано выше).

По поводу закона сохранения момента количества движения см. [29].

15. Уравнения движения упругой среды. В качестве примера рассмотрим вывод основных уравнений движения упругой среды в однородном изотропном случае. Пусть x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ — поле перемещений точек упругой среды. Мы уже упоминали в п. V.1.5 о тензоре деформаций с компонентами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (79)$$

Наряду с ним в теории упругости рассматривается евклидов *тензор напряжений* с компонентами σ_{ij} , каждая из которых равна i -й проекции силы (отнесенной к единице площади), с которой среда действует на малую площадку с внешней нормалью по i -й оси. Это симметрические тензоры, связанные в случае изотропной среды при малых деформациях (при линейном законе упругости) соотношением

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

где приняты обычные тензорные обозначения (п. V.1.1), а постоянные λ и μ определены упругими свойствами среды. Отметим, что они связаны с другими упругими характеристиками. Так, в случае *простого растяжения*, т. е. когда $\sigma_{ij} = Q \delta_{i1} \delta_{j1}$, будет

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} Q, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} Q, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0$$

(проверьте!). Поэтому $\mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ — это и есть модуль упругости, фигурирующий в формуле (63). Отношение $\lambda/2(\lambda + \mu)$ поперечного сжатия к продольному растяжению называется *коэффициентом Пуассона*. В случае всестороннего сжатия, т. е. когда $\sigma_{ij} = -Q \delta_{ij}$ (изотропное давление), получаем $\varepsilon_{ij} = -Q \delta_{ij}/(3\lambda + 2\mu)$. Но так как сумма ε_{ii} равна относительному увеличению элементарного объема, то константа $(3\lambda + 2\mu)/3$ является *модулем всестороннего сжатия* изотропной упругой среды.

Мысленно выделив элементарный кубик с ребрами, параллельными осям координат, и проследив за его деформацией при возрастании напряжений от нуля, получаем (продумайте это!), что при этой деформации накапливается потенциальная энергия с плотностью

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{rr})^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

В силу (79) отсюда получаем

$$U = \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right].$$

Плотность кинетической энергии равна

$$T = \frac{\rho}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right],$$

где ρ — плотность среды. Отсюда легко написать выражение для плотности функции Лагранжа $L = T - U$. Полевыми переменными ψ_i будут служить три проекции u_i вектора перемещения. Уравнения Лагранжа–Эйлера (72) принимают вид (проверьте!)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \nabla^2 u_i - \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Умножая на орты осей и складывая, приходим к уравнению свободных колебаний упругой однородной изотропной среды

$$\rho \mathbf{u}''_{tt} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u},$$

играющему центральную роль в теории упругости. Предлагаем читателю проверить, что плотность полной энергии поля H равна $t + U$; вектор интенсивности поля $\mathbf{S} = -\sigma \mathbf{u}'_t$, где $\sigma = (\sigma_{ij})$ — матрица тензора напряжений; плотность импульса поля $\mathbf{P} = \rho(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}'_t$, где в круглых скобках стоит тензорное произведение векторов (п. V.1.3); пространственная часть $\mathbf{W}'$ матрицы $\mathbf{W}$ вычисляется по тензорной формуле $\mathbf{W}' = -(\nabla \mathbf{u}) \cdot \sigma - L$.

16. Диссипативные системы. Ограничимся автономными системами. Мы уже отмечали в п. 11, что такая система, если к ней можно применить принцип Гамильтона, должна быть консервативной. Тем не менее оказывается, что в линейном случае можно с помощью искусственного приема распространить действие принципа Гамильтона и на неконсервативные системы, в частности на системы с диссипацией, т. е. рассеянием энергии (например, с трением). Для этого к исходной системе мысленно присоединяется «зеркально отраженная» система, поглощающая ту энергию, которую первая выделяет. (Вторая система должна быть с отрицательным трением!) Тогда полная система, состоящая из реальной и присоединенной к ней, консервативна и допускает применение принципа Гамильтона.

Будем рассматривать набор координат $q_1, q_2, \dots, q_n$, определяющих положение системы, как числовой вектор $\mathbf{q}$ и допустим, что дифференциальные уравнения движения системы в матричной форме имеют вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (80)$$

где $\mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{K}$ — постоянные квадратные матрицы порядка n ; в простейшей задаче о системе упруго связанных осцилляторов матрица $\mathbf{M}$ диагональная, однако для дальнейшего это несущественно. Тогда «зеркально отраженная» система имеет уравнение

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{R}^* \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{K}^* \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (81)$$

где звездочка означает транспонирование матрицы. Перемена знака перед средним членом имеет физический смысл замены положительного трения на отрицательное.

Легко непосредственно проверить (проделайте это!), что уравнения (80) и (81) в совокупности представляют собой уравнения Эйлера для функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{\mathbf{s}}^* \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{s}}^* \mathbf{R} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{s}^* \mathbf{R} \mathbf{q} - \mathbf{s}^* \mathbf{K} \mathbf{q} \right) dt.$$

(При доказательстве этого полезно иметь в виду, что если под $\frac{df}{dx}$ понимать числовой вектор с элементами $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то

$$\frac{d}{dx} (\mathbf{a}^* \mathbf{x}) = \frac{d}{dx} (\mathbf{x}^* \mathbf{a}) = \mathbf{a}.)$$

Таким образом, можно принять за функцию Лагранжа

$$L = \dot{\mathbf{s}}^* \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{s}}^* \mathbf{R} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{s}^* \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{s}^* \mathbf{K} \mathbf{q};$$

правда, она теперь имеет линейные члены относительно производных, чего не могло быть раньше в автономном случае, но это несущественно для дальнейшего. Вычисляя импульсы p_i по переменным q_i и r_i по переменным s_i , а затем функцию Гамильтона, получим (проверьте!):

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{s}} - \frac{1}{2} \mathbf{R}^* \mathbf{s}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \mathbf{q},$$

$$H = \dot{\mathbf{s}}^* \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{s}^* \mathbf{K} \mathbf{q} = \left(\mathbf{p}^* + \frac{1}{2} \mathbf{s}^* \mathbf{R} \right) \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{R} \mathbf{q} \right) + \mathbf{s}^* \mathbf{K} \mathbf{q}.$$

В силу п. 2 эта функция принимает постоянное значение вдоль любой пары решений уравнений (80) и (81).

17. Принцип минимума потенциальной энергии. Будем рассматривать только автономные консервативные системы, причем сначала с конечным числом n степеней свободы и обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$. Пусть система находится в состоянии равновесия в положении $q^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$. Так как такое состояние можно считать частным случаем движения, то к нему можно применить принцип Гамильтона (п. 8) и вытекающие из него уравнения Эйлера, которые для этого случая приобретают простой вид

$$U'_{q_i}(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, возможные положения равновесия — это точки стационарности потенциальной энергии.

Однако теперь, в отличие от предыдущих пунктов этого параграфа, существенную роль будет играть характер рассматриваемой стационарной точки (минимум, максимум, минимакс). В самом деле, пусть в точке q^0 функция $U(q)$ имеет изолированный локальный минимум (см. рис. 106, где принято $n = 2$). Тогда нетрудно проверить, что положение равновесия в такой точке будет устойчивым по Ляпунову (ЛВМ, п. XV.22): если в начальный момент времени бесконечно мало изме-

нить координаты q_i и придать системе произвольные бесконечно малые скорости $\dot{q}_i$ то система будет продолжать оставаться в бесконечной близости от q^0 на протяжении всего дальнейшего времени. В самом деле, заключим q^0 в произвольно малую фиксированную окрестность (G) с границей (Γ) (рис. 106). Наименьшее значение $U_{(\Gamma)}$ функции U на (Γ) будет превосходить значения $U_0 = U(q^0)$ (почему?). Но тогда при произвольном достаточно малом изменении начальных данных, о котором говорилось выше, полная энергия H системы будет меньше $U_{(\Gamma)}$. А так как полная энергия не зависит от времени (п. 8), то эта система никогда не сможет достичь какой-либо из точек (Γ) (почему?), т. е. должна все время оставаться в окрестности (G) , что и требовалось доказать.

Отметим, что приведенное доказательство пригодно не только для консервативных, но и для диссипативных систем (п. 11).

С другой стороны, можно показать, что если функция $U(q)$ имеет при $q = q^0$ максимум или минимакс, то состояние $q = q^0$ равновесия системы будет неустойчивым. Это наглядно ясно, если учесть, что потенциальную энергию с графиком, показанным на рис. 106, имеет

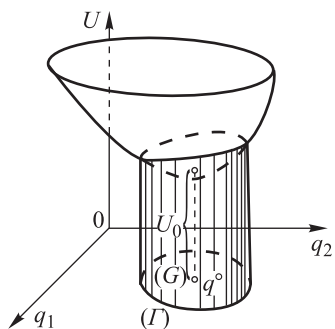


Рис. 106

материальная точка массы m , свободно движущаяся на изображенной поверхности в поле тяготения $g = \frac{1}{m}$, направленного вертикально вниз. Промежуточный случай составляет неизолированный минимум. (Например, функция $U(q_1, q_2) = q_1^2$ имеет линию минимума $q_1 = 0$.) Наглядный подход, который подтверждается более точными рассуждениями, показывает, что и в этом случае консервативная система (но не диссипативная!) неустойчива, поскольку как угодно малые, начальные скорости могут увести систему за достаточно большое время на конечное удаление от исходного положения; однако при этом скорости не будут нарастать до конечных значений, как в случаях максимума или минимакса.

Итак, задача о нахождении положений равновесия и об определении их устойчивости для систем с конечным числом n степеней свободы приводит к нахождению и исследованию стационарных точек функции от n аргументов. Поэтому аналогичная задача для сплошных сред, для которых $n = \infty$, решается методами вариационного исчисления, причем, как видим, для выявления устойчивости состояния равновесия, если она не ясна из самой постановки задачи (например, из физических соображений), приходится применять достаточные признаки минимума функционала.

18. Примеры. Рассмотрим в качестве примера задачу о форме равновесия однородной нити, подвешенной в однородном поле тяжести интенсивности — $g\mathbf{j}$. Будем считать, что нить имеет линейную плотность ρ , не растяжима и не сопротивляется изгибу, а концы ее для простоты имеют координаты $(-b; 0)$ и $(b; 0)$. Тогда в силу сказанного выше задача сводится к минимизации функционала

$$\int yg \, dm = g\rho \int_{-b}^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

при интегральной связи

$$\int_{-b}^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx = L \quad (\text{задано, } L > 2b) \quad (82)$$

и граничных условиях

$$y(-b) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (83)$$

Стандартное применение метода п. 1.12, которое мы предоставляем читателю, приводит к общему решению соответствующего уравнения Эйлера

$$y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1} + C_3,$$

которое и служит обоснованием названия «цепная линия», введенного в п. 1.8. Применение граничных условий (83) и уравнения связи (82) дает искомое частное решение $y = C_1 \left(\operatorname{ch} \frac{x}{C_1} - \operatorname{ch} \frac{b}{C_1} \right)$, где

$$C_1 \operatorname{sh} \frac{b}{C_1} = L. \quad (84)$$

Так как левая часть (84) при изменении C_1 от 0 до ∞ монотонно убывает от ∞ до b (проверьте!), то мы получаем ровно одно состояние равновесия. Вопрос о его устойчивости в данной задаче не возникает, хотя желающие могут проверить эту устойчивость, т. е. условную минимальность значения функционала, с помощью метода п. 2.5.

Рассмотрим еще задачу о потере устойчивости сжатой балкой (п. 13). Пусть конец $s = 0$ балки жестко заделан, распределенные внешние силы отсутствуют, но к свободному концу $s = l$ приложена сосредоточенная сжимающая внешняя сила P , параллельная оси x . Обозначив через φ угол наклона элемента стержня к оси x , получим в силу п. 13 выражение для потенциальной энергии изогнутого стержня

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \mu k^2 \, ds + P \Delta x \Big|_{s=l} = \int_0^l \left(\frac{1}{2} \mu \varphi_s'^2 + P \cos \varphi - P \right) ds. \quad (85)$$

Мы видим, что достаточно ограничиться рассмотрением функции $\varphi(s)$, не переходя к декартовым координатам. Функционал (85) рассматривается при граничных условиях

$$\varphi|_{s=0} = 0, \quad \varphi_s'|_{s=l} = 0. \quad (86)$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$-\mu\varphi''_{ss} - P \sin \varphi = 0 \quad (87)$$

и, между прочим, решается в эллиптических функциях (п. II.4.14), на чем мы здесь не будем останавливаться, так как нам надо только выяснить, будет ли придавать экстремаль $\varphi \equiv 0$ минимальное значение функционалу (85) при условиях (86). В силу п. 2.10 дело сводится к установлению знака наименьшего собственного значения $\lambda_{\min}$ линеаризованного уравнения (87), т. е. значения λ , при котором краевая задача

$$-\mu\varphi'' - P\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi|_{s=0} = 0, \quad \varphi'|_{s=l} = 0. \quad (88)$$

имеет нетривиальное решение. Непосредственное интегрирование, которое мы предоставляем читателю, показывает, что

$$\lambda_{\min} = \frac{\pi^2}{4l^2} \mu - P.$$

Таким образом, критическим значением сжимающей силы служит

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \mu}{4l^2}.$$

Если $P < P_{\text{кр}}$, то прямолинейное положение равновесия устойчиво, если $P > P_{\text{кр}}$ — неустойчиво.

Обычно бывает удобнее пользоваться безразмерными комбинациями физических параметров, так как указание одной лишь сжимающей силы P еще не говорит о том, устойчива ли балка, насколько она близка к потере устойчивости и т. п. В рассмотренной задаче такой комбинацией служит «безразмерная сила»

$$p = \frac{Pl^2}{\mu}. \quad (89)$$

Она пропорциональна «физической» силе, но включает и менее подвижные параметры l, μ . Критическим значением для нее служит число $\frac{\pi^2}{4} = 2,467$.

В более сложных задачах приходилось применять приближенное вычисление $\lambda_{\min}$. Если в задачу входит параметр α , то часто бывает, что при некоторых его значениях $\alpha = \alpha_0$ устойчивость ясна из физических или каких-либо иных соображений (см. начало п. 2.6). Если вычислить $\lambda_{\min}(\alpha)$, начиная от α_0 , то точка перемены знака и даст значение $\alpha_{\text{кр}}$. Если параметров α, β два, то, вычисляя аналогичным способом значения $\alpha_{\text{кр}}$ при фиксированном β , а затем изменяя β , можно получить в плоскости α, β области устойчивости системы.

Иногда в задаче с параметром α более удобным оказывается следующее рассуждение. Если собственные значения, как обычно бывает, зависят от α непрерывно, то, меняя знак, они должны обращаться в нуль. Обратно, если функция $\lambda(\alpha)$ при некотором $\alpha = \tilde{\alpha}$ обращается в нуль, то при переходе α через $\tilde{\alpha}$ она обычно меняет знак (если не выполнено дополнительное равенство $\lambda'(\tilde{\alpha}) = 0$, которое должно быть обусловлено какими-либо специальными причинами). Поэтому для нахождения $\alpha_{\text{кр}}$ можно в задаче на собственные значения положить $\lambda = 0$, найти возможные значения для α , из которых

ближайшее к α_0 и будет равно $\alpha_{кр}$. Например, если в задаче (88) перейти к безразмерной длине $\sigma = s/l$ и положить $\lambda = 0$, мы получим (см. (89))

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} + p\varphi = 0, \quad \varphi \Big|_{\sigma=0} = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\sigma} \Big|_{\sigma=1} = 0,$$

откуда находим возможные значения $p = \pi^2/4, 9\pi^2/4, \dots$. Так как при малых $p > 0$ будет устойчивость, то $p_{кр} = \pi^2/4$. При $\pi^2/4 < p < 9\pi^2/4$ будет одно собственное значение отрицательно, при $9\pi^2/4 < p < 16\pi^2/4$ — два и т.д. В более сложных задачах собственные значения могут зависеть от параметра не монотонно; тогда может получиться несколько интервалов устойчивости.

19. Запас устойчивости. Рассмотрим автономную консервативную систему с одной степенью свободы и с показанной на рис. 107 зависимостью потенциальной энергии U от координаты q . Здесь имеется шесть возможных положений равновесия $q^1, q^2, \dots, q^6$, из которых три устойчивых q^1, q^3, q^5 . Рассмотрим какое-нибудь из этих устойчивых состояний, например q^3 . Тогда наименьшая из разностей $U(q^2) - U(q^3)$ и $U(q^4) - U(q^3)$ — на рис. 107 это первая — и будет служить *запасом устойчивости* K^3 (иначе — *потенциальным барьером*) рассматриваемой системы в состоянии q^3 . Это означает, что если системе в состоянии q^3 придать кинетическую энергию, меньшую K^3 , то так как полная энергия сохраняется, а кинетическая неотрицательна, то система не может выйти из области, заштрихованной на рис. 107 (*потенциальной ямы*, отвечающей состоянию q^3), а в случае как угодно малой диссипации энергии система через достаточно большой промежуток времени вновь возвратится, в исходное состояние q^3 . При этом кинетическая

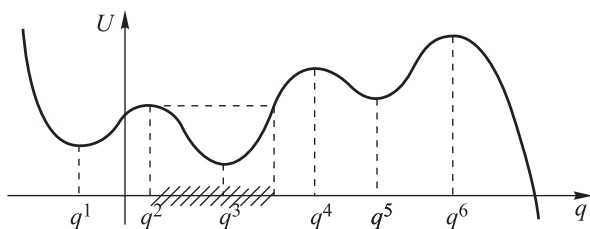


Рис. 107

энергия может добавляться любое число раз, лишь бы в сумме эта добавка была меньше запаса устойчивости. Аналогично определяется запас устойчивости и потенциальная яма для других устойчивых состояний равновесия. Своеобразной потенциальной ямой служит также область состояний $q > q^6$, выходя из которых без начальной скорости, система уходит на бесконечность.

Для систем с конечным числом n степеней свободы наряду с точками минимума потенциальной энергии $U(q)$ ($q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$) возможны «многообразия минимума», на которых значение U постоянно, т.е. вдоль которых

система может безразлично перемещаться; такие многообразия обычно бывают у систем, обладающих той или иной симметрией. Компактные (п. 2.9) многообразия минимума рассматриваются в точности так же, как точки минимума, поэтому, говоря в дальнейшем «точки минимума» мы будем иметь в виду «точки или многообразия минимума». Если q^0 — одна из точек минимума, то для получения запаса устойчивости в q^0 нужно соединить q^0 всевозможными линиями (l) со всеми другими точками минимума, а также с бесконечностью; на каждой из этих линий взять наибольшее («самое трудное» для системы) значение $U_{(l)}$, после чего взять линию (l) , для которой значение $U_{(l)}$ является наименьшим (т. е. линию, по которой системе «легче всего» пройти из q^0 в другое устойчивое состояние равновесия или на бесконечность; продумайте все это на рис. 107). Разность

$$K^0 = \min_{(l)} \max_{M \in (l)} U(M) - U(q^0) \quad (90)$$

и будет служить запасом устойчивости системы в положении q^0 .

Задача о нахождении величины (90) есть задача вариационного исчисления, так как $U_{(l)} \max_{(l)} U$ есть функционал, и потому речь идет о минимуме функционала на линиях определенного класса. Однако классический подход, основанный на приравнивании вариации функционала нулю, здесь приводит только к заранее очевидному результату: для линии, реализующей минимум (90), точка, в которой U принимает наибольшее значение, является безусловно стационарной точкой для U (как правило, точкой минимакса или точкой многообразия минимакса; возможен особый случай, когда это точка $(n-1)$ -мерного многообразия максимума, если изучаемой точкой был центр вулканического кратера). Но вне этой наивысшей точки линия, реализующая минимум, обладает весьма высокой степенью произвола, так что ни о каком дифференциальном

уравнении для нее типа уравнения Эйлера говорить не приходится. Подобные неклассические задачи на минимакс широко распространились в последние годы (см., в частности, п. IV.5.7), хотя встречались и ранее.

Потенциальная яма, отвечающая точке q^0 , получится, если взять содержащую q^0 компоненту связности (в пространстве положений системы) совокупности всех положений, для которых $U(q) < U(q^0) + K^0$. При $n = 2$ можно наглядно представить себе, что в точке $(q_1^0; q_2^0; U(q_1^0, q_2^0))$ открылся источник, наполняющий впадину над поверхностью $U = U(q_1, q_2)$ водой; тогда в момент, когда вода впервые прольется наружу, глубина озера будет равна K^0 , а его зеркало образует потенциальную яму (ср. рис. 107).

На улавливании минимакса на границе потенциальной ямы может быть основан численный метод определения запаса устойчивости. Пусть $n = 2$ (это несущественно) и линии уровня имеют вид, как на рис. 108; конечно, эти линии в реальной задаче нам неизвестны. Пусть ориентировочно известен способ (l) , по которому система должна выйти из

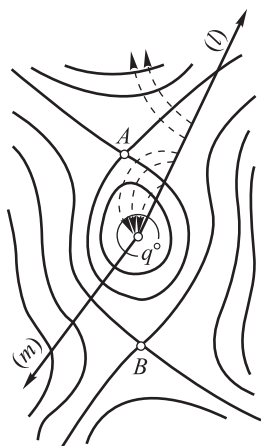


Рис. 108

ямы. Если тогда из последовательных точек (l) идти по линиям наибо́льшего спуска, решая уравнение $\dot{q} = -\text{grad } U(q)$, то вблизи q^0 эти линии приведут обратно в q^0 , а вдалеке — в другую точку минимума или на бесконечность. Поэтому расхождение двух соседних линий наибо́льшего спуска указывает на наличие вблизи минимакса, который в дальнейшем можно уточнить по методу Ньютона (ЛВМ, п. XII.12), решая систему уравнений $U'_{q_i} = 0$. (Отметим, что минимаксы могут иметься и внутри потенциальной ямы, поэтому существенно, чтобы линии наибо́льшего спуска не только расходились, но и вели к разным минимумам.) Если имеются конкурирующие способы выхода из ямы (как (m) на рис. 108), то запас устойчивости даст наименьшая из высот перевалов. Если способы экономного выхода из ямы ориентировочно неизвестны, то можно наугад испытать несколько способов и выбрать для них самый низкий перевал.

При анализе запаса устойчивости систем с бесконечным числом степеней свободы (сплошных сред) можно пользоваться конечномерными аппроксимациями.

20. Вариационные принципы в конформных отображениях.

Здесь мы приведем вариационный принцип совсем иного рода, чем предыдущие, в нем конкурирующими будут аналитические функции комплексного переменного. Этот способ можно применить для приближенного осуществления конформного отображения (§ II.1) одной заданной области на другую.

Рассмотрим сначала отображение

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (91)$$

круга (K_R) $= |z| < R$ на некоторую область (H). Так как элемент площади dK испытывает при этом равномерное растяжение в $|f'(z)|^2$ раз (п. II.2.4), то площадь области (H) равна

$$H = \int_{(K_R)} |f'(z)|^2 dK = \iint_{(K_R)} f'(z)(f'(z))^* \rho d\rho d\varphi \quad (z = \rho e^{i\varphi})$$

(если отображение многолистное, то получается площадь с учетом крайности покрытия). Подставив в последний интеграл разложение (91), раскрыв скобки и интегрируя сначала по φ , а затем по ρ , получим (проверьте!)

$$H = \pi R^2(1 + 2|c_2|^2 R^2 + 3|c_3|^2 R^4 + \dots)$$

Отсюда мы видим, что *отображение (91) всегда увеличивает площадь круга (K_R)*, за исключением тривиального случая тождественного отображения, когда площадь сохраняется.

Пусть теперь ставится задача о построении конформного отображения $w = \varphi_0(z)$ заданной односвязной области (G) $\ni 0$ на круг $|w| < R$ (радиус которого заранее не задан) при дополнительных условиях нормировки

$$\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi'_0(0) = 1; \quad (92)$$

возможность такого отображения вытекает из теоремы Римана (п. II.2.16; отметим, что здесь задан не только угол поворота, но и коэффициент растяжения малой окрестности точки $z = 0$, но это компенсируется тем, что

радиус круга-образа заранее не задан). Тогда легко проверить, что площадь указанного круга меньше площади любой другой области, на которую может быть отображена (G) с помощью аналитической функции, удовлетворяющей условиям (92), и, таким образом, функция $\varphi_0(z)$ является решением задачи на тотальный минимум интеграла

$$\int_{(G)} \varphi'(z)(\varphi'(z))^* dG, \quad (z = x + iy, dG = dx dy) \quad (93)$$

среди всех аналитических на (G) функций, удовлетворяющих условиям (92). Для доказательства этого достаточно применить утверждение предыдущего абзаца к функции $\varphi(\varphi_0^{-1}(w))$, где функция φ_0^{-1} обратная к φ_0 (продумайте это рассуждение!).

В гл. V книги [44] указана методика применения этого принципа для приближенного конформного отображения заданной области на круг. Это вариант метода Ритца (п. 4.1): функция $\varphi'(z)$ приближенно строится в виде $\sum_{k=1}^n c_k g_k(z)$ с какими-либо аналитическими $g_k(z)$ (например, $g_k(z) = z^{k-1}$, причем константы c_k подбираются из требования минимизации интеграла (93) при условии $\sum_k c_k g_k(0) = 1$. Там указан также, еще один принцип, который может быть использован для этой цели: среди всех аналитических на (G) функций, удовлетворяющих условиям (92), функция $\varphi_0(z)$ придает тотальное минимальное значение интегралу

$$\int_{(L)} |\varphi'(z)| dL$$

(где (L) — контур области (G)), равному длине образа (L) .

§4. Прямые методы

Классический метод решения вариационных задач, основанный на сведении их к дифференциальным уравнениям Эйлера, зачастую оказывается недостаточно эффективным, несмотря на большое теоретическое значение этого метода. Хотя мы видели ряд примеров, когда уравнение Эйлера оказывалось возможным решить в квадратурах и даже в элементарных функциях, но для сколько-нибудь более сложных задач, особенно для функций нескольких переменных, такого решения не существует, и мы приходим к необходимости численно решать линейную или нелинейную краевую задачу для дифференциального уравнения, что возможно, но отнюдь не просто и в этой книге рассматриваться не будет. Поэтому естественно, что были разработаны методы численного решения вариационной задачи в ее исходной постановке, без перехода к уравнению Эйлера; они получили название *прямых методов вариационного исчисления*.

Некоторые сведения о прямых методах, а также примеры их применения, содержатся в литературе, указанной на стр. 281. Широкое

теоретическое исследование этих методов и большое число примеров содержатся в гл. IV книги [44] и в книгах [90, 91].

В различных разделах математического анализа имеется, грубо говоря, два основных класса методов приближенного отыскания неизвестных функций; методы сужения числа степеней свободы и методы дискретизации. (Конечно, имеются и методы смешанного типа, а также не укладывающиеся в эти два класса.) В методах первого класса независимые переменные в принципе остаются непрерывными, но функция ищется в том или ином специальном виде, включающем несколько параметров, которые затем подбираются из требования наилучшим образом удовлетворить условиям задачи; типичными представителями здесь являются метод интерполяции или метод наименьших квадратов. В более сложных задачах эти методы представляют обширное поле приложения физической интуиции и аналитического искусства, так как, если удастся правильно предвидеть форму искомого решения, применив лишь небольшое число параметров, и удачно выбрать критерий качества приближения, то метод может оказаться чрезвычайно эффективным (в частности, если сама исходная задача содержит параметры). В методах второго класса — они называются также сеточными — мы с самого начала заменяем искомую функцию набором ее значений в узлах некоторой сетки; здесь типичными являются методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Сеточные методы обычно бывают менее специфичны (более универсальны) и более алгоритмичны, чем методы предыдущего класса; поэтому они широко применяются при работе на компьютере.

1. Метод Ритца для квадратичного функционала. Метод Ритца, предложенный в 1908 г. немецким физиком и математиком В. Ритцем (1878–1909) — также один из типичных методов сужения числа степеней свободы. Изложим его сначала на самом простом примере отыскания экстремали функционала (1.18) при граничных условиях (1.26), предположив, что функционал квадратичный:

$$I\{y\} = \int_a^b [P(x)y'^2 + Q(x)y^2 + R(x)y] dx. \quad (1)$$

(Отметим, что мы здесь рассматриваем более общий — неоднородный — вид квадратичного функционала, чем в п. 2.4. Включение членов с yy' и y' не приводит к расширению общности, так как их можно устранить интегрированием по частям, что, впрочем, в конкретных примерах делать не обязательно.)

Метод Ритца состоит в том, что приближенное выражение для искомой экстремали строится в виде

$$y = g_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k g_k(x), \quad (2)$$

где $g_0(x), g_1(x), \dots, g_n(x)$ — некоторые выбранные функции, тогда как параметры c_k будут подбираться из условия стационарности значения функционала (1). Функция $g_0(x)$ обычно выбирается удовлетворяющей условиям (1.26), причем желательно, чтобы она по возможности лучше изображала искомое решение, если о последнем что-либо известно. (После ее выбора иногда делают замену $y = g_0(x) + z$, чтобы перейти к однородным граничным условиям $z(a) = z(b) = 0$.) *Базисные* (иначе *координатные*) функции $g_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) выбираются удовлетворяющими однородным условиям (1.26), т. е. $g_k(a) = g_k(b) = 0$; тогда при любых значениях c_k сумма (2) будет удовлетворять условиям (1.26) и, таким образом, о них можно не беспокоиться. В теоретических исследованиях функции $g_1, \dots, g_n$ составляют часть бесконечной системы функций

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), g_{n+1}(x), \dots, \quad (3)$$

линейно независимой и полной в пространстве функций $f \in C_1[a, b]$, удовлетворяющих условиям $f(a) = f(b) = 0$. При этом линейная независимость означает, что ни одна из этих функций не является линейной комбинацией конечного числа остальных, а полнота (см. п. 1.3) — что любую такую функцию $f(x)$ можно как угодно хорошо приблизить (в смысле C_1) линейной комбинацией конечного числа функций (3). (Чаще всего, если не учитывается конкретный вид функционала (1), берутся системы

$$g_k(x) = x^{k-1}(x-a)(x-b) \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

или

$$g_k(x) = \sin \frac{k\pi(x-a)}{(b-a)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots); \quad (5)$$

можно проверить, что каждая из этих систем линейно независима и полная в C_1 .) Можно доказать, что если $P(x) > 0$ и исходная задача имеет единственное решение, то приближенные решения, построенные по методу Ритца, при $n \rightarrow \infty$ сходятся к точному. Условие о единственности выполнено, например, если $Q(x) \geq 0$.

В конкретных приложениях теоремы о сходимости использовать затруднительно, они скорее имеют утешительный характер. Более реальные теоремы с двусторонними оценками отличия точного решения от приближенного; такие теоремы для метода Ритца впервые получил в 1918 г. советский математик Н. М. Крылов (1879–1955). Однако такие оценки, удобные для практического использования, получены лишь для весьма узкого класса задач, так что их на практике обычно не применяют.

При практическом применении метода стремятся к его практической сходимости, т. е. к тому, чтобы при небольшом числе базисных функций он дал решение с хорошей точностью. Здесь также можно использовать первые члены систем (4) и (5) или каких-либо иных

систем. Если удастся использовать конкретный вид функционала (1), то обычно скорость сходимости метода улучшается. Например, если $a = -b$ и по смыслу задачи решение должно быть четной функцией, то ясно, что при применении системы (4) нужно пользоваться только нечетными k ; но если четность решения заранее неясна, то нельзя пользоваться только четными функциями $g_k(x)$, так как при этом мы навязываем решению свойство четности, которым оно могло не обладать. Если интуиция подсказывает, что точное решение будет где-то иметь «горбик», то желательно одну из первых функций $g_k(x)$ взять с таким горбиком и т. п. Некоторые дальнейшие соображения по этому поводу будут высказаны ниже.

Вариационные задачи бывают двух типов: можно искать функцию, реализующую экстремальное или стационарное значение функционала, а можно искать и само это значение функционала. Ясно, что искать стационарное значение выгоднее, чем реализующую его функцию, так как ошибка в отыскании такой функции даст в соответствующем стационарном значении ошибку высшего порядка малости (сравните с задачей о нахождении стационарного значения функции одной переменной). Поэтому желательно, когда это возможно, сводить более сложные задачи к задачам на отыскание стационарных значений.

Вернемся к приближенному решению (2). Подставив его в правую часть (1), раскрыв скобки и произведя интегрирование, мы получим многочлен второй степени относительно пока еще произвольных параметров

$$I\{g_0 + \sum c_k g_k\} = V(c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (6)$$

Ясно, что если, например, исходная задача была задачей о минимуме, то желательно подобрать параметры c_k так, чтобы и выражение (6) приняло минимально возможное значение. Это же относится и к любому стационарному значению функционала (1), так как в зоне медленного изменения функционала и выражение (6) должно медленно меняться при изменении параметров. Поэтому мы приходим к системе уравнений

$$V'_{c_k}(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

из которой и надо найти параметры c_k .

Введем рабочее обозначение

$$(f, g)_I = \int_a^b [P(x)f'(x)g'(x) + Q(x)f(x)g(x)]dx.$$

Тогда квадратичная часть функции (6) имеет вид

$$\sum_{k,l=1}^n (g_k, g_l)_I c_k c_l \quad (8)$$

(проверьте!). Поэтому (7) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $c_1, c_2, \dots, c_n$ с симметрической матрицей

$$2((g_k, g_l)_I) \quad (k, l = 1, 2, \dots, n)$$

и потому при небольшом n легко решается. Отметим, что если $P(x) > 0$, $Q(x) \geq 0$ и функции $g_1, g_2, \dots, g_n$ линейно независимы, то нетрудно доказать (попробуйте!), что квадратичная форма (8) положительно определенная, что облегчает решение системы (7) (см. конец п. IV.4.8). Подставив найденное решение в правую часть (2), мы и получаем приближенное решение по методу Рунта.

Реальную опасность составляет возможность того, что матрица $((g_k, g_l)_I)$ получится «почти вырожденной», точнее говоря, плохо обусловленной (п. IV.4.2). Так как эта матрица симметрическая и не имеет отрицательных собственных значений, то мера обусловленности системы (7) равна отношению наибольшего собственного значения матрицы коэффициентов к наименьшему; такая мера обращается в бесконечность, когда система вырождается. Если система плохо обусловлена, то в процессе ее решения существенное влияние оказывают ошибки округления и неточности в исходных данных. Поэтому результат получается мало достоверным, и может оказаться даже, что с увеличением числа базисных функций в методе Рунта точность приближенного решения не растет, а убывает.

С точки зрения обусловленности лучше всего, если

$$|(g_k, g_l)_I| = \delta_{kl}, \quad (9)$$

так как тогда указанная мера обусловленности равна единице. Если исходная система базисных функций не обладала этим свойством, то его можно «организовать» с помощью метода, совершенно аналогично известному процессу ортогонализации (см., например, ЛВМ, п. VII.21). Отметим, что свойством (9) обладают, в частности, функции

$$g_k(x) = |\lambda_k|^{-1/2} y_k(x),$$

где λ_k и $y_k(x)$ — собственные значения и собственные функции соответствующего оператора (2.26), построенные в п. 2.8 (докажите!). Если же эти собственные функции затруднительно найти хотя бы приближенно, то иногда пользуются собственными функциями оператора с измененным младшим коэффициентом $Q(x)$, так как можно показать, что они асимптотически удовлетворяют соотношениям (9). Если и это не получается, то приходится изменить и старший коэффициент, хотя при этом возможность получить плохо обусловленную систему значительно повышается. В частности, при $P \equiv 1$, $Q \equiv 0$ получается система (5) с точностью до постоянных множителей. (Почему?)

Эти соображения по подбору базисных функций применяются и для функционалов от функций нескольких переменных.

Для выяснения точности приближенного решения, полученного по методу Рунта, на практике обычно пользуются сравнением результатов вычислений, полученных при выбранном базисе и при расширенном (пополненном другими функциями) или совсем замененном базисе, так как маловероятно, чтобы хорошее совпадение результатов оказалось случайным. (Отметим, что при

расширении базиса существенно сравнить не коэффициенты при одинаковых базисных функциях, а решения в целом; дело в том, что для плохо обусловленной матрицы (8) значительное расхождение указанных коэффициентов еще не говорит о значительном расхождении решений.) Если производится целая серия однотипных вычислений, то такой контроль производят для одного или нескольких типичных примеров.

Приведем пример. Пусть ищется экстремаль функционала

$$I = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx \quad (10)$$

при граничных условиях

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (11)$$

Здесь легко написать точное решение

$$y_{\text{точн}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}, \quad (12)$$

с которым мы будем сравнивать приближенные. Положим в (2) $g_0(x) = x$, а в качестве базисных функций будем брать первые функции системы (4). Пусть сначала $n = 1$; это означает, что мы ищем приближенное решение в виде

$$y = x + cx(1 - x).$$

Подстановка в (10) дает после интегрирования (проверьте!)

$$I = \frac{11}{30} c^2 + \frac{1}{6} c + \frac{4}{3}.$$

Приравнивание производной нулю дает значение $c = -\frac{5}{22}$, т. е. мы получаем приближенное решение задачи

$$y_{I \text{ пригл}} = x - \frac{5}{22} x(1 - x) = 0,7736x + 0,2264x^2. \quad (13)$$

Возьмем теперь $n = 2$, т. е. приближенное решение в виде

$$y = x + c_1 x(1 - x) + c_2 x^2(1 - x).$$

После подстановки в (10) получаем (проверьте!)

$$I = \frac{11}{30} c_1^2 + \frac{11}{30} c_1 c_2 + \frac{1}{7} c_2^2 + \frac{1}{6} c_1 + \frac{1}{10} c_2 + \frac{4}{3}.$$

Приравнивание частных производных нулю приводит к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{11}{15} c_1 + \frac{11}{30} c_2 + \frac{1}{6} &= 0, \\ \frac{11}{30} c_1 + \frac{2}{7} c_2 + \frac{1}{10} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

решая которую находим $c_1 = -\frac{69}{473} = -0,1459$, $c_2 = -\frac{7}{43} = -0,1628$, и потому

$$y_{II \text{ прил}} = x - 0,1459x(1-x) - 0,1628x^2(1-x) = \\ = 0,8541x - 0,0169x^2 + 0,1628x^3. \quad (14)$$

Вычисление значений точного решения и построенных приближенных решений дает следующие результаты:

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y_{\text{точн}}$	0,0000	0,1713	0,3495	0,5417	0,7557	1,0000
$y_{I \text{ прил}}$	0,0000	0,1638	0,3457	0,5457	0,7638	1,0000
$y_{II \text{ прил}}$	0,0000	0,1714	0,3494	0,5415	0,7558	1,0000

Сравнивая их, мы видим, что уже приближение (13), полученное с весьма малой затратой труда, имеет точность, достаточную для многих практических целей, тогда как приближение (14) является практически точным. Еще более эффективно сравнить соответствующие значения функционала I :

$$I\{y_{\text{точн}}\} = \frac{\text{ch } 1}{\text{sh } 1} = 1,313, \quad I\{y_{I \text{ прил}}\} = \frac{347}{264} = 1,314,$$

так что погрешность составляет всего лишь 0,1%; а чтобы уловить погрешность $I\{y_{II \text{ прил}}\}$ потребовались бы вычисления со значительно большей точностью. Отметим, что функция (12) реализовала тотальный минимум функционала (10) при граничных условиях (11) (почему?), поэтому естественно, что его значения на приближенных решениях оказались больше, чем на точном.

В разобранном примере точное решение выражалось через элементарные функции. (Впрочем, и здесь приближенное решение (13) может представлять интерес, так как оно выражается через более простые функции.) Однако не сложнее рассматривается, скажем, функционал

$$\int_0^1 (y'^2 + xy^2) dx,$$

экстремали которого уже не выражаются через элементарные функции. Так как это пример однотипный с (10), то и точность приближенных решений должна получиться примерно такой же.

Если на одном или обоих концах интервала граничное условие имеет вид $y' = 0$ или более общий вид (2.37), то хотя в принципе при построении приближенного решения соответствующее условие на конце можно просто снять, как естественное, но для ускорения сходимости лучше пользоваться базисными функциями, удовлетворяющими однородным граничным условиям того вида, который должен получиться для точного решения. Например, для граничных условий $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$ можно воспользоваться функциями

$$g_1(x) = x - \frac{x^2}{2l}, \quad g_k(x) = x^{k-1}(l-x)^2 \quad (k = 2, 3, 4, \dots).$$

(Подумайте, зачем нужна первая функция.)

Впрочем, при любых граничных условиях иногда поступают так: при выборе системы базисных функций не обращают внимания на граничные условия (например, берут просто систему степеней $1, x, x^2, \dots$), которые затем учитывают в виде связей на коэффициенты в разложении $y = \sum_{k=1}^n c_k g_k(x)$.

Для функционалов с производными высшего порядка, функционалов от нескольких функций и для задач на условно стационарное значение применение метода Ритца в принципе не отличается от рассмотренного и также достаточно эффективно.

2. Применение к решению краевых задач. Эффективность приближенного метода Ритца породила следующий способ приближенного решения краевой задачи для дифференциального уравнения: подбирается функционал, для которого уравнение Эйлера было бы равносильно заданному, после чего к этому функционалу применяется метод Ритца. Так, чтобы подобрать такой функционал вида (1) для уравнения

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x),$$

надо это уравнение помножить на некоторый множитель $\mu(x)$, после чего должно быть

$$-2P = a\mu, \quad -2P' = b\mu, \quad 2Q = c\mu, \quad -R = f\mu. \quad (15)$$

Из первых двух равенств находим

$$P = \exp \int_{x_0}^x \frac{b}{a} dx, \quad \mu = -\frac{2}{a} P,$$

после чего из последних равенств (15) находим Q и R .

Проверьте, например, что уравнение Бесселя (ЛВМ, п. XV.26)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

равносильно уравнению Эйлера для функционала

$$\int \left[xy'^2 - \left(x - \frac{p^2}{x} \right) y^2 \right] dx.$$

Для интервала $1 \leq x \leq 2$ применение метода Ритца уже с одной базисной функцией вида (4) или (5) приводит к очень хорошей точности.

Интересно, что для применения описанного метода минимизируемый функционал можно фактически не выписывать. Чтобы разобраться в этом, вспомним вывод уравнения Эйлера в п. 1.7, и, обобщая, допустим, что вариацию функционала $I\{y\}$, который мы хотим минимизировать по методу Ритца, удалось представить в виде

$$\delta I\{y; \delta y\} = (L\{y\}, \delta y), \quad (16)$$

где L — некоторый оператор. (Например, в п. 1.7 было $L\{y\} = F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y')$.) Тогда уравнение Эйлера приобретает вид $L\{y\} = 0$ и легко проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial c_j} I \left\{ g_0 + \sum c_k g_k \right\} = \left(L \left\{ g_0 + \sum c_k g_k \right\}, g_j \right). \quad (16')$$

Таким образом, приравнивание нулю этих производных, необходимое для минимизации, дает такой же результат, как построение приближенного решения уравнения Эйлера с помощью формулы (2) по методу моментов, взятых относительно функций $g_1, g_2, \dots, g_n$ (см. следующий абзац.)

Остается сделать еще один шаг и при заданной краевой задаче для уравнения $L\{y\} = 0$, не связывая эту задачу ни с какими функционалами, просто искать приближенное решение в виде (2) (учитывая краевое условие выбором функций g_i), а коэффициенты c_i находить из условия равенства нулю моментов

$$\left(L \left\{ g_0 + \sum c_k g_k \right\}, g_j \right) = \int_a^b L \left(g_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k g_k(x) \right) g_j(x) dx \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Этот метод называется *методом моментов* либо *методом Галеркина* (или *Бубнова–Галеркина*), так как он был впервые применен в 1913 г. при решении задач теории упругости русским механиком И. Г. Бубновым (1872–1919), а в более общей форме — в 1915 г. русским советским механиком Б. Г. Галеркиным (1871–1945). Этот метод для уравнений Эйлера вариационного исчисления совпадает с методом Рунца, но приводит к цели и для многих дифференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными, — которые не являются уравнениями Эйлера, а возникают вне связи с вариационными задачами. Метод Галеркина является одним из наиболее универсальных методов решения краевых задач для указанных уравнений. Применяется также следующий вариант этого метода, предложенный в 1940 г. советским механиком Г. И. Петровым (1912–1987): решение задачи ищется в том же виде (2), но моменты, которые приравняются нулю, берутся относительно какой-либо иной системы функций $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$. См. по этому поводу книги [90, 91].

3. Метод счетного множества переменных. Иногда, если очень повезет, удастся найти общую формулу для коэффициентов c_k в разложении (2) и затем, перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получить искомое решение в виде суммы ряда. При этом можно с самого начала искать решение в виде суммы ряда с неизвестными коэффициентами, откуда и происходит название — *метод счетного множества* (т. е. бесконечной последовательности) *переменных*.

Рассмотрим, например, задачу о минимизации интеграла

$$I\{y\} = \int_{-l}^l \left(\int_{-l}^l y'(s) \frac{ds}{x-s} \right) y(x) dx \quad (17)$$

при условии

$$J\{y\} = \int_{-l}^l y(x) dx = S \quad (\text{задано}) \quad (18)$$

и граничных условиях

$$y(-l) = y(l) = 0; \quad (19)$$

при этом внутренний интеграл в (17) является сингулярным и понимается в смысле главного значения¹⁾. Эта задача встречается в теоретической аэродинамике, где $y(x)$ имеет смысл зависимости циркуляции потока, обтекающего крыло, от координаты, отсчитываемой вдоль крыла; $2l$ — размах крыла; $I\{y\}$ пропорционален сопротивлению крыла (без учета сжимаемости потока и трения); $J\{y\}$ пропорционален подъемной силе; таким образом, речь идет о таком распределении циркуляции вдоль крыла, при котором для данной подъемной силы получилось бы наименьшее лобовое сопротивление.

Для решения задачи совершим замену независимой переменной $x = -l \cos \vartheta$; тогда концам интервала отвечают значения $\vartheta = 0, \pi$. Исходя из граничных условий (19) будем искать решение в виде

$$y = A_1 \sin \vartheta + A_2 \sin 2\vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + \dots \quad (20)$$

Подстановка (20) в (18) дает

$$\int_0^\pi (A_1 \sin \vartheta + A_2 \sin 2\vartheta + \dots) l \sin \vartheta d\vartheta = S,$$

откуда легко получаем (проверьте!), что

$$A_1 = \frac{2S}{\pi l}.$$

Подстановка (20) в (17) дает

$$I\{y\} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_j A_k k \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \frac{\cos k\psi}{\cos \psi - \cos \vartheta} d\psi \right) \sin j\vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \quad (21)$$

Внутренний интеграл равен (см. предпоследнюю формулу в п. II.4.5) $\frac{\pi \sin k\vartheta}{\sin \vartheta}$. Подстановка этого результата в (21) и применение свойства ортогональности синусов дает

$$I\{y\} = \frac{\pi^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k A_k^2.$$

Но так как A_1 уже найдено, а остальные коэффициенты A_k пока произвольны, то ясно, что $I\{y\}$ примет наименьшее возможное значение, если $A_2 = A_3 = \dots = A_4 = \dots = 0$, т. е.

$$y = \frac{2S}{\pi l} \sin \vartheta = \frac{2S}{\pi l^2} \sqrt{l^2 - x^2}.$$

Это и есть решение задачи.

¹⁾ См. сноску на с. 101

4. Метод Ритца для функционалов от функций нескольких переменных. Этот метод в принципе тот же, что и для функций одной переменной. Затруднения могут возникнуть при подборе базисных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям, особенно для областей сложной формы. Рассмотрим, например, случай двух независимых переменных. Если решение строится в некоторой области (G) с границей (Γ) и граничное условие имеет вид

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

то стараются подобрать непрерывную функцию $\omega(x, y)$, положительную всюду в (G) и равную нулю всюду на (Γ) ; если это удастся, то можно выбрать в качестве базисной двухиндексную систему функций

$$x^j y^k \omega(x, y) \quad (j, k = 0, 1, 2, \dots). \quad (22)$$

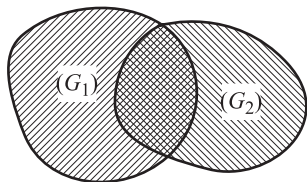


Рис. 109

В частности, если сама область (G) определена каким-то неравенством $F(x, y) > 0$, то можно просто положить $\omega \equiv F$. Комбинируя такие функции для простых областей, возможно найти их и для областей более сложного вида. Так, если, построены функции $\omega_1(x, y)$ для области (G_1) и $\omega_2(x, y)$ для области (G_2) (рис. 109), то для *пересечения* (общей части, дважды заштрихованной на рис. 109) этих областей можно положить

$$\omega = \omega_1(x, y)\omega_2(x, y),$$

тогда как для их *объединения* (т. е. части, заштрихованной на рис. 109 по крайней мере один раз) можно положить

$$\omega = \begin{cases} \omega_1(x, y) & \text{в } (G_1) \text{ вне } (G_2), \\ \omega_2(x, y) & \text{в } (G_2) \text{ вне } (G_1), \\ \omega_1(x, y) + \omega_2(x, y) & \text{в пересечении } (G_1) \text{ с } (G_2) \end{cases}$$

(проверьте непрерывность этой функции!). Такие пересечения и объединения можно производить любое число раз.

Если область (G) в некоторой разумной криволинейной системе координат u, v определяется неравенствами $\alpha \leq u \leq \beta$, $\gamma \leq v \leq \delta$, то в качестве базисной обычно берут систему функций вида

$$g_j(u)h_k(v) \quad (j, k = 1, 2, 3, \dots),$$

где функции $g_j(u)$ являются базисными на интервале $\alpha \leq u \leq \beta$ и обращаются в нуль на его концах, а $h_k(v)$ — то же для интервала $\gamma \leq v \leq \delta$. В частности, на каждом из этих интервалов можно взять ту или иную систему собственных функций.

Для областей, составленных из двух или более областей простого вида (рис. 110), можно применить также следующий прием: на общей

границной линии (l) задаемся приближенной формулой для решения, включающей несколько параметров $c_1, c_2, \dots, c_m$, и строим по методу Ритца решение на каждой из составляющих областей порознь, требуя стационарности значения функционала по всем участвующим параметрам, включая $c_1, \dots, c_m$.

Рассмотрим в качестве примера задачу о придании стационарного значения функционалу

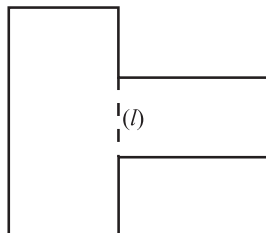


Рис. 110

$$I\{y\} = \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2Au \right] dy \quad (23)$$

в области (G): $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ с заданными нулевыми значениями искомой функции на контуре (Γ). Эта задача равносильна краевой задаче ($A = \text{const}$)

$$\nabla^2 u = A \quad (\text{в } G), \quad u|_{(\Gamma)} = 0, \quad (24)$$

Пользуясь системой функций (22), надо положить $\omega = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$ и брать только четные j и k . (Из последнего принципа максимума п. II.3.6 следует, что решение задачи (24) единственно; но задача инвариантна относительно отображений $x \rightarrow -x$ и $y \rightarrow -y$, поэтому решение обязано быть четным относительно x и относительно y — продумайте это рассуждение!) Воспользуемся самым простым вариантом метода Ритца, с одним слагаемым, т.е. будем искать приближенное решение в виде

$$u = c_1(a^2 - x^2)(b^2 - y^2).$$

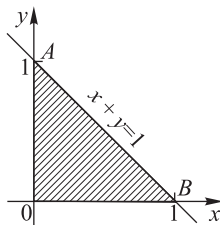


Рис. 111

Подстановка в (23) дает (проверьте!)

$$I = \frac{128}{45} a^3 b^3 (a^2 + b^2) c_1^2 + \frac{32}{9} a^3 b^3 A c_1,$$

откуда из условия стационарности получаем $c_1 = -\frac{5A}{8(a^2 + b^2)}$, т.е.

$$u_{\text{прибл}} = -\frac{5A}{8(a^2 + b^2)} (a^2 - x^2)(b^2 - y^2).$$

Сравнение с более точным решением, которого мы здесь не приводим, показывает, что при $a = b$ погрешность этого решения для разных точек (G) не превышает 6%, а в среднем равна 1%.

Другой пример. Пусть требуется придать стационарное значение функционалу

$$I\{u\} = \int_{(G)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dG, \quad (25)$$

где (G) — треугольник, изображенный на рис. 111, при граничном условии

$$u|_{x+y=1} = x^2 + y^2.$$

(Интеграл (25) для любого числа независимых переменных называется *интегралом Дирихле* по имени немецкого математика Л. Дирихле (1806–1859) и встречается в различных разделах математики; уравнением Эйлера для него служит уравнение Лапласа.) Таким образом, катеты треугольника (G) свободны от граничного условия. Чтобы перейти к однородному граничному условию, сделаем замену

$$u = (x^2 + y^2) + z,$$

которая преобразует функционал (25) в

$$I\{u\} = \int_{(G)} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 4x \frac{\partial z}{\partial x} + 4y \frac{\partial z}{\partial y} \right] dG + \frac{2}{3},$$

а граничное условие — в

$$z|_{x+y=1} = 0.$$

В качестве базисной можно выбрать систему функций

$$g_{jk}(x, y) = [1 - (x + y)]x^j y^k \quad (j, k = 0, 1, 2, \dots),$$

т. е. искать приближенное решение в виде

$$z_{\text{нр}} = [1 - (x + y)] \sum_{j,k=0}^n a_{jk} x^j y^k. \quad (26)$$

Однако учет конкретных обстоятельств позволяет при выбранном n понизить число свободных параметров a_{ik} и тем самым уменьшить объем вычислений, а при выбранном числе свободных параметров повысить n , т. е. повысить точность аппроксимации. Для этого заметим, что задача инвариантна относительно преобразования $(x, y) \rightarrow (y, x)$, поэтому $a_{jk} = a_{kj}$. Кроме того, так как точное решение удовлетворяет на катетах естественному граничному условию $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, т. е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (27)$$

то подчиним и решение (26) этому условию, причем для простоты заменим n на ∞ . Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{\text{нр}}}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \left(- \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} x^j y^k + [1 - (x + y)] \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} j x^{j-1} y^k \right) \Big|_{x=0} = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} y^k + (1 - y) \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} y^k = \\ &= |k+1=r| = - \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} y^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} y^k - \sum_{r=1}^{\infty} a_{1,r-1} y^r = \\ &= (-a_{00} + a_{10}) + \sum_{k=1}^{\infty} (-a_{0k} + a_{1k} - a_{1,k-1}) y^k, \end{aligned}$$

то из (27) получаем

$$a_{10} = a_{00}, \quad a_{1k} = a_{0k} + a_{1,k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (28)$$

Аналогично из второго условия (27) получается

$$a_{01} = a_{00}, \quad a_{k1} = a_{k0} + a_{k-1,1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots); \quad (29)$$

это и есть требуемые соотношения между коэффициентами. Между прочим, при конечном n равенства (28) и (29) обеспечивают не точное, а лишь приближенное выполнение условий (27) (почему?); но это все же лучше, чем совсем не учитывать этих условий.

Итак, если положить, например, $n = 1$, то мы получаем вместо четырех свободных параметров всего лишь один:

$$z_{np} = [1 - (x + y)]a_{00}(1 + x + y + 2xy),$$

а при $n = 2$ вместо девяти — три (проверьте!).

Остановимся еще на функционале

$$I\{u\} = \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b \left[(\nabla^2 u)^2 - 2f(x, y)u \right] dy,$$

уравнением Эйлера для которого служит неоднородное бигармоническое уравнение (см. 3.70))

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u = f(x, y)$$

при граничных условиях

$$u \Big|_{(\Gamma)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{(\Gamma)} = 0.$$

Здесь в качестве базисных можно пользоваться функциями

$$(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 x^j y^k \quad (j, k = 0, 1, 2, \dots). \quad (30)$$

Можно воспользоваться также функциями

$$g_{jk}(x, y) = \varphi_j(x) \psi_k(y), \quad (31)$$

где $\varphi_j(x)$ — собственные функции соответствующей одномерной задачи

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \lambda v, \quad v \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad \frac{dv}{dx} \Big|_{x=\pm a} = 0,$$

а функции $\psi_k(y)$ определяются аналогично. Легко проверить, что обязательно $\lambda > 0$ (для этого надо обе части уравнения умножить на v и проинтегрировать от $-a$ до a , а затем левую часть проинтегрировать по частям два раза). Поэтому общее решение уравнения для собственных функций имеет вид

$$v = C_1 \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} x + C_3 \cos \sqrt[4]{\lambda} x + C_4 \sin \sqrt[4]{\lambda} x.$$

Применение граничных условий, которое мы предоставляем читателю, приводит к двум типам собственных функций:

$$v = \frac{\cos \sqrt[4]{\lambda} a}{\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} a} \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} x - \cos \sqrt[4]{\lambda} x, \quad \text{где } \operatorname{th} \sqrt[4]{\lambda} a = -\operatorname{tg} \sqrt[4]{\lambda} a,$$

$$v = \frac{\sin \sqrt[4]{\lambda} a}{\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} a} \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} x - \sin \sqrt[4]{\lambda} x, \quad \text{где } \operatorname{th} \sqrt[4]{\lambda} a = \operatorname{tg} \sqrt[4]{\lambda} a$$

(эти функции определены с точностью до постоянного множителя, который выбран так, чтобы при больших λ они оставались порядка 1). Обозначив

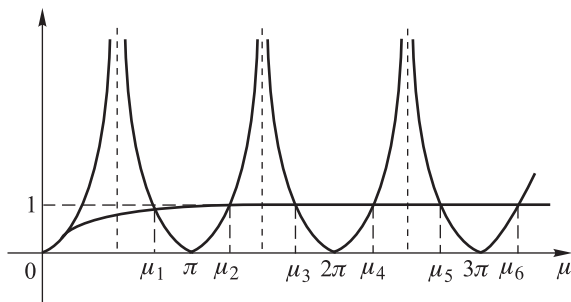


Рис. 112

$\sqrt[4]{\lambda} a = \mu$, т.е. $\lambda = \mu^4/a^4$, мы видим, что собственные значения λ находятся из уравнения $\operatorname{th} \mu = \pm \operatorname{tg} \mu$, графический смысл которого показан на рис.112. Значит, имеется бесконечная последовательность собственных функций, которые нетрудно вычислить с хорошей точностью.

Вычисления при $f \equiv \operatorname{const}$, $a = b$ показывают, что применение системы (30) с одним свободным параметром дает погрешность в решении, меньшую 5%, а системы (31) — меньшую $1\frac{1}{2}\%$.

5. Метод Трефтва. Если уравнение Эйлера является линейным, однородным и достаточно простым, а область имеет сложный контур, то эффективным оказывается следующий *метод Трефтва*: в качестве базисных функций выбираются решения уравнения Эйлера, а коэффициенты в их линейной комбинации определяются граничными условиями. Покажем этот метод на примере задачи о стационарном значении интеграла Дирихле (25) при граничном условии

$$u|_{(\Gamma)} = f \quad (\text{задано}). \quad (32)$$

Обозначим через $u_0(x, y)$ неизвестное нам решение этой задачи и будем искать приближенное решение в виде

$$u_{\text{пр}} = \sum_{k=1}^n c_k u_k(x, y), \quad (33)$$

где u_k — гармонические функции (т.е. удовлетворяющие уравнению Эйлера для функционала (25)). Примем на минуту, что функция u_0 известна, и подберем коэффициенты c_k так, чтобы функция $u_{\text{пр}}$ минимизировала интеграл

$$I\{u_{\text{пр}} - u_0\} = \int_{(G)} \left[\left(\frac{\partial u_{\text{пр}}}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\text{пр}}}{\partial y} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 \right] dG. \quad (34)$$

Точное решение этой задачи, без учета формулы (33), привело бы, очевидно, к функции u_0 с точностью до произвольного постоянного слагаемого. (Проверьте, что интеграл (34) как раз равен $I\{u_{\text{пр}}\} - I\{u_0\}$, если считать $u_{\text{пр}}$ произвольной функцией, удовлетворяющей условию (32).) Приравнивание нулю частных производных по c_j приводит к уравнениям

$$\sum_{k=1}^n \int_{(G)} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) dG c_k = \int_{(G)} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) dG \quad (35)$$

(проверьте!). Однако легко проверить, что для любой гармонической функции v и любой функции u справедлива формула

$$\int_{(G)} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dG = \int_{(\Gamma)} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\Gamma.$$

(Для доказательства достаточно применить формулу Остроградского к полю $u \nabla v$ и воспользоваться формулой (I.2.6).) Поэтому уравнения (35), учитывая (32), можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_{(\Gamma)} \frac{\partial u_j}{\partial n} u_k \, d\Gamma \right) c_k = \int_{(\Gamma)} \frac{\partial u_j}{\partial n} f \, d\Gamma \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (36)$$

В эти уравнения от u_0 входят только ее заданные граничные значения f , поэтому мы можем теперь отказаться от предположения, что u_0 нам известна; однако если мы решим систему уравнений (36) относительно c_k и полученные значения подставим в (33), то результат, как мы видим, получается в точности такой же, как если бы мы минимизировали интеграл (34).

Вычисления показывают высокую эффективность метода Трефца, особенно если угадать, какими гармоническими функциями можно хорошо аппроксимировать искомое решение u_0 . Отметим, что метод применим и в случае, когда граничное условие взамен (32) имеет вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f; \quad \text{тогда надо правую часть (35) преобразовать в интеграл} \quad \int_{(\Gamma)} u_j f \, d\Gamma.$$

6. Метод Ритца для собственных значений. Задача на собственные значения, например, вида

$$-(P(x)y')' + Q(x)y = \lambda y, \quad y|_{x=a} = y|_{x=b} = 0,$$

равносильна задаче о придании стационарного значения функционалу

$$\int_a^b [P(x)y'^2 + Q(x)y^2 - \lambda y^2] dx$$

функцией $y \not\equiv 0$ при тех же граничных условиях. Совершив, согласно методу Ритца, подстановку (2) с $g_0 \equiv 0$, мы получаем квадратичную форму с параметром вида

$$\sum_{j,k} a_{jk} c_j c_k - \lambda \sum_{j,k} b_{jk} c_j c_k \quad (a_{jk} = a_{kj}, \quad b_{jk} = b_{kj})$$

с известными коэффициентами. Условия ее стационарности имеют вид

$$\sum_k a_{jk} c_k - \lambda \sum_k b_{jk} c_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (37)$$

Так как нас интересует нетривиальное (т.е. ненулевое) решение, то определитель системы должен равняться нулю:

$$\det((a_{jk}) - \lambda(b_{jk})) = 0. \quad (38)$$

Значения λ , найденные из этого алгебраического уравнения, служат приближениями для собственных значений задачи; подставив их в (37) и найдя c_k , мы с помощью (2) получаем приближенные выражения для соответствующих собственных функций.

Решения уравнения (38) лучше всего аппроксимируют меньшие по абсолютной величине собственные значения, тогда как большие могут аппроксимироваться плохо. Для их получения нужно увеличивать n ; при таком увеличении становится одновременно видна достигнутая точность. При большом n , особенно для задач на собственные значения с несколькими независимыми переменными, вычисление значений определителя (38), нужное для улавливания его нулей, может оказаться громоздким делом. В таких случаях может оказаться выгоднее вычислять эти значения со сравнительно большим шагом по λ , а затем проводить обратную интерполяцию (ЛВМ, п. V.8).

Рассмотрим в качестве примера задачу на собственные значения

$$-y'' = \lambda y, \quad y|_{x=-1} = y|_{x=1} = 0. \quad (39)$$

Сначала проверим, что собственные функции этой задачи могут быть либо четными, либо нечетными (это рассуждение не использует конкретного вида

уравнения, а только симметрию интервала и четность коэффициентов $P(x)$ и $Q(x)$). В самом деле, при преобразовании $x \rightarrow -x$ задача переходит в себя; но при заданном λ собственная функция определена с точностью до постоянного множителя, поэтому $y(-x) \equiv ky(x)$. Заменяя в этом тождестве x на $-x$, получаем $y(x) = ky(-x) = k^2y(x)$, откуда $k = \pm 1$, что и требовалось доказать.

Собственные значения в данной задаче легко найти точно, они равны (см. (2.35))

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2,46740, \quad \lambda_2 = \pi^2 = 9,8696, \quad \lambda_3 = \frac{9\pi^2}{4} = 22,21 \text{ и т. д.}$$

Функционал, отвечающий задаче (39), имеет вид

$$I\{y\} = \int_{-1}^1 (y'^2 - \lambda y^2) dx. \quad (40)$$

Воспользуемся сначала одной лишь первой функцией системы (4), т. е. положим $y = a_0(1 - x^2)$. Подстановка в (40) дает

$$I\{y\} = \frac{8}{3} a_0^2 - \frac{16}{15} \lambda a_0^2,$$

уравнение (38) — уравнение первой степени $\frac{8}{3} - \frac{16}{15} \lambda = 0$ — имеет решение $\lambda_{1\text{пр}} = 2,5$, которое аппроксимирует λ_1 с точностью до 1,3%.

Если ограничиться четными собственными функциями, то в качестве следующего приближения надо взять

$$y = (1 - x^2)(a_0 + a_2 x^2).$$

Уравнение (38) здесь уже будет второй степени. Вычисления, которые мы предоставляем читателю, дают

$$\lambda_{1\text{пр}} = 2,46744, \quad \lambda_{3\text{пр}} = 25,6.$$

(Напомним, что λ_2 отвечает нечетной собственной функции.) Как видим, погрешность в λ_1 получилась 0,002%, а в λ_3 — 13%. Если взять следующее приближение для четных собственных функций, то погрешность в λ_1 будет $3 \cdot 10^{-7}\%$, в λ_3 — 0,5%, зато в λ_5 — 30%. Хорошо видна неравномерность аппроксимации, о чем говорилось выше. Погрешности в значениях собственных функций немного выше и имеют ту же тенденцию.

В разобранном примере приближенные собственные значения получились большими точных. Можно доказать, что это не случайно. Например, λ_1 можно получить как решение некоторой задачи на минимум в классе всех функций, удовлетворяющих условию нормировки и граничным условиям (п. 2.8); $\lambda_{1\text{пр}}$ получается как решение той же задачи в более узком классе функций специального вида (линейных комбинаций базисных функций), поэтому всегда $\lambda_{1\text{пр}} \geq \lambda_1$. (Когда здесь будет знак равенства?)

Сделаем еще одно замечание, которое полезно иметь в виду. Пусть при «среднем» n (скажем, 3 или 4) мы намерены раскрыть определитель (38) и численно решать получающееся алгебраическое уравнение каким-либо итерационным методом. Как известно, для этого желательно иметь хорошее нулевое приближение. Это приближение для λ_1 можно получить, приравняв нулю один

из главных миноров (п. IV.2.3) матрицы $(a_{jk}) - \lambda(b_{jk})$, хотя бы первый, так как легко проверить, что при этом получится приближенное уравнение для λ_1 по методу Ритца с соответственно уменьшенным числом базисных функций. Приближенное выражение для λ_2 можно получить, приравняв нулю второй главный минор и воспользовавшись формулой для суммы корней алгебраического уравнения, и т. д.

7. Метод Ритца для неквадратичных функционалов. Схема применения метода Ритца для функционалов общего вида такая же, как и в п. 1, однако система уравнений для параметров получается нелинейной со всеми вытекающими отсюда осложнениями. Здесь не обязательно при построении приближенного решения требовать, чтобы параметры в него входили линейно, т. е. можно это решение строить в виде

$$y = \varphi(x; c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (41)$$

(аналогично для функций нескольких переменных). Так как решение нелинейной системы существенно усложняется с ростом числа неизвестных, и, кроме того, желательно отпавляться от значений, близких к точному решению, то особенно возрастает роль интуиции, которая иногда дает возможность, используя небольшое число параметров, хорошо аппроксимировать возможные формы искомого решения. Если интуиция ничего не подсказывает, то можно использовать приближенные решения вида (2), так как тогда будет хоть уверенность в достаточной «гибкости» (приблизительной полноте) таких решений. Как и раньше, близость решений, полученных для разных n (причем решение, полученное для меньшего n , можно взять в качестве отправной точки для построения решения при большем n) или для разных систем базисных функций позволяет сделать вывод о точности приближенного решения рассматриваемой, а с ней и сходных задач.

Пусть исходная вариационная задача была задачей на минимум. Тогда после подстановки (41) получается задача на минимум функции конечного числа n независимых переменных $c_1, c_2, \dots, c_n$. Подобные задачи на минимум функции n переменных могут возникать и вне вариационного исчисления, например в нелинейном программировании (п. IV.5.8). Сейчас разработан ряд методов решения таких задач; мы опишем один из них, *метод градиентного спуска*, довольно эффективный в простых случаях. При этом мы будем независимые переменные обозначать буквами $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Допустим сначала, что требуется найти безусловный минимум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда можно воспользоваться тем, что в любой точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вектор $-\text{grad } f(x)$ направлен в сторону наибоыстрейшего убывания функции f . Поэтому система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = -f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (42)$$

определяет в пространстве x траекторию, вдоль которой значения $f(x)$ непрерывно убывают, причем — во всяком случае, локально — наиболее быстрым способом. Если функция f остается конечной при конечных x , то такая

траектория может либо уходить на бесконечность, либо входить в точку локального минимума. (Теоретически возможен также случай, когда траектория входит в точку минимакса, однако как угодно малым изменением начальных условий для траектории этого случая можно избежать; можно ручаться, что этот случай, не представится, если начальные условия брать наугад.) Таким образом, если обнаружится, что траектория приближается к некоторой точке, то это и будет точка минимума. При этом, если локальный минимум совпадает с тотальным (см. по этому поводу конец п. IV.5.8), то мы получаем наименьшее значение функции f ; если же это заранее неизвестно, а нас интересует тотальный минимум, то можно попытаться улучшить результат, строя траектории при различных, выбираемых наугад начальных данных.

Некоторое затруднение возникает в связи с тем, что при приближении к точке минимума движение по траектории, определенное системой (42), замедляется, так что эта точка достигается лишь в пределе, при $t \rightarrow \infty$. Так, в типичном примере, при $n = 1$, $f(x) = x_1^2$ уравнение (42) имеет вид $\frac{dx_1}{dt} = -2x_1$ и решение $x_1 = x_1^0 e^{-2(t-t_0)} \rightarrow 0$. Чтобы избавиться от этого затруднения, можно в правые части (42) ввести общий множитель, например $\left(\sum_i (f'_{x_i})^2\right)^{-1/2}$, который, не изменяя траектории, компенсировал бы это замедление (как?). Можно поступить и иначе: когда движение достаточно замедлится, перейти к решению системы уравнений $f'_{x_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) по методу Ньютона.

Пусть теперь ищется условный минимум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $k < n$ независимых соотношениях вида

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (43)$$

Поэтому элементарные перемещения в пространстве x должны быть связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (44)$$

Элементарное перемещение, по которому функция f убывает быстрее всего, получается в результате проектирования вектора $-\text{grad } f$ на $(n - k)$ -мерную плоскость, определенную уравнениями (44). Эту проекцию $\mathbf{b}$ можно найти, например, так: ввести числовые векторы

$$\mathbf{a}_i = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \right)^T \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (45)$$

(буква T означает транспонирование), перпендикулярные плоскостям (44), и положить

$$\mathbf{b} = -\text{grad } f + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k, \quad (46)$$

подобрав коэффициенты λ_i так, чтобы вектор $\mathbf{b}$ оказался перпендикулярным всем векторам $\mathbf{a}_i$ (продумайте это!). Приравнявая нулю скалярные произведения выражения (46) на все векторы $\mathbf{a}_i$, получим систему уравнений первой степени для λ_i , определитель которой $D = \det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$ называется *определителем Грама* для векторов $\mathbf{a}_i$. Так как это определитель матрицы квадратичной формы $(x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_k \mathbf{a}_k)^2$, а потому равен произведению

собственных значений этой матрицы, то он положителен, если векторы $\mathbf{a}_i$ линейно независимы, и равен нулю в противном случае (продумайте это!). Поэтому условие $D \neq 0$ для независимых соотношений (43), вообще говоря, выполняется.

Итак, локально наибо́льшее перемещение к условному минимуму функции f определяется из системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = b_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (47)$$

где b_i — проекции вектора (46). При этом коэффициенты λ_i для небольших k можно найти непосредственно из системы уравнений $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$), тогда как при больших k можно, как в п. IV.4.11 присоединить к (47) систему из k^2 уравнений для элементов, матрицы $(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)^{-1}$. Для корректировки можно при некоторых t , выбрав какие-либо $n - k$ из найденных значений x_i , пересчитать остальные из уравнений (43) по методу Ньютона, после чего уточнить матрицу $(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)^{-1}$ по методу п. IV.4.11. Бороться с замедлением сходимости при подходе к точке минимума можно так же, как в случае безусловного минимума. Заметим, что при применении метода Ньютона к отысканию условного экстремума надо проводить линеаризацию как по основным неизвестным x_i , так и по множителям Лагранжа λ_i (см., например, ЛВМ, п. XII.10). При этом за уточняемые значения этих величин можно взять значения, полученные при решении дифференциальных уравнений, так как из формул (46) и (45) видно, что в точке минимума при $\mathbf{b} = 0$ найденные величины λ_i как раз служат множителями Лагранжа.

Если заведомо известно, что при рассматриваемых значениях x_i какие-либо k из этих переменных, например последние, представляют собой дифференцируемые функции остальных, т. е. если $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)}{D(x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_n)} \neq 0$, то можно не пользоваться множителями Лагранжа, а строить траекторию наибо́льшего спуска в пространстве $x_1, x_2, \dots, x_{n-k}$. При приближении этого якобиана к нулю можно «переключиться» на другой набор из $n - k$ переменных x_i .

Если исходная задача была не на минимум, а просто на стационарное значение функции f , то метод градиентного спуска можно применить к функции $\varphi = \sum_i f_{x_i}^2$. Однако надо иметь в виду, что функция φ может иметь точки минимума не только в стационарных точках функции f (продумайте, например, случай $n = 1$), поэтому для решения задачи может оказаться полезным повторный градиентный спуск из различных, выбираемых наугад начальных точек.

В заключение отметим, что метод градиентного спуска можно в принципе осуществить непосредственно для функционала, без его конечномерной аппроксимации. Для этого допустим, что для некоторого функционала $I\{y\}$ нам удалось представить его вариацию в виде (16). Тогда оператор L играет роль градиента функционала $I\{y\}$, а уравнение спуска по градиенту приобретает вид

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -L\{y\}.$$

Так как теперь надо считать уже, что $y = y(x; t)$, то это получается уравнение с частными производными, которое надо решать при каком-то выбранном

начальном условии $y|_{t=0} = y_0(x)$ и при граничных условиях, наложенных на функционал I . Это практически возможно, хотя не совсем просто и приведет опять-таки к необходимости той или иной конечномерной аппроксимации. В этой книге методы решения уравнений с частными производными мы не рассматриваем.

8. Метод наименьших квадратов. Мы уже упоминали в п. 1, что на эффективности метода Рунге основан способ приближенного решения дифференциальных уравнений, состоящий в приведении исходной краевой задачи к вариационной, которая и решается затем методом Рунге. Наиболее просто (хотя и не всегда наиболее эффективно) такой переход можно осуществить, минимизируя средний квадрат невязки — быть может, с некоторым весом. Этот *метод наименьших квадратов* можно применять не только к дифференциальным, но и к любым другим уравнениям, в которых искомой является функция или несколько функций.

Рассмотрим, например, задачу об интегрировании уравнения

$$y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b \quad (48)$$

при начальном условии

$$y(a) = y_a \quad (\text{задано}). \quad (49)$$

Эта задача, очевидно, равносильна задаче о минимизации функционала

$$I\{y\} = \int_a^b [y' - f(x, y)]^2 dx, \quad (50)$$

если при $x = a$ поставлено условие (49), а при $x = b$ условие снято. К ней и можно применить метод Рунге.

Интересно, что уравнение Эйлера для функционала (50)

$$2[y' - f(x, y)] [-f'_y(x, y)] - \frac{d}{dx} 2[y' - f(x, y)] = 0, \quad (51)$$

т. е.

$$y'' = f'_x(x, y) + f(x, y)f'_y(x, y), \quad (52)$$

имеет второй порядок и получается в результате дифференцирования исходного уравнения (48). Уравнение (52) имеет двухпараметрическое семейство решений, тогда как исходное уравнение (48) — только однопараметрическое. И лишь привлечение естественного граничного условия при $x = b$, имеющего вид $[y' - f(x, y)]_{x=b} = 0$, позволяет перейти от (52) к (48). (Продолжайте это, используя формулу (51) уравнения (52).)

В этом повышении порядка производных состоит некоторый недостаток метода наименьших квадратов, несмотря на его универсальность. Поэтому, если заданное дифференциальное уравнение $2k$ -го порядка удастся переписать в форме уравнения Эйлера для функционала J с производными k -го порядка, то лучше применять метод

Ритца к J , а не пользоваться методом наименьших квадратов, где придется привлекать функционал с производными $2k$ -го порядка. Ведь чем выше порядок производных в функционале, тем, вообще говоря, выше погрешность метода Ритца.

Взамен функционала (50) можно было минимизировать функционал

$$\int_a^b [y' - f(x, y)]^2 dx + [y(a) - y_a]^2,$$

сняв условие (49). Это простое замечание дает возможность предложить следующий вариант метода наименьших квадратов в случае любого числа независимых переменных, любой области, любого уравнения и любых граничных условий. Пусть в области (G) с границей (Γ) требуется решить уравнение вида $M[u] = 0$ (после переноса всех членов в левую часть) при граничных условиях

$$\mu_j[u]|_{(\Gamma)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Тогда искомое решение доставляет минимум функционалу

$$a_0 \int_{(G)} (M[u])^2 dG + \sum_{j=1}^k a_j \int_{(\Gamma)} (\mu_j[u])^2 d\Gamma, \quad (53)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — любой набор положительных постоянных, который может оказаться полезным, чтобы в каком-то смысле уравнивать влияние уравнения и всех граничных условий. (Впрочем, можно положить для простоты все $a_j = 1$.) К функционалу (53) можно применить метод Ритца с любой системой базисных функций, например целых рациональных одночленов, так как граничные условия теперь сняты. Возможен частный случай, когда уравнение $M[u] = 0$ столь просто (например, уравнение Лапласа), что не представляет труда указать семейство его решений, содержащее параметры и достаточно гибкое для аппроксимации искомого решения. Тогда можно в методе Ритца воспользоваться этим семейством и, таким образом, в минимизируемом функционале (63) останутся только интегралы по (Γ) .

Метод очевидным образом распространяется и на системы уравнений с несколькими искомыми функциями.

9. Метод Канторовича. Этот метод, предложенный Л. В. Канторовичем в 1933 г., представляет собой развитие метода Ритца для функционалов от функций нескольких переменных. Он состоит в том, что в качестве коэффициентов при базисных функциях берутся не неизвестные константы, а неизвестные функции от некоторой одной переменной. Тогда после подстановки в функционал и применения условий стационарности (уже вариационных!) мы получаем краевую задачу для системы *обыкновенных* дифференциальных уравнений относительно этих неизвестных функций. Решая эту задачу точно или численно (что — по крайней мере в линейном случае, т. е. для квадратичного функционала, — вполне доступно современным вычислительным средствам), мы и получаем приближенное решение исходной

вариационной задачи. Так как функции более гибки, чем константы, то с помощью их оптимального подбора (оптимальность обеспечивается самой структурой метода) удастся значительно лучше приблизиться к точному решению, чем в методе Ритца.

Рассмотрим в качестве примера задачу о придании стационарного значения функционалу

$$I\{u\} = \int_{(G)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right] dG \quad (54)$$

при граничном условии

$$u|_{(\Gamma)} = 0, \quad (55)$$

где область (G) показана на рис. 113. Для этого воспользуемся базисной функцией $g_1(x, y) = y(x - y)$, равной нулю при $y = x$ и $y = 0$, и по методу Канторовича будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u = a(x)g_1(x, y) = a(x)y(x - y), \quad (56)$$

где функция $a(x)$ будет удовлетворять граничным условиям

$$a(1) = 0, \quad a(2) = 0. \quad (57)$$

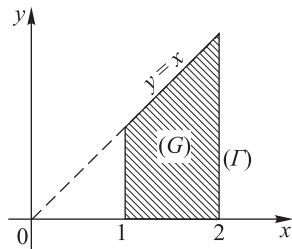


Рис. 113

Тем самым произведение (56) будет удовлетворять граничному условию (55). В методе Ритца мы задавались видом функции $a(x) = c(x - 1)(x - 2)$, оставляя свободным только коэффициент пропорциональности c ; в отличие от этого, в методе Канторовича подбор функции определяется самой постановкой задачи, она будет придавать функционалу (54) стационарное значение в классе функций вида (56).

Подстановка (56) в (54) дает после вычислений

$$I\{u\} = \int_1^2 \left(\frac{1}{30} x^5 a'^2 + \frac{1}{6} x^4 a a' + \frac{2}{3} x^3 a^2 - \frac{1}{3} x^3 a \right) dx$$

(проверьте!). Уравнением Эйлера для этого функционала будет

$$x^2 a'' + 5x a' - 10a = -5;$$

оно решается, в элементарных функциях, общее решение имеет вид

$$a = \frac{1}{2} + c_1 x^{\sqrt{14}-2} + c_2 x^{-\sqrt{14}-2}.$$

Подбор произвольных постоянных из условий (57) приводит к решению

$$a = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4 - 2^{-\sqrt{14}}}{2\sqrt{14} - 2^{-\sqrt{14}}} x^{\sqrt{14}-2} - \frac{2^{\sqrt{14}} - 4}{2\sqrt{14} - 2^{-\sqrt{14}}} x^{-\sqrt{14}-2} \right) = \\ = \frac{1}{2} (1 - 0,2951x^{1,742} - 0,7049x^{-5,742}).$$

Эту функцию и надо подставить в (56) для получения приближенного решения.

Для получения решения с большей точностью можно вместо (56) воспользоваться суммой

$$u = a(x)y(x-y) + b(x)y^2(x-y) \quad (58)$$

и после подстановки в (54) получить систему из двух линейных дифференциальных уравнений относительно функций a и b . Можно также воспользоваться более простым, но более грубым *методом коллокации* на части $y = 0$ контура (Г). (Этот прием также был предложен Канторовичем. Это делается так: уравнением Эйлера для функционала (54) служит

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1.$$

Вспомнив о том, что точное решение задачи должно ему удовлетворять, потребуем, чтобы приближенное решение (58) удовлетворяло ему хотя бы при $y = 0$. Это дает

$$[a''(x)y(x-y) + 2a'(x)y - 2a(x) + b''(x)y^2(x-y) + \\ + 2b'(x)y^2 + b(x)(2x-3y) + 1]_{y=0} = 0,$$

откуда $b = \frac{1}{2x}(2a-1)$. Подставляя это выражение в (58), мы видим, что приближенное решение надо искать в виде

$$u = -\frac{y^2}{2x}(x-y) + \frac{y}{x}(x^2 - y^2)a(x). \quad (59)$$

Подставляя в (54), получаем из условия стационарности дифференциальное уравнение для $a(x)$ и т. д. Естественного ожидать, что решение вида (59) получится более точным, чем вида (56), так как новая формула имитирует все те же свойства точного решения, что и предыдущая, и, кроме них, еще одно.

Если областью интегрирования служит прямоугольник, то приближенное решение можно искать также в виде $u = a(x)b(y)$, где обе функции $a(x)$, $b(y)$ неизвестны. Написав для них систему уравнений Эйлера, что мы предоставляем читателю, можно решать ее методом итераций.

Большое число примеров на метод Канторовича содержится в книге [44], где он назван *методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям*.

10. Метод Эйлера. Этот типичный метод дискретизации (см. введение к этому параграфу), по существу описанный в п. 1.12 в связи с вопросами теории, может быть применен и как численный метод. Как

мы видели, метод состоит в приближенной замене функционала (1.18) на сумму (1.61), зависящую от конечного числа дискретных значений $\bar{y}_k$ искомой функции. Из условий стационарности этой суммы можно найти величины $\bar{y}_k$, которые естественно считать приближенными значениями искомого решения в узловых точках. Если требуются значения решения в других точках, их можно найти по узловым с помощью интерполяции. Точность метода легко повысить, применяя более совершенные, чем в (1.61), формулы численного дифференцирования и численного интегрирования.

Рассмотрим пример, заимствованный из книги [129]. Пусть требуется минимизировать функционал

$$\int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx$$

при граничных условиях $y(0) = y(1) = 0$. Воспользуемся формулой (1.61), приняв $n = 5$; мы получим выражение

$$I_5 = 0,2 \left\{ \left[\left(\frac{y_1 - 0}{0,2} \right)^2 + 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 \right] + \left[\left(\frac{y_2 - y_1}{0,2} \right)^2 + y_1^2 + 2 \cdot 0,2y_1 \right] + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{y_3 - y_2}{0,2} \right)^2 + y_2^2 + 2 \cdot 0,4y_2 \right] + \left[\left(\frac{y_4 - y_3}{0,2} \right)^2 + y_3^2 + 2 \cdot 0,6y_3 \right] + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{0 - y_4}{0,2} \right)^2 + y_4^2 + 2 \cdot 0,8y_4 \right] \right\}.$$

Условия стационарности дают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I_5}{\partial y_1} &= 0,2 \left\{ \frac{2y_1}{0,2^2} - \frac{2(y_2 - y_1)}{0,2^2} + 2y_1 + 2 \cdot 0,2 \right\} = 0, \\ \frac{\partial I_5}{\partial y_2} &= 0,2 \left\{ \frac{2(y_2 - y_1)}{0,2^2} - \frac{2(y_3 - y_2)}{0,2^2} + 2y_2 + 2 \cdot 0,4 \right\} = 0, \\ \frac{\partial I_5}{\partial y_3} &= 0,2 \left\{ \frac{2(y_3 - y_2)}{0,2^2} - \frac{2(y_4 - y_3)}{0,2^2} + 2y_3 + 2 \cdot 0,6 \right\} = 0, \\ \frac{\partial I_5}{\partial y_4} &= 0,2 \left\{ \frac{2(y_4 - y_3)}{0,2^2} + \frac{2y_4}{0,2^2} + 2y_4 + 2 \cdot 0,8 \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Эта система линейных алгебраических уравнений, хоть и не диагональная, легко решается следующим методом *прогонки*, широко применяемым в настоящее время. Из первых двух уравнений исключаем y_1 ; затем из полученного уравнения и третьего исключаем y_2 ; наконец, из полученного уравнения и четвертого исключаем y_3 (это этап *прямой прогонки*). Из оставшегося уравне-

ния с одним неизвестным находим y_4 . Пользуясь им, из последнего уравнения заданной системы находим y_3 ; зная y_4 и y_3 из второго от конца уравнения системы находим y_2 ; наконец, из третьего от конца уравнения системы находим y_1 (это этап *обратной прогонки*). В общем случае метод прогонки применяется для линейных алгебраических систем как угодно высокого порядка, у которых матрица коэффициентов (a_{ij}) содержит отличные от нуля элементы лишь на главной диагонали и недалеко от нее при $|i - j| \leq 1$ (как в разобранным примере) или при $|i - j| \leq 2$ и т. п.

Приведем результат решения системы (60), а также точные значения искомой функции (в данном примере уравнение Эйлера легко решается).

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$-10^4 y_{\text{прибл}}$	0	286	503	580	442	0
$-10^4 y_{\text{точн}}$	0	287	505	583	444	0

Как видим, результат неплох. Однако отметим, что приведенные рассуждения имеют скорее методическое значение, так как в вычислительном отношении процедура получается в точности такая же, как если от вариационной задачи перейти к уравнению Эйлера, а затем решать для этого уравнения краевую задачу с помощью обычного разностного метода.

Глава VII

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теория *интегральных уравнений*, т.е. уравнений, в которых искомая функция находится под знаком интеграла, составляет сейчас значительный отдел математического анализа и имеет большое теоретическое и прикладное значение. Хотя отдельные интегральные уравнения встречались уже в первой половине XIX в., но систематическая их теория была заложена на рубеже XIX и XX вв. в работах итальянского математика В. Вольтерра (1860–1940), шведского математика И. Фредгёльма (1866–1927), Д. Гильберта (1862–1943) и других математиков.

Из общих курсов интегральных уравнений укажем на [40, 73, 87, 88, 96, 105, 114, 129].

§1. Введение

1. Примеры. Если внешнее воздействие на какую-либо линейную систему описывается функцией $f(x)$ ($a \leq x \leq b$), то результат этого воздействия описывается функцией

$$\hat{f}(x) = \int_a^b G(x; \xi) f(\xi) d\xi, \quad (1)$$

где $G(x; \xi)$ — функция влияния, определяемая рассматриваемой системой. Например, $f(x)$ может означать плотность нагрузки, распределенной вдоль балки, а $\hat{f}(x)$ — соответствующий прогиб и т. п.

Допустим, что вид воздействия нам неизвестен, но известен отклик системы на это воздействие и требуется по этому отклику восстановить воздействие. Тогда в соотношении (1) функция $\hat{f}(x)$ (как и $G(x; \xi)$) будет заданной, а $f(x)$ — искомой, т.е. мы приходим к интегральному уравнению.

Бывают случаи, когда известной оказывается некоторая линейная комбинация $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta \hat{f}(x)$ функций, описывающих внешнее

воздействие и соответствующий отклик. Тогда для восстановления внешнего воздействия потребуется решить интегральное уравнение

$$\alpha f(x) + \beta \int_a^b G(x; \xi) f(\xi) d\xi = \varphi(x). \quad (2)$$

Приведем еще одну задачу, сводящуюся к уравнению вида (2). Рассмотрим уравнение вынужденных поперечных колебаний струны, закрепленной при $x = 0$ и $x = l$ (см. (VI.3.59)):

$$\rho u''_{tt} = P u''_{xx} + f(x, t). \quad (3)$$

Если внешнее воздействие является гармоническим,

$$f(x, t) = \varphi(x) \cos \omega t,$$

и нас интересует вынужденное колебание, происходящее с той же частотой ω , т. е.

$$u(x, t) = v(x) \cos \omega t,$$

то после подстановки в (3) мы приходим к краевой задаче

$$P v'' = -\rho \omega^2 v - \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad v(0) = 0, \quad v(l) = 0.$$

При $\omega = 0$ получилась бы задача на стационарное отклонение струны под действием внешней нагрузки; эта задача в других обозначениях и без физического истолкования была рассмотрена в ЛВМ, конец п. XV.16. Там было получено решение

$$v(x) = \int_0^l G(x; \xi) \left[-\frac{1}{P} \varphi(\xi) \right] d\xi, \quad (4)$$

где функция влияния в данной задаче равна

$$G(x; \xi) = \begin{cases} -(l - \xi)x l^{-1} & (0 \leq x \leq \xi \leq l), \\ -\xi(l - x)l^{-1} & (0 \leq \xi \leq x \leq l). \end{cases}$$

Однако при $\omega \neq 0$ к внешней нагрузке $\varphi(x)$ добавляется инерционный член $\rho \omega^2 v(x)$, зависящий от искомого решения. Если на минуту считать его известным и воспользоваться решением (4), то мы придем к соотношению

$$v(x) = -\frac{\rho \omega^2}{P} \int_0^l G(x; \xi) v(\xi) d\xi - \frac{1}{P} \int_0^l G(x; \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Но так как $v(x)$ на самом деле неизвестна, то это соотношение представляет собой интегральное уравнение, причем того же типа, что и (2).

Появление интегральных уравнений при исследовании краевых задач является естественным, так как такие уравнения связывают между собой значения известных и неизвестных функций на конечном интервале, а не на бесконечно малом, как дифференциальные уравнения.

2. Основные классы интегральных уравнений. Интегральное уравнение

$$\int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (5)$$

с искомой функцией $u(x)$ называется *уравнением Фредгольма 1-го рода*, функция $K(x, \xi)$ называется *ядром* этого уравнения. Уравнение

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x) \quad (6)$$

называется *уравнением Фредгольма 2-го рода*. Это, очевидно, линейные неоднородные уравнения; если $f \equiv 0$, получаются соответствующие однородные уравнения.

Если в (5) или (6) интеграл распространен от a до x , то говорят об *уравнениях Вольтерра 1-го или 2-го рода*. Впрочем, если для уравнения Вольтерра формально положить $K(x, \xi) \equiv 0$ при $\xi > x$, то его можно считать частным случаем уравнения Фредгольма (продумайте это!). Другой важный подкласс уравнений Фредгольма составляют *уравнения с симметричным* (иначе *симметрическим*) *ядром*, для которого $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ в вещественном случае и $K(x, \xi) = [K(\xi, x)]^*$ в комплексном; в комплексном случае такие ядра называются также *эрмитовыми*, как и матрицы (п. IV.1.3). Рассматриваются также уравнения с ядрами вида $K(x, \xi) = T(x - \xi)$, *зависящими от разности аргументов*, и т. д.

Наиболее прост случай, когда a и b конечны, а ядро $K(x, \xi)$ — непрерывная функция. Основные свойства решений, которые мы будем рассматривать ниже, оказывается возможным без большого труда распространить также на квадратично суммируемые ядра, для которых выполнение указанных условий не требуется, но

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)|^2 dx d\xi < \infty; \quad (7)$$

поэтому многие авторы говорят о фредгольмовых или вольтерровых уравнениях, если только выполнено это условие.

Если ядро обращается в бесконечность, то обычно это происходит при $x = \xi$. Поэтому специально рассматривается класс *уравнений со слабой особенностью*, для которых при конечных a и b

$$|K(x, \xi)| \leq \frac{\text{const}}{|x - \xi|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1). \quad (8)$$

Если при этом $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, то выполняется условие (7) (почему?), т. е. уравнение является фредгольмовым. Если $\alpha = 1$, то интегральные уравнения (5) и (6) называются *сингулярными*, тогда интеграл надо понимать в смысле главного значения (см. сноску на с. 101).

Нелинейные уравнения изучены и расклассифицированы гораздо менее полно, чем линейные. Некоторые виды нелинейных уравнений мы рассмотрим в § 6.

Приведенные определения естественно распространяются на системы m интегральных уравнений с m искомыми функциями, а также на уравнения с искомыми функциями от n независимых переменных. В последнем случае аналог уравнения (6) имеет вид

$$u(M) = \int_{(G)} K(M, N) u(N) d_N G + f(M), \quad (9)$$

где M и N — точки некоторой n -мерной области (или даже n -мерного многообразия) (G) , а значок N при дифференциале указывает, по какой точке происходит интегрирование; впрочем, уравнение (9) можно записать и в координатной форме с n -кратным интегралом. Определение ядра со слабой особенностью, взамен (8), имеет вид

$$|K(M, N)| \leq \frac{\text{const}}{[\rho(M, N)]^\alpha} \quad (0 < \alpha < n),$$

где $\rho(M, N)$ — расстояние между точками M и N .

