Магазин «Математическая книга» в МЦНМО

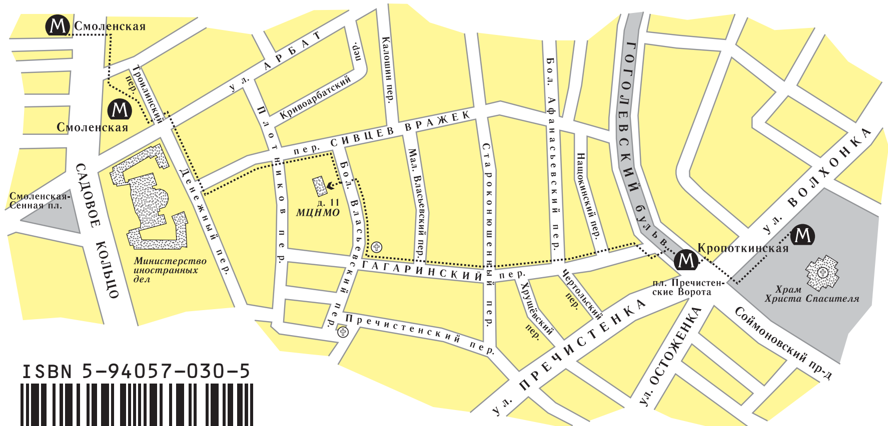
В магазине представлен наиболее полный ассортимент книг издательства МЦНМО. Эти книги продаются по издательским ценам. Здесь также можно найти книги по математике ведущих издательств, таких как «Мир», Физматлит, УРСС, «Факториал», «Регулярная и хаотическая динамика».

В отделе школьной литературы представлен широкий ассортимент книг для школьников, учителей, руководителей математических кружков. В отделе вузовской и научной литературы можно найти учебники и научные монографии ведущих российских и зарубежных математиков. В магазине также имеются отделы «книга — почтой» и букинистический.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до ст. м. «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком (см. схему).

Телефон для справок: 241 72 85.

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья (летом — кроме субботы и воскресенья) с 11^{30} до 20^{00}.



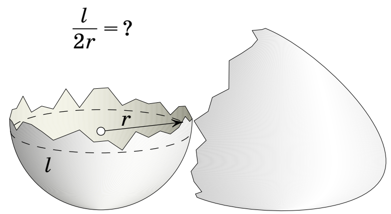
ISBN 5-94057-030-5
9 785940 570301

E-mail: biblio@mccme.ru
http://biblio.mccme.ru/

Библиотека
«Математическое просвещение»

А. В. Жуков

О ЧИСЛЕ π



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2002

Серия основана в 1999 году.

Библиотека
«Математическое просвещение»

Выпуск 18

А. В. Жуков

О ЧИСЛЕ π

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2002

УДК 51(09)
ББК 22.1
Ж86

Аннотация

Изучение числа π — задача, интересующая математиков на протяжении нескольких тысячелетий. В этой брошюре излагается история вычислений числа π, начиная от Архимеда и заканчивая новейшими сверхэффективными алгоритмами. Рассказывается также о различных проблемах, связанных с этим числом, некоторые из которых пока остаются нерешёнными.

Брошюра написана по материалам лекции, прочитанной автором 22 декабря 2001 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов.

Для широкого круга читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей...

Издание осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского комитета образования.

ISBN 5-94057-030-5

Жуков Александр Владимирович.

О числе π.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»).
М.: МЦНМО, 2002. — 32 с.: ил.

Редактор *Е. Ю. Смирнов*. Техн. редактор *М. Ю. Панов*.

Лицензия № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 11/VI 2002 года. Формат бумаги $60\times 88\ ^1/_{16}$. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 2,00. Усл. печ. л. 1,96. Уч.-изд. л. 1,81. Тираж 3141 экз. Заказ 1988.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

ВВЕДЕНИЕ

Все знают, что длина окружности больше её диаметра в одно и то же, не зависящее от самой окружности, число раз. К этому выводу можно прийти, задавшись вопросом: почему все окружности похожи друг на друга? Для похожих, или, как говорят математики, подобных фигур естественно предположить пропорциональность их линейных размеров. Так, для двух произвольных окружностей с длинами C_1 и C_2 и диаметрами d_1 и d_2 соответственно мы вправе ожидать выполнение равенства $\frac{C_1}{C_2}=\frac{d_1}{d_2}$. По свойству пропорции отсюда получаем $\frac{C_1}{d_1}=\frac{C_2}{d_2}$. Осталось только обозначить последнее отношение буквой π и заключить, что длина C произвольной окружности диаметра d может быть вычислена по формуле $C=\pi d$. Конечно же, эти рассуждения носят лишь правдоподобный характер, поскольку основываются на интуитивном представлении о длине окружности.

