

И. Н. Мешков, Б. В. Чириков

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Часть I

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

*Издание второе,
исправленное и дополненное*



Москва ♦ Ижевск

2014

УДК 537.8
ББК 22.336
М 559

Интернет-магазин

MAFFESIS

<http://shop.rcd.ru>

• ф и з и к а
• м а т е м а т и к а
• б и о л о г и я
• н е ф т е г а з о в ы е
т е х н о л о г и и

Мешков И. Н., Чириков Б. В.

Электромагнитное поле. Часть 1. Электричество и магнетизм. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2014. — 544 с.

В книге последовательно изложены основные положения классической электромагнитной теории, включая движение заряженных частиц в поле и структуру электромагнитной волны. Дана наглядная картина физических явлений в сочетании с упрощенным теоретическим анализом. Описаны важнейшие эксперименты и интересные с точки зрения физики практические приложения.

Книга предназначена для специалистов в различных областях физики и техники, преподавателей, аспирантов и студентов вузов.

ISBN 978-5-93972-978-9

ISBN 978-5-93972-979-6 (часть 1)

© И. Н. Мешков, Г. Б. Чирикова, 2014

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2014

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию.....	7
Предисловие к первому изданию	9
Глава I. Электростатика.....	11
§ 1. Закон Кулона	11
§ 2. Электрическое поле.....	12
§ 3. Принцип суперпозиции	13
§ 4. Геометрия поля.....	14
§ 5. Электрические мультиполи.....	15
§ 6. Закон сохранения потока электрического поля.....	23
§ 7. Основное уравнение электростатики (уравнение Пуассона)	28
§ 8. Общее решение уравнения Пуассона. Понятие о δ -функции	32
§ 9. Энергия электрического поля	34
§ 10. Проводник в электрическом поле.....	36
§ 11. Уравнение Лапласа.....	53
§ 12. Электрическая емкость	59
§ 13. Экспериментальная проверка закона Кулона	65
Глава II. Диэлектрики	71
§ 14. Поляризация диэлектрика.....	71
§ 15. Электрическое поле в диэлектрике.....	73
§ 16. Граничные условия	79
§ 17. Энергия поля в среде.....	85
§ 18. Давление поля.....	87
§ 19. Электростатические силы в среде.....	89
Глава III. Электрический ток	93
§ 20. Электрический ток. Уравнение непрерывности.....	93
§ 21. Ток в металлах. Закон Ома	95
§ 22. Ток в изоляторах. Граничные условия при наличии тока	101

§ 23. Релаксация зарядов в среде	104
§ 24. Электрические цепи. Законы Кирхгофа	107
§ 25. Электрические цепи с емкостью	110
§ 26. Электрический разряд	118
§ 27. Пучки заряженных частиц	127
Глава IV. Магнитное поле в вакууме	139
§ 28. Магнитное поле тока	139
§ 29. Магнитное поле и теория относительности	148
§ 30. Самофокусировка пучка заряженных частиц: пинч-эффект	152
§ 31. Вектор-потенциал	154
§ 32. Основные уравнения магнитного поля	159
§ 33. Закон сохранения циркуляции магнитного поля. Лапласово поле	161
§ 34. Магнитный диполь	174
§ 35. Взаимодействие диполя с магнитным полем	180
§ 36. Прецессия магнитного момента. Магнитный резонанс	182
Глава V. Магнитное поле в среде	195
§ 37. Намагничивание	195
§ 38. Магнитная индукция	198
§ 39. Ток смещения в среде	201
§ 40. Граничные условия для магнитного поля	203
§ 41. Магнитные цепи	210
§ 42. Понятие о ферромагнетизме	215
§ 43. Постоянные магниты	220
§ 44. Плазма как диамагнетик	233
Глава VI. Электромагнитная индукция	237
§ 45. Закон электромагнитной индукции. Уравнения Максвелла	237
§ 46. Энергия магнитного поля. Индуктивность	250
§ 47. Давление магнитного поля	252
§ 48. Сохранение магнитного потока. Электрические цепи	255
§ 49. Индуктивность и масса	258
§ 50. Сверхсильные магнитные поля	260
§ 51. Взаимоиндукция	264

§ 52. Цепи переменного тока.....	268
§ 53. Технические применения электромагнитной индукции.....	282
§ 54. Сверхпроводимость.....	289
§ 55. Поток энергии в электромагнитном поле	301
Глава VII. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле	307
§ 56. Частица в однородном и постоянном поле.....	307
§ 57. Частица в неоднородном поле. Закон сохранения обобщенного момента.....	316
§ 58. Закон сохранения фазового объема пучка заряженных частиц и методы его сжатия.....	339
Глава VIII. Электромагнитные волны	351
§ 59. Радиоволны.....	352
§ 60. Оптический диапазон. Источник света	355
§ 61. Глаз.....	358
§ 62. Измерение цвета, или колориметрия.....	362
§ 63. Искусственные приемники света.....	368
§ 64. Рентгеновское (гамма) излучение	374
Глава IX. Структура электромагнитной волны	377
§ 65. Свободное электромагнитное поле.....	377
§ 66. Волновое уравнение для полей	380
§ 67. Волновое уравнение для потенциалов	381
§ 68. Плоские волны.....	383
§ 69. Монохроматическая волна. Поляризация волны	386
§ 70. Волновой вектор. Эффект Доплера	390
§ 71. Аномальный эффект Доплера. Черенковское излучение	397
Глава X. Отражение и преломление электромагнитной волны	401
§ 72. Зеркало	401
§ 73. Преломление волны	409
§ 74. Полное внутреннее отражение. Туннельный эффект	415
§ 75. Стоячая волна	419
§ 76. Резонаторы.....	421

Глава XI. Спектральный анализ.....	433
§ 77. Спектральное разложение. Периодическое поле	433
§ 78. Спектральное разложение. Импульсное поле.....	438
§ 79. Соотношение неопределенности	446
§ 80. Спектральное разложение. Стохастическое поле.....	451
§ 81. Экскурс в теорию информации. Количество информации.....	467
§ 82. Экскурс в теорию информации. Поток информации	471
§ 83. Экскурс в теорию информации. Принцип Сциларда–Бриллюэна.....	481
Глава XII. Дисперсия	485
§ 84. Фазовая и групповая скорости волны.....	485
§ 85. Расплывание волнового пакета	491
§ 86. Волноводы	496
§ 87. Скин-эффект	511
Приложение I. Элементы векторного анализа.....	525
Приложение II. Фундаментальные константы	529
Приложение III. Единицы измерения физических величин	531
Литература.....	535
Предметный указатель.....	537

Предисловие ко второму изданию

Эта книга, увидевшая свет в 1987 г., очень скоро стала библиографической редкостью из-за своей популярности у студентов, выпускников и преподавателей физического факультета Новосибирского государственного университета. Только спустя почти четверть века появилась возможность ее переиздания. К глубокому сожалению, в 2010 г. ушел из жизни Борис Валерьянович Чириков. При подготовке второго издания я постарался включить все добавления, ранее им предложенные. Второе издание, как и первое, содержит описание электромагнитных явлений в вакууме и веществе, в том числе релятивистской электродинамики в вакууме. Релятивистская электродинамика движущихся сред выходит за рамки данного курса.

Второе издание содержит много дополнений. Прежде всего, это новые задачи, появившиеся в практике научной работы автора. Обновлен также описательный общезначимый материал, что отражает существенный рост научных знаний и прогресс мировой науки и техники. Значительно расширены главы XXII, XXIV и заново написана глава XXV. Как и при первом издании, книга адресована студентам не только начальных, но и старших курсов, аспирантам и начинающим исследователям. Книга была задумана Борисом Валерьевичем такой, чтобы, попав в руки студента-физика на начальных курсах, оставаться полезной и в его дальнейшей научной работе (что и имеет место с первым изданием, как показывает опыт). Поэтому она содержит материал двух уровней сложности. Материал второго, более высокого уровня, напечатан, как правило, мелким шрифтом. Его можно опустить при первом чтении. За эти годы, как ни печально, заметно упал уровень математической подготовки студентов. Поэтому, дабы облегчить нынешнему читателю понимание материала, в тексте также мелким шрифтом сделаны вставки, поясняющие математические преобразования. Для удобства читателя наиболее важные физические термины выделены в книге курсивом, и все они вынесены в предметные указатели, которыми снабжены оба тома. Списки основной литературы приведены в конце каждого тома. Ссылки частного характера даются в подстрочных примечаниях. Как и в первом издании, главы нумеруются римскими цифрами, параграфы — арабскими, подряд. Формулы, рисунки и задачи имеют двойную нумерацию: у формул первая цифра

означает номер параграфа, у рисунков и задач — номер главы, вторые цифры — порядковые номера для данного параграфа или главы. Ссылки на формулы Приложений начинаются с заглавной буквы П и номера приложения. Например, П.1.2, б означает Приложение I, формула I.2,б.

Переиздание книги было инициировано профессором НГУ В. Г. Сербо, за что автор сердечно его благодарит. При подготовке книги к изданию неоценимую помощь в обновлении материала оказали друзья, коллеги и ученики из ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН, ОИЯИ и других лабораторий России и мира: Е. В. Ахманова, В. С. Бурмасов, М. К. Есеев, Б. Ж. Залиханов, О. П. Захаров, А. Ю. Лаврентьев, О. И. Мешков, С. С. Нагайцев, В. В. Пархомчук, К. М. Салихов, К. Л. Сергеев, А. Н. Скринский, В. В. Смалюк. Особую признательность автор выражает Н. М. Плакиде, Н. Н. Колачевскому и Н. А. Винокурову, взявшим на себя труд редактирования § 54, глав XXIV и XXV.

Переиздание книги едва ли стало бы возможным без той огромной работы по редактированию и подготовке рукописи, которую совершили Т. А. Степанова, Л. В. Соболева и Э. И. Уразаков, за что автор им безмерно благодарен.

В книге приводятся ссылки на работы различных физических институтов России и мира, при этом для краткости используется аббревиатура их полных названий:

DESY — Deutsche Synchrotron, г. Гамбург, ФРГ;

SLAC — Национальная ускорительная лаборатория, Стэнфорд, США (SLAC — Stanford Linear Accelerator Center — Стэнфордский центр линейного ускорителя);

BNL — Брукхейвенская национальная лаборатория, США (Brookhaven National Laboratory);

ЦЕРН — Европейская организация по ядерным исследованиям, Женева, Швейцария (CERN — Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire — Европейский совет по ядерным исследованиям);

ВНИИЭФ — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, г. Саров;

ИЯФ — Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск;

ФИАН (ФИ РАН) — Физический институт им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР (Российской академии наук), Москва.

Январь 2012 г.

Дубна

И. Н. Мешков

Предисловие к первому изданию

Предлагаемая вниманию читателей книга представляет собой попытку единого изложения классических (неквантовых) электромагнитных явлений, начиная от электростатики и кончая излучением электромагнитных волн. Она состоит из двух частей. Часть 1 посвящена фундаментальным законам магнетизма, приводящим к системе уравнений Максвелла. В части 2 рассматриваются волновые и оптические процессы, а также излучение электромагнитных волн.

Особенность настоящей монографии — попытка объединения традиционного изложения на языке общей физики с упрощенным анализом методами теоретической физики. Преимуществом такого построения является возможность всестороннего рассмотрения основных физических явлений как с точки зрения эксперимента и наглядных качественных представлений, так и теоретически. Подобный подход способствует более глубокому пониманию физических законов. Главный недостаток принятого построения книги связан со значительным упрощением теоретического материала, что вызвано желанием снять математические трудности при первом знакомстве с предметом. Поэтому приходится отказываться от целого ряда специальных методов теоретической физики. Содержание книги значительно отличается от традиционного, особенно это касается части 2. Так, все изложение базируется на широком использовании теории относительности и фурье-анализа.

Авторы выражают искреннюю благодарность своим товарищам по физическому факультету Новосибирского государственного университета и Институту ядерной физики Сибирского отделения АН СССР за многочисленные полезные дискуссии, которые способствовали написанию этой монографии, — Л. М. Баркову, Б. Н. Брейзману, Р. Д. Гайнутдинову, М. С. Золотареву, Г. Н. Кулипанову, Г. Л. Коткину, В. В. Пархомчуку, Д. В. Пестрикову, А. Н. Скринскому, Д. Д. Рютову, Ю. Б. Хриповичу и многим другим.

Авторы благодарны Л. А. Боярскому и Е. А. Переведенцеву, внимательно прочитавшим рукопись книги и сделавшим множество полезных

замечаний и добавлений, а также Л. И. Бейбулатовой, А. В. Гинзбург, А. Ф. Кулаковой, Н. А. Савельевой и Б. М. Смирнову, оказавшим большую помощь в подготовке монографии к печати.

Основное физическое содержание книги, подход к изложению ряда физических явлений следуют традициям курса общей физики, поставленного в НГУ покойным академиком Г. И. Будкером и читавшегося им совместно с одним из авторов. На протяжении ряда лет авторы имели неоценимую возможность обсуждать с ним наиболее острые и запутанные проблемы современной физики, в том числе и по материалу этой книги.

13 мая 1985 г.

Академгородок

Б. В. Чириков, И. Н. Мешков

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 1. Закон Кулона

Изучение электромагнитных процессов (явлений) проще всего начать с рассмотрения электростатического взаимодействия «заряженных» тел, или электростатики. Основой электростатики считается открытый в 1785 г. Кулоном (С. О. Coulomb) закон взаимодействия двух «точечных» (то есть достаточно малых) заряженных тел:

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{r_{12}}{r_{12}}. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{F}_{12}$ — электростатическая (электрическая) сила, действующая со стороны первого тела на второе; $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиус-векторы тел; q_1, q_2 — их электрические заряды. Последние определяются и измеряются с помощью этого же закона.

Закон Кулона формально совпадает с законом тяготения Ньютона. Совпадение, по-видимому, не случайно, а имеет глубокий физический смысл, связанный с тем, что масса покоя как фотона, так и гипотетического гравитона равна нулю (см. § 13). Особенностью электрического взаимодействия является существование зарядов обоих знаков, тогда как «антигравитация» до сих пор не обнаружена.

Естественная единица заряда — так называемый квант заряда, или элементарный заряд, являющийся одной из фундаментальных постоянных современной физики. С высокой степенью точности он одинаков для всех заряженных элементарных частиц (см. § 13). В *гауссовой системе единиц* (г)^{*)} и СИ этот заряд равен $e = (4,803242 \pm 0,000014) \times 10^{-10} [\text{г}] = (1,6021892 \pm 0,0000046) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

^{*)} Здесь и далее символ [г] означает, что данная величина приведена в гауссовой системе единиц.

Кулоновское взаимодействие (1.1) потенциально, и для него всегда можно ввести потенциальную энергию:

$$U_{12}(\mathbf{r}) = -q_1 q_2 \int \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{dr})}{r^3} = -q_1 q_2 \int \frac{r \cdot dr}{r^3} = \frac{q_1 q_2}{r} + C. \quad (1.2)$$

Сила взаимодействия определяется через $U(\mathbf{r})$ с помощью выражения

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U(\mathbf{r}) \equiv -\nabla U(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

где ∇ (набла) обозначает векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1.4)$$

Например,

$$\nabla U(|\mathbf{r}|) = \frac{dU}{dr} \nabla r = \frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

§ 2. Электрическое поле

Закону Кулона можно придать совершенно иной физический смысл:

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \left[\frac{q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \equiv q_2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}). \quad (2.1)$$

Этим соотношением вводится принципиально новое понятие — *электрическое поле*, создаваемое зарядом q_1 во всем окружающем пространстве, а также определяется закон действия данного поля на любой заряд.

Соответственно, вместо потенциальной энергии взаимодействия двух зарядов $U(\mathbf{r})$ вводится новое понятие *потенциала* электрического поля $\varphi(\mathbf{r})$:

$$U_{12}(\mathbf{r}) = \frac{q_1 q_2}{r} \equiv q_2 \varphi_1(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

который связан с напряженностью поля выражением

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (2.3)$$

Потенциальность электрического поля означает, что интеграл по замкнутому контуру

$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{r}) = 0. \quad (2.4)$$

Воспользовавшись теоремой Стокса, отсюда имеем

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{r}) = \oiint_{S_L} (\text{rot } \mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 0,$$

где L — длина произвольного замкнутого контура, охватывающего поверхность площадью S_L . Отсюда получаем важное свойство кулоновского (электростатического) поля:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (2.5)$$

Единицей потенциала в СИ является вольт, а единицей напряженности — вольт на метр, их связь с гауссовыми единицами: $1 (\text{г}) = 300 \text{ В}$, $1 (\text{г}) = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}$.

Описания электрических явлений с помощью прямого силового взаимодействия (*теория дальнего действия*) и с помощью промежуточного электрического поля (*теория ближнего действия*) эквивалентны в пределах электростатики. Только в электродинамике, где существуют свободные электромагнитные волны, независимые от зарядов, была доказана реальность электромагнитного поля.

§ 3. Принцип суперпозиции

Для поля системы зарядов справедлив принцип суперпозиции:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i; \quad \varphi = \sum_i \varphi_i, \quad (3.1)$$

который, также как и закон Кулона, является экспериментальным фактом. Замечательно, что оба закона остаются до сих пор «абсолютно» точными в том смысле, что пока не обнаружены никакие отклонения от них (см. § 13). Принцип суперпозиции имеет место и в ряде других физических явлений, например при сложении упругих деформаций от нескольких сил. В последнем случае, однако, этот принцип является приближенным и нарушается при больших деформациях, что физически вполне понятно. Отсутствие аналогичных нарушений в электромагнитном поле придает здесь принципу суперпозиции фундаментальный характер. Не исключено, впрочем, что мы еще просто не дошли до таких значений напряженности поля, когда данный принцип перестанет выполняться.

§ 4. Геометрия поля

Конфигурация поля может быть наглядно выражена с помощью картины силовых линий. Силовая линия представляет собой пространственную кривую, вектор касательной к которой совпадает в каждой точке с вектором $\mathbf{E}$ (с точностью до произвольного масштабного множителя). Уравнение силовой линии можно записать в декартовых координатах в виде

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (4.1)$$

или в произвольной ортогональной системе координат (α_i) с коэффициентами Ламэ h_i :

$$\frac{h_1 d\alpha_1}{E_1} = \frac{h_2 d\alpha_2}{E_2} = \frac{h_3 d\alpha_3}{E_3}. \quad (4.2)$$

Силовые линии поля точечного заряда представляют собой семейство радиально расходящихся прямых ($\theta, \varphi = \text{const}$, где r, θ, φ — сферические координаты). Из этого примера следует, что напряженность поля пропорциональна плотности силовых линий. Ниже мы увидим, что данное правило сохраняется и в общем случае.

Силовые линии:

- 1) начинаются и заканчиваются на зарядах;
- 2) не замкнуты, так как $\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$ в силу потенциальности электрического поля;
- 3) не пересекаются ввиду однозначности поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, за исключением точек, где $\mathbf{E} = 0$.

Несколько сложнее выглядит поле двух точечных зарядов. Такое поле для случая одинаковых по величине, но противоположных по знаку зарядов изображено на рис. I.1. Такая система называется (электрическим) диполем (см. § 5). Потенциал поля диполя равен сумме кулоновских потенциалов:

$$\varphi_d = q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \cdot q}{r^3}, \quad (4.3)$$

где a — расстояние между зарядами. Последнее приближенное выражение справедливо при $r \gg a$.

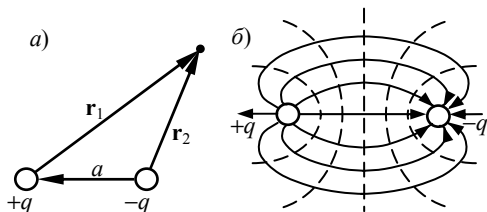


Рис. 1.1. Электрический диполь (а) и его поле (б): сплошные линии — силовые линии электрического поля; пунктирные — линии эквипотенциалей

Картину электрического поля можно также наглядно представить с помощью семейства эквипотенциалей — поверхностей равного потенциала (рис. 1.1). Для одного точечного заряда эквипотенциалами является семейство концентрических сфер. Из соотношения $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ следует, что силовые линии везде нормальны к эквипотенциалам.

§ 5. Электрические мультиполи

Принцип суперпозиции позволяет вычислять потенциал и поле произвольной системы зарядов. Однако при большом числе зарядов в общем случае получаются громоздкие выражения, пригодные лишь для численных расчетов с помощью ЭВМ. Только иногда эти выражения удастся упростить так, что их можно использовать в аналитической теории, имеющей дело с формулами, а не с конкретными числовыми значениями физических величин. Одним из таких важных частных случаев является поле системы зарядов на расстояниях R , много больших размеров системы a . При этом в задаче появляется малый параметр a/R , по которому можно произвести разложение (в ряд Тейлора).

Выбрав начало координат где-нибудь внутри системы зарядов q_i , запишем общее выражение для потенциала в виде

$$\varphi(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}, \quad (5.1)$$

где i — номер заряда, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор заряда q_i (рис. 1.2). Конечно, вначале следует найти потенциал поля, поскольку это скалярная величина, и формула для нее значительно проще, чем для вектора напряженности $\mathbf{E}$.

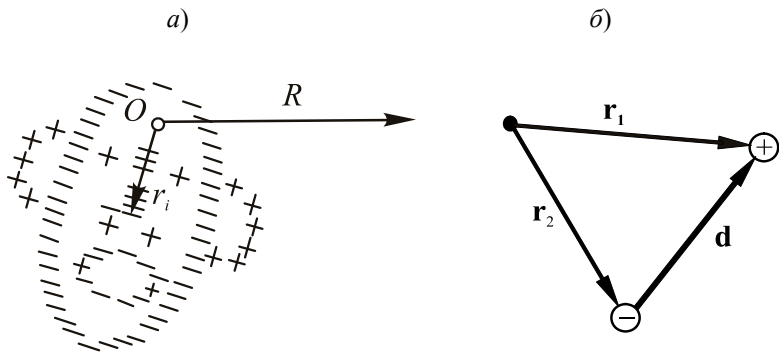


Рис. 1.2. Система зарядов (а) и элементарный диполь (б)

На больших расстояниях от системы зарядов, при $R \gg r_i$, можно найти приближенные значения потенциала, а затем и поля, произведя разложение функции $f(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}$ по малому параметру $\mathbf{r}_i$: $|\mathbf{r}_i| \ll |\mathbf{R}|$.

Для этого следует воспользоваться формулой разложения в ряд Тейлора функции $f(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i)$. Проще всего это сделать в декартовых координатах, записав

$$\mathbf{R} = \{X_\alpha\}, \quad \mathbf{r}_i = \{x_{i\alpha}\}, \quad f(\mathbf{R}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (X_\alpha - x_{i\alpha})^2}},$$

$\alpha = 1, 2, 3$ — номер декартовой координаты.

Соответствующее выражение имеет вид

$$\begin{aligned} f(X_\alpha, x_{i\alpha}) &= f(X_\alpha, 0) + \sum_{\alpha=1}^3 \left. \frac{\partial f}{\partial x_{i\alpha}} \right|_{x_{i\alpha}=0} \cdot (-x_{i\alpha}) + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i\alpha} \cdot \partial x_{i\beta}} \right|_{x_{i\alpha}=x_{i\beta}=0} \cdot x_{i\alpha} \cdot x_{i\beta} - \\ &- \frac{1}{3!} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x_{i\alpha} \cdot \partial x_{i\beta} \partial x_{i\gamma}} \right|_{x_{i\alpha}=x_{i\beta}=x_{i\gamma}=0} \cdot x_{i\alpha} \cdot x_{i\beta} \cdot x_{i\gamma} + \dots + \\ &+ \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n=1}^3 \left. \frac{\partial^n f}{\partial x_{i\alpha_1} \cdot \partial x_{i\alpha_2} \dots \partial x_{i\alpha_n}} \right|_{x_{i\alpha_1}=\dots=x_{i\alpha_n}=0} \cdot (x_{i\alpha_1} \cdot x_{i\alpha_2} \dots x_{i\alpha_n}) + O\left(\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Вычислим первые четыре слагаемых f_n ($n = 0, 1, 2, 3$) в этой формуле, что потребуется в дальнейшем. Находим

$$f_0 = \frac{1}{R}, \quad R = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 X_{\alpha}^2},$$

$$f_1 = -\frac{1}{R^3} \sum_{\alpha=1}^3 X_{\alpha} \cdot x_{i\alpha}, \quad f_2 = \frac{1}{2R^5} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (3X_{\alpha}X_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}R^2) x_{i\alpha} \cdot x_{i\beta},$$

$$f_3 = \frac{1}{4R^7} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \left[5X_{\alpha}X_{\beta}X_{\gamma} + (\delta_{\alpha\beta}X_{\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}X_{\beta} + \delta_{\beta\gamma}X_{\alpha})R^2 \right] \cdot x_{i\alpha} \cdot x_{i\beta} \cdot x_{i\gamma}.$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера: $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$

Умножая на заряд q_i и суммируя по всем зарядам системы, найдем значения дипольного $\varphi_d(\mathbf{R})$, квадрупольного $\varphi_D(\mathbf{R})$ и секступольного $\varphi_s(\mathbf{R})$ потенциалов:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \varphi_0(\mathbf{R}) + \varphi_1(\mathbf{R}) + \varphi_2(\mathbf{R}) + \varphi_3(\mathbf{R}) + \dots, \quad \varphi_0(\mathbf{R}) = \frac{Q}{R},$$

$$\varphi_d(\mathbf{R}) \equiv \varphi_1(\mathbf{R}) = \frac{(\mathbf{R}, \mathbf{d})}{R^3}, \quad \mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i, \quad \varphi_D(\mathbf{R}) \equiv \varphi_2(\mathbf{R}) = \frac{1}{2R^5} \times$$

$$\times \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (3X_{\alpha}X_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}R^2) \cdot D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2R^5} \cdot \left[(3X^2 - R^2)D_{xx} + (3Y^2 - R^2)D_{yy} + \right.$$

$$\left. + (3Z^2 - R^2)D_{zz} + 6XYD_{xy} + 6XZD_{xz} + 6YZD_{yz} \right],$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i q_i x_{i\alpha} x_{i\beta}, \quad (5.2)$$

$$\varphi_s(\mathbf{R}) \equiv \varphi_3(\mathbf{R}) = \frac{1}{4R^7} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \left[5X_{\alpha}X_{\beta}X_{\gamma} + (\delta_{\alpha\beta}X_{\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}X_{\beta} + \delta_{\beta\gamma}X_{\alpha})R^2 \right] \times$$

$$\times S_{\alpha\beta\gamma}, \quad S_{\alpha\beta\gamma} = \sum_i q_i x_{i\alpha} x_{i\beta} x_{i\gamma}.$$

Отметим, что дипольный потенциал $\varphi_d(\mathbf{R})$ можно записать в виде

$$\varphi_d(\mathbf{R}) = -\left(\mathbf{d}, \nabla \frac{1}{R} \right). \quad (5.3)$$

Потенциалы φ_1 , φ_2 , φ_3 называются соответственно *дипольным*, *квадрупольным* и *секступольным потенциалами* системы, а параметры d , $D_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta\gamma}$ — *дипольным*, *квадрупольным* и *секступольным ее моментами*.

Обратим внимание, что разложения потенциалов, подобные проведенным здесь, нам потребуются в дальнейшем не однажды. Поэтому подобный вывод, сделанный выше, представляется полезным.

Дипольный потенциал является малой поправкой к кулоновскому: $\varphi_1 \sim \varphi_0 a/R$. Однако, если полный заряд $Q = 0$ (или близок к нулю), дипольный член может играть основную роль. Аналогично обстоит дело и со следующими по величине квадрупольным и секступольным потенциалами. Как мы видели при выводе формул (5.2), (5.3), разложение потенциала можно продолжить дальше и получить потенциалы следующего порядка малости φ_l , значение которых можно оценить так:

$$\varphi_l \sim \varphi_0 \left(\frac{a}{R} \right)^l \sim \frac{Q}{R} \left(\frac{a}{R} \right)^l. \quad (5.4)$$

Отметим, что дипольный момент системы не является однозначным и зависит от произвольного выбора начала отсчета. При смещении последнего ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$) имеет место преобразование $\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d} + \mathbf{r}_0 Q$. Отсюда ясно, что, если $Q \neq 0$, всегда можно выбрать такое $\mathbf{r}_0$, чтобы $\mathbf{d} = 0$. Это показывает, что дипольный момент характеризует смещение «центра» заряда. Если же $Q = 0$, то $\mathbf{d}$ однозначно описывает пространственное разделение разноименных зарядов. Элементарный диполь — система двух точечных зарядов $\pm q$, равных по величине и противоположных по знаку (рис. I.2, б), обладает дипольным моментом

$$\mathbf{d} = q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = q\mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ — вектор, направленный от положительного заряда к отрицательно-му и равный (по модулю) расстоянию между зарядами. То же направление имеет, конечно, и вектор $\mathbf{d}$ (рис. I.2, б). Квадрупольный, $D_{\alpha\beta}$, и секступольный, $S_{\alpha\beta\gamma}$, моменты являются тензорами второго и третьего порядков соответственно.

Высшие мультипольные моменты характеризуют различные деформации системы зарядов относительно сферически-симметричного случая. В частности, квадрупольный момент описывает сплюснутость или вытянутость системы.

Примеры мультиполей изображены на рис. I.3. Один из них — заряженный плоский конденсатор (конечных размеров!), дипольный момент которого $d = qh = EV/4\pi$.

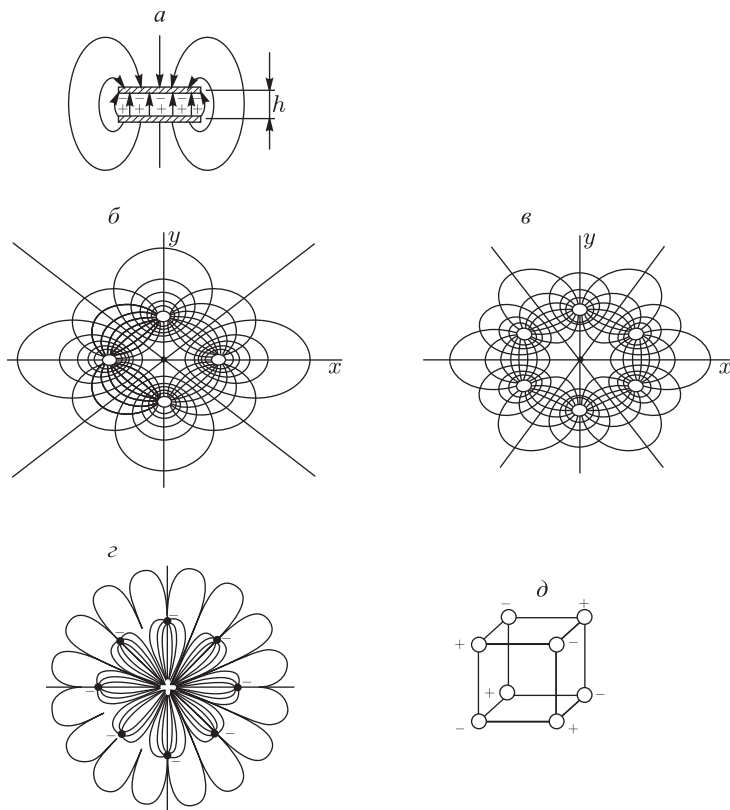


Рис. 1.3. Примеры мультиполей: *a* — плоский заряженный конденсатор; *б* — плоский квадруполь; *в* — плоский секступоль; *г* — *l*-поль; *д* — пространственный октуполь. На рисунке *a* и *г* показаны силовые линии электрического поля, на *б* и *в*, кроме того, эквипотенциальные кривые и линии симметрии поля

Задача 1.1. Найти напряженность дипольного поля.

Используя общую формулу $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, из (5.2) находим

$$\mathbf{E}_d = -\nabla\varphi_d = -\nabla\left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{d}}{R^3}\right) = -\frac{\mathbf{d}}{R^3} + \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{d})}{R^5}. \quad (5.5)$$

Процедура дифференцирования здесь аналогична использованной при выводе формул (5.2), (5.3). В декартовых координатах

$$\nabla = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}}, \quad R = \sqrt{\sum_{\alpha} X_{\alpha}^2}.$$

Напряженность дипольного поля по порядку величины равна

$$E_d \sim \frac{d}{R^3}.$$

Соответственно, для квадрупольного поля она составляет

$$E_d = |\nabla \varphi_2| \sim \frac{D}{R^4}.$$

Задача I.2. Найти силу, действующую на диполь в слабонеоднородном электрическом поле.

Разлагая точное выражение для силы, получим

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^2 q_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) \approx Q \cdot \mathbf{E}(0) - \sum_{i=1}^2 q_i (\mathbf{r}_i, \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} = (\mathbf{d}, \nabla) \mathbf{E}. \quad (5.6)$$

Мы приняли здесь, что полный заряд системы $Q = 0$ и $\mathbf{d} = \text{const}$, что справедливо для «твердых» диполей ($\mathbf{d}$ не зависит от $\mathbf{E}$). Последнее выражение можно преобразовать, используя свойство электростатического поля (2.5). Запишем оператор rot как двойное векторное произведение (см. Приложение I):

$$0 = (\mathbf{d} \times \text{rot } \mathbf{E}) \equiv (\mathbf{d} \times (\nabla \times \mathbf{E})) = \nabla(\mathbf{d}, \mathbf{E}) - (\mathbf{d}, \nabla) \mathbf{E}.$$

Отсюда $\mathbf{F} = (\mathbf{d}, \nabla) \mathbf{E} = \nabla(\mathbf{d}, \mathbf{E})$, что позволяет интерпретировать величину

$$U(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d}, \mathbf{E}) \quad (5.7)$$

как потенциальную энергию диполя во внешнем поле. Для *квазиупругих диполей* $\mathbf{d}$ пропорционален $\mathbf{E}$ (подробнее см. § 14). Поэтому, приняв $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}$, аналогично выводу формулы (5.7), запишем

$$0 = (\mathbf{d} \times \text{rot } \mathbf{E}) \equiv \alpha \cdot \left\{ \nabla \left(\mathbf{E}, \overset{\downarrow}{\mathbf{E}} \right) - (\mathbf{E}, \nabla) \mathbf{E} \right\} = \alpha \cdot \nabla \frac{E^2}{2} - (\mathbf{d}, \nabla) \mathbf{E}.$$

Здесь стрелка указывает, на какой из двух векторов $\mathbf{E}$ действует оператор градиента ∇ . Отсюда

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}, \nabla) \mathbf{E} = \alpha \cdot \nabla \left(\frac{E^2}{2} \right).$$

Таким образом, для квазиупругих диполей

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{(\mathbf{d}, \mathbf{E})}{2}. \quad (5.8)$$

Подчеркнем, что формулы (5.7), (5.8) получены при условии (2.5), что справедливо для электростатического поля (сравни § 45).

Формулы (5.2), (5.3) описывают значения потенциала вдали от системы зарядов. Часто, однако, появляется необходимость вычисления поля внутри системы. В частности, такие задачи появляются при расчете устройств электронной оптики (§ 57). В этом случае также можно воспользоваться разложением потенциала по малому параметру (задачи I.3, I.4).

Задача I.3. Найти потенциал и напряженность электрического поля вблизи центра системы зарядов, изображенных на рис. I.3, б, в.

Потенциал *плоского квадруполя* (рис. I.3, б) в точке (x, y)

$$\varphi_D(x, y) = q \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1}}{R_i},$$

$$R_{1,3} = \{a \mp x, y\}, \quad R_{2,4} = \{x, a \mp y\},$$

где a — расстояние зарядов от точки $x = y = 0$. Разлагая выражение

$$\varphi_D(x, y) = q \left\{ \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (a-y)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (a+y)^2}} \right\}$$

в ряд до членов порядка $(x/a)^2, (y/a)^2, xy/a^2$ ($x, y \ll a$), находим

$$\varphi_D(x, y) = \frac{3q}{a^3} (x^2 - y^2).$$

Компоненты электрического поля соответственно равны

$$E_x = -Gx, \quad E_y = Gy, \quad G = \frac{6q}{a^3}.$$

Уравнения эквипотенциалей в данном случае описываются формулой

$$y(x) = \sqrt{x^2 - C},$$

где C — константа (см. рис. I.3, б).

Для *плоского секступоля* (рис. I.3, в), шесть зарядов которого равномерно распределены по окружности радиуса a (знаки соседних зарядов противоположны), аналогично имеем

$$\varphi_S = q \sum_{i=1}^6 \frac{(-1)^{i-1}}{R_i},$$

$$R_{1,3} = \left\{ \frac{\sqrt{3}a}{2} \mp x, \left(\frac{a}{2} - y \right) \right\}, \quad R_{2,5} = \{x, a \mp y\}, \quad R_{4,6} = \left\{ \frac{\sqrt{3}a}{2} \pm x, \frac{a}{2} + y \right\}.$$

Теперь разложение дробей $1/R_i(x, y)$ нужно производить до членов третьего порядка малости. Все слагаемые, от нулевого до второго порядка, при суммировании взаимно сокращаются. Это имеет ясный физический смысл: поле такой системы зарядов не имеет составляющих от нулевой до квадрупольной. После довольно «утомительной» процедуры вычислений находим

$$\varphi_s(x, y) = \frac{15q}{4} \cdot \frac{y(3x^2 - y^2)}{a^4},$$

$$E_x = -3G_s xy, \quad E_y = G_s xy, \quad G_s = \frac{15q}{2a^4}, \quad x, y \ll a.$$

Задача I.4. Найти потенциал и напряженность электрического поля вблизи центра системы двух точечных диполей $\mathbf{d} = \pm \mathbf{e}_y \cdot d$, расположенных в точках $x_d = \pm a, y = 0$.

Потенциал такой системы зарядов найдем, используя формулу (4.3):

$$\varphi_D(x, y) = d \cdot y \left\{ \frac{1}{\left[(a-x)^2 + y^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(a+x)^2 + y^2 \right]^{3/2}} \right\}.$$

В данном случае достаточно разложить дроби в скобках до членов первого порядка. Получим

$$\varphi_D(x, y) = \frac{6d \cdot x \cdot y}{a^3}, \quad E_x = -Gy, \quad E_y = -Gx, \quad G = \frac{6d}{a^3}, \quad x, y \ll a.$$

Полученный результат показывает, что электрическое поле двух диполей имеет ту же структуру, что и поле квадруполь (отсюда выбор «квадрупольного» индекса D в обозначении потенциала). Аналогично можно убедиться, что поле системы трех диполей имеет секступольную составляющую, а при определенном расположении диполей и их ориентации дипольный момент такой системы равен нулю (это имеет место, например, для системы трех диполей, расположенных равномерно по окружности и ориентированных по касательной к ней).

Сравнивая результаты задач I.3 и I.4 для поля квадруполь, видим, что вид формул, описывающих эти поля, зависит от выбора системы координат, то есть расположения зарядов (что вполне естественно).

В природе электрическими мультипольными моментами обладают многие микрочастицы — молекулы, атомы, ядра. Как мы увидим дальше (§ 14 и табл. II.1), электрическими дипольными моментами (ЭДМ) обладают многие молекулы, и их наличие определяет электрические характе-

ристики вещества (диэлектрическую проницаемость). У атомов ЭДМ не найден. Известен лишь один более-менее надежный эксперимент по измерению ЭДМ атома ртути (изотопа ^{199}Hg), в котором установлено значение верхнего предела ЭДМ

$$d(^{199}\text{Hg}) < 2,1 \cdot 10^{-28} \text{ е} \cdot \text{см},$$

где e — заряд электрона. Это означает, что атомы имеют сферически симметричное распределение заряда (в классическом понимании).

Не менее интересная ситуация с атомными ядрами. Многие из них обладают электрическими квадрупольными моментами (ЭКМ), которые принято измерять в единицах $e \cdot \text{фм}^2$, e — заряд электрона^{*)}. Самый маленький из измеренных ЭКМ у изотопа лития ^6_3Li — всего $0,064(7) e \cdot \text{фм}^2$, а самый большой у изотопа лютеция $^{176}_{71}\text{Lu}$ — $800(70) e \cdot \text{фм}^{2**}$. А вот ЭДМ у ядер до сих пор обнаружить не удалось, хотя его существование не противоречит современным теоретическим представлениям.

Еще интереснее проблема ЭДМ элементарных частиц. Современная теория (так называемая «Стандартная модель») запрещает их ненулевой ЭДМ. Тем не менее его продолжают упорно искать, так как надежное измерение ЭДМ, например протона d_p или нейтрона d_n , указывало бы на существенные отклонения от Стандартной модели. До сих удалось только существенно снизить верхний предел этих величин (данные 2010 г.):

$$d_p < 0,54 \cdot 10^{-23} \text{ е} \cdot \text{см}, \quad d_n < 0,29 \cdot 10^{-25} \text{ е} \cdot \text{см}.$$

У электрона $d_e < 0,7 \cdot 10^{-27} \text{ е} \cdot \text{см}$.

§ 6. Закон сохранения потока электрического поля

Пользуясь понятием силовых линий, можно провести аналогию между электрическим полем и ламинарным течением несжимаемой жидкости. В последнем случае вводятся линии тока — кривые, вектор касательной к которым совпадает в каждой точке с вектором скорости жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Подобно силовым линиям, линии тока дают геометрическую картину по-

^{*)} 1 фм (фемтометр) = $1 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ = 1 ферми.

^{**) Цифры в скобках здесь и далее означают среднеквадратичную ошибку, с которой измерена данная величина — последние значимые ее цифры. Например, $0,064(7) = 0,064 \pm 0,007$, а $800(70) = 800 \pm 70$.}

ля скоростей жидкости. Другим полезным и наглядным понятием является понятие трубки тока, боковая поверхность которой образована линиями тока (рис. I.4). Аналогично можно говорить о трубке поля. Наконец, введем понятие потока

$$Q = \int_S (\mathbf{v}, d\mathbf{S}), \quad (6.1)$$

который пропорционален количеству жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени. Точно так же можно определить поток электрического поля:

$$N = \int (\mathbf{E}, d\mathbf{S}), \quad (6.2)$$

хотя он и не имеет такого наглядного физического смысла, как поток жидкости.

Легко видеть, что поток постоянен вдоль трубки поля, поскольку вектор $\mathbf{E}$ не пересекает ее боковой поверхности (т. е. $(\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 0$). С другой стороны, по определению (см. рис. I.4), линии поля также не пересекают трубки, а значит, внутри нее число линий остается постоянным. Отсюда можно заключить, что поток через некоторую поверхность пропорционален числу силовых линий, пересекающих ее, а напряженность $\mathbf{E}$ оказывается, в свою очередь, пропорциональной плотности линий поля.

Рассмотрим теперь поток через замкнутую поверхность, считая, что силовые линии, выходящие наружу (вектор $d\mathbf{S}$ направлен по внешней нормали), образуют положительный поток, а входящие — отрицательный. Если линии непрерывны, то входит и выходит их одинаковое число, и, следовательно, полный поток через замкнутую поверхность равен нулю. С другой стороны, на основании общей теоремы Остроградского–Гаусса можно написать

$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot dV = 0. \quad (6.3)$$

Это справедливо для произвольного объема, если всюду

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (6.4)$$

С геометрической точки зрения это есть условие непрерывности силовых линий.

Найдем поток поля точечного заряда q через произвольную замкнутую поверхность S . Если последняя не охватывает заряда, то силовые линии внутри нее непрерывны и, как мы видели выше, поток равен нулю. Если же q находится внутри, то предыдущее рассмотрение неприменимо,

так как силовые линии расходятся от заряда. Для вычисления потока в этом случае заметим, что он не зависит от формы S (рис. I.5), поскольку любую поверхность пересекает одно и то же число силовых линий. Выбрав в качестве S сферу, центр которой совпадает с q , получим

$$N = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q. \quad (6.5)$$

В силу принципа суперпозиции равенство остается справедливым и для произвольной системы зарядов, причем под q в (6.5) следует теперь понимать сумму зарядов, расположенных внутри замкнутой поверхности:

$$N = \oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi q. \quad (6.6)$$

Это соотношение называют обычно теоремой Гаусса. С физической точки зрения равенство (6.6) можно рассматривать как некоторый закон сохранения в том смысле, что поток не зависит от поверхности, а также и от времени при условии, что заряды не пересекают поверхность.

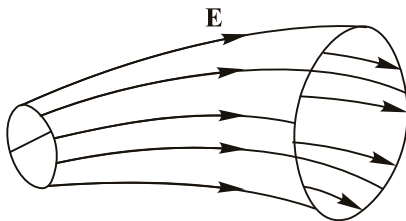


Рис. I.4. Трубка поля

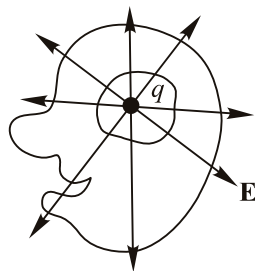


Рис. I.5. Закон сохранения потока электрического поля

Хотя электрический заряд дискретен, число его носителей в макроскопических телах столь велико, что можно ввести понятие плотности заряда, используя представление о непрерывном распределении последнего в пространстве,

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (6.7)$$

Здесь объем ΔV физически бесконечно мал, то есть он мал по сравнению с характерными размерами макроскопической системы, но велик по сравнению с микроструктурой тела (межатомными расстояниями).

С помощью плотности заряда закон сохранения потока можно записать в виде

$$4\pi \int \rho dV = \oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \langle E_n \rangle S, \quad (6.8)$$

где $\langle E_n \rangle$ — среднее значение нормальной составляющей поля по поверхности S . В отдельных случаях симметричных систем поверхность удается выбрать таким образом, что E_n остается постоянной на всей поверхности. Тогда закон сохранения потока позволяет вычислить все поле, а не только его среднее значение.

Задача I.5. Найти поле и потенциал равномерно заряженных шара (1), цилиндра (2), плоского слоя (3) и цилиндрической (аксиально-симметричной) системы зарядов с гауссовым распределением плотности заряда по радиусу (4).

1) Плотность заряда шара:

$$\rho(r) = \begin{cases} 3q/4\pi a^3, & r \leq a; \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (6.9)$$

В силу симметрии электрическое поле имеет только радиальную составляющую E_r , и в качестве поверхности можно выбрать сферу радиуса r , концентрическую с шаром. Согласно (6.8), получаем

$$E_r(r) = \begin{cases} qr/a^3; \\ q/r^2; \end{cases} \quad \varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{2a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right), & r \leq a; \\ q/r, & r > a, \end{cases} \quad (6.10)$$

где q, a — полный заряд и радиус шара. Здесь отсчет потенциала выбран так, что $\varphi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. Графики поля и потенциала (6.10) изображены на рис. I.6.

2) Аналогично для цилиндра

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \begin{cases} q_1/\pi a^2, & r \leq a; \\ 0, & r > a; \end{cases} \quad E_r(r) = \begin{cases} 2q_1 r/a^2, & r \leq a; \\ 2q_1/r, & r > a; \end{cases} \\ \varphi(r) &= -q_1 \cdot \begin{cases} r^2/a^2, & r \leq a; \\ 1 + 2\ln(r/a), & r > a; \end{cases} \end{aligned} \quad (6.11)$$

q_1 — заряд на единицу длины цилиндра радиуса a , $\varphi(0) = 0$.

3) Для плоского слоя

$$\rho(r) = \begin{cases} \sigma/2a, & |x| \leq a; \\ 0, & x > a; \end{cases} \quad E_x = \begin{cases} -2\pi\sigma, & x \leq -a; \\ 2\pi\sigma x/a, & |x| \leq a; \\ 2\pi\sigma, & x \geq a; \end{cases} \quad (6.12)$$

σ — заряд на единицу площади слоя толщиной $2a$, x — координата вдоль нормали к слою. К вопросу о потенциале заряженного слоя мы вернемся в следующем параграфе.

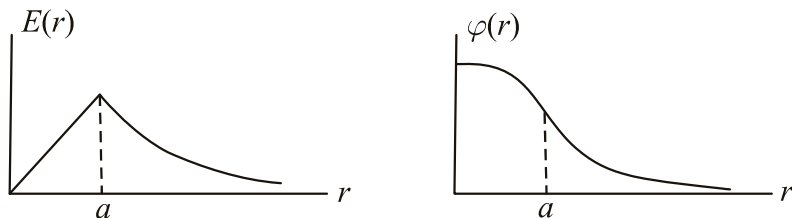


Рис. 1.6. Поле и потенциал равномерно заряженного шара

4) Плотность заряда в данной системе описывается формулой

$$\rho(r) = \frac{q_1}{2\pi a^2} \cdot e^{-r^2/2a^2}, \quad \int_0^\infty \rho(r) \cdot 2\pi r dr = q_1. \quad (6.13)$$

Отсюда, аналогично предыдущим пунктам, находим

$$E_r(r) = \frac{2q_1}{r} \left(1 - e^{-r^2/2a^2}\right) \xrightarrow{r \ll a} q_1 \frac{r}{a^2}. \quad (6.14)$$

Сравнив полученный результат с (6.11), видим, что выражения для $E_r(r)$ в (6.11) и (6.14) при $r \ll a$ совпадают при замене a^2 на $a^2/2$. Потенциал системы (при выборе $\varphi(0) = 0$) равен

$$\varphi(r) = -2q_1 \int_0^r \left(1 - e^{-x^2/2a^2}\right) \frac{dx}{x} = -q_1 \int_0^{\xi(r)} \left(1 - e^{-x}\right) \cdot \frac{dx}{x}, \quad \xi(r) = r^2/2a^2.$$

Представив экспоненту в виде ряда $e^{-x} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^n}{n!}$, получим

$$\varphi(r) = q_1 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\xi(r)} x^{n-1} \cdot dx = q_1 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \cdot \left(\frac{r^2}{2a^2}\right)^n \xrightarrow{r \ll a} -q_1 \frac{r^2}{2a^2}.$$

§ 7. Основное уравнение электростатики (уравнение Пуассона)

С помощью теоремы Остроградского–Гаусса запишем закон сохранения потока в виде

$$\oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot dV = \int 4\pi \rho dV. \quad (7.1)$$

Поскольку это соотношение справедливо для любой поверхности S , должно выполняться равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho. \quad (7.2)$$

Учитывая, что $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, можно написать

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho, \quad (7.3)$$

где символ Δ обозначает оператор Лапласа:

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (7.4)$$

Последнее выражение записано в декартовых координатах.

На этом примере видно, что с дифференциальным оператором ∇ можно обращаться как с вектором, значительно упрощая анализ. В частности, оператор Δ есть просто скалярный квадрат (∇, ∇) , а $\operatorname{div} \mathbf{E} = (\nabla, \mathbf{E}) = \partial E_i / \partial x_i$ (здесь и дальше мы опускаем знак суммы, подразумевая суммирование по повторяющимся индексам).

Соотношение (7.3), или эквивалентное ему (7.2), называют *основным уравнением электростатики*, так как оно дает возможность находить электрическое поле произвольной системы покоящихся зарядов. Уравнение (7.3) носит название *уравнения Пуассона*, а его частный случай $\Delta \varphi = 0$ — *уравнения Лапласа*.

В качестве примера применения уравнения Пуассона рассмотрим разобранные в § 6 три первых случая в задаче I.5. Начнем с потенциала однородно заряженного слоя. В силу симметрии он зависит только от x , поэтому

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \begin{cases} 2\pi\sigma/a, & |x| \leq a; \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases} \quad (7.5)$$

Фактически имеются три различные области поля: $x \leq -a$; $|x| \leq a$; $x \geq a$. Проинтегрируем уравнение (7.5) в каждой из этих областей:

$$\varphi = \begin{cases} Ax + B, & x \leq -a; \\ -\frac{\pi\sigma x^2}{a} + Cx + D, & |x| \leq a; \\ Fx + G, & x \geq a, \end{cases} \quad (7.6)$$

где A, B, C, D, F, G — постоянные интегрирования. Одна из постоянных B, D, G может быть выбрана произвольно в силу неоднозначности потенциала. Положим, например, $\varphi(0) = 0$, откуда $D = 0$. Далее, вследствие симметрии поля относительно плоскости $x = 0$, имеем $F = -A$; $G = B$; $C = 0$. Оставшиеся две постоянные, например A, B , можно найти, «сшивая» решения в разных областях на границе между ними. На границе должны выполняться как раз два условия:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}. \quad (7.7)$$

Первое означает непрерывность потенциала (в противном случае на границе возникали бы бесконечные поля), второе — непрерывность поля, что в силу уравнения (7.2) эквивалентно конечной плотности заряда (скачок поля возможен при бесконечно тонком слое зарядов на границе). В рассматриваемом примере эти условия записываются в таком виде (при $x = -a$): $-Aa + B = -\pi\sigma a$; $A = 2\pi\sigma$. Окончательно получаем

$$\varphi = \begin{cases} \pi\sigma(2x + a), & x \leq -a; \\ -\pi\sigma x^2/a, & |x| \leq a; \\ -\pi\sigma(2x - a), & x \geq a, \end{cases} \quad (7.8)$$

что совпадает с (6.12).

Задача I.6. Найти поле слоя зарядов, расположенного при $x = 0$, в плотной квазинейтральной плазме на больших расстояниях от слоя.

В соответствии с распределением Больцмана плотность зарядов разного знака в плазме, находящейся в электрическом поле, дается выражением $n_{\pm} = n_0 e^{\mp e\varphi/T}$, где T, n_0 — температура и плотность невозмущенной плазмы ($|x| \rightarrow \infty$). Тогда уравнение Пуассона принимает вид^{*)}

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -4\pi e(n_+ - n_-) \approx \frac{8\pi n_0 e^2 \varphi}{T} \quad (7.9)$$

^{*)} Здесь и далее, если специально не оговорено, температура измеряется в энергетических единицах электрон-вольт (эВ). В этом случае постоянная Больцмана $k_B = 1$.

при условии, что $e\varphi \ll T$. Отсюда

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(0)e^{-|x|/l_D}, \\ E(x) &= E(0)e^{-|x|/l_D}, \quad l_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi n_0 e^2}},\end{aligned}\tag{7.10}$$

то есть потенциал и электрическое поле затухают экспоненциально на характерной длине l_D , называемой *радиусом Дебая*.

Если не ограничиваться случаем $e\varphi \ll T$, то решение уравнения (7.9) для бесконечной плотности заряда при $x = 0$ имеет такой вид:

$$eE(x) = \frac{2T}{l_D \operatorname{Sh}(x/l_D)} \rightarrow \begin{cases} \frac{4T}{l_D} e^{-x/l_D}, & x \gg l_D; \\ \frac{2T}{x}, & x \ll l_D. \end{cases}$$

Если ввести локальный радиус Дебая $l^2(x) = T/8\pi e^2 n_-(x)$, то при $x \ll l_D$ получим $x/l(x) = 1/2$.

Вернемся к задаче о потенциале равномерно заряженного шара (6.10). Записав уравнение Лапласа в сферических координатах и учтя сферическую симметрию поля такого шара, имеем

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -4\pi\rho(r),$$

где $\rho(r)$ описывается формулой (6.9). После двукратного интегрирования получаем

$$\frac{d\varphi}{dr} = \begin{cases} -\frac{qr}{a^3}, & r \leq a; \\ -\frac{A}{r^2}, & r \geq a; \end{cases} \quad \varphi(r) = \begin{cases} -\frac{qr^2}{2a^3} + B, & r \leq a; \\ \frac{A}{r} + C, & r \geq a, \end{cases}$$

где A , B и C — константы (ср. (6.10)). Используя граничные условия (7.7) для полей и потенциалов при $r = a$ и $r \rightarrow \infty$ ($\varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$), найдем

$$A = q, \quad B = \frac{3q}{2a}, \quad C = 0.$$

В результате приходим к формуле для потенциала в (6.10).

Задача о потенциале равномерно заряженного цилиндра решается аналогично. С учетом аксиальной симметрии запишем

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -4\pi \cdot \begin{cases} \frac{q_1}{\pi a^2}, & r \leq a; \\ 0, & r \geq a, \end{cases}$$

где q_1 по-прежнему заряд на единицу длины цилиндра радиуса a . Тогда

$$\frac{d\varphi}{dr} = \begin{cases} -\frac{2q_1 r}{a^2}, & r \leq a; \\ -\frac{A_c}{r}, & r \geq a; \end{cases} \quad \varphi(r) = \begin{cases} -\frac{q_1 r^2}{a^2} + B_c, & r \leq a; \\ -A_c \ln r + D_c, & r \geq a. \end{cases} \quad (7.11)$$

В отличие от предыдущего случая потенциал заряженного цилиндра логарифмически расходится при $r \rightarrow \infty$. Поэтому в качестве радиуса отсчета выберем ось цилиндра, положив $\varphi(0) = 0$. Граничные условия (7.7) в этом случае дают

$$A_c = 2q_1, B_c = 0, D_c = -q_1(1 - 2\ln a).$$

В результате

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\frac{q_1 r^2}{a^2}, & r \leq a; \\ -q_1 \left(1 - 2 \ln \frac{a}{r} \right), & r \geq a. \end{cases} \quad (7.12)$$

Практический интерес представляет случай, когда заряженный цилиндр окружен коаксиальным с ним проводящим заземленным цилиндром радиуса $b > a$. Условие $\varphi(b) = 0$ дает $D_c = A_c \cdot \ln b$, а условия при $r = a$, соответственно

$$A_c = 2q_1, B_c = q_1(1 + 2\ln(b/a))$$

(см. также задачу I.19 ниже). И тогда поле коаксиальных цилиндров описывается выражениями

$$E_r(r) = \begin{cases} 2q_1 r / a^2, & r \leq a; \\ 2q_1 / r, & r \geq a; \end{cases} \quad \varphi(r) = \begin{cases} q_1 (1 - r^2/a^2 + 2\ln(b/a)), & r \leq a; \\ 2q_1 \cdot \ln b / r, & r \geq a. \end{cases} \quad (7.13)$$

В общем случае уравнение Пуассона невозможно проинтегрировать аналитически. Это значит, что его решение не выражается через известные функции. То же самое имеет место и для обыкновенных дифференциальных уравнений (например, в механике). Это связано с тем, что при ин-

тегрировании, в отличие, например, от дифференцирования, класс функций расширяется. Поэтому существуют лишь отдельные приемы интегрирования, применение которых ограничено определенным классом задач. Практически всегда нужно в какой-то степени угадать решение. Отсюда традиционная фраза теоретика: «Будем искать решение этого уравнения в виде...». Обычно такое «угадывание» производится из физических соображений. В частности, очень важное значение имеет выбор системы координат. Так, в рассмотренных выше примерах выбор координат диктовался симметрией системы. В результате сложное уравнение в частных производных свелось к обыкновенному дифференциальному уравнению. Заметим, что последнее удалось проинтегрировать благодаря тому, что плотность заряда в каждой из областей постоянна. При произвольном, хотя бы и симметричном, распределении заряда это уравнение, конечно, не интегрируется аналитически. В таком случае остается только численное интегрирование на ЭВМ, что всегда выполнимо.

§ 8. Общее решение уравнения Пуассона.

Понятие о δ -функции

Используя принцип суперпозиции и выражение для кулоновского потенциала, можно выразить потенциал зарядов, произвольно распределенных в ограниченном объеме, в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (8.1)$$

где интеграл берется по всему пространству. Это выражение называют иногда общим решением уравнения Пуассона, однако оно записано здесь в неявной форме, так как в общем случае интеграл не берется. Тем не менее такая форма решения очень удобна для получения различных приближенных выражений и оценок, например для мультипольного разложения (см. § 5). Отметим, что здесь мы положили $\varphi(\infty) = 0$.

Можно ли применять выражение (8.1) в случае дискретного распределения заряда, например, для одного точечного заряда? Оказывается, что это возможно с помощью специальной функции, изобретенной английским физиком Дираком, так называемой δ -функции. Для одного заряда q , расположенного в точке $\mathbf{r}_0$, положим

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (8.2)$$

Ясно, что введенная таким образом δ -функция должна обладать следующими необычными свойствами^{*)}.

1. $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ всюду, кроме $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, так как заряд точечный.
2. Плотность заряда в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ бесконечна, т. е. $\delta(0) = \infty$.
3. $\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = 1$, так как полный заряд равен q .
4. $\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0)$, где $f(\mathbf{r})$ — любая непрерывная функция.

С физической точки зрения распределение заряда в виде δ -функции можно представить как очень узкое распределение, ширина которого много меньше характерных размеров задачи (рис. I.7). Например,

$$\delta(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-r^2/2a^2}}{(2\pi a^2)^{3/2}}. \quad (8.3)$$

Подставляя выражение (8.2) в (8.1), найдем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int q \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (8.4)$$

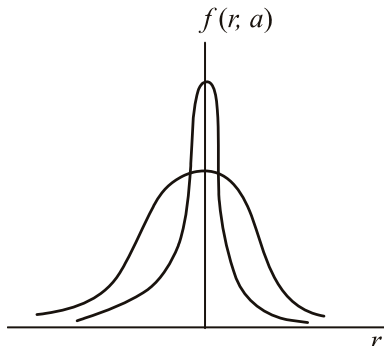


Рис. I.7. Поведение функции (8.3) при $a \rightarrow 0$; $\lim_{a \rightarrow 0} f(r, a) \equiv \delta(r)$

Интегрирование здесь производится фактически по бесконечно малому объему вокруг точки $\mathbf{r}_0$, где все функции, кроме $\delta(\mathbf{r})$, можно считать постоянными. Отсюда и из соотношений (7.3) и (8.2) находим еще одно представление δ -функции:

$$\delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{r} \right). \quad (8.5)$$

^{*)} Введение δ -функции вызвало отчаянное сопротивление некоторых математиков. Например, И. фон Нейман в 1932 г. писал: «Дирак лицемерно (!) допустил существование функций такого рода» (Математические основания квантовой механики. — М.: Наука, 1964, с. 27).

Теперь можно проверить непосредственно, что общее решение (8.1) действительно удовлетворяет уравнению Пуассона. Имеем

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \int \rho(\mathbf{r}') (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) dV' = -4\pi\rho(\mathbf{r}).$$

Обратим внимание, что здесь дифференцированный оператор Δ (лапласиан) действует на компоненты радиуса-вектора $\mathbf{r}$.

Одно из полезных представлений δ -функции дает формула

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{x}.$$

Чтобы убедиться в справедливости этого результата, достаточно заметить, что функция $f(x) = \sin \alpha x / x$ имеет период

$$T_x = \frac{2\pi}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0,$$

и ее максимум есть $f(0) = \alpha$. Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx \frac{1}{2} \cdot f(0) \cdot \frac{2\pi}{\alpha} = \pi.$$

§ 9. Энергия электрического поля

Энергия кулоновского взаимодействия системы дискретных зарядов

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N q_i \varphi_{ij}, \quad (9.1)$$

где r_{ij} — расстояние между зарядами q_i , q_j , а φ_{ij} — потенциал поля заряда q_j в точке, где находится заряд q_i . Множитель $1/2$ связан с тем, что при суммировании каждая пара встречается дважды. При переходе к непрерывному распределению зарядов выражение (9.1) превращается в

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \varphi \Delta \varphi dV. \quad (9.2)$$

Интересно отметить, что физический смысл последнего соотношения теперь уже несколько иной. В то время как (9.1) описывает только энергию

взаимодействия разных зарядов ($i \neq j$), формула (9.2) включает также и собственную энергию каждого из них (т. е. взаимодействие их элементов, взаимодействие «внутри» каждого из зарядов). В терминах поля можно сказать, что (9.2) описывает полную энергию электрического поля системы, тогда как (9.1) — только часть этой энергии.

Преобразуем (9.2), используя тождество (см. Приложение I, пункт П. 1.7, б) $\operatorname{div}(\phi \nabla \phi) \equiv (\nabla, (\phi \nabla \phi)) = (\nabla \phi)^2 + \phi \Delta \phi$:

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int (\operatorname{div}(\phi \nabla \phi) - (\nabla \phi)^2) dV = \frac{1}{8\pi} \int_S \phi \cdot (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) + \int \frac{E^2}{8\pi} dV. \quad (9.3)$$

Для любой ограниченной системы зарядов первый интеграл стремится к нулю при $S \rightarrow \infty$, так как потенциал такой системы убывает на больших расстояниях, по крайней мере как $1/r$, а E — как $1/r^2$ (см. § 5).

Величину $E^2/8\pi$ можно интерпретировать теперь как плотность энергии электрического поля:

$$w = E^2/8\pi. \quad (9.4)$$

Проделанный вывод справедлив только для электростатического поля (в общем случае возможен поток энергии излучения на бесконечности), тем не менее полученный результат оказывается общим (см. § 55).

Задача 1.7. Вычислить энергию поля равномерно заряженного шара радиуса a .

С помощью выражения (6.10) найдем

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^a \frac{q^2 r^2}{a^6} 4\pi r^2 dr + \frac{1}{8\pi} \int_a^\infty \frac{q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} \cdot \frac{q^2}{a}. \quad (9.5)$$

Согласно теории относительности, такое поле имеет массу $m = W/c^2$. Отсюда вытекает, в частности, что любая частица с массой m и зарядом e не может иметь размер, меньший

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2}, \quad (9.6)$$

так как масса частицы не может быть меньше массы ее поля. Этот результат справедлив, конечно, только в пределах применимости классической механики. Поэтому величина (9.6) называется классическим «радиусом» частицы. На расстояниях такого порядка классическая электродинамика становится неприменимой. Фактически она нарушается уже на расстоя-

ниях $\sim \hbar/mc$ из-за квантовых эффектов. Для электрона классический радиус $r_e \approx 2,8 \cdot 10^{-13}$ см, а квантовый радиус $\sim \hbar/mc \approx 4 \cdot 10^{-11}$ см. Отметим, что квантовый «размер» электрона проявляется только в некоторых низкочастотных процессах (например, в атомах), тогда как при столкновении электрона высокой энергии с другими частицами он ведет себя как «точечный». Результаты экспериментов свидетельствуют о том, что в последнем случае «размер» электрона не превышает $1 \cdot 10^{-16}$ см (§ 13).

§ 10. Проводник в электрическом поле

Вещество, в котором имеются свободные заряды (обычно электроны), называется проводником (электрического тока). Примерами проводников являются металлы (свободные электроны), электролиты (ионы), плазма (ионизированный газ — электроны и ионы). Для электростатических явлений поле внутри проводника равно нулю по определению ($E_i = 0$). Действительно, если $E_i \neq 0$, то возникает электрический ток, и мы выходим за рамки электростатики (см. § 20). Механизм исчезновения поля в проводнике связан со смещением свободных зарядов под действием внешнего поля как раз настолько, чтобы компенсировать внешнее поле^{*)}. Пример такой компенсации внутри проводящей пластинки изображен на рис. I.8. Заряды, возникающие на поверхности проводника при его внесении в электрическое поле, называют *наведенными* или *индуцированными* (от лат. *inductio* — наведение). Иногда наведенные заряды называют также *связанными*.

Поскольку $E_i = 0$, то и плотность заряда внутри проводника $\rho_i = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} E_i = 0$. Говорят, что проводник квазинейтрален. Избыточные заряды в проводнике могут размещаться только на его поверхности.

Введем поверхностную плотность заряда

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (10.1)$$

^{*)} Это справедливо только при нулевой температуре свободных зарядов. В противном случае поле сохраняется на размере порядка радиуса Дебая l_D (7.10). Хотя в пределах дебаевского слоя и существует электрическое поле, его сила компенсируется градиентом давления, так что ток равен нулю.

Все точки проводника имеют один и тот же потенциал ($E_i = 0$). В частности, поверхность проводника эквипотенциальна, а внешнее электрическое поле перпендикулярно к ней. Действительно, если вектор $\mathbf{E}$ имеет ненулевую составляющую E_τ , касательную к поверхности проводника, в нем возникает смещение зарядов вдоль поверхности, что приведет к «занулению» E_τ . Применяя теорему Гаусса к элементу поверхности проводника, получим

$$E_n = 4\pi\sigma. \quad (10.2)$$

Обратим внимание на правило выбора знака наведенных зарядов. Записав соотношение (10.2) в векторной форме (6.6), $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\sigma \cdot dS$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности и наружу от нее, находим

$$\begin{aligned} \sigma &> 0, \quad \text{если} \quad \mathbf{E}_n \parallel \mathbf{n}, \\ \sigma &< 0, \quad \text{если} \quad \mathbf{E}_n \parallel -\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Это хорошо видно на рис. 1.8.

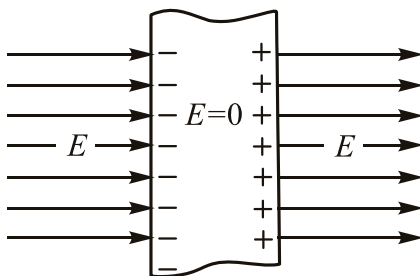


Рис. 1.8. Проводящая пластинка в однородном электрическом поле

Полезно запомнить простое правило: силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

Как распределяется заряд по поверхности? Поскольку одноименные заряды отталкиваются друг от друга, они стремятся разойтись в проводнике как можно дальше. Это приводит к накоплению заряда на наиболее удаленных частях, например на остриях. Поле вблизи острия можно приблизительно представить как поле заряженной сферы того же радиуса кривизны. Отсюда напряженность поля и плотность заряда на острие равны $E \sim 4\pi\sigma \sim \varphi/r$, где φ — потенциал проводника относительно соседних тел.

Отметим, что формула (10.2) справедлива для «толстого» проводника, внутри которого поле отсутствует. Это хорошо видно на рис. 1.8, где заряды на левой и правой поверхностях пластины имеют противополож-

ные знаки. Если применить теорему Гаусса к расчету поля *слоя зарядов* (например, тонкая проводящая пластина, на которую помещен заряд q), то аналогично (10.2) получим

$$E_n = 2\pi\sigma,$$

где σ — плотность заряда (10.1). В этом случае поле по обе стороны слоя направлено в противоположные стороны.

Методы расчета электрического поля в пространстве, содержащем заряженные проводники, развиты достаточно хорошо. Особенно успешно используются сегодня численные методы, которые почти полностью вытеснили сложные аналитические методы. Тем не менее во многих случаях возникает необходимость аналитических расчетов^{*)}. Наиболее простым и физически ясным является *метод изображений*. Начнем его объяснение с простого примера (задача I.8.).

Задача I.8. Заряд q находится на расстоянии h от плоской проводящей поверхности. Найти распределение электрического поля по поверхности и полный наведенный заряд, а также силу, действующую на заряд q .

Поскольку силовые линии электрического поля ортогональны проводящей поверхности, то достаточно очевидно, что геометрия поля та же, что и у диполя с зарядами q и $q' = -q$ и расстоянием между ними $a = 2h$ (рис. I.9). Картина поля аксиально симметрична относительно прямой, проходящей через заряд, и ортогональной проводящей плоскости. Поле на плоскости $z = 0$ равно векторной сумме полей $E^{(+)}$ и $E^{(-)}$ зарядов $\pm q$:

$$E(r, 0) = -e_z 2q \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Наведенный заряд, согласно (10.2), равен

$$q' = \iint \sigma dS = 2\pi \int_0^\infty \left(-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2qh}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \right) r \cdot dr = -q. \quad (10.4)$$

Теперь очевидно, что на заряд q действует сила притяжения со стороны проводящей плоскости, равная

$$F = qE^{(-)}(0, h) = -e_z \frac{q^2}{(2h)^2}.$$

^{*)} Такая необходимость появляется, если нужно исследовать зависимость какой-либо физической величины от параметров. Если решение в аналитических функциях существует, то получить такую зависимость проще, исследуя поведение соответствующей функции, чем проводить объемное численное моделирование. Впрочем, как правило, одно не исключает другого.

Заряд q' называют изображением заряда q (image charge — англ.). Конечно, реальными (физическими) являются заряды, наведенные зарядом q на проводящей плоскости. Они возникают в данном случае под действием поля заряда q , притягивающего свободные электроны проводника (см. § 21), и «привязаны» к этому заряду. Заряд изображения — мнимый, его величина и положение выбираются так, чтобы электрическое поле в «реальном» пространстве — между плоскостью и зарядом q — совпадало с полем двух точечных зарядов q и q' .

Рассмотренный простейший пример позволяет указать на определенное правило выбора положения и величины заряда-изображения: эквивалентная система зарядов — заряд + его изображение — должна создавать такое поле, чтобы плоскость-отражатель оставалась эквипотенциальной, а форма силовых линий поля зарядов совпадала с формой реального поля. Ясно, что эти условия выполняются при зеркальном расположении изображения, заряд которого равен по величине и противоположен по знаку реальному заряду.

Задача 1.9. Показать, что поле заряда, находящегося на расстоянии z от проводящей заземленной плоскости совпадает с полем заряда и его изображения (рис. 1.9).

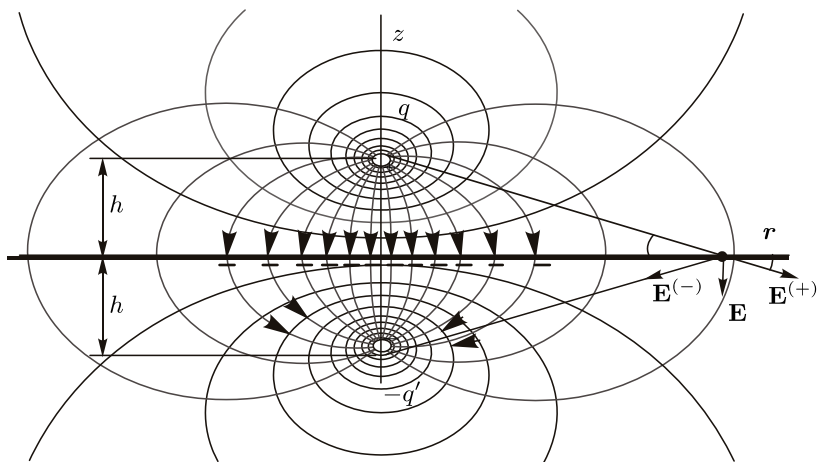


Рис. 1.9. Электрическое поле заряда над проводящей плоскостью

В соответствии с основным требованием метода зарядов-изображений нужно убедиться, что у поля системы двух зарядов, $\pm q$, нулевая эквипотенциальная поверхность совпадает с проводящей плоскостью. Для этого достаточно записать выражение для потенциала системы двух зарядов

$$\varphi(r, z) = q \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} \right), \quad (10.5)$$

где ось z цилиндрической системы координат (r, z) совпадает с прямой, соединяющей заряды, а начало координат равно удалено от обоих зарядов. Тогда потенциал в плоскости $(r, 0)$ тождественно равен нулю, что и требовалось показать.

Проблема построения изображений усложняется в случае нескольких проводящих поверхностей, а также их неплоской формы (задачи I.10–I.17).

Задача I.10. Найти силу, действующую на заряд, расположенный внутри прямого угла, образованного проводящими плоскостями (рис. I.10).

Пусть заряд q расположен в точке $(x_q = a, y_q = b, z_q = 0)$, где оси координат x, y лежат в проводящих плоскостях, а ось z совпадает с гранью угла. Два изображения заряда q в плоскостях $x = 0$ и $y = 0$ имеют заряды $-q$ и находятся в точках $(-a, b, 0)$ и $(a, -b, 0)$ соответственно. Но теперь нужно учесть «изображения изображений». Нетрудно видеть, что заряд $+q$ в точке $(-a, -b, 0)$ является одновременно изображением двух первых изображений. В результате система «заряд + его изображения» оказалась замкнутой! Это еще одно правило формирования системы изображений. Сила, действующая на заряд q , имеет компоненты

$$F_x = q^2 \cdot \left(\frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{4a^2} \right) < 0,$$

$$F_y = q^2 \cdot \left(\frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{4b^2} \right) < 0,$$

$$|F_x| > |F_y|, \quad \text{если } a < b.$$

Таким образом, заряд втягивается в угол (независимо от своего знака, так как q^2 !) и преимущественно к ближайшей из двух плоскостей.

Аналогично решается задача для угла $\alpha = 2\pi/n$, где n — целое: заряд и его изображения располагаются в вершинах n -угольника.

Задача I.11. Построить систему изображений заряда q , расположенного на биссектрисе двугранного угла в 60° , образованного двумя полубесконечными проводящими плоскостями, на расстоянии l от вершины угла (рис. I.11). Найти потенциал и напряженность поля внутри угла.

Выберем декартову систему координат так, что ось y лежит в одной из плоскостей угла, а ось z совпадает с гранью угла (рис. I.11). Начало координат выберем так, что заряд q лежит в точке $(l/2, \sqrt{3}l/2, 0)$. Следуя задаче I.10, найдем (замкнутую!)

систему изображений заряда q . Они расположены в вершинах правильного шестиугольника, в одной из которых находится заряд q . Потенциал в точке (x, y, z) равен

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n=1}^6 \frac{q_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x_{ni})^2}},$$

где $x_i = (x, y, z)$ — координаты точки наблюдения, $x_{ni} = (x_n, y_n, z_n)$ — координаты заряда номер n на рис. I.11 (табл. I.1).

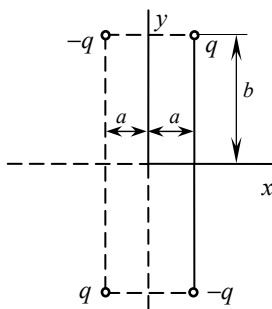


Рис. I.10. Заряд внутри двух плоскостей, пересекающихся под прямым углом, и его изображения

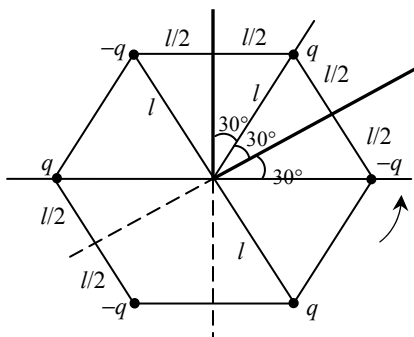


Рис. I.11. Заряд q на биссектрисе двугранного 60-градусного угла и система его изображений

Система изображений еще более усложняется, если заряд помещен между двумя параллельными проводящими плоскостями (рис. I.12). Очевидно, что сила, действующая на заряд, расположенный между плоскостями и равноудаленный от них, равна нулю. При этом на каждой из пластин наводится заряд $-q/2$. При смещении заряда в направлении одной из пластин на расстоянии z_q симметрия нарушается и появляется сила притяжения, равная по порядку величины

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 \sim \mathbf{e}_x \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{(d - z_q)^2} - \frac{1}{(d + z_q)^2} \right) \sim \mathbf{e}_x \frac{2q^2 z_q}{d^3}, \quad z_q \ll d \quad (10.6)$$

(см. задачу I.13 ниже).

Таблица I.1. Координаты заряда q и его изображений в задаче I.11 (отсчет от заряда q против часовой стрелки)

Номер заряда	Заряд	x_n	y_n	z_n
1	q	$l/2$	$l\sqrt{3}/2$	0
2	$-q$	$-l/2$	$l\sqrt{3}/2$	0
3	q	l	0	0
4	$-q$	$-l/2$	$-l\sqrt{3}/2$	0
5	q	$l/2$	$-l\sqrt{3}/2$	0
6	$-q$	l	0	0

Задача I.12. Заряд q находится между двумя бесконечными проводящими параллельными плоскостями, которые заземлены. Найти систему зарядов-изображений, электрическое поле которых в пространстве между плоскостями совпадает с полем системы заряд-плоскости. Вычислить электрическое поле в пространстве между пластинами.

Пусть расстояние между плоскостями равно $2d$, а заряд q находится в точке A_0 ($0, z_q > 0$) цилиндрической системы координат, ось z которой ортогональна плоскостям и проходит через заряд q , а начало координат равноудалено от обеих плоскостей (рис. I.12).

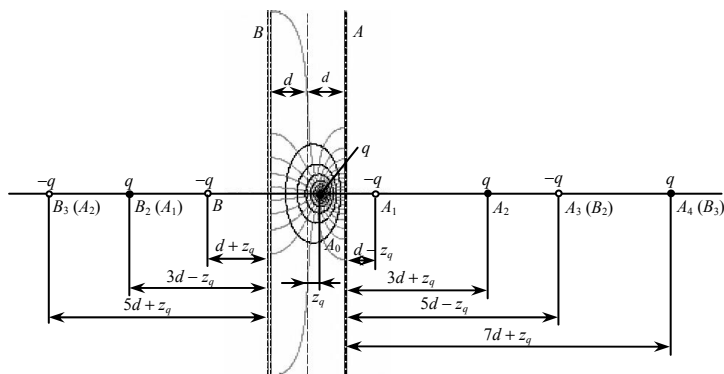


Рис. I.12. Заряд q между двумя проводящими пластинами и его изображения. Силовые линии и эквипотенциалы поля заряда получены численным моделированием

Следуя задаче I.8, поместим первый заряд-изображение в точке A_1 , зеркально симметричной точке A_0 относительно плоскости A , и выберем величину заряда-изображения равной $-q$. Аналогично поступим с зарядом-изображением для плоскости B . Но пока это всего лишь догадка, предположение, что так нужно выбирать систему зарядов-изображений. И основная догадка основана на том, что по отдельности поля зарядов в точках A_0 и A_1 и в точках A_0 и B_1 имеют плоские эквипотенциальные поверхности, совпадающие с плоскостями A и B соответственно. Однако, как только мы переходим к системе трех зарядов, в точках A_0 , A_1 и B_1 это совпадение нарушается. А значит, такая система трех зарядов не эквивалентна системе «заряд между двумя плоскостями». Поэтому нужно «придумать» более сложную систему. Напрашивается естественный шаг — попытаться построить систему «изображений изображений» и построить ее так, чтобы она правильно формировала поле между плоскостями. Начнем с заряда-изображения $-q$ в точке A_1 при его отражении в плоскости B , поместив заряд $+q$ в точку $B_2(A_1)$. Аналогично, изображение заряда $-q$ в точке B_1 при его отражении в плоскости A есть заряд $+q$ в точке $A_2(B_1)$, и т. д. В результате появляется система зарядов-изображений, параметры которой представлены в табл. I.2. Здесь A_n (B_{n-1}) — точка-изображение заряда q_{n-1} из точки B_{n-1} в плоскости A , B_n (A_{n-1}) — то же для заряда q_{n-1} из точки A_{n-1} в плоскости B .

Таблица I.2. Координаты зарядов-изображений (рис. I.12.)

Номер изображения n	1	2	3	n
Отражения в плоскости A				
Точка изображения	A_1	$A_2(B_1)$	$A_3(B_2)$	$A_n(B_{n-1})$
Заряд, q_n	$-q$	$+q$	$-q$	$(-1)^n q$
z -координата точки, z_{A_n}	$2d - z_q$	$4d + z_q$	$6d - z_q$	$2nd + (-1)^n z_q$
Отражения в плоскости B				
Точка изображения	B_1	$B_2(A_1)$	$B_3(A_2)$	$B_n(A_{n-1})$
Заряд, q_n	$-q$	$+q$	$-q$	$(-1)^n q$
z -координата точки, z_{B_n}	$-(2d + z_q)$	$-(4d - z_q)$	$-(6d + z_q)$	$-2nd + (-1)^n z_q$

Зная координаты реального заряда и его изображений, не составляет труда записать потенциал точки пространства между пластинами (сравни (10.5)):

$$\varphi(r, z) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + (z - z_q)^2}} +$$

$$+ q \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_{A_n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_{B_n})^2}} \right\}. \quad (10.7)$$

Потенциал в плоскости A найдем, положив $z = d$ и подставив значения z_{A_n} , z_{B_n} из табл. I.2:

$$\begin{aligned}\varphi_A(r) &\equiv \varphi(r, d) = q \cdot \left[a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r) + b_n(r)) \right], \\ a_0(r) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (d - z_q)^2}}, \quad a_n(r) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{r^2 + [(2n-1)d + (-1)^n z_q]^2}}, \\ b_n(r) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{r^2 + [(2n-1)d + (-1)^{n+1} z_q]^2}}.\end{aligned}\quad (10.8)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}a_1 &= -\frac{1}{\sqrt{r^2 + (d - z_q)^2}}, \quad b_1 = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + (3d + z_q)^2}}, \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (3d + z_q)^2}}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (5d - z_q)^2}}, \\ a_3 &= -\frac{1}{\sqrt{r^2 + (5d - z_q)^2}}, \quad \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$a_0 = -a_1, \quad a_2 = -b_1, \quad a_3 = -b_2, \quad \dots, \quad a_n = -b_{n-1}.$$

В результате при суммировании ряда (10.7) происходит сокращение слагаемых, и сумма стремится к нулю:

$$\begin{aligned}a_0(r) + \sum_{n=1}^N (a_n(r) + b_n(r)) &= b_N(r) = \\ &= \frac{(-1)^N}{\sqrt{r^2 + [(2N-1)d + (-1)^{N+1} z_q]^2}} \xrightarrow{N \gg 1} \frac{(-1)^N}{2Nd} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Аналогично можно убедиться, что потенциал плоскости пластины B для данной системы зарядов также равен нулю. Тем самым показано, что система зарядов-изображений вместе с зарядом q правильно описывает поле в пространстве между пластинами A и B .

Заметим, что потенциалы плоскостей A и B для данной системы зарядов можно получить, не используя формулы (10.7), (10.8), а всего лишь внимательно посмотрев на расположение зарядов на рис. I.12. Видим, что пары зарядов-изображений A_n (B_{n-1}) и B_{n-1} (A_{n-2}), имеющие противоположные знаки, равноудалены от плоскости A , а значит, они (попарно) не вносят вклада в значение потенциала этой плоскости. То же верно для пары зарядов A_0 и A_1 . Аналогично обстоит дело с потенциалом плоскости B : пары зарядов-изображений B_n (A_{n-1}), A_{n-1} (B_{n-2}) и пара зарядов A_0 , B_1 .

Напряженность электрического поля в точке (r, z) между пластинами найдем, используя формулу (10.7) для потенциала. В данной задаче нас интересует z -компонента поля, так как у поверхности проводящей пластины существует только эта компонента. Получим

$$E_z(r, z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{q(z - z_q)}{\left[r^2 + (z - z_q)^2\right]^{3/2}} + q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times$$

$$\times \left\{ \frac{z - 2nd - (-1)^n z_q}{\left[r^2 + (z - 2nd - (-1)^n z_q)^2\right]^{3/2}} + \frac{z + 2nd - (-1)^n z_q}{\left[r^2 + (z + 2nd - (-1)^n z_q)^2\right]^{3/2}} \right\}. \quad (10.9)$$

Это выражение потребуется нам и в следующих задачах.

Задача I.13. Найти силу, действующую на частицу q в задаче I.12.

Воспользовавшись выражением (10.9) и отбросив первое слагаемое (собственное поле частицы), найдем

$$F = q^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left\{ -\frac{1}{\left\{2nd + [(-1)^n - 1]z_q\right\}^2} + \frac{1}{\left\{2nd - [(-1)^n - 1]z_q\right\}^2} \right\} =$$

$$= q^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4nd[(-1)^n - 1]}{\left\{4n^2 d^2 - [(-1)^n - 1]^2 z_q^2\right\}^2} \cdot z_q.$$

При $z_q \ll d$ имеем

$$F \approx \frac{q^2 z_q}{4d^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \approx 0,526 \frac{q^2}{d^3} \cdot z_q.$$

Ряд в этом выражении быстро сходится, и его сумма, которую легко найти численно, равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \approx 2,1036 \dots$$

Найденное значение силы меньше полученного в оценке (10.6) примерно в 4 раза, что является результатом «неточечного» распределения заряда, наведенного на пластинах.

Задача I.14. Найти распределение плотности заряда, наведенного на пластинах A и B (задача I.12 и рис. I.12).

Распределение плотности наведенного заряда найдем, используя соотношения (10.2) и правило (10.3) для выбора знака заряда. Поле на поверхности плоскости A есть $E_z (z = d)$. Подставляя в (10.9) $z = d$, нетрудно преобразовать выражение для поля на плоскости A к виду

$$E_z^{(A)}(r, d) = 2q \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)d - (-1)^n z_q}{\left\{ r^2 + \left[(2n+1)d - (-1)^n z_q \right]^2 \right\}^{3/2}}.$$

Аналогично для поля на плоскости B ($E_z (z = d)$) имеем

$$E_z^{(B)}(r, -d) = -2q \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)d + (-1)^{n-1} z_q}{\left\{ r^2 + \left[(2n+1)d + (-1)^{n-1} z_q \right]^2 \right\}^{3/2}}.$$

Соответственно, выбрав знаки зарядов, следуя правилу (10.3), находим

$$\sigma^{(A)}(r) = -\frac{E_z^{(A)}(r)}{4\pi}, \quad \sigma^{(B)}(r) = \frac{E_z^{(B)}(r)}{4\pi}.$$

Тот же выбор можно сделать, воспользовавшись физической картиной поля (рис. I.12). В любом случае ясно, что знак связанных зарядов противоположен знаку заряда q , создающего поле.

Полученные значения $\sigma^{(A,B)}(r)$ позволяют найти величины полных зарядов, наведенных на пластинах A и B . Однако при этом возникает существенная трудность. Интегрируя плотность заряда по всей плоскости, находим

$$\begin{aligned} Q^{(A,B)} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r \cdot dr \cdot E_z^{(A,B)}(r) = \\ &= -q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)d \mp (-1)^n \cdot z_q}{\left\{ r^2 + \left[(2n+1)d \mp (-1)^n \cdot z_q \right]^2 \right\}^{3/2}} \cdot r \cdot dr. \end{aligned}$$

Но

$$\int_0^{\infty} \frac{C}{(r^2 + c^2)^{3/2}} \cdot r \cdot dr = 1.$$

Поэтому

$$Q^{(A,B)} = -q \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

Во-первых, очевидно,

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n = \frac{1}{2} [(-1)^N + 1] = \begin{cases} 1, & N - \text{четные,} \\ 0, & N - \text{нечетные,} \end{cases}$$

и при $N \rightarrow \infty$ эта сумма имеет неопределенное значение. Во-вторых, значения $Q^{(A)}$, $Q^{(B)}$ не зависят от z_q , что невозможно из физических соображений (например, при $z_q \rightarrow 0$ заряд $Q^{(A)}$ должен стремиться к $-q/2$). Все это говорит о том, что при $r \rightarrow \infty$ данный метод зарядов изображения не работает: число изображений неограниченно возрастает, и ряд, описывающий суммарное поле, в результате интегрирования расходится. Подобная проблема отсутствует при вычислении поля в точке (задача I.13 выше). Найти значения связанных зарядов на плоскостях A и B (рис. I.12) можно, не прибегая к методу изображений (задача I.15).

Задача I.15. (М. К. Есеев). Найти связанные заряды на плоскостях A и B в задаче I.12.

Указание: в плоскость C , проходящую через точку z_q и параллельную плоскостям A и B , поместить множество точечных зарядов так, чтобы плотность зарядов в плоскости C была постоянной, и, воспользовавшись принципом суперпозиции, вычислить разность потенциалов между плоскостями A и B и, вернувшись к одиночному заряду q , найти значения связанных с ним зарядов.

Следуя указанию, запишем значения напряженностей поля в промежутках между плоскостями A и C и между плоскостями B и C :

$$E_A = -4\pi\sigma_A, \quad E_B = -4\pi\sigma_B, \quad E_A + E_B = 4\pi\sigma_C. \quad (10.10)$$

Здесь и ниже учтено, что векторы E_A и E_B противоположно направлены, σ_C — плотность зарядов, размещенных в плоскости C , σ_A , σ_B — плотности связанных зарядов в плоскостях A и B . Потенциалы этих плоскостей равны нулю, а поле в промежутках AC и CB однородно. Поэтому

$$\varphi_A - \varphi_B = E_A \cdot (d - z_q) - E_B \cdot (d + z_q) = 0.$$

Подставляя сюда и в третье из уравнений (10.10) значения E_A , E_B из двух первых уравнений (10.10), найдем

$$\sigma_{A,B} = \frac{d \pm z_q}{2d} \cdot \sigma_C. \quad (10.11)$$

А дальше вступает в действие принцип суперпозиции. Представим себе, что каждому из одинаковых (!) зарядов $q_{Ci} = q$ ($i = 1, 2, \dots, N_C$) в плоскости C соответствуют связанные заряды q_{Ai} , q_{Bi} в плоскостях A и B соответственно. Заряды q_{Ci} распределены в плоскости C равномерно ($\sigma_C = \text{const}$), естественно, что заряды q_{Ai} , q_{Bi} , конечно, размазаны в своих плоскостях, причем каждое индивидуальное распределение связанного заряда σ_{Ai} , σ_{Bi} аксиально симметрично с осью, ортогональной плоскостям A , B и проходящей через заряд q_{Ci} (рис. I.13). Если удвоить, например, число зарядов в плоскости C , сохраняя равномерность их распределения, то соответственно удвоится и число связанных зарядов q_{Ai} , q_{Bi} , и т. д. Иными словами,

$$\sigma_C = N_C \frac{q}{S}, \quad \sigma_{Ai} = N_C \frac{q_{Ai}}{S}, \quad \sigma_{Bi} = N_C \frac{q_{Bi}}{S},$$

где $S \rightarrow \infty$ — площадь каждой из плоскостей C , A , B . Подставив эти значения в (10.11), получаем

$$q_{Ai,Bi} = -\frac{d \pm z_q}{2d} \cdot q.$$

Этот результат справедлив для любого « i ». Поэтому и для заряда в точке $(0, z_q)$ имеем

$$q_A = -\frac{d + z_q}{2d} \cdot q, \quad q_B = -\frac{d - z_q}{2d} \cdot q. \quad (10.12)$$

Отметим, что

$$q_A + q_B = -q,$$

т. е. суммарный связанный заряд на плоскостях A и B равен заряду, их «связывающему», но с противоположным знаком.

Зависимость связанного заряда на плоскостях A и B от координаты заряда q используется для измерения положения заряда, например, или пучка заряженных частиц в ускорителях (см. задачу I.28 ниже).

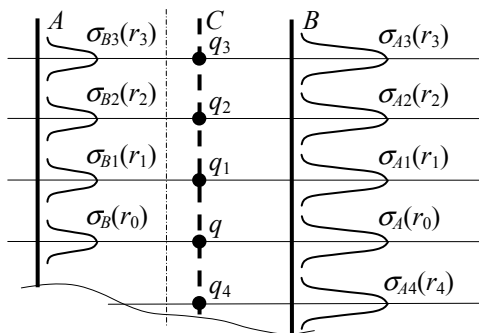


Рис. I.13. Заряды q_i , равномерно распределенные в плоскости C , и соответствующие им распределения плотностей связанных зарядов $\sigma_{Ai}(r_i)$, $\sigma_{Bi}(r_i)$; r_i — радиальные координаты «индивидуальных» систем координат (r_i, z, φ)

Задача I.16. Точечный заряд q помещают на расстоянии z_1 от проводящей сферы радиуса $a < z$. Найти распределение потенциала и силу, действующую на заряд:

- сфера заземлена;
- сфера не заземлена и предварительно не заряжена (изолирована).

Ясно, что электрическое поле, созданное зарядом q , является в обоих случаях аксиально-симметричным с осью, проходящей через заряд q и центр сферы.

а) Потенциал заземленной сферы равен нулю, а внутри поле отсутствует. Будем искать значение потенциала вне сферы, поместив внутри нее точечный заряд-изображение q' на оси симметрии поля, что необходимо для сохранения симметрии. Потенциал поля зарядов q и q' в точке A на сфере (рис. I.14) должен быть равен нулю:

$$\varphi_A = \frac{q}{\sqrt{z_1^2 + a^2 - 2z_1a \cdot \cos \alpha}} + \frac{q'}{\sqrt{z_2^2 + a^2 - 2z_2a \cdot \cos \alpha}} = 0.$$

Отсюда

$$(q')^2 \cdot (z_1^2 + a^2 - 2z_1a \cdot \cos \alpha) = q^2 \cdot (z_2^2 + a^2 - 2z_2a \cdot \cos \alpha).$$

Поскольку это равенство должно выполняться для произвольного значения α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), можно записать систему уравнений

$$\begin{aligned} (q')^2 (z_1^2 + a^2) &= q^2 (z_2^2 + a^2), \\ (q')^2 \cdot z_1 a &= q^2 z_2 a. \end{aligned}$$

Поделив одно уравнение на другое и произведя приведение подобных слагаемых, получаем значение z_2 , а с ним — значение q' из второго уравнения:

$$z_2 = \frac{a^2}{z_1}, \quad q' = -\frac{a}{z_1} \cdot q, \quad |q'| < q. \quad (10.13)$$

Легко проверить, что при таких значениях z_2 и q' потенциал $\varphi_A = 0$ при любом α . Из физических соображений из двух возможных знаков заряда q' выбран знак «минус»: при появлении заряда q вблизи заземленной сферы на ней наводится заряд противоположного знака, а заряд одноименного знака стекает на землю. Поскольку поле аксиально-симметрично, то данное решение справедливо для любой плоскости, в которой лежит ось симметрии (прямая qq'). Распределение потенциала заряда q и заряда, наведенного на сфере, совпадает с распределением потенциала зарядов q и q' .

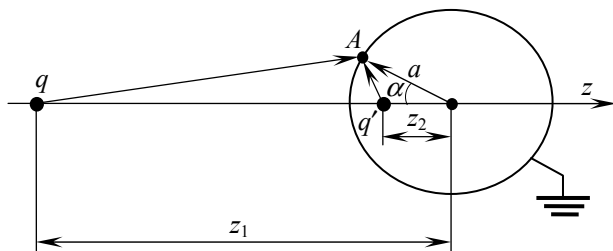


Рис. I.14. Проводящая заземленная сфера и заряд вблизи нее

Сила, действующая на заряд q со стороны зарядов, наведенных на заземленной сфере, очевидно, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_z \frac{qq'}{(z_1 - z_2)^2} = -\mathbf{e}_z q^2 \cdot \frac{az_1}{(z_1^2 - a^2)^2},$$

где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии от центра сферы к заряду q . Таким образом, заряд притягивается к заземленной сфере.

б) Поскольку сфера не заземлена и не заряжена (изолирована), сумма наведенных на ней зарядов равна нулю, так как наведенный заряд одного знака с зарядом q также остается на сфере. Поэтому, вообще говоря, следует искать поле трех зарядов q, q', q'' , поместив два последних на оси симметрии поля на расстоя-

ниях z_2 и z_3 от центра сферы соответственно. Сфера изолирована и вначале не заряжена. Поэтому

$$q'' = -q'.$$

Теперь потенциал в точке A на сфере равен

$$\varphi_A = \frac{q}{\sqrt{z_1^2 + a^2 - 2z_1a \cdot \cos \alpha}} + \frac{q'}{\sqrt{z_2^2 + a^2 - 2z_2a \cdot \cos \alpha}} + \\ + \frac{q''}{\sqrt{z_3^2 + a^2 - 2z_3a \cdot \cos \alpha}}.$$

Однако можно не заниматься длительными вычислениями, а получить ответ из физических соображений, используя результаты пункта «а» и применив принцип суперпозиции. Действительно, в отсутствие заряда q'' поле заряда q и сферы, несущей распределенный на ее поверхности заряд q' , совпадает с полем двух точечных зарядов q и q' , расположенных в точках z_1 и z_2 . Значения q' и z_2 описываются формулами (10.13). Это легко видеть из «мысленного эксперимента»: отсоединив заземленную сферу в случае «а» от земли, мы не изменим величины и формы поля. Спрашивается, куда нужно поместить заряд q'' так, чтобы он не повлиял на эквипотенциальность сферы? Ответ очевиден: в центр сферы, т. е.

$$z_3 = 0.$$

При этом, конечно, величина потенциала сферы вырастет от нуля до q''/a . Таким образом, поле точечного заряда и изолированной проводящей сферы совпадает с полем трех точечных зарядов

$$q(z), \quad q'(z_2) = -q''(z=0) = -\frac{a}{z_1} \cdot q, \quad z_2 = \frac{a^2}{z_1}.$$

Сила, действующая на заряд q со стороны незаземленной и незаряженной сферы, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_z \left(\frac{qq'}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{qq''}{z_1^2} \right) = -\mathbf{e}_z q^2 \frac{a^3}{z_1^3} \cdot \frac{2z_1^2 - a^2}{(z_1^2 - a^2)^2}.$$

Таким образом, заряд q также притягивается и к незаземленной сфере, но сила притяжения меньше, чем в случае «а».

Задача I.17. Рассмотреть оба случая — заземленной и изолированной сферы — при помещении заряда q внутрь сферы на расстоянии z_1 от центра.

Ответ почти очевиден: заряды q и q' меняются местами, а направление силы изменяется на противоположное — заряд притягивается к ближайшей поверхности сферы. Теперь в прежнюю точку « q » на расстоянии $z_2 = a^2/z_1$ от центра сферы нужно поместить заряд-изображение

$$q' = -q \frac{z_2}{a} = -q \frac{a}{z_1}.$$

В результате мы пришли к соотношениям (10.13), с той лишь разницей, что $|q'| > q$.

Обратим внимание на важность соотношения (10.13), которое мы использовали в трех задачах (I.16 а, б и I.17). Это соотношение является частным случаем применения так называемого *метода инверсии* (см. [1], стр. 48).

Нужно подчеркнуть, что в случае, рассмотренном в задаче I.16, реальные связанные заряды находятся на наружной поверхности сферы, и если сфера изолирована, то заряды противоположного знака, $q^{**} = -q^*$, «вытолкнуты» на ее наружную поверхность. Поэтому поле вне изолированной сферы совпадает, по величине и форме, с полем точечного заряда q^{**} , который расположен в центре сферы.

Задача I.18. Заряд q расположен в центре заземленной проводящей сферы радиуса a . В экране имеется круговое отверстие радиуса $\rho \ll a$. Найти поле вне экрана на прямой, проходящей через центры сферы и отверстия на расстоянии $r \gg a$ от центра сферы.

Отверстие можно заменить двойным слоем зарядов противоположного знака с плотностью

$$\sigma^- = \pm \frac{E_0}{4\pi} = \pm \frac{q}{4\pi a^2},$$

где E_0 — поле на внутренней поверхности сферы. Заряды σ^- «восполняют» отсутствие связанных зарядов в отверстии и тем самым делают экран полностью замкнутым. Тогда заряды σ^+ создают поле, «вываливающееся» из отверстия в экране. Поле на оси сферического сегмента с плотностью заряда σ^+ на расстоянии $r \gg a$ от центра сферы равно (рис. I.15)

$$E(r) = \sigma \int_0^{2\pi} a \cdot d\varphi \int_0^{\theta_0} d\theta \cdot \frac{\cos \alpha \cdot a \cdot \sin \theta}{a^2 + r^2 - 2ar \cdot \cos \theta},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{\rho}{r - a}.$$

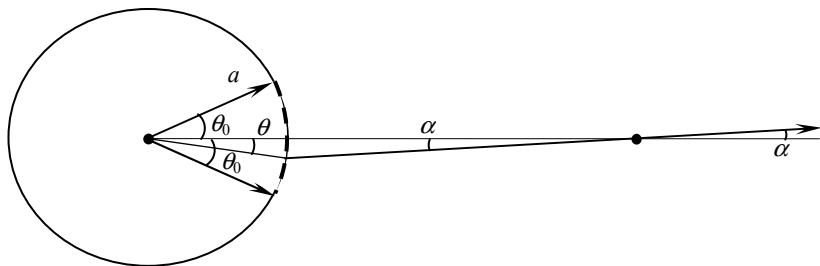


Рис. I.15. Сферический экран с круговым отверстием

Отсюда поле вне экрана при $\alpha \ll 1$ ($r \gg a$) равно

$$E(r) \approx \frac{q}{4ar} \cdot \ln \frac{a^2 + r^2 - 2ar \cdot \cos \theta_0}{(a-r)^2},$$

где

$$\theta_0 \sim \frac{\rho}{a} \ll 1.$$

Окончательно получим

$$E(r) \approx \frac{q}{a^2} \cdot \left(\frac{d}{2r} \right)^2 = E_0 \left(\frac{d}{2r} \right)^2.$$

§ 11. Уравнение Лапласа

При наличии проводников потенциал электрического поля системы зарядов можно представить так:

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{r} + \int_S \frac{\sigma dS}{r}. \quad (11.1)$$

Это выражение явным образом учитывает заряды на всей поверхности проводников S (σdS — элемент поверхностного заряда). Формула (11.1) вытекает также из общего решения (8.1), если плотность заряда в проводнике записать в виде $\rho_S(z) = \sigma \delta(z - z_0)$, где z — координата по нормали к поверхности, которая пересекает ось Z в точке z_0 .

Однако σ в (11.1) обычно не задана как ρ в (8.1), а сама зависит от поля. Поэтому (11.1) не является решением уравнения Пуассона в обычном смысле, а представляет собой так называемое интегральное уравнение (неизвестное поле входит под знак определенного интеграла через $\sigma = E_n/4\pi$).

Чтобы избежать этих осложнений, можно в уравнении Пуассона учитывать только плотность зарядов вне проводников, а вместо σ задать потенциалы на них. Иными словами, мы должны решать уравнение Пуассона при дополнительных граничных условиях

$$\varphi(\mathbf{r})|_{S_i} = \varphi_i. \quad (11.2)$$

Простейшим является случай полного отсутствия внешних зарядов ($\rho \equiv 0$), когда нужно решать *уравнение Лапласа*,

$$\Delta\varphi = 0 \quad (11.3)$$

с граничными условиями (11.2).

Задача 1.19. Найти поле между двумя проводящими коаксиальными цилиндрами радиусов $r_1 < r_2$, разность потенциалов между которыми равна V , заряды на поверхности цилиндров и отношение радиусов, при котором напряженность поля на внутреннем цилиндре (r_1) минимальна.

В цилиндрических координатах с учетом аксиальной симметрии уравнение Лапласа $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$ имеет решение $\varphi = -A \ln r + B$. Выбирая нулевой потенциал на наружном цилиндре, найдем $B = A \ln r_2$, $A = V/\ln(r_2/r_1)$. Таким образом, потенциал и поле в пространстве между цилиндрами есть

$$\varphi(r) = V \cdot \ln(r_2/r_1), \quad E(r) = \frac{V}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{r}. \quad (11.4)$$

По теореме Гаусса заряд на внутреннем цилиндре (на единицу длины) равен $q_1 = -\frac{E(r_1)}{4\pi} \cdot 2\pi r_1 = \frac{V}{2\ln r_2/r_1}$. Заряд на внутренней поверхности внешнего цилиндра равен $-q_1$. Исследуя функцию $E(r_1)$ на экстремум, запишем

$$E(x) = \frac{V}{r_2} \cdot \frac{x}{\ln x}, \quad x = \frac{r_2}{r_1}.$$

Нетрудно найти, что $E(x)$ имеет минимальное значение при $x = e$. В результате поле на поверхности внутреннего цилиндра имеет минимальное значение

$$E(r_1) = \frac{V}{r_1} \quad \text{при} \quad r_2/r_1 = e. \quad (11.5)$$

Этот результат используется при конструировании в высоковольтной технике.

Если потенциалы на проводниках не заданы (так называемый проводник с «плавающим» потенциалом), но, конечно, по-прежнему постоянны, то неизвестные константы φ_i в граничных условиях находятся из дополнительных требований

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = q_i, \quad (11.6)$$

где q_i — заданные заряды на проводниках.

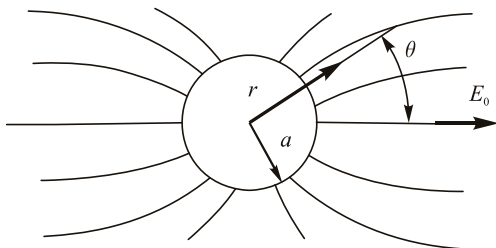


Рис. I.16. Металлический шар в однородном электрическом поле

Задача I.20. Найти потенциалы двух проводящих концентрических сфер радиусов r_1, r_2 с зарядами q_1, q_2 .

Запишем уравнение Лапласа в сферических координатах и учтем сферическую симметрию поля:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0.$$

Отсюда, дважды проинтегрировав, имеем

$$\varphi_{1,2}(r) = \frac{A_{1,2}}{r} + B_{1,2}.$$

Константы A_1, B_1 и A_2, B_2 разные для потенциалов $\varphi_1(r)$ в пространстве между сферами и $\varphi_2(r)$ при $r \geq r_2$. Их найдем, используя граничные условия — (10.2) и условие непрерывности потенциала (7.7):

$$\begin{aligned} -\left. \frac{d\varphi_1}{dr} \right|_{r=r_1} &= 4\pi\sigma_1 = 4\pi \frac{q_1}{4\pi r_1^2}, \\ \varphi_1(r_2) &= \varphi_2(r_2), \\ -\left(-\left. \frac{d\varphi_1}{dr} - \left. \frac{d\varphi_2}{dr} \right|_{r=r_2} \right) &= 4\pi\sigma_2 = 4\pi \frac{q_2}{4\pi r_2^2}, \\ \varphi_2(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$A_1 = q_1, \quad B_1 = \frac{q_2}{r_2}, \quad A_2 = q_1 + q_2, \quad B_2 = 0.$$

Соответственно, потенциалы сфер равны

$$\varphi_1 \equiv \varphi_1(r_1) = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}, \quad \varphi_2 \equiv \varphi_2(r_2) = \frac{q_1 + q_2}{r_2}. \quad (11.7)$$

Обратим внимание на знаки слагаемых в левой части третьего из граничных условий — результат применения теоремы Гаусса к заряженной поверхности, по обе стороны присутствует поле одинакового направления (ср. вывод (10.2)).

Конечно, решение данной задачи легко найти, не прибегая к уравнению Лапласа, а записав потенциалы для поля заряженных концентрических сфер. Мы привели «неоправданно сложное» решение, чтобы продемонстрировать на этом примере применение уравнения Лапласа с граничными условиями.

Рассмотрим возмущение однородного поля незаряженным металлическим шаром (рис. I.16). Это типичная задача на уравнение Лапласа, которое нужно решать с граничным условием

$$\varphi|_{r=a} = 0. \quad (11.8)$$

Условие (11.8), кроме эквипотенциальности поверхности шара, означает еще, что мы выбрали отсчет потенциала от потенциала поверхности шара. Как же решить это уравнение? Попробуем применить довольно общий метод, называемый разделением переменных. Из соображений сим-

метрии будем решать задачу в сферических координатах. Говорят, что переменные разделяются, если решение можно представить в виде

$$\varphi(r, \theta, \Phi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\Phi). \quad (11.9)$$

Если выбрать полярную ось вдоль вектора $\mathbf{E}_0$ однородного поля, то потенциал не будет зависеть от Φ , т. е. можно положить $\Phi = 1$. Подставив (11.9) в уравнение Лапласа и поделив на φ , найдем

$$\frac{(r^2 R')'}{R} = - \frac{(\Theta' \sin \theta)'}{\Theta \sin \theta} = A, \quad (11.10)$$

где штрих означает дифференцирование по своему аргументу. Так как обе части (11.10) — функции разных аргументов, они могут быть равны друг другу, только если они константы, т. е. не зависят от своих аргументов.

При $r \rightarrow \infty$ поле становится однородным, т. е. $\varphi \rightarrow -E_0 r \cos \theta$ (при $\varphi(a) = 0$). Отсюда находим угловую часть потенциала

$$\Theta(\theta) = \cos \theta, \quad (11.11)$$

и $A = 2$. Уравнение для радиальной части потенциала принимает вид $(r^2 R')' = 2R$. Попробуем искать его решение в виде $R(r) \propto r^k$. Получим $k(k+1) = 2$, что дает $k = 1, -2$, т. е. решение для радиальной части выглядит так:

$$R(r) = br + \frac{d}{r^2}. \quad (11.12)$$

Существенно, что это полное решение, так как уравнение второго порядка для $R(r)$ допускает только две произвольные постоянные. Последние определяются из граничных условий на бесконечности ($b = -E_0$) и на поверхности шара (11.8):

$$d = E_0 a^3. \quad (11.13)$$

Окончательно получаем

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{d \cos \theta}{r^2}. \quad (11.14)$$

Полное поле оказывается суперпозицией внешнего однородного поля E_0 и чисто дипольного поля наведенных на шаре зарядов (дипольный момент равен d). Обратим внимание, что в данном случае не существенно, заземлен шар или подвешен: внешнее поле держит заряды на его поверхности, не давая им «стекать» в землю (сравни задачу I.16).

Успех метода разделения переменных для данной задачи связан с тем, что уравнение Лапласа распалось на сумму слагаемых, зависящих только от одной из координат, т. е. уравнение в частных производных распалось на два обыкновенных дифференциальных уравнения, причем их решения оказались совместимыми с граничными условиями. Подчеркнем, что возможность разделения переменных зависит от удачного выбора системы координат, который, в свою очередь, диктуется граничными условиями.

Задача I.21. Исследовать устойчивость равновесия заряженной частицы в электрическом поле (*теорема Ирншоу*).

Вблизи положения равновесия, в которое мы поместим начало координат, потенциал можно приближенно представить в виде

$$\varphi(x, y, z) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} z^2 \right),$$

где все производные берутся в точке равновесия. Для устойчивости (положительного) заряда необходимо, чтобы потенциальная энергия возрастала по любому направлению, т. е. $\partial^2 \varphi / \partial x^2$, $\partial^2 \varphi / \partial y^2$, $\partial^2 \varphi / \partial z^2 > 0$. Но это противоречит уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$. Если $\partial^2 \varphi / \partial x^2 = \partial^2 \varphi / \partial y^2 = \partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0$, нужно учесть следующие члены разложения φ . Можно показать, что и в этом случае устойчивое равновесие невозможно.

Задача I.22. Доказать однозначность решения уравнения Пуассона при заданных граничных условиях (11.2).

Предположим, что существуют два различных решения, и составим их разность $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Последняя удовлетворяет уравнению Лапласа и нулевым граничным условиям $\psi|_S = 0$, т. е. в данном случае заряды отсутствуют во всем пространстве, а значит, $\psi = 0$ (8.1).

Задача I.23. Найти поле внутри замкнутой непроводящей поверхности S_0 , если заданы распределения потенциала и поля на этой поверхности, а также плотность заряда внутри нее.

Поскольку заданная поверхность не эквипотенциальна, поле внутри нее (и на самой поверхности) будет зависеть от внешних зарядов. Чтобы избавиться от этой зависимости, окружим S_0 эквипотенциальной поверхностью S_1 ($\varphi = 0$), отстоящей от S_0 на бесконечно малое расстояние $h \rightarrow 0$. При условии неизменности потенциала на S_0 поле внутри нее не изменится (однозначность решения, см. предыдущую задачу). Действие внешних зарядов теперь заменено эквивалентным действием зарядов, наведенных на S_1 , а также зарядов, которые нужно поместить дополнительно на S_0 , чтобы сохранить граничные условия. Плотность заряда на S_0

представим в виде двух слагаемых: $\sigma_{01} = \frac{1}{4\pi h} \varphi|_S$ (и такая же по величине, но обратная по знаку плотность заряда на S_1 — обе поверхности образуют «конденсатор с переменным напряжением») и $\sigma_{02} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$, где $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$ — заданная нормальная составляющая внутреннего поля. Таким образом, искомое поле складывается из трех составляющих: объемного заряда ρ , поверхностного заряда σ_{02} и «поверхностного диполя» $\mathbf{d} = h\sigma_{01}\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}}{4\pi} \varphi|_S$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор внутренней нормали). В результате получаем

$$\varphi = \int \rho \frac{dV}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left(\frac{\nabla \varphi}{r} + \varphi \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dS. \quad (11.15)$$

§ 12. Электрическая емкость

Начнем с простейшего случая одного уединенного проводника, то есть проводника, удаленного от других проводников (и зарядов) на расстояние, много большее его максимального размера. Емкость такого проводника определяют как отношение заряда q к потенциалу φ , создаваемому этим зарядом:

$$C = q/\varphi. \quad (12.1)$$

В гауссовой системе емкость имеет размерность длины и измеряется в сантиметрах. В СИ единицей емкости является фарад:

$$1 \text{ Ф} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см.}$$

Емкость сферы, например, равна ее радиусу. Считая земной шар проводником, получим для его емкости $C_3 \approx 6,37 \cdot 10^8 \text{ см} \approx 700 \text{ мкФ}$.

Задача I.24. Оценить емкость металлической пластины с размерами $l \gg a \gg h$.

На расстояниях $x \gg l$ потенциал равен приближенно $\varphi_1(x) \approx \frac{q}{x}$; в области $a \ll x \ll l$ можно положить $\varphi_2 \approx -2(q/l) \ln \frac{x}{a} + A$; наконец, при $x \ll a$

$\varphi_3 \approx -2\pi(q/al)x + B$. Сшивая эти выражения при $x \sim a$ и при $x \sim l$, найдем $B \sim \frac{q}{l} \left(1 + 2\pi + 2 \ln \frac{l}{a} \right)$. Отсюда $C \sim \frac{q}{\varphi_3(0)} \sim \frac{l}{(1 + 2\pi + 2 \ln(l/a))} \sim \frac{l}{2(\pi + \ln(l/a))}$.

Для цилиндра радиуса $a \ll l$ аналогичным образом можно получить $C \sim \frac{l}{1 + 2 \ln(l/a)} \approx \frac{l}{2 \ln(l/a)}$.

Рассмотрим теперь систему из нескольких проводников с произвольными зарядами. Потенциал каждого из проводников зависит от всех зарядов, причем в силу принципа суперпозиции зависимость эта должна быть линейной:

$$\varphi_i = S_{ik} q_k, \quad (12.2)$$

где S_{ik} — некие коэффициенты, зависящие от геометрии системы. Разрешив уравнения (12.2) относительно q_k , найдем

$$q_i = C_{ik} \varphi_k. \quad (12.3)$$

Новые постоянные C_{ik} называются емкостными коэффициентами или коэффициентами электростатической индукции. Матрицы C_{ik} , S_{ik} взаимно обратны: $C_{il} S_{lk} = \delta_{ik}$. Для уединенного проводника $SC = 1$.

Для примера рассмотрим две концентрические сферы (см. задачу I.20, § 11):

$$S_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix}; \quad C_{ik} = \begin{pmatrix} C & -C \\ -C & C + C_2 \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Здесь величина $C = r_1 r_2 / (r_2 - r_1)$ характеризует *взаимную емкость* двух проводников, а $C_2 = r_2$ — емкость наружной сферы. В общем случае аналогичная добавка появляется и у коэффициента $C_{11} = C + C_1$. Тогда

$$q_1 = C(\varphi_1 - \varphi_2) + C_1 \varphi_1, \quad q_2 = -C(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2 \varphi_2. \quad (12.5)$$

Заряд каждого из проводников можно разбить на две части: связанный $q_0 = \pm C(\varphi_1 - \varphi_2)$ и свободный заряд $q_i = C_i \varphi_i$.

Система из двух проводников называется конденсатором, а его емкость определяется по связанному заряду:

$$C_0 = \frac{q_0}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (12.6)$$

Емкости проводников (обкладок) конденсатора «на бесконечность» (C_1 , C_2) называются обычно «паразитными» емкостями.

Задача I.25. Найти емкость плоского конденсатора (рис. I.3, а). Площадь пластин конденсатора S , расстояние между пластинами h .

При разности потенциалов (напряжении) между пластинами V заряд на них равен

$$Q = \sigma S = \frac{VS}{4\pi h}.$$

Отсюда для плоского конденсатора

$$C_0 = \frac{S}{4\pi h}.$$

Задача I.26. Найти емкость двух конденсаторов, соединенных а) параллельно, б) последовательно.

а) напряжение на параллельно соединенных конденсаторах одно и то же, поэтому

$$Q = C_0 V = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V.$$

Отсюда

$$C_0 = C_1 + C_2.$$

б) В этом случае пластины двух последовательно соединенных конденсаторов, находящиеся под одинаковым потенциалом, несут суммарный заряд, равный нулю, т. е.

$$Q_{12} = -Q_{21} \equiv Q,$$

где первые индексы — номера конденсаторов, вторые — номера пластин. Отсюда

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_0},$$

В результате

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Нетрудно экстраполировать этот результат на N конденсаторов. Таким образом, емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме их емкостей, при последовательном соединении складываются обратные величины емкостей:

$$\text{а) } C_N = \sum_{n=1}^N C_n, \quad \text{б) } \frac{1}{C_T} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \quad (12.7)$$

Задача 1.27. Найти взаимную емкость:

а) двух концентрических проводящих сфер радиусов $a < b$ (сферический конденсатор — СК);

б) двух коаксиальных проводящих цилиндров радиусов $a < b$ (цилиндрический конденсатор — ЦК).

а) Используя решение задачи 1.5 (формула (6.10)), найдем разность потенциалов между двумя концентрическими проводящими сферами, на внутренней из которых помещен заряд q , а наружная заземлена:

$$\Delta\varphi = q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Отсюда

$$C_{\text{СК}} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1}. \quad (12.8)$$

б) Аналогично, используя формулу (7.13), находим

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 2q_1 \cdot \ln b/a, \\ (C_1)_{\text{ЦК}} &= (2 \cdot \ln b/a)^{-1}, \end{aligned} \quad (12.9)$$

где C_1 — емкость на единицу длины конденсатора (сравни задачу 1.24).

Задача 1.28. Оценить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между проводящими пластинами, внутри которых находится заряд q (рис. 1.12).

Указание: воспользоваться результатами задачи 1.15, считая, что емкости пластин на окружающее пространство (емкостные коэффициенты) заданы и равны C_0 .

Связанные заряды на пластинах описываются формулой (10.12). Отсюда потенциалы пластин «на землю», соответственно, равны

$$\varphi_{A,B} = \frac{q_{A,B}}{C_0},$$

что дает разность потенциалов между пластинами

$$\Delta\varphi = \frac{z_q}{d} \cdot \frac{q}{C_0}.$$

Для типичных параметров ускорителей заряженных частиц $d = 5$ см, $C_0 = 100$ пФ чувствительность измерения положения заряда с помощью таких пластин (так называемые «pick-up электроды») составляет

$$\frac{\Delta\varphi}{z_q} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ В} \cdot \text{см}^{-1} \cdot e^{-1},$$

где e — заряд электрона. Сегодня подобные устройства надежно регистрируют смещения на уровне 0,1 мм ступка частиц с зарядом порядка 10^7 электронных зарядов ($\Delta\varphi \sim 30$ мкВ).

Вычислим энергию системы заряженных проводников. При малом изменении зарядов приращение энергии $dW = dA = \varphi_i dq_i = S_{ik} q_k dq_i = S_{ki} q_i dq_k = \frac{1}{2} (S_{ik} q_k dq_i + S_{ki} q_i dq_k)$. Так как энергия системы определяется только конечным значением зарядов и не зависит от способа зарядки, последнее выражение должно свернуться в полный дифференциал. Для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы матрица S_{ik} была симметричной: $S_{ik} = S_{ki}$. Тогда $dW = \frac{1}{2} S_{ik} d(q_i q_k)$ и

$$W = \int \varphi_i dq_i = \frac{S_{ik} q_i q_k}{2} = \frac{C_{ik} \varphi_i \varphi_k}{2}. \quad (12.10)$$

В частности, для изолированного проводника $W = q^2/2C = C\varphi^2/2$. Для конденсатора $W_0 = q_0^2/2C_0 = C_0 V^2/2$, где $V = \varphi_1 - \varphi_2$, причем это выражение характеризует только энергию поля «внутри» конденсатора.

Следствие емкостной связи ($C_{ik} \neq 0$, $i \neq k$) один заряженный проводник «наводит» потенциал (или заряд) на другой. В некоторых случаях, например при точных электрических измерениях, необходима защита от таких «наводок». Другой пример — защита людей от электрического поля проводников, находящихся при высоком потенциале. Для этой цели применяется *электростатическое экранирование*. Идеальным оно будет в том случае, если защищаемые проводники (например, всю измерительную аппаратуру вместе с источниками питания) окружить дополнительным замкнутым проводником, внутри которого электростатическое поле всегда равно нулю. Для этой цели в лабораториях сооружают иногда целые экранированные комнаты.

Часто удобнее экранировать сам источник наводки. Но если просто окружить его замкнутым проводником, находящимся под «плавающим» потенциалом, то экранирования не получится. Действительно, заряд экрана можно считать равным нулю, а тогда, согласно закону сохранения потока (см. § 6), среднее поле наводки остается тем же самым, изменится лишь его конфигурация (рис. I.17). В частности, для сферического экрана поле вне его будет всегда сферически-симметричным. Правда если полный заряд экранируемой системы равен нулю (полностью изолированная система), то экранирование все же возможно, так как среднее поле навод-

ки равно нулю. Плавающий потенциал экрана при этом также будет равен нулю, а значит, не будет и внешнего поля. Это совсем очевидно в случае сферического экрана (см. задачи I.16–I.18 выше). Но даже тогда осуществить таким способом экранирование практически невозможно, так как всегда существующие небольшие внешние токи будут быстро заряжать экран до значительных потенциалов. Поэтому экран необходимо «заземлить», т. е. соединить его с Землей, которую можно рассматривать как единый гигантский проводник. Действие заземления связано с тем, что при любых «земных» электрических процессах происходит лишь перераспределение электрических зарядов. Поэтому полный заряд всей системы (включая Землю) можно считать равным нулю или по крайней мере постоянным, а все токи — внутренними. Локальные измерения электрического поля вблизи Земли до высот порядка 200 км дают значения E от 100 до единиц вольт на метр. Основным фактором, нарушающим экранирование в рассматриваемом случае, является нестационарность наводки.

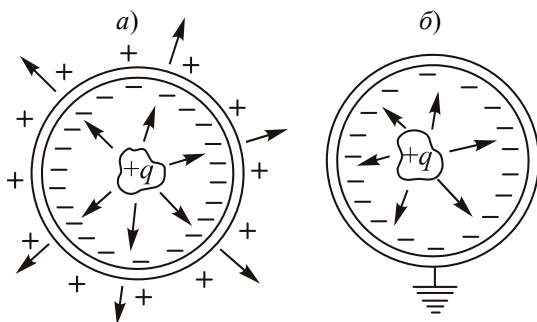


Рис. I.17. Электростатическое экранирование: (а) — экран не заземлен; (б) — экран заземлен

Если, как это обычно происходит на практике, экран не удастся сделать полностью замкнутым, то всегда остается некоторая наводка, уменьшение которой зависит от изобретательности экспериментатора.

Результаты задач I.16–I.18 позволяют понять основные свойства *электростатического экранирования*:

- 1) поле системы электрических зарядов не проникает за пределы замкнутой проводящей заземленной поверхности (электрического экрана), полностью охватывающей систему зарядов;
- 2) изолированный (незаземленный) экран видоизменяет поле системы зарядов, расположенных внутри экрана, в соответствии с его формой и окружающими проводниками; в частности, изолиро-

ванный экран сферической формы создает снаружи экрана поле, совпадающее с полем точечного заряда, расположенного в центре сферы и равного по величине измеренному заряду внутри экрана;

- 3) отверстие размера d в электростатическом экране является источником электрического поля вне экрана, которое спадает с расстоянием r от экрана как

$$E(r) \sim E_0 \cdot \frac{d^2}{4r^2}, \quad r \gg d,$$

где E_0 — поле на внутренней поверхности экрана.

§ 13. Экспериментальная проверка закона Кулона

Первые опыты самого Кулона (1785 г.) не отличались высокой точностью, и можно было думать, что найденный им простой закон выполняется лишь приближенно. Поэтому в дальнейшем были предприняты не прекращающиеся и до сих пор многочисленные попытки уточнить закон Кулона. Фактически речь идет о проверке зависимости кулоновского взаимодействия от расстояния.

Кулон непосредственно измерял силу взаимодействия зарядов с помощью крутильных весов, повторив опыт английского физика Кавэндиша (Н. Cavendish) по гравитационному взаимодействию. Интересно, что сам Кавэндиш еще в 1770 г. получил «закон Кулона», причем значительно более оригинальным методом и даже, по-видимому, с большей точностью. Идея Кавэндиша состояла в том, чтобы проверить, остается ли электрическое поле внутри заряженной проводящей сферы. При этом он пользовался аналогией с гравитационным взаимодействием, для которого еще Ньютон доказал, что поле внутри однородной сферической оболочки равно нулю. Поэтому отсутствие электрического поля внутри заряженной сферы означало бы, что электрические силы, как и гравитационные, обратно пропорциональны квадрату расстояния.

Опыт ставился следующим образом. На заряженный проводящий шар накладывались две полусферы, плотно пригнанные друг к другу. Затем полусферы убирались и с помощью обычного электроскопа измерялся остаточный потенциал шара, который оказался равным нулю в пределах точности эксперимента. Это дает возможность оценить верхнюю границу отклонения от закона $1/r^2$.

Пусть, например, потенциал электрического поля точечного заряда описывается выражением

$$\varphi(r) = \frac{q}{r^{1-\varepsilon}} \approx \frac{q}{r} + \frac{\varepsilon q}{r} \ln r, \quad (13.1)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малая добавка. Рассмотрим две концентрические проводящие сферы, и пусть наружная имеет потенциал φ_0 , а внутренняя не заряжена. Тогда разность потенциалов между сферами будет определяться добавкой к кулоновскому потенциалу (рис. I.18):

$$\begin{aligned} \varphi(R) &= \int \frac{\varepsilon \sigma dS}{r} \ln r = \frac{\varepsilon q}{4\pi R_0^2} \int_0^\pi \frac{\ln r}{r} 2\pi R_0^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\varepsilon q}{2RR_0} \int_{R_0-R}^{R_0+R} \ln r dr \approx \frac{\varepsilon q (\ln 2R_0 - 1)}{R_0} + \frac{\varepsilon q h}{2R_0^2} \ln \frac{2R_0}{h}, \end{aligned} \quad (13.2)$$

$r^2 = R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \theta$, $h = R_0 - R \ll R_0$ — зазор между сферами, который для простоты будем считать малым. Дополнительная разность потенциалов между сферами дается вторым слагаемым

$$\Delta\varphi = \frac{\varepsilon q h}{2R_0^2} \ln \frac{2R_0}{h}. \quad (13.3)$$

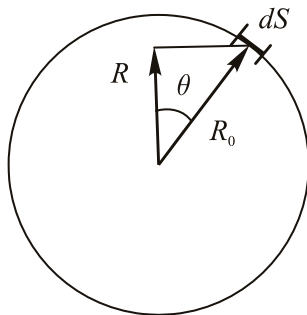


Рис. I.18. К вычислению поправки в законе Кулона (§ 13)

В опыте Кавэндиша обе сферы были соединены, т. е. находились при одном потенциале. Это значит, что на внутренней сфере должен был появиться заряд, компенсирующий $\Delta\varphi$:

$$q_\varepsilon = \Delta\varphi C_2 = \frac{R_0^2 \Delta\varphi}{h} = \frac{\varepsilon q}{2} \ln \frac{2R_0}{h}, \quad (13.4)$$

где C_2 — емкость сферического конденсатора. Принимая $h \approx 0,1$ см, $2R_0 \approx 10$ см, чувствительность электроскопа $q_\varepsilon/q \approx 5\%$, получим $\varepsilon < 0,02$.

Сто лет спустя Максвелл понизил эту границу до $\varepsilon < 5 \cdot 10^{-5}$, применив гораздо более чувствительный квадрантный электромметр. Согласно последним экспериментам, $\varepsilon < 6 \cdot 10^{-17}$ [2]. Высокая чувствительность всех этих измерений связана с тем, что применяется так называемый нулевой метод, при котором измеряемая величина определяется только изучаемым эффектом и обращается в нуль в отсутствие эффекта. Использование высокочастотных источников высокого напряжения позволяет надежно экранировать измерительную аппаратуру от наводок, и современные методы измерения малых высокочастотных напряжений (синхронное детектирование) дают возможность достичь рекордно низкого уровня шумов ($\leq 10^{-12}$ В).

Такой интерес к точности закона Кулона неслучаен. Оказывается, значение поправки ε позволяет оценить верхнюю границу массы фотона; равенство последней нулю является одним из фундаментальных законов физики. Дело в том, что по некоторым современным теориям силовое поле (электромагнитное, гравитационное, ядерных сил), возникающее вокруг точечного «заряда» q , можно описывать потенциалом вида

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} e^{-r/\lambda}, \quad \lambda = \frac{\hbar}{\mu c}, \quad (13.5)$$

где $2\pi\hbar = 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг $\cdot$ с $= 4,14 \cdot 10^{-15}$ эВ $\cdot$ с — постоянная Планка, μ — масса покоя кванта поля. Подобный подход позволил в 1935 г. японскому физику Юкаве предсказать существование мезонов, а потенциал (13.5) носит название «потенциала Юкавы». Повторяя с потенциалом (13.5) расчеты, аналогичные (13.1)–(13.3), и сравнивая результат с (13.3), найдем

$$\frac{1}{\lambda} \approx \frac{3}{R_0} \sqrt{\varepsilon \ln \frac{2R_0}{h}}, \quad (13.6)$$

что для последнего эксперимента дает $\lambda > 4 \cdot 10^4$ км, $\mu c^2 \approx 5 \cdot 10^{-15}$ эВ^{*}). Напомним, что масса покоя электрона $m_e c^2 \approx 0,51 \cdot 10^6$ эВ. На самом деле значение μ можно считать еще меньшим на основе измерений магнитного поля Юпитера (см. § 43).

Полученные результаты позволяют сделать и другой вывод: закон Кулона справедлив на расстояниях порядка $r_{\max} < 4 \cdot 10^4$ км.

^{*}) Для вычисления значения μc^2 в единицах эВ проще воспользоваться постоянной $\hbar \approx 6,6 \cdot 10^{-16}$ эВ $\cdot$ с (Приложение II) и записать $\mu c^2 = \hbar c / \lambda$.

Не меньший интерес представляет вопрос о справедливости закона Кулона на малых расстояниях. Ответ может быть получен на основании данных о рассеянии заряженных частиц. Совпадение экспериментальных результатов и предсказаний теории при заданной энергии частиц означает, что закон Кулона справедлив вплоть до расстояний, на которые «сближаются» частицы в акте рассеяния. Если в системе центра масс частицы с импульсом p рассеиваются на угол θ , то изменение импульса в результате рассеяния есть $\Delta p = 2p \sin \theta/2$, что согласно квантовой механике дает $r_{\min} \sim \hbar/\Delta p \sim \hbar/(p \sin(\theta/2))$.

В опытах Резерфорда (α -частицы с энергией 100 кэВ, $\theta \sim 20^\circ$) были достигнуты расстояния порядка $3 \cdot 10^{-12}$ см. Однако уже на расстояниях порядка 10^{-12} см появились отклонения от формулы рассеяния — начали сказываться ядерные силы. Поэтому наиболее чисто такие эксперименты можно осуществить с «неядерными» частицами — электронами. Изучение рассеяния электронов на электронах (позитронах) стало возможным после создания *метода встречных пучков*^{*)} в начале 60-х гг. в Новосибирске в Институте ядерной физики и ускорительном центре SLAC в Стэнфорде (США), а позднее и в других лабораториях мира. Последние измерения на максимальной энергии сталкивающихся частиц 110 ГэВ (электрон-позитронный коллайдер LEP в ЦЕРН, 2000 г.) дают $r_{\min} < 1 \cdot 10^{-16}$ см.

Одним из фундаментальных физических фактов является равенство (по абсолютной величине) зарядов электрона и протона. Точность, с которой выполняется это равенство, подлежит экспериментальной проверке, как и любой другой физический факт. С этой целью измерялся [3] заряд нейтрального атома. Камера, наполненная аргоном и окруженная тепловым экраном, была помещена на изоляторах внутри заземленного электростатического экрана (рис. I.19). Чувствительный гальванометр измерял полный заряд, протекающий в цепи, когда из объема в вакуум выпускается порция газа. Чтобы исключить ошибку, которая вносится ионами, присутствующими в газе, на выходе из объема была устроена ловушка для ионов, использующая поперечное электрическое поле. Измерения дали $\Delta q < 1,5 \cdot 10^{-14}$ Кл при вытекании 81 л аргона, что в пересчете на атом дает

$$\Delta q < \frac{1,5 \cdot 10^{-14}}{81 \cdot 6 \cdot 10^{23}} 22,4 \approx 6 \cdot 10^{-39} \text{ Кл} \approx 4 \cdot 10^{-20} \cdot e.$$

^{*)} Теперь установки (ускорители) со встречными пучками называют *коллайдерами* (от англ. collide — сталкивать).

Таким образом, в атоме аргона ($Z = 18$, $A = 40$) суммарный заряд восемнадцати электронов, восемнадцати протонов и двадцати двух нейтронов не превышает $4 \cdot 10^{-20}$ заряда электрона.

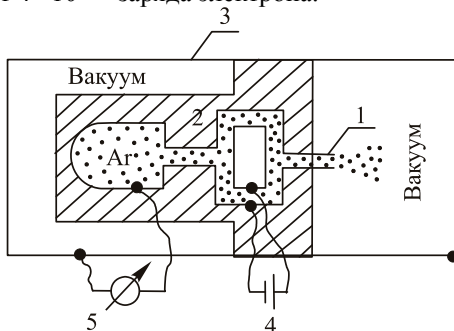


Рис. 1.19. Схема эксперимента по проверке равенства зарядов протона и электрона: 1, 3 — внутренние и наружная металлические камеры; 2 — термо- и электроизоляция; 4 — источник напряжения для отсоса ионов; 5 — гальванометр

Результаты этого эксперимента свидетельствуют также об инвариантности электрического заряда в смысле теории относительности, то есть о независимости его от скорости движения. Действительно, скорость протонов в ядрах порядка $0,1c$, а скорость электронов в атоме аргона изменяется от $v_{\max} \sim 0,1c$ на внутренней до $v_{\min} \sim 0,01c$ на внешней оболочках.

Заметим, что релятивистская инвариантность заряда следует также из закона (6.6), если определить электрический заряд с помощью этого соотношения, т. е. по потоку его электрического поля через замкнутую, достаточно удаленную от заряда поверхность. Это связано с тем, что в силу конечности скорости распространения электромагнитных волн поле на этой поверхности не может мгновенно измениться, что бы ни происходило с частицами, несущими электрический заряд. Отсюда следует также закон сохранения электрического заряда.

ГЛАВА II

ДИЭЛЕКТРИКИ

§ 14. Поляризация диэлектрика

До сих пор мы рассматривали поле свободных зарядов и проводников в вакууме. Присутствие окружающей среды может существенно изменять величину и геометрию электрического поля, что зависит от свойств вещества окружающей среды. Если проводимость вещества равна нулю (отсутствуют свободные заряды), то электрическое поле внутри такого вещества не компенсируется, как в проводнике, но, тем не менее, отличается от поля в вакууме. Это изменение по-прежнему связано со смещением зарядов среды, но теперь оно очень мало и определяется деформацией атомов (электронных орбит) под действием электрического поля. В результате такой деформации у атома появляется дипольный момент, который грубо можно оценить как

$$d_a \sim ea \frac{E}{E_a} \sim E \cdot a^3, \quad (14.1)$$

где $a \sim 10^{-8}$ см — размер атома или молекулы, $E_a \sim 10^9$ В/см — атомное поле. Эти наведенные моменты создают дополнительное поле, ослабляющее (но не компенсирующее) внешнее поле. Появление дипольных моментов называется *поляризацией среды*. Отсюда и название такой среды — диэлектрик.

Возможен и другой механизм поляризации диэлектрика, молекулы которого обладают собственным дипольным моментом (в отсутствие поля). Это имеет место для несимметричных молекул, например молекул воды, которые имеют вид «углов» (рис. II.1 ниже): $d_0 \sim ea \sim 10^{-18}$ [Г]^{*)} $\sim 10^{-29}$ Кл · м (см. табл. II.1). В отсутствие внешнего поля собственные

^{*)} Единица дипольного момента в гауссовой системе равна произведению гауссовой единицы заряда на см.

моменты ориентированы случайно, так что средний (макроскопический) дипольный момент единицы объема

$$\mathbf{P} = \langle n\mathbf{d}_0 \rangle \quad (14.2)$$

равен нулю. Здесь n — плотность молекул. Величину $\mathbf{P}$ называют также *вектором поляризации*. Если мы интересуемся макроскопическими процессами, то нам нужно знать только среднее макроскопическое поле в среде, которое зависит от $\mathbf{P}$. В частности, в отсутствие внешнего поля $\mathbf{P} = 0$ и дополнительное поле молекулярных зарядов также равно нулю.

Таблица II.1. Дипольные моменты некоторых молекул

Молекула	$d \times 10^{18}$ [Г]	Молекула	$d \times 10^{18}$ [Г]
HF	1,91	BCl ₃	0
HCl	1,08	CCl ₄	0
KCl	10,6	NH ₃	1,46
H ₂ O	1,87		

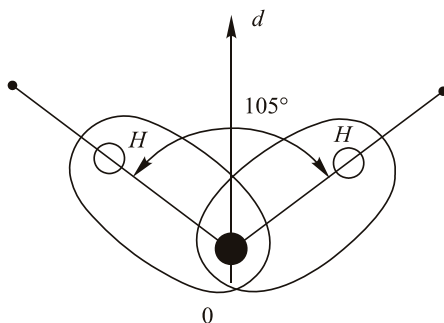


Рис. II.1. Структура молекулы воды

Внешнее поле ориентирует моменты d_0 , тепловое движение дезориентирует их. Средний момент направлен по вектору $\mathbf{E}$, и его значение получается усреднением по распределению Больцмана $\langle d_z \rangle = \langle e^{U/T} d_0 \cos \theta \rangle$, где $U = -(\mathbf{d}_0, \mathbf{E}) = -d_0 E \cos \theta$ — энергия диполя во внешнем поле (см. (5.7)), T — температура среды в энергетических единицах. Разлагая экспоненту и усредняя по телесному углу, получим

$$\begin{aligned} \langle d_z/d_0 \rangle &= \left\langle \left(1 + \alpha \cos \theta + \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta}{2} + \frac{\alpha^3 \cos^3 \theta}{6} + \dots \right) \cos \theta \right\rangle = \\ &= \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{30} + \dots; \quad \alpha = \frac{d_0 E}{T}. \end{aligned}$$

Отсюда вектор поляризации равен

$$\mathbf{P} = \frac{nd_0}{3} \left(\frac{d_0 E}{T} + \frac{1}{10} \left(\frac{d_0 E}{T} \right)^3 + \dots \right) \frac{\mathbf{E}}{E} \approx \frac{nd_0^2}{3T} \cdot \mathbf{E}. \quad (14.3)$$

Если $\alpha = d_0 E / T \sim W_a E / TE_a \sim 10^2 E / E_a \ll 1$, где $W_a \sim 3$ эВ — энергия валентного электрона в атоме, $T \approx 1/40$ эВ соответствует нормальной температуре, то в сумме (14.3) можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме первого, так что поляризация линейно зависит от поля.

Поляризация диэлектрика с собственными моментами молекул называется ориентационной, в случае же $d_0 = 0$ говорят об упругой поляризации (см. (5.8)).

§ 15. Электрическое поле в диэлектрике

Для вычисления поля в среде рассмотрим основное уравнение электростатики (см. (7.2))

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_\epsilon), \quad (15.1)$$

где ρ — плотность свободных зарядов, а ρ_ϵ — плотность связанных зарядов (в атомах или молекулах среды). Прежде всего усредним (15.1) по микроскопическим (молекулярным) неоднородностям: $\operatorname{div} \langle \mathbf{E} \rangle = 4\pi(\langle \rho \rangle + \langle \rho_\epsilon \rangle)$. Среднее поле будем называть просто электрическим полем (в среде) и в дальнейшем знаки усреднения опустим. Для того чтобы использовать это уравнение, необходимо найти величину ρ_ϵ , которая должна быть как-то связана с поляризацией диэлектрика. Качественно это легко себе представить на примере поляризации диэлектрика в плоском конденсаторе (рис. II.2). Поскольку молекулы диэлектрика остаются при поляризации нейтральными, средняя плотность связанных зарядов внутри диэлектрика $\rho_\epsilon = 0$. Однако на границе диэлектрика возникает некоторый поверхностный заряд σ_ϵ , который легко сопоставить вектору поляризации $P = \sigma_\epsilon hS / V = \sigma_\epsilon$, где V — объем диэлектрика, а S — площадь поверхности (рис. II.2). Поле зарядов σ_ϵ ослабляет внешнее поле, причем оказывается, что в большинстве случаев коэффициент ослабления (ϵ) определяется только свойствами среды и не зависит от поля; он называется *диэлектрической проницаемостью*. В рассмотренном примере поле внутри диэлектрика $E = 4\pi\sigma/\epsilon$, где σ — плотность свободных зарядов (на пласти-

не конденсатора) (коэффициент ε предстоит еще определить — см. ниже, (15.7–15.11)).

В общем случае влияние диэлектрика не сводится только к ослаблению электрического поля. Например, если диэлектрик имеет поверхность, не соприкасающуюся с проводником, то наведенные на ней заряды σ_ε искажают конфигурацию поля.

Как же найти поле в общем случае?

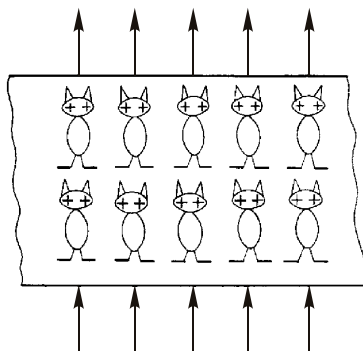


Рис. II.2. Поляризация диэлектрической пластины

Для этого определим вначале зависимость $\rho_\varepsilon(\mathbf{P})$. Запишем потенциал, создаваемый поляризованным диэлектриком, интегрируя по объему плотность диполей (см. (5.3) и (14.2)):

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{r}) = - \int \left(\mathbf{P}(\mathbf{r}'), \nabla \frac{1}{R} \right) dV'. \quad (15.2)$$

Здесь $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, и градиент берется по координатам точки наблюдения $(\mathbf{r})$. Переходя к дифференцированию по r' $\left(\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R} \right)$ и используя

соотношение $\left(\nabla', \frac{\mathbf{P}}{R} \right) = \frac{(\nabla', \mathbf{P})}{R} + \left(\mathbf{P}, \nabla' \frac{1}{R} \right)$, получим

$$\varphi_\varepsilon = \int \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) dV' - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{R} dV'. \quad (15.3)$$

Первый интеграл преобразуется в поверхностный и обращается в нуль для любого диэлектрика конечных размеров, а второй представляет собой потенциал зарядов с плотностью

$$\rho_\varepsilon = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (15.4)$$

Остается обсудить справедливость использованного выше дипольного приближения. Как вытекает из оценок, представленных в § 5, полем высших мультиполей можно пренебречь на расстояниях, много больших размеров молекул. Это условие в данном случае выполняется с большим запасом, поскольку мы интересуемся лишь средним макроскопическим полем.