Рассматриваются также *нагруженные интегральные уравнения*, в которых вместо обычных интегралов (интегралов Лебега) применяются интегралы по мере (интегралы Стильтьеса, см., например, ЛВМ, п. XVI. 19):

$$u(M) = \sum_j \int_{(G)} K_j(M, N) u(N) d_N \mu_j + f(M). \quad (10)$$

Например, если кроме меры Лебега рассматривается мера, сосредоточенная в точке $M_0 \in (G)$, то получается нагруженное уравнение вида

$$u(M) = \int_{(G)} K(M, N) u(N) d_N G + L(M) u(M_0) + f(M)$$

(продумайте это!) и т. п.

3. Еще о пространстве Гильберта. В п. VI.1.3 мы уже упоминали о пространстве Гильберта $L_2[a, b]$ (a и b не обязательно считать конечными) квадратично суммируемых функций с нормой (VI.1.11). При этом мы будем для определенности рассматривать вещественное пространство, т.е. будем считать, что функции принимают вещественные значения; комплексное пространство Гильберта вводится совершенно аналогично, в нем норма определяется формулой

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Здесь под $\mathbf{f}$ понимается функция $f(x)$, рассмотренная как элемент (обобщенный вектор) линейного пространства.

Пространство Гильберта — это бесконечномерное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L_2[a, b])$$

легко доказывается неравенство

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx, \quad (11)$$

которое можно переписать более наглядно так:

$$|(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \leq \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\|.$$

Покажем, что если ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условию (7) и $u(x) \in L_2[a, b]$, то и

$$\int_a^b K(x, \xi)u(\xi) d\xi \in L_2[a, b]. \quad (12)$$

В самом деле, применяя неравенство (11), получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_a^b K(x, \xi)u(\xi) d\xi \right)^2 dx &\leq \int_a^b \left(\int_a^b [K(x, \xi)]^2 d\xi \int_a^b u^2(\xi) d\xi \right) dx = \\ &= \int_a^b \int_a^b [K(x, \xi)]^2 dx d\xi \int_a^b u^2(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, если обозначить левую часть (12) через $Au(x)$, то A представляет собой линейный оператор, отображающий пространство $L_2[a, b]$ в себя. Если извлечь квадратный корень из обеих частей неравенства (13), то это неравенство можно переписать в виде

$$\|Au\| \leq M\|u\|, \quad (14)$$

где обозначено

$$M = \left(\int_a^b \int_a^b [K(x, \xi)]^2 dx d\xi \right)^{1/2}.$$

Линейный оператор, удовлетворяющий оценке (14), называется *ограниченным*, а наименьшее значение постоянной M , для которого выполняется оценка (14), называется его *нормой* (ср. аналогичные определения для функционалов в п. VI.1.5). Таким образом, интегральный оператор A с ядром, удовлетворяющим условию (7), — это линейный ограниченный оператор в $L_2[a, b]$. В терминах этого оператора уравнение (6) можно переписать в виде $u = Au + f$. Это позволяет включить теорию интегральных уравнений Фредгольма в более общую стройную теорию *операторных уравнений*. Мы упомянем об этом в п. 2.11.

Аналогичными свойствами обладает пространство Гильберта на области многообразия любого числа измерений, для функций, принимающих векторные значения, а также при использовании любой неотрицательной меры μ , (т.е. $\mu \geq 0$).

§2. Теория Фредгольма

В §§ 2 и 3 всюду, где не оговорено противное, будет считаться, что ядро удовлетворяет условию (7), а неоднородные члены уравнений и решения берутся в $L_2[a, b]$; впрочем, почти всюду читатель может для простоты считать все функции непрерывными. Мы будем рассматривать уравнения Фредгольма 2-го рода, теория которых значительно проще, чем уравнений 1-го рода, причем более подробно будем разбирать одномерный случай. Рассматриваемые в этом параграфе функции, вообще говоря, могут принимать комплексные значения.

1. Уравнения с вырожденными ядрами. Ядро $K(x, \xi)$ называется *вырожденным*, если его можно представить в виде суммы

$$K(x, \xi) = \sum_{j=1}^p \Phi_j(x) \Psi_j(\xi) \quad (1)$$

произведений функций, зависящих только от x и только от ξ . Например, если ядро представляет собой многочлен от x, ξ , то оно, очевидно, вырожденное.

Без ограничения общности можно считать, что система функций $\Phi_j(x)$, равно как и $\Psi_j(\xi)$, линейно независима. В самом деле, если, например, $\Phi_1(x)$ линейно выражается через остальные $\Phi_j(x)$, то, под-

ставив это выражение в (1) и сгруппировав члены с одинаковыми Φ_j , мы просто получим представление ядра с помощью меньшего числа слагаемых (продумайте это рассуждение!).

Мы будем рассматривать уравнение (1.6) с добавочным множителем (параметром) λ при ядре, который окажется полезным во многих вопросах, т. е. уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x) = \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^p \Phi_j(x) \Psi_j(\xi) u(\xi) d\xi + f(x). \quad (2)$$

Оказывается, что оно немедленно сводится к системе p линейных алгебраических уравнений с p неизвестными.

В самом деле, допустим, что решение $u(x)$ уравнения (2) при заданном λ существует, и обозначим

$$u_j = \int_a^b \Psi_j(x) u(x) dx \quad \left(= \int_a^b \Psi_j(\xi) u(\xi) d\xi \right) \quad (j = 1, 2, \dots, p). \quad (3)$$

Тогда из (2) получаем

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^p u_j \Phi_j(x) + f(x). \quad (4)$$

Изменив обозначение индекса суммирования на k (зачем?) и подставив в (3), получаем

$$u_j - \lambda \sum_{k=1}^p a_{jk} u_k = f_j \quad (j = 1, 2, \dots, p), \quad (5)$$

где обозначено

$$a_{jk} = \int_a^b \Psi_j(x) \Phi_k(x) dx, \quad f_j = \int_a^b \Psi_j(x) f(x) dx \quad (j, k = 1, 2, \dots, p).$$

Обратно, легко проверить (проделайте это!), что, подставив любое решение системы (5) в правую часть (4), мы получим решение уравнения (2), причем удовлетворяются равенства (3). Таким образом, формулы (3) и, как мы видим, обратная к ним формула (4) устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями интегрального уравнения (2) и решениями системы линейных алгебраических уравнений (5).

Как известно, разрешимость системы (5) зависит от ее определителя

$$D(\lambda) = \det(\delta_{jk} - \lambda a_{jk}) = \det \left(\delta_{jk} - \lambda \int_a^b \Psi_j(x) \Phi_k(x) dx \right) :$$

если $D(\lambda) \neq 0$ (основной случай), то система имеет ровно одно решение, если же

$$D(\lambda) = 0 \quad (6)$$

(особый случай), то она либо не имеет ни одного, либо же имеет бесконечное количество решений. В силу предыдущего абзаца этим же свойством обладает уравнение (2). Для этого уравнения $D(\lambda)$ называется *определителем Фредгольма*, а его нули, т.е. корни уравнения (6), называются *характеристическими числами*. Так как $D(\lambda)$ — многочлен степени $\leq p$, то мы получаем, что *уравнение (2) имеет не более p характеристических чисел*.

Из доказанного вытекает также, что *если значение λ не является характеристическим, то уравнение (2) имеет ровно одно решение при любой функции $f(x)$* . Это *первая теорема Фредгольма*. Иногда ее формулируют так: *для того чтобы уравнение (2) имело ровно одно решение при любой функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение (т.е. уравнение (2), в котором положено $f(x) \equiv 0$) имело только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$* .

Если решать систему (5) по формулам Крамера (см., например, ЛВМ, п. VI.4), а затем определители, стоящие в числителях, разлагать по элементам столбца свободных членов, то получатся выражения вида

$$u_j = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^p D_{jk}(\lambda) f_k \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

где $D_{jk}(\lambda)$ — некоторые многочлены степени не выше $p-1$ (почему?). Подставляя эти формулы в (4), получим

$$u(x) = \lambda \sum_j \frac{1}{D(\lambda)} \sum_k D_{jk}(\lambda) \int_a^b \Psi_k(\xi) f(\xi) d\xi \cdot \Phi_j(x) + f(x),$$

т.е.

$$u(x) = \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi + f(x), \quad (7)$$

где обозначено

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p D_{jk}(\lambda) \Phi_j(x) \Psi_k(\xi). \quad (8)$$

Это так называемая *резольвента* уравнения (2) (от латинского *resolvo* — решаю, так как через нее по явной формуле (7) выражается искомое решение). При фиксированных x, ξ она представляет собой дробную рациональную функцию комплексного переменного λ . Подставив (7) в (2) (для чего надо в первом интеграле (2) поменять обозначение переменной интегрирования) и воспользовавшись произволом функции $f(x)$, получим уравнение, которому должна удовлетворять резольвента (проверьте!):

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \lambda \int_a^b K(x, \eta) \Gamma(\eta, \xi; \lambda) d\eta + K(x, \xi); \quad (9)$$

в нем не только λ , но и ξ служат параметрами.

Рассмотрим однородное *сопряженное* (иначе, *союзное*) с (2) уравнение

$$v(x) = \mu \int_a^b \sum_{j=1}^p \Phi_j^*(\xi) \Psi_j^*(x) v(\xi) d\xi; \quad (10)$$

таким образом, *сопряженное ядро* получается из исходного с помощью перестановки независимых переменных и перехода к комплексно сопряженным значениям (вспомните определение сопряженных матриц). Обозначив через b_{jk} и $E(\mu)$ новые значения коэффициентов a_{jk} и определителя Фредгольма, легко получим

$$b_{jk} = \int_a^b \Phi_j^*(x) \Psi_k^*(x) dx = a_{kj}^*,$$

$$[E(\mu)]^* = [\det(\delta_{jk} - \mu b_{jk})]^* = \det(\delta_{kj} - \mu^* b_{kj}^*) = \det(\delta_{jk} - \mu^* a_{jk}) = D(\mu^*),$$

$$[E_{jk}(\mu)]^* = D_{jk}(\mu^*).$$

Отсюда сразу следует, что *если λ служит характеристическим числом уравнения (2), то λ^* служит характеристическим числом сопряженного уравнения (10)* (конечно, и обратно, так как уравнения (2) и (10) взаимно сопряженные). Кроме того, из (8) легко вывести (попробуйте!), что резольвентой уравнения (10) при $\mu = \lambda^*$ служит $(\Gamma(\xi, x; \lambda))^*$; написав уравнение вида (9) для этой резольвенты и перейдя к сопряженным величинам, а затем поменяв обозначения x и ξ , получим еще одно уравнение для резольвенты

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \lambda \int_a^b K(\eta, \xi) \Gamma(x, \eta; \lambda) d\eta + K(x, \xi) \quad (11)$$

(проверьте!).

Пусть теперь λ — характеристическое число уравнения (2). Тогда все решения однородного уравнения, отвечающего (2), называются *собственными функциями* уравнения (2). Они образуют линейное пространство, размерность которого (т.е. число линейно независимых собственных функций, отвечающих выбранному характеристическому числу) равна размерности пространства решений однородной системы уравнений, отвечающей (5) (почему?). Но эта размерность равна $p - \text{rang}(\delta_{jk} - \lambda a_{jk})$ (ЛВМ, п. XI.5), а потому размерность аналогичного пространства для уравнения (10) при $\mu = \lambda^*$ равна

$$p - \text{rang}(\delta_{jk} - \lambda^* b_{jk}) = p - \text{rang}(\delta_{kj} - \lambda a_{jk})^* = p - \text{rang}(\delta_{jk} - \lambda a_{jk}),$$

так как у сопряженных матриц ранги одинаковые. Итак, *размерности пространств собственных функций уравнения (2) для характеристического числа λ и сопряженного уравнения (10) для $\mu = \lambda^*$ конечны и одинаковы. Это вторая теорема Фредгольма.*

Запишем уравнение (2), как в конце п. I.3, в форме $\mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u} + \mathbf{f}$. Если λ — характеристическое число, то уравнение $\mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u}$, т.е. $A\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{u}$, имеет нетривиальное решение; таким образом, $\frac{1}{\lambda}$ (а не λ) является собственным значением оператора A , а соответствующие собственные функции оператора — это как раз собственные функции интегрального уравнения. Очевидно, и величина, обратная любому *ненулевому* собственному значению оператора A , являемся характеристическим числом уравнения (2).

Отметим еще, что в силу §IV.3 размерность пространства собственных функций, отвечающих выбранному характеристическому числу λ , может либо равняться кратности корня λ уравнения (6), либо быть меньше этой кратности (так как, кроме собственных векторов, бывают еще присоединенные!).

Рассмотрим, наконец, неоднородное уравнение (2) в случае, когда λ — характеристическое число. Тогда для существования по крайней мере одного решения у уравнения (2), т.е. у системы (5), функция f должна удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Как было показано в п. IV.1.4, для существования по крайней мере одного решения у системы линейных алгебраических уравнений необходимо и достаточно, чтобы столбец свободных членов был ортогонален любому решению сопряженной однородной системы уравнений. В применении к системе (5) это означает, что должны выполняться равенства

$$\sum_{i=1}^p f_j v_i^* = 0 \quad (12)$$

для любого решения v_j системы уравнений

$$v_j - \lambda^* \sum_{k=1}^p b_{jk} v_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Равенства (12) можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^p \left(\int_a^b \Psi_j(x) f(x) dx \right) \left(\int_a^b \Phi_j^*(x) v(x) dx \right)^* = 0, \quad (13)$$

где $v(x)$ — соответствующее решение уравнения (10) при $\mu = \lambda^*$. Заменяя во втором интеграле обозначение переменной интегрирования на ξ и объединяя оба интеграла, перепишем (13) в виде

$$\int_a^b ds \int_a^b \sum_{i=1}^p \Psi_j(x) \Phi_j(\xi) f(x) v^*(\xi) d\xi = 0.$$

Отсюда, применяя соотношение (10) и сокращая на λ , получим окончательно

$$\int_a^b f(x) v^*(x) dx = 0. \quad (14)$$

Итак, если λ — характеристическое число, то для существования у уравнения (2) по крайней мере одного решения необходимо и достаточно, чтобы функция f была ортогональна всем решениям однородного сопряженного уравнения (10) с $\mu = \lambda^*$. Это третья теорема Фредгольма. Если это условие ортогональности выполнено, то общее решение уравнения (2), как у любого линейного неоднородного уравнения, равно сумме какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

В формулировке третьей теоремы Фредгольма можно убрать требование характеристичности λ ; тогда она вместе со второй теоремой будет содержать первую как частный случай (продумайте это!).

Выведем формулу для представления решения уравнения (2) через резольвенту в случае, «основном среди особых», когда значение $\lambda = \lambda_0$ служит простым нулем определителя $D(\lambda)$. Тогда в силу (8)

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \frac{\Gamma_0(x, \xi)}{\lambda - \lambda_0} + \Gamma_1(x, \xi; \lambda), \quad (15)$$

где функция Γ_1 аналитична при $\lambda = \lambda_0$. Подстановка в (9) показывает, что

$$\Gamma_0(x, \xi) = \lambda_0 \int_a^b K(x, \eta) \Gamma_0(\eta, \xi) d\eta,$$

откуда видно, что $\Gamma_0(x, \xi)$ при фиксированном ξ должна быть пропорциональна единственной собственной функции $u_0(x)$ ядра K , отвечающей собственному значению λ_0 . Привлекая еще аналогичное рассуждение для (11), получаем, что $\Gamma_0(x, \xi) = C_0 u_0(x) [v_0(\xi)]^*$, где $v_0(x)$ — единственная собственная функция сопряженного ядра при $\lambda = \lambda_0^*$.

Подставляя разложение (15) в (7), получаем

$$u(x) = \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_0} \int_a^b C_0 u_0(x) [v_0(\xi)]^* f(\xi) d\xi + \lambda \int_a^b \Gamma_1(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi + f(x).$$

Пусть теперь $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Мы вновь видим, что функция $f(x)$ должна быть ортогональна собственной функции $v_0(x)$; если, же это условие выполнено, то мы получаем при $\lambda = \lambda_0$

$$u(x) = \lambda_0 \int_a^b \Gamma_1(x, \xi; \lambda_0) f(\xi) d\xi + f(x) + C u_0(x),$$

где C — произвольная постоянная. Это и есть требуемое представление. Если λ_1 — собственное значение произвольной кратности, то представление имеет тот же вид, причем Γ_1 — регулярная часть разложения резольвенты в ряд Лорана около точки λ_0 .

Отметим, что мы нигде не пользовались упомянутой в начале пункта линейной независимостью систем Φ_j и Ψ_j ; однако уменьшение p , возможное в случае линейной зависимости, очевидно, выгодно при вычислениях.

2. Общий случай. Рассмотрим теперь общее уравнение Фредгольма 2-го рода

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x) \quad (16)$$

с параметром — множителем при ядре. Ядро K можно с любой степенью точности аппроксимировать вырожденными ядрами. Такую аппроксимацию можно осуществить многими способами: с помощью разложения в двойной ряд Фурье (см., например, ЛВМ, п. XVII.30) или воспользовавшись какой-либо иной ортогональной полной системой функций, с помощью аппроксимации многочленом от x, ξ и т. д. Если ядро непрерывно и пределы a, b конечны, то аппроксимацию можно осуществлять в смысле пространства C (т. е. в смысле равномерного уклонения); если разрывно — то в смысле L_2 ; см. по этому поводу [58].

Заменяя ядро на вырожденное, можно к полученному уравнению применить все результаты п. 1. Тем самым *все теоремы Фредгольма оказываются справедливыми и для общего уравнения (16) с ядром, удовлетворяющим условию (1.7)*. (В более полных курсах интегральных уравнений, указанных выше, законность такого перехода доказывается со всей строгостью.) Единственным существенным отличием от п. 1 является то, что в общем случае определитель Фредгольма $D(\lambda)$ уже не является многочленом. При все более точной аппроксимации ядра вырожденными количество слагаемых, т. е. p , приходится увели-

чивать, и в пределе $D(\lambda)$ становится «многочленом бесконечной степени» — целой аналитической функцией. Поэтому и характеристических чисел у уравнения (16) может быть бесконечное количество (впрочем, их может быть и конечное количество и даже, как мы увидим, ни одного). Но так как $D(0) = 1$, то $D(\lambda) \neq 0$, и потому по одной из теорем теории аналитических функций (п. II.3.6), *если характеристических чисел бесконечное количество, то их можно расположить в последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, уходящую на бесконечность. Это четвертая теорема Фредгольма.*

Соответственно и резольвента $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ в общем случае равна отношению двух целых функций и потому представляет собой уже не рациональную, а мероморфную функцию (п. II.3.12).

Однородное сопряженное уравнение взамен (10) в общем случае имеет вид

$$v(x) = \mu \int_a^b L(x, \xi) v(\xi) d\xi, \quad \text{где } L(x, \xi) = [K(\xi, x)]^*. \quad (17)$$

(Можно обозначить сопряженное ядро через K^* , но тогда придется писать $K^*(x, \xi) = [K(\xi, x)]^*$, что требует известной бдительности.) Сопряженное ядро связано с исходным ядром простым соотношением: для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \right] \psi^*(x) dx = \int_a^b \varphi(x) \left[\int_a^b L(x, \xi) \psi(\xi) d\xi \right]^* dx \quad (18)$$

(проверьте!).

Если исходное уравнение, как (1.6), не содержит параметров, то для применения первых трех теорем Фредгольма надо положить $\lambda = \mu = 1$. При этом взамен «если 1 не является характеристическим числом» можно говорить «если однородное уравнение, соответствующее данному, имеет только тривиальное решение». Тогда говорят также, что имеет место *первый* (иначе *основной*) *случай альтернативы Фредгольма* (альтернатива — необходимость выбора между двумя, как в данном случае, или несколькими исключаящими друг друга возможностями), если это не так — то *второй (особый) случай альтернативы*.

Описанный теоретический подход является одновременно методом численного решения уравнения (16) при конкретных λ , а также методом численного отыскания характеристических чисел и собственных функций этого уравнения.

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \sin(x\xi) u(\xi) d\xi + 1,$$

причем будем искать его характеристические числа, а также решение при $\lambda = \frac{1}{2}$. Воспользуемся разложением синуса в ряд Маклорена

$$\sin(x\xi) = x\xi - \frac{x^3\xi^3}{6} + \frac{x^5\xi^5}{120} - \dots \quad (19)$$

Взяв сначала один член ряда, получим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 x\xi u(\xi) d\xi + 1.$$

Согласно п. 1 надо обозначить

$$u_1 = \int_0^1 \xi u(\xi) d\xi, \quad (20)$$

что даст

$$u(x) = \lambda u_1 x + 1.$$

Подстановка этого выражения в (20) даст

$$u_1 = \int_0^1 \xi (\lambda u_1 \xi + 1) d\xi = \lambda \frac{u_1}{3} + \frac{1}{2}.$$

Отсюда характеристический определитель

$$D^{(1)}(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3} = 1 - 0,3333\lambda,$$

единственное характеристическое число $\lambda_1^{(1)} = 3$, а решение при $\lambda = \frac{1}{2}$

$$u^{(1)}(x) = 1 + 0,3x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Взяв два члена ряда (19), получим (проверьте!)

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_0^1 \left(x\xi - \frac{x^3\xi^3}{6} \right) u(\xi) d\xi + 1, \\ u_1 &= \int_0^1 \xi u(\xi) d\xi, \quad u_2 = \int_0^1 \xi^3 u(\xi) d\xi, \quad u(x) = \lambda u_1 x - \lambda u_2 \frac{x^3}{6} + 1, \\ &\left. \begin{aligned} u_1 - \lambda \left(\frac{u_1}{3} - \frac{u_2}{30} \right) &= \frac{1}{2}, \\ u_2 - \lambda \left(\frac{u_1}{5} - \frac{u_2}{42} \right) &= \frac{1}{4}, \end{aligned} \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

$$D^{(2)}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{3} & \frac{\lambda}{30} \\ -\frac{\lambda}{5} & 1 + \frac{\lambda}{42} \end{vmatrix} = 1 - \frac{13}{42}\lambda - \frac{2}{1575}\lambda^2 = 1 - 0,3095\lambda - 0,0013\lambda^2,$$

$$\lambda_1^{(2)} = 3,16, \quad \lambda_2^{(2)} = -247,$$

$$u^{(2)}(x) = 1 + 0,297x - 0,025x^3 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Отчетливо видна сходимость приближенных выражений для $D(\lambda)$, λ_1 и $u(x)$ при увеличении p с 1 до 2. Мы предлагаем желающим положить $p = 3$, т.е. взять три члена ряда (19) и посмотреть, какие получатся следующие приближения. Отметим, что при решении систем вида (21) с относительно малым λ можно пользоваться методом итераций, а при решении алгебраических уравнений с корнями, значительно различающимися по абсолютной величине, удобно использовать соотношения между корнями (ЛВМ, (VIII.33)). Например, уравнение $D^{(2)}(\lambda) = 0$ можно было решать так: сначала переписав его в виде $\lambda = (1 - 0,0013\lambda^2)/0,3095$ и начав с $\lambda_1^{(1)} = 3$, найти итерациями $\lambda_1^{(2)}$, после чего воспользоваться формулой для суммы корней квадратного уравнения.

Укажем еще один метод численного решения уравнения (16), основанный на применении формулы (18) и напоминающий метод моментов (см. конец п. VI.4.2). Если в формуле (18) вместо $\varphi(x)$ взять искомое решение $u(x)$ уравнения (16), мы получим равенство

$$\int_a^b u(x) \left[\psi(x) - \lambda^* \int_a^b L(x, \xi) \psi(\xi) d\xi \right]^* dx = \int_a^b f(x) \psi^*(x) dx,$$

которое должно выполняться для любой функции $\psi(x)$. Подставим вместо $\psi(x)$ какие-либо функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$, обычно это первые n членов некоторой полной системы функций. Тогда получится

$$\int_a^b u(x) g_j^*(x) dx = \int_a^b f(x) \psi_j^*(x) dx \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (22)$$

где обозначено

$$g_j(x) = \psi_j(x) - \lambda^* \int_a^b L(x, \xi) \psi_j(\xi) d\xi.$$

Таким образом, искомая функция $u(x)$ должна удовлетворять n линейным соотношениям, и потому ее естественно искать в виде линейной комбинации

$$u(x) = \sum_{k=1}^n c_k h_k(x) \quad (23)$$

какой-либо системы функций $h_k(x)$ с n произвольными коэффициентами. Подстановка (23) в (22) приводит к системе из n алгебраических линейных уравнений, из которой можно найти эти коэффициенты, а потому и приближенное решение (23) уравнения (16). В качестве $h_k(x)$ обычно берутся первые

члены какой-либо полной системы функций. В частности, если λ не является характеристическим числом, то можно положить $h_k(x) = g_k(x)$, так как в этом случае нетрудно проверить, что и система функций g_k полна. (Докажите это, исходя из следующего, равносильного определения полноты: *система функций полна в $L_2[a, b]$, если ненулевая функция не может быть ортогональна всем функциям из этой системы.*) Можно предварительно ортогонализировать функции g_j тогда система уравнений для нахождения C_k будет диагональной.

Все приведенные общие результаты непосредственно распространяются на уравнения вида (1.9) с искомыми функциями от нескольких переменных, на нагруженные уравнения (1.10), а также на системы m уравнений с m искомыми функциями. Такие системы можно записывать в том же виде (1.6) или (1.9), но K считать матрицей $m \times m$, а u и f — векторами. Конечно, тогда условие ортогональности, аналогичное (14), имеет вид $\int \mathbf{f}^* \mathbf{v} dG = 0$.

3. Применение бесконечных систем алгебраических уравнений. В примере п. 2 можно было воспользоваться и полным рядом (19); и в некоторых других примерах бывает возможно разложить ядро в ряд по вырожденным ядрам вида

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_j(x) \Psi_j(\xi).$$

Тогда возможно — во всяком случае, в теории — точное построение решения по методу п. 1, но с заменой верхнего предела суммирования p на ∞ , т. е. в виде суммы бесконечного ряда. Правда, вместо (5) получится система

$$u_j - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} u_k = f_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \quad (24)$$

из бесконечного числа уравнений с бесконечным числом неизвестных, которую на практике обычно приходится решать *методом усечения*, т. е. путем перехода при некотором выбранном p к системе (5), так что получается то же самое, как если с самого начала приближенно заменить ядро k на вырожденное. Однако бывает случаи, когда удастся решить точно полную систему (24) или извлечь из нее какие-либо полезные следствия.

Например, такое точное решение возможно, если системы функций $\Phi_j(x)$ и $\Psi_j(x)$ биортогональны, т. е.

$$a_{jk} = \int_a^b \Psi_j(x) \Phi_k(x) dx = 0 \quad (j \neq k).$$

В самом деле, тогда внедиагональные члены системы (24) обратятся в нуль и ее точное решение будет иметь вид

$$u_j = \left(1 - \lambda \int_a^b \Psi_j(x) \Phi_j(x) dx \right)^{-1} f_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Характеристическими числами будут служить тогда

$$a_{nn}^{-1} = \left(\int_a^b \Psi_n(x) \Phi_n(x) dx \right)^{-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(если $a_{nn} \neq 0$), а соответствующими собственными функциями — функции $\Phi_n(x)$.

Другой важный частный случай — если бесконечная матрица (a_{jk}) треугольная, т. е. если все $a_{jk} = 0$ при $j > k$ (верхняя треугольная матрица), либо все $a_{jk} = 0$ при $j < k$ (нижняя треугольная матрица). В обоих случаях, приравнявая нулю определитель, находим характеристические числа $\lambda_n = a_{nn}^{-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Для верхней треугольной матрицы легко найти соответствующие собственные функции, так как, положив в однородной системе (24) $u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = 0$, мы приходим к однородной системе n уравнений с n неизвестными и нулевым определителем. Поэтому собственные функции будут иметь вид конечных линейных комбинаций функций $\Phi_j(x)$. (Докажите, например, что числу λ_1 отвечает собственная функция $\Phi_1(x)$; числу λ_2 — собственная функция $\Phi_2(x) - \frac{a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \Phi_1(x)$ и т. д.; конечно, предполагается, что встречающиеся при этом знаменатели отличны от нуля.)

Особенно прост случай, когда $a_{jk} = 0$ при $j > k$ и всех $j < k - 1$. Тогда однородная система (24) имеет вид

$$(1 - \lambda a_{jj})u_j - \lambda a_{j,j+1}u_{j+1} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

откуда

$$u_1 = u_1, \quad u_2 = \frac{1 - \lambda a_{11}}{\lambda a_{12}} u_1, \quad u_3 = \frac{1 - \lambda a_{22}}{\lambda a_{23}} u_2 = \frac{(1 - \lambda a_{22})(1 - \lambda a_{11})}{(\lambda a_{23})(\lambda a_{12})} u_1,$$

вообще

$$u_m = \left(\prod_{j=1}^{m-1} \frac{1 - \lambda a_{jj}}{\lambda a_{j,j+1}} \right) u_1 \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

(при $m = 1$ получается произведение без сомножителей, оно полагается равным единице). Отсюда при $\lambda = a_{nn}^{-1}$ получается опять, что $u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = 0$, и мы приходим к явным выражениям для $u_1, u_2, \dots, u_n$. Можно показать, что прочие значения λ приводят, вообще говоря, к расходящимся рядам для $u(x)$, т. е. собственных функций не дают.

Для нижней треугольной матрицы (a_{jk}) легко найти решение неоднородной системы (24) (как?). Однако вид собственных функций получается более сложным, чем для верхних треугольных матриц. Например, подставив $\lambda = \lambda_1 = a_{11}^{-1}$ в однородную систему (24), получим последовательно

$$u_2 = \frac{a_{21}}{a_{11} - a_{22}} u_1,$$

$$u_3 = \frac{a_{31}u_1 + a_{32}u_2}{a_{11} - a_{33}} = \left[\frac{a_{31}}{a_{11} - a_{33}} + \frac{a_{21}a_{32}}{(a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33})} \right] u_1$$

и т. д. Подставляя в формулу (4) (с $p = \infty$, $f \equiv 0$), получим выражение первой собственной функции в виде суммы ряда. При вычислении собственной функ-

ции, отвечающей числу $\lambda = \lambda_n = a_{nn}^{-1}$, надо положить $u_1 = u_2 = \dots = u_{n-1} = 0$, а затем с помощью аналогичной процедуры выразить остальные коэффициенты u_j через u_n .

Бесконечные системы уравнений вида (24) встречаются в различных разделах прикладной математики, однако здесь мы не будем излагать общие свойства таких систем (см., например, § 1.2 книги [44]). На практике эти системы часто переписывают в виде

$$u_j = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} u_k + f_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots), \quad (25)$$

после чего применяют естественный метод итераций, который приводит к цели, если все коэффициенты λa_{jk} достаточно малы. Если коэффициенты с малыми j, k не малы, то можно несколько, скажем, n , первых уравнений (25) разрешить относительно $u_1, u_2, \dots, u_n$, после чего приписать к полученным формулам прочие уравнения (25) и проводить итерации.

Имеется еще один интересный класс систем (24), также встречающийся в приложениях, для которого $a_{jk} = 0$ при $|j - k| > 1$. Рассмотрим здесь только однородные системы, т. е. системы вида

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda a_{11})u_1 - \lambda a_{12}u_2 &= 0, \\ -\lambda a_{21}u_1 + (1 - \lambda a_{22})u_2 - \lambda a_{23}u_3 &= 0, \\ -\lambda a_{32}u_2 + (1 - \lambda a_{33})u_3 - \lambda a_{34}u_4 &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

Обозначив $\frac{u_{k+1}}{u_k} = U_k$, $\frac{1}{a_{k,k-1}} = p_k$, $\frac{a_{kk}}{a_{k,k-1}} = q_k$, $\frac{a_{k,k+1}}{a_{k,k-1}} = r_k$, получаем (проверьте!)

$$U_1 = \frac{\lambda^{-1} - a_{11}}{a_{12}}, \quad 1 - (p_k \lambda^{-1} - q_k)U_{k-1} + r_k U_{k-1} U_k = 0 \quad (k = 2, 3, 4, \dots). \quad (26)$$

Отсюда

$$U_{k-1} = \frac{1}{p_k \lambda^{-1} - q_k - r_k U_k}. \quad (27)$$

При $k = 2$ это даст

$$U_1 = \frac{1}{p_2 \lambda^{-1} - q_2 - r_2 U_2}. \quad (28)$$

Подставляя $k = 3$ в (27), а затем результат в (28), получим

$$U_1 = \frac{1}{p_2 \lambda^{-1} - q_2 - \frac{r_2}{p_3 \lambda^{-1} - q_3 - r_3 U_3}}. \quad (29)$$

Затем подставляем $k = 4$ в (27), а результат в (29) и т. д. Мы приходим к бесконечной *цепной* (иначе *непрерывной*) *дроби*, которая условно записывается так:

$$U_1 = \frac{1}{p_2 \lambda^{-1} - q_2 - \frac{r_2}{p_3 \lambda^{-1} - q_3 - \frac{r_3}{p_4 \lambda^{-1} - q_4 - \dots}}}. \quad (30)$$

Цепные дроби имеют интересные свойства и разнообразные применения, на которых мы здесь не будем останавливаться. При вычислении таких дробей для коэффициентов общего вида их на практике просто обрывают, т. е. переходят к конечной цепной дроби; это равносильно тому, чтобы в рекуррентном соотношении (26) положить какое-либо $U_n = 0$, а затем последовательно найти $U_{n-1}, U_{n-2}, \dots, U_1$.

Из (30) и первой формулы (26) получается уравнение для характеристических чисел λ . Если его удастся решить каким-либо приближенным методом, то из (26) легко последовательно найти $U_1, U_2, U_3, \dots$, т. е. и соответствующую собственную функцию.

Отметим в заключение, что у системы (24) может оказаться лишь конечное число отличных от нуля коэффициентов a_{jk} ; этот случай, конечно, теоретически наиболее прост.

4. Применение численного интегрирования. К теоремам Фредгольма можно прийти также другим способом, который тоже может служить основой для численного метода. Для этого применим к интегралу (16) какую-либо из формул, численного интегрирования. Каждая из таких формул имеет вид

$$\int_a^b \varphi(x) dx \approx \sum_{k=1}^n H_k \varphi(x_k), \quad (31)$$

где x_k — некоторые узловые точки, а H_k — коэффициенты. После такого применения подставим вместо x любое из узловых значений и заменим знаки $\approx$ на $=$. Получится

$$u_j = \lambda \sum_{k=1}^n H_k K(x_j, x_k) u_k + f_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (32)$$

где обозначено

$$u_j = u(x_j), \quad f_j = f(x_j).$$

Возьмем, например, одну из довольно грубых формул:

$$x_k = a + kh - \frac{h}{2}, \quad H_k = h, \quad \text{где} \quad h = \frac{b-a}{n}; \quad (33)$$

тогда равенства (32) примут вид

$$u_j = \lambda h \sum_{k=1}^n K(x_j, x_k) u_k + f_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (34)$$

Другими словами, мы воспользовались тем, что интеграл — это по существу сумма большого числа малых слагаемых. Таким образом, мы непосредственно пришли к системе из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Так как для таких систем теоремы

Фредгольма представляют собой переформулировки их условий разрешимости, то этим теоремы в пределе при $n \rightarrow \infty$ распространяются и на уравнения (16).

Этот метод также возможно полностью математически обосновать. Тем не менее я предпочел начать с вырожденных ядер не только из-за того, что в простых задачах их применение наиболее эффективно, но также из-за того, что уравнения с вырожденными ядрами — это уже интегральные уравнения, тогда как уравнения (32) в принципе требуют предельного перехода.

На практике, конечно, стараются подобрать формулу типа (31), которая при одном и том же объеме вычислений давала бы наилучшую точность. Разнообразные методы численного интегрирования содержатся в курсах приближенных вычислений; специально этим методом посвящена книга [61]. Здесь мы остановимся лишь на *методе Гаусса*, одном из наиболее эффективных.

Прежде всего с помощью линейной замены переменной интегрирования $x = a + (b - a) \frac{x_1 + 1}{2}$ перейдем от интегрирования a, b к стандартному интервалу $(-1, 1)$. Будем впредь считать, что эта замена уже осуществлена. Постараемся при выбранном n подобрать так коэффициенты H_k и узлы x_k , чтобы формула

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx \approx \sum_{k=1}^n H_k \varphi(x_k) \quad (35)$$

оказалось *совершенно точной* для всех многочленов степени $\leq p$, где p по возможности велико. Достаточно, чтобы она была точной для функций $\varphi(x) = 1, x, x^2, \dots, x^p$ (почему?). Подставляя их в (35), мы получим $p + 1$ уравнений

$$\int_{-1}^1 x^s dx = \sum_{k=1}^n H_k x_k^s \quad (s = 0, 1, 2, \dots, p), \quad (36)$$

которым надо удовлетворить. Но при произвольном подборе коэффициентов и узлов у нас имеется $2n$ степеней свободы, так что в самом лучшем варианте можно надеяться, что будет $p = 2n - 1$. Формула Гаусса и является реализацией этой надежды.

Вспомним о полиномах Лежандра (см., например, ЛВМ, п. XVII.20). Можно показать (на этом мы здесь не будем останавливаться, а для первых полиномов это легко проверить непосредственно), что все нули полинома $P_n(x)$ вещественные, простые и расположены на интервале $-1 < x < 1$. Они и берутся в качестве узлов x_k (вскоре будет ясно, что это дает). Выбрав узлы, положим в равенствах (36) $s = 0, 1, \dots, n - 1$. Тогда относительно коэффициентов H_k получится система из n уравнений с n неизвестными, из которой и находятся коэффициенты H_k .

Проверим, что для так выбранных узлов и коэффициентов равенства (36) при $s = 0, 1, \dots, 2n - 1$ выполняются. В самом деле, для $0 \leq s \leq n - 1$ это так по построению коэффициентов; значит, равенство (35) является точным для всех многочленов степени $\leq n - 1$. Пусть теперь $n \leq s \leq 2n - 1$. Разделив x^s на $P_n(x)$, мы получим в частном многочлен $Q_{s-n}(x)$ степени $s - n$ и в остатке многочлен $R_{<n}(x)$ степени $< n$. Таким образом, $x^s = Q_{s-n}(x)P_n(x) + R_{<n}(x)$ и равенство (36), которое нужно доказать, приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 Q_{s-n}(x)P_n(x) dx + \int_{-1}^1 R_{<n}(x) dx = \\ = \sum_{k=1}^n H_k Q_{s-n}(x_k)P_n(x_k) + \sum_{k=1}^n H_k R_{<n}(x_k). \quad (37) \end{aligned}$$

Но так как $s - n < n$, то многочлен $Q_{s-n}(x)$ можно представить в виде линейной комбинации полиномов Лежандра степени $< n$ (почему?) и, значит, в силу основного свойства ортогональности полиномов Лежандра первый интеграл в (37) равен нулю — это и есть причина, почему в основу метода были положены полиномы Лежандра. В правой части (37) первая сумма равна нулю по построению узлов x_k . Отбросив в (37) нулевые члены, приходим к тому, что надо доказать равенство вида (35) для полинома степени $< n$. А это уже показано во второй фразе этого абзаца.

Значения узлов x_k и коэффициентов H_k можно найти в справочниках, а при вычислениях на компьютере они заложены в стандартную подпрограмму численного интегрирования по методу Гаусса. Приведем для примера их значения для небольших n :

$$n = 2 : x_{1,2} = \pm 0,57735, H_{1,2} = 1;$$

$$n = 3 : x_{1,3} = \pm 0,77460, x_2 = 0; H_{1,3} = \frac{5}{9}, H_2 = \frac{8}{9};$$

$$n = 4 : x_{1,4} = \pm 0,86114, x_{2,3} = \pm 0,33998, \\ H_{1,4} = 0,34785, H_{2,3} = 0,65215;$$

$$n = 5 : x_{1,5} = \pm 0,90618, x_{2,4} = \pm 0,53847, x_3 = 0; \\ H_{1,5} = 0,23693, H_{2,4} = 0,47863; H_3 = 0,56889.$$

К методу Гаусса близки *методы численного интегрирования Ньютона-Котеса* и *Чебышева*. В первом методе узлы $x_k = -1 + 2 \frac{k-1}{n-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) задаются, а коэффициенты H_k подбираются так, чтобы формула (35) была точной для всех многочленов степени $\leq n - 1$. Во втором методе все коэффициенты H_k считаются равными, а узлы x_k подбираются так, чтобы формула (35) была точной для всех многочленов степени $< n$. Соот-

ветствующие значения коэффициентов и узлов можно найти в справочниках. Интересно, что в методе Чебышева возможны только значения $n \leq 7$ и $n = 9$.

Отметим, что при решении системы уравнений (36) относительно коэффициентов H_k определителем системы служит

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (38)$$

Этот определитель (при произвольных значениях чисел x_k) встречается в разных вопросах математики и называется *определителем Вандермонда*. Для него имеет место интересная формула

$$D = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}). \quad (39)$$

В самом деле, будем считать $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимыми переменными. Тогда D будет представлять собой форму (т.е. однородный многочлен) степени $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$. Если вычест из i -го столбца определителя (38) j -й столбец, то все элементы полученного столбца будут делиться на $x_i - x_j$ (почему?). Значит, D делится на каждую из скобок, стоящих в правой части (39), а так как эти скобки без общих множителей, то D делится и на произведение этих скобок. Но так как это произведение имеет ту же степень, что D (почему?), то оно может отличаться от D только числовым множителем. Однако произведение элементов, стоящих на главной диагонали определителя, всегда входит в полное разложение этого определителя со знаком плюс (продумайте это!); но это как раз произведение первых элементов всех скобок правой части (39). Значит, упомянутый числовой множитель может равняться только единице, т.е. формула (39) доказана.

Из нее, в частности, следует, что если все числа отличны друг от друга, то определитель Вандермонда не равен нулю. Это замечание существенно и для возможности определения коэффициентов H_k .

Скажем еще об уравнениях (16) со слабой особенностью (п. 1.2) на *диагонали*, т.е. при $x = \xi$. Быстрое и нерегулярное изменение ядра около диагонали, даже если разрыв испытывает не само ядро, а его производная, служит дополнительным источником ошибок в приближенном решении. Если же ядро на диагонали обращается в бесконечность, то требуется принятие особых мер предосторожности, чтобы диагональные члены в формуле численного интегрирования не приобрели чрезмерно большой роли, которой они на самом деле в силу сходимости интегралов не должны обладать.

Здесь возможны разные выходы, все они применяются в вычислительной практике. Так, если $K(x_k, x_k) = \pm\infty$, можно вместо $K(x_k, x_k)$ пользоваться значением $[K(x_k, x_k + h) + K(x_k, x_k - h)]/2$, где h имеет порядок шага Δx_k . Можно предварительно преобразовать уравнение (16) к виду

$$\left[1 - \lambda \int_a^b K(x, \xi) d\xi \right] u(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) [u(\xi) - u(x)] d\xi + f(x),$$

после чего уже применять формулы численного интегрирования, заменяя диагональное значение подынтегральной функции в правой части на нуль (почему?).

Можно воспользоваться также следующим методом, предложенным в 1929 г. советскими математиками Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым (1909–1992): используются дискретные значения искомой функции и осредненные значения ядра. Пусть, например мы применяем узлы и коэффициенты (33). Тогда можно приближенно заменить

$$\int_a^b K(x_j, \xi) u(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^n \left[\int_{a+(k-1)h}^{a+kh} K(x_j, \xi) d\xi \right] u(x_k).$$

Так как при вычислении коэффициентов ядро проинтегрировано, то они уже не обращаются в бесконечность. (Кстати, этот прием можно применить и для сингулярных ядер, п. 1.2.) Для ядер простого вида можно получить явные точные значения коэффициентов, а в более сложных случаях применить численное интегрирование с выделением особенности (см., например, ЛВМ, п. XIV. 16).

5. Уравнения с малыми ядрами. Как известно, для систем линейных алгебраических уравнений вида

$$x_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k + c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

с достаточно малыми коэффициентами a_{jk} решение можно получить с помощью простейшего метода итераций: нулевое приближение подставляется в правые части, получается первое приближение; оно опять подставляется в правые части и т. д., причем метод сходится, т. е. в пределе (а практически после определенного числа итераций) мы получаем точное решение. Приближенная запись уравнения (16) в форме линейной алгебраической системы (32) говорит, что и для уравнения (16) при достаточно малом $|\lambda|$ метод итераций сходится, т. е. в пределе дает точное решение.

Опишем процесс итераций подробнее. Мы будем исходить из нулевого приближения

$$u_0(x) = f(x)$$

(как будто в (16) положено $\lambda = 0$), хотя теоретически можно исходить из любого $u_0(x)$, а практически для ускорения сходимости желательно выбрать $u_0(x)$ по возможности ближе к точному решению, если о нем что-либо известно. Подставив $u_0(x)$ в правую часть (16), получим первое приближение

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (40)$$

(нам будет удобнее записывать уравнение, начиная с неоднородного члена). Для получения $u_2(x)$ нам понадобится $u_1(\xi)$, поэтому в (40) поменяем обозначение переменной интегрирования:

$$\begin{aligned} u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \left[f(\xi) + \lambda \int_a^b K(\xi, \eta) f(\eta) d\eta \right] d\xi = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \eta) f(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (41)$$

В последнем интеграле поменяем порядок интегрирования, а затем обозначения переменных интегрирования; это даст

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\eta) d\eta \int_a^b K(x, \xi) K(\xi, \eta) d\xi &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta \right) f(\xi) d\xi = \\ &= \int_a^b K_2(x, \xi) f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где обозначено

$$K_2(x, \xi) = \int_a^b K(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta -$$

итерированное ядро. Подстановка в (41) дает

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Повторение этого процесса приводит к выражению

$$u_2(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n \lambda^k \int_a^b K_k(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (42)$$

где $K(x_1, \xi) = K(x, \xi)$, а последовательные итерированные ядра составляют формулу

$$K_{k+1}(x, \xi) = \int_a^b K_k(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta; \quad (43)$$

такое действие называется *свертыванием ядра* $K_k(x, \xi)$ с ядром $K(x, \xi)$. Это действие совершенно аналогично умножению матриц и превращается в такое умножение, если при вычислении интеграла (43) пользоваться формулой численного интегрирования (31) с узлами и коэффициентами (33), а каждое ядро $L(x, \xi)$ заменить набором значений $hL(x_j, x_k)$ (проверьте!). Поэтому свертывание ядер обладает свойствами умножения матриц; оно употребляется чаще, чем, например, обычное умножение ядер.

Из (43) видно (и можно доказать более строго), что последовательность ядер K_k возрастает со скоростью геометрической прогрессии. Значит, если $|\lambda|$ меньше, чем обратная величина знаменателя этой прогрессии, то при увеличении n ряд в правой части (42), а с ним и весь метод, получится сходящимся, и в пределе мы получим точное решение уравнения (16)

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_a^b K_k(x, \xi) f(\xi) d\xi = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi, \quad (44) \end{aligned}$$

где обозначено

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k(x, \xi). \quad (45)$$

Это *ряд Неймана*, дающий представление резольвенты (см. (7)) уравнения (16) при достаточно малых $|\lambda|$. Как это следует из теории аналитических функций (п. II.3.5), его радиус сходимости равен наименьшему из модулей особых точек функции Γ (рассматриваемой как аналитическая функция от λ), или, как можно показать, наименьшему из модулей характеристических чисел уравнения (16). Для больших $|\lambda|$ резольвента представляет собой аналитическое продолжение суммы ряда Неймана.

Тот же результат (44) получится, если исходить из любого другого нулевого приближения, так как различие при повторении итераций в пределе сойдет на нет.

Метод итераций может быть использован и на практике для численного построения решений с помощью нескольких итераций, либо для исправления приближенного решения, построенного каким-либо другим методом. Однако такое построение или исправление возможно только в пределах сходимости ряда (45), что практически распознается по сближению итераций. За этими пределами «поправки» только уведут приближенное решение от точного!

6. Принцип сжимающих отображений. Сходимость метода итераций для уравнения (16) с малым $|\lambda|$ является хорошей иллюстрацией общего принципа сжимающих отображений, который широко применяется в последние годы при проверке сходимости этого метода для самого разнообразного класса задач. Было замечено, что такая проверка проходит во многих случаях в главных чертах одинаково, что и дало основание для формулировки общего принципа этой проверки в наиболее общем виде.

Естественной областью действия этого принципа является метрическое пространство. Напомним (п. VI.3.7), что метрическим пространством называется некоторая совокупность (R) объектов (элементов, точек), в которой имеется понятие расстояния $\rho(\alpha, \beta)$ между любыми двумя его точками $\alpha, \beta \in (R)$, причем это расстояние должно удовлетворять трем аксиомам метрики, указанным в п. VI.3.7. Евклидовы пространства любого числа измерений, нормированные (в частности, функциональные нормированные) пространства (п. VI.1.3) и любые совокупности точек в них — это все примеры метрических пространств. Но в понятие метрического пространства не заложено никакой линейности, так что, скажем, римановы пространства (п. V.2.5) также являются, метрическими, и т. д.

В метрическом пространстве естественно вводится понятие сходимости последовательности точек $\left(\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \text{ означает, что } \rho(\alpha_n, \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right)$ и многие понятия, связанные со сходимостью, на которых мы здесь не будем останавливаться. Любое множество (R_1) точек пространства (R) , если в (R_1) пользоваться той же метрикой, что и в (R) , само образует метрическое пространство (почему?), которое называется *подпространством* пространства (R) .

Многие (но далеко не все!) метрические пространства обладают важным свойством *полноты*, уже упомянутым в п. VI.1.3. (Отметим, что это свойство не имеет ничего общего с полнотой системы базисных функций, о которой говорилось в п. VI.4.1.) Полнота метрического пространства допускает различные определения, которые, как можно доказать, являются равносильными, например:

1) любая последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ точек (R) , для которой $\rho(\alpha_n, \alpha_m) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$, сходится к некоторой точке (R) ;

2) то же, но при условии $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(\alpha_k, \alpha_{k+1}) < \infty$;

3) последовательность точек (R) не может сходиться к не принадлежащей (R) точке какого-либо пространства, содержащего (R) в качестве подпространства.

Перечислим некоторые полные пространства; доказательства их полноты можно найти в курсах функционального анализа. Так, полны все конечномерные евклидовы пространства. Полны пространство $C[a, b]$ и вообще любое пространство $C(K)$ всех вещественных или всех комплексных (скалярных или векторных) непрерывных функций на каком-либо замкнутом ограниченном множестве (K) конечномерного евклидова пространства, если за расстояние между двумя функциями принимается их равномерное отклонение. (При этом замкнутость множества означает, что оно содержит пределы всех сходящихся последовательностей его точек.) Между прочим, для пространств C второе определение полноты есть просто признак Вейерштрасса равномерной сходимости (ЛВМ, п. XVII.8; продумайте это!). Полны пространство $L_2[a, b]$ и вообще

аналогично определяемое пространство Гильберта $L_2(M)$ для произвольного множества (M) с неотрицательной мерой, в частности для многообразия (M) в конечномерном евклидовом пространстве с обычной мерой Лебега. Полны и многие другие пространства, которых мы здесь не рассматриваем, а также любые замкнутые в только что указанном смысле подпространства полных метрических пространств (докажите!). В то же время незамкнутые подпространства всегда неполны; например, неполны совокупности всех непрерывных функций в $L_2[a, b]$ или всех непрерывно дифференцируемых функций в $C[a, b]$ (почему?).

Пусть теперь задано отображение B полного метрического пространства (R) в себя; другими словами, каждой точке $\alpha \in (R)$ поставлена в соответствие некоторая точка $B\alpha \in (R)$. Это отображение называется сжимающим, если существует такое положительное число $k < 1$, что для любых $\alpha, \beta \in (R)$

$$\rho(B\alpha, B\beta) \leq k\rho(\alpha, \beta). \quad (46)$$

(Допустим, $k = \frac{1}{2}$; тогда условие (46) означает, что все расстояния в (R) при отображении уменьшаются по крайней мере в два раза.) Сжимающее отображение всегда является непрерывным, т. е. из $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ а вытекает, что $B\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B\alpha$ (почему?); обратное, конечно, не обязательно: например, отображение $y = x^2$, т. е. $x \rightarrow x^2$ вещественной числовой оси непрерывное, но не сжимающее. (Хотя при $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$ оно сжимающее.)

Пусть рассматривается «уравнение»

$$\alpha = B\alpha; \quad (47)$$

другими словами, ищется точка α , которая при отображении B переходит в себя, она называется *неподвижной точкой* этого отображения. Эту точку естественно искать по методу итераций: как-то выбрать нулевое приближение α_0 , а последующие приближения строить по формулам $\alpha_1 = B\alpha_0$, $\alpha_2 = B\alpha_1$, вообще

$$\alpha_{n+1} = B\alpha_n. \quad (48)$$

Принцип сжимающих отображений состоит в следующем: если пространство (R) полное и его отображение B в себя сжимающее, то последовательность приближений α_n , построенных по формуле (48), сходится к неподвижной точке отображения B . Эта неподвижная точка единственная. (Подчеркнем, что этот принцип дает только достаточные условия сходимости итераций.)

Доказательство принципа очень простое. Последовательно применяя неравенство (46), получим

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \rho(B\alpha_0, B\alpha_1) \leq k\rho(\alpha_0, \alpha_1),$$

$$\rho(\alpha_2, \alpha_3) = \rho(B\alpha_1, B\alpha_2) \leq k\rho(\alpha_1, \alpha_2) \leq k^2\rho(\alpha_0, \alpha_1) \text{ и т. д.}$$

Так как ряд из правых частей сходится, то в силу второго определения полноты последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ сходится к некоторой точке $\bar{\alpha}$. Переходя в ра-

венстве (48) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $\bar{\alpha}$ удовлетворяет уравнению (47), т. е. это неподвижная точка. Если была бы еще одна неподвижная точка $\bar{\alpha} \neq \bar{\alpha}$, то

$$\rho(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) = \rho(B\bar{\alpha}, B\bar{\alpha}) \leq k\rho(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}),$$

и мы приходим к противоречию. Все утверждения доказаны. Кстати, это хороший пример того, что общее рассмотрение может оказаться проще, чем частное, так как в общем выделено «в чистом виде» существенное, а в частном это существенное может быть так заслонено спецификой, что «за деревьями не увидишь леса».

Чтобы применить принцип к уравнению специального вида, надо записать это уравнение в форме (47), уточнить, в каком пространстве действует отображение B , и проверить полноту пространства и сжимающий характер отображения. Применим этот принцип к уравнению (16), рассматривая его в полном пространстве $L_2[a, b]$. Тогда надо обозначить

$$Bu(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x)$$

В силу п. 1.3, если ядро удовлетворяет условию (1.7), а $f \in L_2[a, b]$, то и $Bu \in L_2[a, b]$, т. е. получается отображение пространства $L_2[a, b]$ в себя. При этом

$$\begin{aligned} |\rho(Bu, Bv)|^2 &= \|Bu - Bv\|^2 = \int_a^b |Bu(x) - Bv(x)|^2 dx = \\ &= \lambda^2 \int_a^b \left| \int_a^b K(x, \xi) [u(\xi) - v(\xi)] d\xi \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Применяя неравенство (1.11), получим, что правая часть не превосходит

$$\lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b |K(x, \xi)|^2 d\xi \right) \left(\int_a^b [u(\xi) - v(\xi)]^2 d\xi \right) dx = \lambda^2 \int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)|^2 dx d\xi [\rho(u, v)]^2.$$

Таким образом, если

$$|\lambda| < \left(\int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)|^2 dx d\xi \right)^{-1/2}, \quad (49)$$

то условия принципа выполнены и последовательные приближения, построенные в п. 5, сходятся к единственному решению уравнения (16). Заодно мы получаем оценку наименьшего из модулей характеристических чисел уравнения (47): этот модуль не меньше правой части (49) (почему?).

Еще раз подчеркнем, что оценка (49) является лишь достаточной не только для разрешимости уравнения (16), но и для сходимости метода итераций. На самом деле сходимость имеет место обычно в более широком круге плоскости λ , радиус которого равен наименьшему из модулей характеристических чисел

ядра K . Применяя различные нормы в функциональных пространствах, рассматривая проитерированное уравнение, возможно получить различные условия сходимости, которые часто оказываются лучшими, чем (49).

7. Возмущение ядра. Если для какого-либо ядра мы знаем одно из характеристических чисел и отвечающие ему собственные функции, то, применяя метод малого параметра, мы можем получить соответствующие характеристические числа и собственные функции для близких «возмущенных» ядер. Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi; \mu) u(\xi) d\xi, \quad (50)$$

где μ — малый вещественный параметр, и допустим, что нам известно некоторое характеристическое значение λ_0 ядра $K_0(x, \xi) = K(x, \xi; 0)$, причем этому значению отвечает лишь одна линейно независимая собственная функция $u_0(x)$. Чтобы найти соответствующие характеристическое число λ и собственную функцию $u(x)$ при $\mu \neq 0$, проведем разложение

$$\begin{aligned} K(x, \xi; \mu) &= K_0(x, \xi) + \mu K_1(x, \xi) + \mu^2 K_2(x, \xi) + \dots, \\ \lambda &= \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \mu^2 \lambda_2 + \dots, \quad u(x) = u_0(x) + \mu u_1(x) + \mu^2 u_2(x) + \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Подстановка в (50) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях μ приводит к равенствам

$$u_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K_0(x, \xi) u_0(\xi) d\xi, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \lambda_0 \int_a^b K_0(x, \xi) u_1(\xi) d\xi + \\ &+ \lambda_0 \int_a^b K_1(x, \xi) u_0(\xi) d\xi + \lambda_1 \int_a^b K_0(x, \xi) u_0(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \lambda_0 \int_a^b K_0(x, \xi) u_2(\xi) d\xi + \lambda_0 \int_a^b K_1(x, \xi) u_1(\xi) d\xi + \lambda_0 \int_a^b K_2(x, \xi) u_0(\xi) d\xi + \\ &+ \lambda_1 \int_a^b K_0(x, \xi) u_1(\xi) d\xi + \lambda_1 \int_a^b K_1(x, \xi) u_0(\xi) d\xi + \lambda_2 \int_a^b K_0(x, \xi) u_0(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (54)$$

и т. д. Первое из них выполняется по определению λ_0 и $u_0(x)$. Из равенства (53) в силу третьей теоремы Фредгольма мы видим, что сумма членов с u_0 должна быть ортогональна собственной функции $v_0(x)$ сопряженного с (52) уравнения

$$\left(\lambda_0 \int_a^b K_1(x, \xi) u_0(\xi) d\xi + \lambda_1 \int_a^b K_0(x, \xi) u_0(\xi) d\xi, v_0(x) \right) = 0,$$

откуда, пользуясь равенством (52), получим

$$\lambda_1 = \lambda_0^2 \int_a^b \int_a^b K_1(x, \xi) u_0(\xi) v_0^*(x) d\xi dx \Big/ \int_a^b u_0(x) v_0^*(x) dx.$$

Найдя λ_1 и удовлетворив тем самым условию ортогональности, мы получаем общее решение уравнения (53) в виде $u_1(x) = \varphi_1(x) + C_1 u_0(x)$, где C_1 — произвольная постоянная. Этот произвол несущественен, он связан с возможностью умножения $u(x)$ на любое разложение $1 + C_1 \mu + C_2 \mu^2 + \dots$. Поэтому C_1 подбираем из какого-либо условия нормировки решения или просто полагаем равным нулю. Затем обращаемся к уравнению (54), из которого на основании условия ортогональности неоднородного члена к функции v_0 находим λ_2 , после чего из уравнения находим $u_2(x)$, и т. д.

Если характеристическое значение λ_0 ядра K_0 является кратным, то при $\mu \neq 0$ ему может отвечать несколько характеристических чисел ядра K . В этом случае разложение (51) надо проводить по дробным степеням параметра μ , и выкладки усложняются; мы не будем здесь ими заниматься.

Аналогично рассматривается возмущение ядра для многомерных уравнений. Представляет интерес также рассмотрение возмущенных уравнений вида

$$u(M) = \lambda \int_{(G_\mu)} K(M, N; \mu) u(N) d_N G,$$

у которых не только ядро, но и область зависят от параметра. Здесь иногда делают замену переменных $M' = \varphi(M; \mu)$, отображающую область (G_μ) взаимно однозначно на некоторую область (G') , не зависящую от μ ; тем самым мы переходим к уже разобранный задаче. Можно этого и не делать, если не бояться дифференцировать интеграл по параметру, определяющему область интегрирования. Тогда, например, в правую часть (53), переписанную для многомерного случая, в силу ЛВМ, п. XVI.18, добавится член

$$-\lambda \int_{(S_0)} K_0(M, N) \frac{\varphi_1(N)}{|\text{grad } \varphi_0(N)|} u_0(N) d_N S_0,$$

где (S_0) — граница области (G_0) , а область (G_μ) задается неравенством $\varphi_0(M) + \mu \varphi_1(M) + \dots \leq 0$.

8. Характер решений. Хотя мы ищем решение уравнения (16) в пространстве $L_2[a, b]$, элементы которого не обязаны быть непрерывными, но часто бывают случаи, когда решение все же получается непрерывным и даже имеет непрерывную производную и т. д. Пусть, например, a и b конечны, а ядро $K(x, \xi)$ и неоднородный член $f(x)$ — непрерывные функции своих аргументов. Тогда легко доказать, что и решение $u(x)$ обязано быть непрерывным. В самом деле, применяя неравенства (1.11) и $|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$, получаем

$$\begin{aligned} |u(x + \Delta x) - u(x)|^2 &= \\ &= \left| \lambda \int_a^b [K(x + \Delta x, \xi) - K(x, \xi)] u(\xi) d\xi + [f(x + \Delta x) - f(x)] \right|^2 \leq \\ &\leq 2|\lambda|^2 \int_a^b |K(x + \Delta x, \xi) - K(x, \xi)|^2 d\xi \int_a^b |u(\xi)|^2 d\xi + 2|f(x + \Delta x) - f(x)|^2, \end{aligned}$$

откуда и видна непрерывность функции $u(x)$. (А если при том же ядре от $f(x)$ уже не требовать непрерывности, то аналогично легко проверить, что будет непрерывной разность $u(x) - f(x)$, т. е. решение имеет такие же разрывы, как и неоднородный член.)

Пусть теперь ядро $K(x, \xi)$ может иметь точки или линии разрыва, а функция $f(x)$ непрерывна. Тогда у решения $u(x)$ могут оказаться разрывы только при тех $x = x_0$, для которых прямая $x = x_0$ имеет отрезки линий разрыва ядра. Так, на рис. 114 жирно изображены линии и точки разрыва ядра. Так как интегрирование в (16) проводится по вертикальным отрезкам, то при переходе от $x = x_1 < x_0$ к близкому значению $x = x_2 > x_0$ интеграл может получить конечное приращение, а это и означает разрыв решения.

В частности, если линии разрыва ядра не содержат отрезков, параллельных оси ξ , а функция $f(x)$ непрерывна, то и решение $u(x)$ непрерывно.

Рассмотрим довольно распространенный случай, когда ядро имеет разрыв или излом (разрыв в производных) при $x = \xi$, а для $x \neq \xi$ является «хорошим». Тогда обычно ядро имеет при $\xi < x$ и при $\xi > x$ различные аналитические выражения, и поэтому удобно обозначить

$$K(x, \xi) = \begin{cases} K_1(x, \xi) & (\xi < x), \\ K_2(x, \xi) & (\xi > x), \end{cases}$$

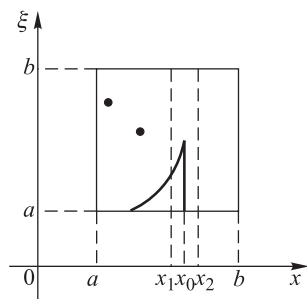


Рис. 114

хотя K_1 и K_2 составляют единую функцию. Уравнение (16) можно переписать в виде

$$u(x) = \lambda \int_a^x K_1(x, \xi) u(\xi) d\xi + \lambda \int_x^b K_2(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x).$$

Отсюда еще раз видно, что если функции

$$K_1(x, \xi) \quad (a \leq \xi \leq x \leq b), \quad K_2(x, \xi) \quad (a \leq x \leq \xi \leq b), \\ f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

непрерывны, то и решение $u(x)$ непрерывно. Если дополнительно дано, что K_1 , K_2 и f имеют непрерывные производные по x , то, вычисляя производную от интеграла по параметру, получим

$$u'(x) = \lambda [K_1(x, x) - K_2(x, x)] u(x) + \\ + \lambda \int_a^x K'_{1x}(x, \xi) u(\xi) d\xi + \lambda \int_x^b K'_{2x}(x, \xi) u(\xi) d\xi + f'(x),$$

т. е. и решение имеет непрерывную производную по x . Легко указать дальнейшие требования на K_1 , K_2 и f , при которых u'' непрерывна, и т. д. Таким образом, сведения о степени гладкости решения можно извлечь, опираясь на сведения о ядре и неоднородном члене.

Полученные результаты распространяются и на n -мерные уравнения вида (1.9). В частности, получается, что если ядро $K(M, N)$ имеет разрыв только при $M = N$, то интеграл в (1.9) зависит от точки M непрерывно; а поэтому, если и неоднородный член непрерывен, то и решение $u(M)$ обязательно непрерывно. Интегралы такого типа применяются в математической физике и называются *интегралами типа потенциала*, так как их частными случаями являются ньютонов и логарифмический потенциалы (п. 1.3.5). В математической физике изучаются также условия их дифференцируемости, однако мы здесь этим не будем заниматься.

9. Уравнения Вольтерра 2-го рода. Рассмотрим теперь линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода (п. 1.2)

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x), \quad (55)$$

причем a будем считать конечным. Можно доказать, что *это уравнение не имеет характеристических чисел*, т. е. при каждом λ уравнение (55) обладает ровно одним решением (имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, п. 2).

В самом деле, в противном случае соответствующее однородное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (56)$$

в силу первой теоремы Фредгольма имело бы нетривиальное решение. Если принять сначала, что x изменяется от a до некоторого $a + h > a$, и условиться считать

$$K(x, \xi) \equiv 0 \quad \text{при } \xi > x, \quad (57)$$

то из (1.13) получим

$$\int_a^{a+h} |u(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 \int_a^{a+h} \int_a^{a+h} |K(x, \xi)|^2 dx d\xi \int_a^{a+h} |u(x)|^2 dx.$$

Если h настолько мало, что произведение первых двух множителей в правой части меньше единицы, то отсюда следует, что $u(x) \equiv 0$ ($a \leq x \leq a + h$) (почему?). А если бы решение $u(x)$ стало отличным от нуля после некоторого $a_1 > a$, то, заменив в (56) нижний предел на a_1 и рассуждая таким же образом, мы пришли бы к противоречию. Тем самым утверждение предыдущего абзаца доказано.

При построении итерированных ядер в методе итераций из (57) следует, что

$$K_2(x, \xi) = \int_a^\xi K(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta + \int_\xi^x + \int_x^b = \int_\xi^x K(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta;$$

отсюда видно также, что и ядро K_2 удовлетворяет условию (57). Рассматривая затем K_3 и т. д., получаем, что все итерированные ядра удовлетворяют условию (57), а в формуле (43) интеграл можно брать от ξ до x . Поэтому и формулу (44) для решения можно записать в виде

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi. \quad (58)$$

Кроме того, резольвента как функция λ для уравнения Вольтерра не имеет особых точек, а потому ряд (45), а с ним и метод итераций, сходится при всех конечных значениях λ .

Будем обозначать независимую переменную буквой t и истолковывать ее как время. Тогда оператор Вольтерра

$$Au(t) = \int_{t_0}^t K(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (t \geq t_0),$$

в отличие от общего оператора Фредгольма, характеризуется тем, что значение функции Au в любой момент t определяется значениями функции u только при значениях $\tau \leq t$. Операторы (в том числе нелинейные), обладающие этим свойством, называются *операторами типа Вольтерра* и широко применяются при изучении процессов с последствием (подумайте, почему!). Естественно, что и решение (58) оказалось в каждый момент времени определяемым величиной внешнего воздействия f только в предшествующие моменты.

Для уравнения Вольтерра 2-го рода (55) характерна возможность *продолжения решения*: скажем, можно построить решение сначала на некотором интервале $a \leq x \leq a_1$ затем при $x \geq a_1$ переписать уравнение в виде

$$u(x) = \lambda \int_{a_1}^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi + \left[\lambda \int_a^{a_1} K(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x) \right]$$

и решать его дальше, так как сумма в квадратных скобках уже определена и т. д. Для общего уравнения Фредгольма (16) невозможно построить решение только на части интервала a, b , так как по смыслу уравнения все значения искомой функции на этом интервале завязаны друг с другом.

Имеются различные варианты переноса понятия уравнения Вольтерра на функции нескольких переменных. Например, такой:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \int_{a_1}^{x_1} d\xi_1 \underbrace{\int \dots \int}_{(H)} K(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \times \\ \times u(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_2, \dots, d\xi_n,$$

где (H) — некоторая область в пространстве $x_2, \dots, x_n$. Такое уравнение также не имеет характеристических чисел.

10. Уравнения со слабой особенностью. Теоремы Фредгольма можно распространить на уравнение (16) с ядром, удовлетворяющим оценке (1.8), и конечными a, b . Покажем вкратце, как это делается. Прежде всего проверим, что если $u(x) \in L_2[a, b]$, то справедливо утверждение (1.12), хотя доказательство (1.13) придется изменить (почему?). Однако теперь можно рассуждать так (проверьте!):

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi \right|^2 dx &\leq C \int_a^b \left| \int_a^b \frac{1}{|x - \xi|^{\alpha/2}} \frac{u(\xi)}{|x - \xi|^{\alpha/2}} d\xi \right|^2 dx \leq \\ &\leq C \int_a^b \left(\int_a^b \frac{1}{|x - \xi|^\alpha} d\xi \int_a^b \frac{|u^2(\xi)|}{|x - \xi|^\alpha} d\xi \right) dx \leq C_1 \int_a^b dx \int_a^b \frac{|u^2(\xi)|}{|x - \xi|^\alpha} d\xi = \\ &= C_1 \int_a^b d\xi |u^2(\xi)| \int_a^b \frac{1}{|x - \xi|^\alpha} dx \leq C_2 \int_a^b |u^2(\xi)| d\xi, \end{aligned}$$

откуда и вытекает (1.12). Таким образом, и для ядра со слабой особенностью оператор A , введенный в п. 1.3, будет ограниченным.

Центральным пунктом в теории ядер со слабой особенностью является то, что итерированные ядра (п. 5) обладают все более слабыми особенностями, а начиная с некоторого номера и вовсе теряют особенность. Это и дает возможность перейти от исходного уравнения к уравнению, для которого справедливость теорем Фредгольма уже установлена.

Проверим утверждение об ослаблении особенности. Для этого допустим, что ядро $K(x, \xi)$ удовлетворяет оценке (1.8), а некоторое ядро $L(x, \xi)$ — аналогичной оценке с показателем β . Тогда ядро, полученное в результате свертывания K с L , удовлетворяет оценке

$$\left| \int_a^b K(x, \eta) L(\eta, \xi) d\eta \right| \leq C \int_a^b |x - \eta|^{-\alpha} |\eta - \xi|^{-\beta} d\eta \leq \\ \leq |\eta - \xi = s(x - \xi)| \leq C |x - \xi|^{1-\alpha-\beta} \left| \int_{(\alpha-\xi)/(x-\xi)}^{(\beta-\xi)/(x-\xi)} |1-s|^{-\alpha} |s|^{-\beta} ds \right|. \quad (59)$$

При $s = 0$ и $s = 1$ этот интеграл сходится, а при $|s| \rightarrow \infty$ подынтегральная функция эквивалентна $|s|^{-(\alpha+\beta)}$, и потому весь интеграл не превосходит $C_1 + C_2|x - \xi|^{\alpha+\beta-1}$ (почему?). Подставляя эту оценку в (59), получаем, что

$$\left| \int_a^b K(x, \eta) L(\eta, \xi) d\eta \right| \leq \begin{cases} \frac{\text{const}}{|x - \xi|^{\alpha+\beta-1}}, & \text{если } \alpha + \beta - 1 > 0, \\ \text{const}, & \text{если } \alpha + \beta - 1 < 0. \end{cases} \quad (60)$$

(Случай $\alpha + \beta = 1$ можно не рассматривать, так как в оценке (1.8) всегда можно немножко увеличить α .)

Из доказанного следует, что ядро K_2 имеет особенность порядка $\alpha - (1 - \alpha)$, если это число положительно; K_3 имеет особенность порядка $\alpha - 2(1 - \alpha)$ и т. д., пока мы не дойдем до отрицательного числа $\alpha - m(1 - \alpha)$, а тогда ядро K уже будет ограничено.

(Отметим, что для n -мерных интегралов справедлив аналогичный результат, однако в оценках (60) вместо $\alpha + \beta - 1$ тогда надо поставить $\alpha + \beta - n$.)

Допустим для простоты, что $\alpha - (1 - \alpha) < \frac{1}{2}$, т. е. ядро K_2 удовлетворяет оценке (1.7). Запишем уравнение (16) в краткой форме

$$(I - \lambda A)u = f, \quad (61)$$

где I — единичный оператор (оставляющий все функции без изменения), и применим к обеим частям оператор $I + \lambda A$. Получим уравнение

$$(I - \lambda^2 A^2)u = (I + \lambda A)f, \quad \text{т. е.} \quad u = \lambda^2 A^2 u + (I + \lambda A)f, \quad (62)$$

где $(I + \lambda A)f$ — заданная функция, а A^2 — интегральный оператор с ядром K_2 , для которого выполнены теоремы Фредгольма. При этом из доказательства видно, что каждое решение уравнения (61) удовлетворяет и уравнению (62). В частности, положив $f \equiv 0$, видим, что если u — собственная функция уравнения (61), отвечающая характеристическому числу λ , то она будет также собственной функцией уравнения (62), отвечающей собственному числу λ^2 .

Отсюда сразу получается, что поскольку для уравнения (62) имеет место 4-я теорема Фредгольма (п.2), то она имеет место и для уравнения (61); отсюда же вытекает, что для каждого характеристического числа уравнения (61) пространство соответствующих собственных функций конечномерно (почему?).

Будем считать в дальнейшем, что λ зафиксировано, причем так, что $-\lambda$ не является характеристическим числом уравнения (61). (В более полных курсах интегральных уравнений с помощью итераций высшего порядка показывается, что это предположение для справедливости окончательных утверждений несущественно.) Тогда легко доказать, что любое решение уравнения (62) удовлетворяет и уравнению (61), т. е. уравнения (61) и (62) полностью равносильны. Это получается, если переписать уравнение (62) в виде

$$[(I - \lambda A)u - f] = (-\lambda)A[(I - \lambda A)u - f]$$

(почему?).

Уравнение, сопряженное с (61) при конкретном λ , а потому с подставленным сопряженным значением параметра, имеет вид

$$(I - \lambda^* A^*)v = 0. \quad (63)$$

Аналогично предыдущему абзацу показывается, что оно равносильно уравнению

$$v = \lambda^{*2} A^{*2} v, \quad (64)$$

причем легко непосредственно проверить, что уравнение (64) будет сопряженным к (62), так как итерированное сопряженное ядро будет сопряженным к итерированному основному ядру (продумайте это!). Применяя третью теорему Фредгольма к уравнению (62), получаем, что для его разрешимости, а потому и разрешимости уравнения (61) необходимо и достаточно выполнение условия ортогональности

$$((I + \lambda A)f, v) = 0 \quad (65)$$

для любого решения уравнения (64), т. е. (63). Однако легко непосредственно проверить (проделайте это!), что $(Af, v) = (f, A^*v)$, а потому условие (65) можно переписать в виде

$$0 = (f, v) + (\lambda Af, v) = (f, v) + (f, \lambda^* A^* v) = 2(f, v),$$

т. е. мы приходим к третьей теореме Фредгольма для уравнения (61). Первая теорема Фредгольма, как было указано в п.1, вытекает из третьей и второй.

Итак, для уравнения со слабой особенностью справедливы все четыре теоремы Фредгольма.

11. Уравнения с вполне непрерывными операторами. Подробный анализ теорем Фредгольма, проводимый в курсах интегральных уравнений и функционального анализа, показывает, что эти теоремы имеют место в значительно более общей ситуации, чем описано выше. Общие формулировки, которые мы здесь приведем без доказательства, делают эти теоремы более обозримыми (ср. п.6).

Пусть задано некоторое гильбертово пространство (H) ; это может быть какое-либо пространство функций, о которых мы говорили в п.1.3, но может

быть и просто некоторое бесконечномерное евклидово пространство, природа элементов которого для нас в данном вопросе несущественна. Пусть дан линейный оператор A , отображающий (H) в себя. Такой оператор называется *конечномерным*, если он отображает (H) на его конечномерное подпространство. Это обобщение понятия интегрального оператора с вырожденным ядром, так как оператор

$$Au(x) = \int_a^b \sum_{j=1}^p \Phi_j(x) \Psi_j(\xi) u(\xi) d\xi$$

отображает все $L_2[a, b]$ на подпространство линейных комбинаций функций $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_p(x)$ (почему?). Конечномерные операторы всегда ограниченные (см. определение ограниченности и нормы оператора в п. 1.3).

Линейный оператор A называется вполне непрерывным, если он может быть с любой точностью аппроксимирован конечномерным, т.е. если он может быть представлен в виде суммы конечномерного оператора и оператора с как угодно малой нормой. Так, вполне непрерывными являются фредгольмовы интегральные операторы и, по существу, именно об этом говорилось в начале п. 21. Можно доказать, что и интегральные операторы со слабой особенностью вполне непрерывны.

Часто пользуются другим, равносильным определением: *оператор A называется вполне непрерывным, если он всякое ограниченное множество преобразует в множество, компактное в (H)* . (Определение компактности было приведено в п. VI.2.9, где было показано также, что в бесконечномерном пространстве ограниченное множество не обязано быть компактным; более того, возможно доказать, что только в конечномерных пространствах каждое ограниченное множество компактно.) Отсюда видно, что всякий вполне непрерывный оператор ограничен, но обратное не обязательно: например, единичный оператор в любом бесконечномерном пространстве ограничен, но не вполне непрерывен.

Для каждого линейного оператора A возможно построить сопряженный линейный оператор A^* , также отображающий (H) в (H) и связанный с A соотношением

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \text{для всех } x, y \in (H) \quad (66)$$

(см. аналогичное определение в п. IV.1.3). Для интегральных операторов это просто оператор, отвечающий сопряженному ядру (см. формулу (18)). Если A вполне непрерывный, то и A^* вполне непрерывный.

Венгерский математик Ф. Рис (1880–1956) распространил теорию Фредгольма на операторные уравнения

$$u = \lambda Au + f, \quad (67)$$

где f — заданный, u — искомый элементы гильбертова пространства (H) , а A — вполне непрерывный линейный оператор, отображающий (H) в себя. Оказалось, что для такого уравнения справедливы все четыре теоремы Фредгольма в точности том виде, как они были приведены в п. 1 (конечно, вместо собственных функций теперь надо говорить о собственных элемен-

тах). При этом роль сопряженного уравнения к (67), естественно, играет уравнение

$$\mathbf{v} = \mu A^* \mathbf{v}.$$

Нет смысла повторять здесь формулировки этих теорем.

Таким образом, для возможности применения теорем Фредгольма достаточно убедиться в полной непрерывности соответствующего оператора. Проверка этого иногда требует навыков в «чистой» математике, поэтому если возникают сомнения, следует обратиться к курсам функционального анализа или просто к математикам.

12. Уравнения с положительными ядрами. Во многих прикладных задачах ядро уравнения (16) неотрицательно:

$$K(x, \xi) \geq 0 \quad (a \leq x, \xi \leq b). \quad (68)$$

Уравнения с такими ядрами в одномерном и многомерном случаях, а также нелинейные аналоги этих уравнений обладают рядом интересных свойств, подробно рассмотренных в книгах [40, 56].

Именно, оказывается, что все утверждения, приведенные в п. IV.4.8 для матриц с положительными элементами, остаются справедливыми для уравнения (16) с непрерывным положительным ядром (т.е. неравенство (68) должно быть строгим); при этом вместо вектора с неотрицательными проекциями надо говорить о функции, принимающей неотрицательные значения, а вместо наибольшего по модулю собственного значения — о наименьшем по модулю характеристическом числе. Утверждения оказываются справедливыми также для многомерных уравнений, разрывных ядер и нестрогого неравенства (68). Правда, в последнем случае ядро должно удовлетворять некоторым дополнительным предположениям, приведенным в указанных книгах; из реально встречающихся уравнений этим предположениям не удовлетворяют лишь уравнения Вольтерра, которые, как известно (п. 9), не имеют характеристических чисел. На интегральные уравнения распространяется также теория осцилляционных матриц, упомянутая в п. IV.4.8.

Абстрактным аналогом теории уравнений с положительными ядрами служит теория операторных уравнений в пространствах с конусом: понятие конуса обобщает понятие совокупности неотрицательных функций или совокупности векторов с неотрицательными проекциями. Более точно, *конусом* в гильбертовом или банаховом пространстве (H) называется любая замкнутая совокупность (K) точек, обладающая следующими свойствами:

- 1) если $\mathbf{x} \in (K)$, $\mathbf{y} \in (K)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, то $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in (K)$;
- 2) если $\mathbf{x} \in (K)$, $\mathbf{x} \neq 0$, то $-\mathbf{x} \notin (K)$.

(Подумайте, что это означает для двумерного или трехмерного евклидовых пространств.) Например, в любом функциональном пространстве совокупность всех неотрицательных функций образует конус (почему?). Аналогом интегрального оператора с неотрицательным ядром служит любой линейный вполне непрерывный (п. 11) оператор, отображающий конус (K) в себя. Для уравнения (67), в котором оператор A обладает этим свойством, оказывается возможным при соответствующих предположениях получить все утверждения, приведенные в п. IV.4.8 для конечномерного случая.

Теория пространств с конусом основана советским математиком М. Г. Крейном (1907–1989).

§3. Уравнения с симметричными ядрами

1. Аналогия с конечномерными уравнениями. Вернемся к уравнению (2.16), причем ядро $K(x, \xi)$ будем считать вещественным и симметричным, т. е. удовлетворяющим условию

$$K(x, \xi) \equiv K(\xi, x). \quad (1)$$

Как известно, теория симметрических матриц обладает рядом характерных черт (п. IV.1.6), которые распространяются и на уравнения с симметричными ядрами. При установлении соответствующих свойств мы пойдем по упрощенному пути, считая законной приближенную замену интегрального уравнения (2.16) на систему линейных алгебраических уравнений (2.34), а желающих ознакомиться с более математически строгими доказательствами мы отошлем к курсам интегральных уравнений.

Так как для симметричного ядра K и матрица коэффициентов системы (2.34) будет симметрической, то из свойств таких матриц получаем, что *все характеристические числа уравнения с вещественным симметричным ядром вещественные*. Это свойство дает возможность впредь в этом параграфе рассматривать *только вещественные функции*, если не оговорено противное, о чем мы больше не будем упоминать.

Если обозначить элементы собственных векторов уравнения (2.34), отвечающих двум различным собственным значениям, через $u_k^{(1)}$ и $u_k^{(2)}$, как известно из теории симметрических матриц, выполняется соотношение ортогональности

$$\sum_k u_k^{(1)} u_k^{(2)} = 0.$$

Умножив обе части на h и считая h достаточно малым, получаем, что *собственные функции уравнения с симметричным ядром, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны друг другу*.

Симметричное ненулевое (т. е. не тождественно равное нулю) *ядро имеет по крайней мере одно характеристическое число*. В самом деле, в конечномерном приближении это означает, что симметрическая матрица, не все элементы которой равны нулю, имеет по крайней мере одно ненулевое собственное значение. (Для несимметрических матриц это, вообще говоря, неверно — отсюда и получается отсутствие характеристических чисел у уравнения Вольтерра!) Ведь симметрическую матрицу всегда можно привести к диагональному виду, причем на диагонали будут стоять собственные значения; если все они равны нулю, то после приведения получится нулевая матрица, а тогда она и до приведения должна быть нулевой (почему?).

2. Разложение ядра по собственным функциям. Расположим все характеристические числа заданного симметричного ядра $K(x, \xi)$ в конечную или бесконечную последовательность

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \quad (2)$$

причем каждое число будем повторять столько раз, какова размерность отвечающего ему пространства собственных функций. В силу 4-й теоремы Фредгольма, если последовательность (2) бесконечная, то $|\lambda_k| \rightarrow \infty$.

Выберем теперь для каждого характеристического числа отвечающую ему собственную функцию; при этом, если некоторому числу отвечает несколько линейно независимых собственных функций, то мы их выберем ортогональными друг другу, что всегда возможно (почему?). Кроме того, после умножения этих функций на соответствующие константы всегда можно считать, что норма каждой из этих функций равна единице. Мы получаем последовательность нормированных собственных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x), \dots, \quad (3)$$

каждые два члена которой ортогональны друг другу: функции, отвечающие разным характеристическим числам, — в силу п. 1, а отвечающие одинаковым числам — по построению.

Допустим сначала, что у ядра имеется лишь одно характеристическое число и что ему отвечает лишь одна линейно независимая собственная функция. Тогда легко доказать, что

$$K(x, \xi) \equiv \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(x) \varphi_1(\xi). \quad (4)$$

В самом деле, докажем, что у симметричного ядра

$$K_0(x, \xi) = K(x, \xi) - \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(x) \varphi_1(\xi) \quad (5)$$

нет ни одного характеристического числа, а тогда $K_0 \equiv 0$ в силу п. 1. Но пусть $\varphi(x) \not\equiv 0$ — собственная функция ядра (5), т. е.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_a^b K_0(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi - \frac{\lambda}{\lambda_1} \varphi_1(x) \int_a^b \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Умножим обе части на $\varphi_1(x)$ и проинтегрируем от a до b , воспользовавшись тем, что в силу симметрии ядра K

$$\int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(x) dx = \int_a^b K(\xi, x) \varphi_1(x) dx = \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(\xi).$$

Поэтому из (6) получится, что

$$\int_a^b \varphi(x) \varphi_1(x) dx = 0. \quad (7)$$

Но тогда та же формула (6) показывает, что $\varphi(x)$ должна быть собственной функцией ядра K , а значит, она пропорциональна $\varphi_1(x)$, и мы приходим к противоречию с (7). Формула (4) доказана.

В общем случае, когда ядро K имеет любое число собственных функций, аналогичным образом доказывается, что система характеристических чисел и собственных функций ядра (5) получится, если у каждой из последовательностей (2) и (3) вычеркнуть первый член. (При доказательстве этого нужно проверить также, что каждая функция $\varphi_j(x)$ при $j > 1$ является собственной функцией ядра K_0 , отвечающей характеристическому числу λ_j ; это мы предоставим читателю.) Затем можно проделать аналогичное преобразование с ядром (5) и т. д. Мы получаем, в частности, следствие: *если симметричное ядро имеет лишь конечное число характеристических чисел, то это ядро вырожденное.*

Если же ядро K невырожденное, мы приходим к ряду

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x) \varphi_j(\xi).$$

Можно показать (на чем мы здесь не будем останавливаться), что если выполнено условие (1.7), то этот ряд обязательно сходится в среднем. А так как рассуждение, аналогичное проведенному в связи с ядром (5), показывает, что у ядра

$$K(x, \xi) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x) \varphi_j(\xi)$$

нет ни одного характеристического числа, то мы приходим к формуле разложения симметричного ядра по его собственным функциям:

$$K(x, \xi) = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x) \varphi_j(\xi). \quad (8)$$

Мы здесь не пишем пределы суммирования, так как они могут быть либо конечными в случае вырожденного ядра, либо бесконечными в случае невырожденного.

3. Следствия. Из разложения (8) вытекают многочисленные полезные формулы. Так, возведем обе части равенства (8) в квадрат и проинтегрируем результат по x и по ξ от a до b . Тогда в силу ортогональности собственных функций попарные произведения пропадут и, вспоминая о нормированности собственных функций, получим формулу

$$\int_a^b \int_a^b [K(x, \xi)]^2 dx d\xi = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^2}. \quad (9)$$

Если же в (8) положить $\xi = x$ и проинтегрировать результат, мы получим формулу для *следа непрерывного ядра* K

$$\int_a^b K(x, x) dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j}. \quad (10)$$

Формула для итерированного ядра (п. 2.5) дает

$$\begin{aligned} K_2(x, \xi) &= \int_a^b K(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta = \\ &= \int_a^b \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x) \varphi_j(\eta) \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(\eta) \varphi_k(\xi) d\eta = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^2} \varphi_j(x) \varphi_j(\xi). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично получаем (проверьте!)

$$K_n(x, \xi) = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^n} \varphi_j(x) \varphi_j(\xi). \quad (12)$$

Так как $\lambda_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$, то с увеличением n ряды в правой части сходятся все лучше и лучше. Из (12) аналогично предыдущему абзацу получаем

$$\int_a^b \int_a^b [K_n(x, \xi)]^2 dx d\xi = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^{2n}}, \quad \int_a^b K_n(x, x) dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^n}. \quad (13)$$

Последнюю формулу можно применить для приближенного вычисления первых собственных значений. В самом деле, допустим, что $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$. Тогда с ростом n в каждой из правых частей (13) становится преобладающим первое слагаемое. Отбрасывая остальные слагаемые, получаем приближенную формулу

$$|\lambda_1| \approx \left[\int_a^b \int_a^b [K_n(x, \xi)]^2 dx d\xi \right]^{-1/2n} \approx \left| \int_a^b K_n(x, x) dx \right|^{-1/n},$$

а знак λ_1 совпадает со знаком второго интеграла при нечетных n . Можно пользоваться также отношениями следов

$$\lambda_1 \approx \int_a^b K_n(x, x) dx \bigg/ \int_a^b K_{n+1}(x, x) dx$$

и т. п.

Для вычисления λ_2 можно воспользоваться тем, что в разложении величины

$$B_n = \left[\int_a^b K_n(x, x) dx \right]^2 - \int_a^b \int_a^b [K_n(x, \xi)]^2 dx d\xi$$

главным членом будет $\frac{2}{\lambda_1^n \lambda_2^n}$ (почему?), откуда

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt[n]{\frac{2}{|B_n|}}.$$

На итерациях основан также следующий *метод Келлога* для приближенного вычисления λ_1 . Возьмем произвольную функцию $f(x)$ и положим

$$f_1(x) = \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad f_2(x) = \int_a^b K(x, \xi) f_1(\xi) d\xi,$$

и т. д. Отсюда легко получить (проверьте!), что

$$f_1(x) = \sum_j \frac{f_j}{\lambda_j} \varphi_j(x), \quad f_2(x) = \sum_j \frac{f_j}{\lambda_j^2} \varphi_j(x), \dots,$$

где

$$f_j = \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx.$$

Если $f_1 \neq 0$, то при больших n в $f_n(x)$ преобладает первое слагаемое. Поэтому можно воспользоваться приближенными формулами

$$\lambda_1 \approx \frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}, \quad |\lambda_1| \approx \frac{\|f_n\|}{\|f_{n+1}\|}, \quad \varphi_1(x) \approx \frac{f_n(x)}{\|f_n\|} \text{ и т. п.}$$

Для уверенности в неравенстве $f_1 \neq 0$ можно проверить результат, начав с другой функции $f(x)$. (Подумайте, как распознать и как исследовать случаи, когда $\lambda_2 = \pm \lambda_1$.)

Формула для резольвенты (см. (2.45)) такова

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \sum_j \frac{1}{\lambda_j^n} \varphi_j(x) \varphi_j(\xi).$$

Переставляя порядок суммирования и пользуясь тем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \frac{1}{\lambda_j^n} = \frac{1}{\lambda_j} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda_j - \lambda} \quad (|\lambda| < |\lambda_j|),$$

получим

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) = \sum_j \frac{1}{\lambda_j - \lambda} \varphi_j(x) \varphi_j(\xi). \quad (14)$$

Эта формула получена пока для малых $|\lambda|$. Но так как обе части этого равенства являются аналитическими функциями λ во всей плоскости λ , за исключением точек $\lambda = \lambda_j$, то, совпадая при малых $|\lambda|$, они совпадают и тождественно (п. II.3.5). Значит, формула (14) дает представление резольвенты для всех λ ; мы видим, в частности, что резольвента симметричного ядра может иметь полюсы только первого порядка.

При выводе формулы (8) мы исходили из заданного ядра $K(x, \xi)$. Бывают случаи, когда задан ряд

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x) \varphi_j(\xi), \quad (15)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — какая-то система попарно ортогональных нормированных функций, а $1/\lambda_j$ — какие-то коэффициенты, ряд из квадратов которых сходится (см. (9)). Тогда ряд (15) сходится в среднем квадратичном (докажите это, опираясь на сведения из первой половины п. 2.6) к некоторой функции $K(x, \xi)$, удовлетворяющей условию (1.7). При этом $\varphi_j(x)$ — собственные функции ядра K , отвечающие характеристическим числам λ_j , и других линейно независимых собственных функций ядро K не имеет (почему?).

Отсюда получаем, в частности, такое следствие из формул (12) и (14): ядро $K_n(x, \xi)$ и резольвента $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ имеют тот же набор (3) собственных функций, что исходное ядро $K(x, \xi)$, причем эти функции отвечают характеристическим числам λ_j^n и $\lambda_j - \lambda$ соответственно.

Подставляя (14) в (2.44), получаем формулу для решения

$$u(x) = f(x) + \sum_j \frac{\lambda}{\lambda_j - \lambda} \left(\int_a^b f(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \right) \varphi_j(x), \quad (16)$$

справедливую для всех нехарактеристических значений λ . Если же λ характеристическое, то мы видим, что для существования решения необходимо, чтобы $f(x)$ была ортогональна всем собственным функциям, отвечающим этому значению λ ; впрочем, это вытекает и из третьей теоремы Фредгольма (почему?). В этом случае коэффициенты при указанных собственных функциях в формуле (16) надо заменить на произвольные постоянные, оставив прочие коэффициенты без изменения.

Пусть теперь дана какая-либо функция $F(x)$, которую возможно представить в виде

$$F(x) = \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (17)$$

где $f \in L_2[a, b]$; такие функции $F(x)$ называются *представимыми через ядро*. Подставляя в правую часть разложение (8), получаем

$$F(x) = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \left(\int_a^b f(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \right) \varphi_j(x).$$

Значит, функцию, представимую через ядро, возможно разложить по собственным функциям этого ядра; это теорема Гильберта–Шмидта.

Эта теорема допускает следующее истолкование. Рассмотрим, как и раньше, интегральный оператор $Au(x) = \int K(x, \xi) u(\xi) d\xi$. Областью его определения служит $L_2[a, b]$, а множеством значений — подпространство функций, представимых через ядро. Теорема Гильберта–Шмидта говорит, что последовательность функций (3) образует евклидов базис в этом подпространстве. Если элементами этого подпространства можно с любой точностью аппроксимировать любую функцию из $L_2[a, b]$ (а такие случаи возможны), то тем самым получится, что система функций (3) полна в $L_2[a, b]$. Это наиболее распространенный способ проверки полноты.

