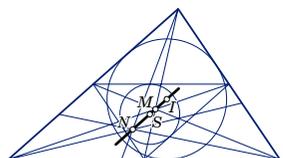
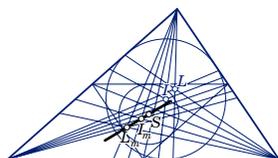


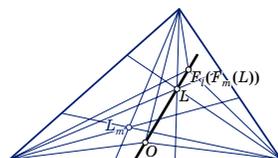
## НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ



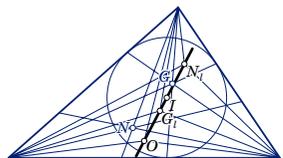
1)  $N - S - M - I$ , где  $S$  — точка Шпикера — центр вписанной окружности срединного треугольника.



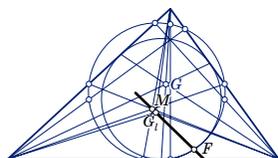
5)  $L_m = F_m(L) - I_m - S$ .



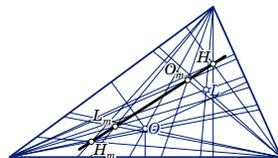
10)  $O - L - F_l(F_m(L))$ .



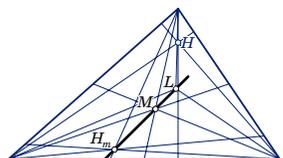
2)  $O - G_l = F_l(G) - I - N_l = F_l(N)$ , где  $F_l$  — изогональное сопряжение.



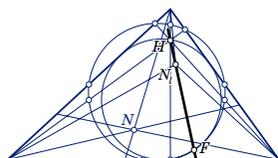
6)  $M - G_l - F$ , где  $F$  — точка Ферейбаха — точка касания вписанной окружности и окружности девяти точек.



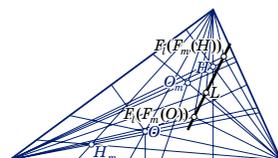
11)  $H_m - L_m - O_m = F_m(O) - H$ .



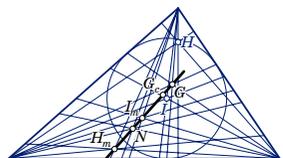
3)  $H_m = F_m(H) - M - L = F_l(M)$ , где  $F_m$  — изотомическое сопряжение.



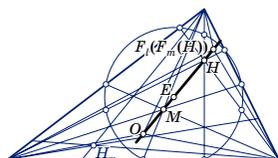
7)  $H - N_l - F$ .



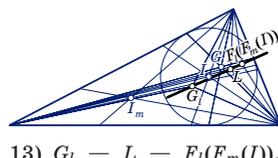
12)  $F_l(F_m(O)) - L - F_l(F_m(H))$ .



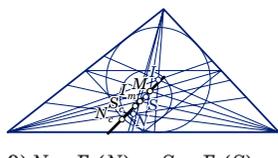
4)  $H_m - N - I_m = F_m(I) - G_c = F_c(G) - G$ , где  $F_c$  — изоциркулярное преобразование.



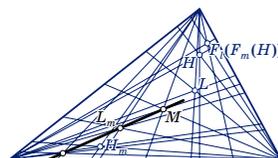
8)  $O - M - E - H - F_l(F_m(H))$  (прямая Эйлера).



13)  $G_l - L - F_l(F_m(I))$ .



9)  $N_c = F_c(N) - S_c = F_c(S) - I_m - M$ .

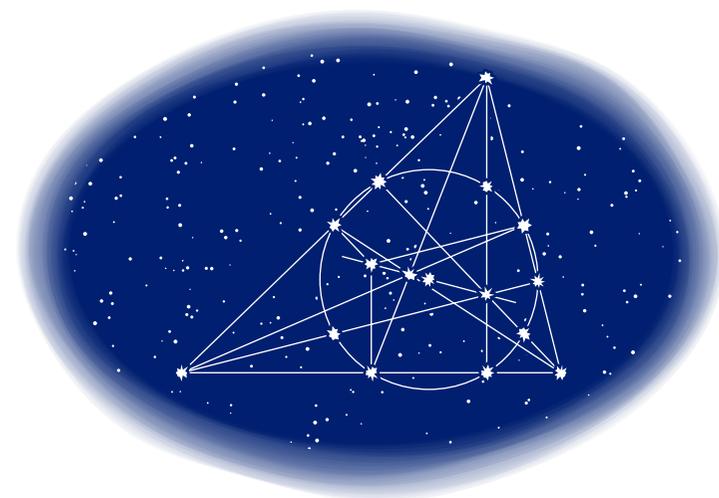


14)  $F_m(F_l(F_m(H))) - L_m - M$ .

Библиотека  
«Математическое просвещение»

А. Г. Мякишев

# ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА



Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
Москва • 2002

Библиотека  
«Математическое просвещение»  
Выпуск 19

---

**А. Г. Мякишев**

Научно-редакционный совет серии:

*В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский,  
В. М. Тихомиров (гл. ред.), И. В. Яценко.*

---

Серия основана в 1999 году.

# **ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА**

---

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
Москва • 2002

### Аннотация

Геометрия треугольника справедливо считается одним из интереснейших разделов элементарной геометрии.

В данной брошюре рассматриваются различные замечательные точки и прямые треугольника, а также некоторые преобразования плоскости, связанные с треугольником. Брошюра содержит краткое введение в барицентрическое исчисление — один из основных методов исследования свойств треугольника.

Текст брошюры подготовлен по материалам лекции, прочитанной автором 13 апреля 2002 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей...

*Издание осуществлено при поддержке  
Московской городской Думы  
и Московского комитета образования.*

ISBN 5-94057-048-8

© Мякишев А. Г., 2002.  
© МЦНМО, 2002.

*Мякишев Алексей Геннадьевич.*

Элементы геометрии треугольника.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“».)  
М.: МЦНМО, 2002. — 32 с.: ил.

Редактор Ю. Л. Притыкин.

Техн. редактор М. Ю. Панов.

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 16/VIII 2002 года. Формат бумаги  $60 \times 88 \frac{1}{16}$ . Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 2,00. Усл. печ. л. 1,96. Уч.-изд. л. 2,10. Тираж 2000 экз. Заказ 2802.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНТИ».  
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

### ВВЕДЕНИЕ

Крылатую фразу Козьмы Пруткова «Никто не обнимет необъятного» в полной мере можно отнести и к геометрии треугольника. В самом деле, треугольник, как кладёзь прекрасных и поразительных геометрических конструкций, поистине неисчерпаем. Их пестрота и изобилие, с трудом поддающиеся какой-либо систематизации, не могут не восхищать. Впрочем, иной раз эти благодарные чувства перерастают в изумлённое раздражение, едва ли не в протест: если уж с виду такая «игрушечная» область геометрии настолько сложна, то в чём же вообще тогда можно разобрататься?

Интересно попробовать понять, а почему тот или иной результат геометрии треугольника оказывает на нас большее или меньшее воздействие. В грубом приближении ответ на этот вопрос следующий: красивая теорема в геометрии треугольника связана, как правило, с замечательными точками, прямыми или окружностями. Но прямая или окружность замечательна, если содержит какие-нибудь замечательные точки треугольника. В точки эти, стало быть, всё и упирается. Однако как сравнивать степень их «замечательности» между собой? Очевидно, точка тем более замечательна, чем с более естественными и содержательными конфигурациями треугольника она взаимодействует. Поэтому в первый ряд следует поставить, конечно, таких заслуженных ветеранов, как  $M$  — точку пересечения медиан (центр тяжести), рис. 1,  $O$  — центр описанной окружности, рис. 2,  $I$  — центр вписанной окружности, рис. 3,  $H$  — точку пересечения высот (ортоцентр), рис. 4. Не испортит общей картины и молодёжь: точка  $G$  Жергонна (рис. 5) и точка  $N$  Нагеля (рис. 6)\*).

С точками первого порядка связаны и первоклассные результаты — теоремы о прямой Эйлера, окружности девяти точек. Далее, точками второго порядка можно считать точки, являющиеся «производными» от точек первого порядка,

\*) Молодёжь, поскольку первые четыре точки встречаются ещё у Евклида, а последние две, насколько известно, были открыты примерно 200 лет назад.

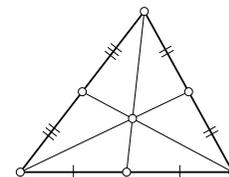


Рис. 1.  $M$  — центр масс — точка пересечения медиан треугольника.

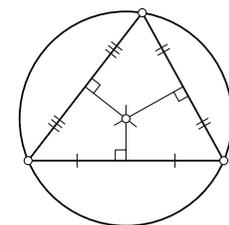


Рис. 2.  $O$  — центр описанной около треугольника окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров.

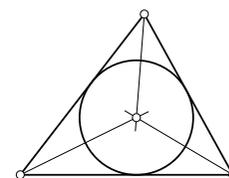


Рис. 3.  $I$  — центр вписанной в треугольник окружности — точка пересечения биссектрис.

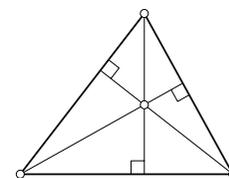


Рис. 4.  $H$  — ортоцентр — точка пересечения высот треугольника.

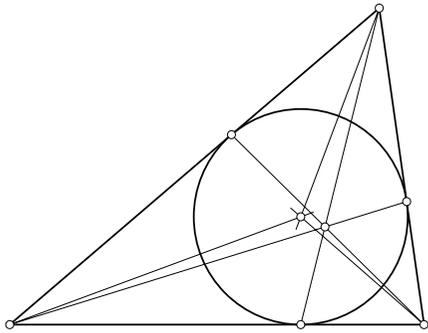


Рис. 5.  $G$  — точка Жергонна — точка пересечения прямых, проходящих через точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника и противолежащие вершины.

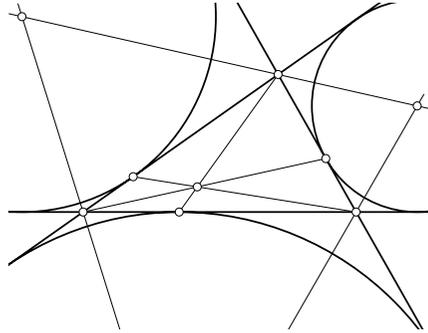


Рис. 6.  $N$  — точка Нагеля — точка пересечения прямых, проходящих через точки касания невписанных окружностей со сторонами треугольника и противолежащие вершины.

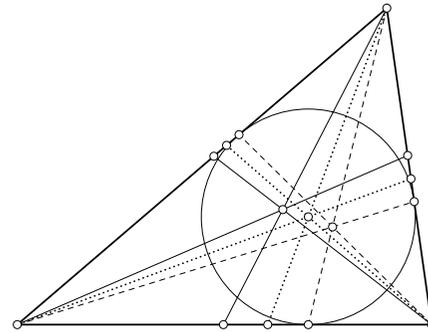


Рис. 10.  $G_1$  — точка, изогонально сопряжённая точке Жергонна.