Задача II.1. Вычислить дипольный момент системы зарядов с плотностью (15.4).

По определению дипольного момента $\mathbf{d} = \int \mathbf{r} \rho_e dV = - \int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dV$. Преобразуем подынтегральное выражение $\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} = \sum_{i,k} \mathbf{e}_i x_i \frac{\partial P_k}{\partial x_k} = e \left(\frac{\partial (P_k x_i)}{\partial x_k} - P_k \delta_{ik} \right) = \mathbf{e}_i \frac{\partial (P_k x_i)}{\partial x_k} - \mathbf{P}$, где $\mathbf{e}_i$ — орты. Интеграл от первого члена преобразуется в поверхностный и исчезает, тогда имеем $\mathbf{d} = \int \mathbf{P} dV$.

Подставим теперь выражение для ρ_e (15.4) в уравнение поля (15.1) и введем новый вектор

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (15.5)$$

который называется *вектором электрической индукции*. Получим

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho. \quad (15.6)$$

Напомним, что здесь ρ — плотность свободных зарядов, распределение которых считается обычно заданным. Поэтому мы можем, в принципе, решить уравнение (15.6) и найти вспомогательное поле $\mathbf{D}(\mathbf{r})$. Чтобы получить $\mathbf{E}$, необходимо знать зависимость $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ или $\mathbf{P}(\mathbf{D})$, которая, как уже сказано в § 14, определяется конкретным устройством молекул диэлектрика. Для большинства веществ при не слишком больших полях эту зависимость с хорошей степенью точности можно считать линейной (см. (14.3)):

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \quad (15.7)$$

где χ — коэффициент поляризации диэлектрика. Подставляя это выражение в (15.5), получим

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} (1 + 4\pi \chi) = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (15.8)$$

где ε — уже знакомая нам *диэлектрическая проницаемость*. Действительно, в однородном диэлектрике уравнение (15.6) можно переписать в виде $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho / \varepsilon$. Отсюда следует, что действие такого диэлектрика сводится к уменьшению плотности заряда (а значит, и поля) в ε раз. При этом индукцию можно рассматривать также как часть полного поля $\mathbf{E}$.

В общем случае $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ и вектор $\mathbf{D}$ есть некоторое вспомогательное поле, а диэлектрик изменяет не только величину, но и конфигурацию электрического поля. Одним из важных свойств индукции является сохранение ее потока без учета связанных зарядов среды. Это вытекает непосредственно из уравнения (15.6). Проинтегрировав обе его части по объему, содержащему свободные заряды плотности $\rho(\mathbf{r})$, и применив к левой части теорему Остроградского–Гаусса (П. I.9), получим (ср. (7.1), (7.2)):

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi q, \quad (15.9)$$

где q — свободный заряд внутри поверхности S . Отсюда, в частности, следует связь индукции с плотностью заряда на проводнике, аналогичная (10.2):

$$D_n = 4\pi\sigma, \quad (15.10)$$

где D_n — нормальная к поверхности проводника составляющая вектора $\mathbf{D}$. В общем случае индукция $\mathbf{D}$ может иметь и тангенциальную составляющую вдоль поверхности проводника, однако последняя не дает вклада в σ , как легко проверить, используя (15.9).

С другой стороны, потенциал электрического поля в среде по-прежнему связан с вектором $\mathbf{E}$. Это получается непосредственно из усреднения уравнения $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Поэтому, в частности, вектор $\mathbf{E}$ остается перпендикулярным поверхности проводника. Из соотношения (15.8) следует параллельность векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, если ε не зависит от направления. Последнее условие не всегда выполняется. В общем случае линейная связь векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ может быть описана *тензором диэлектрической проницаемости*

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k. \quad (15.11)$$

Это имеет место, например, в анизотропных кристаллах или в замагниченной плазме (см. задачу XII.1, § 84), свойства которых зависят от направления. При этом векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ непараллельны.

Для вспомогательного поля $\mathbf{D}$ принцип суперпозиции выполняется по определению вектора $\mathbf{D}$ (15.6): суммарное поле $\mathbf{D}$ есть сумма полей от отдельных свободных зарядов. Для истинного поля $\mathbf{E}$ принцип суперпозиции в таком виде (т. е. с учетом только свободных зарядов) справедлив лишь в случае линейной зависимости $\mathbf{d}(\mathbf{E})$. Последняя имеет место только в слабых полях (см. (14.3)) и только приближенно. Это, однако, не означа-

ет нарушения фундаментального принципа суперпозиции (§ 3), если учесть все заряды — как свободные, так и связанные.^{*)}

В гауссовой системе индукция измеряется, естественно, в тех же единицах, что и электрическое поле. В СИ единица индукции определяется из закона сохранения потока: $1 \text{ Кл/м}^2 \approx 3,77 \cdot 10^6 \text{ (г)} = 4\pi c \cdot 10^{-5} \text{ [г]}$. Поток индукции измеряется в кулонах: $1 \text{ Кл} \approx 3,77 \cdot 10^{10} \text{ [г]} = 4\pi c/10 \text{ [г]}$, где c — скорость света. В дальнейшем (§ 29) мы увидим, что появление c в формулах перехода не случайно и связано с теорией относительности.

Отметим, что в СИ векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ отличаются не только по величине, но и по размерности. Это значит, что диэлектрическая проницаемость — размерная величина. В частности, в вакууме (данные 2008 г.)

$$\varepsilon_0 = 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.} \quad (15.12)$$

С физической точки зрения такая ситуация является противостественной, поскольку поле $\mathbf{D}$ составляет, по существу, часть полного поля $\mathbf{E}$, а в вакууме оба поля просто совпадают. Поэтому СИ неадекватна физике электромагнитных явлений, и мы будем пользоваться *гауссовой системой*. Последняя, однако, неудобна в практических расчетах (в частности, ее единицы заряда, тока и т. д. слишком малы). Здесь наиболее удобно пользоваться СИ.

В СИ закон Кулона записывается в такой форме:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (15.13)$$

откуда следует, что диэлектрическая проницаемость вакуума (точнее, величина $(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$) играет роль, аналогичную гравитационной постоянной в законе тяготения Ньютона. Причина появления последней та же самая — выбор единицы массы независим от закона взаимодействия. Опять было бы более естественно положить гравитационную постоянную равной единице и определить тем самым новую единицу массы, аналогичную гауссовой единице заряда. Она оказывается равной 15 тыс. кг.

По той же причине (соображения удобства) в технике часто используют относительную диэлектрическую проницаемость, принимая за единицу диэлектрическую проницаемость вакуума, т. е. фактически используя гауссовы единицы. В этих единицах ε твердых диэлектриков колеб-

^{*)} Точно так же рассеяние света на свете (фотона на фотоне), которое уже наблюдалось в прямых экспериментах, означает нарушение принципа суперпозиции в классическом его понимании; это явление в квантовой электродинамике объясняется поляризацией вакуума — присутствием виртуальных электрон-позитронных пар.

лется в пределах 2,2 (полиэтилен) – 9,5 («высокочастотные» текстолит, гетинакс, пластмассы, керамики).

Задача II.2. Найти электрическое поле и емкость плоского конденсатора, заполненного диэлектриком с переменным $\varepsilon(x) = \varepsilon(0) \cdot (1 + \alpha x)$; пластины конденсатора расположены при $x = 0, h$.

Уравнение (15.6) принимает вид

$$\frac{d}{dx} E(1 + \alpha x) = 0, \text{ откуда } E = \frac{A}{1 + \alpha x}.$$

Постоянную A находим из напряжения V на конденсаторе. Получаем

$$E(x) = \frac{\alpha V}{(1 + \alpha x) \cdot \ln(1 + \alpha h)}.$$

Отсюда

$$D(x) = \frac{\varepsilon(0) \alpha V}{\ln(1 + \alpha h)} = \text{const}.$$

Из равенств $Q = DS/4\pi = CV$ находим

$$C = \frac{\varepsilon(0) \alpha S}{4\pi \cdot \ln(1 + \alpha h)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(0) S}{4\pi h}$$

(сравни задачу I.25: емкость конденсатора увеличивается в ε раз при заполнении его однородным диэлектриком).

Из уравнения (15.6) следует уравнение для потенциала, аналогичное (7.3). При этом потенциал, как и в отсутствие диэлектрика (вакуум), определяем равенством (2.3)

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi.$$

При $\varepsilon = \text{const}$ подставим в (15.6) $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \nabla \varphi$. Находим

$$\Delta \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (15.14)$$

Мы получили *уравнение Пуассона в среде*. Сравнив с (7.3), еще раз видим, в чем состоит влияние диэлектрической проницаемости: в диэлектрике эффективная плотность свободных зарядов в ε раз меньше реальной. И еще одно важное утверждение можно сделать, сравнив (7.3) и (15.14): *потенциал зарядов плотности ρ в однородном диэлектрике* описывается выражением, аналогичным (8.1):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \cdot dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (15.15)$$

Оно же является общим решением уравнения Пуассона в однородной диэлектрической среде. Для точечного заряда $\rho(\mathbf{r}) = q \cdot \delta(\mathbf{r})$, и из (15.15) находим

$$\varphi(r) = \frac{q}{\varepsilon \cdot r}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{\varepsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (15.16)$$

Продолжая это сравнение, можем сделать важный вывод: емкость конденсатора, заполненного однородным диэлектриком, в ε раз больше вакуумного конденсатора:

$$C_\varepsilon = \varepsilon C_{\text{вакуум}}. \quad (15.17)$$

§ 16. Граничные условия

Уравнение поля в диэлектрике (15.6) решается при определенных граничных условиях. Обычно эти условия задаются на бесконечности и на границе с проводниками. В тех случаях, когда среда состоит из нескольких диэлектриков, уравнение (15.6) можно решать отдельно в каждом из них, а затем сшивать решения на границах между ними. Для этого нужны граничные условия, т. е. связь между полями в соседних диэлектриках.

Прежде всего должно выполняться условие непрерывности потенциала, так как в противном случае возникали бы бесконечно большие поля. Отсюда непосредственно следует равенство тангенциальных составляющих электрического поля:

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (16.1)$$

Нормальная составляющая вектора $\mathbf{E}$ терпит разрыв, так как на границе двух диэлектриков образуется связанный поверхностный заряд. Если на этой поверхности нет свободного заряда, то непрерывна нормальная составляющая вектора $\mathbf{D}$. Это условие легко получается из закона сохранения потока (15.9) или из уравнения поля (15.6):

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (16.2)$$

Задача II.3. Найти скачок нормальной составляющей E на границе двух сред.

Записав (16.2) в виде $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$, находим $E_{2n} - E_{1n} = E_{1n}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/\varepsilon_2$. Отсюда можно определить также поверхностную плотность связанного заряда:

$$\sigma_\varepsilon = (E_{2n} - E_{1n})/4\pi = E_{1n} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 \right) / 4\pi. \quad \text{Она складывается из двух частей разного}$$

знака, отдельно на каждом из диэлектриков: $\sigma_{\varepsilon 1} = P_{1n} = \frac{D_{1n} - E_{1n}}{4\pi} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} E_{1n}$;
 $\sigma_{\varepsilon 2} = -P_{2n} = \frac{1 - \varepsilon_2}{4\pi} E_{2n}$; $\sigma_\varepsilon = \sigma_{\varepsilon 1} + \sigma_{\varepsilon 2}$.

Задача II.4. Плоский конденсатор заполнен двумя слоями диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1 , ε_2 и толщиной (вдоль направления поля) h_1 , h_2 соответственно. Размеры диэлектрика поперек поля совпадают с размерами пластин конденсатора. Найти значение электрического поля в каждом из диэлектриков.

При напряжении на конденсаторе, равном V , запишем, используя условие (16.2),

$$\begin{aligned} V &= E_1 h_1 + E_2 h_2, \\ \varepsilon_1 E_1 &= \varepsilon_2 E_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$E_{1,2} = \frac{V}{\varepsilon_{1,2} \left(\frac{h_1}{\varepsilon_1} + \frac{h_2}{\varepsilon_2} \right)}.$$

Этот результат нетрудно обобщить на случай $N > 2$ пластин (рис. II.3):

$$E_n = \frac{V}{\varepsilon_n \sum_{i=1}^N \frac{h_i}{\varepsilon_i}}.$$

Из полученных результатов следует, что эффективная толщина диэлектрического слоя в ε раз меньше его геометрической толщины. Кроме того, при $N = 1$ поле в диэлектрике равно $E_1 = V/h_1$, т. е. совпадает с полем в вакууме. Это несколько не противоречит утверждению об ослаблении поля в диэлектрике. Дело в том, что здесь задано напряжение на пластинах, которое «компенсирует» ослабление поля при внесении в конденсатор диэлектрика, — источник напряжения добавляет заряд на пластинах, увеличивая его в ε раз (задача II.2).

Как измерить векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ в среде? Для этого можно сделать в ней небольшую полость и измерить поле внутри нее. Если полость сильно вытянута вдоль поля, то поле в полости равно полю $\mathbf{E}$ в среде (16.1). Если же полость вытянута перпендикулярно полю, то из (16.2) находим вектор $\mathbf{D}$. Заметим, что такая процедура годится лишь для изотропного диэлектрика.

Метод описания среды с помощью диэлектрической проницаемости можно распространить и на среду с макроскопическими неоднородностями. Рассмотрим, например, «газ» металлических шариков радиуса r_0 с плот-

ностью n в единице объема. Пусть нас интересует лишь среднее поле (в объемах, содержащих много шариков). Тогда вместо решения очень сложной задачи с граничными условиями на каждом из шариков можно ввести эффективную диэлектрическую проницаемость такой «среды». Для этого достаточно найти дипольный момент одного шарика. Если $nr_0^3 \ll 1$, т. е. «газ» разреженный, можно пренебречь в первом приближении взаимным влиянием шариков и рассматривать поляризацию каждого из них во внешнем однородном поле (см. § 11). Имеем $d = Er_0^3$ и момент единицы объема $P = nEr_0^3$, где E — поле вдали от шариков. Возникает вопрос: что это за поле с точки зрения нашей «среды»: $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ или какое-то третье поле? Вообще говоря, это сложный вопрос (см. § 19 ниже), однако при $nr_0^3 \ll 1$ его можно не выяснять, поскольку различие между E и D мало. В результате получаем $\varepsilon = 1 + 4\pi r_0^3 n$.

Рассмотрим подробнее более простой пример неоднородной среды, состоящей из слоев диэлектрика ε_1 , ε_2 толщиной h_1 , h_2 соответственно (рис. П.3). Эта среда является анизотропным диэлектриком, главные оси которого направлены вдоль и перпендикулярно слоям. Эффективную диэлектрическую проницаемость ε_x , ε_y можно вычислять различными способами. Можно, например, найти среднее поле в среде:

$$\langle E_x \rangle = \frac{E_1 h_1 + E_2 h_2}{h_1 + h_2} = \frac{D_x}{h_1 + h_2} \left(\frac{h_1}{\varepsilon_1} + \frac{h_2}{\varepsilon_2} \right) \equiv \frac{D_x}{\varepsilon_x}, \quad \varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (h_1 + h_2)}{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1}.$$

В перпендикулярном направлении сохраняется E , поэтому $\langle E_y \rangle = E_1 = E_2$, $\langle D_y \rangle = \frac{D_1 h_1 + D_2 h_2}{h_1 + h_2} = E_y \frac{\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2}{h_1 + h_2} \equiv \varepsilon_y E_y$. Мы видим, что среда действительно анизотропна ($\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$, если $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$).

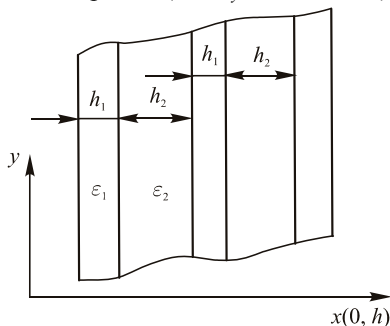


Рис. П.3. Слоистый диэлектрик

Отметим еще одну важную особенность поля в слоистом диэлектрике, заполняющем пространство между проводящими плоскостями с заданным напряжением между ними (задача II.4). При уменьшении диэлектрической проницаемости в одном из слоев по сравнению с остальными, $\varepsilon_k \sim 1 \ll \varepsilon_n$, $n \neq k$, поле в нем значительно возрастает. В простейшем случае двухслойного диэлектрика

$$E_1 \approx \frac{V}{h_1}, \quad E_2 \approx \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot E_1 \ll E_1, \quad h_1 \gg \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot h_2.$$

Это обстоятельство следует учитывать при конструировании изоляции в высоковольтной технике. Так, в данном примере тонкий слой диэлектрика, выдерживающий расчетное напряжение, может не спасти конденсатор от высоковольтного пробоя. Более того, при заполнении конденсатора диэлектриком следует обеспечить его хороший контакт с пластинами во избежание развития разряда (§ 26) в воздушных (или вакуумных) полостях.

Найдем теперь ε_x , ε_y через средний дипольный момент среды:

$$\begin{aligned} \langle P_x \rangle &= \frac{D_x}{4\pi} \left(1 - \frac{\frac{h_1}{\varepsilon_1} + \frac{h_2}{\varepsilon_2}}{h_1 + h_2} \right) \equiv \frac{D_x}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_x} \right), \\ \langle P_y \rangle &= \frac{E_y}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2}{h_1 + h_2} - 1 \right) \equiv \frac{E_y}{4\pi} (\varepsilon_y - 1). \end{aligned}$$

Задача II.5. Найти поляризацию диэлектрического шара во внешнем однородном поле (рис. II.4).

Будем решать более общую задачу, когда шар ε_1 погружен в среду ε_2 . В каждой из двух областей (вне и внутри шара) $\varepsilon = \text{const}$, и поэтому $-\Delta\varphi = \text{div}\mathbf{E} = \text{div}(\mathbf{D}/\varepsilon) = \text{div}\mathbf{D}/\varepsilon = 0$, т. е. нужно решать уравнение Лапласа с граничными условиями (16.1), (16.2) на поверхности шара. Решение ищем методом разделения переменных, аналогично тому, как это было сделано в § 11. Правда поле внутри шара теперь не равно нулю. Однако, поскольку поле в центре должно быть конечным, для внутренней области из общего решения (11.12) останется лишь первое слагаемое. Тогда имеем

$$\varphi_1 = -E_1 r \cos\theta, \quad \varphi_2 = -E_0 r \cos\theta + \frac{d \cos\theta}{r^2}. \quad (16.3)$$

Постоянные E_1 (поле внутри шара) и d (дипольный момент шара в среде) находим из граничных условий

$$-E_1 a = -E_0 a + \frac{d}{a^2}, \quad \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_0 + \frac{2d\varepsilon_2}{a^3}, \quad (16.4)$$

откуда

$$d = d_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}, \quad d_0 = E_0 a^3, \quad E_1 = E_0 \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}. \quad (16.5)$$

Таким образом, электрическое поле внутри шара однородно, а вне шара представляет собой суперпозицию однородного поля $\mathbf{E}_0$ и поля диполя с дипольным моментом $\mathbf{d}$, ориентированным вдоль поля. При $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ (проводник) $d \rightarrow d_0$, и решение переходит в (11.13), (11.14). При этом $E_1 \rightarrow 0$. При $\varepsilon_1 = 1$ поле в сферической полости равно $E_1 = E_0 3\varepsilon_2 / (1 + 2\varepsilon_2)$. Поле внутри шара ослабляется, если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, и наоборот.

Электрическое поле в диэлектрической среде, как и в вакууме, часто удается рассчитать с помощью *метода изображений* (§ 10). Суть метода остается той же, однако в присутствии диэлектрика следует, конечно, учитывать плотность связанных зарядов (§ 15). Требования к эквивалентной системе «заряд + его изображения» остаются теми же, что и в вакууме (§ 10). Две следующие задачи иллюстрируют применение метода изображений в диэлектрических средах.

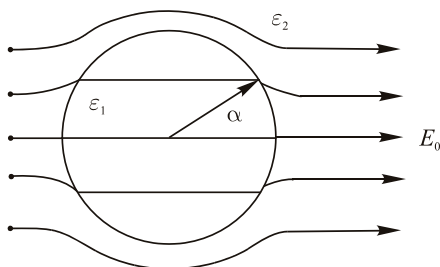


Рис. П.4. Поляризация диэлектрического шара, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, сравни рис. I.16

Задача П.6. Заряд q находится на расстоянии h от плоской границы раздела двух диэлектриков ε_1 и ε_2 . Найти эквивалентную систему зарядов и потенциал в обоих диэлектриках.

Предположим, что поле в 1-м диэлектрике (ε_1) создается зарядом q и его изображением q_1 во 2-ом диэлектрике (ε_2), а поле во 2-ом диэлектрике создается зарядом q_2 — изображением заряда q_1 в 1-ом диэлектрике. Значения зарядов q_1, q_2 мы (пока) не знаем, как не знаем и их расстояния h_1, h_2 от границы. Единственное, что можно сказать сразу: все три заряда расположены на общей нормали к границе, что диктуется соображениями аксиальной симметрии поля (рис. П.5).

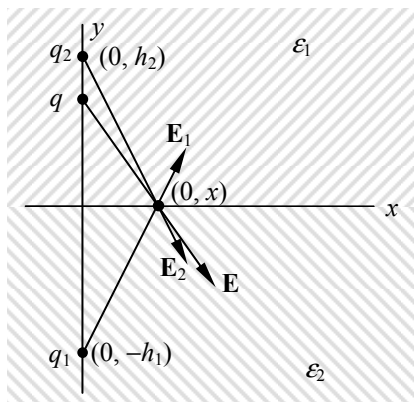


Рис. II.5. Заряд вблизи границы раздела диэлектриков ε_1 и ε_2

Выберем систему координат, ось y которой ортогональна границе и проходит через заряд q , плоскость границы лежит при $y = 0$. Запишем граничные условия (16.1), (16.2) для полей точечных зарядов (15.16) в точке $(0, x)$:

$$E_r + E_{1r} = E_{2r} \rightarrow \frac{qx}{\varepsilon_1 (h^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{q_1 x}{\varepsilon_1 (h_1^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{q_2 x}{\varepsilon_2 (h_2^2 + x^2)^{3/2}},$$

$$\varepsilon_1 E_n - \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \rightarrow \frac{qh}{(h^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{q_1 h_1}{(h_1^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{q_2 h_2}{(h_2^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Эти уравнения должны удовлетворяться при произвольном x , поэтому

$$h_1 = h_2 = h.$$

Тогда приходим к уравнениям для зарядов q_1, q_2 :

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q_2 - q_1 = q,$$

$$q_2 + q_1 = q.$$

Отсюда

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot q, \quad q_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot q.$$

Соответственно, потенциал поля заряда q равен (см. (15.16))

$$\varphi(r) = q \cdot \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1 r_2}, & y \geq 0, \\ \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{1}{r_1}, & y \leq 0. \end{cases}$$

§ 17. Энергия поля в среде

Для вычисления энергии электрического поля в среде рассмотрим простейший пример плоского конденсатора, заполненного диэлектриком. Заряжая конденсатор, мы производим определенную работу, которая и переходит в энергию электрического поля. Вообще говоря, при этом изменяется не только энергия собственно поля, но и тепловая энергия диэлектрика, который может как нагреваться, так и охлаждаться в процессе поляризации. Примером служит диэлектрик с ориентационной поляризацией (§ 14), диэлектрическая проницаемость которого зависит от температуры. Для упрощения вычисления принято включать изменение тепловой энергии диэлектрика в энергию поля, которая равна просто работе внешних сил. При таком определении энергии поля в среде она совпадает со свободной энергией при постоянной температуре и с внутренней энергией при постоянной энтропии.

При изменении заряда конденсатора на dQ совершается работа $dA = VdQ$, где V — напряжение на конденсаторе. Для плоского конденсатора с площадью пластин S и расстоянием между ними h имеем $V = Eh$, $Q = \sigma S = SD_n/4\pi$, где D_n — нормальная составляющая вектора индукции, который в общем случае непараллелен $\mathbf{E}$ (см. § 15). Изменение энергии на единицу объема конденсатора (изменение плотности энергии) составляет

$$dw = E \cdot dD_n / 4\pi = (\mathbf{E}, d\mathbf{D}) / 4\pi. \quad (17.1)$$

Это выражение является исходным для вычисления энергии поля в среде. Если, например, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, *плотность энергии поля* найдем, проинтегрировав (17.1) от 0 до E :

$$w = \varepsilon E^2 / 8\pi = D^2 / 8\pi\varepsilon = \mathbf{E}\mathbf{D} / 8\pi. \quad (17.2)$$

При $\varepsilon = 1$ получаем выражение для плотности энергии поля в вакууме (9.4). В анизотропном диэлектрике $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$ (15.11). При интегрировании (17.1)

диагональные члены дают $\varepsilon_{ii}E_i^2/8\pi$, а недиагональные образуют пары: $E_i\varepsilon_{ik}dE_k + E_k\varepsilon_{ki}dE_i$. Последнее выражение должно свертываться в полный дифференциал, так как энергия поля зависит только от конечного состояния поля, но не от способа его создания. Для поля в вакууме это вытекает уже из того факта, что оно является самостоятельным физическим объектом. В среде ситуация усложняется, так как мы условились включать в энергию поля также и энергию тепловых процессов. Поэтому необходимо дополнительно предположить, что тепловые процессы в среде обратимы, в частности отсутствует гистерезис.

Мы приходим, таким образом, к выводу, что тензор диэлектрической проницаемости должен быть симметричным: $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$. Отсюда $E_i\varepsilon_{ik}dE_k + E_k\varepsilon_{ki}dE_i = \varepsilon_{ik}d(E_iE_k)$, причем суммирование производится только по $i < k$. Окончательно получаем

$$w = \sum_i \frac{\varepsilon_{ii}E_i^2}{8\pi} + \sum_{i < k} \frac{\varepsilon_{ik}E_iE_k}{4\pi} = \frac{\varepsilon_{ik}E_iE_k}{8\pi} = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{D})}{8\pi}. \quad (17.3)$$

В последней сумме мы опустили знак Σ , предполагая, что суммирование осуществляется по всем значениям повторяющихся индексов.

В диэлектрике с упругой поляризацией ε не зависит от температуры, и тепловые процессы фактически отсутствуют. В этом случае энергия (17.2) должна совпадать с энергией микрополя в среде. Последняя может быть записана следующим образом: $w_{\text{микро}} = \langle E_{\text{микро}}^2 \rangle / 8\pi$. Здесь $E_{\text{микро}} = E + \tilde{E}$ — микрополе, среднее значение которого $\langle E_{\text{микро}} \rangle = E$ есть обычное поле в среде, а $\tilde{E}$ характеризует микроскопические (молекулярные) флуктуации. Тогда $\langle E_{\text{микро}}^2 \rangle = E^2 + \langle \tilde{E}^2 \rangle = \varepsilon E^2$, отсюда

$$\varepsilon - 1 = \langle \tilde{E}^2 \rangle / E^2, \quad (17.4)$$

т. е. диэлектрическая проницаемость в таком веществе характеризует флуктуации микрополя. Отсюда вытекает также, что в этом случае всегда $\varepsilon > 1$.

Проиллюстрируем соотношение (17.4) на примере слоистого «диэлектрика», составленного из металлических пластин толщиной h , разделенных пустыми промежутками шириной a (сравни пример слоистого диэлектрика в § 16). Среднее поле в таком диэлектрике $E = \langle E_{\text{микро}} \rangle = E_{\text{микро}}h/(a+h) = Dh/(a+h)$, откуда $\varepsilon = 1 + a/h$. Энергия поля $w = \langle E_{\text{микро}}^2 \rangle / 8\pi = E_{\text{микро}}^2 h / 8\pi(a+h) = D^2 / 8\pi\varepsilon$.

§ 18. Давление поля

Как мы уже знаем, в электрическом поле на проводнике появляются наведенные заряды. Поле действует на эти заряды, а значит, и на проводник с некоторой силой. Вычислим ее. Начнем с выражения для объемной силы $\mathbf{f}$, т. е. силы, действующей на единицу объема проводника. Ее можно записать в таком виде:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}, \quad (18.1)$$

где ρ — плотность заряда. Полную силу, действующую на проводник, можно найти, интегрируя (18.1) по всему объему проводника. Но нам известно, что наведенные на проводник заряды сосредоточены лишь вблизи его поверхности. Поэтому сила действует лишь на поверхность проводника, и ее удобно характеризовать давлением. Вычислим это давление, рассматривая небольшой участок проводника как плоский. Будем отсчитывать координату x вдоль внутренней нормали к поверхности проводника и учтем, что вектор $\mathbf{E}$ параллелен этой нормали. Интегрируя (18.1) по переходному слою на поверхности проводника, найдем давление поля

$$p = \int \rho E dx = \int \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dE}{dx} \cdot E dx = -\frac{E^2}{8\pi}. \quad (18.2)$$

Мы использовали здесь уравнение Пуассона, которое в данном случае имеет вид $dE/dx = 4\pi\rho$, так как только составляющая E_x отлична от нуля. Знак «минус» связан с тем, что ось направлена внутрь проводника, где электрическое поле равно нулю. Давление направлено, таким образом, по внешней нормали к проводнику. При этом говорят обычно о натяжении. Иногда применяется еще более образное выражение — «натяжение силовых линий электрического поля». Согласно (18.2), это «натяжение» численно равно плотности энергии поля.

Давление поля на проводник можно выразить также через поверхностную плотность заряда:

$$-p = 2\pi\sigma^2 = \frac{\sigma E}{2}. \quad (18.3)$$

Появление множителя $1/2$ в последнем выражении связано с тем, что внешнее поле E ослабляется в переходном слое так, что среднее в слое поле равно $E/2$. Это непосредственно следует из интеграла (18.2).

Понятие объемной плотности заряда ρ в поверхностном слое проводника не очень оправдано, так как толщина такого слоя порядка меж-

атомных расстояний. Однако результат интегрирования в (18.2) не зависит от конкретного вида функции $\rho(x)$. Этот же результат можно получить и из энергетических соображений. Рассмотрим для простоты плоский конденсатор и будем изменять расстояние между пластинами, сохраняя полный электрический заряд на конденсаторе. Последнее условие означает, что конденсатор отсоединен от источника напряжения, так что изменение его энергии происходит только за счет работы внешних сил, перемещающих пластины. Запишем уравнение баланса энергии, считая перемещение dh малым:

$$F \cdot dh = dW_c, \quad (18.4)$$

где h — расстояние между пластинами, $W_c = Q^2/2C$ — энергия конденсатора, емкость которого равна $C = S/4\pi h$, F — внешняя сила. Давление поля на пластину конденсатора находим из (18.4):

$$p = -\frac{F}{S} = -\frac{1}{S} \left(\frac{\partial W_c}{\partial h} \right)_Q = -\frac{E^2}{8\pi}. \quad (18.5)$$

Частная производная означает здесь, что производную нужно брать при постоянном заряде.

Если конденсатор присоединен к батарее, так что напряжение на конденсаторе остается постоянным, то в балансе энергии (18.4) нужно учесть работу батареи: $dA = VIdt = VdQ$. Баланс энергии принимает теперь вид

$$Fdh + VdQ = dW_c. \quad (18.6)$$

Учитывая, что при постоянном V можно написать

$$VdQ = V^2 dC = 2dW_c \quad (W_c = CV^2/2), \quad (18.7)$$

получим для давления поля тот же результат:

$$p = -\frac{F}{S} = -\frac{1}{S} \left(\frac{\partial W_c}{\partial h} \right)_V = -\frac{E^2}{8\pi}.$$

Изложенный энергетический метод вычисления сил называется также принципом *виртуальных перемещений*. Этот термин означает в данном случае возможное, но не обязательно реально осуществляемое перемещение.

В обычных условиях давление поля очень мало. Например, при напряженности $E = 100$ кВ/см оно составляет $p \approx 0,004$ бар. При больших полях, как правило, происходит электрический пробой. Однако молекулярные поля, достигающие величины $E \sim 10^9$ В/см, создают огромные напряжения ($\sim 10^6$ бар) и обеспечивают тем самым прочность твердых тел.

Отметим попутно, что на практике прочность значительно ниже этого предела ($\leq 10^4$ бар), что связано с различными микронарушениями кристаллической структуры реальных материалов. Для очень чистых монокристаллов удается поднять прочность на растяжение до $\sim 10^5$ бар.

§ 19. Электростатические силы в среде

При наличии среды вычисление сил, действующих на проводники и диэлектрики, усложняется. Прежде всего выражение для объемной силы $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}$ становится несправедливым, даже если под ρ понимать молекулярную плотность заряда. Это связано с тем, что ρ есть средняя макроскопическая плотность, которая не учитывает поляризацию отдельных молекул. Между тем в неоднородном электрическом поле на поляризованную молекулу действует сила (см. § 5, задача I.2). Можно было бы попробовать усреднить эту силу по объему, но такая процедура наталкивается на значительные трудности. Воспользуемся энергетическим методом вычисления сил, аналогично § 18.

Рассмотрим несколько типичных задач. Найдем силу, действующую на диэлектрический шар, помещенный в слабо неоднородное поле. Последнее условие означает, что поле должно мало меняться на размере шара. Тогда дипольный момент шара будет приблизительно такой же, как и в однородном поле (§ 16, задача II.5): $d = Ea^3(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)$, где E — внешнее поле (в отсутствие шара). Так как момент шара пропорционален полю, то он ведет себя как квазиупругий диполь и, следовательно, его энергия в поле $U = -(\mathbf{d}, \mathbf{E})/2 = -E^2 a^3(\epsilon - 1)/2(\epsilon + 2)$ (см. § 5, задача I.2). Произведем теперь виртуальное перемещение шара во внешнем неоднородном поле и запишем баланс энергии $-(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = dU$, где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на шар со стороны поля:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = 3V \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \nabla \frac{E^2}{8\pi}, \quad (19.1)$$

т. е. диэлектрик втягивается в сильное поле. Если $\epsilon - 1 \ll 1$ (слабый диэлектрик), то выражение (19.1) справедливо для диэлектрика произвольной формы, так как в этом случае можно пренебречь взаимодействием отдельных участков диэлектрика, которые поляризуются независимо друг друга. Тогда объемная сила, действующая на диэлектрик, равна

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{V} = \nabla \frac{(\epsilon - 1)E^2}{8\pi}, \quad (19.2)$$

т. е. определяется изменением плотности энергии электрического поля при внесении диэлектрика.

Кроме силы, действующей в неоднородном электрическом поле на диэлектрик как целое, в нем возникают еще и внутренние напряжения, называемые стрикционными силами. Рассмотрим пластину диэлектрика, помещенную в плоский конденсатор (рис. II.6). Ясно, что под действием стрикционных сил пластина несколько растянется вдоль поля. Попробуем вычислить стрикционные силы в этом примере. Воспользуемся энергетическим методом. При небольшом растяжении пластины изменение энергии поля складывается из двух частей. Во-первых, в слое dh энергия поля в вакууме $E_0^2/8\pi$ заменяется на энергию поля в среде $D^2/8\pi\epsilon = E_0^2/8\pi\epsilon$.

Здесь $E_0 = 4\pi\sigma$ — поле в вакуумном зазоре, которое не изменяется при деформации диэлектрика, поскольку мы принимаем заряд на конденсаторе неизменным (см. выше). Во-вторых, необходимо учесть изменение энергии во всем объеме вещества из-за изменения его плотности, от которой зависит диэлектрическая проницаемость: $(dW)_2 = -h \frac{D^2}{8\pi\epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{\epsilon}$, где

$$d\epsilon = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T d\rho = -\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \cdot \frac{dh}{h}. \text{ Частная производная взята здесь при по-}$$

стоянной температуре, чтобы исключить зависимость ϵ от температуры. Полный баланс энергии на единицу площади диэлектрика имеет вид

$$p_e dh + dW = p_e dh + \frac{E_0^2}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) dh + \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \cdot \frac{dh}{h} \cdot \frac{E_0^2 h}{8\pi\epsilon^2} = 0. \quad (19.3)$$

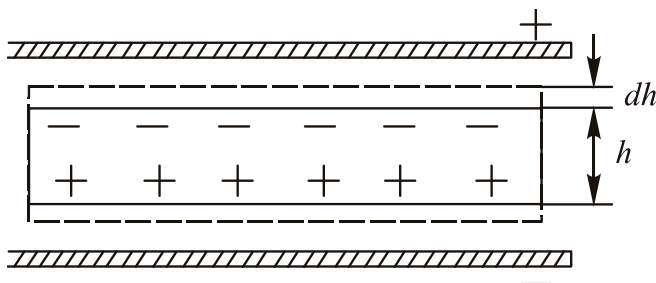


Рис. II.6. К расчету стрикционных сил

Отсюда натяжение, действующее на диэлектрик,

$$p_\varepsilon = \frac{E_0^2}{8\pi} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\rho}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \right) \quad (19.4)$$

можно рассматривать как разность натяжений снаружи $(E_0^2/8\pi)$ и изнутри $\left(E_0^2 \left(\varepsilon + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T / 8\pi \right)$ диэлектрика, где $E = E_0/\varepsilon$ — электрическое поле внутри последнего.

Обычно стрикционным давлением называется величина

$$p_{\text{ст}} = - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \rho. \quad (19.5)$$

Это давление не дает вклада в силу, действующую на диэлектрик как целое, при условии, что он окружен вакуумом.

Рассмотрим, наконец, произвольную систему заряженных тел, погруженных в однородный жидкий диэлектрик. Как мы уже знаем (§ 15), такая среда ослабляет поле в ε раз, не изменяя его конфигурации. Отсюда, в частности, следует, что энергия поля также в ε раз меньше, чем в вакууме. Значит, и работа по перемещению зарядов, и силы между телами тоже уменьшаются в ε раз. На первый взгляд этот вывод кажется тривиальным: раз поле уменьшается в ε раз, то во столько же раз должна уменьшиться и сила его воздействия на заряд. Однако под полем в среде понимается среднее поле, тогда как действующее на заряд локальное поле зависит от формы полости, т. е. от формы заряженного тела. Чтобы разобраться, в чем здесь дело, вернемся к предыдущему примеру. Пусть диэлектрик является теперь жидким и заполняет весь конденсатор. Тем не менее мы можем представить себе, что между диэлектриком и пластиной конденсатора существует очень тонкая щель, в которой поле равно E_0 , так что все предыдущее рассмотрение остается в силе. В таком случае давление поля непосредственно на пластину равно $E_0^2/8\pi$, т. е. такое же, как в вакууме, вместо ожидаемого ослабления в ε раз. Этот пример подтверждает, что сила, действующая со стороны поля на заряженное тело, действительно зависит от формы тела.

Однако жидкий диэлектрик имеет, как правило, механический контакт с телом и тоже действует на него с некоторой силой, которая в рассматриваемом примере дается выражением (19.4). Наконец, нужно

учесть еще дополнительное давление в жидкости, возникающее за счет электрического поля и равное стрикционному давлению (19.5). Таким образом, полное давление на пластину равно

$$p = \frac{E_0^2}{8\pi} - p_\varepsilon + p_{\text{ст}} = \frac{E_0^2}{8\pi\varepsilon} \quad (19.6)$$

в соответствии с энергетическими соображениями.

Подчеркнем еще раз, что такой простой результат получается только для жидкого однородного диэлектрика. Механический контакт проводников с твердым диэлектриком является, как правило, неопределенным. Кроме того, внутренние упругие напряжения зависят теперь не от локального стрикционного давления, а от сил, действующих на весь диэлектрик.

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 20. Электрический ток. Уравнение непрерывности

Электрическим током называется любое упорядоченное движение электрических зарядов. Как правило, при этом имеется в виду движение зарядов в некоторой среде, именуемой проводником. С точки зрения технических приложений это, пожалуй, наиболее важный случай. Возможны, однако, и другие виды электрического тока, например пучок заряженных частиц в вакууме (см. § 27).

В отсутствие электрического поля электроны в проводнике движутся хаотически, так что их средняя скорость равна $\bar{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle = 0$. Здесь черта означает *усреднение по времени* для одного электрона, а скобки — *усреднение по многим электронам* в определенный момент времени.

Интересно отметить, что в металлах скорость хаотического движения электронов весьма велика и составляет $v_e \sim 10^8$ см/с даже вблизи абсолютного нуля температуры. Это чисто квантовый эффект — той же природы, что и движение электронов в атомах и молекулах. Нагревание металла лишь незначительно увеличивает эту скорость, даже при температуре испарения металла.

Электрическое поле ускоряет электроны, так что появляется некоторое упорядоченное движение, т. е. электрический ток, который можно охарактеризовать количеством заряда, проходящим через некоторую поверхность в единицу времени. Эта величина называется силой тока и измеряется в *амперах* (СИ). В гауссовой системе $3 \cdot 10^9$ (г) = 1 А, что приблизительно соответствует потоку в $2 \cdot 10^9$ электронов в секунду.

Другой характеристикой является плотность тока

$$\mathbf{j} = \overline{\rho \mathbf{v}} = e n \bar{\mathbf{v}}, \quad (20.1)$$

где ρ — плотность заряда, а n — плотность электронов. В дальнейшем мы опускаем знак усреднения.

В обычных условиях средняя скорость электронов v очень мала. Так, например, при плотности тока 1 А/см^2 в медном проводнике эта скорость составляет всего около 5 см в сутки (!) . Подчеркнем, что сама по себе эта скорость никак не сказывается на обычных электрических процессах. Ее можно было бы, в принципе, наблюдать лишь в специальных, очень тонких экспериментах типа закручивания кольца при возбуждении в нем тока. Если же напряжение подается на обычную электрическую цепь, ток возникает практически одновременно во всех участках цепи (к этому вопросу мы вернемся в §§ 55 и 86).

Полный ток через поверхность S связан с плотностью тока интегралом:

$$I_S = \int_S (\mathbf{j}, \mathbf{dS}). \quad (20.2)$$

Рассмотрим баланс электрического заряда в проводящей среде при протекании тока. Выделим мысленно некоторый объем проводника V , ограниченный замкнутой поверхностью S . Пусть в этом объеме находится заряд $Q = \int_V \rho dV$. Его изменение определяется током через поверхность S :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_S (\mathbf{j}, \mathbf{dS}). \quad (20.3)$$

Знаки выбраны так, что положительный ток «вытекает» из объема и заряд уменьшается ($Q < 0$). Частная производная $\partial \rho / \partial t$ означает, что имеется в виду локальное (в данной точке проводника) изменение плотности заряда. Правую часть равенства можно преобразовать, используя теорему Остроградского–Гаусса (см. § 6 и П.1.9):

$$\oint_S (\mathbf{j}, \mathbf{dS}) = \int \text{div } \mathbf{j} dV.$$

Так как равенство (20.3) справедливо для любого объема, должны быть равны и подинтегральные выражения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (20.4)$$

Это соотношение носит название *уравнения непрерывности*. Оно описывает закон сохранения электрического заряда для непрерывного распределения заряда и тока. Уравнение (20.4) называется локальным законом сохранения, а (20.3) — интегральным.

Справедливость уравнения непрерывности вытекает в конечном счете из всей совокупности современных экспериментальных данных. В обычных условиях протекания тока закон сохранения заряда сводится просто

к неизменности электрического заряда каждой элементарной частицы. При этом, разумеется, число частиц также остается постоянным. В данном случае уравнение непрерывности означает баланс частиц и может быть записано с помощью чисто механических величин:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0. \quad (20.5)$$

В релятивистской области удобно пользоваться четырехмерным вектором (4-вектором) тока. Определим его соотношением

$$j_k = \rho_0 u_k, \quad (20.6)$$

где $u_k = dx_k/d\tau$ — компоненты 4-скорости, τ — инвариантное время ($dt = d\tau/\gamma$). Величина j_k будет 4-вектором, если ρ_0 — инвариант (скаляр). Выберем в качестве ρ_0 инвариантную плотность заряда, т. е. плотность заряда в собственной системе частиц, где их средняя скорость равна нулю. В нерелятивистском случае определение (20.6) совпадает с (20.1), причем четвертая компонента^{*)} 4-тока ($j_4 = ic\rho_0$) оказывается пропорциональной плотности заряда. В релятивистском случае

$$j_4 = ic\rho_0 = i\rho c, \quad \mathbf{j} = \rho_0 \gamma \mathbf{v} = \rho \mathbf{v}, \quad (20.7)$$

где ρ — обычная плотность заряда в системе отсчета, относительно которой частицы движутся со скоростью v ($\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$). Связь $\rho_0 = \rho$ получается по аналогии с $\gamma\tau = t$, поскольку ρ , как и t , является четвертой компонентой 4-вектора. Квадрат модуля 4-вектора тока равен $-c^2\rho_0^2$, так как 4-вектор тока, как и 4-скорость, является времениподобным вектором.

Соотношение (20.7) показывает, что первоначальное нерелятивистское определение плотности тока (20.1) сохраняется и в общем случае.

Подчеркнем, что все понятия и соотношения этого параграфа справедливы для любого вида электрического тока, поскольку они описывают его «кинематику».

§ 21. Ток в металлах. Закон Ома

Динамика движения заряженных частиц зависит от конкретных условий протекания тока. Важным частным примером является ток в ме-

^{*)} Мы будем пользоваться метрикой, в которой четвертая компонента 4-вектора является мнимой. Это упрощает вычисления, поскольку выражение для скалярного произведения имеет обычный вид $A_k B_k = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4$.

таллах. Опыт показывает, что в данном случае плотность тока пропорциональна электрическому полю. Это означает, что на движущийся в металле электрон действует как бы сила трения, пропорциональная скорости электрона. Коэффициент пропорциональности между плотностью тока и полем (σ) называется *проводимостью* среды:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (21.1)$$

Величину, обратную проводимости, называют *удельным сопротивлением* среды. Часто удельное сопротивление обозначают буквой ρ . Во избежание путаницы (ρ — плотность заряда!) мы будем использовать для обозначения удельного сопротивления символ ρ_σ .

Трение вызвано взаимодействием электронов с ионами решетки. Если считать, что после столкновения средняя скорость электрона $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ (сферически-симметричное рассеяние), то сила трения

$$\mathbf{f}_{\text{тр}} = -\nu m \mathbf{v}, \quad (21.2)$$

где ν — частота столкновений, которая зависит от длины свободного пробега l_s (от одного столкновения до другого) и от скорости электрона v_e : $\nu \sim v_e/l_s$. Величины v_e , l_s , а значит, и ν можно приближенно считать постоянными. Отсюда и вытекает закон (21.1) с постоянной σ . Здесь существенно, что $|\mathbf{v}| \ll v_e \sim 10^8$ см/с (см. § 20).

Установившаяся скорость движения электронов определяется из условия $e\mathbf{E} + \mathbf{f}_{\text{тр}} = 0$:

$$\mathbf{v} = \frac{e\mathbf{E}}{\nu m}. \quad (21.3)$$

Отсюда плотность тока $\mathbf{j} = e^2 n \mathbf{E} / \nu m$ и проводимость

$$\sigma = \frac{ne^2}{\nu m} \sim \frac{ne^2 l_s}{mv_e} = \frac{nr_e c^2 l_s}{v_e}, \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad (21.4)$$

где r_e — *классический радиус электрона* (Приложение II). Заметим, что σ имеет в гауссовой системе размерность частоты. С помощью оценки (21.4) можно определить длину свободного пробега l_s по экспериментальному значению σ . Для меди (см. табл. III.1) находим

$$l_s \sim \frac{\sigma v_e}{nr_e c^2} \sim \frac{5,8 \cdot 10^{17} \cdot 10^8}{10^{23} \cdot 3 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{21}} \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ см}.$$

Таблица III.1. Электрические характеристики некоторых веществ и материалов

Вещество	Удельное сопротивление, 10^{-6} Ом · см при 0° С	Проводимость, 10^{17} с ⁻¹	Температурный коэффициент, 10^{-3} К ⁻¹
Чистые металлы			
Медь	1,55	5,798	4,33
Алюминий	2,50	3,595	4,60
Никель	6,14	1,46	6,99
Железо	8,60	1,04	6,51
Олово	11,15	0,806	4,65
Ртуть	94,07	0,095	0,99
Сплавы			
Медь (95%) + Алюминий	11	0,82	0,80
Нихром 70% Ni + 8% Fe + + 20% Cr + 2% Mn	110	0,082	0,11
Чугун	50–80	0,18–0,11	—
Сталь нержавеющая 1×18Н9Т	75	0,12	—

В *жидкости* проводимость определяется концентрацией ионов, не внешней ионизацией, а диссоциацией молекул благодаря их взаимодействию между собой. Такая жидкость называется электролитом. Диссоциация особенно облегчается, если жидкость представляет собой раствор, поэтому последний обладает, как правило, значительной проводимостью. Так, например, проводимость 10%-ного раствора медного купороса $\approx 3 \cdot 10^{10}$ с⁻¹, что все же на семь порядков меньше, чем у меди. Это объясняется тем, что носителями заряда в электролите (так же, как и в газе) являются тяжелые ионы, а вязкость жидкости значительно больше, чем вязкость электронного газа в металле.

В *кристаллах* l_s примерно в 100 раз больше межатомного расстояния в решетке. Такой большой пробег не объясним с точки зрения классической механики, которая предсказывает величину порядка межатомных расстояний. По квантовой механике в идеальной решетке вообще нет трения. Рассеяние электронов возникает только на нерегулярных искажениях структуры решетки, главным образом вследствие тепловых колебаний

атомов решетки, а также из-за примесей и дефектов решетки. Ясно, что и σ , и l_s должны заметным образом зависеть от температуры. *Проводимость твердых диэлектриков* очень низкая, и, в зависимости от структуры диэлектрика, их удельное сопротивление изменяется в очень широких пределах — от 10^{16} (фторопласт)– 10^{17} (янтарь, плавленый кварц) до 10^8 («низковольтный» текстолит) Ом · м. *Проводимость газов* также очень мала в электрических полях малой напряженности. Но она резко возрастает при возникновении электрического разряда (§ 26). В первом приближении эта зависимость линейная:

$$r(T) = r(0)(1 + \alpha T),$$

где T — абсолютная температура (в кельвинах), α — температурный коэффициент (табл. III.1).

Рассмотрим протекание постоянного тока по тонкому длинному проводнику. В этом случае можно считать, что плотность тока постоянна по сечению проводника. Следовательно, полный ток $I = jS$. Пусть, далее, сечение проводника постоянно по его длине, тогда и $j = \text{const}$, так как полный ток не изменяется вдоль проводника. С другой стороны, полное напряжение (разность потенциалов) на концах проводника равно $V = El$, где l — длина проводника. Подставляя полученные выражения в (21.1), найдем

$$V = I \frac{l}{\sigma S} = RI. \quad (21.5)$$

Величина

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho_\sigma l}{S} \quad (21.6)$$

называется *сопротивлением проводника*.

Закон пропорциональности тока и напряжения (21.5) для металлических проводников был открыт экспериментально немецким математиком и физиком Омом (G. S. Ohm, 1826 г.) и носит его имя. Он ввел также понятие сопротивления и нашел его зависимость от параметров проводника (21.6). Интересно отметить, что Ом открыл свой закон, используя в качестве источника тока медно-висмутовую термопару с разностью температур 100°C . Известные в то время гальванические элементы оказались, как обнаружил Ом, совершенно непригодными для таких опытов из-за неустойчивости их ЭДС и внутреннего сопротивления. Соотношение (21.1) носит название *дифференциального закона Ома*.

Единицей сопротивления в СИ является $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/1 А} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} [\text{г}]$.

В соответствии с этим единица проводимости в СИ есть $1 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1} = 9 \cdot 10^9 (\text{г}) = 9 \text{ ГГц}$.

Если сечение проводника изменяется достаточно медленно, так что в каждом сечении плотность тока однородна по сечению, то полное напряжение на проводнике

$$V = \int_0^l E dx = I \int_0^l \frac{dx}{\sigma(x) S(x)},$$

т. е. сопротивление такого проводника

$$R = \frac{V}{I} = \int_0^l \frac{dx}{\sigma S}. \quad (21.7)$$

Приведенное выражение справедливо и в общем случае произвольной проводящей среды, если под S понимать сечение достаточно тонкой трубки тока. Под последней подразумевается область проводника, ограниченная линиями тока (сравните § 6).

При протекании тока по сопротивлению электрические заряды проходят разность потенциалов $V = RI$. При этом источник тока совершает работу $\Delta A = \Delta Q \cdot V = VI \Delta t$, переходящую в тепло из-за трения, механизм которого рассмотрен выше. Мощность, выделяющаяся на сопротивлении, равна

$$P = VI = RI^2 = V^2/R. \quad (21.8)$$

Эти соотношения известны как *закон Джоуля–Ленца* (J. P. Joule, 1841 г. и Э. Ч. Ленц, 1842 г.).

Равенства (21.8) нетрудно записать через плотность мощности, напряженность электрического поля и проводимость среды. Подставляя в (21.8) выражения для V и R (21.7), получим дифференциальную форму закона Джоуля–Ленца (dv — элемент объема)

$$\frac{dP}{dv} = jE = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma E^2. \quad (21.9)$$

Из условия непрерывности тока немедленно следует правило вычисления сопротивления, состоящего из N последовательно соединенных сопротивлений. Поскольку по ним протекает один и тот же ток I , то падение напряжения на всей цепи равно

$$V = IR = \sum_{i=1}^N V_i = I \sum_{i=1}^N R_i, \quad \text{откуда} \quad R = \sum_{i=1}^N R_i. \quad (21.10)$$

Аналогично для N параллельно соединенных сопротивлений

$$V = \sum_{i=1}^N I_i R = I_n R_n,$$

что дает, после исключения всех I_i ,

$$R^{-1} = \sum_{i=1}^N R_i^{-1}. \quad (21.11)$$

Задача III.1. Пространство между бесконечно длинными коаксиальными идеально проводящими цилиндрами радиусов a , b заполнено веществом с проводимостью $\sigma(r) = \alpha r^n$. Разность потенциалов между цилиндрами равна V , что приводит к протеканию тока по радиусам. Найти распределение потенциала в пространстве между цилиндрами и сопротивление на единицу длины цилиндров.

Уравнение непрерывности (20.4) совместно с законом Ома (21.1) дает

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) = -(\nabla, \sigma \nabla \varphi) = 0, \text{ или } \sigma \Delta \varphi + (\nabla \sigma, \nabla \varphi) = 0. \quad (21.12)$$

В цилиндрической системе координат (при условии аксиальной симметрии) имеем

$$\alpha r^n \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) + \alpha n r^{n-1} \frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

или

$$r^n \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + (n+1) r^{n-1} \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (21.13)$$

Решение ищем в виде

$$\varphi(r) = A r^k + B.$$

Подставляя это выражение в (21.13), находим $k_1 = -n$, $k_2 = 0$ и, удовлетворяя граничным условиям $\varphi(a) = V$, $\varphi(b) = 0$, окончательно получим

$$\varphi(r) = V \frac{(b/r)^n - 1}{(b/a)^n - 1}. \quad (21.14)$$

Сопротивление на единицу длины найдем, вычислив полный ток:

$$I = 2\pi r j(r) = -2\pi r \sigma(r) \cdot \nabla \varphi = 2\pi V \frac{\alpha b^n}{(b/a)^n - 1},$$

$$R = \frac{(b/a)^n - 1}{2\pi \sigma_{\max}}. \quad (21.15)$$

Из уравнения (21.12) видно, что при $\sigma = \text{const}$ задача о растекании тока по объемному проводнику сводится к уравнению Лапласа. Это обстоятельство раньше использовалось для моделирования электрических полей на так называемых электролитических ваннах. Теперь эту задачу решают на компьютерах.

§ 22. Ток в изоляторах. Граничные условия при наличии тока

Между изоляторами и проводниками не существует резкой грани. Любой изолятор имеет конечную, хотя обычно и очень малую, проводимость. Хорошей иллюстрацией служит вода. С одной стороны, вода — проводник. По этой причине, например, категорически запрещается тушить водой горящую электропроводку: по струе воды пожарник немедленно оказывается под высоким напряжением; кроме того, вода вызывает дополнительные короткие замыкания, усиливая пожар. С другой стороны, вода используется в качестве изолятора в специальных конденсаторах.

Механизм проводимости в изоляторах значительно сложнее, чем в металлах. В твердом изоляторе он связан с наличием небольшого количества свободных электронов или «дырок» (полупроводники), возникающих вследствие «ионизации» атомов решетки под действием теплового движения. В жидких же изоляторах (в том числе и в воде) проводимость связана с движением ионов, как положительных, так и отрицательных.

Зависимость между напряжением и током в изоляторе является, вообще говоря, нелинейной, т. е. закон Ома становится несправедливым. Можно, однако, и в этом случае сохранить понятия проводимости (21.1) и сопротивления (21.6), которые теперь уже зависят от поля. Аналогичная ситуация имеет место и в других случаях: например, в плазме, полупроводниках, электронных лампах и др. Электрические свойства таких проводящих элементов задаются их характеристикой — зависимостью тока

от приложенного напряжения $I = f(V)$. Например, для электронного диода при достаточно большой эмиссии катода характеристика имеет вид $I(V) = AV^{3/2}$, где A — некоторая постоянная (см. (27.4) ниже).

Электрический ток в диэлектрике изменяет граничные условия для полей. Действительно, нормальная компонента плотности постоянного тока должна оставаться непрерывной на границе двух сред:

$$j_{n1} = j_{n2}. \quad (22.1)$$

Это приводит к новому граничному условию для вектора $\mathbf{E}$:

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}. \quad (22.2)$$

Выполнение данного условия требует присутствия на границе раздела диэлектриков свободного заряда σ_s , что дает, в свою очередь, скачок вектора индукции:

$$4\pi\sigma_s = D_{n2} - D_{n1} = D_{n1} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right). \quad (22.3)$$

Интересно отметить, что это выражение зависит только от отношения проводимостей, но не от их абсолютной величины. Отсюда, казалось бы, можно сделать вывод, что граничное условие (16.2) $D_{n1} = D_{n2}$ никогда не выполняется. В действительности, однако, поверхностный заряд на границе двух сред, необходимый для выполнения условия (22.3), натекает лишь через некоторое конечное время, обратно пропорциональное проводимости среды (см. § 23). Поэтому для переменного поля достаточно высокой частоты сохраняется условие (16.2), а условие (22.2) справедливо для низких частот, и в частности для постоянного поля.

Граничные условия для компонент поля, касательных к границе раздела сред (16.1), не изменяются в присутствии тока.

Задача III.2. Найти стационарное поле в плоском конденсаторе, диэлектрик которого состоит из двух слоев толщины h_1 , h_2 с диэлектрическими постоянными ε_1 , ε_2 и проводимостями σ_1 , σ_2 .

Поскольку конденсатор имеет утечку, стационарное поле возможно только при условии, если он постоянно подключен к источнику с ЭДС $\mathfrak{E}$. Тогда отношение полей в слоях определится из условия равенства токов утечки (22.1), (22.2): $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$. Кроме того, $h_1 E_1 + h_2 E_2 = \mathfrak{E}$. Отсюда

$$E_{1,2} = \frac{\mathfrak{E}/\sigma_{1,2}}{\frac{h_1}{\sigma_1} + \frac{h_2}{\sigma_2}}.$$

На границе между слоями образуется заряд (см. (22.3))

$$Q = \frac{\epsilon S}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}}{\frac{h_1}{\sigma_1} + \frac{h_2}{\sigma_2}} = C \epsilon \left(\frac{h_1}{\epsilon_1} + \frac{h_2}{\epsilon_2} \right) \cdot \frac{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}}{\frac{h_1}{\sigma_1} + \frac{h_2}{\sigma_2}}.$$

Здесь S — площадь конденсатора, а C — его емкость (сравните задачу II.4.)

Представим себе два электрода, погруженные в бесконечный неоднородный диэлектрик. Оказывается, что сопротивление между электродами можно связать с емкостью между ними. Действительно, полный ток в цепи можно записать в виде

$$I = \oint_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \frac{\sigma}{\epsilon} \oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \frac{4\pi\sigma Q}{\epsilon}, \quad (22.4)$$

где S — поверхность, охватывающая один из электродов, ϵ и σ — диэлектрическая проницаемость и проводимость диэлектрика, Q — полный заряд на электроде. Подставляя $Q = CV = CRI$, приходим к соотношению

$$\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} RC = 1. \quad (22.5)$$

Отметим, что величина RC имеет размерность времени и характеризует в этом примере процесс разрядки конденсатора за счет внутренних утечек. Действительно, время разрядки $\tau \sim Q/I = \frac{CV}{V/R} = RC$ (подробнее см. § 25). Интересно, что время разрядки не зависит, согласно (22.5), от геометрии конденсатора (см. § 25):

$$\tau = RC = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}. \quad (22.6)$$

Задача III.3. Оценить сопротивление заземления, которое выполнено в форме пластины с размерами $l \gg a \gg h$.

Используя результат, полученный в задаче I.24 (§ 12), и соотношение (22.5), найдем $R_3 \sim \frac{\pi + \ln(l/a)}{2\pi\sigma l}$.

Типичная проводимость грунта $\sigma \sim 10^8$ (г). Если принять размеры заземления $l \sim 10$ м, $\ln(l/a) \sim 1$, то $R_3 \sim 10$ Ом. Для сравнения укажем, что сопротивление заземления через водопроводную сеть ~ 1 Ом. В этом случае большая длина сети не уменьшает существенно сопротивление, поскольку начинает играть роль сопро-

тивление самих железных труб. Сопротивление заземления в виде свободно лежащего на земле провода длиной 50 м колеблется от 1 до 10^3 Ом в зависимости от состояния грунта, главным образом от его влажности.

Задача III.4. Оценить напряженность электрического поля вокруг заземления, описанного в задаче III.3.

Ограничимся областью $r \gg l$, тогда $E \sim q/r^2$, $q = CV$, $C \sim (l/2)/(\pi + \ln(l/a)) \sim l/\ln(l/a)$ (см. задачу I.24), откуда $E \sim \frac{Vl}{r^2 \ln(l/a)}$. Если на

заземление «попало высокое напряжение», то вокруг него создается опасная зона, так как даже на расстоянии в один шаг на поверхности земли приходится величина (так называемое *шаговое напряжение*) $V_{\text{ш}} \sim \frac{Vl\lambda}{r^2 \ln(l/a)}$, где λ — длина шага.

Например, при падении на землю провода линии электропередачи на 100 кВ радиус опасной зоны $r_{\text{он}} \sim \sqrt{\frac{Vl\lambda}{V_{\text{он}} \ln(l/a)}} \sim 3$ м, где принято $l \sim 1$ м, $a \sim 1$ см, $\lambda \sim 0,5$ м и опасно шаговое напряжение $V_{\text{он}} \sim 10^3$ В.

§ 23. Релаксация зарядов в среде

Пусть в начальный момент в проводящей среде имеется некоторое распределение свободного заряда $\rho(\mathbf{r}, 0)$. Как будет оно изменяться с течением времени? Для однородной среды задача может быть решена в общем случае. Запишем уравнение непрерывности: $\partial \rho / \partial t + \text{div} \mathbf{j} = 0$ и исключим из него $\mathbf{j}$ с помощью закона Ома ($\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$) и уравнения поля $\text{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho$. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}. \quad (23.1)$$

Для решения этого уравнения используем, как и в § 11, метод разделения переменных, т. е. будем искать решение в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})T(t). \quad (23.2)$$

При подстановке полученного выражения в уравнение (23.1) $\rho(\mathbf{r})$ сокращается (тривиальный случай разделения переменных), и получаем обык-

новенное дифференциальное уравнение $dT/dt = -T/\tau$, решение которого есть $T(t) = e^{-t/\tau}$. Постоянную интегрирования включаем в функцию $\rho(\mathbf{r})$, определяемую начальными условиями $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}, 0)$. Окончательно имеем

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) e^{-t/\tau}. \quad (23.3)$$

Такой процесс называется релаксацией зарядов в среде. Распределение заряда в пространстве не изменяется в процессе релаксации. Куда же уходит заряд? Очевидно, на бесконечность или, точнее, на границу среды. В этом можно убедиться и непосредственно, вычислив полный ток в среде в процессе релаксации. Вдали от зарядов $I = 4\pi\sigma Q/\varepsilon$ (см. (22.4)) не зависит от расстояния, т. е. заряд передается на бесконечность. Как подробно разобрано в § 20, это вовсе не значит, что электроны, образующие первоначальный заряд, уходят на бесконечность. В действительности происходит лишь небольшое смещение всех зарядов среды, эквивалентное передаче заряда на бесконечность.

Саморазряд конденсатора, рассмотренный в конце предыдущего параграфа, можно считать частным случаем релаксации зарядов в среде. Теперь становится понятным, почему он не зависит от геометрии конденсатора. Решение (23.3) показывает, что саморазряд происходит по экспоненциальному закону, а величина RC равна времени, за которое напряжение на конденсаторе убывает в e раз. Для лучших изоляторов (янтарь, плавленый кварц) это время достигает 10 дн. ($\sigma \sim 10^6$ (г)). Для обычного стекла $\tau \sim 10$ с, а для химического стекла всего $\sim 10^{-4}$ с.

Для металлов время релаксации очень мало. Например, для меди формула (23.1) дает $\tau \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ с. При таких малых τ , однако, полученное решение теряет смысл, так как уже нельзя пренебрегать массой электронов. Поэтому рассмотрим обратный случай, в котором мы будем пренебрегать трением, т. е. считать проводимость бесконечной. Уравнение движения электрона имеет теперь вид $m\mathbf{v} = e\mathbf{E}$. Умножая обе части равенства на $e\mathbf{n}$, получим вместо закона Ома уравнение

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{e^2 n}{m} \mathbf{E}. \quad (23.4)$$

Продифференцируем уравнение непрерывности по времени:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div} \frac{d\mathbf{j}}{dt} = 0. \quad (23.5)$$

Частная производная (производная в данной точке) связана с полной производной (производной для данной группы частиц) соотношением

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{j}. \quad (23.6)$$

Но мы знаем (см. § 20), что в металлах скорость электронов ничтожно мала, поэтому вторым членом можно пренебречь. С учетом этого обстоятельства подставим (23.4) в (23.5) и, используя выражение $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \omega_p^2\rho = 0, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{\varepsilon m}. \quad (23.7)$$

Это уравнение решается точно таким же методом, как и (23.1). Для функции $T(t)$ (23.2) получаем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega_p^2 T = 0.$$

Окончательное решение имеет вид

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) \cos(\omega_p t + \varphi). \quad (23.8)$$

Таким образом, в этом предельном случае возникают гармонические колебания плотности заряда. Частота колебаний ω_p называется *плазменной частотой*, так как такой процесс характерен для разреженной плазмы, в которой можно пренебречь столкновениями между частицами, а значит, и сопротивлением.

Наконец, в общем случае уравнение движения электрона можно записать в форме

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = e\mathbf{E} - \nu m \mathbf{V}, \quad (23.9)$$

где ν — эффективная частота столкновений (см. § 21). Переходя к плотности тока, получим

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \nu \mathbf{j} = \frac{\varepsilon \omega_p^2}{4\pi} \mathbf{E}. \quad (23.10)$$

Отсюда, в частности, следует выражение для проводимости

$$\sigma = \frac{\varepsilon \omega_p^2}{4\pi \nu}. \quad (23.11)$$

Умножим теперь уравнение непрерывности на v и сложим с уравнением (23.5). Используя, далее, соотношения (23.10) и $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + v \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0. \quad (23.12)$$

Для временной зависимости $T(t)$ из (23.2) отсюда следует уравнение колебаний с затуханием:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + v \frac{dT}{dt} + \omega_p^2 T = 0. \quad (23.13)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T(t) = e^{-v/2} \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_p^2 - \frac{v^2}{4}}. \quad (23.14)$$

Окончательно получим

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) e^{-v/2} \cos(\omega t + \varphi). \quad (23.15)$$

Время релаксации зарядов

$$\tau = \frac{2}{v} = \frac{8\pi\sigma}{\varepsilon\omega_p^2}. \quad (23.16)$$

Для меди $\omega_p \sim 10^{16}$; $\sigma \approx 6 \cdot 10^{17}$; $\varepsilon \sim 1$, что дает $\tau \sim 10^{-13}$. Эта величина значительно больше первоначальной оценки по формуле (23.1), но все еще очень мала.

Задача III.5. Найти коэффициент ослабления переменного электрического поля в металле.

Внешнее поле E_e индуцирует на поверхности металла заряды с плотностью $E_e/4\pi$ ($E_e \gg E_i$). При изменении зарядов возникает ток $j = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dE_e}{dt}$, а значит, и электрическое поле $E_i = j/\sigma = \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{dE_e}{dt}$. В частности, если поле изменяется по гармоническому закону с частотой ω , коэффициент ослабления поля $k = |E_e/E_i| = 4\pi\sigma/\omega$.

§ 24. Электрические цепи. Законы Кирхгофа

Простейшая электрическая цепь состоит из источника напряжения и нагрузки (сопротивления). Схема такой цепи приведена на рис. III.1. Источником тока здесь служит гальванический элемент, нагрузкой явля-

ется электрическая лампочка. Источник характеризуется *электродвижущей силой* $\mathfrak{E}$ (сокращенно — ЭДС), которая связана с током в цепи соотношением

$$I = \frac{\mathfrak{E}}{R_{\text{н}} + R_i}. \quad (24.1)$$

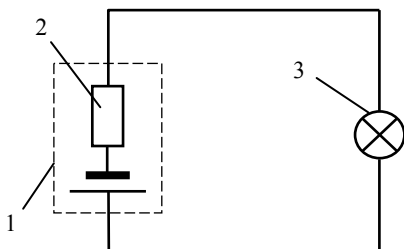


Рис. III.1. Схема простейшей электрической цепи: 1 — гальванический элемент; 2 — его внутреннее сопротивление; 3 — сопротивление лампочки

Здесь $R_{\text{н}}$ — сопротивление нагрузки, а R_i — внутреннее сопротивление источника (рис. III.1). Отсюда видно, в частности, что ЭДС равна напряжению V на зажимах разомкнутого источника: $V = \mathfrak{E} - IR_i \rightarrow \mathfrak{E}$ при $R_{\text{н}} \rightarrow \infty$ ($I \rightarrow 0$).

Полезная мощность, выделяющаяся на нагрузке, равна

$$P_{\text{н}} = I^2 R_{\text{н}} = \frac{\mathfrak{E}^2 R_{\text{н}}}{(R_{\text{н}} + R_i)^2}. \quad (24.2)$$

Полная же мощность P_0 , затрачиваемая источником, складывается из полезной мощности $P_{\text{н}}$ и потерь на внутреннем сопротивлении: $P_0 = I^2(R_{\text{н}} + R_i) = \mathfrak{E}^2/(R_{\text{н}} + R_i)$. Отсюда КПД цепи $\eta = P_{\text{н}}/P_0 = R_{\text{н}}/(R_{\text{н}} + R_i)$. При заданном внутреннем сопротивлении источника максимальная мощность на нагрузке достигается при $R_{\text{н}} = R_i$ (так называемая согласованная нагрузка). При этом, однако, КПД цепи равен всего 50 %.

Мы рассмотрели простейшую цепь, где источник напряжения, его внутреннее сопротивление и нагрузка пространственно разделены между собой. Это так называемая *цепь с сосредоточенными параметрами*. В общем случае приходится рассматривать *цепи с распределенными параметрами*. В этом случае действие распределенного источника описывается с помощью так называемого стороннего поля $\mathbf{E}_{\text{стр}}$, которое характеризует

дополнительную силу, действующую на заряд внутри источника. Полная сила в этом случае

$$\mathbf{f} = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стр}}), \quad (24.3)$$

где $\mathbf{E}$ — обычное электростатическое поле в цепи.

Какова же физическая природа сторонней силы? Она зависит от конструкции источника. В гальваническом элементе это «химические силы», связанные с внутримолекулярными электрическими полями. В динамо-машине — вихревое электрическое поле (ЭДС индукции, см. § 45). Существенно, что стороннее поле непотенциально, так как источник напряжения совершает работу при обходе заряда вокруг замкнутой цепи. Вычислим эту работу для цепи с распределенными параметрами и переменным сечением проводников (см. (21.7)). Для этого учтем, что дифференциальный закон Ома принимает теперь вид

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стр}}),$$

откуда

$$\oint ((\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стр}}), d\mathbf{l}) = \oint (\mathbf{E}_{\text{стр}}, d\mathbf{l}) = \oint \frac{(\mathbf{j}, d\mathbf{l})}{\sigma} = I \oint \frac{dl}{\sigma S}. \quad (24.4)$$

Но последнее выражение равно ЭДС источника, так как в нем учитывается полное сопротивление цепи — как внешнее, так и внутреннее:

$$I \oint \frac{dl}{\sigma S} = \mathcal{E} = \oint (\mathbf{E}_{\text{стр}}, d\mathbf{l}). \quad (24.5)$$

Таким образом, ЭДС характеризует работу источника тока при обходе единичного заряда вокруг замкнутой цепи.

Вернемся теперь к цепям с сосредоточенными параметрами и рассмотрим так называемые *разветвленные цепи* (рис. III.2).

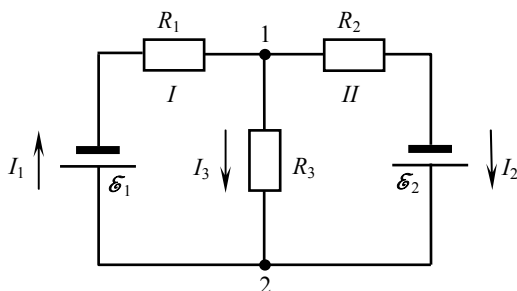


Рис. III.2. Пример разветвленной цепи

Такие цепи рассчитываются с помощью законов Кирхгофа, установленных им в 1877 г.

Первый закон Кирхгофа относится к точкам разветвления цепи, называемым узлами (точки 1, 2 на рис. III.2). В каждом узле

$$\sum I_k = 0, \quad (24.6)$$

где притекающий к узлу ток берется с одним знаком, а оттекающий — с противоположным. Для постоянного тока это соотношение непосредственно следует из закона сохранения заряда. Заметим, что в непрерывной проводящей среде, каждую точку которой можно считать узлом, соотношение (24.6) переходит в уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, являющееся частным случаем уравнения непрерывности (20.4). Законы Кирхгофа для переменного тока будут рассмотрены в следующем параграфе, а также в § 52.

Второй закон Кирхгофа относится к любому контуру, который можно выделить в разветвленной цепи:

$$\sum_k R_k I_k = \sum_l \mathfrak{E}_l. \quad (24.7)$$

Суммирование производится здесь по всем элементам выделенного контура. Соотношение (24.7) является следствием потенциальности электростатического поля. В непрерывной среде для любого контура, точнее для трубки тока вокруг контура? имеет место аналогичное соотношение (24.5), выражающее собой закон Ома.

Система уравнений (24.6), (24.7) позволяет рассчитать любую разветвленную цепь. Например, для схемы на рис. III.2 уравнения Кирхгофа принимают вид

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3, \quad E_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3, \quad (24.8)$$

откуда

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mathfrak{E}_1 (R_2 + R_3) + \mathfrak{E}_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3}, & I_2 &= \frac{\mathfrak{E}_1 R_3 + \mathfrak{E}_2 (R_1 + R_3)}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3}, \\ I_3 &= \frac{\mathfrak{E}_1 R_2 - \mathfrak{E}_2 R_1}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3}. \end{aligned} \quad (24.9)$$

§ 25. Электрические цепи с емкостью

Рассмотрим цепи, содержащие электрические емкости. Примеры таких цепей изображены на рис. III.3. В этом случае также, как и в предыдущем

параграфе, можно использовать уравнения Кирхгофа. Единственное отличие состоит в том, что связь между напряжением на емкости и током через нее I_C задается теперь дифференциальным соотношением

$$I_C = \frac{dQ_C}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} \quad (25.1)$$

вместо закона Ома для сопротивления $I = V/R$. В непрерывной проводящей среде это соотношение соответствует уравнению непрерывности (20.4). Законы Кирхгофа приводят, таким образом, к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений вместо линейных алгебраических для цепей с сопротивлениями.

Рассмотрим в качестве примера саморазряд конденсатора вследствие утечки тока по его диэлектрику (сравни § 22). Эквивалентная схема такого конденсатора изображена на рис. III.3, *a*. Первое уравнение Кирхгофа сводится в этом случае к соотношению (25.1), а второе дает $V_C + RI = 0$. Исключив из двух уравнений неизвестное I , имеем

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0. \quad (25.2)$$

Решение линейного однородного дифференциального уравнения всегда ищется в виде

$$V_C = Ae^{\lambda t}, \quad (25.3)$$

где λ — неизвестный параметр решения, A — постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий. Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, получим алгебраическое уравнение для λ : $RC\lambda + 1 = 0$, откуда $\lambda = -1/RC$. Постоянную A найдем из условия, что при $t = 0$ напряжение на емкости было равно V_0 , откуда $A = V_0$. Окончательно решение имеет вид

$$V_C = V_0 \cdot e^{-t/RC}. \quad (25.4)$$

Таким образом, разряд емкости через сопротивление происходит по экспоненциальному закону и характеризуется постоянной времени $\tau = RC$ (ср. (22.6)).

Рассмотренный пример показывает, что характерной особенностью цепей с емкостью является наличие так называемого переходного процесса, в результате которого напряжение на емкости стремится к некоторому стационарному значению. По истечении достаточно большого времени ($t \gg \tau$) емкость можно рассматривать просто как разрыв цепи (бесконеч-

ное сопротивление), и мы возвращаемся к случаю цепей с сопротивлениями и постоянным током. При расчете переходного процесса нужно учитывать, вообще говоря, не только явные емкости конденсаторов, включенных в цепь, но и так называемые «паразитные» емкости между проводами, концами сопротивления, между элементами цепи и окружающими предметами («землей») и пр. Роль этих «паразитных» емкостей тем больше, чем выше частота тока в цепи (подробнее см. § 52).

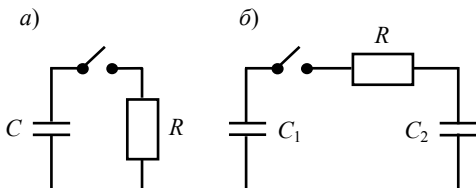


Рис. III.3. Электрические цепи с емкостью

Задача III.6. Найти изменение напряжения на конденсаторах (рис. III.3, б) при разрядке одного конденсатора на другой. Рассмотреть баланс энергии при разрядке.

Уравнения Кирхгофа для этой цепи имеют вид

$$V_1 + V_2 + RI = 0, \quad I = C_1 \dot{V}_1 = C_2 \dot{V}_2, \quad (25.5)$$

где $V_{1,2}(t)$ — значения напряжений на конденсаторах. Интегрируя последнее уравнение, получим $C_1 V_1 = C_2 V_2 + A$. Исключая, например, V_2 , найдем

$$\dot{V}_1 + \frac{V_1}{\tau} = \frac{A}{RC_1 C_2}, \quad \tau = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (25.6)$$

Решение (25.6) имеет вид

$$V_1 = \frac{A}{C_1 + C_2} + B e^{-t/\tau}. \quad (25.7)$$

Оно содержит две постоянные интегрирования A и B , которые определяются начальным напряжением на емкостях:

$$V_1(0) = \frac{A}{C_1 + C_2} + B = V_0, \quad V_2(0) = \frac{C_1}{C_2} V_1(0) - \frac{A}{C_2} = \frac{C_1 V_0 - A}{C_2} = 0.$$

Окончательно получаем

$$V_1(t) = V_0 \frac{C_1 + C_2 e^{-t/\tau}}{C_1 + C_2}. \quad (25.8)$$

В начальный момент вся энергия запасена в конденсаторе C_1 : $W_0 = C_1 V_0^2 / 2$, а в конце она распределена между обоими конденсаторами ($V_1(\infty) = V_2(\infty)$):

$$W_\infty = W_1 + W_2 = C_1 \frac{V_1^2(\infty)}{2} + C_2 \frac{V_1^2(\infty)}{2} = W_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} < W_0.$$

Энергия, выделившаяся при разрядке на сопротивлении, равна

$$W_R = W_0 \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2},$$

ее значение не зависит от величины сопротивления.

Задача III.7. Рассмотреть процесс зарядки плоского конденсатора из задачи III.2.

Записав второе уравнение Кирхгофа в виде $E_1 h_1 + E_2 h_2 = \mathfrak{E}$ и условия на границе между слоями, $\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = 4\pi Q/S$, $\sigma_2 E_2 - \sigma_1 E_1 = -\frac{4\pi}{S} \cdot \frac{dQ}{dt}$, найдем, например, уравнение для свободного заряда на границе:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\tau} = \frac{Q_0}{\tau}, \quad \tau = \frac{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{h_1} \frac{h_2}{h_2}}{4\pi \left(\frac{\sigma_1}{h_1} + \frac{\sigma_2}{h_2} \right)}, \quad Q_0 = \frac{\mathfrak{E} S}{4\pi} \cdot \frac{\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1}. \quad (25.9)$$

Отсюда

$$Q(t) = Q_0 (1 - e^{-t/\tau}),$$

$$E_1(t) = \frac{\mathfrak{E}}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} \left(\sigma_2 + h_2 e^{-t/\tau} \frac{\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1} \right). \quad (25.10)$$

$E_2(t)$ получим перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$. Таким образом, поля и заряды, найденные в задаче III.2, устанавливаются с характерным временем τ из (25.9) (сравни (22.6)). Эквивалентная схема такого конденсатора представлена на рис. III.4 —

ключ в положении A . При этом $C_{1,2} = \frac{\varepsilon_{1,2} S}{4\pi h_{1,2}}$, $R_{1,2} = \frac{h_{1,2}}{\sigma_{1,2} S}$. Из (25.10) следует, что

при $t=0$ напряжения на «конденсаторах» определяются отношением емкостей («емкостной делитель»):

$$U_1(0) = E_1(0) h_1 = \mathfrak{E} \frac{\varepsilon_1 h_2}{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1} = \mathfrak{E} \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad (25.11)$$

а при $t \rightarrow \infty$ — отношением сопротивлений («омический делитель»):

$$U_1|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \mathfrak{E} \frac{\sigma_2 h_1}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} = \mathfrak{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (25.12)$$

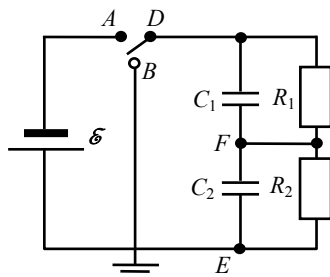


Рис. III.4. Схема цепи к задачам III.7, III.8

Если $\sigma_1 \varepsilon_2 = \sigma_2 \varepsilon_1$ или, что то же самое, $R_1 C_1 = R_2 C_2$, напряжения на «конденсаторах», как следует из (25.10), не зависят от времени:

$$E_1(t) = \frac{\mathfrak{E} \sigma_2}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} \quad \text{или} \quad U_1(t) = \mathfrak{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \mathfrak{E} \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Устройство, состоящее из RC -ячеек с одинаковыми значениями RC в электронике называют «компенсированный делитель». В нем, как мы видим, значения U_1 из (25.11) и (25.12) совпадают.

Задача III.8. Два конденсатора с утечками соединены последовательно и подсоединены к источнику напряжения (точка A , рис. III.4). Затем конденсаторы отключаются от источника, заземляются (точка B) на короткое время, после чего отсоединяются от «земли». Найти напряжение в точке D .

Напряжения на емкостях перед заземлением равны $V_{10} = \mathfrak{E} R_1 / (R_1 + R_2)$, $V_{20} = \mathfrak{E} R_2 / (R_1 + R_2)$ (см. (25.12)). После заземления полный заряд параллельно соединенных конденсаторов $Q = C_1 V_{10} - C_2 V_{20}$, и, следовательно, напряжение на них

$$V_1 = -V_2 = V_0 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \mathfrak{E} \frac{\tau_1 - \tau_2}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)}, \quad (25.13)$$

где $\tau_1 = R_1 C_1$; $\tau_2 = R_2 C_2$. После размыкания конденсаторов каждый из них разряжается через свою утечку по закону (25.4). Напряжение в точке D будет равно

$$V_D(t) = V_1 + V_2 = V_0 \left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2} \right). \quad (25.14)$$

Если постоянные времени конденсаторов существенно различны ($\tau_1 \gg \tau_2$), V_D может быть порядка начального напряжения $\mathcal{E}$ в течение времени $\sim \tau_1$.

Закорачивание конденсаторов является стандартной процедурой обеспечения безопасности при работе с высоким напряжением. Рассмотренная задача показывает, однако, что конденсаторы ведут себя весьма «коварно», — после закорачивания на них снова может появиться высокое напряжение, которое сохраняется иногда в течение нескольких дней. Это не раз приводило к несчастным случаям с неопытными экспериментаторами. Частичное решение состоит в том, чтобы закорачивать каждый конденсатор в отдельности. Однако и в этом случае возможно появление высокого напряжения, так как обычно высоковольтный конденсатор состоит из последовательно соединенных секций. Поэтому правила техники безопасности предписывают после выключения напряжения держать высоковольтные конденсаторы все время закороченными. При включенном напряжении доступ к установке должен быть надежно защищен специальным заземленным ограждением. Заметим попутно, что такое ограждение, призванное защитить экспериментатора, является в то же время источником дополнительной опасности именно потому, что оно заземлено, а при хорошем контакте экспериментатора с землей даже напряжение 220 В смертельно опасно.

Разобранный пример с конденсатором показывает, что обеспечение безопасности является сложной физической задачей, так как необходимо все время учитывать самые неожиданные и сложные физические процессы. Другим примером подобной опасности при работе с высоким напряжением является так называемое шаговое напряжение (см. задачу III.4).

Задача III.9. Напряжение $V(t)$, изменяющееся с характерным временем τ , подается на RC -цепочку. Найти значения напряжений на конденсаторе и на сопротивлении (рис. III.5). Рассмотреть случаи

$$\text{а) } \tau \gg RC, \quad \text{б) } \tau \ll RC.$$

В присутствии внешнего источника («сторонняя ЭДС») уравнения Кирхгофа для цепи, изображенной на рис. III.5, имеют вид

$$V(t) = RI + V_C, \quad I = C \frac{dV}{dt},$$

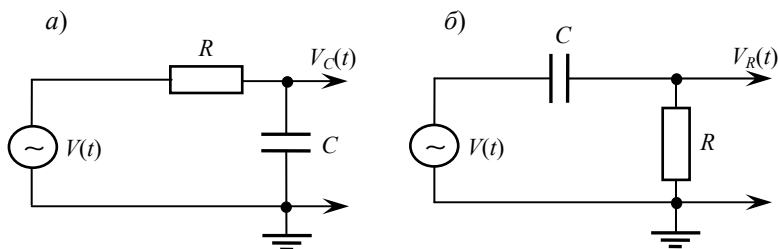


Рис. III.5. «Интегрирующая» (а) и «дифференцирующая» (б) RC-цепочки

что дает неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = \frac{V(t)}{RC}, \quad (25.15)$$

Такое уравнение решается *методом вариации постоянной*:

$$V_C(t) = A(t)e^{-t/RC}. \quad (25.16)$$

Подставляя (25.16) в (25.15), приходим к уравнению для $A(t)$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{V(t)}{\tau_0} \cdot e^{t/RC}.$$

Отсюда

$$A(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t V(x) \cdot e^{x/RC} \cdot dx + B,$$

$$V_C(t) = \frac{e^{-t/RC}}{RC} \int_0^t V(x) \cdot e^{x/RC} \cdot dx + B,$$

B — постоянная интегрирования. Постоянную B находим из начального значения напряжения на конденсаторе:

$$B = V_C(0).$$

И, окончательно, для напряжения на конденсаторе получаем

$$V_C(t) = V_C(0) + \frac{e^{-t/RC}}{RC} \int_0^t V(x) \cdot e^{x/RC} \cdot dx. \quad (25.17)$$

а) Если постоянная RC -цепочки много больше характерного времени изменения напряжения, $RC \gg \tau$, $e^{x/RC} \approx 1 + \frac{x}{RC} \approx 1$, то

$$V_C(t) = V(0) + \frac{1}{RC} \int_0^t V(x) \cdot dx. \quad (25.18)$$

Поэтому такая RC -цепочка называется «интегрирующей» (рис. III.5, а). В частном случае «скачка напряжения»

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ V_0, & t \geq 0 \end{cases}$$

из (25.18) находим

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ V_0(1 - e^{-t/RC}), & t \geq 0. \end{cases}$$

Напряжение на сопротивлении найдем, используя (25.1):

$$V_R(t) = RC \frac{dV_C}{dt} = -\frac{e^{-t/RC}}{RC} \int_0^t V(x) \cdot e^{x/RC} \cdot dx + V(t). \quad (25.19)$$

При $RC \gg \tau$ отсюда

$$V_R(t) \approx -\frac{1}{RC} \int_0^t V(x) \cdot dx + V(t) \approx V(t),$$

т. е. такая цепочка (рис. III.5, б) передает переменное напряжение практически без изменения. В таком режиме RC -цепочка используется в электронике для отделения переменного напряжения от постоянного.

б) В другом крайнем случае, $RC \ll \tau$, решение найдем, вычислив интеграл в (25.19) интегрированием по частям:

$$\int_0^t V(x) \cdot e^{x/RC} \cdot dx = RC \cdot V(t) \cdot e^{t/RC} - RC \int_0^t \frac{dV(x)}{dx} \cdot e^{x/RC} \cdot dx.$$

Подставив этот результат в (25.19), получаем, используя теорему о среднем

$$V_R(t) = e^{-t/RC} \cdot \frac{dV(t)}{dt} \int_0^t e^{x/RC} \cdot dx = RC \cdot \frac{dV(t)}{dt}.$$

Соответственно, такая цепочка называется «дифференцирующей» (рис. III.5, б).

В физике и технике интегрирующие и дифференцирующие цепочки широко используются для формирования электрических сигналов.

§ 26. Электрический разряд

В обычных условиях проводимость изоляторов очень мала (см. § 21). Однако в достаточно сильных электрических полях возникает так называемый пробой изолятора, или электрический разряд. В месте пробоя проводимость изолятора резко возрастает, причем она зависит сложным образом от напряженности поля, тока, начальных условий и многих других факторов.

Начнем с электрического разряда в газе. Проводимость газа в слабых полях связана с наличием в нем небольшого числа ионов и электронов, которые возникают вследствие ионизации молекул газа под действием космических лучей, радиоактивности земной коры и, в меньшей степени, ультрафиолетового излучения Солнца. Так, например, у поверхности моря космические лучи создают около двух пар ионов в кубическом сантиметре в секунду. У поверхности суши к этому прибавляется еще около пяти пар ионов за счет радиоактивности земной коры. Средняя концентрация всех ионов у поверхности Земли составляет $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$. Среднее время жизни иона в атмосфере до рекомбинации — порядка 100 с. За такое большое время все электроны, возникшие в результате ионизации, успевают образовать отрицательные ионы, «примкнув» к молекулам кислорода. При нормальных условиях электрону требуется для этого около 105 столкновений, т. е. всего лишь 10^{-6} с. Отсюда видно, что при обычных условиях проводимость газа в слабых полях является ионной. Реальная картина еще сложнее: проводимость определяется в основном ионными кластерами, содержащими десятки атомов газа. Проводимость воздуха у поверхности Земли $\sim 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ($r \sim 10^{16} \text{ Ом} \cdot \text{м}$), что всего лишь на два порядка больше, чем у лучших твердых изоляторов (§ 21).

Рассмотрим поведение газа в более сильных полях. На рис. III.6 изображена схематически вольт-амперная характеристика газового промежутка. Область слабых полей соответствует участку *a*, где справедлив закон Ома. За ним следует так называемое плато (участок *b*), где ток практически не зависит от напряженности поля. В этой области электрическое поле вытягивает все рождающиеся в газовом промежутке электроны. В еще более сильных полях (участок *c*) ток резко возрастает, и наступает

пробой. Возрастание тока связано с процессами вторичной ионизации, приводящей к лавинному «размножению» электронов. Очень упрощенно этот процесс можно представить себе следующим образом. Электрон, выбитый из атома при ионизации, ускоряется внешним полем до такой энергии $\mathfrak{E}_{ion} \sim 10$ эВ, что он сам может ионизовать другие атомы. Эту энергию электрон «должен» набрать на расстоянии l_s между двумя последовательными соударениями остаточного газа. В таких соударениях электрон рассеивается и теряет направленную скорость вдоль вектора электрического поля E . Расстояние между двумя соударениями l_s называется *длиной свободного пробега*. Оно обратно пропорционально плотности газа n_0 (см. (26.6) ниже) и, соответственно, давлению p . Таким образом, необходимое условие формирования электронной лавины можно представить в виде

$$E > \frac{\mathfrak{E}_{ion}}{el_s} \propto p. \quad (26.1)$$

Как мы увидим дальше, именно параметр l_s характеризует скорость развития лавины.

Электронная лавина сама по себе приводит лишь к увеличению тока проводимости в газовом промежутке (участок c , рис. III.6). Для возникновения электрического, точнее *самоподдерживающегося, разряда* необходима еще так называемая обратная связь между электродами газового промежутка. Необходимо, чтобы электронная лавина, движущаяся к аноду, вызывала бы каким-то образом новые лавины с катода. Одним из возможных механизмов такой обратной связи является фотоэффект с катода под действием фотонов, испускаемых возбужденными атомами газа или анода.

Условия зажигания разряда впервые были экспериментально исследованы Ф. Пашеном (F. Paschen, 1889 г.). Они характеризуются так называемой кривой, носящей его имя (рис. III.7). Кривая хорошо аппроксимируется функцией $V(x)$, которая связывает между собой три основные величины: напряжение на газовом промежутке V , при котором зажигается разряд, длину промежутка d и давление газа p . Оказывается, что функция $V(x)$ для каждого сорта газа или смеси газов зависит только от параметра $x = pd$:

$$V(x) = \frac{a \cdot x}{\ln x + b}, \quad x = pd, \quad (26.2)$$

где a и b — размерные константы, зависящие от сорта газа или смеси газов. Если давление измеряется в атмосферах, а длина газового промежутка в метрах,^{*)} то

$$[a] = \text{В} \cdot (\text{атм} \cdot \text{м})^{-1}, [b] = \ln(\text{атм} \cdot \text{м})^{-1}.$$

Например, для воздуха $a = 43,6 \cdot 10^6 \text{ В}^{-1} \cdot (\text{атм} \cdot \text{м})^{-1}$, $b = 12,8 \ln(\text{атм} \cdot \text{м})^{-1}$. Функция $V(x)$ имеет минимум и две восходящие ветви:

$$V(x) \approx \begin{cases} \frac{ax}{\ln x}, & x < e^{1-b}, \\ ax, & x > e^{1-b}. \end{cases} \quad (26.3)$$

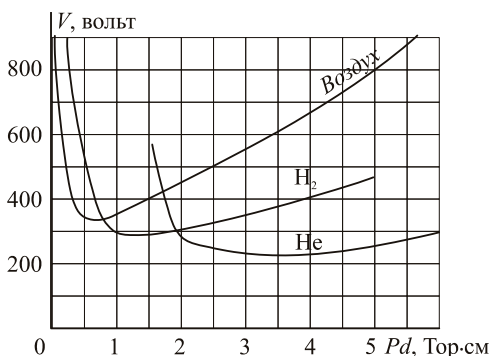
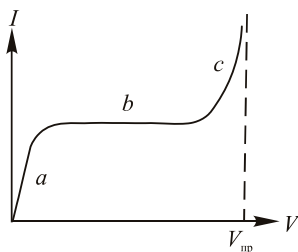


Рис. III.6. Вольт-амперная характеристика газового промежутка

Рис. III.7. Кривые Пашена для некоторых газов

Задача III.10. Найти минимум кривой Пашена и его численное значение для воздуха.

Приравняв нулю производную $V(x)$, получим условие минимума этой функции:

$$\begin{aligned} x_{\min} &= e^{1-b}, \\ V_{\min} &= a \cdot e^{1-b}. \end{aligned} \quad (26.4)$$

Для воздуха

$$x_{\min} = 7,5 \text{ атм} \cdot \text{мкм}, V_{\min} = 327,2 \text{ В}.$$

^{*)} Здесь и далее мы используем в качестве единицы давления физическую атмосферу (атм): 1 атм = 760 Торр = 0,101325 МПа (Приложение III).

Следует отметить, что при напряжениях, меньших $V_{\min}$, зазор не пробивается ни при каких условиях.

Качественно вид кривой Пашена можно объяснить, рассмотрев случай газового промежутка постоянного размера d . При $l_s \ll d$ с ростом давления длина свободного пробега уменьшается, и, в соответствии с условием (26.1), для создания разряда нужно увеличивать напряженность поля E , а значит, и $V = E \cdot d$. Так объясняется правая ветвь кривой — сложнее объяснить левую ветвь — рост $V(x)$ при уменьшении давления, когда $l_s \gg d$. Здесь вступает в действие случайный характер столкновения электронов с атомами газа и кинематика соударений. Первое приводит к тому, что даже при отсутствии соударений в среднем ($l_s \gg d$!) остаются редкие соударения, в основном с большими прицельными параметрами, когда электрон пролетает довольно далеко от атома. При этом при передаче атомарному электрону импульса, достаточного для ионизации атома, требуется тем большая энергия электрона, чем больше прицельный параметр соударения. Отсюда и возникает рост V при увеличении l_s .

Аналогично объясняется левая ветвь функции $V(x)$ при постоянном давлении и уменьшении длины промежутка d . Теперь, правда, сложнее объяснить правую ветвь. Для этого нужно «включить» механизм, конкурирующий с ионизацией, — рекомбинация электронов лавины с образующимися ионами и «прилипание» электронов к электроотрицательным атомам (O_2 , CO_2 , галогены). (Этот механизм, конечно, действует и при постоянном d и растущем p .) По мере увеличения энергии электронов вероятность рекомбинации падает.

Создание теории электрического разряда в газах началось с работ Д. Таунсенда (J. S. Townsend, 1900 г.), который сумел понять основные закономерности, полученные Пашеном экспериментально.

Упрощенно механизм развития разряда можно представить следующим образом. Пусть на расстоянии z ($0 \leq z \leq d$) от катодного (отрицательного) электрода плотность электронов в лавине равна $n_e(z)$, а средняя направленная скорость электронов есть v_d (d — от слова «дрейф»). Тогда приращение плотности электронов на отрезке Δz есть

$$\Delta n_e = \sigma_{ion} n_0 \cdot \Delta z \cdot n_e, \quad (26.5)$$

где σ_{ion} — сечение ионизации атомов газа, n_0 — плотность газа. Вообще говоря, это сечение зависит от энергии (скорости) электронов, и при энергии электронов порядка $\epsilon_{ion} \sim 10$ эВ сечение $\sigma_{ion} \sim 10^{-17}$ см². Из (26.5) находим

$$\frac{dn_e}{dz} = \sigma_{ion} n_0 \cdot n_e \equiv \frac{n_e}{l_s},$$

откуда

$$n_e(z) = n_e(0) \cdot e^{\alpha z}, \quad \alpha = \sigma_{ion} \cdot n_0 = l_s^{-1}. \quad (26.6)$$

Лавина, достигшая анода, имеет плотность

$$n_e(d) = n_e(0) \cdot e^{\alpha d}.$$

Процесс ионизации газа электронами лавины, имеющими широкое распределение по энергии, довольно сложный. Рассчитать его удастся только в области низких значений E/p . Поэтому для коэффициента α обычно пользуются полуэмпирической формулой, отличающейся от упрощенного выражения в (26.6):

$$\alpha = C n_0 \cdot e^{-A n_0 / E}, \quad (26.7)$$

где C и A — константы, измеренные экспериментально. Пусть доля электронов, дополнительно «рожденных» лавиной при прохождении зазора, составляет вблизи катода $\gamma \cdot n_e(d)$. Тогда баланс потоков электронов имеет вид

$$n_e(d) = [n_e(0) + \gamma n_e(d)] \cdot e^{\alpha d}.$$

Отсюда

$$n_e(d) = \frac{n_e(0) \cdot e^{\alpha d}}{1 - \gamma \cdot e^{\alpha d}}. \quad (26.8)$$

Заметим, что это типичное уравнение для системы с положительной обратной связью (например, генератора в электронике). И условие самовозбуждения («генерации») разряда состоит в том, что значение $n_e(d)$ не зависит от начального значения $n_e(0)$, т. е. равенства нулю знаменателя в (26.8):

$$e^{\alpha d} = \gamma^{-1} \quad \text{или} \quad \alpha d = \ln \gamma^{-1}. \quad (26.9)$$

Коэффициент обратной связи, в зависимости от условий эксперимента (чистоты электродов, наличия различных примесей в газе и т. п.), меняется в широких пределах:

$$\gamma \sim 10^{-3} - 10^{-1}.$$

Подставив в (26.9) значение α (26.7), учтем, что

$$n_0 = p/kT,$$

где T — температура газа. Кроме того, $V = Ed$. В результате получим

$$V = \frac{An_0d}{\ln(Cn_0d) - \ln(\ln \gamma^{-1})}.$$

Выразив n_0 через давление и переобозначив константы, приходим к выражению (26.2) для $V(pd)$.

Подчеркнем, что проведенное рассмотрение справедливо для постоянного и однородного электрического поля. В переменных и/или неоднородных полях картина развития пробоя усложняется, хотя основные закономерности проведения разряда качественно сохраняются. Кроме того, при больших значениях d наблюдаются значительные отклонения от закона (кривой) Пашена в сторону меньших значений $V(x)$. Так, воздушный промежуток в 1 см при давлении 1 атм пробивается напряжением около 35 кВ, тогда как формула (26.2) дает значение 53 кВ.

При очень больших давлениях (точнее, больших значениях pd) механизм развития разряда существенно изменяется. Из-за малой длины свободного пробега электронов разряд сначала локализуется в небольшой области промежутка вблизи места первичной ионизации. Распространение разряда происходит в этих условиях в основном за счет фотоионизации соседних участков газа. Такой процесс называется *стримером*. Примером стримерного разряда может служить молния (рис. III.8).

Другим широко известным видом электрического разряда является *коронный разряд* (кто не слышал шипения высоковольтных линий электропередач в пасмурную погоду?). Он возникает вблизи проводников, находящихся под высоким напряжением и имеющих острия, где напряженность электрического поля настолько велика, что электрон на длине свободного пробега набирает энергию порядка энергии ионизации атомов газа. В сухом воздухе при атмосферном давлении это $E \approx 30$ кВ/см. По мере удаления от острия напряженность поля падает, и электрон не успевает между двумя последовательными столкновениями набрать энергию, достаточную для ионизации атома. Развитие лавины (см. формулу (26.6) и пояснение к ней) прекращается, и электроны «спокойно» стекают на поверхность, находящуюся под положительным потенциалом. Область потенциалов светится, так как столкновения электронов и ионов между собой и атомами сопровождаются актами электрон-ионной рекомбинации и возбуждения атомов с последующим высвечиванием. Характерное шипение, сопровождающее коронный разряд, также является результатом столкновений частиц. Случайный характер столкновений и приводит к тому, что спектр этих звуковых сигналов имеет вид «белого шума» (§ 80). Развивается коронный разряд при давлении газа $P \geq 1$ атм. Отметим, что свечение в коронном разряде

появляется при сравнительно невысоких средних (!) значениях напряженности электрического поля, порядка 0,5–1 кВ/м. На остриях это поле возрастает на 2 порядка или больше, и тогда развивается разряд.

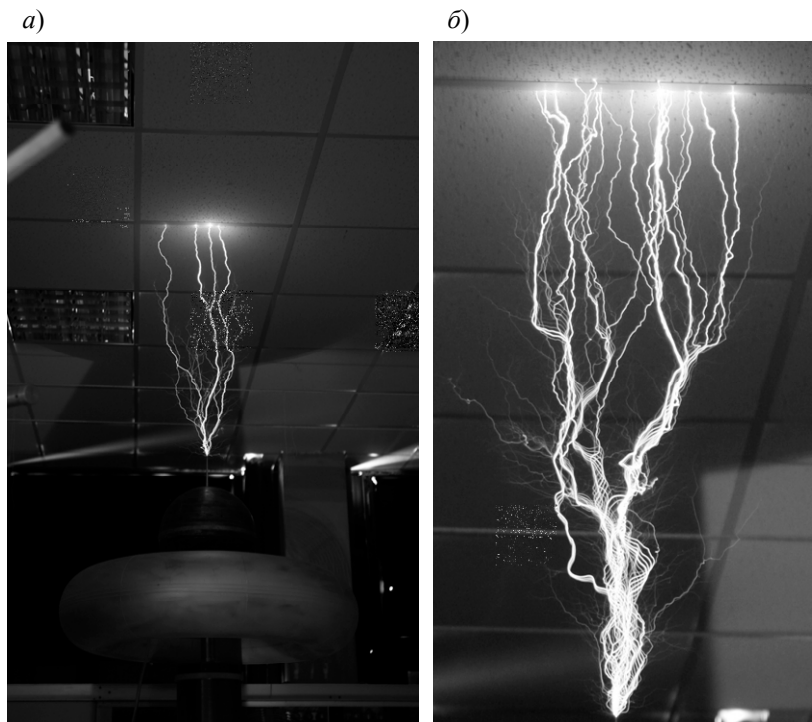


Рис. III.8. Искусственная «молния», созданная разрядом трансформатора Тесла на воздушный промежуток длиной 1 м; амплитуда напряжения около 1 МВ: а) общий вид эксперимента, энергия в импульсе 19 Дж; б) фотография молнии при энергии в импульсе 24 Дж (Б. Ж. Залиханов, ОИЯИ, Дубна, 2009 г.)

С коронным разрядом связано атмосферное явление, имеющее прямое отношение к религиозным предрассудкам. Это «огни святого Эльма» — свечение в предгрозовой (влажной и наэлектризованной) атмосфере на различных проводящих остриях, поднятых над окружающей поверхностью Земли, моря и т. п. Причина свечения — коронный разряд между наэлектризованной атмосферой и, например, верхушками (топом) корабельных мачт. Отсюда и название явления: святой Эльм у католиков считался покровителем мореплавателей (увидев свечение на мачтах и реях, моряки считали, что их покровитель дает знать, что

взял их корабль под защиту в надвигающемся шторме). Это явление хорошо знакомо всем, кто попадал в грозу в горах («поют ледорубы» — призрак надвигающейся грозы).

Еще одно явление атмосферного электричества, привлекающее внимание многие десятилетия (если не века!) и до сих пор не получившее надежного объяснения, — *шаровая молния*. Это светящиеся объекты, чаще всего шаровой формы, диаметром 10–20 см, имеющие практически плотность воздуха и «живущие» от единиц до десятков секунд. Плотность этих шаров можно оценить уже из того факта, что они легко путешествуют в атмосфере, увлекаемые воздушными потоками, и заканчивают свое существование, с грохотом взрываясь при столкновении с какими-то предметами. Из нескольких десятков (!) гипотез, предложенных для объяснения природы шаровых молний, ни одна не признана удовлетворительной и, что главное, не подтверждена лабораторными экспериментами.

Наиболее правдоподобной выглядит «химическая модель» шаровой молнии — шарообразный сгусток горючего газа, смесь углеводорода с воздухом, подожженная снаружи, например, электрическим разрядом в атмосфере (молнией). Теория горения допускает существование таких шарообразных газовых сгустков, горящих снаружи.

Здесь уместно отметить, что Земля обладает собственным электрическим полем — факт гораздо менее известный, чем существование земного магнитного поля (см. § 43). Этим Земля в основном также обязана своей атмосфере. При воздействии на атмосферу космического излучения, ультрафиолетового и корпускулярного («солнечный ветер») излучения Солнца, излучения естественной радиоактивности Земли происходит ионизация атомов воздуха. Возникающие при ионизации положительные и отрицательные заряды частично разделяются — разносятся воздушными потоками в атмосфере. Еще одним источником ионизации служат грозы, которые идут на Земле непрерывно — в среднем около 1800 гроз одновременно. Процессы переноса заряда в земной атмосфере достаточно сложные, меняются в течение года и суток и зависят от места на поверхности Земли. Средние значения параметров электрического поля Земли известны достаточно надежно. Напряженность поля вблизи поверхности Земли (на высоте нескольких сот метров) составляет около 130 В/м, атмосфера в целом заряжена положительно, а Земля — отрицательно и несет заряд порядка $3 \cdot 10^5$ Кл. Электрическое поле убывает с высотой — до, примерно, 30 В/м на высоте 5 км над континентами и почти до нуля уже на высоте 3 км над океанами и полюсами.

Защита газового промежутка от электрического разряда («пробоя») является одной из основных задач в технике высокого напряжения. Для этого повышают давление газа и специально подбирают его состав. Наиболее распространенным газовым изолятором является гексафторид серы (SF_6), имеющий техническое название *элегаз* за свои высокие изоляционные качества. Пробивное значение напряженности однородного элек-

трического поля, приложенного к газовому промежутку, заполненному элегазом, растет с давлением практически линейно:

$$E(p) = 50 + 10(p - 1) \text{ кВ/см}, \quad 8 \leq p \leq 1,$$

где p — давление в атм. При атмосферном давлении пробивное значение элегазового промежутка $E(1) \approx 50$ кВ/см, что более чем в 1,5 раза выше, чем для воздушного промежутка.

Одним из интересных применений стримерного разряда является так называемая *стримерная камера*, в которой можно наблюдать следы заряженных частиц. В камере на очень короткое время ($\sim 10^{-9}$ с) создается сильное электрическое поле. Заряженная частица, прошедшая через камеру непосредственно перед включением поля, производит ионизацию газа вдоль своей траектории, а образующиеся при этом свободные электроны служат центрами возникновения стримеров. Свечение стримеров и позволяет наблюдать треки заряженных частиц (рис. III.9). Вследствие импульсного характера поля размеры стримеров остаются малыми, что обеспечивает высокую степень локализации траектории (порядка 0,3 мм).

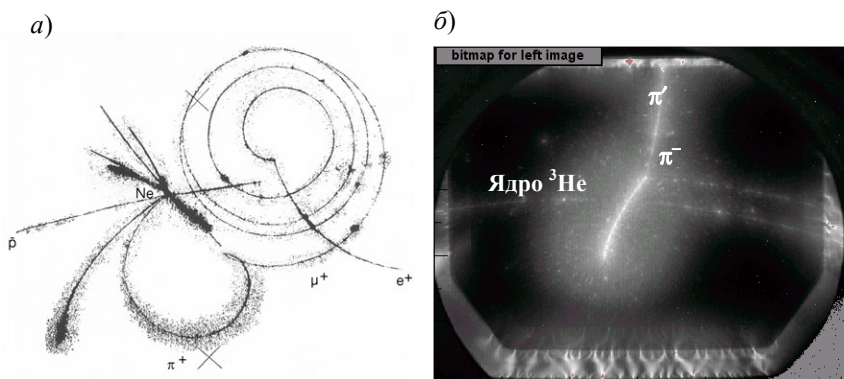


Рис. III.9. Фотографии треков частиц в стримерных камерах: *а*) камера заполнена неонам. Антипротон на ядре Ne рождает π^+ -мезон, который распадается по реакции $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, затем μ^+ -мезон распадается по реакции $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \nu_\mu$. Камера помещена в магнитное поле, поэтому заряженные частицы движутся по спиралям, теряя энергию на ионизацию неона (накопитель антипротонов LEAR в ЦЕРН, Швейцария, Г. Пираджино, Д. Понтекорво и др., 1985 г.); *б*) камера заполнена гелием. π^- -мезон, рожденный на мишени (вне камеры) под действием протона, ускоренного на Фазотроне ОИЯИ (Дубна), бомбардирует ядра ^4He в стримерной камере: $\pi^- + ^4\text{He} \rightarrow \pi' + ^3\text{He} + n$. Видны треки только заряженных частиц, нейтральный нейтрон не оставляет следа. Поэтому снимок выглядит так, как будто нарушается закон сохранения импульса (Д. Понтекорво, 2010 г.)

При очень малых давлениях, т. е. в высоком вакууме ($l_s \gg d$), пробой промежутка определяется в основном процессами на электродах. Разряд развивается за счет автоэлектронной («холодной») эмиссии электронов с микроострий на поверхности катода, когда напряженность поля на них поднимается до величины $\sim 10^7$ В/см. Эмиссионный ток, плотность которого достигает на острие огромных значений, нагревает и испаряет острие, а сильное электрическое поле отрывает и увлекает на анод небольшие кусочки катода. Последние вызывают испарение материала анода, и образующиеся при этом ионы бомбардируют, в свою очередь, катод, разогревая его и вызывая термоэлектронную эмиссию.

Описанный механизм развития разряда в высоком вакууме позволяет понять важный в практическом отношении эффект «тренировки» вакуумного зазора. Тренировка производится путем многократного пробоя зазора при небольшой мощности разряда и приводит к оплавлению остриев на катоде.

Вполне естественно также, что электрическая прочность зазора существенно возрастает при очень малой длительности τ высокого напряжения или при его высокой частоте. Так, например, при $\tau \sim 10^{-10}$ с вакуумный зазор выдерживает поле около 1 МВ/см, в то время как при $\tau \geq 10^{-5}$ с это значение падает до 100 кВ/см и дальше уже не зависит от τ .

§ 27. Пучки заряженных частиц

Особым видом электрического тока являются потоки свободно летящих заряженных частиц, которые обычно называются пучками. Пучки частиц существуют либо в очень высоком вакууме, когда можно пренебречь столкновениями с молекулами остаточного газа, либо при очень большой энергии частиц, когда длина свободного пробега значительно возрастает.

Чем же определяется величина тока пучка? Прежде всего — источником. Например, эмиссия электронов с накаливаемого катода существенно зависит от температуры последнего. Однако не только от этого. Рассмотрим *электронный диод*, состоящий из двух плоских параллельных электродов — *катода* и *анода*, достаточно больших, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами (рис. III.10). На диод подано напряжение V . Допустим, что мы можем неограниченно увеличивать эмиссию катода.

Будет ли при этом ток через диод также неограниченно возрастать? Оказывается, что не будет, так как находящиеся между катодом и анодом электроны будут тормозить электроны, покидающие катод. Иначе говоря, напряженность поля на катоде будет уменьшаться с ростом тока и, наконец, обратится в нуль, после чего возрастание тока прекратится независимо от эмиссии катода.

Вычислим предельное значение тока, протекающего через диод. Для этого необходимо рассчитать поле диода с учетом пространственного заряда пучка ρ , т. е. нужно решить уравнение Пуассона. Плотность заряда можно найти из выражения для плотности тока $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$. В рассматриваемой геометрии задача является одномерной, т. е. все величины зависят только от координаты x (см. рис. III.10), а векторы $\mathbf{j}$, $\mathbf{v}$ имеют только одну составляющую.

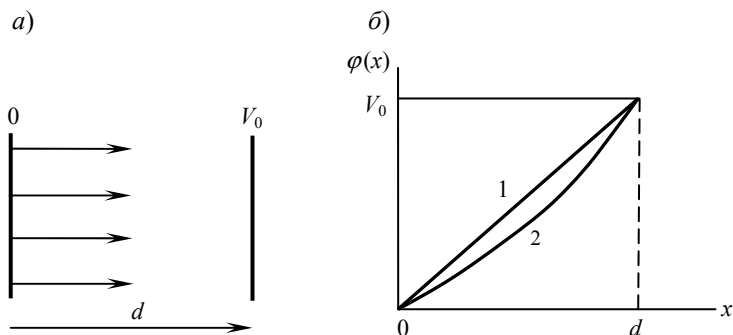


Рис. III.10. Поток электронов (а) и распределение потенциала в плоском диоде (б), 1 — режим малого тока, 2 — режим пространственного заряда

Примем потенциал катода равным нулю и пренебрежем тепловыми скоростями на катоде (их влияние рассмотрено в задаче III.13 ниже). Из закона сохранения энергии электрона в электрическом поле

$$\frac{mv^2}{2} - e\phi = 0$$

следует^{*)}

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e \cdot \phi(x)}{m}},$$

^{*)} Всюду в книге символом e обозначено абсолютное значение заряда электрона (не путать с символом экспоненты!), а знак заряда частицы определен в тексте дополнительно.

где e , m , v — абсолютное значение заряда, масса и скорость электрона, $\varphi(x) > 0$ — потенциал в точке x в диоде. Если ток электронов постоянен во времени, то из уравнения непрерывности (20.4) следует, что $j(x) = \text{const}$. Таким образом, необходимо решить следующее уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{A}{\sqrt{\varphi}}, \quad (27.1)$$

где константа $A = -4\pi j\sqrt{m/2e} > 0$, так как $j < 0$ (вектор плотности тока электронов направлен к катоду).

Это уравнение внешне похоже на уравнение движения в механике с заменой t на x . Поэтому его можно проинтегрировать аналогичным образом. Умножая обе части уравнения на $d\varphi/dx$, найдем первый интеграл, аналогичный интегралу энергии в механике:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 2A\sqrt{\varphi} + C. \quad (27.2)$$

Постоянная интегрирования $C = 0$ определяется из граничных условий на катоде $\varphi(0) = 0$, $\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = 0$. Теперь нужно проинтегрировать уравнение

$d\varphi/dx = 2\sqrt{A}\varphi^{1/4}$ и использовать граничное условие на аноде $\varphi(d) = V$. В результате (рис. III.10, б, кривая 2)

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} A^{2/3} x^{4/3} = V \left(\frac{x}{d} \right)^{4/3}. \quad (27.3)$$

Последнее равенство определяет предельный ток диода, ограниченный собственным пространственным зарядом:

$$j = -\frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{V^{3/2}}{d^2} \approx -2,33 \cdot \frac{V_{[\text{В}]}^{3/2}}{d_{[\text{см}]}^2} \text{ мкА/см}^2. \quad (27.4)$$

Плотность тока в диоде оказывается пропорциональной напряжению на нем в степени $3/2$, поэтому соотношение (27.4) называется обычно *законом «трех вторых»* или законом Чайлда–Ленгмюра–Богуславского (С. D. Child, 1911 г., I. Langmuir, 1913 г., С. А. Богуславский, 1923 г.).

Конечно, этот закон существенно отличается от закона Ома, так как динамика движения частиц здесь совершенно иная. Можно, однако, ввести эффективное интегральное сопротивление диода по следующей формуле:

$$R = \frac{V}{I} = 9\pi \sqrt{\frac{m}{2eV}} \cdot \frac{d^2}{S} \approx \frac{0,42}{\sqrt{V_B}} \cdot \frac{d^2}{S} \text{ МОм}, \quad (27.5)$$

где S — поперечная площадь пучка электронов (см^2), а V_B — напряжение на диоде в вольтах.

Увеличение проводимости диода с ростом напряжения имеет простой физический смысл и связано с увеличением средней скорости электронов пропорционально $\sqrt{V}$. Отсюда следует, в частности, что в ультрарелятивистском случае мы снова придем к закону Ома, хотя природа его совершенно иная (см. задачу III.11 ниже):

$$R = \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{d^2}{S} \approx 190 \frac{d^2}{S} \text{ Ом}. \quad (27.6)$$

Распределение потенциала в диоде (27.3) имеет характерную особенность — так называемое «провисание» потенциала (рис. III.9) по сравнению со случаем нулевого тока ($\varphi = Vx/d$).

Задача III.11. Обобщить закон «трех вторых» на область релятивистских энергий.

Изменение касается связи скорости с потенциалом. Релятивистская формула имеет вид $v = \sqrt{\varphi(\varphi + 2)} / (\varphi + 1)$. Мы используем здесь релятивистскую систему единиц, $e = m = c = 1$, в которой единица потенциала равна $mc^2/e = 0,511 \text{ МВ}$, а единица тока — $mc^3/e = 17 \text{ кА}$ (численные значения даны для электронов).

Исходное уравнение для потенциала принимает теперь вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi j \frac{\varphi + 1}{\sqrt{\varphi(\varphi + 2)}}.$$

Первый интеграл с учетом условий на катоде дает

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = -4\pi j \sqrt{\varphi(\varphi + 2)}.$$

Здесь $j < 0$. В общем случае это уравнение не интегрируется в элементарных функциях. Для ультрарелятивистской области ($\varphi \gg 1$) находим

$$\varphi = -2\pi j x^2 = V x^2 / d^2, \quad j = -V / (2\pi d^2). \quad (27.7)$$

Рассмотрим движение пучка электронов между двумя эквипотенциальными плоскостями (в так называемом дрейфовом пространстве, рис. III.11). По-прежнему считаем, что продольный размер пучка (вдоль вектора скорости электронов) много меньше поперечного, т. е. задача одномерная. Разумеется, электроны должны иметь теперь ненулевые начальные скорости. Примем, что скорости всех электронов одинаковы (v_0), и будем характеризовать их эффективным ускоряющим потенциалом $eV_0 = mv_0^2/2$. Рассмотрим вначале качественную картину движения такого пучка по мере увеличения его тока. При небольшом токе поле пространственного заряда пучка мало и вызывает лишь небольшое «провисание» потенциала (рис. III.11, кривая 2), что, в свою очередь, приводит к некоторому торможению электронов. Тем не менее весь ток с левой плоскости — эмиттера (от англ. emit — испускать) поступает на правую — коллектор (от англ. collect — собирать). При достаточно большом токе торможение становится настолько значительным, что электроны останавливаются, и часть их отражается назад (рис. III.11, кривая 3). Потенциал при этом провисает до нуля, и образуется так называемый виртуальный катод. Его положение в промежутке легко найти, если заметить, что каждый из двух участков системы по обе стороны от виртуального катода можно рассматривать как плоский диод.

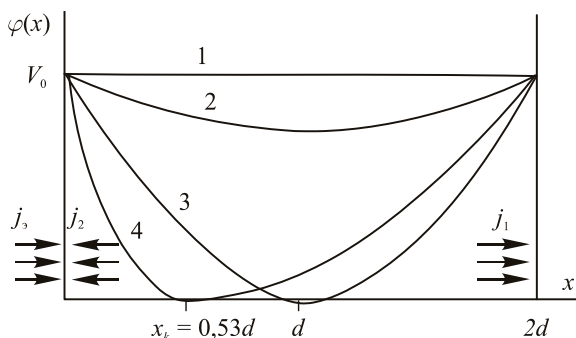


Рис. III.11. Распределение потенциала внутри пучка в дрейфовом пространстве: 1 — $j = 0$; 2 — $j \ll j_0$; 3 — $j = j_0$; 4 — $j = 2j_0$; стрелками показаны направления скоростей электронов в потоке с эмиттера ($j_3 < 0$), потоке на коллектор ($j_1 < 0$) и потоке, отраженном от виртуального катода ($j_2 > 0$)

Пусть плотность тока, поступающего с эмиттера в дрейфовое пространство (тока «эмиссии»), равна j_3 (<0), прошедшего — j_1 (<0) и отраженного — j_2 (>0). Тогда по закону «трех вторых»

$$j_1 = j_0 \left(\frac{d}{2d - x_k} \right)^2, \quad j_3 - j_2 = j_0 \left(\frac{d}{x_k} \right)^2, \quad (27.8)$$

где $2d$ — протяженность дрейфового пространства, параметр j_0 — плотность тока через диод с зазором d при напряжении V_0 , определен в (27.4). Решая систему (27.8), найдем

$$\frac{x_k}{d} = 2 - \sqrt{\frac{j_0}{j_1}}, \quad \frac{j_1}{j_0} = p \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2p} - \frac{1 + \sqrt{1 + 8p}}{8p^2}} \right\}, \quad (27.9)$$

где $p = j_3/j_0$. При очень большом токе с эмиттера ($p \rightarrow \infty$) ток на коллекторе $j_1 \rightarrow j_0/4$, а $x_k \rightarrow 0$. Полученный результат имеет простой физический смысл. Слева от виртуального катода плотность заряда неограниченно возрастает при $|j_3| \rightarrow \infty$, так как при этом почти все электроны отражаются назад, что приводит к запираанию пучка на очень коротком участке. Справа же от виртуального катода остается диод с зазором $2d$.

Минимальное значение тока, для которого еще справедливо решение (27.9), соответствует обращению в нуль подкоренного выражения. Это происходит при $p = 1$, когда $j_3 = j_1 = j_0$ ($j_2 = 0$) и $x_k = d$ (рис. III.11, кривая 3). При дальнейшем уменьшении тока виртуальный катод исчезает.

Интересно отметить, что образование виртуального катода при увеличении тока происходит при $j_3 = 2j_0$, т. е. при вдвое большем токе, чем его исчезновение. Это значит, что имеет место так называемый *гистерезис* (от греч. *hysteresis* — запаздывание, здесь — запаздывание перехода), изображенный на рис. III.12. В области $|j_0| < |j_3| < 2|j_0|$ возможны два состояния электронного пучка — как с виртуальным катодом, так и без него. Такая неоднозначность решения является характерной для нелинейного уравнения Пуассона и связана с тем, что плотность заряда электронного пучка сама зависит от его потенциала (так называемое самосогласованное решение).

Задача III.12. Оценить поправку к закону «трех вторых» за счет тепловых скоростей электронов на катоде (рис. III.12).

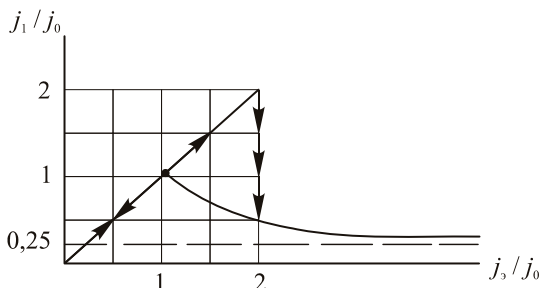


Рис. III.12. Характеристика дрейфового промежутка

Будем характеризовать тепловые скорости эффективным ускоряющим потенциалом $V_T \ll V$. С учетом тепловых скоростей, в диоде образуется нечто вроде виртуального катода, отражающего лишний ток эмиссии, при этом эффективная разность потенциалов увеличивается на величину $\sim V_T$. Максимальное смещение виртуального катода соответствует отсутствию отраженного тока. Его положение в этом случае можно оценить по закону «трех вторых», пренебрегая разбросом

тепловых скоростей: $\left(\frac{x_k}{d}\right) \sim \left(\frac{V_T}{V}\right)^{3/4} \ll 1$. Поправка к току через анод имеет поряд-

док $\frac{\Delta j}{j_0} \sim \frac{3}{2} \cdot \frac{V_T}{V} + 2 \frac{x_k}{d} \sim \frac{V_T}{V}$. Мы видим, что основную роль играет увеличение эффективной разности потенциалов в диоде. Впрочем, эта поправка является, как правило, незначительной, так как $V_T \leq 1$ В.

Задача III.13. Оценить глубину потенциальной ямы V_T (см. рис. III.13), если известны плотности тока эмиссии j_3 и плотность тока j_a , поступающего на анод, а распределение электронов по скоростям — максвелловское с температурой катода T , т. е. $\frac{dj}{dW} = \frac{j_3}{T} e^{-W/T}$, $W = \frac{mv^2}{2}$. Плотность тока, достигающего анод, равна

$$j_a = \int_{eV_T}^{\infty} \frac{dj}{dW} dW = j_3 e^{eV_T/T}. \text{ Отсюда } eV_T = T \ln(j_3/j_a).$$

Может показаться, что закон «трех вторых» запрещает транспортировку пучка заряженных частиц на большие расстояния ($j_0 \propto 1/d^2$). Однако зависимость от расстояния имеет место только для одномерной задачи. Обратный предельный случай вытянутого пучка внутри металлической трубки изображен схематически на рис. III.14. Ясно, что при этом торможение электронов может происходить только на краю трубки, на расстоянии порядка ее радиуса. На больших расстояниях отрицательный заряд

пучка компенсируется положительным, наведенным на внутренней стенке трубки. Поэтому в законе «трех вторых» (27.4) нужно положить $d = b$. Считая, что радиус пучка того же порядка ($a \sim b$), получим, что полный ток, который можно пропустить через трубку, вообще не зависит от ее размеров, если пучок полностью заполняет трубку, и определяется только энергией электронов:

$$I_{\max} \sim \frac{1}{6} \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot V^{3/2}. \quad (27.10)$$

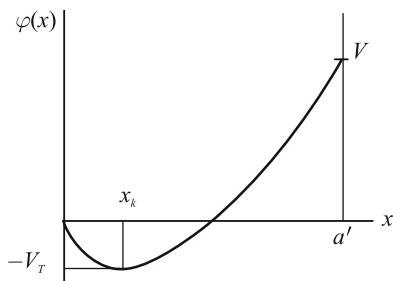


Рис. III.13. Распределение потенциала в диоде с учетом тепловых скоростей электронов

Эффективное сопротивление трубки (27.5), (27.6) имеет порядок

$$R \sim \frac{1}{\sqrt{V_B}} \text{ (МОм)} \xrightarrow{v \rightarrow c} 200 \text{ Ом.}$$

Последнее выражение дает ультрарелятивистский предел (сравни (27.6)).

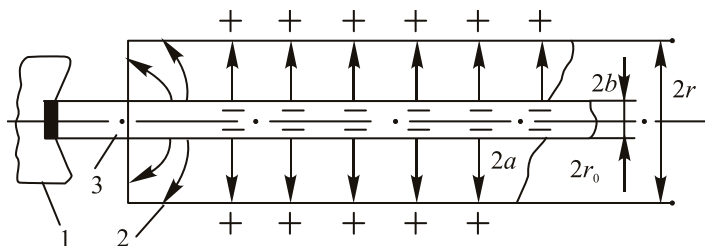


Рис. III.14. Пучок электронов внутри проводящей трубы: 1 — прикатодный электрод и катод (эмиттер); 2 — металлическая труба (анод); 3 — пучок

Можно было бы попытаться еще больше увеличить ток пучка, компенсируя его пространственный заряд ионами. Такая компенсация будет происходить автоматически за счет ионизации остаточного газа, если не принято специальных мер по очистке пучка от ионов. Оказывается, однако, что таким методом можно увеличить предельный ток пучка лишь приблизительно в шесть раз. При дальнейшем увеличении тока возникает неустойчивость: небольшое случайное провисание потенциала экспоненциально нарастает, пока не образуется виртуальный катод, запирающий пучок.

Задача III.14. Найти распределение потенциала и электрического поля в цилиндрической трубке радиуса b , вдоль оси которой распространяется цилиндрический пучок частиц с зарядом e и массой m . Радиус пучка — a , ток пучка — I , плотность тока постоянна по объему пучка, энергия частиц — $\varepsilon = mv^2/2$.

Плотность заряда пучка равна

$$\rho = \frac{I}{\pi a^2 v}.$$

Используя формулы (7.12), найдем теперь константы B_C и D_C из условий непрерывности потенциала на границе пучка ($r = a$), что дает

$$-q_1 + B_C = -A_C \cdot \ln a + D_C,$$

и равенства потенциала нулю на стенке трубки:

$$-A_C \cdot \ln b + D_C = 0.$$

Константа A_C из условия непрерывности поля на границе пучка (см. вывод формулы (7.12)) по-прежнему равна $A_C = 2q_1$. Две остальные константы находим из уравнений выше:

$$D_C = 2q_1 \cdot \ln b, \quad B_C = q_1 \left(1 + 2 \ln \frac{b}{a} \right).$$

Учитывая, что

$$q_1 = \pi a^2 \rho = \frac{I}{v},$$

окончательно имеем

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \frac{I}{v} \cdot \begin{cases} 1 - \frac{r^2}{a^2} + 2 \ln \frac{b}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ 2 \ln \frac{b}{r}, & a \leq r \leq b; \end{cases} \\ E(r) &= \frac{2I}{v} \cdot \begin{cases} \frac{r^2}{a^2}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{1}{r}, & a \leq r \leq b. \end{cases}\end{aligned}\quad (27.11)$$

Напомним, что для электронного пучка ток $I < 0$, соответственно, $\varphi(r) \leq 0$ по всему объему трубки.

Задача III.15. Оценить предельный ток пучка в задаче III.14.

При увеличении тока потенциал пучка внутри трубки увеличивается ($e > 0$) или уменьшается ($e < 0$), так что потенциальная энергия частиц возрастает (в обоих случаях), а кинетическая уменьшается:

$$e\varphi(r) + \frac{mv^2(r)}{2} = \mathfrak{E} = eV, \quad (27.12)$$

где $\mathfrak{E}$ — энергия частиц на входе в трубку, V — разность потенциалов, ускоряющая частицы в источнике (например, электроны в диоде, что рассмотрены выше). Пучок полностью запирается, когда скорость электронов по всему сечению пучка обращается в нуль. А максимальное значение тока соответствует состоянию пучка, при котором скорость электронов на его оси падает до нуля, т. е.

$$e\varphi(0) = \mathfrak{E}. \quad (27.13)$$

Используя для оценок (см. замечание ниже) выражение (27.11) для потенциала, запишем

$$\varphi(0) = \frac{I}{V} \cdot \left(1 + 2 \ln \frac{b}{a} \right).$$

Подстановка этого значения в (27.13) с учетом равенства (27.12) дает

$$I_{\max} \sim \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{V^{3/2}}{\left(1 + 2 \ln \frac{b}{a} \right)}. \quad (27.14)$$

Отметим, что при выводе (27.14) мы использовали значение $\varphi(0)$ из (27.11), справедливое лишь в случае постоянства ρ по радиусу пучка. Поэтому выражение (27.14) также приближенное, хотя и более точное, чем (27.10). Более того, оно правильно дает логарифмическую зависимость $I_{\max}$ от размеров b и a . Следующее приближение, использующее квадратичную поправку в функции

$$\rho(r) \approx \rho(0)(1 + \alpha r^2),$$

приводит к выражению, отличному от (27.14) только в численном коэффициенте: вместо $\sqrt{2}$ получим

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \approx 0,544,$$

так что $I_{\max}$ примерно в 2,6 раз меньше значения, которое дает формула (27.14) (см., например, [4]).

Полученные результаты показывают, что ток пучка ограничивается влиянием его собственного электрического поля, которое создается *пространственным зарядом пучка* (space charge — англ.). Параметр, количественно характеризующий величину пространственного заряда, есть

$$P = \frac{I}{V^{3/2}}. \quad (27.15)$$

Его называют *первеансом пучка* (от лат. *pervenio* — достигать). Максимальное значение тока цилиндрического пучка в цилиндрической трубе можно записать теперь в виде

$$I_{\max} = \frac{P_{\max}}{1 + 2 \ln \frac{b}{a}}, \quad P_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}}, \quad (27.16)$$

$$P_{\max} \approx \begin{cases} 0,194 \text{ мкА} \cdot \text{В}^{-3/2}, & \text{электроны,} \\ 4,53 \cdot \sqrt{\frac{Ze}{A}} \text{ нА} \cdot \text{В}^{-3/2}, & \text{ионы.} \end{cases}$$

Здесь Ze — заряд иона, A — его атомный вес (в единицах массы протона).

Для быстрого вычисления значений величин, подобных $P_{\max}$, удобно преобразовать формулы к выражениям, содержащим известные константы. Например,

$$\sqrt{\frac{e}{m}} \equiv \frac{mc^3}{e} \cdot \left(\frac{e}{mc^2} \right)^{3/2}.$$

Здесь первая дробь имеет размерность тока, а вторая — напряжения в степени $-3/2$:

$$\frac{mc^3}{e} \approx \begin{cases} 17,033 \text{ кА}, \\ 31,27 \sqrt{\frac{A}{Z}} \text{ МА}, \end{cases} \quad \frac{mc^2}{e} = \begin{cases} 511 \text{ кВ}, \\ 938 \sqrt{\frac{A}{Z}} \text{ МВ}, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{электроны,} \\ \text{ионы.} \end{array}$$

ГЛАВА IV

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 28. Магнитное поле тока

Магнитные свойства железной руды и, позднее, железа известны с незапамятных времен. Однако до сравнительно недавнего времени они никак не связывались с электрическими процессами. Только в 1820 г. датский физик Эрстед (Н. С. Ørsted) открыл действие тока на магнитную стрелку и установил тем самым связь между электрическими и магнитными явлениями. Продолжая исследования Эрстеда, французский физик Ампер (А. М. Ampere) окончательно выяснил электрическую природу магнетизма и в том же 1820 г. нашел экспериментально основной закон магнитного взаимодействия токов.

К сожалению, это произошло слишком поздно. Задолго до работ Эрстеда и Ампера взаимодействие кусков намагниченного железа было подробно изучено Кулоном, который пришел к заключению, что магнитное взаимодействие аналогично электрическому и связано с особыми «магнитными зарядами». Сам Кулон прекрасно понимал, что магнитные заряды не похожи на электрические, так как невозможно изолировать магнитный заряд одного знака. Тем не менее в теории магнетизма возникла с самого начала система понятий, полностью аналогичная электростатике. Например, магнитное поле в среде $\mathbf{H}$ считалось аналогичным электрическому полю $\mathbf{E}$, а магнитная индукция $\mathbf{B}$ — электрической индукции $\mathbf{D}$. Так как на самом деле в природе не существует магнитных зарядов (см. § 116), а магнитное поле возбуждается при движении электрических зарядов, возникло несоответствие между общепринятыми понятиями теории магнетизма и действительной картиной магнитных явлений. Это противоречие до сих пор приводит к недоразумениям, так что в этой области физики нужно быть особенно «бдительным».

Подобно закону Кулона в электростатике, основой физики магнитных явлений служит *закон Ампера*, описывающий взаимодействие «элементов» тока. Он может быть записан в виде

$$d\mathbf{F}_{12} = k^2 \frac{I_1 I_2 d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}. \quad (28.1)$$

Здесь dF_{12} — сила магнитного взаимодействия двух элементов тока, которые можно представить себе как очень маленькие отрезки проводников с токами I_1 , I_2 длиной dl_1 , dl_2 , ориентированные вдоль векторов $d\mathbf{I}_1$, $d\mathbf{I}_2$ соответственно; $\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, соединяющий эти элементы; k — постоянная, зависящая от выбора единиц (см. ниже).

Конечно, Ампер проводил свои эксперименты с замкнутыми проводниками. Поэтому получение элементарного закона (28.1) было задачей значительно более трудной, чем в случае закона Кулона. Более того, оказалось, что вообще не существует однозначного решения этой задачи. Действительно, если добавить в (28.1) любое выражение, интеграл от которого по одному из замкнутых контуров тока равен нулю, то интегральная сила между токами не изменится. Поэтому для вывода элементарного закона (28.1) нужны какие-то дополнительные предположения. Ампер считал, что магнитные силы должны подчиняться третьему закону Ньютона, т. е. действовать вдоль линии, соединяющей элементы тока. Исходя из этого, он получил для элементарного закона следующее выражение:

$$d\mathbf{F}_{12} = k^2 I_1 I_2 \mathbf{r}_{12} \left(\frac{3(d\mathbf{I}_1, \mathbf{r}_{12})(d\mathbf{I}_2, \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^5} - \frac{2(d\mathbf{I}_1, d\mathbf{I}_2)}{r_{12}^3} \right), \quad (28.2)$$

отличающееся от (28.1). Для замкнутых токов оба выражения эквивалентны.

Задача IV.1. Показать, что для замкнутых токов выражения (28.1), (28.2) дают одинаковое значение силы.

Проинтегрируем разность сил (28.1), (28.2), например, по контуру замкнутого тока 1. При этом отрезок $d\mathbf{I}_2$ будем считать постоянным, обозначив $d\mathbf{I}_2 \equiv \mathbf{a}$. Учтем, что $d\mathbf{I}_1 = -d\mathbf{r}_{12} = -d\mathbf{r}$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{F} &= k^2 I_1 I_2 \oint \left\{ -\frac{\mathbf{a} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{r})}{r^3} + 3\mathbf{r} \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})(d\mathbf{r}, \mathbf{r})}{r^5} - 2\mathbf{r} \frac{(\mathbf{a}, d\mathbf{r})}{r^3} \right\} d\mathbf{r} = \\ &= k^2 I_1 I_2 \oint \left\{ -\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{r^3} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{a}, d\mathbf{r})}{r^3} + 3\mathbf{r} \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})(d\mathbf{r}, \mathbf{r})}{r^5} \right\} d\mathbf{r} = \\ &= -k^2 I_1 I_2 \oint d \left(\frac{\mathbf{r}(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{r^3} \right) \equiv 0, \end{aligned}$$

т. е. разность сил равна нулю.

Представление об элементах тока было во времена Ампера всего лишь удобным математическим приемом. Сейчас мы знаем, что элементы тока реально существуют в природе, например движущиеся заряженные частицы. Можно взять и просто короткий отрезок проводника и возбудить

в нем ток высокой частоты, «замыкающийся» через емкость между концами проводника. Возникает вопрос какой же из элементарных законов является истинным?

Эксперименты по взаимодействию движущихся заряженных частиц показывают, что правильным является выражение (28.1) (в нерелятивистском случае $v \ll c$, см. § 29). Но как же тогда быть с третьим законом Ньютона? Ведь сила (28.1) определенно не удовлетворяет ему, $(d\mathbf{F}_{12}) \neq -d\mathbf{F}_{21}$. А между тем с третьим законом связаны законы сохранения импульса и момента, которые всегда рассматривались как наиболее фундаментальные законы природы. Ответ заключается в том, что третий закон Ньютона действительно имеет ограниченное применение, но законы сохранения тем не менее не нарушаются, если учесть импульс и момент электромагнитного поля (см. § 118).

Как уже говорилось, множитель k в (28.1) зависит от выбора системы единиц. Можно, например, выбрать единицу тока таким образом, чтобы $k = 1$. Десятая часть такой единицы называется ампером и является одной из шести основных единиц СИ. Если же использовать электрическую единицу тока (в гауссовой системе), то $k = 1/c$, где c — скорость света. Такое совпадение отнюдь не случайно и связано в конечном счете с тем, что c есть скорость распространения электромагнитного поля (см. также следующий параграф).

Подобно тому как это было сделано в электростатике, прямые взаимодействия двух элементов тока (28.1) можно рассматривать как взаимодействие одного из них с полем другого:

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_{12})}{c}, \quad (28.3)$$

где магнитное поле элемента I_1 дается выражением

$$d\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}}{cr^3}. \quad (28.4)$$

Последнее выражение называется *законом Био и Савара* (J. B. Biot and F. Savart, 1820), а первое представляет собой формулу для *силы Лоренца* в частном случае (см. (29.1), $\mathbf{E} = 0$).

Закон Био–Савара позволяет найти магнитное поле произвольной системы токов с использованием *принципа суперпозиции*, который для магнитного поля столь же справедлив, как и для электрического. Это вытекает уже из того факта, что разделение поля на электрическое и магнитное относительно и зависит от системы отсчета (§ 29).

Рассмотрим, например, бесконечный тонкий прямолинейный проводник (рис. IV.1). В цилиндрической системе координат поле имеет только составляющую H_φ . Его значение в точке $P(\rho, 0)$ есть

$$H_\varphi(\rho) = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sin \theta}{z^2 + \rho^2} = \frac{I}{c\rho} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2I}{c\rho}. \quad (28.5)$$

Отметим, что значение поля в гауссах получается из (28.5) при измерении тока в амперах, расстояния ρ в сантиметрах и замене скорости света на коэффициент 10:

$$[H_\varphi(\rho)]_{[\text{Гс}]} = \frac{0,2I_{[\text{Амп}]}}{\rho_{[\text{см}]}}.$$

Силовые линии поля замкнуты и представляют собой концентрические окружности. Из этого примера видна основная особенность магнитного поля — его непотенциальность. Действительно, интеграл по замкнутому контуру («работа» вектора $\mathbf{H}$) не равен нулю:

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 2\pi\rho H_\varphi = \frac{4\pi I}{c}. \quad (28.6)$$

В качестве замкнутого контура Γ мы выбрали здесь окружность, совпадающую с силовой линией.

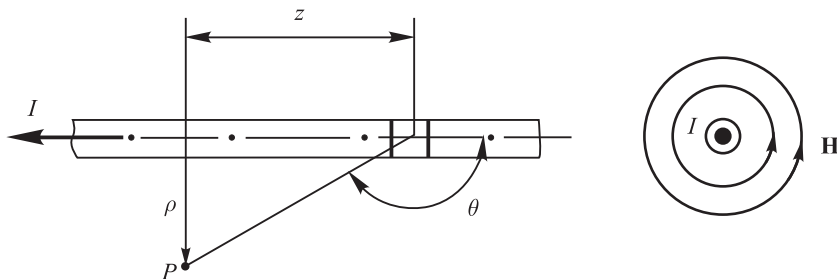


Рис. IV.1. Магнитное поле прямого тока

В гауссовой системе единица напряженности магнитного поля называется гаусс (Гс) или эрстед (Э)^{*)}, она определяется из выражения (28.4). В СИ множитель k в законе Ампера выбирается равным 1/10. Тогда единица напряженности $1 \text{ А/м} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Гс} \approx 0,0126 \text{ Гс}$.

^{*)} В материальных средах эти единицы различают (см. § 38).

Задача IV.2. Найти магнитное поле на оси кольца с током; радиус кольца — a . Поле элемента кольца $dl = a \cdot d\alpha$ на его оси в точке $P(z)$ равно (рис. IV.2)

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{cr^2}, \quad r = \sqrt{a^2 + z^2}.$$

Вектор $d\mathbf{H}$ лежит в плоскости ось z — прямая $P - dl$ и ортогонален последней. Проекция вектора $d\mathbf{H}$ на ось z и на радиус ρ равны

$$dH_z = d\mathbf{H} \cdot \cos \theta = d\mathbf{H} \cdot \frac{a}{r}, \quad dH_\rho = d\mathbf{H} \cdot \sin \theta.$$

Интеграл по кольцу компоненты dH_ρ , очевидно, равен нулю, а интеграл dH_z дает поле на оси кольца:

$$H_z(0, z) = \frac{2\pi I}{c} \cdot \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (28.7)$$

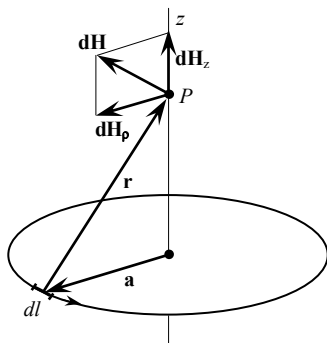


Рис. IV.2. Кольцо с током

Задача IV.3. Найти поле на оси цилиндрического соленоида и значения поля в центре и на краю соленоида. Длина соленоида — $2L$, число витков — N , ток — I .