Все приведенные функциональные ряды сходятся, во всяком случае, в смысле L_2 , т. е. в среднем квадратичном. В курсах интегральных уравнений указаны дополнительные условия, при которых эти ряды сходятся равномерно.

Результаты пп. 1–3 без существенных изменений распространяются на другие виды уравнений Фредгольма 2-го рода, упомянутые в п. 1.2, с вещественным симметричным ядром (в том числе на нагруженные уравнения). Правда, для уравнений с искомой функцией от n независимых переменных более естественно нумеровать характеристические числа и собственные функции с помощью n индексов, но это не имеет принципиального значения. Если рассматривается система уравнений, то ядро K представляет собой квадратную матрицу-функцию, а условие симметрии (1) заменяется на

$$K(x, \xi) \equiv [K(\xi, x)]^*,$$

где звездочка означает транспонирование, а в случае комплексных функций, для которых приведенные результаты также справедливы, —

еще и переход к комплексно сопряженным значениям, В этом случае разложение (8) приобретает вид

$$K(x, \xi) = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(\xi) [\varphi_j(\xi)]^*,$$

соответственно видоизменяются и другие приведенные здесь формулы.

4. Переход от несимметричного ядра к симметричному. Бывают случаи, когда в исходном уравнении ядро не является симметричным, однако возможно с помощью тех или иных преобразований перейти к уравнению с симметричным ядром, после чего воспользоваться теорией уравнений с симметричными ядрами. Рассмотрим, например, уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) r(\xi) s(\xi) u(\xi) d\xi + f(x), \quad (18)$$

где $K(x, \xi) \equiv K(\xi, x)$, а r и s — произвольные положительные функции, так что в целом ядро $K(x, \xi) r(x) s(\xi)$ уравнения (18) несимметрично. Однако совершив замену искомой функции

$$u = \sqrt{\frac{r(x)}{s(x)}} v,$$

мы приходим к равносильному уравнению

$$v(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \sqrt{r(x)s(x)r(\xi)s(\xi)} v(\xi) d\xi + \sqrt{\frac{s(x)}{r(x)}} f(x)$$

уже с симметричным ядром.

Важным классом ядер, приводимых к симметричным, точнее говоря, к эрмитовым ядрам, являются *антисимметричные*, а в комплексном случае *антиэрмитовы ядра*, определяемые соотношением

$$K(\xi, x) = -[K(x, \xi)]^*.$$

Однако тогда ядро $\frac{1}{i} K(x, \xi)$ эрмитово (почему?) и, переписав уравнение (2.16) в виде

$$u(x) = (\lambda i) \int_a^b \left[\frac{1}{i} K(x, \xi) \right] u(\xi) d\xi + f(x),$$

мы можем полностью перенести на него результаты теории уравнений с эрмитовыми ядрами. Отметим, в частности, что при построении характеристических чисел значения λi получатся вещественными, а потому значения λ — *чисто мнимыми*.

Иногда может оказаться полезным односторонний переход от несимметричного ядра к симметричному. Рассмотрим общее уравнение (2.16) с вещественным несимметричным ядром. Поменяв обозначение x на s , умножив после

этого обе части на $K(s, x)$, проинтегрировав по s и изменив обозначения s на ξ в однократных интегралах, получим (проверьте!)

$$\int_a^b [K(\xi, x) - \lambda K_{\lambda}(x, \xi)] u(\xi) d\xi = \int_a^b K(\xi, x) f(\xi) d\xi, \quad (19)$$

где обозначено

$$K_{\lambda}(x, \xi) = \int_a^b K(s, x) K(s, \xi) ds$$

— *левое итерированное ядро*. Из (19) и (2.16) получаем, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$u(x) = \lambda \int_a^b [K(x, \xi) + K(\xi, x) - \lambda K_{\lambda}(x, \xi)] u(\xi) d\xi + \\ + f(x) - \lambda \int_a^b K(\xi, x) f(\xi) d\xi \quad (20)$$

с симметричным ядром, правда, зависящим от λ . Аналогично проверяется, что решения сопряженного к (2.16) уравнения (2.17) удовлетворяют также уравнению с симметричным ядром

$$v(x) = \mu \int_a^b [K(x, \xi) + K(\xi, x) - \mu K_{\mu}(x, \xi)] v(\xi) d\xi,$$

где K_{μ} — *правое итерированное ядро*:

$$K_{\mu}(x, \xi) = \int_a^b K(x, s) K(s, \xi) ds.$$

Мы предоставляем читателю проверить, что все характеристические числа ядер K_{λ} и K_{μ} положительны и что формулы

$$\mu = \lambda, \quad \psi(x) = \sqrt{\lambda} \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi(x) = \sqrt{\lambda} \int_a^b K(\xi, x) \psi(\xi) d\xi \quad (21)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между собственными функциями этих ядер, причем

$$\int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b \psi_j(x) \psi_k(x) dx = \delta_{jk}.$$

С помощью этих собственных функций возможно представление исходного ядра в виде суммы ряда

$$K(x, \xi) = \sum_j \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \psi_j(x) \varphi_j(\xi), \quad (22)$$

где λ_j — характеристические числа ядра K_λ (или, что то же, K_Π).

В самом деле, пользуясь формулами (21), получаем

$$\int_a^b \int_a^b \left[K(x, \xi) - \sum_j \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \psi_j(x) \varphi_j(\xi) \right]^2 dx d\xi = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) K(x, \xi) dx d\xi - \sum_j \frac{1}{\lambda_j},$$

а правая часть равна нулю в силу формулы (10), примененной к K_λ .

Из формулы (22) можно получить следствия, аналогичные приведенным в п. 3, даже если само ядро K не имеет (как, например, ядро Вольтерра) ни одного характеристического числа. Приведем, например, аналог теоремы Гильберта—Шмидта. Для этого предположим, что функцию $F(x)$ можно представить через ядро K с помощью формулы (17). Тогда, подставляя в правую часть разложение (22), получаем

$$F(x) = \sum_j \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \left(\int_a^b f(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \right) \psi_j(x),$$

т.е. эту функцию можно разложить по собственным функциям ядра K_Π . Аналогично функцию $F(x)$, представимую через ядро K с помощью формулы

$$F(x) = \int_a^b K(\xi, x) f(\xi) d\xi$$

(этого различия не было для симметричных ядер), можно разложить по собственным функциям ядра K_λ .

5. Экстремальное свойство характеристических чисел. Характеристические числа уравнений Фредгольма с симметричным ядром обладают экстремальными свойствами, совершенно аналогичными свойствам собственных значений самосопряженного отображения конечномерного евклидова пространства в себя (п. IV.1.7; см. также п. VI.2.8). Мы ограничимся для простоты одномерными скалярными вещественными уравнениями, хотя те же свойства имеют место в общем случае.

Рассмотрим значения квадратичного функционала

$$I\{y\} = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) y(x) y(\xi) dx d\xi \quad (23)$$

при интегральной связи

$$\int_a^b y^2(x) dx = 1. \quad (24)$$

Нетрудно усмотреть прямую аналогию с п. IV.1.7, если переписать функционал (23) в виде $\int \left[\int K(x, \xi) y(\xi) d\xi \cdot y(x) \right] dx$ и заметить, что условие (24) определяет единичную сферу в пространстве $L_2[a, b]$. Новым моментом, кроме бесконечности, является то, что система собственных функций ядра K уже, вообще говоря, не является полной в $L_2[a, b]$ (например, для вырожденного ядра она наверняка не полна, но она может быть неполной и для ядер, не являющихся вырожденными). Однако это в данном вопросе оказывается несущественным.

Подставив в (23) разложение (8), мы получим после простых преобразований

$$I\{y\} = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} y_j^2, \quad (25)$$

где обозначено

$$y_j = \int_a^b y(x) \varphi_j(x) dx.$$

В силу нормированности функций φ_j это коэффициенты разложения функции $y(x)$ по ортогональной системе функций (3) (ср. ЛВМ, п. XVII.21). Если бы система (3) была полной, то $y(x) = \sum_j y_j \varphi_j(x)$; в общем же случае можно ручаться только, что

$$y(x) = \sum_j y_j \varphi_j(x) + y_0(x), \quad (26)$$

где $y_0(x)$ ортогональна всем функциям (3) (проверьте!). Подстановка этого разложения в (24) дает

$$\sum_j y_j^2 + \int_a^b y_0^2(x) dx = 1. \quad (27)$$

Допустим сначала, что все $\lambda_j > 0$, причем $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$. Так как из (25) и (27) вытекает, что

$$I\{y\} = \frac{1}{\lambda_1} - \sum_j \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_j} \right) y_j^2 - \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b y_0^2(x) dx,$$

то мы видим, что

$$I\{y\} \leq \frac{1}{\lambda_1},$$

причем знак равенства достигается, только если $y_0(x) \equiv 0$ и $y_j = 0$ при $\lambda_j > \lambda_1$, другими словами, только для нормированных собственных

функций, отвечающих λ_1 (см. (26)). Если такая функция известна, то, приняв ее за $\varphi_1(x)$ и поставив дополнительную связь

$$\int_a^b y(x)\varphi_1(x) dx = 0, \quad (28)$$

аналогично получим, что $I\{y\} \leq \frac{1}{\lambda_2}$, причем равенство достигается только на собственных функциях, отвечающих λ_2 (и ортогональных $\varphi_1(x)$); затем ставим две дополнительные связи

$$\int_a^b y(x)\varphi_1(x) dx = 0, \quad \int_a^b y(x)\varphi_2(x) dx = 0$$

и т. д.

В силу (25) необходимым и достаточным условием положительности всех характеристических чисел является неравенство

$$I\{y\} \leq 0 \quad \text{для всех } y(x) \in L_2[a, b].$$

Функционал (23) и ядро K , обладающие этим свойством, называются *неотрицательно определенными*. Если это неравенство является строгим для всех функций $y(x) \neq 0$, функционал и ядро называются *положительно определенными*. Из (25) и (26) вытекает, что для положительной определенности функционала (23) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия: все $\lambda_j > 0$, а система (3) полна (почему?). (Отметим, в частности, что в силу формулы (11) ядро K_2 всегда неотрицательно определенное.)

Если все $\lambda_j < 0$, то картина аналогичная, но $\frac{1}{\lambda_1} \leq I\{y\} \leq 0$, где λ_1 — наименьшее по абсолютному значению характеристическое число. Если же имеются λ_j обоих знаков, то $I\{y\}$ заключено между обратными величинами наименьшего по абсолютному значению из $\lambda_j < 0$ и наименьшего из $\lambda_j > 0$, причем эти крайние значения $I\{y\}$ достигаются для соответствующих собственных функций. Если такая функция $\varphi_1(x)$ известна, то, добавив условие ортогональности (28), мы соответственно суживаем интервал изменения $I\{y\}$, и т. д. Взамен условия (28) можно в силу п. 2 перейти к ядру (5) и рассматривать задачу на экстремум отвечающего ему квадратичного функционала при единственной связи (24).

Если искать средствами вариационного исчисления функции, придающие функционалу (23) стационарное значение при связи (24) (п. VI.1.12), то мы приходим к собственным функциям ядра K . Для несимметричного ядра K та же задача приводит к собственным функциям симметризованного ядра $\frac{1}{2}[K(x, \xi) + K(\xi, x)]$ (проверьте!).

Описанное экстремальное свойство может служить основой для применения общего метода Ритца (п. VI.4.1) к приближенному вычис-

лению характеристических чисел и собственных функций симметричного ядра, что сводится этим методом к аналогичной задаче для квадратичной формы конечного числа переменных. При этом нет надобности заранее знать, каковы знаки у всех λ_j : если в процессе вычислений окажется, что $I\{y\} > 0$ хотя бы для одной функции $y(x)$, то среди λ_j имеются положительные, т.е. имеет смысл задача на максимум функционала $I\{y\}$; аналогично поступаем, если обнаружится, что $I\{y\}$ может быть меньше нуля.

В уравнении (20) встретилось ядро, зависящее от λ . Такие ядра, не обязательно симметричные, встречаются и в других вопросах, поэтому скажем здесь несколько слов о них. Пусть ядро $K(x, \xi; \lambda)$ является аналитической функцией λ , в некоторой области (G) комплексной плоскости. Так как в уравнении (2.16) λ можно считать постоянным, то первые три теоремы Фредгольма остаются справедливыми и для таких ядер. Аналогия с вырожденными ядрами, которая может быть обоснована строго, показывает что определитель Фредгольма $D(\lambda)$ (пп. 2.1, 2), нули которого дают характеристические числа ядра K , представляют собой аналитическую функцию λ в (G) . Значит, если $D(\lambda) \not\equiv 0$, то эти нули образуют либо конечное множество, либо последовательность, уходящую к границе (G) , к которой причисляется и точка $\lambda = \infty$; так будет, в частности, если $0 \in (G)$, так как значение $\lambda = 0$ не может быть характеристическим. Однако возможен также случай $D(\lambda) \equiv 0$, тогда все значения $\lambda \in (G)$ будут характеристическими. (Проверьте, например, что для ядра $K(x, \xi) = \frac{1}{2\lambda} + x\xi$ $-1 \leq x, \xi \leq 1$, все значения $\lambda \neq 0$ характеристические, причем каждому из этих значений отвечает собственная функция $\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а значению $\lambda = \frac{3}{2}$ — еще и собственная функция $\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x$).

6. Уравнения с самосопряженными операторами. Свойства интегральных уравнений с симметричными ядрами распространяются на общие уравнения (2.67) с вполне непрерывным самосопряженным оператором A . При этом линейный оператор A , отображающий вещественное гильбертово пространство (H) в себя, называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным, другими словами (ср. (2.66)), если

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех } x, y \in (H). \quad (29)$$

Мы перечислим эти свойства в терминах собственных значений оператора A ; при этом надо иметь в виду, что собственные значения обратны по величине характеристическим числам, и поэтому нулевому собственному значению не отвечают характеристические числа. (А характеристическое число равняться нулю не может.) Прежде всего доказывается, что если оператор A не нулевой, т.е. если $A(H) \neq 0$, то A обладает по крайней мере одним ненулевым собственным значением. Обозначим это собственное значение через λ_1 , а отвечающий ему собственный вектор, который мы возьмем нормированным, — через φ_1 . Оператор $A_1 = \lambda_1(\cdot, \varphi_1)\varphi_1$ (это означает, что $A_1x = \lambda_1(x, \varphi_1)\varphi_1$ самосопряженный и имеет единственное ненулевое собственное значение λ_1 , которому отвечает единственный собственный вектор φ_1 (проверьте!). Рассуждая, как

в п. 2, несложно доказать, что если собственному значению λ_1 оператора A отвечает лишь один собственный вектор φ_1 , то оператор

$$A - \lambda_1(\cdot, \varphi_1)\varphi_1$$

имеет те же собственные значения и собственные векторы, что и A , за исключением λ_1 и φ_1 . Продолжая таким образом, мы приходим к представлению оператора A в виде суммы

$$A = \sum_j \lambda_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j, \quad (30)$$

взятой по всем ненулевым собственным значениям оператора A и соответствующим им собственным векторам. При этом, если какому-либо собственному значению отвечает k линейно независимых собственных векторов, то соответствующее собственное значение повторяется k раз, а собственные векторы берутся ортогональными друг другу и нормированными. Собственные же векторы, отвечающие различным собственным значениям, всегда ортогональны друг другу.

Из формулы (30) вытекают те же следствия, что в п. 3 для интегрального оператора. Так, из вычисления

$$\begin{aligned} A^2 \mathbf{x} &= A(A\mathbf{x}) = \sum_j \lambda_j(A\mathbf{x}, \varphi_j)\varphi_j = \sum_j \lambda_j \left(\sum_k \lambda_k(\mathbf{x}, \varphi_k)\varphi_k, \varphi_j \right) \varphi_j = \\ &= \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k(\mathbf{x}, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_j)\varphi_j = \sum_j \lambda_j^2(\mathbf{x}, \varphi_j)\varphi_j \end{aligned}$$

(проверьте!) получаем, что

$$A^n = \sum_j \lambda_j^2(\cdot, \varphi_j)\varphi_j;$$

вообще

$$A^n = \sum_j \lambda_j^n(\cdot, \varphi_j)\varphi_j \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Умножив эти равенства на любые коэффициенты и просуммировав по n , получим, что

$$F(A) - \sum_j F(\lambda_j)(\cdot, \varphi_j)\varphi_j, \quad (31)$$

где $F(\lambda)$ — любая однозначная аналитическая функция, для которой $F(0) = 0$ и значения λ не являются особыми точками. Из формулы (30) нетрудно вывести также, что норма оператора A (см. п. 1.3) равна $\max_j |\lambda_j|$ (в силу 4-й теоремы Фредгольма, если собственных значений бесконечное количество, то они образуют последовательность, сходящуюся к нулю).

Обратно, для любой ограниченной последовательности λ_j и любой ортогональной системы нормированных векторов φ_j формула (30) определяет линейный ограниченный самосопряженный оператор с собственными значениями λ_j и соответствующими собственными векторами φ_j (о нулевом собственном значении будет сказано позже). Этот оператор будет вполне непрерывным тогда и только тогда, когда $\lambda_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Если зафиксировать векторы φ_j и произвольно

менять значения λ_j , мы получим семейство операторов с заданными собственными векторами; эти операторы попарно коммутируют, так как

$$\left(\sum_j \lambda_j (\cdot, \varphi_j) \varphi_j \right) \left(\sum_j \mu_j (\cdot, \varphi_j) \varphi_j \right) = \sum_j \lambda_j \mu_j (\cdot, \varphi_j) \varphi_j.$$

(В отличие от этого, если векторы φ и ψ линейно независимы и не ортогональны, то операторы $(\cdot, \varphi)\varphi$ и $(\cdot, \psi)\psi$ не коммутируют — докажите! Теперь можно лучше понять смысл левой части формулы (31): если в указанном семействе норма A достаточно мала (меньше радиуса сходимости ряда для $F(\lambda)$), то $F(A)$ определяется суммой ряда Маклорена; если же норма A не мала, то правая часть (31) дает аналитическое продолжение этой суммы по всем λ_j .

Из (31) получается, в частности, разложение резольвентного оператора $\Gamma(\lambda)$, по определению равного

$$\Gamma(\lambda) = A(I - \lambda A)^{-1} = \sum_j \frac{\lambda_j}{1 - \lambda \lambda_j} (\cdot, \varphi_j) \varphi_j.$$

Легко непосредственно убедиться в том, что

$$(I + \lambda \Gamma(\lambda))(I - \lambda A) = I$$

(проверьте!). Поэтому, записав уравнение (2.67) в виде $(I - \lambda A)\mathbf{u} = \mathbf{f}$ и умножив обе части на $I + \lambda \Gamma(\lambda)$, получаем

$$\mathbf{u} = (I + \lambda \Gamma(\lambda))\mathbf{f}.$$

Это, конечно, не что иное, как формула (2.7) (она же (2.44)).

Как видим, более общее изложение делает картину более простой и позволяет глубже разобратся в основных связях.

Из п. IV.1.4 вытекает, что (H) разлагается в ортогональную прямую сумму своих подпространств $A(H)$ и $A^{-1}(\mathbf{0})$ (правда, там рассматривались конечномерные пространства, но при доказательстве разложения конечномерность не использовалась). В силу формулы (30) первое подпространство состоит из элементов, которые можно разложить по векторам φ_j . Второе же подпространство, если оно не нулевое, состоит из всех собственных векторов, отвечающих нулевому собственному значению (почему?). Таким образом, мы получаем, что *система ортогональных векторов φ_j является полной в (H) тогда и только тогда, когда оператор A не имеет нулевого собственного значения*. Для уравнения (2.16) с симметричным ядром это означает, что однородное уравнение

$$\int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi \equiv 0 \quad (a \leq x \leq b)$$

не должно иметь нетривиального решения.

Все указанные свойства справедливы и для комплексного гильбертова пространства (H) ; в этом случае оператор, удовлетворяющий условию (29), называется *эрмитовым* (ср. п. 1.2). К перечисленным свойствам можно еще добавить, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны. (Для самосопряженного оператора это тоже так, но о мнимом собственном значении оператора A , действующего в вещественном пространстве (H) , можно

говорить только после комплексного расширения этого пространства, т. е. после перехода к совокупности элементов вида $\mathbf{x} + i\mathbf{y}$, где

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &\in (H), \quad \mathbf{y} \in (H), \\ (\mathbf{x}_1 + i\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 + i\mathbf{y}_2) &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + i(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2) - i(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) + (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \\ A(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) &= A\mathbf{x} + iA\mathbf{y};\end{aligned}$$

а после такого перехода самосопряженный оператор становится эрмитовым — проверьте!)

Подобно п. 4 вводится понятие *антиэрмитова* оператора, для которого $A^* = -A$, т. е. $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv -(\mathbf{x}, A\mathbf{y})$; все его свойства те же, что у эрмитовых операторов, однако все собственные значения чисто мнимые. Любой линейный оператор можно представить в виде суммы эрмитова и антиэрмитова операторов по формуле

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2}.$$

Разделив и помножив второе слагаемое на i , получаем другое представление произвольного оператора в виде

$$A = A_1 + iA_2,$$

где A_1 и A_2 — эрмитовы операторы; при этом $A^* = A_1 - iA_2$ (почему?).

Из (30) вытекает, что

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_j \lambda_j |(\mathbf{x}, \varphi_j)|^2.$$

С другой стороны, помножив скалярно на себя оба члена равенства

$$\mathbf{x} = \sum_j (\mathbf{x}, \varphi_j) \varphi_j + \mathbf{x}_0,$$

в котором $\mathbf{x}_0$ ортогонален всем φ_j , получим, что

$$= \sum_j |(\mathbf{x}, \varphi_j)|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

(это *неравенство Бесселя*); при этом неравенство обращается в равенство, если $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, т. е. если $\mathbf{x}$ разлагается по векторам φ_j . Отсюда легко вывести вариационный принцип для нахождения собственных значений λ_j , аналогичный описанному в п. 5, что мы предоставляем читателю.

§4. Некоторые специальные классы уравнений

1. Уравнения Вольтерра 1-го рода. Рассмотрим уравнение

$$\int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x). \quad (1)$$

Ясно, что для его разрешимости необходимо условие

$$f(a) = 0. \quad (2)$$

Допустим, что ядро $K(x, \xi)$, в котором считается $a \leq \xi \leq x$, непрерывно на диагонали $\xi = x$, и продифференцируем обе части (1) по x . Это приведет к уравнению

$$K(x, x)u(x) + \int_a^b K'_x(x, \xi)u(\xi) d\xi = f'(x), \quad (3)$$

которое при условии (2) равносильно (1). Если $K(x, x) \neq 0$, то, разделив обе части (3) на $K(x, x)$, мы приходим к уравнению Вольтерра 2-го рода. Если $K(x, x) \equiv 0$, то можно проделать описанную процедуру еще раз.

Рассмотрим теперь типичный случай уравнения, у которого ядро обращается в бесконечность на диагонали:

$$\int_a^x \frac{H(x, \xi)}{(x - \xi)^\alpha} u(\xi) d\xi = f(x), \quad (4)$$

где $0 < \alpha < 1$, а функция $H(x, \xi)$ конечна на диагонали. Поменяем обозначение x на s , умножим обе части на $\frac{1}{(x - s)^{1-\alpha}}$, проинтегрируем по s от a до x и в левой части переставим порядок интегрирования; получим (проверьте!)

$$\int_a^x \left[\int_\xi^x \frac{H(s, \xi)}{(s - \xi)^\alpha (x - s)^{1-\alpha}} ds \right] u(\xi) d\xi = \int_a^x \frac{(s)}{(x - s)^{1-\alpha}} ds. \quad (5)$$

Можно перейти и от (5) к (4) и показать, тем самым, что эти уравнения равносильны; мы не будем здесь это делать.

Заменив в ядре уравнения (5), стоящем в квадратных скобках, переменную интегрирования по формуле $s = \xi + (x - \xi)t$, получаем, что это ядро равно

$$\int_0^1 \frac{H(\xi + (x - \xi)t, \xi)}{t^\alpha (1 - t)^{1-\alpha}} dt$$

и потому на диагонали, т. е. при $\xi = x$, принимает конечное значение

$$H(\xi, \xi) \int_0^1 t^{-\alpha} (1 - t)^{\alpha-1} dt = H(\xi, \xi) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} H(\xi, \xi)$$

(см. ЛВМ, п. XIV.18 и формулу (II.4.27) этой книги). Поэтому к уравнению (5) возможно применить описанный выше метод дифференцирования.

Пусть, например, $H(x, \xi) \equiv 1$, т. е. уравнение (4) имеет вид

$$\int_a^x \frac{1}{(x-\xi)^\alpha} u(\xi) d\xi = f(x). \quad (6)$$

Тогда ядро уравнения (5) равно $\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ и, дифференцируя обе части, получаем решение

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds = |x-s=p-a| = \\ &= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(a+x-p)}{(p-a)^{1-\alpha}} dp = \\ &= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(a+x-p)}{(p-a)^{1-\alpha}} dp \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Эту формулу можно рассматривать как формулу обращения для интегрального преобразования (6).

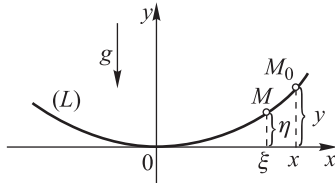


Рис. 115

Покажем применение полученного результата к решению следующей задачи: в однородном поле тяжести материальная точка M скользит без трения вдоль линии (L) (рис. 115); какой должна быть эта линия, чтобы период колебаний не зависел от амплитуды? Для решения допустим, что M_0 — наивысшее, а $(0; 0)$ — наинизшее положения колеблющейся точки; тогда в силу формулы (VI. 1.4) период колебаний T равен

$$T = 4 \int_0^x \sqrt{\frac{1+\eta'^2}{2g(y-\eta)}} d\xi = \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \frac{\sqrt{1+\eta'^2}}{\eta'} d\eta.$$

Обозначив на минуту $\sqrt{1+\eta'^2}/\eta' = u(\eta)$, мы можем совершить обращение по формуле (7) с $\alpha = 1/2$, что даст

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} = \frac{1}{\pi} \frac{T\sqrt{2g}}{4} \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Получилось дифференциальное уравнение для $y(x)$. Его удобно решить с помощью искусственной подстановки

$$y = R(1 - \cos \varphi), \quad \text{где } R = \frac{gT^2}{16\pi^2}.$$

Вычисления, которые мы предоставляем читателю, показывают, что

$$x = R(\varphi + \sin \varphi).$$

Получилась циклоида с вершиной в начале координат (проверьте!). Уравнение (6) при $\alpha = 1/2$ рассматривал Н. Абель (1802–1829).

Применяются также многомерные аналоги уравнения Абеля. Так, совершая над уравнением

$$\int \int_{(\sigma_{x,y})} [(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2]^{-1/2} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y),$$

где $(\sigma_{x,y})$ — треугольник $0 \leq \eta \leq y$, $|x - \xi| \leq y - \eta$, преобразование, аналогичное приведенному выше, можно прийти к равенству

$$\int \int_{(\sigma_{x,y})} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{\pi^2} \int \int_{(\sigma_{x,y})} [(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2]^{-1/2} f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

а отсюда с помощью дифференцирования — к формуле обращения

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \int \int_{(\sigma_{x,y})} [(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2]^{-1/2} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

См. [88], § 1.6.

2. Уравнения Фредгольма 1-го рода с симметричным ядром. Рассмотрим уравнение

$$\int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x) \quad (8)$$

с вещественным симметричным (или комплексным эрмитовым) ядром и с системой характеристических чисел (3.2) и собственных функций (3.3). Тогда в силу теоремы Гильберта–Шмидта (п. 3.3) для существования решения необходимо прежде всего, чтобы функция $f(x)$ разлагалась по собственным функциям (3):

$$f(x) = \sum_j (f, \varphi_j) \varphi_j(x). \quad (9)$$

Если это условие выполнено, то можно искать решение в виде

$$u(x) = \sum_j u_j \varphi_j(x). \quad (10)$$

Подстановка в (8) и сравнение с (9) дают

$$\frac{u_j}{\lambda_j} = (f, \varphi_j), \quad \text{откуда } u_j = \lambda_j (f, \varphi_j).$$

Поэтому, если мы хотим, чтобы решение, как обычно, принадлежало $L_2[a, b]$, то надо потребовать, чтобы функция f удовлетворяла дополнительно требованию $\sum_j \lambda_j^2 |(f, \varphi_j)|^2 < \infty$. Это вытекает из теоремы Фишера–Риса (1907), согласно которой при любой ортогональной системе нормированных

функций $\varphi_j(x)$ ряд (10) сходится в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда $\sum_j |u_j|^2 < \infty$. («Тогда» вытекает из первого определения полноты для

$L_2[a, b]$, см. п. 2.6; «только тогда» — из того, что остаток последнего ряда равен квадрату среднего квадратичного отклонения частной суммы ряда (10) от его полной суммы — продумайте это!)

Как всегда, для получения общего решения уравнения (8) надо к его частному решению (10) прибавить общее решение соответствующего однородного уравнения, другими словами, как легко следует из разложения (3.8), — любую функцию, ортогональную всем функциям (3.3). Значит, если система (3.3) полна, то решение уравнения (8) единственно, в противном случае — не единственно и даже может содержать бесконечное число произвольных постоянных; например, так будет для любого вырожденного ядра (почему?).

Если все $\lambda_j > 0$ и $f(x)$ такова, что уравнение (8) разрешимо (но функции $\varphi_j(x)$ не заданы!), то решение (10) можно получить по методу итераций, как предел последовательности функций $u_n(x)$, построенных по формуле

$$u_n(x) = u_{n-1}(x) + \lambda \left[f(x) - \int_a^b K(x, \xi) u_{n-1}(\xi) d\xi \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (11)$$

где $u_0(x)$ произвольна, а $\lambda > 0$ достаточно мал. В самом деле, если обозначить $u_n(x) = \sum_j u_{n,j} \varphi_j(x)$, $f(x) = \sum_j f_j \varphi_j(x)$ (ортогональная ядру компонента в $u_0(x)$ исчезает после первой же итерации и потому несущественна), то из (11) получаем

$$u_{n,j} = u_{n-1,j}(x) + \lambda \left(f_j - \frac{u_{n-1,j}}{\lambda_j} \right) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j} \right) u_{n-1,j} + \lambda f_j.$$

Отсюда при увеличении n

$$\Delta u_{n,j} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j} \right) \Delta u_{n-1,j},$$

а потому процесс сходится, если $\left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_j} \right| < 1$, т. е. если $0 < \lambda < 2\lambda_1$, где λ_1 — наименьшее из характеристических чисел. (Реально мы λ_1 обычно не знаем, так что значение λ можно подобрать эмпирически, задаваясь различными значениями и прослеживая, какая при этом получится скорость сходимости.) Переходя в (11) к пределу при $n \rightarrow \infty$, видим, что предельная функция удовлетворяет уравнению (8), т. е. является искомым решением.

Впрочем, картина на самом деле сложнее, чем это может показаться из предыдущего абзаца. Хорошо сходятся лишь коэффициенты при первых собственных функциях, тогда как дальнейшие сходятся плохо из-за близости коэффициента сходимости $1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}$ к единице. Это делает процесс в целом плохо сходящимся, если $u_0(x)$ существенно отличается от искомого решения в высших компонентах. Здесь можно применить итерации, начиная от различных нулевых приближений $u_0(x)$: если после нескольких итераций результаты по-

лучатся близкими, то естественно ожидать, что тем самым решение получено с хорошей точностью.

3. Понятие о некорректных задачах. Еще более существенно, что если функции (3.3) не образуют полную систему в $L_2[a, b]$, то ортогональное ядру слагаемое в $u_n(x)$, возникшее из-за неточности в задании функции f и погрешностей вычисления (округления, неточность формул численного интегрирования) с ростом n увеличивается. Подобные задачи, решение которых может существенно измениться и даже перестать существовать при малом изменении исходных данных, называются *некорректными*; естественно, что на решении этих задач существенно сказываются и погрешности вычисления. Впервые на некорректные задачи обратил внимание выдающийся французский математик Ж. Адамáр (1865–1963), но систематическое их изучение началось с работ советского математика и геофизика А. Н. Тихонова (1906–1993). Многие задачи, как классические (например, задача численного дифференцирования или рассмотренная выше задача о решении уравнения Фредгольма 1-го рода), так и новые, являются некорректными, и для их решения предложен ряд методов *регуляризации* (корректизации), дающих возможность аппроксимировать некорректную задачу корректными.

Мы не имеем здесь возможности останавливаться на этих методах; укажем в качестве примера на метод перехода к уравнению 2-го рода с помощью добавления к одной из частей уравнения (8) члена $\alpha u(x)$. При этом коэффициент α должен быть выбран не слишком большим (иначе существенно изменится решение) и не слишком малым (иначе добавленный член практически не скажется). Подходящее значение α можно подобрать эмпирически, с помощью анализа модельных задач с известными решениями.

Более точно это означает следующее. В реальных задачах характер решения обычно бывает известен. Выберем функцию $\tilde{u}(x)$ того же характера, что и искомое решение $u(x)$ (при расшифровке неопределенного термина «того же характера» существенная роль принадлежит опыту и интуиции, которые должны подсказать, какие из особенностей решения являются наиболее важными), и вычислим

$$\int_a^b K(x, \xi) \tilde{u}(\xi) d\xi = \tilde{f}(x).$$

Теперь можно рассматривать это равенство как интегральное уравнение с заданной функцией $\tilde{f}(x)$ и искомой $\tilde{u}(x)$. Применив к нему численный метод, который мы хотим испытать, мы можем сравнить полученное приближенное решение с точным, т. е. с $\tilde{u}(x)$; если результат получится удовлетворительным, то можно с известным основанием считать, что и для исходного уравнения (8) метод будет пригоден. Если характер решения известен недостаточно, то можно испытать метод на нескольких функциях $\tilde{u}(x)$.

Ясно, что эти общие соображения значительно выходят за рамки интегральных уравнений.

4. Уравнения Фредгольма 1-го рода, общий случай. Рассмотрим теперь уравнение (8), не предполагая ядро симметричным. Будем считать, что решение этого уравнения существует.

Теоретические условия существования и единственности решения нетрудно сформулировать аналогично п. 2, исходя из разложения (3.22). При этом функ-

ция $f(x)$ должна разлагаться по системе ψ_j , а решение $u(x)$ надо разлагать по системе φ_j .

Будем искать решение уравнения (8) в виде

$$u(x) = \sum_j u_j g_j(x) \nu(x), \quad (12)$$

где $g_1, g_2, g_3, \dots$ — некоторая полная на интервале (a, b) система функций, а $\nu(x)$ — некоторая «весовая функция», которую желательно выбрать ближе к искомому решению, чем будет улучшена сходимость ряда (12); если о решении мало что известно, то можно положить $\nu(x) \equiv 1$. Подстановка (12) в (8) дает

$$f(x) = \sum_j u_j h_j(x), \quad (13)$$

где обозначено

$$h_j(x) = \int_a^b K(x, \xi) g_j(\xi) \nu(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Таким образом, надо найти коэффициенты u_j разложения (13).

Бывают случаи, когда разложение (13) совсем просто, например, если $h_j(x) = c_j x^j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) или если функции h_j попарно ортогональны. Если это не так, то можно с помощью процесса ортогонализации (ЛВМ, пп. VII.21 и XVII.20) получить ортогональную систему функций

$$\chi_1 = h_1, \quad \chi_2 = h_2 - \frac{(h_2, \chi_1)}{(\chi_1, \chi_1)} \chi_1, \quad \chi_3 = h_3 - \frac{(h_3, \chi_2)}{(\chi_2, \chi_2)} \chi_2 - \frac{(h_3, \chi_1)}{(\chi_1, \chi_1)} \chi_1, \dots, \quad (15)$$

затем разложить f по системе χ_j и подставить в это разложение выражение функций χ_j через h_k ($k = 1, 2, \dots, j$), которое вытекает из (15). Можно разложить функции f и h_j по какой угодно полной системе функций:

$$f(x) = \sum_k f_k \omega_k(x), \quad h_j(x) = \sum_k h_{jk} \omega_k(x) \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

затем, если это удастся сделать эффективно, обратить второе разложение (т. е. обратить матрицу (h_{jk})) и подставить в первое.

Если разложение функции $h_j(x)$ в степенной ряд начинается с члена с x^j ($j = 0, 1, 2, \dots$), то можно воспользоваться равенствами, вытекающими из (13),

$$\begin{aligned} f(0) &= u_0 h_0(0), \quad f'(0) = u_0 h'_0(0) + u_1 h'_1(0), \\ f''(0) &= u_0 h''_0(0) + u_1 h''_1(0) + u_2 h''_2(0) \end{aligned}$$

и т. д.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\int_0^{\pi} e^{ix \cos \xi} u(\xi) d\xi = f(x),$$

встречающееся в теории распространения волн. Будем искать решение в виде

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos nx.$$

Тогда в силу формулы (14)

$$h_n(x) = \int_0^{\pi} e^{ix \cos \xi} \cos n\xi d\xi = \pi i^n J_n(x)$$

(см. ЛВМ, п. XVII.24). Разложение (13) приобретает вид

$$f(x) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} u_n i^n J_n(x) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} u_n i^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

(см. ЛВМ, (XV. 170)). Отсюда

$$f(0) = \pi u_0, \quad f'(0) = \frac{\pi i}{2} u_1, \quad f''(0) = -\frac{\pi}{2} u_0 - \frac{\pi}{4} u_2 \text{ и т. д.}$$

(проверьте!), что дает возможность последовательно вычислить коэффициенты u_n .

Если ядро уравнения (8) имеет при $x = \xi$ конечный скачок $\varphi(\xi)$, то от этого уравнения можно с помощью дифференцирования, аналогично п. 1, перейти к уравнению Фредгольма 2-го рода. В самом деле, тогда

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \varphi(\xi) \delta(x - \xi) + L(x, \xi),$$

где L есть производная от K по x без учета дельта-слагаемого. После дифференцирования обеих частей (8) по x получаем

$$\int_a^b [\varphi(\xi) \delta(x - \xi) + L(x, \xi)] u(\xi) d\xi = f'(x),$$

т. е.

$$u(x) = - \int_a^b \frac{L(x, \xi)}{\varphi(x)} u(\xi) d\xi + \frac{f'(x)}{\varphi(x)}$$

— уравнение 2-го рода. Если ядро уравнения (8) непрерывно на диагонали, но его производные 1-го порядка испытывают скачок, то надо произвести дифференцирование еще раз, и т. д. Такая ситуация возникает, в частности, если ядром уравнения (8) служит функция Грина (п. 1).

5. Применение производящих функций. Функция $\Phi(t, x)$ называется *производящей* для системы функций

$$g_0(x), \quad g_1(x), \quad g_2(x), \dots, \quad (16)$$

если

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(x) t^n, \quad (17)$$

где $a_n \neq 0$ — некоторые постоянные, другими словами, если функции (16) получаются в результате разложения $\Phi(t, x)$ в ряд по степеням t . Многие важные системы функций удастся просто исследовать, рассматривая свойства их производящих функций. Отметим, что из-за произвольности коэффициентов a_n одна и та же система функций (16) может иметь различные производящие функции.

Приведем без доказательства некоторые производящие функции. Так, в разложении

$$(1 - 2tx + t^2)^{-\beta-1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\beta + 1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^\beta(x) t^n$$

каждая из функций $T_n^\beta(x)$ оказывается полиномом степени n ; они называются *полиномами Гегенбауера* и при зафиксированном β образуют на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ ортогональную с весом $(1 - x^2)^\beta$ (ЛВМ, п. XVII.29) ¹⁾ полную систему функций. В частности, $T_n^0(x) = P_n(x)$ (полиномы Лежандра), $\sqrt{\pi/2} n T_n^{-1/2}(x) = T_n(x)$ (полиномы Чебышева, ЛВМ, п. XVII.29). В разложе-

$$e^{-xt/(1-t)} (1-t)^{-a-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+a+1)} L_n^a(x) t^n$$

функции $L_n^a(x)$ — также полиномы степени n ; они называются *полиномами Лагέρра* и при зафиксированном a образуют на интервале $0 \leq x < \infty$ ортогональную с весом $x^a e^{-x}$ полную систему функций. (При этом имеется в виду полнота в *пространстве* $L_2[0, \infty)$ с весом $x^a e^{-x}$; это гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)x^a e^{-x} dx$.) Наконец, в разложении

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \quad (18)$$

функции $H_n(x)$ — вновь полиномы степени n ; они называются *полиномами Эрмита* и образуют на интервале $-\infty < x < \infty$ ортогональную с весом e^{-x^2} полную систему функций. Все эти полиномы обладают многими полезными свойствами, которых мы здесь не будем касаться.

¹⁾ Функции $f(x)$ и $g(x)$ ($a \leq x \leq b$) называются *ортогональными с весом* $\rho(x) \geq 0$, если $\int_a^b f(x)g(x)\rho(x) dx = 0$.

Допустим, что для некоторой производящей функции (17) система функций (16) оказалась вещественной и ортогональной с весом $\rho(x) \geq 0$ на некотором интервале a, b . Рассмотрим уравнение

$$\int_a^b \Phi(x, \xi) \rho(\xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad (19)$$

где функция $f(x)$ аналитична в окрестности точки $x = 0$. Его решение можно искать в виде

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j g_j(x). \quad (20)$$

Подстановка (17) и (20) в (19) дает в силу соотношений ортогональности

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \|g_n\|^2 x^n = f(x),$$

где положено

$$\|g_n\|^2 = \int_a^b [g_n(x)]^2 \rho(x) dx.$$

Отсюда получаем

$$u_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n! a_n \|g_n\|^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Подстановка этих значений в (20) дает искомое решение, которое в случае полноты системы (16) является единственным.

Например, исходя из производящей функции (18), мы получаем возможность решить уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2} u(\xi) d\xi = f(x), \quad (21)$$

встречающееся в теории распространения тепла, с помощью ряда по полиномам Эрмита. При вычислении коэффициентов следует иметь в виду формулу $\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$, которую мы также не будем здесь доказывать.

Заметим теперь, что, исходя из какого-либо ядра $K(x, \xi)$, для которого мы можем решить уравнение (8), возможно построить много других ядер, обладающих тем же свойством, с помощью следующего общего приема. Рассмотрим уравнение

$$\int_a^b L_x K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f_1(x), \quad (22)$$

где L_x — некоторый линейный (например, дифференциальный) оператор, действующий по переменной x (т. е. при его действии ξ считается параметром). Допустим, что мы можем найти общее решение уравнения

$$L_x f(x) = f_1(x).$$

Тогда, подставив это решение в правую часть (8), мы тем самым сводим уравнение (22) к (8); значит, и для уравнения (22) возможно построить решение.

Например, из разложения (18), которое можно переписать в виде

$$e^{-(x-\xi)^2} = e^{-\xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(\xi) x^n,$$

вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} e^{-(x-\xi)^2} &= \left\{ \left[\frac{d^k}{dx^k} e^{-(x-\eta)^2} \right]_{x=0} \right\}_{\eta=\xi-x} = \\ &= \left\{ e^{-\eta^2} H_k(\eta) \right\}_{\eta=\xi-x} = (-1)^k e^{-(x-\xi)^2} H_k(x-\xi); \end{aligned}$$

последний переход сделан на основании того, что

$$\sum \frac{1}{n!} H_n(-x) t^n = e^{-2tx-t^2} = \sum \frac{1}{n!} H_n(x) (-t)^n,$$

т. е. $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$. (Это пример того, как с помощью производящей функции выводятся свойства произведенных ею функций.) Поэтому мы получаем возможность решить любое уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2} \sum_{k=0}^N a_k H_k(x-\xi) u(\xi) d\xi = f_1(x) \quad (\text{все } a_k = \text{const}), \quad (23)$$

решив сначала простое уравнение

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k a_k \frac{d^k f}{dx^k} = f_1(x),$$

а затем уравнение (21). (Впрочем, уравнение (23) можно решать непосредственно, воспользовавшись формулой

$$e^{-(x-\xi)^2} H_k(x-\xi) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} e^{-(x-\xi)^2} = (-1)^k e^{-\xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_{n+k}(\xi) x^n$$

и подставив вместо $u(\xi)$ ряд по полиномам Эрмита с неопределенными коэффициентами.) Можно положить и $N = \infty$.

Другой способ решения уравнения (22) возможен, если ядро, как это иногда бывает, удовлетворяет уравнению вида

$$L_x K(x, \xi) = M_{\xi} K(x, \xi), \quad (24)$$

где линейный оператор M_{ξ} действует по переменной ξ . Подставив (24) в (22) и перебросив, если это удастся (например, с помощью интегрирования по частям), оператор с K на u , мы приходим к уравнению вида

$$\int K(x, \xi) M_{\xi}^* u(\xi) d\xi = f_2(x),$$

решив которое, еще придется вернуться от $M_{\xi}^* u(\xi)$ к $u(\xi)$.

К рассматриваемым вопросам близка *проблема моментов*, которая состоит в построении функции $u(x)$ по ее заданным *моментам*

$$\int_a^b u(x)x^n \rho(x) dx = M_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (25)$$

где $\rho(x) \geq 0$ — заданная весовая функция. Отметим сразу же, что ее можно менять, переписав равенства (25) в виде

$$\int_a^b v(x)x^n \rho_1(x) dx = M_n, \quad \text{где} \quad v(x) = \frac{\rho(x)}{\rho_1(x)} u(x).$$

Этим можно пользоваться, чтобы, используя имеющуюся информацию о $u(x)$, получить $v(x)$ по возможности более удобной структуры (например, близкую к константе). В качестве интервала (a, b) можно взять один из интервалов $(-1, 1)$, $(0, \infty)$ и $(-\infty, \infty)$, так как остальные приводятся к этим с помощью линейной замены переменной интегрирования, что сводится к пересчету моментов (продумайте это!).

Один из методов решения проблемы состоит в построении, с помощью ортогонализации последовательности степеней, системы полиномов

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{nj} x^j \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

ортогональной на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$. Если искать решение в виде

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q_n(x), \quad (26)$$

то коэффициенты должны иметь вид

$$c_n = \frac{1}{\|Q_n\|^2} \int u(x) Q_n(x) \rho(x) dx = \frac{1}{\|Q_n\|^2} \sum_{j=0}^n a_{nj} M_j \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Конечно, при этом ряд (26) должен получиться сходящимся. Этот метод пригоден и в случае, если моменты берутся не относительно системы степеней, а относительно какой-либо иной системы функций.

Другой метод состоит в переходе к интегральному уравнению 1-го рода. Разложив какое-либо подходящее ядро $K(x, \xi)$ по степеням ξ :

$$K(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(x) \xi^n,$$

мы получим из (25) уравнение

$$\int_a^b K(x, \xi) \rho(\xi) u(\xi) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} M_n k_n(x),$$

к которому можно применить какой-либо из рассмотренных выше способов решения.

6. Уравнение Вольтерра с разностным ядром. Уравнение

$$\alpha u(x) + \int_0^x k(x-\xi)u(\xi) d\xi = f(x) \quad (\alpha = \text{const}) \quad (27)$$

(при $\alpha \neq 0$ получается уравнение 2-го рода, при $\alpha = 0$ — 1-го рода) можно решить с помощью преобразования Лапласа, как это описано в п. III.2.4. Обозначая большими буквами лаплас-образы рассматриваемых функций, из (27) получим

$$\alpha U(p) + K(p)U(p) = F(p), \quad (28)$$

откуда

$$U(p) = \frac{F(p)}{\alpha + K(p)}, \quad (29)$$

и остается лишь воспользоваться формулой обращения (III. 1.19). Так как функции $F(p)$ и $K(p)$ аналитичны в некоторой полуплоскости $\text{Re } p > \text{const}$ и стремятся там к нулю при $p \rightarrow \infty$, то при $\alpha \neq 0$ и $U(p)$ удовлетворяет этому условию обратимости. Если же $\alpha = 0$, т. е. рассматривается уравнение 1-го рода, то стремление правой части (29) к нулю при $p \rightarrow \infty$, $\text{Re } p > \text{const}$ приходится дополнительно потребовать.

Если уравнение (27) решается лишь на конечном интервале $0 \leq x \leq x_0$, то можно функции $k(x)$ и $f(x)$ вне этого интервала продолжить произвольным образом, например положить их равными нулю, после чего уже проводить преобразование Лапласа.

Нетрудно проверить, что итерированные ядра (п. 2.9) также являются разностными: например, второе итерированное ядро равно

$$\int_{\xi}^x k(x-\eta)k(\eta-\xi) d\eta = |\eta-\xi=s| = \int_0^{x-\xi} k((x-\xi)-s)k(s) ds.$$

Поэтому и резольвента уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^x k(x-s)u(s) ds + f(x)$$

зависит от $x-\xi$; обозначим ее через $\gamma(x-\xi; \lambda)$. Из (2.9) вытекает, что она удовлетворяет уравнению

$$\gamma(x-\xi; \lambda) = \lambda \int_{\xi}^x k(x-\eta)\gamma(\eta-\xi; \lambda) d\eta + k(x-\xi).$$

Полагая $\xi = 0$, получаем подобно (29) лаплас-образ резольвенты

$$\Gamma(p; \lambda) = \frac{K(p)}{1 - \lambda K(p)}. \quad (30)$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^x (x - \xi)^\alpha u(\xi) d\xi + f(x) \quad (\alpha > -1).$$

В силу формулы (III.1.6)

$$K(p) = \Gamma(\alpha + 1)p^{-(\alpha+1)},$$

откуда

$$\Gamma(p; \lambda) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)p^{-(\alpha+1)}}{1 - \lambda \Gamma(\alpha + 1)p^{-(\alpha+1)}}$$

(обратите внимание на различный смысл буквы Γ в этой формуле!). Заменяя дробь суммой бесконечной геометрической прогрессии и пользуясь формулой (III.1.6) в обратном направлении, получим выражение резольвенты в виде суммы ряда (проверьте!)

$$\gamma(x - \xi; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \frac{[\Gamma(\alpha + 1)]^n}{\Gamma(n\alpha + n)} (x - \xi)^{n\alpha + n-1}.$$

При $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ этот ряд свертывается в конечную сумму по методу, описанному в ЛВМ для ряда (XVII.52).

Если ядро уравнения (27) удовлетворяет по x линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, то можно применить также следующий прием. Пусть, например,

$$k'' + qk' + rk = 0. \quad (31)$$

Продифференцировав уравнение (27) два раза, получаем

$$\alpha u'(x) + k(0)u(x) + \int_0^x k'(x - \xi)u(\xi) d\xi = f'(x), \quad (32)$$

$$\alpha u''(x) + k(0)u'(x) + k'(0)u(x) + \int_0^x k''(x - \xi)u(\xi) d\xi = f''(x). \quad (33)$$

Умножив уравнение (27) на r , (32) — на q и сложив с (33), получаем в силу (31)

$$\alpha u'' + [k(0) + \alpha q]u' + [k'(0) + qk(0) + \alpha r]u = f''(x) + qf'(x) + rf(x).$$

Решив это простое дифференциальное уравнение (откуда взять начальные условия?), находим $u(x)$. Метод пригоден и при $\alpha = 0$.

Еще более простой вид имеет этот метод перехода к дифференциальному уравнению для уравнений Фредгольма 2-го рода, если ядро, даже вида $K(x, \xi)$, удовлетворяет по x линейному однородному дифференциальному уравнению, коэффициенты которого могут зависеть от x . (Впрочем, в последнем случае могут возникнуть трудности с решением этого дифференциального уравнения.) Отметим, что такие ядра по необходимости являются вырожденными, так что здесь можно применить и методы п. 2.1.

По поводу описанного метода см. [92].

7. Уравнение Фредгольма с разностным ядром на оси. К уравнению

$$u(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} r(x - \xi)u(\xi) d\xi + f(x) \quad (34)$$

теория Фредгольма заведомо неприменима, так как интеграл (1.7) всегда равен бесконечности (почему?). Здесь обычно применяется преобразование Фурье

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (35)$$

Напомним, что его можно применить к любой функции, абсолютно интегрируемой на всей оси, причем формула обращения имеет вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (36)$$

Нам понадобится, кроме линейности, еще следующее свойство свертывания, которое доказывается так же, как аналогичное свойство

преобразования Лапласа (п. III.1.3): фурье-образом функции $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - \xi)f_2(\xi) d\xi$ служит $2\pi\hat{f}_1(k)\hat{f}_2(k)$.

Применим эти свойства к решению уравнения (34), предполагая все участвующие функции абсолютно интегрируемыми на всей оси. Подобно (29) и (30) мы получаем образы решения и резольвенты

$$\hat{u}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)}, \quad \hat{\gamma}(k; \lambda) = \frac{\hat{r}(k)}{1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)} \quad (37)$$

(легко проверить, что и здесь резольвента имеет вид $\gamma(x - \xi; \lambda)$), если полученный знаменатель не имеет нулей на оси k . Теперь нужно еще воспользоваться формулой обращения (36) и затем преобразовать, если это удастся, полученный интеграл к более удобному виду по методу п. III. 1.5. Если $1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)$ имеет нули при вещественных k ,

то уравнение (34), вообще говоря, не имеет абсолютно интегрируемого на всей оси x решения.

Описанный метод можно применить и к уравнению 1-го рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x - \xi)u(\xi) d\xi = f(x);$$

однако при этом надо дополнительно требовать, чтобы отношение $\hat{f}(k)/\hat{r}(k)$ допускало обратное преобразование Фурье, т.е. чтобы оно было абсолютно интегрируемо на всей оси k . Для n -мерного уравнения, аналогичного (34), скажем, при $n = 2$,

$$u(x, y) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x - \xi, y - \eta)u(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y)$$

с тем же успехом можно применить кратное преобразование Фурье (п. III.3.3).

Единственность решения уравнения (34) гарантируется лишь в классе абсолютно интегрируемых на всей оси x функций. Вне этого класса, однородное уравнение (34) может иметь нетривиальные решения вида $u(x) = e^{ax}$; подстановка в (34) показывает после замены $\xi \rightarrow x - \xi$, что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi) e^{-a\xi} d\xi = 1 \quad (38)$$

(если этот интеграл сходящийся). Подобно ЛВМ, п. XV.17, можно показать, что если a является m -кратным корнем уравнения (38), то однородному уравнению (34) удовлетворяют функции e^{ax} , xe^{ax} , ..., $x^{m-1}e^{ax}$.

Требования абсолютной интегрируемости всех участвующих функций, а также необращения в нуль знаменателя в (37) являются чрезмерно жесткими и могут быть в значительной мере преодолены, если считать k комплексным, как это описано в п. III.3.2. При этом нам окажется полезной следующая простая

Лемма. Пусть

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \begin{cases} M_- e^{\alpha_- x} & (-\infty < x \leq 0), \\ M_+ e^{\alpha_+ x} & (0 \leq x < \infty), \end{cases} \\ |\varphi(x)| &\leq \begin{cases} N_- e^{\beta_- x} & (-\infty < x \leq 0), \\ N_+ e^{\beta_+ x} & (0 \leq x < \infty), \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

причем $\beta_+ < \alpha_-$, $\alpha_+ < \beta_-$. Тогда свертка $\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)\varphi(\xi) d\xi$ определена и удовлетворяет оценке

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)\varphi(\xi) d\xi \right| \leq \begin{cases} P_- e^{\gamma_- x} & (-\infty < x \leq 0), \\ P_+ e^{\gamma_+ x} & (0 \leq x < \infty), \end{cases}$$

где γ — наименьшее из чисел α_-, β_- ; γ_+ — наибольшее из чисел α_+, β_+ ; P_-, P_+ — некоторые постоянные (в случае совпадения соответствующих показателей эти постоянные надо заменить на линейные функции x).

Для доказательства леммы допустим, например, что $x \geq 0$, $\alpha_+ \neq \beta_+$; рассмотрение остальных случаев мы предоставим читателю. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \varphi(\xi) d\xi \right| &\leq \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^x + \int_x^{\infty} \right) |f(x-\xi)| |\varphi(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^0 M_+ e^{\alpha_+(x-\xi)} N_- e^{\beta_-\xi} d\xi + \int_0^x M_+ e^{\alpha_+(x-\xi)} N_+ e^{\beta_+\xi} d\xi + \\ &+ \int_x^{\infty} M_- e^{\alpha_-(x-\xi)} N_+ e^{\beta_+\xi} d\xi = \frac{M_+ N_-}{\beta_- - \alpha_+} e^{\alpha_+ x} + \\ &+ \frac{M_+ N_+}{\beta_+ - \alpha_+} (e^{\beta_+ x} - e^{\alpha_+ x}) + \frac{M_- N_+}{\alpha_- - \beta_+} e^{\beta_+ x}, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Допустим теперь, что в уравнении (34) функции $f(x)$, $r(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют оценкам вида (39) с показателями соответственно $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$ и $\gamma_{\pm}$, причем

$$\beta_+ < \beta_-, \quad \alpha_+ < \beta_-, \quad \gamma_+ < \beta_-, \quad \beta_+ < \alpha_-, \quad \beta_+ < \gamma_-. \quad (40)$$

Представив $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$, $u(x) = u_+(x) + u_-(x)$ (п. III.3.2), получим из (34)

$$\begin{aligned} u_+(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} r(x-\xi) u_+(\xi) d\xi - f_+(x) = \\ = -u_-(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} r(x-\xi) u_-(\xi) d\xi + f_-(x). \quad (41) \end{aligned}$$

Обозначим общее значение левой и правой частей через $\varphi(x)$. Применяя при $x < 0$ доказанную лемму к левой части (41), а при $x > 0$ — к правой, получаем, что $\varphi(x)$ удовлетворяет оценке (39) с показателями $\beta_{\pm}$, а потому в силу п. III.3.2 функция $\hat{\varphi}(k)$, как и $\hat{r}(k)$; аналитична в полосе

$$-\beta_- < \operatorname{Im} k < -\beta_+; \quad (42)$$

обе эти функции стремятся в этой полосе к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Переходя в равенстве (41) к фурье-образам, получаем

$$\hat{u}_+(k) - 2\pi\lambda\hat{r}(k)\hat{u}_+(k) - \hat{f}_+(k) = -\hat{u}_-(k) + 2\pi\lambda\hat{r}(k)\hat{u}_-(k) + \hat{f}_-(k) = \hat{\varphi}(k),$$

откуда

$$\hat{u}_+(k) = \frac{\hat{f}_+(k) + \hat{\varphi}(k)}{1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)}, \quad \hat{u}_-(k) = \frac{\hat{f}_-(k) - \hat{\varphi}(k)}{1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)}.$$

Пользуясь формулой обращения (III.3.10), получим

$$\begin{aligned}
 u(x) = & \int_{-\infty+is_+}^{\infty+is_+} \frac{\hat{f}_+(k) + \hat{\varphi}(k)}{1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)} e^{ikx} dk + \\
 & + \int_{-\infty+is_-}^{\infty+is_-} \frac{\hat{f}_-(k) - i\hat{\varphi}(k)}{1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)} e^{ikx} dk, \quad (43)
 \end{aligned}$$

где $s_+ < -\gamma_+$, $s_- > -\gamma_-$; при этом в силу произвольного выбора s_+ и s_- можно считать, что на контурах интегрирования нет нулей функции $1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)$ (этого произвола не было, пока мы считали k вещественным).

Если в (43) считать Дополнительно, что $s_+ < -\alpha_+$, $-\beta_- < s_+ < -\beta_+$, аналогично для s_- (здесь используются условия (40)), то каждый из интегралов в (43) можно разбить на два. Объединив интегралы с $\hat{\varphi}(k)$, к ним можно применить теорему Коши о вычетах, что в силу произвольности $\hat{\varphi}(k)$ даст

$$\begin{aligned}
 u(x) = & \int_{-\infty+is_+}^{\infty+is_+} \frac{\hat{f}_+(k)}{1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)} e^{ikx} dk + \\
 & + \int_{-\infty+is_-}^{\infty+is_-} \frac{\hat{f}_-(k)}{1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)} e^{ikx} dk + \sum_j A_j e^{ik_j x}, \quad (44)
 \end{aligned}$$

где A_j — произвольные постоянные, а сумма распространена на все нули функции $1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)$ (при выбранном λ), попавшие в полосу (42). В случае m -кратного нуля k_j вычисление вычета по формуле (II.3.6) показывает, что к последней сумме в (44) надо добавить члены с $x e^{ik_j x}, \dots, x^{m-1} e^{ik_j x}$ (почему?). Это находится в полном соответствии с первым абзацем пети́та (где $a = ik$), так как последняя сумма в (44) представляет собой решение уравнения (34) при $f(x) \equiv 0$. Эту сумму можно трактовать как собственную функцию уравнения (34); тогда получится, что характеристические значения λ уже не будут дискретными, как в фредгольмовом случае, а будут заполнять область — образ полосы (42) при отображении $\lambda = (2\pi\lambda\hat{r}(k))^{-1}$ (почему?).

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\xi|} u(\xi) d\xi + f(x). \quad (45)$$

Здесь $\beta_+ = -1$, $\beta_- = 1$; значит, в силу (40), неоднородный член $f(x)$ и соответственно решение $u(x)$ могут при $x \rightarrow \pm\infty$ экспоненциально расти по модулю, однако не быстрее $e^{c|x|}$, где $c < 1$, т. е. $\alpha_+ = 1$, $\alpha_- = -1$. Так как

$$\begin{aligned}
 \hat{r}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-|x|} dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-ikx+x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ikx-x} dx = \frac{1}{\pi(1+k^2)} \quad (|\operatorname{Im} k| < 1)
 \end{aligned}$$

(проверьте!), то прообразом функции

$$\frac{1}{1 - 2\pi\lambda\widehat{r}(k)} = 1 + \frac{2\lambda}{k^2 + 1 - 2\lambda}$$

для первого интеграла (44) служит

$$2\pi\delta(x) + \int_{-\infty + is_+}^{\infty + is_+} \frac{2\lambda}{k^2 + 1 - 2\lambda} e^{ikx} dk. \quad (46)$$

Подынтегральная функция имеет полюсы в точках $k_{1,2} = \pm i\sqrt{1 - 2\lambda}$. Пусть λ (вообще говоря, комплексное) таково, что $|\operatorname{Im} k_{1,2}| < 1$, причем $k_{1,2} \neq 0$; рассмотрение остальных случаев мы предоставим читателю. При $x > 0$ контур интегрирования в (46) можно замкнуть сверху большой полуокружностью, и тогда в силу выбора $s_+ < -\alpha_+$ оба полюса попадут внутрь замкнутого контура. По теореме Коши о вычетах мы получаем, что интеграл в (46) равен

$$2\pi i \left(\frac{2\lambda}{2k_1} e^{ik_1 x} + \frac{2\lambda}{2k_2} e^{ik_2 x} \right) = -4\pi\lambda \frac{\operatorname{sh} \sqrt{1 - 2\lambda} x}{\sqrt{1 - 2\lambda}}.$$

Аналогично при $x < 0$, замыкая контур интегрирования в (46) большой полуокружностью снизу, получаем, что интеграл равен нулю.

Первый интеграл в (44), как прообраз произведения, получается с помощью свертывания прообразов сомножителей, т. е. равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_+(x - \xi) 2\pi\delta(\xi) d\xi - \int_0^{\infty} f_+(x - \xi) 4\pi\lambda \frac{\operatorname{sh} \sqrt{1 - 2\lambda} \xi}{\sqrt{1 - 2\lambda}} d\xi \right] = \\ = f_+(x) - \frac{2\lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda}} \int_0^x f_+(x - \xi) \operatorname{sh} (\sqrt{1 - 2\lambda} \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Аналогичное вычисление второго интеграла в (44) дает тот же результат, но с f_- вместо f_+ (проверьте!). Поэтому из (44) получаем решение уравнения (45) при указанных условиях на λ :

$$\begin{aligned} u(x) = f(x) - \frac{2\lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda}} \int_0^x \operatorname{sh} [\sqrt{1 - 2\lambda} (x - \xi)] f(\xi) d\xi + \\ + A_1 e^{-\sqrt{1 - 2\lambda} x} + A_2 e^{-\sqrt{1 - 2\lambda} x}, \end{aligned}$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные.

Отметим, что уравнение (45) можно свести к дифференциальному: для этого надо его переписать в виде

$$u(x) = \lambda e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{\xi} u(\xi) d\xi + \lambda e^x \int_x^{\infty} e^{-\xi} u(\xi) d\xi + f(x),$$

обозначить эти интегралы через $v(x)$ и $w(x)$, продифференцировать их и т. д. (Прodelайте это до конца, а также подумайте, почему при $|\operatorname{Im} k_{1,2}| > 1$ в решение интегрального уравнения не войдут произвольные постоянные, тогда как в решение дифференциального уравнения войдут.)

Иногда для решения уравнения (34) применяют не преобразование Фурье (35), а *двустороннее преобразование Лапласа*

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

(ср. (III.1.1)). Это в принципе то же самое, так как

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} F(ik), \text{ т. е. } \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} F(p) \text{ где } p = ik.$$

Некоторые уравнения приводятся к виду (34) с помощью соответственно выбранной подстановки. Например, уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^{\infty} r\left(\frac{x}{\xi}\right) u(\xi) \frac{d\xi}{\xi} + f(x) \quad (0 < x < \infty), \quad (47)$$

приводится к виду (34) с помощью подстановки

$$x = e^{x_1}, \quad \xi = e^{\xi_1}, \quad u(e^{x_1}) = u_1(x_1), \quad r(e^{x_1}) = r_1(x_1), \quad f(e^{x_1}) = f_1(x_1)$$

(проверьте!). Так как это та самая подстановка, которая переводит преобразование Меллина (п. III.3.3) в преобразование Фурье, то к уравнению (47) можно непосредственно применить преобразование Меллина, которое переведет его в уравнение вида (28). Мы не будем здесь этим заниматься.

Чтобы решить уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} r(x + \xi) u(\xi) d\xi + f(x), \quad (48)$$

заменяем ξ на $-\xi$ и введем обозначения $u(-x) = v(x)$, $r(-x) = \rho(x)$. Тогда из (48) мы получим систему уравнений (проверьте!)

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} r(x - \xi) v(\xi) d\xi + f(x), \\ v(x) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x - \xi) u(\xi) d\xi + f(-x) \end{aligned} \right\}$$

вида (34). К этой системе можно применить преобразование Фурье как для абсолютно интегрируемых, так и для растущих функций, что мы предоставляем сделать читателю.

8. Уравнение Фредгольма с разностным ядром на полуоси.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^{\infty} r(x - \xi) u(\xi) d\xi \quad (0 \leq x < \infty), \quad (49)$$

Оказывается, что для его решения можно также применить преобразование Фурье, однако привлекая некоторые новые соображения, именно так называемый *метод Винера-Хопфа*.

Заметим прежде всего, что хотя функция $r(x)$ должна быть задана на всей оси x , но решение $u(x)$ по смыслу задачи ищется лишь при $x \geq 0$. Однако если, найдя это решение, положить $u(x)$ при $x < 0$ равным правой части (49), то мы получим функцию, удовлетворяющую уравнению (49) на всей оси x ; так мы и будем впредь считать. Применяя обозначения п. 7, можем написать

$$u_+(x) + u_-(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} r(x - \xi) u_+(\xi) d\xi \quad (-\infty < x < \infty). \quad (50)$$

Будем, как в п. 7, считать, что функция $r(x)$ удовлетворяет оценке вида (39) с показателями $\beta_{\pm}$, причем $\beta_+ < \beta_-$, а решение $u(x)$ — оценке $|u(x)| \leq A e^{\gamma_+ x}$ ($0 \leq x < \infty$), причем $\beta_+ < \gamma_+ < \beta_-$. Тогда в силу леммы п. 7 будет $|u(x)| \leq B e^{\beta_- x}$ ($-\infty < x \leq 0$). Переходя в уравнении к фурье-образам, получим

$$\hat{u}_+(k) + \hat{u}_-(k) = 2\pi\lambda\hat{r}(k)\hat{u}_+(k), \quad \text{т. е.} \quad (1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k))\hat{u}_+(k) = -\hat{u}_-(k). \quad (51)$$

Области гарантированной аналитичности участвующих здесь функций показаны на рис. 116. При этом каждая из функций $\hat{u}_+(k)$, $\hat{u}_-(k)$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ в своей области аналитичности (почему?).

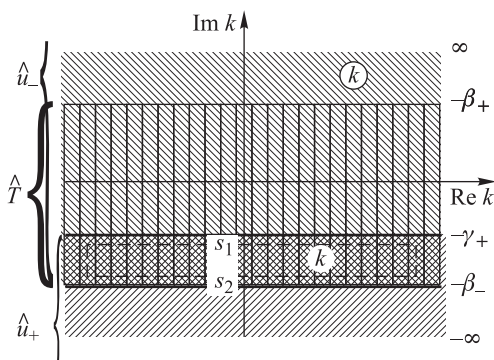


Рис. 116

Основная идея метода Винера-Хопфа состоит в *факторизации*, т. е. в разложении на множители с заранее предписанными свойствами коэффициента в уравнении (51). Если такая факторизация окажется осуществимой, то из

этого одного уравнения будет возможно найти две неизвестные функции $\hat{u}_+$ и $\hat{u}_-$. Именно, допустим, что возможно представить

$$1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k) = \frac{\varphi_1(k)}{\varphi_2(k)} \quad (-\beta_- < \operatorname{Im} k < -\gamma_+),$$

где функция $\varphi_1(k)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} k < -\gamma_+$, а $\varphi_2(k)$ — в полуплоскости $\operatorname{Im} k > -\beta_-$, причем обе эти функции имеют на бесконечности порядок роста не выше k^m ($m = l, 2, 3, \dots$). Переписав уравнение (51) в виде

$$\varphi_1(k)\hat{u}_+(k) = -\varphi_2(k)\hat{u}_-(k), \quad (52)$$

мы получаем, что обе части этого равенства служат аналитическими продолжениями одна другой (п. II.3.7) и потому образуют на всей плоскости k единую аналитическую функцию $P(k)$. Эта функция имеет на бесконечности порядок ниже k^m , т. е. представляет собой многочлен степени $< m$ (п. II.4.6). Из (52), пользуясь формулой обращения, получаем решение уравнения (49)

$$u(x) == \lambda \int_{-\infty + is}^{\infty + is} \frac{P(k)}{\varphi_1(k)} e^{ikx} dk \quad (0 < x < \infty; s < -\gamma_+).$$

Факторизация наиболее проста, если функция $1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)$ рациональна. Тогда можно, разложив ее числитель и знаменатель на множители вида $k - a$, отнести к φ_1 все скобки числителя с $\operatorname{Im} a > -\beta_-$ и все скобки знаменателя с $\operatorname{Im} a \geq -\gamma_+$; это нужно, чтобы по возможности уменьшить m и тем самым количество неопределенных параметров в ответе. Впрочем, в этом случае уравнение (49) можно, подобно п. 7, привести к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

В общем случае факторизацию можно осуществить следующим образом. Прежде всего, если функция $1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)$ не имеет при

$$-\beta_- < \operatorname{Im} k < -\gamma_+ \quad (53)$$

нулей, то ее надо записать в виде $v(k) = e^{w(k)}$ ($w(k) = \ln(1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k))$), после чего нужно представить $w(k)$ в виде разности функций, аналитических в соответствующих полуплоскостях. Для этого можно воспользоваться интегральной формулой Коши (II.4.12), взяв контур интегрирования, изображенный на рис. 116 пунктиром. Если увести боковые стороны на бесконечность (проверьте, что интеграл по ним стремится к нулю!), то в пределе мы получим

$$w(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + is_1}^{\infty + is_1} \frac{w(\varkappa)}{k - \varkappa} d\varkappa - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + is_2}^{\infty + is_2} \frac{w(\varkappa)}{k - \varkappa} d\varkappa. \quad (54)$$

Это и есть требуемое разложение. Если же функция $1 - 2\pi\lambda\hat{r}(k)$ имеет в полосе (53) нули a_j кратности n_j , то эту функцию нужно представить в виде $\frac{Q(k)}{R(k)} v(k)$, где $Q(k) = \prod_j (k - a_j)^{n_j}$, а $R(k)$ — любой многочлен, эквивалентный $Q(k)$ при $k \rightarrow \infty$ и не имеющий нулей в полосе (53). Затем нужно записать $v(k) = e^{w(k)}$ и т. д., а с отношением $Q(k)/R(k)$ поступить, как в предыдущем абзаце.

При рассмотрении неоднородного уравнения (49) после произвольного продолжения функции $f(x)$ на полуось $-\infty < x < 0$ мы приходим аналогичным образом взамен (52) к уравнению

$$\varphi_1(k)\hat{u}_+(k) - \varphi_2(k)\hat{f}_+(k) = [-\hat{u}_-(k) + \hat{f}_-(k)]\varphi_2(k). \quad (55)$$

Теперь нужно с помощью процедуры, описанной в предыдущем абзаце, представить вычитаемое в виде разности

$$\varphi_2(k)\hat{f}_+(k) = \psi_1(k) - \psi_2(k), \quad (56)$$

где функция $\psi_1(k)$ аналитична при $\text{Im } k < -\gamma_+$, а $\psi_2(k)$ — при $\text{Im } k > -\beta_-$, причем обе эти функции имеют на бесконечности порядок роста не выше степенного. Тогда из (55) получаем

$$\varphi_1(k)\hat{u}_+(k) - \psi_1(k) = [-\hat{u}_-(k) + \hat{f}_-(k)]\varphi_2(k) - \psi_2(k)$$

и дальше рассуждаем, как для уравнения (52).

Метод Винера–Хопфа можно применить также для решения интегральных уравнений 1-го рода аналогичной структуры.

Рассмотрим в качестве примера *уравнение Милна* (Э. Милн (1896–1950) — английский астрофизик)

$$\rho(x) = \int_0^\infty r(x-\xi)\rho(\xi) d\xi, \quad \text{где} \quad r(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-|x|/s} \frac{ds}{s}.$$

В курсах физики доказывается, что этому уравнению удовлетворяет интенсивность излучения, проходящего через полупространство $0 \leq x < \infty$, $-\infty < y, z < \infty$, заполненное однородной средой, не поглощающей, но изотропно рассеивающей это излучение; при этом x — безразмерная длина, взятая в расчете на так называемую среднюю длину свободного пробега.

Вычисление дает (проверьте!)

$$\begin{aligned} \hat{r}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-|x|/s} \frac{ds}{s} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{ds}{s} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{1-iks} + \frac{1}{1+iks} \right) ds = \frac{1}{4i\pi k} \ln \frac{1+ik}{1-ik}. \end{aligned}$$

Поэтому требуется профакторизовать функцию

$$1 - 2\pi\hat{r}(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \quad (57)$$

в полосе

$$-1 < \text{Im } k < 1. \quad (58)$$

Переходя в (57) к разности логарифмов и пользуясь рядом Тейлора, проверяем, что при $k = 0$ получается нуль второго порядка; можно доказать также, что

других нулей функция (57) в полосе (68) не имеет. Поэтому из (57) выделим множитель $\frac{k^2}{k^2+1}$, откуда получаем

$$w(k) = \ln \left[\frac{k^2+1}{k^2} \left(1 - \frac{1}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right) \right].$$

В формуле (54) можно положить $s_1 = 0$, что даст

$$\varphi_1(k) = \frac{k^2}{k-i} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k-\varkappa} \ln \left[\frac{\varkappa^2+1}{\varkappa^2} \left(1 - \frac{\operatorname{arctg} \varkappa}{\varkappa} \right) \right] d\varkappa \quad (\operatorname{Im} k < 0).$$

Так как при $k \rightarrow -i\infty$ эта функция эквивалентна k , а $u_+(k) \rightarrow 0$, то в этом процессе будет $P(k) = o(k)$, а потому многочлен $P(k)$ равен постоянной. Отсюда

$$\hat{u}_+(k) = C \frac{k-i}{k^2} \exp \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k-\varkappa} \ln \left[\frac{\varkappa^2+1}{\varkappa^2} \left(1 - \frac{\operatorname{arctg} \varkappa}{\varkappa} \right) \right] d\varkappa \quad (\operatorname{Im} k < 0).$$

Метод Винера–Хопфа можно применить и к некоторым другим уравнениям, родственными (49). Рассмотрим, например, *парные уравнения*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} r_1(x-\xi)u(\xi) d\xi + f(x) & (-\infty < x < 0), \\ \int_{-\infty}^{\infty} r_2(x-\xi)u(\xi) d\xi + f(x) & (0 < x < \infty), \end{cases}$$

Обозначив

$$v(x) = \begin{cases} u(x) - \int_{-\infty}^{\infty} r_2(x-\xi)u(\xi) d\xi & (-\infty < x < 0), \\ u(x) - \int_{-\infty}^{\infty} r_1(x-\xi)u(\xi) d\xi & (0 < x < \infty), \end{cases}$$

мы можем их переписать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_1(x-\xi)u(\xi) d\xi + v_+(x) + f_-(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} r_2(x-\xi)u(\xi) d\xi + v_-(x) + f_+(x) \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned}$$

(проверьте!). При соответствующих оценках порядков роста участвующих функций — указать эти оценки мы предлагаем желающим — можно перейти к фурье-образам, что даст

$$\hat{u}(k) = 2\pi \hat{r}_1(k) \hat{u}(k) + \hat{v}_+(k) + \hat{f}_-(k) = 2\pi \hat{r}_2(k) \hat{u}(k) + \hat{v}_-(k) + \hat{f}_+(k). \quad (59)$$

Исключая отсюда $\hat{u}(k)$, получим в некоторой полосе

$$\frac{1 - 2\pi\hat{r}_2(k)}{1 - 2\pi\hat{r}_1(k)} [\hat{v}_+(k) + \hat{f}_-(k)] = \hat{v}_-(k) + \hat{f}_+(k).$$

Теперь надо профакторизовать коэффициент (частное), а для неоднородной системы — еще написать представления типа (56); после этого рассуждения, аналогичные проведенным для уравнения (52), дают возможность найти $\hat{v}_+(k)$, в силу (59) — и $\hat{u}(k)$.

§5. Сингулярные интегральные уравнения

Теория сингулярных интегральных уравнений, в которых искомая функция входит под знак сингулярного интеграла, существенно сложнее теории фредгольмовых уравнений, однако и она имеет ряд важных приложений. Мы приведем лишь краткие сведения о сингулярных уравнениях, ограничиваясь скалярным одномерным случаем. Дальнейшие сведения о таких уравнениях можно найти в книгах [40, 87, 105, 114]. Специально теории сингулярных интегральных уравнений посвящены книги [21, 89, 93].

1. Сингулярные интегралы. Мы будем здесь рассматривать интегралы вида

$$\int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad (1)$$

а также сходных видов. Будем считать сначала a и b конечными. Интеграл (1) при $\xi = x$, вообще говоря, расходится. Его главное значение, если $a < x < b$, определяется формулой

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi. \quad (2)$$

Исходя из формулы

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{1}{\xi - x} d\xi = \ln \left| \frac{b - x}{a - x} \right|$$

(докажите ее!) и преобразуя интеграл (1):

$$\int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = \int_a^b \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x)}{\xi - x} d\xi + \int_a^b \frac{\varphi(x)}{\xi - x} d\xi,$$

получаем, что

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = \varphi(x) \ln \frac{b-x}{x-a} + \int_a^b \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x)}{\xi - x} d\xi. \quad (3)$$

Последний интеграл для непрерывной, дифференцируемой при $\xi = x$ функции $\varphi(\xi)$ является собственным (почему?), а значит, принимает определенное конечное значение. Впрочем, можно проверить, что и для непрерывных недифференцируемых функций этот интеграл является если и несобственным, то сходящимся (за исключением искусственных примеров, не имеющих практического значения), и непрерывно зависит от x . Если же функция $\varphi(\xi)$ разрывна при $\xi = x$, то на простых примерах легко убедиться в том, что интеграл (3) при $\xi = x$ может обратиться в бесконечность, даже если функция $\varphi(\xi)$ конечна. Аналогично первый член в правой части (3) показывает, что левая часть обращается в бесконечность с логарифмической скоростью при $x = a + 0$, если $\varphi(a) \neq 0, \pm\infty$; аналогично при $x = b - 0$.

Проследите эти свойства на примере

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq \xi < 0), \\ 1 & (0 < \xi \leq 1); \end{cases}$$

тогда

$$\text{v. p.} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = \ln \frac{1-x}{|x|} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Полезно обратить внимание также на формулу

$$\text{v. p.} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^\alpha \frac{d\xi}{\xi - x} = \pi \operatorname{ctg} \alpha \pi \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha - \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \quad (-1 < \alpha < 1, \alpha \neq 0). \quad (4)$$

(Выведите ее из формулы (II.4.28) с учетом сделанного в п. II.4.4 замечания о том, что для особых точек, лежащих на контуре интегрирования, а их здесь будет две из-за возможности подхода к точке $z = x$ сверху или снизу, вычеты берутся с коэффициентом $1/2$.) Из формулы (4) легко выводится, что если функция $\varphi(\xi)$ при подходе $\xi = a$ (аналогично к $\xi = b$) имеет порядок $(\xi - a)^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), то и интеграл (1) как функция x имеет тот же порядок.

Аналогичными свойствами обладает часто применяемый интеграл

$$\int \varphi(\xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} d\xi, \quad (5)$$

где $\varphi(\xi)$ — это 2π -периодическая функция, а интеграл взят по какому-либо, отрезку длины 2π ; в самом деле, разность $\operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} - \frac{2}{\xi - x}$ остается при $\xi = x$ конечной.

Если $a = -\infty$ или $b = \infty$, причем интеграл (1) на бесконечном конце абсолютно сходится, то, выделив из интервала интегрирования конечную часть, содержащую x , получаем, что оставшаяся регулярная часть не может изменить указанных свойств сингулярной части.

Мы будем применять также комплексные интегралы, аналогичные (1),

$$\frac{1}{\pi i} \int_{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (6)$$

где (L) — конечный ориентированный замкнутый или разомкнутый контур в комплексной плоскости, а $\varphi(\zeta)$ — функция, заданная вдоль этого контура. Если $z \in (L)$, то интеграл (6) имеет те же свойства, что

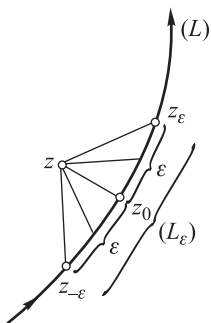


Рис. 117

(1), правда, может дополнительно обращаться в бесконечность в точках излома контура, если такие имеются (разберите это на простейших примерах!). Если же $z \notin (L)$, а функция φ непрерывна или хотя бы абсолютно интегрируема, то интеграл (6) становится регулярным. Так как возможно произвести дифференцирование интеграла (6) по параметру z , то мы видим, что его значение $\Phi(z)$ представляет собой (однозначную) аналитическую функцию z всюду, кроме линии (L) , которая служит, как мы сейчас покажем, линией разрыва для этой функции.

В самом деле, пусть точка $z \notin (L)$ находится вблизи точки $z_0 \in (L)$. Выберем некоторое $\varepsilon > 0$ и обозначим через (L_ε) дугу, показанную на рис. 117, а через (L'_ε) — остальную часть линии (L) . Тогда

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{(L'_\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi i} \int_{(L_\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Первое слагаемое для всех z , достаточно близких к z_0 , можно считать приближенно равным $\frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$. Во втором слагаемом

положим приближенно $\varphi(\zeta) = \varphi(z_0)$; тогда это значение вынесется, и оставшийся интеграл будет равен приращению величины $\ln(\zeta - z)$, когда ζ проходит (L_ε) от $z_{-\varepsilon}$ до $z_{+\varepsilon}$. Но это приращение приближенно равно πi , если z находится, как на рис. 117, слева от z_0 (если смотреть вдоль (L) в соответствии с ориентацией), и $-\pi i$, если z находится справа от z_0 . Обозначая через $\Phi^+(z_0)$ и $\Phi^-(z_0)$ предельные значения $\Phi(z)$, когда $z \in (L)$ приближается к $z_0 \in (L)$ соответственно слева или

справа, и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned}\Phi^{\text{л}}(z_0) &= \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \varphi(z_0), \\ \Phi^{\text{п}}(z_0) &= \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \varphi(z_0).\end{aligned}\quad (7)$$

Это и означает, что (L) служит для $\Phi(z)$ линией разрыва.

При манипуляциях с сингулярными интегралами приходится соблюдать некоторую осторожность. Например, если требуется продифференцировать интеграл (1) по x , то это нельзя сделать по обычному правилу Лейбница, так как тогда получится интеграл, у которого главное значение отсутствует. Поэтому сначала, пользуясь переходом (2), производят интегрирование по частям, а затем уже производят дифференцирование и получают ответ

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{\varphi'(\xi) d\xi}{\xi - x} + \frac{\varphi(b)}{x - b} - \frac{\varphi(a)}{x - a}.$$

Другой пример: можно проверить, что допустима перестановка порядка интегрирования сингулярного интеграла с обычным; однако формула для перестановки двух сингулярных интегрирований (которой мы, впрочем, не будем пользоваться) имеет вид

$$\begin{aligned}\text{v. p.} \int_{(L)} dz \left(\text{v. p.} \int_{(L)} \frac{F(z, \zeta)}{(z - c)(\zeta - z)} d\zeta \right) = \\ = \text{v. p.} \int_{(L)} d\zeta \left(\text{v. p.} \int_{(L)} \frac{F(z, \zeta)}{(z - c)(\zeta - z)} dz \right) - \pi^2 F(c, c) \quad (c \in (L)).\end{aligned}$$

2. Формулы обращения. Один из основных методов изучения сингулярных интегральных уравнений опирается на применение формул обращения сингулярных интегральных преобразований. Напоминаем формулы, которые были выведены в пп. II.4.5 и III.3.3.

Преобразование с ядром Коши $(\xi - x)^{-1}$: если

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi,$$

то

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi,$$

Преобразование с ядром Гильберта: если

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int f(\xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} d\xi, \quad (8)$$

то

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int F(\xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int f(\xi) d\xi$$

(при выводе последней формулы надо, кроме (II.4.38), принять во внимание (II.4.37)). В этих преобразованиях функции f и F 2π -периодические, а интеграл взят по периоду. Впрочем, можно преобразование выполнять и на каком-либо фиксированном отрезке длины 2π .

Выведем еще формулы обращения для интеграла (6) в случае замкнутого контура (L) , когда

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in (L)). \quad (9)$$

Для этого обозначим

$$\varphi(z_1) = \frac{1}{\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta, \quad \Phi(z_1) = \frac{1}{\pi i} \oint_{(L)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta \quad (z_1 \notin (L)). \quad (10)$$

Будем считать (L) ориентированным против часовой стрелки (для окончательного вывода это несущественно), а z_1 произвольно меняющимся внутри (L) . Мы видели, что φ и Φ — аналитические функции, принимающие при $z \in (L)$ предельные значения

$$\varphi^n(z) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(z) = F(z) + f(z), \quad (11)$$

$$\Phi^n(z) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + F(z). \quad (12)$$

Выражая из (11) $F(z)$ и подставляя в (10), получаем

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{\pi i} \oint_{(L)} \frac{\varphi^n(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \frac{1}{\pi i} \oint_{(L)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta = \frac{1}{\pi i} \oint_{(L)} \frac{\varphi^n(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \varphi(z_1).$$

Однако в силу интегральной формулы Коши (II.4.12) интеграл в правой части равен $2\varphi(z_1)$. Значит, $\Phi(z_1) \equiv \varphi(z_1)$, $\Phi^n(z) = \varphi^n(z)$, и из (11) и (12) мы получаем

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (13)$$

Это и есть формула обращения преобразования (9). Значит, это преобразование само себе обратное (*теорема Пуанкаре–Бертрана*; Ж. Бертра́н (1822–1900) — французский математик).

Более точный анализ показывает, что если преобразуемая функция квадратично суммируема, т. е. из L_2 , то и преобразованная также из L_2 .

Приведем без доказательства еще одну формулу обращения: если

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (-1 < x < 1), \quad (14)$$

то

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-x^2}} \frac{F(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (15)$$

где C — постоянная (см. п. 6). Проверим только, что последний член при любом значении C обращает правую часть (14) в нуль:

$$\text{v. p.} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{(\xi - x)\sqrt{1-\xi^2}} = 0 \quad (-1 < x < 1).$$

Это можно сделать с помощью формулы (2), так как неопределенный интеграл легко берется, однако проще сделать подстановку $\xi = \cos \varphi$, $x = \cos \vartheta$, после чего воспользоваться формулами, выведенными в конце п. II.4.5. (Отметим, что в интегралах вида (1) замена переменных осуществляется по обычным формулам.)

Если рассматривать формулу (9) как определение сингулярного интегрального оператора $\mathbf{F} = \mathbf{S}f$ в $L_2(\Gamma)$, то можно доказать его ограниченность. В то же время из формулы обращения $\mathbf{S}^2 = \mathbf{I}$ вытекает, что этот оператор уже не является вполне непрерывным (п. 2.11). В самом деле, произведение вполне непрерывных операторов всегда вполне непрерывно (почему?), а тождественный оператор в бесконечномерном пространстве не может быть вполне непрерывным. В этом и состоит глубокая причина отличия сингулярных операторов от фредгольмовых, которая приводит, как мы увидим в дальнейшем, к существенно новым моментам в формулировках теорем о разрешимости сингулярных интегральных уравнений.

3. Непосредственное применение формул обращения. Рассмотрим уравнение

$$\alpha u(z) = \frac{\beta}{\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(z), \quad (16)$$

где α, β — постоянные, причем $\alpha^2 \neq \beta^2$. Применение преобразования (9) к обеим частям дает, с учетом формулы обращения (13),

$$\frac{\alpha}{\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \beta u(z) + F(z). \quad (17)$$

Исключение из (16) и (17) интеграла дает решение

$$u(z) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha f(z) + \beta F(z)], \quad (18)$$

где $F(z)$ определено формулой (9). Как видим, здесь опасен вовсе не случай $\alpha = 0$ (уравнение 1-го рода), а случай $\alpha = \pm\beta$.

Проделаем то же преобразование над более общим уравнением

$$\alpha u(z) = \frac{\beta}{\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{(L)} K(z, \zeta) u(\zeta) d\zeta + f(z) \quad (19)$$

с фредгольмовым ядром K , мы получим формулу вида (18), в которой вместо f надо подставить сумму двух последних членов уравнения (19) и соответственно; изменить F . Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим в итоге соотношение

$$u(z) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\alpha f(z) + \beta F(z) + \oint_{(L)} K_1(z, \zeta) u(\zeta) d\zeta \right], \quad (20)$$

где

$$K_1(z, \zeta) = \alpha K(z, \zeta) + \frac{\beta}{\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{K(w, \zeta)}{(w - z)} dw \quad (21)$$

(проверьте, пользуясь возможностью перестановки сингулярного и простого интегралов, см. п. 1). Можно доказать, что ядро (21) фредгольмово; тем самым мы свели исходное сингулярное уравнение (19) к фредгольмову уравнению (20), как говорят, произвели *регуляризацию* уравнения (19). Так как к уравнению (20) применимы все результаты § 2, то мы получаем, в частности, что для решений уравнения (19) справедливы три теоремы Фредгольма.

В связи с этими теоремами обращаем внимание, что сопряженным к ядру $K(z, \zeta)$ будет $[K(\zeta, z)]^* \frac{dz^*}{|dz|} \frac{|d\zeta|}{d\zeta}$. Докажите это, исходя из определения (2.66) сопряженной оператора и определения скалярного произведения в $L_2(L)$

$$(\mathbf{f}, \varphi)_{L_2(L)} = \int_{(L)} f(z) \varphi^*(z) |dz|.$$

Уравнение

$$\alpha u(x) = \frac{\beta}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x) \\ (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

рассматривается аналогично. При применении преобразования (15) к уравнению

$$\alpha u(x) = \frac{\beta}{2\pi} \text{v. p.} \int u(\xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} d\xi + \int K(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x) \\ (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

(все участвующие функции 2π -периодичны) из первого члена в правой части появится добавочное слагаемое $-\frac{\beta}{2\pi} \int u(\xi) d\xi$, которое надо отнести к преобразованному ядру K_1 .

Для решения уравнения

$$\alpha u(x) = \frac{\beta}{\pi} \text{v. p.} \int_{-1}^1 \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi + \int_{-1}^1 K(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x) \quad (22) \\ (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

надо изменить обозначения ξ на s , x на ξ , затем умножить обе части на $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{1 - x^2}} \frac{1}{\xi - x}$ и проинтегрировать от -1 до 1 . Тогда в силу формулы обращения (15) получаем

$$\frac{\alpha}{\pi} \text{v. p.} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{1 - x^2}} \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\beta u(x) + \frac{C}{\sqrt{1 - x^2}} + \text{и т. д.}$$

Затем представляем левую часть в виде суммы сингулярного и регулярного членов

$$\frac{\alpha}{\pi} \text{v. p.} \int_{-1}^1 \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{\frac{1 - \xi^2}{1 - x^2}} - 1 \right) \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

(проверьте, что второй интеграл регулярный!) и из полученного и исходного уравнений исключаем сингулярный интеграл. Таким образом, и для уравнения (22) возможна регуляризация,

4. Переход к краевой задаче, простой пример. Рассмотрим уравнение

$$\alpha(z)u(z) = \frac{\beta(z)}{\pi i} \text{v. p.} \int_{(L)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(z) \quad (23) \\ (z \in (L); \alpha^2(z) - \beta^2(z) \neq 0)$$

с непрерывными коэффициентами $\alpha(z)$ и $\beta(z)$, обобщающее (16), для замкнутого или разомкнутого конечного контура (L) . Один из основных методов его исследования, а во многих случаях и решения, состоит в переходе к равносильной краевой задаче теории аналитических функций; этот метод детально изучен в книге [27].

Пусть $u(z)$ ($z \in (L)$) — искомое решение. Введем функцию

$$U(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta \quad (z_1 \notin (L)).$$

В п. 1 мы показали, что это однозначная аналитическая функция на всей плоскости z_1 , кроме линии (L) ; ясно также, что $U(\infty) = 0$. В точках линии (L) удовлетворяются соотношения (см. (7))

$$\left. \begin{aligned} U^{\text{л}}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{(L)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{u(z)}{2}, \\ U^{\text{п}}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{(L)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{u(z)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Исключая из этих двух равенств и из уравнения (23) $u(z)$ и интеграл, приходим к равенству (проверьте!)

$$U^{\text{л}}(z) = \frac{\alpha(z) + \beta(z)}{\alpha(z) - \beta(z)} U^{\text{п}}(z) + \frac{f(z)}{\alpha(z) - \beta(z)} \quad (z \in (L)). \quad (25)$$

Таким образом, мы пришли к следующей краевой задаче: найти функцию $U(z_1)$, однозначную и аналитическую на всей плоскости z_1 за исключением линии разрыва (L) , равную нулю при $z_1 = \infty$ и удовлетворяющую на (L) краевому условию (25). Это *задача Римана–Гильберта*. Можно доказать, что и, наоборот, имея ее решение $U(z_1)$, мы получим по формуле $U(z) = U^{\text{л}}(z) - U^{\text{п}}(z)$ (см. (24)) решение уравнения (23); таким образом, это уравнение полностью равносильно краевой задаче Римана–Гильберта.