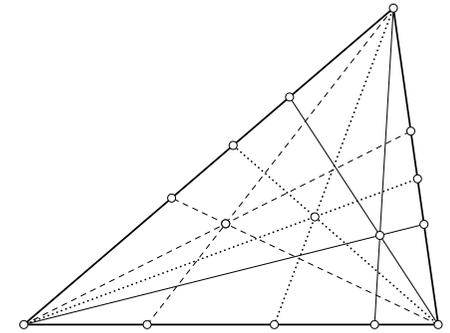


Рис. 11.  $N_1$  — точка, изогонально сопряжённая точке Нагеля.

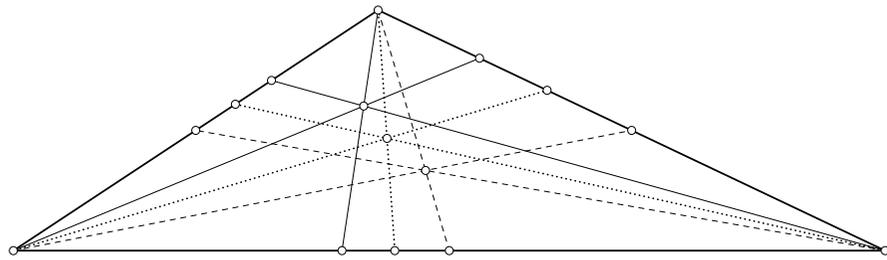


Рис. 7.  $L$  — точка Лемуана — точка, изогонально сопряжённая точке пересечения медиан, т. е. точка, пересечения прямых, симметричных медианам относительно соответствующих биссектрис треугольника.

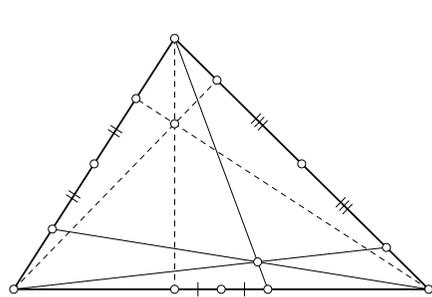


Рис. 8.  $H_m$  — антиортоцентр — точка, изотомически сопряжённая ортоцентру, т. е. точка пересечения прямых, проходящих через точки, симметричные основаниям высот относительно середин сторон, и соответствующие вершины.

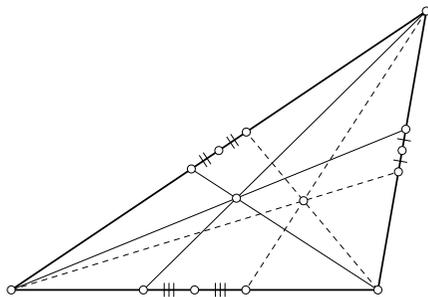


Рис. 9.  $I_m$  — точка пересечения антибиссектрис — точка, изотомически сопряжённая центру вписанной в треугольник окружности.

т. е. полученные из них под действием какого-нибудь преобразования (к примеру, изотомического или изогонального сопряжения — эти преобразования мы ещё рассмотрим в дальнейшем) или как пересечение каких-нибудь замечательных линий первого порядка и т. д. Сюда можно отнести, в первую очередь, точку  $L$  Лемуана (точку пересечения прямых, симметричных медианам относительно соответствующих биссектрис, такое преобразование и называется изогональным сопряжением), рис. 7, антиортоцентр треугольника  $H_m$  (точку пересечения прямых, проходящих через точки, симметричные основаниям высот относительно соответствующих середин сторон, и противолежащие вершины, это преобразование называется изотомическим сопряжением), рис. 8, точку  $I_m$  пересечения антибиссектрис (изотомически сопряжённую точке пересечения биссектрис), рис. 9, точки  $G_1$  и  $N_1$  (точки, изогонально сопряжённые точкам Жергонна и Нагеля), рис. 10 и 11. Точки третьего порядка определяются аналогично, как «производные» точек второго порядка и т. д. Понятно, что с ростом порядка количество точек стремительно растёт, впрочем, столь же стремительно проигрывая в качестве: чем больше порядок, тем геометрические связи между ними бледнее и невыразительней.

### ТЕОРЕМА ЧЕВЫ

Большинство замечательных точек треугольника могут быть получены при помощи следующей процедуры.

Пусть у нас имеется некоторое правило, согласно которому мы сможем выбрать определённую точку  $A_1$  на стороне  $BC$  (или её продолжении) треугольника  $ABC$  (например, выберем середину этой стороны). Затем построим аналогичные точки  $B_1, C_1$  на двух других сторонах треугольника (в нашем примере — ещё две середины сторон). Если правило выбора удачное, то прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекутся в некоторой точке  $Z$  (выбор середин сторон в этом

смысле, конечно, удачный). Например, все замечательные точки рис. 1, 3—11 получаются именно так.

Поэтому хотелось бы иметь какой-нибудь общий метод, позволяющий по положению точек на сторонах треугольника определять, пересекается ли соответствующая тройка прямых в одной точке или нет.

Универсальное условие, «закрывающее» эту проблему, нашёл в 1678 г. итальянский инженер Джованни Чева (отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками на противоположных сторонах, называют *чевианами* — понятно, почему). Можно сказать, что эта теорема служит фундаментом всей геометрии треугольника.

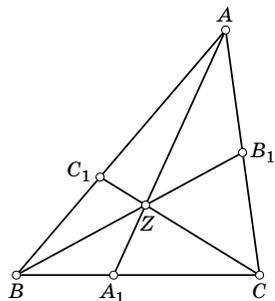


Рис. 12

### Теорема Чевы: случай внутренней точки

Выберем в произвольном треугольнике  $ABC$  точки  $A_1, B_1, C_1$  на сторонах  $BC, CA, AB$  соответственно (рис. 12). Следующие два утверждения равносильны:

а) прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в некоторой внутренней точке  $Z$  треугольника  $ABC$ ;

$$б) \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1 \text{ (условие Чевы).}$$

Доказать прямую теорему Чевы ( $a \Rightarrow б$ ) проще всего, заменив отношения отрезков в условии Чевы на отношение площадей:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} = \frac{S_{BZA_1}}{S_{CZA_1}},$$

следовательно,

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{S_{ABA_1} - S_{BZA_1}}{S_{ACA_1} - S_{CZA_1}} = \frac{S_{BZA}}{S_{CZA}}.$$

Точно так же получим, что

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{S_{CZB}}{S_{BZA}}, \quad \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{S_{CZA}}{S_{CZB}}.$$

Теперь осталось только перемножить эти три равенства:

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{S_{BZA}}{S_{CZA}} \cdot \frac{S_{CZB}}{S_{BZA}} \cdot \frac{S_{CZA}}{S_{CZB}} = 1.$$

Обратная же теорема Чевы следует из прямой: пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $Z$ . Пусть прямая  $CZ$  пересекает сторону  $AB$  треугольника в точке  $C_2$ . Для точек  $A_1, B_1, C_2$  выполняется условие Чевы:

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} = 1.$$

Сопоставив это соотношение с заданным равенством, приходим к выводу, что  $\frac{AC_2}{BC_2} = \frac{AC_1}{BC_1}$ , т. е.  $C_1 = C_2$ .

А как запомнить, произведение каких именно отношений входит в условие Чевы? Обойдём все три вершины треугольника, стартовав из точки  $B$ . По дороге в точку  $C$  мы наткнёмся на точку  $A_1$  и образуем дробь, в числителе которой будет стоять  $BA_1$ , а в знаменателе —  $CA_1$ . Далее идём из  $C$  в  $A$ , записываем второе отношение, и далее, идём из  $A$  в  $B$ .

1. Покажите, что эта процедура не зависит от выбора «отправной» вершины и направления обхода, т. е. что всегда будет получаться, по сути, одно и то же равенство\*).

### Теорема Чевы: случай внешней точки. Бесконечно удалённые точки плоскости

Теорема Чевы остаётся справедливой и для внешней точки  $Z$  треугольника и точек  $A_1, B_1, C_1$ , одна из которых принадлежит стороне треугольника, а две другие — продолжениям сторон. (Разумеется, и «правило обхода» остаётся в силе. Следует только помнить, что при составлении отношений, выходя из вершины, мы сначала идём в точку деления — она может теперь быть расположена вне стороны, а потом — к очередной вершине.)

Однако, рассматривая внешние точки  $Z$ , мы наталкиваемся на некоторые сложности. Например, если  $AZ \parallel BC$ , чему равно

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1}$$

(рис. 13)? Где вообще в таком случае располагается точка  $A_1$ ?

Как несложно проверить, пользуясь теоремой Фалеса, условию Чевы удовлетворяют и точки  $A_1, B_1, C_1$ , для которых прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  параллельны (рис. 14).

Чтобы не выделять эти ситуации в особые, удобно считать, что плоскость пополнена *бесконечно удалённой прямой*, составленной из *бесконечно удалённых точек*, в каждой из которых пересекается какое-нибудь семейство параллельных прямых. Можно поэтому считать, что бесконечно удалённая точка указывает направление прямой. Такую

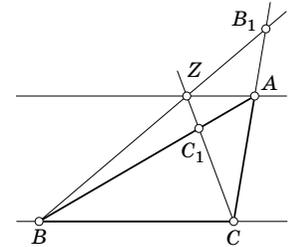


Рис. 13

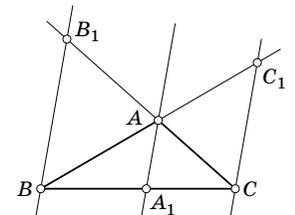


Рис. 14

\*) Двумя чертами слева выделены упражнения для самостоятельного решения.

модель в математике называют *проективной плоскостью*. На проективной плоскости любые параллельные прямые пересекаются в некоторой точке! — разумеется, бесконечно удалённой. При этом мы полагаем также, что бесконечно удалённая точка  $Z$  прямой  $AB$  делит отрезок  $AB$  пополам внешним образом:  $\frac{ZA}{ZB} = 1$ .

2. Постройте точку, которая делит отрезок  $AB$  внешним образом в отношении  $\frac{99}{100}$ , считая от вершины  $A$ , и точку, которая делит отрезок в отношении  $\frac{100}{99}$ .

Решение этого упражнения показывает, что если отношение чуть больше единицы, то искомая точка расположена правее точки  $A$  и удалена от неё на значительное расстояние, а если чуть меньше, то значительно левее точки  $A$ . Отсюда вытекает, что, двигаясь по прямой влево или вправо, на самом деле мы идём к одной и той же бесконечно удалённой точке, т. е. прямая как бы замыкается, подобно окружности.