Будем отсчитывать координату z от центра соленоида. Воспользуемся выражением (28.7) для поля в точке P (рис. IV.3) от элемента обмотки длиной dx :

$$dH_z = \frac{2\pi NI}{c} \cdot \frac{a}{[a^2 + (z-x)^2]^{3/2}} \cdot \frac{dx}{2L}.$$

Отсюда

$$H_z(z) = \frac{\pi N I a}{c L} \int_{-L}^L \frac{a \cdot dx}{[a^2 + (z-x)^2]^{3/2}} = \frac{\pi N I}{c L} \cdot \left\{ \frac{L-z}{\sqrt{a^2 + (L-z)^2}} + \frac{L+z}{\sqrt{a^2 + (L+z)^2}} \right\}. \quad (28.8)$$

В центре соленоида поле максимально и равно

$$H_{\max} = H_z(0) = \frac{2\pi N I}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + L^2}} \xrightarrow{L \gg a} \frac{4\pi N I}{c(2L)}.$$

Вблизи центра соленоида поле на оси спадает по мере роста $|z|$:

$$H_z(z) \approx H_z(0) \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{z^2}{a^2 + L^2} \right).$$

Выражение для длинного соленоида ($L \gg a$) записано здесь через его полную длину $2L$ во избежание возможных ошибок.

На краю соленоида его поле равно

$$H_z(\pm L) = \frac{\pi N I}{c L} \cdot \frac{2L}{\sqrt{a^2 + (2L)^2}} \xrightarrow{L \gg a} \frac{H_{\max}}{2}.$$

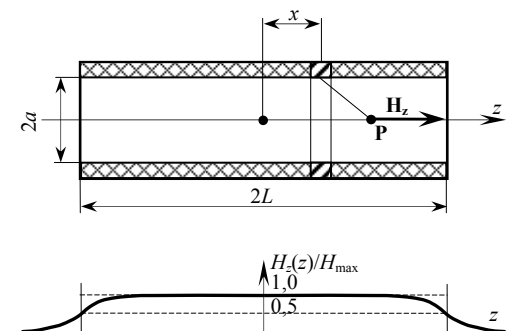


Рис. IV.3. Цилиндрический соленоид (выбор координат)

Задача IV.4. Четыре проводника с током параллельны друг другу и пересекают плоскость, ортогональную их осям, в углах прямоугольника $2d \times 2h$. Токи в проводниках, расположенных на одной и той же стороне прямоугольника,

имеют противоположное направление (рис. IV.4). Найти поле вблизи центра прямоугольника ($x \ll d, y \ll h$).

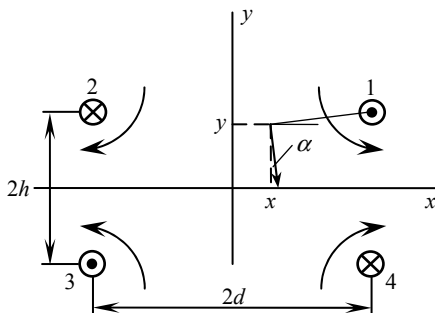


Рис. IV.4. Четыре длинных прямолинейных проводника с током, образующих магнитное поле квадрупольной структуры

Перенумеровав проводники, как показано на рис. IV.4, запишем для поля тока от проводника 1 в точке (x, y) (см. (28.5))

$$H_{1x} = \frac{2I_1}{c\rho_1} \cdot \sin \alpha_1, \quad \sin \alpha_1 = \frac{h-y}{\rho_1},$$

$$H_{1y} = -\frac{2I_1}{c\rho_1} \cdot \cos \alpha_1, \quad \cos \alpha_1 = \frac{d-x}{\rho_1}, \quad \rho = \sqrt{(d-x)^2 + (h-y)^2}.$$

Записывая аналогичные выражения для всех проводников, с учетом значений и направлений их токов, находим

$$H_x = \frac{2I}{c} \left\{ \frac{h-y}{(d-x)^2 + (h-y)^2} - \frac{h-y}{(d+x)^2 + (h-y)^2} - \frac{h+y}{(d+x)^2 + (h+y)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{h+y}{(d-x)^2 + (h+y)^2} \right\} \approx 16 \frac{I}{c} \cdot \frac{hd}{\rho_0^4} \cdot x,$$

$$H_y = \frac{2I}{c} \left\{ -\frac{d-x}{(d-x)^2 + (h-y)^2} - \frac{d+x}{(d+x)^2 + (h-y)^2} + \frac{d+x}{(d+x)^2 + (h+y)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{d-x}{(d-x)^2 + (h+y)^2} \right\} \approx -16 \frac{I}{c} \cdot \frac{hd}{\rho_0^4} \cdot y, \quad \rho_0^2 = d^2 + h^2, \quad x, y \ll d, h.$$

Поле такой системы токов имеют квадрупольную структуру:

$$H_x = Gx, \quad H_y = -Gy, \quad G = 16 \frac{I}{c} \cdot \frac{hd}{(h^2 + d^2)^2} \quad (28.9)$$

(сравни задачу I.3, плоский квадруполь).

Задача IV.5. Найти поле двух длинных параллельных прямолинейных проводников с противоположно направленными токами $\pm I$. Расстояние между проводниками $2d$. Найти приближенное значение поля вблизи прямой, лежащей в плоскости проводников и равноудаленной от них (ось z). Найти также поле на большом расстоянии от проводников: $x^2 + y^2 \gg d^2$.

Используя решение предыдущей задачи и ограничившись первыми двумя слагаемыми в выражениях для $H_{x,y}(x, y)$, найдем, положив $h = 0$,

$$H_x(x, y) = -\frac{2I}{c} \cdot y \left(\frac{1}{(d-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(d+x)^2 + y^2} \right),$$

$$H_y(x, y) = -\frac{2I}{c} \cdot \left(\frac{d-x}{(d-x)^2 + y^2} - \frac{d+x}{(d+x)^2 + y^2} \right).$$

Отсюда, произведя разложение по малым параметрам x/d и y/d , найдем значение компонент поля вблизи оси. При этом приходится проявить определенную аккуратность, так как требуется сохранять члены разложения до второго порядка — x^2/d^2 и y^2/d^2 . В результате получим

$$H_x(x, y) \approx -\frac{8I}{c} \cdot \frac{xy}{d^3}, \quad H_y(x, y) \approx -\frac{4I}{cd} \cdot \left(1 + \frac{x^2 - y^2}{d^2} \right), \quad x, y \ll d.$$

Обратим внимание, что знаки компонент поля зависят (конечно) от выбора направлений токов. В приведенных выражениях выбор этих направлений показан на рис. IV.4 (два верхних проводника).

При удалении точки наблюдения от проводников на расстояние $r = \sqrt{x^2 + y^2} \gg d$ приближенное значение поля равно

$$H_x \approx -\frac{8I}{c} \cdot \frac{xyd}{r^4}, \quad H_y \approx -\frac{4I}{c} \cdot \frac{d}{r^2}, \quad r \gg d.$$

Мы видим, что магнитное поле двойного провода, так называемого «бифиляра» (от англ. bifilar — двуниточный), спадает с расстоянием r как $H_{x,y}(x, y \gg d)/H_y(0, 0) \sim d^2/r^2$.

Задача IV.6. По двум параллельным проводящим пластинам текут токи противоположного направления $\pm I$. Найти значение поля между пластинами, если расстояние между ними $2d$, высота — $2h$, $l \gg h, d$ (рис. IV.5).

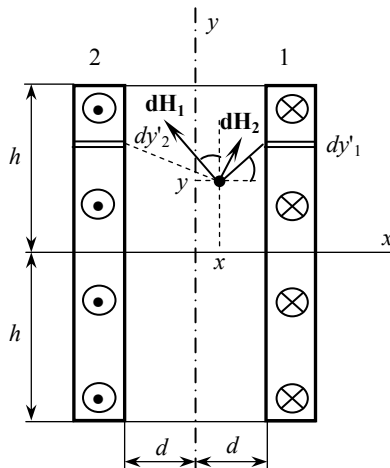


Рис. IV.5. Две проводящие пластины с током (поперечное сечение). $d\mathbf{H}_{1,2}$ — магнитные поля от элементов тока $\mp \mathbf{j} \cdot dy'_{1,2}$

Компоненты магнитного поля в точке (x, y) найдем аналогично тому, как это делалось в предыдущей задаче:

$$H_x(x, y) = \frac{2j}{c} \cdot \int_{-h}^h \left\{ -\frac{y' - y}{(d - x)^2 + (y' - y)^2} + \frac{y' - y}{(d + x)^2 + (y' - y)^2} \right\} \cdot dy',$$

$$H_y(x, y) = \frac{2j}{c} \cdot \int_{-h}^h \left\{ -\frac{d - x}{(d - x)^2 + (y' - y)^2} + \frac{d + x}{(d + x)^2 + (y' - y)^2} \right\} \cdot dy',$$

$$dy_1 = dy_2 = dy, \quad j = \frac{I}{2h}.$$

Произведя интегрирование, находим

$$\begin{aligned} H_x(x, y) &= \frac{j}{c} \cdot \ln \left\{ \frac{(d - x)^2 + (h + y)^2}{(d - x)^2 + (h - y)^2} \cdot \frac{(d + x)^2 + (h - y)^2}{(d + x)^2 + (h + y)^2} \right\}, \\ H_y(x, y) &= \frac{2j}{c} \cdot \left\{ \operatorname{arctg} \frac{h - y}{d - x} + \operatorname{arctg} \frac{h + y}{d - x} + \operatorname{arctg} \frac{h - y}{d + x} + \operatorname{arctg} \frac{h + y}{d + x} \right\} = \\ &= \frac{2j}{c} \cdot \left\{ 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{2h(d - x)}{h^2 - y^2 - (d + x)^2} - \operatorname{arctg} \frac{2h(d + x)}{h^2 - y^2 - (d + x)^2} \right\}. \end{aligned}$$

В средней плоскости ($x = 0$) приближенное значение компонент поля равно

$$H_x(0, y) = 0, \quad H_y(0, y) \approx \frac{4\pi j}{c} \cdot \left\{ 1 - \frac{2d}{\pi h} - \frac{2d}{\pi h^3} \cdot y^2 \pm \dots \right\}$$

(ср.: задача IV.3).

§ 29. Магнитное поле и теория относительности

Закон Био–Савара имеет очень простой физический смысл с точки зрения теории относительности — он связан с преобразованием полей при переходе из одной системы отсчета в другую.

Законы преобразования проще всего получить из выражения для *силы Лоренца* (Н. А. Lorentz, конец XIX века)

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad (29.1)$$

найденного им как обобщение экспериментальных данных. В частности, магнитная составляющая этой силы совпадает с выражением (28.3). Действительно, для одной частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, имеем

$$\int Idl = ev.$$

Так как законы преобразования силы $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ и скорости известны, а заряд частицы e считается инвариантом, можно найти формулы преобразований для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при переходе из одной инерционной системы в другую, движущуюся относительно первой со скоростью $\mathbf{V}$ ($x \parallel \mathbf{V}$).

Прежде всего, можно проверить, что продольная (вдоль скорости $\mathbf{V}$) составляющая силы является инвариантом преобразований Лоренца. Учитывая, что для частицы, движущейся в заданной (любой) системе, справедливо равенство

$$\frac{d\mathcal{E}}{dp_x} = v_x \equiv \frac{dx}{dt},$$

находим

$$f_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x + \frac{V}{c^2} d\mathcal{E}'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{dp'_x}{dt'} = f'_x \quad (29.2)$$

(не путать компоненту скорости частицы v_x и $\mathbf{V}$ — скорость системы). Для поперечной составляющей силы аналогично имеем

$$f_{\perp} = \frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{dp'_{\perp}}{\gamma(dt' + V \cdot dx'/c^2)} = \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{V \cdot v'_x}{c^2}\right)} \cdot \frac{dp'_{\perp}}{dt'},$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор частицы, движущейся со скоростью v в данной системе (не путать с $\gamma_0 = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$!). Далее, используя закон сложения скоростей, запишем

$$\frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{V \cdot v'_x}{c^2}\right)} = \frac{v_{\perp}}{v'_{\perp}} = \frac{p_{\perp}}{\gamma} \cdot \frac{\gamma'}{p'_{\perp}} = \frac{\gamma'}{\gamma}$$

и, подставив в предыдущее равенство, получим

$$f_{\perp} = \frac{\gamma'}{\gamma} \cdot \frac{dp'_{\perp}}{dt'} = \frac{\gamma'}{\gamma} f'_{\perp},$$

или

$$\gamma f_{\perp} = \gamma' f'_{\perp}. \quad (29.3)$$

Результат (29.3) можно получить «в одну строчку», если воспользоваться инвариантным (собственным) временем частицы

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}.$$

Тогда

$$\gamma f_{\perp} = \gamma \frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{dp_{\perp}}{d\tau} = \frac{dp'_{\perp}}{d\tau} = \gamma' \frac{dp'_{\perp}}{dt'} = \gamma' f'_{\perp}.$$

Мы сочли полезным привести оба способа получения равенства (29.3).

Рассмотрим случай, когда в одной системе отсчета частица покоится ($v' = 0$; $\gamma' = 1$). Тогда в другой системе скорость частицы совпадает со скоростью первой системы ($v_x = V$) и $\gamma = \gamma_0 = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$. Так как магнитная сила в (29.1) не имеет продольной составляющей, то инвариант (29.2) дает

$$E_x = E'_x. \quad (29.4)$$

Поперечный инвариант (29.3) приводит к соотношению

$$E'_y = \gamma_0 \left(E_y - \frac{V}{c} H_z \right), \text{ или } E_y = \gamma_0 \left(E'_y + \frac{V}{c} H'_z \right). \quad (29.5)$$

Обратное преобразование получается здесь, как обычно, заменой знака у V . Исключая из двух соотношений (29.5), например, E_y , имеем закон преобразования для магнитного поля:

$$H_z = \gamma_0 \left(H'_z + \frac{V}{c} E'_y \right). \quad (29.6)$$

Соотношения, аналогичные (29.5), (29.6), будут иметь место и для двух других поперечных компонент поля E_z и H_y ввиду аксиальной симметрии относительно направления скорости V .

Остается найти соответствующий закон для продольной составляющей магнитного поля. Из формулы (29.6) видно, что H_x трансформируется независимо от других составляющих полей, т. е. только через H'_x . Значит, должно быть $H_x = \lambda H'_x$. Из симметрии прямого и обратного преобразований следует, что $\lambda = 1$. Этот результат можно вывести и непосредственно из силы Лоренца, если рассмотреть частицу со скоростью v'_z . Используя выражение для f_y , получим

$$\gamma' \left(E'_y + \frac{v'_z H'_x}{c} \right) = \gamma \left(E_y + \frac{v_z H_x}{c} \right).$$

Учтем теперь, что H_x преобразуется независимо от E_y (29.5) и что, как мы видели при выводе (29.3), $\gamma' v'_z = \gamma v_z$. Это дает $H_x = H'_x$.

Окончательно формулы могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x; & H_x &= H'_x; \\ \mathbf{E}_\perp &= \gamma_0 \left(\mathbf{E}'_\perp - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{H}' \right); & \mathbf{H}_\perp &= \gamma_0 \left(\mathbf{H}'_\perp + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}' \right). \end{aligned} \quad (29.7)$$

Индекс $\perp$ означает проекцию векторов на плоскость yz . В первом порядке по V/c можно написать

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}' - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{H}'; \quad \mathbf{H} \approx \mathbf{H}' + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}'. \quad (29.8)$$

Из законов преобразования поля (29.7) следуют, в частности, важные соотношения между электрическим и магнитным полями в данной системе, если в какой-то системе отсчета имеется только одно из полей. Если, на-

пример, электрическое поле $\mathbf{E}' \neq 0$, а магнитное $\mathbf{H}' = 0$, то в любой другой системе поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ связаны друг с другом равенством

$$\mathbf{H} = (\mathbf{V} \times \mathbf{E})/c. \quad (29.9)$$

Это равенство получим, записав из (29.7) соотношения полей

$$E_x = E'_x, \quad H_x = 0, \quad \mathbf{E}_\perp = \gamma_0 \mathbf{E}'_\perp, \quad \mathbf{H}_\perp = \gamma_0 \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{E}'_\perp$$

и подставив значение $\mathbf{E}'_\perp$ из предпоследнего равенства в последнее, учитывая, что $\mathbf{E}_x \times \mathbf{V} \equiv 0$. Аналогично, если в какой-то системе $\mathbf{E}'_\perp = 0$, то

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{H}.$$

Обратим внимание на то, что закон преобразования симметричен (точнее антисимметричен) относительно обоих полей, т. е. формулы сохраняют свой вид, если поменять поля местами, изменив знак у одного из них,

$$\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}.$$

Этот результат тем более примечателен, что он получен из явно несимметричного выражения для силы Лоренца.

Тот факт, что электрическое и магнитное поля преобразуются друг в друга при переходе из одной системы отсчета в другую, показывает, что оба они являются лишь различными составляющими единого *электромагнитного поля*. Ситуация здесь аналогична связи между пространством и временем или между энергией и импульсом. Однако, в отличие от последних, обе компоненты свободного электромагнитного поля равноправны. Существенное различие связано лишь с несимметрией зарядов: в природе наблюдается только электрический заряд и нет магнитного.

Из закона преобразования полей следует закон Био–Савара (28.4). Действительно, для одной частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_1$, $\int I_1 d\mathbf{l}_1 = e\mathbf{v}_1$, и (28.4) дает

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{v} \times e\mathbf{r}}{cr^3} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}. \quad (29.10)$$

Это в точности соответствует преобразованию кулоновского поля покоящегося заряда ($\mathbf{E}' = e\mathbf{r}/r^3$) при $V \ll c$ (29.8).

Таким образом, по теории относительности законы Кулона, Ампера и Лоренца (сила Лоренца) не являются полностью независимыми, а связаны друг с другом преобразованиями полей. Поэтому два из них, например закон Кулона и сила Лоренца, как более простые, могут быть положены в основу всех электромагнитных явлений.

Более того, теория относительности показывает, что закон Ампера справедлив только в случае малых скоростей движущихся зарядов. И это

несколько не противоречит опытам Ампера, поскольку в обычных проводниках скорость движения электронов действительно ничтожно мала (см. § 20). Как мы знаем теперь из экспериментов с быстрыми частицами, их магнитное поле не удовлетворяет закону Био–Савара, а определяется точными формулами теории относительности (29.7). Оказывается, однако, что в случае постоянного тока закон Био–Савара справедлив при любых скоростях заряженных частиц. Нарушение закона Био–Савара для отдельных частиц связано с запаздыванием поля вследствие конечной скорости его распространения. Для стационарного поля запаздывание, естественно, не играет роли.

Рассмотрим, например, магнитное поле прямолинейного однородного тонкого и бесконечно длинного пучка релятивистских электронов. В собственной системе отсчета такой пучок создает чисто электрическое поле, направленное по радиусу в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) с осью z вдоль скорости электронов:

$$E'_\rho = -\frac{2(-e)N'}{\rho}, \quad (29.11)$$

где e — абсолютное значение заряда электрона, N' — линейная плотность электронов в этой системе, связанная с линейной плотностью N в лабораторной системе соотношением (см. § 20 и второе равенство в (20.7))

$$N = \gamma N'. \quad (29.12)$$

Формулы преобразования (29.7) дают

$$H_\varphi = \gamma \frac{vE'_\rho}{c} = \frac{2(-e)Nv}{c\rho} = \frac{2I}{c\rho} \quad (29.13)$$

в полном соответствии с выражением (28.5), полученным из закона Био–Савара (ток электронов $I = -eNv$).

Аналогично, из выражения (29.11) и законов преобразования (29.7), (29.12) следует, что электрическое поле пучка

$$E_\rho = -\frac{2eN}{\rho}, \quad (29.14)$$

т. е. определяется только плотностью заряда и не зависит от скорости частиц.

§ 30. Самофокусировка пучка заряженных частиц: пинч-эффект

Рассмотрим подробнее взаимодействие электронов релятивистского пучка, описанного в конце предыдущего параграфа. Примем, что пучок

представляет собой круговой цилиндр радиуса a , а плотность электронов постоянна по сечению. Найдем силу, действующую на крайние электроны пучка ($\rho = a$):

$$f_{\rho} = eE_{\rho} - e \frac{v}{c} H_{\varphi} = eE_{\rho} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{eE_{\rho}}{\gamma^2}. \quad (30.1)$$

Мы видим, что в ультрарелятивистском случае ($\gamma \gg 1$) электрическое расталкивание почти компенсируется магнитным стягиванием, так что результирующая сила уменьшается в γ^2 раз.

Интересно отметить, что взаимодействие двух электронов подчиняется несколько иному закону. Действительно, поперечная составляющая силы образует инвариант (29.3), откуда

$$f_{\perp} = \frac{f'_{\perp}}{\gamma} = \frac{e^2}{\gamma r^2}. \quad (30.2)$$

Значит, сила расталкивания убывает только в γ раз. Это различие связано с тем, что для пучка мы считаем заданной его плотность в лабораторной системе независимо от γ . Тогда плотность пучка в собственной системе меньше в γ раз.

Представим теперь, что в пучке имеется некоторое количество равномерно распределенных положительных ионов, возникающих, например, за счет ионизации остаточного газа. Пусть их относительная концентрация $\alpha = n_{+}/n_{-}$. Тогда их электрическое поле

$$E_{+} = -\alpha E_{-}, \quad (30.3)$$

где E_{-} — электрическое поле электронов (29.14), а магнитным полем ионов можно пренебречь ввиду их малой скорости. Полная сила, действующая теперь на крайний электрон,

$$f = eE_{-} \left(1 - \alpha - \frac{v^2}{c^2} \right) = eE_{-} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha \right). \quad (30.4)$$

При $\alpha = 1/\gamma^2$ расталкивание электронов полностью прекращается, а при $\alpha > 1/\gamma^2$ сменяется стягиванием. Что же касается ионов, то при условии $\alpha < 1$ они также стягиваются, поскольку суммарный пространственный заряд пучка остается отрицательным. Таким образом, в интервале

$$1/\gamma^2 < \alpha < 1 \quad (30.5)$$

происходит так называемая самофокусировка пучка. Неравенство (30.5) называют обычно *условием самофокусировки Беннета–Будкера* по имени

американского и советского физиков, независимо предсказавших это явление (W. H. Bennett, 1934 г., и Г. И. Будкер, 1956 г., см. также § 126, задача XX.10).

Самофокусировка электронов возможна и в нерелятивистском случае, если только $\alpha \approx 1$. Такой процесс действительно наблюдается при пропускании сильного тока через плазму и называется *пинч-эффектом* (от английского слова pinch — сжатие). При этом происходит просто притяжение параллельных токов — эффект, который наблюдал еще Ампер. Любопытно отметить, что это был, по существу, первый релятивистский опыт, в котором наблюдался эффект второго порядка по v/c , т. е. того же порядка, что и релятивистское сокращение длины и замедление времени. Однако, чтобы понять это, потребовалось еще почти сто лет.

Задача IV.7. Плоский длинный конденсатор помещен в однородное магнитное поле, параллельное его пластинам. Найти напряжение на конденсаторе, при котором поток электронов заданной плотности j проходит сквозь конденсатор параллельно его пластинам и под углом α к магнитному полю.

Из условия равенства нулю силы Лоренца (29.1) получим

$$V = Ed = \frac{Hj \sin \alpha}{c\rho} d, \quad (30.6)$$

где ρ — плотность электронов, d — расстояние между пластинами.

Полученное выражение дает значение ЭДС, которая наводится в проводниках, помещенных в магнитное поле, при протекании по ним тока — *эффект Холла* (E. H. Hall, 1879 г.).

§ 31. Вектор-потенциал

По аналогии с электростатикой можно попытаться упростить описание магнитного поля, введя его потенциал. Однако использование обычного *скалярного потенциала* ψ ,

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi, \quad (31.1)$$

вообще говоря, невозможно, так как магнитное поле непотенциально. Это видно уже из простого примера, рассмотренного в § 28 (см. (28.6)).

Исходя из совершенно иных соображений, Максвелл ввел так называемый *вектор-потенциал* $\mathbf{A}$, связанный с магнитным полем равенством

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (31.2)$$

Операция ротор определяется как векторное произведение с оператором ∇ :

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (31.3)$$

Последнее выражение справедливо только в декартовых координатах, причем подразумевается разложение детерминанта по минорам первой строки, например,

$$(\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Приведем также выражения для $\text{rot } \mathbf{A}$ в цилиндрических (ρ, φ, z) и сферических (r, θ, α) координатах (см. П. I.3, 5):

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \mathbf{e}_\rho \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \cdot \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right), \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \cdot \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A_\alpha) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\theta \cdot \left(\frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\alpha \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (31.4)$$

Эти выражения нам потребуются в дальнейшем.

Выбор такой формы потенциала не случаен, так как операция ротор всегда дает поле с замкнутыми (или уходящими на бесконечность) силовыми линиями. Это следует из того, что дивергенция ротора всегда равна нулю:

$$\text{div} (\text{rot } \mathbf{A}) = (\nabla, (\nabla \times \mathbf{A})) \equiv 0.$$

При геометрической интерпретации оператора ∇ как вектора последнее выражение соответствует объему параллелепипеда, построенного на трех векторах, два из которых совпадают.

Для того чтобы наглядно представить себе действие оператора «ротор», рассмотрим простой механический пример — поле скоростей вращающегося твердого тела $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ и вычислим ротор этого поля (см. П. I.3, г): $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \text{div } \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega}, \nabla) \mathbf{r} = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \text{const.}$ В данном случае линии $\text{rot } \mathbf{v}$ представляют собой прямые, уходящие на бесконечность.

Вектор-потенциал однородного магнитного поля можно, как легко проверить, записать в виде $\mathbf{A} = \mathbf{H}_0 \times \mathbf{r}/2$. Этот вектор в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) имеет только азимутальную компоненту $A_\varphi = H_0 \rho/2$.

Из выражения (31.2) вытекает, что силовые линии магнитного поля не имеют концов, т. е. замкнуты или уходят на бесконечность. Но можно ли утверждать, что любое магнитное поле имеет такую конфигурацию? Для положительного ответа на этот вопрос достаточно подобрать правильное значение вектора-потенциала для единственного движущегося заряда. Тогда в силу принципа суперпозиции выражение (31.2) будет справедливо для любого поля.

Необходимое выражение действительно существует:

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cr}, \quad (31.5)$$

хотя трудно ответить на вопрос, как его получить. Его нужно просто «угадать». Проверим, что такой потенциал дает правильное выражение для магнитного поля движущегося заряда. Имеем

$$\text{rot } \frac{e\mathbf{v}}{cr} = \frac{e}{c} \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{r} = \frac{e}{c} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{v} = \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{cr^3}, \quad (31.6)$$

что совпадает с (28.4) или (29.10).

Обратим внимание на то, что вектор-потенциал точечного заряда (31.5) очень просто связан со скалярным потенциалом его электрического поля:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c} \varphi. \quad (31.7)$$

С помощью принципа суперпозиции можно написать теперь выражение для вектора-потенциала магнитного поля произвольной системы токов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (31.8)$$

Вычислим rot функции $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ из (31.8):

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{c} \int_V (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot dV' = \\
 &= -\frac{1}{c} \int_V \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \sum_{\beta=1}^3 \mathbf{e}_{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (x_{\alpha} - x'_{\alpha})^2}} \right) dV' = \\
 &= \frac{1}{c} \int_V \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \mathbf{e}_{\beta} \cdot \frac{(x_{\alpha} - x'_{\alpha}) \delta_{\alpha\beta}}{\left(\sum_{\gamma=1}^3 (x_{\gamma} - x'_{\gamma})^2 \right)^{3/2}} \right) dV' = \\
 &= \frac{1}{c} \int_V \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \cdot dV'.
 \end{aligned}$$

Последнее выражение справедливо для объемного распределения токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$. В случае набора N линейных токов (проводников с током) это выражение легко преобразуется к виду $(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot dV' = I_n \cdot dl_n)$

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^N I_n \int_{L_n} \frac{d\mathbf{l}_n \times \mathbf{r}_n}{r_n^3}, \quad (31.9)$$

где dl_n — элемент длины n -го тока, r — расстояние от этого элемента до точки наблюдения. Как видим, мы пришли к выражению (28.4), проинтегрированному по длинам L_n всех токов и просуммированному по всем токам. Тем самым показано, что rot вектора-потенциала (31.8) дает магнитное поле, удовлетворяющее закону Био–Савара.

Отсюда, как и из (31.7), следует, что в гауссовой системе единиц потенциалы $\mathbf{A}$ и ϕ имеют одинаковую размерность: $[q/r] = [I/c]$ (символ $[]$ — знак размерности). Отметим, что нужно четко проводить различие между координатами поля (радиус-вектор $\mathbf{r}$) и координатами источников поля — токов (радиус-вектор $\mathbf{r}'$).

Соотношение (31.7) между потенциалами выполняется и в общем случае, если под $\mathbf{v}$ понимать некоторую среднюю скорость движения заряженных частиц. Это соотношение полезно при различных оценках.

Напомним, что выражение (31.8) было получено только для стационарного (постоянного во времени) поля в нерелятивистском случае. В действительности оно справедливо также и для полей, достаточно медленно изменяющихся во времени. Такие поля называются *квазистационарными*. Как отмечалось выше (§ 29), отклонение от стационарного выражения (31.8) связано с запаздыванием поля. Поэтому поле можно считать квазистационарным, если его запаздывание не существенно. Пусть τ — характерное время (период) изменения поля, а a — характерный размер системы токов, создающих это поле. Тогда условие квазистационарности можно записать в виде

$$\tau \gg a/c, \text{ или } a \ll \lambda, \quad (31.10)$$

где $\lambda = c\tau$ — длина волны поля.

Вектор-потенциал $\mathbf{A}$ является вспомогательной величиной, и при заданном H его выбор неоднозначен. Действительно, согласно (31.2), величина H не изменится, если произвести преобразование

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r}), \quad (31.11)$$

где $f(\mathbf{r})$ — произвольная скалярная функция: $\text{rot}(\nabla f) = (\nabla \times \nabla f) \equiv 0$. Выбор конкретного вида $f(\mathbf{r})$, а следовательно, и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называется калибровкой потенциала, а соотношение (31.11) — *калибровочным преобразованием*. В частности, соотношение (31.8) справедливо только при определенной калибровке потенциала, которая называется *лоренцевской* (см. (32.7) ниже).

Задача IV.8. Найти вектор-потенциал магнитного поля прямого тока (рис. IV.1).

Запишем выражение (31.8) в декартовой системе координат, ось z которой совпадает с осью проводника, а точка наблюдателя лежит в плоскости $z = 0$. Считаем, что ток I распределен по сечению проводника S равномерно, так что $\mathbf{j} = \mathbf{e}_z I/S$. Находим

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}_z I}{cS} \int_{-l}^l dz' \iint_S \frac{dx' \cdot dy'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z'^2}}.$$

Считаем, что проводник тонкий ($x' \ll x, y' \ll y$). Тогда

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}_z I}{c} \cdot 2 \int_0^l \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z')^2}} = \mathbf{e}_z \frac{2I}{c} \cdot \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Здесь $2l$ — длина проводника. Как видим, вектор-потенциал логарифмически расходитсЯ при $l \rightarrow \infty$ (сравни (7.12)). Как и в примере с заряженным цилиндром,

магнитное поле здесь всюду конечно. Подставив полученное выражение для $\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$ в (31.4), получим

$$H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = -\frac{2I}{c} \left(\frac{\rho}{(l + \sqrt{l^2 + \rho^2})\sqrt{l^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\rho} \right) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{2I}{c\rho},$$

как и в (28.5).

§ 32. Основные уравнения магнитного поля

При вычислении магнитного поля иногда удобно пользоваться не интегральным соотношением для вектора-потенциала (31.8), а дифференциальными уравнениями для $\mathbf{A}$ или $\mathbf{H}$.

Одно такое уравнение может быть написано сразу:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (32.1)$$

Оно выражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов. Поскольку, однако, в это уравнение не входят источники магнитного поля — токи, его недостаточно для вычисления $\mathbf{H}$. В этом состоит отличие магнитного поля от электрического, где соответствующее уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ позволяет вычислить поле по заданному распределению зарядов.

Второе основное уравнение получим вначале для вектора-потенциала. Связь между потенциалами (31.7) наводит на мысль, что уравнение для A должно быть похоже на уравнение для φ . Вычислим поэтому $\Delta \mathbf{A}$ с помощью выражения (31.8). Поскольку оператор Лапласа Δ действует на координаты точки наблюдения $\mathbf{r}$, находим

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{c} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (32.2)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (8.5): $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$. Полученное уравнение для вектора-потенциала называется *основным уравнением магнитного поля*:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (32.3)$$

Найдем теперь уравнение для напряженности магнитного поля. Для этого вычислим его ротор (см. П. I.7, а):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla, \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (32.4)$$

Найдем сначала $(\nabla, \mathbf{A}) = \operatorname{div} \mathbf{A}$. Для этого снова воспользуемся выражением (31.8) и учтем, что, как и при выводе (32.2), оператор div действует на координаты $\mathbf{r}$, а оператор div' — на координаты $\mathbf{r}'$:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int dV' \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{c} \int dV' \left(-\operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (32.5)$$

Мы заменили здесь div на div' , т. е. дифференцирование по $\mathbf{r}$ на дифференцирование по $\mathbf{r}'$, чтобы выделить полную дивергенцию, интеграл от которой по объему преобразуется в поверхностный и стремится к нулю на достаточно далекой поверхности (ср.: § 9, вывод (9.4)). Оставшийся интеграл преобразуем, используя уравнение непрерывности: $\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}')$. В результате, с учетом (8.1), получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \frac{dV'}{r} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (32.6)$$

Обратим внимание на то, что это уравнение для потенциалов вытекает фактически из закона сохранения заряда, т. е. уравнения непрерывности, и очень похоже на него по форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (32.7)$$

Подставляя отсюда значение $\operatorname{div} \mathbf{A}$ в (32.4), с помощью уравнения (32.2), а также соотношения $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ приходим к уравнению для магнитного поля в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (32.8)$$

Это уравнение также называется *основным уравнением магнитного поля*, а уравнение (32.7) — *калибровкой Лоренца* для потенциалов.

Неожиданно мы достигли большего, чем искали. Мы хотели найти связь между магнитным полем и током, а получили связь между магнитным и электрическим полями. Оказалось, что источником магнитного поля является не только электрический ток, но и изменение электрического поля. Последний эффект был предсказан Максвеллом (1864 г.), правда,

из совсем других соображений. К тому же связь магнитного поля с током настолько укоренилась в сознании физиков, что Максвелл назвал этот дополнительный член *«током смещения»*:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (32.9)$$

Напомним, что полученные уравнения справедливы только в квазистационарном приближении. Интересно отметить, однако, что уравнения (32.8), так же, как и (32.7), оказываются точными (см. § 45). Это связано с компенсацией двух приближений: дополнительного слагаемого в уравнении для вектора-потенциала (32.3) и дополнительного члена в уравнении для электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ (см. § 45). Обе поправки порядка $(v/c)^2$, т. е. выходят за рамки квазистационарного приближения.

§ 33. Закон сохранения циркуляции магнитного поля. Лапласово поле

Поскольку силовые линии магнитного поля замкнуты, важной характеристикой поля является так называемая циркуляция

$$\Gamma = \oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}), \quad (33.1)$$

где интеграл берется по некоторому замкнутому контуру Γ . Циркуляция магнитного поля формально аналогична электродвижущей силе для электрического поля.

Воспользуемся теперь теоремой Стокса

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{H}, d\mathbf{S}), \quad (33.2)$$

где S — любая поверхность, ограниченная контуром Γ . Подставляя сюда выражение для $\text{rot } \mathbf{H}$ из уравнения (32.8), найдем

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} I_S, \quad (33.3)$$

причем полный ток через поверхность

$$I_S = \int_S (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}, d\mathbf{S}) \quad (33.4)$$

включает в себя как обычный ток с плотностью $\mathbf{j}$, так и «ток смещения» (32.9).

Название «закон сохранения» для (33.3) несколько условно и не является общепринятым; оно подчеркивает независимость циркуляции от выбора контура Γ при условии, что он охватывает один и тот же полный ток.

Выражение (33.3) дает среднее поле по замкнутому контуру:

$$\langle H \rangle_{\Gamma} \equiv \frac{1}{l} \oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi I_s}{cl}. \quad (33.5)$$

В случае симметрии системы это позволяет полностью вычислить поле (см. задачи IV.9–IV.11 ниже).

Циркуляция магнитного поля измеряется в гаусс-сантиметрах (система Гаусса) или в ампер-витках (СИ): $1 \text{ А} \cdot \text{в} = 0,4\pi \text{ Э} \cdot \text{см} \approx 1,26 \text{ Э} \cdot \text{см}$.

Задача IV.9. Найти поле прямого тока с помощью уравнения (33.3).

Выбирая в качестве замкнутого контура окружность, центр которой лежит на оси проводника (силовая линия), получим из (33.5) $H_{\phi}(\rho) = \langle H_{\phi} \rangle = 2I/c\rho$. Это полностью совпадает с (28.5), но вычисления здесь значительно проще.

Задача IV.10. Найти поле тороидального соленоида.

В качестве контура выберем окружность, лежащую внутри тора, с центром на оси симметрии и радиусом ρ . Полный ток через площадь контура равен IN , где I — ток в обмотке, а N — число ее витков. Предполагая аксиальную симметрию поля, получим $H_{\phi} = 4\pi NI/(cl) = 2NI/c\rho$, где $l = 2\pi\rho$ — длина силовой линии. Для аксиальной симметрии поля необходимо выполнение двух условий. Во-первых, обмотка тора должна быть равномерной; во-вторых, шаг обмотки должен быть много меньше малого радиуса тора r (см. следующую задачу).

Первое из выражений применимо приближенно также к прямому соленоиду длины $l \gg r$. В этом случае поле быстро падает на концах соленоида (на расстоянии $\sim r$), так что циркуляция определяется с точностью $\sim r/l$ внутренней областью соленоида (ср. задача IV.3).

Задача IV.11. Вычислить вклад в циркуляцию магнитного поля прямого соленоида длины $2L$ участка поля внутри соленоида (см. задачу IV.3).

Интегрируя выражение (28.8) по z в пределах от $-L$ до L , находим

$$\int_{-L}^L H_z(z) \cdot dz = \frac{4\pi NI}{c} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a}{2L}\right)^2} - \frac{a}{2L} \right) \xrightarrow{a \ll L} \frac{4\pi NI}{c} \cdot \left(1 - \frac{a}{2L} + \frac{a^2}{8L^2} \pm \dots \right).$$

Отсюда следует, что циркуляция Γ (33.1) вектора $\mathbf{H}$ по контуру, охватывающему все витки соленоида, отличается от интеграла по его внутренней части на величину

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} \approx -\frac{a}{2L}, \quad a \ll L.$$

Задача IV.12. Найти поле вдали от плоской периодической решетки параллельных проводников (рис. IV.6).

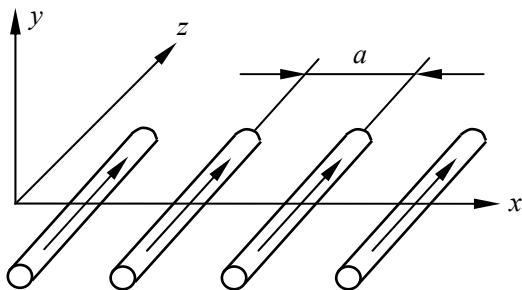


Рис. IV.6. Периодическая одномерная решетка

На расстояниях, значительно превышающих период решетки, поле можно считать однородным (см. ниже). Тогда с помощью (33.5) находим $H_0 = 2\pi I/(ca)$. Это выражение определяет постоянную составляющую поля. Для нахождения переменной составляющей воспользуемся уравнением Лапласа (32.3) (вне токов). Так как все токи имеют одно и то же направление, у вектора $\mathbf{A}$ есть только одна компонента $A_y(x, z)$ (см. (31.8)), которая в силу симметрии не зависит от y :

$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = 0$. Это уравнение решаем *методом разделения переменных*

(см. § 11): $A_y(x, z) = X(x) \cdot Z(z)$. Зависимость $X(x)$ определим из условия периодичности поля, которому удовлетворяет набор функций $X(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{a} + \varphi_n\right)$,

где n — любое целое число, а φ_n — некоторые фазы. Подставляя полученное выражение в уравнение Лапласа, найдем $\frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = \left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2$, откуда $Z_n(z) =$

$= \beta_n \exp(-2\pi n z/a)$.

Мы оставили здесь только решение, затухающее на бесконечности. Видно, что наиболее медленно убывающее решение, определяющее поле на больших расстояниях, соответствует $n = 1$. Член с $n = 0$ дает постоянный потенциал, так что отвечающее ему поле равно нулю. Полное решение задачи, включающее определение

коэффициентов α_n, β_n , требует применения фурье-анализа (см. § 77). Таким образом, переменная часть магнитного поля убывает экспоненциально на характерном расстоянии $a/2\pi$.

Задача IV.13. На поверхности длинного цилиндра радиуса a уложены параллельно его оси N одинаковых тонких проводников с током I . Направления токов в проводниках и их распределение по поверхности цилиндра выбраны так, что плотность тока на поверхности цилиндра распределена по закону $j(\varphi) = j_0 \cdot \cos p\varphi$, где φ — азимутальный угол, p — целое число (рис. IV.7). Найти значения магнитных полей, создаваемых обмотками.

Константу j_0 получим, проинтегрировав модуль плотности тока по углу φ :

$$NI = j_0 \int_0^{2\pi} |\cos p\varphi| \cdot d\varphi = j_0 2p \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha \cdot d\alpha = 4j_0 p, \quad j_0 = \frac{NI}{4p}.$$

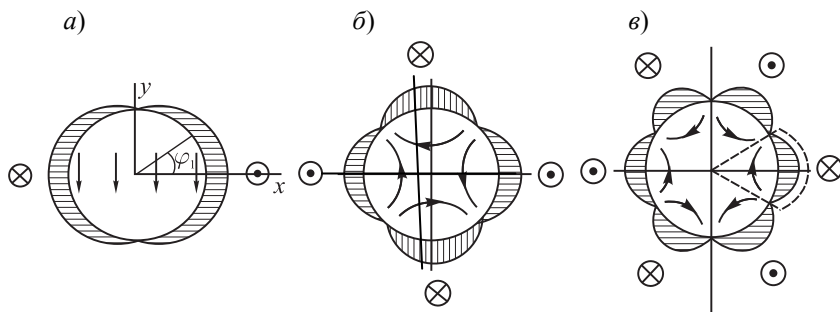


Рис. IV.7. Распределение плотности тока в мультипольных обмотках: а) $p = 1$ (диполь); б) $p = 2$ (квадруполь); в) $p = 3$ (секступоль). Значки $\odot$ («на нас») и $\otimes$ («от нас») показывают направление тока

Все токи направлены вдоль оси цилиндра, которую выберем в качестве оси z цилиндрической системы координат (r, φ, z) . Из (31.8) следует, что в данном случае отлична от нуля только z -компонента вектора-потенциала. Далее используем, как и в предыдущей задаче, метод разделения переменных, записав уравнение Лапласа для A_z -компоненты вектора-потенциала в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = 0.$$

A_z , очевидно, зависит только от поперечных к оси координат ρ, φ . Подставив сюда $A_z(\rho, \varphi) = \mathcal{R}(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$ и разделив переменные, запишем:

$$\frac{1}{\mathcal{R} \cdot \rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} \right) = - \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \kappa^2,$$

где κ — постоянная. Уравнение для $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'' + \kappa^2 \Phi = 0.$$

Есть уравнение осциллятора, решение которого хорошо известно:

$$\Phi(\varphi) = A \cdot \cos \kappa \varphi + B \cdot \sin \kappa \varphi, \quad A, B — \text{постоянные.}$$

Решение уравнения для $R(r)$

$$\mathcal{R}'' + \frac{\mathcal{R}'}{\rho} - \kappa^2 \mathcal{R} = 0$$

ищем в виде $\mathcal{R}(r) = C \cdot \rho^n$. Подстановка в уравнение дает характеристическое уравнение

$$n(n-1) + n - \kappa^2 = 0,$$

откуда

$$n = \pm \kappa, \quad \mathcal{R}(r) = C \rho^\kappa + D \rho^{-\kappa}.$$

Решение с $n = -\kappa$ (второе слагаемое) следует отбросить, положив $D = 0$, поскольку поле при $r \rightarrow 0$ имеет конечное значение. Переобозначив константы, запишем полное решение:

$$A_z(\rho, \varphi) = \rho^\kappa (A \cdot \cos \kappa \varphi + B \cdot \sin \kappa \varphi).$$

Значение κ найдем из условия непрерывности потенциала на внутренней границе обмотки ($r \rightarrow R$). Очевидно (сравните задачи I.19 и III.14), потенциал на границе должен повторять зависимость плотности тока от угла φ , т. е. $A_z(r, \varphi) \propto \cos p\varphi$.

Отсюда

$$\kappa = p, \quad B = 0, \quad A_z(\rho, \varphi) = A \rho^p \cdot \cos p\varphi.$$

Константу A найдем, вычислив вначале значение магнитного поля (см. (31.4)):

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = -\mathbf{e}_r A \rho^{p-1} \cdot p \cdot \sin p\varphi - \mathbf{e}_\varphi A \rho^{p-1} \cdot p \cdot \cos p\varphi,$$

или

$$H_\rho = -A p \rho^{p-1} \cdot \sin p\varphi, \quad H_\varphi = -A p \rho^{p-1} \cdot \cos p\varphi.$$

Теперь вычислим циркуляцию магнитного поля по контуру, охватывающему витки, лежащие (например) в секторе $-\pi/2p \leq \varphi \leq \pi/2p$. В качестве границ контура выберем радиусы, исходящие из начала координат под углами $\pm \pi/2p$, и произвольную кривую, охватывающую проводники этого сектора снаружи (см. рис. IV.7, в). Вкладом в циркуляцию этого наружного участка контура можно пренебречь (как и в случае с полем длинного соленоида, задача IV.11). Запишем

$$\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \int_0^a H_\rho(\rho, \varphi_1) \cdot d\rho + \int_a^0 H_\rho(\rho, \varphi_2) \cdot d\rho = \frac{4\pi}{c} \cdot \int_{-\pi/2p}^{\pi/2p} j(\varphi) \cdot d\varphi.$$

Подставив сюда полученные выше значения $H_r(\rho, \varphi)$ и $j(\varphi)$, находим

$$A = -\frac{\pi NI}{c\rho^2 a^p},$$

что дает

$$H_\rho = \frac{\pi NI}{c\rho} \cdot \frac{\rho^{p-1}}{a^p} \cdot \sin p\varphi, \quad H_\varphi = \frac{\pi NI}{c\rho} \cdot \frac{\rho^{p-1}}{a^p} \cdot \cos p\varphi.$$

Декартовы компоненты магнитного поля

$$H_x = H_\rho \cdot \cos \varphi - H_\varphi \cdot \sin \varphi, \quad H_y = H_\rho \cdot \sin \varphi + H_\varphi \cdot \cos \varphi$$

для мультипольного поля рассматриваемой геометрии проводников равны

$$H_x = \frac{\pi NI}{c\rho} \cdot \frac{\rho^{p-1}}{a^p} \cdot \sin(p-1)\varphi, \quad H_y = \frac{\pi NI}{c\rho} \cdot \frac{\rho^{p-1}}{a^p} \cdot \cos(p-1)\varphi.$$

Подставив сюда $x = \rho \cdot \cos \varphi$, $y = \rho \cdot \sin \varphi$, находим в трёх частных случаях, представленных на рис. IV.7, следующие выражения для полей мультиполей:

а) $p = 1$ (диполь): $H_x = 0$, $H_y = \frac{\pi NI}{ca}$ — однородное вертикальное поле;

б) $p = 2$ (квадруполь): $H_x = \frac{\pi NI}{2c} \cdot \frac{y}{a^2}$, $H_y = \frac{\pi NI}{2c} \cdot \frac{x}{a^2}$ — квадрупольное поле

с градиентом $G = \frac{\pi NI}{2ca^2}$ (сравните: задача IV.4);

в) $p = 3$ (секступоль): $H_x = \frac{2\pi NI}{3c} \cdot \frac{xy}{a^3}$, $H_y = \frac{\pi NI}{3c} \cdot \frac{x^2 - y^2}{a^3}$ — (ср.: задача

IV.4, $x, y \ll d$).

Отметим, что знаки компонент поля зависят от выбора направлений тока в проводниках.

В устройствах электронной оптики и технике ускорителей заряженных частиц мультипольные магнитные поля широко применяются для фокусирования пучков частиц и обеспечения устойчивости их (частиц) траекторий. Такие электронно-оптические элементы имеют, естественно, ограниченную протяженность вдоль оси пучка. Поэтому в них проводники с противоположными направлениями токов соединяют попарно, создавая *седлообразные витки* (рис. IV.8), которые, в свою очередь, образуют седлообразную обмотку. Ясно, что число витков в обмотке w вдвое меньше полного числа проводников N , использованного в предыдущей задаче (т. е. $N = 2w$ в формулах для поля). Дуги седлообразных витков нарушают «идеальность» геометрии мультипольного поля (задача IV.14).

Задача IV.14. Оценить поле на оси седлообразной обмотки, состоящей из двух витков, дуги которых образуют окружности радиуса a . Прямые проводники витков с током одинакового направления отстоят друг от друга на расстояние $2h$ (рис. IV.8, а).

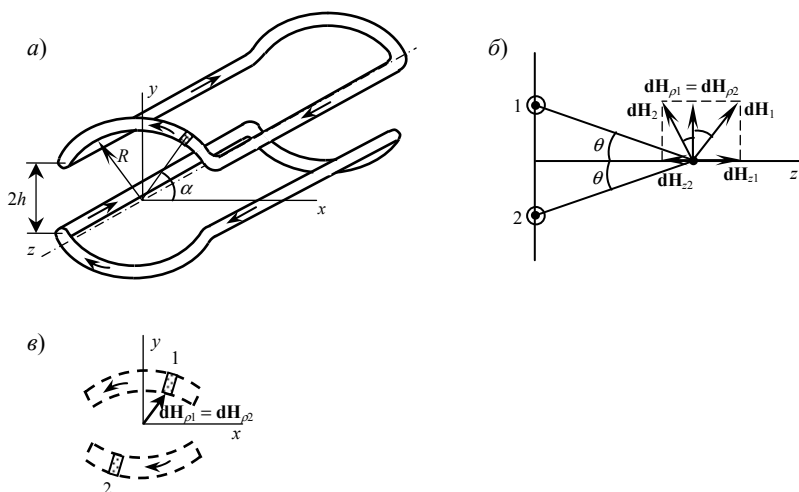


Рис. IV.8. а) схема обмотки из двух седлообразных витков, расположенных на поверхности цилиндра радиуса R ; б) вектора поля от противоположных элементов верхней (1) и нижней (2) дуг в точке $(0, z)$ плоскости (ρ, z) , наклоненной под углом α ; в) то же для плоскости (x, y) , пересекающей ось z в точке наблюдения (дуги показаны пунктиром, так как они лежат в плоскости $z = 0$). Стрелками показаны направления токов

Воспользуемся решением задачи IV.2 (рис. IV.2) — выражениями для компонент поля на оси кольца $dH_z(\theta)$ и $dH_\rho(\theta)$. Теперь нужно проинтегрировать эти функции, с учетом направлений токов, по дугам $\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi - 2\alpha_0$ и $\pi + \alpha_0 \leq \alpha \leq 2\pi - \alpha_0$, где

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{h}{a}.$$

Как видно из рис. IV.8, б, z -компоненты полей от диаметрально противоположных элементов дуг 1 и 2 взаимно уничтожаются, так что поле элементов этих дуг имеет в точке $(0, z)$ только радиальную компоненту $dH_\rho(z)$. Суммирование этих компонент (интегрирование по углу α) дает только y -составляющую вектора $\mathbf{H}$ (рис. IV.8, в):

$$H_y(z) = \frac{Iz}{cr^3} \cdot a \left(\int_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_0} \sin \alpha \cdot d\alpha + \int_{\pi + \alpha_0}^{2\pi - \alpha_0} \sin \alpha \cdot d\alpha \right), \quad r = \sqrt{a^2 + z^2}.$$

Отсюда находим

$$H_y(z) = \frac{4I}{c} \cdot \frac{z\sqrt{a^2 - h^2}}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Это поле обращается в нуль в плоскости дуг и стремится к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$. Оно максимально при $z = \pm a/\sqrt{2}$, где

$$(H_y)_{\max} = \frac{8I}{3\sqrt{3}c} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a^2}.$$

Понятие циркуляции полезно не только для магнитного поля, но и для его вектора-потенциала. Действительно, векторы **A** и **H** удовлетворяют аналогичным уравнениям:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (33.6)$$

Поэтому теорема Стокса дает

$$G = \oint (\mathbf{A}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{H}, d\mathbf{S}) = \Phi_S. \quad (33.7)$$

Последняя величина называется *магнитным потоком* (через поверхность S).

Аналогия (33.6) полезна также для наглядного представления картины линий поля **A**. Например, в случае аксиально-симметричного магнитного поля сразу ясно, что вектор **A** имеет только одну составляющую $A_\varphi(\rho, z)$,

$$A_\varphi = \frac{\Phi_z(\rho, z)}{2\pi\rho}, \quad \Phi_z = 2\pi \int_0^\rho H_z(\rho, z) \rho d\rho. \quad (33.8)$$

Теорему Стокса (33.2) можно использовать также для нового определения потенциальности электрического поля, а именно:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (33.9)$$

Действительно, в этом случае работа электрического поля по любому замкнутому контуру $\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 0$.

Для магнитного поля условие $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ не выполняется во всем пространстве. Однако в отдельных областях это условие может выполняться, и тогда допустимо описание магнитного поля с помощью *скалярного потенциала* (31.1). Особенно полезно применение скалярного потенциала в задачах о магнитном поле в среде (глава V). Скалярный потенциал подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta \psi = 0, \quad (33.10)$$

а само поле в этом случае принято называть *лапласовым*.

В ряде случаев можно найти приближенное значение лапласова магнитного поля, разлагая функции, описывающие поле, по малому параметру.

Покажем это вначале для поля, обладающего аксиальной симметрией. Поле аксиальной симметрии имеет только две компоненты — радиальную H_ρ и осевую H_z , а азимутальная тождественно равна нулю (поскольку скалярный потенциал $\psi(\mathbf{r})$ в этом случае не зависит от азимутальной координаты φ , и $(\nabla \psi(\mathbf{r}))_\varphi \equiv 0$).

Запишем уравнения поля в цилиндрической системе координат:

$$\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\rho) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (33.11)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) = 0.$$

Отсюда находим

$$H_\rho(\rho, z) = -\frac{1}{\rho} \int_0^\rho \frac{\partial H_z(\rho', z)}{\partial z} \cdot \rho' \cdot d\rho', \quad (33.12)$$

$$H_z(\rho, z) = \int_0^\rho \frac{\partial H_\rho(\rho', z)}{\partial z} \cdot d\rho' + H_z(0, z). \quad (33.13)$$

Здесь учтено условие $H_\rho(0, z) = 0$, следующее также из азимутальной симметрии поля. В нулевом приближении поле вблизи оси симметрии имеет только одну компоненту

$$H^{(0)}(\mathbf{r}) = H_z(0, z) \equiv H_0(z),$$

где $H_0(z)$ — значение поля на оси симметрии. В первом приближении из (33.12) получим

$$H_\rho^{(1)} = -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{dH_0}{dz}$$

и, подставив этот результат в подынтегральное выражение (33.13), имеем

$$H_z^{(1)} = H_0(z) - \frac{\rho^2}{4} \cdot \frac{d^2 H_0}{dz^2}. \quad (33.14)$$

Затем, подставив (33.14) в (33.12) и полученное выражение в (33.13), приходим к выражениям для аксиально-симметричного поля во втором приближении по ρ :

$$\begin{aligned} H_\rho^{(2)}(\rho, z) &= -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{dH_0(z)}{dz} + \frac{\rho^3}{16} \cdot \frac{d^3 H_0(z)}{dz^3}, \\ H_z^{(2)}(\rho, z) &= H_0(z) - \frac{\rho^2}{4} \cdot \frac{d^2 H_0(z)}{dz^2} + \frac{\rho^4}{64} \cdot \frac{d^4 H_0(z)}{dz^4}. \end{aligned} \quad (33.15)$$

Другой важный случай — поле плоской симметрии, которое также имеет две ненулевые компоненты. Пример системы, имеющей такое поле, — соленоид прямоугольного сечения, один из поперечных размеров которого много меньше другого. Поле такого соленоида (рис. IV.9) вблизи оси z имеет только y - и z -компоненты.

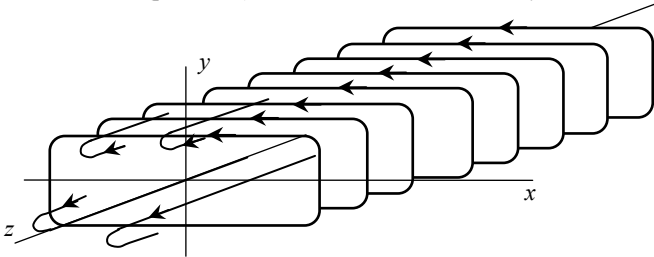


Рис. IV.9. Плоский соленоид

Повторив процедуру, аналогичную (33.11)–(33.15), получим разложение функции $\mathbf{H}(y, z)$ для плоского поля:

$$\begin{aligned} H_y^{(2)}(y, z) &= -y \cdot \frac{dH_0(z)}{dz} + \frac{\rho^3}{6} \cdot \frac{d^3 H_0(z)}{dz^3}, \\ H_z^{(2)}(y, z) &= H_0(z) - \frac{y^2}{4} \cdot \frac{d^2 H_0(z)}{dz^2} + \frac{y^4}{24} \cdot \frac{d^4 H_0(z)}{dz^4}. \end{aligned} \quad (33.16)$$

В данном случае $H_0(z)$ есть поле в плоскости симметрии ($y = 0$). Подобные выражения можно написать и для разложения скалярного потенциала. Проще всего это сделать, проинтегрировав в (33.15) и (33.16) поперечную компоненту поля по поперечной координате или продольную компоненту по продольной координате. В обоих случаях получим

$$\begin{aligned} \psi(\rho, z) &= \psi_0(z) - \frac{\rho^2}{4} \cdot \frac{d^2 \psi_0}{dz^2} + \frac{\rho^4}{64} \cdot \frac{d^4 \psi_0}{dz^4}, \\ \psi(y, z) &= \psi_0(z) - \frac{y^2}{2} \cdot \frac{d^2 \psi_0}{dz^2} + \frac{y^4}{24} \cdot \frac{d^4 \psi_0}{dz^4}, \\ \psi_0(z) &= - \int_0^z H_0(z') \cdot dz' + C. \end{aligned} \quad (33.17)$$

Можно поступить и наоборот: из уравнения Лапласа для потенциала найти приближенные значения (33.17) и затем, продифференцировав их, получить выражения (33.16) и (33.17).

Подчеркнем, что такие же выражения справедливы для *лапласова электрического поля* (при замене H на E).

Задача IV.15. Центры двух колец радиуса a с током I расположены на общей оси, их плоскости параллельны и отстоят друг от друга на расстояние $2h$. Найти значения h , при котором размер области однородности поля в пространстве между кольцами максимален. Получить выражения для компонент поля в этой области при полученном значении h .

Выберем начало цилиндрической системы координат (ρ, z) в точке, равноудаленной от плоскостей колец, а ось z совпадающей с общей осью колец. Суммарное поле двух колец на оси z при таком выборе координат описывается выражением (см. (28.7))

$$H_0(z) = \frac{2\pi I \cdot a^2}{c} \cdot f(z), \quad f(z) = \frac{1}{[a^2 + (z-h)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (z+h)^2]^{3/2}}.$$

Произведем разложение функции $f(z)$ вблизи точки $z=0$ по малому параметру $z \ll a, h$. Как будет видно в дальнейшем, нам потребуется разложение функции

$$(1 \pm \varepsilon)^{3/2} = 1 \mp \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{15}{8}\varepsilon^2 \mp \frac{35}{16}\varepsilon^3 + \dots$$

Вначале ограничимся членами порядка ε^2 . Находим

$$\begin{aligned} f(z) &= (a^2 + h^2 - 2hz + z^2)^{-3/2} + (a^2 + h^2 + 2hz + z^2)^{-3/2} \approx \\ &\approx (a^2 + h^2)^{-3/2} \cdot \left(2 + 3 \frac{4h^2 - a^2}{(a^2 + h^2)^2} \cdot z^2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда и получаем условие максимальности размеров однородного поля вблизи точки $\rho = z = 0$:

$$2h = a,$$

т. е. расстояние между кольцами равно их радиусу — так называемые *кольца Гельмгольца* (H. von Helmholtz, 1821–1894 гг.). Поле в центре колец Гельмгольца ($z = 0$)

$$H_0(0) \Big|_{2h=a} = \frac{32\pi}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{I}{ca}.$$

Поле колец Гельмгольца вблизи их центра найдем, вычислив кубичный член разложения:

$$f(z) \approx (a^2 + h^2)^{-3/2} \cdot \left(2 - \frac{35 \cdot 3}{8} \cdot \frac{h^2 z^4}{(a^2 + h^2)^3} \right) \Bigg|_{h=a/2},$$

откуда

$$H_0(z) = H_0(0) \cdot \left(1 - \frac{35}{18} \cdot \frac{z^4}{a^4} \right).$$

Используя разложения поля (33.15), получим

$$H_\rho(\rho, z) \approx \frac{35}{9} \cdot \frac{\rho z^3}{a^4} \cdot H_0(0),$$

$$H_z(\rho, z) \approx H_0(0) \cdot \left(1 + \frac{35}{18} \cdot \frac{(3\rho^2 - z^2)z^2}{a^4} \right).$$

Полученные выражения показывают, что неоднородность поля вблизи колец Гельмгольца не превышает значения

$$\delta = \max \left\{ \frac{H_\rho(\rho, z)}{H_0(0)}, \frac{H_z(\rho, z) - H_0(0)}{H_0(0)} \right\}$$

внутри области

$$\rho \sim z \sim \delta^{1/4} \cdot a.$$

Например, выбрав $\delta = 10^{-2}$, имеем область поля с такой неоднородностью размером $\rho \sim z \sim 0,3a$.

Задача IV.16. Найти уравнение силовой линии магнитного поля соленоида конечной длины (задача IV.3) в параксиальном приближении.

Уравнение силовой линии магнитного поля имеет тот же вид, что и электрического, (4.1), (4.2), с заменой компонент вектора **E** на соответствующие компоненты вектора **H**. В данном случае поле аксиально симметрично, т. е. имеет две ненулевые компоненты — H_z (28.8) и (см. (33.15))

$$H_\rho \approx -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{dH_z}{dz} \Big|_{\rho=0}.$$

В цилиндрических координатах уравнение силовой линии имеет вид

$$\frac{d\rho}{H_\rho} = \frac{dz}{H_z}, \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dz} = \frac{H_\rho}{H_z} \approx -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{1}{H_z} \cdot \frac{dH_z(z)}{dz}.$$

Отсюда, используя (28.8), находим

$$\rho(z) = \rho(0) \cdot \sqrt{\frac{H_z(0)}{H_z(z)}} = \rho(0) \cdot \left[\frac{\sqrt{a^2 + L^2}}{2L} \cdot \left(\frac{L-z}{\sqrt{a^2 + (L-z)^2}} + \frac{L+z}{\sqrt{a^2 + (L+z)^2}} \right) \right]^{1/2}.$$

При $z \sim a \ll L$

$$\rho(z) \approx \rho(0) \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{z^2}{L^2} \right).$$

Задача IV.17. По оси длинного соленоида ($L \gg a$) проложен тонкий прямолинейный проводник с током I_0 . Найти уравнение силовой линии суммарного поля соленоида и проводника.

Суммарное поле имеет две компоненты (см. (28.5) и (28.8))

$$H_\varphi = \frac{2I_0}{c\rho}, \quad H_z = \frac{2\pi nI}{c},$$

где $n = N/2L$ — число витков соленоида на единицу длины $2L$, I — ток соленоида. Уравнение силовой линии получим аналогично предыдущей задаче:

$$\frac{\rho d\varphi}{dz} = \frac{H_{\varphi}}{H_z} = \frac{I_0}{\pi n I \rho}.$$

Отсюда

$$\varphi(z) = \frac{I_0}{\pi n \rho^2 I} \cdot z.$$

Это уравнение спирали радиуса ρ с шагом

$$\lambda = \frac{2\pi^2 n \rho^2 I}{I_0}.$$

§ 34. Магнитный диполь

Найдем приближенно магнитное поле ограниченной системы токов на расстояниях, значительно превышающих размер системы ($R \gg a$). Для этого исследуем мультипольное разложение вектора-потенциала, аналогичное разложению скалярного потенциала электростатического поля в § 5. Малым параметром разложения является здесь также, как и в § 5, отношение a/R . Поместим начало координат где-нибудь внутри системы и запишем (см. рис. I.2)

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \dots \quad (34.1)$$

Здесь поле вычисляется в точке с радиусом-вектором $\mathbf{R}$, а координаты элемента тока характеризуются вектором $\mathbf{r}'$ ($r' \sim a$).

Нулевой член разложения $\mathbf{A}_0$ аналогичен полю заряда в электростатике ($\mathbf{r}' = 0$):

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{cR} \int \mathbf{j} dV'. \quad (34.2)$$

В общем случае он не равен нулю. Например, для точечного заряда $\mathbf{A}_0 = e\mathbf{v}/cR$ (31.5). Однако для стационарного распределения токов всегда $\mathbf{A}_0 = 0$.

Для доказательства разобьем систему токов на отдельные замкнутые (в силу ограниченности системы) трубки тока с постоянным током вдоль каждой из них. Для достаточно тонкой трубки тока можно написать $\mathbf{j}dV = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} \cdot dS = I d\mathbf{r}$, где l — координата вдоль трубки, а dS — площадь ее поперечного сечения; вектор $d\mathbf{r}$ направлен вдоль трубки ($|d\mathbf{r}| = dl$). В результате имеем

$$\int \mathbf{j}dV' = \sum_{\text{ТТ}} I \oint d\mathbf{r} = 0, \quad (34.3)$$

где суммирование производится по всем трубкам тока (ТТ).

Такой же результат получается и для среднего по времени поля:

$$\overline{\mathbf{A}_0} = \frac{1}{cR} \int \bar{\mathbf{j}}dV' = 0, \quad (34.4)$$

поскольку средняя плотность тока $\bar{\mathbf{j}}$ не зависит от времени.

Следующий член мультипольного разложения запишем, повторяя процедуру, подробно разъясненную в § 5 (мелкий шрифт при выводе формул (5.2)):

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \cdot \left(\mathbf{r}', \nabla \frac{1}{R} \right) dV'. \quad (34.5)$$

Преобразуем подынтегральное выражение, обозначив для краткости $\nabla(1/R) = \mathbf{g}$. Как мы видели, суммирование по трубкам тока приводит к замене

$$\mathbf{j}dV \rightarrow I d\mathbf{r}, \quad (34.6)$$

после чего подынтегральное выражение в (34.5) можно выразить через двойное векторное произведение:

$$d\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{g}) = \mathbf{g} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{r}) + \mathbf{r}(\mathbf{g}, d\mathbf{r}).$$

Последнее слагаемое здесь снова преобразуется в выражение, содержащее исходное подынтегральное выражение, если выделить из него полный дифференциал:

$$\mathbf{r}(\mathbf{g}, d\mathbf{r}) = d\{\mathbf{r}(\mathbf{g}, \mathbf{r})\} - d\mathbf{r}(\mathbf{g}, \mathbf{r}).$$

При интегрировании по замкнутой трубке тока полный дифференциал дает нуль, так что его можно опустить. В результате получаем

$$d\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{g}) \rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{g} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{r}).$$

Целью всей этой несколько громоздкой операции было «вытащить» вектор $\nabla(1/R)$ из-под интеграла. Окончательно можно написать (ср. (5.2))

$$\mathbf{A}_1 = \nabla \frac{1}{R} \times \mathbf{m} \equiv \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (34.7)$$

где величина $\mathbf{m}$, называемая *магнитным моментом* системы, равна

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int dV' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) = \frac{1}{2c} \sum_{\text{тт}} I \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'. \quad (34.8)$$

Единицей измерения магнитного момента в СИ является $\text{А} \cdot \text{м}^2$, в гауссовой системе единица измерения магнитного момента специального названия не имеет. Связь между этими единицами:

$$1 [\text{Г}] = 1 \cdot 10^{-3} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

Это соотношение нетрудно получить, подставив в (34.10) ниже $I = 1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 [\text{Г}]$, $S = 1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ см}^2$, $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$.

Вектор-потенциал (34.7) аналогичен дипольному потенциалу электрического поля, а магнитный момент $\mathbf{m}$ — дипольному моменту $\mathbf{d}$ (5.2). Это становится особенно ясно, если вычислить соответствующее ему магнитное поле

$$\mathbf{H} = \nabla \times \left(\nabla \frac{1}{R} \times \mathbf{m} \right) = (\mathbf{m}, \nabla) \nabla \frac{1}{R} - \mathbf{m} \Delta \frac{1}{R}.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $1/R$ — потенциал точечного заряда, лапласиан которого $\Delta(1/R) = 0$ вне заряда (см. также (8.5)). При вычислении первого слагаемого учтем, что $(\mathbf{m}, \nabla)\mathbf{R} = \mathbf{m}^*$. Получим

$$\mathbf{H} = -(\mathbf{m}, \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{m}}{R^3} + \frac{3(\mathbf{R}, \mathbf{m})\mathbf{R}}{R^5}. \quad (34.9)$$

Это в точности совпадает по форме с выражением (5.5) для поля электрического диполя. Подчеркнем, что выражение (34.9), как и (5.5), справедливо при $R \gg a$.

Простейшим примером магнитного диполя является виток с током. Используя последнее выражение в (34.8), учтем, что интеграл по контуру витка

$$\oint \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' = 2S,$$

где вектор $\mathbf{S}$ равен по абсолютной величине площади витка и направлен по нормали к его плоскости параллельно вектору $\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}'$ (ось обтекания током контура S). Тогда

$$\mathbf{m} = \frac{IS}{c}, \quad (34.10)$$

где I — ток в витке.

Из сравнения поля такого витка с электрическим полем диполя видно, что они совпадают только на больших расстояниях.

Действительно, поле витка с током на его оси при $z \gg a$ равно

$$H_z = \frac{2\pi I}{c} \cdot \frac{a^2}{z^3} = \frac{2IS}{cz^3} = \frac{2\mathbf{m}}{z^3},$$

а из (34.9) при $\mathbf{R} \parallel \mathbf{m}$ находим

$$H_z = -\frac{\mathbf{m}}{R^3} + \frac{3\mathbf{m}}{R^3} = \frac{2\mathbf{m}}{z^3}$$

(ср.: задачу I.1 и текст за ней и задача IV.16 ниже).

Задача IV.18. Найти значение поля кольца радиуса a , с током I на расстояниях много больших a , в сферической системе координат (R, θ, φ) , полярная ось

^{*)} Это равенство легко получить, записав (см. § 5) $(\mathbf{m}, \nabla)\mathbf{R} = \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{m}_\alpha \frac{\partial R_\beta}{\partial x_\alpha}$.

которой совпадает с осью кольца, а начало координат находится в его центре (рис. IV.10).

Магнитный момент кольца с током

$$\mathbf{m} = (\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \frac{\pi a^2 I}{c}.$$

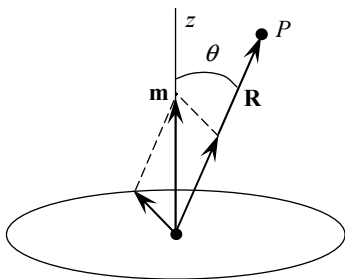


Рис. IV.10. К расчету поля кольца с током

Подстановка в (34.9) дает

$$H_r = \frac{2\mathbf{m} \cdot \cos \theta}{R^3}, \quad H_\theta = \frac{\mathbf{m} \cdot \sin \theta}{R^3},$$

$$|\mathbf{H}| = \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \cdot \frac{\mathbf{m}}{R^3}.$$

Максимум поля лежит на направлениях $\theta = 0, \pi$ (ось z). К этому результату мы вернемся в § 124.

Вблизи системы конфигурации электрического и магнитного полей качественно различны: при движении вдоль вектора дипольного момента магнитное поле не изменяет своего направления, в то время как электрическое поле на оси диполя направлено внутри и снаружи него в противоположные стороны (рис. I.1).

Зависит ли магнитный момент от выбора начала отсчета? При смещении последнего на вектор $\mathbf{a}$ магнитный момент изменяется на величину

$$\Delta \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{a} \times \mathbf{j} dV' = \frac{\mathbf{a}}{2c} \times \int \mathbf{j} dV'.$$

Но последний интеграл, как мы видели, обращается в нуль для стационарных токов или в среднем по времени. В электростатике это соответствует условию равенства нулю полного заряда системы.

Задача IV.19. Найти магнитный момент заряженной частицы, движущейся по круговой траектории в однородном магнитном поле.

Радиус круговой траектории частицы в магнитном поле $\mathbf{H}$ равен

$$r_e = \frac{m_0 v c}{e H},$$

где e , m_0 и v — заряд, масса и скорость частицы (см. (56.8)). В формуле (34.10) ток I , создаваемый частицей, движущейся по окружности радиуса r_e , и площадь S соответственно равны

$$I = \frac{ev}{2\pi r_e}, \quad S = \pi r_e^2.$$

Используя эти формулы, из (34.10) получим

$$\mathbf{m} = -\frac{w}{H} \cdot \left(\frac{\mathbf{H}}{H} \right).$$

Здесь учтены направления скорости частицы и центростремительной силы, создаваемой магнитным полем (29.1). Этой формуле можно придать и другой вид, записав первое выражение в (34.8) через механический момент частицы $\mathbf{M} = m_0 [\mathbf{r}_e \times \mathbf{v}]$ и плотность тока в виде $\mathbf{j} = ev \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t))$. Тогда, проделав интегрирование с учетом свойств δ -функции (§ 8, п. 4), находим

$$\mathbf{m} = \frac{e \mathbf{r}_e \cdot \mathbf{v}}{2c} = \frac{e}{2m_0 c} \cdot \mathbf{M}. \quad (34.11)$$

Таким образом, магнитный момент частицы пропорционален ее механическому моменту.

Выражение (34.11) показывает, что магнитный момент заряженной частицы пропорционален ее механическому моменту. Это естественно, поскольку магнитный момент частицы также, как и механический, связан с ее вращением. Коэффициент пропорциональности называется *гиромагнитным отношением*

$$g_0 = \frac{e}{2m_0 c}. \quad (34.12)$$

Для сложной системы зарядов гиромагнитное отношение зависит от структуры системы. Мы вернемся к этому вопросу в § 36.

Каждый следующий член мультипольного разложения (34.1) (квадрупольный ($\mathbf{A}_2$), октупольный ($\mathbf{A}_3$), ..., l -польный ($\mathbf{A}_l$)) отличается от пре-

дыдущего малым множителем $\sim a/R$. Если q — характерный заряд системы, а v — скорость его колебаний, то общая оценка членов мультипольного разложения (34.1) может быть записана в виде

$$A_l \sim \frac{q}{R} \left(\frac{a}{R} \right)^l \frac{v}{c}. \quad (34.13)$$

Она отличается от оценки для электрического потенциала (5.4) множителем v/c . Такое же соотношение будет иметь место и для полей, поскольку оба поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ получаются дифференцированием потенциалов по $\mathbf{R}$:

$$H_l \sim \frac{q}{R^2} \left(\frac{a}{R} \right)^l \frac{v}{c}. \quad (34.14)$$

§ 35. Взаимодействие диполя с магнитным полем

Взаимодействие любой системы токов с магнитным полем определяется силой Лоренца (28.3), (29.1), которую нужно проинтегрировать по всем токам:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) dV, \quad \mathbf{K} = \frac{1}{c} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) dV. \quad (35.1)$$

Здесь $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ — полные сила и момент силы соответственно.

Если бы магнитное взаимодействие удовлетворяло третьему закону Ньютона, то в (35.1) можно было бы оставить только внешнее поле, так как тогда все силы между элементами системы взаимно компенсировались бы. Однако мы знаем, что в общем случае для магнитного взаимодействия не выполняется третий закон Ньютона (см. § 28). Но для стационарной системы токов третий закон Ньютона справедлив, и полная сила и момент (35.1) определяются только внешним полем.

Если система токов характеризуется приближенно магнитным моментом, а внешнее поле почти однородно, общее выражение (35.1) можно существенно упростить. В этом случае появляется малый параметр a/L (L — характерный масштаб изменения внешнего поля), по которому можно произвести разложение выражений (35.1).

Наиболее просто вычислить момент $\mathbf{K}$, для чего достаточно рассмотреть нулевое приближение, т. е. положить $\mathbf{H} = \text{const}$. Раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathbf{j}). \quad (35.2)$$

Второе слагаемое не дает вклада в интеграл для $\mathbf{K}$, так как $\mathbf{H}$ можно вынести из-под интеграла, а оставшееся выражение $\int (\mathbf{r}, \mathbf{j}) dV = \sum_{\text{TT}} I \oint (\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = 0$ (см. § 34). Первое же слагаемое в (35.2) аналогично выражению для вектора-потенциала магнитного момента (34.5) с заменой вектора $-\nabla(1/R)$ на $\mathbf{H}$. Тогда с учетом (34.7) находим для $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}. \quad (35.3)$$

Найдем энергию магнитного диполя во внешнем поле. Для этого вычислим работу, совершаемую при повороте магнитного диполя, считая его постоянным ($\mathbf{m} = \text{const}$):

$$U_{\text{m}} = - \int_{\theta}^{\pi/2} K d\theta = -(\mathbf{m}, \mathbf{H}). \quad (35.4)$$

Здесь θ — угол между векторами $\mathbf{m}$, $\mathbf{H}$, а энергия отсчитывается от состояния $\theta = \pi/2$.

Взаимодействие магнитного момента с магнитным полем оказывается полностью аналогичным взаимодействию электрического диполя с электрическим полем (см. (5.6)–(5.8)). Отсюда вытекает, в частности, и аналогия во взаимодействии двух диполей. Из (34.9) и (35.4) находим энергию магнитного диполь-дипольного взаимодействия:

$$U_{\text{mm}} = \frac{(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)}{R^3} - \frac{3(\mathbf{R}, \mathbf{m}_1)(\mathbf{R}, \mathbf{m}_2)}{R^5}. \quad (35.5)$$

Из формулы для энергии U_{m} можно получить силу, действующую на магнитный момент в слабо неоднородном поле:

$$\mathbf{F} = -\nabla U_{\text{m}} = \nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H}). \quad (35.6)$$

Это равенство также аналогично одному из выражений для силы, действующей на диполь в электрическом поле (см. § 5). Другое выражение, полученное в электростатике, применимо и в магнитном поле:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m}, \nabla)\mathbf{H}, \quad (35.7)$$

но при дополнительном условии $\text{rot } \mathbf{H} = 0$. Для доказательства эквивалентности соотношений (35.6) и (35.7) достаточно воспользоваться преобразованием

$$\mathbf{m} \times \text{rot } \mathbf{H} \equiv \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H}) - (\mathbf{m}, \nabla)\mathbf{H}$$

и условием $\text{rot } \mathbf{H} = 0$. То же самое относится и к эквивалентности аналогичных выражений в электростатике. Что же справедливо в общем случае,

когда $\text{rot } \mathbf{H} \neq 0$, $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$? В электростатике всегда справедливо соотношение $\mathbf{F} = (\mathbf{d}, \nabla)\mathbf{E}$, поскольку оно получено путем непосредственного суммирования сил, действующих на заряды системы. Оказывается, что в магнитном поле в общем случае справедливо другое выражение (35.6), причем всегда нужно считать, что $\mathbf{m} = \text{const}$ (см. задачу IV.20 ниже). Эту силу можно использовать, в частности, для удержания нейтронов и нейтральных атомов в магнитной ловушке (§ 57).

Задача IV.20. Найти силу, действующую на магнитный диполь в магнитном поле, непосредственно из силы Лоренца (35.1).

Разлагая магнитное поле в окрестности диполя $\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{H}_0 + (\mathbf{r}, \nabla)\mathbf{H}$ и подставляя это приближенное выражение в (35.1), найдем

$$\mathbf{F} \approx \frac{1}{c} \int dV \mathbf{j} \times (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{H}.$$

Докажем, что последнее выражение равно $\nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H})$. Для этого рассмотрим соотношение $(\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{H} = -\mathbf{m} \text{div } \mathbf{H} + \nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H}) = \nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H})$, где считаем $\mathbf{m} = \text{const}$, а оператор ∇ действует на вектор $\mathbf{H}$. Используя формулу для $\mathbf{m}$ (34.8), напомним $\nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2c} \int dV ((\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \times \nabla) \times \mathbf{H} = \frac{1}{2c} \int dV \{ \mathbf{j}(\mathbf{r}, \nabla) - \mathbf{r}(\mathbf{j}, \nabla) \} \times \mathbf{H}$. Производя замену $\mathbf{j} dV \rightarrow I d\mathbf{r}$, преобразуя подынтегральную функцию $d\mathbf{r}(\mathbf{r}, \nabla) - \mathbf{r}(d\mathbf{r}, \nabla) = -d\{\mathbf{r}(\mathbf{r}, \nabla)\} + 2d\mathbf{r}(\mathbf{r}, \nabla)$, опуская полный дифференциал и переходя обратно к интегрированию по объему, получаем окончательно

$$\nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H}) = \frac{1}{c} \int dV \mathbf{j}(\mathbf{r}, \nabla) \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int dV \{ \mathbf{j} \times (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{H} \} = \mathbf{F}.$$

§ 36. Прецессия магнитного момента. Магнитный резонанс

Рассмотрим движение системы, обладающей магнитным моментом, в однородном магнитном поле. В случае стационарного тока на систему действует при этом только момент сил (35.3), и уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}. \quad (36.1)$$

где $\mathbf{M}$ — механический момент системы. Но мы уже встречали пример (задача IV.19), когда магнитный момент пропорционален механическому. Как мы увидим, в этом параграфе такое соотношение справедливо для всех частиц, обладающих магнитным и механическим моментами:

$$\mathbf{m} = G\mathbf{M}. \quad (36.2)$$

коэффициент пропорциональности G называется *гиромагнитным отношением*. Из уравнения (36.1) следует тогда, что вектор $\mathbf{M}$ будет вращаться вокруг вектора $\mathbf{H}$, описывая конус (рис. IV.11), т. е. совершать движение, которое называется *прецессией*.

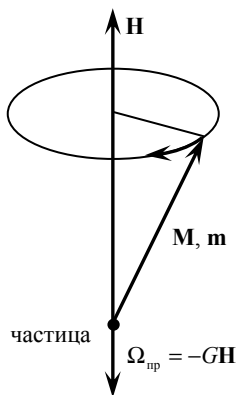


Рис. IV.11. Прецессия магнитного момента частицы во внешнем магнитном поле

Для определения угловой скорости прецессии $\Omega_{\text{пр}}$ воспользуемся кинематическим уравнением

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \Omega_{\text{пр}} \times \mathbf{M}. \quad (36.3)$$

Сравнивая его с (36.1) (с учетом (36.2)), получим

$$\Omega_{\text{пр}} = -G\mathbf{H}. \quad (36.4)$$

Таким образом, ось прецессии совпадает с направлением магнитного поля.

Вообще говоря, решение уравнения (36.1) допускает также существование любой компоненты вектора $\Omega_{\text{пр}}$ вдоль вектора $\mathbf{M}$. Однако это означает лишь более сложное описание той же самой прецессии, поскольку в последнем случае вектор прецессии $\Omega_{\text{пр}}$ сам вращается вокруг вектора $\mathbf{H}$. Решение (36.4) есть простейшее описание прецессии.

В сложной системе, части которой характеризуются разными гиромагнитными отношениями g_i , мгновенное направление вектора магнитного момента не совпадает с направлением механического момента. Однако вследствие взаимодействия частей системы магнитный момент прецессирует вокруг направления механического момента, который сохраняется во времени. Поэтому в среднем направления магнитного и механического моментов совпадают, и, следовательно, для сложной системы также можно ввести гиромагнитное отношение (36.2). Однако закон прецессии (36.4) выполняется только в достаточно слабом внешнем поле, когда угловая скорость прецессии много меньше скорости внутренней прецессии сложной системы. В сильном магнитном поле прецессия системы как целого разрушается, и ее части прецессируют независимо.

Гиромагнитное отношение сложной системы позволяет судить о ее «устройстве». При этом обычно гиромагнитное отношение измеряется естественной единицей $g_0 = e/2m_0c$, соответствующей вращающейся частице массы m_0 (34.12), что приводит к замене

$$G = g \cdot g_0. \quad (36.5)$$

Параметр g иногда называют *безразмерным гиромагнитным отношением*, или g -фактором, а гиромагнитное отношение G измеряют в единицах g_0 , которые для разных частиц разные. Так, например, собственному «вращению» электрона (спину) соответствует $g_e \approx -2$, где знак «минус» связан с тем, что заряд электрона отрицательный. Интересная ситуация имеет место для нейтрона, который электрически нейтрален, но обладает магнитным моментом с $g_n \approx -3,8$ (в данном случае $g_0 = e/2m_n c$, где m_n — масса нейтрона^{*)}). Знак «минус» снова показывает, что магнитный момент вызван вращением отрицательного заряда (хотя и не известно какого — см. § 5). Очевидно, что нейтрон представляет собой сложную систему, состоящую по современным представлениям из так называемых кварков. Для протона $g_p \approx 5,6 = 2 + 3,6$, где 2 — гиромагнитное отношение, которое должен был бы иметь «точечный» протон (подобно электрону), а 3,6 — добавка, связанная со структурой протона. Интересно отметить, что эти «добавки» для протона и нейтрона близки по абсолютной величине, хотя разница между ними выходит далеко за пределы экспериментальных ошибок.

Прецессию магнитного момента можно использовать для измерения гиромагнитного отношения. Делается это с помощью так называемого *магнитного резонанса*. Исследуемый образец помещают в однородное магнитное поле, вызывающее прецессию магнитных моментов его моле-

^{*)} Магнитные моменты нуклонов и более тяжелых частиц измеряются также в ядерных магнетонах (Приложение II).

кул, атомов и ядер. Помимо этого, на образец накладывается слабое вращающееся поперечное поле. Если частота вращения совпадает с частотой прецессии (резонанс), т. е. поперечное поле вращается синхронно с магнитными моментами, оно переворачивает их. Условие резонанса достигается путем медленного изменения основного магнитного поля. Момент резонанса фиксируется по поглощению энергии генератора вращающегося магнитного поля, затрачиваемой на перемагничивание образца. Зная частоту прецессии, а также значение магнитного поля в резонансе, можно из соотношения (36.4) найти гиромагнитное отношение облучаемых частиц.

Явление магнитного резонанса для электронных моментов в атомах и молекулах было открыто в 1944 г. советским физиком Е. К. Завойским. Этот вид магнитного резонанса получил название «*электронный парамагнитный резонанс*» (ЭПР). Слово «парамагнитный» появилось в этом названии из-за того, что объектом магнито-резонансного воздействия являются атомы или молекулы парамагнитного вещества (§ 37). Электронная оболочка атома-парамагнетика устроена так, что суммарный магнитный момент электронов, связанный с их движением и спином, не равен нулю. По порядку величины он равен магнитному моменту электрона (Приложение II)

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5,788\,381\,7555(79) \cdot 10^{-5} \text{ эВ} \cdot \text{Тл}^{-1}. \quad (36.6)$$

Здесь $\hbar \approx 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с}$ — *постоянная Планка*, деленная на 2π , m_e — масса электрона. Индекс B здесь присутствует не случайно: эта величина названа «*магнетон Бора*» в честь Нильса Бора (Niels Bohr). Значение μ_B численно равно магнитному моменту свободного электрона, собственный механический момент которого (спин) равен $\hbar/2$, а гиромагнитное отношение $g \approx 2$ (см. табл. IV.1 ниже). Зная эти величины, нетрудно получить типичные параметры установки ЭПР. Так, для магнитного поля $H_0 = 1 \text{ Тл}$ из (36.4), (36.5) находим

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{g}{2} \cdot \frac{eH_0}{m_e c} \approx 1,7 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}, \quad \lambda_{\Omega} = \frac{2\pi c}{\Omega} \approx 1,5 \text{ см}. \quad (36.7)$$

Заметим, что подобные вычисления удобно делать, приводя выражения к известным константам (в данном случае $m_e c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$) и используя соотношение между гауссовыми и СИ единицами $1 \text{ В} = (1/300) [\text{Г}]$, $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$,

$$\frac{g_e}{2} \cdot \frac{eH_0}{m_e c} \equiv \frac{g_e}{2} \cdot \frac{eH_0}{m_e c^2} \cdot c \approx \frac{2}{2} \cdot \frac{300 \cdot (H_0) \cdot 10^4 [\text{Тл}]}{0,51 \cdot 10^6 [\text{В}]} \cdot 3 \cdot 10^{10} \approx 1,7 \cdot 10^{22} (H_0) [\text{Тл}]$$

Такие частоты (длины волн) относятся к диапазону СВЧ электромагнитного излучения (см. гл. VIII). Соответственно, высокочастотное вращающееся магнитное поле создается в СВЧ резонаторе (§ 76), куда электромагнитное излучение поступает по волноводу (§ 86) от генератора (рис. IV.12). Генератор работает на постоянной частоте, и также постоянным поддерживается поле основного магнита, так как перестраивать эти параметры с высокой точностью технически сложно. Поэтому для сканирования по частоте резонанса осуществляют изменением тока в дополнительных слаботочных катушках, расположенных в межполюсном зазоре основного магнита. Так, в примере, показанном на рис. IV.13, эти катушки создают медленно варьруемое магнитное поле $0 \leq \Delta H(t) \leq 150$ Гс при $H_0 = 3400$ Гс.



Рис. IV.12. ЭПР спектрометр ESP300 в Казанском (Поволжском) университете

ЭПР широко применяется в исследовании химических реакций, так как он позволяет быстро анализировать химический состав вещества. Особенно существенна возможность наблюдения за так называемыми свободными радикалами, к которым из-за их высокой активности практически неприменимы обычные методы химического анализа (рис. IV.13). Интересно отметить, что прецессия спиновых магнитных моментов радикалов существенно влияет на протекание различных химических реакций с их участием, а значит, вообще говоря, и на биологические процессы.

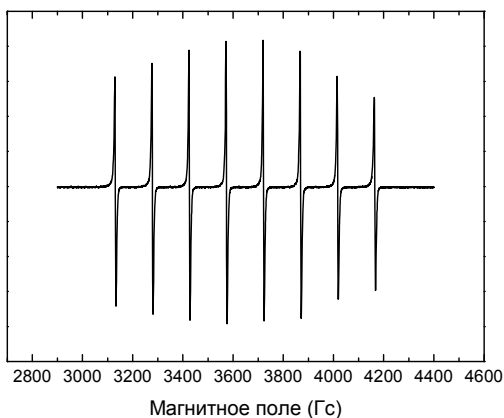


Рис. IV.13. Сверхтонкая структура спектра ЭПР примесного иона ванадия V^{3+} в синтетическом форстерите (Mg_2SiO_4). Восемь линий на спектре соответствуют разрешенным переходам между состояниями с разной проекцией ядерного магнитного момента ванадия ($I = 7/2$) на направление магнитного поля (КПУ, спектрометр ESP300)

В 1937 г. американский физик Раби (I. A. Rabi) использовал метод магнитного резонанса для измерения магнитных моментов ядер — *ядерный магнитный резонанс* (ЯМР) на атомных пучках. В 1940 г. этим же методом Блох (F. Bloch, США) впервые измерил магнитный момент нейтрона, а в 1946 г. одновременно с Парселлом (E. Purcell) распространил метод ЯМР на конденсированные среды. В отличие от ЭПР, здесь частота прецессии меньше в отношении масс электрона и протона: $m_e/m_p \approx 1/1836$, так что

$$(\Omega_{\text{пр}})_{\text{ЯМР}}/A \cdot H_0 \sim 10^8 \text{ с}^{-1} \cdot \text{Тл}^{-1}, \quad (36.8)$$

где A — масса ядра в атомных единицах. Это диапазон радиочастот (~ 10 МГц). Правда, настолько же по порядку величины понижена чувствительность. При помощи ЯМР было впервые измерено гиромангнитное отношение для протона. В дальнейшем эта величина стала использоваться для прецизионных измерений магнитного поля методом ЯМР, относительная точность которых в настоящее время достигает $\sim 10^{-6}$.

Подобно спектрам ЭПР, спектры ЯМР применяются для расшифровки молекулярной структуры химических соединений. Установка ЯМР в этом случае содержит принципиально те же элементы, что и установка ЭПР: магнит основного поля, катушки подмагничивания для сканирования условия резонанса, исследуемый образец и (основное отличие) катушку — индуктивность LC -контура (§ 52), в которой возбуждается переменное магнитное поле.

В физике твердого тела применяют также методы *ферромагнитного*, *антиферромагнитного* и *ферримагнитного* резонансов. Они аналогичны методам ЭПР и ЯМР, но с тем отличием, что в данном случае резонансная частота определяется магнитным моментом *домена* соответствующего материала (§ 42). Все три типа магнетиков — ферро-, антиферро- и ферримагнетики — обладают доменной структурой, строение которой и позволяет определить соответствующий из методов магнитного резонанса.

Рассмотренные методы исследования на основе магнитного резонанса относят к *радиоспектроскопии* вещества.

Прецессия магнитного момента позволяет также измерить гиромагнитное отношение для элементарных частиц. Точнее всего эта величина измерена для электрона.

Начались эти измерения в конце 20-х годов прошлого столетия, когда физики осознали, что расщепление пучка атомов серебра в магнитном поле — знаменитый опыт Штерна–Герлаха (О. Stern, W. Gerlach, 1922 г.) — связано с собственным (спиновым) магнитным моментом электрона [5]. Первые указания на существование у электрона аномального магнитного момента

$$a_e = \frac{|g_e| - 2}{2} \quad (36.9)$$

были получены 20 лет спустя в экспериментах Куша и Фоли (Р. Kusch, Н. Foley, 1947–1948 гг.) на пучке атомов галлия. Прошло еще 20 лет, прежде чем точность измерения аномалии a удалось существенно увеличить. Было использовано замечательное свойство движения свободного электрона в однородном магнитном поле. При $g=2$ угловая скорость прецессии спина частицы (36.7) совпадает с угловой скоростью ее вращения в магнитном поле — так называемой *циклотронной* или *ларморовской* частотой^{*)} (см. (56.7)). Из-за этого ориентация спина

^{*)} В связи с этими названиями часто возникают недоразумения, т. к. исторически первым появился термин *частота ларморовской прецессии*, когда английский физик Дж. Лармор (J. Larmor, 1895) нашел значение частоты вращения системы зарядов с одинаковыми значениями e/m в центрально-симметричном электрическом и слабом магнитном полях. Частота

электрона относительно вектора его скорости остается почти неизменной. Для электрона $|g_e| - 2 \sim 10^{-3}$, что позволяет очень точно измерить малую разность a_e . Вследствие этой разности спин электрона медленно прецессирует относительно его вектора скорости с частотой

$$\omega_a = \frac{eH}{m_e c} \left(\frac{|g_e|}{2} - 1 \right) \equiv \frac{eH}{m_e c} a_e. \quad (36.10)$$

В экспериментах американских физиков Висли и Рича [7] частота ω_a измеряется следующим образом. Электроны впускаются в ловушку с магнитным полем сквозь золотую фольгу (1, 2 на рис. IV.14), испытывая рассеяние на атомах фольги. Интерес представляют электроны, упруго рассеянные в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Такие электроны медленно дрейфуют вдоль магнитного поля, быстро вращаясь вокруг его оси. В ловушке установлены два коаксиальных цилиндра (3, 4), к одному из которых (3) прикладывается короткий (100 нс) импульс положительного напряжения. В результате электроны, находящиеся в это время между цилиндрами, тормозятся. Магнитное поле слабо неоднородное, имеет форму «магнитной ловушки» (§ 57), в которой и удерживаются заторможенные электроны, совершая движение по спирали вдоль оси ловушки с отражением ее «пробок». Через определенный промежуток времени t (после импульса торможения) к цилиндру 3 прикладывается импульс отрицательного напряжения, и электрическое поле сбрасывает электроны на мишень 5 — также золотую фольгу. Детектор 6 регистрирует асимметрию рассеяния электронов, сброшенных на мишень, — разность числа рассеянных «влево» и «вправо»:

$$A(t) = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}. \quad (36.11)$$

Зависимость асимметрии от времени t удержания электронов в ловушке, очевидно, есть

$$A(t) = A_{\max} \cdot \sin(\omega_a t + \varphi), \text{ где } \varphi = \arcsin(A(0)/A_{\max}).$$

Измеряя период этой зависимости $T_a = 2\pi/\omega_a$, можно найти величину a_e из (36.10).

эта оказалась равной (36.7) при $g = 1$ (см. [6], § 45 «Теорема Лармора»). При $g = 2$ эта частота совпадает с циклотронной. Вот эта двойка и послужила источником недоразумений, когда циклотронную частоту называют ларморовской, хотя ни к Лармору, ни к прецессии она прямого отношения не имеет. Тем не менее термины *ларморовская частота* и *ларморовский радиус* (см. § 56) прижились и широко используются в литературе.

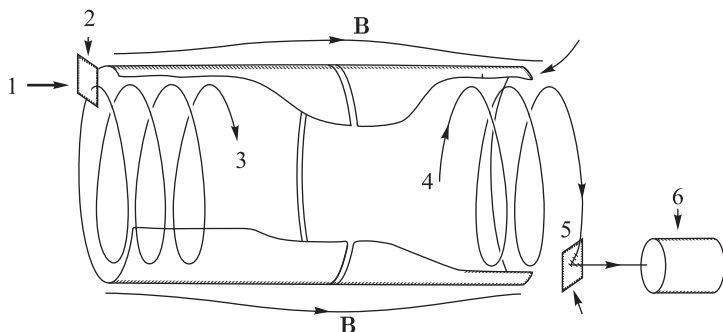


Рис. IV.14. Схема опыта Висли и Рича: 1 — пучок неполяризованных электронов; 2 — фольга-поляризатор; 3, 4 — область захвата электронов; 5 — фольга-анализатор; 6 — детектор

Авторам [7] удавалось наблюдать более 10^4 периодов медленной прецессии (36.10), что позволило измерить a_e с точностью $\sim 3 \cdot 10^{-9}$. Дальнейшее развитие эти исследования получили в работах Х. Демельта (H. G. Dehmelt, 1971 г.), предложившего измерять частоту колебаний одиночных электронов в ловушке, которую он назвал «ловушкой Пеннинга» (в честь известного физика, изучавшего природу электрического разряда). Ловушки Демельта–Пеннинга и Висли–Рича различаются деталями конструкции электродов, запирающих электроны. А вот принципиальное отличие метода Демельта состоит в измерении частоты колебаний, что делается современными методами с чрезвычайно высокой точностью. В результате он получил значение a_e на порядок точнее. В последние годы метод Демельта был значительно развит, и точность доведена до уровня $\Delta a_e \approx 3 \cdot 10^{-13}$ (Приложение II). Тем же методом и с такой же точностью измерен аномальный магнитный момент позитрона [8]. Полученный результат совпадает в пределах ошибок с теоретическим значением. Это значит, что если электрон и имеет какую-либо структуру, то она «запрятана» очень «глубоко».

Аналогичные измерения проводятся для мюона (старое название « μ -мезон»), одной из самых загадочных частиц, которая ничем, кроме массы, на отличается от электрона («тяжелый электрон»). В начале 60-х гг. такие эксперименты были проведены в ЦЕРН (Швейцария), а с начала 90-х ведутся, уже на более высоком уровне точности, в Брукхэйвенской национальной лаборатории (BNL, США).

Оба эксперимента аналогичны по методике: пучок протонов, ускоренных до энергии около 26 ГэВ, генерирует на мишени π -мезоны, которые распадаются на мюон и мюонные нейтрино ν_μ (антинейтрино $\bar{\nu}_\mu$)

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu,$$

и образовавшиеся мюоны отбираются (анализирующим магнитом) по энергии и направлению скорости. Затем мюоны, близкие по этим параметрам, выпускаются на кольцевую магнитную дорожку с магнитным полем высокой однородности. Для удержания мюонов на кольцевой орбите («фокусировки») в эксперименте BNL используются электростатические квадрупольные линзы (§ 57), электрическое поле которых изменяет частоту прецессии спина (в собственной системе движущегося мюона появляется дополнительное магнитное поле — см. § 29). В результате формула (36.10) усложняется — в ней появляется слагаемое, зависящее от H , E и γ . Его влияние можно существенно уменьшить, выбрав оптимальное значение энергии мюонов («магическое» значение γ). В эксперименте BNL $\gamma_{mag} = 29,3$ (энергия мюонов около 3 ГэВ). Магнитная дорожка в эксперименте BNL имеет диаметр около 14 м, так что мюон, имеющий скорость, близкую к скорости света, совершает около 150 оборотов за время распада (ок. 2,2 мкс):

$$\mu^+ \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu,$$

где $\bar{\nu}_e (\nu_e)$ — электронное антинейтрино (нейтрино). При этом электрон вылетает в направлении спина электрона. За один оборот угол между векторами спина мюона и его скорости изменяется, $\Delta\alpha = a_\mu \cdot 2\pi\gamma \approx 12^\circ$, а скорость счета детектора, регистрирующего электроны, вылетающие под фиксированным углом, осциллирует с частотой (36.10). В этом отношении методика экспериментов ЦЕРН и BNL аналогична использованной Висли и Ричем.

В эксперименте BNL в начале этого века обнаружено небольшое (но более чем на 3 стандартных отклонения) отличие экспериментального значения g_μ от теоретического, полученного на основе расчетов по так называемой Стандартной Модели. Последнее значение a_μ в эксперименте BNL (март 2004 г.) измерено с точностью до $\Delta a_\mu \approx 0,6 \cdot 10^{-9}$ [8]. И «борьба» за повышение точности продолжается.

Похожие методы используются и для измерения магнитных моментов еще более «экзотических» частиц, например гиперонов — частиц тяжелее нуклона, которые живут всего около 10^{-10} с. Одни из первых таких измерений проводились в конце 60-х гг. группой Л. М. Баркова из Института ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН СССР (Новосибирск)

на протонном синхротроне Института экспериментальной и теоретической физики им. А. И. Алиханова (Москва). Для того чтобы повернуть измевшийся магнитный момент Δ^0 -гиперона на заметный угол за столь короткое время, использовалось сверхсильное магнитное поле $H \sim 20$ Тл, которое создавалось на короткое время (см. § 50). Из-за сложности эксперимента магнитные моменты таких короткоживущих частиц измерены с относительно невысокой точностью.

Конечно, все описанные выше измерения магнитных моментов частиц проводятся «не любопытства ради». Сопоставления их результатов с теоретически вычисленными моделями позволили в недавнем прошлом произвести с высочайшей степенью точности проверку квантовой электродинамики, а сегодня продолжить проверку *Стандартной Модели* (СМ) — теории строения элементарных частиц и поисков ее нарушения. С этой целью ведутся, например, много лет измерения магнитного момента нейтрино — вернее, определение его верхнего экспериментального предела (согласно СМ $\mu_\nu = 0$ точно). Наименьший верхний предел значения магнитного момента электронного антинейтрино получен (пока) в эксперименте Germanium Experiment on Magnetic Moment of electron Antineutrino measurement (GEMMA), который группа В. Б. Бруданина и И. В. Егорова (ОИЯИ) проводит на потоке антинейтрино из реактора Калининской АЭС (Тверская обл.): $\mu_\nu < 2,9 \cdot 10^{-11} \mu_B$.

Одним из наиболее важных практических применений магнитного резонанса является так называемая *ЯМР-томография* или, что то же самое, *магнито-резонансная томография* (МРТ). Уже само название «томография» от лат. tomos — слой, grapho — пишу, т. е. «последовательное описание», говорит о существовании этого метода: анализ объемного объекта с определением местоположения анализируемого элемента объекта. Кроме магнито-резонансного, существуют и иные — ультразвуковая, рентгеновская (§ 140), позитронно-эмиссионная (ПЭТ) и другие.

В МРТ-варианте установка ЯМР дополняется системой сканирующего магнитного поля. Например, на однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$ накладывается поперечное, медленно изменяющееся со временем магнитное поле $\mathbf{H}_{scan}^{(t)}$, которое формируется седлообразными обмотками (рис. IV.8). Как и в классическом ЯМР-спектрометре, в МРТ-установке сохраняются дополнительные катушки «быстрого сканирования», необходимые для регистрации резонансной кривой, и катушка резонансного контура для возбуждения магнитного поля на частоте $(\Omega_{пр})_{ЯМР}$ (36.8).

$$\mathbf{H}_{total}^{(t)} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{scan}^{(t)} + \Delta\mathbf{H}^{(t)}.$$

В тот момент, когда суммарное магнитное поле принимает значение, соответствующее условию резонанса (36.8), регистрирующая система записывает амплитуду сигнала $A(t)$ и значение поля $\mathbf{H}_{total}^{(t)}$. Амплитуда сигнала пропорциональна плотности ядер, на которых «работает» ЯМР-спектрометр томографа, в той точке, где достигнуто условие резонанса. По известной (заранее) карте магнитного поля восстанавливаются координаты точки $(x, y, z)_{рез}$, в которой достигнут резонанс. И так сканируется весь объем исследуемого объекта. Трехмерная функция

$$A(t) \equiv A(H_{total}(x, y, z)) \equiv A(x, y, z)$$

дает картину распределения по объему плотности «резонансных» ядер.



Рис. IV.15. Магнито-резонансная томограмма шейного отдела позвоночника

В медицине ЯМР-томографы работают на протонах — ядрах атома водорода, который содержится в тканях тела человека (вода, жировые ткани и т. п.). Естественно, установки МРТ работают в режиме автоматического сканирования с on-line обработкой результатов измерений, так что к медикам поступает трехмерная (последовательная) «фотография» пациента (рис. IV.15).

ГЛАВА V

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ

§ 37. Намагничивание

Молекулярные токи в среде изменяют магнитное поле. Такую среду называют магнетиком. Любое вещество в большей или меньшей степени обладает магнитными свойствами. Магнетики бывают в основном двух сортов: *диамагнетики* и *парамагнетики*. Простейшим диамагнетиком является плазма, т. е. газ свободных заряженных частиц. Последние вращаются в магнитном поле таким образом, что их собственное поле направлено против внешнего, т. е. такая среда ослабляет магнитное поле (см. задачу IV.19 в § 34).

Аналогичный диамагнитный эффект наблюдается и в обычном веществе с молекулами (атомами), полный магнитный момент которых равен нулю (например, инертные газы). Диамагнитный эффект в данном случае связан с тем, что при наложении магнитного поля происходит ускорение электронов, вращающихся в одну сторону, и замедление — вращающихся в другую (за счет ЭДС индукции, § 45). Если же полный магнитный момент молекулы в отсутствие поля не равен нулю, то такое вещество является *парамагнетиком* (например, натрий). Парамагнетик усиливает внешнее магнитное поле вследствие частичной ориентации его магнитных моментов по полю. В этом отношении он аналогичен диэлектрику с ориентационной поляризацией (§ 14). Конечно, в любом парамагнетике есть и диамагнитный эффект, однако он существенно меньше парамагнитного.

Влияние большинства веществ на магнитное поле очень мало. *Магнитная проницаемость вещества* μ (см. § 38 ниже), аналогичная ϵ , в большинстве случаев почти не отличается от 1. Например, для газообразного гелия (диамагнетик) при нормальных условиях $\mu - 1 \approx -1,4 \cdot 10^{-8}$, а для твердого натрия (парамагнетик) $\mu - 1 \approx +2 \cdot 10^{-4}$. Слабое влияние среды на магнитное поле связано с малой скоростью атомных электронов: $v/c \sim 10^{-2}$. Это значит, что магнитный момент атомов и молекул примерно в 100 раз

меньше электрического, а поскольку вектор поляризации пропорционален квадрату дипольного момента (14.3), то $(\mu - 1)/(\epsilon - 1) \sim (v/c)^2 \sim 10^{-4}$.

Исключения составляют вещества, обладающие необычной магнитной проницаемостью, например ферромагнетики (§ 42) с $\mu \gg 1$, а также сверхпроводники, являющиеся идеальными диамагнетиками с $\mu = 0$ (§ 54).

Намагничение среды можно характеризовать, аналогично поляризации диэлектрика, с помощью магнитного момента единицы объема $\mathbf{M}$. Эта величина называется *вектором намагничивания вещества*. Для того чтобы получить наглядное представление об этой величине, рассмотрим простой пример однородно намагниченной тонкой пластинки (рис. V.1). Намагниченность означает, что молекулярные токи в пластинке частично ориентированы, как показано на рис. V.1. Так как соседние молекулярные токи взаимно компенсируются, то вся система молекулярных токов эквивалентна одному обтекающему току I_μ , который связан с намагничением соотношением

$$M = \frac{I_\mu S}{cV} = \frac{I_\mu}{ch} = \frac{i_\mu}{c}, \quad (37.1)$$

где $S = ab$ — площадь пластинки, а $V = abh$ — ее объем, i_μ — обтекающий молекулярный ток на единицу высоты. Вообще говоря, помимо такого эквивалентного обтекающего тока, связанного с движением электронов внутри атомов или молекул, в проводящей среде (например, в плазме, см. § 44) возможно появление дополнительного обтекающего макроскопического тока, который не описывается соотношениями (37.1) и (37.5) ниже.

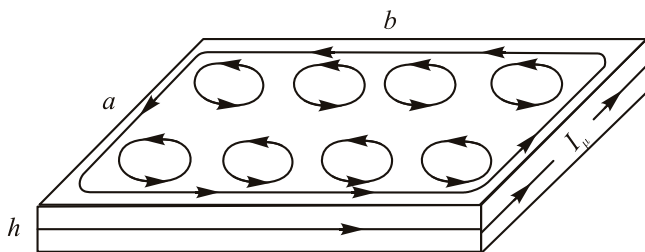


Рис. V.1. Молекулярные токи намагничения

Найдем теперь связь между намагничением и молекулярными токами в общем случае. Для этого рассмотрим вектор-потенциал намагниченной среды (см. (34.7)):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV', \quad (37.2)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Преобразуем это выражение. Прежде всего, можно написать $\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$, где ∇' означает дифференцирование по координатам вектора $\mathbf{r}'$. Далее, преобразуем подынтегральное выражение:

$$\left(\nabla' \frac{1}{R} \right) \times \mathbf{M} = \nabla' \times \frac{\mathbf{M}'}{R} - \frac{\nabla' \times \mathbf{M}'}{R}. \quad (37.3)$$

Но интеграл от первого слагаемого равен нулю, если среда имеет ограниченные размеры. Действительно, это слагаемое есть полный ротор (для этого мы и произвели преобразование (37.3)), линии которого всегда замкнуты, так как его дивергенция равна нулю. В таком случае интеграл от него аналогичен интегралу (34.2) для стационарных токов ($\text{div } \mathbf{j} = 0$): $\int \mathbf{j} dV = 0$.

Прямое вычисление такого интеграла дано ниже в задаче V.1. Окончательно получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{c \text{rot } \mathbf{M}'}{R} dV'. \quad (37.4)$$

Сравнивая это выражение с вектором-потенциалом произвольной системы токов (31.8), находим плотность молекулярных токов:

$$\mathbf{j}_\mu = c \text{rot } \mathbf{M}. \quad (37.5)$$

В рассмотренном выше примере $\text{rot } \mathbf{M}$ отличен от нуля только на краях пластинки и равен $\mathbf{M} \cdot \hat{\alpha}(z)$, где z — координата по нормали к боковой грани, причем точка $z = 0$ соответствует краю пластинки. Полный ток на единицу длины боковой грани $i = \int j_\mu dz = cM$.

Соотношение (37.5) является основным для теории магнитных процессов в среде. Оно может быть получено также и в «обратном направлении», т. е. мы постулируем соотношение (37.5) с неизвестным вектором $\mathbf{M}$, вычисляем магнитный момент молекулярных токов j_μ и убеждаемся, что вектор $\mathbf{M}$ равен магнитному моменту единицы объема (см. задачу V.2 ниже).

Задача V.1. Показать, что объемный интеграл от ротора произвольного ограниченного в пространстве векторного поля равен нулю.

Представим ротор в виде

$$\text{rot } \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{e}_j a_k - \mathbf{e}_k a_j), \quad (37.6)$$

где $\mathbf{e}_i$ — орты, а индексы $i \neq j \neq k$ образуют циклическую перестановку. Искомый интеграл:

$$\int dV \operatorname{rot} \mathbf{a} = - \int \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{e}_j a_k - \mathbf{e}_k a_j) dx_i dx_j dx_k.$$

Последнее выражение преобразуется в интеграл по трем парам плоскостей ($x_i = \pm b_i \rightarrow \infty$), отстоящим сколь угодно далеко друг от друга. Для ограниченного в пространстве поля интеграл по ним равен нулю.

Задача V.2. Вычислить магнитный момент системы токов (37.5).

Используя (34.8), получим интеграл

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int dV (\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M})).$$

Подынтегральное выражение удобнее всего преобразовать, представив векторы в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i, \quad \mathbf{M} = e_k \mathbf{M}_k, \quad \nabla = \mathbf{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Раскрывая двойное векторное произведение, найдем

$$\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}) = \mathbf{e}_l \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_l} \right) - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_l) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_l}.$$

Здесь по индексам l предполагается суммирование. Преобразуем теперь оба слагаемых, выделив полные производные:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_l \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_l} \right) &= \mathbf{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\mathbf{r}, \mathbf{M}) - \mathbf{e}_l \left(\mathbf{M}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_l} \right) = \mathbf{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\mathbf{r}, \mathbf{M}) - \mathbf{M}, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{e}_l) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_l} &= x_l \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (x_l \mathbf{M}) - 3\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Интеграл от полных производных дает для ограниченной среды нуль (см. задачу V.1), и мы получаем

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dV,$$

т. е. вектор $\mathbf{M}$ можно интерпретировать как плотность магнитного момента среды.

§ 38. Магнитная индукция

Получим теперь основное уравнение для магнитного поля в среде. Для этого воспользуемся уравнением (32.8): $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c$ (считаем пока поле статическим). Представим ток в виде суммы внешнего (для среды), или макроскопического, тока и молекулярного: $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} + \mathbf{j}_\mu$.

Молекулярные токи и вызванные ими магнитные поля резко неоднородны в малых (порядка расстояния между молекулами) участках пространства. Обычно микроструктура поля не представляет интереса. Поэтому поле в среде характеризуется его средними значениями по объему, содержащему большое число молекул. Такое среднее поле называется по историческим причинам, упомянутым в § 28, *магнитной индукцией*:

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{B}. \quad (38.1)$$

Таким образом, уравнение для магнитного поля в среде запишется в виде

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \langle \mathbf{j}_\mu \rangle). \quad (38.2)$$

Но $\langle \mathbf{j}_\mu \rangle = c \text{rot } \langle \mathbf{M} \rangle$ (см. (37.5)). Теперь естественно объединить оба члена с ротором и ввести новое, вспомогательное, поле (не путать с магнитным полем $\mathbf{H}$ в вакууме!):

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \langle \mathbf{M} \rangle, \quad (38.3)$$

которое не имеет специального названия. Вспомогательное поле удобно тем, что уравнение для него зависит только от внешнего тока:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (38.4)$$

Формально это уравнение совпадает с исходным (32.8) для магнитного поля в вакууме. Однако его физический смысл совершенно иной: и $\mathbf{H}$ здесь не магнитное поле, а вспомогательный вектор (38.3), и ток не полный, а только внешний.

Обычно внешний ток задан, так что можно непосредственно найти вспомогательное поле $\mathbf{H}$. Для нахождения полного магнитного поля $\mathbf{B}$ необходимо еще знать связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$. Оказывается, что для большинства веществ эту связь можно считать линейной, т. е. ее можно описать некоторой матрицей μ_{ik} для анизотропной среды (например, кристалла)

$$B_i = \mu_{ik} H_k \quad (38.5)$$

или одной постоянной μ для изотропной среды

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (38.6)$$

Величина μ называется *магнитной проницаемостью* среды, а μ_{ik} — тензором магнитной проницаемости. Вектор намагничивания среды $\mathbf{M}$ связан

с магнитным полем $\mathbf{H}$ линейной зависимостью в полях небольшой напряженности

$$\mathbf{M} = \chi \cdot \mathbf{H},$$

где χ — магнитная восприимчивость вещества (см. также (42.3)). Отсюда и из (38.3), (38.6) следует

$$\mu = 1 + 4\pi\chi.$$

С помощью вспомогательного поля $\mathbf{H}$ мы исключили из рассмотрения молекулярные токи $\mathbf{j}_\mu$, влияние которых характеризуется теперь только одним параметром μ . Разумеется, это очень упрощенное описание сложных процессов в среде. Поэтому оно справедливо лишь приближенно и только в достаточно слабых полях. Впрочем, с практической точки зрения эти поля весьма велики. Их можно оценить из условия равенства магнитной и электрической сил, действующих на атомный электрон: $B \sim cE/v \sim 10^8$ Гс. Отметим, что максимальное поле, которое удалось получить в земных условиях, примерно на порядок ниже (см. § 50).

В особых случаях, например в ферромагнетиках, зависимость $B(H)$ нелинейна (подробнее см. § 42). В случае однородной среды поле $\mathbf{H}$ является просто частью магнитного поля $\mathbf{B}$, вызванной только внешними токами. Например, для прямого бесконечного тока в среде с магнитной проницаемостью μ $H = 2I/c\rho$, $B = 2\mu I/c\rho$. Механизм увеличения полного поля в μ раз связан с появлением вокруг тока I молекулярных токов, так что суммарный ток равен μI . Это значит, что молекулярные токи равны $I_\mu = (\mu - 1)I$. Последнее соотношение оказывается справедливым для произвольного распределения токов в однородной среде. Действительно, выражая намагниченность $\mathbf{M}$ в (37.5) через $\mathbf{H}$ (с помощью (38.3) и (38.6)) и используя уравнение (38.4), найдем

$$\mathbf{j}_\mu = c \operatorname{rot} \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H} = (\mu - 1) \mathbf{j}, \quad \mu = \text{const.} \quad (38.7)$$

В общем случае неоднородной среды поле $\mathbf{H}$ совсем не похоже на магнитное поле, так как $\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} (\mathbf{B}/(\mu(\mathbf{r}))) = (B, \nabla(1/\mu)) \neq 0$. Мы использовали здесь уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (38.8)$$

которое справедливо всегда вследствие отсутствия магнитных зарядов.

В гауссовой системе единиц напряженность обоих полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ измеряется в одних и тех же единицах — гауссах (Гс). Иногда употребляется также специальное название для единицы поля H — эрстед (Э): $1\mathcal{E} = 1$ Гс.

В тех же единицах измеряются и напряженность электрического поля и индукция E , D (см. §§ 2, 15 и Приложение III). Именно это обстоятельство делает гауссову систему наиболее пригодной с точки зрения физики, так как все четыре поля физически связаны между собой.

В СИ единицей магнитной индукции является тесла (Тл): $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$. Поле H измеряется в амперах на метр (А/м): $1 \text{ А/м} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Гс} \approx 0,0126 \text{ Гс}$. Поскольку B и H имеют разные размерности, магнитная проницаемость называется в СИ размерной величиной:

$$\mu \rightarrow \frac{\mu\mu_0}{4\pi}; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м/А} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 1/\epsilon_0 c^2, \quad (38.9)$$

где μ — безразмерная относительная магнитная проницаемость (то же самое, что и в гауссовой системе), а μ_0 — *магнитная проницаемость вакуума*.

Вектор-потенциал в среде связан обычным соотношением с полным полем (см. (39.8) и текст там же):

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (38.10)$$

Единицей вектора-потенциала в гауссовой системе является гаусс-сантиметр (Гс · см), а в СИ — тесла-метр (Тл · м): $1 \text{ Тл} \cdot \text{м} = 10^6 \text{ Гс} \cdot \text{см}$.

§ 39. Ток смещения в среде

Уравнение для $\mathbf{H}$ в среде (38.4) справедливо для статических полей. В случае переменного электрического поля нужно добавить в (38.4) не только вакуумный ток смещения (32.9), но и дополнительные молекулярные токи, возникающие за счет переменной поляризации среды. Например, в периодическом поле атомные электроны все время колеблются вдоль поля, что эквивалентно некоторому переменному току, как бы протекающему (несмотря на отсутствие проводимости) через среду. Плотность поляризационного тока $\mathbf{j}_\epsilon$ можно найти, используя выражение (15.4) $\rho_\epsilon = -\text{div } \mathbf{P}$ для плотности поляризационных зарядов и уравнение непрерывности:

$$\text{div } \mathbf{j}_\epsilon = -\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t} = \text{div } \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (39.1)$$

Отсюда

$$\mathbf{j}_\epsilon = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (39.2)$$

К этому решению можно добавить, вообще говоря, любой вектор, дивергенция которого равна нулю или, иначе говоря, ротор любого вектора. Но именно такой характер имеют молекулярные токи, возникающие под действием магнитного поля, $\mathbf{j}_\mu = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$. Таким образом, полный ток атомных электронов среды складывается из двух частей — поляризационного, или «электрического», тока и вихревого, или «магнитного»:

$$\mathbf{j}_{\varepsilon\mu} = \mathbf{j}_\varepsilon + \mathbf{j}_\mu = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (39.3)$$

Разумеется, оба этих тока создаются одними и теми же атомными электронами, совершающими сложное движение в электромагнитном поле. Если поле достаточно слабое по сравнению с атомным, оба тока можно считать независимыми, т. е. электрическое и магнитное поля возмущают движение электронов независимо друг от друга. В сильных полях между электрическим и магнитным полями возникает нелинейная связь через движение электронов.

Теперь мы можем написать *ток смещения в среде*:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (39.4)$$

Добавляя его в правую часть уравнения для стационарного $\mathbf{H}$ (38.4), получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (39.5)$$

Это и есть точное уравнение для магнитного поля в среде — одно из уравнений Максвелла (см. § 45 ниже).

Выражение (39.4) позволяет понять происхождение термина «ток смещения». В среде часть этого тока действительно связана со смещением зарядов ($\partial \mathbf{P} / \partial t$). Перенесение этого термина на другую часть ($1/4\pi$) ($\partial \mathbf{E} / \partial t$) не имеет, разумеется, никакого физического смысла и отражает лишь историю развития физики электромагнитного поля.

Из уравнений (39.5), (38.10) и (32.7) при постоянных ε и μ получим уравнение для вектора-потенциала в среде стационарного (постоянного во времени) электромагнитного поля. Для этого подставим в уравнение (39.5) $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu = \operatorname{rot} \mathbf{A} / \mu$ и учтем, что $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ (постоянные поля). При вычислении $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$ воспользуемся выражением

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla, \nabla) \mathbf{A} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.$$

Из (32.7) при $\varphi = \text{const}$ имеем условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Это условие называется *кулоновской калибровкой потенциала*. В результате находим $\mu \cdot \text{rot } \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{A}$, и с учетом (32.8) получим уравнение

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \cdot \mu \mathbf{j}. \quad (39.6)$$

Обратим внимание, что полученное *уравнение для вектора-потенциала постоянного магнитного поля в среде* полностью аналогично уравнению Пуассона в среде (15.14). Правда, в отличие от электрического поля в среде, где эффективная плотность в ε раз ниже плотности свободных зарядов, для магнитного поля, наоборот, эффективная плотность токов в μ раз возрастает по сравнению со свободными токами (ср. (15.14) и (39.6)).

Из аналогии уравнений (15.14) и (39.6) можно также записать выражение для общего решения уравнения (39.6) в однородной среде с магнитной проницаемостью μ :

$$\mathbf{A} = \mu \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (39.7)$$

Уравнение для потенциала электромагнитного поля, переменного по времени, рассмотрено в § 67 ниже.

Вычислив значение $\text{rot } \mathbf{A}$ аналогично тому, как это сделано в § 31 при выводе формулы (31.9), приходим к выражению для вектора-потенциала токов в среде:

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c} \sum_{n=1}^N I_n \int_{L_n} \frac{d\mathbf{l}_n \times \mathbf{r}_n}{r_n^3} = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (39.8)$$

Тем самым мы подтвердили справедливость выражения (38.10).

§ 40. Граничные условия для магнитного поля

Влияние однородной среды, как мы только что видели в (39.6), сводится просто к изменению эффективных внешних токов. Простейшим случаем неоднородной среды является кусочно-однородная среда с резкими бесконечно тонкими границами между отдельными областями, в каждой из которых $\mu = \text{const}$. При вычислении поля в такой среде необходимо знать граничные условия, т. е. связь между компонентами полей на границе соседних областей. Поскольку граничные условия являются локальными, т. е. связывают поля в «точке» (резкая граница), границу всегда можно считать плоской.

Граничное условие для нормальной компоненты поля $\mathbf{B}$ находится аналогично тому, как это делалось для вектора $\mathbf{D}$ в электростатике (§ 16). Из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ с помощью теоремы Гаусса получаем

$$B_n = \text{const.} \quad (40.1)$$

Отметим, однако, что физический смысл этого условия не совпадает с аналогичным ему формально условием $D_n = \text{const}$ (16.2), так как $\mathbf{B}$ описывает полное магнитное поле, а $\mathbf{D}$ является вспомогательным вектором («часть» электрического поля).

Второе граничное условие для тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{H}$, вообще говоря, нельзя получить из условия непрерывности потенциала, как это было сделано в электростатике. Действительно, основное уравнение магнитного поля (32.8) показывает, что в общем случае поле $\mathbf{H}$ непотенциально, так как $\operatorname{rot} \mathbf{H} \neq 0$. Правда, в частном случае, когда плотность внешних токов и тока смещения на границе равна нулю, можно ввести *скалярный потенциал* поля $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi. \quad (40.2)$$

При этом из условия непрерывности потенциала (конечное значение поля) получим, как и в электростатике,

$$H_t = \text{const.} \quad (40.3)$$

Оказывается, что это условие сохраняется и для конечной плотности тока. Рассмотрим замкнутый контур, охватывающий границу, большие стороны которого равны l , а меньшие стремятся к нулю (рис. V.2, а). Применим к этому контуру закон сохранения циркуляции $\mathbf{H}$ (33.3). Если плотность тока на границе конечна, то полный ток через контур стремится к нулю вместе с его площадью, а циркуляция равна $(H_{t1} - H_{t2}) \cdot l = 0$, откуда и следует условие (40.3). Это условие нарушается, если по поверхности раздела течет ток с конечной (ненулевой) линейной плотностью $\mathbf{J}$. Этот вектор лежит в плоскости границы и характеризует ток через единицу длины поверхности (рис. V.2, б). В этом случае необходимо рассмотреть отдельно две компоненты вектора $\mathbf{H}_t$ — перпендикулярную и параллельную вектору $\mathbf{J}$: $H_{t\alpha}$ и $H_{t\beta}$. Только одна из них (параллельная) сохраняется ($H_{t\beta} = \text{const}$), в то время как другая терпит разрыв: $H_{t\alpha}^{(2)} - H_{t\alpha}^{(1)} = 4\pi J/c$. Это условие легко получается из закона сохранения циркуляции $\mathbf{H}$ (33.3). В векторной форме оба условия можно записать в виде

$$\mathbf{H}_t^{(2)} - \mathbf{H}_t^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{J}, \quad (40.4)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к граничной поверхности, направленный в первую среду. Отметим, что граничные условия (40.1), (40.3) при $\mathbf{J} = 0$ формально совпадают с граничными условиями в электростатике (16.1) и (16.2).

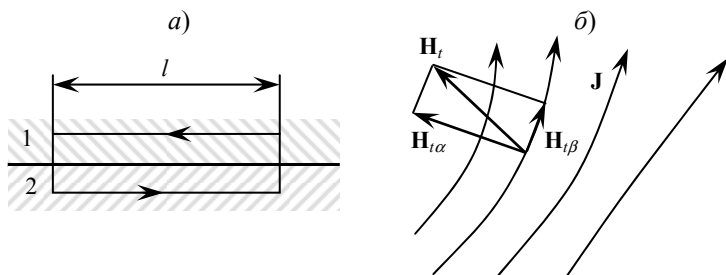


Рис. V.2. Граничные условия для вектора $\mathbf{H}$: а) вид в плоскости, ортогональной границе; б) плоскость границы с поверхностным током

Задача V.3. Найти магнитное поле H_0 в тонкой плоской щели, если поле в среде можно считать однородным.

Пусть вектор $\mathbf{B}$ в среде составляет угол θ с нормалью к щели (рис. V.3). Граничные условия (40.1), (40.3), дают

$$H_{0n} = B \cos \theta, \quad H_{0t} = B \sin \theta / \mu,$$

или

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{n} B \cos \theta + \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{n})}{\mu}.$$

В частности, если поле перпендикулярно плоскости щели ($\theta = 0$), то $H_0 = B$, а если оно параллельно щели ($\theta = \pi/2$), то $H_0 = B / \mu = H$. Этот результат показывает, как можно измерять векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в среде.

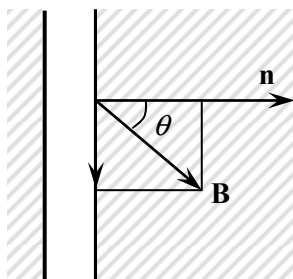


Рис. V.3. К задаче V.3

Задача V.4. Шар с магнитной проницаемостью μ_1 вносят в среду с проницаемостью μ_2 , находившуюся в однородном (до внесения шара) поле $\mathbf{B}_0 = \mu_2 \mathbf{H}_0$. Найти поле в среде и шаре, образовавшееся после внесения.

Поскольку внешние токи отсутствуют, то $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, т. е. поле $\mathbf{H}$ потенциально. Поэтому задача становится полностью аналогичной электростатической задаче II.5. А так как граничные условия для электрического и магнитного полей также аналогичны (см. выше), то и решения обеих задач формально совпадают и имеют вид (16.5) с соответствующими заменами:

$$\mathbf{m}^* = \mathbf{H}_0 a^3 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}, \quad (40.5)$$

где $\mathbf{H}_0$ — однородное поле вдали от шара. Как и в задаче II.5, поле внутри шара однородное, а вне шара — суперпозиция однородного поля $\mathbf{H}_0$ и поля диполя $\mathbf{m}^*$.

Решим теперь эту же задачу с помощью векторного потенциала $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Покажем прежде всего, что внутри каждой среды молекулярные токи отсутствуют. Действительно, $\mathbf{j}_\mu = c \operatorname{rot} \mathbf{M} = c(\mu - 1) \operatorname{rot} \mathbf{H}/4\pi$, так как каждая из сред считается однородной. Тогда общее уравнение (39.6) сводится к $\Delta \mathbf{A} = 0$. В аксиально-симметричном поле достаточно взять лишь одну азимутальную компоненту вектора $\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi \cdot A$. В сферической системе координат (полярная ось направлена вдоль $\mathbf{H}_0$ и проходит через центр шара) уравнение $\Delta \mathbf{A} = 0$ с учетом азимутальной симметрии принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi A}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\varphi A}{\partial \varphi^2} = 0.$$

При дифференцировании произведения $\mathbf{e}_\varphi \cdot A$ учтем, что

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{\mathbf{e}_r}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi^2} = -\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sin^2 \theta}.$$

Тогда уравнение для вектора-потенциала после сокращения общего множителя $\mathbf{e}_\varphi$ принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - \frac{A}{r^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (40.6)$$

Как видим, дополнительное слагаемое в левой части возникало вследствие того, что оператор Лапласа действует на вектор $\mathbf{e}_\varphi \cdot A$ (сравните II.1.4). Уравнение (40.6) решаем методом разделения переменных: $A(r, \theta) = R(r) \cdot F(\theta)$. Угловую зависимость

находим из условия, что при $r \rightarrow \infty$ поле асимптотически стремится к однородному: $A \rightarrow A_0 = B_0 \rho / 2 = (B_0 r \sin \theta) / 2$. Отсюда $F(\theta) = \sin \theta$. Подставляя в (40.6) $A(r, \theta) = R(r) \cdot \sin(\theta)$, получим уравнение для радиальной части $R(r)$:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \cdot \frac{dR}{dr} \right) - 2R = 0. \quad (40.7)$$

Аналогично электростатической задаче (см. § 11) ищем решение в виде $R(r) = r^k$. После подстановки в уравнение получаем $k = 1; -2$, откуда общее решение для потенциала есть

$$A(r, \theta) = \begin{cases} \frac{B_1 r \sin \theta}{2}, & r \leq a, \\ \frac{B_0 r \sin \theta}{2} + \frac{\mathbf{m} \sin \theta}{r^2}, & r \geq a. \end{cases} \quad (40.8)$$

Две неизвестные постоянные, имеющие смысл поля внутри шара (B_1) и эффективного магнитного момента ($\mathbf{m}$), найдем из граничных условий при $r = a$:

$$\frac{aB_1}{2} = \frac{aB_0}{2} + \frac{\mathbf{m}}{a^2}; \quad \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_2} \left(B_0 - \frac{\mathbf{m}}{a^3} \right). \quad (40.9)$$

Первое равенство выражает непрерывность вектора-потенциала или, что то же самое, условие $B_r = \text{const}$. Второе вытекает из условия $H_t \equiv H_\theta = \text{const}$. Решая уравнения (40.9) относительно B_1 , $\mathbf{m}$, получим, конечно, тот же самый результат (40.5). При сравнении нужно только иметь в виду, что $\mathbf{m} = \mu_2 \mathbf{m}^*$, так как величина m определена по полному полю $\mathbf{B}$ во второй среде (40.9), а $\mathbf{m}^*$ — по полю $\mathbf{H}$. В частном случае шара с $\mu_1 = 1$ (полость)

$$H = B_1 = \frac{3B_0}{1 + 2\mu_2} \rightarrow \frac{3}{2} H_0 \quad \text{при} \quad \mu_2 \gg 1.$$

Полученный в этой задаче результат можно применить для расчета экранирования объема от постоянного магнитного поля. Экранируемая область окружается по возможности со всех сторон каким-либо ферромагнетиком ($\mu \gg 1$). Молекулярные токи усиливают магнитное поле в толще ферромагнетика и ослабляют его снаружи, в том числе и во внутренней полости.

В качестве простейшего примера рассмотрим очень толстый сферический экран ($b \ll a$, рис. V.4). При этом условии можно вначале пренебречь

влиянием внутренней полости. Используя решение задачи V.4, найдем поле внутри экрана $B_1 = 3\mu H_0/(\mu + 2)$. Далее, можно снова использовать то же самое решение для полости радиуса b в однородном поле B_1 . Получаем

$$H_2 \approx B_1 \frac{3}{1+2\mu} = H_0 \frac{9\mu}{(\mu+2)(1+2\mu)}. \quad (40.10)$$

При $\mu \gg 1$ достигается весьма большой коэффициент экранирования: $k = H_0/H_2 \approx 2\mu/9$. Более выгодными, однако, оказываются многослойные экраны. Точный расчет их является довольно громоздким. Вместо этого обычно применяется приближенный метод магнитных цепей.

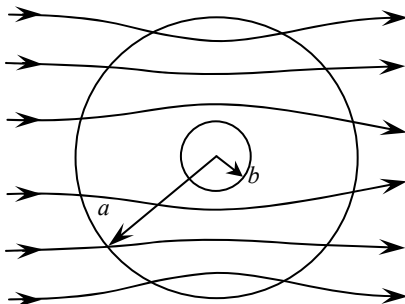


Рис. V.4. Магнитное экранирование

Граничные условия для векторного потенциала следуют из граничных условий для поля (40.1), (40.3), (40.4), т. е. они определены не для самого потенциала, а для его производных.

Как и в электростатике, магнитное поле в веществе в ряде случаев проще рассчитать, используя *метод изображений* (задача V.5).

Задача V.5. Проводник с током I расположен параллельно плоской границе раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Найти магнитное поле тока.

Эта задача во многом аналогична электростатической задаче II.6; как и там, введем два дополнительных тока: I_1 — изображение тока I в среде μ_2 и ток I_2 — изображение тока I в среде μ_1 . Соответственно, магнитное поле в среде μ_1 создается токами I , I_1 , в среде μ_2 — током I_2 (рис. V.5). Будем вначале считать, что все три тока направлены вдоль оси z («на нас»), а результат даст соответствующие знаки токов. Точно так

же считаем, что расстояния токов от границы раздела разные. Из соображений симметрии ясно, что расположены они на оси y . Запишем граничные условия в точке $(x, 0)$:

$$B_n + B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \frac{\mu_1 I x}{h^2 + x^2} + \frac{\mu_1 I_1 x}{h_1^2 + x^2} = \frac{\mu_2 I_2 x}{h_2^2 + x^2},$$

$$H_\tau + H_{1\tau} = H_{2\tau} \Rightarrow \frac{I h}{h^2 + x^2} - \frac{I_1 h_1}{h_1^2 + x^2} = \frac{I_2 h_2}{h_2^2 + x^2}.$$

Как и в задаче II.6, эти условия выполняются при любом x , если

$$h_1 = h_2 = h.$$

Тогда получаем два уравнения для токов $I_{1,2}$:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} I_2 - I_1 = I,$$

$$I_2 + I_1 = I.$$

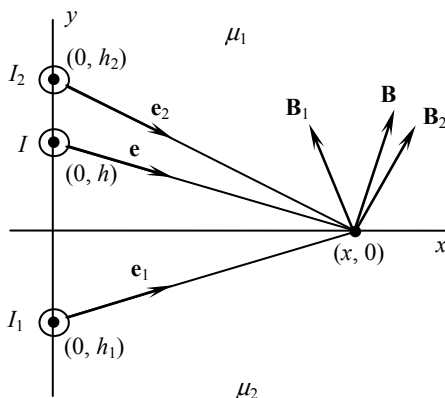


Рис. V.5. Проводник с током вблизи плоской границы двух магнитных сред и его токи-изображения

Отсюда

$$I_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot I, \quad I_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot I,$$

$$\mathbf{B}_{\mu_1} = \frac{2I}{cr} \mu_1 \left[(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_0) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1) \right],$$

$$\mathbf{B}_{\mu_2} = \frac{2I}{cr} \cdot \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2),$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, x, y — координаты точки наблюдения, $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — единичные векторы вдоль оси z и из точек $(0, \pm h)$ в точку наблюдения (рис. V.5). Отметим, что при $\mu_1 > \mu_2$ поле в среде μ_1 усиливается по сравнению со средой без границы ($\mu_1 = \mu_2$), а при $\mu_1 < \mu_2$ — ослабляется.

§ 41. Магнитные цепи

Поместим в однородное магнитное поле длинный ферромагнитный стержень с $\mu \gg 1$ (рис. V.6). Тогда магнитный поток будет проходить в основном по стержню. Действительно, граничное условие $H_t = \text{const}$ на боковой поверхности стержня показывает, что полное магнитное поле $\mathbf{B}$ внутри стержня в μ раз больше, чем снаружи. Отсюда возникает аналогия с электрическим током, который течет только внутри проводников. Поэтому длинный ферромагнетик часто называют магнитопроводом. Разумеется, эта аналогия является чисто формальной. Тем не менее она может быть выражена количественно. Основой точного описания магнитного потока как некоторого «тока» является закон сохранения циркуляции вектора $\mathbf{H}$ (33.3):

$$\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} I_s, \quad (41.1)$$

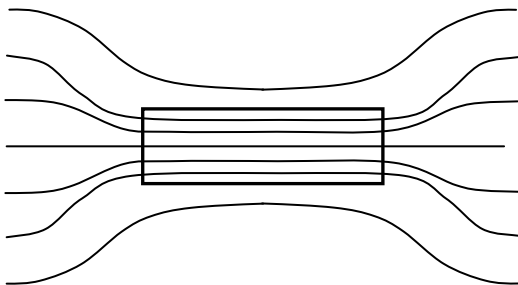


Рис. V.6. Ферромагнитный стержень в однородном магнитном поле

который можно сравнить с выражением для ЭДС: $\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стр}}) d\mathbf{l}$. Вектор $\mathbf{H}$ оказывается, таким образом, аналогичным полному полю (включая стороннее), определяющему плотность тока: $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стр}})$. В магнитном поле роль плотности тока играет индукция $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, нормальная компонента

которой сохраняется при переходе через границу двух сред, как это имеет место и для плотности тока. Магнитная проницаемость, следовательно, аналогична электрической проводимости.

В случае длинных и тонких магнитопроводов уравнение для магнитного потока можно написать в более привычной «электротехнической» форме. Рассмотрим замкнутый неразветвленный магнитопровод и будем считать магнитное поле постоянным по его поперечному сечению. Тогда $H = \Phi/\mu S$ и уравнение (41.1) принимает следующий вид:

$$\frac{4\pi I}{c} = \Phi R_\mu, \quad R_\mu = \oint \frac{dx}{\mu(x)S(x)}, \quad (41.2)$$

что в точности совпадает с «электрической» формулой (21.7). Величина R_μ называется *магнитным сопротивлением*.

Обратная величина

$$L = \frac{4\pi}{R_\mu} \quad (41.3)$$

характеризует магнитную проводимость цепи и называется *индуктивностью* электрического проводника, ток в котором возбуждает магнитное поле. Индуктивность характеризует ЭДС индукции, возникающую в этом проводнике при изменении тока (см. § 46).

Для расчета разветвления магнитных цепей можно использовать аналог законов Кирхгофа (§ 24). Первый закон следует в конечном счете из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. В отличие от электрического уравнения $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, справедливого только в стационарном случае, уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ справедливо всегда.

В практических расчетах обычно используется упрощенное правило

$$\sum \Phi_i = 0, \quad (41.4)$$

где Φ_i — потоки в отдельных магнитопроводах, образующих узел. Приближенность соотношения (41.4) состоит в пренебрежении так называемыми потоками рассеяния вне магнитопроводов; иными словами, принимается, что магнитный поток идет только внутри магнитопроводов. Для магнитного потока это гораздо худшее приближение, чем для электрического тока. В последнем случае отношение проводимостей металла и изолятора действительно очень велико, так что практически всегда можно пренебречь утечками через изолятор. Для обычного магнитопровода $\mu \sim 10^3$, т. е. отличие от окружающей среды ($\mu \approx 1$) не столь велико. Нужно еще учесть, что поперечное сечение магнитопровода, как правило, много меньше поперечного сечения рассеянного потока. Поэтому сопротивление рассеяния может ока-

заться сравнимым с сопротивлением магнитопровода, и в точных расчетах его необходимо учитывать. Магнитная цепь похожа в этом отношении на голый электрический проводник, помещенный в плохо проводящую среду, например закопанный в землю. С другой стороны, и для магнитопровода существует экзотический «изолятор» — сверхпроводник, магнитное поле внутри которого всегда равно нулю (§ 54). Если магнитное поле переменное, причем его частота достаточно велика, то «магнитным изолятором» может служить любой хороший проводник. Магнитное поле не проникает в него из-за так называемого скин-эффекта (§ 87).

Второй закон Кирхгофа для магнитного потока вытекает из основного уравнения магнитных цепей (41.2).

Метод магнитных цепей позволяет, в частности, оценивать действие магнитных экранов сложной формы (см., например, рис. V.7). Эквивалентная схема магнитной цепи такого экрана показана на этом же рисунке. Здесь R_1 , R_2 — сопротивления двух половинок цилиндрического экрана, по которым растекается магнитный поток Φ , а R_i — сопротивление рассеяния внутри экрана. Для указанных размеров экрана $R_1 \sim R_2 \sim 4b/\mu\Delta$ (на единицу длины экрана в направлении, перпендикулярном рисунку); $R_i \sim b/a \sim 1$. Мы считаем для простоты, что $a \sim b$. Отсюда поток внутри экрана

$$\Phi_i = \frac{\Phi}{R_i} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i} \right)^{-1} \sim \frac{4b}{\mu\Delta} \Phi,$$

где принято, что μ достаточно велико ($\mu \gg 2b/\Delta$). Поток Φ (на единицу длины) можно приближенно оценить как $\Phi \sim 2aH_0$. С другой стороны, $\Phi_i \sim 2aH_i$, откуда коэффициент экранирования $k = H_0/H_i \sim \mu\Delta/4b$. Для толстого экрана ($\Delta \sim b$) получается чересчур хорошее согласие с точной формулой (40.10), из которой следует $k = 2\mu/9$, особенно если учесть, что последняя относится к сферическому экрану. Для кругового цилиндра радиуса b точное решение дает $k = \mu\Delta/2b$.

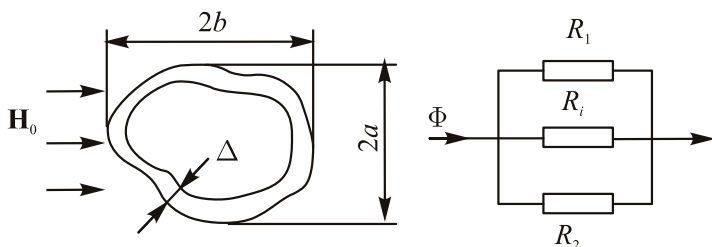


Рис. V.7. Цилиндрический магнитный экран и его эквивалентная схема

Задача V.6. Найти поле электромагнита с узким зазором (рис. V.8).