Допустим сначала, что (L) — замкнутый, ориентированный в положительном направлении контур. Тогда функцию $U(z_1)$ более естественно рассматривать как две: одну $U^{\text{л}}(z_1)$, определенную внутри (L) , и другую $U^{\text{п}}(z_1)$, определенную вне (L) , а на (L) эти функции должны быть связаны соотношением (25). Специфику задачи Римана–Гильберта можно понять на простом примере, когда (L) представляет собой окружность $|z| = 1$, а условие (25) имеет вид

$$U^{\text{л}}(z) = z^m U^{\text{п}}(z) + f_1(z) \quad (|z| = 1; m - \text{целое}). \quad (26)$$

Функцию $U^{\text{л}}(z_1)$, аналитическую в круге $|z_1| < 1$, можно разложить в ряд Тейлора, а функцию $U^{\text{п}}(z_1)$, аналитическую при $|z_1| > 1$, разложить в ряд Лорана, где в силу условия $U^{\text{п}}(\infty) = 0$ будут только отрица-

тельные показатели. Кроме того, разложим $f_1(e^{i\varphi})$ в комплексный ряд Фурье. Мы получим

$$U^{\text{л}}(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k, \quad U^{\text{п}}(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z_1^{-k},$$

$$f_1(e^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\varphi},$$

где коэффициенты c_k заданные, а a_k и b_k — искомые. Условие (26) дает

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\varphi} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{i(m-k)\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\varphi}. \quad (27)$$

Отсюда получаем различные случаи в зависимости от значения m , которое называется *индексом* поставленной задачи:

Если $m = 0$, то задача имеет ровно одно решение:

$$a_0 = c_0, \quad a_k = c_k, \quad b_k = -c_{-k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Если $m > 0$, то задача имеет m -параметрическое семейство решений. В самом деле, из (27) получаем

$$a_k = c_k \quad (k = m, m+1, m+2, \dots), \quad b_k = -c_{m-k} \quad (k = m+1, m+2, \dots),$$

$$a_0 - b_m = c_0, \quad a_1 - b_{m-1} = c_1, \dots, \quad a_{m-1} - b_1 = c_{m-1}.$$

Из второй строки мы видим, что, например, $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ можно задавать произвольно, а тогда $b_1, b_2, \dots, b_m$ определяются. В частности, соответствующая однородная задача ($f_1(z) \equiv 0$) имеет m линейно независимых решений

$$U^{\text{л}}(z_1) = z_1^k, \quad U^{\text{п}}(z_1) = z_1^{k-m} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Если $m < 0$, то в левой части (27) будут отсутствовать члены $e^{-i\varphi}, \dots, e^{-im\varphi}$, а потому для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы $c_{-1} = c_{-2} = \dots = c_{-m} = 0$, т.е. чтобы функция $f_1(z)$ удовлетворяла $|m|$ соотношениям ортогональности

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{ik\varphi} d\varphi = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, |m|).$$

Если эти соотношения выполнены, то задача имеет ровно одно решение

$$a_0 = c_0, \quad a_k = c_k, \quad b_k = -c_{m-k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

5. Общий замкнутый контур. Вернемся к общей задаче (25) с произвольным замкнутым контуром (L) . Оказывается, что ее решение обладает теми же свойствами, которые были отмечены для задачи (26); при этом индекс m равен числу оборотов, которые совершает точка $\frac{\alpha(z) + \beta(z)}{\alpha(z) - \beta(z)}$ вокруг начала координат, когда z проходит контур (L) .

При построении решения будем для простоты считать, что точка $z = 0$ расположена внутри (L) (как этого добиться?). Положим

$$\mu(z) = \text{Ln} \frac{\alpha(z) + \beta(z)}{\alpha(z) - \beta(z)} - m \text{Ln} z \quad (z \in (L)), \quad (28)$$

где значения логарифмической функции, произвольно выбранные для некоторой точки $z \in (L)$, затем непрерывно продолжаются вдоль (L) .

При полном обходе (L) уменьшаемое и вычитаемое в (28) получают приращение $2\pi im$ (почему?), а значит, функция $\mu(z)$ вернется к своему исходному значению, т.е. будет на (L) непрерывной и однозначной. Введем затем однозначные аналитические на всей плоскости z_1 , за исключением линии (L) , функции

$$\psi(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta, \quad V(z_1) = U(z_1) e^{-\psi(z_1)} \quad (z_1 \notin (L)).$$

Тогда, исходя из равенств

$$\psi^{\text{л}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2} \mu(z),$$

$$\psi^{\text{п}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2} \mu(z),$$

$$V^{\text{л}}(z) = U^{\text{л}}(z) e^{-\psi^{\text{л}}(z)}, \quad V^{\text{п}}(z) = U^{\text{п}}(z) e^{-\psi^{\text{п}}(z)} \quad (z \in (L)),$$

можно преобразовать условие (25) к виду (проверьте!)

$$V^{\text{л}}(z) = z^m V^{\text{п}}(z) + f_1(z) \quad (z \in (L)), \quad (29)$$

где обозначено

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{\alpha(z) - \beta(z)} \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2} \mu(z) \right].$$

Таким образом, для функции V мы получили условие вида (26), хотя и на произвольном контуре. Естественно, что характер разрешимости задачи будет существенно зависеть от ее индекса m .

Пусть $m = 0$. Тогда задача (29) имеет решение

$$V(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta \quad (30)$$

(проверьте!). Это решение единственно: в самом деле, разность $W(z_1)$ двух таких решений должна на (L) удовлетворять условию $W^{\text{л}}(z_1) = W^{\text{п}}(z_1)$, а значит, эта функция будет аналитической во всей плоскости z_1 включая (L) (п. II.3.5); но, равная нулю при $z_1 = \infty$, она должна равняться нулю тождественно (почему?). Таким образом, в случае $m = 0$ и задача (25), а потому и уравнение (23), имеют единственное решение. Учитывая равенства

$$V^{\text{л}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f_1(z)}{2},$$

$$V^{\text{п}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{f_1(z)}{2},$$

можно получить выражение решения $u(z)$ непосредственно через функции α, β, f ; мы предоставим это читателю.

Пусть $m > 0$. Обозначим тогда

$$F(z_1) = \begin{cases} V(z_1) & (z_1 \text{ внутри } (L)), \\ z_1^m V(z_1) & (z_1 \text{ снаружи } (L)). \end{cases} \quad (31)$$

Эта функция, аналитическая всюду, кроме точек (L) , на (L) удовлетворяет условию

$$F^{\text{л}}(z) = F^{\text{п}}(z) + f_1(z) \quad (z \in (L)),$$

Значит, $F(z)$ можно найти по формуле (30). Но если к этому интегралу прибавить произвольный многочлен степени $\leq m - 1$, то функция $V(z_1)$, определяемая из равенств (31), все равно будет равна нулю на бесконечности (почему?). Таким образом,

$$V^{\text{л}}(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(L)} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta + C_0 + C_1 z_1 + \dots + C_{m-1} z_1^{m-1},$$

$$V^{\text{п}}(z_1) = \frac{1}{2\pi i z_1^m} \oint_{(L)} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta + \frac{C_0}{z_1^m} + \frac{C_1}{z_1^{m-1}} + \dots + \frac{C_{m-1}}{z_1},$$

где $C_1, C_1, \dots, C_{m-1}$ — произвольные постоянные. Аналогично предыдущему абзацу можно показать, что других решений нет. Значит, и исходное уравнение (23) имеет m -параметрическое семейство решений.

Пусть, наконец, $m < 0$. Введя опять обозначение (31), получим при больших $|z_1|$ разложение в ряд Лорана

$$\begin{aligned} V^n(z_1) &= z_1^{-m} F^n(z_1) = z_1^{|m|} \frac{-1}{2\pi i} \frac{1}{z_1} \oint_{(L)} \frac{f_1(\zeta)}{1 - \frac{\zeta}{z_1}} d\zeta = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} z^{|m|-1-k} \oint_{(L)} f_1(\zeta) \zeta^k d\zeta. \end{aligned}$$

Но так как должно быть $V^n(\infty) = 0$, то мы приходим к равенствам

$$\oint_{(L)} f_1(\zeta) \zeta^k d\zeta = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, |m| - 1), \quad (32)$$

необходимым и достаточным для разрешимости задачи. Если они выполнены, то уравнение (23) имеет ровно одно решение, если хоть одно из них нарушено, решение отсутствует.

Если ввести, как указано в п. 3, понятие сопряженного уравнения к (23), то легко проверить, что его индекс равен $-m$. Значит, при $m < 0$ однородное сопряженное уравнение имеет $|m|$ линейно независимых решений и оказывается, что условия (32) — это как раз условия ортогональности функции $f(z)$ этим решениям.

Для более общего уравнения

$$\begin{aligned} \alpha(z)u(z) &= \frac{\beta(z)}{\pi i} \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{(L)} K(z, \zeta) u(\zeta) d\zeta + \\ &+ f(z) \quad (z \in (L), \alpha^2(z) - \beta^2(z) \neq 0), \quad (33) \end{aligned}$$

где ядро K фредгольмово (или со слабой особенностью), можно интеграл с этим ядром объединить с f после чего применить полученные выше формулы. При этой, как и в переходе от (19) к (20), мы получим для $u(z)$ уравнение Фредгольма 2-го рода. Однако если уравнение (33) имеет индекс $m > 0$ (он вычисляется по тому же правилу, что и для уравнения (23)), то неоднородный член полученного фредгольмова уравнения будет содержать m произвольных постоянных. Если же $m < 0$, то на комбинацию $\oint K u d\zeta + f$ будет наложено $|m|$ условий ортогональности, которые в конечном счете, поскольку u линейно выражается через f , представляют собой условия ортогональности на f .

Если таким способом регуляризовать сопряженные уравнения (33), то можно проследить, что и полученные фредгольмовы уравнения получатся сопряженными, а потому в силу п. 2.2 соответствующие однородные фредгольмовы уравнения имеют одно и то же число, скажем, $k \geq 0$, линейно независимых решений (если $k = 0$ — только тривиальное решение). Подробный анализ, которого мы здесь не будем проводить, показывает, что тогда при $m \geq 0$ однородное уравнение (33) имеет $m + l$ линейно независимых решений, где $0 \leq l \leq k$ (типичный случай $l = 0$), а однородное, сопряженное к (33), имеет

l решений; если же $m < 0$, то числа решений соответственно равны l и $|m| + l$. Таким образом, во всех случаях разность между числом линейно независимых решений однородного уравнения (33) и соответствующим числом для сопряженного уравнения равна индексу уравнения (33), который не зависит от вполне непрерывного члена $\int K u d\zeta$ в уравнении. Кроме того, можно доказать, что для существования у неоднородного уравнения (33) по крайней мере одного решения необходимо и достаточно, как и для уравнений Фредгольма, чтобы неоднородный член $f(x)$ был ортогонален всем решениям однородного сопряженного уравнения. (Необходимость этого условия доказывается весьма легко по общей схеме: если $Au = f$, $A^*v = 0$, то $(f, v) = (Au, v) = (u, A^*v) = (u, 0) = 0$; серьезным является доказательство достаточности.)

Для разомкнутого контура, для систем сингулярных уравнений вида (33), для аналогичных уравнений с любым числом независимых переменных оказываются справедливыми оба последних утверждения, выделенных курсивом (теоремы Нётера). (Для системы вида (33), где α и β — квадратные матрицы, индекс равен деленному на 2π приращению аргумента величины $\det[\alpha(z) + \beta(z)]/\det[\alpha(z) - \beta(z)]$, когда z проходит (L) .) Таким образом, наличие индекса является характерным для невырожденных сингулярных интегральных уравнений: для уравнений Фредгольма он всегда равен нулю, а для сингулярных уравнений — не всегда. Если конечномерным аналогом уравнений Фредгольма служат системы линейных алгебраических уравнений, в которых число уравнений равно числу неизвестных, то аналогом сингулярных интегральных уравнений служат такие системы, в которых это равенство уже не требуется. При этом роль индекса для таких систем играет разность между числом неизвестных и числом уравнений в системе (продумайте это, исходя из п. IV.1.4 и ЛВМ, п. XI.5).

Невырожденность для уравнения (33) означает, что $\alpha^2(z) - \beta^2(z) \neq 0$. Если эта разность имеет нули, ситуация осложняется. Допустим, например, что $\alpha(z) + \beta(z) \equiv 0$, $\alpha(z) - \beta(z) \neq 0$. Но тогда из условия (25) легко вывести, что функция $f(z)$ должна удовлетворять бесконечному числу условий ортогональности (продумайте это для случая, когда (L) — окружность). Если же эти условия выполнены, то в силу произвольности U^n общее решение уравнения (23) будет содержать бесконечное число произвольных постоянных.

Если в правую часть (33) добавить сингулярный член более общего вида $\text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{R(z, \zeta)}{\zeta - z} u(\zeta) d\zeta$, где ядро $R(z, \zeta)$ непрерывно при $\zeta = z$, то это не будет существенным обобщением. В самом деле, если представить

$$\text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{R(z, \zeta)}{\zeta - z} u(\zeta) d\zeta = R(z, z) \text{v. p.} \oint_{(L)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{(L)} \frac{R(z, \zeta) - R(z, z)}{\zeta - z} u(\zeta) d\zeta$$

и объединить первый из полученных интегралов с первым членом в правой части (33), а второй — со вторым, то мы вновь приходим к уравнению вида (33).

Сингулярное уравнение с ядром Гильберта (п. 2)

$$\alpha(x)u(x) = \frac{\beta(x)}{2\pi} \int u(\xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} d\xi + \int K(x, \xi)u(\xi) d\xi + f(x)$$

приводится к уравнению (33) с помощью подстановки $z = e^{ix}$, $\zeta = e^{i\xi}$ причем контуром (L) будет служить окружность $|z| = 1$ (проверьте!).

6. Незамкнутый контур. Рассмотрим теперь уравнение (23) для незамкнутого контура (L) с началом a и концом b . Обозначим через $g(z)$ какое-либо определенное значение функции $\text{Ln} \frac{\alpha(z) + \beta(z)}{\alpha(z) - \beta(z)}$, непрерывно зависящее от $z \in (L)$, и после перехода к краевой задаче введем функцию

$$V(z_1) = u(z_1)(z_1 - a)^\mu(z_1 - b)^\nu \exp \left[\frac{-1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta \right], \quad (34)$$

где μ, ν — целые числа, которые будут подобраны позже. Это однозначная аналитическая функция на всей плоскости z_1 , за исключением линии (L) , где она удовлетворяет условию

$$V^{\text{II}}(z) = V^{\text{I}}(z) + f_1(z) \quad (z \in (L));$$

$$f_1(z) =$$

$$= \frac{f(z)}{\alpha(z) - \beta(z)} (z - a)^\mu (z - b)^\nu \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{(L)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2} g(z) \right] \quad (35)$$

(проверьте и сравните с (29)).

Теперь надо было бы пользоваться формулой

$$V(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta, \quad (36)$$

однако функция $f_1(z)$ может оказаться слишком быстро растущей при $z \rightarrow a$ и $z \rightarrow b$ и потому неинтегрируемой. Именно для этого в формулу (34) были введены степени. Так как квадратная скобка в (35) имеет при $z \rightarrow a$ порядок $\frac{1}{2\pi i} g(a) \ln(z - a)$, т. е. экспонента — порядок $|z - a|^{\text{Re}(\frac{1}{2\pi i} g(a))}$ (почему?), то в качестве μ надо взять целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\mu + \text{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} g(a) \right) > -1.$$

С другой стороны, из (34) и требования интегрируемости $U(z)$ вблизи $z = a$ легко вывести, что эта же сумма должна быть < 1 (а если мы

хотим, чтобы $U(z)$ оставалась конечной, то сумма должна быть меньше или равна нулю). Аналогично в качестве ν надо взять целое число, удовлетворяющее неравенству

$$-1 < \nu - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} g(b) \right) < 1.$$

Теперь применяем формулу (36). При этом, если $m = \mu + \nu > 0$, то к правой части можно прибавить еще произвольный многочлен степени $\leq m - 1$, так как из (34) видно, что $U(z_1)$ все равно останется решением поставленной краевой задачи. Таким образом, при $m > 0$ уравнение (23) имеет m -параметрическое семейство решений. При $m = 0$ решение ровно одно. Наконец, при $m < 0$ функция $V(z_1)$ должна при $z_1 \rightarrow \infty$ иметь порядок $o(z_1^m)$; как и в п. 5, выводим, что для этого функция $f(z)$ должна удовлетворять $|m|$ условиям ортогональности, получаемым из разложения интеграла (36) в ряд. Если эти условия выполнены, то решение ровно одно.

Аналогично результаты п. 5 распространяются и на уравнения вида (33) с незамкнутым контуром (L) , а также на случай, когда (L) состоит из нескольких незамкнутых дуг.

В качестве примера выведем формулу обращения (15). Для этого рассмотрим уравнение

$$0 = \frac{-i}{\pi i} \text{v. p.} \int_{(L)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + F(z) \quad ((L) : \operatorname{Im} z = 0, -1 \leq z \leq 1).$$

Таким образом, здесь

$$\alpha \equiv 0, \quad \beta \equiv -i, \quad g \equiv \pi i.$$

В качестве μ можно взять -1 (если мы хотим, чтобы решение оставалось конечным при $z = -1$) или 0 (если этого не требовать, но стремиться к повышению индекса); аналогично, за ν можно взять 0 или 1 . Примем $\mu = 0, \nu = 1$; тогда (проверьте!)

$$f_1(z) = \frac{F(z)}{i} (z - 1) \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{(L)} \frac{\pi i}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2} \pi i \right] = F(z) \sqrt{1 - z^2}$$

(корень арифметический);

$$V(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{F(\zeta) \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta - z_1} d\zeta + \text{const},$$

$$U(z_1) = \frac{1}{2\pi i(z_1 - 1)} \exp \left\{ \frac{1}{2} [\ln(\zeta - z_1)]_{\zeta=-1}^1 \right\} \times \left[\int_{(L)} \frac{F(\zeta) \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta - z_1} d\zeta + \text{const} \right],$$

$$\begin{aligned}
u(x) &= U(x + i0) - U(x - i0) = \\
&= \frac{1}{2\pi i(x-1)} \left\{ i\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left[\text{v. p.} \int_{-1}^1 \frac{F(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} d\xi + \pi i F(x)\sqrt{1-x^2} + C \right] + \right. \\
&\quad \left. + i\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left[\text{v. p.} \int_{-1}^1 \frac{F(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} d\xi - \pi i F(x)\sqrt{1-x^2} + C \right] \right\} = \\
&= -\frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-x^2}} \frac{F(\xi)}{\xi-x} d\xi - \frac{C}{\pi\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Это формула (15). Мы предоставляем читателю проверить, что если принять $\mu = \nu = 0$, т. е. искать решение, конечное при $x = 1$, то получится

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1+x}} \cdot \frac{1-x}{1-\xi} \frac{F(\xi)}{\xi-x} d\xi.$$

Полезно рассмотреть также случай $\mu = -1$, $\nu = 0$, в нем появится условие $\int_{-1}^1 F(\xi)(1-\xi^2)^{-1/2} d\xi = 0$.

7. Приведение к бесконечной системе алгебраических уравнений. Как и уравнения Фредгольма (п. 2.3), некоторые сингулярные интегральные уравнения удастся численно решить, сведя их непосредственно (без регуляризации) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим, например, уравнение

$$au(x) = b \text{ v. p.} \int_{-1}^1 \frac{K(x, \xi)}{\xi - x} u(\xi) d\xi + f(x) \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (37)$$

Сделав замену переменных

$$x = \cos \vartheta, \quad \xi = \cos \varphi, \quad u(x) = v(\vartheta), \quad f(x) = F(\vartheta), \quad K(x, \xi) = L(\vartheta, \varphi),$$

перепишем (37) в виде

$$av(\vartheta) = b \text{ v. p.} \int_0^\pi \frac{L(\vartheta, \varphi)}{\cos \varphi - \cos \vartheta} v(\varphi) \sin \varphi d\varphi + F(\vartheta) \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi). \quad (38)$$

Теперь надо разложить $v(\vartheta)$ в ряд по какой-либо полной системе функций и после подстановки в (38) получить систему линейных алгебраических уравнений

относительно коэффициентов разложения. Воспользуемся, например, такими разложениями:

$$\left. \begin{aligned} v(\vartheta) &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j \cos j\vartheta, & F(\vartheta) &= \sum_{j=0}^{\infty} F_j \cos j\vartheta, \\ L(\vartheta, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{jk} \cos j\vartheta \sin k\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Так как

$$\begin{aligned} L(\vartheta, \varphi) v(\varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} L_{jk} v_s \cos j\vartheta \sin k\varphi \cos s\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} L_{jk} v_s \cos j\vartheta [\sin(k+s)\varphi + \sin(k-s)\varphi], \end{aligned}$$

то в силу формул, приведенных в конце п. II.4.5,

$$\begin{aligned} \text{в. п.} \int_0^{\pi} \frac{L(\vartheta, \varphi)}{\cos \varphi - \cos \vartheta} v(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \\ = -\frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{jk} \cos j\vartheta \left(\sum_{s=0}^{\infty} v_s \cos(k+s)\vartheta + \sum_{s=0}^{\infty}{}' v_s \cos(k-s)\vartheta \right), \quad (40) \end{aligned}$$

где штрих означает, что надо пропустить член с $k = s$. Преобразуя (40) далее, удобно все суммирование проводить от $-\infty$ до ∞ , считая, что все коэффициенты с индексами, не указанными в (39), равны нулю. Получим

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{4} \sum_j \sum_k \left\{ \sum_s L_{jk} v_s [\cos(k+s+j)\vartheta + \cos(k+s-j)\vartheta] + \right. \\ \left. + \sum_s{}' L_{jk} v_s [\cos(k-s+j)\vartheta + \cos(k-s-j)\vartheta] \right\}. \end{aligned}$$

Разбив это выражение на четыре суммы, перейдем в первой к суммированию по k, s и $r = k + s + j$, во второй — по k, s и $r = k + s - j$ и т. д. Объединяя результаты, получим

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{4} \sum_r \sum_k \left[\sum_s (L_{r-k-s,k} + L_{k+s-r,k}) v_s + \right. \\ \left. + \sum_s{}' (L_{r-k+s,k} + L_{k-s-r,k}) v_s \right] \cos r\vartheta. \end{aligned}$$

Меняя обозначение индекса r на j и подставляя результат в (38), получим после приравнивания коэффициентов при косинусах

$$av_0 = -\frac{\pi}{4} b \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} L_{k+s,k} + \sum_{k=1}^{\infty}{}' (L_{-k+s,k} + L_{k-s,k}) \right] v_s + F_0,$$

$$av_j = -\frac{\pi}{4}b \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (L_{j-k-s,k} + L_{k+s-j,k} + L_{k+s+j,k}) + \sum_{k=1}^{\infty} (L_{j-k+s,k} + L_{k-s-j,k} + L_{-j-k+s,k} + L_{k-s+j,k}) \right] v_s + F_j$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots),$$

причем здесь коэффициенты $L_{p,k}$ при $p < 0$ следует считать равными нулю. Эту систему иногда удастся решить с помощью методов, указанных в п. 2.3; однако надо иметь в виду, что, в отличие от п. 2.3, здесь коэффициенты при неизвестных на главной диагонали, а также на параллельных ей линиях, имеют отличные от нуля пределы. Если члены на главной диагонали все же доминируют, то можно их перенести в левую часть и применить итерации; если прихватить и члены с ближайших параллельных линий, то можно применить комбинацию цепных дробей с итерациями, и т. д.

§6. Нелинейные интегральные уравнения

Теория нелинейных интегральных уравнений значительно менее стройна и едина, чем теория линейных уравнений. Для различных классов нелинейных уравнений получено большое число теорем о разрешимости и о свойствах решений; см., в частности, [19, 20, 56, 57, 58]. Численное решение нелинейных интегральных уравнений часто оказывается затруднительным, хотя и здесь известен ряд подходов. Мы по необходимости коснемся лишь небольшого числа из них.

1. Переход к конечным уравнениям. Имеется специальный класс интегральных уравнений, аналогичных уравнениям с вырожденными ядрами (п. 2.1), непосредственно сводящихся к конечным уравнениям. Рассмотрим, например, уравнение

$$u(x) = \int_a^b \sum_{j=1}^n \Phi_j(x) \Psi_j(\xi, u(\xi)) d\xi + f(x) \quad (a \leq x \leq b). \quad (1)$$

Обозначив

$$\int_a^b \Psi_j(\xi, u(\xi)) d\xi = C_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

получаем

$$u(x) = \sum_{j=1}^n C_j \Phi_j(x) + f(x).$$

Подставив в (2), приходим к системе нелинейных конечных уравнений

$$\int_a^b \Psi_j \left(\xi, \sum_{j=1}^n C_j \Phi_j(\xi) + f(\xi) \right) d\xi = C_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

полностью равносильной уравнению (1). К системе (3) могут быть применены любые методы численного решения систем конечных уравнений, а в простых случаях она допускает точное решение.

Уже на самых простых примерах можно увидеть специфику нелинейных уравнений.

Рассмотрим уравнение с параметром λ

$$u(x) = -\frac{\lambda}{2} \int_0^1 x \left[u^3(\xi) + 3u^2(\xi) + 4u(\xi) \right] d\xi, \quad (4)$$

причем будем интересоваться только вещественными решениями. В силу сказанного выше положим

$$\int_0^1 \left[u^3(\xi) + 3u^2(\xi) + 4u(\xi) \right] d\xi = C, \text{ откуда } u(x) = -\frac{\lambda C}{2} x.$$

После подстановки получаем соотношение между C и λ :

$$\lambda^3 C^3 - 8\lambda^2 C^2 + 32\lambda C + 32C = 0. \quad (5)$$

Линия с уравнением (5) на плоскости λ, C показана жирно на рис. 118. Мы видим, что при $-\infty < \lambda < -2$ и при $0 \leq \lambda < \infty$ уравнение (4) имеет только нулевое решение, а при $-2 < \lambda < 0$ — также два ненулевых. Поэтому, если по аналогии с линейным случаем считать характеристическим значение λ , при котором уравнение (4) имеет по крайней мере одно ненулевое решение, то здесь получается целый интервал характеристических чисел; однако каждому такому числу отвечает не бесконечное, как в линейном случае, а конечное количество решений (в данном примере три). Особый интерес представляет значение $\lambda = -1$. В самом деле, допустим, что параметр возрастает, начиная от больших отрицательных значений, а решение должно зависеть от параметра непрерывно. Тогда до значения $\lambda = -1$ решение должно быть нулевым, тогда как при $\lambda = -1$ происходит *ветвление (бифуркация)* решений, так что решение может либо остаться нулевым, либо пойти по другой ветви и уйти при $\lambda = -0$ в бесконечность. При обратном изменении параметра решение после $\lambda = -1$ также может либо остаться нулевым, либо пойти по другой ветви, чтобы пропасть (стать мнимым) при $\lambda = -2 - 0$.

Подчеркнем, что наличие при некотором λ у нелинейного уравнения (4) только нулевого решения вовсе не означает, что соответствующее неоднородное уравнение (с $+f(x)$ в правой части) имеет ровно одно решение. Здесь не действует ни одна из теорем Фредгольма.

Непосредственный переход к конечным уравнениям возможен и для интегральных уравнений более общего чем (1) вида

$$u(x) = F \left(x, \int_a^b \Phi_1(x) \Psi_1(\xi, u(\xi)) d\xi, \int_a^b \Phi_2(x) \Psi_2(\xi, u(\xi)) d\xi, \dots \right)$$

и т. п. Нетрудно уяснить общую структуру таких уравнений.

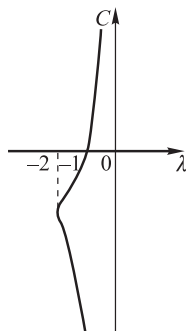


Рис. 118

Если точный переход к конечным уравнениям возможен лишь в весьма специальных случаях, то приближенный переход возможен всегда и является одним из основных способов численного решения и исследования нелинейных уравнений. Рассмотрим, например, *уравнение Урысона* (П. С. Урысон (1898–1924) — советский математик)

$$u(x) = \int_a^b f(x, \xi, u(\xi)) d\xi \quad (a \leq x \leq b) \quad (6)$$

(возможен также многомерный аналог этого уравнения). Будем искать приближенное решение в виде $u = \varphi(x; C_1, C_2, \dots, C_n)$ относительно которого, как всегда, требуется, чтобы при небольшом числе параметров это выражение могло хорошо аппроксимировать точное решение. После подстановки в уравнение (6) мы получаем невязку

$$\varphi(x; C_1, C_2, \dots, C_n) - \int_a^b f(x, \xi, \varphi(\xi; C_1, C_2, \dots, C_n)) d\xi \quad (a \leq x \leq b),$$

которую можно затем улучшать теми же методами (метод моментов, метод наименьших квадратов, метод коллокации), которые были указаны в ЛВМ, п. XV.29, в связи с решением дифференциальных уравнений.

2. Метод итераций. Метод итераций, описанный в п. 2.5, пригоден и для некоторых классов нелинейных уравнений. Это, прежде всего, *уравнения Вольтерра 2-го рода*

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \int_a^x f(x, \xi, u(\xi)) d\xi + \varphi(x), \\ u(x) &= F\left(x, \int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi\right), \\ u(x) &= \varphi(x) + \int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi + \int_a^x \int_a^x L(x, \xi, \eta) u(\xi) u(\eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

а также иных видов, которые объединяет то, что уравнение разрешено относительно $u(x)$, а в правой части u стоит под знаком интеграла с верхним пределом x . Возможность решения уравнений (7) маленькими шагами по x , о которой говорилось в п. 2.9, а также возможность линеаризации на каждом таком шаге приводят к тому, что обычно каждое из этих уравнений обладает единственным решением, которое можно получить с помощью стандартного метода итераций, начиная от любого нулевого приближения.

В связи с рассмотрением уравнений Вольтерра отметим, что если для специальных типов уравнений, рассмотренных в п. 1, заменить $\int_a^b$ на $\int_a^x$, то легко перейти к начальной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно решить с помощью численного интегрирования. Например, если для уравнения

$$u(x) = \int_a^x \sum_{j=1}^n \Phi_j(x) \Psi_j(\xi, u(\xi)) d\xi + f(x) \quad (8)$$

обозначить

$$\int_a^x \Psi_j(\xi, u(\xi)) d\xi = v_j(x),$$

то мы получим систему дифференциальных уравнений

$$v'_j = \Psi_j \left(x, \sum_{j=1}^n \Phi_j(x) v_j + f(x) \right) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

которая при начальных условиях

$$v_j(a) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

полностью равносильна исходному уравнению (8).

Метод итераций можно применить также к уравнениям с малыми нелинейными ядрами, скажем, вида

$$u(x) = \mu \int_a^b f(x, \xi, u(\xi)) d\xi + \varphi(x), \quad (9)$$

где $|\mu|$ достаточно мало. Последовательные приближения, естественно, определяются формулой

$$u_{n+1}(x) = \mu \int_a^b f(x, \xi, u_n(\xi)) d\xi + \varphi(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

и из равенства

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \mu \int_a^b [f(x, \xi, u_n(\xi)) - f(x, \xi, u_{n-1}(\xi))] d\xi, \quad (10)$$

видно, что при малом $|\mu|$ эти приближения сходятся со скоростью геометрической прогрессии. На практике эта малость обычно распознается с помощью сравнения последовательных приближений друг с другом.

Явные, хотя практически редко применяемые условия сходимости метода итераций можно получить с помощью принципа сжимающих отображений

(п. 2.6). Для этого будем рассматривать итерации в пространстве $C[a, b]$ и допустим, что имеет место оценка

$$|f'_u(x, \xi, u)| \leq K(x, \xi) \quad (11)$$

для всех значений u или, во всяком случае, для значений, используемых в процессе итераций. Обозначая через $\rho(u, v)$ равномерное уклонение функций $u(x)$ и $v(x)$ друг от друга, т. е. расстояние в рассматриваемом пространстве, из (10) с помощью формулы конечных приращений (ЛВМ, п. V.4) получим

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq |\mu| \int_a^b K(x, \xi) \rho(u_n, u_{n-1}) d\xi,$$

откуда

$$\rho(u_{n+1}, u_n) \leq |\mu| \max_x \int_a^b K(x, \xi) d\xi \cdot \rho(u_n, u_{n-1}).$$

Отсюда, на основании принципа сжимающих отображений, метод итераций сходится, если

$$|\mu| < \frac{1}{\max_x \int_a^b K(x, \xi) d\xi}. \quad (12)$$

(В частности, отсюда следует, что при таких μ уравнение (9) имеет по крайней мере одно решение; однако если неравенство (11) выполняется лишь в указанном диапазоне изменения u , то решение не обязательно единственно.) Условие (12) является только достаточным для сходимости, на самом деле сходимость будет в более широком интервале μ , в частности всегда, если $|\mu|$ меньше наименьшего характеристического значения ядра K . Более детальный анализ показывает, что сходимость при достаточно малых $|\mu|$ будет и в случае, если

$$\max_x \int_a^b K(x, \xi) d\xi = \infty.$$

3. Метод малого параметра. К уравнению (9) в случае малого μ можно применить также обычный метод малого параметра. Это можно сделать и для любого линейного уравнения, возмущенного малой нелинейностью. Покажем метод на примере уравнения *Ляпунова–Ликтенштейна*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, \xi) u(\xi) d\xi + \mu \int_a^b \int_a^b K_2(x, \xi, \mu) u(\xi) u(\eta) d\xi d\eta \quad (13)$$

(могут быть также добавлены аналогичные члены с K_3, K_4 и т. д.), если λ не является характеристическим числом ядра K_1 (фредгольмова или со слабой особенностью), а μ — малый параметр. Разложение

$$u(x) = u_0(x) + \mu u_1(x) + \mu^2 u_2(x) + \dots \quad (14)$$

после подстановки в (13) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ приводит к равенствам

$$u_0(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, \xi) u_0(\xi) d\xi, \quad (15)$$

$$u_1(x) = \lambda \int_a^b K_1(x, \xi) u_1(\xi) d\xi + \int_a^b \int_a^b K_2(x, \xi, \eta) u_0(\xi) u_0(\eta) d\xi d\eta, \quad (16)$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b K_1(x, \xi) u_2(\xi) d\xi + \int_a^b \int_a^b K_2(x, \xi, \eta) [u_0(\xi) u_1(\eta) + u_1(\xi) u_0(\eta)] d\xi d\eta \quad (17)$$

и т. д. Мы видим, что построение каждого коэффициента в разложении (14) сводится к решению линейного уравнения с одним и тем же ядром K_1 и свободным членом, определяемым предыдущими коэффициентами. В силу предположения о λ это построение возможно; оно особенно просто, если известна резольвента ядра K_1 .

Пусть теперь λ — характеристическое число ядра K_1 и ему отвечает r линейно независимых собственных функций. Тогда в силу (15) функция $f(x)$ должна удовлетворять k условиям ортогональности собственным функциям сопряженного уравнения; если эти условия выполнены, то решение $u_0(x)$ уравнения (15) будет содержать произвольные постоянные $C_1, C_2, \dots, C_k$. Подставляя это решение в (16) и пользуясь условиями ортогональности неоднородного члена собственным функциям сопряженного уравнения, получаем систему из k квадратичных уравнений относительно $C_1, C_2, \dots, C_k$, из которых и приходится находить эти постоянные (для других исходных интегральных уравнений может получиться система из k конечных уравнений более общей структуры). Удовлетворив этим условиям, получаем общее решение уравнения (16) с произвольными постоянными $C'_1, C'_2, \dots, C'_k$. Подставив это решение в неоднородный член уравнения (17), найдем эти постоянные из условий ортогональности (при этом уравнения для нахождения $C'_1, C'_2, \dots, C'_k$ будут линейными, т. е. эти постоянные уже найти легко, как и для дальнейших членов разложения (14)) и т. д. Продолжая таким образом, мы можем построить любое число членов разложения (14).

Функции f, K_1, K_2 и даже, пределы интегрирования в уравнении (13) могут дополнительно зависеть от μ ; тогда после разложения всех этих величин по степеням μ метод применяется аналогично.

4. Применение теории симметричных ядер. Рассмотрим уравнение Гаммерштейна

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi) \Phi(\xi, u(\xi)) d\xi + f(x) \quad (18)$$

с симметричным ядром K .

Нам потребуется простая оценка для норм в $L_2[a, b]$:

$$\left\| \int_a^b K(x, \xi) v(\xi) d\xi \right\| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|v(x)\|, \quad (19)$$

где λ_1 — наименьшее по абсолютному значению характеристическое число ядра K . В самом деле, в силу (3.8)

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[\int_a^b K(x, \xi) v(\xi) d\xi \right]^2 dx &= \int_a^b \left[\sum_j \frac{(\mathbf{v}, \varphi_j)}{\lambda_j} \varphi_j(x) \right]^2 dx = \\ &= \sum_j \frac{(\mathbf{v}, \varphi_j)^2}{\lambda_j^2} \leq \frac{1}{|\lambda_1|^2} \sum_j (\mathbf{v}, \varphi_j)^2 \leq \frac{1}{|\lambda_1|^2} \|v(x)\|^2 \end{aligned}$$

(проверьте!).

Теперь легко доказать, что если в уравнений (18)

$$\Phi'_u(\xi, u) \leq \alpha < |\lambda_1|, \quad (20)$$

то это уравнение имеет ровно одно решение, которое можно найти методом итераций. В самом деле, правая часть (18) определяет отображение в пространстве $L_2[a, b]$ в себя (предполагается, что $f \in L_2$). Так как

$$\begin{aligned} \|Bu_1 - Bu_2\| &= \left\| \int_a^b K(x, \xi) [\Phi(\xi, u_1(\xi)) - \Phi(\xi, u_2(\xi))] d\xi \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|\Phi(x, u_1(x)) - \Phi(x, u_2(x))\| \leq \frac{\alpha}{|\lambda_1|} \|u_1 - u_2\|, \end{aligned}$$

то наше утверждение вытекает из принципа сжимающих отображений (п. 2.6).

Покажем применение полученного результата к теории колебаний точечного маятника. Дифференциальное уравнение плоских вынужденных колебаний без учета трения легко выводится, оно имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = \frac{1}{ml} F(t), \quad (21)$$

где φ — отклонение маятника от вертикали, g — ускорение земного тяготения, l — длина невесомой нити, m — масса маятника, $F(t)$ — вынуждающая сила, действующая по касательной. Будем считать как заданную вынуждающую силу, так и искомое движение $\varphi(t)$ нечетными и периодическими во времени

с заданным периодом T . Тогда достаточно построить решение на интервале $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ при граничных условиях

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \quad (22)$$

чтобы после нечетного периодического продолжения получить решение для всех t .

Решение уравнения $\ddot{\varphi} = f(t)$ при граничных условиях (22) имеет вид

$$\varphi(t) = \int_0^{T/2} G(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где симметричное ядро G определено формулами

$$G(t, \tau) = \begin{cases} -(T - 2\tau)t/T & (0 \leq t \leq \tau \leq T/2), \\ -(T - 2t)\tau/T & (0 \leq \tau \leq t \leq T/2) \end{cases}$$

(проверьте!).

Применяя этот результат к (21), мы видим, что это уравнение при граничных условиях (22) равносильно интегральному уравнению

$$\varphi(t) = -\frac{g}{l} \int_0^{T/2} G(t, \tau) \sin \varphi(\tau) d\tau + \frac{1}{ml} \int_0^{T/2} G(t, \tau) F(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Характеристические числа ядра G обратны по знаку точкам спектра уравнения $\ddot{\varphi} + \lambda\varphi = 0$ при граничных условиях (22) (почему?); эти точки были указаны там же, из них наименьшее по абсолютной величине $\lambda_1 = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$.

Применяя общее условие (20), мы видим, что если выполнено неравенство

$$\frac{gT^2}{l} < 4\pi^2, \quad (24)$$

то поставленная задача имеет ровно одно решение, которое можно найти методом итераций.

5. Применение теории неподвижных точек. Мы уже отмечали в п. 2.6 и показали еще раз в п. 4, что отыскание решения многих уравнений можно свести к отысканию неподвижной точки у соответственно выбранного отображения некоторого множества точек в себя. Принцип сжатых отображений — один из основных принципов, гарантирующих наличие такой неподвижной точки. Другой метод отыскания неподвижной точки в конечномерном случае основан на применении теоремы Боля–Брауэра (п. IV.4.8). Иногда пользуются таким следствием из этой теоремы: *если шар (P) конечномерного евклидова пространства (E) непрерывно отображен в (E) и при этом ни одна из точек границы (P) не перешла вдоль по радиусу в направлении от центра, то это отображение имеет по крайней мере одну неподвижную*

точку. (Подумайте, как можно было бы вывести это из теоремы Боля–Брауэра.) Имеются и более сильные теоремы в этом направлении.

Подобные теоремы имеют топологический характер, так как они справедливы для топологически эквивалентных тел (см. петит в конце п. II.2.7). Например, теорема Боля–Брауэра справедлива для тела подковообразного вида, но не справедлива для кольца (почему?). Поэтому методы, с помощью которых существование решения задачи устанавливается на основе применения теорем о неподвижной точке или других аналогичных теорем, называются топологическими; по поводу этих методов см., в частности, книгу [57]. Топологические методы часто оказываются применимыми в условиях, когда все другие методы отказывают. К сожалению, топологические методы обычно решают задачу как бы наполовину: гарантируя, что по крайней мере одно решение существует (что само по себе очень важно!), они не говорят о том, сколько таких решений и как их построить; для этого приходится привлекать другие методы. (Отметим, что принцип сжимающих отображений не топологический, а метрический, так как понятие сжимающего отображения не топологическое.)

В бесконечномерном банаховом пространстве обычно взамен теоремы Боля–Брауэра пользуются *теоремой Шаудера*, которая формулируется в точности, как первая, но от отображения $x \rightarrow Ax$ требуется не только непрерывность, но полная непрерывность (п. 2.11), т. е. образ рассматриваемого тела должен быть компактным. (Доказательство теоремы Шаудера основано на аппроксимации заданного отображения последовательностью конечномерных отображений, применении к этим отображениям теоремы Боля–Брауэра и использовании компактности полученной последовательности аппроксимирующих неподвижных точек.) К отображению $x \rightarrow Ax$ можно применить также утверждение, набранное выше курсивом, которое действует и в данных условиях. Имеется и ряд других подобных и более сильных утверждений.

Покажем применение теории неподвижных точек к уравнению (18). Для этого допустим сначала, что функция $\Phi(\xi, u)$ непрерывна и ограничена при всех ξ, u ($a \leq \xi \leq b, -\infty < u < \infty$), скажем, $|\Phi(\xi, u)| \leq \Phi_0$. Обозначим правую часть (18) через Au ; тогда из п. 2.11 легко вывести, что это вполне непрерывный оператор. Кроме того, из оценки (19) следует, что для всех $u \in L_2[a, b]$ будет

$$\|Au\| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \Phi_0 \sqrt{b-a} + \|f\|. \quad (25)$$

Значит, если в качестве тела (P) взять шар в $L_2[a, b]$ с центром в начале координат и радиусом, равным правой части (25), то выполняются все условия теоремы Шаудера. Таким образом, уравнение (18) для любой ограниченной непрерывной функции Φ имеет по крайней мере одно решение. В частности, это относится и к уравнению (23), т. е. задача, рассмотренная в конце п. 4, имеет по крайней мере одно (уже не обязательно единственное) решение и в случае, если неравенство (24) не выполняется. Между прочим, на этом примере мы видим, что *в нелинейной колебательной системе отсутствует явление резонанса*.

Аналогичный результат получится, если функция $\Phi(\xi, u)$ удовлетворяет менее жесткому ограничению

$$|\Phi(\xi, u)| \leq k|u| + \Phi_0(\xi), \quad \text{где } k < \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad \Phi_0(\xi) \in L_2[a, b] \quad (26)$$

(докажите!).

Предположим дополнительно, что ядро K положительно определенное (п. 3.5), а $f(x) \equiv 0$. Тогда можно доказать еще более сильное утверждение, рассмотрев отображение $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{u}$ в шаре $\|\mathbf{u}\| \leq R$, где R достаточно велико, и применив бесконечномерный аналог следствия из теоремы Боля–Брауэра, приведенного в начале этого пункта. Мы будем считать, что функция $\Phi(\xi, u)$ непрерывна и удовлетворяет оценке

$$|\Phi(\xi, u)| \leq C|u| + \Phi_0(\xi), \quad \text{где } \Phi_0(\xi) \in L_2[a, b] \quad (27)$$

с какой-то постоянной C ; отсюда можно вывести, что отображение $\mathbf{A}$ вполне непрерывно. Если какая-нибудь из точек сферы $\|\mathbf{u}\| = R$ перешла вдоль по радиусу в направлении от центра, это означает, что для некоторой функции $u(x)$ будет

$$\|\mathbf{u}\| = R, \quad \int_a^b K(x, \xi) \Phi(\xi, u(\xi)) d\xi = (1 + \alpha)u(x) \quad (\alpha > 0). \quad (28)$$

Обозначим

$$\int_a^b u(x) \varphi_j(x) dx = u_j, \quad \int_a^b \Phi(x, u(x)) \varphi_j(x) dx = v_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — система собственных функций ядра K . Тогда из (27) легко следует, что

$$v_j = (1 + \alpha) \lambda_j u_j, \quad \text{откуда } u_j v_j = (1 + \alpha) \lambda_j u_j^2 \geq (1 + \alpha) \lambda_1 u_j^2.$$

Суммируя обе части по j , получим (проверьте!)

$$(1 + \alpha) \lambda_1 \int_a^b u^2(x) dx \leq \int_a^b u(x) \Phi(x, u(x)) dx.$$

Чтобы применить указанное выше следствие, нам надо предотвратить возможность такого соотношения при достаточно больших $\|\mathbf{u}\|$. Но для этого достаточно потребовать, чтобы неравенство (26) выполнялось, когда $\Phi(\xi, u)$ одного знака с u (почему?). Другими словами, достаточно одностороннего ограничения

$$\Phi(\xi, u) \begin{cases} \leq ku + \Phi_0(\xi) & (u \geq 0), \\ \geq ku - \Phi_0(\xi) & (u \leq 0). \end{cases} \quad \text{где } k < \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad \Phi_0(\xi) \in L_2[a, b]. \quad (29)$$

Таким образом, если выполнены неравенства (27) и (29), то уравнение (18) с положительно определенным ядром K и $f \equiv 0$ имеет по крайней мере одно решение.

Нетрудно доказать справедливость полученного результата и для неотрицательно определенного ядра K , аппроксимируя его положительно определенными ядрами.

Подчеркнем, что мы здесь не имели в виду показать наиболее далекие результаты, а хотели только продемонстрировать применение теорем о неподвижных точках. Продвижение в этом направлении требует более серьезных математических знаний и навыков и изучения специальной литературы.

6. Вариационные методы. Для численного решения интегральных уравнений, линейных или нелинейных, применяются также вариационные методы. (Эти методы применяются и для исследования общих вопросов разрешимости нелинейных уравнений; см. по этому поводу книги [19, 57].)

Иногда удается записать заданное уравнение в форме уравнения Эйлера для подходяще подобранного функционала, чтобы применить затем метод Ритца. Так, легко проверить, что уравнение (2.16) с симметричным ядром представляет собой уравнение Эйлера для функционала

$$I\{u\} = \int_a^b u^2(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) u(x) u(\xi) dx d\xi - 2 \int_a^b f(x) u(x) dx.$$

Во всех случаях можно попытаться применить метод наименьших квадратов (п. VI.4.7).

Иногда приведение к форме уравнения Эйлера получается более сложно. Рассмотрим, например, уравнение Гаммерштейна

$$\alpha u(x) = \int_a^b K(x, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi \quad (\alpha = \text{const}) \quad (30)$$

с симметричным неотрицательно определенным ядром K , собственные значения λ_j и собственные функции $\varphi_j(x)$ которого известны. Введем ядро $L(x, \xi) = \sum_j \varphi_j(x) \varphi_j(\xi) / \sqrt{\lambda_j}$, первая итерация которого дает K , а также

функцию $F(\xi, u) = \int_{u_0}^u f(\xi, s) ds$. Тогда уравнение Эйлера для функционала

$$I\{v\} = \frac{\alpha}{2} \int_a^b v^2(x) dx - \int_a^b F\left(x, \int_a^b L(x, \xi) v(\xi) d\xi\right) dx \quad (31)$$

имеет вид (проверьте!)

$$\alpha v(x) = \int_a^b L(x, \xi) f\left(\xi, \int_a^b L(\xi, \eta) v(\eta) d\eta\right) d\xi.$$

Отсюда, обозначив

$$u(x) = \int_a^b L(x, \xi) v(\xi) d\xi, \quad (32)$$

легко получить (30). Значит, придав функционалу (31) приближенно стационарное значение, мы после перехода (32) получим приближенное решение уравнения (30).

Возможно также применение метода счетного множества переменных (п. VI.4.3). Рассмотрим вновь уравнение (30), не требуя уже

определенности ядра K . Так как функция $u(x)$ при $\alpha \neq 0$ представлена через ядро (п. 3.3), то возможно разложение

$$u(x) = \sum_j u_j \varphi_j(x)$$

(при $\alpha = 0$ надо требовать полноту ядра K). После подстановки в (30) и скалярного умножения на φ_j получаем систему конечных уравнений

$$\alpha u(x) = \frac{1}{\lambda_j} \int_a^b f \left(\xi, \sum_k u_k \varphi_k(\xi) \right) \varphi_j(\xi) d\xi \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

равносильную (30). Но это система условий стационарности функции

$$\Phi(u_1, u_2, u_3, \dots) = \alpha \sum_j \lambda_j u_j^2 - 2 \int_a^b F \left(\xi, \sum_j u_j \varphi_j(\xi) \right) d\xi$$

(проверьте!). Приблизиться к стационарной точке можно методом усечения, т.е. путем приближенного перехода к конечному числу переменных. Если стационарная точка есть точка минимума, то можно применить методы градиентного спуска или наискорейшего спуска.

7. Уравнения с параметром. Часто бывает, что в заданное интегральное уравнение входит один или несколько параметров и требуется проследить за изменением решения этого уравнения при изменении параметров. Мы изложим простые результаты в этом направлении на примере уравнения

$$u(x) = \int_a^b f(x, \xi, u(\xi); \gamma) d\xi \quad (33)$$

с одним параметром γ , хотя эти результаты немедленно переносятся и на уравнения иного вида с любым числом параметров. Как и раньше, все величины будут считаться вещественными.

Допустим, что при некотором значении параметра $\gamma = \gamma_0$ нам известно одно из решений $u_{\gamma_0}(x)$ уравнения (33) (это уравнение может при $\gamma = \gamma_0$ иметь и другие решения). Если γ немного изменится, то и решение $u = u_\gamma(x)$, вообще говоря, немного изменится, кроме особых случаев, о которых будет сказано позже. Продифференцировав обе части равенства (33) по γ , получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_\gamma(x)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} &= \int_a^b f'_u(x, \xi, u_{\gamma_0}(\xi); \gamma_0) \left. \frac{\partial u_\gamma(\xi)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} d\xi + \\ &+ \int_a^b f'_\gamma(x, \xi, u_{\gamma_0}(\xi); \gamma_0) d\xi. \end{aligned}$$

Мы видим, что производная $\left. \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0}$ определяется из линейного уравнения Фредгольма 2-го рода с ядром

$$f'_u(x, \xi, u_{\gamma_0}(\xi); \gamma_0). \quad (34)$$

В силу п. 2.2 эта производная определяется однозначно, если для ядра (34) (без дополнительного параметра λ) имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, т. е. если для этого ядра значение $\lambda = 1$ не является характеристическим. Подобно теореме о неявных функциях (ЛВМ, пп. IX.13 и XII.3) можно подробно показать, что это условие является и достаточным для того, чтобы уравнение (33) при малых $|\gamma - \gamma_0|$ имело однозначно определенное решение $u_\gamma(x)$, непрерывно зависящее от γ и равное $u_{\gamma_0}(x)$ при $\gamma = \gamma_0$.

Если в обе части (33) подставить разложение

$$u_\gamma(x) = \varphi_0(x) + (\gamma - \gamma_0)\varphi_1(x) + (\gamma - \gamma_0)^2\varphi_2(x) + \dots,$$

то легко проверить, что $\varphi_0(x) = u_{\gamma_0}(x)$, $\varphi_1(x) = \left. \frac{\partial u_\gamma(x)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0}$, а для определения каждого из последующих коэффициентов $\varphi_k(x)$ получается линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с тем же ядром (34) и со свободным членом, выраженным через уже определенные коэффициенты $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{k-1}(x)$. Поэтому в принципе эти коэффициенты можно находить один за другим, сколько потребуется, хотя практически, если резольвента ядра (34) неизвестна, то это довольно громоздко.

Для приближенного решения уравнения (33) при малых $|\gamma - \gamma_0|$ можно также переписать его в виде

$$u(x) - \int_a^b f'_u(x, \xi, u_{\gamma_0}(\xi); \gamma_0) u(\xi) d\xi = \int_a^b [f(x, \xi, u(\xi); \gamma) - f'_u(x, \xi, u_{\gamma_0}(\xi); \gamma_0) u(\xi)] d\xi,$$

после чего применить метод последовательных приближений, начиная от $u_{\gamma_0}(x)$. Так как вариация правой части при $\gamma = \gamma_0$, $u = u_{\gamma_0}(x)$ равна нулю (проверьте!), то она будет мала и при близких γ, u ; это и обеспечивает сходимость итераций.

Продолжение решения по параметру возможно, если только оно при конечном γ не уйдет в бесконечность, либо не дойдет до конечных значений, при которых функция f разрывна (если такие разрывы имеются), или, наконец, до значений, при которых ядро (34) имеет характеристическое число $\lambda = 1$.

8. Разветвление решений. Допустим теперь, что значение $\lambda = 1$ является характеристическим для ядра (34). Мы рассмотрим только основной случай, когда этому значению отвечает лишь одна собственная

функция $u_1(x)$ (с точностью до скалярного множителя), а стало быть, сопряженному уравнению — одна собственная функция $v_1(x)$; мы будем считать эти функции известными (теоретически — точно, на практике обычно — приближенно). Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$u(x) = \int_a^b [f(x, \xi, u(\xi); \gamma) + u_1(\xi)v_1(x)u(\xi)] d\xi - sv_1(x), \quad (35)$$

где s — добавочный параметр. Если принять дополнительно

$$S = \int_a^b u_1(\xi)u(\xi) d\xi, \quad (36)$$

то уравнение (35) будет полностью равносильно (33). Однако это искусственное преобразование приводит к тому, что для уравнения (35)

при $\gamma = \gamma_0$, $s = s_0 = \int_a^b u_1(\xi)u_{\gamma_0}(x) d\xi$, $u = u_{\gamma_0}(x)$ выполнено условие п. 7 продолжимости решений (по двум параметрам γ, s).

В самом деле, пусть для уравнений (35) линеаризованное ядро (аналогичное (34)) имеет $\lambda = 1$ характеристическим числом. Это означает, что уравнение

$$u(x) = \int_a^b [f'_u(x, \xi, u_{\gamma_0}(\xi); \gamma_0) + u_1(\xi)v_1(x)] u(\xi) d\xi \quad (37)$$

имеет нетривиальное решение $U(x)$. Переписав уравнение (37) при $u = U(x)$ в виде

$$u(x) = \int_a^b f'_u(x, \xi, u_{\gamma_0}(\xi); \gamma_0) u(\xi) d\xi + \int_a^b u_1(\xi)U(\xi) d\xi \cdot v_1(x), \quad (38)$$

мы видим в силу третьей теоремы Фредгольма, что такое возможно, только если функции u_1 и U ортогональны. А тогда из (38) получается, что U должна быть пропорциональна u_1 , и потому их ортогональность невозможна.

Полученное противоречие показывает возможность продолжения по параметрам γ, s решения

$$u = \psi(x; \gamma, s), \quad (39)$$

где $\psi(x; \gamma_0, s_0) = u_{\gamma_0}(x)$ при малых $|\gamma - \gamma_0|$, $|s - s_0|$; более того, по методу п. 7 это решение можно разложить в ряд по степеням $(\gamma - \gamma_0)$, $(s - s_0)$. Подставив решение (39) в правую часть (36), мы получаем уравнение разветвления

$$s - \int_a^b u_1(\xi)\psi(\xi; \gamma, s) d\xi = 0, \quad \text{коротко} \quad F(s, \gamma) = 0, \quad (40)$$

связывающее s и γ . Найдя отсюда $s(\gamma)$ и подставив результат в (39), получим решение уравнения (33).

Однако дифференцируя уравнение (35) по s или по γ и рассуждая, как с уравнением (38), легко доказать (проделайте это!), что

$$F'_s(s_0, \gamma_0) = 0, \\ F'_\gamma(s_0, \gamma_0) = \int_a^b \int_a^b f'_\gamma(x, \xi, u_{\gamma_0}(\xi); \gamma_0) v_1(x) dx d\xi \Big/ \int_a^b v_1^2(x) dx. \quad (41)$$

Значит, уравнение (40) разрешить однозначно относительно s , вообще говоря, невозможно. Если двойной интеграл в (41) отличен от нуля, то уравнение (40) можно разрешить относительно γ , и тогда связь между s и γ будет, такой, как показано на рис. 119. В первом, основном случае

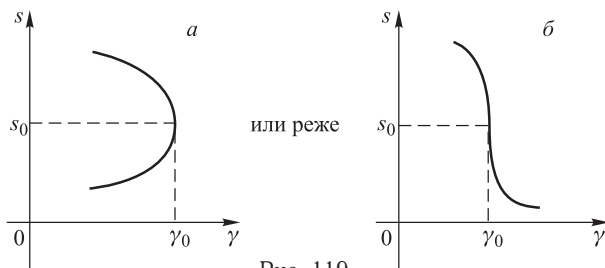


Рис. 119

получается, что при изменении γ два решения при $\gamma = \gamma_0$ сливаются и в дальнейшем становятся мнимыми, т. е. пропадают.

Если двойной интеграл в (41) равен нулю, то надо действовать, как было описано в п. II.3.8 в связи с уравнением (II.3.25). Здесь особенно важен случай, когда нам при всех значениях γ известна одна из ветвей $u_\gamma(x)$ решения уравнения (33) и нас интересует, не может ли при некотором значении γ от нее отщепиться другая ветвь решения. Как было отмечено в п. 1, такое отщепление называется бифуркацией, а потому соответствующие значения параметра γ называются бифуркационными. Мы будем без ограничения общности считать, что $u_\gamma(x) \equiv 0$. (К этому случаю можно всегда прийти с помощью замены $u - u_\gamma(x) = v$.) Тогда из уравнений (33) мы видим, что должно быть

$$\int_a^b f(x, \xi, 0; \gamma) d\xi \equiv 0, \quad \text{а потому} \quad \int_a^b f'_\gamma(x, \xi, 0; \gamma_0) d\xi = 0.$$

Значит, двойной интеграл в (41) равен нулю, и потому в разложении функции $F(s, \gamma)$ по степеням $s(s_0 = 0)$, $\gamma - \gamma_0$ линейные члены отсутствуют. Так как квадратичные члены обычно присутствуют, а в силу (36) известная ветвь $s(\gamma)$ будет $s \equiv 0$, то типичное расположение линии (40) около точки $(\gamma_0; 0)$ получается, как на рис. 120 (почему?).

Это означает, что при переходе γ через γ_0 как в одну сторону, так и в другую происходит бифуркация, т.е. решение можно продолжать двумя способами.

Расположение может оказаться и иным, однако можно показать, что всегда, если значение $\lambda = 1$ является простым нулем определителя Фредгольма ядра $f'_u(x, \xi, 0; \gamma_0)$, то при $\gamma = \gamma_0$ обязательно будет бифуркация хотя бы в одну сторону от γ_0 . То же будет для нулей нечетной кратности: при этом в общем случае надо иметь в виду, что может отщепиться и более одной, ненулевой ветви. Для нулей четной кратности бифуркации может не произойти, так как отщепившиеся ветви могут оказаться мнимыми по обе стороны от γ_0 . В некоторых случаях удастся показать, что эта кратность несущественна, например для уравнения (18) с симметричным положительно определенным ядром K , если $\Phi(\xi, 0) \equiv 0$.

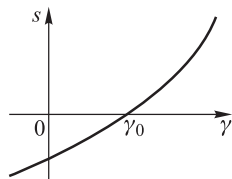


Рис. 120

Рассмотрим, например, уравнение (4), имеющее, в частности, нулевое решение при всех значениях параметра λ . Так как в данном случае ядро $f'_u(x, \xi, 0; \lambda) = -2\lambda x$ имеет характеристическое значение 1 при $\lambda_0 = -1$, причем $u_1(x) = x$, $v_1(x) = 1$ (проверьте!), то уравнение (35) имеет вид

$$u(x) = \int_0^1 \left\{ -\frac{\lambda}{2} x [u^3(\xi) + 3u^2(\xi) + 4u(\xi)] + \xi u(\xi) \right\} d\xi - s. \quad (42)$$

Здесь удобно обозначить $\lambda + 1 = \mu$, так что $\mu_0 = 0$. Подставляя в (42) разложение

$$u(x) = a(x)s + b(x)\mu + c(x)s^2 + d(x)s\mu + e(x)\mu^2 + \dots,$$

легко найдем (проверьте!), что

$$a(x) = 3x, \quad b(x) = 0, \quad c(x) = -\frac{27}{8}x - \frac{9}{4}, \quad d(x) = \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}, \quad e(x) = 0,$$

откуда уравнение разветвления (40) примет вид $\frac{9}{4}s^2 - \frac{3}{2}\mu s + \text{члены не ниже 3-й степени} = 0$. Значит, при $\mu = 0$ происходит бифуркация по закону $s = \frac{2}{3}\mu + \dots$, т.е. $u(x) = 2x(\lambda + 1) + \text{члены не ниже 2-й степени относительно } \lambda + 1$. Эта бифуркация была отмечена и в п. 1, а главный член разложения нетрудно вывести из (5).

Если характеристическому значению $\lambda = 1$ ядра (34) отвечает $k > 1$ собственных функций, то рассуждать можно так же, как при $k = 1$. Вводятся вспомогательные уравнения, аналогичные (35) и (36), с k добавочными параметрами $s_1, s_2, \dots, s_k$, после чего составляется система из k уравнений разветвления, связывающих параметры $s_1, s_2, \dots, s_k, \gamma$. Вообще говоря, исследование таких систем существенно сложнее, чем одного уравнения с двумя параметрами. Тем не менее бывают случаи, когда в результате последовательных исключений оказывается возможным перейти к одному уравнению и тем самым довести задачу до конца.

К уравнению (33) в рассматриваемом особом случае можно и непосредственно применить метод неопределенных коэффициентов (*метод Назарова–Некрасова*¹⁾). Как было показано в п. II.3.8, в условиях, когда теорема о неявной функции неприменима, одну из двух величин, входящих в конечное уравнение, можно получить в виде суммы ряда Пуизо по дробным степеням другой. Поэтому естественно решение $s(\gamma)$ уравнения разветвления (и аналогично системы уравнений разветвления), а с ним и решение $u(x)$ уравнения (33) для малых $|\gamma - \gamma_0|$ искать в виде суммы ряда

$$u(x) = u_{\gamma_0}(x) + w_1(x)\delta + w_2(x)\delta^2 + \dots, \quad \text{где} \quad \delta^p = \gamma - \gamma_0,$$

однако целое число $p \geq 1$ *заранее неизвестно* и уточняется в процессе построения решения. Подстановка в (33) дает

$$\begin{aligned} u_{\gamma_0}(x) + w_1(x)\delta + w_2(x)\delta^2 + \dots = \\ = \int_a^b f(x, \xi, u_{\gamma_0}(\xi) + w_1(\xi)\delta + w_2(\xi)\delta^2 + \dots; \gamma_0 + \delta^p) d\xi. \end{aligned}$$

Задавшись значением p , разложим правую часть по степеням δ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получим уравнения вида

$$w_j(x) = \int_a^b f'_u(x, \xi, u_{\gamma_0}(\xi); \gamma_0) w_j(\xi) d\xi + \varphi_j(x) \quad (j = 1, 2, 3, \dots), \quad (43)$$

где $\varphi_1(x)$ — вполне определенная функция, а каждая из дальнейших функций $\varphi_j(x)$ выражается через функции $w_1(x), w_2(x), \dots, w_{j-1}(x)$.

Так как для уравнения (43) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма, то функция $\varphi_1(x)$ должна удовлетворять k условиям ортогональности; если они не удовлетворяются, то p выбрано неверно. Если же они удовлетворяются, то уравнение (43) при $j = 1$ определяет $w_1(x)$ с k произвольными постоянными. Значит, и функция $\varphi_2(x)$ содержит k произвольных постоянных; но для возможности определения $w_2(x)$ из уравнений (43) при $j = 2$ функция $\varphi_2(x)$ должна удовлетворять k условиям ортогональности, откуда эти постоянные и определяются. Тогда $w_2(x)$ будет определена с точностью до k новых произвольных постоянных, которые войдут в $\varphi_3(x)$ и потому определятся из k условий ортогональности и т. д. Можно показать, что, начиная с некоторого шага, уравнения для нахождения произвольных постоянных становятся линейными (алгебраическими) с неизменной невырожденной матрицей, т. е. больше никакого произвола не остается. Если мы дошли до этого шага, то препятствий (несовместных систем) больше не может встретиться и возможно, во всяком случае в принципе, построить любое число членов разложения искомого решения.

¹⁾ Н. Н. Назаров (1908–1947) — советский математик; А. И. Некрасов (1883–1957) — российский и советский механик.

Глава VIII

ОБЫКНОВЕННЫЕ

Общий курс математики содержит главу, посвященную теории обыкновенных дифференциальных уравнений, и мы будем предполагать известными основные сведения, содержащиеся в этой главе. Уже из общего курса становится ясна выдающаяся роль этой области математики для приложений. Однако сейчас широко применяются многие разделы этой теории, значительно выходящие за рамки указанной главы. Здесь мы коротко осветим некоторые из этих отделов, причем отдельные параграфы могут читаться в значительной мере независимо один от другого.

§1. Линейные уравнения и системы

1. Общие свойства. Напомним некоторые факты, известные из общего курса математики. Мы будем рассматривать линейные системы вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при этом независимая переменная обозначается буквой t , так как она обычно может быть истолкована как время, а во многих задачах и в самом деле является временем. Если не оговорено противное, то независимая переменная будет считаться вещественной, а коэффициенты и искомые функции — вообще говоря, комплексными. Введя числовые

вектор-функции и матрицу коэффициентов

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

мы можем систему (1) переписать в векторно-матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad (2)$$

которым мы обычно и будем пользоваться.

Как показывается в общем курсе, линейные уравнения и системы линейных уравнений любого порядка можно с помощью введения добавочных искоемых функций свести к системам первого порядка, т. е. системам вида (2).

Коэффициенты $a_{jk}(t)$ и неоднородные (свободные) члены $f_j(t)$ будут считаться заданными на некотором бесконечном или конечном открытом или замкнутом интервале α, β и принимающими конечные значения (впрочем, допускается обращение в бесконечность, но с сохранением абсолютной интегрируемости). Тогда система (2) при любом начальном условии

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3)$$

имеет ровно одно решение, определенное на всем интервале α, β .

Рассмотрим однородную систему (векторно-матричное уравнение)

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}, \quad (4)$$

соответствующую системе (2). Совокупность ее решений образует n -мерное линейное пространство. Любой базис в нем, т. е. любая совокупность из n линейно независимых решений

$$\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \dots, \mathbf{y}_n(t) \quad (5)$$

системы (4), называется ее *фундаментальной системой* решений. Легко проверить, что после подстановки в (5) любого фиксированного значения $t = t_0$ получится система линейно независимых векторов: в самом деле, если, например, $\mathbf{y}_1(t_0) = C_2\mathbf{y}_2(t_0) + \dots + C_n\mathbf{y}_n(t_0)$, то два решения $\mathbf{y}_1(t)$ и $C_2\mathbf{y}_2(t) + \dots + C_n\mathbf{y}_n(t)$, совпадая при $t = t_0$, должны совпадать тождественно (почему?), а это противоречит фундаментальности системы решений (5).

Полезным оказывается понятие *сопряженной* с (4) системы

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{A}^*(t)\mathbf{z}. \quad (6)$$

Легко проверить, что для любого решения $\mathbf{y}(t)$ системы (4) и любого решения $\mathbf{z}(t)$ системы (6) будет

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{z}^*\mathbf{y} = \text{const.}$$

В самом деле,

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z})' = (\mathbf{y}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \dot{\mathbf{z}}) = (\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, -\mathbf{A}^*\mathbf{z}) = 0.$$

(Получите это же, дифференцируя $\mathbf{z}^*\mathbf{y}$.) Если $\mathbf{A}(t) \equiv -\mathbf{A}^*(t)$, т. е. матрица $\mathbf{A}$ антиэрмитова, то система (4) самосопряженная.

Наряду с (4) часто рассматривают матричное уравнение

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}, \quad (7)$$

где $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)$ — искомая квадратная матрица порядка n . Если записать это уравнение в скалярной форме, то для элементов каждого из столбцов матрицы $\mathbf{Y}$ получится та же система, которая коротко записана в виде (4) (проверьте это для первого столбца!). Поэтому общее решение уравнения (7) получается так: надо взять какие угодно n вектор-функций, являющихся решениями уравнения (4), и составить из них матрицу. Так как при любом постоянном векторе $\mathbf{c}$ столбец $\mathbf{Y}(x)\mathbf{c}$ равен линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{Y}(x)$ (почему?), то $\mathbf{Y}(x)\mathbf{c}$ с представляет собой решение уравнения (4); это легко проверить непосредственно:

$$(\mathbf{Y}\mathbf{c})' = \dot{\mathbf{Y}}\mathbf{c} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}\mathbf{c} = \mathbf{A}(t)(\mathbf{Y}\mathbf{c})$$

(где использовано постоянство вектора $\mathbf{c}$?).

Для определителя матрицы $\mathbf{Y}(t)$ — он называется также *определителем Вронского* (по имени польского математика и философа Ю. Вронского (1778–1853), который ввел такие определители в 1812 г.) для набора решений (5) системы уравнений (4) — имеется простая формула. Мы будем исходить из формулы дифференцирования функциональных определителей

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \dots & y'_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y'_{21} & y'_{22} & \dots & y'_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & \dots & y_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y'_{n-1,1} & y'_{n-1,2} & \dots & y'_{n-1,n} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

для доказательства которой нужно раскрыть определитель в левой части, произвести почленное дифференцирование, а затем вновь сгруппировать слагаемые и свернуть их в определители. (Продумайте это доказательство для $n = 2$ или 3.) Если каждый столбец в левой части удовлетворяет системе (4), то вместо первого слагаемого в правой части можно написать, приняв для простоты $n = 3$,

$$\begin{vmatrix} a_{11}y_{11}+a_{12}y_{21}+a_{13}y_{31} & a_{11}y_{12}+a_{12}y_{22}+a_{13}y_{32} & a_{11}y_{13}+a_{12}y_{23}+a_{13}y_{33} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}.$$

Умножив вторую строку на $-a_{12}$, а третью на $-a_{13}$ и добавив их к первой, получим $a_{11} \det \mathbf{Y}(t)$. Аналогично преобразуются остальные слагаемые в правой части (8), и мы получаем

$$[\det \mathbf{Y}(t)]' = \text{сл.} \mathbf{A}(t) \det \mathbf{Y}(t),$$

откуда

$$\det \mathbf{Y}(t) = \det \mathbf{Y}(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{сл.} \mathbf{A}(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где под $\text{сл.} \mathbf{A}$ (применяется также обозначение $\text{tr} \mathbf{A}$ от английского *trace* — след) понимается *след* матрицы $\mathbf{A}$:

$$\text{сл.} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Формула (9) была получена в 1827 г. Абелем для уравнений второго порядка и в 1838 г. Лиувиллем и М. В. Остроградским в общем случае.

Если для решения $\mathbf{Y}(t)$ уравнения (7) будет $\det \mathbf{Y}(t) \neq 0$, то $\mathbf{Y}(t)$ называется *фундаментальной матрицей* системы (4). Это имеет место тогда и только тогда, когда столбцы этой матрицы образуют фундаментальную систему решений уравнения (4). Особенно удобно пользоваться *матрицантом* системы (4), т. е. фундаментальной матрицей, удовлетворяющей начальному условию

$$\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{I}.$$

Эту матрицу мы будем обозначать буквами $\mathbf{Y}(t, t_0)$; через нее решение системы (4) с начальным условием $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ выражается так:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t, t_0) \mathbf{y}_0 \quad (10)$$

(почему?). Эта матрица удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{Y}(t, t_0) \equiv \mathbf{Y}(t, t_1) \mathbf{Y}(t_1, t_0); \quad (11)$$

в самом деле, обе стороны этого равенства удовлетворяют уравнению (7) и совпадают при $t = t_1$ (продумайте это!). Положив $t = t_0$, мы получаем также, что

$$\mathbf{Y}(t_1, t_0) = [\mathbf{Y}(t_0, t_1)]^{-1}.$$

Так как $\mathbf{Y}(t, t_0)$ с произвольным векторе $\boldsymbol{\varphi}$ представляет собой общее решение системы (4), то, согласно методу вариации произвольной постоянной, решение системы (2) можно искать в виде $\mathbf{x} = \mathbf{Y}(t, t_0) \boldsymbol{\varphi}(t)$. Подстановка в (2) дает

$$(\mathbf{Y}\boldsymbol{\varphi})' = \dot{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{Y}\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{Y}\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{f},$$

откуда $\dot{\varphi} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{f}$, $\varphi(t) = \int_{t_0}^t [\mathbf{Y}(\tau, t_0)]^{-1} \mathbf{f}(\tau) d\tau + \mathbf{c}$, т. е. в силу (11)

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{Y}(t, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau + \mathbf{Y}(t, t_0) \mathbf{c}. \quad (12)$$

Так как при $t = t_0$ правая часть равна $\mathbf{c}$, то для начального условия (3) надо в (12) просто заменить $\mathbf{c}$ на $\mathbf{x}_0$.

Нетрудно выразить матрицу $\mathbf{Y}(t, t_0)$ в виде суммы ряда. Для этого, проинтегрировав обе части (7) от t_0 до некоторого t , перейдем к интегральному уравнению

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \mathbf{Y}(\tau) d\tau.$$

Проводя итерации, придем к формуле (проверьте!)

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t, t_0) = \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2) d\tau_2 + \\ + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2) d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} \mathbf{A}(\tau_3) d\tau_3 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Проверьте, что матрицант системы (6) равен

$$\mathbf{Z}(t, t_0) = [\mathbf{Y}(t_0, t)]^*. \quad (14)$$

Полученные результаты особенно просты, если матрица $\mathbf{A}$ коэффициентов постоянная. Тогда $\mathbf{Y}(t, t_0) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}$ (почему?), и формула (12) приобретает вид

$$\mathbf{x} = \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \mathbf{f}(\tau) d\tau + e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{c}$$

(проверьте ее непосредственно). Из вида фундаментальной матрицы и правила вычисления функций от матриц (п. IV.3.5) легко следует, в частности: *для того чтобы все решения уравнения $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ стремились к нулю при $t \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_j матрицы $\mathbf{A}$ имели отрицательную вещественную часть. Для того чтобы все эти решения были ограниченными при $t \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы все $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$, а собственным значениям с $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ отвечали жордановы клетки только первого порядка (см. формулу (IV.3.13)).*

2. Периодические системы. Допустим, что все коэффициенты системы (4) периодичны с одним и тем же периодом $T > 0$, т. е.

$$\mathbf{A}(t + T) \equiv \mathbf{A}(t).$$

Тогда

$$\mathbf{Y}(t + T, t_0 + T) \equiv \mathbf{Y}(t, t_0), \quad (15)$$

так как если начальное условие сдвинуть во времени на период, то и решение сдвинется во времени на период. Докажем, что можно подобрать такую постоянную матрицу $\mathbf{M}$, что матрица-функция $\mathbf{Y}(t, 0)e^{-t\mathbf{M}}$ будет T -периодична; обозначив это произведение через $\mathbf{R}(t)$, мы видим, что имеет место представление

$$\mathbf{Y}(t, 0) = \mathbf{R}(t)e^{t\mathbf{M}}, \quad (16)$$

где функция $\mathbf{R}(t)$ периодична с периодом T (это теорема Флоке).

В самом деле, в силу свойств (11) и (15), требуемое условие T -периодичности можно записать так:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t, 0)e^{-t\mathbf{M}} &= \mathbf{Y}(t + T, 0)e^{-(t+T)\mathbf{M}} = \\ &= \mathbf{Y}(t + T, T)\mathbf{Y}(T, 0)e^{-T\mathbf{M}}e^{-t\mathbf{M}} = \mathbf{Y}(t, 0)\mathbf{Y}(T, 0)e^{-T\mathbf{M}}e^{-t\mathbf{M}}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathbf{Y}(T, 0) = e^{T\mathbf{M}}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{T} \ln \mathbf{Y}(T, 0),$$

где логарифм матрицы берется по правилу п. IV.3.5. Теорема доказана.

Формула (16) показывает, что для того чтобы все решения T -периодической системы (4) стремились к нулю при $t \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $\mathbf{M}$ имели отрицательную вещественную часть, т. е. чтобы все собственные значения матрицы $\mathbf{Y}(T, 0)$ были по модулю меньше единицы; аналогично концу п. 1 формулируются и условия того, чтобы все решения были ограничены при $t \rightarrow \infty$. Собственные значения матрицы $\mathbf{Y}(T, 0)$ называются *мультипликаторами* T -периодической системы (4), а сама эта матрица $\mathbf{Y}(T, 0)$ — ее *матрицей монодромии*. Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(T + t_0, t_0) &= \mathbf{Y}(T + t_0, T)\mathbf{Y}(T, 0)\mathbf{Y}(0, t_0) = \\ &= \mathbf{Y}(t_0, 0)\mathbf{Y}(T, 0)[\mathbf{Y}(t_0, 0)]^{-1}, \end{aligned}$$

то собственные значения и собственные векторы матрицы монодромии не зависят от выбора начального момента времени (почему?).

Каждому мультипликатору ρ и соответствующему собственному вектору $\mathbf{d}$ отвечает решение $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(t, 0)\mathbf{d}$, обладающее следующим свойством:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t + T) &= \mathbf{Y}(t + T, 0)\mathbf{d} = \mathbf{Y}(t + T, T)\mathbf{Y}(T, 0)\mathbf{d} = \\ &= \mathbf{Y}(t, 0)\rho\mathbf{d} = \rho\mathbf{y}(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Этим и объясняется название «мультипликатор». Для каждой конкретной периодической системы их нетрудно подсчитать с помощью численного интегрирования этой системы, а для коэффициентов, близких к постоянным, — с помощью метода малого параметра (попробуйте разобрать его для системы $\dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}(t))\mathbf{y}$, где $|\alpha|$ мало).

Так как произведение всех собственных значений матрицы равно ее определителю (почему?), то из (9) получаем, что произведение всех мультипликаторов (в котором каждый мультипликатор берется столько раз, какова его кратность) равно

$$\prod_{j=1}^n \rho_j = \exp \int_0^T \text{сл.} \mathbf{A}(t) dt. \quad (18)$$

Поэтому если $\text{Re} \int_0^T \text{сл.} \mathbf{A}(t) dt > 0$, то среди ρ_j должен найтись по крайней мере один, по модулю больший чем единица, а тогда соответствующее решение (17) не ограничено при $t \rightarrow \infty$. (А можно проверить, что если неограничено хоть одно решение, то неограничены и все решения, за исключением некоторой их совокупности с менее чем n степенями свободы; продумайте это свойство, исходя из вида общего решения

линейной системы.) Аналогично, если $\text{Re} \int_0^T \text{сл.} \mathbf{A}(t) dt < 0$, то система

(4) имеет решения, неограниченные при $t \rightarrow -\infty$. Отсюда вытекает, в частности, что для того, чтобы все решения T -периодической системы (4) были ограничены на всей оси t , необходимо (но не достаточно!),

чтобы $\text{Re} \int_0^T \text{сл.} \mathbf{A}(t) dt = 0$.

Последнему условию удовлетворяет, в частности, система

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -p(t)y_1 \quad (\text{т. е. } \ddot{y}_2 + p(t)y_1 = 0), \quad p(t+T) \equiv p(t), \quad (19)$$

исследованию которой посвящено большое число работ; эта система имеет два мультипликатора, произведение которых в силу (18) равно единице. Анализируя ряд (13) для матрицы $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}$, Ляпунов доказал, что если функция $p(t) \geq 0$ вещественная и

$$0 < \int_0^T p(t) dt \leq \frac{4}{T},$$

то у характеристического уравнения для матрицы монодромии

$$\rho^2 - (y_{11}(T, 0) + y_{22}(T, 0))\rho + 1 = 0 \quad (20)$$

дискриминант отрицательный, а потому $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$, $\rho_1 \neq \rho_2$, т. е. каждое решение системы (19) ограничено на всей оси t .

Если для периодической системы (4) произвести замену $\mathbf{y} = \mathbf{R}(t)\mathbf{z}$, в обозначениях начала этого пункта, то получится система $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}\mathbf{z}$ (проверьте!). Вообще, если для какой-либо системы (4) возможна линейная замена $\mathbf{y} = \mathbf{H}(t)\mathbf{z}$ с ограниченными на всей оси матричными функциями $\mathbf{H}(t)$ и $[\mathbf{H}(t)]^{-1}$ после выполнения которой (4) переходит в систему с постоянными коэффициентами, то эта система (4) называется *приводимой*. Для приводимой системы все выводы об ограниченности или стремлении к нулю решений можно сделать из аналогичных утверждений для преобразованной системы, имеющей постоянные коэффициенты. Мы видим, что *всякая периодическая система является приводимой*.

В ряде работ детально изучен вопрос о приводимости периодических и даже почти-периодических (п. 7) систем, коэффициенты которых близки к постоянным. Здесь приводящая матрица $\mathbf{H}(t)$ получается в виде суммы асимптотически сходящегося (п. II.5.1) ряда по степеням малого параметра и само приведение понимается в соответствующем асимптотическом смысле.

По поводу приводимых систем см. книги [38, 135].

3. Уравнение Хилла. Так называется уравнение

$$\ddot{y} + [\lambda + \mu f_1(t) + \mu^2 f_2(t) + \dots]y = 0, \quad (21)$$

в котором все функции $f_j(t)$ периодичны с одним периодом; для простоты мы будем считать, что все $f_j(t + \pi) \equiv f_j(t)$, так как к этому случаю всегда можно перейти с помощью замены $t \rightarrow kt$; все величины будем считать вещественными. Важный частный случай, когда в квадратных скобках стоит $\lambda + \mu \cos 2t$, называется *уравнением Матье*. Мы рассмотрим вопрос об ограниченности решений уравнения (21) на всей оси t в зависимости от значений параметров λ и μ .

Обозначим через $\varphi(t; \lambda, \mu)$ и $\psi(t; \lambda, \mu)$ решения уравнения (21) при начальных условиях $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$ и $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$ соответственно; в обозначениях п. 1 это $y_{11}(t, 0)$ и $y_{12}(t, 0)$. Кроме того, обозначим

$$A = A(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} [\varphi(\pi; \lambda, \mu) + \psi(\pi; \lambda, \mu)]. \quad (22)$$

Тогда из характеристического уравнения (20) видно, что при $|A| < 1$ будет $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$, $\rho_1 \neq \rho_2$, т. е. каждое решение уравнения (21) будет ограничено на всей оси t ; если же $A > 1$ ($A < -1$), то $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$ (соответственно $\rho_2 < -1 < \rho_1 < 0$), т. е. каждое ненулевое решение уравнения (21) неограничено; но как дать ответ в терминах заданных функций $f_j(t)$ и параметров λ, μ ?

Считая $|\mu|$ малым, разложим функцию φ по степеням μ :

$$\varphi(t; \lambda, \mu) = \varphi_0(t; \lambda) + \varphi_1(t; \lambda)\mu + \varphi_2(t; \lambda)\mu^2 + \dots$$

Подстановка в уравнение (21) и в начальное условие дает после приравнения коэффициентов при одинаковых степенях μ :

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_0 + \lambda \varphi_0 &= 0, & \varphi_0|_{t=0} &= 1, \quad \dot{\varphi}_0|_{t=0} = 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + \lambda \varphi_1 &= -\varphi_0 f_1, & \varphi_1|_{t=0} &= 0, \quad \dot{\varphi}_1|_{t=0} = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \lambda \varphi_2 &= -\varphi_0 f_2 - \varphi_1 f_1, & \varphi_2|_{t=0} &= 0, \quad \dot{\varphi}_2|_{t=0} = 0, \dots\end{aligned}$$

Отсюда можно последовательно найти $\varphi_0 = \cos \sqrt{\lambda} t$, φ_1, φ_2 и т. д. Аналогично разлагая функцию ψ , получаем $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} t$, тогда как рекуррентные уравнения для дальнейших ψ_j те же, что для φ_j . Отсюда в силу (22) получаем

$$A = \cos \sqrt{\lambda} \pi + \frac{1}{2} [\varphi_1(\pi; \lambda) + \dot{\psi}_1(\pi; \lambda)] \mu + \dots \quad (23)$$

Так как области на плоскости λ, μ , которым отвечают ограниченные решения уравнения (21), отделяются от областей, которым отвечают неограниченные решения, критической линией $[A(\lambda, \mu)]^2 = 1$, то из (23) получается, что эта линия пересекает ось λ в точках $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), причем промежутки между этими точками принадлежат областям ограниченности. Можно показать (на чем мы здесь не будем останавливаться), что эти точки при $n > 0$ служат точками самопересечения указанной линии, так что картина выглядит примерно, как на рис. 121, где области неограниченности заштрихованы.

Для построения этих областей можно применить следующий прием. Заметим, что ветвям критической линии, проходящим через точки $\lambda = n^2$ с четным n , отвечает значение $A = 1$, а потому мультипликаторы $\rho_{1,2} = 1$. Значит, для каждой точки этих ветвей возможно построить π -периодическое решение уравнения (21) $y(t; \mu)$ (зависимости от λ нет, так как вдоль таких ветвей λ является функцией μ). Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов и подставим в (21) при некотором выбранном $n = 0, 2, 4, \dots$ разложения

$$y = y_0(t) + y_1(t)\mu + y_2(t)\mu^2 + \dots, \quad \lambda = n^2 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \dots, \quad (24)$$

так что рассматриваемая ветвь критической линии, проходит через точку $(n^2; 0)$. Подставив эти разложения в (21) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим уравнения

$$\begin{aligned}\ddot{y}_0 + n^2 y_0 &= 0, \\ \ddot{y}_1 + n^2 y_1 &= -[a_1 + f_1(t)]y_0(t),\end{aligned} \quad (25)$$

$$\ddot{y}_2 + n^2 y_2 = -[a_1 + f_1(t)]y_2(t) - [a_2 + f_2(t)]y_0(t), \quad (26)$$

.....

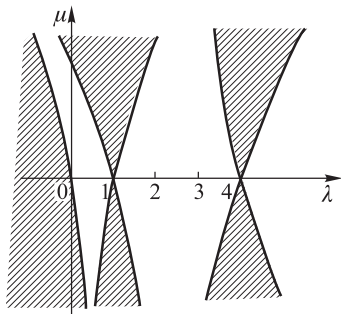


Рис. 121

Из первого уравнения

$$y_0 = A \cos nt + B \sin nt.$$

Так как правая часть (25) периодична с периодом π , то ее можно разложить в ряд Фурье по функциям $\cos 2kt$, $\sin 2kt$. Но так как и функция $y_1(t)$ должна быть π -периодична, то для отсутствия резонанса в этом разложении члены с $\cos nt$, $\sin nt$ должны отсутствовать, что дает

$$\int_0^{\pi} [a_1 + f_1(t)](A \cos nt + B \sin nt)_{\sin}^{\cos} nt dt = 0. \quad (27)$$

Пусть $n = 2, 4, 6, \dots$ Тогда из (27) получаем

$$(\alpha + a_1)A + \beta B = 0, \quad \beta A + (\gamma + a_1)B = 0, \quad (28)$$

где обозначено

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(t) \cos^2 nt dt, \quad \beta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(t) \cos^2 nt \sin nt dt,$$

$$\gamma = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(t) \sin^2 nt dt.$$

Если система (28) имеет ненулевое решение, то необходимо

$$\begin{vmatrix} \alpha + a_1 & \beta \\ \beta & \gamma + a_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (29)$$

откуда находим два вещественных (почему?) значения a_1 , отвечающие двум направлениям пересечения критической линией оси λ при $\lambda = n^2$. Каждому из этих значений отвечают в силу (28) значения A, B , определенные с точностью до коэффициента пропорциональности. Но так как и все решение $y(t; \mu)$ определено с точностью до скалярного множителя, то y можно пронормировать, например, условием $y(0; \mu) = 1$, т. е.

$$y_0(0) = 1, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \dots \quad (30)$$

Первым из этих равенств коэффициенты A, B определяются однозначно.

Удовлетворив условиям (27), мы можем найти общее решение уравнения (25) в виде

$$y_1 = Y_1(t) + A_1 \cos nt + B_1 \sin nt,$$

где $Y_1(t)$ — некоторая π -периодическая функция, а A_1, B_1 — произвольные постоянные. Эти произвольные постоянные, а также коэффициент a_2 , находим из требования отсутствия резонанса для уравнения (26) и из второго равенства (30) и т. д. Продолжая таким образом, можно найти любое число членов разложений (24). (Отметим, что бывают случаи, например для рассматриваемого ниже уравнения Матье при $n \geq 2$, когда корни уравнения (29) совпадают, а различие ветвей критической линии, пересекающих ось λ , обнаруживается в членах с высшими степенями μ .) При этом мы, вообще говоря, получаем

лишь одно периодическое решение уравнения (21), другое обычно имеет вид $ty(t, \mu) + \tilde{y}(t, \mu)$ ($\tilde{y}(t + 2\pi, \mu) \equiv \tilde{y}(t, \mu)$), т. е. неограничено.

Для комбинаций значений λ, μ , которым отвечают неограниченные решения, т. е. для заштрихованной на рис. 121 зоны, нетрудно получить асимптотические разложения мультипликаторов по степеням μ . Такие решения в силу п. 2 должны иметь вид

$$y = e^{\pm st} R(t) \quad (e^{\pm s\pi} = \rho_{1,2}; R(t + \pi) \equiv R(t)), \quad (31)$$

где s вещественное (почему?). Так как

$$s|_{\mu=0} = 0, \quad R(t)|_{\mu=0} = A \cos nt + B \sin nt,$$

то при подстановке (31) в (21) положим $\lambda = n^2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu^2 + \dots$,

$$s = s_1\mu + s_2\mu^2 + \dots; \quad R(t) = A \cos nt + B \sin nt + R_1(t)\mu + R_2(t)\mu^2 + \dots \quad (32)$$

Приравнивая после подстановки коэффициенты при μ , получим

$$\ddot{R}_1 + n^2 R_1 = -[\lambda_1 + f_1(t)](A \cos nt + B \sin nt) \mp 2ns_1(A \sin nt + B \cos nt),$$

откуда из условия отсутствия резонанса находим (проверьте!)

$$(\lambda_1 + \alpha)A + (\mp 2ns_1 + \beta)B = 0, \quad (\pm 2ns_1 + \beta)A + (\lambda_1 + \gamma)B = 0, \quad (33)$$

где обозначения α, β, γ имеют тот же смысл, что в (28). Из (33) получаем

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 + \alpha & \mp 2ns_1 + \beta \\ \pm 2ns_1 + \beta & \lambda_1 + \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad (34)$$

т. е.

$$4n^2 s_1^2 - \beta^2 + (\lambda_1 + \alpha)(\lambda_1 + \gamma) = 0.$$

Отсюда

$$s_1 = \frac{1}{2n} \sqrt{\beta^2 - (\lambda_1 + \alpha)(\lambda_1 + \gamma)},$$

а для вещественности правой части λ_1 должно содержаться в интервале

$$-\frac{\alpha + \gamma}{2} - \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma)^2}{4} + \beta^2} \leq \lambda_1 \leq -\frac{\alpha + \gamma}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma)^2}{4} + \beta^2}.$$

Теперь из (33) можно найти $A : B$. Аналогично можно получить дальнейшие члены разложений (32). Эти разложения приведены в книге [124].

При $n = 0$ будет $y_0 \equiv 1$ и взамен (27) получаем равенство $\int_0^\pi [a_1 + f_1(t)] dt = 0$, откуда получаем только одно значение

$$a_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_1(t) dt.$$

Дальнейшие выкладки подобны проведенным выше.

Аналогично, если n нечетное, то $A = -1$, $\rho_{1,2} = -1$, и решение уравнения (21) будет удовлетворять соотношению $y(t + \pi) \equiv -y(t)$, откуда $y(t + 2\pi) \equiv y(t)$. Значит, можно написать разложение (24) и проводить выкладки, как выше, но считая все участвующие функции не π -, а 2π -периодическими.

Рассмотрим, например, критическую линию для уравнения Матье в окрестности значения $\lambda = 1^2$. Мы получаем

$$\ddot{y}_0 + \ddot{y}_1\mu + \ddot{y}_2\mu^2 + \dots + (1 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \dots + \mu \cos 2t)(y_0 + y_1\mu + y_2\mu^2 + \dots) = 0. \quad (35)$$

Отсюда, как выше,

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0, \quad y_0 = A \cos t + B \sin t.$$

Далее,

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -(a_1 + \cos 2t)(A \cos t + B \sin t). \quad (36)$$

Из условия отсутствия резонанса получаем (проверьте!)

$$\left(a_1 + \frac{1}{2}\right)A = 0, \quad \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)B = 0,$$

откуда $a_1 = \pm \frac{1}{2}$. Заметим, что уравнение Матье переходит в себя при подстановке $\mu \rightarrow -\mu$, $t \rightarrow \frac{\pi}{2} + t$; поэтому достаточно рассмотреть одну ветвь критической линии, вторая получится заменой $\mu \rightarrow -\mu$. Положим $a_1 = -1/2$, тогда $B = 0$, а в силу (30) $A = 1$ (если выбрать $a_1 = 1/2$, то y надо нормировать иначе, например, приняв $\dot{y}(0, \mu) = 1$). Из (36) получаем

$$y_1 = \frac{1}{16} \cos 3t + A_1 \cos t + B_1 \sin t.$$

Но из (35), приравнявая коэффициенты при μ^2 , получаем

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + y_2 &= -(a_1 + \cos 2t)y_1(t) - a_2y_0(t) = \\ &= -\left(-\frac{1}{2} + \cos 2t\right)\left(\frac{1}{16} \cos 3t + A_1 \cos t + B_1 \sin t\right) - a_2 \cos t. \end{aligned}$$

Из условия отсутствия резонанса получаем $a_2 = -\frac{1}{32}$, $B_1 = 0$ (проверьте!), а из второго равенства (30) $A_1 = -\frac{1}{16}$. Ограничившись этими вычислениями,

находим уравнение критической линии $\lambda = 1 - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{32}\mu^2 + \dots$

Каждой из ветвей критической линии для уравнения Матье, проходящей через точку $\lambda = n^2$, $\mu = 0$, отвечает одно (с точностью до постоянного множителя) четное или нечетное периодическое решение, которое при $\mu = 0$ обращается соответственно в $\cos nt$ или в $\sin nt$. При определенной нормировке эти решения называются *функциями Матье* и обозначаются соответственно через $se_n(t; q)$ и $se_n(t; q)$, где $q = 16\mu$ (условие нормировки: в ряд Фурье для $se_n(t; q)$ член с $\cos nt$ входит с коэффициентом 1; аналогично для $se_n(t; q)$). Теории и приложениям функций Матье посвящена книга [80].