3. Покажите, что при переводе с «проективного» языка на привычный «евклидов» теорема Чевы в случае бесконечно удалённой вершины  $A$  может быть сформулирована следующим образом. На отрезке  $BC$  выбрана точка  $A_1$ , а на параллельных прямых, проходящих через точки  $C$  и  $B$ , точки  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Тогда прямые  $BB_1$ ,  $CC_1$  и прямая, проходящая через  $A_1$  параллельно двум данным, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{BC_1} = 1.$$

### Теорема Чевы в форме синусов

В каждом из рассмотренных случаев — и в случае внутренней точки  $Z$ , и в случае внешней точки  $Z$  — условие Чевы можно записать также в виде

$$\frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle BCC_1} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle ABB_1} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle CAA_1} = 1.$$

Доказательство равносильности этих условий не сложно. Действительно, применив теорему синусов к треугольникам  $ACC_1$  и  $BCC_1$ , имеем:

$$\frac{AC_1}{CC_1} = \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle CAC_1} \quad \text{и} \quad \frac{BC_1}{CC_1} = \frac{\sin \angle BCC_1}{\sin \angle CBC_1}.$$

Разделив одно равенство на другое, получаем:

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{\sin \angle CBC_1}{\sin \angle CAC_1} \cdot \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle BCC_1} = \frac{\sin \angle CBA}{\sin \angle CAB} \cdot \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle BCC_1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle BCC_1}.$$

Аналогично  $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle CAA_1}$ ,  $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle ABB_1}$ . Окончательно имеем:

$$1 = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle CAA_1} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle ABB_1} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle BCC_1} = \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle CAA_1} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle ABB_1} \cdot \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle BCC_1}.$$

Для внешней точки  $Z$  рассуждение аналогично (проведите его самостоятельно).

### Некоторые замечательные точки треугольника. Теорема Карно

Посмотрим, как «работает» теорема Чевы.

Будем называть прямые *конкурентными*, если они пересекаются в одной точке.

Центр вписанной окружности  $I$  (см. рис. 3). Применив теорему Чевы в форме синусов, мгновенно получаем, что биссектрисы конкурентны.

Ортоцентр  $H$  (см. рис. 4). Теперь докажем, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, ограничившись случаем остроугольного треугольника (случай тупоугольного треугольника разберите самостоятельно). Условие Чевы в форме синусов с использованием известного соотношения  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$  записывается в виде

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} = 1.$$

Центр описанной окружности  $O$  (см. рис. 2). Очевидно, что два серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в точке, равноудалённой от всех трёх вершин треугольника, и значит, эта точка лежит и на третьем серединном перпендикуляре.

Но как доказать этот несложный факт, пользуясь теоремой Чевы? Из принципиальных соображений это хотелось бы сделать и в данном случае. Однако здесь возникают затруднения, поскольку по природе своей теорема Чевы создана для выявления конкурентности чевяиан, а не перпендикуляров к сторонам треугольника. Возникшее затруднение можно преодолеть, рассмотрим *серединный треугольник* (рис. 15). Поскольку средние линии параллельны сторонам исходного треугольника, серединные перпендикуляры являются высотами серединного треугольника. И мы свели задачу к предыдущей!

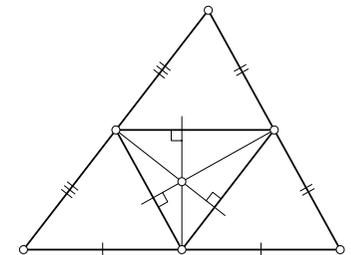


Рис. 15

Есть и более содержательный подход к этой проблеме.

**Теорема Карно [3].** Пусть точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на прямых  $BC, CA, AB$  соответственно. Пусть также  $BA_1 = x_1, CA_1 = x_2, CB_1 = y_1, AB_1 = y_2, AC_1 = z_1, BC_1 = z_2$ . Следующие условия равносильны:

1) перпендикуляры к соответствующим сторонам треугольника, восстановленные в точках  $A_1, B_1, C_1$ , пересекаются в одной точке;

2)  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$  (условие Карно).

(Сравните с условием Чевы:  $x_1 y_1 z_1 = x_2 y_2 z_2$ .)

**Доказательство**, пожалуй, ещё проще, чем доказательство теоремы Чевы, и опирается лишь на теорему Пифагора. Пусть перпендикуляры пересекаются в точке  $Z$ . Несложно получить следующие равенства (рис. 16):

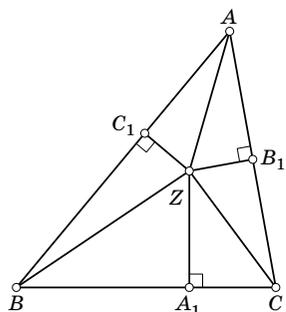


Рис. 16

$$AB_1^2 - CB_1^2 = AZ^2 - CZ^2,$$

$$BC_1^2 - AC_1^2 = BZ^2 - AZ^2,$$

$$CA_1^2 - BA_1^2 = CZ^2 - BZ^2,$$

сложив которые, и получаем условие Карно.

Доказательство обратной теоремы Карно (как и обратной теоремы Чевы) использует прямую теорему: пусть два перпендикуляра пересекаются в некоторой точке, опустим из неё перпендикуляр на третью сторону, запишем условие Карно и т. д.

Из теоремы Карно конкурентность серединных перпендикуляров вытекает столь же естественно, как и конкурентность медиан из теоремы Чевы.

Точка Жергонна  $G$  (см. рис. 5). Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC, CA, AB$  соответственно. Прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке (точке  $G$ ), поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны:

$$BA_1 = BC_1, \quad CB_1 = CA_1, \quad AB_1 = AC_1;$$

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1.$$

4. Покажите, что равные отрезки касательных выражаются через полупериметр и стороны треугольника следующим образом:

$$AB_1 = AC_1 = p - a, \quad BC_1 = BA_1 = p - b, \quad CA_1 = CB_1 = p - c. \quad (*)$$

Точка Нагеля  $N$  (см. рис. 6). Пусть теперь  $A_1$  — точка касания внеписанной окружности с центром  $I_A$  и стороны  $BC, B_1$  —

точка касания внеписанной окружности с центром  $I_B$  и стороны  $CA, C_1$  — третьей внеписанной окружности и третьей стороны треугольника. Прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в точке  $N$ .

Дело в том, что, используя всё ту же теорему о равенстве отрезков касательных, легко получить, что в случае внеписанной окружности, например, с центром  $I_A, BA_1 = p - c, CA_1 = p - b$ , т. е. точки касания вписанной и внеписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны. Поэтому условие Чевы записывается в виде

$$\frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{p-b}{p-a} = 1.$$

5. Докажите с помощью теоремы Карно, что перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в точках касания внеписанных окружностей, пересекаются в одной точке. Покажите затем,

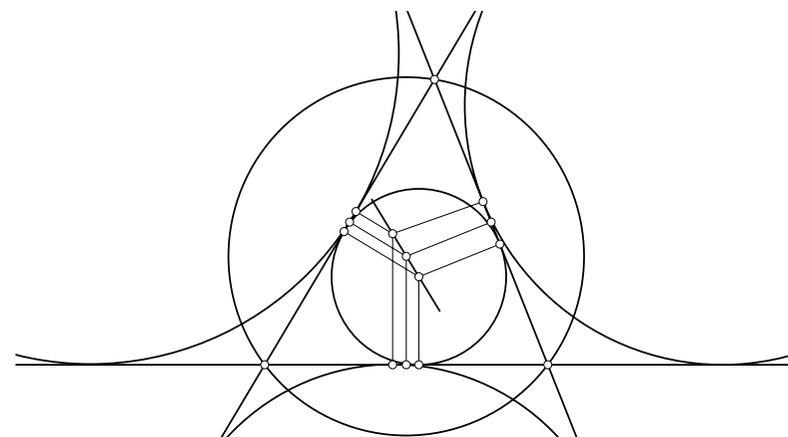


Рис. 17

что эта точка симметрична центру вписанной окружности относительно центра описанной окружности (рис. 17).

### Некоторые замечательные преобразования, связанные с теоремой Чевы

**Изометрическое сопряжение.** Зафиксируем на плоскости треугольник  $ABC$ . Выберем некоторую точку плоскости  $Z$  и проведём через неё и вершины треугольника прямые, пересекающие стороны треугольника (или их продолжения) в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Каждую такую точку отразим симметрично относительно середины той стороны, на которой она лежит\*). Полученные три точки

\*) В соответствии со сказанным на стр. 8 считаем, что бесконечно удалённая точка любой прямой  $PQ$  при симметрии относительно середины  $PQ$  переходит в себя.

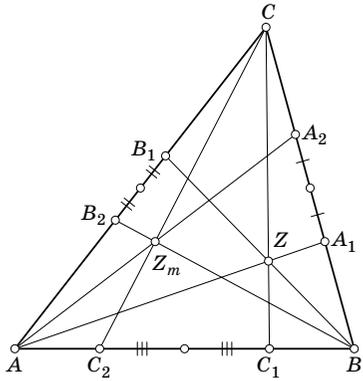


Рис. 18

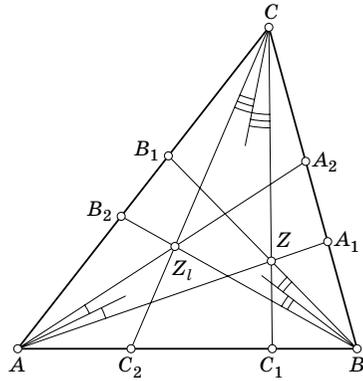


Рис. 19

обозначим через  $A_2, B_2, C_2$  (рис. 18). Тогда прямые  $AA_2, BB_2, CC_2$  также пересекаются в некоторой точке  $Z_m$ . Эта точка называется *изотомически сопряжённой* точке  $Z$  относительно треугольника  $ABC$ .

Корректность определения изотомического сопряжения следует из теоремы Чевы: в условии Чевы числители меняются местами со знаменателями, и если исходное произведение равнялось единице, то «перевёрнутое» произведение тоже равно единице.

**Изогональное сопряжение.** Зафиксируем на плоскости треугольник  $ABC$ . Вновь выберем некоторую точку плоскости  $Z$  и проведём через неё и вершины треугольника прямые, пересекающие стороны треугольника (или их продолжения) в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Тогда прямые  $AA_2, BB_2, CC_2$ , симметричные прямым  $AA_1, BB_1, CC_1$  относительно биссектрис соответствующих углов треугольника, пересекаются в одной точке  $Z_l$  (рис. 19). Эта точка называется *изогонально сопряжённой* точке  $Z$  относительно треугольника  $ABC$ .

Для доказательства корректности здесь удобно воспользоваться теоремой Чевы в форме синусов: записанное таким образом условие Чевы «переворачивается», и если произведение отношений равнялось единице, после «переворота» оно тоже будет равно единице.

**Изотомическое и изогональное сопряжения** как преобразования плоскости. В геометрии *сопряжением* называют преобразование  $F$  плоскости, возвращающее любую точку обратно после двукратного применения. Формально это можно записать так:

$$F(F(X)) = X$$

для любой точки  $X$ , или

$$F \circ F = F^2 = \text{Id}$$

(преобразование  $F$  в квадрате даёт тождественное). Таким свойством

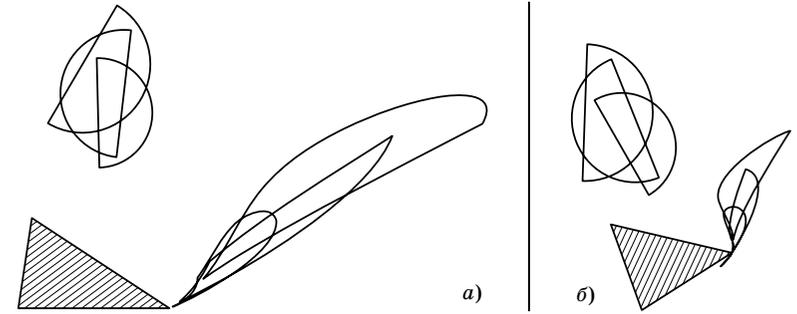


Рис. 20. Образы трёх полукругов под действием преобразований относительно заштрихованного треугольника:

а) изогонального сопряжения; б) изотомического сопряжения.