То, что отношение длины окружности к её диаметру постоянно, было известно ещё в глубокой древности. Первое обозначение этого числа греческой буквой π содержится в работе «Synopsis Palmoriorum Matheseos» («Обозрение достижений математики») английского преподавателя Уильяма Джонса (1675—1749), вышедшей в 1706 году. Обозначение π для отношения длины окружности к диаметру широко распространилось после того, как его стал использовать в своих трудах Леонард Эйлер (1707—1783).

ПРЕДЫСТОРИЯ ЧИСЛА π

Вычисления числа π претерпели удивительную эволюцию — от наивных оценок древних, тысячелетия потративших для того, чтобы определить первые два знака после запятой этого числа, до миллиардов знаков π, полученных в наши дни.

Из математических текстов древних вавилонян (3—2 тысячелетия до н. э.) вытекает такое соотношение: $S=\frac{C^2}{12}$, где S — площадь круга, а C — длина окружности. Способ, применявшийся для вывода этой формулы, неизвестен. Если в неё подставить выражение для площади круга $S=\pi r^2$ и длины окружности $C=2\pi r$, то из равенства $\pi r^2=\frac{(2\pi r)^2}{12}$ получим оценку для числа π, которую использовали древние вавилоняне. Они полагали, что π равно трём.

Более точное значение для числа π было получено в Древнем Египте. В Лондоне и Нью-Йорке хранятся две части древнеегипетского папируса, который известен как «папирус Ринда» (или Райнда), по имени Генри Ринда — мецената, приобрётшего папирус в 1858 году (в год его обнаружения). Эту древнюю рукопись относят к периоду между 2000 и 1700 годами до н. э.

В папирусе Ринда приводятся решения различных практических задач. Там можно прочитать «наставление, как вычислить круглый хлебный амбар», имеющий форму цилиндра с диаметром основания 9 локтей (локоть — старинная мера длины, немногим менее 0,5 м). Для вычисления площади основания предлагается такой рецепт: «От 9 отними $\frac{1}{9}$, т. е. 1. Получится 8. Умножь 8 на 8. Смотри: это 64. Ты правильно нашёл».

Здесь сформулировано такое правило для определения площади круга. Эта площадь S равна площади квадрата, сторона которого равна диаметру круга d, уменьшённому на $\frac{1}{9}$ своей длины, т. е. $S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, и значит, $\pi = 3{,}1604...$ Из каких соображений получена эта формула? Неизвестно.

Неизвестно также происхождение множества других содержащихся в древних источниках математических «рецептов».

Среди примечательных результатов предыстории числа π отметим довольно грубое приближение $\pi \approx 3\frac{1}{8}$, которым пользовался известный римский архитектор Витрувий (живший в I в. до н. э.) (ему приходилось проектировать сооружения внушительных размеров, например, знаменитый Римский театр, и надо полагать, что используемое им грубое значение для π приводило к недочётам в строительстве), и выдающийся результат китайского математика и астронома Цзу Чунчжи (V в. н. э.) $\pi \approx \frac{355}{113}$, дающий семь точных десятичных знаков числа π.

ЭРА ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Найти одно научное доказательство для меня
важнее, чем овладеть всем персидским царством.
Демокрит

Цивилизация древних эллинов подарила миру один из самых значительных подарков в истории человечества — доказательную математику. На смену неизвестно откуда взявшимся вычислительным

рецептам древних умельцев и мастеров пришли строгие рассуждения математиков.

Идеи Антифона и Бризона

Попытку осмыслить понятие длины окружности одним из первых предпринял философ Антифон, живший в Греции в V в. до н. э. В «Истории геометрии» Евдема (IV в. до н. э.) так описывается его способ определения длины окружности:

«Начертив круг, он вписал в него такой правильный многоугольник, который мы умеем вписать. Пусть это будет квадрат. Потом он разделил каждую сторону квадрата пополам и через точки деления провёл прямые, перпендикулярные к сторонам до пересечения с окружностью. Очевидно, они делят сегменты круга на две равные части (рис. 1). Затем он соединил полученные точки с концами сторон квадрата так, что получились четыре треугольника, и вся образовавшаяся фигура стала правильным восьмиугольником...». Продолжая этот процесс дальше, Антифон получает 16-угольник, 32-угольник, 64-угольник и т. д. «Поступает он так, пока не исчерпает весь круг, — пишет Евдем. — И Антифон заключает, что таким образом будет вписан многоугольник, периметр которого можно рассматривать как длину окружности».

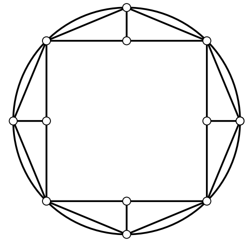


Рис. 1

Подход Антифона к определению длины окружности вызвал жаркие споры среди учёных Древней Греции. Симпликий (VI в. н. э.) в комментариях к «Истории геометрии» Евдема писал по этому поводу, что «мы никогда не достигнем окружности круга, даже если бы деление продолжалось до бесконечности». Что же смутило Симпликия и его единомышленников?