4. Параметрический резонанс. Обращаем внимание на то, что хотя при малых $|\mu|$ коэффициент $\lambda + \mu f_1(t) + \dots$ уравнения (21) как угодно близок к постоянному, а все решения при замороженном коэффициенте ограничены, тем не менее оказывается возможным выбрать параметры так, что из-за специального характера периодического изменения коэффициента решение получится экспоненциально раскачивающимся при $t \rightarrow \infty$. Это явление называется *параметрическим резонансом*. Как видно из п. 3, параметрический резонанс будет наблюдаться, в частности, для уравнения $\ddot{y} + (1 + \mu \cos 2t)y = 0$.

Явление параметрического резонанса легко наблюдать на примере маятника, точка подвеса которого совершает принудительные колебания по заданному закону $y = f(t)$. Уравнение колебаний такого маятника, которое мы предлагаем вывести читателю, имеет вид $\ddot{\vartheta} + [(g/l) + (f''(t)/l)] \sin \vartheta = 0$, где ϑ — угол отклонения от вертикали, g — ускорение земного тяготения и l — длина маятника. Полагая

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \quad f(t) = M \cos \omega t, \quad \omega t = 2t_1$$

в ограничиваясь линейным приближением, получаем уравнение

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \left[\left(\frac{2\omega_0}{\omega} \right)^2 - \frac{4M}{l} \cos 2t_1 \right] \vartheta = 0 \quad (37)$$

(проверьте!). Мы видим, что при $\frac{2\omega_0}{\omega} = 1$, т. е. когда частота колебаний точки подвеса в два раза превышает собственную частоту колебаний, наступает параметрический резонанс, т. е. амплитуда колебаний маятника начинает разрастаться. (Аналогичная ситуация используется при раскачивании на качелях, которые можно схематизировать как маятник переменной длины. Мы видим, что для такого раскачивания нужно на протяжении каждого полного цикла качаний дважды присесть и дважды подытаться; это эмпирически известно всем детям.) Еще более эффектно рассмотрение *обратного маятника*, расположенного вертикально вверх от точки подвеса; конечно, такой маятник должен быть подвешен не на нити, а на стержне пренебрежимо малого веса. Уравнение колебаний получается заменой g на $-g$, т. е. в (37) нужно перед $\left(\frac{2\omega_0}{\omega} \right)^2$ поменять знак. Из рис. 121 видно, что если при заданных M и l выбрать $\frac{\omega_0}{\omega}$ достаточно малым, т. е. заставить точку подвеса вибрировать достаточно часто, то вертикальное положение обратного маятника окажется устойчивым!

К понятию параметрического резонанса можно прийти также из следующих более грубых, но полезных соображений. Будем считать $\lambda > 0$ конечным (порядка 1), а μ малым. Легко проверить, что при $\mu = 0$ выражение

$$I = \frac{1}{2} (\dot{y}^2 + \lambda y^2),$$

пропорциональное полной энергии системы, остается инвариантным, т. е. не зависит от t . Если же $\mu \neq 0$, то

$$\frac{dI}{dt} = -\mu [f_1(t) + \mu f_2(t) + \dots] y \dot{y}. \quad (38)$$

При малых μ решения уравнения (21) должны быть «почти гармоническими», т. е. иметь вид $y = M \sin(\sqrt{\lambda}t + \varphi)$, где $M = M(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ — медленно меняющиеся функции, т. е. функции, скорость изменения которых обращается в нуль вместе с μ . Из (38) получаем тогда, что с точностью до величин высшего порядка малости

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\mu f_1(t) M \sin(\sqrt{\lambda}t + \varphi) M \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}t + \varphi) = \\ &= -\frac{\mu M^2 \sqrt{\lambda}}{2} \sin(2\sqrt{\lambda}t + 2\varphi) f_1(t). \end{aligned} \quad (39)$$

Так как фурье-компоненты функции $f(t)$ имеют частоты $2, 4, 6, \dots$, то если $\sqrt{\lambda}$ не является целым числом, то среднее значение правой части за большой промежуток времени близко к нулю, т. е. средняя скорость изменения I имеет порядок малости выше μ . Если же $\lambda = 1^2, 2^2, \dots$, то среднее значение правой части (39) может быть отлично от нуля, т. е. I будет изменяться со скоростью порядка μ . Например, если $f(t) = \cos 2t$ и $\lambda = 1$, то среднее значение скорости изменения I равно $-\frac{\mu M^2}{4} \sin 2\varphi$, т. е. I будет расти или убывать в зависимости от значения начальной фазы φ . И этот факт хорошо известен детям: если приседать на спуске и вставать на подъеме, то качания будут усиливаться, а если поступать наоборот, — то затухать.

5. Гамильтоновы системы. Пусть в канонической системе уравнений (VI.3.7) функция Гамильтона H представляет собой квадратичную форму

$$H(t, \mathbf{y}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^* \mathbf{P}(t) \mathbf{y} + \mathbf{p}^* \mathbf{Q}(t) \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^* \mathbf{R}(t) \mathbf{p}, \quad \mathbf{P}^* = \mathbf{P}, \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \quad (40)$$

с вещественными коэффициентами. Тогда эта система приобретает вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{y} + \mathbf{R}(t) \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{P}(t) \mathbf{y} - \mathbf{Q}^*(t) \mathbf{p}, \quad (41)$$

т. е. является линейной. Иногда эту систему записывают в виде одного векторно-матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}' = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(t) & \mathbf{Q}^*(t) \\ \mathbf{Q}(t) & \mathbf{R}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где под $\mathbf{J}$ понимается квадратная матрица $2n$ -го порядка

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

(Докажите эквивалентность формул (41) и (42), опираясь на следующее простое полезное правило умножения блочных матриц: это умножение проводится по обычным формулам, если размеры блоков согласованы так, что выполняемые действия имеют смысл: например,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{AP} + \mathbf{BR} & \mathbf{AQ} + \mathbf{BS} \\ \mathbf{CP} + \mathbf{DR} & \mathbf{CQ} + \mathbf{DS} \end{pmatrix},$$

если сомножители имеют размеры $(k+l) \times (m+n)$ и $(m+n) \times (u+v)$ при естественном смысле этого сокращенного обозначения.)

Нетрудно проверить, что для любых двух решений $\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{p}_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix}$ уравнения (42) будет

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{p}_1 \end{pmatrix}^* \mathbf{J} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{y}_1^* \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1^* \mathbf{y}_2 = \text{const.}$$

Для доказательства этого достаточно продифференцировать левую часть по t и воспользоваться уравнением (42), а также равенствами

$$\mathbf{J}^2 = - \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^* \mathbf{J}$$

(проделайте это!). Аналогичным свойством обладает $(2n \times k)$ матричное (k любое) решение уравнения

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(t) & \mathbf{Q}^*(t) \\ \mathbf{Q}(t) & \mathbf{R}(t) \end{pmatrix} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(t) & \mathbf{R}(t) \\ -\mathbf{P}(t) & -\mathbf{Q}^*(t) \end{pmatrix} \mathbf{U}. \quad (43)$$

Рассмотрим теперь каноническую систему (42) с T -периодическими коэффициентами и докажем для нее *теорему Ляпунова–Пуанкаре: характеристическое уравнение для матрицы монодромии этой системы является возвратным*. При этом уравнение вида

$$f(\rho) \equiv a_0 \rho^{2n} + a_1 \rho^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} \rho + a_{2n} = 0 \quad (44)$$

называется *возвратным*, если $a_0 = a_{2n}$, $a_1 = a_{2n-1}, \dots$, другими словами, если $\rho^{2n} f(1/\rho) \equiv f(\rho)$.

Для доказательства будем считать матрицу-функцию $\mathbf{U}(t)$ в уравнении (43) квадратной и удовлетворяющей начальному условию $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}_{2n}$ (т.е. единичной матрице порядка $2n$); тогда $\mathbf{U}(T)$ и будет матрицей монодромии. В силу доказанного будет $\mathbf{U}^*(t) \mathbf{J} \mathbf{U}(t) = \text{const}$, и потому из начального условия следует, что

$$\mathbf{U}^*(t) \mathbf{J} \mathbf{U}(t) \equiv \mathbf{J}.$$

Кроме того, так как след матрицы коэффициентов в правой части (43) равен нулю, то в силу (9) будет $\det \mathbf{U}(t) = \text{const}$, а потому из начального условия следует, что

$$\det \mathbf{U}(t) \equiv 1.$$

Поэтому для характеристического полинома $f(\rho)$ матрицы $\mathbf{U}(T)$ будет (проверьте вычисления!)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\rho}\right) &= \det \left[\mathbf{U}(T) - \frac{1}{\rho} \mathbf{I}_{2n} \right] = \det \left[\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{U}^*(T))^{-1} \mathbf{J} - \mathbf{J}^{-1} \frac{1}{\rho} \mathbf{I}_{2n} \mathbf{J} \right] = \\ &= \det \left[(\mathbf{U}^*(T))^{-1} - \frac{1}{\rho} \mathbf{I}_{2n} \right] = \frac{1}{\rho^{2n}} \det [(\mathbf{U}^*(T))^{-1} (\rho \mathbf{I}_{2n} - \mathbf{U}^*(T))] = \\ &= \frac{1}{\rho^{2n}} [\det \mathbf{U}^*(T)]^{-1} \det [\mathbf{U}^*(T) - \rho \mathbf{I}_{2n}] = \frac{1}{\rho^{2n}} f(\rho), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Возвратное уравнение (44) вместе с любым корнем ρ имеет также корень $1/\rho$. Поэтому гамильтонова периодическая система не может иметь все решения стремящимися к нулю при $t \rightarrow \infty$. Для ограниченности всех решений необходимо, чтобы все мультипликаторы по модулю равнялись единице.

В книге [82] приведены некоторые результаты М. Г. Крейна, относящиеся к параметрическому резонансу (п. 4) для гамильтоновых систем с более чем одной степенью свободы. Рассматривается система вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (H_1 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots), \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} (H_1 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots), \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где все H_j — квадратичные формы переменных $y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$ с π -периодическими по t коэффициентами, причем форма H_0 имеет постоянные коэффициенты и положительно определенная. Пусть при $\lambda = 1, \mu = 0$ система имеет корни характеристического уравнения все различные и чисто мнимые, равные $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \dots, \pm i\omega_n$, т. е. все решения этой системы ограничены при $-\infty < t < \infty$. Тогда, как и в п. 3, в плоскости λ, μ могут быть области параметрического резонанса. Не останавливаясь здесь на вопросе о нахождении границ этих областей, отметим только, что эти области могут примыкать к оси λ лишь в точках $\frac{2N}{\omega_j \pm \omega_k}$, где $N = 1, 2, 3, \dots$ (Сопоставьте это утверждение с результатами п. 3 и рассмотрите вопрос о частотах параметрического возбуждения заданной линейной автономной гамильтоновой системы.)

6. Неоднородные системы. Некоторые утверждения о поведении решений системы (2) непосредственно вытекают из формулы (12).

1. Пусть $\|\mathbf{Y}(t, \tau)\| < \text{const}$ ($t_0 \leq \tau \leq t < \infty$), $\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\| dt < \infty$. Тогда все решения системы (2) ограничены при $t \rightarrow \infty$.

2. Пусть $\|\mathbf{Y}(t, \tau)\| \leq C e^{-\alpha(t-\tau)}$ ($t_0 \leq \tau \leq t < \infty; \alpha > 0$), $\|\mathbf{f}(t)\| < \text{const}$. Тогда все решения системы (2) ограничены при $t \rightarrow \infty$.

3. Пусть $\|\mathbf{Y}(t, \tau)\| \leq C e^{-\alpha(t-\tau)}$ ($t_0 \leq \tau \leq t < \infty; \alpha > 0$), $\|\mathbf{f}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда и все решения системы (2) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Для доказательства последнего факта (остальные доказательства мы предоставляем читателю) заметим, что в приведенных предположениях

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{Y}(t, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \right\| &\leq C \left[\int_{t_0}^{(t+t_0)/2} + \int_{(t+t_0)/2}^t \right] e^{-\alpha(t-\tau)} \|\mathbf{f}(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \frac{C}{\alpha} \left[\max_{t_0 \leq \tau \leq (t+t_0)/2} \|\mathbf{f}(\tau)\| e^{-\alpha(t-t_0)/2} + \max_{(t+t_0)/2 \leq \tau \leq t} \|\mathbf{f}(\tau)\| \right], \end{aligned}$$

откуда и вытекает наше утверждение (почему?).

В приведенных теоремах утверждалось, что *все* решения системы (2) обладают тем или иным свойством. Имеется большое число теорем, в которых утверждается, что система: (2) обладает *по крайней мере одним* решением с заданным свойством (ограниченностью, стремлением к нулю, периодичностью и т. п.). Здесь мы остановимся только на вопросе о существовании периодического решения. Рассмотрим сначала систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{f}(t+T) \equiv \mathbf{f}(t). \quad (46)$$

Разложим функцию $\mathbf{f}(t)$ и искомое решение $\mathbf{x}(t)$ в ряды Фурье:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_k e^{ik\omega t} \mathbf{f}_k, \quad \mathbf{x}(t) = \sum_k e^{ik\omega t} \mathbf{x}_k, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Подстановка в (46) и приравнивание коэффициентов дают

$$(\mathbf{A} - ik\omega \mathbf{I}) \mathbf{x}_k = -\mathbf{f}_k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Таким образом, поставленная задача имеет ровно одно решение, если ни одно из чисел $ik\omega$ не является собственным значением матрицы $\mathbf{A}$. Если при каком-либо k_0 это условие нарушено, то вектор $\mathbf{f}_{k_0}$ должен удовлетворять соответствующим условиям ортогональности, в противном, случае наступает резонанс, и периодическое решение отсутствует. Если же эти условия ортогональности выполнены, то решение определено с точностью до слагаемого $e^{ik_0\omega t} \mathbf{x}_{k_0}$, где $\mathbf{x}_{k_0}$ — любой собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, отвечающий собственному значению $ik_0\omega$. (Продумайте все эти утверждения; об ортогональности чему здесь говорится?)

Рассмотрим теперь неоднородную периодическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{A}(t+T) \equiv \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{f}(t+T) \equiv \mathbf{f}(t). \quad (47)$$

Эта система остается инвариантной при замене $t \rightarrow t+T$; поэтому для любого ее решения $\mathbf{x}(t)$ функция $\mathbf{x}(t+T)$ также будет решением этой

системы. Но отсюда следует, что если какое-либо решение системы (47) удовлетворяет условию

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T), \quad (48)$$

то $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t + T)$: в самом деле, обе части этого равенства удовлетворяют системе (47) и совпадают при $t = 0$, а значит, тождественно совпадают (почему?).

В силу формулы (12) условие периодичности (48) можно переписать в виде

$$\mathbf{x}(0) = \int_0^T \mathbf{Y}(T, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau + \mathbf{Y}(T, 0) \mathbf{x}(0). \quad (49)$$

Таким образом, если значение 1 не является собственным для матрицы монодромии $\mathbf{Y}(T, 0)$, то уравнение (49) однозначно разрешимо относительно $\mathbf{x}(0)$, т. е. система (47) имеет ровно одно T -периодическое решение при любой T -периодической функции $\mathbf{f}(t)$. Если, же значение 1 является собственным, то средний член в (49), а тем самым и функция $\mathbf{f}(t)$ должны удовлетворять условиям ортогональности, при выполнении которых значение $\mathbf{x}(0)$ определено с точностью до произвольного собственного вектора матрицы $\mathbf{Y}(T, 0)$, отвечающего собственному значению 1. Наличие собственного значения 1 у матрицы монодромии означает, что соответствующая (47) однородная система имеет ненулевые T -периодические решения. Можно доказать (попробуйте!), что если в этом случае все решения однородной системы ограничены при $t \rightarrow \infty$, а указанные условия ортогональности не выполнены, то решение системы (47) при $t \rightarrow \infty$ становится неограниченным со скоростью степенной функции, т. е. наступает резонанс.

Для систем (47), а также (46) иногда пользуются следующим критерием, доказать который мы предоставляем желающим: *для существования по крайней мере одного T -периодического решения необходимо и достаточно,*

чтобы $\int_0^T (\mathbf{z}(t), \mathbf{f}(t)) dt = 0$ для всякого T -периодического решения соответствующей сопряженной системы (6).

Разновидностью неоднородных систем служат *системы с импульсными воздействиями*; решение $\mathbf{x}(t)$ такой системы в заданные моменты времени t_j (где $t_0 < t_1 < t_2 < \dots \rightarrow \infty$) испытывает конечные скачки $\Delta_j \mathbf{x}$, которые в простейшем варианте заданы (а вообще могут зависеть от искомого решения), а в промежутках между импульсами удовлетворяет уравнению (2). Такую систему можно с помощью дельта-функции записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) + \sum_j \Delta_j \mathbf{x} \delta(t - t_j).$$

Поэтому для решения можно воспользоваться той же формулой (12), но с видоизмененной функцией $\mathbf{f}(t)$. Применив основное свойство интеграла, содержащего дельта-функцию, получим

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t [\mathbf{Y}(t, \tau)] \mathbf{f}(\tau) d\tau + \mathbf{Y}(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \sum_{t_j < t} \mathbf{Y}(t, t_j) \Delta_j \mathbf{x}.$$

С помощью этой формулы, которую легко вывести также из принципа суперпозиции (как?), и можно проводить исследование системы.

7. Почти-периодические функции. Важное расширение класса периодических функций составляют *почти-периодические функции*, которые получаются в результате наложения колебаний с, вообще говоря, несоизмеримыми периодами. Дело в том, что если мы имеем две периодические функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, периоды T_1 и T_2 которых соизмеримы, т.е. находятся в рациональном отношении, $T_1 = m_1 T$, $T_2 = m_2 T$ (m_1, m_2 — целые), то сумма этих функций, а также их произведение и т.п. представляют собой периодические функции с периодом $m_1 m_2 T$. Однако если периоды T_1 и T_2 несоизмеримы, то сумма $f_1(t) + f_2(t)$ уже не будет периодической: например, функция $\sin t + \sin \sqrt{2}t$ не периодична, она принадлежит к более широкому классу функций, называемых *почти-периодическими*.

Почти-периодическими являются по определению все функции, которые можно равномерно аппроксимировать на всей оси t с любой степенью точности конечными суммами вида

$$f(t) = \sum_j c_j e^{i\omega_j t}, \quad (50)$$

где ω_j — любые вещественные числа, а c_j — любые комплексные коэффициенты. В частности, такими будут всевозможные суммы бесконечных рядов вида (50), для которых

$$\sum_j |c_j| < \infty, \quad (51)$$

что обеспечивает применение к ряду (50) признака Вейерштрасса равномерной сходимости на всей оси t . (Впрочем, пользуясь другими видами уклонения функций, можно ослабить требование (51), а также рассматривать разрывные почти-периодические функции.) Различные классы таких функций и их свойства рассмотрены в книге датского математика Г. Бора (1887–1951) [14], положившего начало этой теории в 1923 г., а также в [69].

Отметим без доказательства некоторые свойства непрерывных почти-периодических функций. Сумма, произведение, частное (если знаменатель не может как угодно приближаться к нулю) двух таких функций, предел равномерно сходящейся на всей оси t последовательности этих функций будут снова почти-периодическими функциями. Для почти-периодичности непрерывной функции $f(t)$ необходимо и достаточно, чтобы из любой последовательности «сдвижек» $f(t + \tau_n)$ можно было выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Из последнего вытекает, в частности, что если $f(t) \neq \text{const}$, то она не может стремиться к постоянной при $t \rightarrow \infty$. Подчеркнем, что всякая периодическая функция в то же время является почти-периодической, тогда как обратное отнюдь не обязательно.

Всякая почти-периодическая функция ограничена на всей оси t и обладает средним значением

$$\overline{f(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{\alpha-T}^{\alpha+T} f(t) dt,$$

не зависящим от значения α . Так как

$$\overline{e^{i\omega t}} = \begin{cases} 0 & (\omega \neq 0), \\ 1 & (\omega = 0), \end{cases}$$

(проверьте!), то из представления (50) вытекает, что

$$\overline{f(t)e^{-i\omega t}} = \begin{cases} c_j, & \text{если } \omega \text{ равно одному из } \omega_j, \\ 0 & \text{для всех остальных } \omega. \end{cases} \quad (52)$$

Таким образом, спектр (т. е. набор частот ω_j) заданной каким угодно способом почти-периодической функции $f(t)$, а также соответствующие амплитуды c_j , можно установить с помощью вычисления средних значений $\overline{f(t)e^{-i\omega t}}$. Из (50) следует также формула

$$|\overline{f(t)}|^2 = \overline{f(t)[f(t)]^*} = \sum_{j,k} c_j c_k^* \overline{e^{i(\omega_j - \omega_k)t}} = \sum_j |c_j|^2,$$

которая для периодических функций превращается в равенство Парсеваля (см., например, ЛВМ, п. XVII.27).

Отметим характерную особенность вещественных почти-периодических функций, которая легко следует из (52): в спектр этой функции вместе с любой частотой ω_j входит и частота $\omega_{-j} = -\omega_j$, причем $c_{-j} = c_j^*$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и почти-периодическим неоднородным членом:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{f}(t) = \sum_j e^{i\omega_j t} \mathbf{c}_j. \quad (53)$$

Если искать решение в виде почти-периодической функции с тем же спектром, т. е. $\mathbf{x}(t) = \sum_j e^{i\omega_j t} \mathbf{x}_j$, то мы получим, что должно быть

$$(\mathbf{A} - i\omega_j \mathbf{I})\mathbf{x}_j = -\mathbf{f}_j.$$

Если ни одно из значений $i\omega_j$ не является собственным для матрицы $\mathbf{A}$, то искомое решение должно иметь вид

$$\mathbf{x}(t) = - \sum_j e^{i\omega_j t} (\mathbf{A} - i\omega_j \mathbf{I})^{-1} \mathbf{f}_j. \quad (54)$$

Так и будет на самом деле, если матрица $\mathbf{A}$ не имеет чисто мнимых собственных значений: тогда система (53) имеет ровно одно почти-периодическое решение, которое определяется формулой (54). Однако если имеется собственное значение $i\tilde{\omega}$, даже если $\tilde{\omega}$ и не входит в спектр, то среди чисел ω_j могут найтись как угодно близкие к $\tilde{\omega}$, а тогда норма $\|(\mathbf{A} - i\omega_j \mathbf{I})^{-1}\|$ будет

как угодно велика (почему?) и ряд (54) может разойтись, если это возрастание не будет нейтрализовано убыванием коэффициентов f_j .

В приложениях чаще всего встречаются почти-периодические функции, спектр которых получается в результате наложения конечного числа несоизмеримых частот, другими словами, состоит из частот вида $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_p\omega_p$, где величины $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ заданы, а $m_1, m_2, \dots, m_p$ — произвольные целые числа. Такие функции называют *квазипериодическими*. Их впервые начал изучать П.Г.Болье в 1893 г.; он, в частности, заметил, что каждую такую функцию можно записать в виде $f(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_p t)$, где $f(s_1, s_2, \dots, s_p)$ — некоторая функция, 2π -периодическая по каждому аргументу (обратное очевидно, если разложить функцию f в p -кратный ряд Фурье).

8. Асимптотическое разложение решений при $t \rightarrow \infty$. Имеется большое число математических работ, в которых изучается асимптотическое поведение решений системы (4) при $t \rightarrow \infty$ в общем и специальных случаях. Мы приведем лишь несколько результатов в этом направлении, отослав интересующихся к дальнейшей литературе [2, 9, 18, 49, 132].

Рассмотрим сначала вопрос об асимптотическом разложении решений при $t \rightarrow \infty$. Чтобы знать, чего здесь можно ожидать, примем сначала $n = 1$ и рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{y} = \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots \right) t^k y,$$

где $k \geq 0$ — некоторое целое число. Разделение переменных, интегрирование и последующее потенцирование дают

$$y = C \exp \left(\frac{a_0}{k+1} t^{k+1} + \frac{a_1}{k} t^k + \dots + a_k t \right) t^{a_{k+1}} \exp \left(-\frac{a_{k+2}}{t} - \frac{a_{k+3}}{2t^2} - \dots \right).$$

Разложение при больших t второй экспоненты в ряд и приведение подобных членов приводит к формуле вида

$$y = C \exp \left(\frac{a_0}{k+1} t^{k+1} + \dots + a_k t \right) t^{a_{k+1}} \left(1 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \dots \right).$$

В случае $k = -1$ формула получается аналогичная, но без первой экспоненты. Наконец, для $k < -1$ получается формула вида

$$y = C \left(1 + \frac{b_1}{t-(k+2)+1} + \frac{b_2}{t-(k+2)+2} + \dots \right)$$

(проверьте!).

Оказывается, что и для любого n разложения решений имеют вид, аналогичный приведенному, однако в случае $k \geq 0$ получающиеся ряды сходятся, вообще говоря, лишь асимптотически (пп. II.5.1, 2). Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)t^k \mathbf{y}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots; \quad \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + \frac{\mathbf{A}_1}{t} + \frac{\mathbf{A}_2}{t^2} + \dots \quad (55)$$

(последнее равенство может пониматься в асимптотическом смысле). Тогда можно доказать, что каждому собственному значению λ_j матрицы $\mathbf{A}_0$ отвечает решение (55), имеющее вид

$$\mathbf{y} = \exp\left(\frac{\lambda_j}{k+1} t^{k+1} + \alpha_1 t^k + \dots + \alpha_k t\right) t^\beta \left(\mathbf{b}_0 + \frac{\mathbf{b}_1}{t} + \frac{\mathbf{b}_2}{t^2} + \dots\right), \quad (56)$$

где ряд в последних круглых скобках сходится к своей сумме, вообще говоря, лишь асимптотически. Постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots$ можно подобрать по методу неопределенных коэффициентов, подставив (56) в (55), что после сокращения даст

$$\begin{aligned} & (\lambda_j t^k + \alpha_1 k t^{k-1} + \dots + \alpha_k) \left(\mathbf{b}_0 + \frac{\mathbf{b}_1}{t} + \frac{\mathbf{b}_2}{t^2} + \dots\right) + \\ & + \beta \left(\frac{\mathbf{b}_0}{t} + \frac{\mathbf{b}_1}{t^2} + \frac{\mathbf{b}_2}{t^3} + \dots\right) + \left(-\frac{\mathbf{b}_1}{t^2} - 2\frac{\mathbf{b}_2}{t^3} - 3\frac{\mathbf{b}_3}{t^4} - \dots\right) = \\ & = t^k \left(\mathbf{A}_0 + \frac{\mathbf{A}_1}{t} + \frac{\mathbf{A}_2}{t^2} + \dots\right) \left(\mathbf{b}_0 + \frac{\mathbf{b}_1}{t} + \frac{\mathbf{b}_2}{t^2} + \dots\right), \quad (57) \end{aligned}$$

и приравняв после раскрытия скобок коэффициенты при одинаковых степенях t .

Пусть для определенности $k = 1$ и собственное значение λ_j простое. Тогда такое приравнивание приводит к равенствам

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_0 \mathbf{b}_0 - \lambda_j \mathbf{b}_0 &= 0; \quad \mathbf{A}_0 \mathbf{b}_1 - \lambda_j \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_0 - \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_0; \\ \mathbf{A}_0 \mathbf{b}_2 - \lambda_j \mathbf{b}_2 &= \alpha_1 \mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_1 + \beta \mathbf{b}_0 - \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_0; \\ \mathbf{A}_0 \mathbf{b}_3 - \lambda_j \mathbf{b}_3 &= \alpha_1 \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_2 + \beta \mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_3 \mathbf{b}_0; \dots \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Из первого мы видим, что $\mathbf{b}_0$ — это собственный вектор матрицы $\mathbf{A}_0$, отвечающий собственному значению λ_j . Зафиксировав этот вектор, мы можем найти α_1 из условия ортогональности правой части второго равенства вектору $\mathbf{d} \neq 0$, для которого $\mathbf{A}_0^* \mathbf{d} = \lambda_j^* \mathbf{d}$ (вспомните условие разрешимости уравнения $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$), т. е.

$$\alpha_1 (\mathbf{b}_0, \mathbf{d}) - (\mathbf{A}_1 \mathbf{b}_0, \mathbf{d}) = 0 \quad (59)$$

(несложно показать, что для простого собственного значения $(\mathbf{b}_0, \mathbf{d}) \neq 0$). Если это условие выполнено, то из второго равенства (58) вектор $\mathbf{b}_1$ получается с одной степенью свободы: $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'_1 + C_1 \mathbf{b}_0$. Условие ортогональности для третьего равенства (58) в силу (59) можно переписать в виде

$$\alpha_1 (\mathbf{b}'_1, \mathbf{d}) - (\mathbf{A}_1 \mathbf{b}'_1, \mathbf{d}) + \beta (\mathbf{b}_0, \mathbf{d}) - (\mathbf{A}_2 \mathbf{b}_0, \mathbf{d}) = 0, \quad (60)$$

и потому из него определяется β , после чего получаем $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}'_2 + C_2 \mathbf{b}_0$. Записав затем условие ортогональности для четвертого равенства (58), мы с помощью условий (59) и (60) получаем однозначно C_1 (проверьте!), после чего $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}'_3 + C_3 \mathbf{b}_0$. Затем из следующего равенства получаем C_2 и т. д.

Таким путем можно получить асимптотическое разложение всех решений системы (55), если все собственные значения матрицы $\mathbf{A}_0$ простые или, что

немного шире, если матрица $\mathbf{A}_0$ имеет жордановы клетки только первого порядка (п. IV.3.3). Форму разложения решения в случае клеток выше первого порядка, а также доказательство того, что построено не просто какое-то разложение, формально удовлетворяющее системе (55), а асимптотическое разложение некоторого решения этого уравнения, можно найти в указанных выше книгах.

Рассмотрим в качестве примера уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (0 < x < \infty). \quad (61)$$

Обозначив $y = y_1$, $y' = y_2$, перейдем от уравнения (61) к системе

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= y_2, \\ y'_2 &= -\frac{1}{x^2}[xy_2 + (x^2 - p^2)y_1] = \left(-1 + \frac{p^2}{x^2}\right)y_1 - \frac{1}{x}y_2. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Мы получили систему вида (55) с $k = 0$ и матрицей

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

собственные значения которой $\lambda_{1,2} = \pm i$. Выбрав λ_1 , получаем на основании (56), что асимптотическое разложение решения надо искать в виде

$$y = e^{ix} x^\beta \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots \right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Непосредственная подстановка в (61), что равносильно подстановке y_1 и y_2 в (62), и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x приводят к равенствам (проверьте!)

$$2b_0\beta i + b_0i = 0, \quad b_0\beta(\beta - 1) + 2b_1(\beta - 1)i + b_0\beta + b_1i - p^2b_0 = 0,$$

$$b_1\beta(\beta - 3) + 2b_2(\beta - 2)i + b_1(\beta - 1) + b_2i - p^2b_1 = 0, \dots,$$

из которых находим последовательно

$$\beta = -\frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{i}{2} \left(p^2 - \frac{1}{4} \right) b_0, \quad b_2 = -\frac{1}{8} \left(p^2 - \frac{1}{4} \right)^2 b_0.$$

Отсюда получаем асимптотическое разложение решения

$$y \sim b_0 e^{ix} \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + \frac{i}{2} \left(p^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \left(p^2 - \frac{1}{4} \right)^2 \frac{1}{x^2} + \dots \right\}.$$

Сравнение с формулой (II.5.27) показывает, что если принять $b_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[-i \left(\frac{p\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$, то мы получим функцию $H_p^{(1)}(x)$. Отделяя вещественную часть от мнимой, можно получить асимптотические разложения функций $J_p(x)$ и $Y_p(x)$.

Если $k = -1$, то решение, взамен (56), ищется в форме

$$y = t^\beta \left(\mathbf{b}_0 + \frac{\mathbf{b}_1}{t} + \frac{\mathbf{b}_2}{t^2} + \dots \right). \quad (63)$$

Для нахождения коэффициентов вместо (57) получается соотношение

$$\left[(\mathbf{A}_0 - \beta \mathbf{I}) + \frac{\mathbf{A}_1}{t} + \frac{\mathbf{A}_2}{t^2} + \dots \right] \left(\frac{\mathbf{b}_0}{t} + \frac{\mathbf{b}_1}{t^2} + \frac{\mathbf{b}_2}{t^3} + \dots \right) = \\ = -\frac{\mathbf{b}_1}{t^2} - 2\frac{\mathbf{b}_2}{t^3} - 3\frac{\mathbf{b}_3}{t^4} - \dots$$

(проверьте!). Раскрыв скобки, мы приходим к равенствам

$$(\mathbf{A}_0 - \beta \mathbf{I})\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{A}_0 - (\beta - 1)\mathbf{I}]\mathbf{b}_1 = -\mathbf{A}_1\mathbf{b}_0,$$

$$[\mathbf{A}_0 - (\beta - 2)\mathbf{I}]\mathbf{b}_2 = -\mathbf{A}_2\mathbf{b}_0 - \mathbf{A}_1\mathbf{b}_1, \dots$$

Из первого мы получаем, что β должно быть одним из собственных значений матрицы $\mathbf{A}_0$, а $\mathbf{b}_0$ — одним из соответствующих собственных векторов. Выбрав β и $\mathbf{b}_0$, мы из второго равенства, если $\beta - 1$ не является собственным значением для $\mathbf{A}_0$, находим $\mathbf{b}_1$, затем из третьего, если $\beta - 2$ не является собственным значением, находим $\mathbf{b}_2$ и т. д. Таким образом, появляется еще один особый случай, который мы здесь не будем рассматривать, — когда $\beta - m$ для некоторого целого $m > 0$ будет собственным значением матрицы $\mathbf{A}_0$. Если это не так и если ряд (55) для $\mathbf{A}(t)$ сходиллся в обычном смысле, то в упомянутых выше книгах показывается, что и получающийся ряд в (63) при достаточно больших t сходится в обычном смысле, так что мы получаем обычное (не асимптотическое) разложение искомого решения.

Если $k \leq -2$, то решение надо искать в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t^{k+1} + \mathbf{b}_2 t^k + \mathbf{b}_3 t^{k-1} + \dots,$$

где вектор $\mathbf{b}_0$ произволен. (Разберите, как найти коэффициенты $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots$) Здесь ряд для решения также получается сходящимся в обычном смысле.

9. Еще об асимптотическом поведении решений. Асимптотическое разложение, дающее весьма точную информацию об асимптотическом поведении решения, к сожалению, не всегда возможно — например, если коэффициенты системы (4) имеют периодические компоненты. В таких случаях приходится пользоваться формулировками, имеющими качественный характер, из которых мы для примера приведем две. Нам потребуется

Лемма об интегральном неравенстве. Пусть имеет место неравенство

$$u(t) \leq \int_{t_0}^t \rho(\tau) u(\tau) d\tau + C \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (64)$$

где $\rho(t) \geq 0$. Тогда $u(t) \leq C \exp \int_{t_0}^t \rho(\tau) d\tau$ ($t_0 \leq t \leq t_1$).

В самом деле, из того что $\rho \geq 0$, следует

$$\rho(t)u(t) \leq \rho(t) \left[\int_{t_0}^t \rho(\tau)u(\tau) d\tau + C \right],$$

а потому в силу (64)

$$u(t) \leq \int_{t_0}^t \rho(\tau) \left[\int_{t_0}^{\tau} \rho(\tau_1)u(\tau_1) d\tau_1 + C \right] d\tau + C.$$

Другими словами, неравенство (64) можно итерировать. Проводя дальнейшие итерации и переходя к пределу, мы получим в правой части, как известно из п. VII.2.9, решение интегрального уравнения

$$v(t) = \int_{t_0}^t \rho(\tau)v(\tau) d\tau + C$$

(продумайте это!). Но с помощью дифференцирования легко показать,

что это решение равно $C \exp \int_{t_0}^t \rho(\tau) d\tau$, откуда и вытекает и утверждение леммы.

Теоремы, которые мы сейчас приведем, позволяют по известному асимптотическому поведению решений системы (4) (например, с постоянными или периодическими коэффициентами) сделать заключение об асимптотическом поведении решений системы

$$\dot{\mathbf{z}} = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)]\mathbf{z}, \quad (65)$$

где матрица-функция $\mathbf{B}(t)$ в том или ином смысле мала при $t \rightarrow \infty$. Ряд результатов в этом направлении приведен в книге [9].

1. Пусть

$$\|Y(t, \tau)\| < \text{const} \quad (t_0 \leq \tau \leq t < \infty), \quad \int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty \quad (66)$$

(под нормой матрицы здесь можно для простоты, в отличие от п. IV.4.2, понимать сумму модулей ее элементов). Тогда все решения системы (65) ограничены при $t \rightarrow \infty$.

Для доказательства раскроем в правой части (65) квадратные скобки и, считая на минуту $\mathbf{B}(t)\mathbf{z}$ известной функцией t , с помощью формулы (12) получим

$$\mathbf{z}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{Y}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{z}(\tau) d\tau + \mathbf{Y}(t, t_0) \mathbf{z}_0. \quad (67)$$

Однако нетрудно непосредственно, проверить, что введенная норма обладает свойствами

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| &\leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \quad \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|, \\ \|\mathbf{Ax}\| &\leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|, \quad \left\| \int \mathbf{x}(t) dt \right\| \leq \int \|\mathbf{x}(t)\| dt, \end{aligned}$$

где под нормой числового вектора мы здесь понимаем сумму модулей его элементов. Поэтому из (67) и из условий теоремы получаем

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq C_1 \int_{t_0}^t \|\mathbf{B}(\tau)\| \cdot \|\mathbf{z}(\tau)\| d\tau + C_2 \|\mathbf{z}_0\| \quad (t_0 \leq t < \infty), \quad (68)$$

где C_1, C_2 — некоторые постоянные. Пользуясь леммой об интегральном неравенстве, выводим отсюда, что

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq C_2 \|\mathbf{z}_0\| \exp \left[C_1 \int_{t_0}^t \|\mathbf{B}(\tau)\| d\tau \right] \quad (t_0 \leq t < \infty),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Отметим, что первое условие (66) выполнено, в частности, для систем с постоянными или T -периодическими коэффициентами и всеми ограниченными решениями, кроме того, оно не зависит от выбора t_0 (докажите!).

2. Пусть

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Y}(t, \tau)\| &\leq C e^{-\alpha(t-\tau)} \quad (t_0 \leq \tau \leq t < \infty), \\ \|\mathbf{B}(t)\| &\leq \varepsilon < \frac{\alpha}{C} \quad (t_0 \leq t < \infty), \end{aligned} \quad (69)$$

где C, α, ε — положительные постоянные. Тогда все решения системы (65) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

В самом деле, из (67) аналогично (68) получаем

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq C\varepsilon \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|\mathbf{z}(\tau)\| d\tau + C e^{-\alpha(t-t_0)} \|\mathbf{z}_0\|,$$

откуда

$$\|z(t)\| e^{\alpha t} \leq C\varepsilon \int_{t_0}^t \|z(\tau)\| e^{\alpha \tau} d\tau + C e^{\alpha t_0} \|z_0\|.$$

Применяя лемму об интегральном неравенстве, выводим, что

$$\|z(t)\| e^{\alpha t} \leq C e^{\alpha t_0} \|z_0\| e^{C\varepsilon(t-t_0)} \quad (t_0 \leq t < \infty),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Первое условие (69) выполнено, в частности, для систем с постоянными или T -периодическими коэффициентами и всеми решениями, стремящимися к нулю при $t \rightarrow \infty$. Выполнение второго условия (69) можно требовать лишь при достаточно больших t ; достаточно поэтому потребовать просто, чтобы $\mathbf{B}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

В то же время обращаем внимание читателя, что из ограниченности решений системы (4) и условия $\mathbf{B}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, вообще говоря, не вытекает ограниченность решений системы (65). Простейший пример: решения скалярного уравнения $\dot{y} = 0y$ ограничены, а уравнения $\dot{z} = \left(0 + \frac{1}{t}\right)z$ — нет.

Приведем еще простую оценку решений системы (4); эта оценка иногда может быть полезной:

$$|y(t_0)| \exp \int_{t_0}^t \lambda_{\min}(\tau) d\tau \leq |y(t)| \leq |y(t_0)| \exp \int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau,$$

где $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ — наименьшее и наибольшее собственные значения эрмитовой матрицы $\frac{1}{2}[\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^*(t)]$. Для доказательства заметим, что

$$(|y|^2)^* = (y^* y)^* = \dot{y}^* y + y^* \dot{y} = y^* \mathbf{A}^* y + y^* \mathbf{A} y = y^* (\mathbf{A} + \mathbf{A}^*) y,$$

откуда в силу экстремального свойства собственных значений

$$\lambda_{\min}(t) \leq (|y|^2)^* / 2 |y|^2 \leq \lambda_{\max}(t) \quad \text{и т. д.}$$

10. Осцилляция решений уравнений второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (70)$$

(здесь мы будем обозначать независимую переменную буквой x) встречаются в различных разделах теоретической и прикладной математики. Свойства этих уравнений изучены особенно глубоко.

Рассмотрим сначала вопрос об упрощении уравнения (70) с помощью линейной замены

$$y = \alpha(x)z, \quad (71)$$

где функция $\alpha(x) \neq 0$ будет подобрана. Подстановка (71) в (70) дает уравнение для z

$$z'' = \frac{1}{\alpha} [2\alpha' + a(x)\alpha] z' + \frac{1}{\alpha} [\alpha'' + a(x)\alpha' + b(x)\alpha] z = 0. \quad (72)$$

Мы можем, в частности, устранить член с z' ; для этого нужно, чтобы $2\alpha' + a(x)\alpha = 0$, откуда $\alpha = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x a(\xi) d\xi \right)$. Подстановка такого α в (72) приводит к уравнению

$$z'' + \left[b(x) - \frac{1}{2} a'(x) - \frac{1}{4} a^2(x) \right] z = 0 \quad (73)$$

(проверьте!).

Имеется также другой способ устранения члена с производной первого порядка, основанный на замене независимой переменной

$$\xi = \varphi(x), \quad (74)$$

где функция $\varphi(x)$ будет подобрана. (Аналогичная (74) замена искомой функции $\eta = \psi(y)$ привела бы к нелинейному уравнению для η .) Подстановка (74) в (70) дает уравнение для $y(\xi)$:

$$[\varphi'(x)]^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + [\varphi''(x) + a(x)\varphi'(x)] \frac{dy}{d\xi} + b(x)y = 0 \quad (75)$$

(проверьте!), куда надо еще подставить выражение $x(\xi)$, определенное из (74). Приравнивание нулю коэффициента при $\frac{dy}{d\xi}$ дает

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x \exp \left(- \int_{x_0}^{\xi} a(s) ds \right) d\xi, \text{ откуда уравнение (75) приобретает вид}$$

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + b(x(\xi)) \left[\exp \left(2 \int_{x_0}^{x(\xi)} a(s) ds \right) \right] y = 0.$$

Исходя из сказанного, мы впредь в этом пункте будем рассматривать специальный вид

$$y'' + p(x)y = 0 \quad (76)$$

уравнения (70). Коэффициент $p(x)$ и искомое решение $y(x)$ будем считать вещественными.

Рассмотрим сначала простейшее уравнение

$$y'' + py = 0 \quad (77)$$

с постоянным коэффициентом. Поведение решений этого уравнения принципиально различается для $p > 0$ и для $p < 0$. Если $p > 0$, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos \sqrt{p}x + C_2 \sin \sqrt{p}x = M \sin (\sqrt{p}x + \alpha).$$

Любое решение этого уравнения бесконечное число раз меняет знак (*осциллирует*), причем расстояние между соседними нулями равно $\frac{\pi}{\sqrt{p}}$, т. е. тем меньше, чем больше p . При каждом p нули двух непропорциональных решений перемежаются, т. е. между любыми двумя соседними нулями одного решения содержится ровно один нуль другого.

Совсем иначе выглядят решения уравнения (77) в случае $p < 0$. Здесь ни одно решение не может менять знак более одного раза (почему?); такие решения называются *неосциллирующими*.

Оказывается, что аналогичными свойствами обладают решения более общего уравнения (76), хотя мы здесь не располагаем явной аналитической формой решения. Это утверждение основано на следующей теореме, доказанной в 1836 г. французским математиком Ш. Штурмом (1803–1855): *пусть наряду с (76) рассматривается уравнение*

$$z'' + q(x)z = 0, \quad (78)$$

причем $p(x) \geq q(x)$. Тогда между любыми двумя нулями любого (ненулевого) решения уравнения (78) содержится по крайней мере один нуль любого решения уравнения (76).

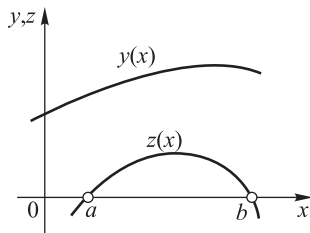


Рис. 122

Теорема доказывается от противного. Допустим, что a и b — два соседних нуля некоторого решения $z(x)$, а какое-то решение $y(x)$ не имеет между a и b нулей. Допустим для определенности, что оба решения между a и b положительны (рис. 122), ведь любое решение допускает умножение на -1 . Проинтегрировав равенство

$$(yz' - y'z)' = yz'' - y''z = [p(x) - q(x)]yz$$

от a до b , получим

$$y(b)z'(b) - y(a)z'(a) = \int_a^b [p(x) - q(x)]y(x)z(x) dx. \quad (79)$$

Однако сравнение знаков всех членов этого равенства приводит к противоречию (продумайте это!), что и доказывает теорему.

Теорема Штурма охватывает также случай, когда $p(x) \equiv q(x)$, т. е. когда рассматриваются два решения одного и того же уравнения. (То-

гда при анализе равенства (79) полезно заметить, что если $z(a) = 0$, то $z'(a) \neq 0$, так как в противном случае в силу единственности решения уравнения (78) с начальными данными при $x = a$ было бы $z(x) \equiv 0$.) Другими словами, нули двух любых непропорциональных решений уравнения (76) перемежаются. Обратите внимание на то, что если два решения уравнения (76) имеют общий нуль, то они пропорциональны (почему?).

Сравнивая на основе теоремы Штурма уравнение (76) с уравнением (77), получаем следствия (продумайте их!):

1. Если $p(x) \leq 0$, то никакое решение уравнения (76) не может менять знак более одного раза, т. е. не осциллирует.

2. Если $p(x) \geq p_1 > 0$, то никакое решение уравнения (76) не может сохранять знак на интервале длины $> \frac{\pi}{\sqrt{p_1}}$.

3. Если $p(x) \leq p_2$, где $p_2 > 0$, то расстояние между нулями любого (ненулевого) решения уравнения (76) должно быть $\geq \frac{\pi}{\sqrt{p_2}}$.

4. Если $p(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} p > 0$, то любое (ненулевого) решение уравнения (76) при $x \rightarrow \infty$ бесконечно осциллирует, причем расстояние между соседними нулями стремится к $\frac{\pi}{\sqrt{p}}$.

Рассмотрим в качестве примера уравнение (61). Замена (71), которая в данном примере имеет вид $y = z/\sqrt{x}$, приводит к уравнению (73)

$$z'' + \left(1 - \frac{p^2 - 1/4}{x^2}\right)z = 0.$$

В силу следствия 4 получаем, что функции Бесселя любого порядка при $x \rightarrow \infty$ бесконечно осциллируют, причем расстояние между соседними нулями стремится к π . К этому же результату можно прийти из асимптотических выражений (II.5.28).

Можно получить более точный признак осциллирования решений уравнения (76) на полуоси $x_0 \leq x < \infty$, сравнив его с уравнением

$$z'' + \frac{k}{x^2}z = 0 \quad (0 < x < \infty).$$

Непосредственное интегрирование этого уравнения, которое мы предоставляем читателю, показывает, что для $k > 1/4$ все решения бесконечно осциллируют при $x \rightarrow \infty$, а для $k \leq 1/4$ каждое решение имеет не более одного нуля. Поэтому на основе теоремы Штурма получаем, что если $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 p(x) > \frac{1}{4}$, то все решения уравнения (76) при $x \rightarrow \infty$ бесконечно осциллируют, тогда как, если $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 p(x) < \frac{1}{4}$, каждое ненулевое решение уравнения (76) может иметь лишь конечное число нулей.

Отметим в заключение, что если для общего уравнения (70) обозначить $y' = z$, мы получим систему первого порядка

$$y' = z, \quad z' = -b(x)y - a(x)z.$$

В силу п. 1 определителем Вронского для такой системы служит

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

где индексы означают номера решений. Формула (9) приобретает вид

$$W(x) = W(x_0) \exp \left[- \int_{x_0}^x a(\zeta) d\zeta \right].$$

В частности, для уравнения (76) $W(x) = \text{const}$.

11. Системы, зависящие от параметра. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}}(t; \alpha) \mathbf{y} \quad (80)$$

с параметром α . Ее решение, удовлетворяющее, например, фиксированным начальным условиям, также будет зависеть от α : $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t; \alpha)$. Если коэффициенты зависят от α непрерывно, то и решение будет зависеть от α непрерывно; это ясно из смысла решения дифференциального уравнения и может быть доказано строго на основании леммы п. 9 об интегральном неравенстве (продумайте это!). Но что будет, если зависимость коэффициентов от α становится разрывной, например, имеет полюс (п. II.4.2)?

Допустим, что это полюс первого порядка и его расположение α_0 не зависит от t (т. е. система не имеет коэффициентов, скажем, вида $(t - \alpha)^{-1}$); после замены $\alpha \rightarrow \alpha_0 + \alpha$ всегда можно считать, что $\alpha_0 = 0$, как мы и будем делать. Тогда, умножив обе части системы (80) на α , мы приходим к системе вида

$$\alpha \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} = (t; \alpha) \mathbf{y}, \quad (81)$$

коэффициенты которой в правой части уже зависят от α при малых $|\alpha|$ непрерывно и даже допускают разложение в ряд Тейлора

$$\mathbf{A} = (t; \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k(t) \alpha^k. \quad (82)$$

Нас будет интересовать структура фундаментальной матрицы системы (81) при малых $|\alpha|$. Эту структуру легко понять на частном случае $n = 1$, т. е. для скалярного уравнения вида (81), которое легко интегрируется:

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \alpha^k dt,$$

$$y = C \exp \int \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) dt \alpha^{k-1} = C \exp \sum_{k=0}^{\infty} \int A_{k+1}(t) dt \alpha^k \cdot \exp \int \frac{A_0(t)}{\alpha} dt.$$

Первую экспоненту можно разложить по целым неотрицательным степеням α , и мы окончательно получаем

$$y = C \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \alpha^k \cdot \exp \int \frac{A_0(t)}{\alpha} dt. \quad (83)$$

Здесь C — произвольная постоянная, а коэффициенты $B_k(t)$ можно найти по методу неопределенных коэффициентов, подставив выражение (83) в (81) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях α . (Найдите $B_0(t), B_1(t)$; некоторая неопределенность, получающаяся при этом, объясняется тем, что вместо C в формуле (83) можно поставить любой ряд $C(\alpha)$, что повлияет на коэффициенты B_k . Чтобы избежать этой неопределенности, можно задать значения этих коэффициентов при некотором $t = t_0$, например положить $B_0(t_0) = 1, B_1(t_0) = B_2(t_0) = \dots = 0$.)

Оказывается, что и для общих систем (81) структура общего решения аналогична (83). Приведем здесь только окончательный результат, отослав читателя за подробностями к книге [18], в которой рассмотрены разнообразные вопросы, связанные с асимптотическими разложениями по независимой переменной и по параметру решений начальной и краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений.

Итак, допустим, что в некоторой окрестности точки $t = t_0$ матрица коэффициентов допускает разложение (82), причем ряд в правой части может сходиться «по-настоящему» или лишь асимптотически при $\alpha \rightarrow 0$ (п. II.5.1). Пусть все собственные значения матрицы $\mathbf{A}_0(t)$ различны. Обозначим через $\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_n(t)$ собственные значения матрицы $\mathbf{A}_0(t)$ для t , близких к t_0 . Тогда система (81) имеет n линейно независимых решений вида

$$\mathbf{y}_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_{kj}(t) \alpha^k \cdot \exp \int_{t_0}^t \frac{\mu_j(t)}{\alpha} dt \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (84)$$

причем коэффициенты $\mathbf{B}_k(t)$ можно найти по методу неопределенных коэффициентов. Для этого подставим (84) в (81), получим равенства (проверьте!)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0(t)\mathbf{B}_{0j}(t) - \mu_j(t)\mathbf{B}_{0j}(t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_0(t)\mathbf{B}_{1j}(t) - \mu_j(t)\mathbf{B}_{1j}(t) &= \mathbf{B}'_{0j}(t) - \mathbf{A}_1(t)\mathbf{B}_{0j}(t), \dots \end{aligned} \quad (85)$$

Из первого получаем, что $\mathbf{B}_{0j}(t) = \varphi_{0j}(t) \mathbf{a}_j(t)$, где $\mathbf{a}_j(t)$ — произвольно нормированный собственный вектор матрицы $\mathbf{A}_0(t)$, а скалярная функ-

ция $\varphi_{0j}(t)$ пока произвольна. Подставим полученное выражение для $\mathbf{B}_{0j}$ во второе равенство (85):

$$\mathbf{A}_0(t)\mathbf{B}_{1j}(t) - \mu_j(t)\mathbf{B}_{1j}(t) = \varphi'_{0j}(t)\mathbf{a}_j(t) + \varphi_{0j}(t)\mathbf{a}'_j(t) + \varphi_{0j}(t)\mathbf{A}_1(t)\mathbf{a}_j(t). \quad (86)$$

Для разрешимости этого уравнения относительно $\mathbf{B}_{1j}$ необходимо и достаточно (п. IV.1.4), чтобы его правая часть была ортогональна собственному вектору $\mathbf{b}_j(t)$ матрицы $\mathbf{A}_0^*(t)$, отвечающему собственному значению $\mu_j^*(t)$. Из условия этой ортогональности получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка для $\varphi_{0j}(t)$, решив которое, находим эту функцию с точностью до несущественного постоянного множителя. Теперь в силу (86) получаем $\mathbf{B}_{1j}(t) = \tilde{\mathbf{B}}_{1j}(t) + \varphi_{1j}(t)\mathbf{a}_j(t)$, где $\tilde{\mathbf{B}}_{1j}(t)$ — вполне определенная вектор-функция, а скалярная функция $\varphi_{1j}(t)$ пока произвольная. Выписывая условие разрешимости третьего уравнения (85), получаем дифференциальное уравнение для φ_{1j} и т. д.

При этом ряд в (84) оказывается сходящимся, вообще говоря, лишь асимптотически, однако это не имеет существенного значения, так как практически все равно обычно пользуются лишь небольшим числом членов этого ряда. Получающееся разложение действует на любом конечном замкнутом интервале оси t , содержащем t_0 , на котором все собственные значения матрицы $\mathbf{A}_0(t)$ различные. В то же время по α данная конструкция является существенно локальной и диапазон значений α , для каких ее можно применять, обычно распознается с помощью численного интегрирования контрольных примеров. Если зависимость коэффициентов от α имеет несколько полюсов, то установить связь между решениями, построенными в окрестности различных полюсов, бывает не очень просто; впрочем, это иногда удается сделать с помощью численного интегрирования или из каких-либо теоретических соображений, например из представлений, пригодных одновременно для различных полюсов.

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\alpha^2 \ddot{y} + [Q(t)]^2 y = 0, \quad (87)$$

которое после введения обозначений $y = y_1$, $\alpha \dot{y} = y_2$ можно переписать в виде

$$\alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -[Q(t)]^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Записав решение (84) при $j = 0$ и заменив сумму в правой части на $\exp \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t) \alpha^k$ (возможность этого будет ясна из последующих вычислений), мы получаем решение уравнения (87) в виде

$$y = \exp \left[\pm \frac{i}{\alpha} \int_{t_0}^t Q(t) dt + \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t) \alpha^k \right]. \quad (88)$$

Чтобы найти коэффициенты $C_k(t)$, подставим (88) в (87). После сокращения на экспоненту и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях α получим систему равенств (проверьте!)

$$\pm i\dot{Q} \pm 2iQ\dot{C}_0 = 0, \quad \ddot{C}_0 \pm 2iQ\dot{C}_1 + \dot{C}_0^2 = 0, \dots$$

Отсюда

$$C_0 = -\frac{1}{2} \ln Q(t), \quad C_1 = \pm \frac{i}{8} \int_{t_0}^t \frac{3\dot{Q}^2 - 2Q\ddot{Q}}{Q^3} dt, \dots$$

Подставляя в (88), получим решение уравнения (87) с точностью до членов порядка α включительно:

$$y = \frac{1}{\sqrt{Q(t)}} \exp \left[\pm i \int_{t_0}^t \left(\frac{Q}{\alpha} + \frac{3\dot{Q}^2 - 2Q\ddot{Q}}{8Q^3} \alpha \right) dt \right]. \quad (89)$$

Еще чаще пользуются предыдущим приближением

$$y = \frac{1}{\sqrt{Q(t)}} \exp \left[\pm \frac{i}{\alpha} \int_{t_0}^t Q(\tau) d\tau \right]. \quad (90)$$

Метод асимптотического построения решения уравнения (87), приводящий к формулам (90) и (89), был развит в 1926 г. независимо физиками Г. Вентцелем, Х. Крамерсом и Л. Бриллюэном в связи с задачами квантовой механики; в честь этих авторов метод часто называют *методом ВКБ* или *методом фазовых интегралов*. Ему посвящены книги [119, 125], где особое внимание уделено важному случаю перехода $Q(t)$ через нулевое значение (п. 12), для чего полезно изучать уравнение (87) при комплексном значении t .

Если точка $\alpha = 0$ представляет собой полюс порядка $m \geq 1$ для коэффициентов системы (80), т.е. взамен (81) надо написать $\alpha^m \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t; \alpha) \mathbf{y}$, то конструкция решения аналогична, однако в формуле

(84) взамен $\int_{t_0}^t \frac{\mu_j(t)}{\alpha} dt$ надо взять

$$\int_{t_0}^t \frac{\mu_j(t)}{\alpha^m} dt + \frac{Q_{1,j}(t)}{\alpha^{m-1}} + \dots + \frac{Q_{m-1,j}(t)}{\alpha},$$

где коэффициенты $Q_{kj}(t)$ находятся по методу неопределенных коэффициентов, вместе с $\mathbf{B}_{kj}(t)$.

12. Точки поворота. Точка $t = t_0$ называется *точкой поворота* (точкой перехода) для системы (81), если матрица $\mathbf{A}_0(t_0)$ имеет кратные собственные значения. Наиболее простой пример уравнения с точкой поворота — это уравнение

$$\alpha^2 y'' - xy = 0 \quad (91)$$

(мы здесь будем обозначать независимую переменную буквой x , а производную по ней — штрихом), которое при обозначениях $y = y_1$, $\alpha y' = y_2$ преобразуется в систему

$$\alpha y'_1 = y_2, \quad \alpha y'_2 = x y_1$$

с матрицей $\mathbf{A}_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Так как ее собственные значения $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{x}$, то значение $x = 0$ будет точкой поворота.

Замена независимой переменной по формуле $x = \alpha^{2/3}s$ переводит (91) в уравнение Эйри

$$\frac{d^2 y}{ds^2} - sy = 0. \quad (92)$$

Из п. 10 видно, что характер решений этого уравнения совершенно различный при $s > 0$ и при $s < 0$ (рис. 123): при $s > 0$ решения не осциллируют, а для $s < 0$ осцилляции становятся при $s \rightarrow -\infty$ все более частыми.

Решение уравнения (92) можно получить по методу контурного интегрирования, аналогичному методу применения преобразования Лапласа (§ III.2). Здесь решение строится в виде интеграла в комплексной плоскости

$$y(s) = \int_{(\Gamma)} e^{sz} v(z) dz, \quad (93)$$

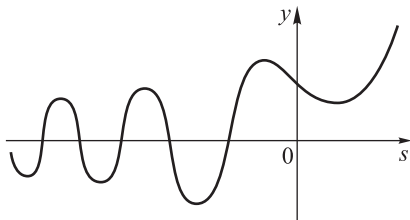


Рис. 123

причем как контур (Γ) , так и функция $v(z)$ должны быть подобраны. Подстановка (93) в (92) и интегрирование второго члена по частям приводят, если внеинтегральная подстановка $e^{sz} v(z)|_{(\Gamma)}$ обращается в нуль, к уравнению

$$z^2 v(z) + v'(z) = 0$$

с очевидным решением $v = \exp(-z^3/3)$. Таким образом,

$$y(s) = \int_{(\Gamma)} \exp\left(sz - \frac{z^3}{3}\right) dz \quad (94)$$

(в общем случае метод контурного интегрирования можно применять к линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами — полиномами не выше 1-й степени — см. последний пример п. III.2.2).

Теперь видно, что в качестве (Γ) можно взять любой контур, уходящий обоими концами на бесконечность по каким-либо направлениям, для которых $\operatorname{Re}(z^3) > 0$, т. е.

$$-\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5}{6}\pi \quad \text{или} \quad -\frac{5}{6}\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}; \quad (95)$$

при этом значение интеграла (94) зависит не от выбора конкретного контура, а только от того, из какого сектора (95) в какой ведет этот контур. В частности, если контур интегрирования ведет из третьего сектора во второй, то интеграл

(94), деленный на $2\pi i$, обозначается через $\text{Ai}(s)$ и называется *функцией Эйри 1-го рода*. Эта функция при вещественных s принимает вещественные значения и стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$ (почему?). С помощью метода перевала (п. II.5.5) нетрудно получить (попробуйте!) асимптотическое представление

$$\text{Ai}(s) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} s^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}s^{3/2}\right) \quad (s \rightarrow \infty).$$

Деформируя контур интегрирования (94) в мнимую ось, можно также получить формулу

$$\text{Ai}(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + st\right) dt.$$

Другое линейно независимое решение $\text{Bi}(s)$ уравнения (92) стремится к бесконечности при $s \rightarrow \infty$, как на рис. 123.

Интеграл (94) имеет смысл не только для вещественных, но и для мнимых s , и представляет собой целую аналитическую функцию комплексного переменного s . Разлагая подынтегральную функцию в ряд по степеням s , можно установить выражение функции Эйри через функции Бесселя

$$\text{Ai}(s) = \frac{1}{3} \sqrt{-s} \left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-s^3}\right) + J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-s^3}\right) \right],$$

в котором все участвующие величины выбираются вещественными при $s = -1$, а затем однозначно продолжаются на всю плоскость s .

Возвращаясь к уравнению (91), мы получаем его общее решение

$$y = C_1 \text{Ai}(\alpha^{-2/3}x) + C_2 \text{Bi}(\alpha^{-2/3}x). \quad (96)$$

Мы видим, что поведение решения для конечных $x > 0$ и $x < 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$ существенно различное.

Рассмотрим теперь общее уравнение (81) при $n = 2$ с точкой поворота $t = 0$; это означает, что матрица $\mathbf{A}(0; 0)$ имеет двойное собственное значение. Так как замена $\mathbf{y} \rightarrow e^{(p/\alpha)t} \mathbf{y}$ приводит к уменьшению его на p , то без ограничения общности можно считать, что это собственное значение равно нулю. Тогда $\det \mathbf{A}(t; 0)$ имеет при $t = 0$ нуль, и мы предположим, что этот нуль простой. Оказывается (см. [18]), что при этом предположении возможно совершить замену искомых функций и независимой переменной

$$\mathbf{y} = \exp\left(\frac{1}{2\alpha} \int_0^t \text{сл.} \mathbf{A}(\tau; 0) d\tau\right) \mathbf{P}(t) \mathbf{u}, \quad t = \varphi(s), \quad (97)$$

с соответственно подобранными $\mathbf{P}(t)$ и $\varphi(s)$, после выполнения которой система (81) преобразуется в систему аналогичного вида

$$\alpha \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{B}(s; \alpha) \mathbf{u}, \quad \text{у которой} \quad \mathbf{B}(s; 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & 0 \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Затем возможно выполнить еще одну замену

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(s) \alpha^k \mathbf{v}, \quad (99)$$

$$\alpha \dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}. \quad (100)$$

Так как система (100) равносильна уравнению (91), а все упомянутые замены были невырожденными вблизи значений $t = 0$, $\alpha = 0$, то мы получаем, таким образом, что и в общем случае решение в окрестности точки поворота выражается через функции Эйри (см. (96)), т.е. имеет тот же характер особенности, что и в разобранным примере (91).

Автономной системой дифференциальных уравнений называется система вида

[illegible]

Все участвующие величины будем считать вещественными.

Умножая каждое из уравнений (1) на орт соответствующей оси координат и складывая почленно результаты, получим более короткую запись той же системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x). \quad (2)$$

Мы предположим, что правые части системы (2) удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность решения

задачи Коши $x(0) = x_0$ для этой системы¹⁾; обозначим это решение через $x = x(t; x_0)$. Это непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$x(0; x_0) = x_0, \quad x(t; x(t_1; x_0)) = x(t + t_1; x_0). \quad (3)$$

(Продумайте второе равенство, которое является условием стационарности потока.)

Сейчас часто говорят о *потоке*, заданном в некотором пространстве, если задано однопараметрическое семейство $x = x(t; x_0)$ (параметр t истолковывается как время) отображений этого пространства в себя, удовлетворяющее условиям (3), независимо от его происхождения, т.е. без обязательного «привязывания» потока к дифференциальным уравнениям.

Если $x(t)$ — решение системы (2), то ориентированная линия, описываемая точкой $x = x(t)$ при возрастании t , называется *траекторией* (иначе *характеристикой*) этой системы. Функция $x(t - t_0)$ при любом t_0 также будет решением, ей соответствует та же траектория, но проходимая с запаздыванием t_0 во времени.

Мы будем для простоты считать, что система (2) задана во всем пространстве E_n , а каждое решение определено при $-\infty < t < \infty$. Бывают случаи, когда система задана лишь в некоторой области в E_n , а также когда некоторые решения уходят в бесконечность при конечном t ; однако эти случаи не вносят принципиальных изменений.

Возможны траектории, состоящие всего лишь из одной точки; это *точки покоя*. Для того чтобы точка x_0 была точкой покоя, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0) = 0 \quad (4)$$

(почему?).

Из стационарности потока сразу следует, что если траектория дважды проходит через одну и ту же точку, то это замкнутая линия (она называется *циклом*), а соответствующее решение $x(t)$ будет периодическим. Таким образом, имеется три типа траекторий: незамкнутые, замкнутые (циклы) и точки покоя. Каждая точка фазового пространства принадлежит ровно одной траектории.

2. Предельное поведение траекторий. Для характеристики поведения незамкнутых траекторий применяется понятие предельного множества. Пусть $x(t)$ — одно из решений системы (2), которому отвечает траектория (l) ; тогда совокупность пределов всевозможных сходящихся последовательностей вида $x(t_i)$, где $t_i \rightarrow \infty$, называется *омега-предельным множеством* этой траектории, а если $t_i \rightarrow -\infty$, — ее *альфа-предельным множеством* (название объясняется тем, что альфа и омега — соответственно первая и последняя буквы греческого алфавита). Например, на рис. 124 показана траектория, у кото-

¹⁾ Достаточно, например, чтобы функция f была непрерывной, а все ее частные производные f'_{x_i} были ограниченными.

рой альфа-предельное множество состоит из единственной точки a , а омега-предельное множество представляет собой цикл (L) ; показано, как последовательность точек $x(1), x(8), x(16), \dots$ сходится к некоторой точке $p \in (L)$, но ясно, что и для любой другой точки (L) можно построить подобную последовательность.

Перечислим некоторые свойства предельных множеств, доказываемые в математических курсах теории автономных систем, впрочем, довольно наглядные. Для определенности будем говорить об омега-предельном множестве. (Отметим, что при обращении времени омега- и альфа-предельные множества меняются ролями.)

1. Если омега-предельное множество пусто, т.е. не содержит ни одной точки, то траектория при $t \rightarrow \infty$ уходит на бесконечность, т.е. $|\mathbf{x}(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$. (Если дополнить E_n единственной бесконечно удаленной точкой, как это было сделано в п. II.2.7 для комплексной плоскости, то можно сказать, что омега-предельное множество состоит из одной этой точки.)

2. Если омега-предельное множество состоит из единственной точки a , то a — точка покоя и траектория при $t \rightarrow \infty$ входит в эту точку, т.е. $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. (Вспоминая о возможности обращения

времени, получаем, таким образом, что на рис. 124 точка a есть точка покоя.) Подчеркнем, что траектория не может входить в точку покоя в конечный момент времени, это противоречило бы тому, что две различные траектории не могут иметь общих точек. Когда траектория (l) входит в точку a при $t \rightarrow \infty$, то сама эта точка к (l) не причисляется.

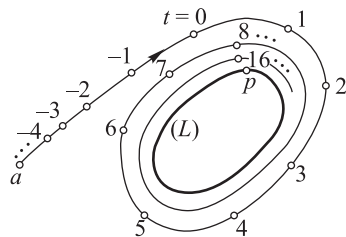


Рис. 124

3. Омега-предельное множество является замкнутым (как множество, т.е. оно содержит все свои предельные точки).

4. Омега-предельное множество $(\Omega_{(l)})$ состоит из целых траекторий: если $p \in (\Omega_{(l)})$, то и вся траектория, проходящая через p , принадлежит $(\Omega_{(l)})$.

5. Если омега-предельное множество ограничено, то оно связно. (Если оно не ограничено, то становится связным после добавления к нему бесконечно удаленной точки пространства; см., например, рис. 125, где омега-предельное множество состоит из двух прямых.)

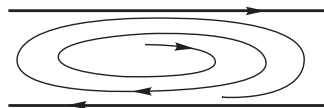


Рис. 125

Часто в фазовом пространстве оказывается возможным выделить области, заполненные траекториями с одинаковым асимптотическим поведением, т.е. имеющими одно и то же омега-предельное множество.

$(n - 1)$ -мерные поверхности, разделяющие эти области, называются *сепаратрисами* (от латинского *separo* — отделяю), на них предельное поведение траекторий обычно отличается от поведения траекторий как с одной стороны сепаратрисы, так и с другой. На рис. 126 показана возможная картина с тремя точками покоя и с сепаратрисой (l).

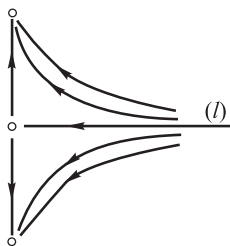


Рис. 126

3. Точки покоя на плоскости, линейные системы. Будем координаты на плоскости обозначать через x, y и запишем систему (2) в скалярной форме

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (5)$$

Из (5) следует, что дифференциальное уравнение траекторий имеет вид

$$Q(x, y) dx - P(x, y) dy = 0, \quad (6)$$

а потому эти траектории можно приближенно построить при помощи изоклин, как это описано, например, в ЛВМ, п. XV.3. Для этого построения полезно изобразить также вид семейства траекторий в окрестности особых точек уравнения (6), которыми служат точки покоя системы (5) (почему?).

Разлагая правые части (5) в окрестности точки покоя $(x_0; y_0)$ по степеням $x - x_0, y - y_0$ и пользуясь условием (4), получим

$$\dot{x} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + \dots, \quad \dot{y} = c(x - x_0) + d(y - y_0) + \dots, \quad (7)$$

где многоточием обозначены члены выше первого порядка малости, а

$$a = P'_x(x_0, y_0), \quad b = P'_y(x_0, y_0), \quad c = Q'_x(x_0, y_0), \quad d = Q'_y(x_0, y_0). \quad (8)$$

Примем, что точкой покоя служит начало координат, т. е. что $x_0 = y_0 = 0$; этого всегда можно добиться с помощью замены $x \rightarrow x_0 + x, y \rightarrow y_0 + y$. При малых $|x|, |y|$ естественно отбросить члены высшего порядка малости, т. е. рассмотреть взамен (7) укороченную систему

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy, \quad (9)$$

или, в векторно-матричной записи,

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\mathbf{r}, \quad (10)$$

где обозначено

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что матрица $\mathbf{A}$ невырожденная, другими словами, что начало координат для системы (9) служит *изолированной* точкой покоя (подумайте, почему это одно и то же!).

Для упрощения системы (10) совершим аффинное преобразование плоскости по формуле $\mathbf{r} = \mathbf{T}\mathbf{r}'$; подстановка в (10) дает уравнение траекторий после преобразования

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}')^\cdot = \mathbf{A} \mathbf{T}\mathbf{r}', \quad \text{т.е.} \quad (\mathbf{r}')^\cdot = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}\mathbf{r}'. \quad (11)$$

Дальнейшее исследование идет по-разному в зависимости от корней характеристического уравнения матрицы $\mathbf{A}$

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (12)$$

1. Пусть корни λ_1, λ_2 уравнения (12) вещественны и противоположного знака. Как известно из теории матриц, всегда можно так подобрать матрицу $\mathbf{T}$, что $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Тогда система (11) приобретает вид $(x')^\cdot = \lambda_1 x', (y')^\cdot = \lambda_2 y'$, откуда $x' = C_1 e^{\lambda_1 t}, y' = C_2 e^{\lambda_2 t}$, т.е.

$$y' = C|x'|^{\lambda_2/\lambda_1}. \quad (13)$$

Получается семейство линий, напоминающих гиперболы и имеющих асимптотами оси x' и y' , которые также являются траекториями. В исходной плоскости x, y получается аффинно преобразованная картина (рис. 127). Такая особая точка называется *седлом*.

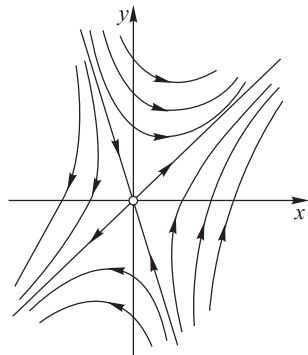


Рис. 127

Направления, по которым интегральные линии проходят через особую точку, можно найти непосредственно. В самом деле, если эта линия имеет уравнение $y = kx$, то из (9) получаем

$$k = \frac{c + dk}{a + bk} \quad (14)$$

(проверьте!), откуда легко найти оба значения k . Чтобы ориентировать траектории, т.е. выяснить, по какому направлению происходит по ним движение, достаточно, взяв какую угодно одну точку, построить в ней вектор скорости (9), а затем продолжить по непрерывности направления на соседние траектории, с них на дальнейшие и т.д.

2. Пусть λ_1, λ_2 вещественны, одного знака и различны. Тогда, как и в случае 1, приходим к равенству (13), однако картина получается иной (рис. 128): все траектории входят в точку покоя, как на рис. 128, или все выходят из нее (если обернуть стрелки), причем каждая с определенного направления. Такая особая точка называется *узлом*.

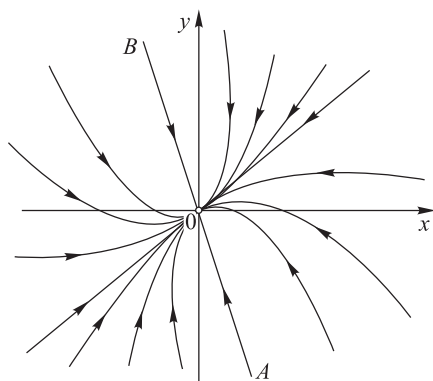


Рис. 128

Более подробно, здесь получается узел с двумя направлениями входа: все траектории входят с одного направления (если не различать противоположных направлений, имеющих одинаковый угловой коэффициент), а пара (АО и ВО на рис. 128) — с другого.

3. Пусть корни мнимые, но не чисто мнимые, $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$. Тогда к диагональному виду привести матрицу **A** нельзя, если мы хотим, чтобы приводящая матрица **T** была вещественной. Однако в п. IV.3.4 бы-

ло доказано, что **A** можно привести к виду $\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$; тогда система (11) будет иметь вид

$$(x')^* = \mu x' + \nu y', \quad (y')^* = -\nu x' + \mu y'.$$

Переходя в плоскости x', y' к полярным координатам, получим уравнение (проверьте!)

$$\dot{\rho} = \mu\rho, \quad \dot{\varphi} = -\nu, \quad \text{откуда} \quad \rho = C e^{-(\mu/\nu)\varphi}.$$

Это логарифмические спирали, а в плоскости x, y получатся аффинно преобразованные логарифмические спирали (рис. 129). Особая точка называется *фокусом*.

4. Пусть корни чисто мнимые. Тогда аналогично получим $\rho = C$, т. е. в плоскости x, y получается семейство подобных эллипсов с общими осями симметрии. Особая точка называется *центром* (рис. 130).

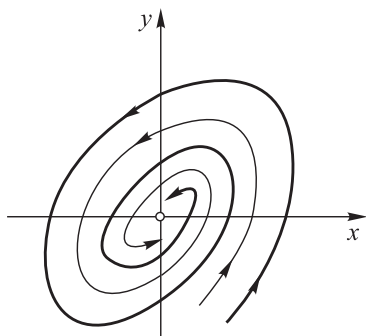


Рис. 129

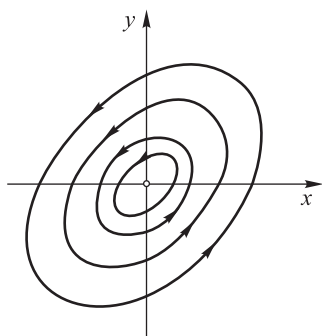


Рис. 130

5. Пусть корень λ двойной. Тогда в силу п. IV.3.3 матрицу $\mathbf{A}$ можно привести либо к виду $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, либо к виду $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$; нетрудно проверить (попробуйте!), что второй подслучай будет, только если $a = d, b = c = 0$.

В первом подслучае система (11) примет вид

$$(x')^* = \lambda x' \quad (y')^* = x' + \lambda y'$$

и интегрирование даст проверить!)

$$\lambda y' = x' (\ln |x'| + C).$$

Получается узел с одним направлением входа (рис. 131).

Во втором подслучае получаем $y = Cx$, т. е. интегральными линиями служат все прямые, проходящие через начало координат. Это *звездообразный узел*.

Если коэффициенты a, b, c, d в системе (9) выбирать произвольно, то основными являются первые три случая, так как они обеспечиваются неравенствами между коэффициентами (например, для 1-го случая должно быть $ad - bc \neq 0$, $(a + d)^2 - 4(ad - bc) > 0$, $ad - bc < 0$, т. е. здесь остается четыре степени свободы, тогда как в 4-м и 5-м случаях имеется только три степени свободы (почему?).

Кроме того, так как неравенства строгие, то при малом изменении коэффициентов они сохраняются, т. е. и типы первых трех точек покоя сохраняются, тогда как точки двух последних типов могут при таком изменении превратиться в точки других типов (каких?). Коротко говоря, первые три случая являются грубыми, а последние два — тонкими.

Узел и фокус могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, в соответствии с тем, будет ли движение по траекториям направлено к точке покоя или от нее. Исходя из основного признака устойчивости по

Ляпунову (п. 3.4) и из уравнений (12), докажите, что для устойчивости узла или фокуса необходимо и достаточно, чтобы $a + d < 0$.

Обозначив коэффициенты характеристического уравнения (12) через $p = -(a + d)$, $q = ad - bc$, мы получаем (рис. 132) на плоскости p, q части, которым отвечают различные типы точек покоя. Линия,

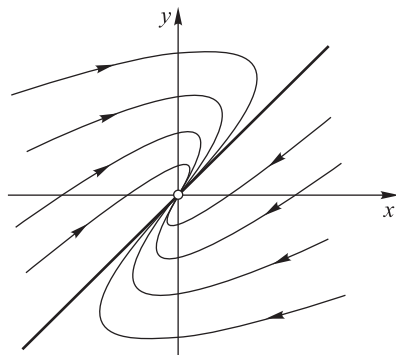


Рис. 131

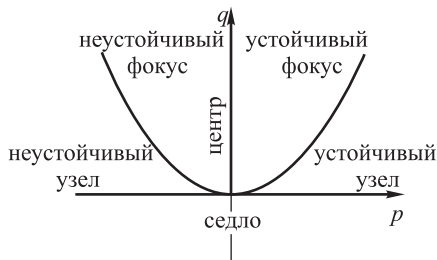


Рис. 132

отделяющая узлы от фокусов, имеет уравнение $q = p^2/4$, ей отвечают узлы, описанные в случае 5.

4. Общий случай. Вернемся к системе (7). Более полное исследование, проводимое в математических курсах, показывает, что точка покоя $(x_0; y_0)$ для нее имеет тот же тип, что и точка $(0; 0)$ для системы (9). Конечно, рис. 127–131 будут деформированы, притом тем сильнее, чем дальше от начала координат, однако не только общий вид малой окрестности начала, но и направления входа в него траекторий останутся неизменными. Так как наименования типов точек покоя относятся именно к их малым окрестностям, то и получается, что при добавлении членов высшего порядка малости тип точки остается неизменным.

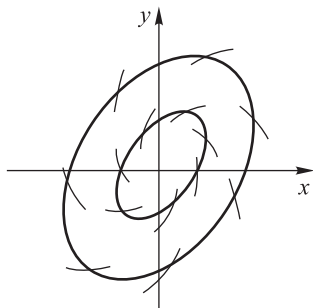


Рис. 133

Единственным исключением является центр, так как добавлением членов как угодно высокого порядка малости центр можно превратить в фокус (рис. 133). В реальных нелинейных примерах, если нет специальных причин, порождающих центр (п. 4.2), этот тип не встречается.

Полезно обратить внимание на то, что хотя для отыскания точки покоя в конкретных системах (5) надо решать систему конечных нелинейных уравнений $P = Q = 0$, но для выявления характера этой точки в грубых случаях (п. 3) не требуется знать ее координаты слишком уж точно. В самом деле, ее тип определяется строгими неравенствами между коэффициентами линеаризованной системы, равными производным от правых частей (см. (8)), а неравенства между производными, выполненные в одной точке, выполняются и в ее окрестности. Корни уравнения (14), определяющие направления входа траекторий в точку покоя, также устойчивы относительно малого изменения этих производных.

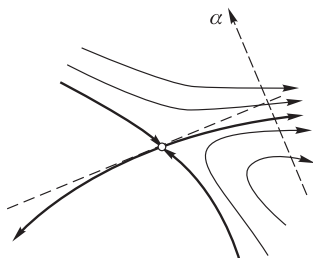


Рис. 134

Если среди точек покоя рассматриваемой конкретной системы имеются седла, то для правильного представления о расположении семейства траекторий на плоскости полезно изобразить соответствующие сепаратрисы. Это можно сделать с помощью численного интегрирования следующим образом. Направление выхода сепаратрисы из точки покоя определяется с помощью уравнения (14), примененного к линеаризованной системе. Отойдя по этому направлению на некоторое расстояние (рис. 134), надо выбрать ось в поперечном направлении и, принимая ее точки за начальные, проводить численное интегрирование вперед или назад

(на рис. 134 назад) во времени. По какую сторону сепаратрисы находится начальная точка, определится тем, куда отнесет траекторию после того как она пройдет вблизи точки покоя. Нашупав таким образом точку сепаратрисы, можно продолжить эту сепаратрису с помощью численного интегрирования.

Не следует думать, что перечисленными типами точек покоя они все исчерпываются. В случае, если матрица $\mathbf{A}$ вырожденная — в особенности, если она нулевая, — линейное приближение неприменимо, и приходится пользоваться более сложными методами исследования, которые обнаруживают огромное разнообразие типов точек покоя «высшего порядка».

Часто в типе такой точки удастся разобраться с помощью перехода к полярным координатам, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Подстановка в (5) приводит к уравнениям (проверьте!)

$$\dot{\rho} = P(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cos \varphi + Q(\varphi) \sin \varphi, \quad \rho \dot{\varphi} = Q(\varphi) \cos \varphi - P(\varphi) \sin \varphi,$$

откуда

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \frac{P(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cos \varphi + Q(\varphi) \sin \varphi}{Q(\varphi) \cos \varphi - P(\varphi) \sin \varphi}. \quad (15)$$

Допустим, что разложение функций P, Q по степеням x, y начинается с членов степени $m \geq 1$, так что

$$P(x, y) = P_m(x, y) + \dots, \quad Q(x, y) = Q_m(x, y) + \dots,$$

где P_m, Q_m — однородные многочлены степени m (один из них может быть нулевым), а многоточием обозначены члены высшего порядка малости. Подставляя в (15) и проводя сокращение, получим

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \frac{A(\varphi) + \dots}{B(\varphi) + \dots}. \quad (16)$$

где обозначено для краткости

$$A(\varphi) = P_m(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi + Q_m(\varphi) \sin \varphi,$$

$$B(\varphi) = Q_m(\varphi) \cos \varphi - P_m(\varphi) \sin \varphi,$$

а многоточия состоят из членов, содержащих ρ . Отметим, что

$$A(\varphi + \pi) \equiv (-1)^{m+1} A(\varphi),$$

$$B(\varphi + \pi) \equiv (-1)^{m+1} B(\varphi).$$

Будем истолковывать φ, ρ как декартовы координаты на некоторой вспомогательной плоскости и рассматривать (16) как обычное дифференциальное уравнение на этой плоскости; при этом надо иметь в виду, что правая часть (16) 2π -периодична по φ и что нас интересуют лишь малые значения ρ . Мы сразу видим, что если $B(\varphi) \neq 0$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), то так как уравнение (16) обладает частным решением $\rho(\varphi) \equiv 0$, семейство интегральных линий имеет примерный вид, показанный на рис. 135.

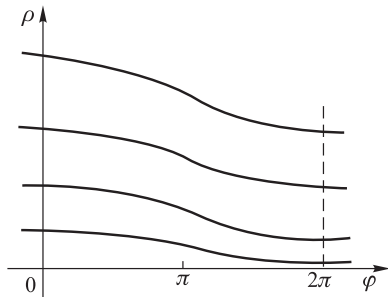


Рис. 135

Если вернуться к плоскости x, y , то это значит, что начало координат в данном случае будет фокусом, а в некоторых специальных случаях — центром; например, для рис. 135 получатся спирали, накручивающиеся на особую точку в положительном направлении (почему?).

Пусть теперь $B(\varphi)$ имеет нули, но $\neq 0$. Тогда на оси φ уравнение (16) имеет в этих нулях особые точки. Допустим для простоты, что $B(\varphi_0) = 0$, $B'(\varphi_0) \neq 0$, $A(\varphi_0) \neq 0$. Тогда, согласно предыдущему, можно перейти к уравнению (16) с укороченной правой частью, т. е.

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = k \frac{\rho}{\varphi - \varphi_0}, \quad \text{где} \quad k = \frac{A(\varphi_0)}{B'(\varphi_0)}.$$

Мы получаем узел, если $k > 0$, и седло, если $k < 0$ (проверьте!). Так можно проверить каждый нуль функции $B(\varphi_0)$ в отдельности. (Отметим, что уравнение $B(\varphi_0) = 0$ есть алгебраическое уравнение $(m+1)$ -й степени относительно $\operatorname{tg} \varphi$.) Если указанные условия простоты не выполнены, то можно перейти к полярным координатам новой плоскости с полюсом в особых точках.

Разобравшись в картине в плоскости φ, ρ , можно вернуться к плоскости x, y . Пусть, например, на оси φ рядом оказались, как на рис. 136, узел при $\varphi = \varphi_1$ и седло при $\varphi = \varphi_2$. Тогда в некотором секторе с вершиной в начале координат в плоскости x, y картина семейства траекторий будет, как на рис. 137: по направлению φ_1 к началу координат примыкает целый пучок траекторий, тогда как по направлению φ_2 — только одна. Так можно построить картину в полной окрестности точки покоя высшего порядка.

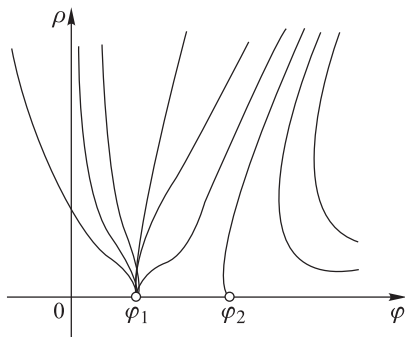


Рис. 136

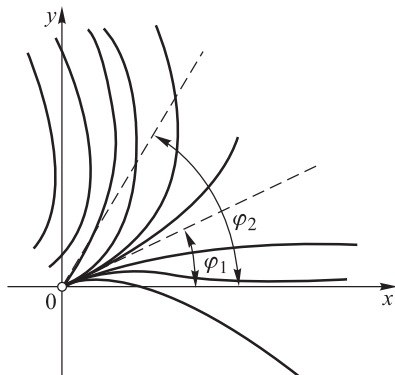


Рис. 137

Если $A(\varphi) \equiv 0$ или $B(\varphi) \equiv 0$, то в (15) надо продолжить разложение числителя, соответственно знаменателя.

Чтобы получить представление о расположении траекторий на фазовой плоскости, полезно разобраться также с их поведением на бесконечности. Для этого можно произвести, например, преобразование инверсии (п. II.2.8); можно также, считая y/x ограниченным, совершить преобразование $\xi = 1/x$, $\eta = y/x$ (продумайте его!), а затем, считая x/y ограниченным, совершить преобразование $\xi = 1/y$, $\tilde{\eta} = x/y$; полученные при этом сведения надо переформулировать в координатах x, y . Аналогично рассматривается бесконечность для фазового пространства любой размерности.

5. Циклы на плоскости. *Изолированные циклы* (в достаточной близости которых нет других циклов) на плоскости могут быть *устойчивыми*, *неустойчивыми* и — гораздо реже — *полуустойчивыми* (рис. 138), в соответствии с поведением траекторий в его узкой

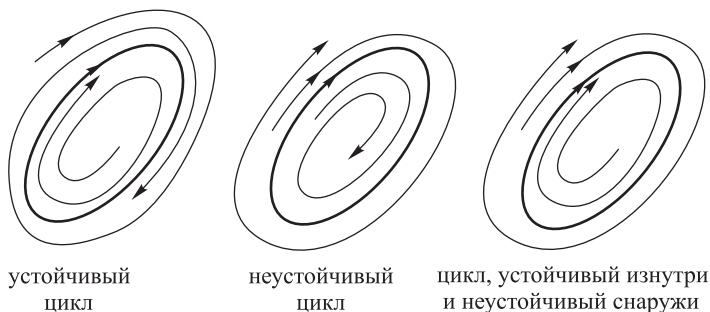


Рис. 138

окрестности: например, для устойчивого цикла все эти траектории при своем продолжении бесконечно наматываются на него снаружи и изнутри, безгранично к нему приближаясь, т.е. имеют этот цикл *омега-предельным* множеством (п. 2). Вообще цикл называется *предельным*, если он служит омега- или альфа-предельным множеством для некоторой незамкнутой траектории; таким образом, изолированные циклы на плоскости являются предельными. Возможен также случай, когда некоторая область на плоскости целиком заполнена циклами, как в случае центра; такие циклы будут неизолрованными.

Движение, описываемое устойчивым предельным циклом, называется *автоколебанием*. Для него характерно, что при любых достаточно малых возмущениях — точнее, не выводящих из *области притяжения* этого цикла, — движение асимптотически (а реально — после переходного режима) выходит вновь на этот цикл.

При отыскании предельных циклов полезной оказывается следующая теорема, которую мы здесь не будем доказывать; впрочем, она довольно наглядна: *если некоторая траектория при $t \geq t_0$ целиком содержится в конечной области, внутри и на границе которой нет точек покоя, то эта траектория либо замкнута, либо при $t \rightarrow \infty$ безгранично приближается к замкнутой, накручиваясь на нее*. Применяется эта теорема обычно так: допустим, что нам удалось построить кольцевую область (рис. 139), граница которой пересекается траекториями внутри области (это легко проверить, построив на границе поле скоростей), причем в этой области и на ее границе отсутствуют точки покоя, которые находятся непосредственно из условия (4). Тогда, начав с любой точки внутри области или на ее границе и продолжая с помощью численного интегрирования системы (5) траекторию вперед по времени, мы выйдем в пределе — а практически при большом

t — на цикл. Если граница области пересекается траекториями изнутри области наружу, то надо то же построение осуществить назад по времени. На практике можно никакого кольца не строить, а просто проводить численное интегрирование, начиная с различных точек области, в которой ожидается цикл, и строя полученную траекторию на миллиметровке; при этом довольно часто удастся нащупать цикл. Для этой же цели можно применить графическое интегрирование с помощью достаточно густой сети изоклин¹⁾ или более специальных построений, описанных в курсах теории колебаний.

Может оказаться полезным следующий отрицательный результат: *если в некоторой односвязной области (G) сумма $P'_x + Q'_y$ не меняет знака и $\neq 0$, то в (G) не может целиком содержаться цикл.* В самом деле, если (l) — такой цикл, ограничивающий фигуру (S) , то по формуле Остроградского

$$\oint_{(l)} (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j})_n dl = \int_{(S)} (P'_x + Q'_y) dS.$$

Однако левая часть равна нулю, а правая нет (почему?); это противоречие и доказывает наше утверждение. (Аналогично, если в k -связной области (G) сумма $P'_x + Q'_y$ не меняет знака и $\neq 0$, то число циклов в (G) менее k .)

При исследовании циклов, а также, в некоторых других вопросах, оказывается полезной следующая конструкция. Выберем произвольно

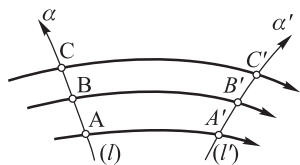


Рис. 140

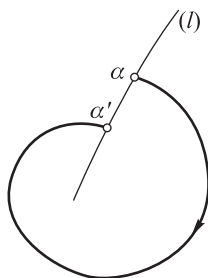


Рис. 141

две дуги $((l), (l'))$ без контакта, т.е. нигде не касающиеся поля скоростей, причем так, чтобы траектории, начинающиеся в точках (l) , достигали (l') (рис. 140). Тогда эти траектории осуществляют отображение (l) на (l') , которое называется *точечным отображением*. Если

¹⁾ *Изоклины* — линии, в точках которых поле имеет одинаковый наклон. Для системы (5) изоклины имеют уравнение $Q(x, y)/P(x, y) = C (= \text{const})$.

ввести координату α вдоль (l) и координату α' вдоль (l') , то точечное отображение будет описываться *функцией последования* $\alpha'(\alpha)$ монотонной и непрерывной.