Предположим, что можно пренебречь потоками рассеяния (см. задачу V.7 ниже). Тогда из эквивалентной схемы получаем

$$\Phi = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{NI}{R_{\text{ж}} + R_d},$$

где $R_d \approx d/S$, $R_{\text{ж}} = L_{\text{ж}}/\mu S_{\text{ж}}$, $L_{\text{ж}}$, $S_{\text{ж}}$ — периметр и сечение магнитопровода (железа). Окончательно имеем

$$H_d \approx \frac{4\pi}{c} \frac{NI}{d + \frac{L_{\text{ж}} S}{\mu S_{\text{ж}}}} \approx \frac{4\pi NI}{cd}.$$

Последнее приближение соответствует обычной ситуации, когда можно пренебречь магнитным сопротивлением железа. Таким образом, электромагниты позволяют получать в небольших зазорах сильные поля, ограниченные только насыщением железа (§ 42).

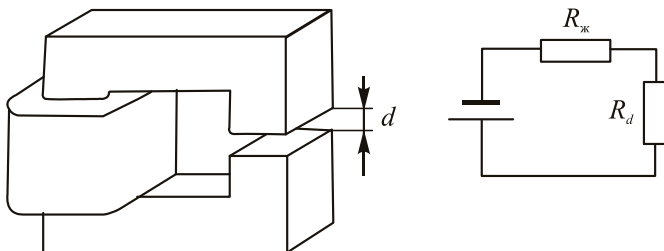


Рис. V.8. Электромагнит с узким зазором и его эквивалентная схема

Задача V.7. Найти рассеянное магнитное поле в зазоре электромагнита с очень длинными полюсами (рис. V.9, $b \ll l, a$).

Разбивая условно полюса и зазор на отдельные участки длины Δ , получим эквивалентную схему, изображенную на том же рисунке. Здесь $R_1 \approx \Delta/\mu ha$ — сопротивление участка полюса, а $R_2 \approx d/\mu a \Delta$ — сопротивление воздушного зазора, соответствующего этому участку. Будем считать длину отдельного участка Δ достаточно малой, поскольку рассеянное поле распределено непрерывно. Последнее мы будем считать однородным по y , что справедливо для достаточно узкого зазора. Законы Кирхгофа дают ($\Delta = dx$)

$$d\Phi = -H(x)a dx; \quad d(H(x)b) = -2\Phi(x)R_1 = -2\Phi(x)\frac{dx}{\mu ah}.$$

Первое уравнение выражает уменьшение потока вдоль полюсов за счет потока рассеяния. Второе дает падение «магнитного напряжения» (Hb) на «сопротивлениях» R_1 . Дифференцируя второе уравнение по x и подставляя в него первое, получим

$$\frac{d^2 H(x)}{dx^2} = \frac{2}{\mu b h} H(x).$$

Считая полюса достаточно длинными, возьмем только убывающее решение этого уравнения:

$$H(x) = H_0 e^{-kx}, \quad k^2 = \frac{2}{\mu b h}.$$

Поле H_0 найдем, пренебрегая магнитным сопротивлением железа внутри обмотки:

$$H_0 = \frac{4\pi N I}{c b}.$$

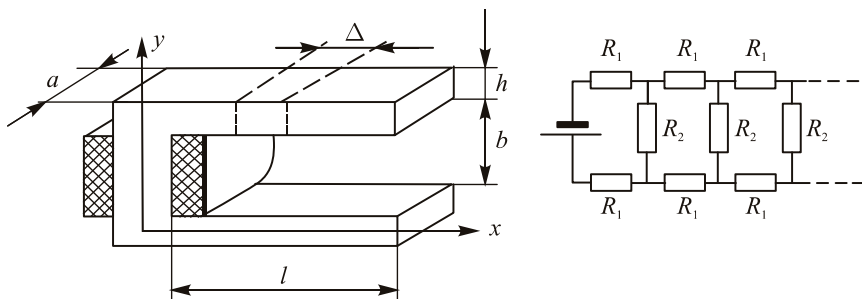


Рис. V.9. Электромагнит с длинными полюсами и его эквивалентная схема

Задача V.8. Оценить провисание магнитного поля в узкую длинную щель, ограниченную сверхпроводником.

Так как магнитное поле не проникает в сверхпроводник (см. § 54), картина силовых линий (рис. V.10) качественно такая же, как и в задаче V.7. Поэтому для оценки можно использовать решение этой задачи, положив $\mu = 1$, $b = h = d/2$. Отсюда $k = 2\sqrt{2}/d$, т. е. поле затухает в щели на расстоянии $\sim d/3$. Точное решение дает $k = \pi/d$.

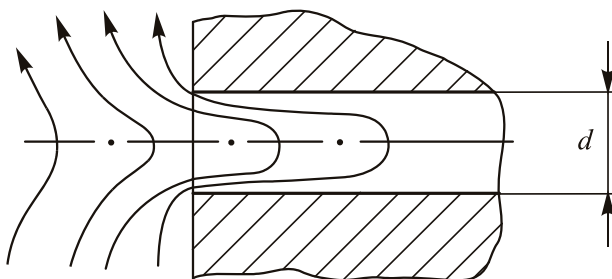


Рис. V.10. Провисание магнитного поля в щель, ограниченную сверхпроводником

§ 42. Понятие о ферромагнетизме

Ферромагнетиками, как уже сказано выше (§ 37), называются вещества с высокой магнитной проницаемостью, $\mu \gg 1$. Ферромагнетиками (от лат. *ferrum* — железо) являются, например, железо (сталь), никель, кобальт, некоторые редкоземельные элементы и их сплавы. Вследствие специфических квантовых эффектов электростатическое взаимодействие электронов соседних атомов зависит от направления спинов электронов таким образом, что для некоторых веществ (ферромагнетиков) оно ориентирует спиновые и/или орбитальные моменты электронов параллельно друг другу. В результате возникает спонтанное (самопроизвольное, т. е. без внешнего магнитного поля) намагничение вещества. Правда, в отсутствие внешнего поля размер области, в которой намагничение имеет определенное направление, довольно мал ($\sim 10^{-2}$ мм). Области эти называются *доменами* (от лат. *dominium* — владение). Соседние домены намагничены, как правило, в противоположных направлениях. Это связано с тем, что магнитные силовые линии одного домена замыкаются через соседние. Таким образом, в отсутствие внешнего поля макроскопический образец ферромагнетика, содержащий большое число доменов, практически не намагничен.

Во внешнем поле ферромагнетик перемагничивается в направлении поля. При этом вначале, при росте внешнего поля от нуля, стенки доменов, направление намагниченности которых совпадает с направлением внешнего поля, сдвигаются, увеличивая размер своего домена за счет соседей с «неправильной» ориентацией намагничения. По мере роста внешнего поля этот процесс замедляется, и дальнейший рост намагничения происходит в результате изменения ориентации намагничения в «неправильных» соседях. Эти изменения происходят скачками, так, если на перемагничиваемый сердечник намотать обмотку и подсоединить ее (через усилитель) к ди-

намику, то можно услышать характерные щелчки. В конце концов, весь образец намагничивается в одном направлении. Оказывается, что для этого нужны, как правило, сравнительно небольшие внешние поля ($H \sim 1$ Гс, табл. V.1)^{*)}. Так как при этом полное поле внутри ферромагнетика $B \sim 10^4$ Гс, то эффективное $\mu \sim 10^4$. В действительности последняя величина является весьма условной, так как зависимость $B(H)$ не только сильно нелинейна, но и неоднозначна (зависит от предыстории процесса намагничения). Явление это носит название *гистерезиса* (ср. § 27). Он характеризуется так называемой петлей гистерезиса (рис. V.11). Если в начальный момент намагничение полностью отсутствует ($B=0$, точка 1), то при увеличении внешнего поля процесс намагничения будет характеризоваться некоторой кривой (1–2), правый край которой выходит практически на плато, называемое насыщением, когда вектор намагничения принимает максимально возможное значение:

$$M_s = \mathbf{m}_s n. \quad (42.1)$$

Здесь $\mathbf{m}_s$ — спиновый магнитный момент электрона, а n — плотность электронов, участвующих в создании спонтанной намагниченности. Полное магнитное поле

$$B = H + 4\pi M_s \approx 4\pi M_s = B_s. \quad (42.2)$$

Небольшим ростом B за счет H в области насыщения можно обычно пренебречь и считать, что $B \approx B_s$.

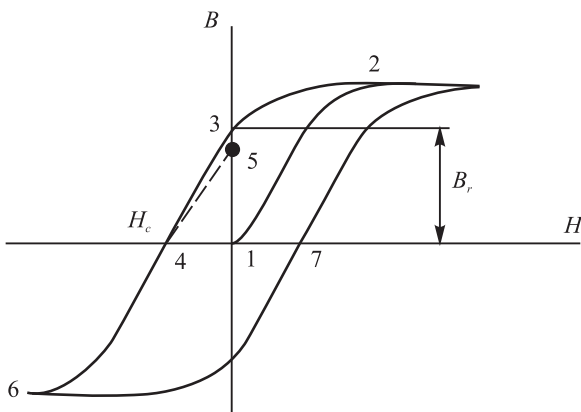


Рис. V.11. Петля гистерезиса для ферромагнетика

^{*)} Напомним, что фактически намагничивающим полем является полное поле B , которое не мало. Приведенная выше фраза имеет поэтому тот смысл, что для намагничения ферромагнетика требуются малые токи, определяемые вспомогательным полем H .

Если теперь уменьшать внешнее поле, то процесс размагничивания будет описываться уже другой кривой (2–3), идущей выше кривой намагничивания. В частности, при полном выключении внешнего поля в ферромагнетике сохраняется некоторая остаточная индукция B_r (точка 3). Это остаточное намагничение причиняет немало хлопот конструкторам электромагнитов, особенно когда речь идет о точных приборах. По этой же причине попавшие в магнитное поле механические часы начинают сильно «врать» вследствие остаточного намагничивания стальных деталей.

Чтобы полностью размагнитить ферромагнетик, нужно наложить некоторое обратное поле (точка 4). Величина его называется коэрцитивной силой (H_c). Если теперь выключить внешнее поле, то ферромагнетик снова намагнитится почти до B_r (точка 5), так что испорченные в магнитном поле часы не так-то просто размагнитить (см. ниже). Если же увеличивать обратное поле дальше точки 4, то мы снова попадем в область насыщения другого знака. Обратная кривая (6–7–2) расположена симметрично кривой (2–4–6).

Неполное размагничение при уменьшении внешнего поля связано со своего рода «трением» соседних доменов. Поэтому при обходе петли гистерезиса энергия магнитного поля частично переходит в тепло. Тепловые потери оказываются пропорциональными площади петли гистерезиса (см. § 46). Так как остаточное намагничение связано с трением, его можно убрать резким ударом — прием, который не очень-то подходит для часов, ускорителей и других точных приборов. Вместо этого размагничение производится обычно в переменном поле, амплитуда которого медленно уменьшается до нуля. Петля гистерезиса при этом стягивается в точку 1.

Начальное намагничение образца происходит в соответствии с *законом Рэлея* (J. W. Rayleigh, 1887 г.), установленным им эмпирически:

$$M = \chi H \pm RH^2, \quad (42.3)$$

где χ — обратимая *магнитная восприимчивость*, R — постоянная Рэлея, знаки «+» и «–» соответствуют $H \lesseqgtr 0$.

В табл. V.1 приведены основные характеристики ферромагнитных материалов. Величина μ в таблице определяется как $\mu = dB/dH$ для ветви намагничивания (1–2). Это так называемая *дифференциальная магнитная проницаемость*. На рис. V.11 видно, что эта функция $\mu(H)$ проходит через максимум, величина которого и представлена в таблице. Максимум μ обычно достигается в сравнительно слабых полях ($B \sim 10^3$ Гс).

Таблица V.1. Характеристики ферромагнетиков

Ферромагнетики	H_c , Э	B_s , кГс	B_r , Гс	$\mu_{\max}$
«Мягкие»	0,1–1	8–20	10–100	10^4 – 10^6
«Жесткие»	500	20	10^4	10^2 – 10^4

«Жесткие» ферромагнетики используются для изготовления постоянных магнитов (§ 43) или электромагнитов, в которых магнитное поле медленно меняется во времени. «Рекордсменом» среди жестких ферромагнетиков является *пермендюр* (от англ. *permeability* — проницаемость + *durable* — прочный). Это сплав 49% Fe + 49% Co + 2% V, имеющий $B_s = 2,4$ Тл. «Мягкие» материалы применяются в тех случаях, когда нужно избежать остаточных полей, но использовать большое значение μ , например, в трансформаторах и электромагнитах (§ 53). Специфические магнитные свойства имеют сплавы железа и никеля с добавками молибдена, хрома, кремния, алюминия — так называемые *пермаллои* (*permeability* — проницаемость + *alloy* — сплав). У них высокая магнитная проницаемость — до $\mu \approx 10^5$ при сравнительно невысоких полях насыщения — $B_s \sim 0,5\text{--}1,6$ Тл. Эти ферромагнетики, изготавливаемые в виде тонкой ($\leq 0,1$ мм) ленты, применяются для трансформаторов в высокочастотной электронике.

При нагревании ферромагнетика спонтанное намагничение B_s ослабляется и выше некоторой температуры исчезает совсем — ферромагнетик превращается в парамагнетик. Температура этого перехода (фазовый переход второго рода) называется *точкой Кюри* в честь французского физика Пьера Кюри (P. Curie, 1895 г.), который впоследствии прославился своими работами по радиоактивности. Любопытно отметить, что «эффект Кюри» открыл еще 300 лет назад Вильямс Гильберт (W. Gilbert, 1600 г.), лейб-медик английской королевы Елизаветы, известный своими исследованиями по магнетизму. Разрушение ферромагнетизма при нагревании объясняется тем, что энергия теплового движения (температура) сравнивается с энергией электростатического взаимодействия «ферромагнитных» электронов.

Отметим, что специфическое взаимодействие электронов, приводящее к спонтанному намагничению вещества, имеет ту же природу, что и так называемые «химические силы» (ковалентные). Основное отличие связано с тем, что для большинства веществ последнее взаимодействие ориентирует спины соседних электронов противоположно друг другу; это приводит к определенной структуре молекул. В ферромагнетиках же спины ориентируются параллельно, вызывая спонтанное намагничение макроскопических областей — доменов. Поскольку тип ориентации спинов (например, параллельно или антипараллельно) чувствителен к структуре вещества, одни сплавы, содержащие железо или никель, обладают очень сильным ферромагнетизмом, тогда как другие остаются парамагнитными вплоть до самых низких температур. К последним относятся, например, некоторые виды нержавеющей стали. Интересно отметить, что в деформированном состоянии (при растяжении) эта сталь может стать ферромагнетиком.

Своеобразные «немагнитные ферромагнетики», или *антиферромагнетики*, образуются, например, при соединении чистых ферромагнетиков (Fe, Co, Ni) с галогенами — NiF_2 , CoCl_2 и кислородом — FeO . Такие соединения имеют доменную структуру, но в ней, в отличие от ферромагнетиков (рис. V.12, а), магнитные моменты атомов разного сорта ориентированы антипараллельно, так что магнитный момент домена равен нулю (рис. V.12, б). Поэтому они не обладают магнитными свойствами ферромагнетиков. В этих веществах наблюдается своеобразный магнитный резонанс, аналогичный ЭПР и ЯМР, — резонансное поглощение энергии переменного магнитного поля, переворачивающего магнитные моменты (в данном случае) какого-то сорта атомов, входящих в состав доменов.

Веществ, обладающих антиферромагнитными свойствами, довольно много. Кроме указанных выше соединений, к ним относятся соли MnCO_3 , CuSO_4 и многие другие, а также кислород при $T < 24 \text{ К}$ в твердом состоянии.

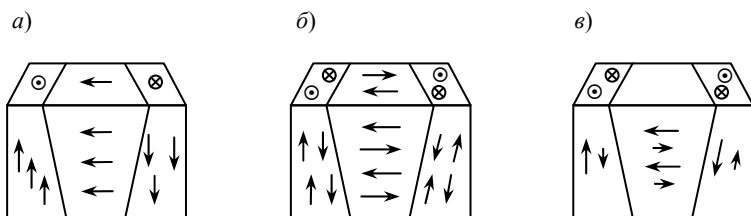


Рис. V.12. Схематическое изображение структуры доменов в магнитных веществах: а) ферромагнетик; б) антиферромагнетик; в) феррит. Стрелками показаны направления и относительная величина магнитных моментов атомов вещества

Промежуточным, между ферро- и антиферро-, видом магнетизма является практически очень важный *ферримagnetизм*, который наблюдается в веществах, именуемых *ферритами*. Их удельное сопротивление меняется в широком диапазоне $0,1\text{--}10^6 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, тогда как, например, для стали оно около $10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. По химическому составу ферриты являются смесью окислов железа, цинка и других элементов. Магнитные свойства ферритов определяются также их доменной структурой, в которой атомы разного сорта, входящие в состав домена, имеют противоположно направленные моменты, как и в антиферромагнетиках. Но, в отличие от последних, суммарный магнитный момент домена отличен от нуля (рис. V.12, в). В результате ферриты обладают магнитными свойствами, но их магнетизм слабее, чем у ферромагнетиков. Так, для ферритов типичные значения $B_s \sim 1,5\text{--}4 \text{ Тл}$, а максимальная магнитная проницаемость, в зависимости от состава феррита, изменяется в очень широком диапазоне: $\mu_{\text{max}} \sim 20\text{--}7000$. Ферриты играют

важную роль в радиотехнике из-за отсутствия в них скин-эффекта (§ 87). Индукция насыщения ферритов заметно меньше, чем для стали (1–3 кГс, типичны значения $\mu \sim 10^3$, $\varepsilon \sim 10$).

Явление, аналогичное по своей природе ферромагнетизму, имеет место и в диэлектриках, оно так и называется — *ферроэлектричество* или *сегнетоэлектричество*. Последний термин связан с тем, что явление было обнаружено впервые для сегнетовой соли. Сегнетоэлектрики также характеризуются большим $\varepsilon \sim 10^2$ – 10^4 и нелинейной зависимостью $D(E)$ типа петли гистерезиса. Спонтанная поляризация сегнетоэлектриков объясняется тем, что дипольный момент их молекул направлен вдоль электронного спина.

§ 43. Постоянные магниты

Остаточное намагничение ферромагнетиков позволяет создавать так называемые постоянные магниты, т. е. получать магнитное поле без внешнего тока за счет молекулярных токов, точнее за счет специфического квантового «вращения» электронов, ответственного за их спиновый магнитный момент (§ 36). Остаточное намагничение железной руды и было первым примером магнитных явлений, известным людям с незапамятных времен. Вследствие нелинейной зависимости $B(H)$ расчет постоянных магнитов достаточно сложен. Рассмотрим несколько простейших примеров.

Пусть вначале все пространство заполнено однородным ферромагнетиком. В отсутствие внешних токов в однородной среде $H = 0$, и состояние ферромагнетика характеризуется точкой 3 на рис. V.11, т. е. полное магнитное поле равно остаточному: $B = B_r$. Такая же картина будет, когда бесконечно длинный стержень из ферромагнетика намагничен вдоль оси.

В случае тонкой, но очень большой ферромагнитной пластинки (размеры $d \times l \times l$, $d \ll l$), намагниченной в поперечном направлении (вдоль d), поле вне ферромагнетика отсутствует. Действительно, внутри него поле конечно, а снаружи — однородно (бесконечная протяженность пластинки), внешние токи отсутствуют, значит, $\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 0$. Выбрав в качестве пути интегрирования прямую, совпадающую с силовой линией, получим, что поля H вне и внутри пластинки относятся как $d/l \ll 1$. Отсюда из непрерывности B_n следует, что поле B внутри пластинки пренебрежимо мало, а вспомогательное поле H отрицательно: $H = B - 4\pi M \approx -4\pi M = -H_c$, т. е. оно направлено против направления намагниченности пластинки M и равно по величине коэрцитивной силе (точка 4 на рис. V.11).

Не следует удивляться, что поле $H \neq 0$, несмотря на отсутствие внешних токов. Это является следствием неоднородности среды.

Полученный результат ($B = 0$) можно пояснить с помощью наглядной картины намагничения среды, показанной на рис. V.1. Как ясно из этого рисунка, полная система молекулярных токов эквивалентна обтекающему току на границе среды. Для бесконечной пластинки этот ток лежит на бесконечности, и, соответственно, его магнитное поле равно нулю. Если же мы обратимся к предыдущему примеру (продольно намагниченный стержень), то здесь система молекулярных токов эквивалентна длинному соленоиду, так что $B = B_r$.

Попробуем провести расчет для более реального случая намагниченного стержня конечной длины. Для упрощения задачи свернем его в кольцо с зазором d (рис. V.13), настолько узким, чтобы поле в нем H_d можно было принять однородным ($d \ll D$). Кроме того, пренебрежем потоками рассеяния вне кольца. Тогда поле внутри кольца также можно считать однородным. Условие отсутствия внешних токов $\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 0$ дает $H_d d + H_L L = 0$, где H_L — вспомогательное поле, L — длина стержня. В комбинации с граничным условием $H_d = B_L$ получим $H_L = -B_L d/L$, т. е. вспомогательное поле H направлено против полного поля B . Таким образом, состояние ферромагнетика в этом случае характеризуется участком (3–4) петли гистерезиса (рис. V.11). Примем для простоты, что этот участок можно представить линейной зависимостью

$$B = B_r \left(1 + \frac{H}{H_c} \right), \quad (43.1)$$

где коэрцитивная сила H_c всегда считается положительной. В результате найдем

$$B_L = H_d = \frac{B_r}{1 + \frac{B_r d}{H_c L}}. \quad (43.2)$$

Для достаточно узкого зазора $d \ll H_c L/B_r$ поле в стержне стремится к остаточному: $B_L \rightarrow B_r$. Если же зазор широкий ($d \gg H_c L/B_r$), то B_L определяется коэрцитивной силой:

$$B_L \approx H_c \frac{L}{d} \ll B_r. \quad (43.3)$$

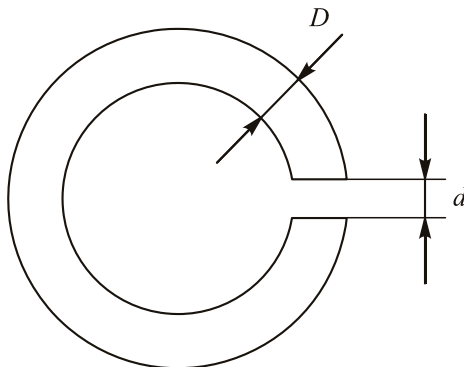


Рис. V.13. Постоянный С-образный магнит

Поучительно сравнить этот результат с задачей V.6 в § 41, где рассмотрен кольцевой электромагнит с зазором. Прежде всего, ясно, что в последней задаче не учитывалось намагничение, так как в отсутствие тока $H_d = 0$. Далее, оба выражения для H очень похожи друг на друга, причем роль μ для постоянного магнита играет величина B_r/H_c , а «ампер-витки» молекулярных токов связаны с остаточным полем: $(NI)_\mu \approx B_r dc/4\pi$.

Рассмотренная задача дает возможность оценить поле прямого стержня конечной длины L . В последнем случае при вычислении циркуляции H положим $\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) \approx B_L D + H_L L$, где $D \ll L$ — диаметр стержня. Это связано с тем, что поле вне стержня уменьшается в несколько раз на расстоянии порядка D от его торца. Таким образом, рассматриваемая задача эквивалентна предыдущей с $d \sim D$. В частности, стержень можно считать бесконечным, если $L \gg B_r D/H_c$.

Задача V.9. Найти поле шарообразного постоянного магнита.

Воспользуемся решением задачи V.4 (§ 40) о возмущении однородного магнитного поля сферическим магнетиком. Отличие от рассматриваемой задачи состоит в том, что, во-первых, нет внешнего однородного поля и, во-вторых, связь B и H внутри магнита определяется петлей гистерезиса, участок которой мы будем по-прежнему аппроксимировать линейным выражением (43.1). Вектор-потенциал поля можно, следовательно, записать в виде (см. 40.8)

$$A(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Br \sin \theta}{2}, & r \leq a, \\ \frac{\mathbf{m} \sin \theta}{r^2}, & r \geq a, \end{cases} \quad (43.4)$$

где a — радиус магнита, B — поле внутри магнита, а $\mathbf{m}$ — его магнитный момент. Последний можно выразить через поля внутри магнита:

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{B-H}{4\pi} \right) = \frac{(B-H)a^3}{3}. \quad (43.5)$$

Для определения полей B и H нам нужно два уравнения. Одно из них — (43.1), другое получим из условия непрерывности вектора-потенциала на границе или, что то же самое, $B_r = \text{const}$, $Ba/2 = \mathbf{m}/a^2 = (B-H)a/3$, откуда

$$H = -B/2. \quad (43.6)$$

Проверим, действительно ли второе граничное условие ($H_\theta = \text{const}$) не противоречит этому результату:

$$\frac{\mathbf{m} \sin \theta}{a^3} = H_\theta = -H \sin \theta, \quad (43.7)$$

что приводит к тому же соотношению (43.6).

Постоянные магниты находят достаточно широкое применение в технике и различных физических приборах, в том числе в устройствах фокусировки заряженных частиц (см. задачу V.10). Первые постоянные магниты массового применения были сделаны на основе феррита бария (табл. V.2). В 90-х гг. прошлого столетия появились магниты на основе соединений редкоземельных элементов с кобальтом (самарий-кобальт) и железом (неодим-феррум-бор), имеющие в несколько раз бóльшие поля.

Таблица V.2. Основные характеристики некоторых постоянных магнитов

Тип	B_r (Тл)	H_c (кА/м)
BaFe ₁₂ O ₁₂	0,36	30
FeCrCo	1,3–1,5	40–60
Sr	0,35–0,40	250–320
SmCo ₅	0,9–1,0	800–2400
Sm ₂ Co ₁₇	1,0–1,1	800–2400
Nd ₂ Fe ₁₄ B	1,2–1,4	800–2400

Задача V.10. Найти магнитное поле в воздушном зазоре дипольного магнита (рис. V.14, а) и градиент поля в зазоре квадрупольного магнита (рис. V.14, б), выполненных на основе постоянных магнитов.

а) Если пластины постоянных магнитов дипольного магнита намагничены вдоль их минимального размера и ориентированы одинаково, в его зазоре создается однородное поле, если $b_d \ll h$. Тогда, пренебрегая вкладом в циркуляцию интеграла от H по

железу ($\mu \gg 1$) и повторяя вычисления (43.1), (43.2), приходим к формуле (43.2) в обозначениях рис. V.14, а:

$$B_d = \frac{B_r}{1 + \frac{B_r}{H_c} \cdot \frac{b_d}{d_\mu}}. \quad (43.8)$$

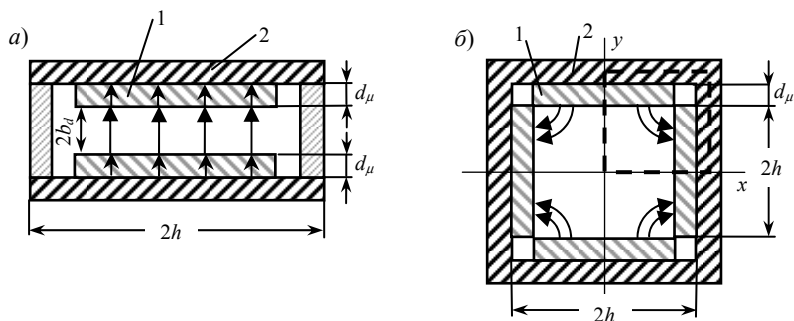


Рис. V.14. Дипольный (а) и квадрупольный (б) магниты на основе постоянных магнитов: 1 — постоянный магнит, 2 — железный магнитопровод. Стрелки $\rightarrow$ — силовые линии поля в зазоре, $\rightarrow$ — в магнетике, d_μ — толщина магнетика

В приближении тонкого зазора $b_d \ll d_\mu H_c / B_r \sim d_\mu$ получим

$$B_d = B_r.$$

Если же зазор большой, $b_d \gg d_\mu H_c / B_r$, то поле в зазоре существенно меньше:

$$B_d \approx H_c \cdot \frac{d_\mu}{b_d} \ll H_c \sim B_r.$$

б) Магнитное поле в пространстве между постоянными магнитами можно приближенно найти, воспользовавшись результатами задачи IV.4, поскольку форма полей на рисунках IV.4 и V.14, б имеет одинаковый вид. Поэтому можно предположить, что (по крайней мере вблизи осей x и y) поле в зазоре квадрупольной линзы на постоянных магнитах описывается формулами (28.9):

$$B_x = G \cdot x, \quad B_y = -G \cdot y. \quad (43.9)$$

Как в предыдущей задаче, пренебрежем вкладом поля в железе. Вычисляя циркуляцию магнитного поля, выберем в качестве участков контура (пунктир на рис. V.14б с обходом против часовой стрелки) отрезок оси x ($0 \leq x \leq h + d_\mu$), два отрезка железного ярма и отрезок оси y ($(h + d_\mu \geq y \geq 0)$). Получим

$$G \frac{h^2}{2} + 2H_\mu \cdot d_\mu + G \frac{h^2}{2} = 0, \quad (43.10)$$

где H_μ — вспомогательное поле в магните, связанное с полем в магните B_μ соотношением (43.1). Из граничного условия $B_x(h, 0) = Gh = B_\mu$ и равенств (43.1) и (43.10), исключив H_μ и B_μ , находим

$$G = \frac{B_r}{h \left(1 + \frac{B_r}{H_c} \cdot \frac{h}{2d_\mu} \right)}. \quad (43.11)$$

При $B_r \sim H_c$ (табл. V.2)

$$G \approx \frac{2d_\mu}{h^2} \cdot H_c.$$

В природе существуют гигантские магниты — планеты и звезды. Так, например, наша Земля представляет собой магнитный диполь с моментом $\mathfrak{M} = 8,3 \cdot 10^{22} \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Направление этого диполя почти совпадает с осью вращения Земли (угол между ними составляет около $11,5^\circ$), что, несомненно, указывает на связь этих двух явлений. Максимальное поле на полюсах достигает $0,7 \text{ Гс}$; поле на экваторе — около $0,4 \text{ Гс}$. В северном полушарии находится южный магнитный полюс, т. е. вектор $\mathbf{B}_{\text{Earth}}$ направлен на поверхности Земли с юга на север. Магнитные полюса Земли прецессируют вокруг оси ее вращения, при этом скорость дрейфа полюсов меняется во времени. Так для магнитного полюса в северном полушарии эта скорость составляла около 10 км/год в 1970 г. и возросла до 64 км/год в 2009 г. *Магнитосфера Земли* имеет достаточно сложный вид. Дипольный характер магнитного поля Земли искажается на расстояниях больше ее нескольких радиусов в результате воздействия *солнечного ветра* — потока заряженных частиц водородно-гелиевой плазмы: протоны, дейтроны, ядра ^4He и ^3He и электроны с температурой порядка 10 эВ и направленной скоростью около 470 км/с . Такая плазма преодолевает путь от Солнца до Земли примерно за 100 часов (свет — за 500 сек.). Эта плазма поглощается атмосферой Земли и частично обтекает ее, «поджимая» магнитное поле Земли с солнечной, «дневной» стороны и вытягивая его с «ночной», так называемый «хвост» (рис. V.15). На расстояниях $4\text{--}17$ тыс. км от поверхности Земли в поле земного диполя

образуются *магнитные ловушки* (см. § 57), где накапливаются заряженные частицы. Эти ловушки, имеющие форму тороидов, соосных с осью магнитного поля, называются *радиационными поясами*. Открыты они были в первых экспериментах на спутниках (J. van Allen, С. Н. Вернов и А. Е. Чудаков, 1957–1958 гг.). Различают внутренний радиационный пояс, на высоте около 4 тыс. км, где накапливаются протоны с энергией до десятков МэВ, и внешний, на 17 тыс. км, удерживающий электроны с энергией на 3 порядка меньше. Радиационные пояса представляют большую опасность для космоплавания (прежде всего — полет человека на Марс). Но та же магнитосфера Земли в значительной мере защищает нас от жесткого космического излучения.

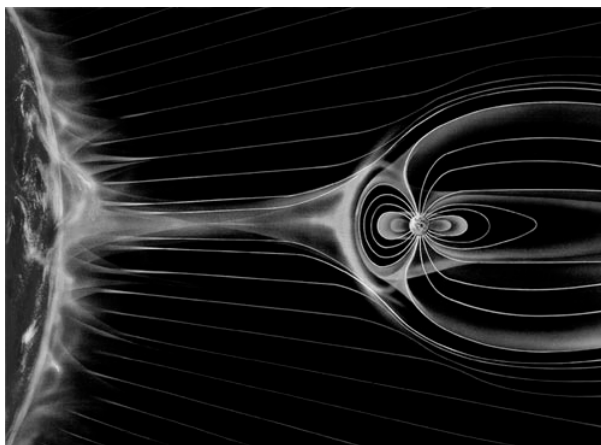


Рис. V.15. Деформация магнитного поля Земли солнечным ветром. Тонкие линии — силовые линии магнитного поля и траектории частиц солнечного ветра, размытые полосы — потоки частиц (в том числе в радиационных поясах)

Магнитное поле на поверхности ближайшей к нам звезды — Солнца — в среднем по поверхности невелико — единицы Гс, но может достигать 1000 Гс в областях образования солнечных пятен. У особых звезд — пульсаров — магнитное поле достигает гигантских значений $\sim 10^{12}$ Гс.

Какова же природа этих космических магнитов? По-видимому, все они являются электромагнитами, т. е. их поле создается макроскопическими токами, а не остаточной намагниченностью. Для последней поле пульсаров слишком велико, а Солнце слишком горячо. То же справедливо, вероятно, и для Земли, ядро которой, как считается, состоит из железа и кобальта, ко-

которые находятся в расплавленном состоянии. Таким образом, все эти магниты представляют собой гигантские «динамомашины», работающие каким-то образом за счет тепловой энергии и энергии вращения планеты («теория динамо»). В звездах определяющую роль играют, конечно, ядерно-физические процессы. Естественно ожидать, что магнитное поле таких «динамомашин» не будет оставаться постоянным во времени. Так оно и оказалось в действительности, по крайней мере для Земли. Существует любопытная возможность измерить магнитное поле Земли в далеком прошлом. Это можно сделать с помощью так называемого *палеомагнетизма*, т. е. по остаточному намагничиванию окислов железа в лаве различных геологических слоев. При остывании, после прохождения через точку Кюри, лава «запоминает» магнитное поле, существовавшее в момент ее извержения на Земле. После охлаждения коэрцитивная сила ферромагнитных окислов существенно возрастает, так что последующие изменения практически не влияют на намагниченность. Собирая образцы лавы различного геологического возраста, который определяется по концентрации некоторых радиоактивных изотопов, удалось проследить изменение магнитного поля Земли на протяжении последних 5 млн лет. Результат этих исследований оказался поразительным: магнитное поле Земли много раз меняло свое направление (рис. V.16)! Интересно, что магнитный момент Земли всегда был направлен по либо против вектора ее угловой скорости и не наблюдалось промежуточных ориентаций. Это означает, что поворот поля происходит за очень короткое геологическое время — всего несколько тысяч лет. Таким образом, «земное динамо» работает довольно нестабильно.

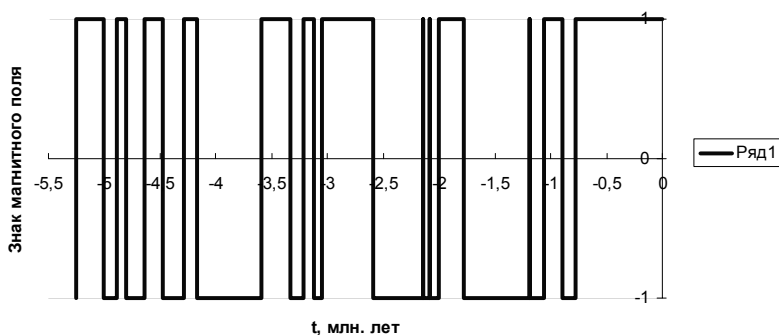


Рис. V.16. Изменение направления магнитного поля Земли во времени (палеомагнетизм)

Измерение геометрии магнитных полей планет, а точнее ее отличия от поля магнитного диполя, позволяет установить верхний предел массы фотона — аналогично тому, как это делается при проверке точности закона

Кулона (см. задачу V.11). Измерения поля Юпитера, проведенные впервые в 1978 г. с космического корабля «Пионер» (США), дали $\mu c^2 < 10^{-15}$ эВ. В 1984 г. этот предел был уменьшен примерно в 1,5 раза измерениями с корабля Charge Composition Explorer (CCE): $\mu c^2 < 6 \cdot 10^{-16}$ эВ. Отметим, что лабораторные эксперименты понизили этот предел еще на два порядка: $\mu c^2 < 1 \cdot 10^{-18}$ эВ.

Задача V.11. Оценить поправку к выражению (34.9) для магнитного дипольного поля, связанную с конечным значением массы фотона.

Указание: воспользоваться соотношениями (13.5), (13.6) и выводом формулы (34.9).

В формулу (31.8) для векторного потенциала подставим $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot dV'. \quad (43.12)$$

Сравнив это выражение с (8.1), видим, что «поправку Юкавы» (13.5) в вектор-потенциал следует внести в (43.12) под интегралом:

$$\mathbf{A}_\mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot e^{-r/\lambda} \cdot dV'. \quad (43.13)$$

Произведя преобразования, аналогичные (34.2)–(34.6), видим, что для выделения первого по величине (дипольного) слагаемого в (43.14) достаточно в цепочке формул при выводе (34.7) произвести замену

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{g}_\mu(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot e^{-r/\lambda}.$$

Тогда вместо (34.7) находим

$$\mathbf{A}_{\mu 1} = \nabla \frac{e^{-r/\lambda}}{r} \cdot \mathbf{m}, \quad (43.14)$$

где $\mathbf{m}$ — магнитный дипольный момент (34.10). Произведя дифференцирование, учтем (см. пояснения мелким шрифтом в § 5), что

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \nabla e^{-r/\lambda} = -\frac{\mathbf{r}}{\lambda r} \cdot e^{-r/\lambda}.$$

Получим

$$\mathbf{A}_{\mu 1} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) \cdot e^{-r/\lambda}, \quad (43.15)$$

(ср. (34.7)). Вычислим значение магнитного поля для вектора-потенциала $\mathbf{A}_{\mu 1}$. Вначале представим (43.15) в виде

$$\mathbf{A}_{\mu 1} = \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) \cdot f(r), \quad f(r) = \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) \cdot e^{-r/\lambda},$$

где $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ — дипольный вектор-потенциал (34.7). Магнитное поле, соответствующее вектору-потенциалу $\mathbf{A}_{\mu 1}$, равно

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\mu(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}_{\mu 1}(\mathbf{r}) = f(r) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_1(\mathbf{r})) - \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) \times \nabla f(r) = \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot f(r) - \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) \times \nabla f(r), \end{aligned} \quad (43.16)$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ — дипольное поле (34.9). Вычислив

$$\nabla f(r) = -\frac{\mathbf{r}}{\lambda^2 r} \cdot e^{-r/\lambda},$$

находим

$$\mathbf{H}_\mu(\mathbf{r}) = \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) \cdot e^{-r/\lambda} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{A}_1(\mathbf{r})}{\lambda^2} \cdot e^{-r/\lambda}.$$

Как видим, отклонение значения магнитного поля $\mathbf{H}_\mu(\mathbf{r})$ от дипольного $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ зависит от угла между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{r}$ (см. (34.7) и (34.9)). Для оценок достаточно принять, что $H(r) \sim m/r^3$, $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{m}/r^2$. Произведя разложение по малому параметру r/λ , получим

$$\mathbf{H}_\mu(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad \frac{\delta H(r)}{H(r)} \sim \frac{r^2}{2\lambda^2}.$$

Значение массы фотона можно оценить, зная величину λ из измерений магнитного поля диполя и воспользовавшись формулой $\lambda = \hbar/\mu c$ (13.5). Первые такие оценки сделал Э. Шредингер (E. Schroedinger, 1943 г.), принявший для невозмущенного поля Земли $r_{\max} \sim \lambda \sim 10^4$ км, что дает $\mu c^2 < 2 \cdot 10^{-14}$ эВ. Современные измерения магнитосферы Земли, произведенные на спутниках, позволяют принять $\lambda \geq 30$ тыс. км. На больших расстояниях дипольное поле существенно деформировано солнечным ветром (рис. V.15). В экспериментах на космических кораблях «Пионер» и ССЕ было найдено $\lambda \geq 200$ тыс. км и 330 тыс. км соответственно (радиус Юпитера — 71,4 тыс. км), что и дает приведенные выше оценки μc^2 из космических экспериментов. Траектория космического корабля лежит примерно в плоскости эклиптики, а орбита Юпитера наклонена к ней под углом $1,31^\circ$. Поэтому $\mathbf{m} \perp \mathbf{r}$ с удовлетворительной точностью, так что в интересующем нас

случае корабельный магнетометр измеряет $H_{\text{exp}} \approx \mathbf{m}/r^3 = 14(R_{\text{Jupiter}}/r)^3$ Гс при исском $\delta H \approx (r^2/\lambda^2) \cdot H_{\text{exp}}$. Соответственно, на расстояниях $r \sim \lambda$ нужно измерять $H_{\text{exp}} \sim 0,1$ Гс при $\lambda \sim 330$ тыс. км, с точностью $\delta H \sim 6$ мГс.

Из обсуждения природных магнитных диполей возникает законный вопрос о возможности существования «магнитных зарядов», или «магнитных монополей». Обсуждение этой фундаментальной проблемы современной физики мы отложим до § 116, где приведены результаты поисков магнитных монополей, остающиеся безуспешными до сих пор. Тем не менее в задачах о постоянных магнитах иногда удобно вводить гипотетические магнитные заряды и использовать аналогию с электростатикой. При этом считается, что сила взаимодействия магнитных зарядов описывается формулой, аналогичной закону Кулона:

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (43.17)$$

Пример применения такого метода *магнитостатики* дан в задаче V.12. Любопытно заметить, что объяснение магнитных явлений на языке магнитных зарядов можно встретить еще в школьных учебниках 1940-х гг.

Задача V.12. Магнитный диполь находится на расстоянии h от плоской границы раздела двух сред с магнитной проницаемостью μ_1 и μ_2 (рис. V.17). Найти силу, действующую на диполь, если его вектор $\mathbf{m}$ ортогонален границе.

Указание: воспользоваться результатами задачи II.6 и представить диполь как два точечных магнитных заряда $\pm m$ на расстоянии d : $m = m \cdot d$.

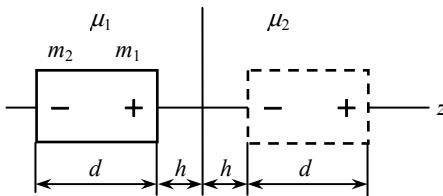


Рис. V.17. Магнитный диполь вблизи плоской границы раздела двух сред и его изображение в среде μ_2

Согласно результатам задачи II.6, на заряды диполя $\pm m$ действуют силы притяжения или отталкивания от изображений этих зарядов в среде μ_2 , расположенных на расстояниях h и $h+d$ соответственно от границы раздела сред. При этом заряды-изображения равны

$$m'_{1,2} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot m_{1,2} \equiv \kappa m_{1,2}, \quad m_1 - m_2 \equiv m. \quad (43.18)$$

Сила, действующая на диполь, равна

$$F_z = \kappa m^2 \left(\frac{1}{(2h)^2} - \frac{2}{(2h+d)^2} + \frac{1}{(2h+2d)^2} \right) = \frac{\kappa m^2}{4d^2} \cdot \frac{6\xi^2 + \sigma\xi + 1}{\xi^2(1+\xi)^2(1+2\xi)^2}, \quad (43.19)$$

$$\xi = \frac{h}{d}.$$

В двух крайних случаях

$$F_z = \kappa m^2 \cdot \begin{cases} \frac{1}{4h^2}, & \xi \ll 1, \\ \frac{3d^2}{8h^2}, & \xi \gg 1. \end{cases} \quad (43.20)$$

В экспериментальной физике часто требуется определить магнитную проницаемость слабо магнитных материалов с $\mu = 1 + \Delta\mu$, $\Delta\mu \ll 1$. Простой и достаточно чувствительный прибор («мю-метр») предложил В. В. Пархомчук (ИЯФ): прибор состоит из двух одинаковых постоянных магнитов (диполей!), помещенных внутри направляющего паза в рейке (рис. V.18). Один из магнитов подвешен на нити вблизи торца рейки и может свободно перемещаться вдоль паза, второй магнит перемещают вдоль паза с помощью штока. Направления магнитных моментов обоих магнитов выбирают так, чтобы они притягивались. Рейку подносят к исследуемому (плоскому) образцу, как показано на рисунке V.18. Она притягивается к образцу, если магнит 2 достаточно удален. Затем смещают второй магнит, пока первый не займет положение равновесия (повисает на нити строго вертикально). Значение $\Delta\mu$ отсчитывают по шкале прибора (задача V.13).

Задача V.13. Рассчитать шкалу мю-метра, отсчитывая расстояние от края второго магнита до торца рейки, ближайшего к образцу (первый на рис. V.18).

Сила, действующая на магнит 1 со стороны образца, описывается формулой (43.20), где $\xi \ll 1$ и $\kappa \approx \Delta\mu/2 \ll 1$. Перемещаемый магнит действует с противоположно направленной силой, значение которой описывается формулой (43.19). В ней, как нетрудно догадаться, теперь нужно положить $\kappa = 1$, $2h = x - d$. Из равенства сил находим (рис. V.19)

$$\Delta\mu(x) = \frac{h^2}{d^2} \cdot \frac{6\eta^2 + 6\eta + 1}{\eta^2(1+\eta)^2(1+2\eta)^2}, \quad \eta(x) = \frac{x-d}{2d}. \quad (43.21)$$

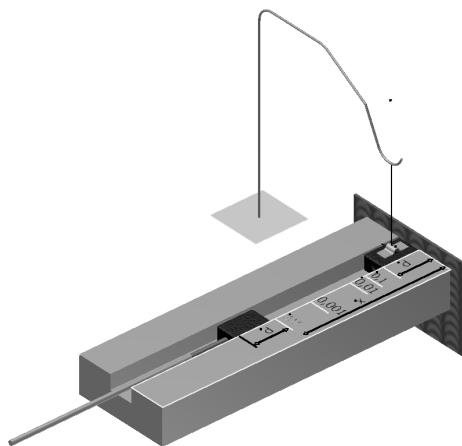
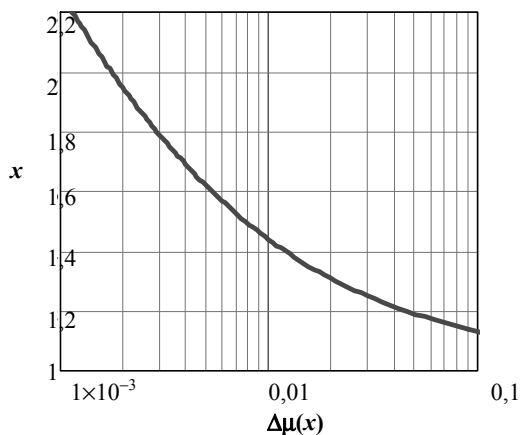


Рис. V.18. Мю-метр В. В. Пархомчука

Рис. V.19. Шкала мю-метра (43.21): $d = 1$ см, $h = 0,02$ см

Следует отметить, что в расчетах реальный магнит заменен диполем из двух эквивалентных точечных магнитных зарядов («монополей»). От величины магнитного заряда результаты (43.19)–(43.21) не зависят, а вот положения монополей внутри магнита несколько неопределенны, так как они зависят от формы магнита и равномерности его намагниченности. Поэтому параметр h определяют с помощью калибровки на образце с известной магнитной проницаемостью. Однако чувствительность мю-метра пропорциональна квадрату заряда монополя, который входит в выражения для силы притяжения магнитов (43.19), (43.20).

§ 44. Плазма как диамагнетик

Ферромагнетики — вещества, существенно влияющие на магнитное поле ($\mu \gg 1$). Другим, противоположным, примером может служить плотная плазма, которая является сильным диамагнетиком ($\mu \ll 1$).

Найдем магнитное поле в плазме, помещенной во внешнее магнитное поле $\mathbf{H}$. Ограничимся простейшим случаем плоской границы плазмы, параллельной $\mathbf{H}$. Проще всего воспользоваться условием механического равновесия (см. § 47 ниже) на границе плазмы:

$$\frac{H^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi} + nT, \quad (44.1)$$

где B — магнитное поле в плазме, n — плотность плазмы, nT — ее тепловое давление. Это соотношение можно рассматривать как зависимость $B(H)$ в плазме (рис. V.20), так как в силу граничных условий величина H сохраняется. Поскольку эта зависимость нелинейна, обычные соотношения для плотности энергии и давления в данном случае неприменимы. Более того, оказывается, что и «общее» соотношение (38.3) также неприменимо ($M = nW_{\perp}/B = nT/B$, см. задачу IV.19, § 34), так как, помимо токов, связанных с намагничиванием плазмы, возникает еще дополнительный ток, обтекающий плазму, вызванный дрейфом заряженных частиц (см. § 57 ниже) в неоднородном магнитном поле на границе плазмы.

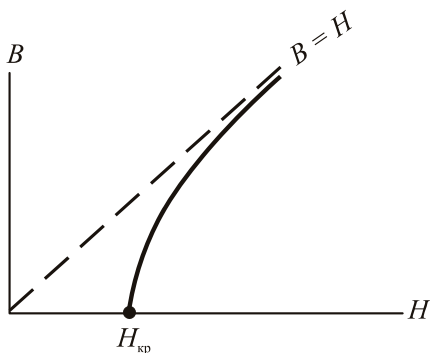


Рис. V.20. Зависимость магнитного поля B внутри плазмы от внешнего поля H :
 $B(H) = \sqrt{H^2 - 8\pi nT}$

Из выражения (44.1) видно, что существуют два режима поведения плазмы в магнитном поле. Первый из них имеет место при $H > H_{\text{кр}} \equiv \sqrt{8\pi nT}$, когда магнитное поле проникает в плазму, хотя и ослабляется ею. Второй соответствует $H = H_{\text{кр}}$, и поле внутри плазмы $B = 0$, т. е. плазма является идеальным диамагнетиком. При

снижении внешнего поля от значения $H = H_{\text{кр}}$ плазма будет расширяться, и ее давление будет падать до восстановления механического равновесия, так что при $H < H_{\text{кр}}$ стационарное состояние отсутствует. Во втором режиме ($H = H_{\text{кр}}$) магнитное поле проникает в плазму лишь на небольшую глубину. Заряженные частицы движутся в этом случае прямолинейно до самой границы плазмы, где они заворачиваются и отражаются в тонком переходном слое, куда еще проникает внешнее магнитное поле. Образующийся в результате поверхностный ток с плотностью $j \sim env$ экранирует это поле в объеме плазмы. Оценим толщину переходного слоя d . Она должна быть порядка ларморовского радиуса электронов (56.8): $d \sim pc/eH$ (при той же плотности и температуре ионный ток значительно меньше электронного и поэтому в оценке им можно пренебречь). С другой стороны, ток в переходном слое должен экранировать внешнее магнитное поле $H \sim 4\pi envd/c$. Подставив это значение H в формулу для d , найдем

$$d \sim c \sqrt{\frac{m}{4\pi ne^2}} \equiv \frac{c}{\omega_p}, \quad (44.2)$$

где ω_p — плазменная частота (23.7).

Более формальный вывод этого соотношения может быть сделан следующим образом. Рассмотрим уравнение движения электрона в электромагнитном поле:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (44.3)$$

В стационарном случае $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$, а $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. Преобразуя $(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \nabla v^2/2$ (см. П. I.7, к), из (44.3) получим

$$m\mathbf{v} \times \left(\operatorname{rot} \mathbf{v} + \frac{e\mathbf{B}}{mc} \right) = -\nabla \left(\frac{mv^2}{2} + e\varphi \right). \quad (44.4)$$

Поскольку полная энергия отдельной частицы сохраняется, $mv^2/2 + e\varphi = \text{const}$, то $\operatorname{rot} \mathbf{v} + e\mathbf{B}/mc = 0$, или

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = -\frac{ne^2}{mc} \mathbf{B}, \quad (44.5)$$

где $\mathbf{j} = nev$ — плотность тока в плазме. Это уравнение было получено в 1935 г. братьями Лондонами (F. London и P. London, 1935) в их классической (феноменологической) теории сверхпроводимости (§ 54) и носит их имя. Вычисляя rot от обеих частей уравнения (38.2) $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}/c$ и используя (44.5), найдем

$$\Delta \mathbf{B} = \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^2 \mathbf{B}, \quad (44.6)$$

откуда в одномерном случае (координата z ортогональна границе)

$$B(z) = H e^{-\omega_p z/c}. \quad (44.7)$$

Таким образом, магнитное поле исчезает в плазме вблизи ее границы на расстоянии $\delta z \sim c/\omega_p$.

Выше мы полностью пренебрегли столкновениями частиц плазмы, считая ее идеально проводящей. В этом смысле она представляет собой наглядную модель сверхпроводника. Эта модель показывает, в частности, что сверхпроводимость приводит к идеальному диамагнетизму (см. § 54). Разумеется, аналогия между плазмой и сверхпроводником весьма ограничена. Плазма всегда обладает некоторым конечным сопротивлением, вследствие которого все токи в ней в конце концов затухают, а вместе с ними исчезает и диамагнетизм. Оказывается однако, что в среде заряженных частиц, подчиняющихся классической механике, в состоянии термодинамического равновесия всегда $\mu = 1$, т. е. такая среда не обладает никакими магнитными свойствами. Эту общую теорему доказала в начале XX века Ван Лёвен (J. Van Leeuwen, 1919 г.). Рис. V.21 поясняет механизм нейтрализации диамагнетизма плазмы в магнитном поле. Он вызван появлением обратного тока на границе плазмы за счет отражения частиц от стенки. Столкновение частиц со стенкой связано, в свою очередь, с их рассеянием вблизи стенки, т. е. с сопротивлением плазмы. Таким образом, компенсация тока в плазме вызывается ее конечным сопротивлением. Отметим, что этот же механизм был вскрыт раньше молодым Нильсом Бором (N. Bohr, 1911 г.) и описан в его диссертации, но оставался несколько лет незамеченным.

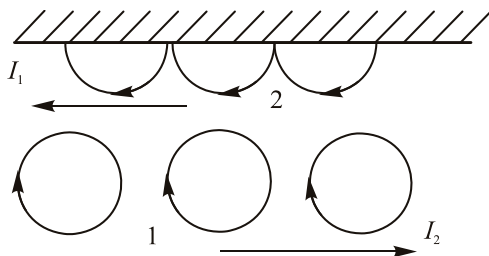


Рис. V.21. Разрушение диамагнетизма плазмы стенкой: 1 — свободные частицы; 2 — «пристеночные» частицы

Законы квантовой механики допускают незатухающие токи, например внутриатомные электронные токи, которые можно рассматривать как своеобразную форму молекулярной сверхпроводимости. Они-то и ответственны за магнитные свойства вещества. Макроскопическая же сверхпроводимость приводит, как мы видели выше, к идеальному диамагнетизму.

ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 45. Закон электромагнитной индукции.

Уравнения Максвелла

Открытие Эрстеда и работы Ампера (§ 28) показали, что существует глубокая связь между электрическими и магнитными явлениями. Однако эта связь представлялась вначале односторонней (электрический ток возбуждал магнитное поле), что всегда казалось странным одному из самых замечательных физиков мира — Фарадею (М. Faraday). В течение 11 лет он совершенно сознательно искал обратное влияние магнитного поля на электрический ток и в 1831 г. открыл его в форме своего знаменитого закона электромагнитной индукции. Для возбуждения электрического тока в контуре необходимо изменять магнитный поток через этот контур, причем ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt}; \quad \Phi = \int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}). \quad (45.1)$$

Здесь Φ — магнитный поток, зависящий от величины полного поля в среде $\mathbf{B}$.

Это явление природы сыграло забавную шутку с другим физиком — Колладоном, современником Фарадея. Желая провести свой опыт как можно чище, он поместил катушку с магнитом в одну комнату, а гальванометр, соединенный с катушкой, — в другую. Вставив магнит в катушку, он шел в другую комнату, чтобы посмотреть на показания гальванометра (!). Для великого открытия ему не хватило воображения или... лаборанта. Закон электромагнитной индукции был независимо открыт американским физиком Генри, однако он позднее опубликовал свои результаты (J. Henry, 1832 г.).

Фарадей установил, что ЭДС индукции возбуждается при изменении потока в контуре любым способом. Можно, например, с равным успехом вдвигать магнит в катушку, создавая переменное магнитное поле, или же

надевать катушку на магнит, т. е. перемещать контур в постоянном магнитном поле. Сегодня с точки зрения теории относительности это кажется очевидным. Возможен и более сложный случай, когда контур произвольно деформируется в переменном магнитном поле.

Рассмотрим механизм возбуждения ЭДС индукции. Пусть вначале магнитное поле постоянно, а контур деформируется. Возьмем простейший пример такого контура, изображенного на рис. VI.1, где в однородном магнитном поле движется один из проводников, образующих контур. Так как электроны движутся вместе с проводником со скоростью v , на них действует магнитная часть силы Лоренца $f_M = evB/c$, направленная вдоль проводника. Она-то и создает ЭДС: $\mathcal{E} = l f_M / e = vBl/c$, т. е. является так называемой сторонней силой с точки зрения электрических цепей (см. § 24). Последнее выражение в точности совпадает с законом Фарадея (45.1), так как $\dot{\Phi} = Bvl$.

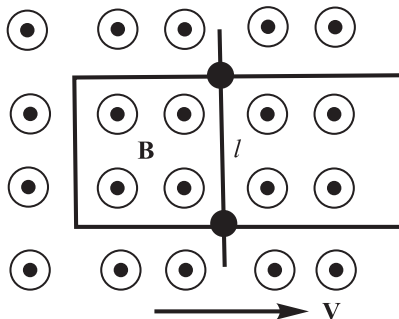


Рис. VI.1. Возбуждение ЭДС электромагнитной индукции в деформируемом контуре

Но если ЭДС индукции создается в данном случае силой f_M , как может она совершать работу, ведь эта сила всегда направлена перпендикулярно скорости заряда? Рассмотрим этот вопрос подробнее. Мощность ЭДС равна $\mathcal{E}I$, т. е. пропорциональна силе тока в цепи. Но в таком случае на проводник действует сила $f_{\text{вн}} = IBl/c$ (28.3), направленная против скорости v . Для простоты примем сопротивление цепи настолько большим, что можно пренебречь магнитным полем тока I по сравнению с внешним полем. Чтобы обеспечить движение проводника, необходимо приложить такую же внешнюю силу, которая будет развивать мощность $f_{\text{вн}} \cdot v = IBlv/c = \mathcal{E}I$, в точности равную мощности в электрической цепи. Таким образом, работу совершает внешняя сила, а магнитное поле, образно говоря, лишь «перекачивает» энергию из одной степени свободы в другую.

Задача VI.1. Показать, что закон Фарадея справедлив при произвольной деформации контура в постоянном магнитном поле.

Используя для ЭДС выражение $\mathcal{E} = \oint (\mathbf{f}_{\text{стр}}, d\mathbf{l})/e$ (см. § 24) и подставляя в качестве сторонней силы силу Лоренца $\mathbf{f}_{\text{стр}} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$, получим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}, d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \oint (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}, \mathbf{B}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt},$$

так как $d\mathbf{r} \times d\mathbf{l} = d\mathbf{S}$ — изменение площади контура при смещении участка проводника $d\mathbf{l}$ на $d\mathbf{r}$ и $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

Рассмотрим теперь другой случай возбуждения ЭДС индукции, когда контур остается неподвижным, а магнитное поле изменяется во времени. В этом случае ЭДС может возникать лишь за счет дополнительного электрического поля, связанного с переменным магнитным полем. По закону Фарадея

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \oint_S \left(d\mathbf{S}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right), \quad (45.2)$$

где S — площадь, охватываемая контуром. Мы написали здесь частную производную, которая характеризует изменение магнитного поля в заданной точке пространства. Используем теперь теорему Стокса (П. I.10):

$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \oint_S (\text{rot } \mathbf{E}, d\mathbf{S}) = -\frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right). \quad (45.3)$$

Последнее равенство справедливо в силу закона Фарадея для любого контура и любого поля, поэтому

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (45.4)$$

В общем случае движения контура в переменном магнитном поле действуют оба рассмотренных выше механизма, так что ЭДС индукции определяется полным изменением потока через контур согласно (45.1).

Отметим, что оба механизма возбуждения ЭДС индукции не являются по теории относительности независимыми. Пусть, например, контур движется с постоянной скоростью в неоднородном стационарном магнитном поле. В этом случае «работает» первый механизм, т. е. магнитная часть силы Лоренца. Однако в системе отсчета, связанной с контуром, сила $\mathbf{f}_M$ равна нулю, и работает второй механизм, т. е. появляется вихревое электрическое поле, вызванное изменением магнитного поля в этой системе отсчета.

Понятие «полное изменение потока через контур» не всегда очевидно, а его применение требует известной «бдительности». В сложных случаях нужно анализировать конкретный механизм возбуждения ЭДС. Рассмотрим, например, так называемый *униполярный генератор*, схема которого изображена на рис. VI.2. Его существенной частью является массивный диск, вращающийся в магнитном поле, направленном параллельно оси вращения. Здесь трудно найти какое-либо изменение потока через контур. Тем не менее ЭДС возникает за счет силы, действующей в радиальном направлении на электроны, увлекаемые вращающимся диском:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_0^R \omega r B dr = \frac{\omega B R^2}{2c}. \quad (45.5)$$

В рассматриваемом случае закон Фарадея не выполняется буквально, так как он применим лишь к непрерывному контуру. Здесь же скользящий контакт все время производит как бы переключения с одного контура на другой.

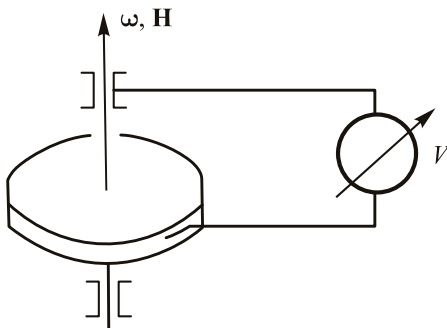


Рис. VI.2. Схема униполярного генератора

Другое распространенное наглядное представление о механизме возбуждения ЭДС индукции — пересечение проводником магнитных силовых линий. Это представление также условно и не всегда позволяет объяснить физическую ситуацию. Так, в предыдущем примере еще можно говорить с некоторой натяжкой о пересечении проводником силовых линий. Бывают, однако, случаи, когда такое представление и совсем неприменимо. Простейшим примером может служить неподвижный заряд в переменном магнитном поле. Такой заряд вообще ничего не пересекает, но тем не менее на него действует вихревое электрическое поле. Более интересным примером

является тороидальный магнитный экран 1 (рис. VI.3) (из феррита), практически не пропускающий внутрь себя магнитное поле катушки 2, но не ослабляющий вихревое электрическое поле 3 (как отмечалось в § 42). В такой системе силовые линии не проходят через внутреннюю полость экрана, а как бы перескакивают с его внутренней стороны на внешнюю, оставаясь, однако, непрерывными. Этот пример особенно наглядно показывает, что силовые линии имеют, вообще говоря, лишь геометрический, но не физический смысл. Они наглядно представляют конфигурацию магнитного поля, но не являются самостоятельной физической реальностью.

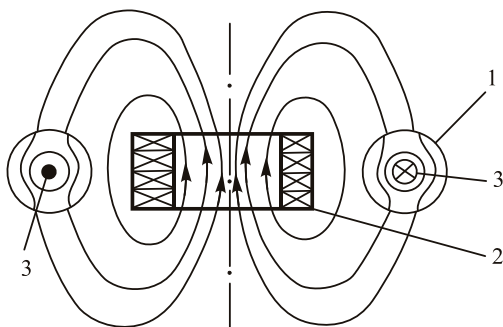


Рис. VI.3. Разделение с помощью ферритового экрана (1) переменного магнитного поля катушки (2) и вихревого электрического поля (3)

Задача VI.2. Частица с зарядом e находится в середине рамки с током, которая движется со скоростью $\mathbf{v}$. Вектор $\mathbf{v}$ лежит в плоскости рамки. Найти силу, действующую на частицу.

Магнитное поле $\mathbf{H}'$ рамки с током в плоскости рамки ортогонально этой плоскости в системе движущейся рамки. Согласно преобразованиям Лоренца для электромагнитного поля (29.7) в системе покоящегося электрона возникает электрическое поле

$$\mathbf{E}_\perp = -\gamma \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}' \right), \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2},$$

ортогональное векторам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}'$, т. е. параллельное плоскости рамки и направленное поперек ее скорости. Сила, действующая на частицу, равна

$$\mathbf{f}_\perp = -e\mathbf{E}_\perp = -\frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \gamma \mathbf{H}') = -\frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}),$$

где $\mathbf{H} = \mathcal{H}'$ — магнитное поле, созданное движущейся рамкой в лабораторной системе. Этот же результат немедленно следует из преобразования в лабораторную систему силы, действующей на частицу, движущуюся со скоростью $-\mathbf{v}$ в системе рамки (см. (29.3)).

Задача VI.3. Проводящий стержень длины l вращается в магнитном поле вокруг оси, проходящей через один из его концов и перпендикулярной стержню. Магнитное поле B однородно и параллельно оси вращения стержня. Найти двумя способами разность потенциалов на концах стержня:

- 1) через преобразования поля (аналогично задаче VI.2),
- 2) через закон электромагнитной индукции.

1) В сопутствующей инерциальной системе, движущейся со скоростью v точки x вращающегося стержня ($v = \omega x \ll c$), возникает электрическое поле, направленное вдоль стержня (см. задачу VI.2):

$$E(x) = \frac{\omega x}{c} \cdot B.$$

Оно перемещает электроны по стержню, пока по стержню не установится поле противоположного направления. В результате разность потенциалов между концами стержня равна U :

$$U = \int_0^l E(x) \cdot dx = \frac{\omega l^2}{2c} B.$$

2) За время dt стержень пересекает площадь $dS = (l^2/2) \cdot d\varphi$, $d\varphi = \omega \cdot dt$. Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \cdot B \frac{dS}{dt} = \frac{\omega l^2}{2c} \cdot B.$$

Следует заметить, что механизм возбуждения ЭДС в униполярном генераторе и представление магнитного поля в виде набора силовых линий до сих пор (!) вызывают горячие дискуссии среди людей, пытающихся объяснить явление электромагнитной индукции на упрощенном «языке» потока магнитного поля через контур. Как это часто бывает в природе, объяснение лежит на более высоком уровне. В данном случае нужно рассматривать поведение электронов в магнитном поле (задачи VI.2 и VI.3). Еще один пример на эту тему — «парадокс Богача» (В. А. Богач, ОИЯИ, 1996 г.).

Существо парадокса состоит в следующем. Намагниченный шар вращается в вакууме с угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной вектору намагничивания. Поле в системе, где шар покоится («система шара»), имеет вне шара дипольную конфигурацию $\mathbf{H}_m(\mathbf{r}')$ (см. задачу V.9, § 43). Если магнитное поле вращается вместе с шаром, то в точке $\mathbf{r}$ лабораторной системы (рис. VI.4) оно «летит» со скоростью

$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = e_\varphi \cdot \omega r \cdot \sin \theta$. Переходя в мгновенно-сопутствующую инерциальную систему, движущуюся поступательно со скоростью $\mathbf{v}$, можем использовать преобразования Лоренца для поля (29.7) и найти электрическое поле в лабораторной системе. Прделаем эту операцию. Дипольное магнитное поле в системе покоящегося шара (34.9) в сферической системе координат с осью z , совпадающей по направлению с векторами $\mathbf{m}$ и $\boldsymbol{\omega}$ (рис. VI.4), имеет только две составляющие:

$$H_{mr} = 2 \frac{m \cdot \cos \theta}{r^3}, \quad H_{m\theta} = -\frac{m \cdot \sin \theta}{r^3}.$$

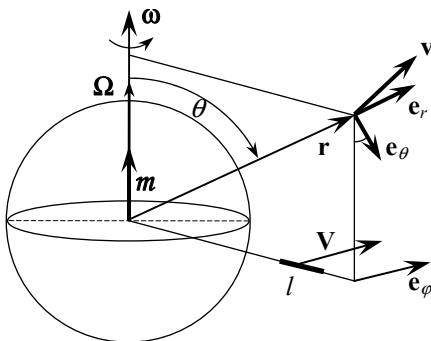


Рис. VI.4. К расчету поля вращающегося шара: $\mathbf{m}$ — магнитный момент намагниченного шара (см. задачу V.9), $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения шара в 1-й части задачи, $\mathbf{v}$ — скорость точки наблюдения, Ω , $\mathbf{V}$ — угловая и линейная скорости вращения стержня l во 2-й части задачи, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ — орты сферической системы координат (r, θ, φ)

Обе эти компоненты, как и вектор $\mathbf{r}$, лежат в плоскости векторов $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ и ортогональны вектору $\mathbf{v}$. Поэтому из (29.7) находим электрическое поле в лабораторной системе ($E_m = 0$):

$$\mathbf{E}_\perp = -\gamma(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}_m), \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

что дает

$$E_r = \lambda \frac{\sin^2 \theta}{r^2}, \quad E_\theta = \lambda \frac{\sin 2\theta}{r^2}, \quad E_\varphi = 0, \quad \lambda = \gamma \frac{m\omega}{c}.$$

Это электрическое поле должно удовлетворять уравнению $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ (см. (7.2), $\rho = 0$). Вычислим дивергенцию этого поля. В сферических координатах имеем (см. П. I.3)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \cdot \sin \theta) = \frac{2\lambda}{r^3} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \neq 0.$$

Таким образом, электрическое поле, «созданное» вращающимся намагниченным шаром в лабораторной системе, не удовлетворяет уравнению (7.2) в свободном пространстве ($\rho = 0$, $\varepsilon = 1$).

В чем причина? Ответ дает следующая задача.

Задача VI.4. 1) Найти электрическое и магнитное поля, созданные в лабораторной системе вращающимся намагниченным шаром, описанным выше (рис. VI.4).

2) Найти разность потенциалов на концах проводящего стержня длины l , который вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси магнитного поля неподвижного намагниченного шара, находясь в плоскости (r , $\theta = \pi/2$, φ) магнитного шара (рис. VI.4), и ориентирован вдоль радиуса шара (точки стержня описывают концентрические окружности с центрами в центре шара ($r = 0$)). Длина стержня много меньше радиуса шара, а сам он движется вне шара.

Указание: правильно применить переход в мгновенно-сопутствующую инерциальную систему.

1) При вычислении электрического поля в лабораторной системе, проделанном выше при описании парадокса, сделано предположение, что в сопутствующей системе магнитное поле в точке r совпадает с полем вращающегося шара. На самом деле это утверждение неверно, так как в сопровождающей системе, движущейся со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, шар (не имеющий поступательной скорости в лабораторной системе) имеет скорость $-\mathbf{v}$ (!). И с такой скоростью поле $\mathbf{H}_m$ «летит» относительно сопутствующей системы. Соответственно, поле в этой системе (см. (29.7))

$$\mathbf{E}'_{\perp} = -\gamma \left(-\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}_m \right), \quad \mathbf{H}'_{\perp} = \gamma \mathbf{H}_m, \quad \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel} = 0.$$

Здесь мы учли, что поле $\mathbf{H}_m$, как показано выше, ортогонально вектору $\mathbf{v}$. И вот именно это поле нужно использовать при вычислении поля в лабораторной системе. Находим

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{\text{лаб}})_{\perp} &= \gamma \left(\mathbf{E}'_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}'_{\perp} \right), \quad (\mathbf{H}_{\text{лаб}})_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{H}'_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}'_{\perp} \right), \\ (\mathbf{E}_{\text{лаб}})_{\parallel} &= (\mathbf{H}_{\text{лаб}})_{\parallel} = 0, \end{aligned}$$

что после подстановки значений $\mathbf{E}'_{\perp}$ и $\mathbf{H}'_{\perp}$ даст

$$\mathbf{E}_{\text{лаб}} = 0, \quad \mathbf{H}_{\text{лаб}} = \mathbf{H}_m.$$

Таким образом, в лабораторной системе вращающийся намагниченный шар не создает электрического поля, а магнитное поле совпадает с полем покоящегося (не вращающегося!) шара. Этот результат еще раз демонстрирует ограниченность использования представления об электромагнитном поле как о наборе силовых линий.

Иначе обстоит дело при поступательном движении магнита или электрического заряда. Этот вопрос мы рассмотрим в § 122.

2) Пренебрежем (для простоты) изменением поля шара $\mathbf{H}_m$ на длине стержня. Тогда фактически мы пришли к задаче VI.3: в системе стержня поле $\mathbf{H}_m$ создает радиальное электрическое поле

$$\mathbf{E}'(r) = -\gamma \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{H}_m(r) \right),$$

где $\mathbf{V} = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ — скорости движения стержня в лабораторной системе, $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$, поле $\mathbf{H}_m$ ортогонально плоскости $\theta = \pi/2$. Соответственно, на концах стержня возникает разность потенциалов

$$U = E'(r) \cdot l.$$

Естественно, возникает вопрос об «асимметрии» физической ситуации. Действительно, вращающийся намагниченный шар не создает электрического поля в лабораторной системе, так что на покоящемся в нем проводнике не наведется никакая ЭДС. Во втором случае покоящийся (не вращающийся) намагниченный шар такое поле создает. Ответ становится очевидным, если, как это сделано выше, сравнить оба случая, перейдя в мгновенно сопутствующую систему. В первом случае как шар, так и стержень движутся в этой системе с одинаковыми скоростями $-\mathbf{v}$, и, естественно, никакой ЭДС индукции на стержне не возникает. Во втором случае стержень в сопутствующей системе (мгновенно) покоится, а диполь (виток с током) движется мгновенно поступательно со скоростью $(-\mathbf{v})$ и наводит на концах стержня разность потенциалов U .

Обратим внимание, что стержень в этой задаче полностью аналогичен отрезку радиуса диска униполярного генератора (рис. VI.2).

Отметим, что В. А. Богач не одинок в поисках электрического поля вращающегося магнита. Такие эксперименты начались, видимо, вскоре после создания Максвеллом теории единого электромагнитного поля и продолжались до сих пор [9]. Но все они дали отрицательный результат — электрическое поле вращающегося постоянного магнита (пока?) не обнаружено.

Уравнение (45.4) определяет дополнительное *вихревое поле*, создаваемое переменным магнитным полем. В отличие от электростатического вихревое поле непотенциально, так как $\oint(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \mathfrak{E} \neq 0$. Поскольку оно создается не зарядами, а магнитным полем, то для него $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, т. е. его силовые линии замкнуты. Если система обладает какой-либо симметрией (например, аксиальной), то закон Фарадея в форме (45.3) позволяет определить полную конфигурацию вихревого электрического поля (сравни § 33).

Вихревое электрическое поле можно выразить непосредственно через векторный потенциал, используя соотношение $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Подставляя его в (45.4) и меняя в правой части порядок дифференцирования по координатам и времени, получим $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \left(-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$, откуда

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{g}, \quad (45.6)$$

где $\mathbf{g}$ — произвольная функция, ротор которой равен нулю. Естественно отождествить ее с электростатическим полем $-\nabla \varphi$. Таким образом, мы получаем выражение для полного электрического поля:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (45.7)$$

Теперь мы можем подвергнуть оба потенциала $\mathbf{A}$, φ калибровочному преобразованию, не изменяющему напряженности полей $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ (31.11):

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}, t), \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (45.8)$$

Уравнение (45.4) дополняет уравнение для магнитного поля (39.5) $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ и показывает, что свободное электромагнитное поле (т. е. поле в вакууме и без токов) антисимметрично относительно замены $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$. Исторически закон Фарадея (45.4) был открыт значительно раньше, чем Максвелл «изобрел» свой ток смещения (1864 г.), чтобы симметризо-

вать уравнения поля, известные как *уравнения Максвелла* (J. C. Maxwell, 1864 г.), которые в современной форме выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.\end{aligned}\quad (45.9)$$

Вместе с уравнениями движения частиц, образующих электрический ток, уравнения Максвелла полностью определяют все электромагнитные процессы.

При записи в единицах системы СИ уравнения Максвелла, при кажущейся простоте формы, теряют свой стройный вид, а компоненты электромагнитного поля — свою симметрию:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.\end{aligned}$$

В СИ электрическая индукция $\mathbf{D}$ и электрическое поле $\mathbf{E}$ связаны через диэлектрическую проницаемость, которая является размерной величиной:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_D \cdot \mathbf{E}, \quad \varepsilon_D = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon,$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума (15.12), а ε — безразмерная диэлектрическая проницаемость, которой мы и пользовались при записи соотношений в гауссовых единицах. Аналогично, магнитное поле в СИ связано со вспомогательным полем $\mathbf{H}$ равенством

$$\mathbf{B} = \mu_B \mathbf{H}, \quad \mu_B = \mu_0 \cdot \mu,$$

где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума (38.9). В частности, в вакууме $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, поэтому в СИ $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, как и $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$, измеряются в разных единицах (Приложение III).

Система уравнений Максвелла является классическим примером *феномено-логической* (от греч. *phainomenon* — явление) *теории* — обобщение экспериментальных фактов, характеризующих свойства электрического и магнитных полей. Она, как и все теории такого уровня, позволяют вычислять («предсказывать») характеристики электромагнитного поля, но не объясняет природы (механизма) электромагнитного взаимодействия. Это делает теория более высокого уровня — *квантовая электродинамика*, которая показывает, что переносчиками такого взаимодействия являются фотоны. Сказанное отнюдь не ставит под сомнение величайшую ценность теории Максвелла.

Задача VI.5. Показать, что уравнения Максвелла (45.9) в вакууме инвариантны относительно преобразований Лоренца для поля (29.7).

Начнем с первого из уравнений (45.9). Нам нужно вычислить значения $\text{rot}\mathbf{E}'$ и $\partial\mathbf{V}'/\partial t'$ в системе $()'$, координаты-время которой связаны с координатами-временем исходной («лабораторной») системы соотношениями

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma_0(dx - \beta_0 c \cdot dt), \quad \beta_0 = V/c, \\ dt' &= \gamma_0(dt - \beta_0 c \cdot dx/c), \quad \gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (45.10)$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{e}_x V$ — скорость движения системы $()'$ относительно исходной. Подчеркнем, что нам нужны обратные преобразования координат-времени, так как мы «измеряем» поле в системе $()'$.

Записав для x -компонент первого уравнения (45.9)

$$(\text{rot}\mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (45.11)$$

подставим сюда из (29.7)

$$E_z = \gamma_0(E'_z - \beta_0 H'_y), \quad E_y = \gamma_0(E'_y + \beta_0 H'_z), \quad H_x = H'_x \quad (45.12)$$

и учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t'} - \beta_0 \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x'}. \quad (45.13)$$

Подстановка (45.12), (45.13) в (45.11) дает

$$\gamma_0 \left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} \right) - \beta_0 \gamma_0 \left(\frac{\partial H'_y}{\partial y'} + \frac{\partial H'_z}{\partial z'} \right) = -\frac{1}{c} \cdot \gamma_0 \frac{\partial H'_x}{\partial t'} + \frac{1}{c} \cdot \beta_0 \cdot \gamma_0 \frac{\partial H'_x}{\partial x'},$$

или

$$(\text{rot}\mathbf{E}')_x - \beta_0 (\text{div}\mathbf{H}') = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H'_x}{\partial t'}. \quad (45.14)$$

Аналогично преобразуем y - и z -компоненты первого уравнения. В результате получаем

$$(\text{rot}\mathbf{E}') - \beta_0 (\text{div}\mathbf{H}') = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'}. \quad (45.15)$$

Теперь нам необходимо выяснить, как преобразуется четвертое уравнение (45.9). Используя преобразования для $\mathbf{H}$ из (29.7), запишем

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{div} \mathbf{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \\ &= \gamma_0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\beta_0}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \right) \cdot H'_x + \gamma_0 \frac{\partial}{\partial y'} (H'_y - \beta_0 E'_z) + \gamma_0 \frac{\partial}{\partial z'} (H'_z + \beta_0 E'_y) = \\ &= \gamma_0 \cdot (\operatorname{div} \mathbf{H}')' - \beta_0 \gamma_0 \left[(\operatorname{rot} \mathbf{E}')'_x + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H'_x}{\partial t'} \right]. \end{aligned} \quad (45.16)$$

Это уравнение вместе с (45.14) образует систему двух однородных уравнений

$$\begin{aligned} F_{1x} + \beta_0 F_2 &= 0, \\ \beta_0 F_{1x} - F_2 &= 0, \end{aligned}$$

где $F_{1x} = (\operatorname{rot} \mathbf{E}')'_x + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H'_x}{\partial t'}$, $F_2 = (\operatorname{div} \mathbf{H}')'$. Поскольку определитель этой системы уравнений $\operatorname{Det} = -(1 + \beta_0^2) \neq 0$, то решение системы нулевое: $F_{1x} = F_2 = 0$. Аналогично получим

$$F_{1y} = (\operatorname{rot} \mathbf{E}')'_y + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H'_y}{\partial t'} = 0, \quad F_{1z} = (\operatorname{rot} \mathbf{E}')'_z + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H'_z}{\partial t'} = 0.$$

Тем самым мы показали, что первая пара уравнений Максвелла — первое и четвертое уравнения (45.9) в системе (') имеют тот же вид, что и в исходной, т. е. инвариантны к преобразованиям Лоренца.

Аналогично доказывается инвариантность и другой пары уравнений Максвелла — второго и третьего. При этом нужно использовать преобразования компонент четырех-вектора тока (20.7)

$$j_x = \gamma_0 (j'_x + \beta_0 c \rho'), \quad j_{y,z} = j'_{y,z}, \quad \rho = \gamma_0 (\rho' + \beta_0 j'_x / c). \quad (45.17)$$

Повторяя процедуру, проделанную с первой парой уравнений Максвелла, также придем к системе двух однородных уравнений:

$$\mathbf{F}_3 = (\operatorname{rot} \mathbf{H}')' - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} - \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}' = 0, \quad \mathbf{F}_4 = (\operatorname{div} \mathbf{E}')' - 4\pi \rho' = 0,$$

что и доказывает инвариантность второй пары уравнений Максвелла.

Как мы увидим (§ 116), такое разделение уравнений Максвелла на две пары не случайно (см. также [6], §§ 26, 30).

§ 46. Энергия магнитного поля. Индуктивность

Закон Фарадея позволяет вычислить энергию магнитного поля. Действительно, при увеличении магнитного поля возникает ЭДС индукции, отбирающая энергию электрического тока, возбуждающего магнитное поле. Эта энергия и переходит в энергию магнитного поля.

Рассмотрим произвольный электрический контур с током I . Очевидно, что магнитный поток через этот контур пропорционален току:

$$\Phi = \frac{LI}{c}, \quad (46.1)$$

здесь c — скорость света (гауссова система единиц), а L — некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрии контура; он называется *коэффициентом самоиндукции* или *индуктивностью* контура.

Рассмотрим процесс возбуждения магнитного поля в контуре без потерь и с неизменной геометрией ($L = \text{const}$). В таком контуре ЭДС индукции (45.1) и полная энергия, переданная в контур от генератора тока, равны соответственно

$$\mathcal{E} = -\frac{L}{c^2} \cdot \frac{dI}{dt}, \quad W = -\int \mathcal{E} I dt = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (46.2)$$

Это и есть энергия магнитного поля контура. Бросается в глаза сходство выражения (46.1) и второго выражения (46.2) с соответствующими механическими формулами, причем ток играет роль скорости, поток — импульса, а индуктивность — массы. Это сходство отнюдь не случайно, поскольку, например, ток действительно пропорционален скорости движения заряженных частиц. Более подробно эта аналогия будет рассмотрена в § 49.

В гауссовой системе поток измеряется в максвеллах (Мкс), а в СИ — в веберах (Вб) (Приложения II, III), $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2 = 10^8 \text{ Мкс} = 10^8 \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$. Размерность индуктивности L в гауссовой системе можно найти из (46.1). Так как $\Phi \sim HS \sim SI/cl$, то L имеет размерность длины и измеряется в сантиметрах. В СИ индуктивность измеряется в генри (Гн), причем $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А} = 10^9 \text{ см}$.

Задача VI.6. Найти индуктивность коаксиального кабеля (рис. VI.5).

Магнитное поле в кабеле описывается выражением $B = 2\mu I/cr$. Магнитный поток внутри кабеля пропорционален его длине, поэтому вычислим поток и индуктивность на единицу длины (Φ_1, L_1):

$$\Phi_1 = \frac{2\mu I}{c} \int_r^R \frac{dr}{r} = \frac{2\mu I}{c} \ln \frac{R}{r},$$

откуда

$$L_1 = 2\mu \ln \frac{R}{r}. \quad (46.3)$$

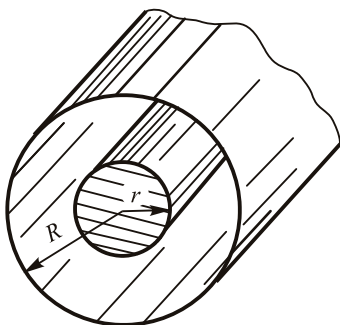


Рис. VI.5. Коаксиальный кабель

Рассмотрим длинный соленоид, поле которого (задача IV.10, § 33) $B = 4\pi\mu NI/cl$, где μ — магнитная проницаемость вещества, заполняющего соленоид (сердечник), l — длина соленоида, а N — число его витков. Магнитный поток через соленоид равен $\Phi_0 = 4\pi\mu NIS/cl$. Однако ЭДС индукции в соленоиде в данном случае не равна $-\dot{\Phi}_0/c$, а в N раз больше. Это объясняется тем, что поток Φ_0 пересекает все N витков соленоида, наводя в каждом из них ЭДС $\mathfrak{E}_0 = -\dot{\Phi}_0/c$, так что полная ЭДС $\mathfrak{E} = N\mathfrak{E}_0$. Величина $\Phi = N\Phi_0$ называется *потокосцеплением*, и именно им определяется индуктивность многovitкового контура по формуле (46.1). Таким образом, индуктивность соленоида равна

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}. \quad (46.4)$$

Энергия магнитного поля в соленоиде (46.2)

$$W = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{\mu H^2}{8\pi} lS. \quad (46.5)$$

Так как магнитное поле в длинном соленоиде однородно, а lS равно объему соленоида, величину

$$w = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu} \quad (46.6)$$

можно интерпретировать как *плотность магнитной энергии*. В вакууме это есть действительно плотность энергии магнитного поля. В среде же в w входит также и энергия тепловых процессов. В результате оказывается, что при постоянной температуре величина w равна свободной энергии среды в магнитном поле (ср. § 17).

В случае нелинейной зависимости $B(H)$, например в ферромагнетике, изменение энергии магнитного поля можно записать в виде $dW = -I\mathcal{E}dt = Id\Phi/c$. Но $d\Phi$ связано с изменением полного поля в среде $d\mathbf{B}$, а I — со вспомогательным полем $\mathbf{H}$. Поэтому изменение плотности магнитной энергии можно записать в виде

$$dw = \frac{(\mathbf{H}, d\mathbf{B})}{4\pi}. \quad (46.7)$$

Это выражение позволяет вычислить, в частности, потери энергии на перемагничивание ферромагнетика. Для этого нужно проинтегрировать (46.7) по петле гистерезиса. Очевидно, что полная потеря энергии при обходе петли пропорциональна ее площади.

§ 47. Давление магнитного поля

Давление, как и все другие силы в магнитном поле, выражается в конечном счете через силу Лоренца, т. е. оно связано с действием магнитного поля на токи. Однако, как и в случае электрического поля, давление можно выразить непосредственно через напряженность поля.

В качестве простейшего примера рассмотрим давление магнитного поля на токовый слой, образующий одну из стенок соленоида прямоугольного сечения (рис. VI.6). Ясно, что это давление вызывается действием поля на ток. Легко проверить, что давление направлено наружу, т. е., в отличие от электрического, магнитное поле действительно давит, а не «тянет». Другой знак давления вызван не различием между самими полями, а несимметрией их источников (отсутствием магнитного заряда). В результате электрическое поле «давит» (тянет) проводник вдоль силовых линий, а магнитное —

поперек. Если же рассмотреть давление поля на границу среды с проницаемостями ε и μ , то оба поля могут как давить, так и тянуть.

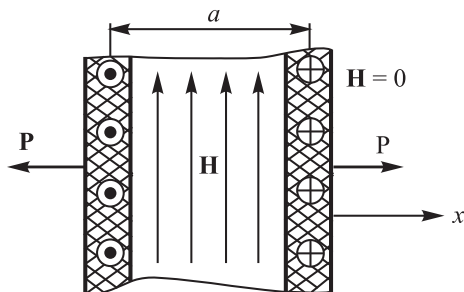


Рис. VI.6. Давление магнитного поля

Вычислим давление магнитного поля в рассматриваемом примере с помощью силы Лоренца. Объемная плотность силы

$$f(x) = \frac{1}{c} j(x) H(x), \quad (47.1)$$

где $j(x)$ — плотность тока в слое. Давление получается интегрированием (47.1) по x . Плотность тока исключим, используя второе из уравнений (45.9). В данном случае $\mathbf{D} = 0$ и задача одномерная:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j(x). \quad (47.2)$$

В результате имеем

$$p = -\frac{1}{c} \int dx H(x) \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H^2}{8\pi}. \quad (47.3)$$

Таким образом, как и для электрического поля, давление магнитного поля равно плотности его энергии.

Результат (47.3) можно получить также и из энергетических соображений. Будем считать теперь, что соленоид заполнен средой с магнитной проницаемостью μ . Произведем виртуальное смещение токового слоя на δa , причем таким образом, чтобы полный поток внутри соленоида остался неизменным: $Ba = \text{const}$, т. е. $\delta B/B = -\delta a/a$. Последнее условие означает, что ЭДС индукции при виртуальном перемещении равна нулю и, следовательно, внешний генератор тока не совершает работы. В таком случае изменение энергии магнитного поля связано только с работой внешних сил, урав-

новешивающих давление поля. Поэтому баланс энергии можно записать в виде (на единицу площади токового слоя)

$$dW = -p\delta a.$$

Изменение энергии поля

$$\delta W = \delta \left(\frac{a\mu H^2}{8\pi} \right) = -\frac{\mu H^2}{8\pi} \delta a. \quad (47.4)$$

В результате получим

$$p = \frac{BH}{8\pi}, \quad (47.5)$$

т. е. давление поля снова равно плотности энергии.

Заметим, что, проинтегрировав (47.2) по x (по толщине стенки с током), мы получаем связь между значениями магнитного поля в соленоиде и линейной плотностью тока j_1 (ток на единицу длины токнесущей стенки):

$$H = \frac{4\pi}{c} \cdot j_1. \quad (47.6)$$

Следует, однако, отметить, что результат (47.5) получен в предположении постоянства μ . Это значит, в частности, что мы пренебрегаем деформацией среды. Последняя изменила бы плотность среды, а значит, и μ . Поэтому полученный выше результат справедлив фактически лишь для жидкого магнетика. Выражение (47.5) также неприменимо в плазме (см. § 44). В твердых телах возникают дополнительные, так называемые магнитострикционные, напряжения, аналогичные электрострикционным (см. § 19).

Соленоид конечной длины (катушка без сердечника) испытывает не только растяжение поперек, в радиальном направлении, но и сжатие вдоль оси. Ясно, что в области однородного магнитного поля сила, действующая на виток, направлена строго по радиусу (см. (28.3)). Однако вблизи краев соленоида поле на оси спадает (задача IV.3), а это означает, что появляется радиальная компонента поля (см. (33.15)). Она и создает силу, направленную вдоль оси соленоида:

$$dF_z(z) = \frac{1}{c} \cdot H_\rho(z) \cdot j(z) \cdot dz \cdot 2\pi R,$$

где $j(z) = \frac{dI}{dz} \approx \frac{c}{4\pi} \cdot H_0(z)$ — ток на единицу длины соленоида, $H_0(z)$ — поле на оси соленоида. Подставив сюда из (33.15)

$$H_\rho(z) \sim -\frac{R}{2} \cdot \frac{dH_0(z)}{dz}$$

и интегрируя по z от середины соленоида ($z = 0$, $H_0(0) = H$) до ∞ ($H_z(\infty) = 0$), находим

$$F_z \sim -\frac{R^2}{4} \int_0^\infty H_0(z) \frac{dH_0(z)}{dz} \cdot dz = -\frac{R^2}{4} \int_H^0 H_0(z) dH_0 = \frac{R^2 H^2}{8}.$$

Соответственно, давление на единицу площади витка равно

$$p_z = \frac{H^2}{8\pi},$$

что точно совпадает с (47.3). Можно не заботиться о проверке направления, вспомнив из школьного курса правило: «параллельные токи притягиваются» (это немедленно следует из (28.1)).

Такое свойство поля соленоида было известно со времен Ампера, что породило представление о магнитном поле как о наборе других нитей — силовых линий, которые сжимаются вдоль самих себя и расталкиваются поперек — такая вот «хитрая субстанция». Эти представления очень живучи (см. § 45, «парадокс Богача»).

Приведем соотношения, удобные для вычисления давления магнитного поля на стенку с током:

$$\text{при } H = 1 \text{ кГс } p = \frac{10^6}{8\pi} \text{ дин/см}^2 = \frac{10^6}{8\pi} \cdot \frac{10^{-3}}{981} \text{ кГ/см}^2 \approx 4,056 \cdot 10^{-2} \text{ атм.}$$

Здесь атм — так называемая техническая атмосфера, равная 1 кГ/см^2 . Таким образом, с хорошей точностью можно принять

$$p_{[\text{атм}]} = 4 \cdot 10^{-2} H_{[\text{кГс}]}^2. \quad (47.7)$$

В заключение отметим, что энергетический метод вычисления сил является, как правило, наиболее эффективным, особенно при наличии среды, так как прямой подсчет сил Лоренца обычно весьма затруднен.

§ 48. Сохранение магнитного потока. Электрические цепи

Рассмотрим замкнутый проводящий контур с током, обладающий сопротивлением R . Из законов Фарадея и Кирхгофа имеем

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_0 / c = RI. \quad (48.1)$$

В случае идеального проводника ($R = 0$) магнитный поток сквозь контур сохраняется:

$$\Phi = \text{const.} \quad (48.2)$$

Ясно, что это равенство будет справедливо и для идеального проводника произвольной формы. Для конечного сопротивления уравнение для изменения потока найдем, подставив в (48.1) $I = c\Phi/L$ (см. (46.1)). Получим уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Phi}{\tau}, \quad \tau = \frac{L}{c^2 R},$$

решение которого есть

$$\Phi = \Phi_0 e^{-t/\tau}. \quad (48.3)$$

Здесь индуктивность проводника L принята постоянной. В сплошном куске проводника убывание потока можно оценить следующим образом. Пусть вначале проводник находился в постоянном внешнем поле (рис. VI.7, сплошные линии). При выключении внешнего источника поле внутри проводника сохраняется в течение некоторого времени, а силовые линии замыкаются снаружи проводника (рис. VI.7, штриховые линии). Сопротивление контура можно оценить в данном случае как $R \sim l/\sigma l^2 = 1/\sigma l$, а индуктивность — $L \sim 4\pi\mu l^2/l = 4\pi\mu l$. Отсюда

$$\tau \sim \frac{4\pi\sigma\mu l^2}{c^2}. \quad (48.3)$$

Для медного проводника размером $l \sim 1$ м время затухания потока $\tau \sim 1$ мин. Таково же и время проникновения внешнего магнитного поля в массивный проводник.

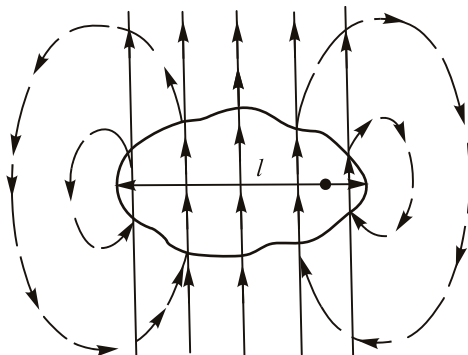


Рис. VI.7. «Вмороженное» поле. Сплошные линии — начальное поле, штриховые — поле после выключения внешнего источника

Полученную оценку интересно применить к гигантскому проводнику — нашей Земле. Считается, что ядро Земли состоит из железа и никеля и нагрето до температуры в несколько тысяч градусов. Примем проводимость ядра $\sigma \sim 10^{16}$ (г), а $\mu = 1$ (выше точки Кюри). Тогда время сохранения магнитного поля в Земле $\tau \sim 10^6$ лет. Это слишком мало, чтобы можно было объяснить природу земного магнитного поля простым сохранением какой-то первоначальной намагниченности. К тому же, как отмечалось в § 43, земное поле испытывает сильные нерегулярные изменения. При этом характерный период изменения направления поля на противоположное раз в $\sim 10^6$ лет (рис. V.16).

В сплошном проводнике сохраняется магнитный поток через любой контур внутри проводника. Это значит, что сохраняется само магнитное поле: $B = \text{const}$. Говорят, что силовые линии «вморожены» в проводник.

Если проводник деформируется (например, плазма), силовые линии остаются по-прежнему вмороженными, т. е. скрепленными с теми же самыми элементами проводника. Это значит, что они смещаются при деформации проводника, так что напряженность магнитного поля изменяется. Рассмотрим, например, длинный цилиндр, в котором возбужден циркулирующий ток (магнитное поле направлено по оси цилиндра и приблизительно однородно). Если теперь каким-то образом сжать цилиндр, магнитное поле будет возрастать обратно пропорционально площади цилиндра. При этом полная энергия магнитного поля будет возрастать по тому же закону: $W \propto SH^2 \propto S/S^2 = 1/S$. Увеличение энергии поля происходит за счет работы внешних сил, сжимающих цилиндр. Это один из методов получения сверхсильных магнитных полей (§ 50).

Интересно отметить, что такой процесс может автоматически происходить в турбулентной плазме. Это объясняется тем, что турбулентное движение локально неустойчиво, т. е. любой малый элемент объема плазмы быстро растягивается в одном направлении и сжимается в поперечных к данному направлениях (так как средняя плотность плазмы сохраняется).

Закон сохранения магнитного потока дает возможность наглядно пояснить так называемое *правило Ленца*, согласно которому токи, возбужденные ЭДС индукции, всегда направлены таким образом, чтобы уменьшить изменение магнитного потока через контур. В предельном случае нулевого сопротивления контура магнитный поток в нем вообще не изменяется. Фактически правило Ленца связано с законом сохранения энергии, так как при противоположном направлении индукционных токов они бы неограниченно возрастали.

Поучительной иллюстрацией действия правила Ленца служит пример витка с индуктивностью L , замкнутого на сопротивление R и помещенного

в переменное (линейно нарастающее) магнитное поле. Согласно закону электромагнитной индукции, можем написать

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = RI, \quad \Phi = SH_0 + \frac{LI}{c}, \quad (48.4)$$

где Φ — полный магнитный поток через виток. Пусть, например, $H_0(t) = ht$. Тогда уравнение для тока принимает вид $\dot{I} + I/\tau = A$, где $A = -hSc/L$, $\tau = L/Rc^2$ — константа. Это неоднородное уравнение заменой $I = I_1 + \tau A$ приводится к однородному уравнению, и окончательное решение имеет вид

$$I(t) = -\frac{hS}{cR} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (48.5)$$

при начальном условии $I(0) = 0$. Найдем теперь отношение скорости нарастания полного потока $\dot{\Phi}$ к скорости изменения внешнего потока hS :

$$\frac{\dot{\Phi}}{hS} = 1 - e^{-t/\tau}. \quad (48.6)$$

В начальный момент ($t \ll \tau$) это отношение примерно равно $t/\tau < 1$, т. е. собственное поле витка почти полностью компенсирует изменение внешнего потока. Однако с течением времени компенсация прекращается, т. е. правило Ленца перестает действовать. Это связано с тем, что ток в витке достигает стационарного значения.

С другим важным случаем сохранения магнитного потока мы встретимся при изучении движения заряженной частицы в неоднородном магнитном поле (§ 57).

§ 49. Индуктивность и масса

Как уже упоминалось в § 46, формулы электродинамики

$$\Phi = \frac{LI}{c}, \quad W = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (49.1)$$

и механики

$$p = mv, \quad W = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (49.2)$$

похожи по своей форме. Поскольку электрический ток пропорционален скорости движения зарядов, подобная аналогия не является формальной. По этой аналогии индуктивность эквивалентна некоторой механической массе. Возникает вопрос: что это за масса и почему в нее не входит действительная масса заряженных частиц (электронов), создающих ток? Для решения первого вопроса выделим в выражении для энергии тока (49.1) скорость частиц явным образом: $I = eN_1v$, где N_1 — число электронов на единицу длины проводника. Тогда

$$W = \frac{e^2 N_1^2 L}{c^2} \cdot \frac{v^2}{2}, \quad (49.3)$$

И величина $e^2 N_1^2 L / c^2$ представляет собой какую-то массу движущихся электронов. Так как полное число электронов $N = lN_1$, где l — длина проводника, то, вводя индуктивность на единицу длины $L_1 = L/l$, получим для эффективной массы одного электрона

$$\frac{m_{\text{эф}}}{m_0} = \frac{e^2 N_1 L_1}{m_0 c^2} = r_e N_1 L_1, \quad (49.4)$$

где m_0 — масса электрона, а $r_e = e^2 / m_0 c^2$ — его «классический радиус». Для металлических проводников, даже самых тонких (~ 1 мкм), $N_1 \sim 10^{15}$ и $m_{\text{эф}}/m_0 \sim 10^3 \gg 1$ ($L_1 \sim 1$), т. е. обычной массой электрона можно полностью пренебречь. Наоборот, для свободных пучков электронов с током ≤ 10 А ($v \sim c$) величина $r_e N_1 \sim 10^{-3} \ll 1$, т. е. *их инерционные свойства определяются обычной массой частиц m_0* . Только в 70-е гг. прошлого века были получены сверхмощные электронные пучки с током до 10^6 А (в виде коротких импульсов длительностью $\sim 10^{-8}$ с), для которых $m_{\text{эф}}/m_0 \sim 100$. Это значит, что их инерционные свойства определяются так же, как и для токов в проводниках, индуктивностью и практически не зависят от обычной массы частиц.

Какова же природа $m_{\text{эф}}$? Ясно, что для пучков заряженных частиц, кроме массы отдельных частиц, нужно учесть еще и массу электромагнитного поля пучка. В частности, массе покоя соответствует масса электрического поля пучка в сопровождающей системе. Рассмотрим это подробнее на примере тонкого трубчатого пучка радиуса r , движущегося вдоль оси ме-

таллической трубы радиуса $R \gg r$. Энергию электрического поля такого пучка на единицу длины найдем, подставив в (9.3) значение электрического поля (7.13):

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \int_0^R E^2(r') \cdot 2\pi r' \cdot dr' = q_1^2 \left(\frac{1}{4} \int_0^r (r')^3 \cdot dr' + \int_r^R \frac{dr}{r} \right) = q_1^2 \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R}{r} \right) \approx \approx q_1^2 \cdot \ln(R/r), \quad R \gg r,$$

где $q_1 = eN_1$ — заряд на единицу длины пучка. Окончательно имеем $W_1 = e^2 N_1^2 \ln(R/r)$. Если считать, что масса этого поля $m_E = W_1/c^2$, то

$$m_E = \frac{e^2 N_1 \ln(R/r)}{c^2} = \frac{m_{\text{эф}}}{2}, \quad (49.5)$$

т. е. ровно в два раза меньше $m_{\text{эф}}$, так как индуктивность коаксиала $L_1 = 2 \ln(R/r)$ (46.3).

Таким образом, качественно величина $m_{\text{эф}}$ может быть объяснена наличием массы у электромагнитного поля пучка, однако количественного соответствия не получается. Как мы увидим в § 118, некорректность такой простой интерпретации $m_{\text{эф}}$ связана с тем, что в общем случае нельзя отделить массу поля от массы частиц, создающих это поле.

В случае тока в проводнике механическая интерпретация индуктивности становится еще более сложной. Действительно, в этом случае заряд движущихся электронов практически полностью компенсирован зарядом неподвижных ионов, так что масса электрического поля тока $m_E \approx 0$. Тем не менее инерционные свойства тока ($m_{\text{эф}}$) полностью сохраняются.

Ситуацию в этом случае можно изложить и иначе. ЭДС индукции, характеризующая инерционные свойства тока, аналогична силе инерции в механике. Для пучков это есть (качественно) сила инерции со стороны массы электрического поля, которое ускоряется вместе с пучком. В случае же тока в проводнике сила инерции (ЭДС индукции) остается, несмотря на то что соответствующая ей масса поля отсутствует!

§ 50. Сверхсильные магнитные поля

Закон сохранения магнитного потока используется, в частности, для получения сверхсильных магнитных полей с напряженностью до десятков МГс. Такие поля представляют интерес, прежде всего, для исследования

свойств вещества в необычных условиях, где можно ожидать открытия совершенно новых явлений. Кроме того, сверхсильные магнитные поля нужны в некоторых экспериментах с элементарными частицами (см. § 36). Разработаны также специальные импульсные ускорители одноразового действия, в которых используются такие поля.

В чем же трудности создания мегагауссных полей? Прежде всего, необходимо обеспечить очень высокую механическую прочность обмоток с током. Действительно, при поле в 1 МГс (100 Тл) магнитное давление достигает 40 тыс. бар (см. (47.6)). Для сравнения укажем, что разрушающее давление для меди составляет всего около 2500 бар, а для закаленной стали — около 10 тыс. бар. Поэтому установки с мегагауссными полями всегда одноразового действия — они просто взрываются.

Другая трудность связана с тем, что для питания таких установок необходимы огромные импульсные мощности. Так, энергия одного литра магнитного поля в 1 МГс равна 4 МДж, что эквивалентно энергии взрыва 1 кг тротила. Вследствие низкого КПД таких установок ($\eta \sim 1\text{--}10\%$) полная затрачиваемая энергия должна быть еще по крайней мере в 10 раз больше. Эту энергию необходимо «загнать» в магнитное поле за очень короткий промежуток времени $\sim 10^{-5}$ с, что соответствует импульсной мощности порядка десятка миллионов киловатт.

Получением сверхсильных магнитных полей физики начали заниматься еще в первой половине прошлого столетия. Пионерские работы были выполнены будущим нобелевским лауреатом П. А. Капицей во время работы в лаборатории Резерфорда в Англии. Он разработал и построил оригинальный ударный генератор тока, в котором механическая энергия вращающегося маховика преобразовывалась за короткое время в электрическую энергию (см. § 53). Сегодня эту замечательную машину можно видеть в Институте физических проблем РАН в Москве. С помощью своего генератора Капица получил (1924–27 гг.) импульсные магнитные поля напряженностью до 320 кГс (32 Тл) при длительности импульса около 0,01 секунды. Использовал он такие поля для исследования свойств вещества в сильном магнитном поле. Свои работы Пётр Леонидович продолжил по возвращении в Советский Союз.

В послевоенные годы работы по получению сверхсильных магнитных полей развивались довольно интенсивно. Наибольшее значение стационарных (постоянных) магнитных полей удалось получить в так называемых катушках Биттера (F. Bitter, 1939 г.), конструкция которых позволяет обеспечить эффективный теплоотвод от проводников с током, создающим поле. В таких конструкциях удалось получать стационарные поля до 25 Тл. Сего-

дня к этому уровню стационарных полей «подбираются» электромагниты на сверхпроводниках (§ 54).

Наибольшие значения магнитных полей были достигнуты в импульсных устройствах. Простейший метод получения сверхсильных магнитных полей состоит в разряде конденсатора через катушку магнитного поля (рис. VI.8). Из баланса энергии в контуре находим

$$\frac{CU^2}{2} = \frac{H^2 V}{8\pi\eta}, \quad (50.1)$$

где U — напряжение на конденсаторе емкости C ; V — эффективный объем магнитного поля; η — КПД установки. Таким способом удалось достичь полей до 5 МГс в объеме всего нескольких кубических сантиметров на время 1–10 мкс. Индуктивность катушки, создающей такое поле, ничтожно мала, и поэтому необходимо, чтобы емкость, питающая катушку, а также вся система токоподводов обладали минимальной собственной индуктивностью. КПД таких установок в основном определяется тем, насколько удастся выполнить это условие.

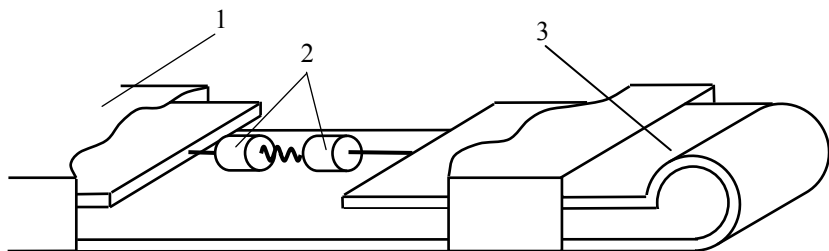


Рис. VI.8. Схема эксперимента для получения сверхсильного магнитного поля «прямым» методом: 1 — конденсаторная батарея; 2 — «ключ» — разрядник; 3 — одно-витковая катушка

Дальнейшее увеличение магнитного поля может быть достигнуто путем так называемого «обжатия» магнитного поля проводящими стенками. Можно, например, сжимать полый металлический цилиндр, помещенный в магнитное поле, параллельное его оси (рис. VI.9). В пренебрежении омическими потерями в стенках магнитное поле внутри цилиндра будет расти обратно пропорционально его площади. Обжатие можно производить внешним магнитным полем. На первый взгляд для этого нужно по крайней мере столь же сильное поле, как и то, которое мы хотим получить внутри цилиндра. Существенный выигрыш получается при использовании кинети-

ческой энергии вещества цилиндра, которое при таких громадных давлениях ведет себя как жидкость. Если сначала относительно небольшим внешним полем разогнать стенки, то затем, двигаясь по инерции, они будут сжимать внутреннее магнитное поле до напряженности, значительно превышающей внешнюю.

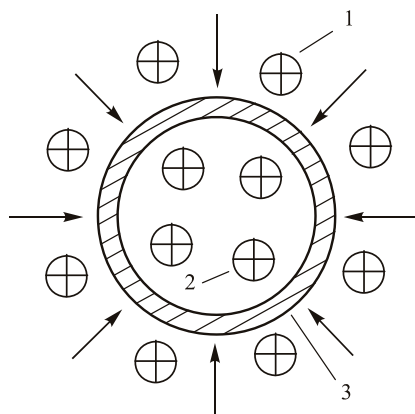


Рис. VI.9. Схема эксперимента для получения сильного магнитного поля методом сжимающегося проводящего цилиндра. Стрелками показано направление внешнего давления: 1, 2 — направления магнитных полей; 3 — сжимающая стенка

Более эффективным является обжатие магнитного поля с помощью взрыва. В этом случае нужен направленный, или *кумулятивный* (от лат. *sumulo* — собирать), взрыв. Более того, направление и форма взрывной волны должны быть сформированы так, чтобы стенка обжимаемого цилиндра приобрела скорость (импульс), направленную вдоль радиуса цилиндра внутрь, к его оси. Так обжимают взрывом ядерные и термоядерные заряды — *методом имплозии* (от англ. *implosion* — взрыв, направленный внутрь).^{*)} Поэтому неудивительно, что метод генерации сверхсильных магнитных полей с помощью направленного взрыва родился и был осуществлен в советском ядерном центре (ВНИИЭФ). Метод был предложен в 1952 г. выдающимся советским физиком А. Д. Сахаровым, одним из главных творцов советского атомного и термоядерного оружия,^{**)} а продемонстрирован и затем существенно развит другим замечательным отечествен-

^{*)} В термоядерных зарядах обжатие на конечной (термоядерной) стадии производится *радиационной имплозией*, т. е. направленным давлением электромагнитного излучения (см. §§ 118 и 145).

^{**)} А. Д. Сахаровым предложена также схема термоядерного реактора «Токомак» (совместно с И. Е. Таммом) и единственная до сих пор гипотеза происхождения асимметрии Вселенной — отсутствия в космических лучах античастиц (антипротонов и антиядер).

ным физиком А. И. Павловским. Ему с соавторами в 1965 г. удалось получить импульсное магнитное поле рекордной напряженности 38 МГс (3800 Тл).

§ 51. Взаимоиндукция

В сложной электрической цепи изменение тока в одном из проводников возбуждает ЭДС индукции не только в этом проводнике (самоиндукция), но и во всех других проводниках (взаимоиндукция). Магнитный поток через площадь, охватываемую i -м проводником (точнее, *потокосцепление*, см. § 46),

$$\Phi_i = \frac{1}{c} L_{ik} I_k, \quad (51.1)$$

где величины L_{ik} ($i \neq k$) называются *коэффициентами взаимной индукции* i -го и k -го проводников, а L_{ii} есть уже известные нам *коэффициенты самоиндукции*. Конечно, такая простая линейная связь между токами и потоками справедлива далеко не всегда. В частности, при использовании ферромагнитных сердечников необходимо в расчетах учитывать зависимость $\mu(H)$ (рис. V.11, в, § 42). Поскольку значение H в железе, в свою очередь, зависит от тока, создающего поле, соотношение (51.1) становится существенно нелинейным по току.

Задача VI.7. Найти коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции двух соленоидов с общим сердечником и перемычкой между ними (рис. VI.10). Площадь поперечного сечения сердечника и перемычки одинаковы и равны l , число витков соленоидов — N_1 и N_2 соответственно, магнитная проницаемость материала сердечника — μ .

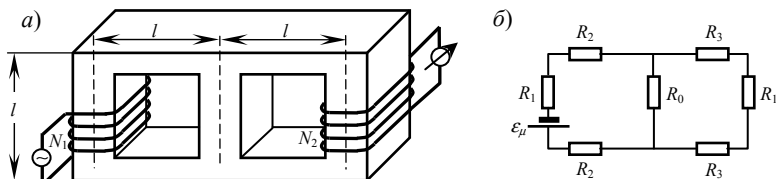


Рис. VI.10. Электромагнит с двумя обмотками и разветвленным сердечником (а) и его эквивалентная схема (б)

Воспользуемся методом расчета магнитных цепей. Магнитная ЭДС $\varepsilon_\mu = 4\pi N_1 I_1 / C$ нагружена на сопротивление (рис. VI.10, б),

$$R_\mu = R_1 + 2R_2 + \left(R_0^{-1} + (2R_3 + R_1)^{-1} \right)^{-1}, \quad R_i = \frac{l}{\mu S}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Поскольку все R_i равны, то

$$R_\mu = \frac{15l}{4\mu S}.$$

Соответственно, потокосцепление и индуктивность соленоида 1 равны

$$N_1 \Phi_1 = \frac{4\pi N_1^2 I_1}{C R_\mu}, \quad L_1 = \frac{16\pi N_1^2}{15} \cdot \frac{\mu S}{l}.$$

Поскольку схема на рис. VI.10, б симметрична, то индуктивность второго соленоида найдем, заменив $1 \rightarrow 2$. Коэффициент взаимнойиндукции получим, вычислив часть потока от соленоида 1, проходящую через соленоид 2:

$$\Phi_0 R_0 = \Phi_2 (R_1 + 2R_3),$$

$$\Phi_0 + \Phi_2 = \Phi_1,$$

где Φ_0 — поток через перемычку. Отсюда

$$\Phi_2 = \frac{R_0}{R_0 + R_1 + 2R_3} \cdot \Phi_1 = \frac{\Phi_1}{4}, \quad \text{потокосцепление } N_2 \Phi_2 = \frac{N_2 \Phi_1}{4},$$

$$L_{12} = \frac{4\pi N_1 N_2}{15} \cdot \frac{\mu S}{l}.$$

Найдем прежде всего магнитную энергию сложной цепи. Для этого вычислим ЭДС индукции в каждом из проводников, считая все коэффициенты взаимнойиндукции постоянными:

$$\mathfrak{E}_i = -\frac{1}{c^2} L_{ik} \dot{I}_k. \quad (51.2)$$

Полная мощность, потребляемая в цепи,

$$P = -\mathfrak{E}_i I_i = \frac{1}{c^2} L_{ik} I_i \dot{I}_k. \quad (51.3)$$

Для интегрирования этого выражения рассмотрим пару симметричных слагаемых $I_i L_{ik} \dot{I}_k + I_k L_{ki} \dot{I}_i$. Каждая такая сумма должна свертываться в полную производную, так как энергия магнитного поля не зависит от спо-

соба его получения, в частности от последовательности включения токов. Это возможно только в том случае, если коэффициенты L_{ik} удовлетворяют соотношению симметрии

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (51.4)$$

Тогда $I_i L_{ik} \dot{I}_k + I_k L_{ki} \dot{I}_i = L_{ik} \frac{d}{dt}(I_i I_k)$, и интегрирование (51.3) дает

$$W = \int P dt = \frac{1}{2c^2} L_{ik} I_i I_k. \quad (51.5)$$

Появление множителя $(1/2)$ связано с тем, что суммирование в (51.5) производится по всем значениям i, k , так что каждая пара $I_i L_{ik} \dot{I}_k + I_k L_{ki} \dot{I}_i$ учитывается дважды. Что же касается диагональных членов, то они также дают при интегрировании множитель $(1/2)$.

Задача VI.8. Выразить коэффициент взаимной индукции двух катушек, намотанных на общем сердечнике, через их коэффициенты самоиндукции, пренебрегая полями рассеяния.

Если Φ_0 — поток в сердечнике, то потокоцепления в первой и второй катушках соответственно

$$\Phi_1 = N_1 \Phi_0 = \frac{1}{c} (L_{11} I_1 + L_{12} I_2), \quad \Phi_2 = N_2 \Phi_0 = \frac{1}{c} (L_{21} I_1 + L_{22} I_2).$$

Полагая $I_2 = 0$, получим $L_{11}/L_{21} = N_1/N_2$, а в случае $I_1 = 0$ аналогично $L_{12}/L_{22} = N_1/N_2$. Откуда

$$L_{12}^2 = L_{11} L_{22}. \quad (51.6)$$

Выражение для энергии (51.5) удобно использовать для нахождения сил, действующих на проводники в магнитном поле. Поскольку энергия магнитного поля не зависит от способа его получения и, в частности, от изменения L_{ik} , мы можем пользоваться выражением (51.5), учтя в балансе энергий работу внешних сил, изменяющих L_{ik} . Пусть нас интересует сила F_q , действующая на один из проводников вдоль некоторой координаты q (не обязательно декартовой). Рассмотрим виртуальное перемещение проводника на δq и запишем баланс энергии, считая токи постоянными:

$$-F_q \delta q + \delta \mathcal{A} = \delta W|_I. \quad (51.7)$$

Здесь $\delta W|_I$ — изменение энергии магнитного поля при постоянных токах, а $\delta \mathcal{A}$ — работа источников тока. Изменение энергии поля δW связано с зависимостью коэффициентов L_{ik} от координаты q . Из (51.5) имеем

$\delta W = I_i I_k \delta L_{ik} / 2c^2$. Работу источников тока найдем из выражения $\delta A = I_i \delta \Phi_i / c = I_i I_k \delta L_{ik} / c = 2\delta W|_I$. В результате получим из (51.7)

$$F_q = \left. \frac{\partial W}{\partial q} \right|_I = \frac{1}{2c^2} I_i I_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial q}. \quad (51.8)$$

Нам пришлось учитывать работу источников тока, так как выражение для энергии (51.5) задано через токи. Если бы оно было задано через магнитные потоки, то баланс энергии упростился бы:

$$-F_q \delta q = \delta W|_{\Phi}, \quad (51.9)$$

откуда для силы получаем формулу

$$F_q = - \left. \frac{\partial W}{\partial q} \right|_{\Phi}. \quad (51.10)$$

Сравним оба выражения для силы в простейшем случае одной индуктивности. Тогда $W = L (q_1 I^2 / 2c^2) = \Phi^2 / 2L(q)$ и $(\partial W / \partial q)|_I = -(\partial W / \partial q)|_{\Phi}$.

Задача VI.9. Оценить индуктивность кругового витка с током и найти его натяжение. Радиус круга — R , радиус поперечного сечения цилиндрического проводника — $r \ll R$.

В качестве координаты выбираем длину витка $l = 2\pi R$. Индуктивность витка оценим, воспользовавшись формулой для поля прямого тока, что является достаточно хорошим приближением при $r \ll R$. Тогда (см. (28.5))

$$\Phi \approx l \cdot \frac{2I}{c} \int_r^R \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2Il}{c} \cdot \ln \frac{R}{r}, \quad L \approx 2l \cdot \ln \frac{l}{2\pi r}.$$

Отсюда и из (51.8)

$$F_l = \frac{I^2}{2c^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial l} = \frac{I^2}{c^2} \cdot \left(\ln \frac{l}{2\pi r} + 2 \right).$$

Точное выражение для индуктивности витка есть $L = 2l(\ln(4l/\pi r) - 7/4)$. Сила натяжения равна

$$F_l = \frac{I^2}{2c^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial l} = \frac{I^2}{c^2} \left(\ln \frac{4l}{\pi r} - \frac{3}{4} \right),$$

т. е. меньше приближенного значения на величину $\frac{I^2}{c^2} \cdot \left(\frac{11}{4} - \ln 8 \right) \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{I^2}{c^2}$. Например, виток провода длиной 1 м и толщиной $r = 1$ мм с током $I = 1$ А испытывает натяжение $F \approx 0,064$ Н $\approx 6,5$ грамма.

Задача VI.10. Используя соотношения (51.1), (51.2), получить формулу индуктивности длинного соленоида (46.4).

Принимая, что весь магнитный поток сосредоточен в сердечнике, и записывая выражение для потока через i -й виток от магнитного поля тока k -го витка $\Phi_{ik} = 4\pi\mu I_k S/cl = L_{ik}I_k/c$, получим значение коэффициента взаимоиנדукции этих витков: $L_{ik} = 4\pi\mu S/cl$. ЭДС самоиндукции соленоида, по которому протекает переменный ток,

$$\mathfrak{E} = \sum_{i,k=1}^N \frac{1}{c} L_{ik} \dot{I}_k = \frac{4\pi\mu N^2 S}{cl} \cdot \dot{I} = \frac{1}{c} L \dot{I},$$

откуда для L следует формула (46.4). Таким образом, для нахождения индуктивности многovitковой системы необходимо сложить коэффициенты взаимоиנדукции каждого витка с каждым. Введенное в § 46 потокосцепление есть простой способ учета этого обстоятельства.

§ 52. Цепи переменного тока

Закон электромагнитной индукции позволяет рассчитывать электрические цепи с индуктивностями. Рассмотрим, например, простейшую цепь — *колебательный контур*, состоящий из трех основных элементов — сопротивления, емкости и индуктивности в случае *последовательного* контура (рис. VI.11, а). Сумма падений напряжения на сопротивлении IR и емкости Q/C равна сумме действующих в цепи ЭДС, т. е. внешней ЭДС $\mathfrak{E}(t)$ и ЭДС индукции $-L\dot{I}/c^2$:

$$\mathfrak{E}(t) - \frac{L}{c^2} \cdot \frac{dI}{dt} = RI + \frac{Q}{C}. \quad (52.1)$$

Продифференцировав это выражение по времени, получим уравнение для тока

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = \frac{c^2 \dot{\mathfrak{E}}(t)}{L}, \quad \omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}, \quad \gamma = \frac{c^2 R}{2L}. \quad (52.2)$$

Смысл параметров ω_0 и γ будет ясен из дальнейшего.

Рассмотрим вначале простейший случай колебаний без затухания и внешней ЭДС ($\gamma = 0$, $\mathfrak{E} = 0$). Тогда (52.2) сводится к уравнению гармонических колебаний, решение которого есть

$$I = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (52.3)$$

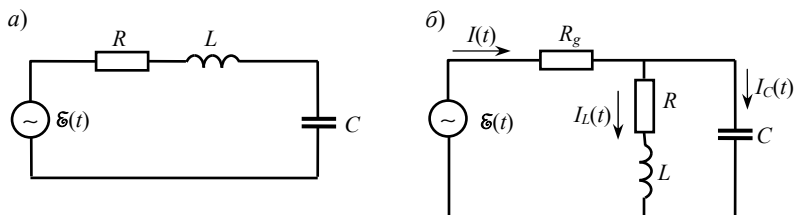


Рис. VI.11. Электрическая цепь, содержащая сопротивление, индуктивность и емкость: последовательный (а) и параллельный (б) колебательные контуры, R_g — внутреннее сопротивление источника ЭДС

Отсюда видно, что ω_0 в (52.2) есть *собственная частота контура* в отсутствие сопротивления, $T = 2\pi/\omega_0$ — период колебаний. Напряжения на емкости и индуктивности в LC-контуре в отсутствие ЭДС $\mathfrak{E}(t)$ и сопротивления R , очевидно,

$$\begin{aligned} V_C(t) &= \frac{1}{C} \int I(t) \cdot dt = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ V_L(t) &= -\frac{L}{c^2} \cdot \frac{dI}{dt} = \omega_0 \frac{L}{c^2} \cdot I_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = V_C(t). \end{aligned} \quad (52.4)$$

А это означает, что ток в контуре и напряжения на обоих его элементах сдвинуты на 90° . Поэтому энергия, запасенная в контуре, перекачивается из индуктивности в емкость и обратно, а суммарная энергия, запасенная в индуктивности и емкости, т. к. потерь энергии нет, равна

$$\begin{aligned} W_L(t) &= \frac{LI(t)^2}{2c^2} \leq \frac{LI_0^2}{2c^2}, \quad W_C(t) = \frac{CV_C^2(t)}{2} \leq \frac{LI_0^2}{2c^2}, \\ W_L(t) + W_C(t) &= \frac{LI_0^2}{2c^2} = W_0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (52.5)$$

Полной аналогией колебательного контура является механический маятник. Оба они, как и многие другие *колебательные системы* и устройства, имеют общее название «*осциллятор*» (от лат. *oscillo* — колеблюсь).

Энергию (52.5) принято называть реактивной, так как она не производит действия, сохраняясь в контуре.

Часто решение уравнений колебаний (52.2) удобнее представлять в комплексной форме. Например, вместо (52.3) можно написать

$$I = I_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)} = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + i I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (52.6)$$

Это выражение также удовлетворяет уравнению (52.2) при $\gamma = 0$, $\mathcal{E} = 0$. Преимущество такой записи состоит в том, что вычисления с экспоненциальными функциями более просты, чем с гармоническими. В частности, при дифференцировании экспонента просто умножается на постоянный множитель. Физическое решение равно при этом действительной части комплексного решения:

$$I(t) = \operatorname{Re}(I_0 e^{i\omega_0 t}), \quad (52.7)$$

где фаза φ отнесена к комплексной амплитуде $I_0 \rightarrow I_0 e^{i\varphi}$.

Применение комплексных величин проиллюстрируем на примере свободных колебаний в контуре с затуханием. Решение уравнения (52.2) при $\mathcal{E} = 0$ ищем в виде $I = I_0 e^{i\omega t}$, где ω — некоторая постоянная. Подставляя это решение в (52.2), получим алгебраическое уравнение для ω :

$$-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0, \quad (52.8)$$

решение которого дает искомую частоту колебаний:

$$\omega = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (52.9)$$

Мнимая часть частоты характеризует затухание колебаний, поскольку при подстановке в решение она дает действительную экспоненту:

$$I = I_1 e^{-\gamma t + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + I_2 e^{-\gamma t - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}. \quad (52.10)$$

Параметр γ называют также *декрементом* затухания колебаний (от лат. *decrementum* — уменьшение), именно он характеризует мощность потерь энергии в контуре (см. (52.5)):

$$P_R = -\frac{dW_0}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{L}{2c^2} \cdot I_0^2 \cdot e^{-2\gamma t} \right) = \gamma \frac{L}{c^2} \cdot I_0^2 \cdot e^{-2\gamma t}.$$

Знаки «—» отражают здесь факт потерь энергии, запасенной в контуре. Подставив сюда выражение для γ из (52.2), находим

$$P_R = \frac{RI_0^2}{2} \cdot e^{-2\gamma t}. \quad (52.11)$$

Мы получили не что иное, как среднюю за период колебаний T мощность тепловыделения на сопротивлении R (закон Джоуля–Ленца (21.8)) при условии малости потерь энергии за период:

$$P_R \approx \frac{RI_0^2}{T} \cdot e^{-2\gamma t} \int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{RI_0^2}{2} \cdot e^{-2\gamma t}, \quad \gamma \ll T^{-1}.$$

Выделив действительную часть (52.10), убеждаемся, что она содержит два произвольных параметра, которые определяются двумя начальными условиями $(I(0), \dot{I}(0))$. Теперь физическое решение можно окончательно записать в виде

$$I(t) = \left(A \cdot \cos \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + B \cdot \sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right) \cdot e^{-\gamma t}, \quad (52.12)$$

где

$$A = I(0), \quad B = \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \cdot \dot{I}(0).$$

Другая форма записи физического решения, через амплитуду I_A и фазу φ , следует из (52.9):

$$\begin{aligned} I(t) &= I_A \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi \right), \\ I_A &= \left[\left(I(0) \right)^2 + \frac{1}{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot \left(\dot{I}(0) \right)^2 \right]^{-1/2}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= - \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \left(\frac{\dot{I}(0)}{I(0)} + \gamma \right). \end{aligned} \quad (52.13)$$

В том, что обе формы записи физического решения, (52.12) и (52.13), удовлетворяют уравнению свободных колебаний (52.2) ($\varepsilon = 0$), можно, конечно, убедиться, не прибегая к комплексным выражениям. Выбор той или другой из них зависит от условий задачи. Вторая форма записи (52.13) имеет ясный физический смысл: свободные колебания тока в контуре имеют амплитуду, экспоненциально убывающую со временем:

$$I_A(t) = I_A \cdot e^{-\gamma t},$$

а фаза колебаний φ и начальная амплитуда I_A определяются начальными условиями (рис. VI.12).

Период колебаний тока в контуре, очевидно, равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (52.14)$$

Комплексная форма решения удобна при решении неоднородного уравнения (52.2) ($\varepsilon \neq 0$), в чем мы немедленно и убедимся, вернувшись к его решению. При произвольной функции $\mathfrak{E}(t)$ частное решение уравнения (52.2) можно записать в виде интеграла

$$I(t) = \frac{c^2}{\omega L} \int_{t_1}^t \dot{\mathfrak{E}}(\xi) e^{-\gamma(t-\xi)} \sin \omega(t-\xi) d\xi. \quad (52.15)$$

Справедливость этой формулы легко проверить подстановкой.

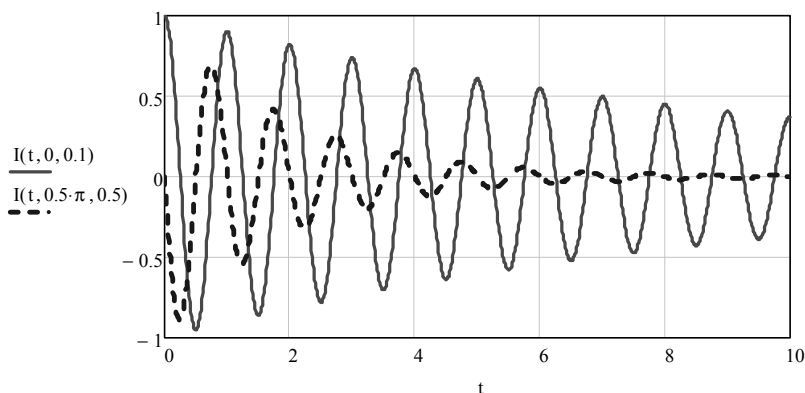


Рис. VI.12. Затухающие свободные колебания в контуре. Сплошная кривая: $\varphi = 0$, $\gamma = 0,1 \cdot T$; пунктир: $\varphi = \pi/2$, $\gamma = 0,5 \cdot T$

Для приложений важное значение имеет частный случай гармонической ЭДС: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\Omega t}$. Тогда частное решение уравнения (52.2) можно искать в виде $I = I_\varepsilon e^{i\Omega t}$ (вынужденные колебания контура). В отличие от свободных колебаний частота колебаний теперь известна, а амплитуда — нет. Ее можно найти подстановкой решения в уравнение

$$I_\varepsilon = \frac{i\Omega \mathfrak{E}_0}{\omega_0^2 + 2i\Omega\gamma - \Omega^2} \cdot \frac{c^2}{L}. \quad (52.16)$$

В частном решении нет произвольных постоянных, и поэтому оно не удовлетворяет начальным условиям. Для получения общего решения нужно

к частному решению прибавить решение однородного уравнения, т. е. свободных колебаний.

Зависимость $I_A(\Omega)$ имеет характерный вид резонансной кривой. Чтобы проанализировать ее параметры, запишем физическое решение для вынужденных колебаний в контуре:^{*)}

$$I(t) = \operatorname{Re}(I_\varepsilon \cdot e^{i\Omega t}) = I_A(\Omega) \cdot \cos(\Omega t + \varphi),$$

$$I_A(\Omega) = \frac{\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\Omega\gamma)^2}} \cdot \frac{c^2 \mathfrak{E}_0}{L}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{2\Omega\gamma}. \quad (52.17)$$

Значения частоты Ω , амплитуды $I_A(\Omega)$ и фазы $\varphi(\Omega)$ при резонансе получим из условия экстремума функции $I_A(\Omega)$:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \omega_0,$$

$$(I_A)_{\text{рез}} = \frac{c^2 \mathfrak{E}_0}{2\gamma L} \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \frac{c^2 \mathfrak{E}_0}{2\gamma L} = \frac{\mathfrak{E}_0}{R}, \quad (52.18)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{рез}} = -\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0.$$

Резонансная кривая $I_A(\Omega)$ в (52.17) (рис. VI.13, а) имеет ширину порядка $\Delta\Omega \sim \omega_0/Q$, где величина Q называется *добротностью контура*. Обычно эту величину определяют из квадрата функции $I(t)$, т. е. через мощность колебаний (сравни задачу VI.11 и формулы (52.22)).

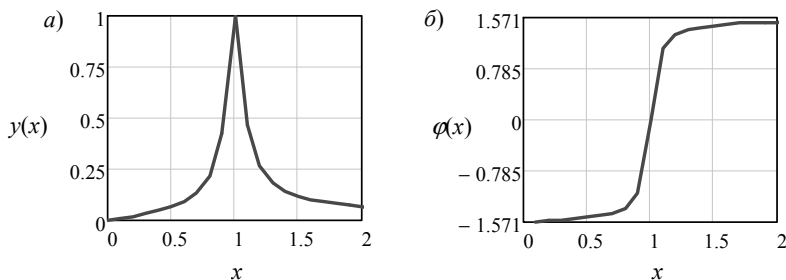


Рис. VI.13. Функции $y(x) \equiv I_A(x)/I_A(1)$ (а) и $\varphi(x)$ (б) (52.17), $x = \Omega/\omega_0$, $\Gamma = \gamma/\omega_0 = 0,05$, $\Omega_{\text{рез}} = 0,997 \cdot \omega_0$

^{*)} Напомним, что действительная часть комплексного числа $\operatorname{Re}(u + iv) = \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \cos \varphi$, где $\operatorname{tg} \varphi = v/u$.

Задача VI.11. Найти значение частоты Ω , при котором амплитуда мощности колебаний уменьшится вдвое от максимального значения.

Запишем функцию $I_A(\Omega)$ в виде

$$I_A(\Omega) = I_{\text{рез}} \cdot y(x), \quad y(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + 4x^2\Gamma^2}}, \quad x = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad \Gamma = \frac{\gamma}{\omega_0}.$$

Из условия $y^2(x) = y^2(1)/2$ находим уравнение для x : $x^2 \pm 2\Gamma x - 1 = 0$, откуда

$$x = \pm\Gamma \mp \sqrt{\Gamma^2 + 1} \xrightarrow{\Gamma \ll 1} \pm\Gamma \mp 1.$$

Из двух наборов знаков, очевидно, нужно выбрать нижний, т. е. $x = 1 - \Gamma$. Тогда искомого значения частоты равно

$$\Omega_{1/2} = \omega_0 \pm \gamma \quad (52.19)$$

Отсюда следует, что *ширина резонансной кривой амплитуды мощности колебаний на полувысоте равна*

$$\Delta\Omega = 2\gamma \quad (52.20)$$

Отношение

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0 L}{c^2 R} \quad (52.21)$$

и есть *добротность контура*, как ее принято определять. Физический смысл этого параметра станет особенно ясен, если в последнем выражении в (52.21) числитель и знаменатель дроби умножить на $I_0^2/2$. Получим (см. (52.5) и (52.11))

$$Q = \frac{\omega_0 W_0}{P_R} = 2\pi \frac{W_0}{TP_R}, \quad \frac{dW_0}{dt} = -\frac{\omega_0 W_0}{Q}. \quad (52.22)$$

Таким образом, Q есть отношение энергии, запасенной в контуре, к энергии, потерянной за период, умноженное на 2π . Таким образом, добротность характеризует качество колебательного контура — насколько мала доля энергии, потерянная за период.

Еще одно значение добротности следует из второго выражения в (52.21):

$$Q = \frac{\pi}{\gamma T} = \pi N_e, \quad (52.23)$$

где N_e — число периодов колебаний за время γ^{-1} , в течение которого амплитуда колебаний убывает в e раз.

Решение (52.17) указывает еще на одну особенность поведения последовательного контура при резонансе (рис. VI.11, а). Запишем значения напряжений на индуктивности и емкости:

$$\begin{aligned} V_L(t) &= \frac{L}{c^2} \cdot \frac{dI(t)}{dt} = -\frac{\Omega L}{c^2} \cdot I_A(\Omega) \cdot \sin(\Omega t + \varphi), \\ V_C(t) &= \frac{1}{C} \int I(t) \cdot dt = \frac{I_A(\Omega)}{\Omega C} \cdot \sin(\Omega t + \varphi) + D_C, \\ V_R(t) &= R \cdot I_A \cdot \cos(\Omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Здесь D_C — константа, значение которой следует из условий равенства ЭДС сумме напряжений на всех трех элементах колебательного контура (уравнение (52.1)):

$$\mathfrak{E}(t) = V_L(t) + V_C(t) + V_R(t).$$

Это равенство выполняется при произвольном t , если только $D_C = 0$. При резонансе в контуре с высокой добротностью ($\gamma \ll \omega_0$), как следует из (52.18), имеем

$$\frac{1}{\Omega_{\text{рез}} C} \approx \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\omega_0 L}{c^2} = \frac{\Omega_{\text{рез}} L}{c^2}.$$

А это означает, что при резонансе напряжения на емкости и индуктивности равны по абсолютной величине и противоположны по знаку (сдвинуты на π по фазе):

$$\left[V_L(t) \right]_{\text{рез}} = - \left[V_C(t) \right]_{\text{рез}} \approx -Q \mathfrak{E}_0 \cdot \sin \omega_0 t,$$

где *добротность* $Q \gg 1$. Таким образом, в резонансе амплитуды напряжений на индуктивности и емкости в Q раз превосходят амплитуду ЭДС. Этот эффект называется *резонансом напряжений*. Конечно, мощность этих колебаний имеет *реактивный* характер. Резонансный контур используется в генераторах высокого напряжения, где параллельно индуктивности подсоединяют выпрямитель — диод с емкостным фильтром. Ток такого генератора определяется мощностью источника ЭДС в схеме рис. VI.11, а.

В случае сложных электрических цепей получается система дифференциальных уравнений, которая решается аналогичным методом. Вместо этого можно, однако, использовать более физический метод решения, введя понятие так называемых *комплексных сопротивлений*. Действительно, при

использовании комплексных выражений для токов и напряжений отношение падения напряжения на индуктивности к току через нее есть некоторая комплексная постоянная $U_L = L\dot{I}/c^2 = i\omega LI/c^2$, откуда

$$\frac{U_L}{I} \equiv R_L = \frac{i\omega L}{c^2}. \quad (52.24)$$

Величина R_L называется *индуктивным сопротивлением*. Аналогично для емкости $U_C = \int Idt/C = I/i\omega C$, и *емкостное сопротивление* равно

$$R_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (52.25)$$

В сложной цепи все эти сопротивления складываются по обычным правилам. Например, для цепи на рис. VI.11, а

$$I = \frac{\mathfrak{E}}{\frac{i\Omega L}{c^2} + R + \frac{1}{i\Omega C}}, \quad (52.26)$$

что в точности совпадает с (52.16). Переход от гауссовых единиц к единицам СИ в формулах (52.24)–(52.26) совершается очень просто: достаточно положить $c = 1$ и все значения величин в этих формулах подставить в единицах СИ (см. Приложение III).

Расчет сложных цепей с комплексными сопротивлениями производится на основе законов Кирхгофа (см. § 24).

Задача VI.12. Найти значения токов через индуктивность и емкость параллельного контура (рис. VI.11, б) при резонансной частоте источника ЭДС для контура высокой добротности ($Q \gg 1$, $\Omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$). Рассмотреть случаи большого и малого сопротивлений генератора.

Анализируя процесс протекания тока в параллельном контуре, приходится явно ввести внутреннее сопротивление источника ЭДС генератора — R_g . В случае последовательного контура это сопротивление (неявно) было включено в сопротивление R в сумме с омическим сопротивлением обмотки индуктивности, и оба они определяли добротность контура.

Запишем уравнения Кирхгофа для параллельного контура, воспользовавшись методом комплексных сопротивлений и (для практики) единицами СИ. Получим

$$\mathfrak{E}_0 = R_g I + (R + i\Omega L) I_L, \quad I = I_L + I_C,$$

$$V_C = (R + i\Omega L) I_L, \quad I_C = \frac{V_C}{i\Omega C}.$$

Здесь I — ток генератора, I_L , I_C — токи через индуктивность и емкость, V_C — напряжение на емкости. Отсюда находим

$$I_L = \frac{\mathfrak{E}_0}{R_g} \cdot \frac{1}{1 + i\Omega RC - \Omega^2 LC + \frac{R}{R_g} + \frac{i\Omega L}{R_i}},$$

$$I_C = i\Omega C(R_g + i\Omega L).$$

При $\Omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

$$I_L = \frac{Q\mathfrak{E}_0}{QR + i(R_g + Q^2R)}, \quad I_C = -\left(1 - \frac{i}{Q}\right) \cdot I_L.$$

1) В случае достаточно большого сопротивления генератора, $R_g \gg Q^2R$, домножив числитель и знаменатель на разность действительной и мнимой частей в знаменателе формулы I_L , находим

$$I_L = \frac{Q\mathfrak{E}_0}{QR + iR_g} \approx \frac{Q\mathfrak{E}_0}{R_g} \left(\frac{R}{R_g} - i \right), \quad I_C \approx \frac{Q\mathfrak{E}_0}{R_g} \left(\frac{1}{Q} + i \right).$$

Отсюда ток генератора

$$I = \frac{\mathfrak{E}_0}{R_g}.$$

2) При обратном неравенстве, $R_g \ll Q^2R$, аналогично имеем

$$I_L \approx \frac{\mathfrak{E}_0}{R} \cdot \frac{1}{1 + iQ} \approx \frac{\mathfrak{E}_0}{Q^2R} (1 - iQ), \quad I_C \approx i \frac{\mathfrak{E}_0}{QR}, \quad I = \frac{\mathfrak{E}_0}{Q^2R}.$$

Результаты задачи VI.12 наглядно демонстрируют особенности протекания токов в *параллельном контуре*. В первом случае большого внутреннего сопротивления, $R_g \gg Q^2R$, источник гармонической ЭДС является *генератором тока*: величина тока I не зависит от параметров контура. При выполнении условия резонанса мнимые части комплексных амплитуд I_L и I_C равны по величине и противоположны по знаку, а их абсолютные значения в Q раз превосходят ток генератора I . Мнимость, как мы уже знаем, означает сдвиг по фазе — в данном случае $\pm\pi/2$ ^{*)} — относительно тока генератора, амплитуда которого имеет действительное значение. Таким образом, токи в плечах параллельного контура «раскачиваются» генератором при резонан-

^{*)} Напомним, что $\pm i = e^{\pm\pi/2}$.

се до большой величины, и поэтому такой режим называется *резонансом токов*.

Во втором случае ($R_g \ll Q^2 R$) картина обратная: контур представляет для генератора очень большое сопротивление — $Q^2 R$, и «раскачать» токи в его плечах невозможно.

Задача VI.13. Цепь из двух последовательно соединенных емкостей и присоединенных к ним сопротивлений (рис. III.4) подключена к источнику переменного напряжения. Найти значение напряжения между «землей» (точка E) и средней точкой F . Выяснить, при каких параметрах цепи это напряжение не зависит от частоты переменного напряжения.

Воспользовавшись комплексными сопротивлениями, запишем

$$V_{EF} = \mathfrak{E} \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad Z_{1,2} = \left(\frac{1}{R_{1,2}} + i\omega C_{1,2} \right)^{-1}.$$

Отсюда

$$V_{EF} = \frac{\mathfrak{E} R_2 (1 + i\omega R_1 C_1)}{R_1 (1 + i\omega R_2 C_2) + R_2 (1 + i\omega R_1 C_1)}.$$

При $R_1 C_1 = R_2 C_2$ имеем компенсированный делитель, коэффициент деления которого не зависит от частоты:

$$V_{EF} = \frac{\mathfrak{E} R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\mathfrak{E} C_2}{C_1 + C_2}$$

(ср. задачу III.7).

В случае произвольной зависимости ЭДС от времени метод комплексных сопротивлений не имеет заметного преимущества перед прямым решением дифференциальных уравнений. Выше мы продемонстрировали это на примере RC -цепочек (задача III.9) и привели выражение для частного решения уравнения (52.2) в случае произвольной функции $\mathfrak{E}(t)$ (52.15). Два важных случая так называемых LR -цепочек, рассмотрены в следующей задаче.