обладают симметрии относительно точки, прямой или окружности (инверсия). Очевидно, что и только что рассмотренные нами преобразования обладают этим же свойством. Однако они устроены более сложным образом, например, не сохраняют прямые и окружности (т. е. образ прямой или окружности может быть чем-то иным, рис. 20). Кроме того, непосредственно из определения следует, что и изотомическое, и изогональное сопряжения «плохо» действуют на точки, расположенные на сторонах (или их продолжениях) порождающего эти преобразования треугольника. Любая такая точка под действием этих преобразований переходит в противоположающую вершину, а вершины — в любую точку на противоположной стороне. Нарушается однозначность! Но если исключить из области определения прямые, содержащие стороны треугольника, однозначность восстанавливается.

Одной из важных характеристик преобразования является наличие (или отсутствие) *неподвижных точек*, т. е. точек, остающихся под действием преобразования на месте. Легко понять, что неподвижными точками изотомического сопряжения являются точка пересечения медиан и точки, симметричные вершинам треугольника относительно середин соответствующих сторон; неподвижными точками изогонального сопряжения являются центры вписанной и трёх невписанных окружностей.

С помощью изотомического и изогонального сопряжений можно получать новые замечательные точки (см. введение), например, антиортоцентр  $H_m$  (точку, изотомически сопряжённую ортоцентру) или точку  $I_m$  пересечения антибиссектрис (точку, изотомически сопряжённую центру вписанной окружности).

*Точкой Лемуана*  $L$  (см. рис. 7) называют точку, изогонально сопряжённую точке пересечения медиан треугольника. Она обладает многими любопытными свойствами. Так, например, если для

точки пересечения медиан сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна, то для точки Лемуана минимальна сумма квадратов расстояний до его сторон [3, 4].

6. Проверьте, что точки Жергонна и Нагеля образуют пару изотомически сопряжённых точек.

7. Покажите, что центр описанной окружности и точка пересечения высот изогонально сопряжены.

Выясним, какие линии переходят в бесконечно удалённую прямую под действием рассмотренных сопряжений, т. е. найдём множества точек, для которых чевианы, их содержащие, переходят в тройки параллельных прямых.

Оказывается, в случае изогонального сопряжения ответом является описанная около треугольника окружность. В обозначениях рис. 21

$$\angle EAB = \angle ZAC = \angle ZBC = \angle ABF,$$

таким образом, чевианы  $AE$  и  $BF$  параллельны. Аналогично доказывается, что им параллельна и третья чевиана.

Для изотомического сопряжения такой линией является описанный эллипс Штейнера — эллипс, содержащий вершины

треугольника, а также точки, симметричные точке пересечения медиан (которая является центром этого эллипса) относительно середин соответствующих сторон (рис. 22) [3, 5].

Изоциркулярное преобразование — ещё одно преобразование, при помощи которого можно получать новые замечательные точки. Рассмотрим точку  $Z$ , расположенную внутри треугольника  $ABC$ . Пусть прямая  $AZ$  пересекает описанную окружность в точке  $A_1$ . В сегмент, отсекаемый стороной  $BC$ , впишем окружность, касающуюся дуги  $BC$  в точке  $A_1$ , а стороны  $BC$  — в точке  $A_2$ . Аналогично определим точки  $B_2$  и  $C_2$  (рис. 23). Прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  пересекаются в одной точке  $Z_c$ , которую мы будем называть *изоциркулярным образом* точки  $Z$ .

Доказательство корректности определения изоциркулярного преобразования использует теорему Чевы сразу в двух формулировках — в форме отношений синусов и в форме отношений отрезков, — а также следующую интересную лемму.

**Лемма Архимеда.** Если окружность вписана в сегмент и касается дуги в точке  $A_1$ , а хорды  $BC$  — в точке  $A_2$ , то прямая  $A_1A_2$  является биссектрисой угла  $BA_1C$  (рис. 24).

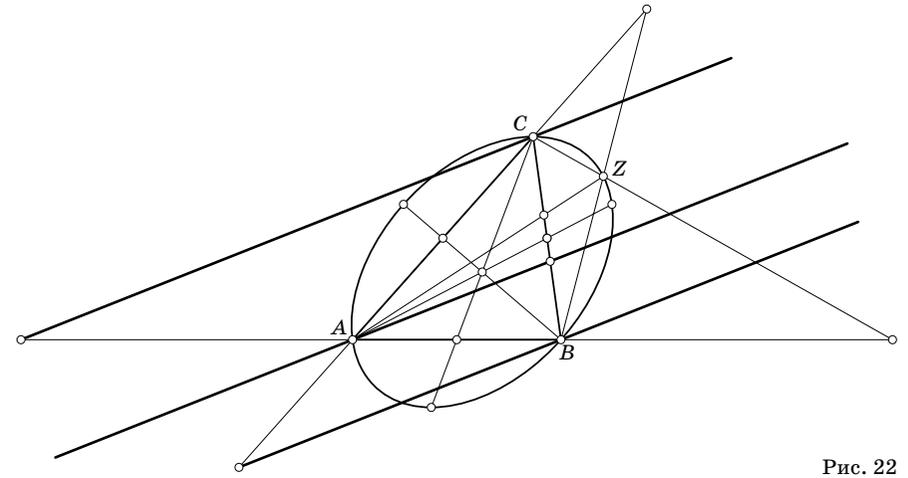


Рис. 22

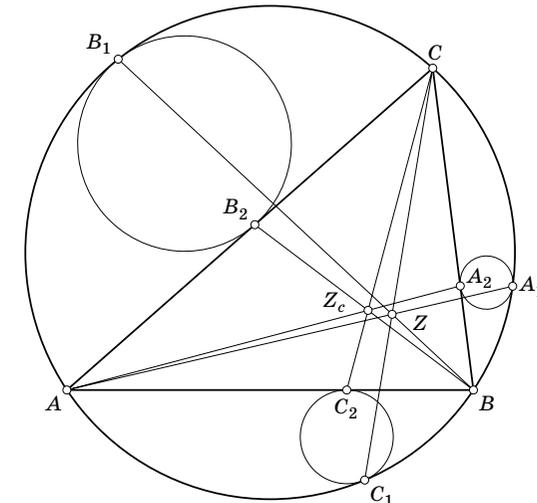


Рис. 23

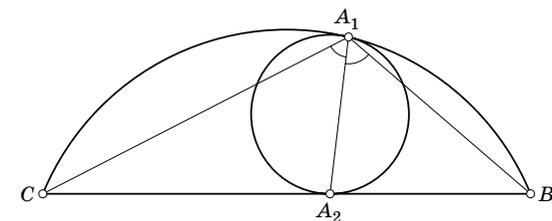


Рис. 24

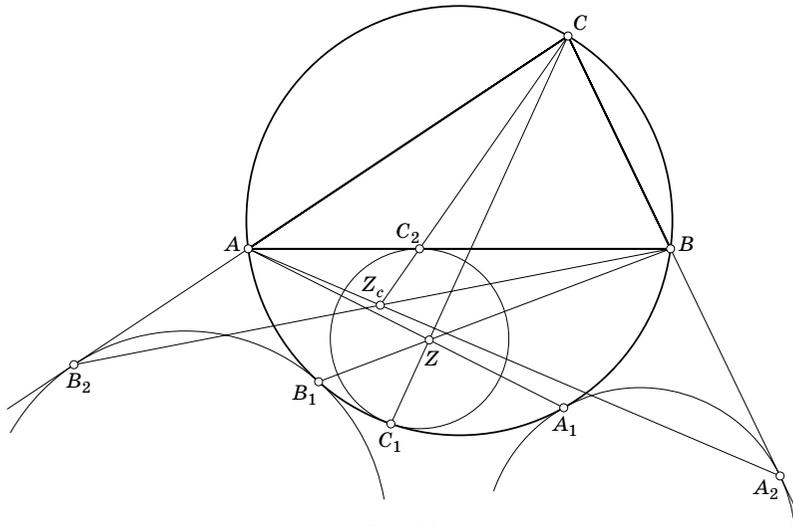


Рис. 25

8. Докажите лемму Архимеда, пользуясь тем, что биссектриса угла треугольника, вписанного в окружность, пересекает её в точке, лежащей на серединном перпендикуляре к стороне треугольника.

Пусть  $\angle BAA_1 = \alpha_1$ ,  $\angle CAA_1 = \alpha_2$ . Поскольку  $A_1A_2$  — биссектриса угла при вершине  $A_1$  треугольника  $BA_1C$ , то по свойству биссектрисы  $\frac{BA_2}{CA_2} = \frac{BA_1}{CA_1}$ , а так как треугольники  $BAA_1$  и  $CAA_1$  вписаны в одну и ту же окружность, по теореме синусов  $BA_1 = 2R \sin \alpha_1$ ,  $CA_1 = 2R \sin \alpha_2$ , и следовательно,

$$\frac{BA_2}{CA_2} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}.$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{CB_2}{AB_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}, \quad \frac{AC_2}{BC_2} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2},$$

где  $\beta_1 = \angle CBB_1$ ,  $\beta_2 = \angle ABB_1$ ,  $\gamma_1 = \angle ACC_1$ ,  $\gamma_2 = \angle BCC_1$ . Условие Чевы для прямых  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$ , таким образом, принимает вид

$$\frac{BA_2}{CA_2} \cdot \frac{CB_2}{AB_2} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}.$$

Осталось заметить, что правая часть этого равенства представляет собой выражение из условия Чевы в форме отношений синусов для прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , пересекающихся в точке  $Z$ . Следовательно,

$$\frac{BA_2}{CA_2} \cdot \frac{CB_2}{AB_2} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} = 1.$$

Отметим, что все проведённые рассуждения были сделаны для точек  $Z$ , расположенных внутри треугольника  $ABC$ . Для внешних точек  $Z$  нужно немного изменить конструкцию: рассматривать одну окружность, касающуюся описанной внутренним образом, и две — внешним (рис. 25).

9. Проверьте конкурентность прямых для внешней точки.

Изоциркулярное преобразование, хотя и не является сопряжением, всё же устроено проще, чем изотомическое и изогональное. Так, несложно показать (с использованием барицентрических координат, о которых ниже), что оно любую прямую (на проективной плоскости) переводит в прямую — такие преобразования называются *проективными*.

Подробнее о свойствах изоциркулярного преобразования можно прочитать в статье [2].

## БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Барицентрические координаты — это система координат, «привязанная» к данному треугольнику. Именно поэтому многие свойства треугольника в такой системе координат записываются значительно проще, чем, скажем, в прямоугольной системе координат. С использованием этой системы координат упрощаются и доказательства большого количества сложных теорем геометрии треугольника.