В частности, если $(l') = (l)$, то функция последования $\alpha'(\alpha)$ будет возрастающей (рис. 141), а равенство $\alpha'(\alpha_0) = \alpha_0$ необходимо и достаточно для того, чтобы точка α_0 определяла цикл: другими словами, эта точка при точечном отображении должна быть неподвижной.

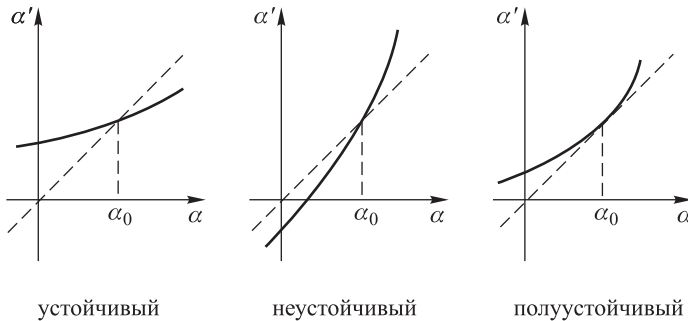


Рис. 142

На рис. 142 показан вид функции последования для различных типов предельных циклов; впрочем, надо иметь в виду, что поскольку сама функция последования строится с помощью численного интегрирования системы (5), то привлечение функции последования в данной ситуации нужно скорее для осмысливания этой ситуации.

Например, становится хорошо виден тонкий характер полуустойчивого цикла, который при как угодно малом изменении системы (5) может либо совсем пропасть (если график функции последования поднимется вверх), либо превратиться в пару близко расположенных циклов противоположного характера (если он опустится книзу). Пожалуй, единственное реальное значение полуустойчивых циклов состоит в том, что если система (5) включает в себя параметр и при его изменении в некоторый момент два цикла сливаются, то в этот момент возникает полуустойчивый цикл.

В заключение отметим, что не следует думать, буд-то ограниченная при $t \rightarrow \infty$ незамкнутая траектория на плоскости должна либо входить в точку покоя, либо накручиваться на цикл. Может еще быть случай, когда омега-предельное множество такой траектории состоит из нескольких незамкнутых траекторий и точек покоя; см., например, рис. 143.

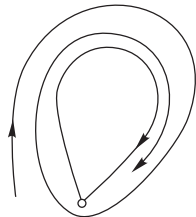


Рис. 143

6. Вращение векторного поля. При рассмотрении плоского векторного поля, в частности поля скоростей, полезным оказывается понятие вращения этого поля; оно подробно разобрано в книге [59].

Пусть дано плоское векторное поле

$$\mathbf{A}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

и выбрана какая-нибудь замкнутая линия (L) (не обязательно траектория!), не проходящая через особые точки поля $\mathbf{A}$, к которым причисляются точки, где оно обращается в нуль или терпит разрыв. Тогда *вращением* $\text{Вр } \mathbf{A}$ поля $\mathbf{A}$ вдоль линии (L) называется число полных

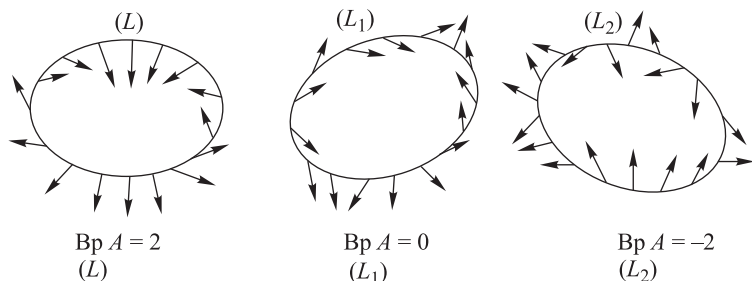


Рис. 144

оборотов, в положительном направлении, которые описывает вектор $\mathbf{A}(M)$, когда точка M проходит линию (L) один раз в положительном направлении (см. рис. 144). Вращение обладает следующими простыми свойствами.

1. $\text{Вр } \mathbf{A}_{(L)}$ — целое число.
2. Если непрерывно деформировать контур (L) или поле $\mathbf{A}$, причем так, чтобы в процессе деформации на контур не попадали особые точки поля, то вращение $\text{Вр } \mathbf{A}_{(L)}$ будет оставаться постоянным.

В самом деле, при малом изменении контура или поля полный поворот вектора поля вдоль контура если изменится, то мало. Но, будучи целочисленной величиной, он не может мало измениться, не оставаясь постоянным. (Продумайте это рассуждение!)

Из этого свойства, в частности, следует, что если внутри (L) поле не имеет особых точек, то $\text{Вр } \mathbf{A}_{(L)} = 0$ (почему?).

3. Если внутренняя по отношению к (L) часть плоскости разбита на части с контурами $(L_1), (L_2), \dots, (L_k)$, то

$$\text{Вр } \mathbf{A}_{(L)} = \text{Вр } \mathbf{A}_{(L_1)} + \text{Вр } \mathbf{A}_{(L_2)} + \dots + \text{Вр } \mathbf{A}_{(L_k)}$$

(докажите это!).

В конкретных примерах вращение можно определить либо наглядно, как на рис. 144, либо с помощью формулы

$$\text{Вр}_{(L)} \mathbf{A} = \frac{1}{2\pi} \oint_{(L)} d \arctg \frac{Q}{P} = \frac{1}{2\pi} \oint_{(L)} \frac{1}{P^2 + Q^2} (P dQ - Q dP). \quad (17)$$

Пусть теперь M_0 — изолированная особая точка поля $\mathbf{A}$. Выберем контур (L) так, чтобы внутри него содержалась точка M_0 и не было других особых точек поля. Это можно сделать различными способами, однако в силу свойства 2 значение $\text{Вр}_{(L)} \mathbf{A}$ для всех таких контуров одинаковое; оно называется *индексом* $\text{Инд}_{M_0} \mathbf{A}$ *особой точки* M_0 поля $\mathbf{A}$. Например, из рис. 127–131 видно, что при рассмотрении поля скоростей индекс седла равен минус единице, а узла, фокуса или центра равен единице. (Проверьте!)

Допустим теперь, что внутри контура (L) содержатся особые точки $M_1, M_2, \dots, M_k$. Разобьем внутреннюю по отношению к (L) часть плоскости на части так, чтобы внутри каждой содержалось по одной особой точке. Применяя свойство 3, получаем формулы

$$\text{Вр}_{(L)} \mathbf{A} = \sum_j \text{Инд}_{M_j} \mathbf{A}, \quad (18)$$

где сумма распространена на все особые точки поля, попавшие внутрь (L) . Эта формула напоминает теорему Коши о вычетах (П.4.9), и это сходство не просто внешнее: например, из формулы (18) нетрудно вывести принцип аргумента (п. П.4.7) теории аналитических функций (попробуйте!), она объясняет, геометрический смысл этого принципа.

Все сказанное имеет непосредственное отношение к теории автономных систем, так как каждая такая система задается векторным полем скоростей. Даже если оно не имеет разрывов, оно будет иметь особые точки в точках покоя системы. Заметим, что вращение поля вдоль любого цикла равно единице (почему?). Поэтому в силу следствия из свойства 2 получаем, что *внутри любого цикла (L) имеется по крайней мере одна точка покоя*. Более точно, из формулы (18) получается, что сумма индексов этих точек равна единице; поэтому, например, если эти точки могут быть только типов, описанных в п. 3, то число седел должно быть на единицу меньше общего числа точек остальных типов.

Отметим в заключение, что для сложных точек покоя (п. 4) индекс может равняться любому целому числу (продумайте это!).

Понятие вращения векторного поля имеет смысл для евклидова пространства любого числа измерений; будем для определенности говорить о трехмерном пространстве. Пусть дано векторное поле $\mathbf{A}(x, y, z)$ и выбрана какая-нибудь замкнутая поверхность (S) , не проходящая через особые точки поля. Любой точке $M \in (S)$ сопоставим точку $M' \in (S_0)$, где (S_0) —

фиксированная сфера радиуса 1 с центром O , по следующему правилу: $\vec{OM'} = \mathbf{A}(M)/|\mathbf{A}(M)|$ (рис. 145). Вращение $\text{Вр}_{\mathbf{A}}^{(S)}$ показывает, сколько раз при этом отображении (S) в (S_0) эта сфера окажется покрытой, причем покрытые участки засчитываются со знаком плюс или минус в зависимости от того, сохраняется ли ориентация при отображении на эти участки или нет. (При этом поверхности (S) и (S_0) считаются ориентированными естественным образом, т.е. наружной стороной в бесконечность. В n -мерном случае это означает, что ориентация каждой из этих $(n-1)$ -мерных поверхностей порождается естественной ориентацией

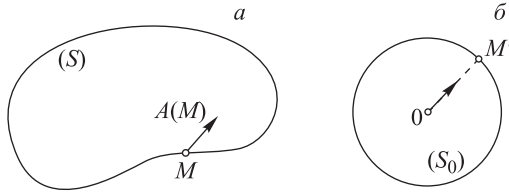


Рис. 145

ограниченного ею конечного n -мерного тела, см. ЛВМ, пп. XVI.20 и 29, а естественная ориентация E_n определяется последовательностью точек $(1; 0; \dots; 0)$, $(0; 1; \dots; 0)$, ..., $(0; 0; \dots; 1)$, $(0; 0; \dots; 0)$; продумайте это для $n = 2$ и 3.)

Так определенное вращение поля обладает всеми свойствами, указанными выше для плоского поля. Можно получить и формулу, аналогичную (17): если

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n A_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \mathbf{e}_j,$$

где $\mathbf{e}_j$ — орт оси x_j , то

$$\text{Вр}_{\mathbf{A}}^{(S)} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{(S)} \sum_{j=1}^n \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_{j-1}} & a_1 \frac{\partial a_1}{\partial x_{j+1}} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_n}{\partial x_{j-1}} & a_n \frac{\partial a_n}{\partial x_{j+1}} & \dots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{array} \right| \frac{\cos(\widehat{\mathbf{n}, x_j})}{|\mathbf{A}|^n} dS,$$

где $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к (S) , а ω_{n-1} — $(n-1)$ -мерная мера (S_0) , которую можно вычислить по рекуррентной формуле

$$\omega_{n-1} = 2 \frac{n}{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi \omega_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots; \omega_0 = 2);$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ четное}), \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} & (n \text{ нечетное}). \end{cases}$$

Аналогично плоскому случаю вводится и индекс особой точки поля.

7. Точки покоя в пространстве. Исследование малой окрестности точки покоя в пространстве любого числа n измерений в грубых случаях просто. Ограничимся случаем трехмерного пространства x_1, x_2, x_3 , так как рассмотрение пространства высшего числа измерений проходит аналогично.

Примем, как и в п. 3, за точку покоя начало координат и проведем линеаризацию. Тогда мы вновь получим систему вида (10), где обозначено

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x=0}.$$

С помощью преобразования $\mathbf{r} = \mathbf{T}\mathbf{r}'$ мы переходим к системе (11), так что опять встает вопрос о приведении матрицы $\mathbf{A}$ к по возможности более простому виду с вещественной преобразующей матрицей $\mathbf{T}$.

Ответ зависит от корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (19)$$

Если все корни вещественные и различные, то матрицу можно привести к диагональному виду, тогда система (11) будет иметь вид $\dot{x}_j = \lambda_j x_j$ и общее решение —

$$x_j = C_j e^{\lambda_j t} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (20)$$

Если, например, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$, то легко проверить, что при $t \rightarrow \infty$ любая интегральная линия входит в точку покоя, причем для $C_3 \neq 0$ — с направления оси x_3 , для $C_3 = 0, C_2 \neq 0$ — с направления оси x_2 и для $C_3 = C_2 = 0, C_1 \neq 0$ — с направления оси x_1 . Получается *устойчивый*

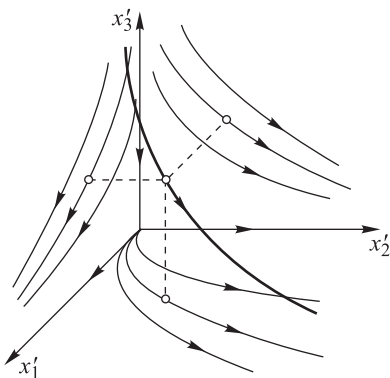


Рис. 146

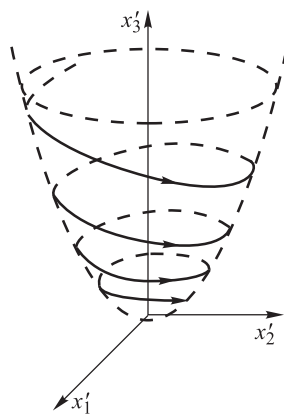


Рис. 147

узел с тремя направлениями входа. Если все $\lambda_j > 0$, получается *неустойчивый узел*. Если корни кратные, то все равно получается узел, но число направлений входа может быть иным. Узел получается и при $n > 3$, если все корни одного знака.

Если корни вещественные и различные, но не одного знака, то получается та же формула (20), но геометрический смысл будет иной: так, на рис. 146 для случая $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2$ показаны проекции траекторий на координатные плоскости (эти проекции сами служат траекториями), а также — жирно — одна из существенно пространственных траекторий. Это *седло*. (Седло получится и в случае кратных корней различного знака.) В точку покоя здесь попадают только траектории при $t \rightarrow -\infty$ с плоскости x'_1, x'_2 , которая служит сепаратрисой (п. 2), и при $t \rightarrow \infty$ с оси x'_3 ; все прочие траектории минуют точку покоя. Седло всегда неустойчиво.

Если уравнение (19) имеет пару мнимых, сопряженных корней, то в силу п. IV.3.4 систему (11) можно привести к виду

$$\dot{x}'_1 = \mu x'_1 + \nu x'_2, \quad \dot{x}'_2 = -\nu x'_1 + \mu x'_2, \quad \dot{x}'_3 = \lambda_3 x'_3,$$

откуда после перехода к полярным координатам в плоскости x'_1, x'_2 и интегрирования получаем

$$\rho = C_1 e^{\mu t}, \quad \varphi = -\nu t + C_2, \quad x'_3 = C_3 e^{\lambda_3 t}.$$

Если μ и λ_3 одного знака, получается картина, имеющая черты как узла, так и фокуса; такой *узло-фокус* может быть как устойчивым (рис. 147), так и неустойчивым. Если μ и λ_3 различного знака, получается *седло-фокус* (рис. 148), который всегда неустойчив. Если $\mu = 0$, то получается картина, как на рис. 149.

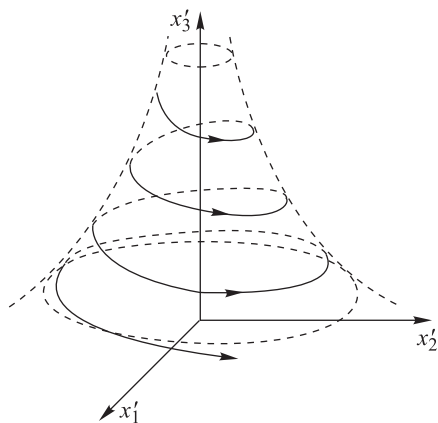


Рис. 148

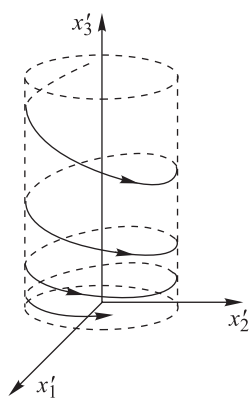


Рис. 149

При добавлении членов высшего порядка малости картина в целом сохраняется, за исключением рис. 149, который может при этом перейти как в узло-фокус, так и в седло-фокус. Кроме того, огромное разнообразие доставляет случай вырожденной (в частности, нулевой) матрицы $\mathbf{A}$.

При $n > 3$ получаются сходные случаи; новым будет лишь то, что если матрица $\mathbf{A}$ имеет несколько пар мнимых собственных значений, то получится наложение нескольких вращений, а в чисто мнимом случае — квазипериодичность (п. 1.7).

Так как формула $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{r}$ при $\det \mathbf{A} \neq 0$ определяет аффинное отображение пространства на себя, сохраняющее ориентацию, если $\det \mathbf{A} > 0$, и меняющее ее в противном случае, то из определения индекса (п. 6) следует, что если в точке покоя будет $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) > 0$ (< 0), то ее индекс равен единице (соответственно -1). Если $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = 0$, то индекс может принимать и другие значения.

Аналогом теоремы п. 6 о точке покоя внутри замкнутой траектории является следующее утверждение. Пусть в n -мерном пространстве, где задана автономная система (2), дано тело (T) , гомеоморфное n -мерному шару, с поверхностью (S) , которая может быть гладкой или кусочно-гладкой (точнее, иметь особенности размерности $\leq n - 2$). Пусть поле скоростей в каждой точке (S) отлично от нуля и направлено внутрь (T) или, в крайнем случае, по касательной к (S) , так что при $x_0 \in (T)$ и $t \geq 0$ будет $x(t; x_0) \in (T)$. Тогда внутри (T) имеется по крайней мере одна точка покоя. В самом деле, из условий вытекает, что вращение поля скоростей на (S) равно единице (продумайте это!).

Интересно, что при $n = 3$ заменить в этом утверждении шар на тор нельзя, так как тогда при выполнении прочих условий точки покоя может и не быть. Однако в качестве (T) можно взять шар с двумя или большим числом «ручек». (Тор гомеоморфен шару с одной «ручкой».) В курсах алгебраической топологии указывается общее условие на тело (T) любой размерности, достаточное для наличия по крайней мере одной точки покоя у автономной системы, заданной на (T) , траектории которой не могут покидать (T) с возрастанием времени. Этим условием служит отличие от нуля *эйлеровой характеристики* э.х. (T) тела (T) . Мы здесь не будем давать общее определение этой характеристики; отметим только, что это целое число, инвариантное относительно гомеоморфизмов тела (T) . Для n -мерного шара э.х. = 1, а для $(n - 1)$ -мерной сферы э.х. = $1 - (-1)^n$. Для трехмерного шара с k ручками э.х. = $1 - k$, а для поверхности этого тела э.х. = $2 - 2k$.

8. Циклы в пространстве. Цикл для системы (2) определяется некоторым ее периодическим решением $x_0(t)$; пусть T — период. Чтобы исследовать поведение решений в узкой окрестности этого цикла, совершим подстановку $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t) + \xi$, разложим правую часть по степеням проекций ξ и отбросим при малом $|\xi|$ члены выше первого порядка малости. Получим линейную систему

$$\dot{\xi} = \mathbf{f}'_x(x_0(t))\xi \quad (21)$$

с T -периодической матрицей коэффициентов. (Напомним, что по определению $\mathbf{f}'_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)$.) В силу п. 1.2 поведение решений системы (21) при $t \rightarrow \infty$ определяется ее мультипликаторами ρ_j , которые в кон-

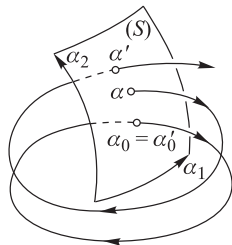
кретных примерах можно вычислить, построив с помощью численного интегрирования матрицу монодромии и подсчитав ее собственные значения. Как и при исследовании точек покоя, поведение решений полной системы при малых $|\xi|$ в основных случаях такое же, как для укороченной системы (21). Однако надо иметь в виду, что так как система (2) наряду с $x_0(t)$ имеет однопараметрическое семейство решений $x_0(t + \lambda) = x_0(t) + \lambda \dot{x}_0(t) + \dots$, то система (21) имеет одним из своих частных решений $x_0(t)$, которому отвечает мультипликатор $\rho = 1$. Поэтому классификация циклов проводится по значениям остальных мультипликаторов, и мы приходим к следующим выводам.

Если все указанные мультипликаторы системы (21) по модулю меньше единицы, то цикл $x_0(t)$ *притягивающий*, т. е. все траектории, начинающиеся от него достаточно близко, асимптотически к нему стремятся при $t \rightarrow \infty$, бесконечно на него накручиваясь. (Более того, Ляпунов доказал, что для *каждой* такой траектории $x(t)$ имеется значение τ (сдвиг во времени), для которого расстояние между точками $x(t + \tau)$ и $x_0(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$; это значение τ , свое для каждого решения $x(t)$, называется *асимптотической фазой*.) Если все эти мультипликаторы по модулю больше единицы, то цикл $x_0(t)$ *отталкивающий*. Если же среди мультипликаторов имеются как большие, так и меньшие единицы по модулю, то цикл $x_0(t)$ неустойчив, но имеет седловой характер, так как к нему при $t \rightarrow \infty$ стремятся траектории, заполняющие многообразие размерности $< n$. Случай, когда система имеет мультипликаторы, по модулю равные единице (кроме тривиального, упомянутого в конце предыдущего абзаца), а прочие все больше единицы или все меньше единицы, является сложным, и мы не будем его рассматривать.

Отсюда вытекает совсем простой признак устойчивости цикла для автономной системы (5) на плоскости. Пусть этот цикл имеет уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и период T . Тогда линеаризованная система имеет вид

$$\dot{\xi} = P'_x(\varphi(t), \psi(t))\xi + P'_y(\dots)\eta, \quad \dot{\eta} = Q'_x(\dots)\xi + Q'_y(\dots)\eta.$$

Воспользуемся формулой (1.18). Из нее, в силу равенства одного из мультипликаторов единице, вытекает, что если



$$\int_0^T [P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))] dt < 0, \quad (22)$$

то рассматриваемый предельный цикл устойчив; если же этот интеграл положителен, то цикл неустойчив. Этот признак получил Пуанкаре.

К исследованию циклов можно применить также метод точечных отображений (п. 5), который, кстати, исключает тривиальный мультипликатор $\rho = 1$; поясним этот метод для трехмерного пространства. Для этого допустим, что выбрана некоторая поверхность (S) без контакта

Рис. 150

(рис. 150) с уравнением $F(x) = 0$ и на ней выбрана система координат $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2)$, так что $x = \varphi(\alpha)$. Допустим, что траектория, начинающаяся в точке $\varphi(\alpha)$, вновь пересекает (S) в точке $x' = \varphi(\alpha') = x(t'; \varphi(\alpha))$, которую можно найти из уравнения $F(x(t; \varphi(\alpha))) = 0$. Тогда $\alpha' = \psi(\alpha)$ и есть точечное отображение, определяющее после перехода к координатам $\alpha_1; \alpha_2$ функцию исследования. Цикл определяется условием $\alpha'_0 = \alpha_0$ (рис. 150), а характер этого цикла определяется свойствами отображения $\psi(\alpha)$ вблизи α_0 . В частности, можно показать, что собственные значения матрицы $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha_0}$ как раз равны мультипликаторам системы (21), за исключением тривиального $\rho = 1$, который при этом выпадает; отсюда можно вновь получить выводы, указанные в предыдущем абзаце.

Метод точечных отображений можно применить также для отыскания заранее не заданного цикла, если примерно известно, где он должен находиться. Значение $\alpha' = \psi(\alpha)$ при любом конкретном α можно найти с помощью численного интегрирования системы (2) и проверки знака $F(x)$ вдоль траектории. Поэтому притягивающие циклы можно найти с помощью простой итерации $\alpha_{n+1} = \psi(\alpha_n)$, а отталкивающие — аналогичным образом, интегрируя назад во времени. Циклы других типов можно найти, решая уравнение $\alpha = \psi(\alpha)$ численно по методу Ньютона; необходимые для этого значения производных $\frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_k}$ можно находить с помощью уравнений в вариациях (§ VI.1) либо применяя формулы численного дифференцирования.

При построении циклов следует иметь в виду, что незамкнутая траектория в n -мерном пространстве, ограниченная при $t \rightarrow \infty$ и не содержащая в своем омега-предельном множестве точек покоя, в случае $n \geq 3$ не обязана, как это было при $n = 2$, накручиваться на цикл, ее асимптотическое поведение может быть более сложным.

Для построения и исследования циклов можно применить также следующий прием, принадлежащий Пуанкаре. Пусть рассматривается система вида (2) с одним или несколькими параметрами

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)), \quad (23)$$

общее решение которой в силу ее автономности имеет вид

$$x = F(t - t_0; C, \mu) \quad (C = (C_1, C_2, \dots, C_{n-1})).$$

Пусть при некотором значении $\mu = \mu_0$ известно периодическое решение $F(t - t_0; C_0, \mu_0)$ системы (23), периода T_0 . Имеются ли периодические решения при μ , близких к μ_0 ?

Если обозначить через T (неизвестный заранее!) период такого решения, то опять-таки из автономности системы условие периодичности решения можно записать в виде

$$F(T; C, \mu) = F(0; C, \mu), \quad \text{т. е.} \quad F(T; C, \mu) - F(0; C, \mu) = 0. \quad (24)$$

По условию последняя система уравнений при $T = T_0$, $C = C_0$, $\mu = \mu_0$ удовлетворяется. Значит, по теореме о неявных функциях (ЛВМ, п. IX. 13), если при этих значениях будет

$$\frac{\partial(F(T; C, \mu) - F(0; C, \mu))}{\partial(T, C)} \neq 0 \quad (25)$$

(в левой части стоит якобиан n -го порядка!), то при малом $|\mu - \mu_0|$ система (24) может быть однозначно разрешена относительно T, C , т. е. система (23) имеет ровно один цикл, близкий к заданному.

Так как условие (25) ставится на заданном цикле, то в этом условии за F можно принять решение системы (23), линеаризованной на этом цикле при $\mu = \mu_0$. Конечно, и для линеаризованной системы решение удастся найти лишь в специальных случаях, однако такая линеаризация может оказаться полезной для численной проверки условия (25) и, что еще более важно, для численного построения зависимостей $T(\mu), C(\mu)$ для искомого цикла при малых $|\mu - \mu_0|$ с последующим продолжением этих зависимостей по общему методу п. IV.4.11.

Мы не будем касаться здесь обширных исследований случая, когда условие (25) нарушено. Так будет, если при $\mu = \mu_0$ система имеет кратный цикл, готовый расщепиться на несколько или пропасть, или если она имеет целое многообразие циклов. Эти исследования изложены в книге [81].

9. Структурно устойчивые системы. В разных местах курса мы уже говорили о значении структурно устойчивых (иначе грубых) объектов, сохраняющих свои основные свойства при достаточно малом изменении параметров, от которых рассматриваемый объект зависит. Это значение можно мотивировать тем, что если эти параметры имеют реальный смысл, то можно говорить только о достаточно узком диапазоне их значений, а потому структурно неустойчивые (тонкие) свойства не могут точно реализоваться.

Конечно, это не означает, что негрубые случаи не нужно исследовать. Пусть, например, в формулировку некоторой задачи входит непрерывный параметр λ . Тогда условие $\lambda = 0$ (как и λ равно любому заранее заданному конкретному значению) является негрубым. Однако именно это условие может входить в математическую схематизацию задачи (например, λ — это коэффициент трения, а мы схематизируем процесс как происходящий без диссипации энергии и т. п.). Далее, исследование случая $\lambda = 0$ может на основании метода малого параметра или какого-либо иного метода продолжения по параметру служить базой для рассмотрения случая $\lambda \neq 0$, уже грубого. Если рассматривается серия задач, в которых λ непрерывно меняется, переходя от отрицательных значений к положительным, то исследование случая $\lambda = 0$ может оказаться необходимым. Но даже если λ берется произвольным, то $|\lambda|$ с определенной вероятностью может оказаться весьма малым, а тогда замена λ на значение 0 может оказаться в каких-либо отношениях приемлемой и в то же время существенно упрощающей исследование. Сказанное, впрочем, отнюдь не умаляет и роли грубых случаев.

Приведенное определение структурной устойчивости допускает разнообразные трактовки в соответствии с тем, какие объекты рассматриваются, какие возмущения параметров допускаются и какие свойства должны быть при этих возмущениях инвариантными. Советские ученые — специалист в области теории колебаний А. А. Андронов (1901–1952) и математик Л. С. Понтрягин (1908–1988) в 1937 г. ввели и исследовали понятие структурной устойчивости для автономных систем на плоскости, расширенной как в теории аналитиче-

ских функций (п. II.2.7). При этом они называли систему грубой, если при любом достаточно малом изменении правых частей и их производных вся картина расположения траекторий в целом не меняется, точнее, если все траектории возмущенной системы переходят в траектории исходной при некотором взаимно однозначном дифференцируемом в обе стороны отображении плоскости на себя. Они обнаружили, что для такой грубости необходимо и достаточно, чтобы:

1) точек покоя было конечное число и каждая из них принадлежала в линейном приближении одному из первых трех типов п. 3;

2) циклов было конечное число и каждый из них имел один из мультипликаторов отличным от единицы;

3) не было сепаратрис, идущих из седла в седло (продумайте эти условия!).

При достаточно малом изменении грубой системы вновь получается грубая система. В то же время негрубую систему с помощью как угодно малого изменения можно превратить в грубую. (Это можно сравнить со следующим: непостоянная функция при достаточно малой вариации остается непостоянной, тогда как постоянную функцию можно с помощью как угодно малой вариации превратить в непостоянную.)

Каждая устойчивая точка покоя и каждый устойчивый предельный цикл определяют на плоскости некоторую *область притяжения*, т.е. часть плоскости, покрытую траекториями, имеющими эту точку или этот цикл своим омега-предельным множеством. Плоскость, на которой задана грубая автономная система, разбивается на конечное число таких областей притяжения, отделенных друг от друга сепаратрисами, идущими в седла.

Для автономных систем в n -мерном пространстве при $n \geq 3$ легко указать необходимые условия структурной устойчивости, аналогичные указанным выше условиям 1–3, однако эти условия в совокупности не будут достаточными. Необходимые и достаточные условия пока неизвестны. Недавно было обнаружено, что не всякую структурно неустойчивую систему можно при помощи как угодно малой вариации превратить в структурно устойчивую.

10. Разрывные системы. В приложениях встречаются случаи, когда система (2) определена с обеих сторон от некоторой $(n-1)$ -мерной поверхности (S) , однако при переходе через (S) правая часть испытывает конечный скачок. При этом возникают новые обстоятельства, которые мы поясним, положив для наглядности $n = 3$.

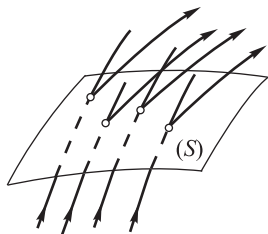


Рис. 151

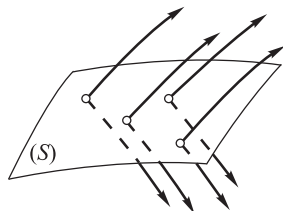


Рис. 152

Будем представлять ситуацию так, как будто в окрестности (S) заданы две автономные системы, однако с одной стороны (S) надо пользоваться одной из них, а с другой стороны — другой. Наиболее

прост случай, когда на (S) траектории обеих систем направлены в одну и ту же сторону от (S) (рис. 151). Тогда при переходе через (S) траектории разрывной системы, вообще говоря, испытывают излом, однако каких-либо осложнений в связи с этим обычно не возникает. При построении траекторий проводится *припасовывание* решений одной системы к решениям другой, т. е. конечные условия для одного решения служат начальными для другого.

Случай, когда на (S) траектории обеих систем направлены от (S) (рис. 152), вызывает осложнения, если начальная точка траектории находится на (S) , так как такую траекторию можно строить в любую сторону от (S) . Таким образом, этим начальным точкам отвечает по две траектории. Однако при дальнейшем продолжении траектория не может пересечь поверхность с таким характером разрыва поля скоростей (почему?), так что других осложнений здесь не будет.

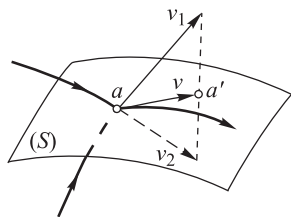


Рис. 153

Наиболее интересен случай, когда на (S) траектории обеих систем направлены к (S) (рис. 153). Здесь траектория, дойдя до (S) , не может сойти с (S) ни в одну, ни в другую сторону. Но предельные значения вектора скорости направлены под углом к (S) ; поэтому, казалось бы, мы приходим к противоречию, т. е. траектории, дойдя до (S) , должны прекратиться.

Чтобы иметь в последнем случае возможность разумного продолжения траектории, вводится следующее понятие обобщенного решения системы (2). Отложим от любой точки $a \in (S)$ предельные значения $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ вектора скорости с обеих сторон (S) (рис. 153) и на отрезке, соединяющем концы этих векторов, выберем точку a' так, чтобы вектор $\mathbf{v} = \overrightarrow{aa'}$ касался (S) . Тем самым на (S) получится поле касательных векторов; траектории этого поля (это так называемый *скользящий режим*), естественно считать продолжениями траекторий, попавших на (S) . При таком продолжении траектория может либо навсегда остаться на (S) , либо же, выйдя из зоны скользящего режима, «сорваться» с (S) .

Если на рис. 153 векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ направлены противоположно друг другу, то $\mathbf{v} = 0$, т. е. a служит точкой покоя для скользящего режима. Бывают случаи, когда на (S) имеется целая область, состоящая из таких точек; это *зона нечувствительности*.

Приведем несколько примеров, пользуясь простейшей разрывной функцией *сигнум* (signum по-латыни — знак):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & (-\infty < x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (0 < x < \infty), \end{cases}$$

связанной с единичной функцией $e(x)$ формулой $2e(x) = \operatorname{sgn} x + 1$. Такие функции обычно появляются в *системах с переключениями*, дифференциальный закон развития которых меняется скачком при достижении системой определенного состояния.

Уравнение $\ddot{x} + a \operatorname{sgn} x = 0$ равносильно системе

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a \operatorname{sgn} x_1 \quad (x_1 \equiv x).$$

Непосредственное интегрирование при $x > 0$ и $x < 0$ приводит при $a > 0$ к картине траекторий («фазовый портрет»), показанной на рис. 154 (проверьте!). На линии разрыва $x_1 = 0$ ситуация, как на рис. 151. Случай $a < 0$ мы предоставляем читателю.

Система с переключением

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - a \operatorname{sgn} x_2$$

имеет при $a > 0$ фазовый портрет, показанный на рис. 155 (проверьте!). Интервал $-a \leq x_1 \leq a$ оси x_1 образует зону нечувствительности, в любой его точке

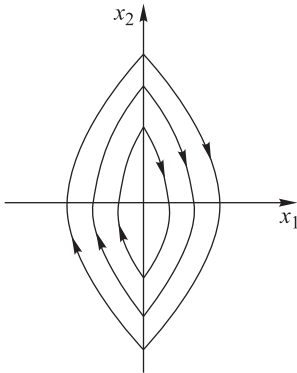


Рис. 154

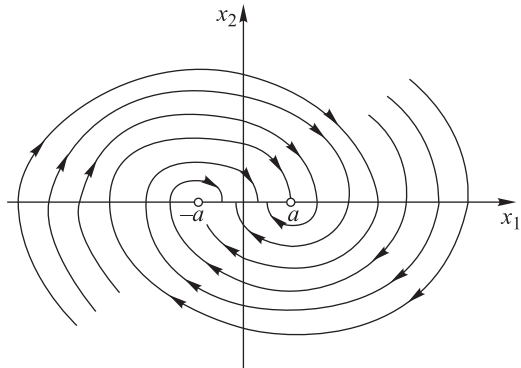


Рис. 155

возможно положение равновесия. При любых начальных условиях система после конечного числа колебаний за конечное время приходит в эту зону и там останавливается. Интересно, что если после такой остановки беспорядочно «встряхивать» систему, то она будет иметь тенденцию перейти в состояние, отвечающее значениям $x_1 = x_2 = 0$ (почему?).

В последнем примере, который мы приведем, разрывны не сами правые части системы, а их производные. Это осциллятор с люфтом, простейшая схема которого показана на рис. 156. Уравнение движения такого осциллятора имеет вид $m\ddot{x} + \varphi(x) = 0$, где

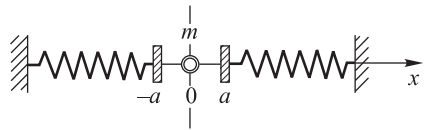


Рис. 156

$$\varphi(x) = \begin{cases} -k(x+a) & (-\infty < x < -a), \\ 0 & (-a < x < a), \\ k(x-a) & (a < x < \infty). \end{cases}$$

Соответствующая система имеет вид

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m} x_2, \quad \dot{x}_2 = -\varphi(x_1)$$

и фазовый портрет, показанный на рис. 157. Интервал $-a \leq x_1 \leq a$ оси x_1 состоит из точек покоя, т.е. образует зону нечувствительности; однако эта нечувствительность иного типа, чем на рис. 155, поскольку как угодно малое «встряхивание» приводит здесь к возникновению медленных колебаний конечной амплитуды. (Какой их физический смысл?)

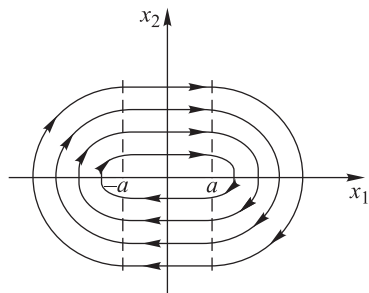


Рис. 157

Большое количество подобных и более сложных примеров подробно рассмотрено в книге [4].

В заключение отметим, что физическая система с переключениями может задаваться и несколькими автономными системами. (2), заданными в одной и той же области и сменяющимися друг друга по

определенному закону. Траектория точки, изображающей решение такой системы с переключениями в фазовом пространстве, может иметь самопересечения.

11. Системы на многообразиях. До сих пор мы считали, что система (2) задана на всем пространстве E_n или на некоторой области в этом пространстве. Однако эта система может быть задана и на некотором n -мерном многообразии с обобщенными координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Пусть, например, рассматривается система с одной степенью свободы, причем определяющая координата φ имеет смысл угла, а значениям φ и $\varphi + 2\pi$ отвечает одно и то же положение системы. Тогда для описания положений системы достаточно ограничиться интервалом $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, причем концам интервала отвечает одно и то же положение. Поэтому многообразие положений такой системы представляет собой окружность (более точно, *гомеоморфно* окружности — продумайте это!).

Если упомянутая система описывается уравнением $\ddot{\varphi} = f(\varphi, \dot{\varphi})$, то функция f должна быть 2π -периодической по φ . Фазовым пространством здесь служит пространство $(\varphi, \dot{\varphi})$; каждой точке этого пространства отвечает определенное *состояние* системы, т.е. ее положение и скорость. Так как совокупность положений образует в данном случае окружность, а совокупность скоростей — бесконечную прямую, то фазовое пространство представляет собой круговой цилиндр, который служит *топологическим произведением* окружности на прямую. Таким образом, в данном случае векторное поле скоростей, траектории, точки покоя и т.п. следует представлять на цилиндре. Эту систему можно изображать и на обычной плоскости (рис. 158), однако при этом надо помнить, что все полосы ширины 2π по φ должны быть

отождествлены, т.е. как бы этой плоскостью нужно обмотать цилиндр с длиной окружности 2π . (Проверьте, например, что на рис. 158 изображена одна точка покоя, две замкнутых и одна незамкнутая траектории.)

Аналогичным образом, если все правые части системы (1) периодичны по каждой из переменных x_j с периодом a_j ($j = 1, 2, \dots, n$), то фазовым многообразием этой системы служит топологическое произведение n окружностей. В частности, при $n = 2$ получается поверхность тора, так как между точками на ней и парами угловых координат имеется естественное взаимно однозначное соответствие (какое?).

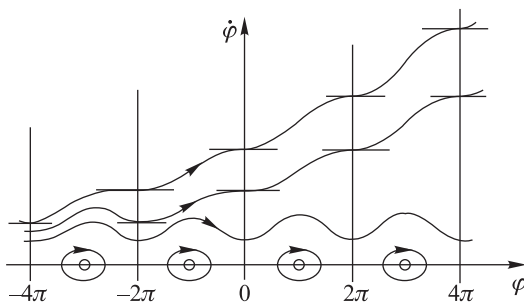


Рис. 158

Впрочем, обычно слово «поверхность» опускают, а говорят просто об автономной системе, заданной на торе (а при любом n — на n -мерном торе). Такую систему можно изображать также на обычной плоскости x_1, x_2 , разбитой на прямоугольники ширины a_1 и высоты a_2 , причем все эти прямоугольники должны быть отождествлены.

Автономная система может быть задана на сфере любого числа измерений и т.д. Возможны и более сложные фазовые многообразия: например, при рассмотрении движения твердого тела вокруг неподвижной точки многообразием состояний будет служить трехмерное многообразие ортогональных матриц третьего порядка с определителем 1 (почему?). Все эти многообразия подробно изучаются в курсах алгебраической (раньше говорили «комбинаторной») топологии.

Торы, сферы — это примеры компактных многообразий, цилиндры — некомпактных. В компактном многообразии омега- и альфа-предельные множества любой траектории обязательно содержат по крайней мере одну точку (почему?), замкнуты, состоят из целых траекторий и связны (п. 2).

Теория автономных систем на многообразиях обладает рядом новых черт по сравнению с теорией систем в E_n ; поясним это для случая $n = 2$. Прежде всего, замкнутая линия на двумерном многообразии не обязана делить его на конечную и бесконечную части: она может делить его на две конечные части (любая замкнутая линия на сфере)

или на две бесконечные части (верхний цикл на рис. 158), или вообще не делить на части (меридиан или параллель на торе). Поэтому на торе или на цилиндре из наличия цикла отнюдь не всегда вытекает наличие точки покоя. С другой стороны, из результатов, приведенных в конце п. 7, вытекает, что автономная система, заданная на сфере, всегда имеет по крайней мере одну точку покоя независимо от наличия циклов, тогда как на торе это, конечно, не так. Таким образом, хотя локальные свойства систем на двумерных многообразиях (строение поля вблизи точек покоя и т. п.) те же, что на плоскости, но свойства в целом (тотальные свойства) существенно зависят от топологической структуры многообразия.

12. Системы с интегральным инвариантом. Рассмотрим для определенности систему (2), заданную на E_n , хотя все сказанное будет относиться и к системам, заданным на многообразии. Пусть (V) — некоторая область в E_n ; тогда под $(V)_t$ будем понимать результат сдвига (V) по траекториям системы (2) на временной интервал t , другими словами, совокупность всех точек $x(t; x_0)$ ($x_0 \in (V)$) при данном t . Функцию $\rho(x)$, заданную на E_n , будем называть *плотностью интегрального инварианта* для системы (2), если для любой конечной области (V) интеграл

$$\int_{(V)_t} \rho(x) dx \quad (26)$$

не зависит от t ; он называется *интегральным инвариантом*. Геометрический смысл этого условия при $n = 2$ показан на рис. 159: объем

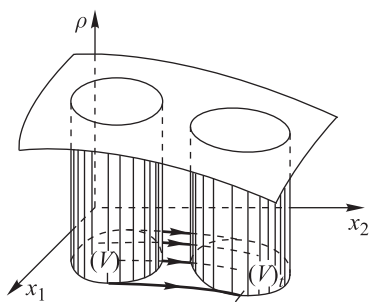


Рис. 159

цилиндрического тела, построенного на «окрашенной» области плоского потока, должен оставаться неизменным.

Чтобы вывести уравнение для плотности интегрального инварианта, заметим, что для инвариантности интеграла (26) необходима и достаточна инвариантность каждого его элемента, т. е.

$$D(\rho(x) dV) = 0, \quad (27)$$

где под D понимается дифференциал, полученный в результате сдвига по траекториям на время dt . Однако

$$D(\rho dV) = D\rho dV + \rho D(dV) = \text{grad } \rho \cdot \dot{x} dt dV + \rho \text{div } \dot{x} dV dt$$

(см, п. I.1.3). Поэтому в силу (2) и (27) получаем уравнение

$$\text{div}(\rho \mathbf{f}(x)) = \text{grad } \rho \cdot \mathbf{f}(x) + \rho \text{div } \mathbf{f}(x) = 0, \quad (28)$$

выражающее необходимое и достаточное условие того, чтобы, функция $\rho(x)$ была плотностью интегрального инварианта системы (2).

Если $\rho = \text{const}$ служит такой плотностью, то при сдвиге по траекториям сохраняется n -мерный объем каждой области. Из (28) видно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $\text{div } \mathbf{f}(x) = 0$. Этим свойством обладают, в частности, канонические системы

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad H = H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n))$$

(п. VI.3.1), рассмотренные в $2n$ -мерном фазовом пространстве x, p (проверьте!); поэтому $2n$ -мерный объем в этом пространстве при сдвиге по траекториям сохраняется (теорема Лиувилля).

Если для любой плотности $\rho(x)$ интегрального инварианта ввести меру (см., например, ЛВМ, п. XVI.19) по формуле

$$\mu(V) = \int_{(V)} \rho dV,$$

то мы получим *меру, инвариантную* относительно сдвига по траекториям. Наибольший интерес представляет случай, когда $\rho(x) > 0$.

Будем впредь считать, что плотность $\rho(x)$ непрерывна и $0 < \rho(x) < \infty$. Нетрудно показать, что любая система (2) в окрестности любой своей точки, не являющейся точкой покоя, обладает интегральным инвариантом. Однако из этого утверждения мало что можно извлечь, основной интерес представляют системы с интегральным инвариантом во всем фазовом пространстве. Существенно подчеркнуть, что *далеко не всякая автономная система обладает интегральным инвариантом*; в реальных задачах наличие такого инварианта примерно равносильно отсутствию в рассматриваемой физической системе диссипации или подкачки энергии.

Пусть в системе с интегральным инвариантом имеется точка покоя x_0 . Тогда, полагая в (28) $x = x_0$, мы видим, что $\text{div } \mathbf{f}(x_0) = 0$. Но левая часть равна сумме корней характеристического уравнения системы (2), линеаризованной в x_0 (почему?). Значит, если имеются корни с положительной вещественной частью, то должны иметься и корни с отрицательной вещественной частью, и наоборот. Тем самым исключаются грубые притягивающие и отталкивающие точки покоя; например, из точек, перечисленных в п. 3, для систем с интегральным

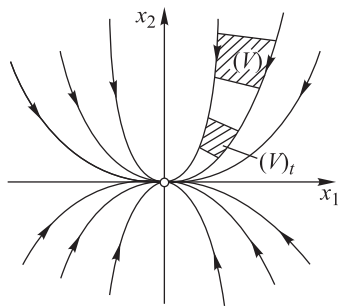


Рис. 160

инвариантом возможны только седла и центры. Устойчивые узлы и фокусы характерны для систем с диссипацией, а неустойчивые — с подкачкой энергии (продумайте это!).

К этим же выводам можно прийти из наглядных соображений. Рассмотрим, например, устойчивый узел (рис. 160) и в его окрестности некоторую область (V) . Тогда при $t \rightarrow \infty$ она будет вырождаться в точку, а это противоречит инвариантности интеграла (26) (почему?). То же рассуждение показывает, что в системе с интегральным инвариантом невозможны притягивающие или отталкивающие предельные циклы, а также вообще притягивающие или отталкивающие многообразия размерности ниже, чем размерность фазового пространства.

13. Эргодичность. Пусть на компактном многообразии (M) задана автономная система с интегральным инвариантом (такие системы иногда называются *динамическими*). Как мы знаем, такая система определяет на (M) , во-первых, поток, т. е. преобразование $x \rightarrow x_t$ (п. 1), а во-вторых, меру μ , инвариантную относительно этого потока. Пусть теперь на (M) задана любая конечная функция $f(x)$; рассмотрим ее среднее значение вдоль траектории, начинающейся в некоторой точке x , другими словами,

$$\bar{f}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt. \quad (29)$$

Американский математик Г. Биркгоф (1884–1947) доказал, что это среднее значение имеется для всех x , за исключением, быть может, множества меры нуль, как говорят иначе, для *почти всех* значений x . (Немного раньше Дж. Нейман доказал несколько более слабый вариант этой *эргодической теоремы*, именно, что $\frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt$ при $T \rightarrow \infty$

сходится к $\bar{f}(x)$ в среднем квадратичном, т. е. в смысле $L_2(M)$.)

Функция $\bar{f}(x)$ сохраняет постоянное значение вдоль каждой траектории (почему?), т. е. инвариантна относительно сдвига по траекториям. Кроме того, легко проверить, что

$$\int_{(M)} \bar{f}(x) d\mu = \int_{(M)} f(x) d\mu. \quad (30)$$

В самом деле, разбивая (M) на кусочки и пользуясь инвариантностью меры, получим

$$\int_{(M)} f(x_t) d\mu \approx \sum_k f(x_{kt} \mu(\Delta M_k)) = \sum_k f(x_{kt} \mu(\Delta M_k)_t) \approx \int_{(M)} f(x) d\mu$$

(продумайте эти вычисления!), откуда в пределе получаем

$$\int_{(M)} f(x_t) d\mu = \int_{(M)} f(x) d\mu. \quad (31)$$

Но тогда и

$$\int_{(M)} \left[\frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt \right] d\mu = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{(M)} f(x_t) d\mu = \int_{(M)} f(x) d\mu,$$

и в пределе при $T \rightarrow \infty$ приходим к (30).

Смысл функции $\bar{f}(x)$ особенно нагляден в следующем случае. Пусть (A) — некоторое множество точек (M) и функция $f_{(A)}(x)$ определена так:

$$f_{(A)}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (A)), \\ 0 & (x \notin (A)); \end{cases}$$

это — *характеристическая функция* множества (A) . Тогда в силу (29) $\bar{f}_{(A)}(x)$ есть среднее время пребывания в множестве (A) траектории, начинающейся в точке x , другими словами, *вероятность* попадания в (A) точки, движущейся вдоль этой траектории.

Динамическая система называется *эргодической*, если инвариантными функциями в ней являются только константы (более точно, если любая инвариантная функция почти всюду равна константе). Для такой системы $\bar{f}(x) \equiv \bar{f} = \text{const}$, а потому из (30) следует, что

$$\bar{f} = \frac{1}{\mu(M)} \int_{(M)} f(x) d\mu,$$

т.е. $\bar{f}$ равно среднему значению функции $f(x)$ по инвариантной мере μ . Формула (29) приобретает вид

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt = \bar{f} = \frac{1}{\mu(M)} \int_{(M)} f(x) d\mu,$$

другими словами, для почти всех x *временное среднее значение функции равно ее фазовому* (т.е. пространственному) среднему. Это утверждение имеет весьма большое значение в физике (в особенности в статистической механике), так как дает возможность подсчитать плотность вероятности (ЛВМ, п. XVIII.8) пребывания системы в определенном состоянии с помощью фазового осреднения.

Эргодические системы обладают следующим важным свойством *перемешивания*, имеющим наглядное истолкование. Будем истолковы-

вать заданный поток как поток жидкости в фазовом пространстве и допустим, что в момент времени $t = 0$ жидкость в некоторой области (V) окрашена. Как распределится окрашенная порция жидкости при $t \rightarrow \infty$; другими словами, если (A) — произвольное множество, то как ведет себя $\mu((V)_t \cap (A))$ при $t \rightarrow \infty$ ($\cap$ — знак общей части, т. е. пересечения множеств, так что $(V)_t \cap (A)$ — это порция окрашенной жидкости, попавшей в момент t в мысленно выделенный объем (A))? Так как

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_{(A)}(x_t) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \bar{f}_{(A)} = \frac{\mu(A)}{\mu(M)},$$

то, умножая обе части на $f_{(V)}(x)$ и интегрируя по x , получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_{(M)} f_{(A)}(x_t) f_{(V)}(x) d\mu \right] dt \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(A)}{\mu(M)} \mu(V). \quad (32)$$

Интеграл в квадратных скобках в силу формулы (31) равен

$$\int_{(M)} f_{(A)}(x) f_{(V)}(x_{-t}) d\mu. \quad (33)$$

Однако $f_{(V)}(x_{-t})$ есть характеристическая функция множества $(V)_t$, а потому интеграл (33) равен $\mu((V)_t \cap (A))$ (продумайте это!). Подставляя в (32), получаем окончательно

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mu((V)_t \cap (A))}{\mu(A)} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(V)}{\mu(M)}.$$

Таким образом, среднее значение доли окрашенной жидкости в (A) при большом T приблизительно равно ее доле в (M) . При дополнительных предположениях оказывается возможным доказать «перемешиваемость в сильном смысле», т. е. более сильное утверждение

$$\frac{\mu((V)_t \cap (A))}{\mu(A)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(V)}{\mu(M)}.$$

Но как узнать, что заданная динамическая система эргодична? К сожалению, простые достаточно широкие признаки этого пока отсутствуют. Поэтому во многих физических исследованиях приходится принимать это важное свойство лишь на основании отдаленных аналогий, без достаточного обоснования.

Разницу между эргодическими и неэргодическими динамическими системами легко понять на следующем простом примере. Рассмотрим автономную систему

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \quad (34)$$

где ω_1 и ω_2 — постоянные, а координаты φ_1, φ_2 имеют характер углов, так что добавление к ним любых целых чисел не меняет точки многообразия, на котором рассматривается поток; другими словами, система (34) рассматривается на торе (п. 11), но ее можно изображать и на полной плоскости, считая отождествленными все квадраты 1×1 с целочисленными координатами вершин. Очевидное интегрирование показывает, что траекториями на этой плоскости служат прямые линии (рис. 161) и что площадь при сдвиге по траекториям сохраняется, т. е. мы имеем динамическую систему. Имеется принципиальная

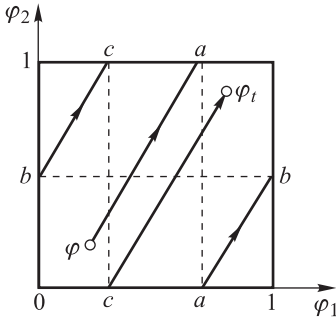


Рис. 161

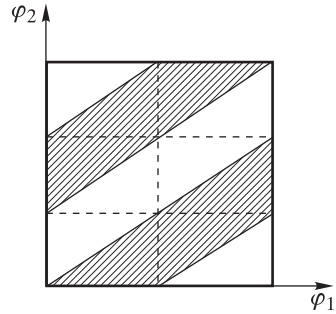


Рис. 162

разница между случаями рационального и иррационального отношения ω_1/ω_2 . В первом случае все траектории замкнутые и нетрудно построить инвариантную функцию, отличную от константы: например, для $\omega_1/\omega_2 = 3/2$ можно взять характеристическую функцию множества, заштрихованного на рис. 162 (проверьте!). Таким образом, этот случай не эргодический.

В отличие от этого, если ω_1/ω_2 иррационально, то все траектории незамкнутые. Можно доказать, что каждая такая траектория при своем безграничном продолжении заполняет тор *всюду плотно*, т. е. проходит в любой близости от любой его точки (но, конечно, не исчерпывает его, подобно тому как совокупность рациональных чисел на отрезке заполняет его всюду плотно, но не исчерпывает его). Кстати, отсюда следует, что как ω -, так и α -предельными множествами любой траектории служит полный тор. Мы видим, что любая кусочно-непрерывная инвариантная функция должна быть константой (почему?). Это оказывается верным и для функций без требования кусочной непрерывности, так что мы имеем эргодическую систему. (Проверьте, что перемешиваемости в сильном смысле здесь не будет.)

Легко проверить, что совокупность рациональных чисел на прямой имеет меру нуль и, таким образом, иррациональные числа в определенном смысле являются более типичными, чем рациональные. Поэтому и эргодический случай в рассматриваемом примере более типичен, чем неэргодический.

В заключение отметим, что в приложениях к каноническим консервативным системам (п. VI.3.11) фазовое пространство обычно бывает некомпактно; однако тогда все построения можно осуществлять на компактном многообразии фазового пространства, отвечающем заданному уровню полной энергии.

Математическое изложение эргодической теории можно найти в книгах [122, 128].

§3. Устойчивость решений

Понятие *устойчивости по Ляпунову* — одно из весьма важных понятий прикладной математики. Здесь мы подробно рассмотрим его, а также некоторые смежные вопросы. Глубокое исследование различных вопросов, связанных с устойчивостью решения дифференциальных уравнений, можно найти в ряде книг, в частности в [8, 60, 68, 82, 133].

1. Введение. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{y}_j = F_j(y_1, y_2, \dots, y_n; t) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

определенную на бесконечном интервале времени $t_0 \leq t < \infty$. Как и в §2, мы будем пользоваться сокращенной записью

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t). \quad (1)$$

Пусть начальным условиям $t = t_0$, $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}_0$ отвечает решение $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$), которое мы будем называть *невозмущенным*. Решения $\mathbf{y}(t)$ той же системы (1) при любых других начальных условиях $t = t_0$, $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}_0$ будем называть *возмущенными*. В классической постановке Ляпунова невозмущенное решение $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ называется *устойчивым*, если при бесконечно малом изменении начальных данных возмущенное решение остается в бесконечной близости от невозмущенного на протяжении всего дальнейшего времени. Другими словами, это означает, что

$$\max_{t_0 \leq t < \infty} |\mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)| \rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0| \rightarrow 0. \quad (2)$$

(Продумайте это определение; отметим, что здесь более точно писать $\sup$, а не $\max$, так как наибольшее значение может достигаться только в пределе, на бесконечности). Если условие (2) не выполнено, то невозмущенное решение $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ называется *неустойчивым по Ляпунову*.

Уже сам Ляпунов отметил одно из видоизменений понятия устойчивости: он назвал решение $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ *асимптотически устойчивым*, если кроме (2) дополнительно дано, что при достаточно малых $|\mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0|$ будет обязательно $\mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Сейчас рассмотрен целый ряд других подобных видоизменений. Отметим, например, определение, в котором возмущается не только начальное условие, но и сама система уравнений, так что $\mathbf{y}(t)$ удовлетворяет системе уравнений вида

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, t).$$

При этом $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ называется *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*, если

$$\max_{t_0 \leq t < \infty} |\mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)| \rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0| \rightarrow 0 \text{ и } \max_{\mathbf{y}, t} |\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, t)| \rightarrow 0.$$

В реальных задачах возмущению системы (1) может отвечать наложение на физическую систему неучитываемых малых внешних сил на протяжении всего процесса движения.

Впрочем, можно показать, что во многих случаях из асимптотической устойчивости решения вытекает его устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Так будет, например, если функция $\mathbf{F}$, а также решение не зависят от t или периодичны по t с одинаковым периодом.

Обычно исследование устойчивости движения сводят к исследованию устойчивости равновесия с помощью переноса начала координат в движущуюся точку, т. е. с помощью замены $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{x}$. После этой замены система (1) перейдет в

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\tilde{\mathbf{y}}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{y}}(t), t) - \dot{\tilde{\mathbf{y}}}(t),$$

или, короче, в

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

а невозмущенное решение — в тождественно нулевое. Обращаем внимание на то, что даже если исходная система (1) была автономной, т. е. правая часть не содержала t , то система (3) все равно будет неавтономной, за исключением того случая, когда изучается устойчивость состояний равновесия (т. е. $\tilde{\mathbf{y}}(t) \equiv \text{const}$) автономной системы. Полезно заметить также, что если невозмущенное решение $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ было ω -периодическим, а система (1) автономная или ω -периодическая, то и система (3) будет ω -периодической.

Впредь мы будем рассматривать систему (3) с нулевым невозмущенным решением.

Бывают случаи, когда нас интересует не малость всех компонент возмущенного решения, а малость некоторых из них или некоторых их комбинаций, или, в общем случае, некоторых функционалов от решения. Например, бывает полезно знать, что скорость системы остается малой, хотя координаты могут и возрасти, или что мал интеграл от квадрата отклонения координат, и т. п. В этом случае говорят об устойчивости *относительно выбранных комбинаций или функционалов*.

Иногда рассматриваются не произвольные возмущения начальных условий, а только связанные определенными соотношениями; тогда говорят об устойчивости относительно выбранного класса *возмущений*.

2. Уравнения первого порядка. Вопрос об устойчивости решения уравнения первого порядка обычно решается до конца без привлечения общей теории. Рассмотрим сначала уравнение

$$\dot{x} = f(x) \quad (4)$$

и допустим, что оно имеет тождественно нулевое решение; это значит, что $f(0) = 0$. Устойчивость этого решения зависит от знака $f(x)$ при x , близких к нулю.

Допустим, что когда x , возрастая, переходит через нуль, функция $f(x)$ меняет свой знак с $+$ на $-$. Так как изоклинами уравнения (4) служат прямые $x = \text{const}$, то получается картина расположения интегральных кривых, как на рис. 163. Ясно, что решение $x \equiv 0$ является асимптотически устойчивым. Скорость стремления $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ легко

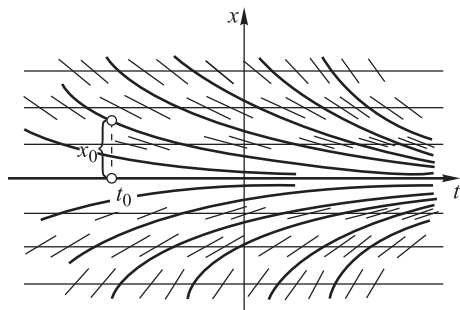


Рис. 163

определить, так как уравнение (4) просто интегрируется, она зависит от скорости стремления $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. (Проверьте, что в основном случае, когда $f(x) \sim kx$, $k < 0$, решение $x(t)$ стремится к нулю со скоростью экспоненты, а при $|f(x)| \sim |kx|^m$, $m > 1$ — только со степенной скоростью.)

При любой другой комбинации знаков $f(x)$ малых $|x|$ решение $x \equiv 0$ будет неустойчивым (почему?).

Применим полученный результат к уравнению, содержащему параметр

$$\dot{x} = f(x; \lambda),$$

считая для простоты функцию f непрерывной. Пусть, например, линия (L) : $f = 0$ в плоскости λ, x и распределение знаков f такие, как показано на рис. 164. Тогда при каждом фиксированном λ направление изменения x

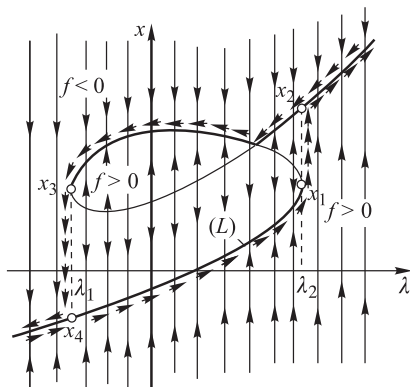


Рис. 164

показано на рис. 164 стрелками. Отсюда легко указать участки (L), которым отвечают устойчивые положения равновесия; на рис. 164 эти участки показаны более жирно. Мы видим, что при $\lambda < \lambda_1$ и при $\lambda > \lambda_2$ имеется одно устойчивое положение равновесия, а при $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ — два устойчивых и одно неустойчивое; при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ происходит бифуркация. Наличие такого интервала трехзначности влечет за собой интересное явление *перескока* при изменении параметра λ , показанное на рис. 164. При медленном (чтобы процесс в каждый момент можно было считать установившимся — такие процессы называются *квазистатическими*) увеличении λ до значения λ_2 абсцисса положения равновесия непрерывно возрастает до x_1 , однако затем она совершает скачок до x_2 , после чего продолжает непрерывно возрастать. При изменении λ в обратном направлении x непрерывно изменяется до значения x_3 , после чего совершает перескок до x_4 . Таким образом, при изменении параметра λ в различных направлениях надо пользоваться различными ветвями линии (L); это явление называется *гистерезисом*, а фигура на рис. 164, ограниченная точками с ординатами x_1, x_2, x_3, x_4 называется *петлей гистерезиса*. Неустойчивый участок линии (L) при этом совсем не используется.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{x} = f(x, t),$$

где $f(0, t) \equiv 0$, т. е. нулевая функция служит решением, а знак $f(x, t)$ при малых $|x|$, как и раньше, противоположен знаку x . Тогда поле направлений будет примерно такое же, как на рис. 163, т. е. нулевое решение и здесь будет устойчивым. Однако если поле при $t \rightarrow \infty$ становится слишком пологим, то возмущенные решения могут асимптотически не достичь нуля; тогда устойчивость будет неасимптотической. Рассмотрим типичный пример

$$\dot{x} = \varphi(t)x \quad (\varphi(t) < 0).$$

Интегрируя, получаем

$$x = C \exp \int_t^t \varphi(t) dt.$$

Значит, если $\int_0^\infty \varphi(t) dt = -\infty$, то устойчивость будет асимптотической, в противном случае — неасимптотической (продумайте это!).

3. Метод функций Ляпунова. Перейдем теперь к автономной системе

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где $\mathbf{f}(0) = 0$, т. е. функция $\mathbf{x} \equiv 0$ служит решением, которое мы и примем за невозмущенное. Метод функций Ляпунова, получивший в последние годы широкое распространение в теории устойчивости и в смежных вопросах, имеет непосредственную механическую аналогию,

которую мы поясним на примере колебаний линейного осциллятора с одной степенью свободы. Уравнение этих колебаний

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

после перехода к фазовой плоскости приобретает вид системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2hx_2. \quad (6)$$

Легко проверить, что полная энергия осциллятора, с точностью до коэффициента пропорциональности, равна

$$E(x_1, x_2) = \omega_0^2 x_1^2 + x_2^2 \quad (7)$$

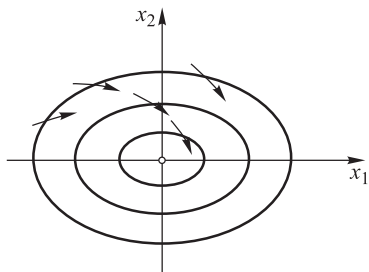


Рис. 165

и потому имеет в состоянии равновесия $x_1 = x_2 = 0$ минимальное значение; линии $E = \text{const}$ на фазовой плоскости показаны на рис. 165. Однако при наличии трения, т.е. при $h > 0$, полная энергия в процессе колебаний должна убывать; это нетрудно доказать и формально:

$$\dot{E} = \omega_0^2 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 2\omega_0^2 x_1 x_2 + 2x_2 (-\omega_0^2 x_1 - 2hx_2) = -4hx_2^2 < 0. \quad (8)$$

Таким образом, линии равной полной энергии на фазовой плоскости пересекаются траекториями снаружи внутрь, откуда видно, что рассматриваемое состояние равновесия асимптотически устойчиво. Если $h = 0$, т.е. когда трение отсутствует, будет $E = \text{const}$. Движение в фазовой плоскости будет происходить по эллипсам рис. 165, т.е. получится неасимптотическая устойчивость. Наконец, если $h < 0$ (такое отрицательное трение возможно для систем с подкачкой энергии), то $\dot{E} > 0$, эллипсы будут пересекаться изнутри наружу, т.е. будет неустойчивость.

В этих рассуждениях не так уж было важно, что E пропорциональна полной энергии, существенны только поведение функции $E(x_1, x_2)$ в окрестности положения равновесия (минимум), а также характер изменения этой функции вдоль траекторий (убывает, возрастает). Поэтому, обобщая проведенные рассуждения и возвращаясь к системе (5), мы приходим к следующей основной теореме Ляпунова об устойчивости. Пусть в некоторой окрестности точки $x = 0$ существует непрерывная функция $V(x)$, для которой $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ ($x \neq 0$) (такие функции по аналогии с квадратичными формами будем называть положительно определенными) и

$$\dot{V} (\equiv \text{grad } V(x) \cdot \mathbf{f}(x)) \leq 0. \quad (9)$$

Тогда невозмущенное решение $x \equiv 0$ является устойчивым.

Для доказательства этого наглядного утверждения допустим, что нам задано какое-либо малое число $\varepsilon > 0$. Тогда функция $V(x)$, непрерывная и положительная на сфере $(S)_\varepsilon$ с центром $x = 0$ радиуса ε , имеет там (строго) положительное наименьшее значение m_ε . Выберем теперь столь малую сферу $(S)_\delta$, чтобы внутри нее было $V(x) < m_\varepsilon$. Тогда если $|x_0| < \delta$, т. е. траектория начинается внутри $(S)_\delta$, то в силу условия (9) она навсегда останется внутри $(S)_\varepsilon$ (почему); а это и означает устойчивость.

Конечно, в теореме об устойчивости можно было бы поменять знак у V , т. е. считать, что $V(x) < 0, \dot{V}(x) \geq 0$. Это замечание относится и к дальнейшим теоремам.

Небольшое изменение этого рассуждения, которое мы здесь не будем проводить, показывает, что *если условие (9) заменить на более сильное требование отрицательной определенности функции $\dot{V}(x)$, то решение $x \equiv 0$ будет асимптотически устойчивым*. Условие (9) не гарантирует асимптотической устойчивости, так как оно не исключает того, что вдоль некоторых траекторий будет $\dot{V} \equiv 0$, т. е. $V = \text{const}$, а такие траектории не могут входить в точку $x = 0$. Однако если в дополнение к (9) потребовать, *чтобы многообразие, на котором $\dot{V} = 0$, при $x \neq 0$ не содержало целых траекторий*, то такое явление исключено, и решение $x \equiv 0$ будет асимптотически устойчивым. Это небольшое полезное замечание применимо, в частности, к примеру (6)–(8) при $h > 0$, так как в этом примере E не является отрицательно определенной, однако она обращается в нуль только на прямой $x_2 = 0$, не содержащей целых траекторий (почему?).

Если функция Ляпунова $V(x)$ строится нелокально, то она может выявить, большую или меньшую часть зоны притяжения устойчивого решения. Допустим, например, что эта функция задана во всем пространстве x (аналогично рассматривается случай функции, заданной в области конечных, не малых размеров) и множество, на котором $\dot{V} = 0$, не содержит при $f(x) \neq 0$ целых траекторий. Тогда, если $V(x)$ имеет при $x = 0$ минимум, то отвечающая ему яма (п. VI.3.13) целиком принадлежит зоне притяжения решения $x \equiv 0$, хотя, вообще говоря, не исчерпывает ее. Если же дополнительно дано, что $x = 0$ служит единственной точкой покоя системы (5) и $V(\infty) = \infty$, то все ее траектории при $t \rightarrow \infty$ входят в точку $x = 0$; тогда решение $x \equiv 0$ называется *асимптотически устойчивым в целом*.

Для неустойчивости решения $x \equiv 0$ достаточно существование в окрестности точки $x = 0$ функции $V(x)$, принимающей положительные значения в любой близости от $x = 0$, причем функция $\dot{V}(x)$ положительна всюду, где $V(x) > 0$. В самом деле, пусть функция V положительна в области, заштрихованной на рис. 166, где (S) — окружность фиксированного малого радиуса. Тогда для любой как угодно близкой к нулю начальной точки x_0 в той области значение $V(x)$ вдоль траектории, начинающейся в x_0 , будет возрастать. Поэтому такая траектория не может слишком близко подойти к границе

заштрихованной области, где $V = 0$; но тогда вдоль этой траектории $\min V > 0$, а потому она в конечное время обязана выйти на (S) , что и означает неустойчивость (продумайте это рассуждение!). Приведенная теорема, обобщающая аналогичные результаты Ляпунова, указана в 1934 г. советским механиком Н. Г. Четаевым (1902–1959).

Как и раньше, здесь можно допустить, чтобы $\dot{V} = 0$ где-нибудь при $V > 0$, если многообразие таких точек не содержит целых дуг траекторий. Отметим, что это полезное добавление, как и многие другие, обобщения и обращения теорем Ляпунова, принадлежит советскому математику и механику Н. Н. Красовскому (р. в 1924 г.) [60].

При рассмотрении неавтономных систем (3), а также функций Ляпунова вида $V(x, t)$ приведенные теоремы и их доказательства остаются справедливыми, если сделать к ним необходимые уточнения. Так,

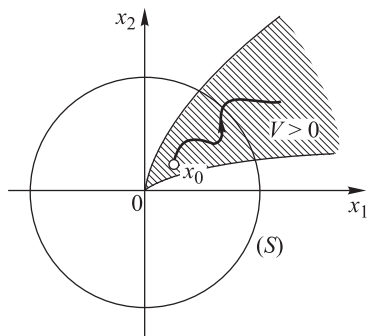


Рис. 166

в теореме об устойчивости надо пользоваться положительно определенной функцией $V(x, t)$, понимая под этим, что $V(x, t) \geq V_1(x)$, где функция $V_1(x)$ положительно определенная. (Таким образом, например, функция $|\mathbf{x}| (1 + t^2)^{-1}$ положительная, но не положительно определенная.) Конечно, $\dot{V}$ вычисляется теперь по формуле $\dot{V}(x, t) = V_t' + \text{grad } V(x, t) \cdot \mathbf{f}(x, t)$. В теореме об асимптотической устойчивости надо добавить условие

$$\max_{t \rightarrow 0} V(x, t) \rightarrow 0$$

(этим исключается, например, функция $t|x|$). В теореме о неустойчивости надо дополнительно потребовать, чтобы в каждой области, где V превосходит какую-либо положительную постоянную, функция $\dot{V}$ также превосходила некоторую положительную постоянную.

При зависимости участвующих функций от t может оказаться, что и условия теорем Ляпунова выполняются только при $t \geq t_1$, где $t_1 > t_0$. Тогда надо иметь в виду, что такие локальные (по x) свойства, как устойчивость, неустойчивость, асимптотическая устойчивость, не зависят от значения t , при котором задаются начальные условия, так как при малом $|\mathbf{x}(t_0)|$ будет мало и $|\mathbf{x}(t_1)|$ (и наоборот). Нелокальные свойства, такие, как асимптотическая устойчивость в целом, могут зависеть от выбора начального значения t (продумайте это!).

Некоторые авторы, следуя Ляпунову, называют метод выяснения устойчивости и неустойчивости на основе применения функций Ляпунова *вторым методом*, в отличие от *первого метода*, основанного на непосредственном построении решения, обычно в виде сумм тех или иных рядов. Теперь обычно методы изучения свойств решений, обходящиеся без точного построения этих решений, называют *качественными*.

Примеры на применение теорем Ляпунова будут даны позже.

В последние годы в ряде работ были исследованы системы уравнений, обладающие свойствами устойчивости в целом, т.е. для всех решений. Приведем простейший результат в этом направлении. Пусть правая часть системы (3) для всех значений аргументов удовлетворяет неравенству

$$(\mathbf{f}(x, t) - \mathbf{f}(y, t)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) < 0 \quad (x \neq y).$$

Тогда для любых двух ее различных решений $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$

$$(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2)' = [(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]' = 2(\mathbf{f}(x, t) - \mathbf{f}(y, t)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) < 0,$$

т.е. любые два таких решения с ростом t сближаются друг с другом. См. по этому поводу книгу [55].

4. Устойчивость по первому приближению. Так как при исследовании устойчивости нулевого решения системы (3) рассматриваются лишь малые $\mathbf{x}$, то естественно произвести разложение правой части в ряд по степеням x_j , что даст

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}(x, t) \quad \left(\mathbf{A}(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \right), \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ объединяет члены выше первого порядка малости по x , а затем перейти к *системе первого приближения*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \quad (11)$$

Мы будем для простоты предполагать, что в уравнении (10) $\boldsymbol{\varphi}(x, t) = o(|\mathbf{x}|)$, т.е. $\boldsymbol{\varphi}$ имеет порядок малости выше первого равномерно по t . (Тем самым не допускаются члены вида tx_j^2 , коэффициенты при которых безгранично нарастают во времени.) Если для любых таких добавок $\boldsymbol{\varphi}$ нулевое решение системы (10) будет устойчивым, то решение $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ системы (3) называется *устойчивым по первому приближению*; аналогично для неустойчивости.

Система (11) линейная; поэтому из формулы (1.10) вытекает, что для устойчивости ее нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы все ее решения были ограниченными при $t \rightarrow \infty$; для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы все решения стремились к нулю при $t \rightarrow \infty$ (докажите!). Отметим, что для линейных систем, в отличие от нелинейных, из устойчивости одного решения вытекает устойчивость любого другого, поэтому можно просто говорить об устойчивой системе уравнений; аналогично для асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Более прост случай, когда матрица $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ постоянная. Тогда в силу конца п.1.1 для асимптотической устойчивости системы (11) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (12)$$

имели отрицательную вещественную часть. (При этом скорость стремления общего решения к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. е. *степень устойчивости*, определяется наибольшей из этих вещественных частей). Можно показать, что в этом случае и решение $\mathbf{x} \equiv 0$ системы (10) асимптотически устойчиво.

Мы не будем проводить доказательство в полном объеме, а ограничимся случаем, когда все корни уравнения (12) вещественные и различные. Так как после подстановки $\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{y}$ система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ преобразуется в $\mathbf{H}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{y}$, т. е. $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{y}$, то всегда можно выполнить подстановку так, что у полученной системы матрица коэффициентов будет диагональной, равной $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Допустим, что такая замена уже произведена, так что система (11) диагональная, и положим

$$V(\mathbf{x}) = \sum_j |\lambda_j| x_j^2 = -(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

(Напомним, что все $\lambda_j < 0$.) Это функция положительно определенная. В то же время, вычисляя полную производную в силу системы (10), получим (проверьте!)

$$\begin{aligned} \dot{V} = -2(\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) &= -2(\mathbf{A}^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}|^2) = \\ &= -2 \sum \lambda_j^2 x_j^2 + o(|\mathbf{x}|^2). \end{aligned}$$

Тем самым выполняются условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, откуда и вытекает наше утверждение.

В случае мнимых корней характеристического уравнения часто применяются линейные преобразования, приводящие к комплексным искомым функциям. Например, система уравнений

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + \nu x_2, \quad \dot{x}_2 = -\nu x_1 + \mu x_2, \quad \dot{x}_3 = \lambda x_3 + \varphi(x_1) \quad (13)$$

после замены

$$z_1 = x_1 + ix_2, \quad z_2 = z_1 - ix_2, \quad z_3 = x_3,$$

т. е.

$$x_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad x_2 = \frac{z_1 - z_2}{2i}, \quad x_3 = z_3 \quad (14)$$

переходит в систему (проверьте!)

$$\dot{z}_1 = (\mu - i\nu)z_1, \quad \dot{z}_2 = (\mu + i\nu)z_2, \quad \dot{z}_3 = \lambda z_3 + \varphi\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right), \quad (15)$$

где функции $z_j(t)$ уже принимают комплексные значения. К системе вида (15) возможен двоякий подход. Иногда удобно считать z_j произвольными комплексными величинами. Тогда функция Ляпунова $V(z)$ должна принимать вещественные значения для всех комплексных z , например она может иметь вид эрмитовой формы

$$V = \mu(z_1 z_1^* + z_2 z_2^*) + \lambda z_3 z_3^*,$$

откуда

$$\dot{V} = 2\mu^2(z_1 z_1^* + z_2 z_2^*) + 2\lambda^2 z_3 z_3^* + \lambda(z_3^* \varphi + z_3 \varphi^*).$$

Ясно, что если будет доказана устойчивость или асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (15), то это же верно и для системы (13);

неустойчивость для системы (15) требует при переходе к (13) некоторого рассуждения, так как «уходящим» от точки $z = 0$ решениям второй системы не обязаны отвечать вещественные решения первой. Возможен и иной подход, когда рассматриваются только такие значения z , которым отвечают вещественные x ; для формул (14) это означает, что z_1 и z_2 должны быть сопряженными, а z_3 вещественным. Такой подход, в частности, необходим, если функция φ по своему смыслу определена лишь для вещественных значений аргумента. При втором подходе функция Ляпунова должна быть вещественной только для указанных значений z , ее можно даже считать определенной только для этих z , а понятия устойчивости и неустойчивости для исходной и преобразованной систем совпадают. Полезно иметь при этом в виду, что если начальным значениям z отвечают вещественные x , то и все решение $z(t)$ системы (15) обладает этим свойством (почему?)

Описанное выше построение функции Ляпунова неудобно на практике, так как приведение матрицы к диагональному виду требует решения уравнения (12). Можно применить следующий прием: зададим произвольную симметрическую матрицу $\mathbf{C}$ и покажем, что с помощью решения системы линейных уравнений можно подобрать симметрическую матрицу $\mathbf{U}$, для которой

$$(\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{x})' \equiv (\mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (16)$$

(производная берется в силу системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, которая предполагается асимптотически устойчивой). В самом деле, равенство (16) можно переписать в виде

$$2(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv (\mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (17)$$

Если это равенство переписать в скалярной форме и приравнять коэффициенты при одинаковых членах $x_j x_k$, то мы получим систему из $N = n(n+1)/2$ уравнений 1-й степени с N неизвестными элементами матрицы $\mathbf{U}$ (что за число N ?). Для разрешимости такой системы необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная система имела только тривиальное решение. Но если бы при $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ существовало решение $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$, то из (16) следовало бы, что для любого решения $\mathbf{x}(t)$ будет $(\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \text{const}$, а это противоречит асимптотической устойчивости (почему?).

Итак, возможность (кстати, и единственность) подбора матрицы $\mathbf{U}$ доказана. В частности, если выбрать форму $(\mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ положительно определенной, то из асимптотической устойчивости системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ вытекает, что форма $(\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ будет отрицательно определенной. В самом деле, в силу теоремы п. 3 о неустойчивости функция $V(\mathbf{x}) = (\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ не может принимать положительных значений. Но тогда и значение $V(\mathbf{x}) = 0$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) невозможно, так как $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$. Значит, функцию $V(\mathbf{x})$ можно принять за функцию Ляпунова.

Отметим попутно, что так как $(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ (почему?), то равенство (17) можно переписать в виде $((\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{U})\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x})$, а так как матрица $\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{U}$ симметрическая, — то и в виде

$$\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{U} = \mathbf{C}. \quad (18)$$

Таким образом, доказана однозначная симметрическая разрешимость матричного уравнения (18) для любой матрицы $\mathbf{A}$ с устойчивым характеристическим полиномом и любой симметрической матрицы $\mathbf{C}$; при этом, если матрица $\mathbf{C}$ положительно определенная, то $\mathbf{U}$ — отрицательно определенная и обратно.

Доказанная возможность построения формы $(\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ является частным случаем значительно более общей теоремы Ляпунова о том, что уравнение $[U_m(x)]' = C_m(x)$, где $C_m(x)$ — заданная форма m -й степени, а $U_m(x)$ — искомая форма той же степени, однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда никакая сумма из m собственных значений (быть может, повторяющихся) матрицы $\mathbf{A}$ не равна нулю.

Описанное построение матрицы $\mathbf{U}$ применяется, в частности, при выводе достаточных условий асимптотической устойчивости в целом линейных систем, возмущенных малыми нелинейными добавками. Пусть рассматривается система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \psi(x)\mathbf{x}, \quad (19)$$

причем система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ асимптотически устойчива. Зададимся отрицательно определенной формой $(\mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ и построим положительно определенную форму $(\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{x})$, производная которой в силу последней системы равна $(\mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Тогда производная в силу (19) равна

$$(\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{x})' = (\mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{U}\mathbf{x}, \psi(x)\mathbf{x}).$$

Если правая часть при любом «замороженном» значении ψ представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму (это можно проверить по признаку Сильвестра), то нулевое решение системы (19) будет асимптотически устойчивым в целом.

Аналогично показывается, что если хотя бы один корень уравнения (12) имеет положительную вещественную часть, то решение $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ системы (10) неустойчиво. Случаи, когда уравнение (12) не имеет корней с положительной вещественной частью, но имеет по крайней мере один корень с нулевой вещественной частью, являются *особыми (критическими)*; для линейной системы необходимое и достаточное условие устойчивости формулируется в терминах жордановых клеток (п. 1.1), а на устойчивость для полной системы (10) может оказать существенное влияние вид функции φ (п. 5).

Проверка знаков вещественных частей корней уравнения (12) осуществляется по методам п. II.4.10.

Аналогично рассматривается случай периодической матрицы $\mathbf{A}(t)$: именно, если модули всех мультипликаторов системы (11) меньше единицы, то решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (10) асимптотически устойчиво по первому приближению, если же хоть один из этих модулей больше единицы, — оно неустойчиво. Этот факт немедленно вытекает из показанной в п. 1.2 возможности приведения линейной периодической системы к системе с постоянными коэффициентами. Для распознавания асимптотической устойчивости можно применить методы п. II.4.10 к логарифму матрицы монодромии (п. 1.2). Но так как эта матрица находится, вообще говоря, с помощью численного интегрирования, то в конкретных числовых примерах факт устойчивости или неустойчивости периодической системы (11) можно выяснить без всякой «науки», с помощью численного интегрирования системы на протяжении нескольких периодов при случайно выбранных начальных данных. Рост

или убывание полученного решения по модулю будут определяться наибольшим из модулей мультипликаторов, для уверенности можно перепробовать несколько вариантов начальных данных.

Для матричных коэффициентов $\mathbf{A}(t)$, отличных от рассмотренных здесь, а также в пп. 1.8, 9, эффективные аналитические критерии устойчивости отсутствуют. В конкретных примерах можно применить вычислительный эксперимент, проводя численное интегрирование системы при случайно выбираемых начальных данных на отрезке, длину которого можно считать достаточной для выявления устойчивости или неустойчивости. (Так как решение скалярного уравнения $\dot{x} = ax$ меняется в 10 раз на отрезке $\Delta t = \ln 10/|a| = 2/3/|a|$, то и в общем случае длину интервала интегрирования нужно взять по крайней мере в несколько раз больше обратной величины наибольшей из абсолютных величин коэффициентов системы.) За поведением решения на шкале экспонент можно проследить, вычисляя значение $\frac{1}{t} \ln |\mathbf{x}(t)|$ по ходу численного интегрирования. Если решения системы (11) будут экспоненциально затухающими (возрастающими), то решение $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ системы (10) будет асимптотически устойчивым (соответственно неустойчивым).

Следует предостеречь против бездумного применения *метода замораживания*, который состоит в заключении о поведении решений системы (11) на основании поведения решений систем с замороженными коэффициентами вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}$ при любом зафиксированном значении τ : асимптотическая устойчивость замороженных систем в общем случае ни необходима, ни достаточна для асимптотической устойчивости системы (11). Чтобы понять это, допустим, что $n = 2$ и при каждом τ замороженная система имеет при $x = 0$ устойчивый фокус (рис. 167), однако с изменением τ изображенная картина поворачивается вокруг точки $x = 0$. Хотя малый участок решения $x(t)$ системы (11) при $t = \tau$ следует участку замороженной системы, но в следующий момент надо пользоваться повернутой замороженной системой и т.д.; при этом $x(t)$ может, как на рис. 167, все дальше и дальше отходить от начала координат, т.е. получится неустойчивость. Для возможности перехода от замороженных систем к размороженной требуются дополнительные условия, которые мы здесь не будем рассматривать.

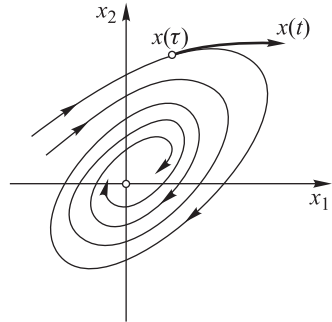


Рис. 167

5. Особые случаи. Мы уже упомянули в п. 4 об особых случаях, когда выяснение устойчивости нулевого решения системы (10) по анализу системы первого приближения (11) с постоянной или периодической матрицей $\mathbf{A}(t)$ становится невозможным. Уже Ляпунов подробно исследовал случай одного нулевого или двух чисто мнимых сопряженных корней характеристического уравнения; с тех пор исследованы и некоторые другие случаи. Эти исследования довольно громоздки, и здесь мы для примера рассмотрим только простейший случай одного нулевого корня при $n = 2$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = ax + by + \varphi(x, y), \quad \dot{y} = cx + dy + \psi(x, y), \quad (20)$$

где разложения φ и ψ содержат только члены выше первого порядка малости; допустим, что характеристическое уравнение для системы первого приближения имеет один нулевой и один отрицательный корни. Тогда, как в начале п. 4, можно перейти к системе

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, y_1), \quad \dot{y}_1 = \lambda y_1 + \psi_1(x_1, y_1) \quad (\lambda < 0). \quad (21)$$

Нам понадобится еще одна замена. Так как для уравнения

$$\lambda y_1 + \psi_1(x_1, y_1) = 0 \quad (22)$$

удовлетворяется условие существования неявной функции (II.3.26), то из него можно найти $y_1 = f(x_1)$ в виде суммы ряда, причем без линейных членов (почему?). После обозначения

$$\xi = x_1, \quad \eta = y_1 - f(x_1) \quad (23)$$

из (21) получаем систему

$$\dot{\xi} = \Phi(\xi, \eta), \quad \dot{\eta} = \lambda \eta + \Psi(\xi, \eta) \quad (24)$$

(проверьте!), где обозначено

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) &= \varphi_1(\xi, \eta + f(\xi)), \\ \Psi(\xi, \eta) &= \psi_1(\xi, \eta + f(\xi)) - \psi_1(\xi, f(\xi)) - f'(\xi)\psi_1(\xi, \eta + f(\xi)). \end{aligned} \quad (25)$$

Разложим

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) &= \Phi_0(\xi) + \Phi_1(\xi)\eta + \Phi_2(\xi)\eta^2 + \dots, \\ \Psi(\xi, \eta) &= \Psi_0(\xi) + \Psi_1(\xi)\eta + \Psi_2(\xi)\eta^2 + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

тогда из (25) видно, что разложение $\Psi_0(\xi) = \Psi(\xi, 0)$ начинается с более высоких членов, чем у $\Phi_0(\xi)$; для этого и понадобилась замена (23). Оказывается, что характер устойчивости нулевого решения системы (24), а потому и (20) определяется видом первого члена разложения функции $\Phi_0(\xi)$.

Допустим сначала, что

$$\Phi_0(\xi) = \alpha \xi^2 + \text{члены высшего порядка} \quad (\alpha \neq 0),$$

и выберем функцию Ляпунова в виде

$$V(\xi, \eta) = \xi + k\xi\eta + l\eta^2, \quad (27)$$

где коэффициенты k, l подберем позже. Так как в силу (26)

$$\Phi(\xi, \eta) = \alpha \xi^2 + \beta \xi \eta + \gamma \eta^2 + \text{члены высшего порядка},$$

то из (27) и (24) получаем

$$\dot{V} = \alpha \xi^2 + \beta \xi \eta + \gamma \eta^2 + \lambda k \xi \eta + 2\lambda l \eta^2 + \text{члены высшего порядка}.$$

Значит, если положить $k = -\frac{\beta}{\lambda}$, $l = \frac{(\alpha - \gamma)}{2\lambda}$, то мы получим, что $\dot{V} = \alpha(\xi^2 + \eta^2)$. Но тогда можно применить теорему п. 3 о неустойчивости (с точностью

до знака функции V), т.е. нулевое решение системы (20) в рассматриваемом варианте неустойчивое.

Тот же результат с помощью немного более громоздкой конструкции получится и в общем случае, если разложение функции $\Phi_0(\xi)$ начинается с четной степени ξ .

Допустим теперь, что разложение функции $\Phi_0(\xi)$ начинается с третьей степени ξ ; тогда можно написать:

$$\Phi(\xi, \eta) = (\alpha\xi^3 + \dots) + (\beta\xi + \gamma\xi^2 + \dots)\eta + \dots \quad (\alpha \neq 0),$$

$$\Psi(\xi, \eta) = (\delta\xi^4 + \dots) + (\varepsilon\xi + \dots)\eta + \dots$$

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}\xi^2 + k_1\xi^2\eta + k_2\xi^3\eta + l\eta^2. \quad (28)$$

При вычислении $\dot{V}$ будем выписывать только члены порядка малости, не высшего чем ξ^4 или η^2 . Получим (проверьте!)

$$\dot{V} = \alpha\xi^4 + \beta\xi^2\eta + \gamma\xi^3\eta + k_1\lambda k\xi^2\eta + k_1\varepsilon\xi^3\eta + k_2\lambda\xi^3\eta + 2l\lambda\eta^2 + o(\xi^4) + o(\eta^2).$$

Значит, если положить $k_1 = -\frac{\beta}{\lambda}$, $k_2 = -\frac{(\gamma + k_1\varepsilon)}{\lambda}$, $l = \frac{\alpha}{2\lambda}$, то получим

$$\dot{V} = \alpha(\xi^4 + \eta^2) + o(\xi^4) + o(\eta^2). \quad (29)$$

Значит, если $\alpha < 0$, то в силу п.3 нулевое решение системы (20) будет асимптотически устойчивым; если же $\alpha > 0$, то оно будет неустойчивым. Тот же результат получается, если разложение функции $\Phi_0(\xi)$ начинается с любой нечетной степени ξ .

Пусть, наконец, $\Phi_0(\xi) \equiv 0$; тогда и $\Psi_0(\xi) \equiv 0$, и система (24) приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \Phi_1(\xi)\eta + \Phi_2(\xi)\eta^2 + \dots, & \dot{\eta} &= \lambda\eta + \Psi_1(\xi)\eta + \Psi_2(\xi)\eta^2 + \dots \\ &(\Phi_1(0) = \Psi_1(0) = 0). \end{aligned} \quad (30)$$

Эта система удовлетворяется, если положить $\xi = \text{const}$, $\eta = 0$; таким образом, в плоскости ξ, η получается целая прямая положений равновесия. Из (30) при $\eta \neq 0$ получаем уравнение

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\xi)\eta + \dots}{\lambda + \Psi_1(\xi) + \Psi_2(\xi)\eta + \dots}, \quad \xi = \xi(\eta), \quad (31)$$

для которого начало координат служит обыкновенной (не особой) точкой. Значит, траектории системы (30) идут по интегральным кривым уравнения (31). Но из второго уравнения (30) видно, что направление движения по траекториям такое, как показано на рис. 168. Поэтому нулевое решение является в данном случае неасимптотически устойчивым; ось ξ , т.е. линия (22), образует зону нечувствительности (п. 2.10).

Исследование особых случаев имеет важное применение к выяснению опасных и безопасных участков границы области устойчивости системы,

зависящей от параметров. Пусть, например, рассматривается система вида (20) с одним параметром, т. е.

$$\dot{x} = a(s)x + b(s)y + \varphi(x, y; s), \quad \dot{y} = c(s)x + d(s)y + \psi(x, y; s)$$

(случай любого числа переменных и параметров рассматривается аналогично), и пусть при переходе s через некоторое значение s_0 один из двух отрицательных корней характеристического уравнения становится положительным, так

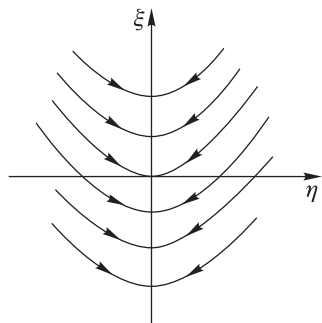


Рис. 168

что область устойчивости (на оси параметра) расположена только при $s < s_0$. Если коэффициенты зависят от параметра непрерывно, то и корни изменяются непрерывно, так что при $s = s_0$ мы имеем как раз случай одного нулевого корня, разобранный выше.

Допустим, что при $s = s_0$ нулевое решение является асимптотически устойчивым; мы видели (на примере $\Phi_0(\xi) \sim \alpha \xi^3$), что тогда можно построить положительно определенную функцию Ляпунова (28), полная производная которой (29) отрицательно определенная, чем и гарантируется асимптотическая устойчивость. Но что произойдет, если мы будем пользоваться

той же функцией Ляпунова, когда s немного превзойдет s_0 ? Ясно, что функция $\dot{V}(\xi, \eta)$ проварьируется мало, а потому она может стать положительной только в малой окрестности начала координат. Поэтому картина пересечения траекториями линий уровня функции V получается примерно такой, как на рис. 169, т. е. только самые близкие к началу линии уровня могут пересекаться траекториями изнутри наружу. Это означает, что хоть нулевое решение теперь будет неустойчивым, но решение, «сбившееся» с него, будет содержаться в его непосредственной близости. Типичная картина расположения траекторий после такой потери устойчивости показана на рис. 170: бывший устойчивый узел превратился в седло, в непосредственной близости которого образовалось два новых устойчивых узла.