Задача VI.14. ЭДС $\mathfrak{E}(t)$, изменяющаяся с характерным временем τ , подключена к LR -цепочке (рис. VI.14). Найти значения напряжений на индуктивности и сопротивлении. Рассмотреть случаи а) $\tau_0 \gg \tau$, б) $\tau_0 \ll \tau$, $\tau_0 = L/c^2 R$.

В отсутствие емкости рис. VI.11 переходит в рис. VI.14, а вместо уравнения (52.1) имеем

$$\frac{L}{C^2} \cdot \frac{dI}{dt} + RI = \mathfrak{E}(t), \text{ или } \frac{dI}{dt} + \frac{I}{\tau_0} = \mathfrak{E}(t),$$

где $\tau_0 = L/c^2 R$, $\mathcal{E}(t) = \mathfrak{E}(t) \cdot c^2/L$. Отметим, что проделанный переход не очевиден, т. к. при $C \rightarrow 0$ заряд на конденсаторе также стремится к нулю. Эта неопределенность легко разрешима:

$$\frac{Q}{C} = V_C \xrightarrow{C \rightarrow 0} 0.$$

Полученное уравнение по форме совпадает с (25.15) (задача III.9) при заменах $\tau_0 \rightarrow RC$, $I(t) \rightarrow V_C(t)$, $\mathfrak{E}(t) \rightarrow V(t)/RC$. Поэтому решение нам уже известно. Произведя обратные замены в (25.17), имеем

$$I(t) = I(0) + e^{-t/\tau_0} \int_0^t \mathfrak{E}(x) \cdot e^{-x/\tau_0} \cdot dx. \quad (52.27)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} V_L(t) &= \frac{L}{c^2} \cdot \frac{dI}{dt} = -\frac{e^{-t/\tau_0}}{\tau_0} \int_0^t \mathfrak{E}(x) \cdot e^{-x/\tau_0} \cdot dx + \mathfrak{E}(t) \cdot e^{-t/\tau_0}, \\ V_R(t) &= R \cdot I(t) = R \cdot I(0) + \frac{e^{-t/\tau_0}}{\tau_0} \int_0^t \mathfrak{E}(x) \cdot e^{-x/\tau_0} \cdot dx. \end{aligned} \quad (52.28)$$

Обратим внимание на знак перед dI/dt — здесь написано выражение не для ЭДС, а для напряжения (слагаемое в левой части уравнения (52.2)!).

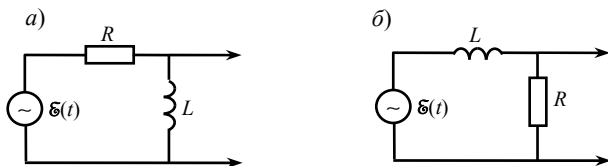


Рис. VI.14. «Интегрирующая» (а) и «дифференцирующая» (б) LR -цепочки

а) $\tau_0 \gg \tau$, этот случай аналогичен случаю «а» в задаче III.9. Но теперь

$$\begin{aligned} V_L(t) &\approx \mathfrak{E}(t), \\ V_R(t) &\approx RI(0) + \frac{1}{\tau_0} \int_0^t \mathfrak{E}(x) dx \end{aligned}$$

— цепочка рис. VI.14, а является интегрирующей, если напряжение измерять на сопротивлении.

б) $\tau_0 \ll \tau$, аналогично случаю «б» задачи III.9 находим

$$V_L(t) \approx \tau_0 \cdot \frac{d\mathfrak{E}}{dt},$$

$$V_R(t) \approx \mathfrak{E}(t),$$

т. е. цепочка рис. VI.14, б является дифференцирующей при измерении напряжения на индуктивности.

Задача VI.15. Емкость C , заряженную до напряжения V_0 , мгновенно замыкают на цепочку из последовательно соединенных индуктивности L и сопротивления R . Найти закон изменения напряжения на емкости.

Уравнение для тока получено выше — это (52.1) при $\mathfrak{E}(t) = 0$. Добавим к нему уравнения

$$Q = CV, \quad I = \dot{Q}$$

и, подставив эти значения в уравнение для тока, получим

$$\ddot{V} + 2\gamma\dot{V} + \omega_0^2 V = 0, \quad (52.29)$$

где ω_0 и γ определены в (52.2). Решение ищем в виде

$$V(t) = A \cdot e^{\kappa t},$$

где A — константа. Подставив в (52.29), получим уравнение для κ :

$$\kappa^2 + 2\gamma\kappa + \omega_0^2 = 0,$$

откуда

$$\kappa_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

При $\gamma > \omega_0$ ($R > 2\sqrt{L/c^2 C}$) параметр κ — действительная и отрицательная величина, и

$$V(t) = A_1 e^{\kappa_1 t} + A_2 e^{\kappa_2 t}.$$

Константы A_1 и A_2 находим из начальных условий:

$$V(0) = V_0, \quad \dot{V}(0) = I(0)/C = 0,$$

что дает

$$A_1 = \frac{\kappa_2}{\kappa_2 - \kappa_1} \cdot V_0, \quad A_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_2} \cdot V_0.$$

В результате решение имеет вид (рис. VI.15)

$$V(t) = V_0 e^{-\gamma t} \cdot \frac{\gamma \cdot \operatorname{sh} \alpha t + \alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha t}{\alpha}, \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0.$$

Это режим аperiодического разряда (без колебаний) емкости на LR -цепочку. При $\gamma < \omega_0$ параметр κ — комплексный:

$$\kappa = -\gamma \pm i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} > 0.$$

В этом случае проще записать решение сразу в действительной форме

$$V(t) = (a \cdot \cos \Omega t + b \cdot \sin \Omega t) \cdot e^{-\gamma t},$$

Из начальных условий, как и выше, получим два уравнения:

$$\begin{aligned} a &= V_0, \\ -\gamma a + \Omega b &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$b = \gamma a / \Omega.$$

В результате получим затухающие колебания напряжения на емкости (рис. VI.15):

$$V(t) = \frac{\omega_0}{\Omega} V_0 \cos(\Omega t - \varphi) \cdot e^{-\gamma t}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma}{\Omega}.$$

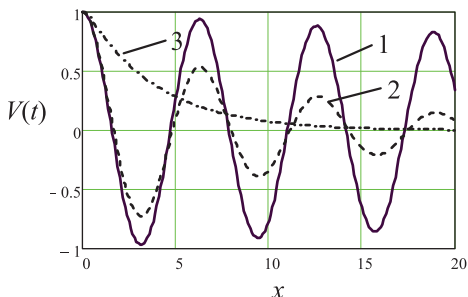


Рис. VI.15. Зависимость напряжения на емкости от времени: $\gamma/\omega_0 = 0,01$ (1) и $0,1$ (2) — затухающие колебания; $2,0$ (3) — аperiодический разряд емкости; $x = \omega_0 t$

§ 53. Технические применения электромагнитной индукции

Закон электромагнитной индукции лежит в основе современной электротехники, а также радиотехники, которая, в свою очередь, составляет ядро современной индустрии, полностью преобразившей всю нашу цивилизацию. Практическое применение электромагнитной индукции началось только спустя полвека после ее открытия. В то время технический прогресс шел еще сравнительно медленно. Причина, по которой электротехника играет столь важную роль во всей нашей современной жизни, состоит в том, что электричество является наиболее удобной формой энергии — и именно благодаря закону электромагнитной индукции. Последний позволяет легко получать электроэнергию из энергии механической (генераторы), гибко распределять и транспортировать энергию (трансформаторы) и преобразовывать ее обратно в механическую (электромотор) и другие виды энергии, причем все это происходит с очень высоким КПД. Еще в начале 1930-х гг. распределение энергии между станками на заводах осуществлялось через сложную систему валов и ременных передач — лес трансмиссий составлял характерную деталь индустриального «интерьера» того времени. Современные станки оборудованы компактными электродвигателями, питаемыми по системе скрытой электропроводки.

Современная индустрия использует единую систему электроснабжения, охватывающую всю страну, а иногда и несколько соседних стран.

Система электроснабжения начинается с генератора электроэнергии. Работа генератора основана на непосредственном использовании закона электромагнитной индукции. Схематически простейший генератор представляет собой неподвижный электромагнит (статор), в поле которого вращается катушка (ротор). Возбуждаемый в обмотке ротора переменный ток снимается с помощью специальных подвижных контактов — щеток. Так как через подвижные контакты трудно пропустить большую мощность, часто применяется обращенная схема генератора: вращающийся электромагнит возбуждает ток в неподвижных обмотках статора. Таким образом, генератор преобразует в электричество механическую энергию вращения ротора. Последний приводится в движение с помощью либо тепловой энергии (паровая или газовая турбина), либо механической (гидротурбина).

На другом конце системы энергоснабжения стоят различные исполнительные механизмы, использующие электроэнергию, важнейшим из которых является электродвигатель (электромотор). Наиболее распространен, благодаря своей простоте, так называемый асинхронный двигатель, изобре-

тенный независимо в 1885–1887 гг. итальянским физиком Феррарисом (G. Ferraris) и знаменитым сербским инженером Тесла (N. Tesla), эмигрировавшим в США. Статор такого двигателя представляет собой сложный электромагнит, создающий вращающееся поле. Вращение поля достигается с помощью системы обмоток, токи в которых сдвинуты по фазе. В простейшем случае достаточно взять суперпозицию двух полей в перпендикулярных направлениях, сдвинутых по фазе на 90° (рис. VI.16).

Такое поле можно записать в виде комплексного выражения

$$\mathbf{H}(t) = H_0 \cos \omega t + i H_0 \sin \omega t = H_0 e^{i\omega t}, \quad (53.1)$$

которое представляет двумерный вектор постоянной длины, вращающийся против часовой стрелки с частотой ω . Хотя формула (53.1) похожа на комплексное представление переменного тока в § 52, ее физический смысл иной. В случае переменного тока реальное значение имела только действительная часть комплексного выражения, здесь же комплексная величина представляет двумерный вектор, а ее фаза ωt не только является фазой колебаний компонент переменного поля, но и характеризует направление вектора поля (рис. VI. 16).

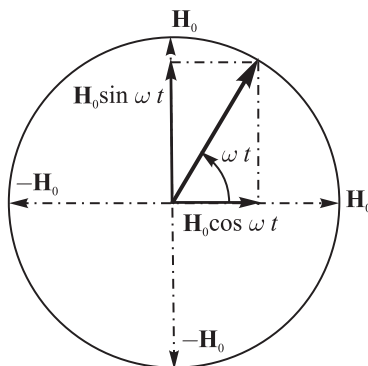


Рис. VI.16. Схема получения вращающегося магнитного поля

В технике обычно используется несколько более сложная схема вращения поля — с помощью так называемого *трехфазного тока*, т. е. трех токов, фазы которых сдвинуты на 120° друг относительно друга. Эти токи создают магнитное поле в трех направлениях, повернутых одно относительно другого на угол 120° (рис. VI.17). Отметим, что такой трехфазный ток автоматически получается в генераторах с аналогичным расположением обмоток. Получивший широкое распространение в технике трехфазный ток был изобретен в 1888 г. выдающимся русским электротехником М. О. Доливо-Добровольским, который построил на этой основе первый трехфазный

асинхронный двигатель и, работая в Германии, первую в мире техническую линию электропередачи (1891 г.).

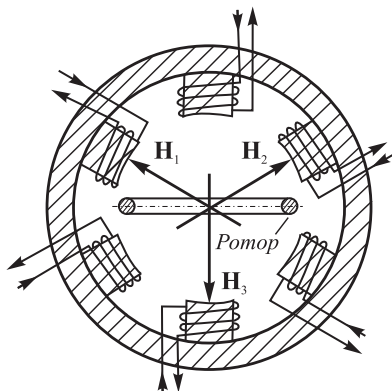


Рис. VI.17. Схема асинхронного двигателя. Ротор для простоты показан в виде одного витка

Обмотка ротора асинхронного двигателя состоит в простейшем случае из короткозамкнутых витков. Переменное магнитное поле наводит в витках такой ток, который приводит к вращению ротора в том же направлении, что и магнитное поле. В соответствии с правилом Ленца ротор стремится «догнать» вращающееся магнитное поле. Для нагруженного двигателя скорость вращения ротора всегда меньше, чем поля, так как в противном случае ЭДС индукции и ток в роторе обратились бы в нуль. Отсюда название — *асинхронный двигатель*.

Задача VI.16. Найти скорость вращения ротора асинхронного двигателя в зависимости от нагрузки.

Уравнение для тока в одном витке ротора имеет вид

$$\frac{L\dot{I}}{c^2} + RI = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} (H_0 S \cos \alpha) = \frac{\omega H_0 S}{c} \sin \alpha, \quad (53.2)$$

где ω — угловая скорость скольжения поля относительно ротора, $\alpha = \omega t + \theta$ характеризует ориентацию витка относительно поля, а θ — расположение витка в роторе (рис. VI.18, а). Переходя к комплексным величинам (см. § 52), получим решение уравнения (53.2):

$$I = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{i\omega H_0 S c e^{i\alpha}}{Rc^2 + i\omega L} \right\} = \frac{\omega H_0 S c \sin(\omega t + \theta - \varphi)}{\sqrt{R^2 c^4 + \omega^2 L^2}}, \quad (53.3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{Rc^2}.$$

Вращающий момент, действующий на виток в этом же магнитном поле,

$$N_1 = \frac{ISH_0 \sin \alpha}{c} = \frac{\omega H_0^2 S^2}{2\sqrt{R^2 c^4 + \omega^2 L^2}} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + 2\theta - \varphi)]. \quad (53.4)$$

Обычно обмотка ротора содержит большое число равномерно расположенных витков, так что суммирование по θ можно заменить интегрированием. В результате получаем для полного момента на валу двигателя

$$N = \frac{Rc^2 H_0^2 S^2 n}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 L^2 + R^2 c^4}, \quad (53.5)$$

где n — число витков ротора. График зависимости $N(\omega)$ изображен на рис. VI.18, б. Максимальный момент $N_{\max} = H_0^2 S^2 / 4L$ и соответствует частоте скольжения $\omega_{\text{opt}} = Rc^2/L$. Отметим, что омическое сопротивление ротора влияет только на частоту скольжения, но не на максимальный момент двигателя. Отрицательная частота скольжения (ротор «обгоняет» поле) соответствует режиму генератора. Для поддержания такого режима необходимо затрачивать внешнюю энергию, которая преобразуется в электрическую в обмотках статора.

При заданном моменте частота скольжения неоднозначна, однако устойчивым является только режим $|\omega| < \omega_{\text{opt}}$.

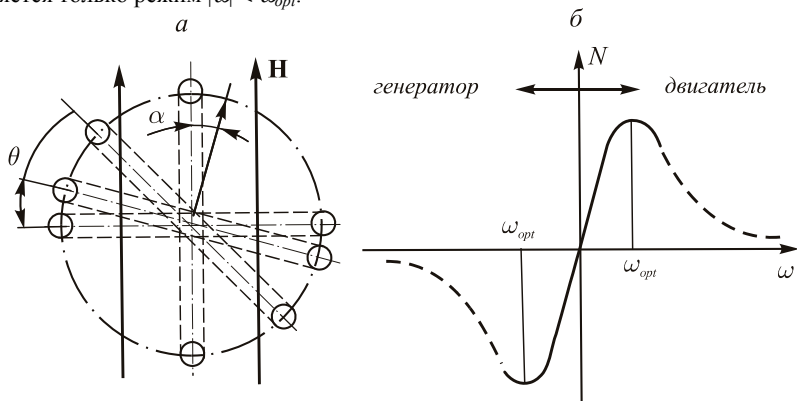


Рис. VI.18. К задаче об асинхронном двигателе: а) виток обмотки ротора в «скользящем» поле; б) нагрузочная характеристика двигателя

Основной элемент систем преобразования и транспортировки электроэнергии — *трансформатор*, изменяющий напряжение переменного тока. Для дальнейшей передачи электроэнергии выгодно использовать максимально возможное напряжение, ограничиваемое только пробоем изоляции. В настоящее время действуют линии передачи с напряжением свыше 500 кВ. Линия на рекордно высокое напряжение 1150 кВ была построена в СССР

(Казахстан) и введена в действие в 1982 г. При заданной передаваемой мощности ток в линии обратно пропорционален напряжению, а потери в линии падают как квадрат напряжения (см. § 55). С другой стороны, для питания потребителей электроэнергии необходимы значительно меньшие напряжения, главным образом по соображениям простоты конструкции (изоляции), а также техники безопасности. Отсюда необходимость трансформации напряжения. Метод транспортировки электроэнергии по линиям электропередачи высокого напряжения был предложен в 1880 г. российским физиком Д. А. Лачиновым (см. § 55 — задача VI.19 и текст к ней).

Обычно трансформатор состоит из двух обмоток на общем железном сердечнике (рис. VI.19). Железный сердечник необходим в трансформаторе для уменьшения потока рассеяния и, следовательно, лучшего потокоцепления между обмотками. Так как железо является одновременно и проводником, оно пропускает переменное магнитное поле лишь на небольшую глубину (см. § 87). Поэтому сердечники трансформаторов приходится делать шихтованными, т. е. в виде набора тонких пластин, электрически изолированных одна от другой. Для промышленной частоты 50 Гц обычная толщина пластины составляет 0,5 мм. Для трансформаторов на высокие частоты (в радиотехнике) приходится использовать очень тонкие пластины ($< 0,1$ мм) или ферритовые сердечники (§ 42).

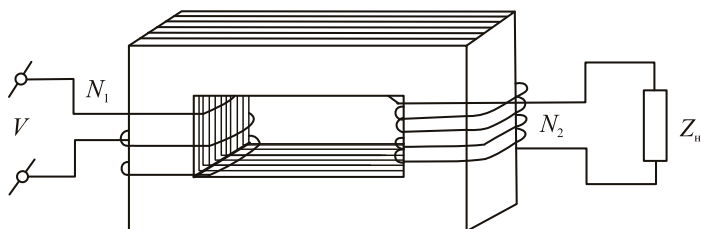


Рис. VI.19. Схема трансформатора переменного тока

Задача VI.17. На какое напряжение нужно изолировать пластины сердечника трансформатора?

Если число пластин в сердечнике — n , а напряжение на виток обмотки трансформатора — V_1 , то напряжение между соседними пластинами $V_{\text{изол}} \approx V_1/2n$.

В простейшем случае отсутствия рассеянного потока отношение ЭДС в обеих обмотках пропорционально числу их витков, так как ЭДС индукции на один виток определяется одним и тем же потоком в сердечнике. Если, кроме того, потери в трансформаторе малы, а сопротивление нагрузки велико, то очевидно, что отношение напряжений на первичной и вторичной об-

мотках также пропорционально N_1/N_2 . В этом и состоит принцип работы трансформатора, позволяющего таким образом легко изменять напряжение во много раз.

Задача VI.18. Найти коэффициент трансформации напряжения при произвольной нагрузке.

Пренебрегая потерями в трансформаторе и рассеянием (идеальный трансформатор), запишем уравнение для токов в обмотках в виде (в единицах СИ, см. § 52):

$$i\omega L_{11}I_1 + i\omega L_{22}I_2 = V, \quad i\omega L_{21}I_1 + i\omega L_{22}I_2 + Z_n I_2 = 0, \quad (53.6)$$

где V — напряжение на первичной обмотке, Z_n — комплексное сопротивление нагрузки (см. § 52) и использовано выражение (51.2) для ЭДС индукции сложной цепи. Из соотношения (51.6) следуют равенства $L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11}L_{22}}$. Теперь можно найти коэффициент трансформации напряжения $k_V = Z_n I_2 / V$, не решая уравнений (53.6), а просто поделив их одно на другое:

$$k_V = -\frac{\sqrt{L_{11}L_{22}} + L_{22}(I_2/I_1)}{L_{11} + \sqrt{L_{11}L_{22}}(I_2/I_1)} = -\frac{\sqrt{L_{22}}}{\sqrt{L_{11}}} = -\frac{N_2}{N_1}. \quad (53.7)$$

Коэффициент трансформации оказывается равным, таким образом, просто отношению числа витков при любой нагрузке. Знак k_V зависит от выбора начала и конца обмоток.

Для нахождения коэффициента трансформации по току $k_I = I_2/I_1$ нужно решить систему (53.6), в результате чего получим

$$k_I = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{i\omega L_{11}}{i\omega L_{22} + Z_n}. \quad (53.8)$$

В общем случае коэффициент оказывается некоторой комплексной величиной, т. е. между токами в обмотках появляется сдвиг фаз. Представляет интерес частный случай малой нагрузки $Z_n \ll \omega L_{22}$. Тогда $k_I = N_1/N_2 = 1/|k_V|$, т. е. отношение токов становится обратным отношению напряжений.

Такой режим работы трансформатора можно использовать для измерения больших токов (*трансформатор тока*). Оказывается, что такое же простое преобразование токов сохраняется и для произвольной зависимости тока от времени при специальной конструкции трансформатора тока. В этом случае он называется *поясом Роговского* (рис. VI.20) и представляет собой гибкий замкнутый соленоид произвольной формы с равномерной намоткой. Работа пояса основана на законе сохранения циркуляции магнитного поля (33.3), $\oint(\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = 4\pi I_0(t)/c$, где интегрирование производится по контуру внутри пояса (см. рис. VI.21), а $I_0(t)$ — полный измеряемый ток,

охватываемый поясом. Предполагая, что поперечные размеры пояса достаточно малы, можно записать ЭДС индукции, наводимую на пояс, так:

$$\mathcal{E} = -\oint \left(d\mathbf{l}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \frac{S_0 n_0}{c} = -\frac{S_0 n_0 \mu}{c} \cdot \frac{d}{dt} \oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = -\frac{4\pi \mu n_0 S_0}{c^2} \cdot \frac{dI_0}{dt}, \quad (53.9)$$

где S_0 — поперечное сечение пояса, а n_0 — плотность намотки, обе величины предполагаются постоянными вдоль пояса; μ — магнитная проницаемость сердечника пояса. Уравнение для тока в поясе i имеет вид

$$\frac{L}{c^2} \cdot \frac{di}{dt} + (r + R)i = -\frac{L}{Nc^2} \cdot \frac{dI_0}{dt}, \quad (53.10)$$

где r, R — внутреннее сопротивление пояса и сопротивление нагрузки (измерительное сопротивление); $L = 4\pi \mu S_0 n_0^2 l$ — индуктивность пояса, $N = n_0 l$ — полное число витков пояса. Пусть характерное время τ изменения тока $I_0(t)$ удовлетворяет следующему условию (ср. задача VI.14):

$$\tau \ll \frac{L}{(r + R)c^2}. \quad (53.11)$$

Тогда в (53.10) можно пренебречь вторым слагаемым в левой части (сопротивлением цепи), и уравнение (53.10) непосредственно интегрируется: $i = -I_0/N$, т. е. получается то же соотношение, что и для трансформатора тока, но теперь при произвольной зависимости тока от времени. Обратим внимание на то, что ток в цепи пояса i не зависит от расположения измеряемого тока I_0 внутри пояса, если плотность намотки пояса n_0 и его сечение S_0 постоянны по длине в (53.9).

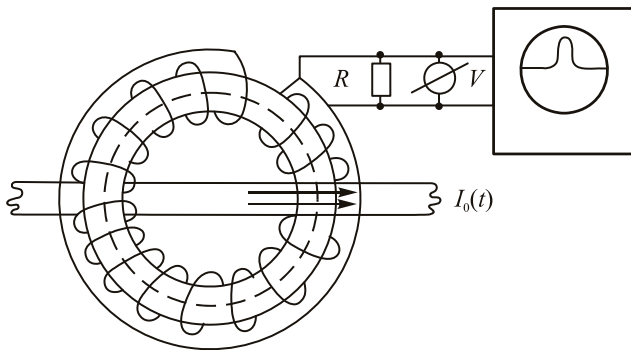


Рис. VI.20. Схема пояса Роговского. Штриховой линией условно показан путь интегрирования

Простое преобразование электрического напряжения возможно только для переменного тока. Этим определяется его решающая роль в современной индустрии. В тех случаях, когда требуется постоянный ток, возникают существенные трудности. Например, в сверхдальних линиях передачи электроэнергии применение постоянного тока дает значительные преимущества: уменьшаются тепловые потери, так как нет скин-эффекта (§ 87) и отсутствуют резонансные (волновые) переходные процессы при включении/выключении линии передачи, длина которой порядка длины волны переменного тока (6000 км для промышленной частоты 50 Гц). Трудность же состоит в выпрямлении переменного тока высокого напряжения на одном конце линии передачи и обратного преобразования — на другом.

§ 54. Сверхпроводимость

Давно известно, что сопротивление проводников падает с температурой. Однако на основании существовавших представлений о строении вещества физики были твердо уверены, что при понижении температуры сопротивление уменьшается до нуля монотонно. Поэтому открытие в 1911 г. голландским физиком Камерлинг-Оннесом (H. Kamerlingh-Onnes) сверхпроводимости было совершенно неожиданным, а теоретическое объяснение дано лишь полвека спустя.

Рассматриваемое явление состоит в скачкообразном ($\Delta T = 10^{-4} - 10^{-3}$ К для чистых металлов) падении сопротивления проводника до исчезающе малых значений ($\rho < 10^{-23}$ Ом · см). Происходит оно при достаточно низких температурах (рис. VI.21). Как стало ясно после создания теории сверхпроводимости, сопротивление металла ниже точки перехода в точности равно нулю. Температуру, при которой проводник переходит в сверхпроводящее состояние, называют *критической*, T_c (индекс *c* — от англ. critical).

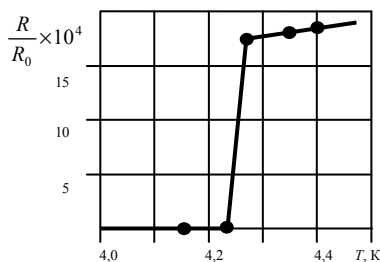


Рис. VI.21. Температурная зависимость электрического сопротивления ртути вблизи абсолютного нуля: $R_0 = R(273 \text{ К})$

Сверхпроводимость оказалась явлением широко распространенным. Она обнаружена у 27 металлов, а также у большого количества сплавов и соединений, в том числе и таких, которые при комнатной температуре обладают полупроводниковыми свойствами. Только у одновалентных, благородных и ферромагнитных металлов устойчивое сверхпроводящее состояние не наблюдается. Критические температуры чистых металлов не превосходят 10 К. Существует «теорема» (недоказанная), что любой металл переходит в сверхпроводящее (СП) состояние при достаточно низкой температуре. Так, рекордно низкая температура СП состояния, $T_c = 0,5$ мК, у магния. Как правило, у химических соединений, для которых обнаружено СП состояние, значение T_c выше, чем у чистых металлов, входящих в состав этих соединений. Долгое время непревзойденно высокой оставалась критическая температура СП *интерметаллидов* — химических соединений двух металлов, среди которых наибольшее значение, $T_c = 23,2$ К, наблюдалось у соединения ниобий–германий (Nb_3Ge). Только в 2001 г. было получено СП состояние у другого интерметаллида — диборида магния (MgB_2) при $T_c = 39$ К. В 60–70 гг. надежды получения сверхпроводников с высокими значениями T_c связывали со сложными химическими соединениями. Однако эти надежды не оправдались, получить устойчивое СП состояние так и не удалось. Но настоящая революция в физике сверхпроводимости началась с открытия в 1986 г. швейцарскими физиками Беднорцем и Мюллером (J. G. Bednorz и K. Müller) СП состояния в керамике на основе оксидов меди, лантала и бария: $\text{La}_{2-x}\text{Ba}_x\text{CuO}_4$. Максимальная температура СП перехода была получена при концентрации бария $x = 0,16$. Такие соединения называются *купратами* (cuprates) [10]. Собственно, с этого открытия и началась эпоха *высокотемпературных проводников* (ВТСП). Правда, в настоящее время для ВТСП материалов принято определение, введенное нобелевским лауреатом В. Л. Гинзбургом, одним из создателей теории сверхпроводимости (см. ниже): это материалы, у которых T_c превышает точку кипения жидкого азота 77,4 К. Такое определение имеет серьезное основание: появление сверхпроводников, охлаждаемых жидким азотом, обещает их широкое применение (см. ниже).*) Этот порог был превышен уже в 1987 г. группой М.-К. Ву (М.-К. Wu) из университета штата Алабама, когда они заместили в структуре лантан на иттрий: критическая температура купрата $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$ составила $T_c^{\text{max}} = 90$ К. Затем пришла очередь купратов, в ко-

*) Только стоимости производства 1 л жидкого гелия и жидкого азота (не считая стоимости газов!) относятся, примерно, как обратные температуры их кипения, т. е. жидкий гелий дороже жидкого азота более чем в 20 раз.

торых были использованы висмут ($T_c^{\max} = 110\text{ K}$), таллий ($T_c^{\max} = 133\text{ K}$), ртуть ($T_c^{\max} = 135\text{ K}$).

Интересно отметить, что все исходные купратные соединения (LaCuO_4 , $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_6$ и т. д.) являются антиферромагнитными диэлектриками, которые становятся металлами и сверхпроводниками только при легировании их примесями (Ba в LaCuO_4 , кислород в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_6$ и т. д.). При этом дальний антиферромагнитный порядок разрушается, но остаются интенсивные спиновые флуктуации. Зависимость критической температуры от концентрации дырочных носителей p , возникающих при легировании, описывается универсальной формулой $T_c(p) = T_c^{\max} [1 - a(p - p_0)]$, где p_0 — «оптимальная» концентрация носителей и $a \approx 86$.

Поиски ВТСП материалов ведутся очень активно. В последние годы первого десятилетия этого века были получены сверхпроводники на основе железа. Выше отмечалось, что у ферромагнетиков СП состояние до сих пор получить не удавалось. А вот соединения, содержащие железо, как оказалось, могут быть сверхпроводниками (хотя при этом в них наблюдается не ферромагнитный, а антиферромагнитный дальний порядок, как и в купратах). Это, прежде всего, железные оксипниктиды^{*)} — соединения окислов железа с мышьяком, они содержат также гадолиний и торий или самарий. В начале века появились СП соединения, содержащие селен (FeSe), теллур, серу. Но все они имеют критическую температуру ниже азотной, т. е. не удовлетворяют «критерию Гинзбурга».

Таково сегодня состояние поисков СП материалов.

В первое время после открытия сверхпроводимости с ней связывали большие надежды широкого использования ее в электротехнике, в частности, для создания сильных постоянных магнитных полей. Однако вскоре выяснилось, что магнитное поле разрушает сверхпроводимость, причем критическое поле H_c для чистых металлов не превышает 10^3 Гс (табл. VI.1). Также небольшими оказались и критические токи. И лишь спустя несколько десятилетий, когда стали известны так называемые *жесткие сверхпроводники*, техника взяла это, до тех пор казавшееся необычным, явление на вооружение (см. ниже).

Здесь следует уточнить понятия критической температуры T_c и критического магнитного поля H_c . Поскольку индикатором СП состояния служит сопротивление проводника, то, естественно, для его измерения следует пропустить ток. Но тогда возникнет магнитное поле, которое может разрушить сверхпроводимость. С другой стороны, значение магнитного поля, при котором проводник из СП состояния пере-

^{*)} Пниктиды — элементы V-ой группы Периодической системы элементов, среди которых и мышьяк.

ходит в нормальное, само зависит от температуры проводника, т. е. $H_c = H_c(T)$. Поэтому принято оба критических параметра определять при условии, когда другой имеет исчезающе малое (асимптотическое) значение:

$$T_c = T_c(H \rightarrow 0), \quad H_c = H_c(T \rightarrow 0). \quad (54.1)$$

Нужно также уточнить, о каком магнитном поле идет речь. У одиночного цилиндрического проводника с радиусом сечения ρ и током I поле на его поверхности равно (28.5)

$$\mathbf{H}_\varphi = \frac{2I}{c\rho} \cdot \mathbf{e}_\varphi,$$

где $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор азимутальной координаты. Если же этот проводник с током помещен во внешнее поле $\mathbf{H}_0$, то полное поле на поверхности проводника есть

$$\mathbf{H}_{\text{total}} = \mathbf{H}_\varphi + \mathbf{H}_0.$$

Именно значение этого поля и определяет состояние проводника. В частности, в длинном соленоиде с однослойной и сплошной обмоткой из проводника толщиной 2ρ (ср. задача IV.3)

$$\mathbf{H}_{\text{total}} = \frac{2\pi I}{c\rho},$$

т. е. в π раз больше поля на поверхности одиночного проводника. Соответственно, во столько же раз меньше максимальный ток в обмотке СП соленоида. Отсюда ясно, как определить третий характеристический параметр сверхпроводника — *критическую плотность тока*. Очевидно, это плотность тока в одиночном (т. е. вне внешнего поля) проводнике при $T \rightarrow 0$.

Таблица VI.1. Параметры некоторых сверхпроводников I рода (чистые металлы) [11]

Элемент	Ат. вес	Глубина проникновения поля, 10^{-6} см		Плотность, г/см^3	T_c , К ($H = 0$)	H_c , Гс ($T = 0$)
		Эксперимент [10] ($T = 0$)	Расчетное значение (54.3)			
Al	27	1,6–5,0	2,18	2,69	1,18	105
Sn	50	3,4–5,1	2,01	5,85	3,7	308
In	115	3,9–6,4	2,72	7,31	3,4	289
Hg	200	3,8–4,5	2,64	13,55	3,7–4,1	340–390
Pb	207	3,9–6,3	2,94	11,3	7,2	803

Первым шагом к пониманию природы сверхпроводимости послужил так называемый *эффект Мейсснера*, открытый в 1933 г. немецкими физиками Мейсснером и Оксенфельдом (W. Meißner и R. Ochsenfeld). Он состоит в том, что магнитное поле внутри сверхпроводника всегда равно нулю. Иначе говоря, сверхпроводник является идеальным диамагнетиком с $B = 0$ (см. также § 44). Это свойство коренным образом отличает сверхпроводник от идеального проводника. В последнем магнитное поле может сохраняться в течение некоторого времени — так называемое «вмороженное поле» (рис. VI.7 в § 48). Если же проводник переходит в сверхпроводящее состояние во внешнем магнитном поле, последнее выталкивается из него. Обратим внимание, что поле выталкивается при этом только из тела сверхпроводника, но не из области, охватываемой сверхпроводником (рис. VI.22). При выключении внешнего поля поток внутри сверхпроводящего кольца сохраняется, и это есть один из способов возбуждения тока в сверхпроводнике.

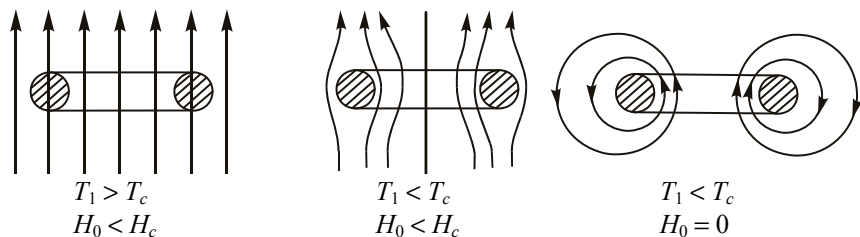


Рис. VI.22. Переход кольца в сверхпроводящее состояние во внешнем магнитном поле

Основой всех необычных свойств сверхпроводника является свободное (без столкновений) движение внутри него носителей заряда. Это чисто квантовый эффект, объясненный лишь в 1957 г. американскими физиками Бардиным, Купером и Шриффером (J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer) и независимо советским физиком Н. Н. Боголюбовым. В *теории БКШ*, как ее принято называть по именам авторов^{*)}, показано, что носителями заряда в сверхпроводнике являются пары электронов («*куперовские пары*»), кото-

^{*)} Здесь уместно заметить, что все основные результаты теории БКШ содержатся и в работах Н. Н. Боголюбова. И только ограниченность в контактах между советскими и зарубежными физиками в середине 1950-х гг. фактически лишила Н. Н. Боголюбова заслуженного приоритета и, соответственно, Нобелевской премии. Одной из причин этой несправедливости, далеко не единственной в истории отечественной физики, послужила обычная для того времени практика публикации научных работ исключительно в отечественных журналах, которые с большим опозданием переводились за рубежом.

рые образуют связанное состояние за счет взаимодействия с колебаниями ионов решетки. Блестящим подтверждением теории БКШ явилось наблюдение *изотопического эффекта* — зависимости критической температуры T_c от массы M ионов решетки: $T_c \sim M^{-\alpha}$, $\alpha = 1/2$. Размер пар вполне макроскопический и достигает нескольких микрон [10].

Колебания решетки «квантованы», т. е. частоты этих колебаний имеют дискретные значения. Аналогично тому как в атомах при переходе атома с уровня на уровень испускается или поглощается квант излучения (фотон), изменение частоты колебаний кристаллической решетки сопровождается испусканием или поглощением кванта — квазичастицы *фонона* (от греч. phone — звук). Этот термин ввел советский физик, нобелевский лауреат И. Е. Тамм в середине 1920-х гг. Электроны в сверхпроводнике взаимодействуют с кристаллической решеткой, обмениваясь фононами. В результате возникает эффективное притяжение электронов. За счет этого притяжения при достаточно низкой температуре $T < T_c$ и образуется связанное состояние двух электронов в виде куперовской пары, обладающей свойством «сверхтекучести». Эта сверхтекучесть и создает сверхпроводимость металла — движение пары без рассеяния на ионах решетки.

Законченной теории высокотемпературной сверхпроводимости в настоящее время не существует. Общепринято считать, что сверхпроводимость в купратах также обусловлена образованием куперовских пар электронов, хотя до сих пор и нет общепринятой теории, объясняющей механизм спаривания (см. главу 7 в книге [10]). Отметим, что размер пары существенно больше расстояния между электронами проводимости в нормальном проводнике: $n_e^{-1/3} \sim 3 \cdot 10^{-8}$ см. Это означает, что куперовские пары СП состояния «перемешаны» в сверхпроводнике, «пронизывая» друг друга. При этом взаимодействие между электронами разных пар много слабее, чем с фононным газом.

Название «фонон» выбрано И. Е. Таммом не случайно: колебания кристаллической решетки, механические по своей природе, определяют распространение звука в твердом теле.

В связи с созданием теории сверхпроводимости Ф. Лондоном было впервые введено понятие *кванта магнитного потока* (F. London, 1950 г.): $\Phi_L = hc/e$ (h — постоянная Планка). Измерения, проведенные в 1961 г., привели к результату, отличающемуся в два раза, что соответствует представлению о куперовских парах. По современным данным,

$$\Phi_L = \frac{hc}{2e} = 2,067\,834\,61(61) \cdot 10^{-7} \text{ Мкс.}$$

Еще в 1938 г. советские физики С. В. Губарь и И. К. Кикоин экспериментально показали, что гиромагнитное отношение для электронов

в сверхпроводнике равно не двойке, а четверке (ср. § 36). Тогда этот результат остался непонятным, хотя теперь ясно, что для связанной пары электронов так и должно быть. Движение куперовских пар наиболее ярко проявляется в *эффекте Джозефсона*, предсказанном им на основе теории БКШ (В. D. Josephson, 1962 г.). До этого было известно, что ток в системе двух сверхпроводников, разделенных тонкой диэлектрической прослойкой $\sim 100 \text{ \AA}$ (туннельный эффект), возникает не раньше, чем подаваемое напряжение разорвет связь между электронами в паре. Однако при уменьшении толщины прослойки примерно в 10 раз оказалось возможным прохождение тока вовсе без падения напряжения на туннельном переходе. Объяснение эффекта — туннелирование куперовских пар через прослойку. На опыте эффект Джозефсона первыми продемонстрировали Андерсон и Роуэлл (Р. W. Anderson и J. M. Rowell, 1963 г.).

Поведение сверхпроводника во внешнем магнитном поле может быть понято, во всяком случае качественно, и без привлечения микроскопической квантовой теории. Еще в 1935 г. братья Лондоны, минимизируя свободную энергию сверхпроводника в присутствии внешнего поля с учетом уравнений Максвелла, получили уравнение, связывающее между собой ток и магнитное поле в сверхпроводнике:

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{\omega_s^2}{4\pi} \cdot \mathbf{B}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{4\pi n_s e_s^2}{m_s}}, \quad (54.2)$$

где n_s , e_s , m_s — плотность, заряд и масса частиц-переносчиков заряда. Поскольку в сверхпроводнике переносчиками заряда являются *куперовские пары*, для них

$$n_s = \frac{n_e}{2}, \quad e_s = 2e, \quad m_s = 2m,$$

где e , m — заряд и масса электрона, $n_e \sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$ — плотность электронов в сверхпроводнике. В результате частоты ω_s (54.2) и ω_p (44.2) совпадают. В § 44 мы получили *уравнение Лондонов* (54.2) из уравнения движения электрона в среде без сопротивления (отсутствие столкновений электронов с атомами среды) — это уравнение (44.5). Там же было показано, что из уравнения Лондонов следует закон проникновения магнитного поля в такую среду:

$$H(z) = H(0) \cdot e^{-z/\lambda_L}, \quad \text{где} \quad \lambda_L = \frac{c}{\omega_p} = \frac{1}{\sqrt{4\pi n_e e_e}}, \quad (54.3)$$

r_e — классический радиус электрона. Теория Лондонов, по существу, является феноменологической, и создавалась она для объяснения экспериментальных фактов на основе классической электродинамики, что ясно видно из вывода уравнений (54.2), (54.3), приведенного в § 44. Однако экспериментальные значения глубины проникновения поля для чистых металлов (табл. VI.1) заметно больше расчетных значений *лондоновской глубины* λ_L (54.3). В 1953 г. английским физиком Пиппардом (А. В. Pippard) было показано, что распределение токов и полей в чистых сверхпроводниках зависит от свойств среды не только в данной точке, но и в некотором объеме, ее окружающем. Возникло понятие о *длине когерентности* ξ_0 . В чистых металлах, которые (исторически) получили название сверхпроводников I-го рода, $\xi_0 \sim 10^{-4}$ см. Это, по существу, размер куперовской пары. Таким образом, для сверхпроводников первого рода справедливо неравенство $\lambda_L < \xi_0$. Оказалось, что для интерметаллидов (сплавов) имеет место противоположное соотношение $\lambda_L > \xi_0$. Поэтому их принято называть сверхпроводниками II-го рода.*) Обращение знака неравенства происходит «по вине» обоих составляющих интерметаллида. В них глубина проникновения возрастает до 10^{-4} – 10^{-3} см, а размер пары, наоборот, падает до $5 \cdot 10^{-7}$ см.

В наиболее общем и полном виде электродинамика сверхпроводников была построена советскими физиками В. Л. Гинзбургом, Л. Д. Ландау и А. А. Абрикосовым. Полуфеноменологическая (т. е. построенная с привлечением квантово-механических расчетов) *теория Гинзбурга–Ландау* [13] объяснила результаты экспериментальных наблюдений. В частности, для длины когерентности они получили формулу

$$\xi_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m|\alpha|}},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π , m — масса электрона, α — эмпирическая константа (отсюда и виден «полуфеноменологический» характер этой теории). Удалось, и это главное, объяснить различие в поведении сверхпроводников первого и второго родов в магнитном поле. Оказалось, что для последних существует два критических значения поля: $H_{c1} < H_{c2}$. Полный эффект Мейсснера имеет место лишь в слабых полях: $H < H_{c1}$. В широком же интервале полей, $H_{c1} < H < H_{c2}$, сверхпроводник второго рода

*) Более точно критерий определения рода сверхпроводников имеет вид (А. А. Абрикосов,

1952) [12] $\kappa \equiv \frac{\lambda_L}{\xi_0} = \begin{cases} < 1/\sqrt{2}, & \text{СП I-го рода,} \\ > 1/\sqrt{2}, & \text{СП II-го рода.} \end{cases}$

находится в *смешанном состоянии*.^{*)} его толщю пронизывают *нити нормальной* (несверхпроводящей) *фазы*, радиус которых равен длине когерентности ξ_0 , а магнитный поток, пронизывающий одну нить, — в точности одному кванту потока Φ_0 . Плотность сверхпроводящих электронов в сердцевине нити равна нулю. Магнитное поле спадает от центра нити вглубь сверхпроводника на длине λ_L . Это поле индуцирует круговой сверхпроводящий ток (рис. VI.23). Модель нитей, которые имеют вид микропотоков магнитного поля, окруженных вихревыми токами (рис. VI.23, а), была предложена А. А. Абрикосовым в 1953 г. («вихри Абрикосова») и позднее — Р. Фейнманом (R. P. Feynmann) [12]. Эта модель очень хорошо описывает все экспериментальные данные поведения сверхпроводников II рода в магнитном поле.

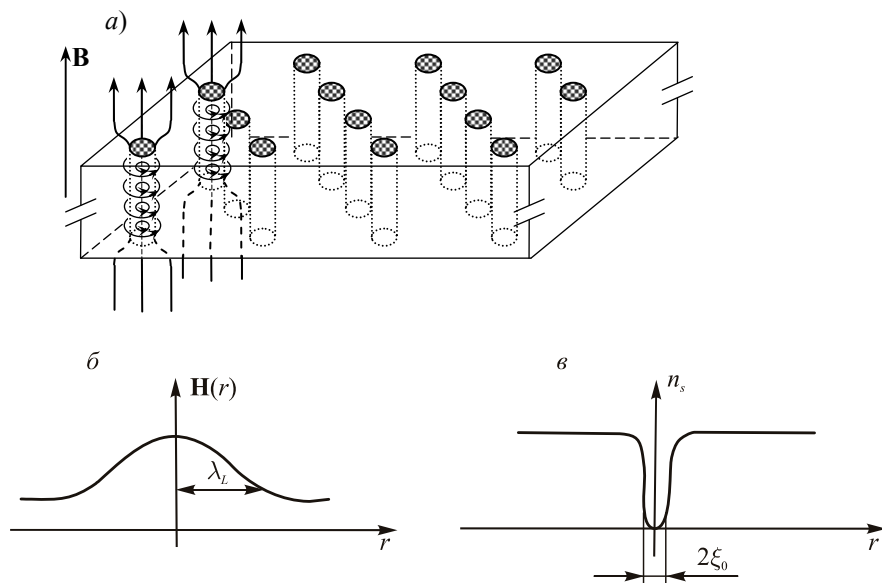


Рис. VI.23. Структура вихревых нитей в сверхпроводнике второго рода: а) конфигурация полей и токов [14], создаваемых вихревой нитью; б) зависимость магнитного поля от расстояния до центра нити; в) изменение плотности сверхпроводящих электронов n_s вблизи оси нити

^{*)} Иногда это состояние называют *шубниковской фазой* — по имени советского физика Л. В. Шубникова, который в конце 1930-х гг. высказал гипотезу о существовании сверхпроводников II-го рода [14].

Число нитей зависит от напряженности внешнего поля. С ростом внешнего магнитного поля от нуля до H_{c1} сверхпроводник находится в «мейснеровском» состоянии: магнитное поле сосредоточено в тонком поверхностном слое. Это чистое СП состояние, и сверхпроводники I и II рода ведут себя в этом состоянии одинаково (рис. VI.24). Когда же внешнее поле достигает значений H_c и H_{c1} , то в поведении сверхпроводников I и II рода появляется отличие. Сверхпроводник I рода при $H = H_c$ скачком переходит в состояние нормальной проводимости (рис. VI.24, *а*), магнитное поле полностью проникает в его глубину и линейно растет с увеличением внешнего поля. В сверхпроводнике II рода при $H = H_{c1}$ чистое СП состояние не разрушается, но по мере роста $H > H_{c1}$ нити нормальной фазы во все возрастающем количестве проникают в глубину сверхпроводника, пока, при $H = H_{c2}$, полностью не заполнят весь его объем — сверхпроводник перешел в нормальное состояние (рис. VI.24, *б*). Таким образом, сверхпроводник II рода ведет себя в магнитном поле аналогично плазме (§ 44, рис. V.17), хотя природа поведения у обоих веществ существенно различна — классическая электродинамика в случае плазмы и квантовая физика в случае сверхпроводника. Отметим, что, как правило, $H_{c1} < H_c$ для сверхпроводников I рода.

Впервые такая кривая намагничения с двумя значениями H_{c1} и H_{c2} была получена Л. В. Шубниковым с сотрудниками в 1937 г. (см. [12]).



Рис. VI.24. Кривые намагничения сверхпроводника первого (*а*) и второго (*б*) рода: H_c , H_{c1} , H_{c2} — критические значения магнитного поля

В смешанном состоянии макроскопическое значение магнитной проницаемости — $\langle \mu \rangle \neq 0$. Характерно, что в смешанном состоянии электросопротивление равно нулю. ВТСП материалы ведут себя в магнитном поле как сверхпроводники II рода.

Поскольку значения верхних критических полей H_{c2} для сверхпроводников второго рода (особенно для так называемых «жестких») достигают сотен тысяч килогаусс, технические применения сверхпроводимости стали вполне реальными. Здесь речь идет об использовании сверхпроводящих обмоток в качестве источников сильных магнитных полей в электрофизической аппаратуре, электрических машинах. Высокие значения критических токов позволяют создавать линии электропередач, свободные от потерь на джоулево тепло. Основные сверхпроводящие материалы в наше время — соединения NbTi и Nb₃Sn (табл. VI.2). Для нужд техники сверхпроводники изготавливают в виде проволоки или многожильных кабелей. В последнем случае это медный провод, пронизанный большим числом сверхпроводящих нитей малого, порядка нескольких микрон, диаметра. Такая структура кабеля обеспечивает его механическую прочность, а также стабилизацию сверхпроводящего состояния на случай локального перегрева того или иного участка выше критической температуры.

Таблица VI.2. Параметры важнейших сверхпроводников II рода

Соединение	T_c , К ($H = 0$)	j_c , кА/см ² ($T = 4,2$ К)	H_{c2} (Т), Тл
NbTi (твердый раствор)*)	9,5–10,5	30–80	16,5 (1,2 К) 12,0 (4,2 К)
Nb ₃ Sn (интерметаллид)	18,1–18,5	100–800	24,5 (0 К)

Наиболее значительное техническое применение сверхпроводники находят сегодня в ускорителях заряженных частиц. Сооружено уже несколько больших циклических (кольцевых) ускорителей, в которых фокусирующая система выполнена из магнитов со сверхпроводящими обмотками (табл. VI.3). В ускорителях, где поле превышает уровень 2 Тл, оно формируется СП токовыми проводниками, расположенными по «закону $\cos r\varphi$ » (§ 33, задача IV.13 и рис. IV.7) — магниты с дипольным (однородным) полем и линзы с полями мультипольной геометрии (§ 57). Железное ярмо, тем не менее, используется для транспортировки обратного потока магнитного поля и существенного снижения уровня рассеянных магнитных полей, создающих помехи в электронной (измерительной и управляющей) аппаратуре. Правда, в этом случае ярмо размещают с определенным зазором от обмоток, чтобы поле в расходящемся потоке упало до уровня ниже 2 Тл. В магнитах, где поле ниже этого уровня, его формируют с помощью подбора формы СП обмотки и полюсов железного ярма.

*) Часто можно встретить запись формулы этого соединения в виде Nb₃Ti, что вносит путаницу. Это практически важное соединение является не интерметаллидом, а твердым раствором с отношением концентраций (по массе) 3:1, и правильнее записывать формулу как Nb_{0,75}Ti_{0,25}.

Сегодня в мире существует три циклических ускорителя высокой энергии со сверхпроводящими магнитами, а два уже отработали свой срок (табл. VI.3). Проектируются и строятся два крупных ускорительных комплекса — NICA (Nuclotron-based Ion Collider fAcility) в ОИЯИ (Дубна) и FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research) в Дармштадте (ФРГ), где будут сооружены циклические ускорители на СП магнитах. Ввод в действие этих комплексов планируется на вторую половину 2-го десятилетия этого века.

Таблица VI.3. Основные параметры циклических ускорителей высокой энергии с СП фокусирующей системой

№	Лаборатория, страна	Ускоритель (тип)	Периметр, км	Ускоряемые частицы	Максимальные	
					энергия, ГэВ	поле диполей, Тл
1	ОИЯИ, Россия	Нуклотрон (протонный синхротрон)	0,2515	протоны ионы	12,6 4,5–6,3	2,0
2	Лаборатория им. Ферми, США	Теватрон (коллайдер) (1983–2011)	6,3	протоны и антипротоны	2×980	4,2
3	Брукхэйвенская лаборатория, США	RHIC — Relativistic Heavy Ion Collider (коллайдер)	2×3,834	протоны ионы	2×250 2×100	3,45
4	ЦЕРН, Швейцария	LHC — Large Hadron Collider (коллайдер)	2×26,6589	протоны ионы	2×7000 2×2760	8,33
5	DESY, ФРГ	HERA — Hadron-Electron Ring Anlage (протон-электронный коллайдер) (1992–2007)	6,3	протоны электроны	820 27,5	4,68

Примечания к таблице (строка/столбец): 5/3 — коллайдер HERA закрыт в 2007 г. после 15 лет успешной работы; 3/4 и 4/4 — множитель «2» означает «2 кольца коллайдера»; 2/6, 3/6, 4/6 — множитель «2» означает «2 пучка частиц указанной энергии»; 5/7 — магнитное поле СП диполей протонного кольца, в электронном кольце нормально проводящие («теплые») магниты.

Сверхпроводники применяют также для создания высокочастотных резонаторов большой реактивной мощности для ускорителей (§ 76) и в различных измерительных устройствах. В последних особенно перспективными оказались приборы, основанные на эффекте Джозефсона: чувствительность по магнитному потоку легко доводится до тысячных долей одного кванта Φ_0 !

Необходимость использования жидкого гелия для охлаждения сверхпроводящих устройств создает значительные неудобства и сильно удорожает аппаратуру. Тем актуальнее, по мере роста применений сверхпроводимости, становится создание устройств и элементов на основе ВТСП-соединений. Сегодня уже несколько фирм (США) выпускают кабели на основе ВТСП материалов. Широкое применение таких кабелей, сверхпроводящее состояние которых поддерживается при температуре ниже 80 К, сдерживается пока еще высокой их стоимостью. В технике ускорителей нашли массовое применение токовводы на основе ВТСП керамик. Их использование позволило резко уменьшить теплоприток в криогенную зону, поскольку появляется возможность создать ступенчатый перепад температур — от комнатной до жидкого гелия. В обоих случаях — ВТСП кабелей и токовводов — применяются висмутосодержащие купраты, упомянутые выше. Недавно были разработаны ВТСП кабели второго поколения, использующие более дешевые ленты на основе YBCO соединений с лучшими техническими характеристиками (см. § 8.1.1 в книге [10]).

Одной из важнейших задач современной техники сверхпроводников является создание линий электропередачи на их основе. И здесь, несомненно, реальные надежды связаны с созданием относительно дешевых ВТСП материалов.

§ 55. Поток энергии в электромагнитном поле

Электромагнитное поле обладает энергией, плотность которой (см. (17.2) и (46.61))

$$w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi}. \quad (55.1)$$

При перемещении поля возникает поток энергии. Примерами могут служить распространение электромагнитной волны или поле движущегося заряда.

Для количественного описания потока энергии в поле рассмотрим баланс энергии. Мощность, передаваемая в поле частицами (токами), $P_V = -\int (\mathbf{E}, \mathbf{j}) dV$. Подставим сюда плотность тока, выразив ее через поля из второго уравнения Максвелла (45.9):

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Используя первое уравнение Максвелла, добавим в подынтегральное выражение для симметрии равное нулю слагаемое $\left(\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = 0$ и учтем (см. П.1.7 в) векторное тождество $(\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$. В результате получим

$$-(\mathbf{E}, \mathbf{j}) = \frac{c}{4\pi} \cdot \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E^2 + \mu H^2),$$

что дает

$$P_V = \frac{d}{dt} \int w dV + \int_F (\mathbf{S}, d\mathbf{F}), \quad (55.2)$$

где w — плотность энергии (55.1), а вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (55.3)$$

можно интерпретировать как плотность потока энергии через поверхность F , окружающую произвольный объем V . Эта величина была вычислена английским физиком Пойнтингом (J. H. Poynting, 1884) и носит его имя: *вектор Пойнтинга*.

Если передача энергии от частиц к полю отсутствует ($P_V = 0$), мы получаем закон сохранения энергии поля в интегральной форме. Преобразуя поверхностный интеграл в объемный, приходим к дифференциальному закону сохранения энергии поля

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (55.4)$$

похожему по форме на закон сохранения заряда (20.4). В частности, в стационарном поле ($\partial w/\partial t = 0$) $\text{div } \mathbf{S} = 0$, т. е. линии вектора Пойнтинга замкнуты.

Рассмотрим простой пример потока энергии в электромагнитном поле — *двухпроводную линию* (рис. VI.26). При отсутствии сопротивления как магнитное, так и электрическое поля перпендикулярны направлению тока и образуют вектор Пойнтинга вдоль линии. Если линия обладает сопротивлением, появляется продольная составляющая электрического поля, которая поворачивает вектор Пойнтинга таким образом, что часть потока энергии ответвляется внутрь проводника и нагревает его.

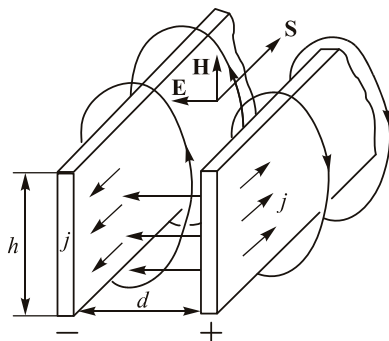


Рис. VI.26. Поток энергии в цепи постоянного тока (двухпроводная линия)

Задача VI.19. Двухпроводная линия без потерь (рис. VI.24) нагружена на конце, противоположном источнику напряжения/тока, на сопротивление r . Найти мощность, переносимую на сопротивление потоком энергии поля. Сравнить результат с (21.8).

При напряжении V , создаваемом источником, ток в линии равен $I = V/r$. Между пластинами линии возникает магнитное и электрическое поля

$$H = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{I}{h} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{V}{hr}, \quad E = \frac{V}{d}.$$

Полный поток энергии через поперечное сечение линии (в пренебрежении вкладом рассеянных полей) равен

$$S \cdot h \cdot d = \frac{c}{4\pi} \cdot E \cdot H \cdot h \cdot d = \frac{V^2}{r},$$

что точно совпадает с (21.8).

Результат этой задачи показывает, что энергия передается «вектором Пойнтинга», а не током, протекающим по линии электропередачи (хотя ток

и участвует в создании магнитного поля). Скорость передачи энергии совпадает со скоростью распространения электромагнитного поля вдоль линии (§ 86). Для двухпроводной (или трехпроводной) линии передачи в воздухе это практически скорость света.

Обратим внимание на важную особенность вектора Пойнтинга — к нему неприменим обычный закон сложения векторов по правилу параллелограмма. Рассмотрим, например, суперпозицию двух полей ($\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$) и ($\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$), одинаковых по величине, но отличающихся по направлению. Плотность потока энергии в каждом из них одна и та же ($\mathbf{S}_0$). Суммарное поле, согласно принципу суперпозиции, определяется величинами $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$. Поэтому, если $\mathbf{E}_1 = -\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_1 = -\mathbf{H}_2$, суммарное поле и поток его энергии равны нулю, а не $2\mathbf{S}_0$. Этот простой пример иллюстрирует явление *интерференции* в электромагнитном поле. Говорят, что два (или больше) поля интерферируют между собой, если поток или плотность энергии результирующего поля не равны сумме соответствующих величин составляющих полей. Интерференция связана с тем, что поток энергии как и ее плотность являются квадратичными функциями поля.

Существуют ли потоки энергии в статических полях, образованных суперпозицией электрического и магнитного полей таких, что формально $S \neq 0$? Как мы видели выше, в таких полях линии вектора Пойнтинга замкнуты, т. е. энергия поля циркулирует по некоторым замкнутым кривым. Реальны ли эти потоки энергии? Можно ли обнаружить их экспериментально? Оказывается, что можно. Простейший, хотя, быть может, и не очень убедительный, способ — поместить в такое поле заряженную частицу. Она будет дрейфовать (см. (56.9) ниже) со скоростью $\mathbf{v} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/H^2$, т. е. как раз вдоль вектора Пойнтинга. При этом скорость дрейфа такова, что в сопровождающей системе отсчета $\mathbf{S}' = 0$. Более убедительным примером может служить цилиндрический конденсатор в магнитном поле (рис. VI.27). Циркуляция энергии приводит здесь к появлению момента поля

$$M = VpR = 2\pi R^2 dhp, \quad (55.5)$$

где p — плотность импульса поля, пропорциональная вектору Пойнтинга. Этот момент можно наблюдать, например, по закручиванию конденсатора при изменении магнитного поля. Механизм закручивания связан с действием ЭДС индукции на поверхностные заряды конденсатора. Пусть для простоты магнитное поле сосредоточено только в зазоре конденсатора. Тогда

электрическое поле на внутреннем цилиндре равно нулю, а на внешнем $E = \dot{B}d/c$. Момент сил этого поля

$$K = E\sigma hR \cdot 2\pi R = \frac{\dot{B}2\pi R d h \sigma R}{c} = \dot{M}.$$

Поверхностная плотность зарядов на конденсаторе $\sigma = D/4\pi$, и окончательно получаем

$$M = V \frac{BD}{4\pi c} R, \quad (55.6)$$

где $V = 2\pi R h d$ — объем поля. Сравнивая с (55.5), найдем для плотности импульса выражение

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{4\pi c} = \frac{\varepsilon \mu \mathbf{S}}{c^2}. \quad (55.7)$$

Обратим внимание, что как в вектор Пойнтинга, так и в плотность импульса входит «противоестественная» комбинация полей: одно из них — полное $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, а второе — вспомогательное $(\mathbf{H}, \mathbf{D})$.

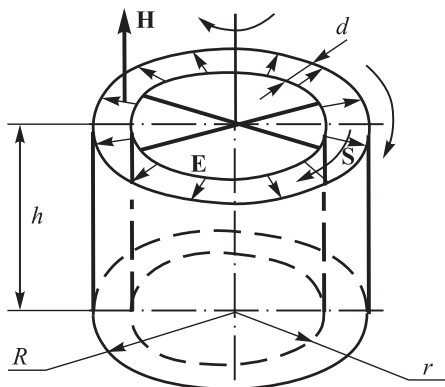


Рис. VI.27. Вращение заряженного цилиндрического конденсатора, внесенного в магнитное поле

Импульс поля естественно связать с его массой, плотность которой равна w/c^2 . Попробуем установить количественное соответствие на примере однородно заряженного конденсатора в вакууме, движущегося со скоростью $v \ll c$, параллельной пластинам. Казалось бы, плотность импульса

в таком конденсаторе должна равняться $p = \omega v/c^2 = vE^2/8\pi c^2$. С другой стороны, магнитное поле в движущемся конденсаторе $H = vE/c$. Тогда по формуле (55.7) $p = vE^2/4\pi c^2$, т. е. в два раза больше. Опять мы получаем ту же «загадочную» двойку, что и в (49.5).

Приведем еще одну любопытную интерпретацию выражения (55.7) для импульса поля. Дифференцируя это выражение по времени, найдем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{4\pi c} [\dot{\mathbf{D}} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \dot{\mathbf{B}}]. \quad (55.8)$$

Первое слагаемое можно рассматривать как силу Лоренца, действующую на ток смещения $\mathbf{j}_E = \dot{\mathbf{D}}/4\pi$, а второе связано с «магнитным током смещения» $\mathbf{j}_B = \dot{\mathbf{B}}/4\pi$.

ГЛАВА VII

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 56. Частица в однородном и постоянном поле

Движение заряженной частицы с произвольной скоростью в электромагнитном поле определяется силой Лоренца (29.1):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad (56.1)$$

где $p = \gamma m v$ — релятивистский импульс, а e — заряд частицы. В этом параграфе мы рассмотрим простейший случай однородного в пространстве и постоянного во времени электромагнитного поля. Отметим, что это свойство поля является релятивистски инвариантным, т. е. сохраняется в любой инерциальной системе отсчета (§ 29).

Пусть вначале $H = 0$ (в некоторой системе отсчета). Выберем ось x вдоль вектора $\mathbf{E}$. Тогда

$$\dot{p}_x = eE = \text{const}, \quad p_{\perp} = \text{const}, \quad (56.2)$$

где $p_{\perp}$ — компонента импульса, перпендикулярная вектору $\mathbf{E}$, которая сохраняется. Введем обозначение $M = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2 c^{-2}}$ — эффективная масса частицы. Выберем, далее, начало отсчета времени ($t = 0$) таким образом, чтобы $p_x(0) = 0$. Тогда решение уравнения (56.2) имеет вид $p_x = eEt$. Продольную компоненту скорости частицы v_x выразим через p_x . Для этого, записав соотношения для энергии $\mathcal{E}$ и импульса $\mathbf{p} = (p_x, p_{\perp})$

$$\mathcal{E}/c = \gamma mc = \sqrt{p_x^2 + p_{\perp}^2 + (mc)^2} \equiv \sqrt{p_x^2 + (Mc)^2}, \quad (56.3)$$

из равенства $p_x = \gamma m v_x$ найдем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{p_x c}{\sqrt{p_x^2 + (Mc)^2}} = c \cdot \frac{eEt}{\sqrt{(eEt)^2 + (Mc)^2}}. \quad (56.4)$$

При малых t движение нерелятивистское: $v_x \approx eEt/M$, а при больших t — ультрарелятивистское: $v_x \approx c$, т. е. скорость частицы стремится к предельному значению. Движение, характеризуемое формулой (56.3), называется в теории относительности «равноускоренным». Конечно, не в буквальном смысле, поскольку существует предельная скорость. Поэтому ускорение в исходной системе отсчета

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{eE}{\gamma^3 m} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

причем эффективная масса частицы eE/a_x (так называемая «продольная» масса) растет как γ^3 . Однако ускорение в сопровождающей системе отсчета, $a_0 = eE_0/M = eE/M$, остается постоянным, так как продольная компонента $E = \text{inv}$ (29.4).

Интегрируя уравнение (56.4), найдем (при начальном условии $x(0) = 0$)

$$x(t) = \frac{Mc^2}{eE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{Mc} \right)^2} - 1 \right). \quad (56.5)$$

Опять-таки при малых t получаем обычный нерелятивистский закон равноускоренного движения: $x \approx eEt^2/2M$, а при $t \rightarrow \infty$ $x \approx ct - Mc^2/eE$. Это значит, в частности, что фотон, выпущенный в момент $t = 0$ хотя и обгонит частицу (по x -координате: при $M > m$ частица смещается поперек вектора $\mathbf{E}$!), но лишь на конечное расстояние $\Delta x = Mc^2/eE$. Если же выпустить фотон с задержкой t_1 , то он догонит частицу (по x -координате) только при условии $t_1 < Mc/eE$.

Задача VII.1. Найти закон распада частицы (например, мезона) при равноускоренном движении.

В собственном времени (в собственной системе) доля частиц, не распавшихся на интервале времени τ , есть $v_0 = \exp(-\tau/\tau_0)$, где τ_0 — среднее время жизни частицы. С другой стороны, собственное время τ связано с временем инерциальной системы t соотношением (см. § 29 и (56.3))

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^t \frac{dt'}{\gamma(t')} = mc \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{(eEt')^2 + (Mc)^2}} = \frac{mc}{eE} \cdot \ln \frac{eEt + \sqrt{(eEt)^2 + (Mc)^2}}{Mc} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{mc}{eE} \cdot \ln \frac{2Et}{Mc}. \end{aligned} \quad (56.6)$$

Отсюда

$$v = \left(\frac{2eEt}{Mc} \right)^{-mc/eE\tau_0},$$

т. е. распад происходит значительно медленнее, по степенному закону.

Поперечная скорость в лабораторной системе отсчета, $v_{\perp} \equiv dy/dt = v_{\perp 0}/\gamma$, падает с ростом γ , но в сопровождающей системе $dy/d\tau = v_{\perp 0} = \text{const}$. Отсюда $y = v_{\perp 0}\tau$, где τ — собственное время частицы (§ 29).

Пусть теперь $E = 0$. Так как магнитная часть силы Лоренца перпендикулярна скорости, то энергия частицы сохраняется ($\gamma = \text{const}$). Поэтому уравнение движения частицы (56.1) имеет тот же вид, что и в нерелятивистском случае, но с эффективной массой γm :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \frac{e\mathbf{H}}{\gamma mc} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\omega}_L = -\frac{e\mathbf{H}}{\gamma mc} \equiv \omega_L \cdot \left(-\frac{\mathbf{H}}{H} \right), \quad (56.7)$$

т. е. вектор $\mathbf{v}$ вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_L$, модуль которой принято называть *циклотронной* или *ларморовской частотой* (см. примечание к формуле (36.7) в § 36). Поскольку компонента импульса и скорости вдоль магнитного поля сохраняется, траектория частицы представляет собой равномерную спираль с шагом $\lambda = 2\pi v_{\parallel}/\omega_L$ и радиусом

$$\rho_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} = \frac{p_{\perp} c}{eH}, \quad (56.8)$$

который называется *ларморовским радиусом*.

Задача VII.2. Найти движение частицы в параллельных электрическом и магнитном полях.

Поскольку в магнитном поле $|\mathbf{p}_{\perp}| = \text{const}$, то продольное движение описывается теми же выражениями (56.4)–(56.6), что и при $H = 0$. Угол же поворота φ вектора $\mathbf{p}_{\perp}$ удовлетворяет уравнению $d\varphi/dt = -\omega_L(t) = -\omega_0/\gamma(t)$, где $\omega_0 = eH/mc = \text{const}$. Отсюда $d\varphi/d\tau = -\omega_0$ и $\varphi = -\omega_0\tau$. Траектория частицы представляет собой неравномерную спираль с возрастающим шагом $\lambda(t) = 2\pi p_{\parallel}(t)c/eH = 2\pi\tau cE/H$.

Пусть теперь векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны («скрещенные поля»), причем $E < H$. Тогда, согласно закону преобразования полей (29.7), существует система отсчета, движущаяся относительно лабораторной системы со скоростью $\mathbf{V}_{\text{н}}$, в которой остается только магнитное поле:

$$\mathbf{E} = \gamma_0 \frac{\mathbf{V}_{\text{н}}}{c} \times \mathbf{H}', \quad \mathbf{H} = \gamma_0 \mathbf{H}', \quad \mathbf{V}_{\text{н}} \perp \mathbf{E}, \mathbf{H}.$$

Исключив $\mathbf{H}'$ и умножив векторно полученное равенство на $\mathbf{V}_H$, находим

$$-\mathbf{V}_H \equiv \mathbf{V}_d = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{H^2}. \quad (56.9)$$

В этой движущейся системе частица движется по спирали (в частном случае — по окружности). Тогда в лабораторной системе отсчета вся спираль (окружность) будет смещаться со скоростью $\mathbf{V}_d$ (56.9). Такое сложное движение называется *дрейфом*, а $\mathbf{V}_d$ — *скоростью дрейфа*. Амплитуда колебаний частицы вдоль вектора $\mathbf{E}$ равна при этом ларморовскому радиусу в системе отсчета, где $\mathbf{E}' = 0$:

$$\rho'_L = p_{\perp} c / e H' = m c^2 E / e (H^2 - E^2).$$

Последнее выражение соответствует нулевой начальной скорости в лабораторной системе. В частности, при $E \rightarrow H$ величина $\rho_L \rightarrow \infty$ и движение вдоль $\mathbf{E}$ становятся неограниченными. Обратим внимание, что направление и величина скорости дрейфа не зависят от заряда частицы (в том числе и от его знака!).

Если $H > E$, то можно аналогичным образом исключить магнитное поле, так что движение в новой системе отсчета ($\mathbf{V}_E = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/E^2$) будет равноускоренным и, следовательно, неограниченным.

Задача VII.3. Найти траекторию релятивистской частицы с зарядом e и массой m в скрещенных полях: а) однородных электрическом и магнитном; б) электрическом поле пучка заряженных частиц (27.11) и однородном магнитном поле, параллельном оси пучка.

а) Выберем декартову систему координат, направив ось y параллельно вектору $\mathbf{E}$, а ось z — вдоль вектора $\mathbf{H}$.

Запишем уравнение движения (56.1) в координатах x, y, z :

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c} \cdot \dot{y}H, \quad m\ddot{y} = eE - \frac{e}{c} \cdot \dot{x}H, \quad \ddot{z} = 0.$$

Третье уравнение дает $\dot{z}(t) = \text{const} \equiv v_z$, $z(t) = z(0) + v_z \cdot t$. Первое и второе уравнения перепишем в виде

$$\ddot{x} = \omega_L \dot{y}, \quad \ddot{y} = \varepsilon - \omega_L \dot{x}, \quad \varepsilon \equiv \frac{eE}{m}, \quad \omega_L = \frac{eH}{mc}, \quad (56.10)$$

где ω_L — ларморовская частота. Умножив второе уравнение на i и сложив с первым, получим уравнение для $\xi = x + iy$:

$$\ddot{\xi} + i\omega_L \dot{\xi} = \varepsilon.$$

Его решение ищем в виде $\xi(t) = At + B \cdot e^{\kappa t}$, где A , B , κ — неизвестные константы. Подстановка в уравнение для ξ дает

$$A = \frac{\varepsilon}{\omega_L} = c \frac{E}{H} \equiv V, \quad \kappa_{1,2} = 0, -i\omega_L. \quad (56.11)$$

Таким образом,

$$\xi(t) = Vt + B \cdot e^{-i\omega_L t} + D.$$

Константы B и D найдем из начальных условий

$$\xi(0) = x_0 + iy_0 = B + D, \quad \dot{\xi}(0) = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0 = V - i\omega_L B.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + V \cdot \left(t - \frac{\sin \omega_L t}{\omega_L} \right) + \dot{x}(0) \frac{\sin \omega_L t}{\omega_L} + \dot{y}(0) \frac{1 - \cos \omega_L t}{\omega_L}, \\ y(t) &= y_0 + V \cdot \frac{1 - \cos \omega_L t}{\omega_L} - \dot{x}_0 \frac{1 - \cos \omega_L t}{\omega_L} + \dot{y}(0) \frac{\sin \omega_L t}{\omega_L}, \end{aligned} \quad V = c \frac{E}{H}. \quad (56.12)$$

Кривая, описываемая параметрическими уравнениями $x(t)$, $y(t)$, называется *трохоидой*, а ее частный случай при $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ — *циклоидой*, которая является точкой на колесе радиуса $\rho = V/\omega_L$, катящемся вдоль оси x со скоростью центра колеса v_d .

Отметим, что при $\dot{x}_0 = v_d$, $\dot{y}_0 = 0$ частица движется в скрещенных полях прямолинейно с постоянной скоростью v_d параллельно оси x . Этот результат имеет простой физический смысл: электрическая и магнитная компоненты силы Лоренца равны и противоположно направлены:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{V}_d, \mathbf{H}].$$

б) Как и в предыдущей задаче, используем декартову систему координат с осью z , совпадающей с осью пучка. Электрическое поле (27.11) внутри пучка имеет одну радиальную компоненту, проекции которой на оси x , y равны

$$E_x = \frac{2I}{v} \cdot \frac{x}{a^2} = 2\pi q n_e x, \quad E_y = 2\pi q n_e y,$$

где q , n_e — заряд и плотность частиц пучка. Уравнения движения частицы (e , m), аналогично предыдущей задаче, запишем, учитывая в данном случае наличие двух компонент электрического поля:

$$\ddot{x} = \varepsilon_x + \omega_L \dot{y}, \quad \ddot{y} = \varepsilon_y - \omega_L \dot{x}, \quad \varepsilon_{x,y} = \frac{eE_{x,y}}{m}.$$

Переходя к переменной $\xi = x + iy$, имеем

$$\ddot{\xi} + i\omega_L \dot{\xi} - \omega_q^2 \xi = 0, \quad \omega_q^2 = \frac{2\pi qen_e}{m}$$

— аналог плазменной частоты (23.7). Характеристическое уравнение для решения $\xi(t) = A \cdot e^{\kappa t}$ получим в виде

$$\kappa^2 + i\omega_L \kappa + \omega_q^2 = 0,$$

откуда

$$\kappa_{1,2} = -\frac{i}{2}(\omega_L \pm \Omega) \equiv -i\Omega_{1,2}, \quad \Omega = \sqrt{\omega_L^2 + 4\omega_q^2},$$

$$\xi(t) = A_1 e^{-i\Omega_1 t} + A_2 e^{-i\Omega_2 t}.$$

Те же начальные условия, что и в предыдущей задаче, дают значения констант $A_{1,2}$:

$$A_{1,2} = \mp \frac{\Omega_{2,1} \xi(0) - i \dot{\xi}(0)}{\Omega}.$$

В результате решение приводим к виду

$$x(t) = \frac{x_0}{\Omega} (\Omega_1 \cdot \cos \Omega_2 t - \Omega_2 \cdot \cos \Omega_1 t) - \frac{y_0}{\Omega} (\Omega_2 \cdot \sin \Omega_1 t - \Omega_1 \cdot \sin \Omega_2 t) +$$

$$+ \frac{\dot{x}_0}{\Omega} (\sin \Omega_1 t - \sin \Omega_2 t) + \frac{\dot{y}_0}{\Omega} (\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t),$$

$$y(t) = \frac{x_0}{\Omega} (\Omega_2 \cdot \sin \Omega_1 t - \Omega_1 \cdot \sin \Omega_2 t) + \frac{y_0}{\Omega} (\Omega_1 \cdot \cos \Omega_2 t - \Omega_2 \cdot \cos \Omega_1 t) +$$

$$+ \frac{\dot{x}_0}{\Omega} (\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t) + \frac{\dot{y}_0}{\Omega} (\sin \Omega_1 t - \sin \Omega_2 t).$$

Физический смысл этого, довольно громоздкого, решения становится ясен, если рассмотреть, как и в предыдущей задаче, движение частицы с нулевой начальной скоростью. Тогда

$$r^2(t) \equiv x^2(t) + y^2(t) = r_0^2 \left(1 - \frac{4\omega_q^2}{\omega_L^2 + 4\omega_q^2} \cdot \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \right),$$

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Мы получили циклоиду, «колесо» которой катится по поверхности цилиндра радиуса r_0 и имеет радиус

$$\rho = r_0 \frac{2\omega_q}{\sqrt{\omega_L^2 + 4\omega_q^2}}.$$

В конце 1990-х гг. Б. С. Неганов (ОИЯИ, Дубна) предложил эксперимент по проверке специальной теории относительности (СТО): измерить траекторию заряженной частицы в плоском конденсаторе, движущемся с постоянной скоростью, направленной параллельно плоскости пластины, и сравнить траектории в системе пластины и в лабораторной системе («опыт Неганова»). Согласно СТО, результаты обоих измерений должны подчиняться преобразованиям координат-времени. Задача VII.4 ниже предлагает убедиться в совпадении результатов в двух вариантах решения — через преобразование координат-времени (1) и через преобразование полей (2).

Задача VII.4. Плоский заряженный конденсатор движется с постоянной скоростью v_0 , параллельной его пластинам. Напряженность электрического поля в конденсаторе равна E_0 . Показать, что частица с зарядом $e > 0$ и массой m , испущенная с нулевой скоростью из положительно заряженной пластины, будет двигаться прямолинейно в системе конденсатора и по параболической траектории в лабораторной системе, если $v_0 \ll c$. Показать, что этот результат одинаков для двух возможных способов решения: 1) преобразование траектории частицы из системы конденсатора в лабораторную; 2) вычисление траектории частицы в электромагнитном поле лабораторной системы. Ограничиться случаем нерелятивистской скорости частицы в системе конденсатора.

1) В системе конденсатора частица движется вдоль электрического поля $\mathbf{E}' = \mathbf{e}_y E_0$, и можно воспользоваться результатом (56.5), полученным выше:

$$y'(t') = \frac{mc^2}{eE_0} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{eE_0 t'}{mc} \right)^2} - 1 \right), \quad x'(t') = 0.$$

В лабораторной системе (ось x направлена вдоль вектора v_0)

$$t = \gamma_0 t', \quad y(t) = y'(t') = \frac{mc^2}{E_0} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{eE_0 t}{\gamma_0 mc} \right)^2} - 1 \right), \quad x(t) = \gamma_0 v_0 t' = v_0 t,$$

$$\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}.$$

Таким образом,

$$y(x) = \frac{mc^2}{E_0} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{eE_0 x}{\gamma_0 m v_0 c} \right)^2} - 1 \right) \xrightarrow{eE_0 x \ll \gamma_0 m v_0 c} \frac{eE_0}{\gamma_0^2 m v_0^2} \cdot \frac{x^2}{2}. \quad (56.13)$$

2) В лабораторной системе появляется поперечное магнитное поле $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \cdot \gamma_0 E_0$, а электрическое принимает значение $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y \gamma_0 E_0$. Уравнения движения заряда в лабораторной системе в полях $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ имеют вид

$$\frac{dp_x}{dt} = eB_z \cdot \frac{\dot{y}}{c}, \quad \frac{dp_y}{dt} = e \left(E_y - B_z \cdot \frac{\dot{x}}{c} \right),$$

что после подстановки значений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ дает

$$\dot{p}_x = \gamma_0 \beta_0 e E_0 \cdot \frac{\dot{y}}{c}, \quad \dot{p}_y = \gamma_0 e E_0 \cdot \left(1 - \beta_0 \frac{\dot{x}}{c} \right). \quad (56.14)$$

Умножив первое уравнение на p_x , второе — на p_y и сложив оба уравнения, с учетом тождества $\dot{y}p_x \equiv x p_y$ найдем уравнение для полного импульса в лабораторной системе:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dp^2}{dt} = \gamma_0 e E_0 \cdot p_y. \quad (56.15)$$

Теперь посмотрим, существует ли решение системы уравнений (56.14), при котором

$$\dot{x} = v_0 = \text{const}. \quad (56.16)$$

Сразу же отметим, что это условие не означает, что $\dot{p}_x = 0$, так как изменяется со временем полное значение Лоренц-фактора γ .

$$p_x(t) = \gamma(t) \cdot m v_0. \quad (56.17)$$

Если равенство (56.16) верно, то второе уравнение принимает вид

$$\dot{p}_y = \frac{e E_0}{\gamma_0}, \quad \text{откуда} \quad p_y(t) = \frac{e E_0}{\gamma_0} \cdot t, \quad (56.18)$$

поскольку $p_y(0) = 0$ по условиям задачи. Полученный результат почти очевиден — он следует из преобразований импульса и времени:

$$p_y(t) = p'_y(t') = e E_0 t' = e E_0 \frac{t}{\gamma_0}.$$

Подставив $p_y(t)$ из (56.18) в (56.15), получим

$$p^2(t) = (eE_0 t)^2 + C, \text{ где } C = p_x^2(0) = (\gamma_0 m v_0)^2.$$

Последнее соотношение следует из сделанного нами предположения $\dot{x} = v_0$ (56.16).

Таким образом, мы получили

$$p^2(t) = (eE_0 t)^2 + (\gamma_0 m v_0)^2. \quad (56.19)$$

Осталось убедиться, что решение (56.18), (56.19) приводит к равенству (56.17). Для этого найдем значение $\chi(t)$, воспользовавшись равенством

$$\gamma^2(t) = \frac{p^2(t) + (mc)^2}{(mc)^2}.$$

Подставив сюда $p(t)$ из (56.19), получим

$$\gamma^2(t) = \gamma_0^2 + \left(\frac{eE_0 t}{mc} \right)^2. \quad (56.20)$$

С другой стороны, решение (56.18), (56.19) дает

$$p_x^2(t) = p^2(t) - p_y^2(t) = \beta_0^2 \left((\gamma_0 mc)^2 + (eE_0 t)^2 \right),$$

что с учетом значения $\chi(t)$ (56.20) немедленно приводит к (56.16).

Зависимость $y(t)$ найдем из (56.18), подставив значение $\chi(t)$ (56.20) в равенство $p_y(t) = \gamma(t) \cdot m \dot{y}$. Отсюда, с учетом значения $p_y(t)$ из (56.18), получим

$$y(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \frac{p_y(t)}{\gamma(t)} \cdot dt = \frac{mc^2}{eE_0} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{eE_0 t}{\gamma_0 mc} \right)^2} - 1 \right), \quad x(t) = v_0 t, \quad (56.21)$$

что совпадает с (56.13).

Таким образом, показано, что решение задачи о движении частицы в лабораторной системе (с преобразованием поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ из движущейся системы в лабораторную) приводит к тому же результату, что и в п. 1. Отличие в эксперименте траектории частиц от (56.13), (56.21) означало бы нарушение преобразований Лоренца для координат-времени или для электромагнитного поля.

§ 57. Частица в неоднородном поле.

Закон сохранения обобщенного момента

Рассмотрим вначале движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, которое изменяется с течением времени, например возрастает. Как будет двигаться частица в таком поле? Усредненное за много оборотов движение такой частицы можно рассматривать как ток в контуре без сопротивления. Тогда орбита частицы в растущем магнитном поле должна стягиваться таким образом, чтобы оставался постоянным охватываемый ею магнитный поток: $r \propto H^{-1/2}$. При этом энергия частицы возрастает пропорционально полю: $p_{\perp} \propto rH \propto H^{1/2}$ и $W = p_{\perp}^2 / 2m \propto H$.

Теперь снимем требование однородности поля, но ограничимся случаем аксиально-симметричного поля. Рассмотрим уравнения движения частицы. В цилиндрических координатах уравнение для азимутального момента можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(rp_{\theta}) = -\frac{e}{2\pi c} \cdot \frac{\partial \Phi_z}{\partial t} - \frac{e}{c} r \dot{r} H_z + \frac{e}{c} r \dot{z} H_r. \quad (57.1)$$

Первое слагаемое в правой части дает момент вихревого электрического поля, причем частная производная указывает, что берется изменение потока через неподвижный контур — окружность радиуса r . Остальные два слагаемых дают момент силы Лоренца, действующей на частицу в аксиально-симметричном поле (H_r , H_z). Преобразуем это выражение, используя четвертое уравнение из (45.9): $\text{div} \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$. Отсюда

$$H_r = -\frac{1}{r} \int_0^r r' dr' \frac{\partial H_z(r')}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi c} \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}, \quad (57.2)$$

после чего вся правая часть (57.1) сворачивается в полную производную магнитного потока в соответствии с законом Фарадея:

$$\frac{d}{dt}(rp_{\theta}) = -\frac{e}{2\pi c} \cdot \frac{d\Phi_z}{dt}. \quad (57.3)$$

Интегрируя, получаем закон сохранения:

$$M_{\theta} = rp_{\theta} + \frac{e\Phi_z}{2\pi c} = \text{const.} \quad (57.4)$$

Величина эта называется *обобщенным моментом частицы* в магнитном поле. С точки зрения механики к обычному моменту rp_{θ} добавляется слабое, зависящее от магнитного поля. На языке электротехники можно считать, что сохраняется не просто магнитный поток внешнего поля, а его сумма с величиной, зависящей от импульса частицы. Подчеркнем, что закон сохранения обобщенного момента справедлив только в аксиально-симметричном магнитном поле, что было использовано при записи уравнений (57.1), (57.2). В остальном конфигурация магнитного поля может быть произвольной.

Задача VII.5. Найти условие движения частицы по окружности постоянного радиуса в аксиально-симметричном магнитном поле, изменяющемся во времени.

Пусть в момент $t = 0$ частица имеет только азимутальную компоненту импульса, значение которой согласовано с величиной магнитного поля на траектории — окружности радиуса r_0 : $p(0)c = -eH_z(r_0, 0)r_0$ (56.8). Траектория не изменится, если в любой момент времени $p(t)c = -eH_z(r_0, t)r_0$. Но, согласно (57.4), при постоянном $r(t) = r_0 = \text{const}$ импульс частицы $p(t) = p(0) + \frac{er_0}{2c}(\overline{H_z(0)} - \overline{H_z(t)})$, $\bar{H} \equiv \Phi_z/(\pi r_0^2)$ — среднее поле внутри траектории. Нетрудно видеть, что все три равенства выполняются одновременно, если для любого t

$$H_z(r_0, t) = \frac{1}{2} \overline{H_z(t)}.$$

Это так называемое «условие 2:1», необходимое для ускорения частицы в нарастающем во времени магнитном поле при постоянстве радиуса ее траектории (ускоритель *бетатрон*).

Если магнитное поле слабо неоднородно и медленно изменяется во времени, то можно приближенно считать траекторию частицы окружностью. Пусть начало координат совпадает с центром этой окружности. Тогда $rp_{\theta} \approx -eH_z r^2/c \approx -e\Phi_z/\pi c$, и обобщенный момент можно выразить только через поток или только через импульс:

$$M_{\theta} \approx -\frac{e\Phi_z}{2\pi c} \approx \frac{rp_{\theta}}{2} \approx \text{const.} \quad (57.5)$$

Таким образом, в этом случае можно говорить о законе сохранения магнитного потока внешнего поля через площадь траектории частицы. Подчеркнем, что равенство (57.5) считается приближенным, так как в неоднородном переменном поле траектория частицы не является точной окружностью.

Приближенное выражение (57.5) для обобщенного момента оказывается пропорциональным магнитному моменту частицы $\mathbf{m}$ (34.11):

$$M_\theta = \frac{m_0 c}{e} |\mathbf{m}|, \quad (57.6)$$

где m_0 — масса частицы. Таким образом, мы получили приближенный закон сохранения магнитного момента частицы. Этот закон позволяет сравнительно просто исследовать движение частицы в слабо неоднородном поле.

Начнем со случая аксиально-симметричного магнитного поля, которое изменяется с радиусом.

Заметим, что такое поле неизбежно изменяется вдоль оси симметрии. Действительно, запишем уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ в цилиндрических координатах (r, θ, z) с учетом аксиальной симметрии (П. I.5, $B_\theta = 0$):

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Если $B_z(z) = \text{const}$, то отсюда следует

$$B_r(r) = \frac{C}{r},$$

где C — постоянная. Ясно, что такое поле не существует: $B_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$. Если же B_z -компонента изменяется с координатой z , то B_r -компонента также изменяется с радиусом. Пример такого поля рассмотрен ниже (ловушка Будкера–Поста).

Рассмотрим вначале движение частицы в плоскости (r, θ) , ортогональной оси симметрии поля $\mathbf{H}(r, z)$ (вакуум, $\mu = 1$). В таком поле заряженная частица «дрейфует» по азимуту, т. е. перпендикулярно градиенту $\mathbf{H}$, как это показано на рис. VII.1, а. Дрейфовое движение возникает вследствие того, что кривизна траектории частицы зависит от радиуса. Скорость дрейфа тем меньше, чем меньше ларморовский радиус частицы (задача VII.6 ниже).

Дрейфовое движение частицы также можно рассматривать как некоторый ток и считать, что охватываемый им магнитный поток сохраняется при изменении магнитного поля. В уравнениях механики это соответствует точному сохранению (в аксиально-симметричном поле) *обобщенного момента* (57.4). При этом существуют такие две фазы ларморовского вращения, для которых механический момент $p_\theta = 0$ (см. рис. VII.1, а). Таким образом, имеет место точное сохранение магнитного потока, охватываемого окружностью радиуса $R_0 \approx \sqrt{R^2 - \rho_L^2}$, где R — расстояние центра ларморовской окружности от оси симметрии поля, или радиус дрейфовой траектории частицы. При изменении магнитного поля во времени радиус дрейфовой траектории изменяется по закону $R \propto H^{-1/2}$. Механизм этого радиального движения частицы связан с ее дрейфом в вихревом электрическом поле, появляющемся в переменном магнитном поле.

В произвольном магнитном поле (не обязательно аксиально-симметричном) магнитный поток, охватываемый дрейфовой траекторией частицы, также приближенно сохраняется, если только магнитное поле мало изменяется в течение дрейфового периода.

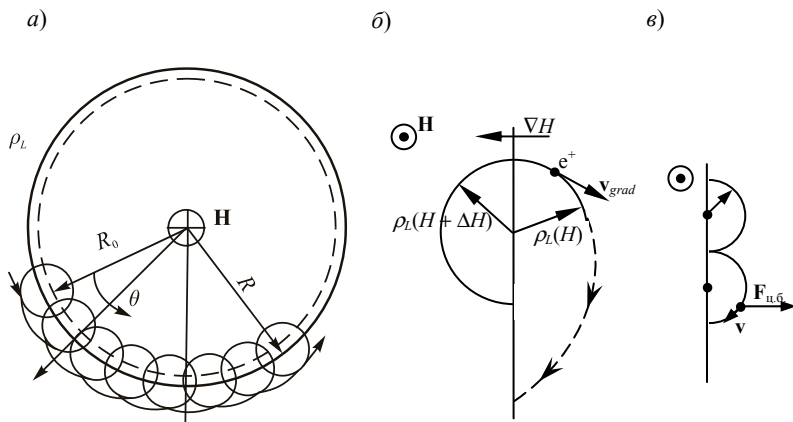


Рис. VII.1. Траектория положительно заряженной частицы в неоднородном аксиально-симметричном магнитном поле: а) проекция траектории на плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{H}$; б) упрощенная схема градиентного дрейфа; в) то же — центробежного дрейфа

Задача VII.6. Найти скорость дрейфа частицы (e , m_0) в постоянном во времени неоднородном магнитном поле.

Понятие дрейфа предполагает, что скорость дрейфа и дрейфовое ускорение малы по сравнению со скоростью вращения частицы вокруг силовой линии поля и ускорением, соответствующим этому вращению. Поэтому в качестве модели дрейфового движения можно принять *ларморовский «кружок»*, на который действуют средние (по ларморовской окружности) силы. В первом приближении эти силы должны взаимно уравновешиваться. В неоднородном магнитном поле на «кружок» действуют три силы:

1) сила, связанная с градиентом магнитного поля и определяемая магнитным моментом частицы $\mathbf{m}$ (см. (35.6)): $\mathbf{f}_1 = \nabla(\mathbf{m}, \mathbf{H})$;

2) центробежная сила, обеспечивающая движение кружка вдоль искривленной силовой линии радиуса $\mathcal{K}^{-1}$: $\mathbf{f}_2 = -\mathcal{K} m_0 v_{\parallel}^2 \mathbf{n}$, где m_0 — масса частицы, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали к силовой линии;

3) сила Лоренца, связанная с дрейфовой скоростью $\mathbf{u}_d$: $\mathbf{f}_3 = e \mathbf{u}_d \times \mathbf{H}/c$.
Найдем вначале вектор кривизны силовой линии поля $\mathcal{K} = d\boldsymbol{\tau}/ds$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}/H$, в области, где $\text{rot}\mathbf{H} = 0$ (s — координата вдоль силовой линии). Записав

$$\mathcal{K} = \sum_{\alpha=1}^3 (\partial \boldsymbol{\tau} / \partial x_{\alpha}) (\partial x_{\alpha} / \partial s) = (\boldsymbol{\tau}, \nabla) \boldsymbol{\tau} \text{ с учетом того, что } \tau^2 = 1, \text{ найдем}$$

$$(\boldsymbol{\tau}, \nabla) \boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\tau} \times \text{rot} \boldsymbol{\tau} + (\nabla \tau^2 / 2) = -(\boldsymbol{\tau} \times \text{rot} \mathbf{H})/H + \boldsymbol{\tau} \times (\mathbf{H} \times \nabla(1/H)) = \\ = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{H}, \nabla(1/H)) + \nabla H/H.$$

Поскольку $(\mathbf{H}, \nabla(1/H)) = \text{div} \boldsymbol{\tau} - (\text{div} \mathbf{H})/H = \text{div} \boldsymbol{\tau}$, то окончательно

$$\mathcal{K} = \frac{\nabla H}{H} + \boldsymbol{\tau} \text{div} \boldsymbol{\tau}.$$

Запишем с учетом (34.11) уравнение баланса всех трех сил ($\mathbf{m} \approx \text{const}$):

$$-\frac{m_0 v_{\perp}^2}{2H} \nabla H - m_0 v_{\parallel}^2 \left(\frac{\nabla H}{H} + \boldsymbol{\tau} \text{div} \boldsymbol{\tau} \right) + \frac{e}{c} \mathbf{u}_d \times \mathbf{H} = 0.$$

Учтем, что $\mathbf{u}_d \perp \boldsymbol{\tau}$, и, умножив это уравнение векторно на $\mathbf{H}$, получим

$$\mathbf{u}_d = \frac{m_0 c (v^2 + v_{\parallel}^2)}{2eH^3} (\mathbf{H} \times \nabla H), \quad (57.7)$$

где $v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}$ — полная скорость частицы.

Как мы видим, формула (57.7) объединяет два механизма дрейфа частицы — неоднородность поля, или *градиентный дрейф*, и «дефицит» (отсутствие) центробежной силы, которая заставила бы двигаться частицу вдоль криволинейной

силовой линии — *центробежный дрейф*, вызванный появлением центробежной силы инерции в системе частицы. Оба вида дрейфа можно оценить на «полукачественном» уровне, что полезно для понимания природы дрейфа.

В неоднородном поле траектория частицы в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{H}$, можно приближенно представить в виде двух половинок окружности радиусов (рис. VII.1, б):

$$\rho_L(H) = m_0 v_{\perp} c / eH \quad \text{и} \quad \rho_L(H + \Delta H) \approx \rho_L(H) \cdot \left(1 - \frac{\Delta H}{H}\right).$$

В этом приближении за оборот T частица смещается поперек направления вектора $\nabla \mathbf{H}$ на величину

$$\Delta y \sim 2\rho_L \cdot \frac{\Delta H}{H}, \quad \text{что дает} \quad u_{\text{grad}} \sim \frac{\Delta y}{T} = \frac{v_{\perp}}{\pi} \cdot \frac{\Delta H}{H},$$

и, учитывая, что $\Delta H \sim |\nabla H| \cdot \rho_L$, окончательно получаем

$$u_{\text{grad}} \sim \frac{\gamma m_0 c v_{\perp}^2}{\pi e H^2} \cdot |\nabla H|.$$

При движении частицы вдоль криволинейной силовой линии с радиусом кривизны $\mathcal{R}$ на частицу в ее системе действует центробежная сила инерции $F_{\text{ц.б.}} = \gamma m_0 v_{\parallel}^2 / \mathcal{R}$, перпендикулярная вектору $\mathbf{H}$ (рис. VII.1, в). Поэтому для оценки скорости центробежного дрейфа и $\mathcal{R}$ можно использовать формулу (56.9), умножив числитель и знаменатель на заряд частицы и заменив $eE \rightarrow F_{\text{ц.б.}}$. Получим

$$u_{\mathcal{R}} \sim \frac{\gamma m_0 c v_{\parallel}^2}{\mathcal{R} e H}.$$

Радиус кривизны плоской силовой линии можно выразить через градиент поля, не прибегая к формулам аналитической геометрии. Для этого достаточно вспомнить, что поле прямого тока спадает с расстоянием как $1/\rho$, а силовые линии этого поля — концентрические окружности с центром на оси проводника с током (см. (28.5)). Поэтому

$$|\nabla H| = \frac{2I}{\rho^2} = \frac{H(\rho)}{\rho}.$$

Отсюда для оценок можно принять $\mathcal{R} = \rho \sim H / |\nabla H|$, что дает для величины скорости дрейфа

$$u_{\mathcal{R}} \sim \frac{\gamma m_0 c v_{\parallel}^2}{e H^2} \cdot |\nabla H|.$$

Еще раз подчеркнем, что градиентный и центробежный дрейфы присутствуют в неоднородном поле одновременно и направления их скорости совпадают (что видно из рис. VII.1, б, в) и зависят от знака частицы. Поэтому полная скорость дрейфа, полученная в наших оценках, равна

$$u_d \sim \frac{\gamma m_0 c (v_{\perp}^2 + \pi v_{\parallel}^2)}{\pi e H^2} \cdot |\nabla H|,$$

что отличается от (57.7) как

$$\frac{v^2 + (\pi - 1)v_{\parallel}^2}{v^2 + v_{\parallel}^2} \cdot \frac{2}{\pi} \sim 1.$$

Задача VII.7. Найти скорость дрейфа частицы (e , m_0) в магнитном поле тороидального соленоида.

Тороидальный соленоид в простейшем варианте представляет собой свернутый в тор цилиндрический соленоид с равномерной обмоткой (задача IV.10):

$$H(r) = \frac{2NI}{r},$$

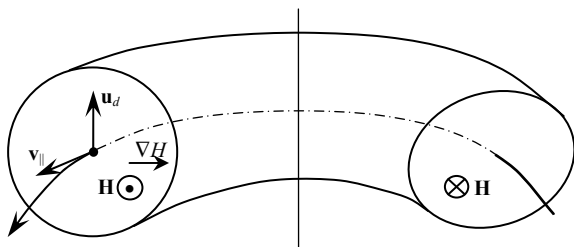


Рис. VII.2. Дрейф частицы в тороидальном соленоиде

где N — число витков обмотки соленоида, I — ток в обмотке, r — расстояние от оси тора. Значение градиента поля вычислено выше: $\nabla H = -H/r$, и формула (57.7) дает

$$u_d = \frac{\gamma m_0 c (v^2 + v_{\parallel}^2)}{2eHr}.$$

Направление дрейфа, как следует из (57.7) (а также из качественного рассмотрения выше), зависит от направления поля и знака заряда частицы (рис. VII.2).

За один оборот в тороидальном соленоиде частица смещается в направлении вектора $\mathbf{u}_d$ на величину

$$\Delta_d = u_d \cdot \frac{2\pi r}{v_{\parallel}} = \frac{\pi \gamma m_0 c (v^2 + v_{\parallel}^2)}{eHv_{\parallel}} \sim \begin{cases} 3\pi \rho_L, & v_{\parallel} \sim v_{\perp}, \\ 2\pi \rho_L, & v_{\parallel} \gg v_{\perp}, \end{cases} \quad (57.8)$$

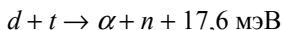
где ρ_L — ларморовский радиус частицы в поле H , вычисленный по ее полной скорости.

Тороидальный соленоид является основным элементом схемы *термоядерного реактора*, предложенной в 1950 г. И. Е. Таммом и А. Д. Сахаровым. Тогда же они выяснили, что центробежно-градиентный дрейф частиц в тороидальном магнитном поле приводит к их быстрому уходу на стенки вакуумной камеры реактора и удержание в таком поле тритиево-дейтериевой плазмы, в которой должна идти реакция термоядерного синтеза, невозможно. Однако эта схема не была полностью отвергнута, довольно быстро появились предложения по формированию квазитороидального поля с замкнутыми магнитными поверхностями, на которых частицы плазмы «живут» достаточно длительное время.

Один из способов формирования таких поверхностей — пропускание через плазму (вдоль силовых линий тороидального поля) электрического тока, магнитное поле которого в сумме с полем соленоида и создает магнитные поверхности — силовые линии полного поля превращаются в спирали, навитые на ось тока, протекающего по плазме (см. задачу IV.17). Другой возможный способ формирования магнитных плоскостей — наложение на тороидальный соленоид спирального квадрупольного поля (задача VII.9 ниже).

С момента появления первого предложения и создания в «Лаборатории измерительных приборов АН СССР» (ЛИПАН — кодовое название того времени нынешнего «Курчатовского института») первой экспериментальной

установки ТОКАМАК, что означает «ТОроидальная КАмера с МАгнитными Катушками», прошло более 60 лет. За это время ТОКАМАКИ были построены во многих лабораториях мира, а физика плазмы сформировалась как одно из важнейших научных направлений. В ТОКАМАКАХ была получена реакция термоядерного синтеза в дейтерий-тритиевой плазме с положительным балансом энергии:



(d — дейтрон, t — тритон, α — альфа-частица, n — нейтрон). Однако серьезные технические трудности принципиального характера — необходимость создания магнитного поля высокой напряженности (СП-соленоиды), проблема «первой стенки» вакуумной камеры, принимающей на себя поток α -частиц и нейтронов, и многое другое — не позволили быстро создать термоядерный реактор, пригодный для практических применений.

Основные надежды сегодня связаны с международным проектом *ITER* (International Thermonuclear Experimental Reactor), имеющим целью сооружение и ввод в действие к 2026 г. первого термоядерного генератора энергии мощностью 500 МВт при КПД около 90%. Этот реактор на основе схемы токамака строится около г. Кадараш (Cadarache) во Франции, и в осуществлении этого проекта участвуют Европейский Союз, Россия, США, Китай, Индия, Япония и Южная Корея. В России есть и собственный проект ИГНИТОР (от англ. ignite — поджигать, имеется в виду поджиг термоядерной реакции в тороидальном магнитном поле). Это также развитие идеи ТОКАМАКА. ITER и ИГНИТОР отличаются принципиально схемой поддержания термоядерной реакции. В первом энергия термоядерного синтеза компенсирует затраты внешних источников на «поджиг» реакции и превосходит эти затраты более чем в 10 раз. Во втором предполагается осуществить поджиг реакции и сделать ее самоподдерживающейся, для чего требуется нагреть d - t смесь до температуры порядка 100 млн градусов (примерно 10 кэВ кинетической энергии ядер). Российский проект разрабатывается совместно с итальянскими специалистами.

Предположим теперь, что магнитное поле постоянно во времени, но изменяется в пространстве вдоль силовых линий (рис. VII.3). Если частица движется в этом направлении, то магнитный поток, охватываемый ее дрейфовой траекторией, также должен сохраняться. Но это означает, что частица движется приблизительно (с точностью порядка ρ_L) по силовой линии магнитного поля, точнее по некоторой поверхности вращения, образованной равноудаленными от оси симметрии силовыми линиями магнитного поля. Траектория движения является в этом случае некоторой комбинацией схематических траекторий рис. VII.1а и рис. VII.3, полное изображение которой наверняка запутало бы читателя.

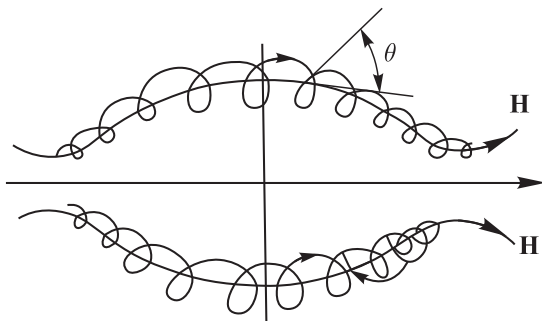


Рис. VII.3. Траектория заряженной частицы в магнитной ловушке

Рассмотрим теперь движение заряженной частицы вдоль силовой линии. Мы можем использовать два закона сохранения: точный закон сохранения энергии

$$m_0 v_{\parallel}^2 + m_0 v_{\perp}^2 = 2W = \text{const} \quad (57.9)$$

(предполагается, что магнитное поле постоянно во времени) и приближенный закон сохранения магнитного момента (57.5), (57.6)

$$m_0 v_{\perp}^2 / 2H = m \approx \text{const}. \quad (57.10)$$

Подставляя это выражение в (57.9), найдем

$$\frac{m_0 v_{\parallel}^2}{2} + mH(s) = \text{const}, \quad (57.11)$$

где s — координата вдоль силовой линии и $v_{\parallel} = ds/dt$. В таком виде последнее выражение совпадает с законом сохранения энергии для частицы в поле с потенциальной энергией $U(s) = mH(s)$. В частности, поле, конфигурация которого изображена на рис. VII.3, эквивалентно некоторой потенциальной «яме». Поэтому в таком поле частицы заперты также и в направлении силовых линий, и поле такой конфигурации называется *магнитной ловушкой*. Механизм отражения частицы от магнитных «пробок» связан с действием поперечных составляющих неоднородного магнитного поля. Условие удержания частиц вытекает из (57.11) и имеет вид $W < U_{\max}$, или $\sin^2 \theta(s) > H(s)/H_{\max}$. Здесь θ — угол наклона вектора скорости v частицы к силовой линии ($\cos \theta = v_{\parallel} / v$), $H(s)$ — величина магнитного поля. Таким образом, в каждой точке пространства внутри магнитной ловушки имеется

так называемый «конус потерь» с раствором $\theta(s)$. Ловушка может удерживать лишь частицы, направление скорости которых лежит вне этого конуса. Заметим, что в действительности конус потерь несколько шире, так как магнитный момент частицы сохраняется лишь приближенно, и близкие к конусу частицы могут с течением времени покинуть ловушку.

Такие магнитные ловушки были независимо предложены советским физиком Г. И. Будкером и американским физиком Р. Постом (R. Post) в начале 1950-х гг. для удержания горячей плазмы и применяются в экспериментах, связанных с проблемой управляемого термоядерного синтеза. В отечественной литературе принят будкеровский термин «магнитная пробка», а несколько таких ловушек, соединенных последовательно для лучшего удержания частиц, называют «пробкотрон». В зарубежной литературе «прижилось» название, предложенное Постом, — «магнитная бутылка» (magnetic bottle).

В магнитных ловушках, при определенной конфигурации поля, можно удерживать и нейтральные частицы, если они обладают магнитным моментом. Принцип такой ловушки для нейтрона был предложен советским физиком В. В. Владимирским в 1960 г.: нужно сформировать магнитное поле так, что оно возрастает во всех направлениях от центра ловушки — так называемый «minimum B » (B — магнитное поле). Тогда на частицу, обладающую магнитным моментом $\mathbf{m}$ и не имеющую электрического заряда, действует сила (35.6), «загоняющая» частицу в точку с минимумом магнитного поля, если момент $\mathbf{m}$ ориентирован по полю, т. е. $(\mathbf{m}, \mathbf{H}) > 0$. Конечно, частица будет совершать колебания вокруг точки $\mathbf{F} = 0$ (минимум H), и амплитуда этих колебаний зависит от энергии частицы. Конструкция такой ловушки с минимумом магнитного поля была предложена в 1960 г. М. С. Иоффе (Курчатовский институт) для удержания горячей плазмы, т. е. газа заряженных частиц. Магнитная система ловушки состоит из двух катушек с токами противоположного направления и четырех прямолинейных проводников. Оси катушек совпадают, и в точке на оси, равноудаленной от плоскостей катушек, их суммарное поле равно нулю, возрастая вдоль оси по мере удаления от центра (см. (28.7)). Прямолинейные проводники проложены по поверхности цилиндра, ось которого совпадает с осью катушек («палки Иоффе»), а токи в соседних проводниках имеют противоположные направления (рис. IV.4, $h = d$). В результате между проводниками создается квадрупольное магнитное поле (см. задачу IV.4). В центре цилиндра и возникает минимум магнитного поля, а к стенкам и вдоль оси оно нарастает. Фактически это развитие ловушки Будкера–Поста и механизм удержания в ней заряженных частиц другой. Это, как мы видели, действие закона сохранения магнитного момента (57.10).

В 1983 г. американский физик Д. Притчард (D. E. Pritchard) предложил применить ловушку Иоффе для удержания холодных атомов. Его вариант ловушки принципиально тот же, хотя в литературе и появился термин «ловушка Иоффе–Притчарда». Применение этой ловушки в эксперименте ALPHA (Antihydrogen Laser Physics Apparatus) в ЦЕРН позволило в марте 2011 г. синтезировать

и удерживать в течение 1000 секунд атомы *антиводорода*. Это открывает путь к прецизионной спектроскопии антивещества с целью поиска его отличия от окружающего нас вещества.

Для дрейфового характера движения частицы, когда выполняются соотношения (57.5)–(57.7), (57.10), (57.11), необходимо, чтобы магнитное поле мало изменялось на размере порядка ларморовского радиуса частицы:

$$|\nabla H| \ll H/\rho_L. \quad (57.12)$$

Оказывается, что закон сохранения обобщенного момента позволяет с хорошей точностью описывать движение частиц и в случае обратного (также сильного) неравенства. Это магнитные поля с «тонкой» границей. Примером может служить катушка с током, размеры которой много меньше ларморовского радиуса частицы в магнитном поле катушки (рис. VII.4). Такое устройство обладает еще и фокусирующими свойствами. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

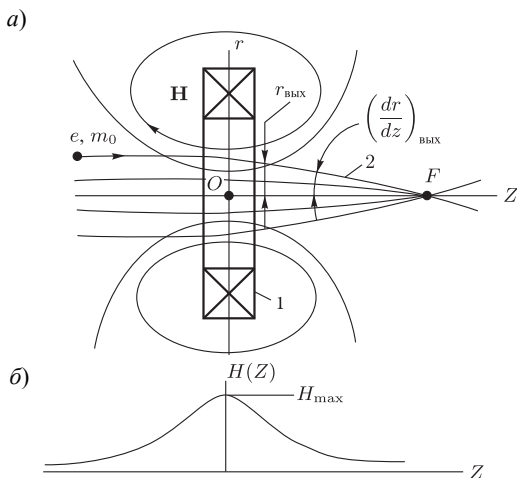


Рис. VII.4. Движение заряженной частицы в магнитном поле катушки с током: а) катушка с током (1) и проекции траекторий частиц (2) на плоскость (r, z) ; б) $H(z)$ — поле на оси катушки

Воспользуемся цилиндрической системой координат (r, θ, z) . Пусть частица движется вначале параллельно оси катушки на расстоянии r от нее таким, что $r \ll D \ll \rho_L$, $\rho_L = pc/eH_{\text{max}}$, D — диаметр катушки, H_{max} — максимальное значение поля $H(z)$ на оси катушки. В этом случае поле слабо

изменяется на размере r , и закон сохранения обобщенного момента частицы (57.4) дает $(p_\theta = \gamma m_0 r \dot{\theta}, \quad \Phi_z \approx \pi r^2 H(z))$:

$$\dot{\theta}(z) = -\frac{eH(z)}{2\gamma m_0 c}. \quad (57.13)$$

Движение частицы по радиусу описывается уравнением

$$\frac{dp_r}{dt} - \gamma m_0 \dot{\theta}^2 r \approx \frac{e}{cH(z)} r \dot{\theta}. \quad (57.14)$$

Подставляя в него (57.13), получим

$$\ddot{r} = -\frac{\omega_L^2(z)}{4}, \quad \omega_L(z) = \frac{eH(z)}{\gamma m_0 c} = -2\dot{\theta}.$$

Производя замену $d/dt = v_z d/dz$ и пренебрегая изменением v_z , запишем

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{r}{4\rho_L^2(z)}, \quad \rho_L(z) = \frac{p_z c}{eH(z)} \gg \frac{H}{|\nabla H|} \quad (57.15)$$

и, воспользовавшись последним неравенством, найдем приближенное значение dr/dz на выходе из поля:

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{\text{вых}} \approx -\frac{r}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\rho_L^2(z)}. \quad (57.16)$$

Здесь координата z отсчитывается от центра катушки. Таким образом, частица, пройдя поле, отклоняется в плоскости (r, z) на угол, пропорциональный ее начальной координате r . Это означает, что пучок частиц, влетающих в такое поле параллельно его оси симметрии, соберется (см. рис. VII.4) в одну точку F на оси катушки, называемую *фокусом*. Поэтому рассматриваемое устройство называется *аксиальной магнитной линзой*, а расстояние OF — *фокусным расстоянием*. Нетрудно видеть, что фокусное расстояние равно

$$f = r / \left(-\frac{dr}{dz}\right), \quad \text{или} \quad f^{-1} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\rho_L^2(z)}. \quad (57.17)$$

Этот результат справедлив при

$$\frac{dr}{dz} \ll 1, \quad \text{или} \quad f \gg r, \quad (57.18)$$

что в данном случае хорошо выполняется, поскольку протяженность поля катушки порядка ее диаметра D , так что

$$f^{-1} \sim \frac{D}{4\rho_L^2}, \quad \text{и} \quad \frac{r}{f} \sim \frac{Dr}{4\rho_L^2} \ll 1. \quad (57.19)$$

Именно условие (57.18) и позволяет принять в (57.16) координату частицы r постоянной при пересечении поля ($\Delta r \sim rD/f \sim rD^2/4\rho_L^2 \ll r$), а скорость $v_z \approx v$ ($p_z \approx p$). Такая линза называется *тонкой*.

В § 89 будет показано, что такая система способна передавать изображение (в данном случае с помощью пучка заряженных частиц — «*электронная оптика*»).

Задача VII.8. Описать движение частицы, влетающей в цилиндрический соленоид параллельно его оси, если диаметр соленоида D много меньше ларморовского радиуса частицы в поле соленоида.

Поскольку граница поля тонкая, движение частицы в области однородного поля описывается уравнением (57.15) с постоянными H и ρ_L . Решение этого уравнения при заданных выше начальных условиях есть

$$r(z) = r(0) \cos \frac{z}{2\rho_L}. \quad (57.20)$$

Таким образом, частица касается оси в точках $z_n = (2n + 1)\pi\rho_L$. Этот результат становится очевидным, если рассмотреть движение частицы в плоскости (r, θ) и учесть, что при пересечении тонкой границы поля частица, согласно (57.4), приобретает азимутальный импульс $p_\theta = -eHr/2c$, так что $r = 2\rho_\perp = 2|p_\theta|c/eH$ — частица в плоскости (r, θ) описывает окружность, радиус которой $\rho_\perp$ точно вдвое меньше координаты частицы на входе в соленоид (рис. VII.5). Конечно, здесь мы пренебрегли углом $\Delta r' \sim rD/\rho_L^2$ и смещением $\Delta r \sim rD^2/\rho_L^2$, набираемыми частицей при пересечении границы. На выходе из соленоида длины l траектория частицы будет направлена под углом

$$\left(\frac{dr}{dz} \right)_{\text{вых}} = -\frac{r(0)}{2\rho_L} \sin \frac{l}{2\rho_L}$$

к оси соленоида. Поскольку этот угол пропорционален $r(0)$, то такой соленоид также фокусирует поток частиц. Он является аналогом толстой линзы (§ 90).

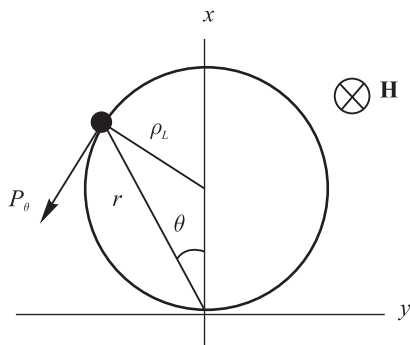


Рис. VII.5. Движение частицы в соленоиде (плоскость (r, θ)) при влете в соленоид параллельно его оси

Задача VII.9. Оценить фокусное расстояние тонкой аксиальной электростатической линзы (рис. VII.6).

Поле линзы обладает аксиальной симметрией, поэтому аналогично (33.15) и (57.2) можно записать

$$E_r = -\frac{1}{r} \int_0^r r' dr' \frac{dE_z}{dz} \approx -\frac{r}{2} \frac{dE_0}{dz},$$

где $E_0(z)$ — поле на оси линзы. Из уравнения движения нерелятивистской частицы, пересекающей линзу,

$$m\ddot{r} = eE_r$$

найдем изменение ее радиальной скорости на выходе из линзы:

$$\Delta v_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{m} E_r \frac{dz}{v_z} \approx -\frac{er}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v_z} \cdot \frac{dE_0}{dz} dz \approx -\frac{er}{2m} \left\{ \frac{E_1}{v_{\text{вх}}} - \frac{E_1 - E_2}{v} - \frac{E_2}{v_{\text{вых}}} \right\},$$

где $v_{\text{вх}} = v_{\text{вых}}$ и v — значения z -компоненты скорости частицы на входе в линзу, на выходе из нее и вблизи центральной диафрагмы соответственно, E_1 и E_2 — средние значения напряженности поля на оси линзы в ее левой и правой половинках. Поскольку $E_{1,2} = \pm U/d_{1,2}$, где $U, d_{1,2}$ — разность потенциалов и расстояния между диафрагмами линзы, $v \approx v_{\text{вх}} + (eU/2mv_{\text{вх}})$, то

$$\frac{\Delta v_r}{v_{\text{вх}}} \approx -\frac{r}{8} \left(\frac{eU}{W_0} \right)^2 \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right),$$

W_0 — кинетическая энергия частицы ($W_0 \gg eU$). Отсюда аналогично (57.17) получим

$$f^{-1} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{eU}{2W_0} \right)^2 \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right).$$

Такая линза пригодна только для фокусировки частиц невысокой энергии, так как в этом случае при технически реализуемых напряженностях полей фокусное расстояние еще не слишком велико. Например, для $W_0 = 100$ кэВ, $d_1 = d_2 = 1$ см и $E \sim 10$ кВ/см фокусное расстояние составляет 4 м. Нарушение условия $eU \ll W_0$ приводит к нелинейной зависимости Δv от r , в результате чего фокусное расстояние становится функцией координаты r (абберации линзы). Обратим внимание, что фокусное расстояние электростатической линзы не зависит от массы частицы при заданной ее энергии, тогда как для магнитной линзы (57.19) оно зависит от импульса частицы.

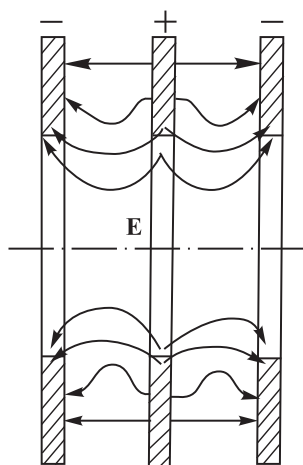


Рис. VII.6. Схема аксиальной электростатической линзы Показаны линии напряжённости электрического поля

Рассмотренные выше линзы являются относительно слабыми, длинно-фокусными. Это связано с квадратичным характером зависимости фокусного расстояния от малого параметра — отношения энергии (импульса) частицы к напряженности поля в линзе (см. (57.17), (57.19)). Поэтому аксиальные линзы применяются для фокусировки пучков частиц относительно невысоких энергий. Для фокусировки релятивистских частиц применяются линзы с чисто поперечными полями. Подобная «идеальная» магнитная линза должна обладать строго азимутальным полем, линейно возрастающим с радиусом. Однако создать такое поле в пространстве, свободном от тока, невозможно, так как это противоречит уравнению Максвелла $\text{rot} \mathbf{H} = 0$ ($\oint (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \text{const}$). Для ультрарелятивистских частиц, способных проходить

значительные толщины вещества без существенных потерь энергии, возможно решение в виде *литиевых* и *параболических линз*, предложенных Г. И. Будкером в начале 1960-х гг. (рис. VII.7). Первая из них — цилиндр с током постоянной плотности, выполненный из легкого металла — лития в тонкой стальной оболочке, вторая — параболоид вращения. Практически в то же время С. Ван-дер-Меер (ЦЕРН), не зная схемы Будкера, предложил линзу «магнитный горн», которая является половинкой параболической линзы. Все три разновидности этих линз отличается короткое фокусное расстояние и низкий уровень aberrаций.

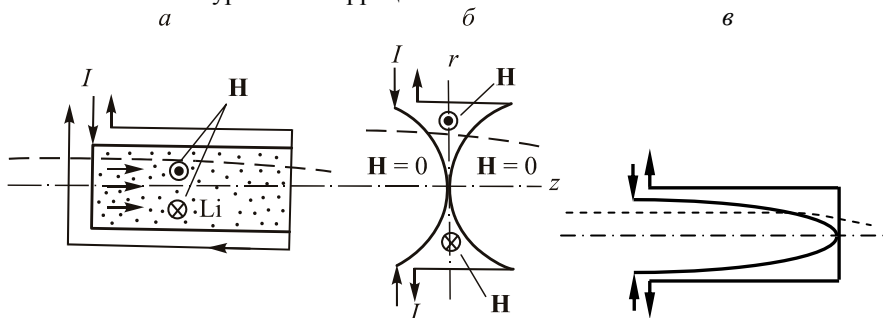


Рис. VII.7. Схемы литиевой (а) и параболической (б) линз, (в) — горн С. Ван-дер-Меера. Стрелками показано растекание тока, штриховой линией — траектория частицы

Задача VII.10. Найти фокусное расстояние тонких литиевой и параболической линз.

В литиевой линзе $H_\theta = 2Ir/ca^2$, a — радиус литиевого цилиндра. Частица ($v \approx c$) в линзе набирает угол $dr/dz = -2eI lr/c^2 a^2$, откуда

$$f^{-1} = \frac{2eI}{pc^2} \cdot \frac{l}{a^2}.$$

Для параболической линзы поле между токонесущими поверхностями есть $H_\theta = 2I/cr$, а угол, набранный частицей при пересечении линзы, линейно растет с радиусом: $\frac{dr}{dz} = -\frac{e}{pc} \int_{-z}^z H_\theta dz = -\frac{4eI}{pc^2} \alpha r$, так что

$$f^{-1} = \frac{4eI}{pc^2} \alpha,$$

где α — постоянная параболоида вращения $z = \alpha r^2$. У магнитного горна, при тех же I и α , фокусное расстояние вдвое больше.

Другим возможным решением является применение полей квадрупольной конфигурации. Линзы с такими полями фокусируют по одному направлению и дефокусируют по другому (задача VII.11). Пара (дублет) квадрупольных линз обладает только фокусирующими свойствами (см. § 90).

Задача VII.11. Найти фокусное расстояние тонкой квадрупольной линзы (рис. VII.8).

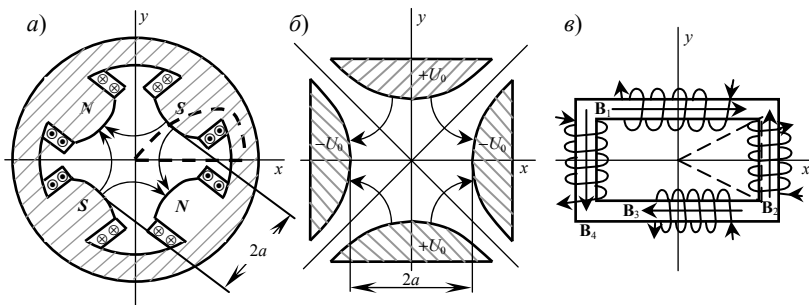


Рис. VII.8. Схемы магнитной (а) и электростатической (б) квадрупольных линз и «линзы Панофского» (в). Траектории частиц перпендикулярны плоскости рисунка. Штриховой линией показан контур интегрирования для нахождения поля

Поле магнитной квадрупольной линзы, полюса которой ограничены гиперболическими поверхностями $y = \pm a^2/2x$ ($2a$ — минимальное расстояние между противоположными полюсами), можно найти, введя скалярный магнитный потенциал $\Psi(x, y) = -Gxy$. Тогда $H_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = Gy$, $H_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = Gx$, т. е. константа G есть градиент поля (ср. (28.9)). Уравнения движения частицы в плоскости (x, y)

$$\gamma m_0 \ddot{x} = -\frac{e}{c} \dot{z} H_y, \quad \gamma m_0 \ddot{y} = \frac{e}{c} \dot{z} H_x \quad (57.21)$$

дают в приближении тонкой линзы

$$f_{x,y}^{-1} = \pm \frac{eGl}{pc}. \quad (57.22)$$

Связь между градиентом поля линзы и током I в ее обмотках найдем из закона циркуляции поля, выбрав в качестве контура интегрирования отрезки линий $x = y$ и $y = 0$ и пренебрегая полем в яре (рис. VII.8, а):

$$\frac{4\pi}{c} NI = G \int_0^a r \cdot dr = G \frac{a^2}{2}, \quad G = \frac{8\pi NI}{ca^2}. \quad (57.23)$$

Здесь I — ток в обмотке линзы, N — число витков каждой из четырех катушек линзы. Отметим, что формула для градиента (57.23) совпадает с (28.9) при $h = d$ (см. также задачу V.10). Поле электростатической линзы (рис. VII.8, б) описывается потенциалом $\varphi(x, y) = -G(x^2 - y^2)$. Аналогично найдем

$$E_x = Gx, \quad E_y = -Gy, \quad f_{x,y}^{-1} = \mp \frac{eGl}{\beta pc}, \quad G = \frac{2V_0}{a^2}, \quad (57.24)$$

где $\beta = v/c$.

При выборе знаков токов и потенциалов полюсов в соответствии с рис. VII.8, а, б обе линзы дефокусируют по x и фокусируют по y , если положительно заряженная частица летит вдоль оси z (т. е. «на нас»).

Разновидностью магнитной квадрупольной линзы является так называемая *линза Пановского* (W. K. N. Panofsky, 1959). У нее, в отличие от классической квадрупольной линзы, прямоугольная апертура (пространство, свободное для пучка частиц). Линза выполняется в виде прямоугольного ярма, полностью покрытого четырьмя обмотками, включенными навстречу друг другу (рис. VII.8, в). Число ампер-витков NI в каждой обмотке одно и то же. Магнитное поле в апертуре линзы — строго квадрупольное, если токовые обмотки тонкие. Градиент квадрупольного поля найдем аналогично (57.23):

$$\frac{4\pi NI}{c} = 2 \int_0^{\sqrt{h^2 + d^2}} G \cdot r \cdot dr = G(h^2 + d^2), \quad G = \frac{4\pi NI}{c(h^2 + d^2)}. \quad (57.25)$$

В сильнополевых квадрупольных магнитах применение железных (ферромагнитных) полюсов и сердечников невозможно. В этом случае применяют, как мы уже знаем, безжелезные электромагниты (железо используется только в качестве внешнего ярма, § 54) с так называемыми «косинусными» обмотками (см. задачу IV.13). Для квадрупольных линз используется геометрия обмоток с плотностью тока $j(\varphi) = j_0 \cdot \cos 2\varphi$ (рис. IV.7, б). Существует также вариант безжелезной линзы Пановского (см. [4], § 9).

Задача VII.12. На длинный соленоид ($L \gg a$) надета спиральная квадрупольная линза, представляющая собой, например, длинную безжелезную линзу (рис. IV.7, б), обмотки которой образуют вдоль оси соленоида спираль с шагом λ . Ток соленоида — I , число витков на единицу длины — n , градиент квадрупольной линзы — G . Найти уравнение силовой линии магнитного поля внутри соленоида.

Во вращающейся системе координат (x', y') , связанной с обмотками спирально-го квадруполья, как это показано на рис. IV.7, б, компоненты квадрупольного поля равны (задача IV.13)

$$H'_x = Gy', \quad H'_y = Gx'. \quad (57.26)$$

В лабораторной системе находим

$$\begin{aligned} H_x &= H'_x \cdot \cos \alpha - H'_y \cdot \sin \alpha, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} z \equiv kz, \\ H_y &= H'_x \cdot \sin \alpha + H'_y \cdot \cos \alpha, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \end{aligned} \quad (57.27)$$

Координаты (x, y) и (x', y') связаны между собой равенствами

$$x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha, \quad y' = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha.$$

Подставив эти значения x', y' в (57.26) и полученные значения $H'_x(x, y, z)$ и $H'_y(x, y, z)$ в (57.27) и затем $\alpha(z)$ из (57.27), получим

$$H_x = G(-x \cdot \sin 2kz + y \cdot \cos 2kz), \quad H_y = G(x \cdot \cos 2kz + y \cdot \sin 2kz).$$

Уравнения силовой линии

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_0},$$

где H_0 — поле соленоида, преобразуем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{H_x}{H_0} = \frac{G}{H_0} \cdot (-x \cdot \sin 2kz + y \cdot \cos 2kz), \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{H_y}{H_0} = \frac{G}{H_0} \cdot (x \cdot \cos 2kz + y \cdot \sin 2kz). \end{aligned}$$

Умножив второе уравнение на мнимую единицу и сложив с первым, получим

$$\frac{du}{dz} = ig \cdot u^* \cdot e^{i2kz}, \quad u = x + iy, \quad g = \frac{G}{H_0}. \quad (57.28)$$

Решение ищем в виде $u(z) = A(z) \cdot e^{i\chi(z)}$, где $A(z)$ и $\chi(z)$ — неизвестные комплексные функции координаты z . Подстановка в (57.28) дает

$$A' \cdot e^{i\chi} + i\chi' \cdot A \cdot e^{i\chi} = igA^* \cdot e^{i(-\chi+2kz)}, \quad (57.29)$$

где $()' \equiv d/dz$, $()^*$ — знак комплексного сопряжения. Из (57.29), приравняв показатели экспонент, находим

$$\chi = kz \quad (57.30)$$

и для амплитуды $A(z)$ приходим к уравнению

$$A' + ikA = igA^*. \quad (57.31)$$

Представим $A(z)$ в виде

$$A(z) = a(z) + ib(z). \quad (57.32)$$

Подстановка в (57.31) и разделение действительной и мнимой частей приводят к системе уравнений

$$a' - (k + g) \cdot b = 0, \quad b' + (k - g) \cdot a = 0. \quad (57.33)$$

Исключив $b(z)$, получаем уравнение для $a(z)$:

$$\frac{d^2 a}{dz^2} + (k^2 - g^2) \cdot a = 0.$$

Его решение имеет вид

$$a(z) = \begin{cases} C \cdot \cos \Omega z + D \cdot \sin \Omega z, & \Omega = \sqrt{k^2 - g^2}, \quad k > g, \\ c \cdot e^{\kappa z} + d \cdot e^{-\kappa z}, & \kappa = \sqrt{g^2 - k^2}, \quad k < g. \end{cases} \quad (57.34)$$

При этом, как следует из первого уравнения (57.33),

$$b(z) = \frac{1}{k + g} \cdot \frac{da}{dz}.$$

Напомним, что $a(z)$ и $b(z)$ — действительные функции по определению (57.32). Теперь можно записать решение

$$u(z) = x(z) + iy(z) = \left(a(z) + \frac{i}{k + g} \cdot \frac{da(z)}{dz} \right) \cdot (\cos kz + i \sin kz).$$

Для первого из двух возможных значений $a(z)$ в (57.34) после разделения действительной и мнимой частей и использования начальных условий

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

найдем

$$\begin{aligned}
 x_1(z) &= x_0 \left(\cos \Omega z \cdot \cos kz + \sqrt{\frac{k-g}{k+g}} \cdot \sin \Omega z \cdot \sin kz \right) + \\
 &+ y_0 \left(-\cos \Omega z \cdot \sin kz + \sqrt{\frac{k+g}{k-g}} \cdot \sin \Omega z \cdot \cos kz \right), \\
 y_1(z) &= x_0 \left(\cos \Omega z \cdot \sin kz - \sqrt{\frac{k-g}{k+g}} \cdot \sin \Omega z \cdot \cos kz \right) + \\
 &+ y_0 \left(\cos \Omega z \cdot \cos kz + \sqrt{\frac{k+g}{k-g}} \cdot \sin \Omega z \cdot \sin kz \right).
 \end{aligned} \tag{57.35}$$

Эти выражения и описывают силовую линию — пространственную кривую $x(z), y(z)$. Вид этой кривой становится понятен при $g \ll k$, когда

$$\begin{aligned}
 x_1(z) &\approx x_0 (\cos \omega z - \varepsilon (1 - \cos 2kz)) + y_0 (-\sin \omega z + \varepsilon \cdot \sin 2kz), \\
 y_1(z) &\approx x_0 (\sin \omega z + \varepsilon \cdot \sin 2kz) + y_0 (\cos \omega z + \varepsilon (1 - \cos 2kz)), \\
 \omega = k - \Omega &\approx \frac{g^2}{2k}, \quad \varepsilon = \frac{g}{2k} \ll 1.
 \end{aligned} \tag{57.36}$$

Как видим, в приближении $\alpha \ll 1$ решение распадается на две части: медленную, с частотой $\omega = \alpha^2 \pi \lambda$, и быструю, с частотой порядка $k \gg \omega$ (заметим, что «частоты» ω и k имеют в нашем случае размерность обратной длины). В результате точка силовой линии с начальными координатами (x_0, y_0) описывает в пространстве спираль с медленным периодом Λ , на которую накручивается быстрая спираль с периодом $\lambda = 2\pi/k$. Период и радиус медленной спирали (слагаемые частоты ω) равны

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{8\pi^2 B^2}{\lambda G^2}, \quad \mathcal{R} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Уравнение быстрой (малой) спирали дают слагаемые с частотой k :

$$\begin{aligned}
 \Delta x(z) &= -\varepsilon x_0 (1 - \cos 2kz) + \varepsilon y_0 \cdot \sin 2kz, \\
 \Delta y(z) &= \varepsilon x_0 \cdot \sin 2kz + \varepsilon y_0 (1 - \cos 2kz).
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$r(z) \equiv \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot 2 \sin kz \leq 2\varepsilon \sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

т. е. амплитуда быстрой спирали $r_{\max}(z) = 2\varepsilon \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ (рис. VII.9).

Второе значение $a(z)$ приводит к решению, которое проще получить из (57.35), если учесть, что при $k < g$ частота $\Omega = i\kappa$ и $\sin \Omega z = i \operatorname{sh} \kappa z$, $\cos \Omega z = \operatorname{ch} \kappa z$, $\sqrt{k-g} = i\sqrt{g-k}$. Находим

$$\begin{aligned} x_2(z) &= x_0 \left(\operatorname{ch} \kappa z \cdot \cos kz - \sqrt{\frac{g-k}{g+k}} \cdot \operatorname{sh} \kappa z \cdot \sin kz \right) + \\ &\quad + y_0 \left(-\operatorname{ch} \kappa z \cdot \sin kz + \sqrt{\frac{g+k}{g-k}} \cdot \operatorname{sh} \kappa z \cdot \cos kz \right), \\ y_2(z) &= x_0 \left(\operatorname{ch} \kappa z \cdot \sin kz + \sqrt{\frac{g-k}{g+k}} \cdot \operatorname{sh} \kappa z \cdot \cos kz \right) + \\ &\quad + y_0 \left(\operatorname{ch} \kappa z \cdot \cos kz + \sqrt{\frac{g+k}{g-k}} \cdot \operatorname{sh} \kappa z \cdot \sin kz \right). \end{aligned} \quad (57.37)$$

Эти силовые линии расходятся, не образуя магнитных поверхностей (рис. VII.9, пунктирные линии).

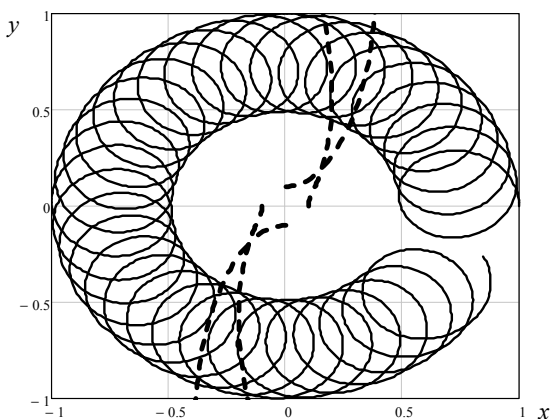


Рис. VII.9. Пример силовых линий суперпозиции магнитных полей прямого соленоида и спирального квадруполь: уравнения (57.35) для $\lambda = 2$ и $g = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ — сплошная кривая; уравнения (57.37) для $\lambda = 2$ и $g = 10$, $(x_0, y_0) = (0, 1; 0)$, $(-0, 1; 0)$, $(0; 0, 1)$, $(0; -0, 1)$ — пунктирные кривые

Существуют также электрические поля, в которых сохраняется момент частицы, — так называемое *центральное поле*,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot |\mathbf{E}(\mathbf{r})|,$$

силовые линии которого сходятся в точке, именуемой *центром поля*. Например, это поле точечного заряда (2.1). Уравнение для момента частицы относительно центра этого поля найдем, умножив векторно левую и правую части уравнения движения на радиус-вектор $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times e\mathbf{E} \equiv 0,$$

поскольку $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$. Кроме того, аналогично

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \gamma m \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{M} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const.}$$

Аналогичный закон сохранения имеет место для момента частицы в аксиально-симметричном электрическом поле (не имеющем азимутальной компоненты). Такое поле статическое. Например, это поле между обкладками цилиндрического конденсатора.

С помощью электромагнитного поля можно создавать и другие устройства, действующие аналогично оптическим зеркалам и призмам, т. е. отражающие или отклоняющие заряженные частицы. Аналогия между геометрической оптикой и механикой не связана только лишь с «похожестью» действия тех или иных устройств — в ее основе лежат более общие свойства движения электромагнитных волн и заряженных частиц (§ 88). В частности, поэтому многие представления, развитые в геометрической оптике, были перенесены на появившуюся значительно позднее оптику заряженных частиц.

§ 58. Закон сохранения фазового объема пучка заряженных частиц и методы его сжатия

В предыдущем параграфе мы видели, что с помощью электромагнитного поля можно производить различные преобразования пучков заряженных частиц — сжимать или расширять их, отклонять, изменять энергию частиц и т. д. При этом изменяются как координаты частиц, т. е. размер пучка, так и их скорости (импульсы), в частности угловая расходимость пучка. Оказывается, что все такие изменения не являются произвольными,

а подчиняются некоторым общим закономерностям, не зависящим от конкретного вида и величины электромагнитного поля. Эти закономерности проявляются при анализе движения частиц в шестимерном пространстве координат-импульсов (r, p) , которое называется фазовым пространством.

Можно записать уравнение непрерывности для плотности заряда в шестимерном пространстве и шестимерной плотности тока, аналогично тому, как это сделано в трехмерном (координатном) пространстве (§ 20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_6}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_6 &= 0, \\ \rho_6 &= \lim_{\Delta V_6 \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V_6}, \quad \mathbf{j}_6 = \rho_6 \mathbf{v}_6, \quad \mathbf{v}_6 = \{\mathbf{v}, \dot{\mathbf{p}}\}. \end{aligned} \quad (58.1)$$

Здесь индексом «6» обозначены шестимерные величины, без индекса — трехмерные, а векторы относятся к соответствующему пространству. Выясним, как зависит ρ_6 от времени. Для этого преобразуем полную производную:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_6}{dt} &= \frac{\partial \rho_6}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \rho_6}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \rho_6}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha = \\ &= \left\{ \frac{\partial \rho_6}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho_6 \dot{x}_\alpha) + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} (\rho_6 \dot{p}_\alpha) \right\} - \rho_6 \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} \right) = \\ &= -\rho_6 \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} \right). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что выражение в фигурных скобках есть левая часть уравнения непрерывности (58.1). Далее, компоненты трехмерной скорости $\dot{x}_\alpha$ однозначно связаны с компонентами импульса p_α ($p_\alpha = \gamma m \dot{x}_\alpha$), т. е. являются функциями только координат p_α , но не x_α . Поэтому $\partial \dot{x}_\alpha / \partial x_\alpha = 0$. Вторую часть оставшейся суммы можно записать в трехмерных величинах, используя уравнение движения частиц (56.1):

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} = \left(\nabla_p, e\mathbf{E} + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right).$$

Электрическое и магнитное поля — функции координат x_α , поэтому $\partial E_\alpha / \partial p_\alpha = \partial H_\alpha / \partial p_\beta \equiv 0$, и в рассматриваемом выражении остается только

смешанное произведение $(\nabla_p v, (\mathbf{e}_v \times \mathbf{H}))$, где $\mathbf{e}_v = \mathbf{v}/v$ — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{v}$. Наконец,

$$\nabla_p v = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \frac{\partial v}{\partial p_{\alpha}} = \frac{1}{\gamma^3 m} \cdot \frac{\mathbf{p}}{p} \equiv \frac{\mathbf{e}_v}{\gamma^3 m},$$

так что смешанное произведение содержит два одинаковых множителя $\mathbf{e}_v$ и, значит, равно нулю. Таким образом,

$$\frac{d\rho_6}{dt} = 0, \quad \rho_6 = \text{const}, \quad (58.2)$$

т. е. плотность заряда в шестимерном фазовом пространстве есть интеграл движения, не зависит от координат x_{α} , p_{α} и времени. В пучке конечных размеров число частиц постоянно:

$$N = \int \rho_6 d^3 x \cdot d^3 p = \text{const}. \quad (58.3)$$

Запишем это соотношение, используя теорему о среднем, через среднюю по шестимерному фазовому объему плотность $\langle \rho_6 \rangle$:

$$N = \langle \rho_6 \rangle \int d^3 x \cdot d^3 p = \text{const}.$$

Учитывая, что, согласно (58.2), $\langle \rho_6 \rangle = \text{const}$, получим закон сохранения фазового объема пучка частиц, или *теорему Лиувилля* (J. Liouville, 1838 г.):

$$\Gamma = \int d^3 x \cdot d^3 p = \text{const}. \quad (58.4)$$

Это означает, что в процессе движения пучка его фазовый объем может только деформироваться, но не может изменяться. Например, пучок частиц в свободном пространстве изменяет только свои геометрические размеры (в пренебрежении взаимодействием частиц), а импульсы частиц остаются постоянными. Проекция фазового объема на любую из координатных плоскостей изменяется при этом независимо, так что площадь каждой проекции остается постоянной. В этом случае принято различать два поперечных $((x, p_x)$ и $(y, p_y))$ и продольный (z, p_z) фазовые объемы. Задачи VII.13, VII.14 ниже дают примеры применения рассмотренного закона сохранения.

Задача VII.13. Описать деформацию фазового объема пучка при его фокусировке тонкой линзой. Найти положение и величину минимального размера (*кросс-вера*) пучка. Считать, что на расстоянии a от линзы поперечный фазовый объем пучка имеет вид прямоугольника (рис. VII.9), система аксиально-симметричная.

Поведение поперечного фазового объема пучка удобнее в данном случае описывать в переменных «координата – угол» (рис. VII.9):

$$r, r' \equiv \frac{dr}{dz} = \frac{p_x}{p_z},$$

где r' — угол между вектором импульса частицы и осью z . Тогда координата и угол частицы перед входом в линзу есть

$$r_a = r_0 + r'_0 a, \quad r'_a = r'_0,$$

где r_0, r'_0 — начальные параметры траектории. За линзой (см. (57.17))

$$r_L = r_a, \quad r'_L = r'_a - \frac{r_a}{f},$$

и, наконец, на расстоянии b от линзы

$$r_b = r_L + r'_L b = r_0 \left(1 - \frac{b}{f}\right) + r'_0 \left(a + b - \frac{ab}{f}\right). \quad (58.5)$$

Кроссовер пучка образуется в точке, где координаты частиц 1 и 2 (а также 3 и 4) одинаковы. Поскольку для частиц 1, 2 значения r_0 и r'_0 соответственно равны

$$r_{01} = r_{0\max}, \quad r'_{01} = r'_{0\max}, \quad r_{02} = -r_{0\max}, \quad r'_{02} = r'_{0\max}, \quad (58.6)$$

то из условия $r_{b1} = r_{b2}$ получим

$$b = f, \quad r_{b1} = r_{b2} = -r_{b3} = -r_{b4} = r'_{0\max} \cdot f.$$

Таким образом, кроссовер пучка образуется в фокальной плоскости, а размер кроссовера определяется угловым размером пучка и фокусным расстоянием линзы. Для образования кроссовера (фокусировки пучка) линза должна быть достаточно короткофокусной: нужно, чтобы $r'_{L1} < 0$, т. е. $f < a + r_0/r'_0$.