Впервые барицентрические координаты упоминаются в книге «Der barycentrische Calcul»\*) Августа Мёбиуса, опубликованной в 1827 году.

### Система материальных точек и её центр масс

*Системой материальных точек* на плоскости называется конечная совокупность пар вида  $[m_i, A_i]$ , где  $A_i$  — некоторые точки плоскости, а  $m_i$  — *массы*, некоторые действительные числа, одновременно не равные нулю ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

*Центром масс* этой системы называется точка  $Z$ , для которой выполняется равенство

$$m_1 \overrightarrow{ZA_1} + m_2 \overrightarrow{ZA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{ZA_n} = \vec{0}.$$

(Если все числа  $m_i$  были бы равны нулю, центром масс могла бы служить любая точка, и потому такие системы запрещены.)

Это понятие допускает простую физическую интерпретацию. Представим себе невесомую пластину и отметим на ней точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Затем к каждой точке с положительной массой прикрепим металлический шарик такой массы, а к каждой точке с отрицательной массой привяжем воздушный шарик, подъёмная сила которого

\*) «Барицентрическое исчисление» (нем.).

пропорциональна модулю массы (коэффициент пропорциональности, разумеется, равен  $g$ ), рис. 26. Если расположить пластину произвольным образом в пространстве и закрепить в центре масс  $Z$  при помощи шарнира, то она останется в равновесии.

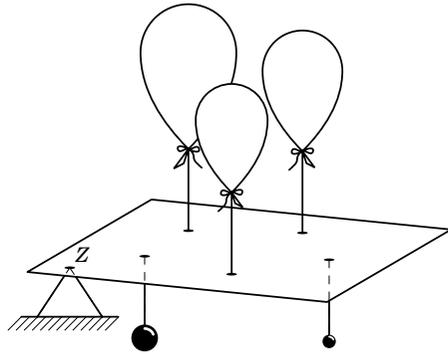


Рис. 26

В случае, когда  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0$ , центром масс  $Z$  является одна из бесконечно удалённых точек плоскости (с точки зрения физики — очень-очень далёкая точка плоскости).

Используя свойства векторов, из определения центра масс можно вывести следующие четыре свойства.

**Существование и единственность.** Для любой системы материальных точек существует единственный центр масс.

**Однородность.** Одновременное умножение масс всех точек системы на одно и то же отличное от нуля число не меняет центра масс.

**Правило рычага.** Центр масс  $Z$  системы  $[p, A], [q, B]$  расположен на прямой  $AB$  так, что  $\frac{AZ}{BZ} = \left| \frac{q}{p} \right| = \lambda$ , причём если массы одного знака, то  $Z$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $\lambda$  внутренним образом, если же эти массы различны по знаку, то точка  $Z$  делит его в отношении  $\lambda$  внешним образом. В последнем случае, если массы ещё и равны по модулю, центром масс является бесконечно удалённая точка прямой  $AB$ .

**Правило группировки.** Если разбить систему материальных точек на некоторое количество подсистем, а затем заменить каждую подсистему на её центр масс и поместить в него массу, равную сумме масс точек подсистемы, центры масс полученной и исходной систем совпадут.

|| **10.** Докажите эти свойства.

|| **11.** Каждая из бесконечно удалённых точек задаётся направлением параллельных прямых, пересекающихся в этой точке. Как определить направление, соответствующее точке  $Z$  — центру масс системы  $[m_i, A_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0$ ?

Вопросы геометрии масс детально рассматриваются в книге [1].

### Определение барицентрических координат

Рассмотрим треугольник  $ABC$ , вершины которого нагружены массами  $p, q, r$  (одновременно не равными нулю), т. е. рассмотрим систему  $[p, A], [q, B], [r, C]$ .

Построим центр масс  $Z$  геометрически. Пусть  $A_1$  — центр масс подсистемы  $[q, B], [r, C]$  (т. е. точка, делящая отрезок  $BC$  в отношении  $\left| \frac{r}{q} \right|$  в зависимости от знаков масс внутренним или внешним

образом). Пусть  $B_1$  и  $C_1$  — центры масс систем  $[r, C], [p, A]$  и  $[p, A], [q, B]$  соответственно (рис. 27). Согласно правилу группировки и свойству единственности центра масс, прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекутся в искомой точке  $Z$ .

И наоборот, если взять произвольную точку  $Z$ , провести прямые через неё и вершины треугольника до пересечения с противоположными сторонами (или их продолжениями) и найти отношения, в которых они делят стороны треугольника, то, пользуясь полученными отношениями, легко нагрузить вершины треугольника так, чтобы точка  $Z$  стала центром масс системы точек  $A, B, C$ . К примеру, если точка  $Z$  расположена внутри треугольника, то все точки пересечения соответствующих прямых со сторонами треугольника попадают

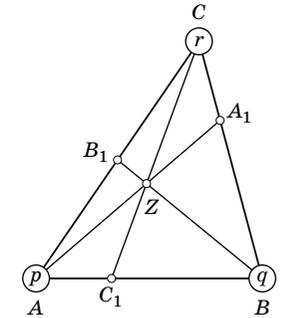


Рис. 27

внутрь сторон, и, обозначив  $\frac{AC_1}{BC_1} = \alpha, \frac{BA_1}{CA_1} = \beta$ , приходим к системе  $[1, A], [\alpha, B], [\alpha\beta, C]$ . Если же  $Z$  расположена вне треугольника и соответствующие прямые пересекают отрезок  $AC$  внешним образом, а две другие стороны треугольника — внешним, то получим систему  $[1, A], [-\alpha, B], [\alpha\beta, C]$  (нужно заменить числа  $\alpha$  и  $\beta$  противоположными по знаку).

Под записью  $Z = (p, q, r)$  (или  $Z(p, q, r)$ ) подразумевается, что точка  $Z$  является центром масс системы  $[p, A], [q, B], [r, C]$ , а тройка чисел  $(p, q, r)$  называется *барицентрическими координатами точки  $Z$  в базисном треугольнике  $ABC$* . Всякая такая тройка чисел (за исключением тройки  $(0, 0, 0)$ ) с точностью до умножения всех трёх координат на отличное от нуля число однозначно определяет некоторую

точку проективной плоскости, и наоборот, каждой точке проективной плоскости соответствует единственная тройка чисел с точностью до умножения всех трёх чисел на отличное от нуля число.

Тройкам с нулевой суммарной массой соответствуют бесконечно удалённые точки плоскости, образованные пересечением трёх параллельных прямых, выходящих из вершин базисного треугольника, тройкам, у которых сумма некоторых двух координат нулевая, — точки, лежащие на прямой, проходящей через соответствующую вершину базисного треугольника параллельно противоположной стороне. Если же имеется только одна нулевая координата, это значит, что центр масс расположен на прямой, проходящей через сторону базисного треугольника.

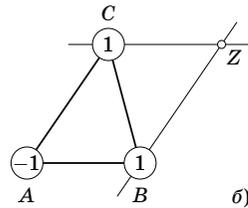
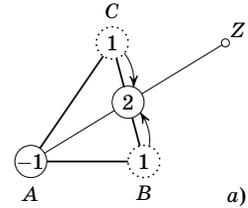


Рис. 28

Разберём следующий пример: построим точку с барицентрическими координатами  $(-1, 1, 1)$ .

Подсистему с единичными массами заменим серединой стороны  $BC$  с массой 2. Далее, правило рычага даёт ответ: искомой является точка  $Z$ , симметричная вершине  $A$  относительно этой середины (рис. 28, *a*).

Эту же точку можно построить и по-другому. Выделив подсистему  $[-1, A]$ ,  $[1, B]$ , приходим к выводу, что центр масс всей системы должен находиться на прямой, проходящей через  $C$  параллельно  $AB$  (центр масс системы из двух

точек лежит на прямой, проходящей через эти точки, даже если среди них есть и бесконечно удалённые). Если же выбрать подсистему  $[-1, B]$ ,  $[1, C]$ , то окажется, что центр масс всей системы находится на прямой, проходящей через  $B$  параллельно  $AC$ . Пересечение двух построенных прямых даёт ту же самую точку  $Z$  (рис. 28, *b*).

**12.** Постройте точку с барицентрическими координатами  $(1, 1, 1)$ . Пользуясь правилом рычага и правилом группировки, покажите, что медианы делятся точкой пересечения в отношении  $2:1$ , считая от вершин.

**13.** Постройте точки со следующими барицентрическими координатами:  $(1, 2, 3)$ ,  $(-1, 2, 3)$ ,  $(1, -2, 3)$ ,  $(1, 2, -3)$ .

Выразим барицентрические координаты точки  $Z$  через площади треугольников  $ZBC$ ,  $ZAC$ ,  $ZAB$ . Вспомним, что отношения этих площадей (см. идею доказательства теоремы Чевы, стр. 6) равны отношениям соответствующих отрезков. Воспользовавшись однородностью координат, получим, что

$$Z = (S_{ZBC}, S_{ZAC}, S_{ZAB}).$$

(Для внешних точек одну из площадей нужно брать со знаком «-».)

## Барицентрические координаты некоторых замечательных точек

Приведём теперь барицентрические координаты некоторых замечательных точек. Обычно их удаётся выразить двумя способами: через длины сторон или через углы треугольника. Переходить от одной формы к другой помогают теорема синусов —

$$a \sim \sin \alpha, \quad b \sim \sin \beta, \quad c \sim \sin \gamma,$$

в силу однородности можно заменять длину стороны на синус угла, и наоборот, — и теорема косинусов —

$$\cos \alpha \sim a(b^2 + c^2 - a^2), \quad \cos \beta \sim b(c^2 + a^2 - b^2), \quad \cos \gamma \sim c(a^2 + b^2 - c^2).$$

Какая именно форма удобнее, зависит от условия конкретной задачи.

Точка пересечения медиан

$$M = (1, 1, 1).$$

Центр вписанной окружности

$$I = (a, b, c) = (\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma).$$

Воспользовавшись тем, что биссектриса делит сторону треугольника в отношении, равном отношению соответствующих сторон треугольника, сразу получаем, что  $I = (a, b, c)$ . Как отмечалось выше, длины сторон треугольника можно заменять в барицентрических координатах на синусы соответствующих углов. Поэтому  $I = (\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma)$ .

Точка пересечения высот

$$H = \left( \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}, \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) = (\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg} \gamma).$$

В этом случае сначала удобнее выразить барицентрические координаты через углы треугольника, а затем перейти к длинам сторон.

Итак, поскольку  $CA_1 = \frac{AA_1}{\operatorname{tg} \gamma}$ ,  $BA_1 = \frac{AA_1}{\operatorname{tg} \beta}$ , то  $\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma}$  (рис. 29).

Аналогично получаем, что  $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}$ . Значит,  $H = (\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg} \gamma)$ .