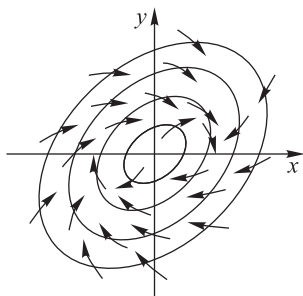


Рис. 169

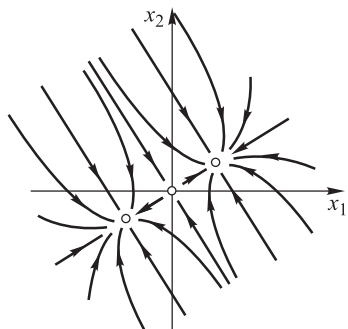


Рис. 170

В аналогичном случае, при наличии на границе устойчивости пары чисто мнимых корней характеристического уравнения, типичная картина траекторий

сразу после перехода этой границы будет, как на рис. 171: устойчивый фокус превратился в неустойчивый и из него выделился маленький устойчивый предельный цикл, на который и накручиваются траектории, пришедшие издалека.

В разобранных случаях граница s_0 области устойчивости называется *безопасной*, так как небольшой переход через нее не уведит далеко систему от состояния равновесия, а только чуть-чуть «сваливает на бок» или вызывает колебания малой амплитуды. Так, на рис. 172 показано осевое сечение чашки со стержнем, поставленной на дно. Если высота стержня s становится больше высоты чашки H , вертикальное положение становится неустойчивым, однако устойчивое (с точностью до поворотов) косое положение мало отличается

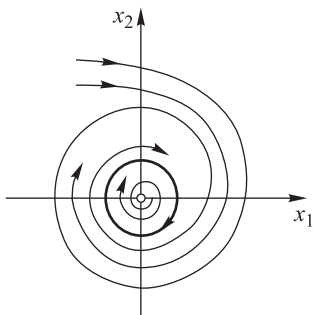


Рис. 171

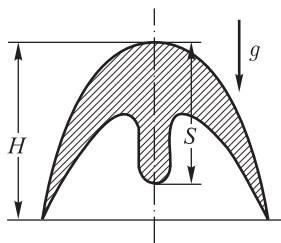


Рис. 172

от вертикального. Впрочем, если параметр значительно перейдет даже через безопасную границу устойчивости, от этой устойчивости может не остаться даже следов.

Аналогично исследуется случай, когда при $s = s_0$ нулевое решение будет неустойчивым. В этом случае для s , немного меньших s_0 , нулевое решение

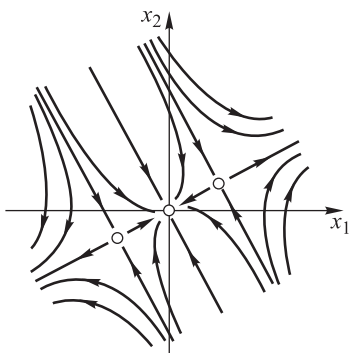


Рис. 173

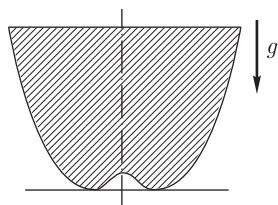


Рис. 174

будет формально устойчивым, но «запас устойчивости» будет весьма мал, так что сколько-нибудь существенное возмущение начальных условий уведит решение далеко от нуля. Типичный фазовый портрет такого «слабо устойчивого» решения в случае одного нулевого корня характеристического уравнения при $s = s_0$, показан на рис. 173; случай двух чисто мнимых корней получается

из рис. 171, если поменять направления стрелок на противоположные. Здесь граница s_0 области устойчивости называется *опасной*. Пример устойчивого положения вблизи опасной границы устойчивости показан на рис. 174. При удалении s от s_0 ($s < s_0$) запас устойчивости, вообще говоря, будет увеличиваться, т. е. система будет «укрепляться».

В конкретных примерах для выяснения характера устойчивости системы на границе области устойчивости и тем самым для выявления опасных и безопасных участков этой границы можно применить вычислительный эксперимент, подобный описанному в п. 4.

Из особых случаев для периодических систем рассмотрим только наиболее простое скалярное уравнение

$$\dot{x} = a_k(t)x^k + a_{k+1}(t)x^{k+1} + \dots \quad (k = 2, 3, 4, \dots), \quad (32)$$

где все $a_j(t)$ — T -периодические функции. Если

$$I = \int_0^T a_k(t) dt \neq 0,$$

то все ясно: надо в уравнении (32) отбросить члены высшего порядка малости, что даст

$$\frac{1}{[x(0)]^{k-1}} - \frac{1}{[x(T)]^{k-1}} \approx (k-1)I,$$

т. е.

$$\left[\frac{x(T)}{x(0)} \right]^{k-1} \approx \{1 - (k-1)I[x(0)]^{k-1}\}^{-1}.$$

Отсюда видно, что при четном k всегда будет неустойчивость, а при нечетном k для $I > 0$ будет неустойчивость, а для $I < 0$ — устойчивость. Если же $I = 0$, то начинают влиять члены высшего порядка малости. Чтобы разобрать и этот случай, можно с помощью подстановки $y = x + \psi_k(t)x^k + \psi_{k+1}(t)x^{k+1} + \dots$ с периодическими коэффициентами привести уравнение (32) к виду $\dot{y} = b_k y^k + b_{k+1} y^{k+1} + \dots$ с постоянными $b_k, b_{k+1}, \dots$ (При этом последовательно находят $b_k, \psi_k(t), \psi_{k+1}(t), \dots$; мы предоставляем желающим подробно разобрать эту процедуру.) После такого преобразования устойчивость нулевого решения определяется первым фактически присутствующим членом в правой части.

К исследованию устойчивости нулевого решения уравнения вида (32) сводится упомянутая в п. 2.4 проблема исследования точки покоя на плоскости в случае чисто мнимых корней характеристического уравнения. Как мы видели, тогда система после аффинного преобразования плоскости приобретает вид

$$\dot{x}' = \lambda y' + M(x', y'), \quad \dot{y}' = -\lambda x' + N(x', y'),$$

где разложения функций M и N содержат только члены выше первого порядка. После перехода к полярным координатам ρ, φ на плоскости x', y' получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= M(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cos \varphi + N(\dots) \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\lambda + \frac{1}{\rho} [N(\dots) \cos \varphi - M(\dots) \sin \varphi], \end{aligned}$$

откуда, деля первое уравнение на второе, мы получим относительно $\rho(\varphi)$ уравнение вида (32). (Разберите, что отсюда следует.)

По поводу дальнейших особых случаев см. [82].

6. Специальные классы механических систем. Рассмотрим автономную потенциальную систему с конечным числом степеней свободы и обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$ вблизи положения равновесия, за которое мы примем начало координат. Кинетическая энергия $T(\dot{q}, q)$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, тогда как потенциальная энергия $U(q)$ имеет при $q = 0$ стационарную точку. Канонические уравнения движения (§ VI. 3) имеют вид

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{dq_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_j},$$

где

$$H(p, q) = T + U, \quad p_j = \frac{\partial(T + U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \quad (33)$$

Имеет место закон сохранения энергии: вдоль любого решения $H = \text{const}$.

Из сказанного сразу вытекает теорема Лагранжа: *если $U(q)$ имеет при $q = 0$ минимум (изолированный, т.е. строгий), то состояние равновесия $q = p = 0$ будет устойчивым*. В самом деле, в этом случае можно принять $H(p, q)$ за функцию Ляпунова и применить теорему об устойчивости п. 3. Если же минимум $U(q)$ не изолированный и достигается на некотором многообразии (M) , то легко проверить, что состояние равновесия будет устойчивым лишь относительно импульсов, тогда как конечные перемещения вдоль M могут быть вызваны как угодно малыми возмущениями начальных данных.

Для дальнейшего запишем главные части кинетической и потенциальной энергий в окрестности положения равновесия $q = 0$:

$$T(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + o(1)|\dot{\mathbf{q}}|^2$$

$$(a_{jk} = A_{jk}(0)),$$

$$U(q) = \frac{1}{2} \sum b_{jk} q_j q_k + o(|\mathbf{q}|^2).$$

Если совершить линейную замену координат $\mathbf{q} = \mathbf{H}\boldsymbol{\eta}$, то $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}\dot{\boldsymbol{\eta}}$, т.е. обе квадратичные формы преобразуются одной и той же матрицей $\mathbf{H}$. Но так как первая форма положительно определенная, то в силу п. IV.2.4 матрицу $\mathbf{H}$ всегда можно подобрать так, что в новых координатах главные части энергий примут вид

$$T = \frac{1}{2} \sum \dot{\eta}_j^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum \mu_j \eta_j^2,$$

причем сигнатура последней квадратичной формы такая же, как формы $(\mathbf{B}\mathbf{q}, \mathbf{q})$, а μ_j представляют собой собственные значения матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Эти новые координаты называются *нормальными*.

В нормальных координатах уравнения движения (33) после линеаризации имеют весьма простой вид

$$\frac{d\xi_j}{dt} = -\mu_j \eta_j, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\xi_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (34)$$

(в данном случае обобщенный импульс ξ_j с точностью до малых высшего порядка совпадает с $\dot{\eta}_j$). Чтобы раскрыть характеристический определитель, удобно искомые функции перенумеровать в порядке $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$. Корни характеристического уравнения оказываются равными $\pm\sqrt{-\mu_1}, \pm\sqrt{-\mu_2}, \dots, \pm\sqrt{-\mu_n}$ (проверьте!). Применяя вывод, сделанный во втором абзаце этого пункта, а также результаты п. 4, получаем:

если все $\mu_j > 0$, то рассматриваемое состояние равновесия устойчивое; если хотя бы одно $\mu_j < 0$, то это состояние неустойчивое.

(Можно доказать, что вообще, если $U(q)$ не имеет при $q = 0$ минимума, хотя бы нестрогого, то положение $q = 0$ неустойчивое.) Так как положительность всех μ_j равносильна положительной определенности, то к выяснению этого факта можно применить критерий Сильвестра (п. IV.2.3).

Если какое-либо $\mu_l > 0$, то решение системы (34)

$$\eta_l = M \sin(\sqrt{\mu_l} t + \varphi), \quad \text{прочие } \eta_j \equiv 0 \quad (j \neq l)$$

определяет *нормальное колебание* рассматриваемой линеаризованной системы. В исходных координатах нормальное колебание описывается формулами

$$q_j = M h_{jl} \sin(\sqrt{\mu_l} t + \varphi), \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

т.е. это одночастотное, иначе, *собственное* колебание. (Если несколько собственных частот совпадают, то выбор соответствующих нормальных координат не определен однозначно, а когда такой выбор сделан, класс собственных колебаний оказывается формально шире класса нормальных колебаний. Почему?) Подставляя в уравнения движения

$$\sum_k (a_{jk} \ddot{q}_k + b_{jk} q_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

или короче,

$$\mathbf{a}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

выражение $\mathbf{q} = M \mathbf{h}_l \sin(\sqrt{\mu_l} t + \varphi)$ для решения, получаем, что вектор $\mathbf{h}_l$ должен удовлетворять соотношению

$$(\mu_l \mathbf{a} - \mathbf{b}) \mathbf{h}_l = \mathbf{0}, \quad \text{т.е.} \quad (\mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}) \mathbf{h}_l = \mu_l \mathbf{h}_l.$$

Из определения нормальных координат, в силу которого

$$\mathbf{H}^* \mathbf{a} \mathbf{H} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{H}^* \mathbf{b} \mathbf{H} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n),$$

легко вывести (как?), что

$$(\mathbf{a}\mathbf{h}_j, \mathbf{h}_k) = \delta_{jk}, \quad (\mathbf{b}\mathbf{h}_j, \mathbf{h}_k) = 0 \quad (j \neq k), \quad (\mathbf{b}\mathbf{h}_j, \mathbf{h}_j) = \mu_j. \quad (35)$$

(Отсюда, между прочим, по образцу п. IV.1.7 можно развить экстремальную теорию собственных частот: так μ_1 , наибольшее из μ_j , равно $\max_{\mathbf{h}} \frac{(\mathbf{b}\mathbf{h}, \mathbf{h})}{(\mathbf{a}\mathbf{h}, \mathbf{h})}$, для отыскания следующего надо добавить условие $(\mathbf{a}\mathbf{h}, \mathbf{h}_1) = 0$ и т. д.) Общее колебание в рассматриваемой системе есть сумма нормальных колебаний:

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^n \mathbf{q}_j(t), \quad \text{где} \quad \mathbf{q}_j(t) = M_j \mathbf{h}_j \sin(\sqrt{\mu_j} t + \varphi_j),$$

а все M_j, φ_j произвольны. Отсюда в силу (35) следует, что

$$\frac{1}{2} (\mathbf{a}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum (\mathbf{a}\dot{\mathbf{q}}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) = \frac{1}{2} \sum \mu_j M_j^2 \cos^2(\sqrt{\mu_j} t + \varphi_j),$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{b}\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum (\mathbf{b}\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2} \sum \mu_j M_j^2 \sin^2(\sqrt{\mu_j} t + \varphi_j),$$

Таким образом, кинетическая и потенциальная энергии колебания в каждый момент складываются из соответствующих энергий нормальных компонент.

Количество κ величин $\mu_j < 0$ называется *степенью неустойчивости* рассматриваемого положения равновесия $\mathbf{q} = 0$. (На рис. 175 пока-

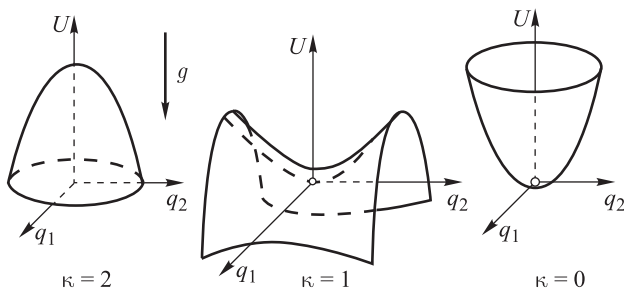


Рис. 175

зана возможная степень неустойчивости материальной точки, движущейся без трения по поверхности под действием силы тяжести.) Случай $\kappa = n$ называется *полной неустойчивостью*.

Довольно ясно, что всякое наложение связи на координаты в положении равновесия может либо оставить степень неустойчивости без изменения, либо понизить ее на единицу. (Это хорошо видно на среднем рис. 175, если проводить через ось U различные плоскости и каждый раз требовать, чтобы движущаяся точка оставалась в этой плоскости.) Поэтому, если степень неустойчивости $\kappa < n$ и нет значений $\mu_j = 0$, то после наложения κ связей можно получить устойчивую систему.

Вполне неустойчивая система при наложении связей остается вполне неустойчивой.

Утверждение первой фразы предыдущего абзаца можно доказать строго следующим образом. Прежде всего заметим, что в силу (34) $\ddot{\xi}_j = -\mu_j \xi_j$, и потому значения μ_j можно найти, если разыскать нетривиальные решения линеаризованной системы (в любых, не обязательно нормальных координатах) в виде $\eta = e^{\omega t} \mathbf{c}$, а затем положить $\mu = -\omega^2$. Пусть теперь задана связь вида $\sum A_j \eta_j = 0$. Мы приходим к задаче на стационарное значение интеграла $\int_0^j (T - U) dt$ при одной конечной связи; такая задача в силу п. VI.1.12 приводит к системе уравнений Эйлера

$$\ddot{\eta}_j + \mu_j \eta_j + \lambda(t) A_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Если искать решение в виде $\eta_j = c_j e^{\omega t}$, то из этих уравнений и уравнения связи получим (проверьте!)

$$\sum_j \frac{A_j^2}{\mu - \mu_j} = 0 \quad (\mu = -\omega^2). \quad (36)$$

Пусть для простоты все $A_j \neq 0$ и все μ_j различны (исключенные случаи можно получить с помощью перехода к пределу). Тогда график левой части

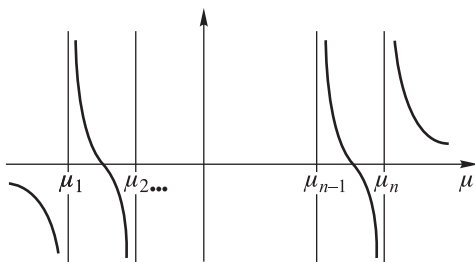


Рис. 176

(36) получается таким, как на рис. 176 (почему?). Значит, все $n - 1$ корней уравнения (36) вещественны, различны и перемежаются со значениями μ_j . Отсюда и вытекает доказываемое утверждение.

Если рассматриваемая система зависит от параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, то возникает задача о нахождении в пространстве параметров областей, которым отвечают устойчивые состояния равновесия. Если система имеет потенциальную энергию $U(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, то состояния равновесия определяются из уравнений

$$U'_{q_1} = 0, \quad U'_{q_2} = 0, \dots, \quad U'_{q_n} = 0, \quad (37)$$

которым, вообще говоря, удовлетворяют точки некоторой совокупности k -мерных поверхностей в $(n + k)$ -мерном пространстве q, α . Каждому значению $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ отвечает какое-то количество значений q

(быть может, ни одного), удовлетворяющих уравнениям (37), причем степень неустойчивости соответствующего положения равновесия равна числу отрицательных корней уравнения

$$\det \left(U''_{q_i q_j} - \lambda \delta_{ij} \right) = 0 \quad (38)$$

(почему?). Если считать все рассматриваемые функции и производные непрерывными, то изменение степени неустойчивости может произойти только там, где

$$\det \left(U''_{q_i q_j} \right) = 0.$$

Это как раз точки, в которых нарушается условие существования неявной функции $q(\alpha)$. Таким образом, наряду с исследованием разветвления этой функции здесь приходится следить за знаками корней уравнения (38). Впрочем, в некоторых практически важных случаях оказывается достаточным следить только за знаком $\Delta = \det \left(U''_{q_i q_j} \right)$: например, там, где $\Delta < 0$, заведомо будет неустойчивость (почему?).

Наиболее прост случай $n = k = 1$. Тогда взамен (37) получится уравнение $U'_q(q, \alpha) = 0$, определяющее линию равновесия на плоскости α, q ; вдоль этой линии надо следить за знаком U''_{qq} . (Проверьте, например, что если знак U''_{qq} таков, как изображено на рис. 177, то устойчивыми будут участки линии равновесия, показанные на этом рисунке жирно.)

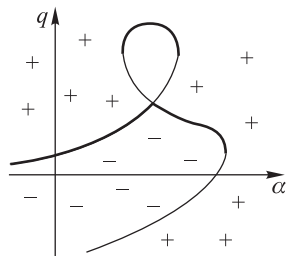


Рис. 177

При $k = 1$ иногда к этому простому случаю удастся перейти и для $n > 1$. Пусть, например, из последних $n - 1$ уравнений (37) оказывается возможным определить $q_1, \dots, q_n$ через q_1, α ; обозначим результат подстановки полученных выражений в U'_{q_1} через $f(q_1, \alpha)$. Тогда на плоскости α, q_1 получается линия равновесия $f = 0$. Можно проверить прямым вычислением, что

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \det \left(U''_{q_i q_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} / \det \left(U''_{q_i q_j} \right)_{i,j=2,\dots,n}.$$

Это дает возможность получить заведомо неустойчивые участки линии равновесия ($\Delta < 0$), чего может оказаться достаточно.

Рассмотрим еще вопрос о наложении непотенциальных сил на систему. Для этого перепишем канонические уравнения (33) в виде

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_j};$$

тогда видно, что эти налагаемые силы надо добавлять к первой правой части. Ограничиваясь нормальными координатами и линеаризованными уравнениями, рассмотрим сначала *диссипативные силы* вида

$$Q_j = - \sum_{k=1}^n c_{jk} \xi_k \quad (c_{jk} = c_{kj}),$$

где квадратичная форма $\sum_{j,k} c_{jk} \xi_j \xi_k$ неотрицательно определенная; если же она положительно определенная, то говорят о *полной диссипации*. Легко проверить, что при таких силах

$$(U + T)^{\cdot} = - \sum_{j,k} c_{jk} \xi_j \xi_k \leq 0.$$

Поэтому *если положение равновесия было устойчивым*, т. е. функция $U(\eta)$ имела при $\eta = 0$ минимум, *то в силу теоремы п. 3 об устойчивости это же положение для системы с добавленными диссипативными силами также будет устойчивым. Если же диссипация является полной, то в силу теоремы того же пункта об асимптотической устойчивости с добавлением о целых траекториях положение $\eta = 0$ будет асимптотически устойчивым.* Можно показать, что изолированное неустойчивое состояние равновесия, а также неизолированное состояние равновесия с положительной степенью неустойчивости при наложении диссипативных сил остаются неустойчивыми.

Другой важный класс составляют *гироскопические силы*

$$Q_j = \sum_{k=1}^n g_{jk} \xi_k, \quad \text{где} \quad g_{jk} = -g_{kj};$$

для них характерно, что их работа при любом перемещении системы

$$dA = \mathbf{Q} \cdot d\boldsymbol{\eta} = \sum_j Q_j \xi_j dt = \sum_{j,k} g_{jk} \xi_j \xi_k dt = 0.$$

При одновременном действии гироскопических и диссипативных сил

$$(U + T)^{\cdot} = - \sum c_{jk} \xi_j \xi_k;$$

отсюда, как и выше, получаем, что устойчивое состояние равновесия при наложении таких сил остается устойчивым, а в случае полной диссипации — асимптотически устойчивым. Можно показать, что изолированное неустойчивое состояние равновесия при одновременном наложении гироскопических и вполне диссипативных сил остается неустойчивым. *При наложении же одних только гироскопических сил неустойчивость сохраняется, если степень неустойчивости κ была нечетной, но может перейти в неасимптотическую устойчивость, если κ было четным.* Пусть, например, $n = 2$,

$$U = -\frac{\alpha}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2) \quad (\alpha > 0), \quad Q_1 = g\xi_2, \quad Q_2 = -g\xi_1;$$

тогда для временного множителя $e^{\lambda t}$ получаем уравнение (проверьте!)

$$\lambda^4 + (g^2 - 2\alpha)\lambda^2 + \alpha^2 = 0.$$

При $g > 2\sqrt{\alpha}$ все корни этого уравнения будут чисто мнимыми, откуда и вытекает устойчивость. Большая сила, ортогональная направлению движения, заставляет систему совершать квазипериодические колебания вокруг положения равновесия. Впрочем, наличие как угодно малой, но постоянной диссипации приводит в конце концов к нарушению такой *временной устойчивости*. (Продумайте все эти рассуждения на примере вращающегося волчка.)

Важным способом создания новых механических систем является объединение нескольких исходных систем (их называют *парциальными*) в одну путем установления между ними жестких или упругих связей: например, два маятника можно связать стержнем (жесткая связь) или пружиной (упругая связь). Допустим, что две автономные линейные консервативные системы с обобщенными координатами $q' = (q'_1, q'_2, \dots, q'_{n'})$ и $q'' = (q''_1, q''_2, \dots, q''_{n''})$ и кинетической и потенциальной энергиями $(a' \dot{q}', \dot{q}')$, $(b' q', q')$ для первой и $(a'' \dot{q}'', \dot{q}'')$, $(b'' q'', q'')$ для второй объединены линейными упругими связями. Тогда получится система с $n' + n''$ степенями свободы и обобщенными координатами $q = (q', q'')$. Если новые связи безынерционны (их масса пренебрежимо мала), то кинетическую и потенциальную энергии составной системы можно записать в виде $(a \dot{q}, \dot{q})$ и $(b q, q)$, где

$$a = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & a'' \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b' & r \\ r^* & b'' \end{pmatrix};$$

где r — матрица связи между парциальными системами размера $n' \times n''$. При этом должно быть

$$(b q, q) \geq (b' q', q') + (b'' q'', q'')$$

(почему?) или, что равносильно,

$$(r q'', q') \geq 0.$$

Отсюда следует, что если парциальные системы были устойчивыми, то и составная система будет устойчивой; можно показать, что частоты собственных колебаний составной системы содержатся между наименьшей и наибольшей из всех *парциальных частот*, т. е. собственных частот парциальных систем. Если объединяющие связи слабы, т. е. элементы матрицы r относительно малы, то для нахождения частот составной системы удобно применить метод возмущений (п. IV.4.10), взяв систему парциальных частот за нулевое приближение.

7. Системы автоматического регулирования. В последнее время широкому изучению подверглись уравнения систем автоматического регулирования; это нелинейные автономные уравнения, которые сохраняют некоторые черты линейных, что дает возможность далеко продвинуть их исследование. Впервые систематически исследовал такие уравнения советский механик А. И. Лурье (1901–1980); сейчас на эту тему имеется уже несколько книг [1, 70, 72, 76].

Примем, что объект регулирования является линейным и описывается системой уравнений $\dot{x} = Ax$, $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$; это предположение оправдывается тем, что при нормальной работе объекта отклонение от состояния равновесия не должно быть велико. Регулирование осуществляется с помощью *управляющего воздействия* ξ , которое мы для простоты предположим скалярным; таким образом, *управляемый объект* описывается уравнением $\dot{x} = Ax - \xi b$, где b —

некоторый заданный вектор. Это воздействие формируется *сигналом обратной связи* σ , который мы также предположим скалярным, по формулам $\xi = \varphi(\sigma)$ в случае *прямого регулирования* и $\dot{\xi} = \varphi(\sigma)$ для *непрямого регулирования*; здесь $\varphi(\sigma)$ — заданная *характеристика управляющего устройства*. Сигнал обратной связи определяется состоянием регулируемого объекта и управляющего воздействия, так что $\sigma = \mathbf{c}^* \mathbf{x} - \rho \xi$, где $\mathbf{c}$ — заданный вектор, а ρ — заданный скаляр.

Таким образом, полная система уравнений в случае, например, непрямого регулирования имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \xi \mathbf{b}, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = \mathbf{c}^* \mathbf{x} - \rho \xi \quad (39)$$

и имеет лишь одну нелинейность $\varphi(\sigma)$. Допущение нелинейных характеристик естественно, так как в реальных системах управляющее устройство может работать в существенно нелинейном режиме, например характеристика может иметь вид $\varphi(\sigma) = k \operatorname{sgn} \sigma$ ($k > 0$). Впредь мы будем без специальной оговорки предполагать, что выбираемые характеристики обладают свойствами

$$\operatorname{sgn} \varphi(\sigma) = \operatorname{sgn} \sigma, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\sigma = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) d\sigma = -\infty,$$

Одним из наиболее изученных является вопрос, поставленный А. И. Лурье: найти, какой должна быть матрица $\mathbf{A}$ и коэффициенты $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \rho$, чтобы нулевое решение системы (39) было асимптотически устойчивым в целом (п. 3) при любом выборе характеристики $\varphi(\sigma)$. Если это свойство выполнено, то система (39) называется *абсолютно устойчивой*. При этом, так как регулирование может быть как угодно слабым, естественно предполагать и исходную систему $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ асимптотически устойчивой.

Для исследования этого вопроса перейдем от искомым функций $\mathbf{x}, \xi$ к искомым функциям $\mathbf{y}, \sigma$ по формулам

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \xi \mathbf{b}, \quad \sigma = \mathbf{c}^* \mathbf{x} - \rho \xi. \quad (40)$$

Тогда система примет вид (проверьте!)

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} - \varphi(\sigma) \mathbf{b}, \quad \dot{\sigma} = \mathbf{c}^* \mathbf{y} - \rho \varphi(\sigma). \quad (41)$$

При этом преобразование должно быть невырожденным, т. е.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{c}^* & -\rho \end{vmatrix} \neq 0. \quad (42)$$

Однако для определителей имеет место следующая общая формула, которую мы здесь приведем без доказательства: если $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ — матрицы соответственно размеров $n \times n, n \times m, m \times n, m \times m$ и $\det \mathbf{A} \neq 0$, то

$$\det \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det (\mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}). \quad (43)$$

Поэтому неравенство (42) можно переписать в виде условия

$$\rho \neq \mathbf{c}^* \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad (44)$$

которое мы будем впредь предполагать выполненным. Из него вытекает, в частности, что система (41) имеет единственное состояние равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\sigma = 0$ (почему?).

Для установления достаточных условий абсолютной устойчивости системы (41) зададимся видом функции Ляпунова

$$V(\mathbf{y}, \sigma) = \mathbf{y}^* \mathbf{B} \mathbf{y} + \int_0^\sigma \varphi(\sigma_1) d\sigma_1, \quad (45)$$

где положительно определенная симметрическая матрица $\mathbf{B}$ будет подобрана позже. Это непрерывная положительно определенная функция, для которой $V(\infty) = \infty$. Непосредственное вычисление дает (проверьте!)

$$\dot{V} = \mathbf{y}^* \mathbf{C} \mathbf{y} + \rho \varphi^2(\sigma) + 2\varphi(\sigma) \mathbf{d}^* \mathbf{y}, \quad (46)$$

где

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{A}^* \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}), \quad \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{c}. \quad (47)$$

Чтобы можно было применить теорему п.3 об асимптотической устойчивости в целом, правая часть (46), представляющая собой квадратичную форму относительно $y_1, \dots, y_n, \varphi(\sigma)$ (вот где проявились «линейные черты» рассматриваемой нелинейной системы!), должна быть положительно определенной. Но так как эта форма имеет матрицу $\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^* & \rho \end{pmatrix}$, то в силу критерия Сильвестра и формулы (43) для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица $\mathbf{C}$ была положительно определенной и

$$\rho > \mathbf{d}^* \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d} \left(= \left(\mathbf{b}^* \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^* \right) \mathbf{C}^{-1} \left(\mathbf{B} \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{c} \right) \right). \quad (48)$$

Однако в п.4 было показано, что для любой симметрической положительно определенной матрицы $\mathbf{C}$ можно найти ровно одну симметрическую матрицу $\mathbf{B}$, удовлетворяющую первому равенству (47), причем $\mathbf{B}$ будет положительно определенной, так что $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{C})$. Таким образом, для того, чтобы для функции Ляпунова заданного вида (45) выполнялись условия теоремы об асимптотической устойчивости в целом, необходимо и достаточно (а тем самым для абсолютной устойчивости системы (39) достаточно) существование симметрической положительно определенной матрицы $\mathbf{C}$, удовлетворяющей неравенству (48).

Можно доказать, что для асимптотически устойчивой матрицы $\mathbf{A}$ и симметрической положительно определенной матрицы $\mathbf{C}$ построенный вектор $\mathbf{d}$

удовлетворяет неравенству $\mathbf{d}^* \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d} > \mathbf{c}^* \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$. Это делает излишней проверку условия (44).

Рассмотрим частный случай, когда $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где все λ_j — вещественные отрицательные числа. Выберем матрицу $\mathbf{C}$ в специальной форме $\mathbf{C} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где все $\alpha_j > 0$. Тогда

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2} \text{diag} \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{\lambda_n} \right), \quad d_j = -\frac{1}{2} \text{diag} \left(\frac{\alpha_j}{\lambda_j} b_j + c_j \right),$$

$$\mathbf{d}^* \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d} = \frac{1}{4} \sum_j \frac{1}{\alpha_j} \left(\frac{\alpha_j}{\lambda_j} b_j + c_j \right)^2.$$

Выберем коэффициенты α_j так, чтобы сделать правую часть по возможности меньше; нетрудно проверить (проделайте это!), что это наименьшее значение равно $\sum_j' \frac{b_j c_j}{\lambda_j}$, где сумма распространена лишь на положительные слагаемые.

На основании (48) мы приходим к достаточному условию абсолютной устойчивости рассматриваемой системы: $\rho > \sum_j' \frac{b_j c_j}{\lambda_j}$.

В 1961 г. румынский математик В. Попов, применяя преобразование Фурье, получил более сильное и более просто проверяемое условие абсолютной устойчивости, которые мы приведем здесь без доказательства, применительно к системе (41) при добавочном условии $\rho \neq \mathbf{c}^* \mathbf{b}$. Он рассматривал функции

Ляпунова более общего вида, чем (45), равные сумме $\beta \int_0^\sigma \varphi(\sigma_1) d\sigma_1$ и квадратичной формы относительно $y_1, \dots, y_n, \sigma$. Им показано, что для возможности удовлетворения такой функцией условий теоремы об асимптотической устойчивости в целом необходимо и достаточно существование числа $q \geq 0$, для которого

$$\text{Re}[(1 + i\omega q) \mathbf{c}^* \mathbf{A}^{-1} (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}] + q(\rho - \mathbf{c}^* \mathbf{b}) \geq 0 \quad (49)$$

при всех вещественных ω . Это условие, как и (48), является лишь достаточным для абсолютной устойчивости; но так как функции Ляпунова берутся из более широкого класса, чем ранее, то новое условие ближе к необходимому (почему?). В то же время условию (49) можно дать непосредственное геометрическое истолкование. В самом деле, построим на плоскости линию (L) с параметрическими уравнениями

$$x = \omega \text{Im}[\mathbf{c}^* \mathbf{A}^{-1} (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}] - \rho + \mathbf{c}^* \mathbf{b},$$

$$y = \text{Re}[\mathbf{c}^* \mathbf{A}^{-1} (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}]$$

$(-\infty < \omega < \infty)$. Тогда условие (49) можно записать в виде: «для некоторого $q \geq 0$ должно быть $y(\omega) - qx(\omega) \geq 0$ ». А это равносильно тому, что линия (L) должна целиком вмещаться в некоторую полуплоскость $y \geq qx$.

Для неустойчивых объектов регулирования мы ограничимся тем, что покажем возможность стабилизации с помощью линейного векторного управляющего воздействия. По аналогии с переходом от системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ к системе (41), наше утверждение означает, что для любой $(n \times n)$ -матрицы $\mathbf{A}$ (все величины считаются вещественными) всегда можно подобрать такие матрицы

B, C, D, размера $n \times m$, $m \times n$ и $m \times m$ соответственно (m тоже подбирается), что матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (50)$$

будет иметь все собственные значения с отрицательной вещественной частью. Такой переход от **A** к (50) называется *окаймлением* матрицы **A**; таким образом, *любую матрицу можно с помощью окаймления сделать асимптотически устойчивой*.

Допустим для простоты, что матрица **A** имеет все жордановы клетки первого порядка, в общем случае конструкция аналогичная. Тогда в силу п. IV.3.4 можно подобрать матрицу **H** так, что $\mathbf{A}' = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}$ будет иметь квазидиагональный вид, составленный из матриц первого порядка (λ_1) и матриц второго порядка $\begin{pmatrix} \mu_j & \nu_j \\ -\nu_j & \mu_j \end{pmatrix}$. Если $\lambda_j \geq 0$, то (λ_j) можно окаймить так:

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 \\ u & v \end{pmatrix};$$

нетрудно проверить (проделайте это!), что за счет подбора u, v можно сделать коэффициенты, а потому и корни характеристического уравнения любыми наперед заданными числами. Подобным образом матрицы второго порядка с $\mu_j \geq 0$ можно окаймлять так:

$$\begin{pmatrix} \mu_j & \nu_j & 0 \\ -\nu_j & \mu_j & 1 \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

(проверьте!). После такого «персонального» окаймления жордановых клеток можно с помощью одновременной перестановки строк и одноименных столбцов, не меняющей собственных значений (почему?), перейти к асимптотически устойчивому окаймлению матрицы **A'**; затем надо воспользоваться формулой

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{HB} \\ \mathbf{CH}^{-1} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

которая и даст требуемое окаймление матрицы **A**. (Из доказательства видно, что с помощью окаймления заданной матрицы можно получить матрицу достаточно высокого порядка с любыми наперед заданными собственными значениями.) Конечно, описанная процедура не была нацелена на экономию значения m .

Различные вопросы стабилизации см. в [8], гл. II.

В заключение упомянем о *проблеме М. А. Айзермана*, близкой к проблеме замораживания (п. 4). Пусть в некоторой системе дифференциальных уравнений, содержащей лишь одну нелинейную функцию одного переменного, скажем вида (41), это нелинейность имеет вид $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma)\sigma$, причем $\alpha \leq \psi(\sigma) \leq \beta$ и дано, что при подстановке вместо $\varphi(\sigma)$ любой линейной функции $\varphi_0(\sigma)$ ($\alpha \leq \psi_0 \leq \beta$) система будет асимптотически устойчивой в целом. Будет ли тогда асимптотически устойчивой в целом и исходная система с нелинейной функцией $\varphi(\sigma)$? Ясно, что если это так, то мы получаем простой признак устойчивости.

Исследованию этой проблемы посвящен ряд работ; см., в частности, книгу [97]. Оказалось, что в общем случае приведенное утверждение несправедливо. Тем не менее имеются различные классы систем, для которых оно верно.

Рассмотрим, например, систему

$$\dot{x} = \psi(x)x + ay, \quad \dot{y} = bx + cy. \quad (51)$$

Условие асимптотической устойчивости такой системы с замороженным коэффициентом $\psi(x)$ имеет вид (проверьте!)

$$\psi_0 + c < 0, \quad \psi_0 c - ab > 0 \quad (\alpha \leq \psi_0 \leq \beta). \quad (52)$$

Рассмотрим положительно определенную функцию

$$V(x, y) = \int_0^x [\psi(x_1)c - ab]x_1 dx_1 + \frac{1}{2}(cx - ay)^2, \quad (53)$$

равную ∞ на бесконечности. Ее полная производная по времени равна

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [\psi(x)c - ab]x[\psi(x)x + ay] + (cx - ay)\{c[\psi(x)x + ay] - a(bx + cy)\} \equiv \\ &\equiv x^2[\psi(x) + c][\psi(x)c - ab]. \end{aligned}$$

Из условий (52), которым удовлетворяет и размороженный коэффициент, вытекает, что $\dot{V} \leq 0$, причем $\dot{V} = 0$ только на оси y , не содержащей при $a \neq 0$ целых траекторий; этим в силу п. 3 доказывается асимптотическая устойчивость в целом при $a \neq 0$. Для $a = 0$ тот же результат получится, если взамен (53) взять функцию $V = Ax^2 + y^2$, где A достаточно велико (проверьте!). Таким образом, для систем (51) проблема Айзермана решается положительно.

8. Техническая устойчивость. Вернемся к общей системе (3). Пусть задана оценка или система оценок возмущения начальных данных, например может быть дано, что $\max_j |x_j(t_0)| \leq h$, — это оценка, — или что $|x_j(t_0)| \leq h_j$, ($j = 1, 2, \dots, n$) — это система оценок. Кроме того, если возмущается и правая часть (3), то должна быть задана оценка или система оценок этого возмущения на заданном интервале времени (t_0, T) , где T может быть конечным либо бесконечным. Наконец, пусть задана оценка или система оценок, которым должно удовлетворять возмущение решения. Тогда некоторые авторы говорят, что невозмущенное решение «технически устойчиво» относительно всех этих оценок, если при любых удовлетворяющих заданным оценкам возмущения начальных данных и правых частей возмущение решения удовлетворяет заданным для него оценкам на заданном интервале времени.

Название «техническая устойчивость» неудачное, а приводимая иногда мотивировка, что инженера интересует не бесконечное время и бесконечно малые возмущения, а конечное время и конечные возмущения, основана на недоразумении (ЛВМ, п. XV.22). Оценки, нацеленные на наихудший вариант и полученные с помощью последовательно усиливающихся неравенств, редко оказываются практически приемлемыми, чаще более эффективным оказывается вычислительный эксперимент.

Тем не менее возможны случаи, когда подобные гарантированные оценки возмущений решения бесполезны. Если возмущаются только начальные данные, то речь идет попросту об оценке решения заданного дифференциального уравнения при заданной оценке начальных данных. Такую оценку можно получить из точного решения, если оно возможно, из первых интегралов (п. VI.3.2), из численного интегрирования при нескольких вариантах выбираемых наугад начальных данных.

Иногда удастся применить метод функций Ляпунова. Именно, если удастся подобрать функцию $V(x, t)$, для которой

$$V(0, t) = 0, \quad V(x, t) > 0 \quad (x \neq 0), \quad \dot{V} \leq 0,$$

то для любого решения

$$V(t, x) \leq V(t_0, x_0) \quad (t_0 \leq t \leq T), \quad (54)$$

откуда можно получить оценку $\mathbf{x}(t)$ при заданной оценке $\mathbf{x}_0$. Например, если

$$V(x, t) = (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \mathbf{x}) e^{kt},$$

где $\mathbf{A}(t)$ при каждом t — симметрическая положительно определенная матрица, то из неравенства (54) следует, что

$$|x(t)| \leq |\mathbf{x}_0| \sqrt{\lambda_{\max}(t_0)/\lambda_{\min}(t)} \exp[k(t_0 - t)/2],$$

где под $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ понимаются наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ (докажите!). Если возмущаются также правые части системы, то неравенство $\dot{V} \leq 0$ может оказаться справедливым лишь вне некоторой окрестности начала координат пространства x , размер которой зависит от заданной оценки возмущений правых частей. Тогда и оценка (54) гарантируется лишь до тех пор, пока решение не попадет в эту окрестность. Для линейной системы (3) можно воспользоваться формулой (1.12), приняв, что возмущающая функция $\mathbf{f}(t)$ удовлетворяет заданной оценке.

Вопросы «технической устойчивости» рассмотрены в книге [45].

§4. Нелинейные колебания

1. Введение. Напомним сначала некоторые простые факты из теории колебаний линейных автономных систем с одной степенью свободы. Уравнение свободных колебаний такой системы имеет вид

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad (1)$$

где $h \leq 0$ и $\omega_0 > 0$ — параметры системы. (Для случая простейших механических систем $2h = fm^{-1}$, $\omega_0^2 = km^{-1}$, где f — коэффициент трения, m — масса осциллятора и k — коэффициент упругости.) Общее решение уравнения (1) легко находится по методу Эйлера; это решение имеет вид

$$y = e^{-ht}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) \quad \left(\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} \right), \quad (2)$$

если $h < \omega_0$ (это при $h > 0$ случай *затухающих колебаний*), и

$$y = C_1 \exp \left[- \left(h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2} \right) t \right] + C_2 \exp \left[- \left(h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2} \right) t \right],$$

если $h > \omega_0$ (это *апериодическое затухание*; соответствующее движение называется также *лимитационным*). Исходя из вида (2) решения, h называют *коэффициентом затухания*, а h^{-1} — *постоянной времени*; это время, за которое амплитуда колебаний затухает в e раз. (Более точно здесь говорить о затухании экспоненциального множителя при синусоиде, так как понятие амплитуды, строго говоря, относится лишь к периодической функции, каковой (2) не является, однако эта небольшая неточность в терминологии несущественна.) Безразмерная величина $2\pi h \omega_1^{-1}$ называется *декрементом*, она равна логарифму отношения амплитуд за время *условного периода*, т.е. периода гармонического сомножителя.

Если затухание отсутствует, т.е. $h = 0$, то решение (2) имеет совсем простой вид

$$y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = M \sin (\omega_0 t + \varphi_0)$$

где C_1, C_2 или M, φ_0 — произвольные постоянные. Существенно заметить, что здесь частота колебаний ω_0 не зависит от их амплитуды M ; эта *изохронность*, как мы увидим в п. 2, не имеет места для нелинейных автономных систем.

Уравнение вынужденных колебаний для гармонического внешнего воздействия имеет вид

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t, \quad (3)$$

где A и ω — амплитуда и частота внешнего воздействия. Уравнение (3) имеет общее решение (проверьте!)

$$x = \frac{A}{(\omega_2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega^2} [-(\omega_2 - \omega_0^2) \cos \omega t + 2h\omega \sin \omega t] + e^{-ht}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t), \quad (4)$$

представляющее собой результат наложения гармонического колебания, происходящего с частотой внешнего воздействия и однозначно им определяемого, и общего свободного колебания, зависящего от начальных условий. При наличии в системе диссипации, т.е. при $h > 0$, второе складываемое при возрастании t затухает, так что при большом t практически остается лишь первое, гармоническое колебание, происходящее с амплитудой

$$M = A [(\omega_2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega^2]^{-1/2}.$$

Безразмерный коэффициент усиления $\frac{M\omega_0^2}{A}$, равный

$$\frac{M\omega_0^2}{A} = \left[\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right)^2 + 4 \left(\frac{h}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (5)$$

представляет собой функцию двух безразмерных параметров: безразмерной вынуждающей частоты ω/ω_0 и безразмерного коэффициента диссипации h/ω_0 . Зависимость этого коэффициента от первого параметра при постоянных значениях второго показана на рис. 178. Эти графики называются *амплитудно-частотными характеристиками*.

Коэффициент (5) при заданной диссипации $r = h/\omega_0 \leq \sqrt{2}/2$ принимает наибольшее значение $(2r\sqrt{1-r^2})^{-1}$ при $\omega/\omega_0 = \sqrt{1-2r^2}$ (проверьте; а что будет при $r > \sqrt{2}/2$?). При $h/\omega_0 \rightarrow 0$, $\omega/\omega_0 \rightarrow 1$ коэффициент усиления неограниченно возрастает (подумайте физическую причину этого!).

Если диссипация отсутствует, то формула (4) приобретает более простой вид

$$x = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (6)$$

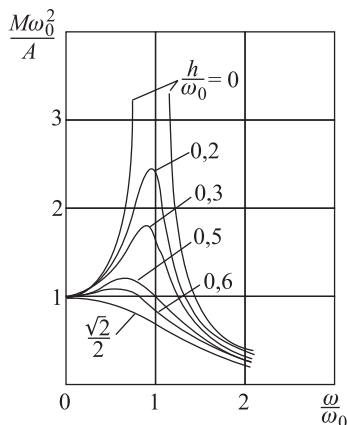


Рис. 178

т. е. решение получается квазипериодическим (п. 1.7), а для соизмеримых ω, ω_0 — периодическим. В частности, при начальных условиях

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

из (6) получаем

$$x = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \quad (7)$$

Поэтому при совпадении частоты ω внешнего воздействия с собственной частотой ω_0 будет

$$x \Big|_{\omega=\omega_0} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) = \frac{A}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t, \quad (8)$$

т. е. получаются колебания, амплитуда которых при $t \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает по линейному закону — наступает резонанс. Можно

сказать, что при этом коэффициент усиления обращается в бесконечность (рис. 178).

Решение (7) очень интересно, когда ω близко к ω_0 , т. е. $\omega = \omega_0 + \delta$, где δ относительно мало. Тогда

$$x = \frac{2A}{\delta(\omega_0 + \omega)} \sin \frac{\delta}{2} t \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \approx \frac{A}{\delta\omega_0} \sin \frac{\delta}{2} t \sin \omega_0 t. \quad (9)$$

При $0 < t \ll \delta^{-1}$ будет $\frac{1}{\delta} \sin \frac{\delta}{2} t \approx \frac{t}{2}$, т. е. с ростом t будет происходить нарастание амплитуды, как при резонансе. Однако при дальнейшем увеличении t множитель $\frac{1}{\delta} \sin \frac{\delta}{2} t$ будет колебаться по гармоническому закону с большой

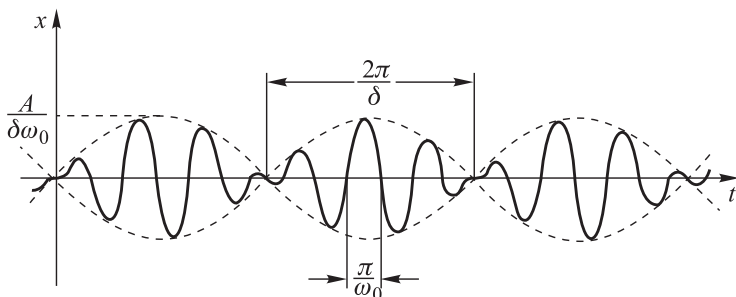


Рис. 179

амплитудой δ^{-1} и малой частотой $\delta/2$. Поэтому все решение (9) будет иметь вид, показанный на рис. 179; это так называемые *биения*.

Рассмотрим для дальнейшего еще случай, когда слабое внешнее возбуждение пропорционально искомому решению, другими словами, рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha x \quad (10)$$

при малых $|\alpha|$ и, для определенности, при начальных условиях

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (11)$$

Задачу легко решить точно (проверьте!):

$$x = A \cos \sqrt{\omega_0^2 - \alpha} t, \quad (12)$$

т. е. описанное возбуждение влечет изменение частоты колебаний, что очевидно и непосредственно, так как это возбуждение равносильно изменению коэффициента упругости.

Однако допустим, что мы хотим применить к задаче (10), (11) стандартный метод малого параметра. Тогда

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)\alpha + x_2(t)\alpha^2 + \dots \quad (13)$$

Подстановка в (10), (11) дает

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \quad x_0(0) = A, \quad \dot{x}_0(0) = 0, \quad \text{откуда} \quad x_0(t) = A \cos \omega_0 t;$$

это очевидное невозмущенное решение. Далее,

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0(t) = A \cos \omega_0 t, \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0,$$

откуда $x_1(t)$ дается формулой (8). Остановившись пока на этом, мы получаем решение с поправкой первого порядка малости, учитывающей возбуждение:

$$x(t) \approx A \cos \omega_0(t) + \frac{A\alpha}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (14)$$

Этот же результат получится после первой итерации, если применить к задаче (10), (11) метод последовательных приближений.

Но пусть нас интересует поведение решения $x(t)$ на бесконечном интервале времени, например при $t \rightarrow \infty$. Тогда ясно, что «приближенное» решение (14) совершенно неправильно передает это поведение, хуже даже, чем невозмущенное решение $x_0(t)$. В самом деле, второй член в правой части (14), даже при малом $|\alpha| \neq 0$, при $t \rightarrow \infty$ будет неограниченно возрастать по амплитуде и потому подавит первый член. (Такие члены с амплитудой, возрастающей по степенному закону, называются *секулярными* — по-русски *вековыми*, — так как в задачах о движении планет, где впервые обратили внимание на эти члены, они сказываются лишь после большого числа оборотов планеты вокруг центрального тела.) Получается, как будто в рассматриваемой системе имеет место резонанс, тогда как точное решение (12) показывает, что на самом деле резонанса нет. Вычисление дальнейших членов разложения (13) еще более искажает картину, например $x_2(t) = -\frac{A}{8\omega^2} t^2 \cos \omega t + \frac{A}{8\omega^3} t \sin \omega t$ (проверьте!) при $t \rightarrow \infty$ возрастает еще быстрее, чем $x_1(t)$ (хотя на конечном интервале t точность становится все лучше!).

То же разложение (13) можно получить, непосредственно раскладывая точное решение (12) по степеням α . Для этого обозначим $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha} = \omega_0 - \beta$, откуда

$$\beta = \omega_0 - \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\omega_0^2}\right)^{1/2} = \frac{\alpha}{2\omega_0} + \frac{\alpha^2}{8\omega_0^3} + \frac{\alpha^3}{16\omega_0^5} + \dots \quad (15)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 - \beta)t = A \cos \omega_0 t \cos \beta t + A \sin \omega_0 t \sin \beta t = \\ &= A \cos \omega_0 t \cdot \left(1 - \frac{\beta^2 t^2}{2!} + \frac{\beta^4 t^4}{4!} - \dots\right) + A \sin \omega_0 t \cdot \left(\beta t - \frac{\beta^3 t^3}{3!} + \dots\right). \end{aligned}$$

Если в правую часть вместо β подставить разложение (15) и объединить члены с одинаковыми степенями α , мы и получим (13). Отсюда ясно происхождение вековых членов, создающих иллюзию резонанса: частичные суммы рядов Маклорена для $\cos s$ и $\sin s$ хорошо изображают разлагаемые функции на конечном интервале s , но совершенно непригодны при $s \rightarrow \infty$ (продумайте это!).

В более сложных примерах точное решение нельзя выписать в конечном виде, и потому иллюзорность резонанса, полученного за счет вековых членов, обнаружить труднее. Такие члены обычно появляются при исследовании колебаний автономных систем по тому или иному варианту метода возмущений, если в качестве нулевого приближения взято колебание с неправильно определенной частотой. (Как бы ни было мало $|\varepsilon| > 0$, разность $\cos(\omega_0 + \varepsilon)t - \cos \omega_0 t$ при $t \rightarrow \infty$ не является малой.)

Колебательные свойства линейных автономных систем с конечным числом степеней свободы вытекают из рассмотрений пп. 3.6 и 1.6, 7. Остановимся здесь только на понятии амплитудно-частотной характеристики такой системы. Если уравнение вынужденных колебаний системы при гармоническом внешнем воздействии с частотой ω имеет вид

$$\mathbf{A}\xi + \mathbf{C}\xi + \mathbf{B}\xi = \mathbf{d}e^{i\omega t} \quad (16)$$

($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — квадратные матрицы, $\xi(t)$ — искомый вектор, $\mathbf{d}$ — заданный постоянный комплексный вектор), то решение, имеющее вид гармоника с той же частотой, равно

$$\xi = (-\omega^2 \mathbf{A} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{B})^{-1} \mathbf{d}e^{i\omega t}.$$

На эту гармонику накладывается общее свободное колебание системы, зависящее от начальных условий, которое при наличии полной диссипации (по всем координатам) затухает. Таким образом, роль амплитудно-частотной характеристики здесь играет матрица

$$\mathbf{Z}(\omega) = (-\omega^2 \mathbf{A} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{B})^{-1}. \quad (17)$$

Если уравнения (16) — это уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы, то каждый элемент z_{jk} матрицы $\mathbf{Z} = (z_{jk})$ представляет собой комплексный коэффициент усиления

отклика j -й координаты на гармоническое воздействие частоты ω , поданное на k -ю координату.

Часто можно говорить просто об отклике j -го элемента системы на гармоническое возбуждение ее k -го элемента; таким образом, матрица (17) характеризует взаимосвязь между элементами системы относительно гармонических воздействий.

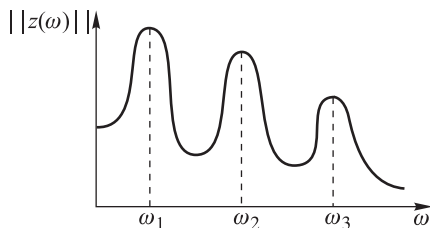


Рис. 180

Вместо полной характеристики (17) можно пользоваться упрощенной амплитудно-частотной характеристикой $\|\mathbf{Z}(\omega)\|$, взяв в качестве нормы матрицы сумму модулей всех ее элементов. Это вещественная скалярная функция вещественного аргумента ω , поэтому ее можно изобразить на графике (рис. 180). Ясно, что если норма матрицы $\mathbf{Z}(\omega)$ мала, то при данном ω все коэффициенты усиления малы, т.е. система данной частотой слабо возбуждается; если же норма велика (на рис. 180 при $\omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3$), то система возбуждается сильно (точнее говоря, внешнее воздействие можно так приложить, что по крайней мере один элемент системы возбудится сильно). На собственной частоте ω_0 системы без диссипации наступает резонанс, т.е. $\|\mathbf{Z}(\omega)\| = \infty$.

Например, для уравнений

$$\ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 = r(x_2 - x_1), \quad \ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 = r(x_1 - x_2) \quad (r > 0),$$

описывающих колебания системы из двух упруго связанных осцилляторов (п. 3.6), получаем (проверьте!)

$$\mathbf{Z}(\omega) = \left[\omega^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + 2r)\omega^2 + \omega_{01}^2\omega_{02}^2 + r(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \right]^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_{02}^2 + r & r \\ r & -\omega^2 + \omega_{01}^2 + r \end{pmatrix}.$$

В частности,

$$z_{21}(\omega_{01}) = (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^{-1};$$

значит, если возбуждать первый из осцилляторов на его парциальной частоте, то второй будет возбуждаться тем сильнее, чем ближе парциальные частоты.

Нелинейные колебания, к систематическому рассмотрению которых мы теперь переходим, обладают рядом специфических особенностей, проявляющихся уже для систем с одной степенью свободы. Невозможность суперпозиций решений, в частности умножения решения на константу, влечет за собой неизохронность свободных колебаний автономной консервативной системы, т.е. зависимость частоты таких колебаний от их амплитуды. Так как у системы нет собственной частоты, то *в случае вынужденных колебаний нелинейной системы отсутствует явление резонанса*. С другой стороны, мы увидим, что в такой системе возможно принципиально новое явление — вынужденные колебания, период которых кратен периоду возбуждающего воздействия (это *субгармонические колебания*). Для автономных неконсервативных систем принципиально новой в нелинейном случае является возможность автоколебаний, о которых мы упоминали в п. 2.5. *Параметрические колебания* неавтономной нелинейной системы, вызванные периодическим изменением ее параметров, из-за отсутствия суперпозиции также происходят на определенных амплитудах; если эта амплитуда бесконечная, в системе будет параметрический резонанс (п. 1.4). Для систем с несколькими степенями свободы нелинейный случай осложнен невозможностью перехода к независимым колебаниям нормальных координат.

По колебаниям вообще и нелинейным колебаниям в частности имеется обширная литература; см., например, [4, 7, 13, 17, 25, 31, 43, 48, 81, 85, 94, 95, 108, 109, 111, 112, 123, 124].

2. Свободные колебания автономной консервативной системы с одной степенью свободы. Речь идет о решениях уравнения

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (18)$$

где функция $f(x)$ имеет тот же знак, что x . Из наличия первого интеграла

$$V(x, \dot{x}) \equiv \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x f(\xi) d\xi = \text{const} \quad (19)$$

(проверьте!) вытекает, что уравнение (18) интегрируется в квадратурах.

Так как левая часть (19) имеет при $x = \dot{x} = 0$ минимум, то (ср. п. 3.6) при достаточно малых начальных значениях x и $\dot{x}$ решения будут периодическими. Для несимметричной функции $f(x)$ амплитуды налево $A_{\text{л}}$ и направо $A_{\text{п}}$ будут, вообще говоря, различными, и так как в момент достижения этих амплитуд будет $\dot{x} = 0$, то из (19) следует, что связь между $A_{\text{л}}$ и $A_{\text{п}}$ такова:

$$-\int_{-A_{\text{л}}}^0 f(x) dx = \int_0^{A_{\text{п}}} f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то $A_{\text{л}} \equiv A_{\text{п}}$.

Найдем связь между амплитудой и периодом колебаний. Для этого положим $x_0 = A_{\text{п}}$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$; тогда из (19) получим

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x f(\xi) d\xi = \int_0^{A_{\text{п}}} f(\xi) d\xi,$$

откуда

$$\dot{x} = \pm \left(2 \int_x^{A_{\text{п}}} f(\xi) d\xi \right)^{1/2},$$

т. е. координата x дойдет до значения $x = 0$ за время

$$\int_0^{A_{\text{п}}} \left(2 \int_x^{A_{\text{п}}} f(\xi) d\xi \right)^{-1/2} dx.$$

Проделав то же вычисление для $x < 0$, получаем период колебания

$$T = 2 \int_{-A_n}^0 \left(-2 \int_{-A_n}^x f(\xi) d\xi \right)^{-1/2} dx + 2 \int_0^{A_n} \left(2 \int_x^{A_n} f(\xi) d\xi \right)^{1/2} dx. \quad (20)$$

Например, при $f(x) = \alpha|x|^2 \operatorname{sgn} x$ ($\alpha > 0$, $-1 < k < \infty$) получаем $A_n = A_n = A$ и

$$\begin{aligned} T &= 4 \int_0^A \left(2 \int_x^A \alpha \xi^k d\xi \right)^{-1/2} dx = \sqrt{\frac{8(k+1)}{\alpha}} \int_0^A (A^{k+1} - x^{k+1})^{-1/2} dx = \\ &= \left| x = As^{1/(k-1)} \right| = \sqrt{\frac{8}{\alpha(k+1)A^{k-1}}} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-k/(k+1)} ds = \\ &= \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha(k+1)}} \frac{\Gamma(1/(k+1))}{\Gamma(1/2 + 1/(k+1))} A^{(1-k)/2} \end{aligned}$$

(см., например, ЛВМ, пп. XIV.17, 18). Мы видим, что за исключением линейного случая ($k = 1$) период колебаний зависит от амплитуды. При $k > 1$ с ростом амплитуды период убывает. Этот факт не связан с конкретным степенным видом функции $f(x)$, а может быть выведен из того, что эта функция при $x > 0$ выпукла книзу, а при $x < 0$ — кверху, так как тогда с ростом амплитуды роль упругих сил по сравнению с инерционными повышается (продумайте это). Восстанавливающая сила с таким характером выпуклости называется *жесткой*. Аналогично при $k < 1$ получается *мягкая* восстанавливающая сила, имеющая противоположный характер выпуклости, и период колебаний с ростом амплитуды растет.

Для прикидочных расчетов периода колебаний часто оказывается возможным из каких-либо соображений заменить *восстанавливающую характеристику* $f(x)$ на линейную, после чего подсчитать период уже легко. Оказывается, что для нечетной $f(x)$ одной из наиболее точных является замена $f(x)$ на kx , где k подбирается из условия минимизации интеграла

$$\int_0^A [f(x) - kx]^2 x^2 dx.$$

При этом получается формула для периода колебаний (проверьте!)

$$T \approx 2\pi \left(\frac{5}{A^5} \int_0^A f(x) x^3 dx \right)^{-1/2},$$

значительно более простая, чем (20). Эту формулу предложил советский механик Я. Г. Пановко.

Решения уравнения (18) наглядно изображаются на фазовой плоскости (пп. 2.3–5), для чего надо перейти к эквивалентной системе уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x). \quad (21)$$

Так как система (21) каноническая (для какой функции Гамильтона?), то в силу п. 2.12 при сдвиге по траекториям площади сохраняются, а потому притягивающие и отталкивающие точки покоя (т.е. узлы и фокусы) или циклы невозможны. При построении фазового портрета системы (21) полезно обратить внимание на то, что все траектории в верхней полуплоскости ($y > 0$) идут направо, а в нижней — налево; ось x пересекается траекториями ортогонально, за исключением точек покоя, которые могут располагаться только на этой оси (этими свойствами обладает фазовый портрет и для более общего уравнения $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$).

Рассмотрим в качестве примера уравнение колебания без трения *математического маятника*, т.е. материальной точки, подвешенной на идеально жестком невесомом стержне в однородном поле тяготения (рис. 181). В обозначениях рис. 181 имеем

$$ml^2\ddot{x} = -mg \sin x \cdot l,$$

откуда

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0$$

(проверьте размерности!). Соответствующая система первого порядка имеет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x$$

и фазовый портрет, показанный на рис. 182 (проверьте его правильность!). Так как x — это угол, то картина повторяется с периодом 2π по x , т.е.

фазовым пространством здесь служит цилиндр (п. 2.11). Точками покоя здесь служат центры, четно кратные π и отвечающие устойчивому состоянию равновесия, и седла, нечетно кратные π , отвечающие неустойчивому состоянию равновесия маятника. Уравнения траекторий на основании интеграла (19) имеют уравнение

$$y^2 = C + 2 \frac{g}{l} \cos x;$$

в частности, уравнение сепаратрисы, проходящей через седла (при $x = \pi$ должно быть $y = 0$, откуда $C = 2 \frac{g}{l}$), имеет вид

$$y = \pm \sqrt{2 \frac{g}{l} (1 + \cos x)} = \pm 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \frac{x}{2}.$$

Сепаратриса делит полосу $-\pi \leq x \leq \pi$ (рис. 182) на три части. Средняя заполнена циклами, которым отвечают *либрационные движения*, т.е. покачивания

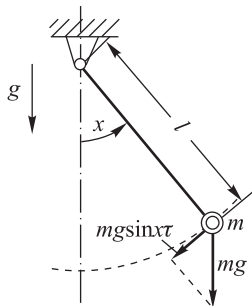


Рис. 181

вокруг положения устойчивого равновесия. Верхняя заполнена траекториями, замкнутыми на фазовом цилиндре (но незамкнутыми на фазовой плоскости!), которым отвечают *ротационные движения*, т.е. вращения маятника вокруг точки подвеса с неограниченным возрастанием фазового угла. Нижняя область фазовой плоскости также отвечает ротационным движениям, но с противоположным направлением вращения. (Какому движению отвечает сама сепаратриса?) Связь (20) между периодом и амплитудой при либрации легко выразить через полный эллиптический интеграл (п. II.4.14), что мы предоставляем читателю.

Интересно отметить, что каждое либрационное движение в рассматриваемом случае неустойчиво по Ляпунову. В самом деле, так как период колебаний

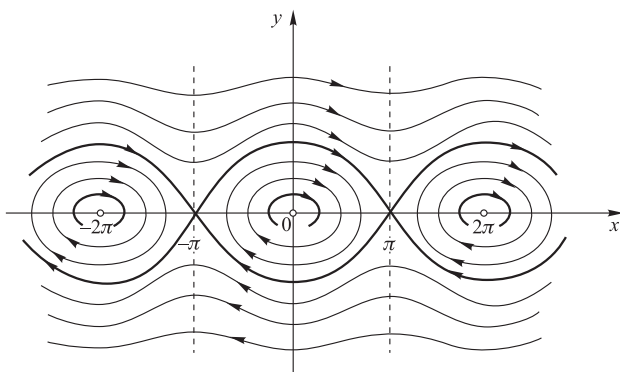


Рис. 182

зависит от амплитуды, то для как угодно малого сдвига начальной точки на другую траекторию при безграничном увеличении t изображающие точки разойдутся на конечное расстояние (затем опять сблизятся и т.д.). Но так как изображающая точка возмущенной траектории при этом все время будет двигаться вблизи невозмущенной траектории, то описанная ситуация называется *орбитальной устойчивостью*.

В физике при рассмотрении либрационных и ротационных движений применяется также специальная система переменных, отличная от $x, \dot{x}$. Покажем ее для автономной консервативной системы с одной степенью свободы и функцией Гамильтона

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q),$$

где параметр $m > 0$ может зависеть от q . В силу п. VI.3.7 уравнение Гамильтона–Якоби приобретает вид

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dq} \right)^2 + U(q) = h,$$

откуда

$$W = \int \sqrt{2m[h - U(q)]} dq + \text{const.} \quad (22)$$

Если в последний интеграл подставить какое-либо выражение $h = h(P)$, то получится функция $W(q, P)$, которую можно принять за производящую функцию канонического преобразования

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial W}{\partial P}, \quad \tilde{H} = h(P), \quad (23)$$

и закон движения приобретает вид (п. VI.3.7):

$$P = \text{const}, \quad Q = h'(P)t + \text{const}.$$

Из (23) и (22) видно, что h есть полная энергия системы.

Упомянутая специальная система переменных для либрационных движений вблизи устойчивого положения равновесия получится, если в качестве P выбрать *переменную действия*

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (24)$$

равную, с точностью до коэффициента $1/2\pi$, площади, ограниченной замкнутой траекторией в фазовой плоскости q, p . (Проверьте, что приращение действия за один цикл периода T_0 равно $2\pi J - hT_0$, чем и объясняется наименование J .) Так как J растет вместе с h , то имеет смысл говорить и об обратной зависимости $h(J)$, которая и порождает описанное выше каноническое преобразование. Канонически сопряженная с J величина $\vartheta = \frac{\partial W}{\partial J}$ называется *угловой переменной*. Ее приращение за один цикл равно

$$\Delta\vartheta = \oint \frac{\partial\vartheta}{\partial q} \bigg|_{J=\text{const}} dq = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J \partial q} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint p dq = 2\pi.$$

Закон движения в новых переменных имеет вид

$$\vartheta = h'(J)t + \vartheta_0 = \frac{2\pi}{T_0} t + \vartheta_0, \quad J = \text{const}.$$

Проверьте, например, что при $m = \text{const}$ и линейной восстанавливающей силе, т. е. при $U = \frac{k}{2} q^2$, будет

$$J = \sqrt{\frac{m}{k}} h, \quad \vartheta = \arcsin \frac{\sqrt[4]{mk} q}{\sqrt{2J}},$$

$$q = \frac{\sqrt{2J}}{\sqrt[4]{mk}} \sin \vartheta, \quad p = \sqrt[4]{mk} \sqrt{2J} \cos \vartheta.$$

Для ротационного движения интеграл (24) берется по периоду функции $p(q)$, т. е. по циклу ротации, в остальном преобразования те же, что при либрации.

При наличии диссипации циклы невозможны, а точки покоя, отвечающие устойчивым состояниям равновесия, превращаются в фокусы для малой диссипации и в узлы — для большой (почему?); конечно, тогда система становится уже неконсервативной. Соответствующая фазовая картина для математического маятника с малой диссипацией показана на рис. 183. (Изобразите картину

для большой диссипации!) При как угодно большой начальной скорости маятник после конечного числа ротаций переходит на затухающие либрации. (Какова роль сепаратрис?)

В связи со сказанным упомянем еще об одном полезном понятии, которое активно изучается в последние годы. Для системы общего вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (25)$$

некоторое k -мерное ($1 \leq k \leq n$) многообразие (S) $(n+1)$ -мерного пространства x, t называется *интегральным*, если (S) составлено из целых графиков решений (интегральных линий), т. е. если из $(x_0, t_0) \in (S)$ вытекает, что и $(x(t; t_0, x_0), t) \in (S)$ для всех t , где $x(t; t_0, x_0)$ — решение системы (25) при начальном условии $x|_{t=t_0} = x_0$. Любая интегральная линия образует одномерное интегральное многообразие. Если система (25) автономная, то из-за

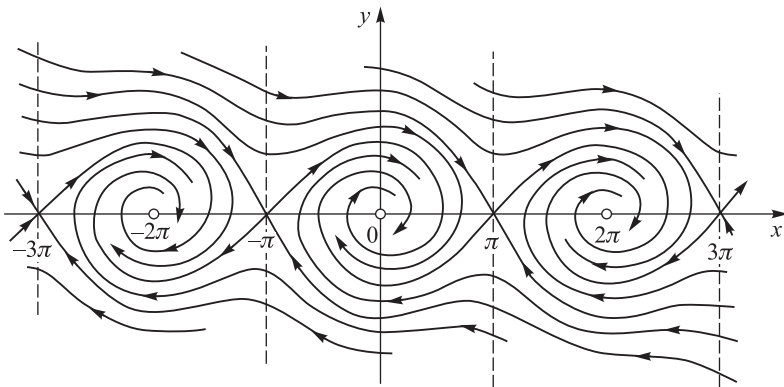


Рис. 183

возможности произвольного сдвига любого ее решения во времени каждая траектория в пространстве x определяет двумерное цилиндрическое интегральное многообразие, направляющей которого служит эта траектория, а образующие параллельны оси t . Исследование интегральных многообразий иногда дает возможность отвлекаясь от каждого индивидуального решения, получить те или иные основные свойства совокупности решений в целом. Отметим, что каждый первый интеграл определяет расслоение пространства x, t на n -мерные интегральные многообразия¹⁾. Различные авторы рассматривали также вопросы о зависимости интегрального многообразия от параметра, входящего в систему (25), об устойчивости по Ляпунову сечения интегрального многообразия плоскостью $t = \text{const}$ (в приведенных выше примерах это обычная устойчивость по Ляпунову и орбитальная устойчивость) и т. д.

¹⁾ Напомним, что *первым интегралом* системы (25) называется соотношение $\Phi(\mathbf{x}, t; C) = 0$, справедливое для каждого решения этой системы, где C — постоянная, зависящая от выбора такого решения.

3. Вынужденные колебания системы с малой нелинейностью, основной случай. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t + f_1(x, \dot{x}, t)\alpha + f_2(x, \dot{x}, t)\alpha^2 + \dots, \quad (26)$$

где α — малый параметр, а все функции f_j периодичны по t с периодом $T = 2\pi/\omega$ и разлагаются в ряды Тейлора по степеням $x, \dot{x}$. Это уравнение (3), возмущенное малой нелинейностью. Будем считать, что $A \neq 0$, а если $h = 0$, то $\omega \neq \omega_0$; этим исключаются особые случаи, которые будут рассмотрены в п. 4.

В уравнении (3) можно было возмутить и коэффициенты h, ω_0^2 и A , например, вместо h написать $h + h_1\alpha + h_2\alpha^2 + \dots$; это не является существенным обобщением, так как члены с h_j можно отнести к f_j . Однако если была возмущена частота возбуждения, т. е. вместо ω всюду поставлено $\omega + \omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \dots$, то не следует проводить разложение косинуса и функций f_j по степеням α , что привело бы к появлению вековых членов (п. 1), а лучше просто обозначить $\omega + \omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \dots$ через новое ω .

Согласно методу малого параметра будем искать решение уравнения (26) в виде

$$x = x_0(t) + x_1(t)\alpha + x_2(t)\alpha^2 + \dots \quad (27)$$

Подстановка в (26) и приравнивание коэффициентов дают

$$\ddot{x}_0 + 2h\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = A \cos \omega t, \quad (28)$$

$$\ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_1(x_0, \dot{x}_0, t), \quad (29)$$

$$\ddot{x}_2 + 2h\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} f_1(x_0 + \alpha x_1, \dot{x}_0 + \alpha \dot{x}_1, t) \right]_{\alpha=0} + f_2(x_0, \dot{x}_0, t) \quad (30)$$

и т. д. (28) — это как раз уравнение (3), так что $x_0(t)$ имеет выражение (4). Будем искать только T -периодическое решение, представляющее наибольший интерес; тогда

$$x_0(t) = \frac{A}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega^2} [-(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t + 2h\omega \sin \omega t]. \quad (31)$$

Подставив это выражение в правую часть (29), мы получим T -периодическую функцию, которую можно разложить в ряд Фурье по функциям $\cos n\omega t, \sin n\omega t$; после этого аналогично (31) получаем $x_1(t)$ в виде суммы ряда по этим же функциям, т. е. в виде T -периодической функции. Затем обращаемся к уравнению (30) и т. д.

Рассмотрим, например, уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t + \alpha x^3 \quad (\omega \neq \omega_0). \quad (32)$$

Здесь

$$x_0(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t;$$

поэтому уравнение (29) принимает вид

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \left(\frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \right)^2 = \frac{A^3}{4(\omega_0^2 - \omega^2)^3} (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t),$$

откуда

$$x_1(t) = \frac{A^3}{4(\omega_0^2 - \omega^2)^3} \left[\frac{3}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{1}{\omega_0^2 - (3\omega)^2} \cos 3\omega t \right] \quad (33)$$

(проверьте!). $x_2(t)$ будет уже линейной комбинацией функций $\cos \omega t$, $\cos 3\omega t$ и $\cos 5\omega t$, и т. д. Таким образом, в решении уравнения (32) на основную гармонику с частотой ω окажутся наложенными верхние гармоники с частотами 3ω , 5ω и т. д. и с амплитудами все более высокого порядка малости.

Отметим, что в правой части (26) вместо $A \cos \omega t$ могла стоять произвольная T -периодическая функция $f(t)$; тогда после разложения правой части (28) в ряд Фурье построение решения не отличается от проведенного. Если $f(t) \equiv 0$ (т. е. $A = 0$), то можно сделать замену $x = \alpha y$ и после сокращения (26) на α разложить все $f_j(\alpha y, \alpha \dot{y}, t)$ по степеням α ; если $f_1(0, 0, t) \equiv 0$, то это преобразование можно повторить. Отметим также, что из формулы (33) и аналогичных формул для нелинейности более общего вида ясно, что особыми являются не только случай $\omega = \omega_0$, но и случай $\omega = \omega_0/2$, $\omega_0/3$ и т. д.

Рассмотрение систем с большим числом степеней свободы в основном случае, т. е. когда при $\alpha = 0$ ни одна из собственных частот не является целой кратной частоты возбуждения, проводится совершенно аналогично.

На практике нам часто приходится иметь дело с конкретными числовыми примерами, в которых, как подсказывает интуиция, нелинейность не является слишком большой. В таких случаях можно какой-нибудь из сравнительно малых числовых коэффициентов, порождающих нелинейность, объявить малым параметром, т. е. написать вместо этого коэффициента α и т. п. Можно также перед всей группой нелинейных членов поставить искусственный множитель α , который после проведения вычислений полагается равным единице. Ограничиваясь небольшим числом членов разложения, можно получить представление о точности результата, проводя численное интегрирование на компьютере контрольных примеров с типичными или экстремальными значениями параметров. Это замечание, конечно, относится ко всем вариантам применения метода малого параметра.

4. Особые случаи. Рассмотрим теперь случай, когда система с одной степенью свободы возбуждается на частоте, близкой к собственной, т. е. когда в уравнении (26) $h = 0$, $\omega = \omega_0$. Мы будем опять искать T -периодическое решение, остающееся конечным при $\alpha = 0$;

тогда в уравнении (26) должно быть $A = 0$, т. е. будет рассматриваться уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_1(x, \dot{x}, t)\alpha + f_2(x, \dot{x}, t)\alpha^2 + \dots, \quad (34)$$

где все функции f_j T_0 -периодичны по t ($T_0 = 2\pi/\omega_0$).

Будем пользоваться тем же разложением (27). Тогда $\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$, т. е.

$$x_0(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad (35)$$

где постоянные a, b пока неизвестны. Далее (см. 29))

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_1(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, -a\omega_0 \sin \omega_0 t + b\omega_0 \cos \omega_0 t, t). \quad (36)$$

Если мы хотим, чтобы функция $x_1(t)$ была периодической, то в разложении правой части (36) в ряд Фурье должны отсутствовать члены с $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ (почему?), т. е. должно быть

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega_0} f_1(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, -a\omega_0 \sin \omega_0 t + b\omega_0 \cos \omega_0 t, t) \times \\ \times \cos \omega_0 t \, dt = 0, \\ \int_0^{2\pi/\omega_0} f_1(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, -a\omega_0 \sin \omega_0 t + b\omega_0 \cos \omega_0 t, t) \times \\ \times \sin \omega_0 t \, dt = 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Это — система *определяющих* уравнений, из которой находят возможные значения для a, b ; так как она нелинейная, то таких значений, вообще говоря, получится несколько (а быть может, и ни одного).

Удовлетворив уравнениям (37), мы получаем общее решение уравнения (36) в виде

$$x_1(t) = \varphi_1(t) + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t, \quad (38)$$

где $\varphi_1(t)$ — вполне определенная T_0 -периодическая функция, а a_1, b_1 — произвольные постоянные. Теперь надо обратиться к уравнению (30) для $x_2(t)$. Подставив в его правую часть выражения для $x_0(t)$ и $x_1(t)$ и пользуясь условиями отсутствия резонанса, получаем систему из двух уравнений первой степени относительно a_1, b_1 , из которой находим эти постоянные, затем пишем общее решение уравнения (30) и т. д.

Подчеркнем, что в рассмотренном случае малое внешнее воздействие порождает колебание с конечной, не малой амплитудой. Это не удивительно, так как система оказывается в состоянии, близком к резонансу. В то же время наличие в системе малой диссипации (за счет $\dot{x}$ в правой части) или малой нелинейности, меняющей собственную частоту при изменении амплитуды, не дает возможности вынужденному колебанию разрастаться неограниченно. (Разберите самое простое уравнение этого вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha h \dot{x} + \alpha A \cos \omega_0 t$.)

Случай, когда в правой части (34) добавлена T_0 -периодическая функция $f_0(t)$, фурье-разложение которой не содержит $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$, сводится к разобранному с помощью замены $x = y + \psi(t)$, где функция $\psi(t)$ представляет собой какое-либо решение уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0(t)$.

Рассмотрим в качестве примера вариант уравнения Дуффинга с малым затуханием

$$\ddot{x} + \alpha h \dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha A \cos \omega t + \alpha k x^3 \quad (h > 0, \alpha > 0),$$

где

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \alpha + \omega_2 \alpha^2 + \dots \quad (39)$$

Согласно началу п. 3 перед разложением по степеням α проводим замену

$$\omega_0^2 = [\omega - (\omega_1 \alpha + \omega_2 \alpha^2 + \dots)]^2 = \omega^2 - 2\omega \omega_1 \alpha + (\omega_1^2 - 2\omega \omega_2) \alpha^2 + \dots;$$

это дает

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (-h \dot{x} + A \cos \omega t + k x^3 + 2\omega \omega_1 x) \alpha - (\omega_1^2 - 2\omega \omega_2) x \alpha^2 = \dots$$

Подставляя $x = x_0(t) + x_1(t) \alpha + \dots$, получим

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0, \quad (40)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -h \dot{x}_0 + A \cos \omega t + k x_0^3 + 2\omega \omega_1 x_0$$

и т. д. Из первого уравнения получаем (35) с ω вместо ω_0 . Подставляя (35) в правую часть (40) и выписывая условия отсутствия резонанса, получаем после вычислений определяющие уравнения (проверить!)

$$\left. \begin{aligned} 2\omega \omega_1 a - h \omega b + A + \frac{3}{4} k(a^3 + ab^2) &= 0, \\ 2\omega \omega_1 b + h \omega a + \frac{3}{4} k(a^2 b + b^3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Для исследования этой системы уравнений удобно ввести величину $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, равную предельной амплитуде колебаний при $\alpha \rightarrow 0$. Из (41) получаем

$$\left(2\omega \omega_1 + \frac{3}{4} k m^2\right) a - h \omega b = -A, \quad \left(2\omega \omega_1 + \frac{3}{4} k m^2\right) b + h \omega a = 0;$$

возводя эти соотношения в квадрат и складывая, приходим к сравнительно простому уравнению

$$\left(2\omega \omega_1 + \frac{3}{4} k m^2\right)^2 m^2 + h^2 \omega^2 m^2 = A^2 \quad (42)$$

для этой амплитуды. Чтобы сделать это уравнение еще более обозримым, в частности уменьшить в нем число параметров, введем безразмерные приращения частоты и амплитуду

$$\lambda = \frac{\omega_1}{\omega} r, \quad \mu = \frac{m}{A} \omega^2 s,$$

где безразмерные коэффициенты r, s мы используем для уменьшения числа параметров (проследите за этим общим приемом!). Тогда взамен (42) мы получим уравнение

$$\frac{9}{16} k^2 A^4 \omega^{-12} s^{-6} \left(\frac{8}{3} s^2 \omega^6 (r k A^2)^{-1} \lambda + \mu^2 \right)^2 \mu^2 + h^2 \omega^{-2} s^{-2} \mu^2 = 1$$

(проверяйте вычисления!). Значит, если положить

$$s = \left(\frac{3}{4} kA^2\right)^{1/3} \omega^{-2}, \quad r = \frac{8}{3} s^2 \omega^6 (kA^2)^{-1} = \left(\frac{3}{32} kA^2\right)^{-1/3} \omega^2$$

и обозначить $q = h^2 \omega^{-2} s^{-2} = h^2 \left(\frac{3}{4} kA^2\right)^{-2/3} \omega^2$, мы придем к уравнению

$$(\lambda + \mu^2)^2 \mu^2 + q \mu^2 = 1, \quad \text{т. е.} \quad (\lambda + \mu^2)^2 + q = 1 \mu^2.$$

Графическое решение этого уравнения при заданных λ, q показано на рис. 184. Так как относительно μ^2 уравнение третьей степени, то здесь могут быть либо три вещественных корня, либо один. На рис. 185 показано соотношение между λ и μ при различных фиксированных значениях $q \geq 0$. Несложное исследование, которое мы предоставляем читателю, показывает, что при $q \geq 3/4$ функция $\mu(\lambda)$ однозначная, тогда как при $0 \leq q < 3/4$ она имеет интервал

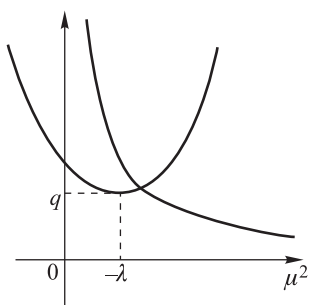


Рис. 184

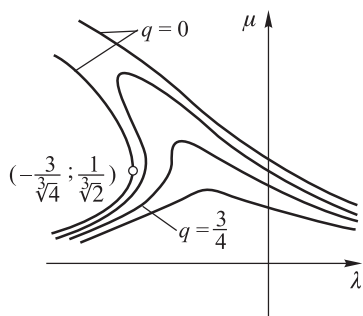


Рис. 185

трехзначности; из смысла q вытекает, что последнее будет при относительно малой диссипации или большом возбуждающем воздействии. (Условие $q < 3/4$ можно выразить непосредственно в терминах относительного коэффициента диссипации αh и т. п., что дает возможность в численных примерах проверять его непосредственно.)

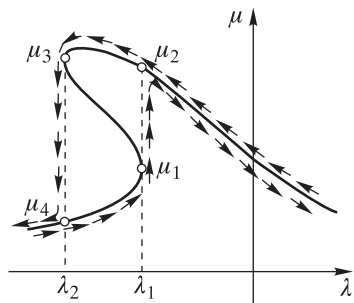


Рис. 186

Наличие такого интервала трехзначности влечет за собой явление перескока амплитуды вынужденных колебаний при изменении возбуждающей частоты, т. е. λ , показанное на рис. 186 и совершенно аналогичное явлению перескока, описанному в п. 3.2. Можно показать, что участок амплитудно-частотной характеристики между точками с ординатами μ_1 и μ_3 отвечает неустойчивым вынужденным колебаниям.

Отметим, что если правая часть (34) имеет вид

$$f_1(x)\alpha + f_2(x)\alpha^2 + \dots + F_1(t)\alpha + F_2(t)\alpha^2 + \dots,$$

где все функции $F_j(t)$ T_0 -периодичны, то в силу п. 2 можно говорить о собственных частотах системы (если отбросить все члены с F_j), зависящих от амплитуды колебаний; при этом значение ω_0 может при $\alpha \neq 0$ и не входить в интервал этих частот. Но мы строили решение периода T_0 , значит, это решение описывает вынужденное колебание, происходящее с частотой внешнего возбуждения. Эта частота может не совпадать с собственной частотой исходной невозмущенной системы (вопреки тому, как это может показаться из проведенного общего рассмотрения), а только должна быть близка к ней, так как уравнение (34) могло быть, как в разобранный примере, получено после растяжения времени; ведь в уравнении (39) $\omega \neq \omega_0$ (продумайте это!).

Аналогично рассматривается случай, когда для некоторого определенного $m = 2, 3, 4, \dots$ все функции f_j в (34) имеют по t период mT_0 ; особенность этого случая была отмечена в конце п. 3. Здесь надо пользоваться теми же формулами (27) и (35). Правая часть (36) имеет период mT_0 , и потому в ее фурье-разложении могут, вообще говоря, оказаться гармоники с частотами $\omega_0 = m(2\pi/mT_0)$, приводящие к резонансу. Поэтому надо воспользоваться условиями (37) отсутствия таких гармоник, затем найти a и b , перейти к формуле (38) с mT -периодической функцией $\varphi_1(t)$ и т. д. Полученное решение будет иметь период mT_0 , однако в нем будет основное слагаемое (35) периода T_0 (см. рис. 187, где $m = 3$). Соответствующие колебания называются

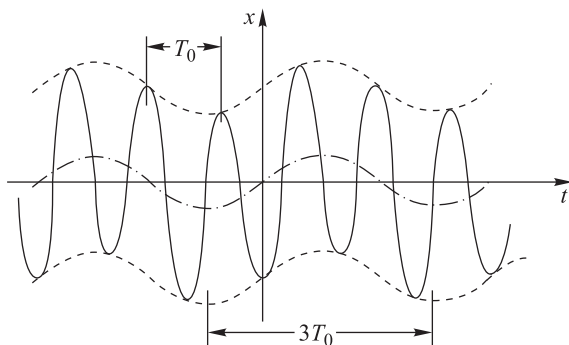


Рис. 187

ультрагармоническими, для них основная компонента имеет частоту, кратную частоте внешнего воздействия (и близкую к собственной частоте колебаний невозмущенной системы). Так как и сейчас малое воздействие порождает конечное колебание, то получается как бы резонанс на периоде, кратном собственному. Это не удивительно, так как в нелинейных системах гармоники редко фигурируют в «чистом» виде, они сразу «обрастают» фурье-разложениями, т. е. гармониками с кратными частотами, иначе, дробными периодами. В частности, mT_0 -периодическая гармоника индуцирует T_0 -периодическую, которая и порождает резонанс.

Исследование особого случая для систем с более чем одной степенью свободы в принципе проходит так же, как и для одной степени свободы. Формула (35) будет векторной, причем постоянные векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ будут включать $2k$ произвольных параметров, где k — число собственных частот невозмущенной системы, равных ω_0 . Но и условие отсутствия резонанса в данном случае состоит из $2k$ скалярных равенств (почему?), так что система определяющих уравнений будет состоять из $2k$ уравнений относительно $2k$ упомянутых параметров. При $k = 1$ вычисления получаются не намного сложнее, чем для случая одной степени свободы.

5. Субгармонические колебания. Своеобразное положение занимает случай, когда частота ω внешнего воздействия близка к m -кратной собственной частоте. С одной стороны, это основной случай (п. 3), т. е. малому возмущению отвечает и малое колебание. С другой стороны, мы сейчас увидим, что, кроме малого колебания, может быть также и конечное, частоты ω/m (как мы упоминали в п. 1, эти колебания называются субгармоническими *порядка* $1/m$), так что и здесь получается как бы резонанс, причем на частоте, кратной собственной. Происхождение таких колебаний можно понять следующим образом. Для линейного уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos m\omega_0 t$ общее решение имеет вид суммы частного, периода ω_0/m , и свободного колебания периода T_0 , причем последнее зависит от начальных условий; таким образом, и здесь получается колебание на частоте $\omega_0 = m\omega_0/m = \omega t$. Однако при наличии в системе как угодно малой диссипации свободное колебание в силу возможности суперпозиции с течением времени устраняется. В нелинейной же системе все гармоники взаимосвязаны, так что ни одна из них не может меняться, не влияя на остальные; поэтому возбуждение гармоники частоты $m\omega_0$ может порождать гармонику частоты ω_0 , а потому и резонанс.

Формально рассуждение проходит следующим образом. Допустим, что в правой части (34) все функции f_j имеют по t период T_0/m . Тогда

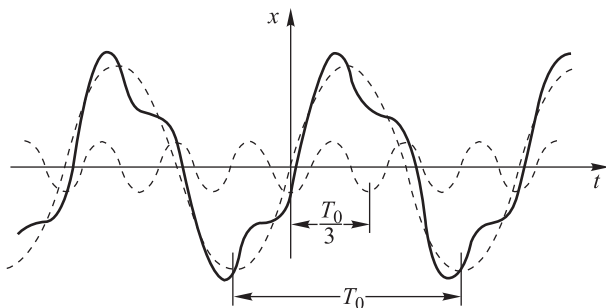


Рис. 188

они имеют и период T_0 , и потому мы можем перейти к формуле (35) и определяющим уравнениям (37). В рассматриваемом случае значения

$a = b = 0$ обязательно удовлетворяют этим уравнениям; эти значения приводят к решению, построенному в п. 3. Однако уравнения (37) могут иметь и ненулевые решения, которые и породят субгармонические колебания; возможный вид таких колебаний показан на рис. 188, где принято $m = 3$.

Рассмотрим, например, еще один вариант уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha p x + \alpha k(x + A \cos 3\omega_0 t)^3.$$

Определяющие уравнения (37) после выполнения интегрирований, которое мы предоставляем желающим, принимают вид

$$\frac{4}{3} \frac{p}{k} a + a^3 + ab^2 + a^2 A + 2aA^2 - b^2 A = 0, \quad b \left(\frac{4}{3} \frac{p}{k} + b^2 + a^2 + 2A^2 - 2aA \right) = 0.$$

Отсюда, кроме тривиального решения $a = b = 0$, получаем решения

$$b = 0, \quad a^2 + aA + 2A^2 + \frac{4}{3} \frac{p}{k} = 0, \quad \text{т. е.} \quad a = -\frac{A}{2} \pm \left(-\frac{7}{4} A^2 - \frac{4}{3} \frac{p}{k} \right)^{1/2};$$

$$b = \pm \sqrt{3} a, \quad 4a^2 - 3Aa + A^2 + \frac{4}{3} \frac{p}{k} = 0, \quad \text{т. е.} \quad a = \frac{A}{4} \pm \left(-\frac{3}{16} A^2 - \frac{1}{3} \frac{p}{k} \right)^{1/2}.$$

Эти решения пригодны лишь при комбинациях значений параметров, для которых корни не будут мнимыми.

6. Еще о вынужденных колебаниях. Сделаем еще несколько замечаний.

1. При изучении вынужденных колебаний широко применяется также следующий *метод гармонического баланса*, который в принципе не требует наличия малого параметра. Пусть, например, левая часть уравнения

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0 \tag{43}$$

периодична по t с периодом T и нас интересует решение этого уравнения, имеющее тот же период. (Если периоды уравнения и искомого решения не совпадают, но соизмеримы, то общую меру можно принять за общий период.) Это решение можно разложить в ряд Фурье.

$$x(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t) \quad (\omega = 2\pi/T), \tag{44}$$

с неизвестными коэффициентами. Условие же того, что эта сумма удовлетворяет уравнению (43), можно написать в виде

$$\int_0^T f \left(a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t), \omega \sum_{j=1}^{\infty} j(-a_j \sin j\omega t + b_j \cos j\omega t), -\omega^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t), t \right) \cos j\omega t dt = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_0^T j(\dots) \sin j\omega t \, dt = 0 \quad (j = 1, 2, 3 \dots). \quad (45)$$

Таким образом, относительно коэффициентов разложения (44) получается система из бесконечного числа нелинейных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Для ее приближенного решения можно применить метод усечения, т. е. как суммирование (44), так и соотношения (45) применять только до некоторого j_0 ; это означает, что невязка уравнения (43) должна быть сбалансирована так, чтобы ее фурье-разложение не содержало компонент, по которым ищется разложение решения.

Таким образом, при $j_0 = 0$ получается уравнение

$$\int_0^T f(a_0, 0, 0, t) \, dt = 0$$

с одним неизвестным, при $j_0 = 1$ — система из трех уравнений с тремя неизвестными и т. д. Последовательно переходя от j_0 к $j_0 + 1$, можно для решения получающихся систем применять какой-либо итерационный метод, выбирая нулевое приближение с помощью решения, построенного на предыдущем шаге. Если о решении $x(t)$ известны дополнительные сведения, например, что оно является четной или нечетной функцией или что в его разложении преобладают какие-либо компоненты, то приближенное решение и условия баланса строятся с учетом этих сведений, что при том же объеме вычислений позволяет значительно повысить точность приближенного решения.

2. Если вычисления показали, что при заданных значениях параметров системы и возбуждения возможно несколько стационарных колебаний (т. е. периодических решений), то возникает вопрос, какое из них реализуется на самом деле. Естественно, что реализуются именно устойчивые решения; вопрос об устойчивости может быть решен на основе исследования линеаризованного уравнения (п. 3.4), которое представляет собой линейное уравнение с периодическими коэффициентами. В частности, для систем с одной степенью свободы, т. е. для скалярных уравнений второго порядка, после применения преобразований, указанных в п. 1.10, получаем уравнение Хилла (п. 1.3). Если имеется несколько устойчивых стационарных режимов колебаний, то каждый из них имеет свою область притяжения начальных данных; кроме того, при «встряске» возможен перескок с одного режима на другой. Общих аналитических методов получения этих областей нет, но можно «нащупывать» их с помощью численного интегрирования на компьютере при различном выборе начальных данных.