Отметим, что на расстоянии b^* от линзы, таком, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b^*} = \frac{1}{f}, \quad (58.7)$$

координаты частиц не зависят от направлений их траекторий в плоскости r'_0 . Это означает, что частицы, проходящие через одну и ту же точку плоскости Π , вновь соберутся в точку в плоскости b^* , где возникает изображение пучка.

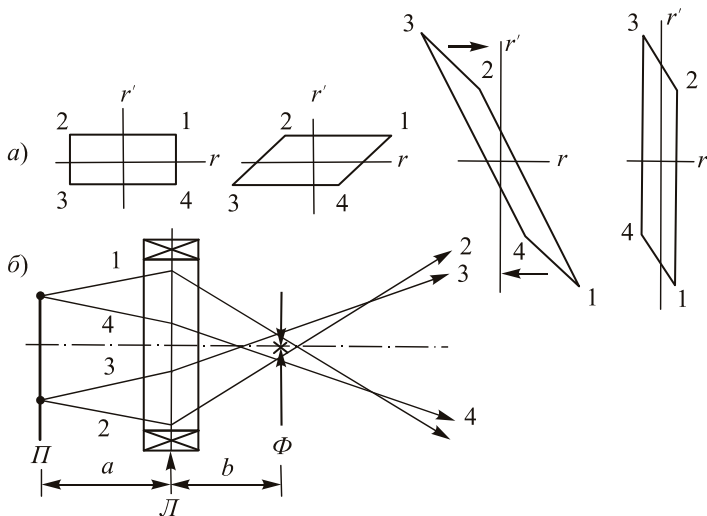


Рис. VII.9. Прохождение пучка через тонкую линзу: а) поперечный фазовый объем пучка в исходном состоянии, перед линзой, за ней и в плоскости кроссовера; б) траектории частиц; Π — исходный пучок («предмет»), L — линза, Φ — фокальная плоскость, $*$ — фокус; номерами помечены частицы и их траектории в фазовом и координатном пространствах

В физике пучков заряженных частиц часто вместо параметра «фазовый объем пучка» пользуются параметром *эмиттанс* (от лат. emitto — испускать). Эмиттанс пучка частиц определяется аналогично (58.4),

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{E}_3, \quad \mathcal{E}_i = \int dx_i \cdot dx'_i. \quad (58.8)$$

В примере, рассмотренном в задаче VII.13, $\mathcal{E}_r = r_0 \cdot r'_0 = \text{const}$. Нетрудно видеть, что поперечные эмиттансы пучка равны $\mathcal{E}_{x,y} = \Gamma_{x,y} / \langle p_z \rangle$, где $p_z \gg p_x, p_y$ — продольная и поперечная компоненты импульса частиц, $\langle \rangle$ — знак усреднения по частицам.

Задача VII.14. Описать изменение продольного фазового объема сгустка нерелятивистских заряженных частиц после пересечения ими короткого участка ускоряющего поля. Считать начальный разброс частиц по скоростям и изменение энергии частиц при ускорении малыми.

Примем, что продольный фазовый объем сгустка на входе в поле ($z = 0$) представляет собой прямоугольник $l_0 \times 2\Delta v_0$ (рис. VII.10). После ускорения скорость частицы примет значение $v_{\text{вых}} = \sqrt{v_{\text{нач}}^2 + \mathcal{E}v_0^2}$, $\mathcal{E} = 2eU/mv_0^2$, где v_0 — средняя скорость частиц на входе. К моменту, когда наиболее медленная частица задней границы сгустка (точ-

ка 3, см. рис. VII.10) пройдет ускоряющий участок, частица $(z_{\text{нач}}, v_{\text{нач}})$ уйдет от участка на расстояние

$$z_{\text{вых}} = \sqrt{v_{\text{нач}}^2 + \varepsilon v_0^2} \left(\frac{l_0}{v_0 - \Delta v_0} - \frac{z_{\text{нач}}}{v_{\text{нач}}} \right), \quad (58.8)$$

и фазовый объем сгустка на выходе примет вид, показанный на рис. VII.10, б. При $\Delta v_0/v_0 \leq 0,2$ все границы объема практически прямолинейны, и его величина на выходе

$$\Gamma_{\text{вых}} = m \left(v_{\text{вых}}^{(1)} - v_{\text{вых}}^{(2)} \right) \frac{z_{\text{вых}}^{(1)} - z_{\text{вых}}^{(2)} - z_{\text{вых}}^{(3)} + z_{\text{вых}}^{(4)}}{2}.$$

Подставляя сюда значения $v_{\text{вых}}^{(i)}$ и $z_{\text{вых}}^{(i)}$, получим после соответствующих вычислений

$$\Gamma_{\text{вых}} = \Gamma_{\text{вх}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta v_0}{v_0} \right)^4 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\Delta v_0}{v_0} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right\},$$

т. е., с точностью до членов четвертого порядка малости по $\Delta v_0/v_0$ (что превышает принятую точность аппроксимации границ прямыми), фазовый объем сгустка сохраняется.

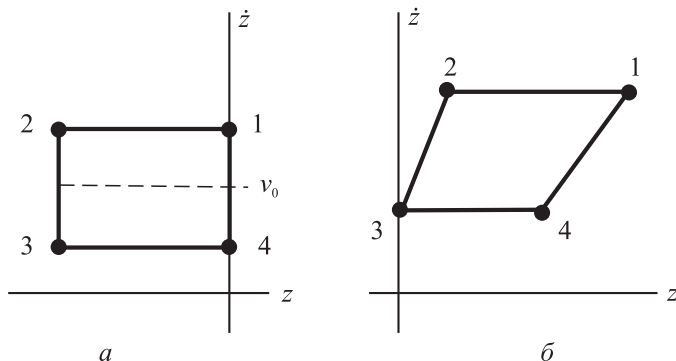


Рис. VII.10. Деформация продольного фазового объема сгустка частиц при прохождении ускоряющей разности потенциалов: а) фазовый объем сгустка на входе в поле; б) на выходе; точками отмечены границы сгустка

При выводе (58.2) использовано уравнение движения частиц в полях **Е**, **Н**. В этом случае и выполняется теорема Лиувилля. Иначе обстоит дело, если на частицу действует сила, у которой проекция на направление скорости частицы зависит от этой скорости (задача VII.15). Отметим, что для силы Лоренца в (56.1) эта проекция равна нулю (!).

Задача VII.15. Найти закон изменения полного импульса и энергии частицы с зарядом e и массой m в полях $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и силы $\mathbf{F}(\mathbf{v})$, зависящей от скорости частицы. Рассмотреть частный случай $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -k\mathbf{v}$.

Добавив предварительно в правую часть уравнения движения (56.1) силу $\mathbf{F}(\mathbf{v})$, умножим скалярно обе части уравнения на вектор $\mathbf{v}$. Учтем при этом, что

$$(\mathbf{p}, (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = \gamma m(\mathbf{v}, (\mathbf{v} \times \mathbf{H})) \equiv 0, \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2},$$

и внесем в левой части импульс под дифференциал. Получим

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dp^2}{dt} = \gamma m(\mathbf{v}, (e\mathbf{E} + \mathbf{F})).$$

Подставляя сюда значение $p^2 = (e/c)^2 + (mc)^2$ (56.3) и затем $\varepsilon = \gamma mc^2$, приходим к уравнению для энергии

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\mathbf{v}, (e\mathbf{E} + \mathbf{F})). \quad (58.9)$$

Отсюда, с учетом равенства $d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot dt$, находим

$$\varepsilon(t) = -e\phi(r) + \int_{r(0)}^{r(t)} (F, dr) + C, \quad \phi(r) = -e \int (E, dr),$$

где $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор положения частицы в момент t , $\phi(\mathbf{r})$ — потенциал поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, C — постоянная интегрирования. Таким образом, мы получили, что полная энергия (сумма кинетической и потенциальной)

$$\varepsilon_{total}(t) \equiv \varepsilon(t) + e\phi(r(t)) = C + \int_{r(0)}^{r(t)} (F, dr). \quad (58.10)$$

При $\mathbf{F} = 0$ это равенство принимает вид закона сохранения энергии:

$$\varepsilon_{total}(t) = \varepsilon(t) + e\phi(r(t)) = \varepsilon(0) + e\phi(r(0)) = \text{const}, \quad (58.11)$$

и мы еще раз убедились, что магнитное поле не меняет энергии частицы, а лишь влияет на направление ее скорости. Полный импульс частицы изменяется с ее энергией в соответствии с равенством (56.3).

Если сила $\mathbf{F}$ зависит от скорости, то полная энергия ε_{total} изменяется со временем. Действительно, дифференцируя (58.10) по времени (т. е. делая шаг назад), находим

$$\frac{d\varepsilon_{total}}{dt} = (\mathbf{F}, \mathbf{v}). \quad (58.12)$$

В частном случае $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{v}$ переходим к уравнению

$$\frac{d\varepsilon_{total}}{dt} = -\kappa v^2,$$

которое в пространстве, свободном от электрического поля ($\varphi = 0$), без труда интегрируется. Подставив сюда $\varepsilon = \gamma mc^2$, $v = \beta c$, получаем

$$-\frac{\kappa t}{m} = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{x^2 dx}{x^2 - 1} = \gamma - \gamma_0 + \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1} \right), \quad \gamma_0 = \gamma(0).$$

В двух крайних случаях это выражение упрощается

$$\begin{aligned} \text{а) } v \ll c, \quad \gamma \approx 1 - v^2/2c^2, \quad \varepsilon_{кин}(t) = mv^2/2 = \varepsilon_{кин}(0) \cdot e^{-t/\tau}, \quad \tau = m/2\kappa, \\ \text{б) } v \sim c, \quad \gamma, \gamma_0 \gg 1, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \kappa^2 t. \end{aligned} \quad (58.13)$$

Уменьшение, или диссипация^{*)}, энергии и, соответственно, полного импульса каждой (!) из частиц пучка приводит к уменьшению фазового объема (эмиттанса) пучка. При этом существенно, что такое изменение зависит от скорости частицы, т. е. воздействие силы $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ носит «индивидуальный» характер, что и отличает эту силу от сил электромагнитного поля. Последние не изменяют фазового объема пучка, а только его деформируют. Иными словами, сила $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ является *силой трения*. Уменьшение фазового объема означает уменьшение разброса частиц пучка по импульсам $p_x, p_\perp$ (скоростям). Поэтому принято такой процесс называть *охлаждением* пучка частиц по аналогии с газом, охлаждение которого есть уменьшение скоростей молекул газа.

В физике известно пять методов охлаждения пучков (ансамблей) частиц в ускорителях и ловушках. Один из них подарен природой — это *радиационное охлаждение*, вызванное *синхротронным излучением* частиц в магнитном поле ускорителя (§ 134 и задачи XXII.7, XXII.8 там же). К сожалению, этот метод практически применим лишь к легким частицам — электронам и позитронам, а также к протонам при энергиях в несколько ТэВ и выше. Это станет ясно при чтении § 134. Остальные четыре метода — «рукотворные». Первым был предложен и осуществлен *метод электронного охлаждения* (Г. И. Будкер, 1966 г., см. ниже). Следом появился *метод стохастического охлаждения* (С. Ван-дер Меер, 1972 г., § 80). Еще раньше несколько авторов высказали идею *ионизационного охлаждения*, однако вскоре выяснилось, что этот метод практически не при-

^{*)} Dissipatio (лат.) — рассеяние, в данном случае имеется в виду «сброс» частицей части ее энергии.

меним для охлаждения протонов или электронов (см. ниже). Последним был предложен и осуществлен *метод лазерного охлаждения* (§ 145) атомов и ионов в ловушках (Д. Вайленд, Х. Демельт, Т. Хэнш и А. Шавлов, 1975 г.) и ионов в ускорителях-накопителях (С. Шрёдер, Дж. Хангст, 1991 г.).

Метод электронного охлаждения был предложен Г. И. Будкером на основе прозрачной физической модели температурной релаксации двухкомпонентной плазмы. Такая плазма образуется в ускорителе-накопителе, если на одном из участков его фокусирующей магнитной системы, в которой по замкнутой орбите циркулирует пучок заряженных частиц (q, m), ввести пучок электронов, средняя скорость которых совпадает по величине и направлению (!) со средней скоростью V частиц. Пройдя вместе некоторый участок орбиты частиц (участок охлаждения), пучки разводятся, и электроны поступают в приемник (коллектор). На участке охлаждения смесь частиц и электронов представляет собой плазму, движущуюся со скоростью V . В этой движущейся системе (система частиц) электроны и частицы сталкиваются, обмениваясь энергией. Обе компоненты этой плазмы — частицы и электроны — имеют разную температуру. Кроме того, каждая из этих температур может иметь разное значение для трех степеней свободы:

$$T_{\alpha i} = m_{\alpha} \langle v_{\alpha i}^2 \rangle, \quad \alpha = p, e, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $v_{\alpha i}$ — i -компонента скорости частицы α в системе частиц, индексы p — частица (particle), e — электрон. В результате столкновений температуры выравниваются аналогично тому, как это происходит в смеси двух газов. При этом электронная компонента непрерывно обновляется после прохождения участка охлаждения, тем самым температура охлаждающих электронов поддерживается постоянной.

Из равенства температур $T_{pi} = T_{ei}$ (равновесное состояние плазмы) следует соотношение между скоростями частиц и электронов в *равновесном (equilibrium) состоянии*,

$$\langle v_{pi} \rangle_{\text{equi}} = \sqrt{\frac{m_e}{m}} \cdot \langle v_{ei} \rangle \ll \langle v_{ei} \rangle, \quad m \gg m_e.$$

Например, для протонов $m/m_e = 1836$, что даёт $\langle v_{pi} \rangle \approx 0,02 \cdot \langle v_{ei} \rangle$. Для типичных значений $T_e \sim 0,2$ эВ* скорость $\langle v_{ei} \rangle \approx 10^{-3} \cdot c$, и угловой разброс пучка протонов с кинетической энергией 100 МэВ ($V \approx 0,5c$) уменьшается до величины

$$\Delta\theta_{\text{equi}} = \frac{\langle p_{\perp} \rangle_{\text{equi}}}{\gamma m V} = \frac{\langle v_{pi} \rangle_{\text{equi}}}{V} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

*) Отметим, что температура частиц здесь и далее измеряется в единицах энергии (Приложение III). В этом случае постоянная Больцмана $k_B = 1$.

В то же время типичное начальное значение $\Delta\theta(0) \sim 1$ мрад. Этому результату соответствует сжатие поперечного фазового объема (четвертая степень углового разброса) в $4 \cdot 10^5$ раз.

В системе частиц их скорости много меньше скорости света c , а сила трения зависит от скорости частиц и электронов по довольно сложному закону. При $v_{pi} \ll v_{ei}$ сила трения пропорциональна v_p , и охлаждение пучка происходит по закону (58.13, а). Время охлаждения обратно пропорционально плотности электронов.

Уже первые эксперименты в Институте ядерной физики (Г. И. Будкер, Н. С. Диканский, И. Н. Мешков, В. В. Пархомчук, А. Н. Скринский и др., 1974–1978 гг.), г. Новосибирск, показали, что охлаждение протонов пучком электронов, ускоренных электростатическим полем в продольном магнитном поле $\mathbf{B} \parallel \mathbf{V}$, гораздо эффективнее, чем предсказывает простая плазменная модель. Это связано с резкой анизотропией распределения электронов по скоростям в таком пучке ($\langle v_{e\parallel} \rangle \ll \langle v_{e\perp} \rangle$) и особенностью поведения «замагнитченных» электронов в столкновениях с частицами. Выяснилось, что в результате время охлаждения от десятков секунд для «горячего» пучка ионов ($v_p > v_{e\perp}$) уменьшается до долей секунды для умеренно холодного пучка ($v_p < v_{e\perp}$). Такой режим получил название «быстрое охлаждение».

Электронное охлаждение с начала 1980-х гг. успешно используется во многих ускорителях-накопителях протонов, антипротонов и ионов.

Метод ионизационного охлаждения впервые обсуждался Дж. О'Нилом (G. K. O'Neill) еще в 1956 г. Затем последовали работы А. Шохы (A. Schoch, 1961 г.), А. А. Коломенского (1965 г.) и других. В этом методе в качестве «тормозящей» среды предлагается использовать атомарные электроны твердотельной мишени, пересекаемой охлаждаемыми частицами (рис. VII.11). При этом частицы теряют свою скорость, и ее продольная составляющая восстанавливается ускоряющей системой (ВЧ-резонатор, § 76). В результате угол вектора скорости (импульса) частицы с осью пучка уменьшается. Интерес представляет охлаждение частиц высоких энергий, для которых закон охлаждения описывается соотношением (58.13, б). Нетрудно видеть, что это близкий к электронному охлаждению вариант, только теперь электроны «привязаны» к ядрам атомов и «покоятся» в лабораторной системе. Если в электронном охлаждении средняя скорость охлаждаемых частиц $\mathbf{V}$ поддерживается постоянной автоматически, то здесь для этого приходится вводить ускоряющую систему.

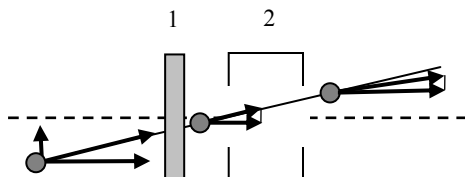


Рис. VII.11. Схема ионизационного охлаждения; 1 — мишень, 2 — ускоряющая ВЧ-система

Как уже сказано выше, ионизационное охлаждение имеет одно принципиальное ограничение. Попытка охлаждать сильно взаимодействующие частицы (протоны, антипротоны) приводит к их быстрой гибели в ядерных реакциях на ядрах атомов мишени. Для пучков позитронов и электронов ионизационное охлаждение неприменимо из-за большого рассеяния на ядрах мишени. Единственным практически полезным вариантом применения ионизационного охлаждения является подготовка с его помощью «холодного» пучка мюонов в схеме мюон-мюонного коллайдера. Мюоны («тяжелые электроны») не подвержены сильному взаимодействию с ядрами мишени и гораздо слабее электронов рассеиваются в электрическом поле ядер. Этот вариант, получивший название *мюонного охлаждения*, предложен Г. И. Будкером и А. Н. Скринским (1970 г.).

Проект мюонного коллайдера активно разрабатывается международной коллаборацией лабораторий из Великобритании, США, Болгарии, Голландии, Италии и Японии при участии ЦЕРН — так называемый Muon Ionization Cooling Experiment (MICE).

ГЛАВА VIII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Данная глава является введением в большой раздел этой книги (15 глав из 24), посвященный описанию природы важнейшего физического явления — электромагнитного излучения, методам его генерации и регистрации.

Принято классифицировать электромагнитные волны по их длине и частоте. Такая классификация и позволяет ввести понятие *шкалы электромагнитных волн* (табл. VIII.1).

Таблица VIII.1. Шкала электромагнитных волн

Диапазон	Длина волны	Частота	Энергия кванта излучения
Радиоволны	100–10 км	3–30 кГц	$1,24 \cdot (10^{-13} - 10^{-10})$ эВ
Сверхдлинные волны (СДВ)	10–1 км	30–300 кГц	$1,24 \cdot (10^{-10} - 10^{-9})$ эВ
Длинные волны (ДВ)	1 км–100 м	0,3–3 МГц	$1,24 \cdot (10^{-9} - 10^{-8})$ эВ
Короткие волны (КВ)	100–10 м	3–30 МГц	$1,24 \cdot (10^{-8} - 10^{-7})$ эВ
Ультракороткие волны (УКВ) ^{*)}	10 м–1 мм	30 МГц–300 ГГц	$1,24 \cdot (10^{-7} - 10^{-3})$ эВ
Инфракрасное (ИК) излучение	1 мм–0,76 мкм	300 ГГц–0,39 ПГц	1,24 мэВ–1,63 эВ
Оптическое излучение (видимый свет)	0,76 мкм–0,4 мкм	0,39 ПГц–0,75 ПГц	1,63 эВ–3,1 эВ

^{*)} В УКВ диапазоне принято различать поддиапазоны, которые имеют названия по длинам волн излучения: метровые, дециметровые, сантиметровые и миллиметровые. Три последние поддиапазона часто называют еще сверхвысокочастотным (СВЧ) излучением, в англоязычной литературе — microwave radiation.

Диапазон	Длина волны	Частота	Энергия кванта излучения
Ультрафиолетовое (УФ) излучение (Вакуумное УФ излучение)	400–10 нм (200–10 нм)	0,75–30 ПГц (1,5–30 ПГц)	3,1 эВ–124 эВ (6,2–124 эВ)
Рентгеновское и гамма-излучение	10 нм– 10^{-24} см	30 ПГц– $3 \cdot 10^{34}$ Гц	124– 10^{20} эВ

Приведем простые формулы для расчета энергии кванта излучения ($\mathfrak{E}$) для заданной длины волны (λ):

$$\mathfrak{E} = \frac{hc}{\lambda}, \quad \text{или} \quad \mathfrak{E}_{[\text{эВ}]} = \frac{1,2398 \cdot 10^{-6}}{\lambda_{[\text{м}]}} = \frac{1239,8}{\lambda_{[\text{нм}]}} = \frac{12398}{\lambda_{[\text{Анг}]}} \quad (\text{VIII.1})$$

h — постоянная Планка, c — скорость света.

§ 59. Радиоволны

Радиоволны были открыты и детально изучены экспериментально немецким физиком Герцем (H. R. Hertz, 1888 г.). Толчком к его открытию послужила теория Максвелла, предсказывающая существование и свойства электромагнитных волн, а также электромагнитную природу света. Подчеркнем, что опыты Герца были не просто проверкой одной из теорий, они доказали реальность электромагнитного поля и послужили фундаментом современных представлений об электромагнитных явлениях, а также открыли дорогу их практическим применениям, которые сегодня так изменили условия нашего существования.

Интересно отметить, что сам Герц не только не думал о практическом применении своего открытия, но и отрицал возможность использования радиоволн для связи на расстоянии. Эти возможности ясно понимал другой физик того времени — англичанин Крукс (W. Crookes), изложивший в 1892 г. главные, по его мнению, особенности метода радиосвязи, сохранившиеся и до сих пор (в частности, основу современной радиосвязи — избирательность по частоте). Крукс четко сформулировал также основные

технические проблемы, которые предстояло решить для практического осуществления радиосвязи. Начало этому важнейшему применению электромагнитных явлений было положено изобретениями А. С. Попова (1895 г.) и Маркони (G. G. Marconi, 1896 г.). Бурное развитие радиотехники началось после 1901 г., когда Маркони осуществил первую межконтинентальную радиосвязь Европа–Америка. Основное применение радиоволн остается неизменным. Однако в связи с бурным развитием радиотехники существенно расширились возможности радиосвязи. Появились телевидение и радиолокация, большие успехи достигнуты в области дальней (космической) радиосвязи на расстояния более миллиарда километров. Интенсивно развивается одна из областей космофизики — радиоастрономия. Долгое время наблюдение за небесными телами производилось лишь в оптическом диапазоне, пока в 30-е гг. прошлого столетия не обнаружилось, что многие «активные» небесные тела — звезды, туманности, квазары, пульсары и пр. — излучают электромагнитные волны в широком диапазоне. Кроме того, оказалось, что существуют «невидимые» источники радиоизлучения, так что картина неба в радиодиапазоне существенно отличается от привычной. Первую радиокарту неба сняли в 1940 г., и эти наблюдения активно развивались с тех пор и стали одним из основных методов изучения Вселенной в наше время (§§ 129–131).

Основной метод генерации радиоволн — возбуждение собственных колебаний в LC -контуре или в резонаторе с последующим их усилением и излучением в пространство через специальное устройство — антенну. Характерной особенностью такого метода является генерация волны, близкой к монохроматической. В конечном счете это связано с использованием явления резонанса как в генераторах, так и в приемниках радиоволн. Методы регистрации принципиально те же: в антенне наводятся электромагнитные колебания, которые затем усиливаются (резонансно) и обрабатываются радиоприемником.

Для передачи информации по радио применяется модуляция «несущей» радиоволны. Чаще всего это *амплитудная модуляция*, на которой работает большинство радиостанций, а также *частотная модуляция*. Модулированная волна, конечно, уже не монохроматична, однако, как мы увидим дальше (§ 79), занимаемую ей полосу частот можно сделать относительно малой ($\Delta\omega \ll \omega$). Благодаря этому возможна одновременная независимая работа многих радиостанций, что лежит в основе современной радиосвязи. Соответственно, важнейшее свойство радиоприемника — его избирательность, т. е. способность регистрировать радиоволны только в узкой полосе частот.

Подчеркнем, что радиосвязь с помощью почти монохроматических волн, конечно, не является единственно возможной. Просто такой метод оказался технически наиболее эффективным благодаря применению резонанса. Отметим, что в настоящее время все большее распространение получают устройства, применяющие совсем немонахроматические волны. Их получают, например, с помощью особой так называемой *фазоимпульсной* (или *широотно-импульсной*) модуляции (рис. VIII.1). Радиостанция излучает пакеты одинаковых прямоугольных видеоимпульсов, которые смещаются относительно некоторых фиксированных (реперных) моментов времени на интервалы Δt , пропорциональные мгновенному значению передаваемого сигнала. В приемнике после обычного детектирования воспроизводится последовательность импульсов, из которой в специальном фазовом детекторе выделяется полезный (передаваемый) сигнал. Селективность этой системы связана с определенным законом расположения реперных точек. Основным ее преимуществом является высокая помехоустойчивость, так как связь осуществляется в широкой полосе частот.

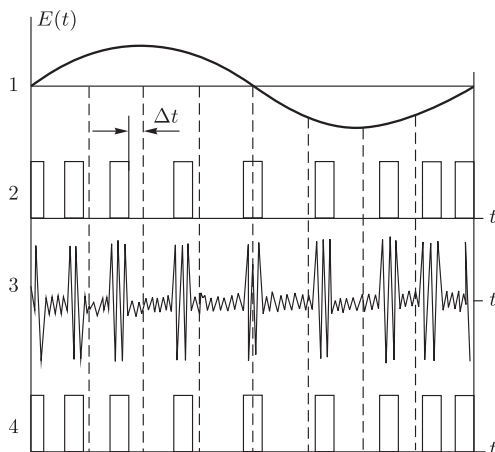


Рис. VIII.1. Фазоимпульсная (широотно-импульсная) модуляция: 1 — передаваемый сигнал; 2 — модулирующие импульсы; 3 — сигналы на выходе радиостанции (на входе приемника); 4 — импульсы в приемнике после ограничения и детектирования

Другим интересным примером может служить так называемая шумовая радиолокация, в которой используется непрерывный шумовой сигнал с широким спектром.

Опыты с радиоволнами наглядно демонстрируют их оптические свойства: отражение, преломление, поляризацию, интерференцию и дифракцию. Именно такие опыты и были проделаны в свое время Герцем и позволили ему, в частности, установить электромагнитную природу света.

§ 60. Оптический диапазон. Источники света

Оптика ^{*)}, как и механика, занимает умы людей на протяжении всего времени существования человеческой цивилизации. Основные законы геометрической оптики — прямолинейность световых лучей, законы отражения и преломления — были известны еще во времена Эвклида (Εὐκλείδης, 300 лет до н. э.), но только в наше время, благодаря трудам Максвелла, Герца и Эйнштейна, удалось построить единую картину электромагнитных волн, включив в нее и видимый *свет* ^{**)}. Последний представляет собой самый важный для человека диапазон электромагнитных волн, в котором мы получаем наиболее существенную информацию об окружающем нас мире.

В оптике выделяют три поддиапазона: ИК, видимый свет и УФ (табл. VIII.1).

Методы генерации в оптическом диапазоне связаны с возбуждением квантовых осцилляторов — электронов в атомах, молекулах или кристаллах.

Все источники оптического излучения можно разбить на два больших класса.

1. Некогерентные (тепловые) источники; важнейшим из них является наше Солнце, плотность потока излучения которого на поверхности Земли составляет 1,369(14) кВт/м².
2. Когерентные источники, или генераторы, оптического излучения, которые называются обычно лазерами или ОКГ (оптическими квантовыми генераторами, глава XXIV).

Тепловым источником видимого света можно считать любое тело, нагретое выше примерно 500°C (электроплитка), при условии, что оно непрозрачно для собственного излучения (так называемое *излучение черного тела*). В этом случае говорят о тепловом равновесии тела с собственным излучением, т. е. температура тела равна температуре излучения. *Спектр равновесного теплового излучения подчиняется закону Вина* (W. Wien, 1896 г.):

$$\frac{dw}{d\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot e^{-hc/\lambda kT}, \quad (60.1)$$

^{*)} От греч. *optikē* — наука о зрительных восприятиях.

^{**) Photo — свет (греч.).}

где w — плотность энергии излучения, h — постоянная Планка, c — скорость света, λ — длина волны излучения, k — постоянная Больцмана, T — температура тела. Этот спектр непрерывный и, как нетрудно получить из (60.1), имеет максимум при

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{5kT}, \quad \text{или} \quad \lambda_{\max} \cdot T = \frac{hc}{5k} = 2877,685 \text{ мкм} \cdot \text{К}. \quad (60.2)$$

Так, при $T = 5800 \text{ К}$ (Солнце, рис. VIII.2) $\lambda_{\max} = 0,496 \text{ мкм}$. Равенство (60.2) называют *законом смещения Вина* (1893 г.): с ростом температуры излучающего тела максимум спектра смещается, как T^{-1} , в сторону все более коротких длин волн. При $T \approx 10^6 \text{ К}$ (температура огненного шара после взрыва атомной бомбы) $\lambda_{\max} \approx 30 \text{ \AA}$, т. е. максимум излучения находится уже в области мягкого рентгена. В рассмотренном случае интенсивность излучения зависит только от температуры и пропорциональна четвертой степени последней — *закон Стефана–Больцмана* (J. Stephan, 1879 г. — эксперимент, L. Boltzmann, 1884 г. — теория). При $T = 6000 \text{ К}$ мощность излучения составляет $7,35 \text{ кВт}$ с квадратного сантиметра излучающей поверхности, а при $T = 10^6 \text{ К}$ эта мощность (яркость огненного шара) возрастает почти в миллиард раз. Примерно такую же яркость, а значит, и температуру имеют в течение нескольких дней так называемые сверхновые звезды, возникающие вследствие взрыва обычной звезды.

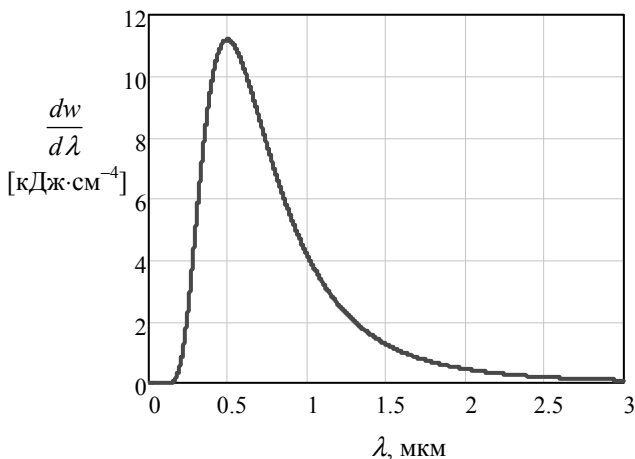


Рис. VIII.2. Спектр черного тела при температуре 5800 К (Солнце)

Другой крайний случай, известный в природе, — так называемое *реликтовое излучение*, оставшееся от Большого Взрыва и путешествующее по Вселенной. Его спектр соответствует температуре излучающего тела 2,725 К, чему соответствует максимум спектра с длиной волны примерно 1 мм (частота 300 ГГц), т. е. это излучение относится к СВЧ поддиапазону (§ 59).

Еще один пример некогерентного источника — газовый разряд (неоновая реклама, электрическая дуга и пр.). Здесь, как правило, нет равновесия с излучением (газ разрежен), так что спектр может быть самый разнообразный, в том числе и линейчатый. Интенсивность излучения газового разряда зависит не только от температуры плазмы, образующейся при разряде, но и от других условий разряда и может быть значительно выше, чем у тепловых источников. Основной особенностью световых источников газоразрядного типа является низкая температура основной массы газа. При этом возбуждение атомов происходит за счет небольшой доли ускоренных в газовом разряде электронов, температура которых много выше температуры плазмы. Отсюда название источников — лампы «холодного» света.

К этому же классу некогерентных источников относятся и люминесцентные источники, преобразующие один вид светового излучения в другой. Обычно люминесцентные источники (лампы) возбуждаются электрическим разрядом внутри колбы, стенки которой покрыты специальным веществом — люминофором, имеющим нужный спектр излучения (обычно — сплошной). Люминесцентные лампы используются как в видимом свете, так и в УФ-лучах. Преимущество люминесцентных источников света — их высокий КПД, достигающий 60 лм/Вт, или 30% (видимая часть спектра). Для сравнения укажем, что КПД ламп накаливания составляет всего около 15 лм/Вт, или 7,5%, из-за относительно низкой температуры нити — около 2500 К. Максимум излучения лежит при этом в инфракрасной области ($\lambda_{\max} \approx 12000 \text{ \AA}$), так что лампы накаливания являются в основном источниками теплового излучения. Недостаток люминесцентных ламп при питании их переменным током — эффект мерцания (с частотой 100 Гц). Этот эффект можно заметить даже визуально при быстром движении глаза. Он оказывает вредное влияние на сетчатку глаза. На рубеже XX-го и XXI-го столетий появились более совершенные лампы, лишенные этого недостатка и обладающие высоким КПД.

Активно развиваются источники света на ином принципе — полупроводниковые *светодиоды*. При пропускании электрического тока через *p-n* переход полупроводника носители заряда — электроны и дырки — рекомбинируют друг с другом с испусканием квантов излучения, энергия которых при соот-

ветствующем выборе структуры полупроводника лежит в оптическом диапазоне ($\sim 2,5$ эВ). Эти источники также отличаются высоким КПД и длительным сроком службы.

§ 61. Глаз

Самым важным, самым древним и до сих пор одним из самых совершенных приборов, регистрирующих свет, является человеческий глаз. Предельная чувствительность глаза по измерениям Вавилова [15] соответствует поглощению в сетчатке всего лишь около 10 квантов света! Правда, для этого в зрачок глаза должно попасть около 100 квантов, что указывает, по-видимому, на некоторую «недоработанность» этого прибора. Замечательная особенность глаза — его способность работать в огромном диапазоне интенсивности: от 10^{-16} до 10^{-4} Вт. Для сравнения укажем, что интенсивность прямого солнечного света, попадающего в зрачок диаметром 2 мм, составляет около $4 \cdot 10^{-3}$ Вт. Такой огромный диапазон интенсивности перекрывается частично благодаря специальной адаптации глаза, т. е. перестройке режима его работы, включающей, в частности, изменение диаметра зрачка (быстрая адаптация), а также сложные биохимические процессы в сетчатке (медленная адаптация).

Однако адаптация сама по себе едва ли обеспечивала бы такой диапазон чувствительности, если бы не фундаментальная особенность работы всех органов чувств, выражающаяся в биофизическом законе Вебера–Фехнера (Е. Н. Weber, 1834 г., G. T. Fechner, 1860 г.): ощущение пропорционально логарифму интенсивности внешнего воздействия. Точнее, наблюдения показали, что минимально различимое изменение интенсивности воздействия (ΔI) пропорционально самой интенсивности (I):

$$\Delta S \approx A \frac{\Delta I}{I}, \quad (61.1)$$

где ΔS — минимально различимое изменение ощущения. По измерениям Фехнера (1860 г.) для глаза человека $\Delta I/I \approx 10^{-2}$. Соотношение (61.1) можно представить в упомянутой выше интегральной форме:

$$S = A \ln \frac{I}{I_{\min}}, \quad (61.2)$$

где $I_{\min}$ — пороговая интенсивность воздействия. По-видимому, природа «выбрала» такой принцип работы всех органов чувств как раз для обеспече-

ния максимального диапазона. Закон Вебера–Фехнера нашел свое отражение в специальной единице интенсивности звука — *децибеле*^{*)} (Приложение III):

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad (61.3)$$

где I_0 — некоторая единичная интенсивность звука ($I \propto p^2$), соответствующая давлению $p_0 \approx 2 \cdot 10^{-10}$ бар, а L — относительная интенсивность в децибелах. Сейчас эта единица широко используется для измерения относительной интенсивности самых различных величин.

Механизм регистрации света глазом связан со специфическими фотохимическими реакциями в сетчатке. Светочувствительные элементы сетчатки состоят из 130 млн палочек и 7 млн колбочек. Палочки являются наиболее чувствительными элементами и позволяют видеть «серую» картину предметов при освещенности до 10^{-6} лк (люкс), что соответствует приблизительно приведенной выше пороговой чувствительности глаза. Это так называемое сумеречное зрение. Одной из замечательных особенностей глаза является его способность к цветовому зрению, которая реализуется с помощью колбочек. Однако чувствительность колбочки примерно в 1000 раз ниже, чем палочки, так что для цветового зрения нужна значительно большая интенсивность, чем для сумеречного. Колбочки обеспечивают также наилучшее пространственное разрешение изображения в глазе, так как в центральной ямке глазного дна (область наилучшего зрения с угловым размером $1-1,5^\circ$) расположены исключительно колбочки с плотностью, достигающей 150 тыс./мм². Это обеспечивает нормальную остроту зрения около одной угловой минуты, или около 0,1 мм на расстоянии нормального зрения 25 см.

Установлено, что существуют три типа колбочек, максимумы спектральной чувствительности которых лежат соответственно в синей, зеленой и красной частях спектра (рис. VIII.3). Реакция каждого из трех видов колбочек на свет определяется функцией спектральной чувствительности $S_\alpha(\lambda)$ и может быть представлена интегралом

$$r_\alpha = \int_0^\infty I(\lambda) S_\alpha(\lambda) d\lambda, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (61.4)$$

^{*)} Единица *бел* названа в честь изобретателя телефона А. Белла (А. G. Bell, 1876 г.).

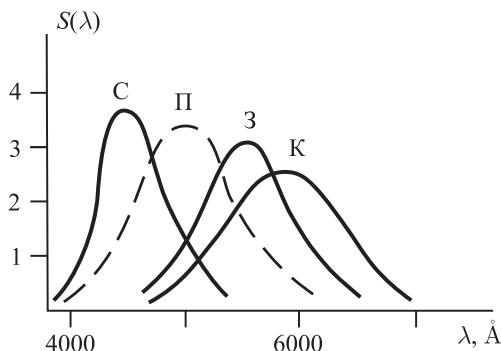


Рис. VIII.3. Относительная спектральная чувствительность элементов сетчатки глаза: П — палочки, С, З, К — синие, зеленые, красные колбочки

Анализируя относительные реакции колбочек ($r_1 : r_2 : r_3$), нервная система имеет возможность выявить некоторые спектральные характеристики света. Разумеется, эта операция неоднозначна, так как по трем величинам нельзя восстановить неизвестную функцию $I(\lambda)$. Это, тем не менее, не мешает различать, с довольно высокой степенью точности, монохроматические составляющие света, которые дают разное отношение реакций r_α . Спектральное разрешение глаза составляет около $15 \text{ \AA}$ в интервале $4400\text{--}6400 \text{ \AA}$. Однако для света с более широким спектральным составом возникают неоднозначности. Характерный пример такой неоднозначности — дополнительные цвета. Известно, что существуют пары цветов, которые, будучи смешанными в определенных пропорциях, дают ощущение белого цвета; это оранжевый ($6000 \text{ \AA}$) и синий ($4900 \text{ \AA}$), зелено-желтый ($5636 \text{ \AA}$) и фиолетовый ($4330 \text{ \AA}$) и др. Поскольку в белом свете $I(\lambda) \approx \text{const}$, а для линии $I_n(\lambda) = I_n \delta(\lambda - \lambda_n)$, то уравнения для дополнительных цветов можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 I_0 \int_0^\infty S_1(\lambda) d\lambda &= I_1 S_1(\lambda_1) + I_2 S_1(\lambda_2), \\
 I_0 \int_0^\infty S_2(\lambda) d\lambda &= I_1 S_2(\lambda_1) + I_2 S_2(\lambda_2), \\
 I_0 \int_0^\infty S_3(\lambda) d\lambda &= I_1 S_3(\lambda_1) + I_2 S_3(\lambda_2),
 \end{aligned} \tag{61.5}$$

где I_0, I_1, I_2 — интенсивности белого и дополнительных цветов соответственно. Естественно, что цветовое ощущение зависит лишь от отношения

интенсивностей смешиваемых цветов (61.5). Задав λ_1 , можно найти, вообще говоря, из (61.5) значения λ_2 , I_1/I_2 и I_0/I_2 , дающие ощущение белого цвета некоторой интенсивности I_0 . Оказывается, что дополнительные цвета связаны приближенно простым соотношением

$$(\lambda_1 - 5655)(4978 - \lambda_2) = 22302, \quad (61.6)$$

где λ_1 , λ_2 — длины волн в ангстремах.

Интересно, что для цвета с длиной волны в интервале $4980 \text{ \AA} < \lambda_1 < 5660 \text{ \AA}$ не существует дополнительного цвета с определенной длиной волны. Однако такой дополнительный цвет можно получить смешением красного и синего цветов, что дает так называемый пурпурный цвет. Аналогичным образом можно имитировать и любое другое цветовое ощущение, например чистый цвет. При имитации двумя цветами один из них не является произвольным, как это видно на примере имитации белого цвета. Чтобы осуществить имитацию любого цветового ощущения с помощью заранее заданных цветов, нужно по крайней мере три таких цвета. На этом и основаны, в частности, системы цветовой фотографии и цветового телевидения, а также искусственная окраска. В качестве «базисных» цветов обычно берут синий, зеленый и красный. Поскольку три величины r_α (61.4) характеризуют также интенсивность света, то собственно цветовое ощущение зависит от двух параметров. Его можно характеризовать цветовым тоном и насыщенностью цвета. Цветовой тон определяется, грубо говоря, длиной волны, а насыщенность зависит от примеси белого цвета. Максимальная насыщенность соответствует чистой спектральной линии, минимальная — белому цвету.

Во избежание недоразумений отметим, что линейные соотношения типа (61.5), определяющие законы смешения цветов, не противоречат логарифмическому закону Вебера–Фехнера (61.2) для восприимчивости глаза. Первые характеризуют физико-химическое действие света на каждый из трех рецепторов глаза, тогда как закон (61.2) связан с физиологическим процессом обработки информации мозгом.

Существование определенных пар дополнительных цветов является наиболее прямым доказательством «трехцветности» зрения. Действительно, для двух типов рецепторов два уравнения (61.5) имеют, вообще говоря, решения при любых λ_1 , λ_2 . Это значит, что при подходящем соотношении интенсивностей I_1/I_2 два любых цвета были бы дополнительными. Именно так обстоит дело при *дальтонизме* — болезни зрения, при которой два типа рецепторов слипаются и зрение становится «двухцветным» (J. Dalton, 1794 г.). С другой стороны, при большем числе рецепторов потребовалось бы большее число дополнительных цветов для достижения ощущения бело-

го цвета при их смешении. Это связано с тем, что число уравнений системы (61.5) равно числу различных типов рецепторов.

Интересен вопрос, почему природа не ограничилась «двухцветным» зрением для человека, что было бы в принципе достаточно. Конечно, на этот вопрос никогда нельзя будет ответить определенно, так как мы никогда не узнаем, что «имела в виду» природа, создавая человека. Однако можно высказать предположение, что трехцветность необходима для получения высокого спектрального разрешения глаза, важного для анализа окружающей обстановки. Средний глаз различает около 2000 спектральных оттенков. Это число складывается примерно из 200 цветовых оттенков, что приблизительно соответствует спектральному разрешению глаза, и около 10 ступеней цветовой насыщенности для каждого из них. При двухцветном зрении с приемниками того же качества это число сокращается по крайней мере на порядок. Это и есть дальтонизм — дефект зрения, иногда совершенно недопустимый (например, для водителя машины). С другой стороны, из трех цветовых рецепторов один служит фактически для калибровки интенсивности. Казалось бы, что такую информацию мозг мог бы извлекать и из палочек. Однако в основной области цветового восприятия их нет. Почему?

§ 62. Измерение цвета, или колориметрия

Цветовые измерения (колориметрия — не путать с калориметрией, тепловыми измерениями) необходимы в технике искусственной цветопередачи, например для цветной фотографии (кино) или цветного телевидения. Идея измерения цвета, высказанная еще Максвеллом, основана на имитации цветовых ощущений смесью трех специально выбранных цветов в различных пропорциях. В качестве эталонных сейчас приняты три спектрально чистых цвета: красный — 7000 Å, зеленый — 5461 Å, синий — 4358 Å. Эти цвета можно смешивать в различных пропорциях в специальном приборе — колориметре. Сравнивая цветовые ощущения от такой смеси и заданного цвета, некоторый «стандартный наблюдатель» определяет необходимые пропорции основных цветов. Так как цветовое ощущение полностью определяется набором реакций чувствительных элементов глаза r_α (61.4), то условие совпадения ощущений от измеряемого цвета и смеси основных цветов можно записать аналогично (61.5) в виде

$$r_i = \int_0^\infty I(\lambda) S_i(\lambda) d\lambda = S_i(\lambda_k) q_k. \quad (62.1)$$

Здесь q_k — интенсивности эталонных (смешиваемых) цветов, $I(\lambda)$ — спектральное распределение интенсивности измеряемого цвета, $S_i(\lambda_k)$ — чувствительность i -го рецептора глаза к свету длины волны λ_k . Таким образом, три числа — q_1, q_2, q_3 — можно рассматривать как количественную характеристику цвета. В геометрической интерпретации цвет можно наглядно представлять себе как некоторый «вектор» с «координатами» q_k в некотором трехмерном «пространстве». Базисными векторами этого пространства являются три основных цвета: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Чтобы исключить интенсивность, которая непосредственно не связана с цветом, обычно вводят нормированные координаты цвета:

$$Q_k = \frac{q_k}{q_1 + q_2 + q_3}, \quad Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1. \quad (62.2)$$

Отметим, что суммарная интенсивность смешиваемых цветов не равна, вообще говоря, интенсивности измеряемого цвета, $\left(\int_0^\infty I(\lambda) d\lambda \neq q_1 + q_2 + q_3 \right)$, так как чувствительность глаза зависит от длины волны. Например, изображение, рассматриваемое через желтый светофильтр, кажется более ярким, хотя он и поглощает часть света.

Естественно, что разные наблюдатели будут получать несколько различные значения координат для одного и того же цвета вследствие различий в кривых чувствительности рецепторов $S_i(\lambda)$. Особенно это касается области около 7000 Å (красный эталонный цвет), где чувствительность даже красного рецептора глаза очень мала. Поэтому в 1931 г. Международный осветительный комитет (МОК) определил «нормального наблюдателя» — в качестве характеристик его цветового зрения приняты средние значения цветовых координат спектрально чистых линий, полученные несколькими независимыми наблюдателями с «нормальным зрением». После этого измерение цвета можно производить без участия наблюдателя, например с помощью фотоумножителя с тремя светофильтрами. Таким образом, исключаются субъективные ошибки при измерении цвета.

В качестве базисных можно использовать и другие цвета. В некоторых случаях это даже необходимо. Например, в цветной фотографии спектральные кривые чувствительности трех слоев фотоэмульсии должны обязательно перекрываться, чтобы охватить весь световой диапазон. Именно так обстоит дело для глаза (рис. VIII.3). Пусть три базисных цвета характеризуются некоторыми спектральными кривыми $J_i(\lambda)$. Тогда любой цвет эквивалентен некоторой смеси $J_i(\lambda)$:

$$J(\lambda) \leftrightarrow p_i J_i(\lambda). \quad (62.3)$$

Знак $\leftrightarrow$ означает здесь цветовую эквивалентность (эквиколоритность), или тождественность ощущений. Если имеются два цветовых базиса, $J_i(\lambda)$ и $\Phi_i(\lambda)$, то координата

ты любого цвета по этим базисам (p_i , φ_i) связаны условиями равенства реакций рецепторов глаза^{*)}

$$r_i = \int S_i(\lambda) p_k J_k(\lambda) d\lambda = \int S_i(\lambda) \varphi_k \Phi_k(\lambda) d\lambda, \quad (62.4)$$

которые можно сокращенно записать в виде

$$r_i = C_{ik} p_k = D_{ik} \varphi_k. \quad (62.5)$$

Здесь и далее подразумевается, что по совпадающим индексам производится суммирование. Матрицы C_{ik} , D_{ik} характеризуют реакции глаза на базисные цвета, например:

$$D_{ik} = \int S_i(\lambda) \Phi_k(\lambda) d\lambda. \quad (62.6)$$

Естественно, выбрать базисные цвета $\Phi_k(\lambda)$ нужно таким образом, чтобы матрица D_{ik} оказалась диагональной:

$$D_{ik} = R \delta_{ik}, \quad (62.7)$$

где R — некоторая постоянная, имеющая размерность реакции рецептора. Физический смысл такого вида матрицы D_{ik} состоит в том, что каждый из базисных цветов действует только на один рецептор,

$$X_i = r_i / R. \quad (62.8)$$

Такой базис получил название физиологического. Он был бы очень удобен в колориметрии, если бы кривые спектральной чувствительности рецепторов глаза $S_i(\lambda)$ были известны с хорошей точностью. Однако последние получаются до сих пор лишь с помощью косвенных данных, например путем сравнения цветовых ощущений людей с нормальным зрением и дальтоников. Поэтому для практических целей в колориметрии принят совершенно другой базис: $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, $Z(\lambda)$. Основные цвета его выбраны таким образом, чтобы максимально упростить цветовые расчеты. Координаты любого цвета в этом базисе нормированы обычным условием:

$$X + Y + Z = 1. \quad (62.9)$$

Так как цветовая эквивалентность определяется тремя независимыми равенствами, то цветовые координаты содержат три произвольных постоянных. Последние выбираются так, чтобы координаты «белого цвета» $I(\lambda) = \text{const}$ были равны: $X_\omega = Y_\omega = Z_\omega = 1/3$. В силу нормировки только две цветовых координаты являются независимыми, и любой цвет можно представить точкой на так называемой диаграмме цветности (рис. VIII.4). Здесь X — координата, характеризующая, грубо говоря, «красную» составляющую света, а Y — «зеленую» составляющую. Третья координата $Z = 1 - X - Y$, не используемая в диаграмме цветности, соответствует «си-

^{*)} Здесь и ниже знак суммы опущен и предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

ней» составляющей. Сплошная кривая на диаграмме представляет монохроматические цвета. Крестиками отмечены три эталонных цвета. Штриховая прямая изображает пурпурные цвета — смесь фиолетового и красного цветов, соответствующих двум границам оптического диапазона. Вообще, из линейности цветовых соотношений (62.5) и условия нормировки (62.2) вытекает, что смесь двух любых цветов изображается точкой на прямой, соединяющей эти цвета, причем эта точка лежит между смешиваемыми цветами. Отсюда следует, в частности, что все цвета соответствуют на диаграмме точкам внутри линии монохроматических и пурпурных цветов, которую мы будем называть поэтому граничной кривой. Насыщенность цвета растет с удалением от белого и достигает максимума на граничной кривой.

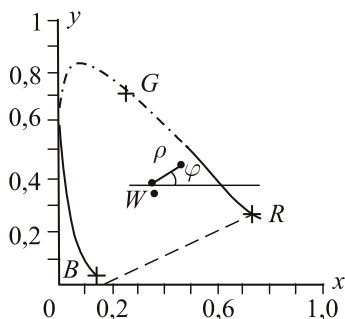


Рис. VIII.4. Диаграмма цветности. Сплошная линия — область дополнительных цветов; штрихпунктирная — область, для которой нет дополнительных цветов; штриховая — область пурпурных цветов. Эталонные цвета: R (red) — $7000 \text{ \AA}$, G (green) — $5461 \text{ \AA}$, B (blue) — $4358 \text{ \AA}$. Точка (ρ, φ) внутри граничной кривой соответствует смеси чистого и белого цветов; белый цвет: $x = y = 1/3$ (точка W)

Как видно из диаграммы, цвета основного базиса $X(1, 0, 0)$; $Y(0, 1, 0)$; $Z(0, 0, 1)$ расположены снаружи от граничной кривой и, следовательно, являются фиктивными, т. е. их нельзя реально получить. Это, однако, не мешает использовать их в цветовых расчетах. Пусть, например, мы измеряем некоторый цвет $J(\lambda)$ колориметром, базисные цвета которого характеризуются стандартными координатами (в основном базисе $X_k(X, Y, Z)$):

$$J_i(\lambda) \leftrightarrow q_{ik} X_k(\lambda). \quad (62.10)$$

Иными словами, цветовой базис колориметра задается матрицей q_{ik} . Тогда, если координаты измеряемого цвета в колориметре равны p_i ,

$$J(\lambda) \leftrightarrow p_i J_i(\lambda). \quad (62.11)$$

Стандартные координаты X_i (X, Y, Z) можно найти из соотношения

$$J(\lambda) \leftrightarrow p_i J_i(\lambda) \leftrightarrow p_i q_{ik} X_k(\lambda), \quad (62.12)$$

откуда

$$x_k = p_i q_{ik}, \quad (62.13)$$

т. е. стандартные координаты цвета выражаются непосредственно через матрицу q_{ik} (62.10). Заметим, что в силу нормировки стандартных координат $\sum_k q_{ik} = 1$. Отсюда

и из (62.13) находим $\sum_k x_k = \sum_i p_i \sum_k q_{ik} = \sum_i p_i = 1$, т. е. координаты нормированы.

Если в качестве базисных цветов взять три эталонных цвета, то матрица имеет вид

$$q_{ik} = \begin{pmatrix} 0,735 & 0,265 & 0 \\ 0,274 & 0,717 & 0,009 \\ 0,167 & 0,008 & 0,825 \end{pmatrix}. \quad (62.14)$$

Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть нам известны стандартные координаты некоторого цвета (x_i), и пусть мы хотим имитировать его с помощью каких-то трех основных цветов $J_k(\lambda)$. Как найти координаты такого цвета в базисе J_k ? Для этого нужно, очевидно, разрешить систему трех уравнений (62.13) относительно p_k . Получим

$$p_k = x_i q_{ik}^{-1}, \quad (62.15)$$

где q_{ik}^{-1} — матрица, обратная q_{ik} , т. е. $q_{ik} q_{kl}^{-1} = \delta_{il}$. Обратная матрица существует, если детерминант

$$|q_{ik}| \neq 0. \quad (62.16)$$

Только тогда данные три цвета $J_k(\lambda)$ могут быть использованы в качестве базиса. Физический смысл этого условия состоит в том, что ни один из этих цветов не может быть представлен в виде смеси двух других. Иными словами, базисные цвета должны быть независимыми. Интересно отметить, что три любых монохроматических цвета являются независимыми и могут, следовательно, применяться в качестве базиса, что непосредственно следует из выпуклости граничной кривой на диаграмме цветности (рис. VIII.4).

В качестве примера решения обратной задачи найдем представление основного базиса $X_k(\lambda)$ через эталонные цвета. Обращая соотношение (62.10), получим

$$X_i(\lambda) \leftrightarrow q_{ik}^{-1} J_k(\lambda). \quad (62.17)$$

Матрица, обратная (62.14), имеет вид

$$q_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,577 & -0,583 & 0,006 \\ -0,599 & 1,617 & -0,018 \\ -0,313 & 0,102 & 1,211 \end{pmatrix}. \quad (62.18)$$

Заметим, что некоторые элементы этой матрицы отрицательны, что соответствует отрицательной интенсивности в сумме (62.17). Поэтому нельзя непосредственно создать цвета X_i , однако можно использовать их в измерениях косвенным образом, причем не только формально математически. Действительно, например, соотношение

$$X_1 \leftrightarrow 1,577J_1 - 0,583J_2 + 0,006J_3$$

эквивалентно другому соотношению

$$x_1 + 0,583J_2 \leftrightarrow 1,577J_1 + 0,006J_3,$$

которое осуществимо.

Цветное телевидение является хорошей иллюстрацией основных особенностей цветового зрения, которые оно грубо имитирует. Пусть R , G , B — интенсивности красной, зеленой и синей компонент элемента изображения. В принципе можно было бы передавать отдельно все три сигнала, однако технически проще передавать два других сигнала — яркостный и цветовой. Первый из них передает суммарную яркость элемента изображения, связанную с интенсивностями цветовых компонент соотношением

$$V = 0,3R + 0,6G + 0,1B. \quad (62.19)$$

Значения коэффициентов определяются здесь главным образом спектральными характеристиками передающей и приемной аппаратуры. Цветовой сигнал $U(t)$ формируется согласно соотношениям

$$\begin{aligned} U &= \rho \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ \rho^2 &= (R - V)^2 + (B - V)^2, \\ \operatorname{tg} \varphi &= (R - V)/(B - V), \end{aligned} \quad (62.20)$$

где ω_0 — несущая частота цветового сигнала. Основная характеристика цветового изображения — так называемый цветовой тон — зависит от фазы сигнала φ и задается некоторым отношением интенсивностей компонент изображения. Амплитуда сигнала ρ дает насыщенность цвета, которая определяется примесью белого цвета. При этом насыщенность тем больше, чем больше ρ . Если $\rho = 0$, то интенсивности всех трех компонент одинаковы ($R = G = B = V$), что соответствует белому (серому) цвету. Серый цвет может изменяться от белого до черного в зависимости от относительной яркости соседних элементов изображения. Таким образом, при отсутствии цветового сигнала ($\rho = 0$) мы имеем черно-белое изображение.

Такая система цветопередачи в телевидении очень близка к механизму восприятия цвета глазом. Действительно, если на диаграмме цветности (рис. VIII.4) ввести новые полярные координаты с центром в точке W (белый цвет), то цветной тон будет определяться азимутальным углом φ , а насыщенность — радиусом ρ .

§ 63. Искусственные приемники света

Наиболее чувствительными из искусственных приемников света являются электронно-оптические устройства — *фотоэлектронный умножитель* (ФЭУ) и *электронно-оптический преобразователь* (ЭОП), применяемые во всем оптическом диапазоне. В них используется усиление первоначального светового сигнала потоком электронов.

ФЭУ был изобретен в начале 1930-х гг. советским физиком Л. А. Кубецким и сохранил свою принципиальную схему до сих пор. Этот прибор позволяет преобразовать световой сигнал в электрический, пропорциональный потоку фотонов. Попадая через прозрачное окошко на светочувствительный слой (фотокатод), фотоны выбивают из него электроны, которые ускоряются в электрическом поле ФЭУ и «размножаются» при соударениях с электродами (динодами). В качестве материала фотокатодов используют соединения Cs_3Sb (сурьмяно-цезиевый фотокатод), GaAs (арсенид-галиевый) и другие, имеющие высокий коэффициент выхода электронов и различающиеся его зависимостью от длины волны излучения (*спектральная чувствительность*). Материал динодов имеет коэффициент вторичной эмиссии, $\sigma > 1$ (рис. VIII.5). Обычно диноды делают из сплавов медь-бериллий, медь-алюминий-магний и др., для них $\sigma \sim 3\text{--}10$. Коэффициент усиления ФЭУ достигает 10^8 , что позволяет регистрировать отдельные фотоны. Действительно, если выходная емкость $C \sim 100$ пФ (рис. VIII.5), один фотоэлектрон создает на выходе сигнал в $10^8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} / 10^{-10} \approx 0,16$ В, что вполне надежно измеряется. Однако здесь имеется ограничение, связанное со ста-

стистическим характером фотоэффекта: в среднем на 10 фотонов, попавших на фотокатод, выходит 1 фотозлектрон.

В простейшем варианте двухэлектродный ФЭУ (без размножающих динодов) представляет собой другой электровакуумный прибор — *фотоэлемент*.

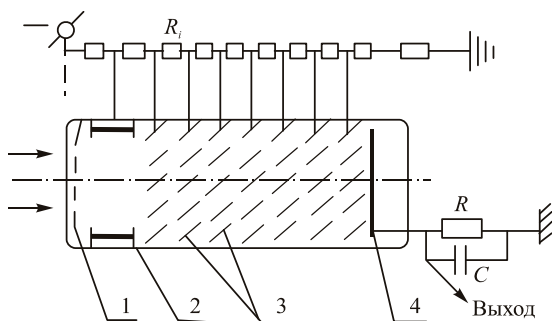


Рис. VIII.5. Схема фотоэлектронного умножителя (ФЭУ): 1 — фотокатод; 2 — фокусирующий электрод; 3 — диноды; 4 — анод, R_i — сопротивления делителя напряжения, R , C — выходные сопротивление и емкость

Электронно-оптический преобразователь (ЭОП) — прибор, который применяется для получения изображения слабосветящихся объектов, излучающих в невидимой части оптического диапазона. К ЭОПам относятся и приборы ночного видения, регистрирующие инфракрасное излучение объекта, — «тепловизоры». Простейший однокамерный ЭОП показан на рис. VIII.6. Принцип его действия понятен из подписи к рисунку. Усиление яркости (в несколько десятков раз) происходит благодаря энергии, которую фотозлектронны набирают в электрическом поле ЭОПа. Многокамерные ЭОПы, представляющие собой последовательно соединенные однокамерные, дают усиление до 10^8 раз, так что можно наблюдать вспышку от одного фотозлектрона. ЭОПы, применяющиеся для скоростной фотографии, имеют отклоняющие пластины, позволяющие перемещать изображение по экрану. Эти же пластины могут играть роль затвора. В ФЭУ и ЭОПах второго поколения в качестве размножающего устройства используются *микроканальные пластины* (МКП). Такая пластина, чаще всего диск из специального стекла толщиной до 1 мм и диаметром от одного до нескольких сантиметров, имеет сотовую структуру — каналы диаметром 5–50 микрометров, параллельные оси диска. На торцы диска наносятся проводящие (металлические) покрытия, к которым прикладывается напряжение порядка 1 кВ. Внутренние

стенки каналов в результате отжига пластинки (в вакууме) приобретают электропроводность благодаря восстановлению свинца из окисла PbO , содержащегося в стекле. Таким способом достигается высокое сопротивление пластинки — более 10 МОм. Напряжение, приложенное к торцу пластины, создает в канале электрическое поле напряженностью более 10 кВ/см. Электрон, выбитый квантом света из фотокатода, попадает в один из каналов и выбивает из его стенки σ вторичных электронов, где $\sigma > 1$ — коэффициент вторичной эмиссии. Эти электроны ускоряются в электрическом поле и в соударениях со стенкой снова размножаются, формируя электронную лавину. Типичный коэффициент усиления МКП $k = 10^4 - 10^6$. В пластинах с искривленными каналами и так называемых шевронных сборках (стопка пластин с наклонными каналами) достигаются $k \sim 10^8$. Чередование угла наклона от пластины к пластине позволяет избежать развития сквозной лавины (пробой).

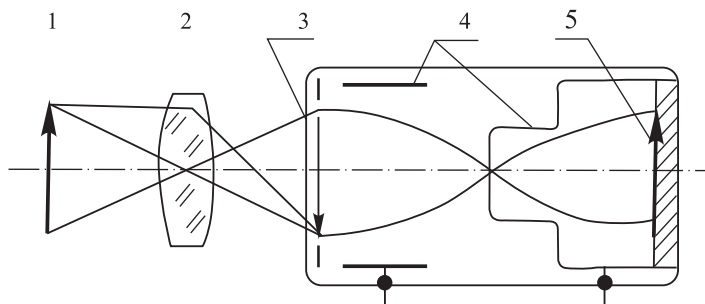


Рис. VIII.6. Схема однокамерного электронно-оптического преобразователя (ЭОП): 1 — предмет; 2 — объектив, создающий изображение на фото-катоде 3; 4 — электроды, фокусирующие поток электронов; 5 — изображение, создаваемое электронами на люминесцентном экране

Из сказанного ясно, что МКП-усилители света являются позиционно-чувствительными: поместив за пластиной люминесцентный экран (светящийся под действием электронов), можно передать изображение предмета, сфокусированное на фотокатод, усилив яркость изображения в k раз. Так устроены ЭОПы на основе МКП. Их пространственное разрешение определяют размеры канала пластины.

Следует подчеркнуть высокое быстродействие электронно-оптических приемников света: временное разрешение лучше 10^{-9} с.

Наиболее простым регистратором света является болометр — термочувствительный элемент, регистрирующий интегральную (по спектру) интенсив-

ность светового потока по тепловому эффекту. Как правило, это проводящий слой толщиной 0,1–1 мкм с зависящим от температуры сопротивлением.

Упомянем еще полупроводниковые фотоэлементы — фотодиоды и фотосопротивления, характеристики которых зависят от освещения.

Одним из первых и наиболее распространенных ранее методов регистрации световой информации было фотографирование с использованием фотоэмульсий.

Первые фотографии на стекле появились в первой половине XIX столетия (L. Daguer, 1839 г.) и назывались, по имени автора, *даггеротипами* (dagger + typos — отпечаток, греч.). Два года спустя Талбот придумал способ изготовления негативов и печатания позитивов (W. Talbot, 1841 г.). До наших дней дошли такие черно-белые фотографии на картонной подложке и с высоким разрешением. Полвека спустя Липпман придумал цветную фотографию (G. Lippman, 1891 г.). Об этом подробнее см. в § 110.

Механизм образования изображения связан с определенными химическими превращениями в фотоэмульсии (точнее, в кристаллах AgBr) под действием света. Простейшие фотоэмульсии, содержащие чистый AgBr, совершенно нечувствительны к красному свету. Это, по-видимому, наиболее наглядное проявление квантовых свойств света: энергия «красного» кванта слишком мала, чтобы вызвать химическое превращение, и это не может быть скомпенсировано простым увеличением интенсивности света. Современные фотоматериалы, чувствительные ко всему видимому спектру, содержат специальные сенсibilизаторы (от англ. sensibility — чувствительность), трансформирующие световую энергию из одного диапазона в другой, наподобие флюоресценции.

Упомянем, что фотоэмульсия чувствительна не только к свету, но и к заряженным частицам. С этим связано одно из наиболее замечательных достижений современной экспериментальной физики — фотографирование следов «элементарных» частиц и наблюдение за их превращениями (рис. VIII.7).

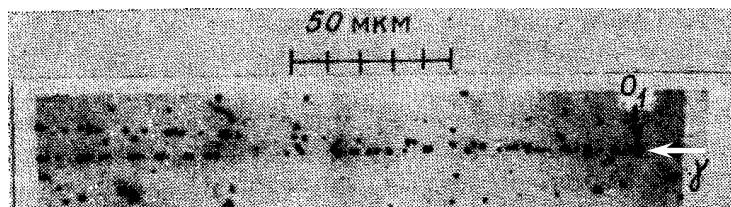


Рис. VIII.7. Фотография треков электрон-позитронной пары, образованной в фотоэмульсии жестким γ -квантом. O_1 — точка рождения пары (первое различимое зерно изображения); направление γ -кванта показано стрелкой. Эмульсия Ильфорт «G5»

Начиная с конца 1960-х гг. началось интенсивное развитие принципиально иного метода регистрации света, основанного на упомянутой выше чувствительности полупроводников к свету, так называемых приборов с зарядовой связью (ПЗС)^{*)}. В 1969 г. американские физики Бойл (W. Boyle) и Смит (J. Smith) продемонстрировали первый такой прибор.

Принцип действия прибора проще всего объяснить на примере одномерной структуры — ПЗС-линейки (рис. VIII.8).

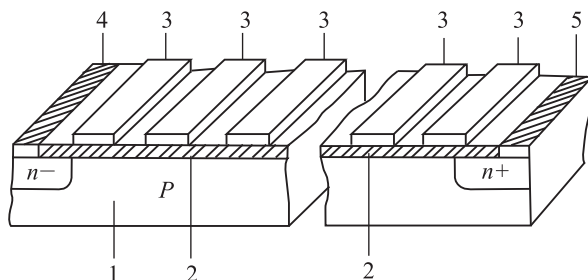


Рис. VIII.8. Структура ПЗС-линейки: 1 — кристалл кремния; 2 — диэлектрик; 3 — металлические электроды; 4, 5 — входной и выходной контакты

На пластине монокристаллического кремния 1 нагревом создается тонкий, около 0,1 мкм, изолирующий слой диэлектрика 2 — диоксида кремния (SiO_2). Затем на этот слой наносятся алюминиевые полоски — электроды 3, длина которых несколько микрон, а расстояние между ними несколько десятых мкм. На пластине площадью 1 см^2 умещается от нескольких сот до нескольких тысяч электродов в линейной структуре и до миллиона в матричной. Электроды соединяются с электронной схемой управления/считывания. В простейшем варианте трехфазного ПЗС (рис. VIII.9) электроды объединены в этой схеме по 3, образуя светочувствительные элементы — «пиксели» (от англ. pixel — элемент изображения, сленг). Каждый из трех электродов включен в свою цепь (рис. VIII.9).

Цикл работы прибора состоит из трех этапов (фаз).

I — «засветка», накопление и хранение видеосигнала. В это время на электродах 1, 4, 7 и т. д. (рис. VIII.9, I) создается потенциал хранения $U_1 \sim +10$ В, смещающий основные носители (дырки в случае кремния p -типа) вглубь проводника. В результате в кремнии образуются положительно заряженные слои толщиной 0,5–2 мкм с пониженной плотностью дырок. Это потенциальные ямы $-eU_1$ для электронов. Свет, падающий на ПЗС, создает в кремнии электрон-дырочные пары, от

^{*)} Английский термин — charge coupled device (CCD).

которых электроны скатываются в потенциальные ямы, собираясь в тонком ($\sim 0,01$ мкм) поверхностном слое под электродами 1, 4, 7. Такие локализованные (!) скопления электронов несут заряд, пропорциональный уровню освещенности каждой «ямы», и, таким образом, содержат информацию о световом потоке. Конечно, величина заряда пропорциональна также времени экспозиции. В этой фазе потенциалы остальных электродов положительны и $U_2 \approx U_3 < U_1$.

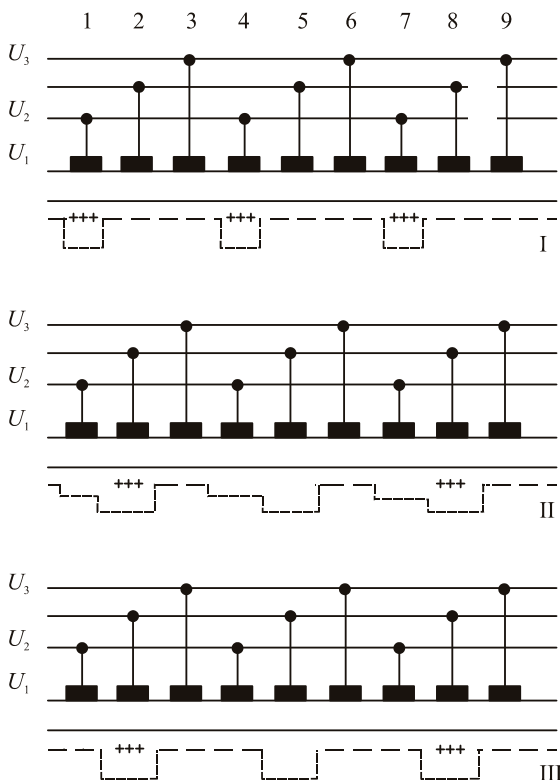


Рис. VIII.9. Схема работы трехфазного ПЗС: $U_{1,2,3}$ — потенциалы электродов, пунктир — распределение потенциала внутри кремния под электродами, точками условно показаны скопления электронов, несущих информацию о световом потоке

II — перенос заряда. На электродах 2, 5, 8 и т. д. создаются положительные потенциалы считывания $U_2 > U_1 > U_3$, что создает более глубокие потенциальные ямы под электродами $-eU_2$, куда и «стекают» электроны из ям хранения. Потенциалы $U_3 < U_1$, что и определяет направление сдвига электронов (вправо на рис. VIII.9, II).

III — завершение цикла. Напряжение на электродах 1, 4, 7 сбрасывается до U_3 , а на электродах 2, 5, 8 снижается до уровня $(U_2)_{III} = (U_1)_I$. В результате ямы фазы I сдвинулись на один период линейки (в случае рис. VIII.9 — вправо).

Описанный цикл повторяется многократно, в результате чего на крайний электрод поступает последовательность прямоугольных импульсов, амплитуды которых пропорциональны освещенности прибора под электродами 1, 4, 7, ... в фазе I. Тактовая частота импульсов напряжения $U_{1, 2, 3}$ — до 100 МГц. Аналогично работают и ПЗС матричной (двумерной) структуры.

Типичное линейное разрешение ПЗС-матриц 0,1–0,02 мм. Уже в начале нынешнего столетия устройства регистрации фотоизображений на основе ПЗС уверенно потеснили своих предшественников, созданных в прошлом веке, — фото- и видеокамеры предыдущих поколений.

§ 64. Рентгеновское (гамма) излучение

Открытие излучения в этом диапазоне связано с именем немецкого физика Рентгена (W. K. Röntgen, 1895 г.). Отсюда и название «рентгеновские лучи».

Как часто бывает в экспериментальной науке, свое открытие Рентген сделал почти случайно. Изучая электрический разряд в газе, он однажды, закончив эксперимент и собираясь уходить, накрыл стеклянную разрядную трубку, как обычно, куском плотной материи (немецкая аккуратность!) и выключил свет, забыв выключить генератор высокого напряжения. К своему удивлению он увидел, что люминесцентный экран, установленный рядом с трубкой (Рентген изучал «катодные лучи», оказавшиеся позднее электронами), продолжает светиться. Надо отдать должное Рентгену-экспериментатору: он не прошел мимо этого эффекта и исследовал его подробнее, обнаружив высокую проникающую способность открытого им неизвестного излучения. Он назвал его «х-лучи», подчеркивая неизвестную, даже загадочную, природу обнаруженного им явления. Это название («x-rays») часто используется в англоязычной литературе и сегодня.

В 1912 г. Лауэ (M. von Laue) и сотрудники впервые осуществили дифракцию рентгеновских лучей на кристалле, с несомненностью доказав тем самым их волновые свойства. Название γ -лучи возникло в ядерной физике для обозначения одного из трех видов естественной радиоактивности, от-

крытой Беккерелем (А. А. Becquerel, 1896 г.). Впоследствии выяснилось, что этот вид радиоактивности (гамма) — электромагнитное излучение ядер.

Длина волны рентгеновского (гамма) излучения настолько мала, что их волновые свойства проявляются лишь в исключительных условиях. Обычно они ведут себя как частицы. Поэтому более естественно характеризовать это излучение не длиной волны, а энергией квантов, измеряя ее в атомных единицах — электрон-вольтах: $\mathfrak{E} = \hbar\omega = hc/\lambda$. Излучению с длиной волны $100 \text{ \AA}$ — условная граница между рентгеновским и УФ излучением — соответствует энергия квантов около 124 эВ (см. формулу (VIII.1)). Укажем для сравнения, что энергия светового кванта ($5000 \text{ \AA}$) составляет 2,5 эВ. Максимальная энергия γ -квантов, зарегистрированная в космических лучах, — порядка 10^{20} эВ, что соответствует $\lambda \sim 10^{-24}$ см. В лабораторных условиях получены γ -кванты с энергией до 10^{11} эВ (электрон-позитронный коллайдер LEP в ЦЕРН).

Рентгеновские и γ -лучи генерируются в трех видах процессов.

1. Тормозное излучение заряженных частиц — это и есть рентгеновские лучи. В лабораторных условиях их получают в рентгеновских трубках ($\mathfrak{E} \leq 150$ кэВ) и в ускорителях электронов всех типов (линейные, бетатрон, синхротрон и др., §§ 132–134). Предельная энергия γ -лучей, полученных таким способом, составляет около 100 ГэВ. К рентгеновскому излучению относят также так называемое характеристическое излучение атомов, возбужденных ударом быстрых электронов: излучают атомарные электроны при переходе из возбужденного состояния на низколежащие атомные уровни.

2. Излучение возбужденных ядер: так же, как возбужденные атомы, высвечиваясь, излучают свет, возбуждаемые ядра излучают γ -кванты. Энергия ядерных γ -квантов лежит в диапазоне примерно от 10 кэВ до 10 МэВ. Время жизни ядер в возбужденном состоянии (длительность γ -излучения) изменяется в широких пределах: от $\tau \sim 10^{-17}$ с до сотен лет.

3. Процессы взаимного превращения элементарных частиц. Например: $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, в системе центра масс γ -кванты имеют энергию по 67,6 МэВ каждый. Другим примером является аннигиляция позитрона: $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$.

Из сказанного ясно, что рентгеновское (п. 1) и гамма (пп. 2, 3) излучения различаются только методами и источниками генерации. Часто этим «генетическим» различием пренебрегают, называя оба вида излучения одним из двух терминов. Особенно часто это встречается для излучения высокой энергии.

Следует упомянуть еще два вида электромагнитного излучения, источниками которых являются релятивистские заряженные частицы. Это излучение Вавилова–Черенкова (§§ 71, 135) и переходное излучение (§ 136), возникающие в результате взаимодействия частицы с окружающей средой. Это позволяет считать оба вида излучения разновидностями тормозного излучения.

Методика регистрации γ -лучей основана на их взаимодействии с электронами вещества: γ -квант может передать электрону всю энергию (фотоэффект, рождение пары электрон — позитрон) или часть (комptonовское рассеяние). Возникший в результате такого взаимодействия относительно быстрый электрон регистрируется далее одним из многочисленных детекторов заряженных частиц, в частности фотометодом (§ 63).

ГЛАВА IX

СТРУКТУРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

§ 65. Свободное электромагнитное поле

Существование свободного электромагнитного поля было теоретически предсказано Максвеллом на основе анализа системы уравнений электромагнитного поля. Для этого достаточно рассмотреть два уравнения без зарядов и токов (см. (45.9)):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (65.1)$$

Источниками полей в данном случае являются так называемые «токи» смещения ($\partial \mathbf{B}/\partial t$, $\partial \mathbf{D}/\partial t$), т. е. поля как бы поддерживают друг друга. Прочитанные справа налево, эти уравнения можно рассматривать как «уравнения движения» электромагнитного поля.

Рассмотрим вначале некоторые общие свойства свободного электромагнитного поля, вытекающие из (65.1). Прежде всего, такое поле должно быть переменным во времени и неоднородным в пространстве. Далее, обязательно должны присутствовать оба поля — как электрическое, так и магнитное. Более того, энергия обоих полей должна быть одной и той же, так как согласно (65.1) поля как бы переходят друг в друга: $\epsilon E^2 = \mu H^2$ (в простейшем случае однородной и изотропной среды). Отсюда получаем соотношение между полями

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H = \frac{B}{\sqrt{\mu}} \quad \left(\frac{B}{E} = \sqrt{\epsilon \mu} \equiv n \right), \quad (65.2)$$

где n , как мы увидим дальше, есть *показатель преломления среды* (см. (65.5) и § 73). В частности, в вакууме оба поля просто равны друг другу.

Далее, оба поля взаимно ортогональны ($(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = 0$).

Это можно легко показать для однородной и изотропной среды, умножив обе части первого уравнения (45.9) скалярно на $\mathbf{E}$, а второго — на $\mathbf{B}$ и учитывая, что (П. I.7, л)

$$(\mathbf{E}, \text{rot}\mathbf{E}) \equiv (\mathbf{E}, (\nabla \times \mathbf{E})) = \left(\nabla, \left(\downarrow \mathbf{E} \times \mathbf{E} \right) \right) \equiv 0,$$

получим из первого уравнения

$$\left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = 0.$$

Аналогично, из второго уравнения (45.9) имеем при $\mathbf{j} = 0$

$$(\mathbf{B}, \text{rot}\mathbf{B}) \equiv (\mathbf{B}, (\nabla \times \mathbf{B})) = \mu \left(\nabla, \left(\downarrow \mathbf{B} \times \mathbf{B} \right) \right) \equiv 0,$$

что дает ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$)

$$\left(\mathbf{B}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Сложив оба полученных равенства, находим

$$\frac{\partial (\mathbf{B}, \mathbf{E})}{\partial t} = 0, \quad (\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \text{const.}$$

Очевидно, что константа в последнем равенстве должна быть равна нулю в случае полей, зависящих от времени.

Условие ортогональности компонент электромагнитного поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ имеет ясный физический смысл. Действительно, первое из уравнений (65.1) представляет собой закон Фарадея, согласно которому переменный магнитный поток возбуждает вихревое электрическое поле. Второе уравнение (65.1) представляет аналогичный закон для возбуждения магнитного поля переменным электрическим полем, т. е., в сущности, закон Био–Савара для тока смещения. С помощью этих законов легко найти скорости движения свободного электромагнитного поля. Для этого рассмотрим простейший случай «куска» электромагнитного поля (рис. IX.1). Точнее, мы рассмотрим плоский «слой» поля неограниченных поперечных размеров (в плоскости x, y). Примем далее, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ однородны в пределах слоя и направлены соответственно вдоль осей x, y . В этом случае вектор Пойнтинга (55.3) направлен вдоль оси z и также постоянен в пределах слоя. Отсюда можно заключить, что рассматриваемый «кусочек» поля будет перемещаться как целое также вдоль оси z .

Заметим, что если бы «кусок» поля был ограничен также и в поперечных направлениях, то его движение было бы гораздо сложнее. Оказывается, что такой «кусок» начал бы «растекаться» во все стороны — явление, известное в оптике под названием *дифракции волн* (глава XV).

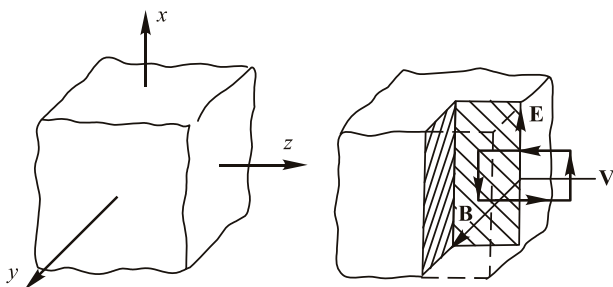


Рис. IX.1. Распространение «куска» электромагнитного поля в пространстве

Найдем теперь скорость перемещения поля. Для этого рассмотрим замкнутый контур в плоскости x, z в виде единичного квадрата, пересекающий переднюю поверхность «слоя» поля (см. рис. IX.1). На основании закона Фарадея можем написать

$$\mathcal{E} = -E = -\frac{1}{c} Bv, \quad (65.3)$$

где v — скорость перемещения поля. Взяв аналогичный контур в плоскости y, z и используя закон сохранения циркуляции магнитного поля (33.3), найдем

$$\Gamma = H = \frac{1}{c} Dv. \quad (65.4)$$

Используя соотношения $D = \epsilon E$ и $B = \mu H$, подставляя E из уравнения (65.3) в (65.4) и сократив E , получим

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (65.5)$$

В частности, в вакууме $v = c$. Величина $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ называется по оптической терминологии *показателем преломления среды*. Из этих же уравнений (поделив одно из них на другое) нетрудно получить соотношения между полями (65.2).

Мы неслучайно употребляли выше жаргонный термин «кусок» поля. Этим мы хотели подчеркнуть принципиальное различие между свободным электромагнитным полем, которое называют обычно электромагнитными волнами, и механическими волнами (упругие волны — звук, волны на поверхности воды и др.). Последние всегда представляют собой колебания некоторой среды, в то время как электромагнитные волны — свободное электромагнитное поле — являются самостоятельным физическим объектом. Его следовало бы рассматривать как одну из форм вещества, хотя по исторической традиции последний термин употребляется в более узком смысле. Это терминологическое различие возникло еще в эпоху классической физики (до создания квантовой механики), когда волновые свойства были известны только у электромагнитного поля, тогда как электроны и протоны рассматривались как частицы. С появлением квантовой механики это различие потеряло физический смысл. Увлечение аналогией с механическими волнами привело в прошлом столетии к усиленному поиску особой среды — *эфира*, колебания которого и должны были являться электромагнитными волнами. На самом же деле, как это видно из рассмотренного выше простого примера, вполне можно представлять себе, что электромагнитные волны не распространяются в некоей среде, а летят в вакууме наподобие свободного «тела».

§ 66. Волновое уравнение для полей

Произвольное электромагнитное поле описывается полной системой уравнений Максвелла (45.9). При этом пара уравнений (65.1) описывает изменение во времени свободного поля (без токов). Их нужно решать для заданного начального состояния поля ($\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$). Если мы хотим ограничиться свободным полем, то начальное поле должно удовлетворять дополнителным условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (66.1)$$

Эти условия есть не что иное, как вторая пара уравнений Максвелла в частном случае отсутствия зарядов.

Один из методов решения системы (65.1) состоит в исключении какого-либо из полей, в результате чего получается так называемое волновое уравнение. Для этого возьмем rot от обеих частей, например первого из уравнений (65.1), преобразуем оператор $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = -\Delta + \nabla \operatorname{div}$ (см. Приложение I), учтем первое из уравнений (66.1) и используем второе уравнение (65.1). Ограничиваясь по-прежнему случаем однородной и изотропной среды ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$,

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\varepsilon, \mu = \text{const}$), получим уравнение для $\mathbf{E}$. Аналогично, можно получить такое же уравнение и для $\mathbf{B}$. Это и есть волновые уравнения.

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (66.2)$$

Задолго до теории Максвелла волновое уравнение, методы его решения и общие свойства волновых процессов были подробно изучены в механике и акустике. По-видимому, впервые это было сделано французским математиком д'Аламбером (J. L. D'Alembert, 1747 г.) и русским математиком Леонардом Эйлером (1748 г.) для упругих колебаний струны. Отсюда и возникла аналогия с механическими волнами, упомянутая в конце предыдущего параграфа. Эта аналогия значительно облегчила и ускорила изучение различных процессов распространения электромагнитных волн, но задержала понимание их природы.

Волновые уравнения (66.2), определяющие эволюцию свободного электромагнитного поля, совсем не похожи на уравнения движения в механике. Но в одном отношении они совпадают — и там и здесь уравнения содержат только вторую производную по времени. Отсюда вытекает важное свойство движения как частиц, так и волн — так называемая обратимость (во времени). Это значит, что если формально изменить знак времени ($t \rightarrow -t$), то уравнения не изменятся и, значит, при одинаковых начальных условиях движение будет одинаковым в обоих случаях. Отсюда следует, что воображаемое движение назад во времени (при $t \rightarrow -t$) действительно возможно, если в качестве начальных условий взять конечные условия прямого движения, изменив в механике знак скоростей частиц, а в случае электромагнитного поля — знак $\mathbf{B}$ (вектор Пойнтинга должен изменить направление на противоположное!).

§ 67. Волновое уравнение для потенциалов

Выведем волновое уравнение для потенциалов. Для этого выразим поля через потенциалы с помощью (38.10) и (45.7),

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (67.1)$$

и подставим их во второе из уравнений (45.9). Считая, как и выше, $\varepsilon, \mu = \text{const}$, имеем

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\varepsilon}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Раскрывая оператор rot rot , найдем

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla \left(\text{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}. \quad (67.2)$$

Наложим теперь на потенциалы дополнительное условие, определяющее их калибровку (сравни (32.7)):

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (67.3)$$

Тогда для вектора-потенциала справедливо такое же волновое уравнение, как и для полей (66.2), с тем лишь отличием, что в нем появилась ненулевая правая часть:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}. \quad (67.4)$$

Чтобы определить волновое уравнение для скалярного потенциала φ , возьмем дивергенцию от обеих частей второго из соотношений (67.1) и учтем третье уравнение Максвелла (45.9):

$$\text{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} - \Delta \varphi = 4\pi \rho / \varepsilon.$$

Используя связь между потенциалами (67.3), получим волновое уравнение для φ :

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho. \quad (67.5)$$

Соотношение (67.3) носит название *условия Лоренца* на потенциалы. При выполнении этого условия говорят о потенциалах в *лоренцевской калибровке*. Другая удобная калибровка потенциалов — *кулоновская* (§ 39):

$$\text{div} \mathbf{A} = 0. \quad (67.6)$$

Уравнение для $\mathbf{A}$ в этой калибровке усложняется: из (67.2) находим

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\varepsilon \mu}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}, \quad (67.7)$$

зато скалярный потенциал описывается теперь просто уравнением Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad (67.8)$$

как и в статическом поле (отсюда и название калибровки (67.6) — кулоновская). Отметим, однако, что решение этого уравнения отличается от статического, так как необходимо учесть запаздывание потенциалов относительно источников (§ 119). Кулоновская калибровка особенно удобна в случае свободного электромагнитного поля ($\rho \equiv 0$, $\mathbf{j} \equiv 0$; фактически достаточно $\varphi \equiv 0$). В этом случае (в однородном пространстве) решение уравнения (67.8) есть просто $\varphi = 0$, так что свободное поле можно описать только векторным потенциалом, который удовлетворяет уравнению (67.4) при $\mathbf{j} = 0$.

§ 68. Плоские волны

Простейшим типом волн являются так называемые плоские волны, в которых все величины ($\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) зависят только от одной координаты, например z . Именно такая волна была рассмотрена в § 65. Сейчас мы исследуем ее свойства на основе волнового уравнения. Название «плоская волна» связано с тем, что волновые поверхности $\mathbf{A}(z) = \text{const}$ в этом случае являются плоскостями $z = \text{const}$.

Волновое уравнение для плоской волны без источников принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad (68.1)$$

а калибровочное условие дает для плоской волны $A_z = \text{const}$, и постоянную можно положить равной нулю, так как A_z не дает вклада в поле.

Плоская волна, по определению, распространяется вдоль нормали к волновой поверхности (вдоль оси z), так как смещение волны в поперечных направлениях просто не изменяет поля. Линии, ортогональные волновым поверхностям, называются *лучами*. Для плоской волны лучи образуют семейство параллельных прямых. Условие $A_z = 0$ означает, что волна является поперечной, т. е. вектор-потенциал и поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ перпендикулярны направлению распространения волны. Таким образом, плоская волна описывается двумерным вектором.

Как же найти решение волнового уравнения (68.1)? По-видимому, читатель уже свылся с мыслью, что решение нужно просто угадать. Чтобы сделать это, вернемся к § 65, где мы видели, что поле плоской волны перемещается в пространстве как целое. Следовательно, решение уравнения (68.1) можно попытаться искать в форме

$$\mathbf{A}(z, t) = \mathbf{f}(z - vt). \quad (68.2)$$

Векторная функция $\mathbf{f}(z)$ описывает так называемый профиль волны (в момент $t = 0$), который перемещается со скоростью v . Чтобы найти эту скорость, подставим выражение (68.2) в уравнение (68.1). Возьмем одну из компонент $\mathbf{A}$ и учтем, что $\partial A_x / \partial z = f'_x$, $\partial A_x / \partial t = f'_x \cdot (-v)$, где $f'_x = df_x(u)/du$, $u = z - vt$ — аргумент функции $\mathbf{f}(u)$. Получаем

$$v = \pm \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (68.3)$$

т. е. мы пришли к тому же результату, что и в § 65. Но здесь содержится и нечто большее. Во-первых, скорость волны может иметь оба знака, т. е. волна может распространяться в обе стороны. Последний результат, впрочем, заранее очевиден, так как оба направления в пространстве равноправны (пространство изотропно). Во-вторых, видно, что само по себе волновое уравнение не накладывает никаких ограничений на вид функции $\mathbf{f}(u)$, т. е. на форму поля. Таким образом, полное решение волнового уравнения (68.1) имеет вид

$$\mathbf{A}(z, t) = \mathbf{f}_1(z - |v|t) + \mathbf{f}_2(z + |v|t), \quad (68.4)$$

где $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ — произвольные функции аргументов $z \mp |v| \cdot t$.

Появление в решении произвольных функций является характерной особенностью уравнений в частных производных. Посмотрим, как обстоит дело в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, например, уравнения движения частицы в механике. Решение такого уравнения содержит две произвольные постоянные, которые в каждом конкретном случае определяются начальными условиями, т. е. положением и скоростью частицы в некоторый момент времени. Точно так же произвольные функции $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ в решении волнового уравнения (68.4) должны быть связаны с начальным состоянием электромагнитного поля. Прежде чем найти эту связь, введем описание поля плоской волны с помощью комплексных величин. Любую комплексную величину

$$A = A_x + iA_y \quad (68.5)$$

можно рассматривать как двумерный вектор. Посмотрим теперь, как действует оператор rot на комплексное поле. Поскольку все величины зависят только от одной координаты z , получим в декартовой системе координат

$$(\text{rot}\mathbf{A})_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad (\text{rot}\mathbf{A})_y = -\frac{\partial A_x}{\partial z}. \quad (68.6)$$

В комплексной форме это можно записать как

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = (\operatorname{rot} \mathbf{A})_x + i(\operatorname{rot} \mathbf{A})_y = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + i \frac{\partial A_x}{\partial z} = i \frac{\partial A}{\partial z}, \quad (68.7)$$

где функция A определена в (68.5). Таким образом, действие оператора rot на комплексное поле сводится к взятию производной по z и умножению на i .

Вернемся теперь к полному решению (68.4) и найдем электрическое и магнитное поля плоской волны:

$$E(z, t) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{v}{c} (f'_1 - f'_2), \quad B(z, t) = i \cdot \frac{\partial A}{\partial z} = i (f'_1 + f'_2). \quad (68.8)$$

Отсюда по заданной начальной конфигурации поля ($E(z, 0)$; $B(z, 0)$) находим неизвестные функции f_1 , f_2 :

$$\begin{aligned} f'_1(u_+) &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\varepsilon \mu} E(u_+, 0) - i B(u_+, 0) \right), \\ f'_2(u_-) &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\varepsilon \mu} E(u_-, 0) + i B(u_-, 0) \right), \end{aligned} \quad (68.9)$$

где $u_{\pm} = z \mp vt$. В правой части (68.9) мы заменили z на $u_{\pm}$ соответственно, так как при $t=0$ $u_+ = u_- = z$. Сами функции f_1 , f_2 находятся интегрированием правых частей (68.9), при этом появляется еще одна произвольная постоянная, которая связана с неоднозначностью выбора вектора-потенциала: $A \rightarrow A + C$.

В общем случае начальное электромагнитное поле распадается на две волны. В специальных случаях

$$\sqrt{\varepsilon} E(z, 0) = \pm i \sqrt{\mu} H(z, 0)$$

возникает только одна волна. Это условие как раз соответствует соотношению (65.2) между полями в плоской волне.

Скорость волны (68.3), которую можно записать в виде

$$v = c/n, \quad (68.11)$$

где n — *показатель преломления среды*, называется обычно *фазовой скоростью*. Название связано с тем, что это есть скорость движения определенной фазы волны, например максимума поля или его нуля (подробнее см. § 84).

§ 69. Монохроматическая волна. Поляризация волны

Рассмотрим важный частный случай плоской волны, когда в начальный момент времени зависимость полей от координаты z описывается гармонической функцией

$$E(z, 0) = E_0 e^{ikz}. \quad (69.1)$$

Пусть для простоты $B(z, 0) = i\sqrt{\epsilon\mu}E(z, 0)$, т. е. имеется только одна волна, распространяющаяся в положительном направлении оси z . Постоянная k в (69.1) называется *волновым числом* и характеризует пространственный период поля, который именуется обычно *длиной волны*:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (69.2)$$

Величину k называют также *пространственной частотой волны*. Иногда пользуются величиной $\tilde{\lambda} = \lambda/2\pi$.

Чтобы найти поле в произвольный момент времени, достаточно в (69.1) заменить z на $z - vt = u_+$ (одна волна):

$$E(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \equiv E_0 e^{i\varphi(z, t)}, \quad (69.3)$$

где мы ввели новую величину

$$\omega = kv = \frac{2\pi\nu_\varphi}{\lambda}, \quad (69.4)$$

которая называется *частотой* (временной) волны и характеризует временной период поля

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{v}. \quad (69.5)$$

Величина $\varphi(z, t)$ в (69.3) называется *фазой волны*. Точка постоянной фазы $\varphi(z, t) = \text{const}$ в волне (69.3) бежит в положительном направлении оси z со скоростью $v_\varphi = \dot{z} = \omega/k$. Для волны противоположного направления фаза $\varphi(z, t) = kz + \omega t$, $v_\varphi = -\omega/k$. Скорость v_φ называется *фазовой* (см. подробнее § 84).

Результат (69.3) можно получить и формально с помощью соотношений (68.9), подставляя в последние (69.1). Такая волна называется *монохро-*

матической, что в буквальном переводе на русский язык означает «одноцветная волна» (от греч. monos — один и chroma — цвет). Термин этот возник в оптике, где световая волна с определенной частотой (и длиной волны) вызывает в глазу ощущение чистого цвета (§ 61). Заметим, что монохроматическая волна не обязательно является плоской. Монохроматичность означает определенную частоту волны, в то время как ее пространственная конфигурация может быть различной. Например, монохроматической может быть волна, расходящаяся от источника малого размера.

Плоская волна описывается двумерным вектором (например, $\mathbf{A}$). Поэтому при заданных частоте и направлении распространения у волны остается еще одна, внутренняя, степень свободы, которая называется *поляризацией*.

В случае (69.3) говорят о *круговой* (или *циркулярной*) поляризации волны, так как в каждой точке пространства вектор $\mathbf{A}$, а также векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ вращаются с частотой ω , не изменяясь по абсолютной величине. В любой момент времени пространственную конфигурацию такого поля можно представить себе как правую спираль (рис. IX.2). Эта ситуация соответствует правой круговой поляризации. Левая поляризация отличается изменением знаков при k и ω . В общем случае имеет место суперпозиция обеих поляризаций:

$$A(z, t) = A_{\pi} e^{i(kz - \omega t)} + A_{\lambda} e^{-i(kz - \omega t)}, \quad (69.6)$$

где A_{π} , A_{λ} — некоторые комплексные постоянные. Такая поляризация называется *эллиптической*, так как при этом конец вектора $\mathbf{A}$ описывает эллипс (рис. IX.3) (см. задачу IX.2 ниже). В частных случаях $A_{\pi} = 0$ или $A_{\lambda} = 0$ этот эллипс превращается в круг (круговая поляризация).

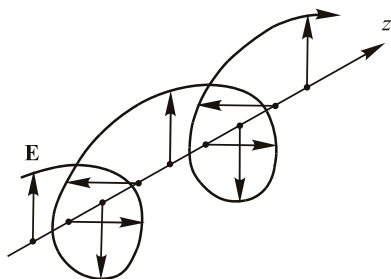


Рис. IX.2. Пространственная конфигурация плоской монохроматической волны с правой круговой поляризацией

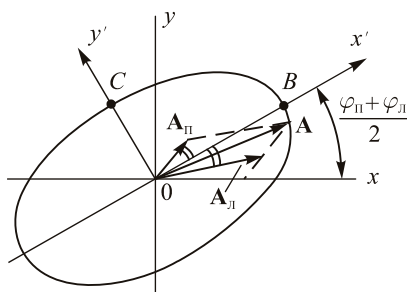


Рис. IX.3. Эллиптическая поляризация: вектор волны $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\lambda} + \mathbf{A}_{\pi}$ описывает эллипс

Не менее важной является так называемая *линейная поляризация*, когда эллипс вырождается в прямую линию, т. е. его малая полуось обращается в нуль. Это происходит, если $A_{\text{н}} = \pm A_{\text{л}} = A_0/2$. Тогда вектор-потенциал волны (69.6) описывается одним из двух выражений:

$$\begin{aligned} A_1(z, t) &= A_0 \cos(kz - \omega t), & A_{\text{н}} &= A_{\text{л}}, \\ A_2(z, t) &= A_0 \sin(kz - \omega t), & A_{\text{н}} &= -A_{\text{л}}. \end{aligned} \quad (69.7)$$

При линейной поляризации вектор $\mathbf{A}$, а также векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ изменяются только по величине (и по знаку) вдоль направления вектора A_0 или перпендикулярного ему вектора iA_0 соответственно. Пространственная конфигурация линейно поляризованной волны показана на рис. IX.4. Мы видим, что все векторы $\mathbf{E}$ вдоль луча лежат в одной плоскости, которая называется *плоскостью колебаний волны*. Исторически плоскостью поляризации волны была названа, однако, другая плоскость — та, в которой лежат векторы $\mathbf{B}$. В дальнейшем под направлением колебаний волны — *поляризацией волны* — мы будем понимать направление вектора $\mathbf{E}$. Отметим, что линейно поляризованную волну называют также *плоскополяризованной*.

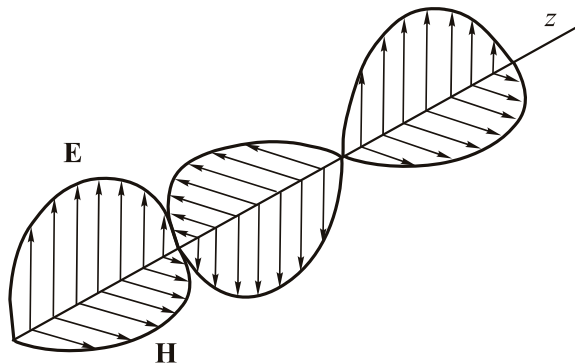


Рис. IX.4. Пространственная конфигурация линейно поляризованной плоской монохроматической волны

Произвольная (эллиптическая) поляризация волны может быть представлена как суперпозиция либо двух круговых поляризаций (69.6), либо двух линейных (69.7). Направление последних естественно принять за оси x , y , тогда получаем

$$A(z, t) = A_x \cos(kz - \omega t + \varphi_x) + iA_y \cos(kz - \omega t + \varphi_y), \quad (69.8)$$

где A_x , A_y — действительные амплитуды, φ_x , φ_y — фазы.

Задача IX.1. Найти связь между постоянными линейной (69.7) и круговой (69.8) поляризациями.

Представляя косинус через комплексные экспоненты $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, запишем (69.8) в виде

$$A(z, t) = \frac{1}{2} (A_x e^{i\varphi_x} + iA_y e^{i\varphi_y}) e^{i(kz - \omega t)} + \frac{1}{2} (A_x e^{-i\varphi_x} + iA_y e^{-i\varphi_y}) e^{-i(kz - \omega t)},$$

откуда

$$A_{\parallel} = \frac{1}{2} (A_x e^{i\varphi_x} + iA_y e^{i\varphi_y}), \quad A_{\perp} = \frac{1}{2} (A_x e^{-i\varphi_x} + iA_y e^{-i\varphi_y}). \quad (69.9)$$

Обратные соотношения получаются из $A_{\parallel} + A_{\perp}^* = A_x e^{i\varphi_x}$, $A_{\parallel} - A_{\perp}^* = A_y e^{i\varphi_y}$, где звездочка обозначает операцию комплексного сопряжения.

Задача IX.2. Определить параметры эллипса поляризации (рис. IX.3).

Запишем комплексные амплитуды круговых поляризаций в виде

$$A_{\parallel} = |A_{\parallel}| e^{i\varphi_{\parallel}}, \quad A_{\perp} = |A_{\perp}| e^{i\varphi_{\perp}}$$

И повернем оси x, y таким образом, чтобы новые $\varphi'_{\parallel}, \varphi'_{\perp}$ удовлетворяли условию $\varphi'_{\parallel} = -\varphi'_{\perp}$ (рис. IX.3). Очевидно, что для этого новую ось x' нужно направить по биссектрисе угла между $A_{\parallel}, A_{\perp}$. Тогда $\varphi'_{\parallel} = -\varphi'_{\perp} = (\varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp})/2 = \varphi_0$ и (69.6) принимает вид

$$A(z, t) = |A_{\parallel}| e^{i(\theta + \varphi_0)} + |A_{\perp}| e^{-i(\theta + \varphi_0)} = (|A_{\parallel}| + |A_{\perp}|) \cos(\theta_0 + \varphi_0) + i(|A_{\parallel}| - |A_{\perp}|) \sin(\theta + \varphi_0),$$

где $\theta = kz - \omega t$. Но это есть уравнение эллипса с полуосями

$$a = |A_{\parallel}| + |A_{\perp}|, \quad b = |A_{\parallel}| - |A_{\perp}|, \quad (69.10)$$

причем большая полуось составляет с осью x угол $\varphi_a = (\varphi_{\parallel} + \varphi_{\perp})/2$. Параметры эллипса можно получить из следующих простых соображений. Согласно (69.6), вектор $\mathbf{A}$ равен сумме двух векторов, вращающихся с одинаковой угловой скоростью в противоположных направлениях. При $\theta = 0$ эти векторы совпадают с комплексными амплитудами (рис. IX.3). В таком случае в процессе вращения они окажутся параллельными друг другу как раз на биссектрисе угла между их начальными положениями ($\theta = 0$) и антипараллельными еще через четверть оборота.

Найдем соотношение между векторами $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}$ для различных поляризаций. Используя выражение (68.7) для ротора комплексного вектора и разложив поля B, E по круговым поляризациям, определим связь между амплитудами:

$$B_{\parallel} = -kA_{\parallel}; \quad B_{\perp} = kA_{\perp}; \quad E_{\parallel} = ikA_{\parallel}; \quad E_{\perp} = -ikA_{\perp}. \quad (69.11)$$

Интересно отметить, что направление вектора $\mathbf{A}$ совпадает (с точностью до знака) с направлением магнитного поля (рис. IX.5).

Поляризация электромагнитной волны была открыта впервые для света французским военным инженером Малюсом (Е. L. Malus, 1808 г.). Наблюдение поляризации света производится с помощью особых анизотропных кристаллов, которые сильно поглощают линейно поляризованную волну с определенной ориентацией вектора $\mathbf{E}$. Такие кристаллы изготавливаются обычно в виде тонкой пленки — *поляроида*. Для радиоволн аналогом поляроида может служить решетка параллельных металлических нитей. Составляющая волны с колебаниями вдоль нитей возбуждает в них токи и практически полностью отражается (рис. IX.6).

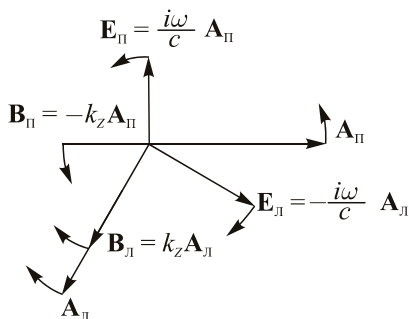


Рис. IX.5. «Звезда» амплитуд монохроматической волны. Волна распространяется «на нас», стрелки-дуги показывают направление вращения вектора

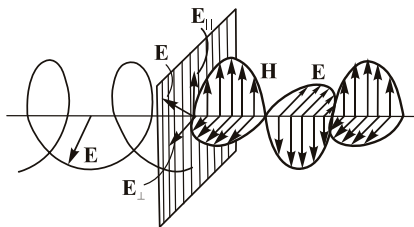


Рис. IX.6. Прохождение циркулярнополяризованной электромагнитной волны сквозь металлический «забор». Отраженная волна на рисунке не показана

§ 70. Волновой вектор. Эффект Доплера

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в произвольном направлении (необязательно вдоль оси z). Как описать такую волну?

Пусть направление распространения волны характеризуется единичным вектором $\mathbf{n}$. Введем вектор

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}, \quad (70.1)$$

модуль которого равен волновому числу (69.2), а направление совпадает с направлением распространения волны. Вектор $\mathbf{k}$ называется *волновым*

вектором. Фазу волны, распространяющейся вдоль оси z (69.3), можно записать теперь в виде

$$\theta = k_z z - \omega t, \quad (70.2)$$

где k_z — z -компонента вектора $\mathbf{k}$. Повернем теперь оси координат произвольным образом. Очевидно, что фаза волны θ не может зависеть от направления осей координат, т. е. она является инвариантом такого поворота. Это значит, что она должна зависеть только от инвариантного выражения, содержащего векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{r}$ и переходящего в (70.2) при $k_x = k_y = 0$. Таким выражением является скалярное произведение $(\mathbf{k}, \mathbf{r})$. Отсюда получаем

$$\theta = (\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \omega t, \quad (70.3)$$

и общее выражение для плоской монохроматической волны принимает вид (69.6)

$$A(\mathbf{r}, t) = A_n e^{i\theta} + A_d e^{-i\theta}. \quad (70.4)$$

С введением вектора $\mathbf{k}$ вместо одной пространственной частоты k возникают три, k_x, k_y, k_z , которые характеризуют скорость изменения фазы волны по определенным направлениям. Модуль $|\mathbf{k}| = k$ равен максимальной пространственной частоте вдоль направления распространения волны. В произвольном направлении, характеризуемом единичным вектором $\mathbf{n}'$, пространственная частота

$$\left(\frac{d\theta}{ds} \right)_{n'} = (\mathbf{k}, \mathbf{n}') = k(\mathbf{n}, \mathbf{n}'), \quad (70.5)$$

где s — координата вдоль вектора $\mathbf{n}'$.

Посмотрим теперь, как изменяются частота и волновой вектор при переходе из одной системы отсчета в другую. Для этого, используя *преобразования Лоренца*, выразим координаты и время в (70.3) через координаты и время $(\mathbf{r}', t')$ другой системы отсчета, движущейся относительно исходной со скоростью V вдоль оси x . Получаем

$$\begin{aligned} \theta &= k_x x - \omega t + k_y y + k_z z = \\ &= k_x \gamma (x' + Vt') - \omega \gamma (t' + Vx'/c^2) + k_y y' + k_z z' = \\ &= \gamma (k_x - \omega V/c^2) x' - \gamma (\omega - k_x V) t' + k_y y' + k_z z'. \end{aligned} \quad (70.6)$$

Мы видим, что в новой системе отсчета волна остается плоской и монохроматической, но ее частота (множитель при t') и волновой вектор (множитель при $\mathbf{r}'$) изменяются:

$$\omega' = \gamma(\omega - k_x V); \quad k'_x = \gamma\left(k_x - \frac{\omega V}{c^2}\right); \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z. \quad (70.7)$$

Это и есть закон преобразования ω , $\mathbf{k}$ при переходе из одной системы отсчета в другую. Из этих соотношений следует, что величины $\mathbf{k}$, ω образуют 4-вектор

$$k_l = \left(\mathbf{k}, \frac{i\omega}{c} \right), \quad l = 1, 2, 3, 4 \dots \quad (70.8)$$

Результат, описываемый формулой (70.8), можно получить и из следующих физических соображений. Достаточно заметить, что фаза волны θ есть инвариант, т. е. не зависит от системы отсчета. Действительно, рассмотрим, например, волну $E = E_0 \cos \theta$. Тогда инвариантность фазы означает просто, что в любой системе отсчета максимум волны соответствует $\theta = 0$. Здесь, конечно, неявно предполагается, что в любой системе отсчета волна остается монохроматической, что является следствием линейности преобразований Лоренца (70.6). Заметим, что выше, при выводе (70.7), мы, в сущности, неявно уже использовали (быть может, незаметно для читателя) инвариантность фазы θ . Но если фаза (70.3) инвариантна, а величины $(\mathbf{r}, ict)$ образуют, как мы знаем, 4-вектор, то величина $\left(\mathbf{k}, \frac{i\omega}{c} \right)$ также должна быть 4-вектором, чтобы

получилось инвариантное скалярное произведение $(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \alpha = 0$.

Изменение частоты волны при переходе из одной системы отсчета в другую называется *эффектом Доплера*. Этот эффект был предсказан впервые теоретически чешским физиком Доплером (K. Doppler, 1842 г.) и вскоре был экспериментально подтвержден для звуковых волн Бейс Баллотом (С. Н. D. Buys Ballot) на голландской железной дороге. В этих опытах независимые наблюдатели оценивали высоту тона звуков, издаваемых музыкантами, размещенными на платформе поезда. Уже в 1867 г. эффект Доплера был обнаружен в оптических спектрах звезд.

Для звука эффект Доплера описывается нерелятивистской формулой (70.7) при $\gamma = 1$:

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{V}{u'} \cos \alpha' \right), \quad (70.9)$$

где $u' = \omega'/k'$ — скорость звука в движущейся системе отсчета, α' — угол между векторами $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{V}$. Отметим, что для звука существует выделенная система отсчета, связанная со средой, в которой распространяются звуковые волны. Поэтому движение источника звука по отношению к среде приводит к другим результатам, чем движение приемника. То же самое, кстати, относится и к электромагнитным волнам в среде (см. § 71).

Нерелятивистский эффект Доплера (70.9) допускает наглядное объяснение. Пусть, например, наблюдатель движется навстречу волне со скоростью V относительно среды. Используя обратное преобразование и учитывая, что в этом случае $\alpha = \pi$, найдем

$$\frac{\omega'}{\omega} = 1 + \frac{V}{u} = \frac{u + V}{u},$$

где u — скорость звука, ω — частота звуковых колебаний в неподвижной системе, ω' — частота колебаний, воспринимаемая движущимся наблюдателем. Увеличение частоты в этом случае объясняется просто тем, что движущийся навстречу волне наблюдатель «наталкивается» на максимумы волны тем чаще, чем больше его скорость.

Для электромагнитной волны в вакууме эффект Доплера описывается первым из соотношений (70.7)

$$\omega' = \gamma \omega \left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha \right), \quad \omega = \frac{\omega'}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha \right)}. \quad (70.10)$$

В нерелятивистском случае это выражение совпадает с (70.9) ($u' \rightarrow c$) и имеет такой же наглядный физический смысл, как и для механических волн. В этом случае говорят о *линейном эффекте Доплера*, или об эффекте Доплера первого порядка ($(\omega - \omega')/\omega \sim V/c$). Кроме того, имеется еще так называемый *квадратичный эффект Доплера*, связанный с множителем $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$. Природа его совершенно иная: он связан с релятивистским изменением масштаба времени в разных системах отсчета. В этом случае говорят также о *поперечном эффекте Доплера*. Такое название связано с тем, что при наблюдении электромагнитной волны перпендикулярно направлению движения излучателя линейный эффект Доплера обращается в нуль, и все изменение частоты волны связано с релятивистским эффектом.

Задача IX.3. Найти частоту и угловое распределение излучения движущегося источника (рис. IX.7).

Квадратичный эффект Доплера соответствует наблюдению излучения под углом $\alpha = \pi/2$ (рис. IX.7, а). Используя первое из преобразований (70.10.), найдем

$$\omega = \omega'/\gamma, \quad \lambda = \gamma\lambda', \quad (70.11)$$

т. е. свет «краснеет». В данном случае ω' есть частота излучателя в собственной системе, так что преобразование частоты (70.11) в точности эквивалентно преобразованию времени, например периода колебаний ($T = 2\pi/\omega$, $T' = 2\pi/\omega'$): $T = \gamma T'$.

На рис. IX.7, б показано излучение, перпендикулярное направлению движения в системе источника, $\alpha' = \pi/2$, и имеет место обратное соотношение $\omega = \gamma\omega'$, т. е. свет «синее». Это связано с линейным эффектом Доплера в системе наблюдателя, который видит свет под углом $\alpha \neq \pi/2$. Найдем этот угол. Комбинируя первые два из выражений (70.7), получим

$$\cos \alpha = \frac{ck_x}{\omega} = \frac{\frac{V}{c} + \cos \alpha'}{1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'}; \quad \sin \alpha = \frac{\sin \alpha'}{\gamma \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'\right)}. \quad (70.12)$$

В частности, при $\alpha' = \pi/2$ имеем $\cos \alpha = V/c$. Подставляя это значение $\cos \alpha$ в первое из выражений (70.7), получим прежний результат:

$$\omega' = \gamma\omega \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \omega/\gamma.$$

Из второго выражения в (70.12) видим, что в ультрарелятивистском случае ($V \rightarrow c$) половина всего излучения (излучение в переднюю полусферу в системе источника, $\alpha' \leq \pi/2$) сосредоточена в системе наблюдателя в узком конусе $\alpha \leq 1/\gamma$ в направлении движения излучателя. С другой стороны, в заднюю полусферу в системе наблюдателя ($\pi/2 < \alpha \leq \pi$) излучается лишь незначительная часть энергии из узкого конуса в системе источника ($|\pi - \alpha'| < 1/\gamma$) вокруг направления, противоположного направлению движения излучателя. Это непосредственно вытекает из обратного преобразования углов:

$$\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha\right)},$$

что при $\pi/2 < \alpha < \pi$ дает $0 < \sin \alpha' \leq 1/\gamma$ и приведенный выше результат.

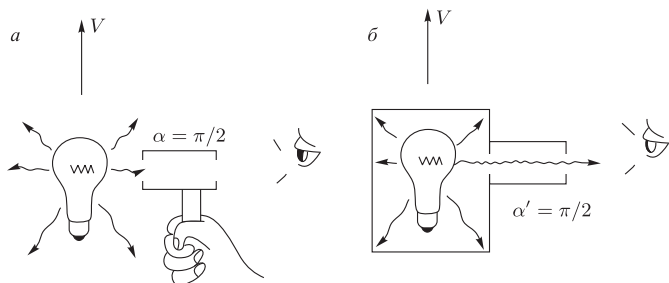


Рис. IX.7. Наблюдение эффекта Доплера: а) источник излучает изотропно, а наблюдатель воспринимает свет, приходящий под углом 90° к направлению движения источника, $\lambda = \gamma\lambda'$; б) источник излучает в своей системе в направлении, поперечном направлению движения, а наблюдатель воспринимает свет с длиной волны $\lambda = \lambda'/\gamma$

Эффект Доплера находит широкое применение как в научных исследованиях, так и в технике. Одним из таких применений является измерение радиальной составляющей скорости движущегося объекта в радиолокации. Вместе с измерением перпендикулярной к лучу локатора составляющей скорости по изменению направления на объект и дальности это дает полную информацию о его движении. В частности, такой метод используется для контроля движения космических кораблей.

В астрономических наблюдениях (точнее, в радиоастрономии) эффект Доплера используется для измерения скорости вращения планет вокруг своей оси по разбросу частоты (уширение линии) отраженного от планеты радиосигнала. Таким образом был найден, например, период вращения Меркурия, который оказался равным 59 земным суткам. Интересно отметить, что отношение меркурианского года (88 земных суток) к его суткам очень близко к $3/2$. Это дало повод для гипотезы о резонансе между орбитальным движением Меркурия и его собственным вращением.

Оказывается, что с помощью эффекта Доплера можно осуществлять и гораздо более тонкие исследования. Измеряя сдвиг частоты отраженного от планеты сигнала и его запаздывание, можно определить даже рельеф планеты. Вместе с интенсивностью отражения это дает возможность снять карту планеты.

Еще одно интересное применение эффекта Доплера — измерение радиальных скоростей звезд и галактик по смещению спектральных линий излучения элементов, входящих в состав звезды (главным образом, водорода и гелия). Такие измерения, проведенные еще в конце 1920-х гг. американским астрономом Хабблом (Е. Р. Hubble, 1929 г.), привели к поразительному результату. Он обнаружил что помимо более или менее хаотического движения звезд и галактик, все они удаляются от Земли со скоростью, пропорциональной расстоянию (*закон Хаббла*):

$$V = H_0 \cdot R, \quad (70.13)$$

где $H_0 = (72 \text{ км/с})/\text{Мпк}$ — постоянная Хаббла^{*)} и ее значение в наши дни. В настоящее время этот закон проверен как в оптическом, так в радиодиапазоне до расстояния в 12 млрд световых лет, где частоты излучения уменьшаются («красное смещение» линий спектра) более чем в четыре раза, что соответствует скорости разлета далеких галактик, составляющей около 90% от скорости света. На основании закона Хаббла возникла гипотеза, что

^{*)} 1 парсек (пк) = $3,0857 \cdot 10^{16} \text{ м} \approx 3$ световых года — расстояние, с которого орбита Земли имеет размер в одну угловую секунду (около $4,85 \cdot 10^{-6}$ радиана).

вся наблюдаемая Вселенная образовалась около 10 млрд лет назад в результате какого-то гигантского взрыва («Big Bang» — Большой Взрыв) и сейчас мы видим разлетающиеся от него осколки («расширяющаяся Вселенная»). Вполне естественно возникает вопрос: почему с Земли разлет звезд мироздания выглядит так, как будто наша планета находится в центре Вселенной (в точке Большого Взрыва!)? Конечно, это не так, Земля и вся Солнечная система находятся довольно далеко от центра нашей Галактики — около 10 кпк. А закон Хаббла — интересная «игра» кинематики взрыва, которую объясняет следующая задача.

Задача IX.4. Осколки взорвавшегося звездолёта разлетаются из точки взрыва со скоростями $\mathbf{v}_i$. Защитная капсула, в которой находятся космонавты, летит со скоростью $\mathbf{v}_0$. Ясно, что все векторы $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_0$ направлены вдоль радиусов-векторов из точки взрыва. Какую мгновенную скорость осколка, удаленного от капсулы на расстояние $\mathbf{R}$, измеряют космонавты?

Отсчитывая время от момента взрыва, найдем (рис. IX.8) скорость i -го осколка относительно капсулы:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{r}_i}{t} - \frac{\mathbf{r}_0}{t} = \frac{\mathbf{R}}{t}.$$

Таким образом, космонавты обнаружат, что скорости осколков звездолёта пропорциональны расстоянию до каждого из них.

Закон Хаббла является экспериментальным обоснованием модели расширяющейся Вселенной (А. А. Фридман, 1922 г.). Точность, с которой выполняется закон Хаббла (V пропорционально R), гораздо выше, чем точность, с которой известна константа H . Подчеркнем, что закон Хаббла справедлив для нерелятивистских скоростей $V \ll c$. Кроме того, согласно современным астрофизическим представлениям, значение постоянной Хаббла изменялось за время порядка возраста Вселенной: расширение идет с ускорением, в ранней стадии ее развития скорость расширения была меньше.

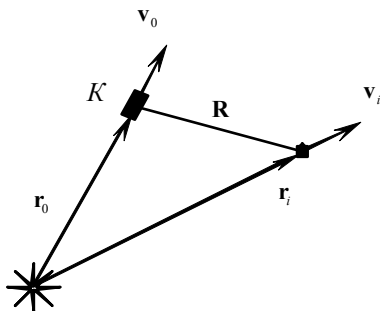


Рис. IX.8. Разлет осколков после взрыва космолёта; K — капсула с космонавтами

Обращаясь теперь к совершенно иной области явлений, упомянем о применении эффекта Доплера для измерения температуры электронов горячей плазмы. Измерение производится по разбросу частоты электромагнитной волны, рассеянной в плазме. Среднее смещение частоты можно использовать при этом для измерения скорости упорядоченного движения в плазме.

§ 71. Аномальный эффект Доплера.

Черенковское излучение

Рассмотрим теперь эффект Доплера для электромагнитной волны в среде. Величины ω , $\mathbf{k}$ и в этом случае образуют 4-вектор $k_l = (\mathbf{k}, i\omega/c)$, так как фаза волны $\theta = (\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \omega t$ по-прежнему является инвариантом преобразований Лоренца (§ 70). Следовательно, остается в силе и закон (70.7) преобразования величин $\mathbf{k}$, ω . Единственное изменение касается связи между $\mathbf{k}$ и ω , которая в системе отсчета среды имеет вид (см. (65.5), (69.4))

$$\frac{\omega_0}{k_0} = v_0 = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\epsilon\mu}, \quad (71.1)$$

где n — показатель преломления среды. Здесь и дальше индексом «0» обозначены значения параметров в системе среды, чтобы подчеркнуть ее выделенность. Скорость волны v зависит теперь от системы отсчета ($\omega'/k' = v' \neq v_0$), так как в отличие от вакуума она уже не совпадает с предельной скоростью c (в смысле теории относительности).

Задача IX.5. Найти скорость света в движущейся среде (опыт Физо).

Опыт Физо (А. I. L. Fizeau, 1851 г.) состоял в измерении скорости света, распространяющегося вдоль текущей в трубе жидкости. Если скорость жидкости равна V , то, по релятивистскому закону сложения скоростей, получим для скорости света в лабораторной системе отсчета

$$v = \frac{v_0 \pm V}{1 \pm Vv_0/c^2} \approx \frac{c}{n} \pm V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (71.2)$$

где знак зависит от направления скорости и принято, что $V \ll v_0 \sim c$. Теория относительности, таким образом, естественно объясняет появление «загадочного» для классической (нерелятивистской) физики множителя $(1 - 1/n^2)$, обнаруженного Физо.

Рассмотрим теперь излучение источника, движущегося относительно среды со скоростью u (вдоль оси x). Используем первое из соотношений (70.7) и будем считать, что штрихованные величины относятся к системе источника. Тогда, произведя замены $V \rightarrow u$, $k_x \rightarrow k_0 \cos \alpha_0$, $\omega \rightarrow \omega_0$, получим

$$\omega_0 = \frac{\omega'}{\gamma \left(1 - \frac{u}{v_0} \cos \alpha_0 \right)}. \quad (71.3)$$

Это выражение переходит во второе из выражений (70.10), если положить $v_0 = c$ ($u = V$). Наиболее интересная особенность эффекта Доплера в среде связана с тем, что здесь источник может двигаться со «сверхсветовой» скоростью: $c > u \geq v_0 = c/n$. Это область так называемого *аномального эффекта Доплера* (рис. IX.9, область I). В этой области частоты абсолютное значение ω_0 увеличивается с ростом угла наблюдения α_0 , тогда как в области нормального эффекта Доплера (рис. IX.9, область II) так же, как и в случае досветовой скорости источника ($u < v_0$), ω_0 падает с ростом α_0 . Граница между областями I, II соответствует углу α_∞ так называемого *черенковского излучения* (§ 135):

$$\cos \alpha_\infty = \frac{v_0}{u}, \quad (71.4)$$

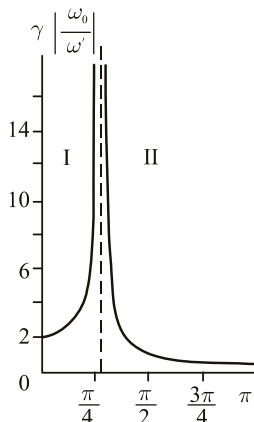


Рис. IX.9. Зависимость отношения частот излучения в системе среды (ω_0) и системе источника (ω') от направления распространения волны в системе среды, $u/V_0 = 1,5$; среда без дисперсии, $\alpha_\infty = 0,841 \alpha_0$

где частота ω_0 обращается в бесконечность. На самом деле, разумеется, никаких бесконечных частот не получается, так как при достаточно больших частотах обязательно имеет место так называемая *дисперсия показателя преломления* (§ 84), т. е. его зависимость, а следовательно, и скорости волны в среде от частоты: $v_0 = v_0(\omega_0)$. При этом для $\omega \rightarrow \infty$ скорость $v_0 \rightarrow c$. Это значит, что при некоторой частоте $\omega_0 = \omega_1$, такой, что $v_0(\omega_1) = u$, область аномальной дисперсии исчезает.

Другая особенность аномальной дисперсии связана с тем, что отношение частот имеет вид $\omega/\omega' < 0$, т. е. одна из частот отрицательна. Согласно квантовым законам это значит, что в одной из систем отсчета энергия излучаемого кванта становится отрицательной. Так как в системе среды мы имеем обычные волны с положительной энергией, то, очевидно, $\omega_0 > 0$ и, следовательно, $\omega' < 0$. Иными словами, в области аномальной дисперсии внутренняя энергия источника увеличивается при излучении (!), разумеется, за счет энергии поступательного движения источника или среды.

Рассмотрим теперь случай $\omega' = 0$, означающий, что в источнике отсутствуют какие-либо колебания, а его внутренняя энергия не изменяется. Примером такого случая может служить пролетающая через среду заряженная частица. При досветовых скоростях ($u < v_0$) частота излучения $\omega_0 = 0$ (71.3), т. е. излучение отсутствует. Однако если $u > v_0$, то при $\alpha_0 = \alpha_\infty$ знаменатель (71.3) также обращается в нуль, и ω_0 может иметь любые значения, ограниченные только условием $v_0(\omega_0) < u$. Это значит, что в этом случае возникает излучение, энергия которого «перекачивается» из поступательного движения источника. Этот особый вид излучения и называется *черенковским излучением*. Оно было открыто экспериментально в 1934 г. советскими физиками С. И. Вавиловым и П. А. Черенковым и объяснено в 1937 г. также советскими физиками И. Е. Таммом и И. М. Франком. В настоящее время это излучение широко применяется в ядерной физике для детектирования быстрых заряженных частиц с помощью так называемых черенковских счетчиков. Подробно излучение Вавилова–Черенкова рассмотрено в § 135.

Интересно отметить, что черенковское излучение было предсказано теоретически немецким физиком Зоммерфельдом (A. Sommerfeld) еще в 1904 г. для сверхсветового движения частиц в вакууме. Однако после появления теории относительности работа эта была прочно забыта, а будущие нобелевские лауреаты Тамм и Франк узнали о ней незадолго до опубликования своих результатов. Уже в 1980-е гг. зоммерфельдовское излучение опять заинтересовало некоторых физиков в связи с поиском гипотетических частиц — *тахионов*, которые, по предположению, всегда движутся быстрее света. Существование таких частиц не противоречит теории относительности. Та-

хионы, однако, нарушают принцип причинности. Во всяком случае, если они и существуют, то должны, по Зоммерфельду, интенсивно излучать электромагнитные волны. По такой короткой вспышке излучения их и надеются обнаружить в эксперименте. Любопытно, что при уменьшении энергии ($W \rightarrow 0$) тахион ускорится ($v \rightarrow \infty$).

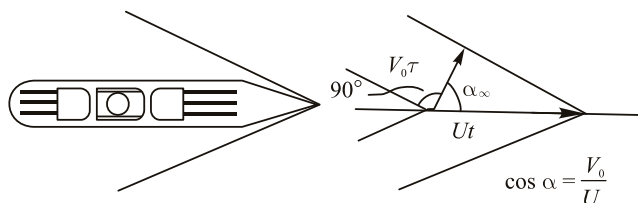


Рис. IX.10. Черенковское излучение корабля на поверхности мелкой воды

Для механических волн черенковское излучение было известно (под другим названием!) с незапамятных времен. Мы имеем в виду так называемую носовую волну корабля, образующую на поверхности достаточно мелкой воды характерную картину, похожую на клин, угол раствора которого тем меньше, чем больше скорость корабля (рис. IX.10). Носовая волна является основным источником сопротивления при движении корабля. Отсюда характерная, похожая на плуг, форма носовой части быстроходных кораблей, рассчитанная на «отваливание» волны и уменьшение ее высоты. Отметим, что для подводных лодок черенковское излучение отсутствует, так как на глубине нет медленных поверхностных волн, а звуковые волны в воде — слишком быстрые. Это значит, что подводные лодки при сравнимой мощности двигателей могут развивать значительно большие скорости. Соответственно изменяется и форма носа подводной лодки. Другой пример механического черенковского излучения — образование так называемой ударной волны (резкий скачок плотности, давления и температуры воздуха) при сверхзвуковом полете самолета. Сопротивление при этом резко возрастает и требует специальных мер, главным образом — применения характерного заостренного носа самолета. Звуковое черенковское излучение воспринимается наблюдателем как взрыв. При излучении механических волн возможен также аномальный эффект Доплера, приводящий, как мы видели выше, к возбуждению источника. В авиации это явление известно под названием флаттер (от англ. flutter — дрожать).

ГЛАВА X

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Свободная электромагнитная волна в вакууме, т. е. «чистое» электромагнитное поле без зарядов и токов, является частным примером электромагнитных волновых процессов. Обычно электромагнитная волна распространяется в некоторой среде, взаимодействуя с заряженными частицами этой среды (главным образом с электронами). В простейшем случае однородной среды, как известно, такое взаимодействие приводит в основном к изменению скорости волны и соотношения между электрическим и магнитным полями. Кроме того, как мы увидим дальше, из-за дискретности среды происходит рассеяние электромагнитной волны. Однако, если длина волны много больше межатомных расстояний, рассеяние незначительно.

В неоднородной среде картина распространения волны сложнее, главным образом из-за явления дифракции (гл. XV). Поэтому вначале рассмотрим простейший случай неоднородной среды, состоящей из разных однородных сред, разделенных бесконечно тонкой плоской границей. Неоднородность среды приводит при этом к отражению и преломлению волны. Частным примером является отражение электромагнитной волны от металлической плоскости.

§ 72. Зеркало

Как известно, все зеркала сделаны из металла, поскольку только металлы обладают достаточно высоким коэффициентом отражения. Распространенное в быту представление о стеклянном зеркале основано на недоразумении — стекло лишь предохраняет отражающий металлический слой от механических повреждений.

Рассмотрим отражение плоской электромагнитной волны (**E**, **H**), падающей по нормали к плоской металлической поверхности (рис. X.1). Примем вначале, что металл является идеально проводящим ($\sigma = \infty$). Отражен-

ная волна ($\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$) находится из граничных условий на поверхности металла ($z = 0$). Так как $\sigma = \infty$, то электрическое поле внутри металла равно нулю. В силу непрерывности тангенциальной составляющей этого поля можно написать

$$E(0) + E'(0) = 0. \quad (72.1)$$

Это значит, что интенсивность отраженной волны равна интенсивности падающей, т. е. коэффициент отражения

$$R = \frac{S'}{S} = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 = 1, \quad (72.2)$$

где S , S' — модули векторов Пойнтинга падающей и отраженной волн соответственно. Этот результат является очевидным ввиду отсутствия потерь в зеркале. Из (72.1) следует, что направление поляризации волны (направление вектора $\mathbf{E}$) изменяется при отражении на обратное. В то же время $H'(0) = H(0)$, т. е. вектор $\mathbf{H}$ сохраняет свое направление при отражении (в противном случае вектор $\mathbf{S}$ не изменил бы направление на противоположное, рис. X.1). В результате отражения возникает давление на зеркало, которое в данном случае объясняется скачком магнитного поля на поверхности металла, так как снаружи магнитное поле равно $2H$, а внутри — нулю (подробнее см. § 87). Скачок магнитного поля связан с поверхностным током (на единицу длины):

$$I_1 = \frac{c}{4\pi} 2H. \quad (72.3)$$

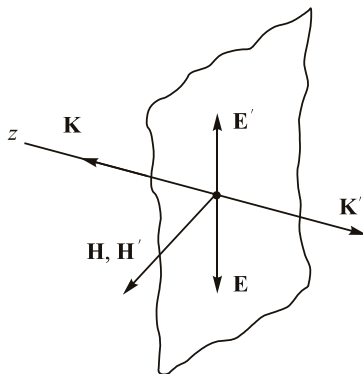


Рис. X.1. Отражение плоской электромагнитной волны от поверхности металла (нормальное падение)

Давление поля волны:

$$p = \frac{(2H)^2}{8\pi} = \frac{H^2}{2\pi}. \quad (72.4)$$

Этот же результат можно получить и исходя из представления об импульсе поля (§ 55). Поскольку поле движется с предельной скоростью c , плотность потока его импульса (т. е. давление) равна плотности потока энергии S , деленной на c . Эту величину нужно удвоить за счет давления отраженной волны (отдача). В результате получаем

$$p = 2 \frac{S}{c} = \frac{H^2}{2\pi}; \quad p \left[\frac{\text{г}}{\text{см}^2} \right] \approx 0,65 \cdot 10^{-3} S \left[\frac{\text{кВт}}{\text{см}^2} \right]. \quad (72.5)$$

Мы видим, что давление электромагнитной волны обычно очень мало. Так, *давление солнечного света* составляет всего около 10^{-7} г/см². Даже для современного лазера непрерывного действия с мощностью до десятка киловатт полная сила давления всего ~ 10 мг. И только для импульсных лазеров с мощностью до 10^{10} Вт мгновенная сила достигает величины порядка 10 кг (к этому вопросу мы вернемся в §§ 118 и 145).

Из-за конечной проводимости коэффициент отражения металла R хотя и уменьшается, но остается близким к единице во всем диапазоне частот. Даже для видимого света коэффициент отражения для многих металлов близок к единице, однако на таких больших частотах проводимость существенно отличается от статической. Так, наилучший коэффициент отражения оказывается у натрия (0,97), затем идет серебро (0,94), из которого обычно изготавливаются оптические зеркала высокого качества. Отражающим слоем в зеркалах массового употребления служит обычно напыленный алюминий ($R \approx 0,8$).

Пусть теперь волна падает на зеркало под произвольным углом к нормали (рис. X.2). Эту задачу удобно решать для двух случаев линейной поляризации волны. В первом случае вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{n})$, а вектор $\mathbf{H}$ перпендикулярен ей — так называемая *TM-волна* (*Transverse Magnetic*). Во втором случае вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ — *TE-волна* (*Transverse Electric*).

Как и для нормального падения, отраженная волна находится из граничных условий, но теперь нужно рассмотреть обе составляющие полей: нормальную (E_n, H_n) и тангенциальную (E_t, H_t). Граничные условия имеют вид

$$E_t + E'_t = 0, \quad H_n + H'_n = 0. \quad (72.6)$$

Первое условие повторяет (72.1), а второе связано с тем, что магнитные силовые линии совершенно не проникают вглубь идеального проводника. Что же касается H_t и E_n , то эти составляющие полей могут быть любыми, так как их скачок на поверхности проводника компенсируется соответственно поверхностным током и зарядом. Значения H'_t , E'_n находятся из условия сохранения энергии волны ($R = 1$), т. е. $E' = E$, $H' = H$, откуда

$$E'_n = E_n, \quad H'_t = H_t. \quad (72.7)$$

Знаки полей выбраны здесь из условия, чтобы отраженная волна распространялась в обратном направлении.

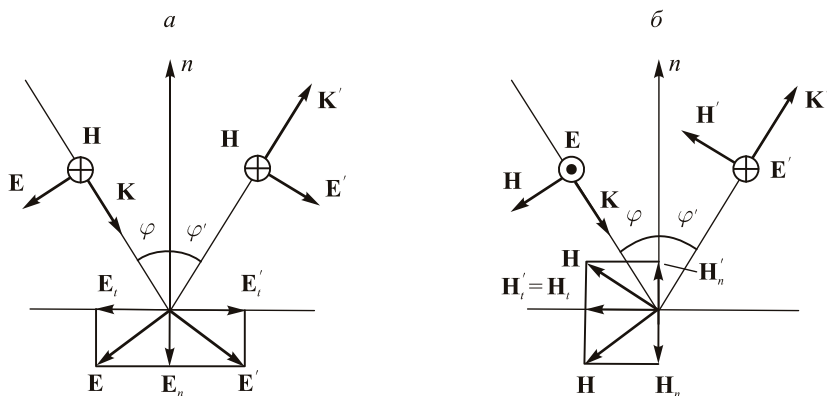


Рис. X.2. Отражение плоской электромагнитной волны от поверхности металла (косое падение); знак $\oplus$ означает, что вектор ортогонален плоскости рисунка и направлен «от нас», знак $\odot$ — то же и «на нас»

Из условий (72.6, 72.7) следует, что угол падения волны равен углу отражения (рис. X.2). Более «хитро» обстоит дело с *поляризацией*. Это связано с тем, что только составляющая E_t изменяет знак. Поэтому поворот вектора $\mathbf{E}$ в пространстве зависит как от угла падения φ , так и от поляризации волны по отношению к плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{n})$. Но если поворот вектора $\mathbf{E}$ является, тем не менее, вполне определенным, то вопрос об изменении фазы волны при отражении не может быть решен однозначно, а зависит от произвольного соглашения об отсчете фазы. Рассмотрим, например, отражение, схематически показанное на рис. X.2, а. При скользющем падении ($\varphi \rightarrow \pi/2$) направление вектора $\mathbf{E}$ почти не изменяется, поэтому естественно считать, что и фаза волны не изменяется. При отражении, показанном на рис. X.2, б, наоборот, естественно считать, что фаза изменяется на π , так как вектор $\mathbf{E}$ изменяет направление на противоположное. С другой стороны, столь же

естественно считать, что изменение фазы не зависит от угла падения φ , так как при изменении последнего не происходит никакого поворота $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ вокруг оси $\mathbf{k}$. Но тогда при нормальном падении ($\varphi = 0$) возникает неопределенность в выборе фазы. Тем самым абсолютное значение фазы волны после отражения теряет смысл, и при рассмотрении конкретных задач, особенно интерференционных (§ 92), нужно следить за направлением вектора $\mathbf{E}$.

Задача X.1. Найти частоту отраженной волны и угол ее отражения при падении на движущееся зеркало. Плоскость зеркала ортогональна вектору скорости зеркала $\mathbf{V}$, а угол между вектором $\mathbf{V}$ и вектором $\mathbf{k}$ падающей волны в лабораторной системе равен α (рис. X.3).

Пусть вектор $\mathbf{V}$ направлен по оси x . Тогда частота волны ω' и компонента k'_x в системе зеркала (см. (70.7), (70.10) и рис. X.3) равны

$$\omega' = \gamma \omega_0 (1 - \beta \cdot \cos \alpha) = \omega'_{\text{отр}}, \quad \beta = V/c, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi,$$

$$k'_x = \gamma k_0 (\cos \alpha - \beta) = -(k'_x)_{\text{отр}}, \quad k_0 = \frac{\omega_0}{c},$$

где $\alpha = 0$ соответствует нормальному падению волны на зеркало при попутном движении волны и зеркала, $\alpha = \pi$ — при встречном, $\omega'_{\text{отр}}$ — частота отраженной волны в системе зеркала. Обратные преобразования дают частоту $\omega_{\text{отр}}$ и компоненту $(k_x)_{\text{отр}}$ отраженной волны в лабораторной системе

$$\omega_{\text{отр}} = \gamma (\omega' + V (k'_x)_{\text{отр}}) = \gamma^2 \omega_0 (1 + \beta^2 - 2\beta \cdot \cos \alpha),$$

$$(k_x)_{\text{отр}} = \gamma [(k'_x)_{\text{отр}} + \beta (\omega'_{\text{отр}})/c] = \gamma^2 k_0 [2\beta - (1 + \beta^2) \cdot \cos \alpha]. \quad (72.8)$$

В случае ультрарелятивистского зеркала ($\beta \approx 1$), роль которого может играть ультрарелятивистский электрон (задача X.3 ниже), находим

$$\omega_{\text{отр}} = \begin{cases} \gamma^2 (1 - \beta)^2 \omega \approx \frac{\omega}{4\gamma^2}, & \alpha = 0, \\ \gamma^2 (1 + \beta)^2 \omega \approx 4\gamma^2 \omega, & \alpha = \pi. \end{cases} \quad (72.9)$$

Здесь использовано приближенное равенство $1 - \beta = (1 - \beta^2)/(1 + \beta) \approx 1/2\gamma^2$.

Угол отражения волны θ в лабораторной системе найдем, записав

$$k_{\text{отр}} = \frac{\omega_{\text{отр}}}{c}, \quad \cos \theta = \frac{(k_x)_{\text{отр}}}{k_{\text{отр}}} = \frac{2\beta - (1 + \beta^2) \cdot \cos \alpha}{1 + \beta^2 - 2\beta \cdot \cos \alpha} \rightarrow \theta = \begin{cases} \pi, & \alpha = 0, \\ 0, & \alpha = \pi. \end{cases}$$

Таким образом, длина волны уменьшается в $4\gamma^2$ раза при встречном столкновении ($\alpha = \pi$, рис. X.3) и во столько же раз увеличивается при столкновении «вдогонку». Впрочем, при рассеянии электромагнитной волны на электроне следует учитывать импульс отдачи, который приобретает электрон в результате столкновения с фотоном (задачи X.2, X.3). В случае падения волны на зеркало мы считали массу последнего бесконечно большой и импульсом отдачи зеркала пренебрегали.

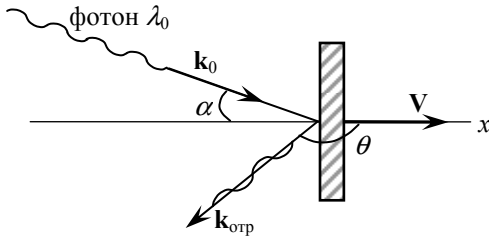


Рис. X.3. Отражение электромагнитной волны от движущегося зеркала

Задача X.2. Найти изменение частоты и длины волны излучения при его рассеянии на покоящемся электроне.

Указание: воспользоваться законами сохранения энергии и импульса сталкивающихся частиц — фотона и электрона, не прибегая к преобразованиям (70.7), (70.10).

Из условия сохранения суммарных энергии и импульса фотона и электрона запишем уравнения в лабораторной системе (рис. X.4):

$$\begin{aligned} \hbar\omega_0 + mc^2 &= \hbar\omega_{\text{отр}} + \sqrt{p^2c^2 + (mc^2)^2}, \\ \hbar\omega_0 &= pc \cdot \cos\varphi + \hbar\omega_{\text{отр}} \cdot \cos\theta, \\ 0 &= pc \cdot \sin\varphi - \hbar\omega_{\text{отр}} \cdot \sin\theta. \end{aligned} \quad (72.10)$$

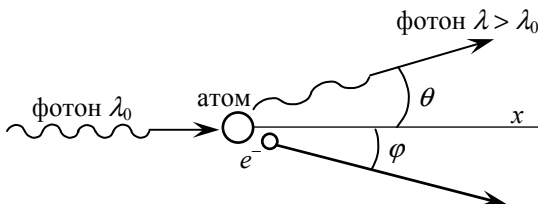


Рис. X.4. Схема рассеяния фотона на покоящемся электроне (эффект Комптона)

Здесь ω_0 и $\omega_{\text{отр}}$ — частота излучения до и после соударения, p — импульс отдачи электрона, φ и θ — углы между вектором скорости, все значения параметров — в лабораторной системе. Обратим внимание на то, что в первом уравнении использовано выражение для полной (в релятивистском смысле) энергии электрона. Здесь это принципиально, т. к. второй «участник» процесса соударения — фотон — всегда ультрарелятивистская частица (движущаяся со скоростью света c).