Перейдём теперь к длинам сторон:

$$\begin{aligned} H &= (\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg} \gamma) = \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \frac{\sin \beta}{\cos \beta}, \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \right) = \\ &= \left( \frac{a}{a(b^2 + c^2 - a^2)}, \frac{b}{b(c^2 + a^2 - b^2)}, \frac{c}{c(a^2 + b^2 - c^2)} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}, \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right). \end{aligned}$$

Точка Жергонна

$$G = \left( \frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c} \right) = \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right).$$

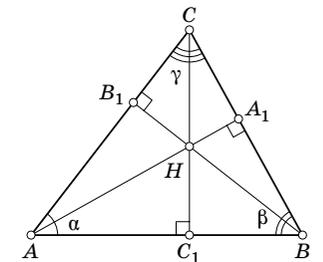


Рис. 29

Точка Нагеля

$$N = (p-a, p-b, p-c) = \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right).$$

И для точки Жергонна, и для точки Нагеля выражения для барицентрических координат через длины сторон получаются из соотношений (\*) на стр. 10. Для перехода к углам треугольника можно воспользоваться формулой

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \sim \frac{a}{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{2abc}{b^2 + 2bc + c^2 - a^2} = \frac{2abc}{(a+b+c)(b+c-a)} = \\ &= \frac{abc}{a+b+c} \cdot \frac{1}{p-a} \sim \frac{1}{p-a}. \end{aligned}$$

и аналогичными  $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \sim \frac{1}{p-b}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sim \frac{1}{p-c}$ . А можно действовать и по-другому: отрезки, на которые чевианы делят стороны, в случае точки  $G$  равны  $r \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$  и  $r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ ,  $r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  и  $r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ,  $r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  и  $r \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ , в случае точки  $N$  —  $r_a \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$  и  $r_a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ ,  $r_b \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  и  $r_b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ,  $r_c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  и  $r_c \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ , где  $r, r_a, r_b, r_c$  — радиусы вписанной и невписанных окружностей. Отношения длин этих отрезков выражаются только через тангенсы половинных углов (радиусы сокращаются).

14. Контрольный вопрос: а почему в последней формуле мы заменили  $\cos \alpha$  на сложное выражение  $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  вместо  $a(b^2 + c^2 - a^2)$ ?

Центр описанной окружности

$$\begin{aligned} O &= (a^2(b^2 + c^2 - a^2), b^2(c^2 + a^2 - b^2), c^2(a^2 + b^2 - c^2)) = \\ &= (\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma). \end{aligned}$$

Проще всего выразить координаты через углы, причём как площади соответствующих треугольников. Если исходный треугольник остроугольный, то  $\angle BOC = 2\alpha$ , если же тупоугольный, то  $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$ .

В любом случае  $S_{BOC} = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha$ . Аналогично  $S_{COA} = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\beta$ ,

$S_{AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\gamma$ . Таким образом,

$$O = (S_{BOC}, S_{COA}, S_{AOB}) = (\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma).$$

Чтобы перейти к длинам сторон, следует воспользоваться соотношением  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ .

## Определение центральной точки

Оказывается, координаты всех только что рассмотренных нами точек обладают некоторыми общими свойствами. Продемонстрируем их на примере центра описанной окружности  $O$ .

Первая координата точки  $O$  есть функция, зависящая от сторон треугольника:  $f(a, b, c) = a^2(b^2 + c^2 - a^2)$ . Вторая и третья координаты записываются с помощью этой функции так:  $f(b, c, a)$ ,  $f(c, a, b)$ . Это свойство барицентрических координат точки будем называть *циклическостью*. Оно, конечно, связано с тем, что все стороны и вершины треугольника задействованы в построении центра описанной окружности на равных правах: мы проводим серединный перпендикуляр к стороне  $BC$ , расположенной напротив вершины  $A$ , затем — серединный перпендикуляр к стороне  $CA$  — напротив вершины  $B$ , и затем — к стороне  $AB$  — напротив вершины  $C$ .

Второе свойство заключается в том, что  $f(a, b, c) = f(a, c, b)$ . Назовём его *симметрией по двум аргументам*. Оно отражает равноправие пары вершин в построении центра: можно проводить перпендикуляр к отрезку  $BC$ , но с тем же успехом можно проводить перпендикуляр и к отрезку  $CB$ .

Наконец, заметим, что существует такое действительное число  $k$ , что для любого положительного числа  $\lambda$  выполняется равенство

$$f(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^k f(a, b, c).$$

Понятно, что в нашем случае  $k = 4$ . Это свойство назовём *однородностью*. Оно говорит о том, что соответствующие точки подобных треугольников имеют одинаковые барицентрические координаты.

А теперь дадим следующее определение:

Точка называется *центральной* (или является *центром* треугольника), если её барицентрические координаты как функции длин сторон обладают свойствами цикличности, симметрии по двум аргументам и однородностью.

подавляющее большинство замечательных в интуитивном смысле точек треугольника являются центральными\*).

Во впечатляющей коллекции Кларка Кимберлинга (ознакомиться с которой может каждый, имеющий доступ к сети Интернет [6]) количество замечательных центральных точек приближается к 1000, и верхнего предела, по-видимому, здесь нет.

15. Докажите, что центральная точка в правильном треугольнике совпадает с его точкой пересечения медиан.

\*) В то время, как, например, замечательные точки Брокера (1-я и 2-я) не являются центральными по данному определению, поскольку для них не выполняется свойство симметрии по двум аргументам (а два других свойства выполняются) [4]. Это не единственный пример, когда замечательные точки появляются парами, список таких точек могут пополнить точки Наполеона, точки Ферма [4–6].

### Лемма о трёх точках и две замечательные прямые

**Лемма о трёх точках.** Если точки  $X, Y, Z$  имеют барицентрические координаты

$$(p_1, q_1, r_1), \quad (p_2, q_2, r_2), \quad (p_1+p_2, q_1+q_2, r_1+r_2),$$

то они лежат на одной прямой и  $\frac{XZ}{YZ} = \left| \frac{p_2+q_2+r_2}{p_1+q_1+r_1} \right|$ , причём точка  $Z$  расположена внутри отрезка  $XY$ , если суммы масс имеют одинаковый знак, и вне — в противном случае.

**Доказательство.** Рассмотрим систему точек  $[p_1+p_2, A], [q_1+q_2, B], [r_1+r_2, C]$ . Её центр масс находится в точке  $Z$ . Разобьём эту систему на две подсистемы:  $[p_1, A], [q_1, B], [r_1, C]$  с центром масс в точке  $X$  и суммарной массой  $p_1+q_1+r_1$  и  $[p_2, A], [q_2, B], [r_2, C]$  с центром масс в точке  $Y$  и суммарной массой  $p_2+q_2+r_2$ . По правилу группировки центр масс этой системы из двух точек по-прежнему совпадает с точкой  $Z$ . Осталось воспользоваться правилом рычага.

Доказанная лемма о трёх точках позволяет находить «замечательные прямые», на которых располагаются замечательные точки.

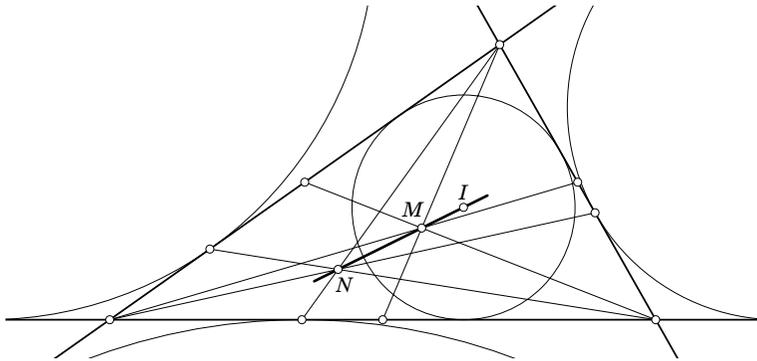


Рис. 30

**Прямая Нагеля.** Точка Нагеля  $N$ , точка пересечения медиан  $M$  и центр вписанной окружности  $I$  лежат на одной прямой, причём  $\frac{NM}{IM} = 2$  (рис. 30).

Применим лемму о трёх точках. Пусть  $X=N=(p-a, p-b, p-c)$ ,  $Y=I=(a, b, c)$ . Тогда  $Z=(p, p, p)=(1, 1, 1)=M$ ,

$$\frac{NM}{IM} = \frac{a+b+c}{p-a+p-b+p-c} = \frac{2p}{p} = 2.$$

**Прямая Эйлера.** Ортоцентр  $H$ , точка пересечения медиан  $M$  и центр описанной окружности  $O$  лежат на одной прямой, причём  $\frac{HM}{OM} = 2$  (рис. 31).

Положим  $X=H=(\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg} \gamma)$ ,  $Y=O=\left(\frac{\sin 2\alpha}{\lambda}, \frac{\sin 2\beta}{\lambda}, \frac{\sin 2\gamma}{\lambda}\right)$ , где  $\lambda = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\lambda} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \frac{\sin \alpha (\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \\ &= \frac{\sin \alpha (\cos \beta \cos \gamma - \cos(\beta + \gamma))}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \sim 1. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуются выражения для двух других координат точки  $Z$ . Таким образом,  $Z=(1, 1, 1)=M$ . Вычислим отношение  $\frac{HM}{OM}$ :

$$\begin{aligned} \frac{HM}{OM} &= \frac{\frac{\sin 2\alpha}{\lambda} + \frac{\sin 2\beta}{\lambda} + \frac{\sin 2\gamma}{\lambda}}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \\ &= \frac{\frac{\sin(\beta + \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\cos \alpha \cos \gamma} + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \\ &= \frac{\frac{\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma}{\cos \alpha \cos \gamma} + \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma) + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = 2. \end{aligned}$$

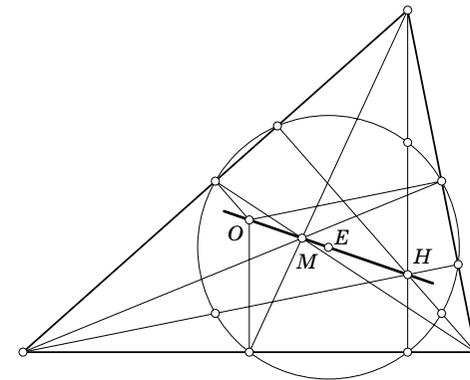


Рис. 31

**16.** Докажите, что середины сторон, основания высот треугольника и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром, лежат на одной окружности — окружности Эйлера или окружности девяти точек (см. рис. 31).

**17.** Докажите, что точка  $E$  — центр окружности Эйлера — лежит на прямой Эйлера, причём  $OE = EH$  (см. рис. 31).

**Изомимическое и изогональное сопряжения  
в барицентрических координатах**

Изомимическое сопряжение. Если точка  $Z$  имеет барицентрические координаты  $(p, q, r)$ , то барицентрические координаты точки  $Z_m$ , изомимически сопряжённой  $Z$ , выражаются следующим образом:  $Z_m = \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}\right)$ . Это утверждение очевидно: по определению изомимического сопряжения  $BA_1 = CA_2$ , где  $A_1$  — точка пересечения прямых  $AZ$  и  $BC$ , а  $A_2$  —  $AZ_m$  и  $BC$ .

18. Найдите координаты антиортоцентра  $H_m$ , точки пересечения антибиссектрис  $I_m$  и  $O_m$  — изомимического образа центра описанной окружности.