3. Рассмотрим еще случай *полигармонического* (т. е. квазипериодического, см. п. 1.7) *возбуждения* нелинейной системы на нескольких,

вообще говоря, несоизмеримых частотах; пусть для определенности идет речь об уравнении

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t, \quad (46)$$

причем для каждой из частот ω_1, ω_2 имеет место основной случай (п. 3). Аналогично предыдущему можно принять

$$x_0 = \frac{A_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{A_2}{\omega_0^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t,$$

после чего для $x_1(t)$ получится уравнение

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{A_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{A_2}{\omega_0^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t \right)^j.$$

Для решения этого уравнения нужно в правой части раскрыть скобки и преобразовать каждое из полученных слагаемых в сумму косинусов. Нетрудно видеть, что при этом получатся члены вида $A \cos(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)t$ с произвольными целыми m_1, m_2 любого знака. Поэтому в выражении для x_1 появятся члены вида

$$\frac{A}{\omega_0^2 - (m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2} \cos(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)t.$$

Однако для несоизмеримых ω_1, ω_2 , т. е. для иррационального ω_1/ω_2 , выражение $\omega_0 - (m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2) = \omega_2 \{(\omega_0/\omega_2) - [m_1(\omega_1/\omega_2) + m_2]\}$ при любом заданном ω может быть сделано за счет подбора m_1, m_2 как угодно малым. (Это сразу вытекает из утверждения о всюду плотности траекторий на торе, приведенного в петите п. 2.13.) Эта трудность *малых делителей*, замеченная Пуанкаре, существенно затрудняет доказательство сходимости метода малого параметра. Если в правой части (46) вместо бесконечного ряда стоит конечная сумма, то и каждое x_j получится в виде конечной суммы, однако та же трудность возникает при $j \rightarrow \infty$. В реальных вычислениях она преодолевается уменьшением, в случае необходимости, применяемых значений α .

7. Автоколебания. Рассмотрим автономную систему с одной степенью свободы, описываемую уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha f_1(x, \dot{x}) + \alpha^2 f_2(x, \dot{x}) + \dots \quad (47)$$

с малым параметром α . В п. 2.5 мы говорили, что такая система может иметь предельные циклы, т. е. автоколебания; покажем, как их найти.

Существенным отличием автоколебаний от вынужденных колебаний является, в частности, то, что частота ω автоколебаний заранее

не задается, но может быть найдена в процессе вычислений. Поэтому напомним разложение

$$\omega = \omega_0 + \omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \dots \quad (48)$$

с неизвестными (кроме ω_0) коэффициентами и совершим замену независимой переменной по формуле $\omega t = \vartheta$. Обозначая и производные по ϑ точками, перепишем (47) в виде

$$(\omega_0 + \omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \dots)^2 \ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha f_1(x, (\omega_0 + \omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \dots)\dot{x}) + \dots \quad (49)$$

Решение, как и раньше, будем искать разложенным по степеням α :

$$x = x_0(\vartheta) + x_1(\vartheta)\alpha + x_2(\vartheta)\alpha^2 + \dots \quad (50)$$

Тогда из (49) получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0; \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= -\frac{2\omega_1}{\omega_0} \ddot{x}_0(\vartheta) + \frac{1}{\omega_0^2} f_1(x_0(\vartheta), \omega_0 \dot{x}_0(\vartheta)); \dots \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Особенностью автономных колебаний является также возможность произвольного выбора начальной фазы, т. е. произвольного выбора точки на цикле, отвечающей моменту $t = 0$ (этого не было для вынужденных колебаний). В частности, можно положить $x(0) = 0$, откуда

$$x_0(0) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \dots \quad (52)$$

Теперь можно приступить к решениям уравнений (51). Из первого с помощью (52) получаем

$$x_0 = b \sin \vartheta, \quad (53)$$

где амплитуда b пока неизвестна. Подставляя (53) в правую часть второго уравнения (51) и пользуясь условием отсутствия резонанса, получаем равенства

$$\int_0^{2\pi} [2\omega_0\omega_1 b \sin \vartheta + f_1(b \sin \vartheta, \omega_0 b \cos \vartheta)] \cos \vartheta d\vartheta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} [\dots] \sin \vartheta d\vartheta = 0,$$

которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_1(b \sin \vartheta, \omega_0 b \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta &= 0, \\ \omega_1 &= -\frac{1}{2\pi b \omega_0} \int_0^{2\pi} f_1(b \sin \vartheta, \omega_0 b \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (54)$$

Первое равенство (54) является определяющим уравнением для нахождения амплитуды b ; найдя b , мы из второго равенства (54) непосредственно получаем ω_1 . Затем из второго уравнения (51) получаем $x_1 = \varphi_1(\vartheta) + b_1 \sin \vartheta$ ($\varphi_1(0) = 0$), из отсутствия резонанса для следующего уравнения находим b_1 и ω_2 и т.д. (Проведите аналогичное исследование с помощью замены в (47) $\omega_0 = \omega - \omega_1\alpha - \dots$, как в п. 4, и объясните получающееся различие.)

Чтобы выяснить устойчивость построенного цикла, надо записать (47) в виде системы первого порядка, после чего применить общее условие (2.22). Вычисления, которые мы предоставляем читателю, показывают, что если

$$\alpha \int_0^{2\pi} f'_x(b \sin \vartheta, \omega_0 b \cos \vartheta) d\vartheta < 0, \quad (55)$$

то построенный цикл устойчив, если же левая часть положительна — то неустойчив.

Рассмотрим в качестве примера *уравнение ван дер Поля*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha(\dot{x} - k\dot{x}^3) \quad (k = \text{const} > 0). \quad (56)$$

При $\alpha > 0$ и малых скоростях здесь получается как бы осциллятор с отрицательным коэффициентом трения (почему?), т.е. на фазовой плоскости в начале координат будет неустойчивый фокус. Для больших скоростей член $k\dot{x}^3$ будет преобладать над $\dot{x}$, т.е. решение будет быстро затухающим. Поэтому естественно ожидать появления устойчивого предельного цикла на «средних» скоростях. Определяющее уравнение в данном примере имеет вид (проверьте!)

$$\pi\omega_0 b - \frac{3}{4}\pi k\omega_0^3 b^3 = 0, \quad \text{откуда} \quad b = \frac{2}{\omega_0\sqrt{3k}};$$

из-за инвариантности уравнения (56) относительно замены $x \rightarrow -x$ решение $b = -2(\omega_0\sqrt{3k})^{-1}$ не дает ничего нового. Отсюда с помощью признака (55) сразу получается, что при $\alpha > 0$ построенный цикл устойчив; это, впрочем, ясно и из рассуждения, приведенного в начале абзаца. Из второго уравнения (54) получаем $\omega_1 = 0$, т.е. для выяснения характера изменения частоты разложение придется продолжить. (Равенство $\omega_1 = 0$ можно было предвидеть, заметив, что уравнение (56) переходит в себя при замене $\alpha \rightarrow -\alpha$, $t \rightarrow -t$ а потому ω должно быть четной функцией α — продумайте это!) Вычисления дают

$$x_1 = \frac{1}{12\omega_0^2\sqrt{3k}}(\cos 3\vartheta - \cos \vartheta) + b_1 \sin \vartheta,$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2(\ddot{x}_2 + x_2) &= -2\omega_0\omega_2\dot{x}_0 + \omega_0\dot{x}_1 - 3k\omega_0^3\dot{x}_0^2\dot{x}_1 = \\ &= \frac{4}{\sqrt{3k}}\omega_2 \sin \vartheta + \frac{1}{12\omega_0^2\sqrt{3k}}(-3\sin 3\vartheta + \sin \vartheta) + \\ &+ \omega_0 b_1 \cos \vartheta - 4\omega_0 \cos^2 \vartheta \left[\frac{1}{12\omega_0^2\sqrt{3k}}(-3\sin 3\vartheta + \sin \vartheta) + b_1 \cos \vartheta \right]. \end{aligned}$$

Применяя условия отсутствия резонанса, получаем (проверьте!) $b_1 = 0$, $\omega_2 = -1/16\omega_0$.

Проверьте, что применение к уравнению (56) метода п. 4 привело бы к нулевому решению.

В заключение отметим, что автоколебания реально чаще всего возникают, когда рассматриваемая автономная система поглощает энергию из внешнего постоянного источника, который и поддерживает колебания, тогда как наличие в системе диссипации не дает им разрастаться слишком сильно. Такие системы называются *активными*, в отличие от *пассивных*, у которых нет источников энергии, т. е., энергия которых может либо сохраняться, либо диссипировать. Широко известные примеры таких самоподдерживающихся колебаний — колебания скрипичной струны, возбуждаемой смычком, скрип дверных петель, ветровые колебания телеграфных проводов, слышные, если приложить ухо к телеграфному столбу; «шум моря» в раковине, флаттер крыльев самолета и т. д.

Аналогично исследуется задача о частоте малых колебаний сильно нелинейной консервативной системы, описываемой уравнением $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x)$ (где $f(0) = 0$); в этой задаче малым параметром служит амплитуда колебаний: например, можно положить $x(0) = \alpha$, $\dot{x}(0) = 0$. Здесь надо воспользоваться разложением (48) и заменой $\omega t = \vartheta$, но взамен (50) написать $x = x_1(\vartheta)\alpha + x_2(\vartheta)\alpha^2 + \dots$, где $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = \dots = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dots = 0$. Мы предоставляем читателю проследить за вычислениями.

8. Релаксационные колебания. Рассмотрим теперь поведение решений уравнения более специального, чем (47), вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha f(\dot{x}).$$

с большим параметром α , т. е. при $\alpha \rightarrow \infty$. Если ввести новые переменные по формулам $\dot{x} = y$, $x = \alpha\xi$, $t = \alpha\tau$, $\alpha^{-2} = \varepsilon$, получим систему уравнений (проверьте!)

$$\frac{d\xi}{d\tau} = y, \quad \varepsilon \frac{dy}{d\tau} = -\omega_0^2 \xi + f(y), \quad (57)$$

где ε малó.

Система (57) представляет собой частный случай систем вида

$$\frac{dx}{d\tau} = P(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{dy}{d\tau} = Q(x, y, \varepsilon) \quad (58)$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$. Если разделить второе уравнение на ε , то видно, что при малых ε поведение траекторий в той или иной области плоскости x, y в значительной мере определяется знаком функции $Q(x, y, 0)$ в этой области: например, если этот знак плюс, то при малых ε вертикальная составляющая скорости потока весьма велика, а горизонтальная конечна, т. е. поток направлен почти вертикально вверх.

Линия (L) с уравнением $Q_0(x, y) \equiv Q(x, y, 0) = 0$ разделяет плоскость x, y на части, в которых поток направлен почти вертикально вверх или почти вертикально вниз (рис. 189). Вблизи точек самой линии (L) скорость потока остается конечной, так что точки могут двигаться в непосредственной близости (L) вдоль (L) ; направление этого движения определяется знаком функции $P(x, y, 0)$ на (L) . Надо различать устойчивые (AB) и CD на рис. 189) и неустойчивые (BC) дуги (L) . (Возможны также полуустойчивые дуги, которые мы здесь не будем рассматривать.) К устойчивым дугам траектории «притискиваются», так что, попав на такую дугу, траектория вынуждена следовать вдоль нее, пока дуга не перейдет в неустойчивую (на рис. 189 вблизи точки B). В отличие от этого, траектории, следующие вдоль неустойчивой дуги (L) , очень легко сталкиваются с нее, так что на деле не реализуются.

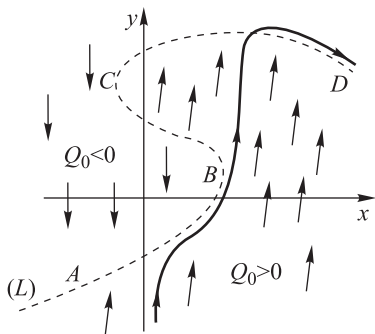


Рис. 189

Распределение знаков функции $P(x, y, 0)$ вдоль (L) может быть таким, что траектория будет периодически проходить одну и ту же трассу, приближаясь к предельному циклу, который при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет состоять из нескольких устойчивых дуг (L) , проходимых с конечной скоростью, и нескольких вертикальных отрезков, проходимых с бесконечно большой скоростью. (Конечно, имеется в виду скорость движения изображающей точки на фазовой плоскости, в расчете на единицу τ .) Поэтому при конечном, но малом ε колебание будет состоять из медленных и быстрых этапов — обычно это этапы медленного накопления энергии и быстрой ее разрядки. Такие колебания называются *релаксационными*.

Вернемся к системе (57) и допустим, что график (L) функции $\xi = \frac{1}{\omega_0^2} f(y)$ таков, как показано на рис. 190. Тогда в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ у системы будет цикл (C) , показанный на рис. 190 сплошной линией. Нетрудно подсчитать соответствующий период колебаний: так как $d\tau = \frac{d\xi}{y}$, то

$$T = \int_{ab} \frac{d\xi}{y} + \int_{cd} \frac{d\xi}{y} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(\int_{y_a}^{y_b} + \int_{y_c}^{y_d} \right) \frac{f'(y)}{y} dy.$$

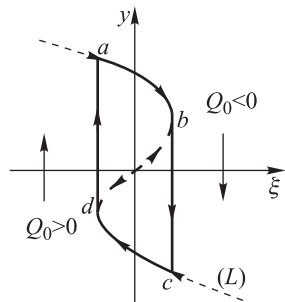


Рис. 190

(Этот же прием легко распространить на общую систему (58).) В частности, для уравнения (56) $f(y) = y - ky^3$, и потому $y_a = \frac{2}{\sqrt{3k}}$, $y_b = \frac{1}{\sqrt{3k}}$ (проверьте!), откуда период по τ равен

$$T = \frac{1}{\omega_0^2} 2 \int_{1/\sqrt{3k}}^{2/\sqrt{3k}} \frac{1 - 3ky^2}{y} dy = (3 - 2 \ln 2) \omega_0^{-2} = 1,6137 \omega_0^{-2}.$$

Если α велико, но конечно, то предельный цикл будет близок к изображенному на рис. 190, а полученное выражение после умножения на α (чтобы вернуться к «настоящему» времени t) даст главный член асимптотического выражения для периода колебаний.

Советский механик А. А. Дородницын (1910–1994) в 1947 г. получил дальнейшие члены этого выражения (см. [13]):

$$T = \frac{1}{\omega_0} \left[1,6137 \frac{\alpha}{\omega_0} + 7,014 \sqrt[3]{\frac{\omega_0}{\alpha}} - \frac{22}{9} \frac{\omega_0}{\alpha} \ln \frac{\alpha}{\omega_0} + 0,0087 \frac{\omega_0}{\alpha} + O\left(\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right)^{4/3}\right) \right].$$

Скачки рассматриваемого типа на фазовой плоскости проявляются уже при рассмотрении свободных колебаний линейного осциллятора с весьма малой инерционностью, описываемого уравнением

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0 \quad (59)$$

с постоянными коэффициентами и весьма малым m . В пределе при $m \rightarrow 0$ получаем уравнение первого порядка $f\dot{x} + kx = 0$, поэтому здесь говорят о системе с $1/2$ степенями свободы. На фазовой плоскости из (59) получаем систему уравнений

$$\dot{x} = y, \quad m\dot{y} = -fy - kx;$$

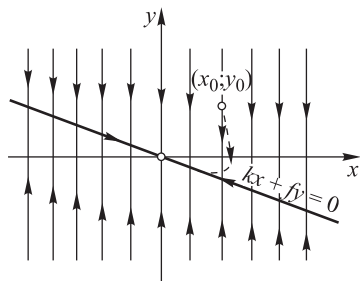


Рис. 191

соответствующий фазовый портрет при исчезающе малом m показан на рис. 191.

При любом начальном состоянии скорость осциллятора мгновенно перестраивается, т.е. точка на фазовой плоскости совершает мгновенный перескок на прямую $kx + fy = 0$ (это возможно в силу безынерционности), после чего осциллятор с конечной скоростью по экспоненциальному закону сползает в положение равновесия. Конечно, при просто (не исчезающе) малом m траектория на фазовой плоскости будет такой, как показано на рис. 191 пунктиром.

9. Пограничный слой. В связи с материалом предыдущего пункта остановимся более подробно на системах дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр $\alpha > 0$ и полностью или частично вырождающихся при $\alpha = 0$. Пусть рассматривается система вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, x, y; \alpha) \quad \alpha \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(t, x, y; \alpha), \quad (60)$$

где искомые векторы $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ имеют размерность n и m соответственно. При $\alpha = 0$ вторая группа уравнений (60) вырождается, переходя в систему конечных уравнений

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}; 0) = \mathbf{0}, \quad (61)$$

которая определяет в $(n + m + 1)$ -мерном пространстве t, x, y некоторую $(n + 1)$ -мерную поверхность (S) .

При малом α любая интегральная линия $x(t), y(t)$ системы (60) подобно п. 8 может иметь участки двух типов: расположенные на конечном расстоянии от (S) и проходящие в непосредственной близости (S) . Для участков 1-го типа можно с точностью до малых порядка α считать величины t, x постоянными, а величину y удовлетворяющей системе уравнений

$$\frac{dy}{d\tau} = \mathbf{g}(t, x, y; 0) \quad \left(\tau = \frac{\Delta t}{\alpha} - \text{быстрое время} \right). \quad (62)$$

Для участков 2-го типа приближенно выполняется система

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(t, x, y; 0), \quad (63)$$

где $y = \chi(t, x)$ определено из системы (61).

Пусть задано начальное условие

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0,$$

определяющее в E_{n+m+1} точку M_0 , которая, вообще говоря, не лежит на (S) . Тогда соответствующая интегральная линия начинается с участка 1-го типа, определенного автономной системой (62), написанной для $t = 0, x = x_0$. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда точка y_0 принадлежит области притяжения некоторой асимптотически устойчивой точки покоя, $\tilde{y}_0$ этой системы; поэтому мы будем считать, что $(0, x_0, \tilde{y}_0) \in (S)$ и все собственные значения матрицы $\partial \mathbf{g}(0, x_0, y; 0) / \partial \mathbf{y}|_{y=\tilde{y}_0}$ имеют отрицательные вещественные части. Из последнего вытекает, в частности, что $\det(\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y})|_{0, x_0, \tilde{y}_0} \neq 0$, и потому вблизи точки $\tilde{M}_0(0; x_0; \tilde{y}_0)$ уравнение поверхности (S) можно представить в виде $y = \chi(t, x)$, после чего перейти на (S) к уравнению (63).

Итак, при малом α рассматриваемая интегральная линия состоит из участка быстрого перехода от M_0 в непосредственную близость точки $\tilde{M}_0$ и дальнейшего участка следования вблизи (S) в соответствии с вырожденным уравнением (63). Интервал независимой переменной t , отвечающий первому участку, называется *пограничным слоем*, он нужен решению для перехода от произвольно заданных начальных значений $(0; x_0; y_0)$ к значениям $(0, x_0, \tilde{y}_0)$, согласованным с вырожденной системой (61). Ширина пограничного слоя условна, но при любом таком условии она оказывается, с точностью до малых

высшего порядка, обратно пропорциональной крутизне поля (60), т.е. прямо пропорциональной α .

Отметим еще, что интегральная линия, следующая вдоль (S) , может «сорваться» с (S) , только когда указанное выше условие асимптотической устойчивости окажется нарушенным.

Чтобы получить более точное асимптотическое представление рассматриваемого решения, заметим, что в силу описанного выше характера этого решения в его разложении должны присутствовать как функции от τ , главные в пограничном слое, так и функции от t , главные при $t \gg \alpha$. Поэтому напомним

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \varphi_0(t) + \alpha\varphi_1(t) + \dots + \Phi_0(\tau) + \alpha\Phi_1(\tau) + \dots, \\ \mathbf{x} &= \psi_0(t) + \alpha\psi_1(t) + \dots + \Psi_0(\tau) + \alpha\Psi_1(\tau) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Конечно, такое представление решения неоднозначно: например, положить $\varphi_0(t) \equiv t$, $\Phi_1(\tau) \equiv 0$ все равно, что $\varphi_0(t) \equiv 0$, $\Phi_1(\tau) \equiv \tau$; однако для дальнейшего это несущественно.

Подставим разложения (64) в (60) и преобразуем после этого правые части по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \varphi'_0(t) + \alpha\varphi'_1(t) + \dots + \frac{1}{\alpha} [\Phi'_0(\tau) + \alpha\Phi'_1(\tau) + \dots] = \\ = \mathbf{f}(t, \varphi_0(t) + \alpha\varphi_1(t) + \dots, \psi_0(t) + \alpha\psi_1(t) + \dots; \alpha) + \\ + [\mathbf{f}(\alpha\tau, \varphi_0(\alpha\tau) + \alpha\varphi_1(\alpha\tau) + \dots + \Phi_0(\tau) + \alpha\Phi_1(\tau) + \dots, \\ \psi_0(\alpha\tau) + \alpha\psi_1(\alpha\tau) + \dots + \Psi_0(\tau) + \alpha\Psi_1(\tau) + \dots; \alpha) - \\ - \mathbf{f}(\alpha\tau, \varphi_0(\alpha\tau) + \alpha\varphi_1(\alpha\tau) + \dots, \psi_0(\alpha\tau) + \alpha\psi_1(\alpha\tau) + \dots; \alpha)], \end{aligned}$$

и аналогично второе уравнение (60). Затем разложим правые части по степеням α и приравняем члены при одинаковых степенях α отдельно для функций от t и для функций от τ . Это даст прежде всего $\Phi'_0(\tau) \equiv 0$, откуда и $\Phi_0(\tau) \equiv 0$, так как постоянное слагаемое можно передать от Φ_0 к φ_0 . Далее получаем

$$\varphi'_0(t) = \mathbf{f}(t, \varphi_0(t), \psi_0(t); 0), \quad \mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \varphi_0(t), \psi_0(t); 0), \quad (65)$$

$$\Psi'_0(\tau) = \mathbf{g}(0, \varphi_0(0), \psi_0(0) + \Psi_0(\tau); 0) - \mathbf{g}(0, \varphi_0(0), \psi_0(0); 0); \quad (66)$$

кроме того, должны выполняться начальные условия

$$\varphi_0(0) + \Phi_0(0) = \mathbf{x}_0, \quad \psi_0(0) + \Psi_0(0) = \mathbf{y}_0. \quad (67)$$

Из (65) и (67) видим, что функции $x = \varphi_0(t)$, $y = \psi_0(t)$ удовлетворяют предельной (при $\alpha = 0$) системе (60) при начальных условиях $\varphi_0(0) = x_0$, $\psi_0(0) = \tilde{y}_0$. Поэтому начальную задачу для главного члена $\Psi_0(\tau)$ пограничного слоя можно в силу (66) переписать в виде

$$\Psi'_0(\tau) = \mathbf{g}(0, \varphi_0(0), \psi_0(0) + \Psi_0(\tau); 0), \quad \Psi_0(0) = \mathbf{y}_0 - \tilde{y}_0.$$

Таким образом, функция $\mathbf{y} = \tilde{y}_0 + \Psi_0(\tau)$ удовлетворяет системе (62) при $t = 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Кроме того, из предположения о собственных значениях матрицы $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}$ вытекает, что $\Psi_0(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{0}$ со скоростью экспоненты.

Приравнивание следующих членов разложения приводит к уравнениям

$$\varphi'_1(t) = \mathbf{f}'_{\mathbf{x}}(t, \varphi_0(t), \psi_0(t); 0)\varphi_1(t) + \mathbf{f}'_{\mathbf{y}}(\dots)\psi_1(t) + \mathbf{f}'_{\alpha}(\dots), \quad (68)$$

$$\psi'_0(t) = \mathbf{g}'_x(t, \varphi_0(t), \psi_0(t); 0)\varphi_1(t) + \mathbf{g}'_y(\dots)\psi_1(t) + \mathbf{g}'_\alpha(\dots), \quad (69)$$

$$\Phi'_1(\tau) = \mathbf{f}(0, \varphi_0(0), \psi_0(0) + \Psi_0(\tau); 0) - \mathbf{f}(0, \varphi_0(0), \psi_0(0); 0), \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \Psi'_1(\tau) = & \{ \mathbf{g}'_t(0, \varphi_0(0), \psi_0(0) + \Psi_0(\tau); 0)\tau + \mathbf{g}'_x(\dots)[\varphi'_0(0)\tau + \varphi_1(0) + \Phi_1(\tau)] + \\ & + \mathbf{g}'_y(\dots)[\psi'_0(0)\tau + \psi_1(0) + \Psi_1(\tau)] + \mathbf{g}'_\alpha(\dots) \} - \\ & \{ \mathbf{g}'_t(0, \varphi_0(0), \psi_0(0); 0)\tau + \mathbf{g}'_x(\dots)[\varphi'_0(0)\tau + \varphi_1(0)] + \\ & + \mathbf{g}'_y(\dots)[\psi'_0(0)\tau + \psi_1(0)] + \mathbf{g}'_\alpha(\dots) \} \end{aligned} \quad (71)$$

и начальным условиям

$$\varphi_1(0) + \Phi_1(0) = \mathbf{0}, \quad \psi_1(0) + \Psi_1(0) = \mathbf{0}. \quad (72)$$

Из уравнения (70) и условия $\Phi_1(\infty) = \mathbf{0}$ получаем

$$\Phi_1(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} [\mathbf{f}(0, \varphi_0(0), \psi_0(0); 0) - \mathbf{f}(0, \varphi_0(0), \psi_0(0) + \Psi_0(\tau_1); 0)] d\tau_1,$$

откуда, в частности, определяется $\Phi_1(0)$, а потому в силу (72) и $\varphi_1(0)$. Выражая из (69) неизвестную функцию $\psi_1(t)$ через $\varphi_1(t)$ и подставляя результат в (68), получим систему первого порядка относительно φ_1 , из которой, зная $\varphi_1(0)$, находим $\varphi_1(t)$ а потому и $\psi_1(t)$. Затем из (72) можно найти $\Psi_1(0)$, а из (71) — функцию $\Psi_1(\tau)$. При этом нетрудно показать (попробуйте!), что $\Phi_1(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{0}$ и $\Psi_1(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{0}$ со скоростью экспоненты.

Аналогично находятся дальнейшие члены разложения (64). Более подробное исследование показывает, что получающиеся ряды асимптотически (при $\alpha \rightarrow 0$) сходятся к рассматриваемому решению начальной задачи на любом интервале $0 \leq t \leq T$ на котором решение предельной (вырожденной) задачи проходит по той области поверхности (S), где выполняется указанное выше условие асимптотической устойчивости.

10. Непериодические колебания. Методы, описанные выше, пригодны в основном для построения и исследования периодических — вынужденных или свободных — колебаний. Для изучения переходных процессов в колебательных системах, почти-периодических и других непериодических колебаний более приспособлен метод, предложенный ван дер Полем в 1927 г. и значительно развитый А. А. Андроновым (1930), Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым (1937), Ю. А. Митропольским и другими авторами (см. [13, 81, 85]).

Метод, описанный в п. 3, был пригоден для построения не только периодических, но и переходных процессов. Поэтому мы рассмотрим особый случай уравнения (34) с T_0 -периодичными ($T_0 = 2\pi/\omega_0$) по t функциями f_j ; как было указано в п. 3, к этому уравнению приводится и исследование возбуждения системы с малой нелинейностью на частоте, близкой к резонансной.

Введем наряду с «обычным» временем t медленное время $\tau = \alpha t$. Основная идея метода состоит в построении решения в виде

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t, \tau) \alpha^k \quad (73)$$

(впрочем, этот ряд может при $\alpha \rightarrow 0$ сходиться лишь асимптотически, см. п. II.5.1). Конечно, *такое представление неоднозначно*, что видно уже из равенства $\tau + 0\alpha = 0 + t\alpha$. Это дает возможность наложить на коэффициенты a_k те или иные дополнительные требования. Мы будем здесь требовать, чтобы они при каждом фиксированном τ были T_0 -периодичны по t . В самом деле, при $\alpha = 0$ решения, очевидно, T_0 -периодичны. Поэтому естественно ожидать, что и при малом α решения будут напоминать T_0 -периодические функции с медленно меняющимися амплитудой и начальной фазой; а эти изменения можно будет учесть зависимостью решения от τ . Впрочем, правильность поставленных дополнительных требований на коэффициенты будет выявлена в процессе последующих вычислений, так как при неправильных требованиях удовлетворить уравнению не удастся.

Из формулы (73) получаем

$$\dot{x} = \sum_{k=0}^{\infty} [(a_k)'_t \alpha^k + (a_k)'_{\tau} \alpha^{k+1}],$$

$$\ddot{x} = \sum_{k=0}^{\infty} [(a_k)''_{tt} \alpha^k + 2(a_k)''_{t\tau} \alpha^{k+1} + (a_k)''_{\tau\tau} \alpha^{k+2}].$$

Подставим эти выражения в (34) и потребуем, чтобы полученное уравнение удовлетворялось тождественно по α при любых зафиксированных t, τ . (Конечно, это требование избыточное: например, для верного равенства $\tau + 0\alpha = 0 + t\alpha$ оно не выполняется; однако если нам удастся удовлетворить этому требованию, то и уравнение (34) удовлетворится, а победителей ведь не судят!) Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях α , получим

$$(a_0)''_{tt} + \omega_0^2 a_0 = 0,$$

$$(a_1)''_{tt} + \omega_0^2 a_1 = -2(a_0)''_{t\tau} + f_1(a_0, (a_0)'_t, t), \dots \quad (74)$$

Из первого равенства находим

$$a_0(t, \tau) = A_0(\tau) \cos \omega_0 t + B_0(\tau) \sin \omega_0 t. \quad (75)$$

Подставим это выражение в правую часть (74); тогда получится функция, которая при каждом фиксированном τ T_0 -периодична по t . Но так как и решение a_1 должно быть T_0 -периодичным по t , то должны

выполняться условия отсутствия резонанса, которые после простых преобразований приобретают вид (проверьте!)

$$A'_0(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{T_0} f_1(A_0(\tau) \cos \omega_0 t + B_0(\tau) \sin \omega_0 t, \\ - \omega_0 A_0(\tau) \sin \omega_0 t + \omega_0 B_0(\tau) \cos \omega_0 t, t) \sin \omega_0 t dt, \quad (76)$$

$$B'_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_0} f_1(A_0(\tau) \cos \omega_0 t + B_0(\tau) \sin \omega_0 t, \\ - \omega_0 A_0(\tau) \sin \omega_0 t + \omega_0 B_0(\tau) \cos \omega_0 t, t) \cos \omega_0 t dt.$$

Таким образом, получилась система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $A_0(\tau), B_0(\tau)$, из которой и можно найти эти функции. Удовлетворив условиям отсутствия резонанса, мы можем в силу (74) написать

$$a_1(t, \tau) = \varphi_1(t, \tau) + A_1(\tau) \cos \omega_0 t + B_1(\tau) \sin \omega_0 t,$$

где φ_1 — вполне определенная функция, T_0 -периодическая по t при любом фиксированном τ , а функции $A_1(\tau), B_1(\tau)$ пока неизвестны. Написав уравнение для a_2 , следующее за (74), и воспользовавшись условиями отсутствия резонанса, получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $A_1(\tau), B_1(\tau)$ и т. д. Этот процесс можно в принципе продолжить как угодно далеко.

Систему уравнений (76) можно получить также с помощью следующего рассуждения. Запишем уравнение (34) в виде системы

$$\dot{x} = \omega_0 y, \quad \dot{y} = -\omega_0 x + \frac{\alpha}{\omega_0} f_1(x, \omega_0 y, t) + \dots \quad (77)$$

Так как при $\alpha = 0$ соответствующий поток на фазовой плоскости x, y совпадает с ее равномерным вращением в отрицательном направлении с угловой скоростью ω_0 , то естественно и при малом $\alpha \neq 0$ решение системы (77) рассматривать в подвижной, равномерно вращающейся с угловой скоростью ω_0 системе координат. Это означает, что надо совершить замену искомых функций по формулам

$$x = \tilde{x} \cos \omega_0 t + \tilde{y} \sin \omega_0 t, \quad y = -\tilde{x} \sin \omega_0 t + \tilde{y} \cos \omega_0 t, \quad (78)$$

где $\tilde{x}, \tilde{y}$ не постоянны, как при $\alpha = 0$, а изменяются (естественно, что медленно при малом $|\alpha|$) с изменением t . Подстановка (78) в (77) дает (проверьте!)

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = - \left[\frac{\alpha}{\omega_0} f_1(\tilde{x} \cos \omega_0 t + \tilde{y} \sin \omega_0 t, -\omega_0 \tilde{x} \sin \omega_0 t + \right. \\ \left. + \omega_0 \tilde{y} \cos \omega_0 t, t) + \dots \right] \sin \omega_0 t \quad (79)$$

и аналогичное выражение для $\frac{d\tilde{y}}{dt}$. При малом $|\alpha|$ правая часть близка к периодической, так как $\tilde{x}, \tilde{y}$ почти постоянны, а общее направление изменения $\tilde{x}$ определяется постоянным слагаемым ее фурье-разложения (прочие компоненты дают малые T_0 -покачивания вокруг этого направления). Чтобы получить это главное слагаемое, надо произвести осреднение правой части, что после отбрасывания членов высшего порядка малости и приводит к уравнениям (76) (проверьте!). По этой причине описываемый метод называется также *методом осреднения (усреднения)*. В такой форме метод можно применять и к уравнениям, не содержащим малого параметра (в случае вынужденных колебаний под ω_0 в (78) надо понимать частоту внешнего воздействия), не забывая о необходимости контроля.

Мы предоставляем читателю проверить, что тот же результат получится, если в (34) подставить решение $x = \tilde{x} \cos \omega_0 t + \tilde{y} \sin \omega_0 t$, отбросив при этой подстановке члены с $\frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2}, \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2}$. после чего приравнять с обеих сторон фурье-компоненты с $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$.

Если нас интересуют только T_0 -периодические решения $x(t)$, то коэффициенты a_j не должны зависеть от τ , а потому коэффициенты A_j, B_j должны быть постоянными. Тогда уравнения (76) превращаются в определяющие уравнения (37), и мы возвращаемся к методу, описанному в п. 4. Однако можно рассматривать и непостоянные решения системы (76). Заметим, что (76) — автономная система и ее можно рассматривать на плоскости A_0, B_0 с помощью методов, описанных в пп. 2.3–6. Точкам покоя на этой плоскости отвечают периодические решения уравнения (34), причем соответствующие колебания происходят с частотой внешнего воздействия; тогда говорят о *синхронизации* или о *захвате частоты*. Циклам отвечают квазипериодические решения, получающиеся в результате наложения частоты ω_0 и частоты цикла (соответствующие колебания называются *комбинационными*, а так как первая частота существенно больше второй, то появляются биения). Траекториям, входящим в точку покоя, отвечают переходные процессы установления периодических колебаний и т. п.

Наиболее прост случай, когда функция f_1 не зависит от t . Тогда можно перейти на плоскости A_0, B_0 к полярным координатам по формулам $A_0 = \rho \cos \varphi$, $B_0 = \rho \sin \varphi$, что даст

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{\rho}(A_0 A'_0 + B_0 B'_0) = \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{T_0} f_1(\rho \cos(\omega_0 t - \varphi), -\omega_0 \rho \sin(\omega_0 t - \varphi)) \sin(\omega_0 t - \varphi) dt = \\ &= \frac{-1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f_1(\rho \cos \psi, -\omega_0 \rho \sin \psi) \sin \psi d\psi, \end{aligned}$$

т. е. получилось уравнение первого порядка с одной неизвестной функцией, которое решается методом разделения переменных. Найдя $\rho(\tau)$, можно получить

$\varphi(\tau)$ из равенства

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\rho^2} (A_0 B'_0 - B_0 A'_0) = \frac{1}{2\pi\omega_0\rho} \int_0^{2\pi} f_1(\rho \cos \psi, -\omega_0\rho \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

Можно было рассмотреть несколько более общее, чем (34), уравнение, допуская зависимость функций f_j также от τ ; тогда система (76) будет неавтономной, но в ряде примеров она оказывается более простой, чем исходное уравнение (34). Отметим кстати, что система уравнений для нахождения A_1, B_1 вообще говоря, содержит $A_0(\tau), B_0(\tau)$ и потому также не является автономной, если только не рассматривать систему для A_0, B_0, A_1, B_1 совместно в четырехмерном пространстве.

Если рассматривается устойчивое колебание, то систему (76) можно применить для приближенного нахождения с помощью численного интегрирования значений $A_0(\infty), B_0(\infty)$, которые определяют амплитуду и фазу колебания в нулевом приближении. Впрочем, можно с помощью численного интегрирования только подойти к этим значениям, после чего применить к системе определяющих уравнений метод типа Ньютона.

Рассмотрим в качестве примера вынужденные колебания в системе с самовозбуждением (56):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha(\dot{x} - k\dot{x}^3) + \alpha M \cos \omega t, \quad \text{где } \omega = \omega_0 + \omega_1 \alpha. \quad (80)$$

Как в п. 4, проводим замену $\omega_0 = \omega - \omega_1 \alpha$, что даст

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (2\omega\omega_1 x + \dot{x} - k\dot{x}^3 + M \cos \omega t)\alpha - \omega_1^2 x \alpha^2. \quad (81)$$

Согласно (73) пишем

$$x = a_0(t, \tau) + a_1(t, \tau)\alpha + \dots, \quad \tau = \alpha t.$$

Отсюда, как в общем случае,

$$a_0 = A_0(\tau) \cos \omega t + B_0(\tau) \sin \omega t. \quad (82)$$

Приравнявая в (81) коэффициенты при α , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2} + \omega^2 a_1 &= 2\omega_1 \omega a_0 - 2 \frac{\partial^2 a_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial a_0}{\partial t} - k \left(\frac{\partial a_0}{\partial t} \right)^3 + M \cos \omega_0 t = \\ &= 2\omega_1 \omega (A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t) + 2\omega (A'_0 \sin \omega t - B'_0 \cos \omega t) - \\ &- \omega (A_0 \sin \omega t - B_0 \cos \omega t) + k\omega^3 (A_0 \sin \omega t - B_0 \cos \omega t)^3 + M \cos \omega t. \end{aligned}$$

Из условия отсутствия резонанса получаем систему уравнений (проверьте!)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_0}{d\tau} &= \frac{1}{2} A_0 - \omega_1 B_0 - \frac{3}{8} k\omega^2 (A_0^3 + A_0 B_0^2), \\ \frac{dB_0}{d\tau} &= \frac{1}{2} B_0 + \omega_1 A_0 - \frac{3}{8} k\omega^2 (B_0^3 + B_0 A_0^2) + \frac{M}{2\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Это и есть автономная система, траектории которой определяют формы вынужденных колебаний в нулевом приближении в силу равенства (82), которое можно переписать в виде

$$a_0 = A_0(\alpha t) \cos \omega t + B_0(\alpha t) \sin \omega t.$$

Подробное исследование, результаты которого приведены в [108], показывает, что при малых ω_1 траектории системы (83) входят в точки покоя, т. е. решения уравнения (80) асимптотически (при $t \rightarrow \infty$) периодичны; если же ω_1 велико, то система (83) имеет устойчивый предельный цикл, т. е. появляются комбинационные колебания.

Как и в п. 5, если функции f_j имеют по t период T_0/m ($m = 2, 3, \dots$), то описанное, построение приводит к субгармоническим колебаниям порядка $1/m$; см. по этому поводу [24]. Метод усреднения можно применить и для систем с более чем одной степенью свободы. Например, обобщая уравнение (79), можно рассмотреть систему вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \alpha \mathbf{f}(x, t, \alpha), \quad (84)$$

правая часть которой периодична или даже почти-периодична (п. 1.7) по t . Обозначим осредненную по t функцию $\mathbf{f}$ при $\alpha = 0$ через

$$\bar{\mathbf{f}}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(x, t, 0) dt \quad (85)$$

и совершив замену переменных по формуле

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \alpha \left[\int_0^t \mathbf{f}(y, t_1, \alpha) dt_1 - t \bar{\mathbf{f}}(y) \right] \quad (86)$$

(обращаем внимание, что как в (85), так и в (86) x и y под знаком интеграла рассматриваются как параметры). Учитывая, что $\dot{y} = O(\alpha)$, получим после замены (проверьте!)

$$\dot{\mathbf{y}} = \alpha \left[\int_0^t \mathbf{f}(y, t_1, \alpha) dt_1 - t \bar{\mathbf{f}}(y) \right] + \alpha \mathbf{f}(y, t, \alpha) + O(\alpha^2) = \alpha \bar{\mathbf{f}}(y) + O(\alpha^2).$$

Отбрасывая члены высшего порядка малости, получаем осредненную систему (84)

$$\dot{\mathbf{y}} = \alpha \bar{\mathbf{f}}(y) \quad (87)$$

Система (87) автономная, и, конечно, проще, чем (84); некоторые вопросы для нее — такие, например, как тип и устойчивость точек покоя, — в ряде примеров могут быть разрешены. Можно показать, что каждой точке покоя системы (87) отвечает периодическое или соответственно почти-периодическое решение системы (84), расположенное от этой точки на расстоянии порядка α , причем если точка покоя устойчива, то и соответствующее решение системы (84) устойчиво. По поводу построения методом усреднения приближений высшего порядка см. [81].

Метод усреднения применяется также к более общим, чем (84), системам вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \alpha \mathbf{f}(x, \vartheta, t, \alpha), \quad \dot{\vartheta} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)^* + \alpha \varphi_1(x, \vartheta, t, \alpha), \quad (88)$$

где $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p)$ — набор *угловых переменных*, от которых все функции f_j и φ_j зависят периодически. Здесь осредненная система имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \alpha \lim \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(y, t\lambda, t, 0) dt,$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda} + \alpha \lim \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_1(y, t\lambda, t, 0) dt,$$

так что переменные y отделяются. Решения осредненной системы и здесь аппроксимируют решения полной системы с точностью до членов высшего порядка малости.

К системам (88) приводятся, в частности, *системы с быстро вращающейся фазой*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x, \vartheta, t), \quad \dot{\vartheta} = M(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)^* + \varphi(x, \vartheta, t), \quad (89)$$

где $M \rightarrow \infty$ — большой параметр. В самом деле, после введения *быстрого времени* $s = Mt$ и малого параметра $\alpha = M^{-1}$ (89) получаем систему (проверьте!)

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \alpha \mathbf{f}(x, \vartheta, \alpha s), \quad \frac{d\vartheta}{ds} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)^* + \alpha \varphi(x, \vartheta, \alpha s)$$

типа (88).

11. Асимптотические разложения по Н. М. Крылову–Н. Н. Боголюбову. В 1937 г. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов предложили новый, один из наиболее гибких методов асимптотического разложения решения по степеням малого параметра, входящего в уравнение. Покажем этот метод на примере автономного уравнения (47). Здесь решение ищется в виде

$$x = a \cos \psi + x_1(a, \psi)\alpha + x_2(a, \psi)\alpha^2 + \dots \quad (a = a(t, \alpha), \psi = \psi(t, \alpha)), \quad (90)$$

где все функции $x_j(a, \psi)$ 2π -периодичны по ψ ; при этом функции a, ψ должны удовлетворять уравнениям

$$\dot{a} = A_1(a)\alpha + A_2(a)\alpha^2 + \dots, \quad \dot{\psi} = \omega_0 + B_1(a)\alpha + B_2(a)\alpha^2 + \dots, \quad (91)$$

коэффициенты которых строятся в процессе построения решения. (Проверьте правильность выбранной формы для решения при $\alpha = 0$.) Для построения функций x_j, A_j, B_j требуется, чтобы после вычисления $\dot{x}(a, \psi)$ и $\dot{\psi}(a, \psi)$ из (90) и (91) по формальным правилам и подстановки полученных выражений в (47) это уравнение удовлетворялось при фиксированных a, ψ тождественно по α ; этого, конечно, достаточно, хоть и не необходимо, так как a и ψ сами зависят от α . Кроме того, для нормировки требуется, чтобы фурье-разложения функций x_j не содержали членов с $\cos \psi$ и $\sin \psi$: в самом деле, такие члены можно выделить и объединить с первым членом в правой части (90).

Покажем, как получить приближение первого порядка. Имеем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{a} \cos \psi - a \sin \psi \cdot \dot{\psi} + \left(\frac{\partial x_1}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial x_1}{\partial \psi} \dot{\psi} \right) \alpha + \dots = \\ &= A_1(a) \cos \psi \cdot \alpha - a \sin \psi \cdot \omega_0 - B_1(a) a \sin \psi \cdot \alpha + \frac{\partial x_1}{\partial \psi} \omega_0 \alpha + \dots,\end{aligned}$$

$$\ddot{x} = -2\omega_0 A_1(a) \sin \psi \cdot \alpha - a \cos \psi \cdot \omega_0^2 - 2B_1(a) a \omega_0 \cos \psi \cdot \alpha + \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} \omega_0^2 \alpha + \dots;$$

при вычислениях мы отбрасывали члены с α^2 . Подставляя в (47) и приравнявая члены с α , приходим к равенству

$$\begin{aligned}\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) &= \\ &= f_1(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) + 2\omega_0 A_1(a) \sin \psi + 2a\omega_0 B_1(a) \cos \psi.\end{aligned}\quad (92)$$

Из условия отсутствия резонанса получаем

$$\begin{aligned}A_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ B_1(a) &= -\frac{1}{2\pi a\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \cos \psi \, d\psi.\end{aligned}$$

Разложив при выполнении этих равенств правую часть (92) в ряд Фурье

$$g_0(a) + \sum_{j=2}^{\infty} [g_j(a) \cos j\psi + h_j(a) \sin j\psi],$$

мы получаем в силу указанного в предыдущем абзаце условия нормировки

$$x_1(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2 - 1} [g_j(a) \cos j\psi + h_j(a) \sin j\psi].$$

Таким образом, построенная функция

$$x = a \cos \psi + x_1(a, \psi) \alpha, \quad (93)$$

где a и ψ определяются из уравнений

$$\dot{a} = A_1(a) \alpha, \quad \dot{\psi} = \omega_0 + B_1(a) \alpha, \quad (94)$$

будет удовлетворять уравнению (47) с точностью до членов порядка α^2 . Отсюда можно вывести, что построенное приближенное решение отличается от точного при одинаковых начальных условиях (им можно удовлетворить за счет появления при интегрировании уравнений (94), которое выполняется весьма просто, произвольных постоянных) на величину порядка $\alpha^2 t$. Аналогично, хотя и более громоздко, строятся приближения более высоких порядков.

Если приближенное решение рассматривается, на временном интервале порядка $1/\alpha$, безгранично возрастающем при $\alpha \rightarrow 0$, то ошибка приближенного решения (93) будет иметь порядок α (почему?), т. е. в формуле (93) нет смысла удерживать второе слагаемое, и приближенное решение можно записать просто в виде $a \cos \psi$, где a и ψ определены из уравнений (94). При этом получится в точности тот же результат, что и в первом приближении по методу п. 10, если предварительно преобразовать время, как в п. 7 (проверьте!).

Если рассматривается система с медленно меняющимися параметрами, т. е. в уравнении (47) правая часть и коэффициент ω_0^2 зависят от медленного времени $\tau = \alpha t$ (п. 10), то все строящиеся функции x_j, A_j, B_j надо считать зависящими также и от τ . (Проследите, как изменятся формулы для приближения первого порядка, и покажите, что для уравнения $(m(\tau)\dot{x})' + k(\tau)x = f(x, \tau)\alpha$ в первом приближении $x = a \cos \psi$ будет $a = \text{const}[m(\tau)k(\tau)]^{-1/4}$, а для уравнения $(m(\tau)\dot{x})' + k(\tau)x = f(\dot{x}, \tau)\alpha$ будет $\psi = \int \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}} d\tau$; подумайте, почему получились такие простые формулы.)

Для уравнения вынужденных колебаний (34), в котором все функции f_j T -периодичны по t , причем T несоизмеримо с $T_0 = 2\pi/\omega_0$ (т. е. в нерезонансном случае), решение можно построить в виде

$$x = a \cos \psi + x_1(a, \psi, t)\alpha + x_2(a, \psi, t)\alpha^2 + \dots,$$

где все функции x_j 2π -периодичны по ψ , T -периодичны по t , а амплитуда и фаза удовлетворяют уравнениям (91). Построение функций x_j осуществляется совершенно аналогично тому, как в автономном случае, однако при этом надо пользоваться разложением в двойные ряды Фурье (ЛВМ, п. XVII.30), по ψ и t . Предоставляем читателю получить формулы для приближения 1-го порядка.

В резонансном случае, т. е. когда $T = \frac{p}{q} T_0$, где p, q — натуральные числа, решение оказывается более удобно строить в виде

$$x = a \cos(\omega_0 t + \vartheta) + x_1(a, \vartheta, t)\alpha + x_2(a, \vartheta, t)\alpha^2 + \dots,$$

где все x_j qT -периодичны по t , а величины a, ϑ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{a} = A_1(a, \vartheta)\alpha + A_2(a, \vartheta)\alpha^2 + \dots, \quad \dot{\vartheta} = B_1(a, \vartheta)\alpha + B_2(a, \vartheta)\alpha^2 + \dots,$$

правые части которых, подобно (91), строятся в процессе построения решения. По поводу деталей этого довольно громоздкого построения см. [13]. Отметим только, что ряды по степеням малого параметра α , получающиеся здесь, оказываются сходящимися, вообще говоря, лишь асимптотически (п. П.5.1). Однако это не имеет практического значения, так как реально пользуются лишь приближениями невысокого порядка — чаще всего первого. Практически существенно только знать, начиная с каких α можно пользоваться получающимися асимптотическими формулами; а это можно выяснить с помощью контрольного численного интегрирования модельных примеров.

В [13] содержится также применение описанного метода к исследованию одночастотных колебаний в системах с более чем одной степенью свободы. Здесь взамен (90) получается разложение

$$\mathbf{x} = (a \cos \psi)\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{x}_1(a, \psi)\alpha + \mathbf{x}_2(a, \psi)\alpha^2 + \dots,$$

где φ — соответствующий собственный вектор при $\alpha = 0$, а величины a, ψ удовлетворяют скалярным уравнениям (91). Правда, при этом получается представление лишь двухпараметрического семейства частных решений, но в ряде практически важных случаев решения этого семейства представляют наибольший интерес, так как они притягивают к себе все другие достаточно близкие решения.

12. Системы с дискретным временем. В теории нелинейных колебаний, как и в ряде других вопросов, оказывается полезным понятие *системы с дискретным временем*. Такая система задается двусторонней последовательностью гомеоморфизмов (т. е. взаимно однозначных взаимно непрерывных отображений)

$$x' = \psi_k(x) \quad (k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (95)$$

n -мерного пространства $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на себя. При этом номер k играет роль момента времени, а формула (95) определяет закон перескока, происходящего в этот момент, тогда как в промежутках времени между перескоками точка покоится.

Чтобы получить закон движения отдельной точки, надо задать ее положение $x = x_0$ непосредственно перед перескоком с некоторым номером k_0 . Тогда после этого перехода до следующего точка будет находиться в положении $\psi_{k_0}(x_0)$; непосредственно перед перескоком $k_0 + 2$ — в положении $\psi_{k_0+1}(\psi_{k_0}(x_0))$ и т. д. Можно идти и в обратном направлении: точка x_0 получается в результате перескока $k_0 - 1$ из точки $\psi_{k_0-1}^{-1}(x_0)$ (где верхний минус означает обратное отображение) и т. д. Таким образом, мы получаем закон движения — двустороннюю последовательность

$$x = x(k; k_0, x_0) \quad (k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (96)$$

определяемую свойствами

$$\psi_k(x(k; k_0, x_0)) = x(k+1; k_0, x_0), \quad x(k_0; k_0, x_0) = x_0. \quad (97)$$

Более прост случай, когда отображения (95) не зависят от k ; такие дискретные системы аналогичны автономным системам дифференциальных уравнений первого порядка. Тогда положение скачущей точки зависит только от начального положения и количества перескоков, т. е. взамен (96) и (97) надо написать

$$x = x(k - k_0; x_0), \quad \psi(x(k; x_0)) = x(k+1; x_0), \quad x(0; x_0) = x_0.$$

Подобно п. 2.1, получается нечто вроде дискретного потока в E_n , однако роль траекторий играют двусторонние последовательности точек. Как и в п. 2.1, можно различать три типа траекторий: незамкнутые (здесь — состоящие из бесконечного числа точек), замкнутые (состоящие из конечного числа точек, повторяющихся в циклическом порядке) и точки покоя, определяемые уравнением $\psi(x) = x$. (Для большей аналогии с дифференциальными уравнениями можно было бы задавать основное отображение формулой $x' = x + f(x)$; тогда точки покоя определялись бы из уравнения $f(x) = 0$.) Подобно п. 2.2, можно говорить о определенных множествах траекторий, причем и для дискретных траекторий выполняются все перечисленные там свойства, конечно, за исключением свойства 5.

При исследовании окрестности точки покоя, за которую мы примем начало координат, основную роль играет поведение траекторий линеаризованной системы

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (98)$$

где $\mathbf{A}$ — матрица n -го порядка. Для такой системы закон движения весьма прост:

$$\mathbf{x}(k; \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0.$$

Отсюда сразу видно, что для асимптотической устойчивости нулевого (а потому и любого) решения системы (98) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ были по модулю меньше единицы, а если хоть один из этих модулей больше единицы, то нулевое решение неустойчиво. Для более детального исследования можно ввести в E_n новую аффинную систему координат, связанную со старой равенством $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$; в новой системе координат уравнение отображения вместо (98) примет вид $\mathbf{y}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}$, и можно подобрать матрицу $\mathbf{T}$ так, чтобы новая матрица $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ отображения приняла по возможности более простой (например, жорданов, см. п. IV.3.4) вид. Мы предоставляем желающим провести полную классификацию изолированных точек покоя линейной автономной системы с дискретным временем на плоскости по образцу п. 2.3. Как и в п. 2.4, тип точки покоя при переходе от линеаризованной системы к полной сохраняется, за исключением точки типа центр, т. е. когда матрица $\mathbf{A}$ имеет собственные значения, по модулю равные единице. После соответствующего аффинного преобразования плоскости ее отображение (98) сводится в случае центра к повороту вокруг начала координат на некоторый угол πs (где $e^{\pm i\pi s}$ — собственные значения матрицы $\mathbf{A}$). Поэтому для рационального s все траектории, кроме самой точки покоя, представляют собой циклы (какого порядка?), а для иррационального s все эти траектории всюду плотно заполняют эллипсы.

Из других вопросов теории систем с дискретным временем остановимся еще на линейных неоднородных системах с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}_k. \quad (99)$$

Легко проверить, что если начальное условие задается при $k = 0$, то решение при $k > 0$ имеет вид

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \quad \text{и т. д.,}$$

вообще

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}^{k-2} \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_{k-1}.$$

(Напишите решение при $k < 0$.)

Пусть, в частности, последовательность $\mathbf{a}_k$ периодична с периодом m , т. е. $\mathbf{a}_{k+m} \equiv \mathbf{a}_k$. Тогда, для того чтобы начальная точка $\mathbf{x}_0$ определяла периодическое решение с тем же периодом, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0$, т. е. чтобы

$$(\mathbf{A}^m - \mathbf{I})\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{m-1}\mathbf{a}_0 - \mathbf{A}^{m-2}\mathbf{a}_1 - \dots - \mathbf{a}_{m-1}.$$

Для однозначной разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(\mathbf{A}^m - \mathbf{I}) \neq 0, \quad (100)$$

т. е. чтобы ни одно из значений $\sqrt[m]{1}$ не было собственным для матрицы $\mathbf{A}$. Если это условие выполнено, то для отыскания периодического решения удобно воспользоваться представлением

$$\mathbf{a}_k = \sum_{p=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{m} pk\right) \mathbf{c}_p \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (101)$$

аналогичным рядом Фурье и возможным для любой m -периодической последовательности $\mathbf{a}_k$; коэффициенты в этом представлении находятся по формуле

$$\mathbf{c}_p = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(-\frac{2\pi i}{m} pk\right) \mathbf{a}_k \quad (p = 0, 1, \dots, m-1). \quad (102)$$

(Проверьте это, непосредственно подставив (102) в (101). Как можно доказать единственность представления (101)?) Если искать m -периодическое решение $\mathbf{x}$ системы (99) также в виде (101) с неопределенными коэффициентами $\mathbf{d}_p$ вместо $\mathbf{c}_p$, то несложные вычисления, которые мы предоставляем читателю, приводят к формуле

$$\mathbf{x} = - \sum_{p=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{m} pk\right) \left[\mathbf{A} - \left(\exp \frac{2\pi i}{m} p \right) \mathbf{I} \right]^{-1} \mathbf{c}_p.$$

Таким образом, если выполнено условие (100), то для любой m -периодической последовательности $\mathbf{a}_k$ система (99) обладает m -периодическим решением; можно показать, что такое решение единственно. Если же для некоторого $p = p_0$ число $\exp\left(\frac{2\pi i}{m} p_0\right)$ будет собственным значением матрицы $\mathbf{A}$, то при $\mathbf{c}_{p_0} \neq \mathbf{0}$ в системе, вообще говоря, наступает резонанс, т. е. периодическое решение отсутствует.

Системы (95) и (99) аналогичны системам дифференциальных уравнений первого порядка. Нетрудно написать аналоги дифференциальных уравнений и систем высшего порядка. Так как систему (99) можно записать в виде $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{a}_k$, то аналогом скалярного уравнения второго порядка будет

$$x_{k+2} + ax_{k+1} + bx_k = a_k \quad (103)$$

и т. п., т. е. мы приходим к разностным уравнениям, упомянутым в п. III.2.3. От разностных уравнений и систем любого порядка всегда можно перейти к системе первого порядка: например, если для уравнения (103) обозначить $x_{k+1} = y_k$, мы получим систему из двух уравнений первого порядка

$$x_{k+1} = y_k, \quad y_{k+1} = -bx_k - ay_k + a_k. \quad (104)$$

Поэтому на уравнения (103) распространяются, в частности, приведенные выше утверждения о периодических решениях, что, впрочем, легко показать непосредственно, без перехода к системе (104); при этом взамен (100) надо потребовать, чтобы ни одно из значений $\sqrt[m]{1}$ не было корнем характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Кроме случая $b = -1 \mp a$, когда один из корней равен ± 1 , для вещественных коэффициентов возможно уравнение (103)

$$x_{k+2} - 2 \left(\cos \frac{2\pi p_0}{m} \right) x_{k+1} + x_k = a_k \quad (105)$$

с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \exp \left(\pm \frac{2\pi i}{m} p_0 \right)$; уравнение (105) является аналогом уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$.

Такая далекая аналогия между системами с дискретным и с непрерывным временем позволяет, в частности, распространить на первые большинство методов, описанных в этой главе. Мы предоставляем продумать это желающим.

Скажем еще о возможном применении систем с дискретным временем к исследованию (вообще говоря, нелинейных) периодических систем с непрерывным временем, например вида

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (106)$$

с T_0 -периодической по t правой частью. Произвольно выбрав и зафиксировав некоторое значение $t = t_0$, поставим в соответствие каждой точке $x_0 \in E_n$ значение $\psi(x_0)$ при $t = t_0 + T_0$ решения $x(t; t_0, x_0)$ системы (106), удовлетворяющего начальному условию $x|_{t=t_0} = x_0$. В силу периодичности системы (106) переходы от $t_0 + T_0$ к $t_0 + 2T_0$, от $t_0 + 2T_0$ к $t_0 + 3T_0$ и т. д. определяют то же отображение ψ , которое иногда называется *оператором сдвига по траекториям системы (106) за период*. (Правда, оно зависит от выбора t_0 , но легко проверить, что эта зависимость не влияет на дальнейшее.) Таким образом, обозначая $x(t_0 + kT_0; t_0, x_0) = x_k$, мы приходим к автономной системе с дискретным временем $x_{k+1} = \psi(x_k)$, к которой, в отличие от (106), можно применять обычные методы анализа автономных систем, в частности, с помощью привлечения фазового пространства. Такой метод исследования T_0 -периодической системы (106) называется *стробоскопическим*, так как получается такая картина, как будто совокупность решений системы (106) освещается мгновенными вспышками в моменты времени $t_0 + kT_0$. При этом точке покоя полученной дискретной системы отвечает T_0 -периодическое решение системы (106), циклам дискретной системы отвечают субгармоники системы (106) и т. д. Правда, применение метода осложнено тем, что явный переход от (106) к соответствующей дискретной системе затруднителен, но применение разложения по малому параметру, численного интегрирования и иногда припасовывания дают возможность расширить область применения этого прозрачного в теоретическом отношении метода.

Литература

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем, «Наука», 1965.
2. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.
3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. 2-е, «Наука», 1967.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний, М., «Наука», 1981.
5. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению, Гостехиздат, 1955.
6. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций, изд. 2-е, «Наука», 1970.
7. Бабаков И. М. Теория колебаний, изд. 2-е, «Наука», 1968.
8. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости, «Наука», 1967.
9. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.
10. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. I, изд. 3-е, «Наука», 1966.
11. Блекуэлл Д., Гиршик М. Теория игр и статистических решений, ИЛ, 1958.
12. Блисс Г. Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, 1950.
13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 4-е, М., «Наука», 1974.
14. Бор Г. Почти-периодические функции, Гостехиздат, 1934.
15. Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления, изд. 3-е, «Высшая школа», 1966.
16. де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе, ИЛ, 1961.
17. Булгаков Б. В. Колебания, Гостехиздат, 1954.
18. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «Мир», 1968.
19. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, 1956.
20. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений, «Наука», 1969.
21. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, Гостехиздат, 1950.
22. Вентцель Е. С. Элементы теории игр, изд. 2-е, Физматгиз, 1961.
23. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, Физматлит, 2004.
24. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950.
25. ден Гартог Дж. Механические колебания, Физматгиз, 1960.
26. Гасс С. Линейное программирование, Физматгиз, 1961.
27. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, изд. 2-е, Физматгиз, 1963.

28. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре, изд. 3-е, «Наука», 1966.
29. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.
30. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958.
31. Горелик Г. С. Колебания и волны, Физматгиз, 1959.
32. Давенпорт В., Рут В. Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, 1960.
33. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики, изд. 3-е, «Наука», 1966.
34. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, «Наука», 1965.
35. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, 1951.
36. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление, Физматгиз, 1961.
37. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению, «Высшая школа», 1965.
38. Ерутин Н. П. Системы линейных дифференциальных уравнений, Минск, 1963.
39. Жермен П. Курс механики сплошных сред, «Высшая школа», 1983.
40. Забрейко П. П. и др. Интегральные уравнения, справочник, «Наука», 1968.
41. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики, изд. 2-е, «Наука», 1967.
42. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование, изд. 2-е, «Наука», 1967.
43. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем, Энергоиздат, 1962.
44. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, Физматгиз, 1962.
45. Карачаров К. А., Пилютик А. Г. Введение в техническую теорию устойчивости движения, Физматгиз, 1962.
46. Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования, изд. 3-е, «Наука», 1967.
47. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948.
48. Каудерер Г. Нелинейная механика, ИЛ, 1961.
49. Коддингтон Е., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.
50. Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, Гостехиздат, 1953.
51. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений, ИЛ, 1963.
52. Копсон Э. Асимптотические разложения, «Мир», 1966.
53. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, изд. 9-е, Изд. АН СССР, 1965.

54. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие, изд. 3-е, испр., дополн., Едиториал УРСС, 2003.
55. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, «Наука», 1966.
56. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962.
57. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Физматгиз, 1962.
58. *Красносельский М. А. и др.* Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», 1969,
59. *Красносельский М. А. и др.* Векторные поля на плоскости, Физматгиз, 1963.
60. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
61. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов, изд. 2-е, «Наука», 1967.
62. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры, М., «Наука», 1975.
63. *Кюнц Г., Крелле В.* Нелинейное программирование, «Советское радио», 1965.
64. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления, Гостехиздат, 1950.
65. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Основы вариационного исчисления, т. I, ч. II, ОНТИ, 1935.
66. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3-е, «Наука», 1965.
67. *Ланс Дж.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, ИЛ, 1962.
68. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, «Мир», 1964.
69. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции, Гостехиздат, 1953.
70. *Летов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем, изд. 2-е, Физматгиз, 1-962.
71. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1961.
72. *Лефшец С.* Устойчивость нелинейных систем автоматического управления, «Мир», 1967.
73. *Ловитт У.* Линейные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1957.
74. *Луңц Г. Л., Эльсгольц Л. Э.* Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления, Физматгиз, 1958.
75. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Гостехиздат, 1950.
76. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
77. *Льюс Р., Райфа Х.* Игры и решения, ИЛ, 1961.

78. Мак-Кинси Д. Введение в теорию игр, Физматгиз, 1960.
79. Мак-Коннел А. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике, Физматгиз, 1963.
80. Мак-Лахлан Н. Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.
81. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
82. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения, изд. 2-е, «Наука», 1966.
83. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций, изд. 3-е, «Наука», 1966.
84. Мелентьев П. В. Приближенные вычисления, Физматгиз, 1962.
85. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд-во АН УССР, 1955.
86. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике, изд. 2-е, «Наука», 1970.
87. Михлин С. Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, изд. 2-е, Гостехиздат, 1949.
88. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.
89. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.
90. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1962.
91. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов, «Наука», 1966.
92. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. I, ИЛ, 1958.
93. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, изд. 3-е, «Наука», 1968.
94. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний, изд. 2-е, Машгиз, 1967.
95. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем, «Наука», 1967.
96. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений, изд. 3-е, «Наука», 1965.
97. Плисс В. А. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, изд-во ЛГУ, 1958.
98. Прагер В. Введение в механику сплошных сред, ИЛ, 1963.
99. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ, изд. 4-е, «Наука», 2003.
100. Рейнфельд Н., Фогель У. Математическое программирование ИЛ, 1960.
101. Ромакин М. И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования, «Высшая школа», 1963.
102. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной, Физматлит, 2004.
103. Седов Л. И. Механика сплошной среды, Т. 1, 2, изд. 6-е, М., МГУ, 2004.

104. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. III, ч. 2, изд. 8-е «Наука», 1969.
105. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.
106. *Смирнов В. И., Крылов В. И., Канторович Л. В.* Вариационное исчисление, КУБУЧ, 1933.
107. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного, тт. 1, 2, ИЛ, 1962.
108. *Стокер Д.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах, изд. 2-е, ИЛ, 1953.
109. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний, Лань, 2005.
110. *Схоутен Я.* Тензорный анализ для физиков, «Наука», 1965.
111. *Теодорчик К. Ф.* Автоколебательные системы, Гостехиздат, 1952.
112. *Тимошенко С. П.* Теория колебаний в инженерном деле, Физматгиз, 1959.
113. *Трантер К.* Интегральные преобразования в математической физике, Гостехиздат, 1956.
114. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
115. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры, изд. 2-е, Физматгиз, 1963.
116. *Фильчаков П. Ф.* Приближенные методы конформных отображений, «Наукова думка», Киев, 1964.
117. *Форсайт Дж., Молер К.* Численное решение систем линейных уравнений, «Мир», 1969.
118. *Фрезер Р., Дункан В., Коллар А.* Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, 1950.
119. *Фреман Н., Фреман П.* ВКБ-приближение, «Мир», 1967.
120. *Фукс Б. А., Левин В. И.* Функции комплексного переменного и их приложения, Гостехиздат, 1951.
121. *Фукс Б. А., Шабат Б. В.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, изд. 3-е, «Наука», 1964.
122. *Халмош П.* Лекции по эргодической теории, Ижевск, РХД, 1999.
123. *Харкевич А. А.* Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике, Гостехиздат, 1956.
124. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах, «Мир», 1968.
125. *Хединг Д.* Введение в метод фазовых интегралов (Метод ВКБ), «Мир», 1965.
126. *Хедли Д.* Нелинейное и динамическое программирование, «Мир», 1967.
127. *Хейл Д.* Колебания в нелинейных системах, «Мир», 1966.
128. *Хинчин А. Я.* Математические основания статистической механики, Гостехиздат, 1943.
129. *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения, Физматгиз, 1966.
130. *Цыпкин Я. З.* Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, 1963.
131. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций, Гостехиздат, 1948.

132. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «Мир», 1964.
133. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения, изд. 3-е, «Наука», 1965.
134. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Конечномерные линейные пространства, М., «Наука», 1969.
135. *Штокало И. З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, Изд-во АН УССР, 1960.
136. *Эйзенхарт Л.* Риманова геометрия, ИЛ, 1948.
137. *Эльсгольц Л. Э.* Вариационное исчисление, изд. 6-е, УРСС, 2006.
138. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, изд. 2-е, «Наука», 1969.
139. *Эрдеи А.* Асимптотические разложения, Физматгиз, 1962.
140. *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование, Физматгиз, 1963.

Предметный указатель

Абсолютная устойчивость 624
 Автоколебания 577–578, 651–654
 Автономная система 370, 567–599
 Аксиомы метрики 363
 Активная система 654
 Альтернатива Фредгольма 431
 Альтернирование тензора 257
 Альфа-предельное множество 568
 Амплитуда эллиптического интеграла 129
 Амплитудно-частотная характеристика 631, 632
 Аналитическая линия 91
 — функция 40–41
 — — вещественного переменного 90–91
 — — нескольких переменных 90
 Аналитическое отображение 43
 — продолжение 87
 Антиконформное отображение 44
 Антисимметричное ядро 464
 Антиэрмитов оператор 472
 Антиэрмитово ядро 464
 Аперiodическое затухание 630
 Асимптотическая устойчивость 627
 — в целом 603
 — фаза 586
 Асимптотическое разложение 131, 551–554, 561–564, 665–667
 Аффинный тензор 260–263
 Ацикличность 29–30

Базис 185
 Базисные функции 392
 Балка 378
 Банахово пространство 287
 Барцентрические координаты 235
 Безвихревое поле 26
 Безопасность границы области устойчивости 613–614
 Берег 54
 Бесконечно малое производящее отображение 358
 — удаленная точка 46, 110–111
 Бесконечное произведение 124
 Бигармонический оператор 379

Биения 632
 Билинейный функционал 325
 Биортогональность 191
 Бифуркация 515, 524–530
 Блочная матрица 249
 Блочное программирование 247
 Большой круг 335
 Быстрое время 657, 665

В («отображение в») 186
 Валентность тензора 254
 Вариационное исчисление 283
 Вариационный принцип 366–367, 391–392
 Вариация функции 289
 — функционала 289–291, 324
 Вековые члены 633
 Вектор интенсивности поля 382
 Векторная линия поля 13
 Векторно-дифференциальный оператор 19
 Векторный потенциал 28
 Верхняя полуплоскость 50
 — треугольная матрица 215
 Ветвление решений 515, 524–530
 Ветвь многозначной функции 52
 Вещественная аналитическая функция 91, 116
 Вещественное линейное пространство 185
 Вещественный нормальный вид матрицы 209
 Взаимный базис 261
 Вихревая линия 22, 65
 — ось 64
 — точка 64
 Внешняя краевая задача 67
 Внутренний экстремум 294
 Внутренняя геометрия 277
 — краевая задача 66
 Возвратное уравнение 545
 Возмущение ядра 447–448
 Возмущенные решения 600
 Восстанавливающая характеристика 637
 Вполне непрерывный оператор 455

- Вращение векторного поля 579–582
Времениподобность 265
Временная устойчивость 622–623
Всестороннее сжатие 383
Всюду плотность 599
Второй метод Ляпунова 606
Выпуклая оболочка 234
— функция 249
Выпуклое множество 232–234
— программирование 249
Выпуклый конус 234
— многогранник 234
Вырожденная квадратичная форма 196
Вырожденное ядро 424–430, 459
Высвобождающая связь 320–321
Вычет 94, 97–99, 111
Вычисление несобственных интегралов 99–107
- Гамильтонова система** 544–546
Гамма-функция 88, 105
Гармоническая функция 31, 42
Геодезическая линия 334–337
Геометрия Лобачевского 364–366
Гиперболический поворот 265
Гиперплоскость 233
Гирскопические силы 622
Гистерезис 603
Главная ветвь логарифма 59
— ось инерции 259
— — поверхности второго порядка 196
— часть ряда Лорана 78
Главный минор 198
Голономная связь 306
Гомеоморфизм 46–47
Градиент 13, 272
Граничный экстремум 294
Группа Ли 357
Групповое свойство 358
Гурвицев полином 118
- Двойной слой** 65
Двойственная задача 307
Двоякопериодическая функция 130
Двустороннее преобразование Лапласа 491
Действие 368
Декремент 630
- Дельта амплитуды 130
Дефинитная форма 196
Диаграмма Ньютона 92
Диада 256
Дивергенция 15, 272
Динамическая система 596
Динамическое программирование 247
Диполь 32
Дискретное преобразование Лапласа 174
Дискриминант 121
Диссипативная система 384–385
Диссипативные силы 622
Дифференциальная связь 309
Дифференциально-разностное уравнение 169
Дробно-линейное отображение 49
D-разбнение 118
- Евклидов базис** 186
— тензор 254, 267–269
Евклидово пространство 186
Единичная окружность 50
— сфера 193
Единичный круг 50
— тензор 258
Естественная вариационная задача 313
Естественные граничные условия 314, 315, 319
- Жесткая восстанавливающая сила** 637
Жорданова клетка 202, 206–207, 210
— форма матрицы 207
- Задача Больца** 312
— Дидо 281
— Лагранжа 310
— Майера 311
— о смесях 231
— Римана – Гильберта 504
— Чаплыгина 307
Задачи на минимакс 390
Закон инерции квадратичной формы 197
— сохранения импульса 370
Замкнутость множества 444
Замыкание контура 100–106
Запас устойчивости 389
Затухающие колебания 630

- Захват частоты 662
Звездобразный узел 573
Зеркальное отражение относительно окружности 48
Зона нечувствительности 590
z-преобразование 176
- Идеальная жидкость** 62
Изображение 147
Изолированная особая точка 94
— точка покоя 571
Изолированный цикл 577
Изометричные поверхности 277
Изопериметрическая задача 306
Изохронность 630
Импульс 372
Импульсное воздействие 548
Инвариантная мера 595
Инвариантное подпространство 187
Инверсия 48–49
Инволюция 47
Индекс интегрального уравнения 505
— особой точки 581
Индефинитность 263
Интеграл Дирихле 404
— типа потенциала 450
Интегральная связь 305
— формула Коши 99
Интегральное многообразие 641
— неравенство 554–555
— уравнение 168, 419–422
Интегральный инвариант 594
Интегрально-дифференциальное уравнение 169
Искусственный базис 241
Истечение 68
Итерированное ядро 442, 460–461
- Каноническая система уравнений** 351
Канонические переменные 350–351
Каноническое преобразование 353
Катеноид 300
Качественные методы 606
Квадратично суммируемая функция 339
Квадратичное программирование 250
Квадратичный функционал 325, 328–331
Квазидиагональная матрица 188
Квазипериодическая функция 551
- Квазиполином** 118
Квазистатистический процесс 603
Ковариантная производная 272, 274
Ковариантность 260–261
Комбинационные колебания 662
Компактность 344–345
Комплексное линейное пространство 185
Комплексный потенциал 62
Компонента связности 63
— тензора 252
Конечная связь 306
Конечномерный оператор 455
Консервативность 372
Контакт 578
Контактное преобразование 356
Контравариантность 260–261
Конус 456
Конфликтная ситуация 242
Конформное отображение 44–45, 391–392
Координатные функции 392
Корневой вектор 204
Косинус амплитуды 130
Кососимметрический тензор 257
Коэффициент затухания 630
Коэффициенты Ламе 24, 271
— Пуассона 383
— связности 270
— температуропроводности 170
— усиления 631
Краевая задача 66, 399–400
Краевое условие 66
Кратное преобразование Фурье 181
Кратность нуля 82
— полюса 95
— точки границы 70
Кривизна 279
Критерий Гурвица 118
— качества 230
— Михайлова 120
Круговое свойство 48
- Лапласиан** 23
Лаплас-образ 147
Левое итерированное ядро 465
Лемма Жордана 103
Либрационное движение 638–639
Лимитационное движение 630
Линеаризация функционала 289, 291

- Линейное отображение 45, 185
— программирование 229
— пространство 184
Линейные действия 185, 256
— колебания 630
Линейный функционал 292–293
— элемент 353
Линия тока 13
Лист 60
Логарифм матрицы 211
Логарифмическая точка разветвления 53
Логарифмический вычет 112–113
— потенциал 34
Люфт 591
- М**
Малые делители 651
Математический маятник 638
Матрица монодромии 536
— напряжения-энергии 381
— отображения 186
— связи 623
Матрицант 534
Матричная игра 242
Медленно меняющиеся функции 544
Медленное время 659
Мембрана 376
Мера обусловленности 217
Мероморфная функция 122–124
Метод А. Н. Крылова 226
— Бубнова—Галеркина 400
— ван дер Поля 659–665
— Винера—Хопфа 492–494
— ВКБ 564
— Галеркина 400
— Галеркина—Петрова 400
— гармонического баланса 649
— Гаусса 214–215, 438–440
— градиентного спуска 410–412
— замораживания 611
— искусственного введения параметра 114, 229
— Канторовича 414–416
— Келлога 461
— контурного интегрирования 565
— Крылова—Боголюбова 441
— малого параметра 72, 226, 447–448, 518–519
— моментов 400
— Назарова—Некрасова 530
— наибыстрейшего спуска 144
— наименьших квадратов 413–414
— непрерывного продолжения по параметру 114, 228–229
— Ньютона—Котеса 437
— осреднения 662
— перевала 143–144
— последовательного улучшения решения 238–241
— приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям 416
— прогонки 417–418
— Ритца 392–400, 410–413
— Рэля 195
— счетного множества переменных 400
— Трефца 406–410
— улучшения невязки 218
— усечения 434
— усреднения 662
— фазовых интегралов 564
— Чебышева 437
— шагов 168
— Эйлера 416–418
— Якоби 197, 219
Метрика 363
Метрический тензор 262, 277
Метрическое пространство 363, 442
Минимизирующая последовательность 344
Многогранное тело 235
Многозначная функция 52
Многолистное отображение 43
Многоэтапное программирование 250
Модуль всестороннего сжатия 383
— эллиптического интеграла 129
Момент диполя 32
— инерции 258
— функции 483
Мультипликатор 536
Мягкая восстанавливающая сила 637
- Н**
На («отображение на») 186
Набла 19
Нагруженное интегральное уравнение 422
Натягивание конуса 232–234
— пространства 25
Невозмущенное решение 600
Неголономная связь 309

- Некорректная задача 477
Нелинейное программирование 249
Нелинейные колебания 635
Немой индекс 252
Необходимые условия Лежандра 327–328
Неосциллирующее решение 559
Неотрицательно определенное ядро 468
Неподвижная точка 225, 445
Непрерывная группа преобразований 357–358
— дробь 436–437
Непрерывное отображение 46
Непрямое регулирование 624
Неравенство Бесселя 472
Несобственная точка 46
Нестрогий максимум 194
Неустойчивое по Ляпунову решение 600
Неустойчивый цикл 577
Неявная аналитическая функция 90
Нижняя треугольная матрица 215
Норма 285
— вектора 186
— линейного оператора 424
— матрицы 216
— отображения 216
— функционала 285, 325
Нормальная форма матрицы 207
Нормальное колебание 618
Нормальные координаты 617
Нормальный эллиптический интеграл Лежандра 129
Нормированное пространство 285
Нормировка 340
Ноль многочлена 117
— функции 82, 114
Ньютонов потенциал 33–34
- Область** определения функционала 285
— притяжения 577, 589
Обобщенное решение 324
Обобщенные импульсы 372
— координаты 371
Обратная краевая задача 68
— связь 623
Обратный маятник 542
Обтекание 67
- Объединение 402
Ограниченный линейный оператор 424
— функционал 292, 325
Однолистное отображение 43
Окаймление 627
Омега-предельное множество 568–569
Опасность границы области устойчивости 613–615
Оператор Гамильтона 19
— Лапласа 23
— Лапласа–Бельтрами 274
— типа Вольтерра 452
Операторное уравнение 424, 455–456, 469–472
Операционный метод 163
Опорный план 241
Определитель Вандермонда 440
— Вронского 533
— Грама 411
— Фредгольма 427, 430–431
Определяющие уравнения 644
Оптимальная стратегия 241
Оптимальное регулирование 367
— решение 232
Оптимальное управление 367
Оптимальный план 241
Опускание индекса 263
Орбитальная устойчивость 639
Оригинал 147
Ортогональное дополнение 190
— разложение 190
Ортогональность 186
Основная теорема алгебры 114
Особая точка 41, 580
Особенность 41
Особый элемент функционала 321
Осцилляционная матрица 226
Осцилляция 559
Ось диполя 32
Относительная устойчивость 601
Отражение экстремали 322
Отталкивающий цикл 586
- Параметрические колебания** 635
Параметрический резонанс 543
Параметрическое программирование 247
Парные уравнения 495
Парциальная система 623

- частота 623
- Пассивная система 654
- Первая основная квадратичная форма 275
- Первый метод Ляпунова 606
- Передаточная матрица 168
 - функция 166
- Переменная действия 640
- Перемешивание 597
- Пересечение множеств 234, 402
- Перескок 603
- Перестановочные отображения 213–214
- Период потенциала 28
- Петля гистерезиса 603
- План 241
- Пластика 378–379
- Платежная матрица 242
- Плоское поле 61–65
- Плотность импульса поля 382
 - интегрального инварианта 594
 - канонического импульса 380
- Плохо обусловленная система 217
- Поверхность Римана 60–61
- Пограничный слой 657
- Поднятие индекса 263
- Подпространство 442
- Показательное отображение 58–59
- Поле 11
 - базисов 269
 - евклидова тензора 267–268
 - векторное 11
 - плоское 12
 - плоско-параллельное 12
 - скалярное 12
- Полевая переменная 380
- Полигармоническое возбуждение 650
- Полилинейный функционал 325
- Полином Гегенбауера 480
 - Лагерра 480
 - Эрмита 480
- Полиномиальная матрица 205
- Полная аналитическая функция 87
 - диссипация 622
 - неустойчивость 619
- Полнота пространства 287, 442
 - системы функций 394
- Полный лагранжев интеграл 380
 - эллиптический интеграл 129
- Положительно определенная функция 604–607
 - определенное ядро 456, 468
 - определенный функционал 468
- Полуустойчивый цикл 577
- Полюс 94, 95–97
- Поперечные колебания стержня 377
- Пополнение 287
- Порядок вариации 324
 - нуля 86
 - полюса 95
 - связности 27
 - точки разветвления 54
- Постоянная времени 630
- Потенциал 25–26, 28
- Потенциальная энергия 370–371
 - яма 389–390
- Потенциальное поле 25
- Потенциальный барьер 389
- Потеря устойчивости 389
- Поток 568
 - вектора 14
- «Почти все» 596
- Почти-периодическая функция 549
- Правило симметрии 71–72
- Правильная часть ряда Лорана 78
- Правое итерированное ядро 465
- Предельный цикл 577
- Представимость через ядро 461
- Преломление экстремали 320
- Преобразование Гильберта 179–181
 - Лапласа 147
 - Лоренца 264
 - Меллина 179
 - прикосновения 356
 - Ханкеля 182
 - Эйлера 88
- Приближенное конформное отображение 72
- Приведение квадратичной формы к главным осям 196
 - тензора к главным осям 257
- Приводимая система 538
- Принцип аргумента 113, 118–119
 - аналитического продолжения 39
 - Гамильтона 368–376
 - Линделефа 72
 - максимума 86
 - минимального действия 369
 - минимума потенциальной энергии 385

- сжимающих отображений 445
- Припасовывание 590
- Присоединенный вектор 203
- Притягивающий цикл 586
- Проблема Айзермана 627
 - моментов 483
 - Рауса–Гурвица 119
- Прогонка 417
- Продолжение решения 452
- Произведение инерции 258
- Производная аналитической функции 40–41, 43
 - в силу системы 608
- Производящая функция для системы функций 480
 - канонического преобразования 354, 356
- Простое растяжение 383
- Простой нуль 86
 - полюс 95
 - слой 65
- Пространственноподобность 265
- Пространство Гильберта 286, 423–424
 - с весом 480
 - Лоренца 264
- Прямая сумма 186
- Прямое регулирование 624
 - слагаемое 188
- Прямые методы вариационного исчисления 392–393
- Псевдодлина 264
- Псевдоевклидово пространство 264
- Псевдориманово пространство 280
- Псевдоскалярное произведение 264
- Псевдотензор 268
- Псевдоэллиптический интеграл 129
- Пустое множество 235
- Разветвление решений 527**
- Разложение ядра по собственным функциям 458–459
- Разностное уравнение 169
- Разрез 51
- Разрывная вариационная задача 322
 - система 589–592
- Разрывное векторное поле 23–25
- Ранг тензора 254
- Расширение функции 87
- Расширенная комплексная плоскость 46
- Регуляризация 477, 502
- Регулярная функция 41
 - часть ряда Лорана 78
- Резольвента 427, 461–462
- Результант 121
- Релаксационные колебания 655
- Репер 270
- Риманова поверхность 60–61
- Риманово пространство 277
- Род граничного условия 377
 - конформного отображения 44–45
 - эллиптического интеграла 129–130
- Ротационное движение 639
- Ротор 17, 272
- Ряд Лорана 78–81, 110
 - Лорана–Пюизо 95
 - Неймана 443
 - Пюизо 92
 - Тейлора 82
- Самосопряженная матрица 190
- Самосопряженное отображение 189, 192–193
- Самосопряженный оператор 469
- Свертка функций 153
- Свертывание тензора 256
 - ядер 443
- Световой конус 267
- Свободный индекс 252
- Связность в римановом пространстве 277
- Сдвиг по траекториям 671
- Седло 571, 584
- Седло-фокус 584
- Секулярные члены 633
- Сепаратриса 570
- Сжимающее отображение 445
- Сигнатура 196
- Сигнум 590
- Сильный экстремум 288
- Силовая линия 13
- Символ Кристоффеля 270–271
 - Кронекера 253
- Симметрирование тензора 257
- Симметрический тензор 257
- Симметричное ядро 421, 457
- Симметрия относительно окружности 48–49
- Симплекс 235
- Симплексный метод 238–239

- Сингулярная часть ряда Лорана 78
Сингулярное интегральное уравнение 422
Сингулярный интеграл 496–499
Синус амплитуды 130
Синхронизация 662
Система автоматического регулирования 623–629
— первого приближения 607
— с быстро вращающейся фазой 665
— с дискретным временем 668
— с переключениями 591
Скаляр 254
Скалярное произведение тензоров 257
Скалярный потенциал 25
Скобка Пуассона 352–353
Скользкий режим 590
Слабая особенность 422, 452–454
Слабый экстремум 332
След матрицы 256, 534
— ядра 460
Смешанная стратегия 243
Смешанный тензор 261
Собственная функция 339, 428
Собственное колебание 618
Событие 265
Сокращение тензора 256
Соленоидальное поле 28–30
Сопряженная матрица 185
— система 532
— точка 331
Сопряженное интегральное уравнение 427
— отображение 188–189
— ядро 427
Сопряженные величины 350–351
— гармонические функции 42
Состояние системы 592
Союзное уравнение 427
Спектр оператора 340
Стационарное значение функционала 296
Степенное отображение 50–51
Степень неустойчивости 619
— устойчивости 608
Стержень 376–378
Стохастическое программирование 249
Стробоскопический метод 671
Структурно устойчивая система 588–589
Струна 373–374
Субгармонические колебания 635, 648
Сужение функции 87
Суммируемая функция 286
Существенно особая точка 94
Тензор 251–263
— деформации 259
— инерции 258
— кривизны 280
— напряжений 383
Тензорное умножение 256
Тензорно-инвариантная форма 274
Тензорный анализ 251, 267
Теорема Больцано–Вейерштрасса 85, 345
— Боля–Брауэра 225, 522
— Гамильтона–Кэли 205–206
— Гильберта–Шмидта 463
— Гурвица 118–119
— Дж. Неймана 243
— запаздывания 151
— Коши 77
— Коши–Лиувилля 111
— Коши о вычетах 98–99
— Куранта 195, 346
— Лагранжа 617
— Лиувилля 595
— Ляпунова–Пуанкаре 545
— Морера 84
— Неймана 243
— Нётер 357–359
— о логарифмических вычетах 113
— Попова 626
— Пуанкаре–Бертрана 501
— Римана 70
— Руше 113–114
— Сильвестра 199
— смещения 151
— Сохоцкого 97
— Фишера–Риса 475–476
— Флоке 536
Теорема Четаева 606
— Шаудера 522
— Штурма 559
Теоремы Ляпунова 604, 610
— Нётера 509
— Фредгольма 426–429
Теория игр 241
Техническая устойчивость 628–629

- Топологическая эквивалентность 46–47
 Топологическое произведение 592
 Топология 46–47
 Тор 592–593, 599
 Точечное отображение 578
 Точечный источник 32, 64
 Точка перехода 564
 — поворота 564–565
 — покоя 568
 —разветвления 53
 Траектория 568
 Трансверсальность 314–320
 Транспортная задача 231
- У**гловая переменная 640, 665
 Узел 573, 583
 Узло-фокус 584
 Ультрагармонические колебания 647
 Унитарная матрица 192
 Управляемый объект 623
 Управляющее воздействие 623
 Уравнение Абеля 474–475
 — ван дер Поля 653
 — Вольтерра 421, 450–452, 472–475, 484–486, 516
 — Гамильтона–Якоби 362
 — Гаммерштейна 520
 — Дuffинга 642, 649
 — Клейна–Гордона 376
 — Лапласа 31
 — Ляпунова–Лихтенштейна 518
 — Матье 538
 — Милна 494
 — неразрывности 15
 — Остроградского 302
 — Пуассона 34
 — разветвления 527
 — с симметричным ядром 421, 457–469
 — со слабой особенностью 422, 450
 — теплопроводности 170
 — Урысона 516
 — Фредгольма 1-го рода 421, 475–476, 477–479
 — 2-го рода 421, 424–456, 492–496
 — Хилла 538
 — Эйлера 295–298, 326–329, 351
 — Эйри 565
 — Якоби 331
- Условие невырожденности 239
 Условия Вейерштрасса–Эрдмана 323
 — Коши–Римана 42
 — согласования 308
 — трансверсальности 315
 — Якоби 331–334
 Условный период 630
 — экстремум функционала 305–311
 Устойчивость относительно класса возмущений 600–601
 —выбранных комбинаций или функционалов 600–601
 — по Ляпунову 600, 604
 —первому приближению 607
 — при постоянно действующих возмущениях 600
 Устойчивый полином 118
 — цикл 577
 Устранимая особая точка 94
- Ф**азовое пространство 567
 Фазовый портрет 591
 Факторизация 492–493
 Физическая составляющая 266
 Фокус 572
 Форма (в алгебре) 196
 Формула Грина 18
 — Кристоффеля–Шварца 125–127
 — обращения 155, 499
 — Остроградского 15
 — Пановко 637
 — Пуассона 107–110, 177
 — Стирлинга 140
 — Стокса 18
 — Эйлера 39
 Фундаментальная матрица 534
 — система решений 532
 Функционал 283
 Функциональное пространство 285
 Функция Вейерштрасса 337–338
 — Гамильтона 351
 — Лагранжа 368
 — Ляпунова 605
 — Матье 542
 — от матрицы 208–209
 — последования 579
 — тока 62
 — Ханкеля 1-го рода 146
 — цели 230
 — Эйри 566

- Характеристика (траектория) 568
 — управляющего устройства 624
 Характеристическая матрица 167
 — функция 597
 Характеристическое число 427, 457
 Хорошо обусловленная система 217, 394

Целая функция 82
 Целочисленное программирование 247
 Цена игры 243
 Центр 572, 574
 Центральное поле экстремалей 332
 Центробежный момент инерции 259
 Цепная дробь 436
 — линия 300, 387
 Цикл 568, 577–579, 585–588
 — циркуляция 17

Частная вариация 301
 Частотная характеристика 166
 Числовой вектор 185
 Чистая стратегия 242

 Эйлерова характеристика 585
 Экстремаль 298
 Элементарный вихрь 64
 — делитель 208
 Эллипсоид инерции 258
 Эллиптический интеграл 129–130
 — синус 130
 Эргодическая система 596–597
 — теорема 596
 Эрмитов оператор 471
 Эрмитова квадратичная форма 196
 — матрица 189
 Эрмитово ядро 421

Явление Стокса 133
 Ядро 190, 421
 — Гильберта 499
 — Коши 499
 — непрерывное 460
 — отображения 190

Указатель обозначений

Знаки векторного и тензорного анализа ∇ 18; Δ 15; $a_{i,k}^j$ 261; g_{ij} , g^{ij} 263; Γ_{ij}^k , $\{i_k j\}$ 270; Γ_i , ij , $[ij, l]$, $[ilj]$ 271; $a_{i,k}^i$ 272.

Знаки теории аналитических функций $\operatorname{Выч}_{z=a} f(z)$, $\operatorname{Res}_{z=a} f(z)$ 94–95.

Знаки теории специальных функций $\psi_p(z)$ 125; $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ 129; $K(k)$, $E(k)$ 129; $\operatorname{sn}(w, k)$, $\operatorname{cn}(w, k)$, $\operatorname{dn}(w, k)$ 130; $K_\nu(a)$ 141; $H_\nu^{(1)}(x)$ 146; $T_n^\beta(x)$ 480; $L_n^\alpha(x)$ 480; $H_n(x)$ 480; $\operatorname{se}_n(t; q)$, $\operatorname{sn}_n(t; q)$ 542; $\operatorname{Ai}(s)$, $\operatorname{Bi}(s)$ 566.

Знаки линейной алгебры $\mathbf{x}$ 186; $\mathbf{x}$ 186; $\mathbf{A}^*$ 189; $\mathbf{A}^{-1}(0)$ 190; $\dim$ 190; $\operatorname{сл. A}$, $\operatorname{Sp A}$ 534.

Знаки теории функциональных пространств и вариационного исчисления $\|f\|$ 285; $C[a, b]$, $C_n[a, b]$, $L_2[a, b]$ 286; $\rho(f, g)$ 287; δy 289; δI 290.

Некоторые другие знаки $\doteq$ 147; $f_1 * f_2$ 153; $\operatorname{Bp} \mathbf{A}$ 580; $\operatorname{sgn} x$ 591.
(L)

Учебное издание

МЫШКИС Анатолий Дмитриевич

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ.
СПЕЦИАЛЬНЫЕ КУРСЫ**

Редактор *С.А. Тюрина*

Оригинал-макет: *О.В. Устинова*

Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 20.08.2006. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 43. Уч.-изд. л. 47,3. Тираж 2000 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117342, г. Москва, ул. Бутилова, д. 17 Б

Е-mail: porsova@fml.ru, sale@fml.ru

Сайт: <http://www.fml.ru>

Интернет-магазин: <http://www.fmllib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-9221-0747-1



9 785922 107471