Исключим затем φ из второго и третьего уравнений. Найдем

$$p^2 c^2 = \hbar^2 \left[\omega_0^2 + \omega_{\text{отр}}^2 - 2\omega_0 \omega_{\text{отр}} \cdot \cos \theta \right].$$

Подставим это значение pc в первое уравнение. Перенеся затем $\hbar\omega$ в левую часть и возведя обе части равенства в квадрат, находим:

$$\omega_0 - \omega_{\text{отр}} = \frac{\hbar}{mc^2} \cdot \omega_0 \omega_{\text{отр}} (1 - \cos \theta). \quad (72.11)$$

Подставив сюда $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda}$, $\omega_{\text{отр}} = \frac{2\pi c}{\lambda_{\text{отр}}}$, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{\text{отр}}$, получим

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad \text{где} \quad \lambda_c = \frac{h}{mc} \approx 2,43 \cdot 10^{-10} \text{ см}, \quad (72.12)$$

— так называемая *комптоновская длина волны*. Мы получили этот результат, рассмотрев фактически упругое соударение двух «шаров» — фотона и покоящегося электрона. В такой модели волна (фотон) ведет себя как *частица* с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\omega/c$. Само явление изменения длины волны излучения в зависимости от угла рассеяния (72.12) было обнаружено экспериментально американским физиком Комптоном, изучавшим прохождение рентгеновских лучей через вещество — парафин (А. Н. Compton, 1922 г.). *Эффект Комптона* послужил одним из оснований квантовой механики, подтвердив *дуализм* (от лат. dualis — двойственный) природы электромагнитного излучения^{*)}.

Задача X.3. Найти изменение частоты (длины волны) электромагнитного излучения при рассеянии на релятивистском электроне.

Указание: использовать тот же метод вычислений, что и в предыдущей задаче.

Запишем систему уравнений в лабораторной системе, аналогичную (72.10), с учетом начальной скорости электрона V_0 , его энергии $\gamma_0 mc^2$ и импульса $p_0 = \beta_0 \gamma_0 mc$ (рис. X.5):

$$\begin{aligned} \hbar\omega + \gamma_0 mc^2 &= \hbar\omega_{\text{отр}} + \gamma mc^2, \\ \hbar\omega \cdot \cos \alpha + \beta_0 \gamma_0 mc^2 &= \hbar\omega_{\text{отр}} \cdot \cos \theta + \beta \gamma mc^2 \cdot \cos \varphi, \\ \hbar\omega \cdot \sin \alpha &= -\hbar\omega_{\text{отр}} \cdot \sin \theta + \beta \gamma mc^2 \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (72.13)$$

^{*)} Спор о том, что собой представляет свет — волну или поток частиц, шел со времен Ньютона и Юнга и был разрешен в результате создания квантовой физики.

Исключив из второго и третьего уравнений угол φ и подставив в полученное уравнение значение γ из первого, получаем в результате

$$\omega_{\text{отр}} = \omega \frac{1 - \beta_0 \cdot \cos \alpha}{\frac{\hbar \omega}{\gamma_0 m c^2} (1 - \cos(\alpha + \theta)) + (1 - \beta_0 \cos \theta)}. \quad (72.14)$$

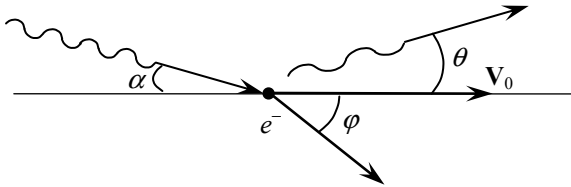


Рис. X.5. Рассеяние фотона на движущемся электроне

Соотношение между углами падения α и отражения θ дает решение задачи квантовой электродинамики (что выходит за рамки данного курса). Тем не менее для заданных α и θ формула (72.14) содержит важные характеристики рассеянного излучения. Отметим, прежде всего, что первое слагаемое в знаменателе как раз и учитывает конечность массы электрона. При $\beta_0 = 0$ (покоящийся электрон, $\gamma_0 = 1$, в этом случае $\alpha = 0$ по определению) формула (72.14) переходит в (72.11) (в чем читатель может без труда убедиться).

Для ультрарелятивистского электрона ($\gamma_0 m c^2 \gg \hbar \omega$) формула (72.14) принимает вид

$$\omega_{\text{отр}} = \omega \frac{1 - \beta_0 \cdot \cos \alpha}{1 - \beta_0 \cos \theta}. \quad (72.15)$$

Подставив сюда значение $\cos \theta$ из задачи X.1, приходим к значению $\omega_{\text{отр}}$ (72.8) — релятивистский («тяжелый») электрон действует как движущееся зеркало! Соответственно, при $\alpha = 0$ и π получаем эффект уменьшения ($\alpha = 0$, $\theta = \pi$ — попутное движение) или увеличения ($\alpha = \pi$, $\theta = 0$ встречное движение) энергии фотона в $4\gamma^2$ раз (72.9).

Эффект увеличения энергии фотона при отражении от релятивистского электрона называется *обратным комптоновским рассеянием*. Такой метод генерации жесткого и остронаправленного рентгеновского излучения используют в ядерной физике и физике частиц. Например, при рассеянии «встречного» света лазера

с энергией фотонов порядка 2 эВ (табл. VIII.1) на электронах с энергией 5 ГэВ ($\gamma \approx 1 \cdot 10^4$) обратно рассеянные фотоны имеют энергию 800 МэВ.

В астрофизике этот механизм изменения энергии фотона известен как *эффект Сюняева–Зельдовича* (Я. Б. Зельдович, Р. А. Сюняев, 1969 г.). Обратное комптоновское рассеяние *реликтового излучения* (§ 60) на космических электронах приводит к уширению его спектра: верхняя граница частоты излучения возрастает из-за рассеяния на «встречных» электронах, а нижняя уменьшается из-за рассеяния на «путных».

§ 73. Преломление волны

Рассмотрим теперь поведение волны на границе двух прозрачных (без потерь) сред с разными ε, μ , (рис. X.6). В этом случае происходит, как известно, не только отражение, но и преломление волны, т. е. волна проходит частично во вторую среду. Интенсивность и поляризация как отраженной, так и преломленной волн находятся по-прежнему из граничных условий на поля.

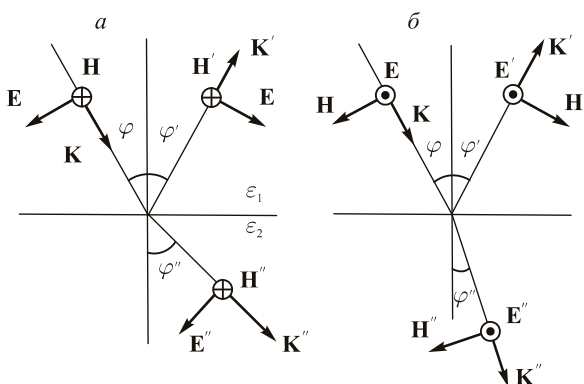


Рис. X.6. Прохождение электромагнитной волны через границу двух диэлектриков; знак $\oplus$ означает, что вектор ортогонален плоскости рисунка и направлен «от нас», знак $\odot$ — то же и «на нас»

Для *ТМ*-волны (с учетом выбора положительных направлений, как показано на рис. X.6, а) запишем

$$-E_t + E'_t = E''_t; \quad -\varepsilon_1 (E_n + E'_n) = -\varepsilon_2 E''_n; \quad H + H' = H''. \quad (73.1)$$

Последнее условие можно выразить через E , используя связь полей в волне $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$. Получаем

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E + E') = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E''. \quad (73.2)$$

Так как TM -волна не содержит нормальных составляющих магнитного поля, граничные условия дают только три уравнения (73.1) для четырех неизвестных: E'_t, E''_t, E'_n, E''_n . Недостающее уравнение можно получить из баланса энергии. Однако было бы неправильно написать это уравнение просто для векторов Пойнтинга, $S = S' + S''$, так как поперечные сечения пучков, вообще говоря, различны (рис. X.7). Поэтому баланс энергии имеет вид $FS = F'S' + F''S''$. Если F_0 — площадь пересечения пучков на границе двух сред, то $F = F_0 \cos \varphi, F' = F_0 \cos \varphi', F'' = F_0 \cos \varphi''$. Окончательно имеем

$$S \cos \varphi = S' \cos \varphi' + S'' \cos \varphi''. \quad (73.3)$$

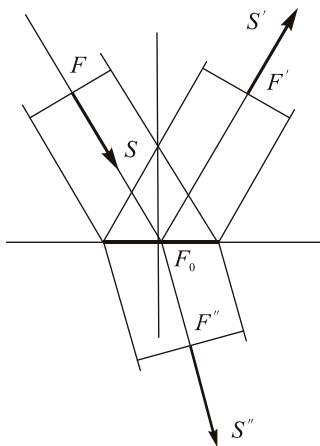


Рис. X.7 Баланс энергии при прохождении волны через границу двух диэлектриков

Формально это уравнение можно было бы вывести, вычисляя потоки энергии непосредственно на границе двух сред. Однако мы уже знаем, что в общем случае векторы Пойнтинга нельзя складывать по обычным правилам из-за явления интерференции. Выражая составляющие полей

через их абсолютные величины и углы, получим окончательную систему уравнений:

$$\begin{aligned} E \cos \varphi - E' \cos \varphi' &= E'' \cos \varphi'', \\ \varepsilon_1 (E \sin \varphi + E' \sin \varphi') &= \varepsilon_2 E'' \sin \varphi'', \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E + E') &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E'', \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E^2 \cos \varphi &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E')^2 \cos \varphi' + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} (E'')^2 \cos \varphi''. \end{aligned} \quad (73.4)$$

Чтобы упростить решение этой системы, сделаем естественное предположение (которое проверим ниже), что

$$\varphi = \varphi', \quad (73.5)$$

как и при отражении от металла. Тогда второе и третье уравнения дают закон преломления

$$n_1 \sin \varphi' = n_2 \sin \varphi'', \quad (73.6)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ — показатель преломления. Теперь из первого и третьего уравнений можем найти E' , E'' :

$$\begin{aligned} E'_M &= E_M \frac{\lambda_\mu \cos \varphi - \lambda_\varepsilon \cos \varphi''}{\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_\varepsilon \cos \varphi''}, \quad H'_M = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cdot E'_M, \\ E''_M &= E_M \frac{2\lambda_\varepsilon \cos \varphi}{\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_\varepsilon \cos \varphi''}, \quad H''_M = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cdot E''_M, \\ \lambda_\varepsilon &= \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}, \quad \lambda_\mu = \sqrt{\mu_1/\mu_2}, \quad \cos \varphi'' = \sqrt{1 - \lambda_\varepsilon^2 \lambda_\mu^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (73.7)$$

Коэффициент отражения, определенный как отношение полного потока энергии в отраженной волне к этой же величине в падающей:

$$R_M = \left(\frac{E'_M}{E_M} \right)^2 = \left(\frac{\lambda_\mu \cos \varphi - \lambda_\varepsilon \cos \varphi''}{\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_\varepsilon \cos \varphi''} \right)^2. \quad (73.8)$$

Определенный аналогичным образом коэффициент прохождения:

$$T_M = \frac{\lambda_\mu}{\lambda_\varepsilon} \left(\frac{E''_M}{E_M} \right)^2 \frac{\cos \varphi''}{\cos \varphi} = \frac{4\lambda_\varepsilon \lambda_\mu \cos \varphi \cos \varphi''}{(\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_\varepsilon \cos \varphi'')^2}. \quad (73.9)$$

Закон сохранения энергии требует, чтобы $R_M + T_M = 1$, что действительно выполняется. Этим самым проверено, что полученное решение удовлетворяет четвертому уравнению (73.4), и оправдано предположение (73.5), сделанное выше.

Обращаясь теперь к TE -волне, заметим, что она отличается от TM -волны заменой $E \rightarrow H$, $H \rightarrow -E$ (см. рис. X.6, б). Граничные условия для E и H также переходят друг в друга, если заменить $\varepsilon \rightarrow \mu$, $\mu \rightarrow \varepsilon$. Поэтому можем сразу написать решение для TE -волны, произведя указанные замены в (73.7)–(73.9):

$$\begin{aligned} H'_E &= H_E \frac{\lambda_\varepsilon \cos \varphi - \lambda_\mu \cos \varphi''}{\lambda_\varepsilon \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi''}, & E'_E &= \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} H'_E, \\ H''_E &= H_E \frac{2\lambda_\mu \cos \varphi}{\lambda_\varepsilon \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi''}, & E''_E &= \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} H''_E, \\ R_E &= \left(\frac{H'_E}{H_E} \right)^2 = \left(\frac{\lambda_\varepsilon \cos \varphi - \lambda_\mu \cos \varphi''}{\lambda_\varepsilon \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi''} \right)^2, \\ T_E &= \frac{\lambda_\varepsilon}{\lambda_\mu} \left(\frac{H''_E}{H_E} \right)^2 \frac{\cos \varphi''}{\cos \varphi} = \frac{4\lambda_\varepsilon \lambda_\mu \cos \varphi \cos \varphi''}{(\lambda_\varepsilon \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi'')^2}. \end{aligned} \quad (73.10)$$

Соотношения (73.7)–(73.10) называются *формулами Френеля* (О. J. Fresnel) по имени французского физика, получившего их в 1823 г. Отметим, что в немагнитной среде ($\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\lambda_\mu = 1$) формулы (73.7), (73.10) упрощаются:

$$\begin{aligned} E'_M &= E_M \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \varphi'') \cdot \operatorname{ctg}(\varphi + \varphi''), & E''_M &= \frac{2 \sin \varphi'' \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi'') \cdot \cos(\varphi - \varphi'')}, \\ H'_E &= H_E \cdot \frac{\sin(\varphi'' - \varphi)}{\sin(\varphi'' + \varphi)}, & H''_E &= H_E \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi'' + \varphi)}. \end{aligned}$$

Обратим внимание также на поляризацию каждой из трех волн — падающей, отраженной и проходящей (рис. X.6). В случае TM -волны (рис. X.2, а и рис. X.6, а) поляризации волн одинаковы в обоих случаях — отражения от зеркала и падения на границу раздела двух прозрачных сред. Для TE -волны (рис. X.2, б и рис. X.6, б) поляризации отраженных волн в случае зеркала и прозрачной среды отличаются направлением вектора $\mathbf{E}$. Поляризация проходящей волны в случае прозрачных сред для обоих видов поляризации та же, что и у падающей волны (рис. X.6, а и б).

Отметим следующие особенности отражения и преломления волны на границе двух сред. Во-первых, интенсивность преломленной волны обращается в нуль при $\varphi = \pi/2$, т. е. «скользящий луч» полностью отражается. Это почти очевидно (задача X.4). Менее очевидно, что волна может полностью отражаться и при наклонном падении, если выполнено условие

$$\sin \varphi > \frac{1}{\lambda_e \lambda_\mu} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (73.11)$$

Это явление называется *полным внутренним отражением*, так как оно возможно только при $n_2 < n_1$, т. е. при переходе в оптически менее плотную среду. Мы рассмотрим это явление подробнее в § 74.

Задача X.4. Найти значение коэффициента отражения электромагнитной волны от плоской границы раздела двух диэлектриков при скользящем падении $\varphi = \pi/2 - \alpha$, $\alpha \ll 1$.

При $\mu_1 = \mu_2 = 1$ находим $\lambda_e = n_1/n_2$. Тогда

$$R_M \approx \frac{\left(\alpha - \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \cdot \cos^2 \alpha} \right)^2}{\left(\alpha + \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \cdot \cos^2 \alpha} \right)^2} \approx \frac{\left(\alpha - \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 - 1 + \alpha} \right)^4}{\left(\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 - 1 + \alpha \right)^2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 1.$$

Точно такой же результат получаем для R_E .

Явление полного внутреннего отражения хорошо известно. Менее известно, что при определенном угле падения возможно *полное прохождение волны*. Рассмотрим сначала ТМ-волну. Полагая $R_M = 0$, найдем этот угол:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_M = \frac{\lambda_e^2 - \lambda_\mu^2}{\lambda_e^2 (\lambda_e^2 \lambda_\mu^2 - 1)} > 0. \quad (73.12)$$

Последнее неравенство есть условие существования эффекта. Если $\mu = 1$, соотношение (73.12) принимает более простой вид ($n = \sqrt{\epsilon}$):

$$\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{1}{\lambda_e} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (73.13)$$

Это явление было открыто в начале прошлого века Малюсом, Био и Брюстером (E. L. Malus, J. B. Biot, D. Brewster, 1810–1815 гг.). В связи

с этим угол φ_M (73.13) называют обычно *углом Брюстера*. Отметим, что полное прохождение волны не зависит от ее направления, а углы Брюстера для прямого и обратного направлений связаны простым соотношением $\operatorname{tg} \varphi_M^+ \operatorname{tg} \varphi_M^- = 1$, откуда $\varphi_M^+ + \varphi_M^- = \pi/2$. С другой стороны, в силу обратимости законов распространения волны (§ 66), угол падения φ_M^- должен быть одновременно углом преломления для φ_M^+ . Таким образом, последнее соотношение связывает также углы падения и преломления при полном прохождении волны:

$$(\varphi_M^+)' + (\varphi_M^+)'' = \frac{\pi}{2}. \quad (73.14)$$

Для TE -волны в среде с $\mu = 1$ такое полное прохождение волны невозможно. Действительно, из (73.12) с заменой $\varepsilon \leftrightarrow \mu$ получаем $\operatorname{tg}^2 \varphi_E = -(n_2/n_1)^2 < 0$.

Пример зависимости коэффициента отражения от угла падения для границы воздух — стекло приведен на рис. X.8. При достаточно больших φ коэффициенты отражения R_M и R_E заметно отличаются. Поэтому плоскость поляризации, вообще говоря, поворачивается. Если падающая волна «неполяризована», т. е. представляет собой суперпозицию волн со всевозможными направлениями поляризации и случайными фазами, то после отражения возникает некоторая преимущественная поляризация. При отражении под углом Брюстера неполяризованная волна превращается в чистую TE -волну.

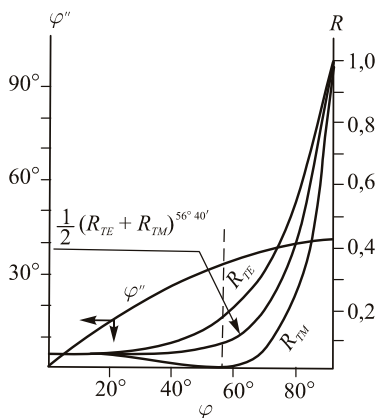


Рис. X.8. Характеристические кривые прохождения света через границу воздух—стекло: $n_1 = 1$, $n_2 = 1,52$; R_{TE} , R_{TM} — коэффициенты отражения для TE - и TM -поляризации; $(R_{TE} + R_{TM})/2$ — коэффициент отражения неполяризованного света; φ'' — угол преломления; φ — угол падения; угол Брюстера равен $56^\circ 40'$

При нормальном падении поле отраженной волны для обеих поляризаций ($\mu = 1$)

$$E' = E \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \quad (73.15)$$

и векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}'$ антипараллельны при $n_2 > n_1$ и параллельны при $n_2 < n_1$ (еще раз подчеркнем, что положительными считаются направления $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$, при которых соответствующая волна распространяется в «правильном» направлении). Коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении

$$R_E = R_M = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2, \quad T_E = T_M = \frac{4n_2 n_1}{(n_2 + n_1)^2}. \quad (73.16)$$

Например, для перехода воздух–стекло $R \approx 0,04$; $T \approx 0,96$.

В заключение этого параграфа отметим, что все полученные выше формулы справедливы для любой зависимости полей от времени, т. е. для любого спектра волны, в частности для белого света. Это связано с тем, что граничные условия должны выполняться в каждый момент времени. Отсюда вытекает, что все три волны на границе двух сред должны иметь одинаковую зависимость от времени (для неподвижной границы). В частности, поэтому же частоты всех трех волн должны быть одинаковы.

§ 74. Полное внутреннее отражение. Туннельный эффект

Согласно условию (73.11), угол полного внутреннего отражения φ_0 удовлетворяет равенству

$$\sin \varphi_0 = \frac{n_2}{n_1} < 1, \quad (74.1)$$

и преломленная волна отсутствует. Это не означает, что во второй среде нет поля. Действительно, граничные условия (73.1) нельзя удовлетворить только с помощью двух волн. Однако $R = 1$, поэтому $E = E'$ и $H = H'$. Из баланса энергии (73.3) следует тогда, что $\cos \varphi'' = 0$, поскольку $S'' \neq 0$, как мы увидим ниже. Граничные условия (73.4) принимают здесь вид

$$\cos \varphi = \cos \varphi', \quad E_M'' = 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_M \sin \varphi, \quad H_M'' = 2 H_M. \quad (74.2)$$

Четвертое условие (73.4) мы уже использовали выше ($E = E'$, $H = H'$), а третье записали для H , H'' , как в исходной системе (73.1), так как поле во второй среде не является плоской волной, и поэтому $H'' \neq \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} E''$. Отношение полей можно найти из уравнения (74.2):

$$\frac{E''_M}{H''_M} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\varepsilon_2} \sin \varphi. \quad (74.3)$$

Отметим, что при $\varphi \rightarrow \varphi_0$ это отношение полей становится таким же, как и в свободной волне: $E''_M/H''_M \rightarrow \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$.

Вектор $\mathbf{E}''_M$ направлен по нормали к поверхности раздела, как было показано выше, а вектор $\mathbf{H}''_M$ — вдоль поверхности. Поэтому вектор Пойнтинга направлен вдоль границы в направлении падающей волны и равен

$$S''_M = 4 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} S_M \sin \varphi. \quad (74.4)$$

Для TE -волны заменой $E \rightarrow H$, $H \rightarrow -E$ получим

$$\frac{H''_E}{E''_E} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\mu_2} \sin \varphi, \quad S''_E = 4 \frac{\mu_1}{\mu_2} S_E \sin \varphi. \quad (74.5)$$

Граничные условия определяют поле непосредственно у поверхности раздела. Как выглядит поле во второй среде вдали от поверхности? Ограничимся случаем монохроматической волны. Используя связь между частотой и волновым вектором в среде $\omega = kv = kc/n$ и разлагая $\mathbf{k}$ на нормальную и тангенциальную компоненты, можем написать

$$k_{1n}^2 + k_{1t}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2, \quad k_{2n}^2 + k_{2t}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2. \quad (74.6)$$

Используем теперь закон преломления (73.6), который на языке волнового вектора означает сохранение его тангенциальной составляющей:

$$k_{1t} = k_{2t}. \quad (74.7)$$

Заметим попутно, что закон отражения $\varphi' = \varphi$ можно записать в аналогичной форме: $k'_t = k_t$. Исключая из (74.6) k_{2t} с помощью (74.7), найдем

$$k_{2n}^2 = k_2^2 \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \varphi \right). \quad (74.8)$$

При условии полного внутреннего отражения $(\sin \varphi > n_2/n_1)$ $k_{2n}^2 < 0$, и, следовательно, $k_{2n} = \pm i|k_{2n}|$ становится мнимым. Это означает, что волна экспоненциально затухает вглубь второй среды. Действительно, поле во второй среде можно представить в виде

$$E''(z) = E_0'' e^{ik_{2n}z} = E_0'' e^{-|k_{2n}|z}, \quad (74.9)$$

где z — координата вдоль нормали к поверхности; E_0'' — поле на границе (74.2). Знак в экспоненте выбран из условия $E'' \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Это условие означает, в сущности, что волна приходит из первой среды. Таким образом, при полном внутреннем отражении поле проникает во вторую среду на глубину

$$\Delta z \sim l = \frac{1}{|k_{2n}|} = \frac{\lambda_2}{2\pi \sqrt{(\sin \varphi / \sin \varphi_0)^2 - 1}}. \quad (74.10)$$

Для φ , не слишком близких к φ_0 , глубина проникновения оказывается порядка длины волны λ_2 во второй среде.

Теперь легко понять, почему энергия во второй среде течет вдоль поверхности. Рассмотрим предельный случай скользящего падения ($\varphi \rightarrow \pi/2$), когда волна в первой среде распространяется почти параллельно поверхности. В силу граничных условий фаза поля во второй среде должна совпадать с фазой падающей волны. Отсюда получается неожиданный результат: поле во второй среде будет распространяться с фазовой скоростью волны в первой среде. Это, однако, не противоречит соотношению (74.6), так как, хотя волна во второй среде распространяется вдоль поверхности, $k_{2n} \neq 0$ из-за затухания волны. Для фазовой скорости поля во второй среде получим

$$v_2 \equiv \frac{\omega}{k_{2t}} = \frac{\omega}{k_{1t}} = \frac{c/n_1}{\sin \varphi} \rightarrow v_1 \quad (\varphi \rightarrow \pi/2). \quad (74.11)$$

При произвольном φ ($\sin \varphi > n_2/n_1$) скорость v_2 равна «проекции» $v_{1t} = v_1/\sin \varphi$. При $\varphi \rightarrow \varphi_0$ фазовая скорость во второй среде становится «нормальной»: $v_2 \rightarrow c/n_2$. Физический смысл полученного результата состоит в том, что поле во второй среде не является независимой (свободной) волной, а как бы жестко «скреплено» (граничными условиями) с полем падающей волны.

Полное внутреннее отражение используется в оптической технике для поворота луча. Примером могут служить призмы, изображенные на рис. Х.9. Первая из них (а) работает как обычное зеркало: угол падения (по отношению к косой грани) равен углу отражения. Вторая призма (б) оказы-

вается более «хитрой»: она поворачивает луч на 180° независимо от угла падения, если луч лежит в плоскости рисунка. Призма (в) избавлена и от последнего ограничения: она отражает луч точно назад независимо от его направления. Это так называемый «угловой отражатель» — трехгранная пирамида, получающаяся отсечением угла куба. В проекции па любую боковую грань призмы отражение происходит от двух взаимно перпендикулярных плоскостей, т. е. аналогично случаю (б). Отражатель из нескольких десятков призм типа (в) был установлен американскими космонавтами на Луне и позволяет с огромной точностью (~ 15 см) измерять траекторию Луны по отражению лазерного луча.

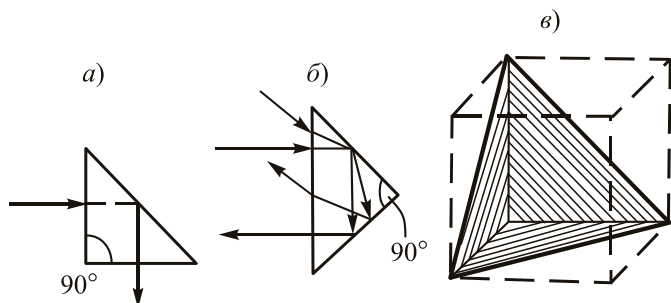


Рис. X.9. Примеры использования призмы полного внутреннего отражения: а) поворот пучка света на 90° ; б) поворот пучка света на 180° ; в) «угловой отражатель» — отражение произвольно направленного пучка света на 180°

Еще одно практически важное применение явления полного внутреннего отражения — *диэлектрические волноводы*, обсуждение которых отложим до § 86.

Проникновение волны во вторую среду в условиях полного внутреннего отражения приводит к интересному явлению при наличии третьей среды (рис. X.10). Пусть, например, две стеклянные пластинки разделены щелью шириной d . Если $d \gg \lambda$, граничные условия на второй пластинке будут слабо влиять на полное внутреннее отражение в первой. Поэтому для оценки можно воспользоваться выражением (74.9). Пренебрегая разницей между E и E'' , а также отражением на входе во вторую пластинку, получим оценку для коэффициента прохождения через щель:

$$T \sim e^{-2|k_n|d} = e^{-\frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{1-n^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (74.12)$$

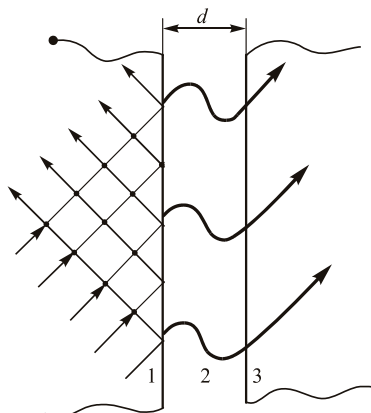


Рис. X.10. Туннельный эффект при полном внутреннем отражении: 1, 3 — стеклянные пластинки, 2 — воздушная щель

Явление это получило название *туннельного эффекта*. Туннельный эффект связан с другим важным понятием *оптического контакта* двух сред. Последний имеет место, если ширина щели $d \ll \lambda$, когда волна проходит из одной среды в другую без существенного отражения, независимо от угла. Так как для света $\lambda \sim 0,5$ мкм, то для достижения оптического контакта требуется очень тщательная шлифовка поверхностей. По этой же причине наблюдение туннельного эффекта для света является очень тонким экспериментом. Однако его легко провести, например, в диапазоне сантиметровых длин волн, используя диэлектрические пластинки.

§ 75. Стоячая волна

Рассмотрим отражение плоской монохроматической волны с круговой поляризацией от идеального зеркала при нормальном падении (рис. X.11). В результате суперпозиции падающей и отраженной волн в пространстве перед зеркалом электромагнитное поле, с учетом граничных условий (72.1), описывается выражениями

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 e^{i(-kz - \omega t)} - E_0 e^{i(kz - \omega t)} = -2iE_0 e^{-i\omega t} \sin kz, \\ H(z, t) &= -iE_0 e^{i(-kz - \omega t)} - iE_0 e^{i(kz - \omega t)} = -2iE_0 e^{-i\omega t} \cos kz. \end{aligned} \quad (75.1)$$

Обратим внимание, что здесь, как и на рис. X.11, падающая волна распространяется справа налево, против оси z (первые экспоненты в (75.1), см. текст к формулам (69.3), (69.5)).

Такое поле называется *стоячей волной*. Действительно, оно представляет собой модулированную по амплитуде волну, огибающая которой неподвижна в пространстве. Период огибающей равен $\lambda/2$, причем огибающие E и H сдвинуты на $\lambda/4$. Нули поля называются *узлами стоячей волны*. Узлы E расположены в точках $z_n = n\lambda/2$. Один из узлов в соответствии с граничными условиями приходится на зеркало ($z = 0$).

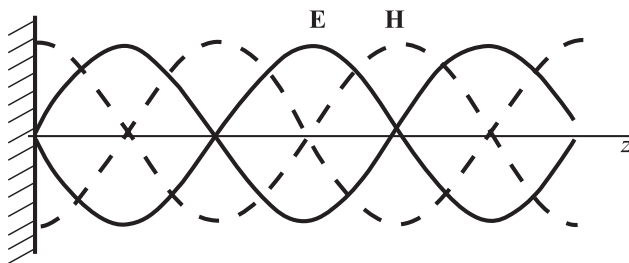


Рис. X.11. Образование стоячей волны при отражении

Из (75.1) вытекает еще одна интересная особенность поля стоячей волны с круговой поляризацией (75.1): $\mathbf{H} = \pm \mathbf{E}$, т. е. эти векторы параллельны в отличие от бегущей волны, где они взаимно перпендикулярны.

В случае линейной поляризации падающую волну можно представить в виде

$$E_{\text{пад}}(z, t) = \frac{E_0}{2} \left(e^{-i(kz + \omega t)} + e^{i(kz + \omega t)} \right) = E_0 \cos(kz + \omega t), \quad (75.2)$$

$$H_{\text{пад}}(z, t) = -iE_{\text{пад}}(z, t).$$

Стоячая волна описывается теперь выражением

$$E(z, t) = E_0 (\cos(kz + \omega t) - \cos(kz - \omega t)) = -2E_0 \sin kz \cdot \sin \omega t, \quad (75.3)$$

$$H(z, t) = -2iE_0 \cos kz \cdot \cos \omega t.$$

Таким образом, векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ оказываются взаимно перпендикулярными, как и в бегущей волне.

Для стоячей волны круговой поляризации вектор Пойнтинга тождественно равен нулю в силу параллельности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В случае линейной поляризации

$$S(z, t) = \frac{cE_0^2}{4\pi} \sin 2kz \cdot \sin 2\omega t, \quad (75.4)$$

т. е. энергия поля «болтается» между соседними узлами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Средний поток энергии как по z , так и по t равен нулю. Полученный результат приводит на первый взгляд к парадоксу: суперпозиция двух циркулярно поляризованных волн с нулевым вектором Пойнтинга дает волну с ненулевым потоком энергии. Это еще одна иллюстрация отмеченного ранее факта, что векторы Пойнтинга, вообще говоря, нельзя складывать по обычным правилам.

Если зеркало обладает конечной проводимостью, появляется поток энергии, направленный в сторону зеркала и соответствующий потерям энергии в нем.

Рассмотрим теперь отражение волны от идеального зеркала, движущегося с некоторой скоростью $v \ll c$. Тогда в первом приближении можно считать, что стоячая волна (75.1) будет просто смещаться вместе с зеркалом: $z \rightarrow z - vt$. Неподвижный наблюдатель будет регистрировать модуляцию амплитуды волны во времени с частотой $\Omega_M = 2kv$. С другой стороны, это есть не что иное, как эффект Доплера, в результате которого частота отраженной волны смещается (см. задачу X.1 в § 72). В системе отсчета зеркала частота как падающей, так и отраженной волн $\omega' = \omega + kv$. В результате частота отраженной волны в неподвижной системе $\omega_{\text{отр}} = \omega + 2kv$. Суперпозиция волн с разными частотами приводит к появлению модуляции с разностной частотой, $\Omega_M = \omega_{\text{отр}} - \omega = 2kv$. Последняя легко выделяется с помощью детектирования, что позволяет измерять с большой точностью скорость отражателя. Любопытный пример использования эффекта Доплера — измерение скорости движения ледников в Антарктиде. Оказалось, что средняя скорость движения одного из ледников в районе ст. Молодежная $v = 10^{-5}$ см/с ≈ 3 м/год (частота модуляции 0,3 Гц). Кроме того, ледник совершает пульсирующее движение со скоростью 100 м/год (частота 10 Гц).

§ 76. Резонаторы

Если в один из узлов стоячей волны (75.1), (75.3) поместить второе зеркало, параллельное первому, поле между зеркалами не изменится. Это простейший пример *резонатора* — так называемый *резонатор Фабри–Перо*, с которым мы еще не раз встретимся ниже (§§ 105, 144 и др.). При

заданном расстоянии между зеркалами L стоячая волна, векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ которой параллельны зеркалам, образуется при условии

$$kL = n\pi, \quad \text{или} \quad L = n\lambda/2, \quad \omega_n = n\pi c/L, \quad (76.1)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Второе соотношение дает так называемый *спектр резонатора*, или набор его *собственных частот*. В дальнейшем мы увидим, что любое поле в резонаторе можно представить как суперпозицию полей с собственными частотами, которые называются *собственными колебаниями поля* в резонаторе, или его *модами*. В этом отношении резонатор похож на колебательную систему с бесконечным числом степеней свободы.

Характерной особенностью мод является стационарность их амплитудной модуляции. Это означает, что амплитуды (огibaющие) собственных колебаний зависят только от координат, но не от времени. В рассматриваемом простейшем примере резонатора (см. (75.3))

$$\left| E_{\text{ampl}}^{(z)} \right| = 2E_0 \left| \sin \frac{n\pi z}{L} \right|. \quad (76.2)$$

Название «резонатор» связано с тем, что реакция этого устройства на внешнее поле резко (резонансно) зависит от частоты: легче всего «раскачать» резонатор на одной из его собственных частот. Делается это с помощью вводимого в резонатор штыря, на который подается переменное напряжение, или с помощью петли с переменным током (так называемая *петля связи*).

Можно возбудить резонатор и другим, не менее важным, способом — при помощи пучка электронов с переменным током

$$I = I_0 + I_1 \sin(\Omega t + \theta_0), \quad I_1 < I_0. \quad (76.3)$$

Пусть такой пучок малого диаметра $d \ll \lambda$ проходит сквозь резонатор параллельно электрическому полю плоскополяризованной волны (рис. X.12). Для ограничения области взаимодействия волны с пучком мы ввели вторую пару плоскостей, перпендикулярных вектору $\mathbf{E}$ и потому не влияющих на волны этой поляризации. Очевидно, что возбуждение резонатора пучком, ток которого модулирован во времени (76.3), будет наиболее эффективно в случае резонанса, т. е. когда частота модуляции Ω совпадает с частотой одной из мод резонатора,

$$\Delta\omega = \omega_n - \Omega \rightarrow 0, \quad (76.4)$$

а разность фаз модуляции пучка и колебаний поля θ_0 соответствует торможению пучка ($\theta_0 = 0$, см. (75.3)). Если в начальный момент колебания в резонаторе отсутствовали, то они автоматически возбуждаются в нужной фазе.

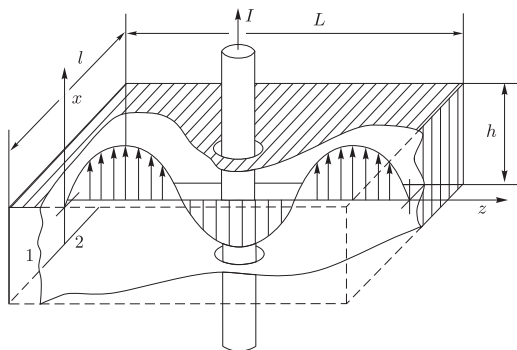


Рис. X.12. Возбуждение простейшего резонатора электронным пучком: 1 — «зеркала»; 2 — крышки резонатора; стрелками показано поле E

Средняя мощность, передаваемая резонатору пучком,

$$P = \frac{dW_n}{dt} = -\overline{IE}h = I_1 E_n h \left| \sin \frac{n\pi z_0}{L} \right| \overline{\sin^2 \omega t_0} = \frac{I_1 E_n h}{2} \left| \sin \frac{n\pi z_0}{L} \right|, \quad (76.5)$$

где z_0 — координата оси пучка, L, l, h — размеры резонатора (рис. X.12), чертой сверху обозначено усреднение по времени. Энергия поля в резонаторе, при условии, что возбуждается только одна мода колебаний с амплитудой E_n , равна

$$W_n = \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = \frac{E_n^2}{16\pi} Llh. \quad (76.6)$$

В (76.6) мы использовали выражение (75.3) с $E_n = 2E_0$. Подставляя W_n из (76.6) в (76.5) и интегрируя по времени, найдем

$$E_n = \frac{4\pi I_1}{Ll} \left| \sin \frac{n\pi z_0}{L} \right| t. \quad (76.7)$$

Таким образом, амплитуда колебаний поля в резонаторе растет пропорционально времени. Чем же определяется ее максимум? Один из факторов — торможение электронов, которое ограничивает амплитуду поля величиной

$$E_n \sim \frac{U}{h \left| \sin \frac{n\pi z_0}{L} \right|}, \quad (76.8)$$

где eU — кинетическая энергия электронов на входе в резонатор. Другой фактор — неточность условия резонанса (расстройка частоты $\Delta\omega \neq 0$). Это приводит к уходу фазы, так что через время

$$t \approx \frac{\pi}{\Delta\omega} \quad (76.9)$$

электроны начинают ускоряться, и раскачка резонатора прекращается. Максимальную амплитуду колебаний поля можно оценить, подставляя (76.9) в (76.7):

$$E_n \sim \frac{4\pi^2 I_1}{Ll|\Delta\omega|} \left| \sin \frac{n\pi z_0}{L} \right|. \quad (76.10)$$

Отметим, что при $t \ll \pi/|\Delta\omega|$ расстройка частоты не влияет на резонанс, т. е. амплитуда колебаний нарастает согласно (76.7), резонатор как бы не «чувствует» этой расстройки. Можно сказать поэтому, что частота колебаний пучка является в смысле взаимодействия его с резонатором неопределенной, причем эта неопределенность $\Delta\Omega$ тем больше, чем меньше время существования пучка:

$$|\Delta\Omega|t \sim \pi. \quad (76.11)$$

Это один из примеров так называемого *соотношения неопределенности* между частотой и длительностью колебаний. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 79.

Наконец, необходимо учесть потери энергии в стенках резонатора за счет их конечной проводимости. Максимальная амплитуда колебаний поля определяется из равенства мощности потерь и мощности «накачки» (76.5).

Потери в резонаторе, как и в контуре (§ 52), характеризуются его добротностью Q_n , которая определяет скорость затухания собственных колебаний резонатора (см. (52.22)):

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega_n}{Q_n} W. \quad (76.12)$$

Щелевой резонатор, рассмотренный выше (рис. X.12), напоминает одновитковый контур с емкостью между стенками 2. Эта аналогия становится еще более близкой для реальных резонаторов, используемых, в частности, в накопителях электронов и позитронов Института ядерной физики в Новосибирске (рис. X.13). Точный расчет полей в таком резонаторе представляет собой весьма сложную математическую задачу, однако основную (наинизшую) частоту такого резонатора можно приближенно найти, рассматривая его как контур (задача X.5 ниже).

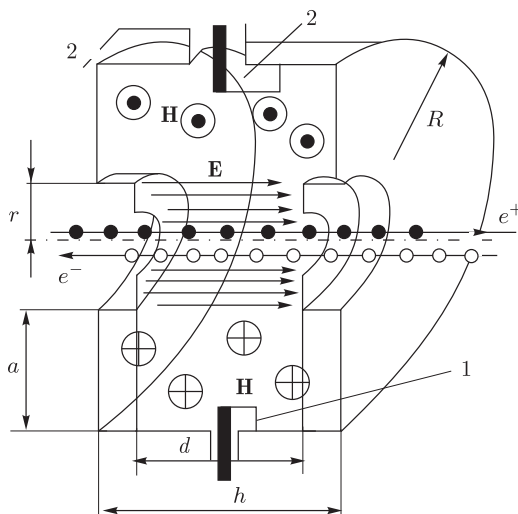


Рис. X.13. Резонатор накопителя электронов и позитронов ВЭПП-4 ИЯФ СО РАН. Рабочая частота 182 МГц ($\lambda_0 = 1,648$ м). 1 — петля обратной связи с генератором; 2 — петля ввода мощности; $R = 59$ см, $r = 12,75$ см, $h = 70$ см, $d = 49$ см. Напряжение на ускоряющем зазоре до 2 млн вольт

Задача X.5. Оценить частоту основной моды колебаний для резонатора, изображенного на рис. X.13.

В этом резонаторе электрическое и магнитное поля можно считать приближенно разделенными в пространстве. Рассматривая резонатор как последовательно включенные емкость $C \sim r^2/4d$ и индуктивность $L \sim 2ah/r$, найдем $f_0 = \omega_0/2\pi = c/\left(2\pi\sqrt{LC}\right) \sim (c/2\pi)\sqrt{2d/rah} \sim 230$ МГц, $\lambda = c/f_0 \sim 130$ см. Численные значения даны для следующих реальных размеров резонаторов ВЭПП-4: $r = 12,75$ см, $a = 46,25$ см, $h = 70$ см, $d = 49$ см. Точные значения равны: $f_0 = 182$ МГц, $\lambda_0 = 164,8$ см.

Рассмотрим теперь резонатор более простой геометрии, поддающийся точному расчету. Пусть, например, он представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами a , b , d (рис. X.14, а). В общем случае волновой вектор имеет все три составляющие вдоль сторон резонатора: k_x , k_y , k_z . Тогда граничные условия для резонатора с идеально проводящими стенками $E_t = 0$, $H_n = 0$ (см. (72.6)) дают три соотношения:

$$k_x a = l\pi, \quad k_y b = m\pi, \quad k_z d = n\pi, \quad (76.13)$$

где l, m, n — целые числа, оси x, y, z направлены вдоль сторон резонатора a, b, d соответственно. Отсюда частота моды lmn

$$\omega_{lmn} = ck = \pi c \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{d^2}}, \quad (76.14)$$

так как $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

Те же граничные условия позволяют «сразу» записать выражения для компонент электрического поля (ср. (75.3)):

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= E_{0x} \cdot \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z, \\ E_y(x, y, z) &= E_{0y} \cdot \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin k_z z, \\ E_z(x, y, z) &= E_{0z} \cdot \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \cos k_z z, \end{aligned} \quad (76.15)$$

начало координат x, y, z находится во внутреннем углу резонатора, как показано на рис. X.14, *a*. Амплитуды $E_{0\alpha}$ ($\alpha = x, y, z$) связаны между собой условием (см. (45.9))

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \text{ что дает } k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z} = 0,$$

или

$$(\mathbf{k}, \mathbf{A}) = 0. \quad (76.16)$$

Компоненты магнитного поля найдем из первого уравнения (45.9):

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Отсюда, с учетом (76.13), (76.14), находим

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) &= -\frac{ic}{\omega} (k_y E_{0z} - k_z E_{0y}) \cdot \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t}, \\ H_y(x, y, z) &= -\frac{ic}{\omega} (k_z E_{0x} - k_x E_{0z}) \cdot \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t}, \\ H_z(x, y, z) &= -\frac{ic}{\omega} (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \cdot \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (76.17)$$

Множитель $-i = e^{-i\pi/2}$ здесь означает, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ поля сдвинуты по фазе на $-\pi/2$. Заметим, что полученное выражение удовлетворяет граничному условию $H_n = 0$.

Еще одно условие, определяющее значения амплитуд $E_{0\alpha}$, $H_{0\alpha}$, можно получить из выражения для полной энергии электромагнитного поля в резонаторе (задача X.6).

Задача X.6. Вычислить энергию электромагнитного поля, запасенную в прямоугольном резонаторе (рис. X.14, а).

Нам нужно вычислить интеграл по объему резонатора

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (E^2 + H^2) \cdot dV,$$

где компоненты векторов $\mathbf{E}(x, y, z)$ и $\mathbf{H}(x, y, z)$ описываются выражениями (76.15) и (76.17). Мы видим, что зависимость функций $E_\alpha(x, y, z)$, $H_\alpha(x, y, z)$ от координат описывается произведениями функций $\cos k_\alpha x_\alpha$ и $\sin k_\alpha x_\alpha$ ($\alpha = x, y, z$), а под интегралом содержатся квадраты этих функций. Например,

$$\int_0^a \cos^2 k_x x \cdot dx \cdot \int_0^b \sin^2 k_y y \cdot dy \cdot \int_0^a \sin^2 k_z z \cdot dz = \frac{a \cdot b \cdot d}{8} \equiv \frac{V}{8},$$

где $V = abd$ — объем резонатора. И такой же результат получается для других компонент поля (76.15), (76.17). Учитывая сдвиг компонент E и H на $\pi/2$, получаем

$$W = \frac{E_0^2 \cdot \cos^2 \omega t + H_0^2 \sin^2 \omega t}{64\pi} \cdot V,$$

где

$$\begin{aligned} E_0^2 &= E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2, \\ H_0^2 &= \frac{c^2}{\omega^2} \left\{ (k_y E_{0z} - k_z E_{0y})^2 + (k_z E_{0x} - k_x E_{0z})^2 + (k_x E_{0y} - k_y E_{0x})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (76.19)$$

Добавив к выражению в скобках квадрат суммы $\left(\sum_{\alpha=1}^3 k_\alpha E_{0\alpha} \right)^2$ из (76.16), равной нулю (т. е. «квадрат нуля»), и учитывая равенство (76.14), находим, после приведения подобных и с учетом условия $\omega = ck$,

$$H_0^2 = E_0^2 \quad (76.20)$$

и

$$W = \frac{E_0^2}{64\pi} \cdot V. \quad (76.21)$$

Полученный результат показывает, что амплитуды энергии электрической и магнитной компонент равны друг другу, и энергия поля перекачивается из одной компоненты в другую, как это происходит в колебательном контуре (§ 52 и формула (52.5)).

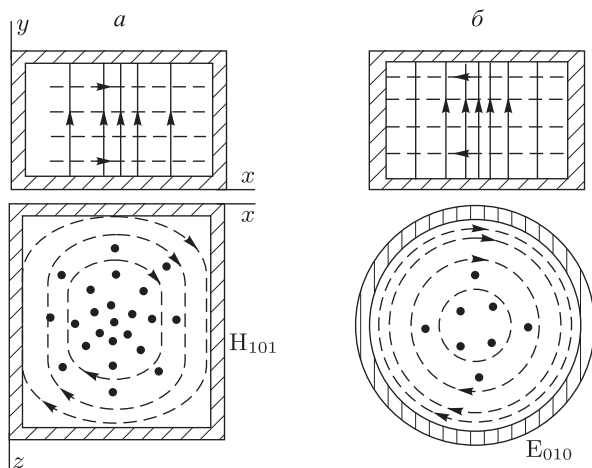


Рис. X.14. Структура электромагнитного поля в прямоугольном (а) и цилиндрическом (б) резонаторах, моды H_{101} (а) и E_{010} (б). Силовые линии: $\mathbf{E}$ — сплошные, $\mathbf{H}$ — пунктир

Как показывает результат этой задачи, при заданной энергии поля в резонаторе к уравнению (76.16), связывающему между собой компоненты электрического поля, добавляется еще первое из уравнений (76.19). Поэтому две компоненты поля могут быть выражены через третью. Но, тем не менее, неопределенность соотношения амплитуд x -, y -, z -компонент поля остается. Это характерно для так называемого *многомодового режима резонатора*, когда все три числа l , m , n отличны от нуля. Неопределенность снимается в *одномодовом режиме*, когда одна из трех компонент E_α (и соответствующая компонента H_α) равна нулю. Одномодовый режим устойчив на наименьшей (основной) частоте, которая для прямоугольного резонатора, очевидно, соответствует наименьшим возможным значениям чисел l , m , n . Одно из этих чисел можно положить равным нулю, например $n = 0$. Это значит, что поля не зависят от координаты вдоль стороны d , что возможно, если вектор $\mathbf{E}$ направлен вдоль этой стороны, а вектор $\mathbf{H}$ ему перпендикулярен. Остальные два числа $l, m \neq 0$, как это вытекает из граничных условий. Таким образом, частота основной моды

$$\omega_{110} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}, \quad a, b > d. \quad (76.22)$$

Реальные резонаторы имеют обычно сложную геометрию, например резонатор генераторной радиолампы — магнетрона (рис. X.15). Однако при любой геометрии всегда имеется дискретный спектр собственных частот, зависящих от трех целых чисел, — по числу пространственных координат.

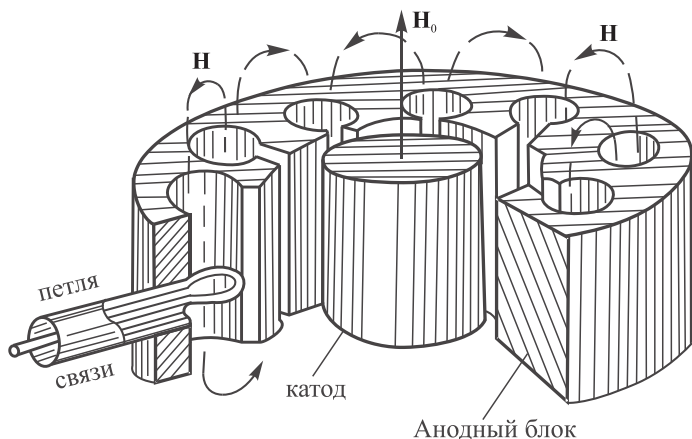


Рис. X.15. Многокамерный магнетрон (в разрезе) [16]: $\mathbf{H}$ — силовые линии СВЧ магнитного поля, $\mathbf{H}_0$ — постоянное магнитное поле

Основное применение резонаторов — генерация и усиление электромагнитных колебаний в СВЧ радиодиапазоне. В приборах такого типа — *радиолампах* — энергия электронного пучка передается полю резонатора.

Один из широко распространенных видов радиоламп — *магнетрон*, резонатор которого (рис. X.15) состоит из набора цилиндрических полостей в массивном анодном блоке, оси которых расположены по окружности, соосной с осью симметрии лампы. Лампа помещается в постоянное магнитное поле и вакуумную камеру (на рисунке не показаны). К щели между центральным цилиндром (катодом) и анодным блоком прикладывается постоянное напряжение. Электроны, эмиттированные с катода, движутся в постоянных скрещенных полях — электрическом поле в щели $\mathbf{E}_0$ и магнитном $\mathbf{H}_0$ по циклоиде, со средней скоростью дрейфа (56.9):

$$\mathbf{V} = c \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0}{H_0^2}.$$

Скорость $\mathbf{V}$ касательна к окружности, центр которой лежит на оси лампы. Электроны тормозятся СВЧ электрическим полем, которое возбуждается ими же в резонаторах-полостях и «вываливается» из них через вертикальные прорезы в анодном блоке (см. рис. X.15). СВЧ электромагнитное поле выводится из резонаторов через

петлю связи и коаксиальный волновод (§ 86). Магнетрон работает на «самовозбуждении»: электромагнитное поле в резонаторах появляется при подаче постоянного напряжения между катодом и анодом.

Другим практически важным представителем СВЧ радиолампы является *клизотрон* (от греч. *klyzo* — ударяю и «трон»^{*)}). Его схема более прозрачна (рис. X.16).

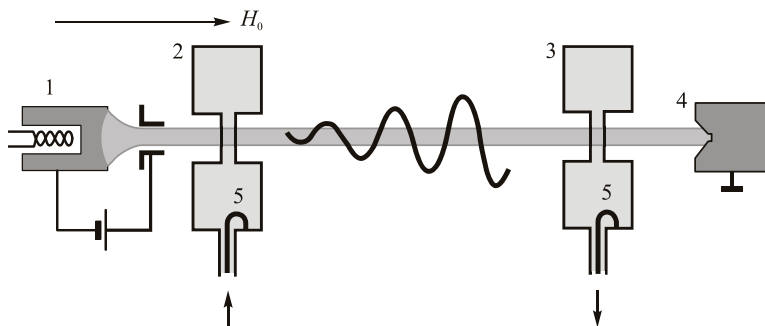


Рис. X.16. Схема клизотрона: 1 — электронная пушка, 2 — резонатор-модулятор, 3 — резонатор-генератор, 4 — коллектор, 5 — петли связи

Электроны, ускоренные в электронной пушке, проходят через «резонатор-модулятор», где пучок модулируется по энергии: электроны приобретают или теряют энергию, в зависимости от фазы СВЧ электрического поля. Затем на участке свободного движения электронов между двумя резонаторами (участок дрейфа) происходит *группировка* пучка, или модуляция его плотности: ускорившиеся электроны «убегают» от электронов, прошедших через резонатор при нулевом электрическом поле, а замедлившиеся электроны, соответственно, отстают. В результате плотность пучка на входе в резонатор-генератор зависит от времени, в первом приближении как $\sin(\omega_g t + \varphi)$, где ω_g — частота СВЧ поля клизотрона, φ — фаза. Последняя подбирается так, что электроны той части пучка, где плотность пучка выше среднего значения, проходят второй резонатор в тормозящей фазе поля и, замедляясь, отдают часть своей кинетической энергии полю этого резонатора. «Отработанный» пучок поступает в приемник электронов (коллектор). Клизотрон, схема которого показана на рис. X.16, работает как *автогенератор*, т. е. на самовозбуждении: часть энергии поля из резонатора-генератора через петли связи, соединенные волноводом, поступает в резонатор-модулятор в «правильной» фазе (положительная обратная связь). Основная же часть энергии через разветвитель передается в нагрузку. Существует и схема клизотрона — усилителя, в которой поле в резонаторе-модуляторе создается внешним источником.

^{*)} «трон» — сокращенное от электрон, часто применяемое окончание названий электронных приборов и ускорителей заряженных частиц.

Рассмотренный клистрон называется пролетным, двухрезонаторным. Существуют схемы пролетных трехрезонаторных и отражательных клистронов. Последние имеют один резонатор, пройдя который электроны отражаются электронно-оптическими устройствами («зеркало») и возвращаются в резонатор.

В пролетных клистропах транспортировка электронного пучка от катода до коллектора производится в магнитном поле, направленном вдоль оси пучка.

Следует отметить, что, несмотря на будущее развитие полупроводниковой СВЧ электроники, вакуумные радиолампы твердо удерживают свои позиции в мощных СВЧ-генераторах. Например, мощность импульсных клистронов достигает единиц мегаватт (при энергии электронов в них до сотен кЭВ), а в проекте ILC (см. ниже) предполагается использовать клистроны мощностью 10 МВт.

Другое важное применение резонатора — ускорение заряженных частиц высокочастотным электрическим полем. Ускоритель представляет собой, по существу, обращенный генератор. При конструировании резонаторов для этих приборов встречаются две основные трудности: достижение минимальных потерь и максимальной напряженности электрического поля. Например, резонатор ВЭПП-4 (см. рис. X.13) имеет добротность $Q \approx 3 \cdot 10^4$ на длине волны $\lambda_1 = 164,8$ см (см. также задачу XII.4, § 87). Максимальная добротность достигается в *сверхпроводящих резонаторах*, стенки которых изготавливаются из чистого ниобия, а рабочая температура составляет 1,8 К. Добротность таких резонаторов достигает 10^{10} . Несмотря на полное отсутствие электрического сопротивления ($\sigma = \infty$), эти резонаторы имеют конечную добротность из-за излучения электромагнитного поля через неизбежные технические отверстия, например, для ввода энергии в резонатор, а также из-за потерь на несверхпроводящих примесях. Получение высоких напряженностей электрического поля также представляет собой сложную техническую проблему. Максимальные поля в «теплых» (нормально проводящих) вакуумных резонаторах превышают 100 МВ/м. Это приблизительно на порядок больше, чем статические поля в лучших электровакуумных приборах. Такая разница связана с высокой частотой колебаний электрического поля, что затрудняет развитие разряда.

Техника генерации СВЧ электромагнитных полей высокой напряженности получила интенсивное развитие начиная с конца 1970-х гг. в связи с разработкой линейных ускорителей на встречных пучках — *линейных коллайдеров*. Идея такого коллайдера была предложена в середине 1970 гг. советскими физиками Г. И. Будкером, В. Е. Балакиным и А. Н. Скринским, а законченное проектное предложение ускорительного комплекса со встречными линейными электрон-позитронными пучками (ВЛЭПП) опубликовано в 1986 г. Как и многие другие, проект

ВЛЭПП был остановлен в 1990-е гг. Тогда же в ФРГ появился проект линейного коллайдера TESLA (Terra Electronvolt Superconducting Linear Accelerator), преобразованный позднее в международный проект International Linear Collider (ILC). Оба проекта основаны на использовании сверхпроводящих резонаторов (табл. X.1). Еще один проект — компактный линейный коллайдер (Compact Linear Collider — CLIC) разрабатывается в ЦЕРН. В нем используется схема возбуждения ускоряющей структуры — цепочки связанных нормально проводящих резонаторов — вспомогательным («драйверным») электронным пучком. Все три проекта — ВЛЭПП, ILC и CLIC — предполагают импульсный режим работы ускорителей, что облегчает решение проблемы энергозатрат.

Таблица X.1. Основные параметры резонаторов в проектах линейных коллайдеров

Проект	ВЛЭПП	ILC	CLIC
Тип резонатора	Нормально-проводящий (медь)	Сверх-проводящий (ниобий)	Нормально-проводящий
Напряженность ускоряющего поля, МВ/м:			
– максимальная ^{*)}	65,0	41,5	100
– средняя по ускорителю (проектная)	45,0	31,5	80–100
Рабочая частота, ГГц	10,0	12,0	12
Рабочая длина волны, см	3,0	2,5	2,5
Частота повторения рабочих циклов ускорителей, Гц	50	5	50

^{*)} Напряженность, достигнутая в одиночных резонаторах (не соединенных в ускоряющую структуру).

ГЛАВА XI

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

§ 77. Спектральное разложение. Периодическое поле

Свойства электромагнитной волны (как, вообще говоря, и любой другой волны), ее взаимодействие со средой, методы генерации и наблюдения существенно зависят от ее частоты или длины волны. Простейшими свойствами обладает, как правило, монохроматическая волна, поле которой изменяется во времени и в пространстве по гармоническому закону. Иными словами, такая волна имеет определенные частоту и волновое число. Что же делать, если волна немонохроматическая? Как исследовать ее свойства, например ее взаимодействие с веществом? Оказывается, что такую волну всегда можно представить как суперпозицию конечного или бесконечного числа монохроматических волн. Такой метод исследования называется спектральным разложением (волны), или, более точно, *фурье-разложением* по имени французского математика Фурье, разработавшего этот метод (J. B. J. Fourier, 1822 г.). Последнее предполагает разложение именно на гармонические составляющие, тогда как термин «*спектральное разложение*» подразумевает более общую процедуру разложения по самым различным функциям (например, сферические, функции Бесселя и др.). Отметим, что спектральное разложение составляет основу квантово-механического описания физических явлений.

Как же производится фурье-разложение? Рассмотрим плоскую волну. Пусть в начальный момент времени задан ее вектор-потенциал $A(x, 0) = A(x)$. Пусть, далее, поле $A(x)$ является периодическим, с периодом l . Оказывается, что такую функцию можно представить в виде *ряда Фурье*:

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{l}} \cdot e^{ik_n x}, \quad k_n = \frac{2\pi n}{l}. \quad (77.1)$$

Действительно, каждый член этого ряда имеет период l/n , а значит, и l . Иными словами, такой ряд представляет некоторую функцию с периодом l . Условия сходимости таких рядов выясняются в математической

теории фурье-разложения. Основной результат этой теории сводится, по существу, к тому, что любое реальное поле можно разложить в ряд Фурье.

Постоянные коэффициенты A_n характеризуют амплитуды и фазы *фурье-гармоник* (или *фурье-компонент*) поля $A(x)$. Если описывать поле действительной функции $A(x)$, то коэффициенты A_n должны удовлетворять дополнительному соотношению

$$A_n = A_{-n}^*, \quad (77.2)$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину. В случае плоской волны можно, однако, рассматривать комплексную величину $A(x)$ как полный двумерный вектор поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (§ 69). В таком случае ограничение (77.2) отпадает.

Для вычисления коэффициента A_m умножим обе части равенства (77.1) на e^{-ik_mx} и проинтегрируем по периоду. Найдем

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l A(x) \cdot e^{ik_mx} dx = |A_m| e^{i\varphi_m}. \quad (77.3)$$

Все остальные слагаемые в (77.1) исчезают, поскольку интеграл от $e^{i(k_n - k_m)x}$ не равен нулю только для $k_n = k_m$. Множитель $1/\sqrt{l}$ введен для того, чтобы выражения (77.1) и (77.3) выглядели более симметрично. Эта симметрия станет полной в случае непрерывного спектра (§ 78). Введение такого множителя необязательно и не является общепринятым. Можно, например, исключить этот множитель из (77.1), тогда в (77.3) появится множитель $1/l$.

Для действительной функции $A(x)$ ряд Фурье можно записать также в виде

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x). \quad (77.4)$$

Коэффициенты обоих рядов связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 |A_n| \cos \varphi_n, & b_n &= -2 |A_n| \sin \varphi_n, \\ a &= A_0, & A_n &= |A_n| e^{i\varphi_n}. \end{aligned} \quad (77.5)$$

Набор коэффициентов A_m , который можно рассматривать как некоторую функцию $A_m = A(k_m)$, называют *фурье-спектром* поля $A(x)$ или просто спектром (поля). Иногда различают *амплитудный* ($|A_m|$) и *фазовый* (φ_m)

спектры. В рассмотренном случае периодического поля спектр называется *дискретным*, или *точечным*, так как волновое число принимает лишь отдельные (дискретные) значения.

Совершенно аналогично производится фурье-разложение по времени, приводящее к представлению колебаний поля в некоторой точке пространства в виде набора гармонических функций от аргументов $\omega_n t$, где $\omega = 2\pi/T$, T — период колебаний поля.

Поскольку каждая из гармонических составляющих как по x , так и по t представляет монохроматическую волну, величины k_n , ω_n связаны обычным соотношением

$$k_n = \pm \frac{\omega_n}{c} = \pm \frac{n\omega_0}{c}, \quad \omega_0 = ck_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{l}{c}, \quad (77.6)$$

где знаки соответствуют разным направлениям распространения волны, причем в общем случае имеет место суперпозиция волн обоих направлений.

Задача XI.1. Найти зависимость диэлектрической проницаемости среды от частоты поля.

Зависимость диэлектрической проницаемости от частоты определяется динамикой атомных электронов. Характерной особенностью этой динамики являются гармонические колебания электронов с разными частотами, как это вытекает из вида атомных спектров. Поэтому в качестве простейшей модели диэлектрика можно взять набор различных осцилляторов с собственными частотами ω_l и плотностью соответствующих осцилляторов n_l . Уравнение движения электрона для каждого осциллятора имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_l + 2\lambda_l \dot{\mathbf{r}}_l + \omega_l^2 \mathbf{r}_l = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (77.7)$$

где λ_l — коэффициенты трения, характеризующие потери энергии в диэлектрике. Решая уравнение (77.7) и суммируя по всем осцилляторам, найдем вектор поляризации

$$\mathbf{P} = \sum_l e n_l \mathbf{r}_l = \sum_l \frac{n_l e^2 \mathbf{E} / m}{\omega_l^2 - \omega^2 - 2i\lambda_l \omega}. \quad (77.8)$$

Ограничимся далее случаем среды малой плотности (газ), когда действующее поле приближенно равно среднему. Тогда (см. (15.7), (15.8))

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \frac{P}{E_0} = 1 + \sum_l \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_l^2 - \omega^2 - 2i\lambda_l \omega}, \quad (77.9)$$

где $\omega_{pl}^2 = 4\pi n_l e^2 / m$ — «плазменная» частота осцилляторов сорта l . В плазме все $\omega = 0$ и

$$\varepsilon_p(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + 2i\lambda_p\omega}. \quad (77.10)$$

Коэффициент трения λ_p связан со статической ($\omega = 0$) проводимостью плазмы:

$$\sigma_p = \frac{j}{E} = \frac{n_p e^2}{2m\lambda_p} = \frac{\omega_p^2}{8\pi\lambda_p}. \quad (77.11)$$

Соотношения (77.10), (77.11) справедливы и для металлов, которые можно рассматривать в определенных пределах как своеобразную плазму (ср. равенства (21.4), $v_e/\lambda_s = \lambda_p$).

Задача XI.2. Найти спектр поля, которое представляет собой периодическую (период T) последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой E_a и длительностью τ (рис. XI.1, а).

«Основная» частота поля равна $\omega_0 = 2\pi/T$. Спектр поля содержит частоты $\omega_m = m\omega_0$. Используя (77.3), найдем

$$|E_m| = \frac{E_a}{\sqrt{T}} \left| \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{im\omega_0 t} dt \right| = \frac{2E_a}{\sqrt{T}} \frac{\left| \sin \frac{m\omega_0 \tau}{2} \right|}{m\omega_0}, \quad E_0 = E_a \frac{\tau}{\sqrt{T}}.$$

Фазовый спектр зависит от выбора начала отсчета. Для данного сигнала ($T/\tau = 5$) получим

$$\varphi_m = \begin{cases} 0; & 10l \leq m \leq 5(2l+1); \\ \pi; & 5(2l+1) \leq m \leq 10(l+1); \end{cases} \quad (77.12)$$

$l = 0, 1, 2, \dots$

Фурье-разложение поля (для произвольного $\tau < T$) имеет вид

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{E_a}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(m\omega_0 \tau/2)}{m} e^{-im\omega_0 t} = \\ &= E_a \frac{\tau}{T} + \frac{2E_a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\omega_0 \tau/2)}{m} \cos m\omega_0 t. \end{aligned} \quad (77.13)$$

Это разложение содержит так называемую постоянную составляющую $E = E_a \tau/T$, поскольку функция $E(t)$ положительна.

Фурье-разложение может иметь как форму (77.1), так и форму (77.4). Для рассматриваемой здесь функции $E(t)$ в разложении (77.4) присутствуют только косинусы в силу симметрии поля ($E(t) = E(-t)$). Пример спектра показан на рис. XI.1 для частного случая $T/\tau = 5$. Если же, например, $T/\tau = 1$, то из всего спектра остается одна постоянная составляющая $E = E_a$. В пределе $T \rightarrow \infty$ спектр становится «сплошным» (§ 78), так как расстояние между соседними линиями $\Delta\omega = \omega_0 \rightarrow 0$. В другом предельном случае $\tau \rightarrow 0$ спектр становится однородным: $E_m \rightarrow E_a \tau / \sqrt{T}$, т. е. фурье-амплитуды не зависят от частоты $\omega_m = m\omega_0$.

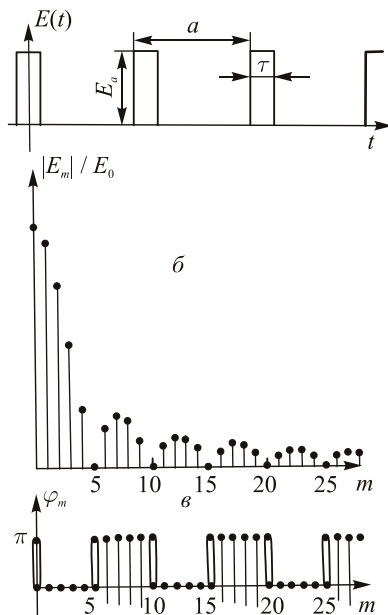


Рис. XI.1. Бесконечная последовательность прямоугольных импульсов и ее спектр: а) функция $E(t)$; б) амплитудный спектр для $T/\tau = 5$; в) фазовый спектр для $T/\tau = 5$

Операция фурье-разложения допускает простую и далеко идущую геометрическую аналогию с разложением вектора по координатным осям. Действительно, в выражении (77.1) любую комплексную периодическую функцию $f(x)$ можно рассматривать как «вектор». Совокупность всех таких «векторов» называется гильбертовым пространством. Определим скалярное произведение двух векторов гильбертова пространства как

$$(f, F) \equiv \int_0^l f(x) F^*(x) dx, \quad (77.14)$$

где l — период, одинаковый для всех функций, $F^*(x)$ — функция, комплексно-сопряженная функции $F(x)$. Рассмотрим теперь любые гармонические функции:

$$e_1 = e^{ik_1 x} / \sqrt{l}, \quad e_2 = e^{ik_2 x} / \sqrt{l}, \quad k_{1,2} = 2\pi n_{1,2} / l,$$

где $n_{1,2}$ — целые (условие периодичности). Из определения (77.14) вытекает, что «векторы» e_1, e_2 «ортогональны» $((e_1, e_2) = 0)$, если $k_1 \neq k_2$. Кроме того, они «нормированы» на единицу, так как их «модули» $(e_1, e_1) = (e_2, e_2) = 1$. Значит, набор таких гармонических функций со всевозможными k_m образует ортонормированный базис гильбертова пространства. Но тогда должна иметь место общая формула разложения вектора по базисным ортам с «проекциями» f_n вектора f на «оси координат»:

$$f(x) = \sum_n f_n e_n, \quad f_n = (f, e_n), \quad (77.15)$$

которая в точности совпадает с (77.3), в то время как само фурье-разложение (77.1) совпадает с (77.15). Отметим, что все сказанное выше не есть вывод фурье-разложения, но всего лишь наглядная аналогия. Основной вопрос теории рядов Фурье — является ли множество гармонических функций полным базисом в гильбертовом пространстве, т. е. всякую ли периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье. Ответ на него дает математический анализ.

Используя векторную аналогию, можно легко получить новое соотношение для фурье-амплитуд. Рассмотрим квадрат «вектора» $f(x)$. По общим формулам векторной алгебры имеем

$$(f, f) = \int_0^l |f|^2 dl = \sum_n |f_n|^2. \quad (77.16)$$

В случае, когда f — напряженность поля, это соотношение имеет простой физический смысл: энергия волны равна сумме энергий ее гармонических составляющих. Иначе говоря, различные гармоники волны не интерферируют между собой (§ 92).

Равенство (77.16) будем называть *балансом энергии поля*. В математической теории фурье-разложения оно называется *равенством Парсеваля*.

§ 78. Спектральное разложение. Импульсное поле

Периодическое поле является некоторым идеализированным пределом, который в действительности никогда не достигается хотя бы потому, что любое поле ограничено в пространстве и во времени. Такое ограниченное

поле называется импульсным. На рис. XI.2 приведен пример импульсного поля, возникающего при движении ультрарелятивистского электрона в магнитном поле (так называемое синхротронное излучение, § 134). Можно ли представить такое поле как суперпозицию монохроматических волн? Для изучения этого вопроса применим следующий довольно общий прием. Представим себе, что поле на рис. XI.2 периодически повторяется через некоторый период T , достаточно большой, чтобы можно было пренебречь перекрытием «хвостов» поля. Тогда можно произвести фурье-разложение, а затем, положив $T \rightarrow \infty$, вернуться к исходной задаче об импульсном поле. При $T \rightarrow \infty$ получаем

$$A(t) = \sum_n \frac{A_n}{\sqrt{T}} e^{-in\omega_0 t} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{A_n}{\sqrt{T}} e^{-in\omega_0 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (78.1)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad n = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad dn = \frac{d\omega}{\omega_0}, \quad A(\omega) = A_n \sqrt{\frac{T}{2\pi}}.$$

Хотя введение дифференциала dn не вполне корректно, так как n — целое, но это удобно в такого рода предельных переходах. Таким образом, мы получили для импульсного поля фурье-разложение, но не в виде суммы, а в виде интеграла. В этом случае говорят о *непрерывном спектре* поля, т. е. частота гармоник ω пробегает теперь непрерывный ряд значений.

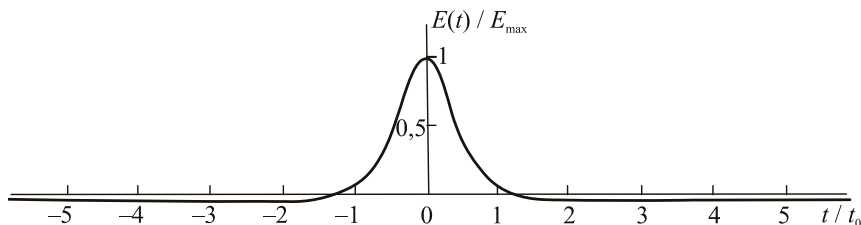


Рис. XI.2. Импульс синхротронного излучения электрона, движущегося в накопителе ВЗПП-3. Энергия — 1,5 ГэВ, радиус кривизны траектории — 8 м, $t_0 = 10^{-18}$ с

Спектр $A(\omega)$ вычисляется из (77.3) с помощью аналогичного предельного перехода:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} A_n \Big|_{T \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A(t) e^{in\omega_0 t}}{\sqrt{T}} dt \Big|_{T \rightarrow \infty} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} dt. \quad (78.2)$$

Калибровка спектра $A(\omega)$ (множитель $1/\sqrt{2\pi}$) выбрана таким образом, чтобы подчеркнуть симметрию соотношений (78.1), (78.2). Как и в случае соотношений (77.1), (77.3), такая калибровка не является общепринятой. Говорят также о *фурье-преобразовании*, причем спектр $A(\omega)$ называется *фурье-образом* функции $A(t)$, и, наоборот, $A(t)$ является *фурье-образом* $A(\omega)$. Отметим еще, что амплитуда постоянной составляющей ($\omega=0$) с точностью до множителя совпадает с интегралом от поля $A(t)$ (78.2).

Задача XI.3. Найти спектр одиночного прямоугольного импульса поля с амплитудой E_a и длительностью τ (ср. с задачей XI.2, § 77 при $T \rightarrow \infty$, рис. XI.1). По формуле (78.2) имеем

$$E(\omega) = \frac{E_a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i\omega t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_a \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega}. \quad (78.3)$$

Амплитудный спектр $|E(\omega)| = \sqrt{2}E_a |\sin \omega\tau/2|/\omega\sqrt{\pi}$ изображен на рис. XI.3, б.

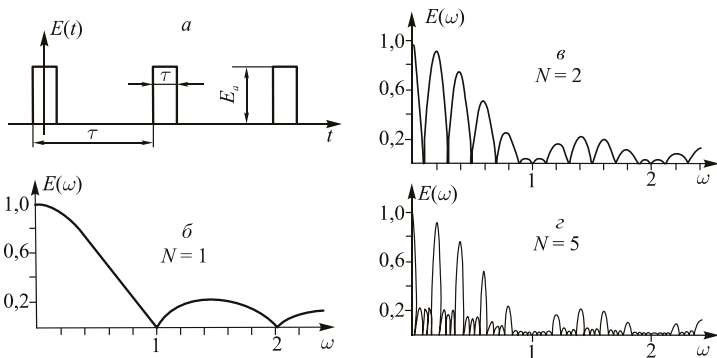


Рис. XI.3. Амплитудные спектры последовательности N прямоугольных импульсов

Найдем теперь спектр поля частоты ω_0 , существующего конечное время τ . $E(t) = E_a(t) e^{-i\omega_0 t}$, где $E_a(t) = E_a$ при $-\tau/2 < t < \tau/2$ и $E_a(t) = 0$ — в остальное время. Иначе говоря, $E_a(t)$ — только что рассмотренный прямоугольный импульс. Подставляя вместо $E_a(t)$ его фурье-разложение, мы видим, что спектр поля $E(t)$ просто сдвинут относительно спектра $E_a(t)$ на ω_0 : $E(\omega) = E_a(\omega - \omega_0)$.

Пусть теперь мы сместили поле во времени на интервал t_1 : $E_1(t) = E(t - t_1)$. Тогда в его фурье-разложении появится дополнительный множитель $e^{i\omega t_1}$: $E_1(\omega) = E(\omega) e^{i\omega t_1}$. Иными словами, фаза фурье-гармоники сместится на величину ωt_1 .

Задача XI.4. Найти спектр поля в виде группы из N одинаковых прямоугольных импульсов длительностью τ , отстоящих друг от друга на расстоянии T (рис. XI.3, а).

Спектр одиночного импульса дается выражением (78.3) с фазовым множителем $e^{in\omega T}$, где n — номер импульса. Спектр сигнала равен сумме спектров импульсов, так что получается спектр (78.3), умноженный на сумму

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^N e^{in\omega T} = \frac{1 - e^{iN\omega T}}{1 - e^{i\omega T}}. \quad (78.4)$$

Амплитудный спектр

$$|E(\omega)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_0 \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \right| \cdot \left| \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|. \quad (78.5)$$

Вид этого спектра для $N = 1, 2, 5$ изображен на рис. XI.3.

Задача XI.5. Найти спектр затухающих колебаний.

Пусть колебания, «включенные» в момент $t = 0$, затухают по экспоненциальному закону: $A(t) = A_0 e^{-i\omega_0 t - (t/\tau)}$; $t > 0$ (ср. (52.10)). С помощью (78.2) получаем

$$A(\omega) = \frac{A_0 / \sqrt{2\pi}}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \omega_0)}, \quad |A(\omega)| = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}}, \quad (78.6)$$

$$|\varphi(\omega)| = \text{Arctg}(\omega - \omega_0)\tau.$$

При $\tau \rightarrow \infty$ имеем незатухающие колебания, «включенные» в момент $t = 0$. При $\omega \neq \omega_0$ их спектр найдем из (78.6), положив $1/\tau = 0$:

$$A(\omega) = \frac{iA_0}{\sqrt{2\pi}(\omega - \omega_0)}, \quad \omega \neq \omega_0. \quad (78.7)$$

Чтобы найти поведение спектра при $\omega \rightarrow \omega_0$, произведем предельный переход $\tau \rightarrow \infty$ более аккуратно:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\tau + i\tau^2(\omega - \omega_0)}{1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2}. \quad (78.8)$$

Покажем теперь, что первое слагаемое $\pi(1 + \tau^2\Omega^2) \rightarrow \pi\delta(\Omega)$ при $\tau \rightarrow \infty$ ($\Omega = \omega - \omega_0$). Для этого вычислим интеграл

$$\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{1 + \tau^2\Omega^2} = \text{Arctg}(\tau\Omega) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi,$$

отсюда следует, что функция имеет вид

$$f(\Omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{1 + \tau^2\Omega^2}, \quad (78.9)$$

т. е. $f(\Omega) = \delta(\Omega)$ обладает всеми свойствами δ -функции (§ 8):

$$f(\Omega) = \begin{cases} 0, & \Omega \neq 0, \\ \infty, & \Omega = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cdot d\Omega = 1.$$

Второе слагаемое в (78.8) $i\tau^2(\omega - \omega_0) / \left[1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2 \right]$ при $\tau \rightarrow \infty$ дает (78.7).

В результате получаем спектр незатухающих колебаний в виде

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A_0 \delta(\omega - \omega_0) + \frac{iA_0}{\sqrt{2\pi}(\omega - \omega_0)}. \quad (78.10)$$

Второе слагаемое в этом выражении возникает вследствие включения колебаний в момент $t = 0$. Если рассмотреть нарастающие колебания, которые включаются при $t = 0$, $A_1(t) = A_0 e^{-i\omega_0 t + (t/\tau)}$, $t > 0$, то их спектр будет отличаться от (78.6) знаком при i , т. е. $A_1(\omega) = A^*(\omega)$. То же относится и к предельному спектру (78.10). Если теперь сложить оба колебания, то в пределе $\tau \rightarrow \infty$ получатся монохроматические колебания $A_{\Sigma} = A + A_1 \rightarrow A_0 e^{-i\omega_0 t}$, спектр которых есть δ -функция, умноженная на константу:

$$A_{\Sigma}(\omega) = \sqrt{2\pi} A_0 \delta(\omega - \omega_0). \quad (78.11)$$

При $\omega_0 = 0$ получим из (78.10) спектр «ступеньки», т. е. постоянного поля, включенного в момент $t = 0$, а из (78.11) — спектр стационарного поля.

Задача XI.6. Найти спектр поля гауссовой конфигурации: $A(x) = A_0 e^{-x^2/2l^2}$.

Интеграл в (78.2) берется с помощью следующего приема. В показателе экспоненты выделяем полный квадрат,

$$-\frac{x^2}{2l^2} - ikx = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}l} + \frac{ikl}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{k^2 l^2}{2},$$

и переходим к новой переменной, $y = (x/\sqrt{2l}) + (ikl/\sqrt{2})$. Учитывая значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}, \quad (78.12)$$

находим

$$A(k) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2 l^2/2} \sqrt{2l} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = A_0 l e^{-k^2 l^2/2}, \quad (78.13)$$

т. е. фурье-образ поля также имеет гауссову форму.

Задача XI.7. Найти спектр периодической последовательности N импульсов поля, имеющих гауссову зависимость от времени:

$$A_n(t) = A_0 e^{-t_n^2/2\tau^2}, \quad t_n = t - nT, \quad 0 \leq n \leq N; \quad (78.14)$$

T — период следования импульсов (рис. XI.4, а). Спектр функции (78.14) найдем, записав из (78.2):

$$A_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cdot e^{i\omega t} dt = \frac{A_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot e^{i\omega \tau x} dx \cdot \sum_{n=0}^N e^{i\omega nT}, \quad (78.15)$$

где $x = (t - nT)/\tau$. Дополняя показатель экспоненты, как и в предыдущей задаче, до полного квадрата, после интегрирования и суммирования геометрической прогрессии $e^{i\omega nT}$ получим

$$A_\omega(\omega) = A_0 \tau \cdot e^{-\omega^2 \tau^2/2} \cdot \left| \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|.$$

Это выражение удобно представить в виде

$$A_\omega(\omega) = A_\omega(0) \cdot e^{-\omega^2 \tau^2/2} \cdot \left| \frac{\sin \frac{N\pi\omega}{\omega_T}}{\sin \frac{\pi\omega}{\omega_T}} \right|, \quad (78.16)$$

$$A_\omega(0) = NA_0 \tau, \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T}.$$

Спектральная функция $A_\omega(\omega)$ представляет собой (рис. XI.4, б) набор главных максимумов

$$A_\omega^{\max} = N A_\omega(\omega_k) = N^2 A_0 \tau \cdot e^{-\omega_k^2 \tau^2 / 2}, \quad \omega_k = k \cdot \omega_T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (78.17)$$

и второстепенных (соответствующих максимуму «быстрого» синуса в числителе дроби в (78.16)):

$$(A_\omega)_l = \frac{A_\omega(0)}{\left| \sin \frac{\pi \omega_l}{\omega_0} \right|}, \quad \omega_l = \left(l + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\omega_0}{N}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (78.18)$$

Спектральная функция промодулирована огибающей

$$f(\omega) = e^{-\omega^2 \tau^2 / 2}, \quad (78.19)$$

быстро спадающей с ростом ω . Ширину главных максимумов находим из условия сдвига фазы быстрого синуса на π .

$$\delta\omega_{\max} \approx \omega_T / N, \quad (78.20)$$

а ширина спектра — порядка

$$\Delta\omega_{\text{spectrum}} \sim 2/\tau. \quad (78.21)$$

При $N \rightarrow \infty$ интеграл Фурье (78.15) переходит в ряд Фурье:

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = n\omega_T = n \frac{2\pi}{T}, \quad A_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} A(t) \cdot e^{-i\omega_n t} dt.$$

Подставив в подынтегральное выражение значение $A(t)$ (78.14), находим при $T \gg \tau$

$$A_n = \frac{A_0}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_n^2 / 2 \tau^2 - i\omega_n t} dt \approx \frac{A_0 \tau}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 / 2} dy \cdot e^{-\omega_n^2 \tau^2 / 2} = \frac{A_0 \tau \sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}} e^{-\omega_n^2 \tau^2 / 2}. \quad (78.22)$$

Таким образом, спектральная функция непрерывной последовательности «гауссовых» импульсов излучения представляет собой набор гармоник частоты ω_0 , амплитуда которых убывает с номером гармоники как $e^{-n^2 \omega_0^2 \tau^2 / 2}$ (ср.: (78.16), (78.19)).

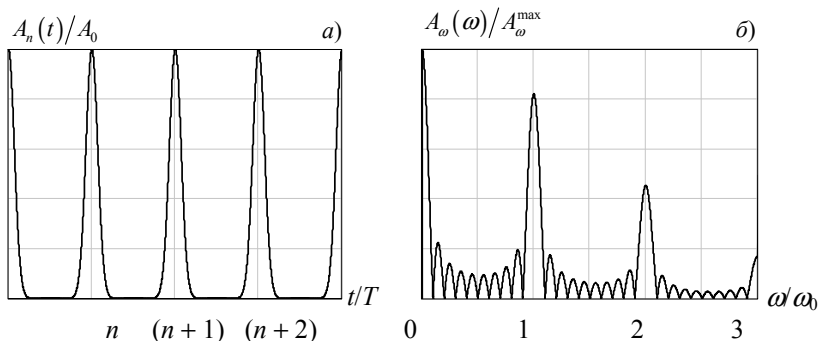


Рис. XI.4. Периодическая последовательность гауссовых импульсов (а) и ее спектр (б): формулы (78.14), (78.16), $A_0 = 1$, $\tau = 10$, $N = 10$

Обратим внимание на характерную особенность спектров во всех пяти задачах этого параграфа: чем уже (короче) поле во времени или в пространстве, тем шире его спектр. Мы вернемся к этому вопросу в § 79.

Для непрерывного спектра также справедлива векторная аналогия фурье-разложения, но теперь уже с непрерывным множеством базисных векторов $e^{-i\omega t}/\sqrt{2\pi}$. В этом случае условие их ортонормируемости становится нетривиальным. Оно может быть получено с помощью двойного фурье-преобразования:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A(\omega') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\omega-\omega')} dt \right] \equiv A(\omega).
 \end{aligned} \tag{78.23}$$

Но последнее равенство справедливо для любой $A(\omega)$, только если выражение в квадратных скобках является δ -функцией:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt = \delta(\omega-\omega'). \tag{78.24}$$

Это и есть условие ортонормируемости базисных векторов в непрерывном спектре. Кроме того, такое выражение дает полезное представление

δ-функции. В частности, с его помощью сразу получается спектр монохроматической волны (78.11).

Используя (78.24), можно написать баланс энергии, аналогичный (77.16), и для непрерывного спектра:

$$\begin{aligned} (A(x), A(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} |A(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int dx \cdot dk \cdot dk' |A(k)|^2 e^{i(k-k')x} = \\ &= \int dk \cdot dk' |A(k)|^2 \delta(k-k'). \end{aligned} \quad (78.25)$$

В заключение проиллюстрируем векторную аналогию фурье-преобразования:

Векторное пространство

$\mathbf{r}$

$\mathbf{e}_n$

$$(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_k) = \delta_{nk}$$

$$\mathbf{r} = x_n \mathbf{e}_n$$

$$x_n = (\mathbf{r}, \mathbf{e}_n)$$

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_n x_{1n} x_{2n}$$

Гильбертово пространство

$f(t)$

$e^{-i\omega t} / \sqrt{2\pi}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} dt = \delta(\omega-\omega')$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) f_2^*(\omega) d\omega$$

§ 79. Соотношение неопределенности

В предыдущем параграфе мы уже обратили внимание на характерную особенность фурье-спектра, ширина которого во всех пяти примерах (задачи XI.3–XI.7) оказалась обратно пропорциональной размеру поля. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

В первом примере (задача XI.3) длительность прямоугольного импульса является вполне определенной и равной τ . Ширина же спектра, по существу, неоднозначна. В рассматриваемом случае можно, например, считать ширину спектра $\Delta\omega = 4\pi/\tau$ (между нулями функции $E(\omega)$ в (78.3)). Тогда

соотношение между длительностью поля и шириной его спектра примет вид $\Delta\omega \cdot \Delta t = 4\pi$. В третьем примере (задача XI.5) оба параметра неоднозначны, примем (см. (78.6)) $\Delta t = \tau$, $\Delta\omega = 2/\tau$, откуда $\Delta\omega \cdot \Delta t = 2$. Наконец, для гауссовой конфигурации поля (задача XI.6) естественно положить (см. (78.13)), $\Delta x = 2l$; $\Delta k = 2/l$, так что $\Delta x \cdot \Delta k = 4$. Мы видим, что в каждом конкретном случае произведение «размеров» поля и его спектра есть константа порядка единицы, точное значение которой зависит от формы поля и способа определения ширины. Оказывается, что этот закон имеет универсальный характер, который можно пояснить следующим образом. Физический смысл фурье-спектра состоит в том, что он характеризует взаимодействие волны с различными осцилляторами (резонанс). В предельном случае бесконечно узкого спектра (линии) резонанс имеет место только с одним осциллятором. При этом говорят о (идеально) монохроматической волне, амплитуда и частота которой постоянны неограниченно долго. В общем случае поле можно записать в виде $E(t) = E_0(t) e^{-i\omega_0 t}$, где $E_0(t)$ — переменная амплитуда, включающая также и комплексную фазу, а значит, и переменную частоту. Фурье-компонента такого поля имеет вид

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \quad (79.1)$$

и характеризует энергию, переданную осциллятору с частотой ω , так как можно считать, что $E(t)$ пропорционально силе, а $e^{i\omega t}$ — скорости осциллятора. Если характерное время изменения амплитуды $E_0(t)$ есть Δt (например, длительность поля), то при расстройке $\Delta\omega \ll 1/\Delta t$ резонансная фаза $\Delta\omega \cdot t$ не успеет «уйти» за указанное время, резонанс не нарушится, и, значит, взаимодействие волны со всеми осцилляторами в этом интервале частот будет примерно одинаковым. Взаимодействие начнет падать, когда фаза уйдет примерно на π , т. е. когда $\Delta\omega \geq \pi/\Delta t$. Поэтому для ширины спектра $\Delta\omega$ можно принять

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim \pi. \quad (79.2)$$

Это и есть знаменитое *соотношение неопределенности для длительности и частоты*. Неопределенность последней означает, что волне конечной длительности нельзя приписать какое-то одно значение частоты, так как она взаимодействует примерно одинаково с целым набором различных осцилляторов. Иначе говоря, неопределенность частоты нужно понимать не в смысле неполного описания (как, например, неопределенность тепловой

скорости молекулы), а в смысле одновременного присутствия всех частот в интервале $\Delta\omega$. Поэтому такую волну называют часто *волновым пакетом* или *группой волн* (см. § 84). Аналогично, можно записать *соотношение неопределенности для размера и волнового числа*: $\Delta k \cdot \Delta x \sim \pi$.

Соотношение неопределенности можно применить и к самому осциллятору. Дело в том, что даже для идеальной монохроматической волны время взаимодействия с осциллятором ($\tau_{\text{вз}}$) является конечным либо вследствие его затухания ($\tau_{\text{вз}} \sim \tau_{\text{зат}}$), либо вследствие его включения на конечное время, либо, наконец, из-за изменения частоты, если измерение спектра производится не с помощью нескольких независимых осцилляторов, а посредством одного, но с перестраиваемой частотой. В любом случае неопределенность частоты осциллятора выражается тем же соотношением (79.2) с $\Delta t \sim \tau_{\text{вз}}$. Это может приводить, в частности, к тому, что осциллятор с достаточно большим $\Delta\omega$ будет «воспринимать» дискретный спектр как непрерывный.

Особенностью соотношения неопределенности является то обстоятельство, что оно справедливо в общем случае лишь по порядку величины. Однако, несмотря на это, оно оказывается очень полезным при анализе самых различных волновых процессов, в чем мы будем в дальнейшем неоднократно убеждаться. В принципе, вместо равенства по порядку величины (79.2) можно написать точное неравенство

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 1/2, \quad (79.3)$$

где $\Delta\omega$, Δt — среднеквадратичные ширины распределений. Однако применение такого неравенства менее удобно, так как оно может оказаться очень сильным.

В качестве примера неоднозначности применения соотношения неопределенности рассмотрим спектр (78.5), полученный в задаче XI.4. Он характеризуется тремя параметрами. Полная ширина спектра $\Delta\omega \sim \pi/\tau$ определяется одиночным импульсом. Положение линий определяется периодичностью импульсов T или нулями знаменателя (78.5): $\omega_m = 2\pi m/T$, при этом $S_m = N$. Наконец, ширина линий зависит от полной длины сигнала: $\delta\omega \sim \pi/NT$. В частности, при $N \rightarrow \infty$ получается дискретный спектр (ср.: задачу XI.2, § 77).

В зависимости от характеристик осциллятора, с которым взаимодействует такое поле, его сложный спектр «воспринимается» совершенно по-разному. Очень «плохой» осциллятор с малым временем затухания $\tau_{\text{зат}} \ll T$ реагирует на отдельный импульс, и для него этот спектр — непрерывный с шириной $\Delta\omega \sim \pi/\tau$. Осциллятор получше ($T \ll \tau_{\text{зат}} \ll NT$) регистрирует дискретный спектр, «не замечая» конечной ширины линий. Наконец, высокодобротный осциллятор ($\tau_{\text{зат}} \gg NT$) регистрирует полную структуру спектра, изображенную на рис. XI.3.

Из этого примера видно, что в общем случае спектр характеризуется несколькими масштабами $\Delta\omega$, отражающими через соотношение неопределенности сложную структуру поля (разные Δt). В частности, дискретный спектр можно характеризовать некоторой полной шириной, которая в данном примере есть $\Delta\omega \sim \pi/\tau$.

Задача XI.8. Оценить полосу частот, необходимую для передачи телевизионного изображения (625 строк, 25 кадров в секунду).

Принимая, что число элементов изображения в строке примерно равно числу строк в кадре, получим для длительности одного элемента изображения $\tau_0 \sim 1/25 \cdot (625)^2 \approx 10^{-7}$ с, откуда $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi \sim 5$ МГц. Такую полосу можно было бы, в принципе, разместить и в диапазоне коротких волн для дальних телепередач. Однако тогда пришлось бы закрыть более ста радиостанций ради одного телевизионного канала. Поэтому с самого начала телевидение было вытеснено в УКВ диапазон, а дальние телепередачи стали возможными лишь в конце 1960-х гг. с использованием различных ретрансляторов, включая спутники связи.

С первого взгляда кажется, что для цветного телевидения необходима тройная полоса частот в соответствии с тремя составляющими цветопередачи (§ 62). Однако современная система цветного телевидения использует тот же канал, что и для черно-белого телевидения (около 6 МГц). Это оказывается возможным по двум причинам. Во-первых, цветовое разрешение глаза примерно в четыре раза меньше яркостного, так что для передачи цветового сигнала отводится всего 1,6 МГц. Во-вторых, вышеприведенная оценка дает в действительности верхнюю границу необходимой полосы частот, соответствующую такому крайнему случаю, когда все элементы изображения и все кадры резко различаются. Естественно, что в большинстве случаев это не так. Поэтому реальный спектр телевизионного сигнала имеет «квазидискретную» структуру, периоды которой соответствуют частоте строчной развертки ($\approx 15,6$ кГц) и кадровой частоте (25 Гц) (см. задачу XI.4). В образовавшихся таким образом щелях и размещается цветовой сигнал. Это означает, конечно, что ширина спектра черно-белого телевидения могла бы быть существенно сужена.

В качестве более «хитрого» примера применения соотношения неопределенности рассмотрим частотно-модулированную волну

$$E(t) = E_0 e^{-i\theta(t)}, \quad \theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \sin \Omega t, \quad (79.4)$$

где $\theta(t)$ — фаза волны, изменяющаяся непропорционально времени, и поэтому такая волна называется также и фазово-модулированной. Обычно под частотой такой волны понимают мгновенную скорость изменения фазы

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + (\theta_0 \Omega) \cos \Omega t, \quad (79.5)$$

которая является вполне определенной функцией времени. Где же здесь неопределенность частоты? Можно было бы предположить, что эта неопределенность задается полным интервалом изменения частоты $2\theta_0\Omega$. Однако это также противоречит соотношению неопределенности, так как при заданной Ω , которая здесь определяет масштаб Δt , неопределенность частоты неограниченно убывает при $\theta_0 \rightarrow 0$. С другой стороны, если считать, в соответствии с соотношением неопределенности, что $\Delta\omega \sim \Omega$, то как же тогда быть с полной шириной спектра, которая при $\theta_0 \gg 1$ может быть значительно больше?

Прежде всего ясно, что имеются по крайней мере две разные физические величины, называемые одним и тем же словом — частота. Первую из них (79.5) можно было бы назвать кинематической частотой, она характеризует форму колебаний и никак не связана с соотношением неопределенности. В последнее входит частота, которую можно было бы назвать динамической, так как она определяет взаимодействие волны с системой осцилляторов.

Рассмотрим отдельно два случая: $\theta_0 \ll 1$ (слабая модуляция) и $\theta_0 \gg 1$ (сильная модуляция). Наиболее интересен второй случай, когда интервал изменения кинематической частоты $2\theta_0\Omega$ много больше неопределенности динамической частоты ($\Delta\omega \sim \Omega$). В этом случае можно говорить о приближенной зависимости динамической частоты от времени с точностью, даваемой соотношением неопределенности $\alpha(t) \approx d\theta/dt$.

В случае слабой модуляции, когда $\theta_0 \ll 1$, выражение (79.4) можно разложить по θ_0 , и частотная модуляция сведется к амплитудной:

$$E(t) \approx e^{-i\alpha_0 t} (1 - i\theta_0 \sin \Omega t) = e^{-i\alpha_0 t} + \frac{\theta_0}{2} (e^{-i(\alpha_0 + \Omega)t} + e^{-i(\alpha_0 - \Omega)t}). \quad (79.6)$$

Неопределенность частоты можно считать здесь $\sim \Omega$, а понятие переменной частоты $\alpha(t)$ теряет смысл, поскольку амплитуда ее изменения $\theta_0\Omega$ много меньше ее неопределенности.

С частотной модуляцией связано поучительное заблуждение Флеминга (J. A. Fleming), который был в свое время научным консультантом фирмы Маркони (§ 59). Он считал, что в случае $\theta_0 \ll 1$ ширина спектра будет по-прежнему определяться диапазоном изменения кинематической частоты $2\theta_0\Omega$, т. е. может быть сделана произвольно малой, что, по мнению Флеминга, могло бы решить проблему «тесноты» в эфире. Это вызвало в свое время (1920–1930 гг.) многолетнюю дискуссию, результатом которой было, во-

первых, выяснение ошибочности такого представления, а во-вторых, внедрение в радиосвязь частотной модуляции. Выяснилось, что она обладает высокой помехоустойчивостью при $\theta_0 \gg 1$, что связано с передачей сигнала в широкой полосе частот (примерно в 10 раз больше, чем для АМ-радиосвязи).

С первого взгляда проблема кажется тривиальной, хотя бы из выражения (79.6). В действительности, однако, дискуссия велась в основном вокруг вопроса о физической реальности фурье-представления поля. Любопытно отметить, что знаменитый Герц отрицательно относился к спектральным представлениям.

§ 80. Спектральное разложение. Стохастическое поле

Перейдем теперь к изучению более реального случая стационарной волны с непрерывным спектром. Типичным примером такого поля является солнечный свет, который характеризуется широким непрерывным спектром. Другим крайним случаем можно считать автоколебательную систему (генератор). В первом приближении такая система генерирует гармонические колебания, т. е. ее спектр сводится к одной линии. Однако в силу тех или иных возмущений эта линия всегда имеет конечную ширину, так что спектр будет непрерывным, хотя и очень узким. Например, лучшие лазеры имеют ширину линии $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-15}$ (см. подробнее § 145).

Прежде всего оказывается, что обычное фурье-разложение для импульсного поля (§ 78) здесь неприменимо из-за расходимости фурье-интегралов. Действительно, рассмотрим стационарное поле на конечном интервале T . Тогда можем написать

$$E_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T E(t) e^{i\omega t} dt, \quad (80.1)$$

где интеграл берется на интервале T . Запишем баланс энергии волны (см. (78.25)):

$$\int_T |E(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |E_T(\omega)|^2 d\omega \rightarrow T \overline{|E(t)|^2}. \quad (80.2)$$

Мы предполагаем, что интеграл по спектру сходится (см. ниже). Последнее выражение дает предел интеграла при $T \rightarrow \infty$, где средняя мощность волны $\overline{|E(t)|^2}$ постоянна в силу принятой стационарности поля (например, мощность солнечного излучения). Таким образом, в пределе $T \rightarrow \infty$ обычная фурье-компонента расходится по закону $|E_T(\omega)| \propto \sqrt{T}$. Уже эта зависимость наводит на мысль, что рассматриваемое поле является в некотором смысле случайным, так как энергия его взаимодействия с осциллятором, пропорциональная фурье-амплитуде $|E_T(\omega)|$, растет как $\sqrt{T}$, что характерно для случайного процесса. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Введем величину

$$K(\tau) = \overline{E(t)E^*(t+\tau)} = \frac{1}{T} \int_{T \rightarrow \infty} E(t)E^*(t+\tau)dt = K^*(-\tau), \quad (80.3)$$

называемую *корреляцией* (от лат. correlatio — соотношение), или *автокорреляцией*, поля, которая характеризует регулярность волны. Произведем фурье-разложение полей в (80.3). Для того чтобы избавиться от расходимости при $T \rightarrow \infty$, перенормируем фурье-амплитуду: $|E_T(\omega)|^2 \rightarrow |E(\omega)|^2/T$, т. е. будем записывать фурье-преобразование в виде

$$E(t) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \int_{\omega} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_T E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (80.4)$$

Определенное таким образом $E(\omega)$ остается теперь конечным при $T \rightarrow \infty$ (80.2). Физический смысл перенормировки фурье-амплитуды состоит в том, что новая $E(\omega)$ теперь непосредственно связана с мощностью поля. Действительно, из (80.2) получим

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_T |E(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega, \quad p(\omega) = |E(\omega)|^2. \quad (80.5)$$

Величина $p(\omega)$ называется спектральной плотностью мощности или, короче, *спектром мощности*. Подставляя Фурье-разложение (80.4) в (80.3), меняя

порядок интегрирования и используя представление (78.24) для δ -функции, найдем

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (80.6)$$

откуда сразу следует, что фурье-компонента корреляционной функции $K(\tau)$ и спектр мощности $p(\omega)$ связаны равенством

$$K(\omega) = \sqrt{2\pi} |E(\omega)|^2 = \sqrt{2\pi} p(\omega), \quad \text{где} \quad K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Таким образом, спектр мощности описывается выражением

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (80.7)$$

Обычно спектр мощности $p(\omega)$ имеет конечную ширину $\Delta\omega$. Тогда по соотношению неопределенности функция корреляции $K(\tau)$ имеет конечную длительность

$$\tau_k \sim \pi/(\Delta\omega). \quad (80.8)$$

Это значит, что поле сохраняет свою регулярность лишь в течение времени $\sim \tau_k$. Иначе говоря, рассматриваемое поле можно разбить на ряд таких интервалов длительностью $\sim \tau_k$, что в пределах каждого из них поле имеет более или менее регулярную структуру, тогда как поля в соседних интервалах статистически независимы. В этом и состоит «случайность» рассматриваемого поля. Впрочем, лучше говорить о его нерегулярности, которая не обязательно связана с чисто случайными процессами. Примером может служить модуляция радиоволны звуковым или видеосигналом, который (вообще говоря) не является случайным, хотя обычно и бывает нерегулярным.

Другой принятый термин — «стохастическое поле» (от греч. *stochastikos* — умеющий угадывать). Говорят также, что поле является когерентным на интервале $\sim \tau_k$. Термин «когерентный» (от лат. *cohaerens* — связанный) является, по существу, синонимом слова «регулярный», но он понимается обычно в смысле возможности интерференции волны (см. § 92). Величину τ_k называют при этом *временем когерентности* (или *временем корреляции*). Точное определение τ_k дается ниже (см. (80.10)).

Аналогичным образом можно рассмотреть стохастическое поле в пространстве $E(r)$. В этом случае вводится понятие длины когерентности, или, точнее, размеров области когерентности поля:

$$l_k^{(1)} \sim \frac{\pi}{\Delta k_x}, \quad l_k^{(2)} \sim \frac{\pi}{\Delta k_y}, \quad l_k^{(3)} \sim \frac{\pi}{\Delta k_z}, \quad (80.9)$$

где Δk_α — ширина спектра $K_\alpha(k_\alpha) = \sqrt{2\pi} |E(k_\alpha)|^2$ по α -координате.

Простейшим примером стохастического поля служит все тот же солнечный свет (как и вообще любое тепловое излучение). Он состоит из отдельных импульсов, нерегулярно излучаемых различными электронами (см. задачу XI.10 ниже).

Чтобы нагляднее представить свойства стохастического поля, посмотрим, как оно действует, например, на свободный электрон. Пусть стохастическое поле задано своим средним значением $\overline{E(t)} = 0$ и корреляцией $K(\tau)$. На конечном промежутке времени T можем написать (в системе

единиц $e = m = 1$) $v_T = \int_0^T E(t) dt$ ($v(0) = 0$). Усредняя по времени, найдем

$\bar{v}(t) = \int_0^T \overline{E(t)} dt = 0$. Это, однако, не означает, что электрон остается в покое.

Просто его скорость нерегулярно изменяет знак. Для оценки абсолютной величины скорости (и энергии) электрона найдем значение квадрата скорости:

$|v_T|^2 = \int_0^T E(t) dt \int_0^T E^*(t') dt' \equiv \int_0^T E^*(t) dt \times \int_0^T E(t') dt'$. Область интегрирования по t и t' разделим на две части (рис. XI.5). При интегрировании по области I произведем замену переменных

$$\text{область I } \{t, t'\} \rightarrow \{\tau = t - t', \quad \xi = t'\},$$

а при интегрировании по области II замену

$$\text{область II } \{t, t'\} \rightarrow \{\tau = t' - t, \quad \xi = t'\}.$$

Области интегрирования в новых переменных совпадают, а интеграл по одной из них равен интегралу по другой от комплексно-сопряженной подынтегральной функции:

$$I_I = \iint_1 E(t) E^*(t') dt dt' = \int_0^T d\tau \int_0^{T-\tau} E(\xi + \tau) E^*(\xi) d\xi,$$

$$I_{II} = \iint_1 E(t) E^*(t') dt dt' = \int_0^T d\tau \int_0^{T-\tau} E(\xi) E^*(\xi + \tau) d\xi = I_I^*.$$

Тогда при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |v_T|^2 &= I_I + I_{II} = I_I + I_I^* = 2 \operatorname{Re} \int_0^T d\tau \int_0^{T-\tau} E(\xi + \tau) E^*(\xi) d\xi = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^T (T - \tau) K(\tau) d\tau = \\ &= 2T \operatorname{Re} \int_0^T K(\tau) d\tau - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \tau K(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

При $T \gg \tau_k$ вторым слагаемым в последнем выражении можно пренебречь по сравнению с первым, так как их отношение $\sim \tau_k/T \ll 1$. Определим теперь время когерентности поля

$$\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau}{\overline{|E(t)|^2}} = \frac{2\pi |E(\omega=0)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega}. \quad (80.10)$$

Второе равенство следует из (80.5), (80.6). В рассматриваемом примере, применив (80.10) и (78.25) в пространстве ω, t , получаем окончательно

$$\overline{v_T^2} \approx \overline{|E(t)|^2} T \tau_k = 2\pi T |E(\omega=0)|^2. \quad (80.11)$$

Таким образом, энергия электронов растет пропорционально времени (типично случайный процесс), причем это ускорение определяется постоянной составляющей поля. Полученный результат не противоречит, тем не менее, принятому условию $\overline{E} = 0$, в противном случае энергия электрона возрастала бы пропорционально квадрату времени $\overline{v_T^2} = \overline{E}^2 T^2$. Рассмотренное не-

регулярное ускорение частицы в стационарном поле с непрерывным спектром называют также *стохастическим ускорением*.

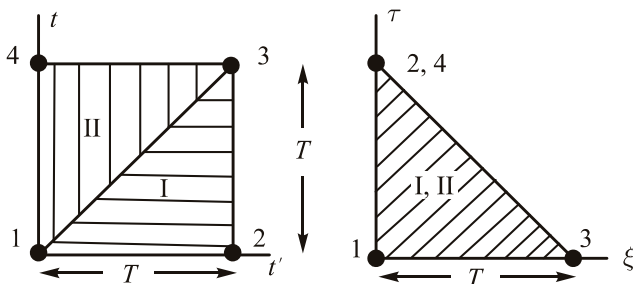


Рис. XI.5. Области интегрирования. Цифрами обозначены точки, переходящие друг в друга при преобразовании переменных интегрирования

Оценку стохастического ускорения можно получить и из следующих простых соображений. Мы видели выше, что стохастическое поле складывается из независимых между собой «кусков» регулярного поля длительностью $\sim \tau_k$. В каждом таком куске скорость электрона изменяется пропорционально времени, $\Delta v_n \sim E \tau_k$, а различные Δv_n складываются квадратично (аналогично, например, независимым ошибкам). В результате получим формулу (80.11).

Задача XI.9. Оценить амплитуду колебаний свободного электрона в стохастическом поле.

По порядку величины $\overline{x_T^2} \sim \overline{v_T^2} T^2 \sim \overline{E^2} T^3 \tau_k$. Чтобы получить точный ответ, запишем $x_T = \int_0^T v(t) dt$, откуда $\overline{x_T} = 0$, $\overline{x_T^2} = 2 \int_0^T d\tau \int_0^{T-\tau} v(t) v(t+\tau) dt$. Для вычисления корреляции скорости представим $v(t+\tau) = v(t) + \Delta v$, где Δv — изменение скорости на интервале τ , статистически независимое от $v(t)$ при $\tau \gg \tau_k$ ($\overline{\Delta v} = 0$). Отсюда

$$\overline{v(t)v(t')} = \overline{v^2(t)} = \overline{E^2} \tau_k, \quad \overline{x_T^2} = \frac{1}{3} \overline{E^2} \tau_k T^3.$$

Вернемся к спектру стохастического поля $\overline{|E(\omega)|^2}$. Чем отличается он от спектра регулярного импульсного поля? Очевидно, что отличие связано с фазовым спектром $\varphi(\omega)$, который оказывается для стохастического поля всюду разрывным. Это вытекает непосредственно из соотношения неопре-

деленности. Действительно, если полная длительность поля $T \rightarrow \infty$, то в спектре должен быть характерный масштаб $\delta\omega \sim 1/T \rightarrow 0$, что и означает, в пределе, разрывы функции $\varphi(\omega)$. Последние должны быть всюду плотными, так как, если вырезать любой конечный участок спектра, он все равно даст стационарную стохастическую волну, а значит, на нем должен быть по крайней мере один разрыв.

Математические операции с такими «экзотическими» функциями требуют известной осторожности (классическая теория фурье-преобразования в этом случае просто неприменима). Эту трудность можно обойти, если учесть, что для любого конечного интервала времени T разрывы отсутствуют. Таким образом, вопрос сводится к существованию пределов при $T \rightarrow \infty$. Оказывается, что, например, предел фурье-компоненты $E(\omega)$ действительно отсутствует, так как ее фаза нерегулярно изменяется при $T \rightarrow \infty$. Поэтому стохастическое поле можно описать только с помощью либо спектра мощности, либо корреляционной функции. Спектральная теория стохастических (случайных) функций возникла в 1930-е гг. главным образом в работах советских математиков А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина и американского математика Винера (N. Wiener).

Предельным случаем стохастического поля является так называемый *белый шум*, который соответствует полному отсутствию корреляций в волне, т. е. $\tau_k \rightarrow 0$. Соответственно ширина спектра такого поля неограничена.

Примером рассмотренного непрерывного спектра может служить автоколебательная система с конечной шириной линии. Появление для нее непрерывного спектра объясняется действием различных возмущений. Будет ли спектр в таком случае всегда чисто непрерывным или может сохраниться и дискретная компонента? Разберем этот вопрос на следующем простом примере. Пусть колебания генератора описываются выражением

$$V(t) = V_0 e^{-i(\omega_1 t + \varphi(t))}. \quad (80.12)$$

Здесь ω_1 — номинальная частота генератора, а $\varphi(t)$ — случайные возмущения фазы, уширяющие линию до величины $\Delta\omega \sim \Omega$, где Ω — ширина спектра $\varphi(t)$ (см. § 79). Очевидно, что если в спектре (80.12) и присутствует дискретная линия, то ее частота будет равна ω_1 . Фурье-амплитуду этой линии определим посредством

$$V_1 = \frac{1}{T} \int_{T \rightarrow \infty} V(t) e^{i\omega_1 t} dt. \quad (80.13)$$

(Эта калибровка отличается от принятой нами в § 77, так как в данном случае процесс непериодический и $T \rightarrow \infty$.) Пусть флуктуирующая фаза остается все время малой: $|\varphi| \ll 1$, $\bar{\varphi} = 0$. Тогда, разлагая экспоненту в (80.12) и подставляя в (80.13), получим $V_1 \approx V_0(1 - \bar{\varphi}^2) \approx V_0$. Этот результат означает, что бесконечно тонкая линия действительно сохраняется, несмотря на возмущение фазы, но амплитуда ее несколько уменьшается. Такой спектр называется *смешанным*. В реальных условиях ширина линии будет все-таки конечной, но не за счет возмущения фазы, а вследствие всегда конечного времени генерации T : $\Delta\omega \sim \pi/T$. Баланс энергии в этом случае можно записать в виде суммы по дискретной и непрерывной частям спектра, которые не интерферируют между собой:

$$\overline{|V|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |V(\omega)|^2 d\omega + \sum_k |V_k|^2. \quad (80.14)$$

С помощью этого соотношения можно найти долю энергии в непрерывном спектре для рассмотренного выше примера (80.12): $\alpha = (V_0^2 - |V_1|^2)/V_0^2 \approx 2\bar{\varphi}^2 \ll 1$.

Пусть теперь фаза флуктуирует произвольно. Введем функцию распределения по фазе, определив ее как долю времени, в течение которого фаза находится в заданном интервале: $f(\varphi)d\varphi = dt(\varphi)/T$. Выберем в качестве примера гауссово распределение $f(\varphi) = e^{-\varphi^2/2\varphi_0^2}/(\sqrt{2\pi}\varphi_0)$. Получим

$$V_1 = \frac{V_0}{T} \int_{T \rightarrow \infty} e^{-i\varphi(t)} dt = V_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} f(\varphi) d\varphi = V_0 e^{-\varphi_0^2/2}, \quad (80.15)$$

а доля энергии в линии $\alpha_1 = |V_1|^2/V_0^2 = e^{-\varphi_0^2}$. Отметим, что рассмотренное сохранение линии при случайном возмущении фазы составляет существо знаменитого *эффекта Мёссбауэра*.

В случае смешанного спектра корреляции поля не затухают полностью, так как дискретная линия дает периодические корреляции. Например, для (80.12) получаем

$$\overline{V(t)V(t')} \rightarrow V_1^2 e^{i\omega_1 \tau}. \quad (80.16)$$

Существование остаточных корреляций для смешанного спектра непосредственно вытекает из соотношения неопределенности (80.8), поскольку ширина линии $\Delta\omega = 0$. Такое поле не является полностью стохастическим.

Задача XI.10. Сигнал представляет собой последовательность одинаковых импульсов со случайными интервалами между ними. При каких условиях такой сигнал будет стохастическим (с непрерывным спектром)?

Представим себе распределение импульсов во времени как сдвиг каждого из них на некоторое τ_m относительно периодической последовательности. Иначе говоря, момент начала импульса запишем в виде $t_m = mT + \tau_m$, где T — средний интервал между импульсами. Если бы $\tau_m = 0$, мы получили бы дискретный спектр, общий вид которого определяется формой отдельного импульса, а расстояние между линиями равно $2\pi/T$ (см. задачу XI.4, § 79). Смещение импульса на τ_m вызывает появление в его спектре фазового множителя $e^{i\omega\tau_m}$, так что спектр сигнала будет модулирован

суммой $S = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{i\omega\tau_m} = \langle e^{i\omega\tau_m} \rangle$. Это в точности соответствует задаче о возмущении

фазы, рассмотренной выше. В частности, если распределение по τ_m гауссово, $f(\tau) = e^{-\tau^2/2\tau_0^2} / \sqrt{2\pi}\tau_0$, то $S = e^{-(\omega\tau_0)^2/2}$. Условие стохастичности сигнала $\omega\tau_0 \gg 1$ должно выполняться для минимальной частоты. Если импульс достаточно гладкий, то $\omega_{\min} = 2\pi/T$ и условие стохастичности принимает вид $2\pi\tau_0 \gg T$, т. е. импульсы должны быть полностью перемешаны. Если же мы имеем дело с модулированными высокочастотными импульсами (основная гармоника $\omega_0 \gg 2\pi/T$), то для стохастичности достаточно лишь небольшого временного разброса импульсов ($\tau_0 \gg 1/\omega_0$).

Задача XI.11. Внутри проводящей вакуумной камеры (рис. XI.6) вращается пучок релятивистских заряженных частиц, удерживаемый магнитным полем. Частицы имеют разброс по энергии и, соответственно, частоте обращения (56.7). При пролете сквозь измерительный цилиндрический электрод 3 каждая частица наводит на нем напряжение относительно стенок камеры $V_0 = e/C$, где e — заряд частицы, C — емкость между электродом и камерой (см. также задачи I.15 и I.28). Анализатор выделяет среднеквадратичное значение суммарного сигнала на частоте Ω в полосе частот $\delta\Omega$. Найти V_Ω^2 , если функция распределения частиц по частотам обращения $f(\omega)$ имеет ширину $\Delta\omega$, много меньшую средней частоты ω_0 , и полоса $\delta\Omega \ll \Delta\omega$.

Сигнал от m -й частицы, вращающейся с частотой ω_m , представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой V_0 и длительностью τ , период следования этих импульсов $T_m = 2\pi/\omega_m$, поэтому его можно представить в виде ряда Фурье (задача XI.2)

$$V_m(t) = \frac{1}{\sqrt{T_m}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{-i(n\omega_m t + \varphi_m)}, \quad A_{mn} = \frac{V_0}{\sqrt{T_m}} \cdot \frac{e^{in\omega_m \tau} - 1}{in\omega_m} e^{i\varphi_m}.$$

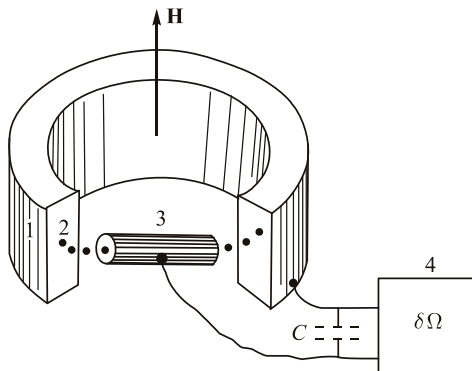


Рис. XI.6. Схема измерения функции распределения по частотам обращения пучка заряженных частиц: 1 — вакуумная камера; 2 — пучок; 3 — измерительный электрод; 4 — анализатор; C — емкость между электродом и проводящей стенкой вакуумной камеры

На частоте Ω будет зарегистрирован сигнал, суммарный по всем N_ω частицам, имеющим частоту обращения $\omega_m = (\Omega \pm \delta\Omega)/n$. С учетом малости $\delta\Omega$ и $\Delta\omega$ найдем

$$V_\Omega^2 \approx \left| \sum_{m=1}^{N_\omega} \frac{A_{mn}}{\sqrt{T_m}} e^{-i(\Omega t + \varphi_m)} \right|^2, \quad N_\omega = N_0 f(\omega_m) \delta\Omega,$$

N_0 — полное число частиц в пучке. Подставляя сюда значение A_{mn} , суммируя и усредняя по времени, получим

$$V_\Omega^2 = \frac{V_0^2}{T_m^2} \left(\frac{2 \sin \frac{n\omega_m \tau}{2}}{n\omega_m} \right)^2 N_0 f(\omega_m) \delta\Omega.$$

В приближении $\tau \ll T_m/n$ это соотношение позволяет просто восстановить функцию распределения $f(\omega)$ по известной зависимости $V_\Omega^2(\Omega)$:

$$f(\omega) \approx \frac{V_\Omega^2 \left(\frac{T_m}{\tau} \right)^2}{V_0^2} \frac{1}{N_0 \delta\Omega}, \quad \Omega = n\omega.$$

Этот метод применяется в циклических ускорителях заряженных частиц (синхротронах) для измерения разброса частиц по частоте обращения (импульсу).

Сигнал, наводимый на электроде пучком частиц, называется *Шоттки-шумом* в честь немецкого физика, описавшего это явление, наблюдавшееся в электровакуумных радиолампах (W. Schottky, 1918 г.). В отечественной литературе исполь-

зуется также термин «дробовой шум», по аналогии с шумом, который производит поток дробин, падающих на металлическую поверхность, при случайном распределении интервалов времени между ними (см. задачу XI.13 ниже).

Задача XI.12. Найти спектр мощности напряжения на проводнике с током, если время свободного пробега t_m электрона в проводнике подчиняется закону распределения Пуассона $W(t_m) = \nu \cdot e^{-\nu t_m}$ ($\nu = (\overline{t_m})^{-1}$ — средняя частота столкновений электронов с неоднородностями структуры проводника, § 21).

Искомый спектр мощности найдем, вычислив вначале функции корреляции для напряжения $K_U(\tau)$ и тока $K_I(\tau)$: $K_U(\tau) = R^2 K_I(\tau)$, где R — сопротивление проводника,

$$K_I(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I(t) \cdot I^*(t + \tau) dt, \quad I(t) = \sum_{n=1}^N i_n(t) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^N e v_n(t),$$

N — полное число электронов проводимости в проводнике длины l , $v_n(t)$ — мгновенное значение скорости n -го электрона. Тогда

$$K_I(\tau) = \frac{e^2}{T l^2} \sum_{k,n=1}^N \int_{-T/2}^{T/2} v_k(t) v_n^*(t + \tau) dt = N \frac{e^2}{l^2} K_v(\tau),$$

где $K_v(\tau)$ — функция корреляции скорости n -го электрона. Здесь учтено, что в сумме по k, n останутся только члены с $k = n$, а функция $K_v(\tau)$ имеет одинаковый вид для любых электронов. Вычисляя ее, найдем

$$K_v(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_n(t) v_n^*(t + \tau) dt = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N_\tau} v_{nk} v_{nk}^*(t_k - |\tau|), & t_k > |\tau|, \\ 0, & t_k < |\tau|, \end{cases}$$

где v_{nk} — скорость n -го электрона на k -м отрезке свободного пробега (интервал t_k), N_τ — полное число свободных пробегов электрона длительностью $t_k > \tau$ за время T . Поскольку $N_\tau \gg 1$, произведения $v_{nk} v_{nk}^*$ можно заменить средним значением квадрата скорости электрона $\overline{v_e^2}$ и учесть, что

$$\sum_{k=1}^{N_\tau} t_k = N_{\text{полн}} \overline{(t_k)_\tau}, \quad \text{где} \quad \overline{(t_k)_\tau} = \int_{|\tau|}^{\infty} W(t_k) t_k dt_k = \left(|\tau| + \frac{1}{\nu} \right) e^{-\nu \tau}$$

— среднее значение по всем t_k , большим τ , $N_{\text{полн}}$ — среднее число соударений электрона за время T . Кроме того,

$$N_\tau = N_{\text{полн}} \int_{|\tau|}^{\infty} W(t_k) dt_k = N_{\text{полн}} e^{-\nu |\tau|} \quad \text{и} \quad N_{\text{полн}} = \frac{T}{t_k} = \nu T.$$

В результате для функции корреляции скорости электрона получим

$$K_v(\tau) = \overline{v_e^2} e^{-v_e |\tau|}, \quad K_I(\tau) = \frac{\overline{v_e^2} \cdot e^2}{l^2} \cdot N e^{-v_e \tau}.$$

Учитывая, что $N = n_e l S$, n_e — плотность электронов проводимости, S — сечение проводника, $R = l / \sigma S$, $\overline{v_e^2} = T^\circ / m$, T° — температура проводника^{*)}, и используя выражение для проводимости σ (21.4), преобразуем выражение для $K_U(\tau)$ к виду

$$K_U(\tau) = RT^\circ v_e e^{-v_e |\tau|}.$$

Соответствующий спектр мощности получим, подставив это выражение в (80.7) и учитывая равенство $K(\tau) = K^*(-\tau)$ (80.3). Запишем

$$p_U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (K_U(\tau) + K_U^*(\tau)) d\tau = \frac{RT^\circ}{\pi} \cdot \frac{v^2}{v^2 + \omega^2} \xrightarrow{\omega \ll v} \frac{RT^\circ}{\pi}.$$

Физический смысл полученного результата достаточно ясен: $p_U(\omega) \Delta\omega = RT^\circ \Delta\omega / \pi = \overline{U^2}$ — средний квадрат шумового напряжения, снимаемого с сопротивления (имеющего температуру T°) через фильтр с полосой пропускания $\Delta\omega$. Для линейных частот $f = |\omega|/2\pi$, с учетом равенства

$$\int_{-\infty}^\infty p_U(\omega) \cdot d\omega = 2 \int_0^\infty p_U(f) \cdot df,$$

из выражения для $p_U(\omega)$ приходим к известной формуле Найквиста (Н. Nyquist, 1928 г.) для шумового напряжения на сопротивлении R в полосе частот Δf при температуре T° :

$$\overline{U^2} = 4RT^\circ \cdot \Delta f. \quad (80.17)$$

Чтобы записать формулу (80.17) в единицах СИ, где температура измеряется в кельвинах, нужно заменить $T^\circ \rightarrow k_B T_{[K]}$, где k_B — постоянная Больцмана (Приложение II). Тогда

$$\overline{U_{[B^2]}^2} = 5,5226 \cdot 10^{-23} R_{[Om]} \cdot T_{[K]}^\circ.$$

^{*)} Здесь, как и в других случаях вычисления скорости частиц через их температуру, используются вместо кельвин энергетические единицы электрон-вольты (см. Приложение III). Тогда постоянная Больцмана равна единице.

Нижними индексами в квадратных скобках показаны единицы измерения величин в этой формуле.

Задача XI.13. В плоском диоде (§ 27 и рис. III.9) при достаточно малом токе электронов I_0 их движение в промежутке катод–анод независимое, а ускоряющее поле однородно и равно $E = V_0/d$, где V_0 , d — разность потенциалов и расстояние между катодом и анодом. В этом случае вылет электронов с катода определен током эмиссии катода (§ 27) и носит случайный характер. Ток электронов в цепи источника напряжения представляет собой набор импульсов треугольной формы, так как скорость электронов в промежутке катод–анод пропорциональна времени (рис. XI.7).

Найти среднеквадратичное значение тока в цепи источник напряжения–диод в полосе частот Δf . Указание: воспользоваться формулой Найквиста (80.17).

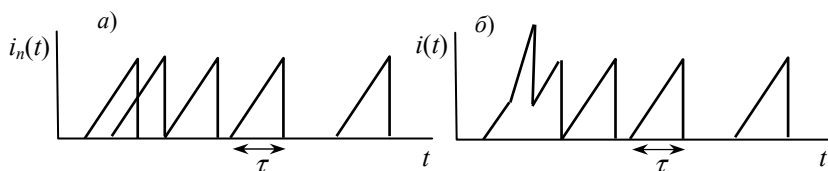


Рис. XI.7. Ток электронов в цепи источник–диод: а) ток, возбуждаемый отдельными электронами (резкий обрыв тока соответствует попаданию электрона на анод); б) суммарный ток в цепи

Подставим в (80.17) $\overline{U^2} = \overline{i^2} R^2$, где $R = V_0/I_0$, и $T^0 = m(\overline{v_e})^2$. Учтем также, что

$$(\overline{v_e})^2 = \left(\frac{v_{\max}}{2} \right)^2 = \frac{eV_0}{2m}, \quad \text{так как} \quad v_e(t) = v_{\max} \cdot \frac{t}{\tau},$$

где $\tau = d\sqrt{2m/eV_0}$ — время пролета электроном расстояния d от катода до анода. В результате всех подстановок получаем *формулу Шоттки* (1918 г.)

$$\overline{i^2} = 2eI_0 \cdot \Delta f. \quad (80.18)$$

Обратим внимание, что, строго говоря, $T^0 = m(\overline{v_e})^2 = mv_{\max}^2/3$. Это дает в (80.18) вместо 2 множитель 8/3. Однако в рассматриваемом случае скорость электронов имеет вполне определенное (не случайное) значение, а случайными являются значения интервалов между электронами. Поэтому правильнее определить здесь температуру через квадрат средней скорости. Подчеркнем, что мы пренебрегли тепловой скоростью электронов, так как температура катода в диодах $\sim 1100 \text{ K} = 0,1 \text{ эВ}$.

Физические представления о дробовом шуме в пучке частиц, циркулирующем в кольцевом ускорителе (рис. XI.6), послужили основанием при разработке *метода стохастического охлаждения* (§ 58).

Основная физическая идея этого метода заключается в том, чтобы, получив сигнал об отклонении частицы от равновесной траектории, ввести на ее пути корректирующее воздействие от внешних радиотехнических средств. Частицы в ускорителе совершают колебания вокруг равновесной траектории (рис. XI.8). Для регистрации отклонения используется дифференциальный пикап-электрод (от англ. pick-up — подхватывать). Он представляет, в первом приближении, две пластины, на которых электрический заряд частиц наводит некоторую разность потенциалов — сигнал, регистрируемый измерительным устройством (задачи I.15 и I.28). Сигнал усиливается и поступает на кикер (от англ. kicker — толкатель) с некоторой задержкой, в момент прихода в него охлаждаемой частицы. Положение пикапа и кикера вдоль траектории частиц выбирается таким, что в пикапе они имеют максимальное (в среднем по многим оборотам в ускорителе) отклонение от равновесной траектории, а в кикере — минимальное отклонение, но максимальный угол вектора импульса (скорости) частицы с равновесной траекторией. В этом случае импульс электрического импульса в кикере, пропорциональный координате частицы в пикапе, уменьшает угол между возмущенной и равновесной траекториями и, следовательно, амплитуду колебаний частицы. Соответственно, уменьшается *эмиттанс* (фазовый объем) пучка частиц (§ 58).

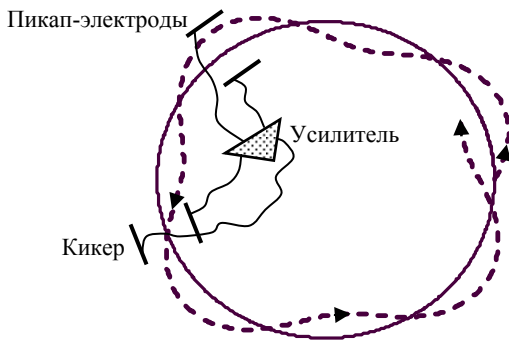


Рис. XI.8. Равновесная (сплошная кривая) и возмущенная (пунктир) траектории частицы в кольцевом ускорителе (накопителе)

Теперь можно дать упрощенный вывод формулы для времени охлаждения. Представим сигнал частицы в виде прямоугольного импульса длительностью T_s . Внутри пикап-электрода одновременно присутствуют N_s частиц: $N_s = N \cdot T_s/T$, где N — число частиц в пучке, T — среднее значение периода обращения частиц в ускорителе.

Доля импульса пробной частицы, свободная от вмешательства других частиц, имеет длительность

$$\Delta t = \frac{T_s}{N_s} = \frac{T}{N}.$$

Считаем, что частицы равномерно отстоят друг от друга. Изменение поперечного смещения частицы за оборот в результате удара кикера есть

$$\Delta x = -\lambda x \equiv -k \cdot \Delta t \cdot x,$$

где коэффициенты λ и k характеризуют коэффициент усиления системы обратной связи пикап–кикер. Спрашивается, каким выбрать k ? Очевидно, если в накопителе только одна частица, то оптимальное значение $\lambda_{\text{opt}} = 1$, иначе кикер будет бить слишком сильно, т. е. раскачивать колебания, или слишком слабо — «недобивать». Но для одной частицы $\Delta t = T$. Поэтому $k_{\text{opt}} = 1/T_s$. И теперь уравнение для x можно записать окончательно:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{T} = -\frac{\Delta t}{T_s} \cdot x. \quad (80.19)$$

Как мы знаем (§ 79), любая радиотехническая система имеет конечную ширину полосы пропускания частот W . Поэтому импульс напряжения, наводимого частицей, имеющий длительность на пластинах пикап-электрода длиной l_{PU} одиночной частицей

$$\tau_{\text{signal}} \approx \frac{l_{PU}}{v},$$

уширится до величины (см. (79.2))

$$T_s = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{2W}.$$

Подставляя это значение T_s в (80.19), найдем *время стохастического охлаждения*:

$$\tau \equiv \left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} \right)^{-1} = \frac{N}{2W}. \quad (80.20)$$

Например, для типичных значений параметров $N \sim 10^{11}$, $W \sim 3$ ГГц находим $\tau_{\text{cool}} \sim 16$ сек.

Этот упрощенный вывод почти не учитывает паразитного влияния на пробную частицу других частиц, находящихся в пикап-электроде одновременно с пробной.

Поэтому оценка времени охлаждения (80.20) является сильно заниженной. В реальной системе охлаждения, выполненной не оптимальным образом, это время может быть на порядок больше.

Когда Симон ванн дер Меер придумал метод стохастического охлаждения и экспериментально была показана дееспособность этого метода, физики шутили, что он изобрел «демон Максвелла» (см. § 83). С тех пор этот «демон» широко используется в накопителях заряженных частиц (ионов и антипротонов) и часто в комбинации с системами электронного охлаждения.

Задача XI.14. Последовательный контур (рис. VI.11, а) подключен к генератору стохастического (шумового) напряжения. Найти среднеквадратичное значение тока в контуре. Ограничиться случаем высокой добротности контура: $\gamma \ll \omega_0$.

Запишем уравнение (52.2), представив правую часть (ЭДС) в форме интеграла Фурье:

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\omega} \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega,$$

где $\omega_0 = c/\sqrt{LC}$, $\gamma = c^2 R/2L$, $F(t) = c^2 \mathfrak{E}(t)/L$, F_{ω} — спектральная функция. Подставив в это уравнение решение в виде интеграла Фурье,

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\omega} \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega,$$

находим

$$I_{\omega} = \frac{F_{\omega}}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i2\gamma\omega}.$$

Тогда, используя равенство (78.24), получим

$$\begin{aligned} \left| \overline{I(t)} \right|^2 &= \frac{1}{2\pi T} \int_{T \rightarrow \infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} I_{\omega_1} \cdot e^{i\omega_1 t} \cdot d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} I_{\omega_2}^* \cdot e^{i\omega_2 t} \cdot d\omega_2 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left| I_{\omega} \right|^2 \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| F_{\omega} \right|^2 \cdot d\omega}{\left(\omega^2 - \omega_0^2 \right)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Из баланса энергии (82.2) следует, что

$$\left| F_{\omega} \right|^2 \cdot \Delta\omega \sim T \cdot \left| \overline{F(t)} \right|^2,$$

где в случае контура $\Delta\omega \approx 2\gamma$ (см. (52.20)). Теперь можно записать

$$\overline{|I(t)|^2} \approx \frac{\overline{|F(t)|^2}}{2\gamma\omega_0^3} \cdot \text{Int}, \quad \text{где} \quad \text{Int} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)^2 + a^2 x^2}, \quad a = \frac{2\gamma}{\omega_0} \ll 1.$$

Интеграл равен площади под резонансной кривой $y(x)$ (рис. VI.13) и по порядку величины составляет $\text{Int} \sim \Delta x/a^2 \sim 1/a$. Точное значение интеграла можно найти методом вычетов (теория функций комплексных переменных), и его значение равно $\text{Int} = \pi/a$. Кроме того, учтем, что при $\omega \sim \omega_0$ можно принять

$$\overline{|F(t)|^2} \approx \left(\frac{c^2 \omega_0}{L} \right)^2 \cdot \overline{|\mathfrak{F}(t)|^2}.$$

Окончательно находим

$$\overline{|I(t)|^2} = \pi \frac{\overline{|\mathfrak{F}(t)|^2}}{R^2}.$$

Таким образом, среднеквадратичное значение тока в контуре в случае «шумовой» ЭДС превышает примерно в $\sqrt{\pi}$ резонансное значение тока при гармонической ЭДС (52.18) $\left(\mathfrak{F}_0 = \sqrt{\overline{|\mathfrak{F}(t)|^2}} \right)$.

§ 81. Экскурс в теорию информации.

Количество информации

Спектральный анализ позволяет сравнительно просто ввести основные представления современной теории информации. Последняя иногда считается чисто математической теорией. Однако она тесно связана с физикой электромагнитных волн, хотя бы потому, что основным приложением последней является радиосвязь в широком смысле этого слова, т. е. передача информации посредством электромагнитных сигналов. Для осуществления оптимальной радиосвязи необходима количественная теория информации.

Примером радиосвязи, использующей предельные технические возможности, является дальняя космическая связь, скажем, с автоматическими станциями на Марсе или Венере, космическими кораблями вблизи Юпитера и т. д. Выбор оптимальных условий всех звеньев такой связи имеет решающее значение. Другим поучительным примером умелого использования технических возможностей (хотя еще далеко не полного) является современная система цветного телевидения.

По-видимому, первые попытки количественной оценки информации применительно к телеграфной связи по кабелю предприняты еще на рубеже нашего столетия английским физиком Томсоном (W. Thomson, 1824–1907 гг.), известным в физике как лорд Кельвин (Kelvin)*. Трудности в создании теории информации были отчасти психологического характера. Мы слишком привыкли связывать понятие информации с деятельностью живых или даже только разумных существ, которая, казалось бы, не поддается «грубому» анализу физики и математики, а является процессом более высокого порядка. Первая брешь в этой глухой стене мистического представления о жизни была пробита в середине XX-го века кибернетикой — новой наукой, связанной с именами главным образом Винера (N. Wiener) и фон Неймана (J. Von Neumann). Кибернетика позволила не только понять на базе точных наук сущность жизни вообще и разумной жизни в частности, но и указала пути создания искусственной жизни и разума. Вопрос о том, является ли кибернетическая модель жизни исчерпывающей, остается, конечно, открытым, однако можно утверждать, что в настоящий момент нет никаких данных, противоречащих такой модели. Вполне естественно, что одновременно бурно развивалась и теория информации, являющаяся составной частью кибернетики. Возникновение теории информации связано главным образом с именем американского математика Шеннона (C. E. Shannon, 1949 г.).

Как же можно измерять информацию? В частности, как измерить информацию, содержащуюся в сигнале? Частично эта задача была решена еще в 1933 г. советским физиком В. А. Котельниковым. Мерой информации сигнала $I(t)$ у него служило число независимых величин, полностью определяющих функцию $I(t)$. Основная идея теории Котельникова состоит в следующем. Пусть мы имеем сигнал $I(t)$ конечной длительности T и в ограниченной полосе частот $\Delta\omega$. При этих, неизбежных в любой системе связи, ограничениях сигнал $I(t)$ можно представить рядом Фурье с конечным

*) Свой титул (лорд) Томсон получил от английской королевы в награду за свои научные труды — традиция, продолжающаяся в Великобритании, по крайней мере, с XVII-го века (Ньютон) и до наших дней.

числом слагаемых, так как $V(t)$ можно считать периодической с периодом T . Такой ряд полностью определяется заданием

$$N_c = 2 \frac{\Delta\omega \cdot T}{2\pi} \quad (81.1)$$

чисел (амплитуды и фазы $N_c/2$ фурье-гармоник, $\Delta\omega \gg 1$). Величина N_c называется *числом степеней свободы сигнала*. Соотношение (81.1) можно переписать в виде $\Delta\omega \cdot T_1 \approx \pi$, где $T_1 = T/N_c$ — длительность сигнала, соответствующая одной степени свободы. В таком виде оно совпадает с соотношением неопределенности (79.2), откуда следует, что T_1 есть характерное время изменения сигнала. Если сигнал является стационарным с непрерывным спектром, то T_1 порядка времени корреляции сигнала (80.8), (80.10).

Котельников получил также явное выражение, позволяющее точно восстановить сигнал $V(t)$ по его значениям в N_c точках (см. задачу XI.15).

Задача XI.15. Восстановить сигнал $V(t)$ с ограниченным спектром по его значениям в отдельных точках (*теорема Котельникова*, 1933 г.).

Пусть спектр сигнала ограничен интервалом $(-\omega_0, \omega_0)$. Тогда фурье-амплитуду сигнала $V(\omega)$ можно считать периодической функцией и снова разложить в ряд Фурье:

$$V(\omega) = \sum_n \frac{V_n}{\sqrt{2\omega_0}} e^{in\pi\omega/\omega_0}, \quad V_n = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \int V(\omega) e^{-in\pi\omega/\omega_0} d\omega,$$

откуда

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} V(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega_0}} \sum_n V_n \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega \left(\frac{n\pi}{\omega_0} - t \right)} d\omega = \\ &= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} \sum_n V_n \frac{\sin(\omega_0 t - n\pi)}{\omega_0 t - n\pi}. \end{aligned}$$

Коэффициенты этого ряда V_n выражаются через значения функции $V(t)$ в моменты $t = t_n = n\pi/\omega_0$: $V_n = \sqrt{\pi/\omega_0} V(t_n)$. Окончательно

$$V(t) = \sum_n V(t_n) \frac{\sin \omega_0 (t - t_n)}{\omega_0 (t - t_n)}, \quad t_n = \frac{n\pi}{\omega_0}. \quad (81.2)$$

Это и есть *формула Котельникова*. Если длительность сигнала ограничена интервалом T , для его точного восстановления требуется $T\omega_b/\pi$ значений сигнала, что совпадает с (81.1) ($\Delta\omega = \omega_b$).

Такое определение является неполным. Остается нерешенным вопрос о том, сколько информации содержится в каждом из параметров сигнала (81.1). Ответ, вообще говоря, различен и зависит, в частности, от точности измерений, уровня помех и пр. Собственно, количественное определение и составляет основу современной теории информации.

Начнем с дискретных сигналов. Как мы увидим ниже, теорема Котельникова позволяет обобщить результаты, полученные для этого случая, на широкий класс непрерывных сигналов. Под информацией понимается выбор из некоторого числа априорных возможностей. Элементарным информационным актом считается выбор из двух равновероятных возможностей. Такая единица информации называется бит (*bit = Binary digit* — двоичный разряд и игра слов: «кусочек», англ.). Примерами элементарной информации могут служить: один двоичный разряд числа (0 или 1), ответ «да» или «нет», точка или тире в азбуке Морзе, положение триггера с двумя устойчивыми состояниями, состояние нейрона нервной сети (возбужден — невозбужден) и т. п.

Теперь посмотрим, к чему приведет усложнение передаваемого сообщения. Пусть сообщение содержит одно n -разрядное слово, например 100101, $n = 6$. В таком языке, содержащем n -разрядные слова, можно образовать $N = 2^n$ различных слов. Какое же количество информации несет данное слово? Очевидно, что если один разряд содержит 1 бит информации, то n -разрядное слово содержит n бит. Получив сообщение, состоящее из одного слова, мы узнали, что среди N возможных вариантов реализуется данный, конкретный, а это и означает, что мы получили информацию n бит. Она связана с полным числом возможностей N очевидным соотношением:

$$I_N = n = \log_2 N. \quad (81.3)$$

Эта формула Хартли (R. V. L. Hartley, 1822 г.) дает информацию, содержащуюся в одном слове языка, состоящего из N слов, записанных в двоичном коде. Информация, содержащаяся в одном десятичном разряде, $I_{10} = \log_2 10 \approx 3,3$ бит.

Если в каждом разряде слова возможно не два, а m различных состояний, то, очевидно, $N = m^n$, и каждый разряд, в соответствии с (81.3), несет информацию $I_1 = \log_2 m$, а n -разрядное слово —

$$I_N = n \log_2 m = \log_2 N. \quad (81.4)$$

Нетрудно заметить связь определенной таким образом информации со статистической энтропией, которая также пропорциональна логарифму числа возможных состояний системы. Это позволяет дать общее определение количества информации как уменьшения энтропии системы в результате полученной информации (см. § 83 ниже). Используя выражение Больцмана для энтропии, можем написать

$$I = -\Delta S = \Delta \int f(x) \cdot \ln f(x) \cdot dx = \Delta \langle \ln f(x) \rangle, \quad (81.5)$$

где $f(x)$ — функция распределения системы. Энтропия измеряется здесь в безразмерных единицах (постоянная Больцмана $k = 1$), а информация измеряется в нитах (1 нит = $1/\ln 2$ бит $\approx 1,44$ бит). Такое определение информации было впервые предложено фон Нейманом.

§ 82. Экскурс в теорию информации.