Изогональное сопряжение. Координаты точки  $Z_l$  — изогонального образа точки  $Z(p, q, r)$  — выражаются следующим образом:

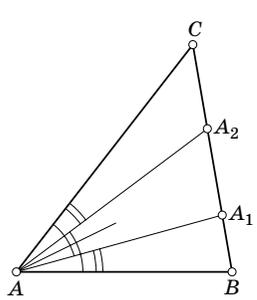


Рис. 32

$$Z_l = \left(\frac{a^2}{p}, \frac{b^2}{q}, \frac{c^2}{r}\right) = \left(\frac{\sin^2 \alpha}{p}, \frac{\sin^2 \beta}{q}, \frac{\sin^2 \gamma}{r}\right).$$

Докажем это. В обозначениях рис. 32

$$\frac{BA_2}{CA_2} = \frac{S_{BAA_2}}{S_{CAA_2}} = \frac{\frac{1}{2}c \cdot AA_2 \cdot \sin \angle BAA_2}{\frac{1}{2}b \cdot AA_2 \cdot \sin \angle CAA_2} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \angle BAA_2}{\sin \angle CAA_2} =$$

$$= \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle BAA_1} = \frac{c}{b} \cdot \frac{CA_1 \cdot \frac{\sin \angle CA_1A}{b}}{BA_1 \cdot \frac{\sin \angle BA_1A}{c}} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{q}{r}$$

(мы дважды использовали теорему синусов —  $\frac{\sin \angle CAA_1}{CA_1} = \frac{\sin \angle CA_1A}{b}$ ,  $\frac{\sin \angle BAA_1}{BA_1} = \frac{\sin \angle BA_1A}{c}$  — и равенство  $\sin \angle CA_1A = \sin \angle BA_1A$ ). Аналогично

$$\frac{CB_2}{AB_2} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{r}{p}, \quad \frac{AC_2}{BC_2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{p}{q}.$$

Воспользовавшись приведённым на стр. 19 методом вычисления барицентрических координат, находим:

$$Z_l = \left(1, \frac{AC_2}{BC_2}, \frac{AC_2}{BC_2} \cdot \frac{BA_2}{CA_2}\right) = \left(1, \frac{b^2 p}{a^2 q}, \frac{b^2 p c^2 q}{a^2 q b^2 r}\right) = \left(1, \frac{b^2 p}{a^2 q}, \frac{p c^2}{a^2 r}\right).$$

Домножив все три координаты на  $\frac{a^2}{p}$ , окончательно получаем:

$$Z_l = \left(\frac{a^2}{p}, \frac{b^2 p a^2}{a^2 q p}, \frac{p c^2 a^2}{a^2 r p}\right) = \left(\frac{a^2}{p}, \frac{b^2}{q}, \frac{c^2}{r}\right).$$

19. Найдите координаты точки Лемуана  $L = M_l$ , а также точек  $G_l$  и  $N_l$ , изогонально сопряжённых точкам Жергонна и Нагеля.

20. Ещё четыре замечательные прямые (см. также 4-ю стр. обложки).

а) Антиортоцентр  $H_m$ , точка пересечения медиан  $M$ , точка Лемуана  $L$  лежат на одной прямой, и  $\frac{H_m M}{ML} = 2$ .

б) Точка Нагеля  $N$ , точка  $I_m$ , изомимически сопряжённая центру вписанной окружности, антиортоцентр  $H_m$  и точка Жергонна  $G$  лежат на одной прямой.

в) Ортоцентр  $H$ , антиортоцентр  $H_m$  и точка  $O_m$ , изомимически сопряжённая центру описанной окружности, лежат на одной прямой.

г)  $I$  и  $O$  — центры вписанной и описанной окружностей — и точки  $G_l$  и  $N_l$ , изогонально сопряжённые точкам Жергонна и Нагеля, лежат на одной прямой.

**Изоциркулярное преобразование в барицентрических координатах**

Вычислим барицентрические координаты изоциркулярного образа  $Z_c$  точки  $Z(p, q, r)$ .

По лемме Архимеда  $A_1 A_2$  — биссектриса угла  $BA_1 C$ , поэтому  $\frac{BA_2}{CA_2} = \frac{BA_1}{CA_1}$  (см. рис. 23 и 25). Преобразуем это отношение, используя теорему синусов и рассуждения, проведённые на стр. 16:

$$\frac{BA_2}{CA_2} = \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle CAA_1} = \frac{\sin \angle BAA'_1}{\sin \angle CAA'_1} = \frac{\frac{\sin \angle AA'_1 B}{AB} \cdot BA'_1}{\frac{\sin \angle AA'_1 C}{AC} \cdot CA'_1} = \frac{b}{c} \cdot \frac{r}{q},$$

где  $A'_1$  — точка пересечения прямых  $AA_1$  и  $BC$ . Аналогично получаем равенства  $\frac{CB_2}{AB_2} = \frac{c}{a} \cdot \frac{p}{r}$  и  $\frac{AC_2}{BC_2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{q}{p}$ . Поэтому

$$Z_c = \left(1, \frac{AC_2}{BC_2}, \frac{AC_2}{BC_2} \cdot \frac{BA_2}{CA_2}\right) = \left(1, \frac{aq}{bp}, \frac{aqbr}{bpcq}\right) = \left(1, \frac{aq}{bp}, \frac{ar}{pc}\right).$$

Домножив все три координаты на  $\frac{p}{a}$ , окончательно получаем:

$$Z_c = \left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c}\right).$$

Изоциркулярное преобразование в некотором смысле является средним между изогональным и изомимическим сопряжениями, а именно,  $(F_c)^2 = F_m \circ F_l$ , т. е., действуя дважды на произвольную точку плоскости изоциркулярным преобразованием, получим такой же результат, как если бы мы сначала действовали на неё изогональным сопряжением, а затем на полученный образ изомимическим сопряжением.

Действительно, пусть точка  $Z$  имеет барицентрические координаты  $(x_0, y_0, z_0)$ . Тогда  $F_c(Z) = \left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}, \frac{z_0}{c}\right)$ ,  $(F_c)^2(Z) = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right)$ .

С другой стороны,  $F_l(Z) = \left(\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}\right)$ ,  $F_m(F_l(Z)) = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right)$ . Заметим, что порядок, в котором применяются изогональное и изотомическое сопряжения, важен.

Введём обратное изоциркулярное преобразование  $F_c^{-1}$ , так что  $F_c \circ F_c^{-1} = \text{Id} = F_c^{-1} \circ F_c$  (геометрически это означает, что сначала нужно отмечать точки пересечения прямых со сторонами треугольника, потом вписывать в сегменты окружности, касающиеся сторон в отмеченных точках, и наконец, проводить прямые из вершин в точки касания этих окружностей с описанной окружностью). Справедливо аналогичное соотношение:  $(F_c^{-1})^2 = F_l \circ F_m$ .

### Уравнение прямой. Двойственность

Найдём уравнение прямой в барицентрических координатах. Выберем две точки  $X(p_1, q_1, r_1)$  и  $Y(p_2, q_2, r_2)$ . По лемме о трёх точках на прямой  $XY$  лежит также и любая точка  $Z(\lambda p_1 + \mu p_2, \lambda q_1 + \mu q_2, \lambda r_1 + \mu r_2)$  (числа  $\lambda$  и  $\mu$  не равны одновременно нулю). При этом

$$\frac{XZ}{YZ} = \left| \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{p_2 + q_2 + r_2}{p_1 + q_1 + r_1} \right|,$$

в зависимости от знака выражения  $\frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{p_2 + q_2 + r_2}{p_1 + q_1 + r_1}$  точка  $Z$  делит отрезок  $XY$  внутренним или внешним образом. Понятно, что варьируя значения  $\lambda$  и  $\mu$ , мы можем так получить любую точку на прямой  $XY$ . Ли не ей на я зависимости координат  $X$ ,  $Y$  и координат точки  $Z$ , «пробегающей» по всей прямой  $XY$ , наводит на мысль, что уравнение прямой  $XY$  стоит поискать среди линейных выражений

$$kx + ly + mz = n.$$

Попробуем подобрать коэффициенты  $k, l, m, n$ . Во-первых, в силу однородности для любого  $v \neq 0$  вместе с тройкой  $(x, y, z)$  уравнению должна удовлетворять и тройка  $(vx, vy, vz)$ . Поэтому  $n = 0$ . Во-вторых, поскольку точки  $X$  и  $Y$  лежат на прямой  $XY$ , должны выполняться равенства

$$\begin{cases} kp_1 + lq_1 + mr_1 = 0, \\ kp_2 + lq_2 + mr_2 = 0. \end{cases} \quad (**)$$

Уравнений — два, а неизвестных — три. Поэтому мы сумеем определить из этой системы коэффициенты  $k, l, m$  лишь с точностью до некоторого действия (в нашем случае — с точностью до умножения всех коэффициентов на некоторое число). Возможны два случая:

либо  $k = 0$ , либо  $k \neq 0$ . При  $k = 0$  получаем систему

$$\begin{cases} lq_1 + mr_1 = 0, \\ lq_2 + mr_2 = 0, \end{cases}$$

откуда  $q_1 r_2 - q_2 r_1 = 0$ . Если же  $k \neq 0$ , то  $q_1 r_2 - q_2 r_1 \neq 0$  (проверьте!). А поскольку мы всё равно ищем решение  $(k, l, m)$  с точностью до умножения на некоторое число, положим  $k = q_1 r_2 - q_2 r_1$ . Система (\*\*\*) тогда переписывается в виде

$$\begin{cases} (q_1 r_2 - q_2 r_1) p_1 + l q_1 + m r_1 = 0, \\ (q_1 r_2 - q_2 r_1) p_2 + l q_2 + m r_2 = 0. \end{cases}$$

Решить её уже не составляет труда. Получаем:

$$l = r_1 p_2 - r_2 p_1, \quad m = p_1 q_2 - p_2 q_1.$$

Осталось проверить, что уравнению

$$(q_1 r_2 - q_2 r_1)x + (r_1 p_2 - r_2 p_1)y + (p_1 q_2 - p_2 q_1)z = 0$$

действительно удовлетворяют все точки  $Z$  прямой  $XY$  и только они.

|| **21.** Прodelайте это.

Заметим, что попутно мы выяснили интересный факт: как и сами барицентрические координаты точек, коэффициенты в уравнении прямой определены с точностью до умножения на ненулевое число. Это обстоятельство лежит в основе проективной двойственности — соответствия между точками и прямыми проективной плоскости: точке  $(k, l, m)$  ставится в соответствие прямая  $kx + ly + mz = 0$ , и наоборот. При этом запрещены как «точка»  $(0, 0, 0)$ , так и «прямая» с уравнением  $0x + 0y + 0z = 0$ .

При двойственности сохраняется «отношение принадлежности»: если точка  $A$  лежит на прямой  $a$ , то прямая  $A^a$  (двойственная точке  $A$ ) проходит через точку  $a^a$  (двойственную прямой  $a$ ). Факт пересечения трёх прямых  $p_1 x + q_1 y + r_1 z = 0$ ,  $p_2 x + q_2 y + r_2 z = 0$ ,  $p_3 x + q_3 y + r_3 z = 0$  в одной точке и факт принадлежности трёх точек  $(p_1, q_1, r_1)$ ,  $(p_2, q_2, r_2)$ ,  $(p_3, q_3, r_3)$  одной прямой записываются одинаково: система

$$\begin{cases} p_1 x + q_1 y + r_1 z = 0, \\ p_2 x + q_2 y + r_2 z = 0, \\ p_3 x + q_3 y + r_3 z = 0 \end{cases}$$

должна иметь решение, отличное от  $(0, 0, 0)$  (т. е. на самом деле бесконечно много решений). По-другому это можно записать так:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = p_1 q_2 r_3 + q_1 r_2 p_3 + r_1 p_2 q_3 - r_1 q_2 p_3 - q_1 p_2 r_3 - p_1 r_2 q_3 = 0$$

(определитель равен нулю).

Проиллюстрируем двойственность на примере. Рассмотрим теорему о прямой Эйлера: точки  $H$ ,  $O$ ,  $M$  лежат на одной прямой. Двойственная теорема звучит так: прямые  $H^A$ ,  $O^A$ ,  $M^A$  пересекаются в одной точке.

Отметим, что прямая с уравнением  $x+y+z=0$ , двойственная точке  $M(1, 1, 1)$ , является бесконечно удалённой прямой, поскольку для любой точки, лежащей на этой прямой, сумма барицентрических координат равна нулю (см. стр. 20). Поэтому полученный выше факт можно переформулировать следующим образом: прямые  $O^A$  и  $H^A$  параллельны.

Прямую, двойственную точке  $Z(k, l, m)$ , легко построить геометрически. Для этого сначала проведём через точку  $Z$  три чевианы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Точки пересечения прямых  $A_1B_1$  и  $AB$ ,  $B_1C_1$  и  $BC$ ,  $C_1A_1$  и  $CA$  лежат на одной прямой. Этот факт представляет собой знаменитую теорему Дезарга, одну из основных теорем проективной геометрии (рис. 33). Его несложно получить, используя выведенное уравнение прямой. Покажите, что точки пересечения из теоремы Дезарга имеют координаты  $(0, -l, m)$ ,  $(k, 0, -m)$ ,  $(-k, l, 0)$ , и убедитесь, что определитель, составленный из их координат,

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} + \frac{z}{m} = 0.$$

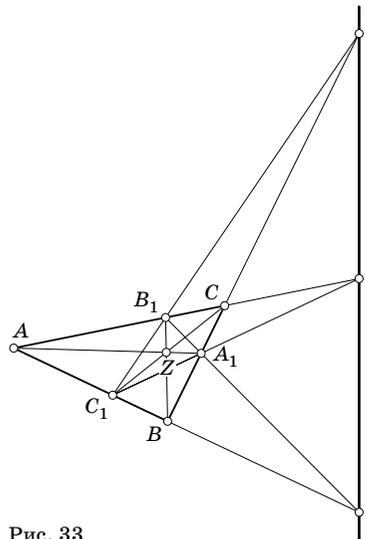
равен нулю, а уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид  $lx + ky + mz = 0$ , или, с учётом однородности,

В этой конструкции точка  $Z$  называется *полюсом*, а построенная прямая — *полярной*. Прямая, двойственная точке  $Z(k, l, m)$ , задаётся уравнением  $kx + ly + mz = 0$ , а полярная точки  $Z_m\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{l}, \frac{1}{m}\right)$  имеет то же уравнение. Итак, прямая, двойственная точке  $Z$ , есть полярная точки  $Z_m$  — изотомического образа точки  $Z$ .

### Изоциркулярное преобразование и бесконечно удалённая прямая

Как уже упоминалось на стр. 17, изоциркулярное преобразование является проективным, т. е. переводит точки, лежащие на одной прямой, в точки, лежащие на одной прямой. Другими словами, изоциркулярное преобразование переводит прямые в прямые (на проектив-

Рис. 33



ной плоскости). Докажем это. Рассмотрим прямую, задаваемую уравнением  $px + qy + rz = 0$ . Каждую точку  $Z(x_0, y_0, z_0)$ , лежащую на ней, изоциркулярное преобразование переводит в точку  $Z_c\left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}, \frac{z_0}{c}\right)$ .

Для них

$$apx + bqu + crz = px_0 + qy_0 + rz_0 = 0.$$

Таким образом, изоциркулярное преобразование переводит прямую с уравнением  $px + qy + rz = 0$  в прямую с уравнением  $apx + bqu + crz = 0$ .

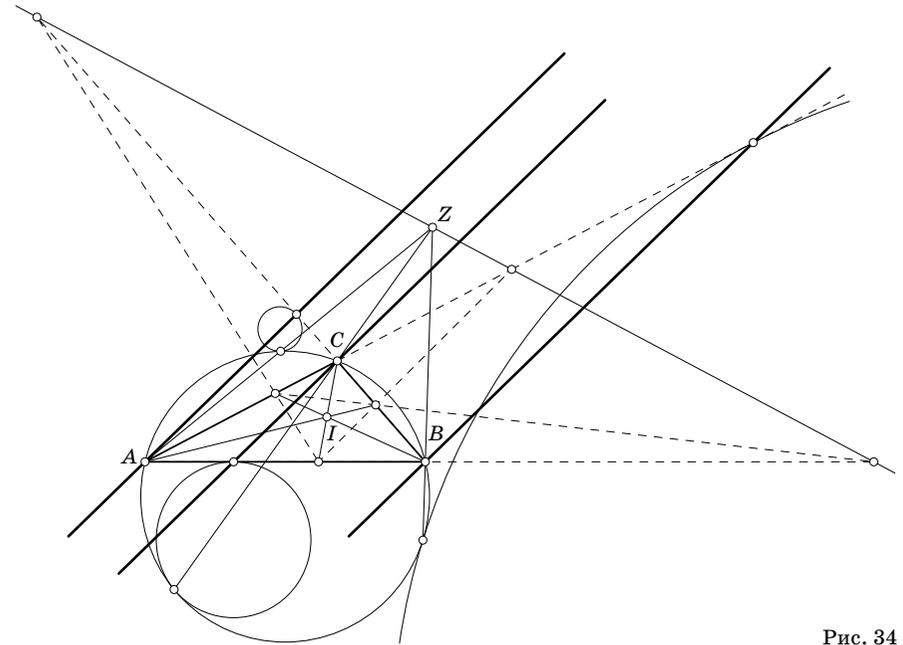


Рис. 34

Посмотрим, какая прямая переходит при изоциркулярном преобразовании в бесконечно удалённую прямую. Чтобы прямая, задаваемая уравнением  $apx + bqu + crz = 0$ , являлась бесконечно удалённой (с уравнением  $x + y + z = 0$ ), должны выполняться равенства  $ap = bq = cr = 1$ . Таким образом, искомой является прямая с уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

— полярная центра вписанной окружности  $I$  (или прямая, двойственная  $I_m$ , что равносильно), рис. 34.

|| 22. Покажите, что изоциркулярное преобразование переводит бесконечно удалённую прямую в полярную точки  $I_m$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Геометрия треугольника, наравне со многими другими разделами элементарной математики, даёт возможность почувствовать красоту математики вообще и может стать для кого-то началом пути в «большую науку». Кроме того, каждый любитель геометрии

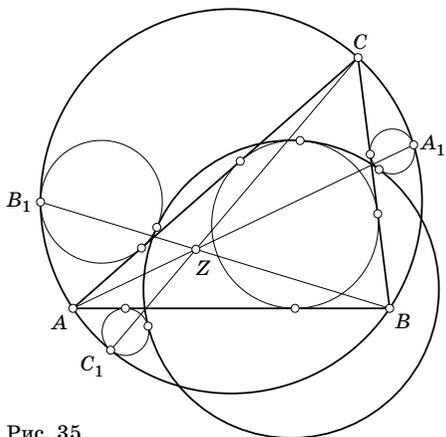


Рис. 35

треугольника имеет шанс открыть нечто новое и пополнить её сокровищницу собственной драгоценной находкой, ибо геометрия поистине неисчерпаема!

Чтобы не быть голословным, приведу один пример, тем более что он связан с одной из рассмотренных нами выше тем. А именно, вернёмся к рис. 23.

Несколько лет назад один из знатоков элементарной геометрии Лев Емельянов открыл и доказал [7], что если провести на этом рисунке окружность, касающуюся внешним образом трёх окружностей, вписанных

в сегменты, то она всегда будет касаться вписанной в треугольник окружности (вне зависимости от выбора начальной точки  $Z$ , расположенной внутри треугольника), рис. 35!

Таким образом, выражаясь возвышенно, на небосводе геометрии треугольника зажглась ещё одна звезда первой величины.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Балк, В. Болтянский. Геометрия масс. — М.: Наука, 1987.
- [2] А. Мякишев. О некоторых преобразованиях, связанных с треугольником // Математическое образование. № 1 (8). 1999.
- [3] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001.
- [4] В. Прасолов. Точки Брокера и изогональное сопряжение. — М.: МЦНМО, 2000. — (Библиотека «Математическое просвещение». Вып. 4).
- [5] С. Kimberling. Triangle Centers and Central Triangles. — Winnipeg, 1998.
- [6] С. Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers. — <http://www2.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>
- [7] L. Emelyanov. A Feuerbach Type Theorem on Six Circles // Forum Geometricorum. Vol. 1. 2001. — <http://forumgeom.fau.edu/>

## БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

### ВЫПУСК 1

В. М. Тихомиров. Великие математики прошлого и их великие теоремы.

### ВЫПУСК 2

А. А. Боллбрух. Проблемы Гильберта (100 лет спустя).

### ВЫПУСК 3

Д. В. Аносов. Взгляд на математику и нечто из неё.

### ВЫПУСК 4

В. В. Прасолов. Точки Брокера и изогональное сопряжение.

### ВЫПУСК 5

Н. П. Долбилин. Жемчужины теории многогранников.

### ВЫПУСК 6

А. Б. Сосинский. Мыльные плёнки и случайные блуждания.

### ВЫПУСК 7

И. М. Парамонова. Симметрия в математике.

### ВЫПУСК 8

В. В. Острик, М. А. Цфасман. Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые.

### ВЫПУСК 9

Б. П. Гейдман. Площади многоугольников.

### ВЫПУСК 10

А. Б. Сосинский. Узлы и косы.

### ВЫПУСК 11

Э. Б. Винберг. Симметрия многочленов.

### ВЫПУСК 12

В. Г. Сурдин. Динамика звёздных систем.

### ВЫПУСК 13

В. О. Бугаенко. Уравнения Пелля.

### ВЫПУСК 14

В. И. Арнольд. Цепные дроби.

### ВЫПУСК 15

В. М. Тихомиров. Дифференциальное исчисление (теория и приложения).

### ВЫПУСК 16

В. А. Скворцов. Примеры метрических пространств.

### ВЫПУСК 17

В. Г. Сурдин. Пятая сила.

### ВЫПУСК 18

А. В. Жуков. О числе  $\pi$ .

### ВЫПУСК 19

А. Г. Мякишев. Элементы геометрии треугольника.