Поток информации

Вернемся к определению информации сигнала. Если бы его величина была задана абсолютно точно, это привело бы к бесконечной информации (81.5). Реальная ситуация, на которую как раз и рассчитана теория информации, предполагает конечную точность, связанную с ошибками регистрации или помехами. Пусть мы по-прежнему работаем с дискретными сигналами в двоичном коде («телеграф»), а длительность импульса, соответствующего одному знаку (0 и 1), есть τ . Тогда за время T можно передать $k = T/\tau$ импульсов. Поскольку один импульс несет 1 бит информации, то за время T можно передать информацию

$$\Delta I = k = \frac{T}{\tau} \approx \frac{T \Delta \omega}{\pi}. \quad (82.1)$$

Здесь $\Delta \omega$ — полоса частот, пропускаемых линией связи. Таким образом, поток информации в битах есть $\Delta I / \Delta t = \Delta \omega / \pi$. Для более сложного языка, в котором каждый разряд имеет m возможных состояний (например, амплитуда передаваемых импульсов может принимать m возможных значений), очевидно, что $\dot{I} = \Delta \omega \cdot \log_2 m / \pi$. Казалось бы, можно повышать поток ин-

формации, увеличивая m , т. е. уменьшая разность соседних значений амплитуд импульсов ΔV . Однако в системе связи всегда присутствуют помехи — шумы, амплитуда которых и определяет минимально допустимое значение $\Delta V \geq V_m$.

Выше мы уже говорили, что шумовые (стохастические) сигналы характеризуются мощностью. Соответственно, V_m — среднеквадратичная амплитуда. Максимально допустимое значение m определяется максимальной амплитудой (мощностью) передаваемого сигнала и уровнем помех (шума):

$$m_{\max} = \frac{\sqrt{V_{\text{ш}}^2 + V_{\max}^2}}{V_{\text{ш}}} = \sqrt{\frac{P_{\text{ш}} + P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}}, \quad (82.2)$$

где $P_{\text{с}}$, $P_{\text{ш}}$ — мощность максимального уровня сигнала и шума. Соответственно, поток информации (бит/с) описывается *формулой Шеннона* (1949 г.):

$$\frac{dI}{dt} \leq \frac{\Delta\omega}{\pi} \log_2 m_{\max} = \frac{\Delta\omega}{\pi} \log_2 \left(1 + \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}} \right). \quad (82.3)$$

Она является, по существу, основой теории информации.

Теперь обсудим вопрос о потоке информации в непрерывных сигналах. Согласно теореме Котельникова, сигнал, передаваемый в полосе частот $\Delta\omega = \omega_0$, может быть однозначно восстановлен с помощью дискретных измерений уровня сигнала в моменты $t_n = n\pi/\omega_0 = n\pi/\Delta\omega$ (81.2). Если сигнал ограничен во времени ($t \leq T$), то, очевидно, $n \leq N = T\Delta\omega/\pi$. Таким образом, непрерывный сигнал длительностью T , передаваемый в полосе частот $\Delta\omega$, эквивалентен набору N импульсов с амплитудами $V(t_n)$. Содержащаяся в них информация (в битах) есть

$$I_T = N \log_2 \sqrt{\frac{P_{\text{ш}} + P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}} = \frac{T\Delta\omega}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}} \right), \quad (82.4)$$

что для потока информации I_T/T дает ту же формулу Шеннона (82.3).

К формуле Шеннона можно прийти и несколько иначе, основываясь на выражении (81.5) для информации. Пусть $V_{\text{ш}}(t)$ — суммарная помеха (шум). Тогда информация одного значения сигнала имеет порядок $I_1 \approx \ln(V/V_{\text{ш}})$,

$V \gg V_{\text{ш}}$. Уточним это выражение для случая, когда и шум, и суммарный сигнал ($U = V + V_{\text{ш}}$) распределены по гауссовому закону:

$$f(U) = \frac{e^{-U^2/2P_U}}{\sqrt{2\pi P_U}}, \quad \varphi(V_{\text{ш}}) = \frac{e^{-V_{\text{ш}}^2/2P_{\text{ш}}}}{\sqrt{2\pi P_{\text{ш}}}}, \quad (82.5)$$

где $P_U = \overline{U^2} = P_c + P_{\text{ш}}$, так как сигнал и шум считаются статистически независимыми. Поскольку $f(U)$ описывает начальное состояние системы (сигнал не фиксирован), а $\varphi(V_{\text{ш}})$ — конечное (сигнал фиксирован), информация на одно значение сигнала имеет вид

$$I_1 = \langle \ln f \rangle - \langle \ln \varphi \rangle = \frac{1}{2} \ln \frac{P_U}{P_{\text{ш}}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right). \quad (82.6)$$

Передача сигнала соответствует, согласно (81.1), передаче $\Delta\omega/\pi$ чисел в единицу времени, причем каждое из них несет информацию (82.6). Поэтому общий поток информации (бит/с) в сигнале

$$\dot{I} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right), \quad (82.7)$$

что совпадает с (82.3).

Частный случай формулы Шеннона получен также Винером (1948 г.). Любопытно, что общее доказательство Шеннона содержало две грубые, но взаимоисключающих ошибки, так что в конце концов результат оказался правильным. Последнее не удивительно, поскольку Шеннон наверняка знал ответ заранее из рассмотрения частных случаев. Заметим, что поток информации (82.3), (82.7) не зависит от закона распределения сигнала и шума (82.5) и определяется только их средней мощностью.

Из основного закона (82.3) вытекает ряд интересных следствий. Прежде всего, видно, что передача информации возможна даже тогда, когда мощность шума намного превышает мощность сигнала, при этом уменьшается лишь скорость передачи информации $\dot{I} = \Delta\omega P_c / 2\pi P_{\text{ш}}$. Как же практически выделить эту информацию? Один из приемов состоит в повторной передаче сообщения и суммировании принимаемых сигналов. В этом случае полезный сигнал растет пропорционально числу повторений k , тогда как шум — лишь пропорционально $\sqrt{k}$ (см. § 80). В результате после

$k \geq P_{\text{ш}}/P_{\text{с}}$ повторений мощность сигнала в приемнике превышает мощность шума, так что сигнал можно зарегистрировать. Такая процедура приводит к уменьшению скорости передачи примерно в $P_{\text{ш}}/P_{\text{с}}$ раз в соответствии с (82.3). Приведем простой пример метода исправления ошибок при передаче информации за счет снижения скорости передачи. Пусть нам нужно передать некоторый текст с помощью азбуки Морзе или, что то же самое, последовательность нулей и единиц, например: 1100010111. Пусть также при обычной передаче вследствие помех принимается искаженный текст 1101010011 со средней вероятностью ошибки на один переданный знак, $p_1 \approx 2/10 = 0,2$. Один из методов исправления ошибок состоит в том, что каждый знак текста передается многократно, например три раза. В результате принятая последовательность может иметь вид (с той же средней вероятностью ошибки p_1)

$$\begin{array}{cccccccccccc} 111 & 011 & 010 & 000 & 000 & 010 & 000 & 111 & 111 & 110 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

В нижней строчке приведена расшифровка текста по «методу большинства». В результате число ошибок уменьшилось вдвое за счет уменьшения скорости передачи втрое. Вероятность ошибки на один знак текста (на три переданных знака) в этом методе можно подсчитать следующим образом. Ошибка возникает, если два любых из трех знаков группы переданы неправильно. Вероятность этого равна $C_3^2 p_1^2 (1 - p_1)$, где $C_3^2 = 3$ — число сочетаний из трех по два, а $(1 - p_1)$ — вероятность правильной передачи третьего знака. Кроме того, нужно еще учесть, что все три знака могут быть переданы неправильно с вероятностью p_1^3 . В результате вероятность ошибки равна $p_3 = 3p_1^2(1 - p_1) + p_1^3 = p_1^2(3 - 2p_1) \approx 0,1$.

Далее, закон (82.3) показывает, что значительное увеличение отношения сигнал/шум ($P_{\text{с}}/P_{\text{ш}}$), к чему так часто стремятся, почти не повышает скорости передачи информации. Более того, с энергетической точки зрения оптимальным режимом передачи информации является как раз условие $P_{\text{с}} \leq P_{\text{ш}}$. Действительно, энергия, затрачиваемая на передачу единицы информации,

$$W_0 = \frac{P_{\text{с}}}{\dot{I}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \cdot \frac{P_{\text{с}}}{\ln\left(1 + \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\right)}, \quad (82.8)$$

стремится при $P_c \leq P_{ш}$ к минимуму:

$$W_{\min} = \frac{2\pi P_{ш}}{\Delta\omega}. \quad (82.9)$$

Конечно, при этом усложняется детектирование (регистрация) сигнала, так что практический оптимум зависит от конкретной ситуации. Скажем, при сверхдальней космической связи решающими являются энергетические требования; например, мощность передатчика на первом американском искусственном спутнике Марса составляла всего около 100 Вт (см. подробнее § 131).

Интересно отметить, что минимальная энергетическая «цена» информации (82.9) обычно не зависит и от полосы $\Delta\omega$, так как мощность шумов пропорциональна последней (см. (80.5)). Например, для тепловых шумов, т. е. для теплового электромагнитного излучения в одном направлении и с одной поляризацией,

$$P_{ш} = \frac{T^\circ \Delta\omega}{2\pi}, \quad (82.10)$$

где T° — температура излучения. Это выражение, полученное Найквистом в 1928 г. (ср. задачу XI.12 и формулу (80.17)), непосредственно следует из закона равнораспределения в классической термодинамике и формулы (81.1) для числа степеней свободы поля. В рассматриваемом случае цена единицы информации равна просто температуре. В общем случае можно говорить об эффективной «температуре» шума.

Отметим, что основной закон (82.3) о потоке информации относится не только к передаче информации, но и к ее обработке (в частности, к получению информации). Это видно хотя бы из того, что все процессы обработки информации включают ее передачу.

Формула Шеннона (82.3) определяет максимально возможную скорость передачи информации. Практически эта скорость может быть значительно меньше, особенно если используется простое кодирование. Даже при полном отсутствии шумов ($P_{ш} \rightarrow 0$), когда теоретически скорость передачи информации $\dot{I} \rightarrow \infty$, на самом деле она остается ограниченной. Так, при передаче информации по азбуке Морзе, т. е. в виде коротких и длинных импульсов фиксированной амплитуды, скорость передачи в битах за секунду определяется просто числом независимых импульсов в единицу времени, которое, в свою очередь, равно числу степеней свободы сигнала в единицу времени, или (81.1): $\dot{I} = \Delta\omega/\pi$.

Приведем некоторые типичные примеры информационных систем. Начнем с оптических схем. Одним из наиболее совершенных устройств является, как мы уже знаем (§ 61), человеческий глаз. Он разрешает $\sim 10^5$ элементов изображения и около 600 степеней яркости. Это соответствует информации $I_1 \approx 10^5 \cdot \log_2 600 \approx 1$ Мбит на одно изображение. Учитывая, что оба глаза воспринимают несколько разные изображения и притом около 10 раз в секунду, получим максимальный поток зрительной информации ~ 20 Мбит/с. В действительности этот поток существенно меньше, так как последовательные изображения обычно незначительно отличаются друг от друга. Средний поток зрительной информации оценивается величиной ~ 4 Мбит/с и составляет около 70 % общего количества информации, получаемого человеком.

Информационная емкость одного кинокадра (3×4 см², разрешение ~ 30 линий на миллиметр, т. е. $\sim 10^5$ точек (бит!) на мм², и около 100 степеней яркости) ~ 10 Мбит, что соответствует максимальному потоку информации в кино ~ 250 Мбит/с. Это еще сравнимо с работой глаза, однако поток информации в самых совершенных современных приборах (например, ЭОП или ПЗС-матрица, § 63) неизмеримо больше (до $\sim 10^{15}$ бит/с). Поток здесь столь велик, что такие приборы могут быть использованы лишь в коротких импульсах, так как возникает очень сложная проблема запоминания всей этой информации. С другой стороны, например, поток радиоинформации с межпланетных космических кораблей при скорости ~ 1 Мбит/с позволяет передать одну фотографию примерно за 10 с.

Американский марсоход Mars Pathfinder (1996–97 гг.) передавал информацию со скоростью ~ 100 кбит/с. В то же время современные спутники-разведчики имеют скорость передачи информации на уровне 0,5 Гбит/с. Американский спутник Mars Reconnaissance Orbiter, «посаженный» на околомарсианскую орбиту в 2006 г. и осуществляющий ретрансляцию данных с марсоходов Opportunity и Spirit, доставленных на Марс в январе 2004 г., передает на Землю от 0,5 до 4 Мбит/с в зависимости от расстояния Марс–Земля. Главное ограничение скорости передачи связано с мощностью системы энергоснабжения (солнечные батареи) — энергозатраты, необходимые для поддержания требуемого отношения сигнал/шум на входе приемной антенны, растут как квадрат расстояния (!).

Сравним теперь самое удивительное создание природы — человеческий мозг — с современной вычислительной машиной (ЭВМ), которая пытается его моделировать. Мозг человека содержит $\sim 10^{10}$ нейронов, значительная часть которых, вероятно, связана с памятью. Это, однако, существ-

венно меньше, чем полная информация, получаемая человеком за всю его жизнь ($\sim 10^{16}$ бит). Дж. фон Нейман считал, что вся эта информация как-то запоминается, и поэтому механизм памяти человека не может быть связан с работой нейрона как двоичной ячейки. Но такая оценка, по-видимому, очень завышена, так как человек может усвоить лишь незначительную часть зрительной информации. Говорят, что Айвазовский мог запомнить с одного взгляда до 700 деталей. Это соответствует, вероятно, нескольким килобитам информации, что составляет ничтожную долю полной зрительной картины (~ 1 Мбит). Но даже такие случаи являются исключительными. В обычных условиях непрерывного потока информации мы едва ли усваиваем 100 бит/с, а запоминаем надолго и того меньше, скажем ~ 10 бит/с. Таким образом, полный объем памяти человека, например, за 40 лет составит $\sim 10 \cdot 40 \cdot 3 \cdot 10^7 \sim 10^{10}$ бит, что согласуется с числом нейронов. Вероятно, даже эта оценка сильно завышена.

Оперативная, или «быстрая», память современных персональных ЭВМ порядка нескольких Гбит. «Медленная» память, например на жестких дисках, может быть значительно больше, однако скорость поиска нужной информации в такой памяти остается пока довольно низкой. Очень заманчивым является использование фотографической памяти (~ 10 Мбит на кадр, см. выше). Еще более интересные перспективы сулят эмульсионные камеры — сплошные массивы фотоэмульсии объемом до нескольких литров, способные «запомнить» до $\sim 10^{13}$ бит информации. Такие камеры применяются для регистрации следов заряженных частиц. Однако выборка информации из них находится пока на примитивном уровне.

Скорость обработки информации в современных ЭВМ «пятого поколения» превышает 10^{15} бит/с^{*)}. Это кажется очень большой величиной, и принято подчеркивать неизмеримое превосходство в скорости работы ЭВМ по сравнению с человеком. Это, однако, правильно только для простейших логических операций, проходящих через сознание, в которых мозг используется крайне неэффективно. Подсознательная деятельность мозга, в которой участвует, по-видимому, значительная доля нейронов, характери-

^{*)} В современных ЭВМ скорость обработки информации измеряют во «флопсах» (от англ. FLOPS — Floating point Operations Per Second, т. е. число операций с плавающей запятой в секунду). Лидером признан китайский компьютер Tianhe-1A с производительностью 2,57 ПетаФЛОПС (2011 г.). На подходе суперЭВМ на 10 ПетаФЛОПС (Аргоннская национальная лаборатория, США). В России в 2011 г. введена в действие суперЭВМ на 1 ПетаФЛОПС (ВНИИЭФ). Таким образом, в мире превышена скорость обработки информации уровня 10^{15} бит/с. К 2020 г. ожидается выход на уровень ЭкзаФлопс (10^{18} бит/с). Отметим, что при этом скорость передачи информации на два порядка (!) ниже, т. е. 10^{13} бит/с (см. § 86).

зуется скоростью обработки информации масштаба 10^{11} бит/с (каждый нейрон возбуждается около 10 раз в секунду). Причина такой эффективности мозга, несмотря на значительно более медленную работу отдельного нейрона, на много порядков медленнее современных ЭВМ, заключается, очевидно, в параллельной работе огромного числа различных участков мозга^{*)}.

Интересно отметить, что мозг тратит на свою работу всего около 10 Вт мощности (приблизительно 10% полного тепловыделения организма при сидячей работе). Однако даже эта мизерная энергия оказывается в $\sim 10^{11}$ раз больше минимальной (82.9), определяемой тепловыми шумами. Эта разница слишком велика, чтобы ее можно было объяснить требованием надежности работы или чем-то подобным. Возможно, это связано с высоким уровнем нетепловых шумов в организме. А может быть, дело совсем в другом, ведь нейрон — это клетка, т. е. довольно высокоорганизованная структурная единица живой материи, обладающая значительной автономией, для чего необходим некоторый минимальный размер системы, отсюда и «огромное» по атомным масштабам потребление энергии. В этом смысле использование нейрона для запоминания одного бита информации кажется невероятно расточительным, что неоднократно подчеркивал фон Нейман. Он сравнивал это с искусственной памятью на электронных лампах в первых ЭВМ.

С энергетической точки зрения наиболее совершенной системой памяти является ДНК (дезоксирибонуклеиновая кислота), молекулы которой хранят генетическую информацию у всех без исключения живых организмов на Земле. Полимерная молекула ДНК представляет собой двойную спираль с шагом $34 \text{ \AA}$ и диаметром $20 \text{ \AA}$, соединенную через $3,4 \text{ \AA}$ парами специальных химических веществ — оснований, последовательность которых и определяет генетическую информацию. Так как всего имеется четыре различных основания, то каждая пара содержит два бита информации. Это соответствует объемной плотности информации $\sim 10^{21}$ бит/см³ (для мозга эта величина составляет всего лишь $\sim 10^7$ бит/см³). Полное количество информации в молекуле ДНК человека $\sim 10^8$ бит. Интересно, что только около 10 % этого количества является собственно генетической информацией, т. е. описанием «устройства» человека, точнее рецепта «изготовления» (химического синтеза) человека. Любопытно отметить, что, записанный на обычном языке, этот «рецепт» занял бы около 10 тыс. страниц среднего формата. Остальное составляет «административно-управленческий аппарат», организующий передачу информации и распределение ее между различными клет-

^{*)} Любопытно, что современные ЭВМ как раз и работают по принципу распараллеливания процессов вычисления (параллельные процессоры).

ками. Сравнение относительно скромного объема генетической информации ($\sim 10^7$ бит) с объемом памяти человека ($\sim 10^{10}$ бит) приводит к любопытному выводу о том, что жизненный опыт человека значительно богаче его наследственности. Интересно отметить, что у простейшего живого существа вируса — объем генетической информации всего в несколько сот раз меньше.

Передача одного бита информации ДНК требует затраты энергии около 0,2 эВ, что приблизительно в 10 раз больше нормальной температуры ($T = 300$ К), т. е. минимальной затраты энергии при тепловых шумах (см. выше). Таким образом, в энергетическом отношении информационная система ДНК близка к идеалу, остающийся множитель ~ 10 почти наверняка служит для обеспечения надежности работы системы (защита от тепловых флуктуаций).

Если сравнить живой организм с современной вычислительной машиной, то функционирование ДНК во многом напоминает запись информации на магнитный носитель. В обоих случаях это очень емкая память, однако поиск, считывание и передача информации являются весьма медленным процессом с громоздкой организацией. В случае ДНК к этому добавляется еще и значительная неопределенность при передаче информации, которая связана со свободными химическими реакциями в окружающей среде. Словом, такая система не годится для оперативной обработки информации. В последнем случае необходимы строго фиксированные каналы информации, для которых природа не смогла придумать ничего проще, чем клетка-нейрон со всеми вытекающими отсюда последствиями в отношении объема и затрат энергии.

Перейдем теперь к совершенно другой области и приведем некоторые результаты анализа информационной структуры английского языка (см. [17]). Можно считать, что в английском языке 27 символов (26 букв и промежуток между словами). Если бы все эти символы употреблялись одинаково часто и независимо, то информация на букву составила бы $I_0 = \log_2 27 \approx 4,76$ бит. Путем различных хитроумных расчетов и экспериментов было выяснено, что в действительности эта информация составляет всего лишь 1,4 бит. Эта разница характеризует очень важное понятие избыточности информации. Отчасти избыточность в языке объясняется его несовершенством с точки зрения теории информации, а именно тем, что вероятности употребления различных букв и различных слов отличаются на много порядков. Так, например, распределение вероятности слов описывается приближенно выражением $p_n \approx 0,1/n$, где $n = 1, 2, \dots, 8727$ — номера слов, расположенных в порядке убывания их вероятности. С точки зрения

теории информации такое «кодирование» сообщения не является оптимальным — оно содержит слишком много знаков. Возможно, что такая структура языка отражает процесс его исторического развития. Остаток избыточности объясняется тем, что одна и та же информация передается многократно. Так, различные буквы в слове скоррелированы между собой таким образом, что каждая буква (точнее, ее информация) как бы повторяется в среднем примерно 2 раза. Различные слова также связаны между собой так, что информационное содержание каждого слова повторяется в среднем 1,5 раза. Итого в английском языке имеется троекратная избыточность, т. е. троекратное повторение сообщения. Мы уже знаем, что это позволяет уменьшить влияние различных помех, приводящих к ошибкам при передаче информации. Сносная передача обычной языковой информации возможна при отношении сигнал/шум $\sim 1/3$. Вполне возможно, что такой уровень «помех» является «нормальным» для человека, который сформировался в условиях коллективного труда. Если это действительно так, то приведенная выше оценка показывает, что элементарная структурная ячейка творческого коллектива может быть лишь очень небольшой (!).

Интересно отметить, что современные требования к грамотности учащихся находятся в резком противоречии с подобной информационной оценкой. Допустимый уровень ошибок составляет сейчас всего $\sim 10^{-3}$ (одна ошибка на ~ 1000 букв). С учетом троекратной избыточности языка это соответствует потере одного бита информации на 10^5 печатных страниц (!). Столь низкий уровень помех едва ли может быть оправдан даже эстетическими соображениями. Следует, однако, иметь в виду, что значительная часть языковых «ошибок» содержит в себе в действительности дополнительную информацию о социальном положении, культурном уровне, профессии автора и пр., как это, например, прекрасно отражено Бернардом Шоу в его бессмертном «Пигмалионе». Стремление к предельной безукоризненности языка можно поэтому рассматривать как попытку скрыть эту дополнительную информацию. Быть может, главной причиной нашего отвращения к безграмотному, хотя бы и совершенно понятному, тексту является очень глубокое, почти неистребимое стремление человека к совершенству, пусть даже чисто условному. Возможно также, что упомянутое требование «безошибочности» является естественной защитой от неконтролируемого изменения языка.

Задача X.16. Найти уменьшение информации на одно слово в реальном языке по сравнению с идеальным кодированием.

Пусть в языке имеется N различных слов. Идеальное кодирование соответствует равновероятному употреблению всех слов, что дает информацию $I_0 = \ln N$ на одно слово. В действительности частота слов подчиняется эмпирическому закону Ципфа (G. K. Zipf): $p_n = C/n$, где n — номер данного слова в последовательности слов языка, расставленных в порядке убывания частоты их использования. При $n \gg 1$ суммирование можно заменить интегрированием, и тогда из условия нормировки находим $C \approx 1/\ln N$. При этом информация на слово

$$I_1 \approx \int_1^N \frac{dn}{n \ln N} \ln(n \ln N) = \frac{\ln N}{2} + \ln \ln N.$$

При $N \gg 1$ это соответствует потере около половины информации по сравнению с равновероятным употреблением слов.

§ 83. Экскурс в теорию информации. Принцип Сциларда–Бриллюэна

Для правильного понимания теории информации нужно четко разделять понятия ее количества и ценности. Последнее является типично психологическим понятием и не имеет прямого отношения к обсуждаемой теории. Количество же информации не зависит от того, воспринимаем ли мы данное сообщение как «правильное» или «неправильное», «истинное» или «ложное», «информацию» или «дезинформацию». Это видно уже из того простого и хорошо известного факта, что выбор любого из приведенных полярных определений зависит и от конкретной ситуации, и от конкретного человека, воспринимающего сообщение. Следовательно, здесь речь идет о действии информации на ту или иную конкретную систему. Это позволяет также правильно понять чрезвычайную неравноценность информации: решающее действие одного бита («да» или «нет»!) и неэффективность целого потока пустой болтовни. Все это несколько не подрывает ценность теории информации, а, наоборот, придает ей особое значение. Установив количественную меру любой информации, независимо от ее значения, мы получаем возможность количественного изучения действия информации на конкретные системы, а следовательно, и измерение ее ценности и значения.

Здесь будет уместно провести аналогию с энергией, количество которой также не зависит от ее действия, значения этого действия или его «ценности». Аналогично информации одно и то же количество энергии может быть «плохим» или «хорошим», «добрым» или «злым», пройти совершенно незамеченным или вызвать бурную реакцию.

В качестве простейшего физического примера использования информации рассмотрим проблему «демона» Максвелла. Она была поставлена Максвеллом в 1871 г. и заключается в следующем. Представим себе разумное существо, способное следить за движением отдельных молекул газа и сортировать их по скорости, направляя, например, быстрые молекулы в одну половину сосуда, а медленные — в другую. Ясно, что таким образом можно обойти второй принцип термодинамики и получать работу из теплоты без разности температур. В течение многих десятилетий этот парадокс воспринимался как свидетельство качественного отличия живых существ (по крайней мере, «демонов») от неживых объектов. Допускалось, что живые существа могут не подчиняться обычным законам физики. Некоторое разъяснение парадокса было дано Сцилардом (L. Szilard, 1929 г.), который обратил внимание на то, что работа демона основана на использовании информации о движении молекул. Сцилард высказал предположение, что процесс получения любой информации обязательно сопровождается увеличением энтропии, которое, в соответствии со вторым началом термодинамики, как раз компенсирует уменьшение энтропии газа, производимое демоном. Эти соображения были развиты Димерсом и особенно Бриллюэном (L. Brillouin), которые, в частности, указали, что в условиях полного термодинамического равновесия, включая и излучение, даже демон не может видеть молекулы (см. подробнее [17, 18]). Для наблюдения молекул необходимо рассеять избыточное излучение, что как раз и приводит к увеличению энтропии в соответствии с гипотезой Сциларда.

Рассмотрение различных конкретных примеров позволило Бриллюэну высказать следующий принцип (1953 г.): разность энтропии и информации в замкнутой системе не убывает, или

$$\Delta(S - I) \geq 0. \quad (83.1)$$

Это утверждение является обобщением *принципа Карно* ($\Delta S \geq 0$, N. L. S. Carnot, 1824 г.) и может быть названо принципом Сциларда–Бриллюэна.

Теория информации позволяет если не доказать этот принцип, то, во всяком случае, понять механизм его действия. С одной стороны, принцип Сциларда–Бриллюэна утверждает, что, используя информацию о системе, можно уменьшить ее физическую энтропию. Пусть, например, нам стало известно, что газ, заключенный в объеме V_0 , на самом деле занимает в данный момент объем $V_1 < V_0$. В принципе, мы можем использовать эту информацию для уменьшения физической энтропии газа путем быстрого перемещения стенок сосуда. Изменение энтропии в идеальном случае будет

равно $\Delta S = \ln(V_1/V_0) = \Delta I < 0$, т. е. мы как раз израсходовали имевшуюся информацию о системе ($I = \ln(V_0/V_1)$), израсходовали в том смысле, что после уменьшения объема сосуда она стала бесполезной ($I \rightarrow I' = \ln(V_1/V_1) = 0$). Уменьшив энтропию газа, мы можем использовать часть тепловой энергии, например, с помощью изотермического расширения сосуда до прежнего объема:

$$\Delta A = \Delta Q = T \Delta S = T \Delta I. \quad (83.2)$$

В рассматриваемом примере ценность информации можно измерять работой, которую удастся в идеальном случае получить с помощью этой информации (83.2). Оказывается, что ценность информации растет тогда пропорционально температуре.

С другой стороны, принцип Сциларда–Бриллюэна утверждает, что получение любой информации обязательно сопровождается увеличением энтропии в замкнутой системе. Действительно, в § 82 мы убедились, исходя из основного закона теории информации, что для передачи или обработки единицы информации необходимо затратить (рассеять в тепло) минимум T единиц энергии. Следовательно, увеличение энтропии при получении информации равно $\Delta S = \Delta Q/T = \Delta I$.

ГЛАВА XII

ДИСПЕРСИЯ

§ 84. Фазовая и групповая скорости волны

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в среде с дисперсией $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$. Слово «дисперсия» буквально означает разброс. В данном случае речь идет о разбросе значений показателя преломления, точнее о его зависимости от частоты поля. Дисперсия показателя преломления зависит от динамики электронов среды. Например, для плазмы (см. задачу XI.1, формула (77.10), $\lambda_l \ll \omega$ и задачу XII.1 ниже)

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m}, \quad (84.1)$$

где n_e — число электронов в единице объема, e , m — заряд и масса электрона.

Задача XII.1. Найти зависимость диэлектрической проницаемости от частоты переменного электрического поля для однородного и изотропного диэлектрика, помещенного в однородное магнитное поле H .

Данная задача аналогична задаче XI.1. Запишем уравнения движения атомного электрона, выбрав декартову систему координат с осью z , параллельной H :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -\omega_L \dot{y} + \frac{e}{m} E_x; \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= \omega_L \dot{x} + \frac{e}{m} E_y; \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= \frac{e}{m} E_z; \quad \omega_L = \frac{eH}{mc}, \end{aligned} \quad (84.2)$$

ω_0 — собственная частота атома-осциллятора. Для гармонической зависимости электрического поля от времени ($e^{-i\omega t}$) отсюда получим $x = aE_x + ibE_y$; $y = aE_y - ibE_x$;

$$z = \frac{e}{m} \cdot \frac{E_x}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad a = \frac{e}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_L^2}, \quad b = \frac{e}{m} \cdot \frac{\omega \omega_L}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_L^2}.$$

Компоненты вектора электростатической индукции связаны теперь с компонентами поля тензорной зависимостью (15.11): $D_\alpha = E_\alpha + 4\pi P_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta$, где $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора диэлектрической проницаемости, которые найдем, подставив в выражение для P_α значения x, y, z , полученные выше. В результате

$$(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\delta & 0 \\ -i\delta & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_L^2},$$

$$\delta = \frac{\omega_p^2 \omega \omega_L}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_L^2}, \quad \varepsilon_0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$
(84.3)

В случае $\omega_0 = 0$ выражение (84.3) дает тензор диэлектрической проницаемости немагнитной холодной плазмы. В отсутствие магнитного поля, $\delta = 0$, диэлектрик изотропен: $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon \cdot \delta_{\alpha\beta}$.

Отметим, что для однородных и изотропных диэлектриков зависимость коэффициента преломления от частоты в ограниченной области частот (длин волн) с хорошей точностью аппроксимируется функцией

$$n(\omega) = 1 + \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

что согласуется с зависимостью $\varepsilon_0(\omega)$ (84.3). Значения параметров Ω_0 и ω_0 для трех веществ приведены в качестве примера в табл. XII.1, данные для которой взяты из [11] (стр. 772, табл. 31.6; стр. 790, табл. 31.66; стр. 791, табл. 31.70).

Таблица XII.1. Параметры зависимости показателя преломления вещества от частоты излучения

Вещество	Диапазон длин волн, мкм	$\Omega_0, 10^{14} \text{ с}^{-1}$	$\omega_0, 10^{14} \text{ с}^{-1}$
Кварцевое стекло	0,48–1,06	13,56	20,3
Дистиллированная вода	0,25–1,0	11,14	19,64
Воздух, норм. условия	0,20–50	3,9	236,64

Дисперсия характеризует распространение монохроматической волны. Однако мы знаем, что любое поле может быть представлено в виде суперпозиции монохроматических волн и даже — плоских монохроматических волн с определенной частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. Закон распространения такой волны характеризуется зависимостью $\omega(\mathbf{k})$, которая называется *дисперсионным уравнением*. Например, для плазмы

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \omega_p^2 + k^2 c^2. \quad (84.4)$$

Это соотношение получается подстановкой в волновое уравнение, например (66.2), выражений для поля плоской монохроматической волны: $\mathbf{E}; \mathbf{H} \propto \exp\{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)\}$.

Дисперсионное уравнение определяет, в частности, скорость волны (69.4)

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} \equiv \frac{c}{n}. \quad (84.5)$$

Для плазмы всегда $n < 1$, а значит, скорость волны в плазме всегда больше предельной скорости c . Возможно ли это? Не противоречит ли это теории относительности?

Прежде всего заметим, что скорость (84.5) относится к идеальной монохроматической волне бесконечной протяженности. Так как форма такой волны заранее полностью определена, она вообще не может нести никакой информации, и в этом смысле противоречие с теорией относительности не возникает. Скорость (84.5) называется *фазовой скоростью волны*, так как она характеризует перемещение в пространстве точки с определенной фазой. Можно сказать, что фазовая скорость — геометрическое (кинематическое), а не физическое понятие. Приведем наглядный механический пример фазовой скорости. Представим себе цепочку независимых маятников, отклонения и скорости которых в начальный момент времени равны

$$x_n = a \sin kz_n, \quad \dot{x}_n = -a\omega_0 \cos kz_n, \quad (84.6)$$

где $z_n = nl$ — координата n -го маятника, а ω_0 — частота его колебаний. Нетрудно видеть, что колебания маятников образуют бегущую волну: $x(z, t) = a \cdot \sin(kz - \omega_0 t)$. Ее фазовая скорость $v_\phi = \omega_0/k$ может быть любой в зависимости от начального расположения маятников. В частности, при $k = 0$ (синфазные маятники) $v_\phi = \infty$.

Обратим внимание на то, что фазовая скорость не является вектором, как, например, $\mathbf{k}$. Действительно, пусть вектор $\mathbf{k}$ направлен под углом α к оси x . Тогда поле вдоль x можно записать в виде $E(x, t) = E_0 \exp\{i(k_x x - \omega t)\}$, и фазовая скорость в направлении оси может быть представлена формулой

$$v_x = \frac{\omega}{k_x} = \frac{v_\phi}{\cos \alpha} \quad (84.7)$$

вместо необходимого для векторов соотношения $v_x = v_\phi \cos \alpha$. В частности, при $\cos \alpha < v/c = 1/n$ фазовая скорость в этом направлении оказывается больше предельной скорости c , а при $\alpha = \pi/2$ она вообще обращается в бесконечность. Обсуждение этого парадокса будет дано в § 86. Однако сразу можно сказать, что фазовая скорость не является «настоящей» (физической) скоростью волны, скажем, скоростью движения фотонов. Для передачи сигнала волну необходимо промодулировать, а значит, она уже перестанет быть монохроматической, и ее спектр будет иметь конечную ширину. Модулированная волна называется обычно *волновым пакетом* (монохроматических составляющих), или *группой волн*.

Исследуем движение волнового пакета в среде. Рассмотрим вначале простейший пример пакета всего из двух волн одинаковой амплитуды

$$\begin{aligned} A(z, t) &= \sin(k_1 z - \omega_1 t) + \sin(k_2 z - \omega_2 t) = \\ &= 2 \cos \left[\frac{(k_2 - k_1)z}{2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right] \cdot \sin \left[\frac{(k_2 + k_1)z}{2} - \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} \right]. \end{aligned} \quad (84.8)$$

При близких $\omega_1 \approx \omega_2$, а значит и $k_1 \approx k_2$ второй сомножитель в последней формуле описывает приблизительно монохроматическую волну, а первый — медленную амплитудную модуляцию — огибающую этой волны. Скорость движения огибающей

$$V = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} \approx \frac{d\omega}{dk}. \quad (84.9)$$

Эта скорость называется *групповой скоростью* волны.

Чтобы исследовать распространение волнового пакета в более общем случае, используем спектральное разложение. Пусть в начальный момент в среде задано поле

$$A_0(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikz} dk. \quad (84.10)$$

В силу принципа суперпозиции каждая монохроматическая составляющая начального поля (e^{ikz}) создает плоскую волну $e^{i(kz - \omega t)}$, где связь ω и k задается дисперсионным уравнением $\omega(k) = ck/n(\omega)$. Отсюда сразу получаем формальное решение:

$$A(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kz - \omega(k)t)} dk. \quad (84.11)$$

Чтобы вычислить этот интеграл в явном виде, предположим, что мы имеем достаточно длинный волновой пакет с узким спектром $\Delta k \ll k_0$. Тогда можно разложить $\omega(k)$ в ряд:

$$\omega(k) \approx \omega_0(k_0) + \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} \cdot (k - k_0) + \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0} \cdot \frac{(k - k_0)^2}{2}. \quad (84.12)$$

Ограничимся пока первыми двумя членами ряда. Подставляя их в (84.11), получим

$$\begin{aligned} A(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-it(\omega_0 - k_0\omega'_0)} \int A(k) e^{ik(z - \omega'_0 t)} dk = \\ &= A(z - \omega'_0 t, 0) \cdot e^{-i(\omega_0 - k_0\omega'_0)t}, \end{aligned} \quad (84.13)$$

где $\omega_0 = \omega(k_0)$, $\omega'_0 = (d\omega/dk)_{k=k_0}$. Таким образом, с точностью до фазового множителя начальное возмущение $A_0(z, 0)$ (84.10) перемещается без искажения с групповой скоростью (84.9).

Изменение фазы волны $\Delta\theta = t(\omega_0 - \omega'_0 k_0)$ происходит за счет разности фазовой и групповой скоростей: $\Delta\theta = k_0(v_\phi - V)t$. Картина движения волны выглядит при этом следующим образом. Синусоида с частотой $\approx \omega_0$ смещается относительно своей огибающей, «возникая» на одном конце ее и «исчезая» на другом. Энергия волны перемещается, конечно, вместе с волновым пакетом, т. е. движется с групповой скоростью. Это значит, что

групповая скорость не должна превосходить предельную c . В частности, например, для волн в плазме (84.1)

$$\frac{V}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d\omega}{dk} = \left[\frac{d}{d\omega}(\omega n) \right]^{-1} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1. \quad (84.14)$$

С другой стороны, если групповая скорость равна нулю, волна вообще не несет энергию. Примером может служить рассмотренная выше цепочка маятников, для которой $d\omega/dk = 0$. Независимость частоты от длины волны как раз и показывает, что между соседними маятниками нет никакого взаимодействия, а значит, нет и передачи энергии.

Задача XII.2. Найти поворот плоскости поляризации плоской линейно поляризованной монохроматической волны, распространяющейся в диэлектрике вдоль однородного магнитного поля (*эффект Фарадея*).

Указание: Считать поле слабым.

Анизотропия замагниченного диэлектрика несколько усложняет вид волнового уравнения для поля. Теперь нельзя положить $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, поэтому вместо (66.2) получим для плоской монохроматической волны при $\mu = 1$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}, \quad D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta,$$

где, как и прежде, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Отсюда для E_x и E_y с учетом значения ($\varepsilon_{\alpha\beta}$) (84.3) запишем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon E_x + i\delta E_y), \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} (-i\delta E_x + \varepsilon E_y).$$

Умножая второе уравнение на i и складывая с первым, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon + \delta) E, \quad E = E_x + iE_y. \quad (84.15)$$

Теперь вернемся к линейно-поляризованной волне и представим ее в виде суперпозиции двух циркулярно поляризованных волн (69.6)

$$E_{\text{лин}}(z, t) = \frac{1}{2} E_0 \left(e^{i(k_x z - \omega t)} \pm e^{-i(k_x z - \omega t)} \right).$$

Подстановка каждой из двух составляющих этого выражения в (84.15) дает

$k_{\text{н,л}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \pm \delta}$ (знак « $\rightarrow$ » для левой поляризации появляется из-за зависимости вида $e^{i\omega t}$ от времени, что видно из (84.3): $\omega \rightarrow -\omega$). Для слабого магнитного поля

($\omega_L \ll \omega$, ω) $k_{n,l} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} (1 \pm \delta/2\varepsilon_0) \equiv k_0 \pm \Delta k$, и поле волны на расстоянии l от входа в диэлектрик

$$E_{\text{лин}}(l, t) \approx \frac{1}{2} E_0 \left(e^{i(k_0 l - \omega t)} \pm e^{-i(k_0 l - \omega t)} \right) \cdot (1 + i\Delta k \cdot l).$$

Это означает, что вектор $\mathbf{E}_{\text{лин}}$ повернулся на угол $\alpha = \text{Arctg}(\Delta k \cdot l) = V_H H l$, где $V_H = \frac{e}{2mc^2} \cdot \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\sqrt{\varepsilon_0} (\omega_p^2 - \omega^2)^2}$ — постоянная Верде (E. Verdet, 1824–1866 гг.).

§ 85. Расплывание волнового пакета

Групповая скорость волны сама, вообще говоря, зависит от частоты (см., например, (84.14)). Это приводит к искажению формы волнового пакета, которое можно оценить следующим образом. Пусть ширина спектра волны $\sim \Delta k$. Тогда разброс групповой скорости $\Delta V \sim \omega_0'' \Delta k$, откуда искажение размера пакета L

$$\Delta L \sim \Delta V \cdot t \sim \omega_0'' \cdot \Delta k \cdot t \sim \frac{\pi t \omega_0''}{L}, \quad \omega_0'' \equiv \left. \frac{d^2 \omega}{dk^2} \right|_{k=k_0}. \quad (85.1)$$

Искажение можно считать малым ($\Delta L \ll L$) в течение времени $t \ll t_p$, где

$$t_p \sim L^2 / \omega_0''. \quad (85.2)$$

Для количественного расчета величины искажения пакета необходимо учесть третий член в разложении (84.12). Прделаем это на примере расплывания поля гауссовой формы

$$A(z, 0) = A_0 e^{-z^2/2l_0^2} \cdot e^{ik_0 z}. \quad (85.3)$$

Пусть закон дисперсии имеет вид

$$\omega(k) = \omega_0 + V \cdot (k - k_0) + a^2 \cdot (k - k_0)^2 \cdot \omega_0, \quad \omega_0 = \omega(k_0),$$

$$V = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad a^2 = \left. \frac{1}{2\omega_0} \cdot \frac{d^2 \omega}{dk^2} \right|_{k=k_0}. \quad (85.4)$$

Произведем фурье-преобразование начального возмущения:

$$\begin{aligned} A(z, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{ikz} dk, \quad \text{где} \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(z, 0) \cdot e^{ikz} dz = \\ &= \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2l_0^2} \cdot e^{i(k_0-k)z} \cdot dz. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла в последнем выражении, поступим так же, как и в задаче XI.6 — выделим в показателе экспоненты полный квадрат:

$$-\frac{z^2}{2l_0^2} - i(k-k_0)z = -\left(\frac{z}{\sqrt{2}l_0} + \frac{i(k-k_0)}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{(k-k_0)^2 l_0^2}{2}$$

и сведем выражение к виду, аналогичному (78.12), для чего достаточно проинтегрировать там замену $k \rightarrow k - k_0$. В результате получаем

$$A(k) = A_0 l \cdot e^{-(k-k_0)^2 l_0^2 / 2}.$$

Теперь можно записать значение поля в момент времени t :

$$A(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{i(kz - \omega(k) \cdot t)} dk,$$

где функция $\omega(k)$ задана выражением (85.4). Таким образом,

$$A(z, t) = \frac{A_0 l_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\psi(k, z, t)} \cdot dk, \quad (85.5)$$

где

$$\psi(k, z, t) = -\frac{(k-k_0)^2 l_0^2}{2} + i(kz - \omega_0 t - (k-k_0)Vt - a^2(k-k_0)^2 \cdot \omega_0 t).$$

Выделив, как и выше, в этом выражении полный квадрат, содержащий переменную k , находим

$$\begin{aligned} \psi(k, z, t) &= -\frac{\xi^2(k)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z - V \cdot t}{l(t)}\right)^2 + i(k_0 z - \omega_0 t), \\ \xi(k) &= (k-k_0) \cdot l(t) - i \frac{z - V \cdot t}{l(t)}, \\ l^2(t) &= l_0^2 (1 + i\kappa t), \quad \kappa = \frac{2a^2 \omega_0}{l_0^2} = \frac{1}{l_0^2} \cdot \frac{d^2 \omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0}. \end{aligned} \quad (85.6)$$

Можно показать, что соотношение (78.13) справедливо и для комплексных l , если только $\text{Re} l^2 > 0$ (условие сходимости интеграла). Поэтому, произведя в (85.5) интегрирование по k , аналогично (78.13) получаем

$$A(z, t) = A_0 \frac{l_0}{l(t)} \cdot e^{-(z-Vt)^2/2l^2(t)} \cdot e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}. \quad (85.7)$$

Поскольку $l(t)$ комплексная величина, то можно записать

$$l(t) = |l(t)| \cdot e^{i\beta}, \quad \text{tg} 2\beta = \xi \cdot t, \quad |l(t)| = l_0 (1 + \xi^2 t^2)^{1/4},$$

$$\frac{1}{l^2(t)} = \frac{l_0^2 - 2ia^2\omega_0 t}{|l(t)|^4} \quad (85.8)$$

и представить (85.7) в виде

$$A(z, t) = |A(z, t)| \cdot e^{i\theta(z, t)}, \quad |A(z, t)| = \frac{A_0}{(1 + \xi^2 t^2)^{1/4}} \cdot e^{-(z-Vt)^2/2l_0^2(1+\xi^2 t^2)},$$

$$\theta(z, t) = k_0 z - \omega_0 t + \frac{(z-Vt)^2}{2l_0^2} \cdot \frac{\xi t}{1 + \xi^2 t^2} - \beta(t). \quad (85.9)$$

Проанализируем полученное выражение. Прежде всего видно, что волновой пакет как целое смещается со скоростью V . При этом пакет расплывается (рис. XII.1, *a*) причем его среднеквадратичный размер описывается выражением

$$\langle z^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 |A(z, t)|^2 dz}{\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 dz} = l_0^2 (1 + \kappa^2 t^2) = \frac{|l(t)|^4}{l_0^2}. \quad (85.10)$$

Соответственно амплитуда волны

$$A_{\max} = |A(z, t)|_{z=Vt} = A_0 l_0 / |l(t)|$$

уменьшается таким образом, что полная энергия волны остается постоянной:

$$A_{\max}^2 \cdot \sqrt{\langle z^2 \rangle} = A_0^2 l_0.$$

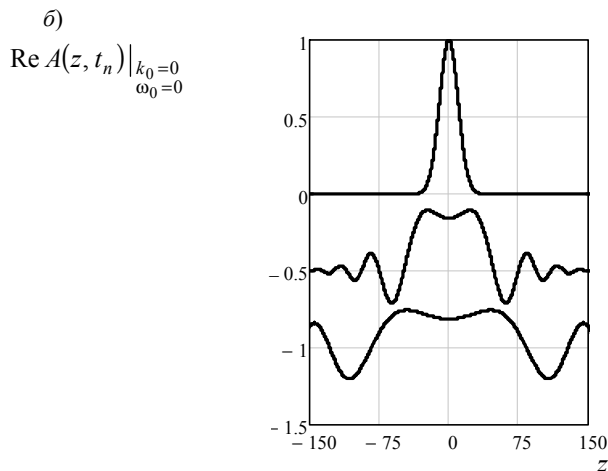
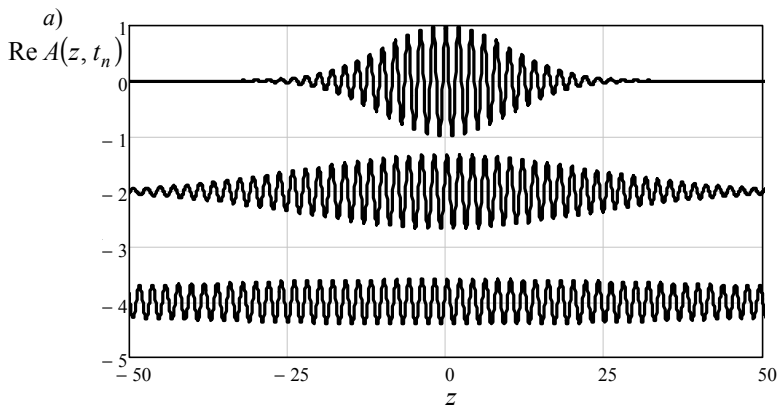


Рис. XII.1. Волновой пакет в среде с дисперсией: а) распыление видеоимпульса $\text{Re} A(z, 0) \Rightarrow \text{Re} A(z, t)$ (85.3) $\Rightarrow \text{Re} A(z, t)$ (85.9), представленное в системе, движущейся со скоростью, равной фазовой скорости V , в моменты времени $t_n = nT_0$, $n = 0, 10, 30$; период волны $T_0 = 6,66$ нс ($\lambda_0 = 2$ см), коэффициент дисперсии показателя преломления среды (см. (85.6) $\xi = 0,2/T_0$); б) поведение огибающей видеоимпульса $\text{Re} A(z, 0) \Big|_{k_0=0, \omega_0=0} \Rightarrow \text{Re} A(z, t) \Big|_{k_0=0, \omega_0=0}$ (85.3) $\Rightarrow \text{Re} A(z, t) \Big|_{k_0=0, \omega_0=0}$ (85.9), в той же системе и в те же моменты времени; графики искусственно сдвинуты по оси ординат

В каждый момент времени такая волна является амплитудно- и частотно-модулированной в пространстве, т. е. не только амплитуда, но и длина волны изменяется вдоль z . Это отчетливо проявляется в поведении огибающей гауссовского видеоимпульса (рис. XII.1, б). Появление такой частотной модуляции, на первый взгляд неожиданное, объясняется очень просто. В начальный момент времени различные гармонические составляющие пакета накладывались друг на друга, образуя гладкий гауссовский пакет, заполненный высокочастотными колебаниями («видеоимпульс», (85.3)). Затем, вследствие дисперсии групповой скорости, эти составляющие пространственно разделились, что и привело к частотной модуляции. Напомним, что комплексная форма соответствует циркулярно поляризованной волне (см. § 69), т. е. вращению вектора $\mathbf{A}$ в плоскости (x, y) в соответствии со значением фазы $\theta(z, t)$ (85.9). Действительная часть $\operatorname{Re} A(z, t) = |A| \cos \theta(z, t)$ описывает поведение проекция вектора $\mathbf{A}$ на плоскость (x, z) (рис. XII.1).

Для линейно поляризованной волны аналогичное рассмотрение следует провести в действительной форме, что дает

$$A(z, t) = \frac{A_0 I_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(k-k_0)^2 I_0^2 / 2} \cos(kz - \omega(k)t) dk. \quad (85.11)$$

Этот интеграл не выражается в элементарных функциях. Результат численного интегрирования качественно повторяет картину, представленную на рис. XII.1: гауссовский видеоимпульс, расплываясь, приобретает частотную модуляцию в пространстве.

Волновое уравнение инвариантно относительно изменения знака времени. Это значит, что волновые процессы подобно механическим «обратимы», т. е. симметричны относительно прошлого и будущего. Например, любой обращенный во времени процесс может быть действительно осуществлен при соответствующих начальных условиях. Можно, скажем, сформировать волновой пакет, который будет сжиматься. Для этого, очевидно, нужно взять начальное возмущение в виде частотно-модулированной волны, например в виде (85.7), (85.9) в некоторый момент $t = t_0$ с заменой знака t (или i , т. е. нужно взять комплексно-сопряженную волну). Интересно отметить, однако, что, в отличие от неограниченного расплывания пакета, его сжатие всегда конечно и определяется полной шириной спектра $(\Delta z)_{\min} \sim \pi / (\Delta k)_0 \sim l_0$.

После достижения минимального размера пакет начинает расплываться. При сжатии пакета амплитуда поля растет. В этом можно убедиться, проследив изменение $|A(z, t)|$ со временем. При $t = t_0$ ширина этой функции

$\sigma(t_0) = l_0 \sqrt{1 + \kappa^2 t_0^2}$, а амплитуда $A_{\max} = \left| A(z, t_0) \right|_{z=Vt_0} = A_0 / (1 + \kappa^2 t_0^2)^{1/4}$.

При $t = 0$ ширина минимальна, $\sigma(0) = l_0$, а амплитуда максимальна, A_0 . Затем с ростом $t < 0$, ширина снова начинает расти (как $1 + \kappa^2 t^2$), а амплитуда — падать. Это явление используется для усиления радиосигналов в точке приема.

Такое поведение пакета хорошо иллюстрирует простой пример из области спорта. При общем старте бегунов или лыжников группа непрерывно растягивается по дистанции («расплывание» пакета). Если же старт раздельный, а стартуют бегуны в очередности, обратной их скоростным возможностям («гонки с гандикапом»), то после старта последнего группа («пакет») будет сжиматься, пока быстрые не обойдут медленных, после чего «пакет» вновь начнет «расплываться».

Эта модель позволяет сформулировать правило формирования самосжимающегося волнового пакета в среде с дисперсией: длина волны излучения в пакете должна меняться со временем в точке испускания так, чтобы локальная фазовая скорость возрастала от начала к концу пакета. Например, фазовая скорость излучения, распространяющегося в воздухе, как и в плазме (см. (84.5)), растет с уменьшением частоты, т. е. с увеличением длины волны. Это означает, что пакет будет сжиматься, если в точке испускания длина волны в «голове» пакета меньше, чем в его «хвосте».

§ 86. Волноводы

Волноводом называется замкнутая металлическая труба произвольной формы, которая служит для канализации (транспортировки) электромагнитной энергии, обычно в диапазоне СВЧ. Дело в том, что передача электромагнитных волн по проводам становится совершенно непригодной, когда длина волны сравнима с расстоянием между проводами. В этом случае провода работают просто как антенна, т. е. электромагнитная энергия излучается (Глава XXI ниже). Простейшее решение этой проблемы состоит в использовании металлической трубы. Электромагнитная волна не может пройти через достаточно толстую металлическую стенку из-за скин-эффекта (§ 87). Однако она может отражаться на крутых поворотах трубы или в местах изменения ее размеров. Тем не менее удастся сконструировать волноводы таким образом, чтобы обеспечить эффективную передачу электромагнитной волны. Волноводы появились сразу же после изобретения радиолокации как один из необходимых элементов радиолокационной станции.

Как мы увидим ниже, передача электромагнитной энергии по волноводу во многом напоминает распространение волны в среде с дисперсией.

В качестве простейшего примера рассмотрим прямой волновод прямоугольного сечения (рис. XII.2). Конфигурацию поля в волновде можно найти, решив волновое уравнение для потенциалов с граничными условиями на стенках волновода, которые мы будем считать идеально проводящими. Для рассматриваемой задачи удобно использовать кулоновскую калибровку потенциалов (67.6) $\text{div} \mathbf{A} = 0$. В отсутствие зарядов и токов потенциал $\varphi \equiv 0$, и волновое уравнение (67.7) принимает вид

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (86.1)$$

Граничные условия на стенках идеально-проводящего волновода можно выбрать из условия равенства нулю составляющей электрического поля E_t , касательной к поверхности волновода. Действительно, если на стенке такого волновода E_t «вдруг» станет отличным от нуля, свободные заряды в проводнике немедленно сместятся и компенсируют («занулят») E_t . Поскольку при $\varphi = 0$ второе равенство в (67.1) дает

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

то из граничного условия $E_t = 0$ следует также граничное условие для компоненты вектора-потенциала: $A_t = 0$. В то же время компонента H_t магнитного поля не обращается в нуль на стенках волновода, по которому текут токи с линейной плотностью j_1 (47.6):

$$H_t = \frac{4\pi}{c} \cdot j_1.$$

Но обращается в нуль компонента магнитного поля $H_\perp$, ортогональная поверхности стенки волновода. Причина этого та же, что и для E_t : ненулевое поле $H_\perp$ возбуждает (возбудило бы!) в стенках токи, создающие встречное магнитное поле, компенсирующее $H_\perp \neq 0$. Воспользовавшись вторым уравнением (65.1) и граничным условием $E_t = 0$, получаем граничное условие для $\mathbf{H}$: компонента вектора $\text{rot} \mathbf{H}$, касательная к стенкам волновода, также обращается в нуль на стенках: $(\text{rot} \mathbf{H})_t = 0$. Таким образом, граничные условия на стенках идеально проводящего волновода можно теперь записать в виде

$$E_t = H_\perp = 0, \text{ или } A_t = 0, (\text{rot} \mathbf{H})_t = 0. \quad (86.2)$$

где индексом t обозначены тангенциальные составляющие векторов. Принимая далее, что поле имеет определенную частоту ω , получим уравнение

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0, \quad k^2 = \omega^2/c^2, \quad (86.3)$$

которое нужно решать совместно с уравнением $\text{div} \mathbf{A} = 0$ и граничными условиями (86.2).

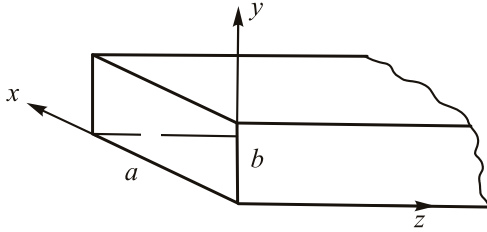


Рис. XII.2. Волновод прямоугольного сечения

Электрическое и магнитное поля в волноводе взаимно ортогональны, так как они по-прежнему удовлетворяют уравнениям

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (86.4)$$

откуда для вакуумных волноводов ($\varepsilon = \mu = 1$)

$$\mathbf{E} = \frac{ic}{\omega} (\nabla \times \mathbf{H}), \quad \mathbf{H} = -\frac{ic}{\omega} (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (86.5)$$

Из уравнений (86.5) можно также выразить поперечные компоненты поля через продольные:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik_z}{k_\perp^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{i\omega}{ck_\perp^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}, & E_y &= \frac{ik_z}{k_\perp^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{i\omega}{ck_\perp^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ H_x &= -\frac{i\omega}{ck_\perp^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{ik_z}{k_\perp^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= \frac{i\omega}{ck_\perp^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{ik_z}{k_\perp^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}, \end{aligned} \quad (86.6)$$

где введено обозначение

$$k_\perp^2 = k^2 - k_z^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2. \quad (86.7)$$

Аналогичные соотношения можно получить для волновода круглого сечения. Эти соотношения дают основание для классификации волн в волноводе — они указывают на существование двух классов волн:

$$1) A_z = 0; E_z = 0; H_z \neq 0;$$

$$2) A_z \neq 0; E_z \neq 0; H_z = 0.$$

Волны 1-го класса называются «магнитными» волнами (*H-волна* или *TE-волна*, т. е. волна с поперечным электрическим полем — *transverse electric wave*), а волны 2-го класса — «электрическими» волнами (*E-волна* или *TM-волна* — *transverse magnetic wave*). Электромагнитное поле в волноводе представляет собой одну из волн двух данных классов или их суперпозицию. Эта классификация введена Рэлеем (J. W. Rayleigh) в 1897 г.

Рассмотрим конфигурацию *H*-волны в волноводе прямоугольного сечения. Разлагая вектор-потенциал волны в двумерный ряд Фурье, получим

$$A_x(x, y) = \sum_{n, m=0}^{\infty} (A_n \sin nk_x x + B_n \cos nk_x x) \cdot (C_m \sin mk_y y + D_m \cos mk_y y), \quad (86.8)$$

$$k_x = \frac{\pi}{a}, \quad k_y = \frac{\pi}{b},$$

и аналогично для $A_y(x, y)$ с коэффициентами A'_n, B'_n, C'_m, D'_m . Используя граничное условие $A_t = 0$, найдем $D_m = 0, B'_n = 0$. Подставляя оставшуюся сумму в уравнение $\text{div} \mathbf{A} = 0$, получим $A_n = C'_m = 0$, а также

$$nB_n C_m k_x + mD'_m A'_n k_y = 0. \quad (86.9)$$

Переобозначив коэффициенты ($B_n C_m \equiv A_{nm}$), запишем окончательное решение в виде

$$A_x = \sum_{n, m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (86.10)$$

$$A_y = - \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{nb}{ma} A_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \cos \frac{m\pi y}{b}.$$

Полное решение уравнения (86.3) ищем в виде

$$A_{x,y}(x, y, z) = A_{x,y}(x, y) \cdot e^{ik_z z}. \quad (86.11)$$

Подставляя это выражение в (86.3), получим

$$k_z^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2. \quad (86.12)$$

Волна с заданными номерами гармоник n, m обозначается посредством H_{nm} или TE_{nm} . Соотношение (86.12) показывает, что слишком высокие гармоники, для которых $k_z^2 < 0$, не могут распространяться по волноводу. Действительно, в этом случае $k_z = \pm i|k_z|$ оказывается мнимым, что, согласно (86.11), означает затухание волны. Последнее связано, конечно, не с потерями в стенках, которые мы приняли идеально проводящими, а с отражением волны на входе в волновод (волна «не лезет»). При заданных m, n существует критическая длина волны λ_{nm} , при которой поле еще проходит по волноводу ($\lambda < \lambda_{nm}$). Она определяется из условия $k_z = 0$. Максимальная λ_{nm} соответствует волне H_{10} ($a > b$):

$$\lambda_{\max} = 2a.$$

Конфигурация полей для H_{10} - и H_{11} -волн показана на рис. XII.3.

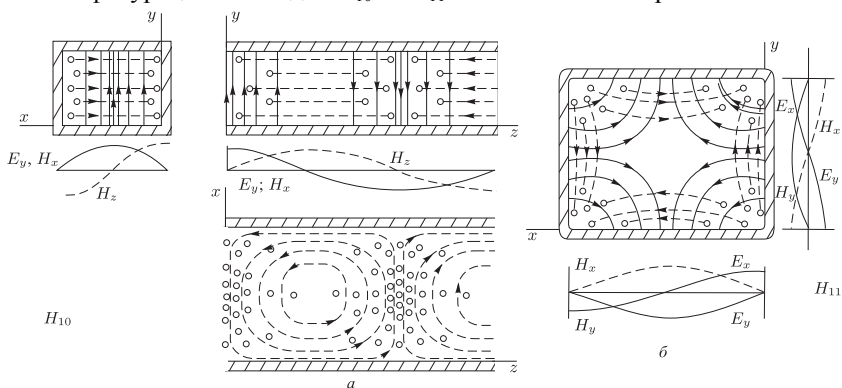


Рис. XII.3. Структуры H_{10} -волны (а) и H_{11} -волны (б) в прямоугольном волноводe

Отметим, что типы E_{n0} или E_{0n} невозможны, так как для них не выполняются граничные условия $E_z = 0$ на боковых стенках волновода.

В случае E -волн запишем выражение для одной из поперечных компонент, например $A_x(x, y, z)$, в котором мы сразу учтем зависимость от z :

$$A_x(x, y, z) = \sum_{n, m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{ik_{nm}z}. \quad (86.13)$$

Здесь выбор нужных слагаемых из общего выражения вида (86.8) производится аналогично предыдущему случаю, т. е. из граничного условия $A_t = 0$ и уравнения $\text{div} \mathbf{A} = 0$. Для продольной компоненты $\mathbf{A}$ можем написать

$$A_z(x, y, z) = \sum_{n, m=1}^{\infty} B_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \cos \frac{m\pi y}{b} e^{ik_{nm}z}. \quad (86.14)$$

Условие $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ приводит к связи между коэффициентами

$$ik_{nm} B_{nm} = \frac{n\pi}{a} A_{nm}, \quad (86.15)$$

где k_{nm} определяется из (86.12).

В волноводе круглого сечения электромагнитное поле естественно описывать в цилиндрических координатах (r, α, z) . Уравнения (66.2) для компоненты E_z в этом случае имеет вид (см. П.1.5)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0.$$

Подставим в это уравнение решение в виде

$$E_z(r, \alpha, z) = R(r) \cdot e^{i(k_\alpha \alpha + k_z z)}$$

и учтем условие $E_z(\alpha) = E_z(\alpha + 2\pi)$, что дает

$$e^{ik_\alpha \cdot 2\pi} = 1, \quad \text{или} \quad k_\alpha = n, \quad \text{где } n \text{ — целое.}$$

В результате приходим к уравнению

$$r^2 R'' + rR' + (\kappa^2 r^2 - n^2) \cdot R = 0, \quad \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2,$$

которое представляет собой *уравнение Бесселя* (F. W. Bessel, 1784–1846 гг.). Его решением являются так называемые *цилиндрические функции* первого рода, или *функции Бесселя*, от аргумента κr :

$$R(r) = C \cdot J_n(\kappa r), \quad E_z(r, \alpha, z) = E_0 J_n(\kappa r) \cdot e^{i(n\alpha + k_z z)},$$

где C — константа, n — порядок функции Бесселя. Второе слагаемое в общем решении данного дифференциального уравнения второго порядка содержит так называемые функции Вебера (Неймана). Его в данном случае следует отбросить, так как при $r \rightarrow 0$ эти функции стремятся к $-\infty$. Остальные две компоненты поля, E_r и E_α находим через E_z из уравнений Максвелла (см. подробнее [16], § 9.5, и [1], задача 514). Граничное условие (86.2) дает уравнение для функций Бесселя

$$J_n(\kappa r) = 0,$$

где ρ — радиус поперечного сечения волновода. Значения корней этого уравнения $\chi_{mn}^{(E)}$ (m — целое, номер корня, табл. XII.1) определяют величину волнового числа k_z аналогично (86.12):

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa_{mn}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\chi_{mn}^{(E)}}{\rho} \right)^2.$$

И точно так же, как и в прямоугольном волноводе, критическое значение длины волны для моды mn E -волны находим из условия $k_z = 0$:

$$\left(\lambda_{mn}^{(E)} \right)_{\text{крит}} = 2\pi\rho / \chi_{mn}^{(E)}. \quad (86.16)$$

Аналогично находим решение для **H**-компоненты поля в круглом волноводе:

$$H_z(r, \alpha, z) = H_0 \cdot J_n(\kappa r) \cdot e^{i(n\alpha + k_z z)}.$$

Граничное условие для H_z получим из третьего граничного условия. Выбрав (см. П.I.5)

$$(\text{rot} \mathbf{H})_t = (\text{rot} \mathbf{H})_\alpha = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0,$$

приходим к условию

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=\rho} = ikH_r(\rho) = 0, \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial J_n(\kappa r)}{\partial r} \right|_{r=\rho} = 0.$$

Последнее равенство есть уравнение, корни которого $\chi_{mn}^{(H)}$, как и в случае E -волны, определяют критическое значение длины волны для mn -моды H -волны:

$$\left(\lambda_{mn}^{(H)} \right)_{\text{крит}} = 2\pi\rho / \chi_{mn}^{(H)}.$$

Как следует из данных табл. XII.2, наиболее длинноволновой является мода 11 H -волны:

$$\lambda_{\text{max}} = 3,4125 \cdot \rho \approx 1,7 \cdot 2\rho,$$

что не намного отличается от $\lambda_{\max}$ в прямоугольном волноводе при $a = 2\rho$. В отличие от последнего, в круглом волноводе всегда возможны так называемые *вырожденные моды*, у которых критические длины волн для H - и E -волн совпадают (табл. XII.2):

$$\left(\lambda_{11}^{(E)}\right)_{\text{крит}} = \left(\lambda_{10}^{(H)}\right)_{\text{крит}}, \quad \left(\lambda_{21}^{(E)}\right)_{\text{крит}} = \left(\lambda_{20}^{(H)}\right)_{\text{крит}} \quad \text{и т. д.}$$

Таблица XII.2. Корни функций Бесселя и их производных и соответствующие критические значения длины волны излучения в круглом волноводе ($\varepsilon = \mu = 1$)

Мода $m\pi$	E -волна		H -волна	
	$\chi_{m\pi}^{(E)}$	$\left(\lambda_{m\pi}^{(E)}\right)_{\text{крит}} / \rho$	$\chi_{m\pi}^{(H)}$	$\left(\lambda_{m\pi}^{(H)}\right)_{\text{крит}} / \rho$
10	2,4048	2,6128	3,8317	1,6398
11	3,8317	1,6398	1,8412	3,4125
12	5,1356	1,2235	3,0542	2,0572
20	5,5201	1,1382	7,0156	0,8956
13	6,3802	0,9848	4,2012	1,4956
21	7,0156	0,8956	5,3314	1,1785

В общем случае поле в волноводе представляет собой суперпозицию нескольких *гармоник*, или, как их называют, *мод*, удовлетворяющих условию $\lambda_{m\pi} > \lambda$. Соотношение амплитуд различных мод зависит главным образом от условий возбуждения волновода. Отметим, что поле в волноводе представляет собой комбинацию бегущей волны (вдоль волновода) и стоячих волн (поперек волновода).

Существование критической длины волны, ограничивающей применение волновода, вызвано тем, что рассмотренный волновод является *одно-связным*, т. е. все его стенки имеют один и тот же потенциал. Как было подробно объяснено выше, при таких граничных условиях неизбежно возникает стоячая волна поперек волновода ($k_{\perp} \neq 0$), что и приводит к ограничению пропускания волновода: ($\lambda_{\max} = 2\pi / (k_{\perp})_{\min}$). Однако возможны и другие конструкции, так называемые *много-связные волноводы*, которые состоят из нескольких изолированных друг от друга проводников, находящихся при разных потенциалах. Простейшим примером двухсвязного волновода является коаксиальный кабель. В таком кабеле возможно квазистационарное поле с произвольно большой длиной волны (включая статические поля), и ника-

ких ограничений на длину волны здесь не возникает. Оба поля такого типа волны поперечны, и поэтому она называется *ТЕМ-волной*.

Из соотношений (86.7) видно, что поле в *ТЕМ*-волне ($E_z = H_z = 0$) существует, если только $k_{\perp}^2 = 0$, т. е. фазовая скорость такой волны равна скорости света:

$$V_{\phi} = \omega/k_z = c,$$

а критическая длина волны отсутствует: $\lambda_{\max} = 2\pi/k_{\perp} = \infty$. В этом случае волновые уравнения для потенциалов сводятся к уравнению Лапласа по поперечным координатам (в произвольной калибровке):

$$\Delta_{\perp} \mathbf{A} = 0, \quad \Delta_{\perp} \varphi = 0, \quad (86.16)$$

т. е. картина поля в поперечном сечении волновода совпадает с картиной статического электромагнитного поля. Это, в свою очередь, подтверждает невозможность распространения *ТЕМ*-волн по односвязному волноводу: квазистатические поля должны охватывать проводники с зарядами или токами. С другой стороны, существование поля в многосвязном волноводе возможно не только за счет возбуждения стоячей волны в поперечном направлении, но и вследствие того, что полный заряд некоторых проводников волновода отличен от нуля. Иными словами, линии $\mathbf{H}$ замкнуты вокруг $\mathbf{j}$ (квазистационарное поле) или $\mathbf{E}$ (волновое поле). Поэтому в односвязном волноводе *ТЕ*-волна обязательно содержит H_z — «охват» вектора $\mathbf{E}$ линиями $\mathbf{H}$ происходит (рис. XII.3) в плоскостях (x, z) и (y, z) . В свою очередь, *ТМ*-волна обязательно содержит E_z — «охват» вектора $\mathbf{E}$ линиями $\mathbf{H}$ происходит в плоскости (x, y) . Несмотря на кажущееся преимущество многосвязных волноводов, их применение для очень коротких волн ограничено большими потерями из-за наличия дополнительного (внутреннего) проводника, на поверхности которого к тому же возникают, как правило, большие поля.

Одним из наиболее распространенных видов двусвязанных волноводов является *коаксиальный кабель* (рис. VI.5). Его волновые характеристики мы рассмотрим в конце этого параграфа.

Распространение волны вдоль волновода можно рассматривать как некоторый одномерный процесс, характеризующийся волновым числом k_z , которое связано с частотой волны соотношениями вида (86.7), (86.12). Последние можно рассматривать как закон дисперсии, описывающий свойства волновода как некоторой «среды».

Рассмотрим подробнее свойства такой среды на примере *двухпроводной линии* — волновода в виде двух параллельных идеально проводящих плоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии d (рис. VI.26). В таком волноводе возможны как чисто поперечные волны (*ТЕМ*-волны, $\mathbf{E}$ перпен-

дикулярно плоскостям), так и волны с продольными компонентами (TE - и TM -волны). Первые называются *быстрыми волнами* — они распространяются с предельной скоростью, так как, по существу, не отличаются от волн в свободном пространстве. Волны второго типа называются *медленными*, так как для них справедливо соотношение дисперсионного типа (86.12), а их групповая скорость оказывается меньше предельной. Закон дисперсии медленных волн в рассматриваемом случае двух проводящих плоскостей отличается от (86.12) в двух отношениях: во-первых, здесь нужно положить $b = \infty$ и, во-вторых, учесть, что теперь волна может распространяться в двух направлениях, скажем, в плоскости (y, z) . В результате получаем

$$\omega^2 = c^2 k_t^2 + \omega_n^2, \quad (86.17)$$

где k_t — проекция вектора $\mathbf{k}$ на плоскость (y, z) , а $\omega_n = ck_\perp = n\pi c/d$. Из (86.17) находим фазовую и групповую скорости волны:

$$\begin{aligned} \frac{v_\phi}{c} &= \frac{\omega}{ck_t} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_n}{ck_t}\right)^2} > 1, \\ \frac{V}{c} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_n}{ck_t}\right)^2}} < 1. \end{aligned} \quad (86.18)$$

Исключив из этих выражений ck_t , получаем любопытное равенство

$$\omega = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad (86.19)$$

которое в точности соответствует релятивистской зависимости энергии частицы от ее скорости, причем роль массы «частицы» играет величина ω_n . Такая аналогия объясняется тем, что исходный закон дисперсии (86.17) совпадает с соотношением между энергией, импульсом и массой релятивистской частицы. Эта аналогия не является формальной, поскольку согласно квантовой механике энергия фотона пропорциональна частоте поля, а его импульс — волновому вектору $\mathbf{k}$. Каков же физический смысл массы такого «тяжелого» фотона? Дело в том, что закон дисперсии (86.17) описывает распространение поля только в плоскости (y, z) , а координату x можно рассматривать как некоторую внутреннюю степень свободы «двумерного фотона». Энергия поперечных колебаний поля (стоячая волна по x) и есть «внутренняя» энергия *тяжелого фотона*, т. е. его масса.

Переписав закон дисперсии (86.17) в виде

$$1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{c^2 k_t^2}{\omega^2} = \left(\frac{c}{v_\phi} \right)^2 = n_{\text{эф}}^2, \quad (86.20)$$

где $n_{\text{эф}}$ — эффективный «показатель преломления» волновода как среды с дисперсией, нетрудно видеть, что он в точности совпадает с законом дисперсии для плазмы (84.1). Из этого следует, в частности, что фотон в плазме также является «тяжелым», причем «масса» определяется энергией колебаний частиц в плазме в поле волны^{*)}.

Кинематика медленной волны в волноводе может быть получена из простых геометрических соображений (рис. XII.4). Такая волна представляет собой суперпозицию двух «косых» волн, распространяющихся под углом α к стенкам волновода и испытывающих, следовательно, многократные отражения. Наклон волны определяется отношением поперечной и продольной компонент волнового вектора: $\text{tg} \alpha = k_\perp / k_\parallel$. Отсюда групповая скорость пакета вдоль волновода равна

$$\frac{V}{c} = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (k_\perp^2 / k_\parallel^2)}}$$

в соответствии с (86.18). Фазовая скорость волны определяется движением фронта волны вдоль волновода и равна (ср.: (84.5)) $v_\phi / c = 1 / \cos \alpha = \sqrt{1 + (k_\perp^2 / k_\parallel^2)}$, что также совпадает с (86.18). Встречное движение фронтов волн напоминает в этом случае ножницы. Здесь особенно наглядно видно, что фазовая скорость является чисто геометрическим понятием.

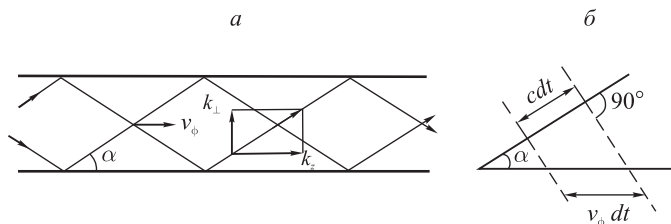


Рис. XII.4. Кинематика медленной волны в волноводе: а) «косая» волна в волноводе; б) к определению фазовой скорости

^{*)} Заметим, что «тяжелый» фотон, обретающий массу в двусвязном волноводе или плазме, является классической аналогией элементарной частицы, движущейся в гипотетическом поле Хиггса, взаимодействие с которым проявляется в виде наличия массы у частицы.

Дисперсия медленных волн вызывает искажения коротких импульсов при передаче их по односвязному волноводу. Для устранения искажений можно использовать быстрые волны в многосвязных волноводах (например, в коаксиальном кабеле). Однако для очень коротких длин волн быстрые волны могут преобразовываться на неровностях волновода в медленные, что снова приводит к искажению импульса.

Благодаря явлению полного внутреннего отражения волноводом может служить также диэлектрический стержень или пластина с $n > 1$. Закон дисперсии в таком волноводу аналогичен (86.17), но с другими значениями «массы» ω_n , зависящими теперь не только от размеров волновода, но и от ε диэлектрика. Однако, в отличие от металлического волновода, здесь нет критической частоты, так как поле существует и вне волновода. В частности, при $\omega \rightarrow 0$ поперечный размер волны неограниченно возрастает. Правда, в этом случае волновод фактически перестает канализировать волну, которая легко рассеивается и поглощается окружающими телами. Поэтому практически диэлектрический волновод можно использовать, по-прежнему, только в ограниченной области частот $\omega \geq c/a(\sqrt{\varepsilon} - 1)$, (см. [1], задача 512).

Диэлектрические волноводы широко применяются в оптике и средствах связи в качестве световодов, в частности, для передачи света от сцинтилляционных кристаллов к фотоумножителям. Другим интересным применением световодов является так называемая волоконная оптика, которая передает изображение по пучку стеклянных нитей, причем каждая нить передает один элемент изображения. Обычно используются нити диаметром ~ 20 мкм, т. е. приблизительно в 40 раз больше длины волны света. При этом разрешающая способность волоконной оптики оказывается того же порядка, что и для фотопленки среднего качества (50 линий/мм).

Но, конечно, наиболее массовое применение диэлектрические волноводы нашли в линиях передачи информации (линиях связи). В настоящее время (2011 г.) созданы *оптоволоконные линии связи* общей протяженностью более 500 млн километров с огромной пропускной способностью, достигающей 20 Тбит/с ($2 \cdot 10^{13}$ бит/с) и ожидается к середине столетия выход на уровень Петабит/с.

Оптоволоконные линии связи создаются на основе специальных световодов — кабелей, состоящих из сердцевины — стеклянного волокна диаметром около 10 мкм, и оболочки из полимерного покрытия с внешним диаметром 125 мкм. Такая конструкция при изготовлении по специальной технологии выдерживает нагрузки в несколько кг. Существенным параметром является ослабление мощности переда-

ваемого сигнала (потери энергии электромагнитной волны в диэлектрическом волноводе). Современные оптоволоконные кабели при передачах сигнала на длине волны 1,55 мкм (инфракрасный диапазон) имеют коэффициент ослабления около 0,2 дБ/км (в 2 раза на расстоянии $L = 15$ км). Как правило, оптоволоконные линии связи работают на длинах волн около 1,3 и 1,55 мкм, где кварцевое стекло имеет максимальную прозрачность. При ослаблении сигнала примерно в 100 раз ($L \sim 100$ км) приходится ставить ретрансляторы. Они состоят из фотоприемника (полупроводниковый фотодиод), электронного усилителя и излучателя (полупроводниковый лазер, §§ 144, 145).

Оптоволоконные линии обеспечивают сегодня высокоскоростную связь от внутригородской до межконтинентальной (в том числе трансатлантической и транстихоокеанской). А первая (телеграфная) трансатлантическая линия связи, проложенная по дну океана и вступившая в строй в 1866 г., работала на скорости передачи всего лишь 17 слов в минуту. Таков прогресс за полтора века.

Волноводными свойствами обладают не только пластины и волокна диэлектрика, но и оптически более плотный слой сплошной среды. Таковы, например, некоторые слои в атмосфере, что используется для дальней радиосвязи на УКВ.

Оказывается, что даже в однородной среде возможно образование, при определенных условиях, диэлектрического волновода. Это объясняется зависимостью ε от напряженности поля. Существенно, что ε возрастает с ростом поля, так как при поляризации атома возвращающая сила падает по мере удаления электрона от ядра. Это означает, что внутри волны среда всегда оптически более плотная, т. е. автоматически образуется диэлектрический волновод. Практически, однако, это явление становится существенным только в очень сильных полях, когда изменение ε достаточно велико. Такие поля получаются в фокусе луча мощного лазера, где и наблюдались этот, а также и другие эффекты так называемой *нелинейной оптики*. Последний термин связан с тем, что при учете зависимости $\varepsilon(E)$ уравнения Максвелла в среде становятся нелинейными. Результаты исследований показали, что такая самоканализация интенсивной волны в среде оказывается неустойчивой: волновой пакет сжимается в очень малую область с огромными полями, которые вызывают, в конце концов, локальный электрический пробой и разрушение диэлектрика.

Анализ распространения электромагнитных волн удобно производить, пользуясь представлениями, развитыми в § 52. Для этого представим волновод в виде цепочки индуктивностей и емкостей (рис. XII.5).

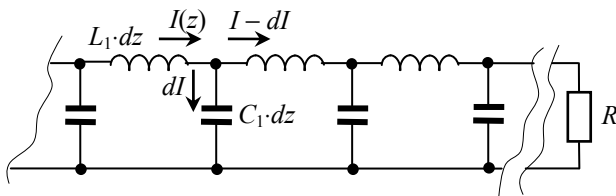


Рис. XII.5. Схема двусвязного волновода; L_1 , C_1 — индуктивность и емкость единицы длины линии, R — сопротивление на выходе волновода

Записав уравнение падения напряжения на отрезке dz волновода (46.2)

$$dU = -\frac{L_1}{c^2} \cdot dz \cdot \frac{\partial I}{\partial t}$$

и баланса токов в узле индуктивность-емкость (см. (25.1))

$$dI = -C_1 \cdot dz \cdot \frac{\partial U}{\partial t}$$

(знак «—», так как ток убывает через емкость, см. стрелки на рис. XII.5), получим, исключив I ,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{L_1 C_1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (86.21)$$

Мы получили так называемое *телеграфное уравнение*, которое полностью повторяет по своей форме волновое уравнение (66.2). Отсюда и следует его применимость к анализу процессов в волноводе.

На конце волновода, нагруженного на сопротивление R , возможно, вообще говоря, отражение волн. Поэтому решение запишем в виде суммы прямой и отраженной волн (75.1):

$$U(z, t) = U_0 \cdot e^{i(kz - \omega t)} + U'_0 \cdot e^{-i(kz + \omega t)}, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -C_1 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (86.22)$$

Подстановка этого решения в (86.21) дает

$$k = \frac{\sqrt{L_1 C_1}}{c} \cdot \omega. \quad (86.23)$$

Обратим внимание, что параметры L_1 , C_1 — безразмерные в гауссовой системе единиц. Граничные условия на выходе волновода

$$U(L, t) + U'(L, t) = (I(L, t) + I'(L, t)) \cdot R \quad (86.24)$$

для решения (86.22), с учетом соотношения

$$I = -\frac{C_1 \omega}{k} \cdot U = -c \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot U, \quad (86.25)$$

приводят к уравнению для амплитуд

$$U_0 \cdot e^{ikL} - U'_0 \cdot e^{-ikL} = (U_0 \cdot e^{ikL} + U'_0 \cdot e^{-ikL}) \cdot \frac{R}{\rho}.$$

Здесь

$$\rho = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad (86.26)$$

— так называемое *волновое сопротивление* линии передачи (волновода). В (86.26) дано выражение в гауссовых единицах ($[L] = [C] = \text{см}$). Для перехода в систему СИ достаточно положить $c = 1$ и перейти к единицам генри, фарада, ом.

Из уравнения (86.26) находим коэффициент отражения волны:

$$\eta = \frac{\rho - R}{\rho + R} \cdot e^{-2ikL} = \begin{cases} +1, & R = 0 & (a), \\ 0, & R = \rho & (b), \\ -1, & R \rightarrow \infty & (c). \end{cases} \quad (86.27)$$

Три крайних случая в (86.27) дают значения η для замкнутого волновода (*a*), нагруженного на волновое сопротивление (*b*) и разомкнутого (*c*). Обратим внимание на важный случай *b*: при нагрузке волновода на волновое сопротивление отраженная волна отсутствует (!).

Для коаксиального волновода (рис. VI.5) индуктивность и емкость единицы длины (см. задача VI.6 и формулы (12.9), (15.17))

$$L_1 = \mu \cdot 2 \ln \frac{b}{a}, \quad C_1 = \frac{\epsilon}{2 \ln(b/a)}, \quad (86.28)$$

где a и b — радиусы внутреннего и наружного цилиндров коаксиального волновода, ϵ , μ — характеристики изолятора, заполняющего зазор между цилиндрами. Отсюда

$$\rho_{\text{coaxial}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot 2 \ln \frac{b}{a} \xrightarrow{\text{СИ}} 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \ln \frac{b}{a} \text{ Ом.}$$

Для типичного значения $\epsilon \sim 2,5$; $\mu \sim 1$ полимерных изоляционных материалов в коаксиальных кабелях при $b/a = 3,73$ имеем $\rho = 50 \text{ Ом}$ (распространенный в технике стандарт).

§ 87. Скин-эффект

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в проводящей среде. Для этого воспользуемся уравнениями Максвелла (45.9) и возьмем ротор от второго из них. Принимая $\mu, \varepsilon = \text{const}$ и используя первое и четвертое уравнения, а также векторное тождество из (П.1.7, а) $\text{rot rot} = \nabla \text{div} - \Delta$ и закон Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, получим уравнение для магнитного поля

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (87.1)$$

Для плоской волны в среде

$$H(z, t) = H_0 \cdot e^{i(kz - \omega(k) \cdot t)}$$

из (87.1) следует дисперсионное уравнение

$$k^2 = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} i\omega + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2. \quad (87.2)$$

Рассмотрим эволюцию начального состояния поля с заданным $\mathbf{k}$. Из уравнения (87.2) для ω получим

$$\omega = -\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} \left(i \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \left(\frac{ck}{2\pi\sigma} \right)^2 - 1} \right). \quad (87.3)$$

При достаточно низкой проводимости $\sigma < \sqrt{\varepsilon/\mu} ck/2\pi$ магнитное поле в среде затухает с характерным временем $\tau = \varepsilon/2\pi\sigma$.

$$H(z, t) = H_0 \cdot e^{ikz - t/\tau}.$$

В среде с хорошей проводимостью ($\sigma \gg \sqrt{\varepsilon/\mu} ck/2\pi$) имеются два характерных времени затухания:

$$\tau_1 \approx \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \quad \text{и} \quad \tau_2 \approx \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2 k^2}, \quad \tau_2 \gg \tau_1. \quad (87.4)$$

Обратим внимание, что для быстрого затухания $\tau_1 \propto 1/\sigma$, а для медленно-го $\tau_2 \propto \sigma$.

Аналогичным образом можно получить уравнение для электрического поля в среде, которое имеет вид

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{\varepsilon} \nabla \rho, \quad (87.5)$$

где ρ — плотность свободных зарядов. Если их нет, то электрическое поле затухает так же, как и магнитное. При наличии зарядов электрическое поле можно представить как $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{вихр}} + \mathbf{E}_{\text{пот}}$, где $\text{div} \mathbf{E}_{\text{вихр}} = 0$, $\text{rot} \mathbf{E}_{\text{пот}} = 0$ (см. (2.5)). Тогда уравнение (87.5) распадается на два, причем уравнение для $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$ совпадает по форме с (87.1), поскольку $4\pi\rho = \text{div} \mathbf{E}_{\text{вихр}} = 0$. Формула для $\mathbf{E}_{\text{пот}}$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{пот}}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}_{\text{пот}} \right) = 0, \quad (87.6)$$

поскольку $\Delta \mathbf{E}_{\text{пот}} - 4\pi\nabla\rho/\varepsilon = \text{rot} \text{rot} \mathbf{E}_{\text{пот}} = 0$. Уравнение (87.6) эквивалентно рассмотренному ранее уравнению релаксации зарядов в среде (23.1). Действительно, взяв дивергенцию от левой части (87.6) и используя третье из уравнений Максвелла (45.9), приходим к уравнению (23.1) при $\tau \equiv \tau_1$. Поэтому, как и заряды, потенциальная составляющая поля всегда затухает с характерным временем τ_1 (87.4).

Рассмотрим теперь другую задачу: на границу проводящей среды падает электромагнитная волна заданной частоты ω . Каково затухание волны в среде с ростом координаты z ? Оно определяется мнимой частью k из (87.2):

$$H(z, t) = H_0 \cdot e^{i(k_z z - \omega t)} \cdot e^{-z/\delta}, \quad k = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu\omega}}{c} \sqrt{1 + i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}} \equiv k_0 + \frac{i}{\delta}, \quad (87.7)$$

где δ — характерная глубина проникновения переменного электромагнитного поля в проводящую среду, называемая *толщиной скин-слоя* (от англ. *skin* — кожа).

В среде с плохой проводимостью ($\sigma \ll \omega$)

$$k_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu\omega}}{c}, \quad \delta \approx \frac{c}{2\pi\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = 2\nu_\phi \tau_1, \quad (87.8)$$

где $\nu_\phi = \omega/k_0 = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ имеет обычный вид. В обратном предельном случае среды с хорошей проводимостью ($\sigma \gg \omega$), учитывая, что $\sqrt{i} \equiv (1+i)/\sqrt{2}$, находим

$$k = (1+i) \frac{1}{\delta}, \quad \text{т. е.} \quad k_0 = \frac{1}{\delta}, \quad \delta \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}. \quad (87.9)$$

Теперь фазовая скорость $v_\phi = \omega/k_0 = c\sqrt{\omega}/\sqrt{2\pi\sigma\mu} \ll c$. Таким образом, поле внутри проводника ($\sigma \gg \omega$) равно

$$H(z, t) = H_0 \cdot e^{i(z/\delta - \omega t)} \cdot e^{-z/\delta}.$$

Для промышленной частоты 50 Гц ($\lambda = 6000$ км) толщина скин-слоя в меди ($\sigma = 1 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$) $\delta \approx 1$ см, $v_\phi \approx 3$ м/с, а в железе ($\mu = 10^3$) $\delta \approx 1$ мм, $v_\phi \approx 30$ см/с. В радиодиапазоне ($\lambda = 600$ м) $\delta \approx 0,1$ мм; $v_\phi \approx 50$ м/с (для меди).

Найдем теперь соотношение между электрическим и магнитным полями затухающей волны для случая $\sigma \gg \omega$. Проще всего его получить из первого уравнения (45.9): $kE = i\omega\mu H/c$, или, так как $k = (1 + i)/\delta$,

$$\frac{H}{E} = (1 - i) \frac{c}{\mu\omega\delta} = (1 - i) \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\mu\omega}}. \quad (87.10)$$

Поскольку для хороших проводников (медь) $\sigma \sim 10^{17} \text{ с}^{-1}$, то в радиодиапазоне $E \ll H$, так что речь идет о затухании магнитного поля. Такое большое значение H/E связано с отражением волны от поверхности хорошего проводника (§ 72), при котором электрические поля падающей и отраженной волн почти компенсируют друг друга. Отметим, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на границе (и по обе стороны от нее!) взаимно ортогональны, а электрическое поле в проводнике создает электрический ток, плотность которого $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ направлена вдоль вектора $\mathbf{E}$. Соответственно, условие (87.10) можно записать для магнитного поля и тока:

$$H = (1 - i) \frac{2\pi}{c} \cdot j\delta. \quad (87.11)$$

Соотношения (87.10), (87.11) определяют, таким образом, так называемые *граничные условия Леонтовича* при отражении волны от проводника с конечной проводимостью для компонент поля, касательных к поверхности (М. А. Леонтович, 1948 г.).

Задача XII.3. Вычислить сопротивление проводника и выделение тепла в нем с учетом скин-эффекта.

Из закона Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ находим полный ток в скин-слое:

$$I(t) = h \cdot \int_0^\infty j(z, t) \cdot dz = h\sigma \int_0^\infty E(z, t) \cdot dz, \quad E(z, t) = E_0 \cdot e^{(1-i)z/\delta - i\omega t},$$

где h — длина периметра проводника в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{E}$, E_0 — амплитуда электрического поля на поверхности проводника. Проинтегрировав, находим

$$I(t) = \frac{i+1}{2} \cdot \sigma \delta h \cdot E_0 \cdot e^{-i\omega t} = I_0 \cdot (\cos \omega t + \sin \omega t + i(\cos \omega t - \sin \omega t)),$$

$$I_0 = \frac{\sigma \delta h}{2} \cdot E_0.$$

Действительная часть этого выражения определяет омическое сопротивление на единицу длины проводника вдоль вектора $\mathbf{E}$:

$$R_1 = \frac{E_0}{I_0} = \frac{2}{\sigma \cdot \delta \cdot h}.$$

Мнимая часть дает значение индуктивности на единицу длины:

$$L_1 = \frac{c^2}{\omega} \cdot \frac{E_0}{I_0} = 4\pi\mu\delta.$$

Среднее по времени выделение мощности (тепла) на единицу длины и единицу периметра h проводника находим, используя закон Джоуля–Ленца (21.9):

$$\bar{P}_1 = \sigma \cdot \overline{F(t)}^t, \quad F(t) = \int_0^\infty (\operatorname{Re} E(z, t))^2 \cdot dz.$$

Вычислив

$$F(t) = E_0^2 \cdot \int_0^\infty \cos^2(z/\delta - \omega t) \cdot e^{-2z/\delta} \cdot dz = \frac{E_0^2 \delta}{8} (2 \cos^2 \omega t - \sin 2\omega t + 1)$$

и усреднив по времени ($\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$), получаем

$$\bar{P}_1 = \frac{\sigma E_0^2 \delta}{4}. \quad (87.12)$$

Вычислим теперь потери энергии в проводнике. Для этого найдем модуль вектора Пойнтинга на поверхности проводника. Получим прежде всего выражение для векторного произведения комплексных векторов: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta$, где θ — угол между ними, направленный от вектора $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$. Пред-

ставляя $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|e^{i\varphi}$, $\mathbf{b} = |\mathbf{b}|e^{i(\varphi+\theta)}$, получим $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta + i|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, где $()^*$ — знак комплексного сопряжения. Таким образом,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \operatorname{Re}(\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b}), \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \operatorname{Im}(\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b}).$$

Отсюда

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{c}{4\pi} \left| \frac{E}{H} \right| \cdot |H|^2 = \frac{\mu |H|^2}{8\pi} \omega \delta = \omega v_{\phi}. \quad (87.13)$$

Это выражение имеет очень простой физический смысл: поток энергии равен плотности энергии в проводнике вблизи его границы, умноженной на скорость движения волны внутри проводника v_{ϕ} .

Этот же результат можно получить и непосредственным интегрированием джоулевых потерь внутри проводника:

$$S = \int_0^{\infty} \sigma |E|^2 dz = \sigma E_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2z/\delta} dz = \frac{\delta \sigma E_0^2}{4} = \omega v_{\phi}.$$

Задача XII.4. Вычислить мощность потерь в прямоугольном резонаторе (рис. X.14, а). Рассмотреть также частный случай кубического резонатора ($a = b = d$).

Воспользуемся результатами задачи XII.3 и проинтегрируем плотность выделения тепла в шести стенках резонатора по поверхности стенок. Для этого нам нужно знать распределение электрического поля по поверхности стенок — величину, обозначенную в формуле (87.12) как E_0 . В нашем случае это функция координат по поверхности каждой стенки, и не следует ее путать с амплитудой поля E_0 в резонаторе (!). Более того, нас интересуют компоненты электрического поля, создающего ток в стенках, и они отличны от нуля только в стенках, обладающих электрическим сопротивлением. Вот здесь и выясняется приближенность предлагаемого решения: поле на поверхности стенки найдем из граничного условия (87.10):

$$E_{\alpha}(0, x_{\beta}, x_{\gamma}) = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{\mu \omega \delta}{c} \cdot H_{\alpha}(0, x_{\beta}, x_{\gamma}),$$

где α — номер стенки, H_{α} — значение амплитуды компоненты магнитного поля, касательной к поверхности стенки, в точке (x_{β}, x_{γ}) этой поверхности, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 6$, ω — частота моды l, m, n резонатора (76.14). В свою очередь, поле $H_{\alpha}(x_{\alpha}, x_{\beta}, x_{\gamma})$ примем равным магнитному полю резонатора с идеально проводящими стенками

(76.17), пренебрегая возмущением поля внутри резонатора, вызванным конечной проводимостью стенок. Тогда полная мощность тепловыделения в стенках, средняя по времени,

$$\bar{P} = \frac{\sigma \delta}{4} \sum_{\alpha=1}^6 \iint_{S_{\alpha}} [\operatorname{Re} E_{\alpha}(0, x_{\beta}, x_{\gamma})]^2 \cdot dx_{\beta} \cdot dx_{\gamma},$$

где S_{α} — площадь стенки номер α . Подставим сюда значение E_{α} с учетом соотношений (76.17) для компонент H_{α} . При этом множители $e^{-i\omega t}$ в этих формулах можно просто отбросить, так как в выражение для $\bar{P}$ входит только координатная часть формул (усреднение по времени проделано при выводе (87.11)). Тогда, например, для стенки $\alpha = 1$ ($x = 0$) находим

$$\begin{aligned} [\operatorname{Re} E_1(0, y, z)]^2 &= [\operatorname{Re} E_y(0, y, z)]^2 + [\operatorname{Re} E_z(0, y, z)]^2 = \\ &= \left(\frac{\mu \delta}{2} \right)^2 \cdot \left\{ (k_z E_{0x} - k_x E_{0z})^2 \cdot \sin^2 k_y y \cdot \cos^2 k_z z + (k_x E_{0y} - k_y E_{0x})^2 \cdot \cos^2 k_y y \cdot \sin^2 k_z z \right\}. \end{aligned}$$

Интеграл по поверхности S_1 от квадратов синусов и косинусов дает с учетом равенств (76.13)

$$\int_0^b \sin^2 k_y y \cdot dy \int_0^d \cos^2 k_z z \cdot dz = \int_0^b \cos^2 k_y y \cdot dy \int_0^b \sin^2 k_z z \cdot dz = \frac{b \cdot d}{4}.$$

Аналогично вычисляются остальные члены суммы. В результате получим

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{\sigma \mu^2 \delta^3}{32} \cdot \left\{ (k_z E_{0x} - k_x E_{0z})^2 (a + d) \cdot b + (k_x E_{0y} - k_y E_{0x})^2 (a + b) \cdot d + \right. \\ &\quad \left. + (k_y E_{0z} - k_z E_{0y})^2 (b + d) \cdot a \right\}. \end{aligned}$$

Как видим, мощность потерь энергии (тепловыделения) существенно зависит от моды колебаний поля в резонаторе — соотношения между амплитудами $E_{0\alpha}$.

Для кубического резонатора ($a = b = d$) выражение сворачивается. Повторив прием, использованный в задаче X.6 при выводе равенства (76.20), находим

$$\bar{P}_{\text{куб}} = \frac{\mu \omega \delta a^2}{32\pi} \cdot E_0^2.$$

Отсюда добротность кубического резонатора (см. (52.22) и (76.21))

$$Q_{\text{куб}} = \frac{\omega W}{\bar{P}} = \frac{a}{2\mu \delta}.$$

Наиболее распространенное применение скин-эффекта — экранирование от переменного магнитного поля. Последнее может быть вредно как само по себе, так и благодаря связанному с ним вихревому электрическому полю, создающему различные электрические наводки. Экранирование осуществляется путем окружения защищаемой аппаратуры достаточно толстым проводящим экраном. Практическая трудность связана с тем, что обычно экран не может быть полностью замкнутым. Необходимы, например, различные отверстия для подвода питания аппаратуры, наблюдения за ней и т. д. Интересно отметить, что такие экраны ослабляют поле сильнее, чем по простому экспоненциальному закону (см. задачи XII.5, XII.6).

Задача XII.5. Найти коэффициент экранирования κ цилиндрического экрана радиуса r , толщина стенок которого h много меньше скин-слоя. Магнитное поле параллельно оси цилиндра.

Ввиду условия $h \ll \delta$ поля внутри стенок, а значит, и плотность тока можно считать однородными. Тогда ток в экране (на единицу его длины) можно определить просто по закону Фарадея:

$$I_1 = \frac{\oint}{R_1} = \frac{i\omega\pi r^2 H_i / c}{2\pi r / \sigma h},$$

где H_i — поле внутри экрана. Закон сохранения циркуляции магнитного поля дает $H_e - H_i = 4\pi I_1 / c$, где H_e — внешнее поле. Для коэффициента экранирования получаем

$$\kappa = \frac{H_e}{H_i} = 1 + i \frac{hr}{\delta^2}.$$

Здесь, кроме малого множителя h/δ , который возникает при разложении экспоненты $e^{-z/\delta}$, появляется большой множитель r/δ . Такой же множитель r/δ появляется и при сильном скин-эффекте ($h \gg \delta$). Физическая причина дополнительного ослабления поля в экранируемом пространстве связана с тем, что «хвост» потока в сплошном металле $H_i \cdot 2\pi\delta$ распределяется на большую площадь πr^2 . В результате для коэффициента экранирования получается следующая простая оценка: $\kappa \sim re^{h/\delta}/2\delta$.

Другим важным применением скин-эффекта является формирование магнитного поля нужной конфигурации, которая повторяет форму проводящей поверхности с точностью до толщины скин-слоя.

Скин-эффект приводит к своеобразному взаимодействию переменного тока с проводящей стенкой (рис. XII.6). Так как силовые линии не проникают вглубь проводника, то при достаточно малой толщине скин-слоя нормальная составляющая магнитного поля на поверхности близка к нулю. Поэтому конфигурация магнитного поля тока вблизи проводящей плоской стенки эквивалентна полю двух токов разного направления. Один из них

называется обычно изображением тока по аналогии с электростатическим изображением заряда. Таким образом, ток «отталкивается» от проводящей поверхности.

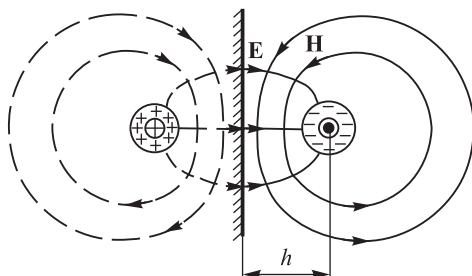


Рис. XII.6. Поля импульсного пучка электронов вблизи проводящей поверхности

Если ток создается пучком заряженных частиц, то, кроме взаимодействия со стенкой, есть еще взаимодействие заряда, которое приводит к притяжению пучка стенкой. Последнее всегда сильнее, так что в результате получается притяжение к стенке, равное на единицу длины пучка (ср. (30.4)):

$$F = \frac{2I^2}{2lc^2} - \frac{2I^2}{2lv^2} = -\frac{I^2}{lv^2\gamma^2}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Можно скомпенсировать электрический заряд пучка (например, электронный пучок в газе, ионизируя атомы газа, втягивает ионы, выталкивая ионизационные электроны). Тогда результирующая сила изменит направление; такой пучок будет отталкиваться от стенки (рис. XII.7). На этом явлении основан интересный метод фокусировки пучка в металлической трубе, остроумно названный *ФУКО*сировкой. Так как пучок отталкивается трубой «со всех сторон», он устойчиво движется вдоль оси трубы. Такая фокусировка позволяет транспортировать достаточно интенсивный пучок по изогнутой трубе и, в частности, удерживать его в кольцевой трубе.

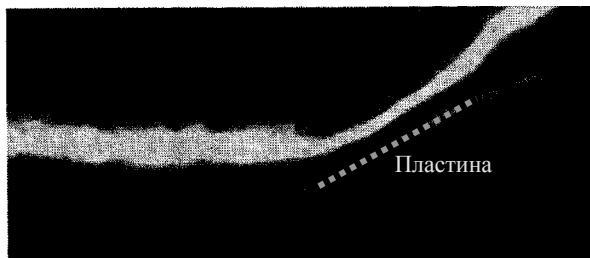


Рис. XII.7. Отражение пучка электронов от металлической пластинки

Название этой самофокусировки связано с тем, что токи, наводимые переменным полем в проводнике, известны как *токи Фуко*, по имени французского ученого, впервые описавшего это явление (J. B. L. Foucault, 1855 г.).

Задача XII.6. Оценить магнитное поле вблизи центра тонкого проводящего диска радиуса R и толщины h , помещенного в однородное переменное магнитное поле, если $h \ll \delta \ll R$.

Токи Фуко плотностью $j_\phi(r)$, возбуждаемые в диске, создают на его оси z поле (28.7)

$$H_\phi(r=0, z) = \frac{2\pi h}{c} \int_0^R \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} j_\phi(r) dr.$$

В свою очередь, ток в кольце (r, dr) , concentрическом с диском,

$$j_\phi(r) dr = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\dot{\Phi}(r)}{h \Delta R}, \quad \dot{\Phi}(r) = 2\pi i \omega \int_0^r H(x) x dx,$$

$\Delta R = \frac{2\pi r}{\sigma h \cdot dr}$ — сопротивление кольца, $H(r) = H_0 + H_\phi(r, 0)$ — полное поле в плоскости кольца. Подчеркнем, что здесь учтена индуктивность кольца, так как ЭДС индукции вычисляется через сумму внешнего поля H_0 и поля токов Фуко $H_\phi = (r)$ (ср. (48.4) и задачу XII.5).

Аналитически система уравнений не решается. Для оценки можно принять $\dot{\Phi} \sim i\omega \pi r^2 H_{\text{полн}}$, $H_{\text{полн}} = H_0 + H_{\phi 0}$, где $H_{\phi 0} = H_\phi(0, 0)$ — поле в центре диска. Тогда

$$H_{\phi 0} \sim -\frac{i\omega\sigma}{c^2} \cdot \frac{hR}{2} H_{\text{полн}} = -\frac{ihR}{2\delta^2} H_{\text{полн}},$$

откуда

$$\frac{H_0}{H_{\text{полн}}} \sim 1 + \frac{ihR}{2\delta^2}, \quad |H_{\text{полн}}| \ll |H_0| \quad \text{при} \quad \delta \ll hR$$

(ср. задачу XII.5 и комментарий к ней).

Рассмотрим теперь *нестационарный скин-эффект*, когда зависимость магнитного поля от времени на границе проводника $H(0, t)$ не является гармонической. Если по-прежнему пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, то из (87.1) приходим к уравнению диффузионного типа:

$$\partial H / \partial t = D_H \Delta H. \quad (87.14)$$

Такой же вид имеет и уравнение теплопроводности (87.37) ниже. Коэффициент диффузии магнитного поля

$$D_H = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}. \quad (87.15)$$

Простейший случай нестационарного скин-эффекта соответствует экспоненциальному росту внешнего поля $H(0, t) = H_0 e^{t/\tau}$. Такая зависимость получается из гармонической $H_0 e^{-i\omega t}$ формальной заменой: $\omega = i/\tau$. Тогда для одномерной задачи решение диффузионного уравнения (87.14) сразу получается из (87.7) и (87.9) той же заменой:

$$H(z, t) = H_0 e^{-z/\delta + t/\tau}, \quad (87.16)$$

где эффективная толщина скин-слоя

$$\delta = c \sqrt{\frac{\tau}{4\pi\mu\sigma}} = \sqrt{D_H \tau} \quad (87.17)$$

и не зависит от времени, как и в стационарном случае. Решение (87.16) можно интерпретировать как диффузионное распространение фронта магнитного поля вглубь проводника,

$$H(z, t) = H_0 e^{-u/\delta}, \quad u = z - \frac{\delta}{\tau} t \quad (87.18)$$

со скоростью

$$v_D = \frac{\delta}{\tau} = \sqrt{\frac{D_H}{\tau}} = \frac{c}{\sqrt{4\pi\mu\sigma\tau}} \ll c. \quad (87.19)$$

Последнее неравенство есть условие применимости диффузионного приближения (87.14), т. е. пренебрежение токами смещения. Например, для меди и $\tau = 10^{-6}$ с диффузионная скорость $v_D \approx 120$ м/с.

Рассмотрим теперь более сложную задачу о нестационарном скин-эффекте при быстром («мгновенном») включении гармонического поля:

$$H(0, t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ H_0 e^{-i\omega_0 t}, & t > 0. \end{cases} \quad (87.20)$$

Фурье-спектр поля (87.20) в области частот $\omega \neq \omega_0$ (см. задачу XI.5) описывается вторым слагаемым в (78.10),

$$H_\omega(0, \omega) = \frac{iH_0}{\sqrt{2\pi}(\omega - \omega_0)}, \quad \omega \neq \omega_0, \quad (87.21)$$

и содержит низкие частоты $\omega \approx 0$, которые и будут определять значительно более сильное проникновение поля в проводник по сравнению со стационарным скин-эффектом на частоте ω_0 . Проникновение Фурье-гармоники частоты ω вглубь среды описывается, очевидно, формулой для стационарного (!) скин-эффекта:

$$H_{\omega}(z, \omega) = \frac{iH_0}{\sqrt{2\pi}(\omega - \omega_0)} \cdot e^{i(k_0 z - \omega t)} \cdot e^{-z/\delta(\omega)}, \quad (87.22)$$

где k_0 и δ даны формулой (87.9). Пренебрегая стационарным скин-эффектом на частоте ω_0 (ср. спектры (87.21) и (78.10)) и считая характерную область частот $|\omega| \ll \omega_0$ (см. ниже), можем написать решение в виде фурье-интеграла:

$$H(z, t) \approx -\frac{iH_0}{2\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i-1)z/\delta(\omega) - i\omega t} \cdot d\omega. \quad (87.23)$$

Легко проверить, что это выражение справедливо как для $\omega > 0$, так и для $\omega < 0$.

Вычисление интеграла (87.23) производится с помощью приведения показателя экспоненты к полному квадрату (см. (78.12) и (85.5)–(85.7)). С учетом значения $\delta(\omega)$ (87.9) запишем

$$\psi(\omega, t) = (i-1)z\xi\sqrt{\omega} - i\omega t \equiv -\left(\frac{iz\xi}{\sqrt{2t}} - \sqrt{i\omega t}\right)^2 - \frac{z^2\xi^2}{2t}, \quad \xi = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu}}{c}.$$

Отметим, что размерность параметра ξ есть $t^{-1/2}$. Вводя переменную

$$u = \frac{iz\xi}{\sqrt{2t}} - \sqrt{i\omega t}$$

и производя замену переменных, получаем

$$\begin{aligned} H(z, t) &\approx -\frac{H_0 e^{-z^2\xi^2/2t}}{\pi\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} du \left(u + \frac{iz\xi}{\sqrt{2t}}\right) \cdot e^{-u^2} = \\ &= -iH_0 \frac{z\xi}{\sqrt{2\pi}\omega_0 t^{3/2}} \cdot e^{-z^2\xi^2/2t}. \end{aligned} \quad (87.24)$$

Поскольку внешнее поле (87.20) можно представить в виде $e^{-i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t$, выражение

$$S(z, t) = \frac{z\xi}{\sqrt{2\pi}\omega_0 t^{3/2}} \cdot e^{-z^2\xi^2/2t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\varphi(\tau)}{\omega_0 z^2 \xi^2}, \quad (87.25)$$

где

$$\varphi(\tau) = \frac{e^{-1/\tau}}{\tau^{3/2}}, \quad \tau = \frac{2t}{z^2 \xi^2}, \quad (87.26)$$

описывает нестационарный скин-эффект при включении внешнего поля $H(0, t) = \sin \omega_0 t$ ($H_0(z, t)$ содержит i). Этот результат в точности совпадает с результатом работы [19], полученным другим методом.

На фиксированной глубине z функция $S(z, t)$ достигает максимального значения

$$S_{\max}(z) \approx \frac{0,463}{\omega_0 z^2 \xi^2} \quad \text{при} \quad t_{\max} = \frac{z^2 \xi^2}{3}. \quad (87.27)$$

Таким образом, максимальное поле убывает с глубиной значительно медленнее, чем при стационарном скин-эффекте. Отметим, что в заданный момент времени t поле внутри проводника имеет максимум при $z = z_{\max} = \sqrt{t}/\xi$, равный

$$S_{\max}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e} \omega_0 t}. \quad (87.28)$$

В принятом приближении $|\omega| \ll \omega_0$ все полученные выражения справедливы только для $t \gg 1/\omega_0$ и $z \gg 1/\delta(\omega_0)$ (см. 87.22). Поэтому решение (87.24) не удовлетворяет граничному условию $H(0, t) = H_0 \cdot e^{-i\omega_0 t}$, где нужно учитывать также отброшенный стационарный вклад в скин-эффект, который соответствует частотам $\omega \approx \omega_0$ в полном спектре (78.8) внешнего поля (87.20).

С принятой точностью вклад от поля $\cos \omega_0 t$, который дается действительной частью интеграла (87.24), равен нулю, т. е. такое поле проникает в проводник значительно слабее. Чтобы вычислить этот малый вклад, представим спектр внешнего поля (87.20) в виде ряда (см. (87.21)):

$$H_\omega(0, \omega) \approx -\frac{iH_0}{\sqrt{2\pi}\omega_0} \left(1 + \varepsilon_\omega + \dots + \varepsilon_\omega^n + \dots\right), \quad \varepsilon_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (87.29)$$

Первый член этого ряда соответствует аппроксимации внешнего поля δ -функцией:

$$H^{(0)}(0, t) = -iH_0 \delta(t), \quad (87.30)$$

а последующие члены — ее производным:

$$H^n(0, t) = i^{n-1} H_0 \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}. \quad (87.31)$$

На первый взгляд такое представление внешнего поля (87.20) кажется странным. Однако учтем, что мы ищем решение в области $|\omega| \ll \omega_0$; $t \gg 1/\omega_0$. Тогда роль δ -функции играет первый полупериод $\sin \omega_0 t$, что и приводит к основному отличию от стационарного скин-эффекта.

Для внешнего поля со спектром (87.29) решение также можно представить в виде ряда:

$$H(z, t) \approx H_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \frac{d^n S(z, t)}{\omega_0^n dt^n} = H_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\omega_0 z^2 \xi^2} \right)^{n+1} \frac{d^n \varphi(\tau)}{d\tau^n}. \quad (87.32)$$

В частности, первое (и наибольшее) действительное слагаемое ($n = 1$) дает приближенное решение задачи о скин-эффекте при включении внешнего поля $H(0, t) = H_0 \cos \omega_0 t$:

$$C(z, t) \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\varphi'(\tau)}{\omega_0^2 z^4 \xi^4}. \quad (87.33)$$

Это решение тоже совпадает с полученным в [19].

При заданном z функция $C(z, t)$ достигает максимума в момент $t_{\max} \approx z^2 \xi^2 / 8$ ($\tau_{\max} \approx 1/4$), равного

$$C_{\max}(z) \approx \frac{3,3}{\omega_0^2 z^4 \xi^4}. \quad (87.34)$$

Это максимальное поле значительно меньше поля, возникающего при включении $\sin \omega_0 t$. Поскольку действительные и мнимые члены ряда (87.32) чередуются, точность решений (87.25) и (87.33) порядка $1/z^4 \xi^4$.

Решение (87.32) можно использовать и при другой зависимости от времени внешнего поля $H(0, t)$, нужно лишь знать его спектр $H(0, \omega)$ в области низких частот.

Оказывается, что явление скин-эффекта не ограничивается электромагнитными процессами, а имеет место также и при *распространении тепла*. Действительно, плотность потока тепла $\mathbf{q}$ определяется уравнением

$$\mathbf{q} = -\chi \nabla T, \quad (87.35)$$

где T — температура, χ — коэффициент теплопроводности. Подсчитаем баланс тепла в некотором объеме V , ограниченном замкнутой поверхностью S :

$$\frac{d}{dt} \int G \rho T dV = -\oint (\mathbf{q}, d\mathbf{S}), \quad (87.36)$$

G , ρ — удельная теплоемкость и плотность среды. Отсюда $\operatorname{div} \mathbf{q} = -G \frac{\partial T}{\partial t}$, или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{G} \Delta T. \quad (87.37)$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением (87.14). Следовательно, должен иметь место *тепловой скин-эффект*.

Наиболее важным его проявлением служит распространение годовых колебаний температуры вглубь от поверхности Земли. Считая этот процесс гармоническим с периодом 1 год $\approx 3,15 \cdot 10^7$ с, найдем толщину скин-слоя для грунта типа суглинок ($G \sim 840$ Дж/кг $\cdot$ К, $\rho \sim 1800$ кг/м³, $\chi \sim 0,8$ Вт/м $\cdot$ К),

$$\delta = \sqrt{\frac{2\chi}{G\rho\omega}} \approx 2,3 \text{ м}, \quad (87.38)$$

и скорость распространения тепловой волны,

$$v_0 = \omega\delta \approx 14 \text{ м/год}. \quad (87.39)$$

Вследствие теплового скин-эффекта температура на глубине $h \gg \delta$ остается практически постоянной и равной приближенно средней годовой температуре на поверхности в этом месте. Это обстоятельство можно использовать для простого измерения средней годовой температуры. Если последняя оказывается ниже 0°C , образуется так называемая «вечная мерзлота». В этом случае почва оттаивает лишь на глубине $\sim \delta$. Из-за сдвига фазы тепловой волны оттаивание отстает, более или менее значительно, от температуры на поверхности. Этот же эффект приводит к запаздыванию таяния толстого льда. Например, в Арктике он тает только в сентябре.

Для некоторых прецизионных измерений необходима высокая стабильность температуры, которую проще всего достигнуть, «закопавшись» в землю. При глубине ~ 10 м годовые колебания температуры снижаются до $\sim 0,2^\circ\text{C}$. Это явление издревле использовалось людьми для создания естественных холодильников — погребов. Интересно отметить, что из-за сдвига фазы летняя температура воздуха в погребе на глубине $h \approx 6$ м ниже зимней, хотя эта разница и невелика: $(T_3 - T_n) \approx (\Delta T)_0 e^{-\pi} \approx 3^\circ\text{C}$, если $(\Delta T)_0 \approx \pm 40^\circ\text{C}$ (годовые колебания температуры юга Сибири).

Приложение I. Элементы векторного анализа

В приложении приведены основные формулы векторного анализа. В тексте книги авторы не придерживаются строго обозначений переменных, использованных в данном приложении. Например, часто бывает удобнее для координат цилиндрической системы вместо (ρ, α, z) использовать (r, θ, z) и т. п., что каждый раз специально оговаривается.

Операторы векторного анализа

П.1.1. В декартовой системе координат x, y, z

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$\text{div} \mathbf{A} = (\nabla, \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\text{rot} \mathbf{A} = (\nabla, \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix};$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

П.1.2. Проекции вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси декартовой системы координат:

$$(\Delta \mathbf{A})_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \equiv \Delta A_x;$$

$$(\Delta \mathbf{A})_y \equiv \Delta A_y;$$

$$(\Delta \mathbf{A})_z \equiv \Delta A_z.$$

П.1.3. В сферической системе координат r, θ, α

$$x = r \sin \theta \cos \alpha, \quad y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta;$$

$$\text{grad} \varphi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\alpha}{r \sin \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha};$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha};$$

$$(\text{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\alpha \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha} \right];$$

$$(\text{rot} \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r};$$

$$(\text{rot} \mathbf{A})_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta};$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

П.1.4. Проекции вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси сферической системы координат

$$(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha};$$

$$(\Delta \mathbf{A})_\theta = \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha};$$

$$(\Delta \mathbf{A})_\alpha = \Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha}.$$

П.1.5. В цилиндрической системе координат

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z;$$

$$\text{grad} \varphi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\alpha}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$(\text{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}; \quad (\text{rot} \mathbf{A})_\alpha = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r};$$

$$(\text{rot} \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha};$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

П.1.6. Проекции вектора $\Delta\mathbf{A}$ на оси цилиндрической системы координат

$$(\Delta\mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha},$$

$$(\Delta\mathbf{A})_\alpha = \Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha},$$

$$(\Delta\mathbf{A})_z = \Delta A_z.$$

П.1.7. Тождества векторного анализа

Доказательство этих тождеств проще всего производить с помощью оператора ∇ , пользуясь правилами дифференцирования и перемножения векторов и не переходя к проекциям на оси координат. При этом следует строго придерживаться правила: не выносить за оператор ∇ векторные функции, подлежащие дифференцированию. Например, в пунктах «ж» и «з» применять формулу двойного векторного произведения нужно, учитывая, что в п. «ж» дифференцируется только $\mathbf{B}$, тогда как в п. «з» — обе функции $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Стрелка над вектором в пунктах «и», «л» указывает, что только он и подлежит дифференцированию.

$$\text{а) } \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \Delta \varphi, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A};$$

$$\text{б) } \operatorname{div} (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{A}, \operatorname{grad} \varphi);$$

$$\text{в) } \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}) - (\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B});$$

$$\text{г) } \operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B};$$

$$\text{д) } \operatorname{grad} (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B};$$

$$\text{е) } (\nabla, \mathbf{A}) \mathbf{B} = (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A};$$

$$\text{ж) } (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B};$$

$$\text{з) } (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A};$$

$$\text{и) } \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \left(\mathbf{A}, \overset{\downarrow}{\mathbf{B}} \right) - (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B};$$

$$\text{к) } \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla A^2 / 2 - (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{A};$$

$$\text{л) } (\mathbf{E}, (\nabla \times \mathbf{E})) = \left(\nabla, \left(\overset{\downarrow}{\mathbf{E}} \times \mathbf{E} \right) \right) \equiv 0.$$

П.1.8. Важные равенства

$$\nabla r = \mathbf{r}/r, \quad \operatorname{div} \mathbf{r} = 3, \quad \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0, \quad \operatorname{grad}(\mathbf{l}, \mathbf{r}) = \mathbf{l}, \quad (\mathbf{l}, \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{l},$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega}. \text{ Здесь } \mathbf{r} \text{ — радиус-вектор, } \mathbf{l} \text{ — постоянный вектор.}$$

П.1.9. Теорема Остроградского–Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S (\mathbf{A}, d\mathbf{S}),$$

где V — некоторый объем, S — замкнутая поверхность, ограничивающая этот объем.

П.1.10. Теорема Стокса

$$\oint_l (\mathbf{A}, d\mathbf{l}) = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{A}, d\mathbf{S}),$$

где l — некоторый замкнутый контур, S — произвольная поверхность, опирающаяся на этот контур.

Приложение II. Фундаментальные константы (по данным 2010 г.)

Универсальные постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 299\,792\,458 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ (точно)
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,566\,370\,614 \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$ (точно)
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$ (точно)
Гравитационная постоянная	$G = 6,674\,28(67) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Планка постоянная	$h = 6,626\,068\,96(33) \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ $\hbar \equiv h/2\pi = 1,054\,571\,628(53) \cdot 10^{-34}$ $\text{Дж} = 6,582\,118\,99(16) \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с}$

Физико-химические константы

Авогадро постоянная	$N_A = 6,022\,141\,79(30) \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Атомная единица массы	$m_u = m(^{12}\text{C})/12 = 931,494\,028(23) \cdot 10^6 \text{ эВ}/c^2 =$ $= 1,660\,538\,782(83) \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Атмосфера стандартная	$1 \text{ атм} = 101\,325 \text{ Па}$ (точно)
Больцмана постоянная	$k = R/N_A = 1,380\,6504(24) \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} =$ $= 8,617\,342(15) \cdot 10^{-5} \text{ эВ} \cdot \text{К}^{-1}$
Электрон-вольт	$1 \text{ эВ} = 1,602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

Электромагнитные постоянные

Элементарный заряд	$e = 1,602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19} \text{ Кл} =$ $= 4,803\,204\,27(12) \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ}$
Квант магнитного потока	$\Phi_0 = h/(2e) = 2,067\,834\,61(61) \cdot 10^{-15} \text{ Вб}$
Бора магнетон	$\mu_B = e\hbar/2m_e = 5,788\,381\,7555(79) \cdot 10^{-5} \text{ эВ/Тл}$
Ядерный магнетон	$\mu_N = e\hbar/2m_p = 3,152\,451\,2326(45) \cdot 10^{-8} \text{ эВ/Тл}$

Электрон

Масса	$m_e = 0,510\,998\,910(13) \text{ МэВ} \cdot \text{с}^{-2} =$ $= 9,109\,382\,15(45) \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Классический радиус	$r_e = e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_e c^2 = 2,817\,940\,2894(58) \cdot 10^{-15} \text{ м}$
Томсоновское сечение рассеяния	$\sigma_e = 8\pi r_e^2 / 3 = 0,665\,245\,8558(27) \cdot 10^{-28} \text{ м}^2$
Магнитный момент	$\mu_e = 928,477\,01(31) \cdot 10^{-26} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1}$ $\mu_e / \mu_B = 1,001\,159\,652\,193(10)$
Аномальный магнитный момент	$a_e = \mu_e / \mu_B - 1 = 1,159\,652\,180\,73(28) \cdot 10^{-3}$
g -фактор	$g_e = 2(1 + a_e) = 2,002\,319\,304\,386(20)$

Протон

Масса протона	$m_p = 938,272\,013(23) \text{ МэВ} / \text{с}^2 =$ $= 1,672\,621\,637(83) \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$ $= 1,007\,276\,466(10) \text{ а. е. м.}$
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p / m_e = 1836,152\,701\,47(37)$
Магнитный момент	$\mu_p = 1,410\,607\,61(47) \cdot 10^{-26} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1} =$ $= 2,792\,847\,356(23) \cdot \mu_N$
Гиромагнитное отношение	$26\,752\,212\,8(81) \cdot 10^4 \cdot \text{Тл}^{-1} \text{с}^{-1} =$ $= 2,792847356(23) \mu_N$

Нейтрон

Отношение массы нейтрона к массе протона	$m_n / m_p = 1,001\,378\,404(9)$
Магнитный момент	$\mu_n = 0,966\,237\,07(40) \cdot 10^{-26} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1} =$ $= 1,913\,042\,73(45) \cdot \mu_N$

Приложение III

В *гауссовой системе* электрические величины измеряются в единицах СГСЭ (например, заряд, ток и др.), а магнитные — в СГСМ (магнитное поле, магнитный момент и др.). Сокращенное название Международной Системы Единиц — СИ — означает «Система Интернациональная» (от фр. *Système International — SI*). В тех случаях, когда единица гауссовой системы не имеет специального названия, она обозначена в таблице символом [Г].

Наименование величины	Единицы СИ	Обозначение		Размерность	Гаусс. ед. [Г]	Обозн.	Размерность	Соотношение между единицами
		русск.	англ.					
Основные единицы								
Длина	метр	м	m	м	см	см	см	1 м = 100 см
Время	секунда	с	s	с	секунда	с	с	
Масса	килограмм	кг	kg	кг	грамм	г	г	1 кг = 1000 г
Сила тока	ампер	А	A	А	—	—	—	1 А = 3·10 ⁹ [Г]
Температура	кельвин	К	K	К	кельвин	К	К	
Сила света	кандела	кд	cd	кд	—	—	—	
Единицы механических и термодинамических величин								
Сила	ньютон	Н	N	м·кг·с ⁻²	дина	дин	см·г·с ⁻²	1 Н = 10 ⁵ дин
Давление	паскаль	Па	Pa	м ⁻¹ ·кг·с ⁻²	дина на кв. см	дин/см ²	см ⁻¹ ·г·с ⁻²	1 Па = 10 дин/см ²
Энергия, работа	джоуль	Дж	J	м ² ·кг·с ⁻²	эрг	эрг	см ² ·г·с ⁻²	1 Дж = 10 ⁷ эрг
Мощность	ватт	Вт	W	м ² ·кг·с ⁻³	эрг в секунду	эрг/с	см ² ·г·с ⁻³	1 Вт = 10 ⁷ эрг/с

Окончание таблицы								
Наименование величины	Единицы СИ	Обозначение		Размерность	Гаусс. ед. [Г]	Обозн.	Размерность	Соотношение между единицами
Единицы механических и термодинамических величин								
Частота	герц	Гц	Hz	с ⁻¹	герц	Гц	с ⁻¹	
Теплоемкость, энтропия	джоуль на кельвин	Дж/К	J/K	м ² ·кг·с ⁻² ·К ⁻¹	—	—	—	
Единицы электрических и магнитных величин								
Заряд	кулон	Кл	C	А·с	—	—	см ^{3/2} ·Г ^{1/2} ·с ⁻¹	1 Кл = 3·10 ⁹ [Г]
Разность потенциалов, напряжение	вольт	В	V	м ² ·кг·с ⁻³ ·А ⁻¹	—	—	см ^{1/2} ·Г ^{1/2} ·с ⁻¹	300 В = 1 [Г]
Напряжен- ность электри- ческого поля	вольт на метр	В/м	V/m	м·кг·с ⁻³ ·А ⁻¹	—	—	см ^{-1/2} ·Г ^{1/2} ·с ⁻¹	3 В/м = 10 ⁻⁴ [Г]
Емкость	фарада	Ф	F	м ⁻² ·кг ⁻¹ ·с ⁴ ·А ²	см	см	см	1 Ф = 9·10 ¹¹ см
Сопротивление	ом	Ом	Ω	м ² ·кг·с ⁻³ ·А ⁻²	—	—	—	9 Ом = 1·10 ⁻¹¹ [Г]
Удельное сопротивление	ом·метр	Ом·м	Ω·m	м ³ ·кг·с ⁻³ ·А ⁻²	—	—	—	1 Ом·м = = 1,1·10 ⁻¹⁰ [Г]
Напряжен- ность магнит- ного поля	ампер на метр	А/м	A/m	А·м ⁻¹	эрстед	Э	см ^{-1/2} ·Г ^{1/2} ·с ⁻¹	1 А/м = 4π10 ⁻³ Э
Магнитная индукция	тесла (вебер на кв. метр)	Тл (Вб/м ²)	T	кг·с ⁻² ·А ⁻¹ (Wb/m ²)	гаусс	Гс	см ^{-1/2} ·Г ^{1/2} ·с ⁻¹	1 Тл = 10 ⁴ Гс
Магнитный поток	вебер	Вб	Wb	м ² ·кг·с ⁻² ·А ⁻¹	максвелл	Мкс	см ^{3/2} ·Г ^{1/2} ·с ⁻¹	1 Вб = 10 ⁸ Мкс
Индуктивность	генри	Гн	H	м ² ·кг·с ⁻² ·А ⁻²	см	см	см	1 Гн = 10 ⁹ см

Некоторые внесистемные единицы

Наименование величины	Единица	Обозначения		Соотношение с единицами СИ
		русск.	англ.	
Длина	Ангстрем	Å	Å	$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ м}$ ($0,1 \text{ нм} = 10^{-4} \text{ мкм}$)
Работа, энергия	электрон- вольт килограмм- метр	эВ кгм	eV	$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,6 \cdot 10^{-12} [\text{Г}]$
Сила, вес	килограмм- сила	кгс —	—	$1 \text{ кгс} = 9,80665 \text{ Н (точно)} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ дин}$
Давление	Торр (мм рт. столба) Атмосфера техн. Атмосфера физ. Бар	Торр ат атм бар	Torr at atm bar	$1 \text{ Торр} = 133,322 \text{ Па (точно)} = 1,33322 \text{ мбар}$ $1 \text{ ат} = 9,80665 \cdot 10^4 \text{ Па (точно)}$ $1 \text{ атм} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па (точно)}$ $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па} = 0,98692 \text{ атм}$
Логарифми- ческая единица интенсивности (§ 61)	Бел	Б	В	
Количество теплоты	калория	кал	cal	$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ Дж (точно)}$
Напряженность магнитного поля	эрстед	Э	Oe	$1 \text{ Э} = 1 \text{ Гс} = 10^3/(4\pi) \text{ А/м}$
Мощность	лошадиная сила (horsepower)	л.с.	hp	$1 \text{ л.с.} = 735,499 \text{ Вт}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970.
2. Candell R. E. Amer. J. Phys., 1983, v. 51, № 8, pp. 698–702.
3. Hillas A. M., Cranshaw T. E. Nature, 1959, v. 184, № 12, pp. 4690–4691.
4. Мешков И. Н. Транспортировка пучков заряженных частиц. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1991.
5. Vogel M. The anomalous magnetic moment of the electron, Contemporary Physics, 2009, v. 50, № 3, pp. 437–452.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967.
7. Wesley J. C., Rich A. Phys. Rev. A, 1971, v. 4, № 4, pp. 1341–1363.
8. Particle Data Group. <http://pdg.lbl.gov>, 2010.
9. Bartlett D. F., Monroy J., Reeves J. Spinning magnets and Jehle's model of the electron, Phys. Rev. D, 1977, v. 16, № 12, pp. 3459–3463.
10. Гусев А. В., Никитин В. А., Сафонов А. Н. Экспериментальное исследование увеличения магнитного поля при вращении цилиндрически-симметричного магнита. Препринт ОИЯИ Р13–2009–159, 2009.
11. Plakida N. M. High-Temperature Cuprate Superconductors. Springer, 2010.
12. Физические величины. Справочник под ред. Григорьева И. С. и Мейлихова Е. З. М.: Атомиздат, 1968.
13. Абрикосов А. А. Сверхпроводники второго рода и вихревая решетка (Нобелевская лекция 2003 г.), УФН, 2004, т. 174, с. 1234–1239.
14. Гинзбург В. Л. О сверхпроводимости и сверхтекучести... (Нобелевская лекция 2003 г.), УФН, 2004, т. 174, с. 1240–1255.
15. Буккель В. Сверхпроводимость. М.: Мир, 1975.

-
16. *Вавилов С. И.* Глаз и Солнце. Собр. соч. М.: АН СССР, 1956, т. 4.
 17. *Семенов Н. А.* Техническая электродинамика. М.: Связь, 1973.
 18. *Бриллюэн Л.* Наука и теория информации. М.: Физматгиз, 1960.
 19. *Поплавский Р. П.* УФН, 1979, т. 128, № 1, с. 165–176.
 20. *Волосов В. И., Чириков Б. В.* ЖТФ, 1960, т. 30, № 5, с. 508–511.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- автогенератор, 430
- аксиальная магнитная линза, 328
- аксиальная электростатическая линза, 330
- амплитудная модуляция, 353
- антиводород, 327
- антиферромагнетики, 219
- асинхронный двигатель, 284

- баланс энергии поля, 438
- безразмерное гиромагнитное отношение, 184
- белый шум, 123, 457
- бетатрон, 317

- вектор намагничивания вещества, 196
- вектор Пойнтинга, 302
- вектор поляризации, 72, 73
- вектор-потенциал, 154
- вектор электрической индукции, 75
- взаимная емкость, 60
- виртуальные перемещения, 88
- вихревое поле, 246
- волна
 - быстрая, 505
 - медленная, 505
 - монохроматическая, 386
 - плоскополяризованная, 388
 - стоячая, 420
- волновод
 - диэлектрический, 418, 507
 - прямоугольного сечения, 499
 - многосвязный, 503
 - односвязный, 503
- волновой вектор, 390
- волновой пакет (группа волн), 448, 488
- волновое число, 386
- время
 - когерентности (время корреляции), 453
 - стохастического охлаждения, 465
- вырожденные моды, 503
- высокотемпературные проводники, 290

- гауссова система единиц, 11, 77
- генератор тока, 277
- гиромагнитное отношение, 179, 183
- гистерезис, 132, 216
- граничные условия
 - для векторного потенциала, 208
 - Леонтовича, 513
- группировка пучка, 430
- групповая скорость, 488

- давление солнечного света, 403
- даггеротипы, 371
- дальтонизм, 361
- двухпроводная линия, 303, 504
- δ -функция, 32, 446
- декремент, 270
- «демон» Максвелла, 482
- децибел, 359

- диамагнетики, 195
 дипольные, квадрупольные и сеступольные потенциалы, 17
 дипольные, квадрупольные и сеступольные моменты, 17
 дисперсия показателя преломления, 399, 485
 дифракция волн, 379
 дифференциальная магнитная проницаемость, 217
 диэлектрическая проницаемость, 73, 75
 длина волны, 386
 — комптоновская, 407
 — критическая, 500
 длина
 — когерентности, 296
 — свободного пробега, 119
 добротность контура, 273, 274, 275
 домен, 188, 215
 дрейф, 310
 — скорость, 310
 — центробежный, 321
 — градиентный, 320
 дробовой шум, 461
 дуализм, 407

 емкостное сопротивление, 276

 жесткие сверхпроводники, 291

 закон
 — Ампера, 139
 — Био и Савара, 141
 — Вебера—Фехнера, 358
 — Вина, 355
 — Джоуля—Ленца, 99
 — Кирхгофа
 — — первый, 110
 — — второй, 110
 — Ома дифференциальный, 98
 — Рэлея, 217
 — смещения Вина, 356
 — Стефана—Больцмана, 356
 — «трех вторых», 129
 — Хаббла, 395
 — Ципфа, 481
 заряды наведенные или индуцированные (связанные), 36

 изотопический эффект, 294
 индуктивность (коэффициент самоиндукции), 211, 250
 индуктивное сопротивление, 276
 интерметаллиды, 290
 излучение
 — черенковское, 398, 399
 — черного тела, 355

 калибровка
 — Лоренца, 160, 382
 — кулоновская, 382
 калибровочное преобразование, 158
 катод и анод, 127
 квазистационарные поля, 158
 квазиупругие диполи, 20
 квант магнитного потока, 294
 квантовая электродинамика, 247
 классический радиус электрона, 96
 клистрон, 430
 коаксиальный кабель, 504
 колебательный контур, 268
 колебательные системы, 269
 кольца Гельмгольца, 172
 компенсированный делитель, 114
 комплексные сопротивления, 275
 конус потерь, 326
 коронный разряд, 123
 корреляция (автокорреляция) поля, 452
 коэффициенты взаимной индукции, 264

- коэффициенты самоиндукции, 264
критическая плотность тока, 292
критическая температура, 289
кроссовер, 341
кулоновская калибровка потен-
циала, 203
кумулятивный взрыв, 263
куперовские пары, 293, 295
купраты, 290
- лапласово
— магнитное поле, 169
— электрическое поле, 171
ларморовский
— «кружок», 320
— радиус, 309
линейные коллайдеры, 431
линза Панофского, 334
литиевая и параболическая линза,
332
ловушка Иоффе–Притчарда, 326
лондоновская глубина, 296
лучи, 383
- магнетон Бора, 185
магнетрон, 429
магнитная
— бутылка, 326
— восприимчивость, 217
— индукция, 199
— ловушка, 226, 325
— пробка, 326
— проницаемость вакуума, 201
— проницаемость вещества, 195,
199
магнитное сопротивление, 211
магнитные монополи, 230
магнитный
— момент, 176
— поток, 168
— резонанс, 184
- магнитостатика, 230
магнитосфера Земли, 225
масса фотона, 227
метод
— имплозии, 263
— изображений, 38, 83, 208
— инверсии, 52
— ионизационного охлаждения, 346,
348
— встречных пучков, 68
— лазерного охлаждения, 347
— разделения переменных, 163
— стохастического охлаждения,
346, 464
— электронного охлаждения, 346,
347
микроканальные пластины, 369
моды (гармоники), 422, 503
мюонное охлаждение, 349
- намагничивание среды, 196
нити нормальной фазы, 297
- обобщенный момент частицы, 317,
319
обратное комптоновское рассеяние,
408
оптика, 355
— нелинейная, 508
оптический контакт, 419
оптоволоконные линии связи, 507
опыт Неганова, 313
основное уравнение
— магнитного поля, 159, 160
— электростатики, 28
осциллятор, 269
охлаждение, 346
палеомагнетизм, 227
палки Иоффе, 326
парадокс Богача, 242

- параллельный контур, 277
парамагнетики, 195
первеанс пучка, 137
пермаллои, 218
пермендюр, 218
петля связи, 422
пинч-эффект, 154
плазменная частота, 106, 234
плоский
— квадруполь, 21
— секступоль, 21
плоскость колебаний волны, 388
плотность
— магнитной энергии, 252
— энергии поля, 85
показатель преломления среды, 377,
379, 385, 411
полное
— внутреннее отражение, 413
— прохождение волны, 413
поляризация волны, 387, 388, 404
— круговая (или циркулярная), 387
— линейная, 388
поляризация среды, 71
поляроид, 390
последовательный контур, 268
постоянная
— Верде, 491
— Планка, 185
потенциал, 12
— в однородном диэлектрике, 78
потокосцепление, 251, 264
пояс Роговского, 287
правило Ленца, 257
преобразования Лоренца, 391
преобразователь электронно-
оптический, 368
прецессия, 183
принцип
— Карно, 482
— суперпозиции, 141
пробкотрон, 326
пробой, 125
проводимость
— газов, 98
— среды, 96
— твердых диэлектриков, 98
проект ITER, 324
пространственная частота волны,
386
пространственный заряд пучка, 137
равенство Парсеваля, 438
равновесное (equilibrium) состояние,
347
радиационное охлаждение, 346
радиационные пояса, 226
радиолампы, 429
радиоспектроскопия, 188
радиус Дебая, 30
разветвленные цепи, 109
распространение тепла, 523
режим резонатора
— многомодовый, 428
— одномодовый, 428
резонанс
— антиферромагнитный, 188
— напряжений, 275
— электронный парамагнитный,
185
— токов, 278
— ферромагнитный, 188
— ферромагнитный, 188
— ядерный магнитный, 187
резонансная кривая, 273
резонатор
— сверхпроводящий, 431
— Фабри–Перо, 421
реликтовое излучение, 357, 409
самоподдерживающийся разряд,
119

- свет, 355
светодиоды, 357
седлообразные витки, 166
сила трения, 346
силы Лоренца, 141, 148
синхротронное излучение, 346
скалярный потенциал, 154, 169, 204
скин-эффект
— нестационарный, 519
— тепловой, 524
скрещенные поля, 309
слой зарядов, 38
смешанное состояние, 297
собственная частота контура, 269
собственные частоты резонатора, 422
собственные колебания поля, 422
солнечный ветер, 225
соотношения неопределенности, 424
— для длительности и частоты, 447
— для размера и волнового числа, 448
сопротивление
— проводника, 98
— волновое, 510
спектр
— амплитудный, 434
— дискретный (точечный), 435
— мощности, 452
— непрерывный, 439
— равновесного теплового излучения, 355
— резонатора, 422
— смешанный, 458
— фазовый, 434
спектральное разложение, 433
спектральная чувствительность, 368
Стандартная Модель, 192
стохастическое
— поле, 453
— ускорение, 456
стример, 123
стримерная камера, 126
тахiony, 399
телеграфное уравнение, 509
тензор диэлектрической проницаемости, 76, 486
термоядерный реактор, 323
теорема
— Ирншоу, 58
— Котельникова, 469
— Лиувилля, 341
теория
— БКШ, 293
— близкодействия, 13
— Гинзбурга–Ландау, 296
— дальнодействия, 13
— динамо, 227
— феноменологическая, 247
толщина скин-слоя, 512
ток
— смещения, 161
— — в среде, 202
— трехфазный, 283
токи Фуко, 519
тонкая линза, 329
точка Кюри, 218
трансформатор, 285
— тока, 287
трохоида, 311
тяжелый фотон, 505
угол Брюстера, 414
угол полного внутреннего отражения, 415
уголковый отражатель, 418
удельное сопротивление среды, 96
узлы стоячей волны, 420
униполярный генератор, 240

- уравнение
 - Бесселя, 501
 - дисперсионное, 487, 511
 - Лондонов, 295
 - Лапласа, 28, 54
 - непрерывности, 94
 - постоянного магнитного поля в среде, 203
 - Пуассона, 28
 - — в среде, 78
 - силовой линии, 14
- уравнения Максвелла, 247
- условие
 - квазистационарности, 158
 - самофокусировки Беннета–Будкера, 153
 - Лоренца, 382
- усреднение
 - по времени, 93
 - по многим электронам, 93
- фаза волны, 386
- фазовая скорость, 385, 386, 487
- фазоимпульсная (широотно-импульсная) модуляция, 354
- ферромагнетизм, 219
- ферриты, 219
- ферроэлектричество (сегнетоэлектричество), 220
- фокус, 328
- фокусное расстояние, 328
- фонон, 294
- формула
 - Котельникова, 470
 - Найквиста, 462
 - Шеннона, 472
 - Шоттки, 463
- формулы Френеля, 412
- фотоэлемент, 369
- фотоэлектронный умножитель, 368
- функции Бесселя (цилиндрические функции), 501
- фурье-гармоники, 434
- фурье-образ, 440
- фурье-преобразование, 440
- фурье-разложение, 433
- фурье-спектры, 434
- центр поля, 339
- центральное поле, 338
- цепь
 - с сосредоточенными параметрами, 108
 - с распределенными параметрами, 108
- циклоида, 311
- частица, 407
- частота
 - (временная) волны, 386
 - циклотронная или ларморовская, 188, 309
- частотная модуляция, 353
- число степеней свободы сигнала, 469
- шаговое напряжение, 104
- шаровая молния, 125
- шкалы электромагнитных волн, 351
- Шоттки-шум, 460
- эквипотенциальность, 51
- электрическое поле, 12
- электростатическое экранирование, 63, 64
- ЭДС индукции, 239
- элегаз, 125
- электродвижущая сила, 108
- электромагнитное поле, 151
- электронная оптика, 329
- электронный диод, 127

эммиттанс, 343, 464

эфир, 380

эффект

— Джозефсона, 295

— Доплера, 392

— — аномальный, 398

— — квадратичный, 393

— — линейный, 393

— — поперечный, 393

— Комптона, 407

— Мейсснера, 293

— Мёссбауэра, 458

— Сюняева–Зельдовича, 409

— туннельный, 419

— Фарадея, 490

— Холла, 154

ЯМР-томография (магнито-резонансная томография), 192

явление интерференции, 304

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 415, тел.: (495) 641–69–38, факс: (499) 135–54–37
2. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)
3. Магазины:
Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40, тел.: 137–06–33)
«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8, тел.: 290–45–07)
Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный, Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409–93–28)
С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

*Мешков Игорь Николаевич
Чириков Борис Валерианович*

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Часть I

Электричество и магнетизм

2-е издание, исправленное и дополненное

*Дизайнер В. А. Толстолуцкая
Технический редактор А. В. Бакиев
Компьютерная верстка О. А. Печина
Корректор Т. Н. Якушева*

Подписано в печать 15.05.2014. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Усл. печ. л. 31,62. Уч.-изд. л. 33,87. Гарнитура Таймс.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Заказ № 14-37.
Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426000, г. Ижевск, ул. Родниковая, 56
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95