Интуитивное понятие предела, на котором основана конструкция Антифона, чревата хитроумными ловушками, о чём свидетельствует следующий древний софизм (неверное утверждение, производящее впечатление правильного):

«Теорема». В любом треугольнике одна из сторон равна сумме двух других.

«Д о к а з а т е л ь с т в о». Пусть в рассматриваемом треугольнике ABC точки D, E, F — середины сторон (рис. 2). По свойству средних линий треугольника $DF = \frac{1}{2}BC$ и $EF = \frac{1}{2}AB$, так что длина ломаной $ADFEC$ равна сумме длин сторон AB и AC. Если далее взять середины

G, H, I, J сторон двух новых треугольников ADF и FEC, то точно так же можно показать, что длина ломаной $AGKHFILJC$ равна длине ломаной $ADFEC$ и, следовательно, равна сумме длин сторон AB и AC. Такой процесс измельчения ломаной можно продолжать сколь угодно долго, но на каждом шаге этого процесса длина всех последовательно образованных ломаных равна $AB+BC$. Длина отрезков, составляющих ломаные линии, постоянно уменьшается, их концы всё более и более прижимаются к основанию AC, и в пределе периметр ломаных сливается с отрезком AC. Следовательно, $AB+BC=AC$.

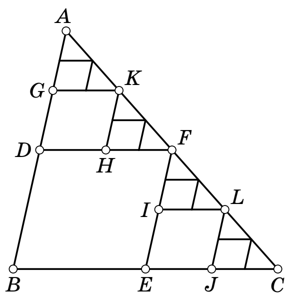


Рис. 2

Итак, кажущиеся интуитивно ясными выводы о результатах бесконечного процесса могут отстоять от истины довольно далеко.

Действительно ли стремится к пределу последовательность периметров вписанных в окружность правильных многоугольников? А если стремится, то где гарантия того, что этот предел непременно совпадёт с длиной окружности? Не случится ли так, что периметры многоугольников стремятся к какому-то пределу, а длина окружности при этом останется чем-то недосягаемым?

Корректные ответы на эти вопросы были даны сравнительно недавно, когда появились строгие методы математического анализа (XVII—XVIII вв.). Удивительно, что за несколько тысячелетий до этого, на самой заре становления точного знания, учёные уже пытались «нащупывать» приёмы, обуздывающие норов коварной бесконечности.

Одну из плодотворных идей в этом направлении высказал пифагореец Бризон (V в. до н. э.). Он предложил для нахождения длины окружности не только вписывать в круг (по способу Антифона), но и описывать около него соответствующие правильные многоугольники (рис. 3). Длина окружности всегда будет заключена между периметрами вписанного и описанного многоугольников и может быть установлена тем точнее, чем больше сторон у этих многоугольников.

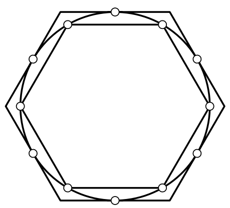


Рис. 3

Если периметры вписанных многоугольников стремятся к величине A, а периметры описанных многоугольников — к величине B, то длина окружности C должна находиться между этими двумя числами: $A \leqslant C \leqslant B$. Если вдруг окажется, что $A=B$, то длине окружности C

ничего не остаётся делать, как совпасть с указанными пределами: $A=C=B$. Современные методы анализа позволяют дать этим рассуждениям строгое обоснование (см. Приложение, с. 29).

Ну а коль скоро идея верна, то можно принять следующее определение длины окружности:

> Длиной окружности называется предел периметров правильных вписанных в окружность многоугольников при неограниченном возрастании количества их сторон.

Или такое:

> Длиной окружности называется предел периметров правильных описанных около окружности многоугольников при неограниченном возрастании количества их сторон.

«Измерение круга» Архимеда

Дробь $\frac{22}{7}$ часто называют «архимедовым числом». Здесь имеется давняя традиция. Например, из знаменитой «Арифметики» (1703) Леонтия Магницкого (1669—1739), сыгравшей исключительную роль в становлении точного знания в России, мы узнаём, что «в колёсах же пропорция архимедова диаметра ко окружности как 7 к 22».

Многие ошибочно полагают, будто заслуга Архимеда состоит лишь в обнаружении приближённого равенства $\pi \approx \frac{22}{7}$. На самом деле Архимеду удалось не только найти это довольно хорошее приближение для числа π, но и, что гораздо важнее, определить точность этого приближения, т. е. указать узкий промежуток числовой оси, которому принадлежит отношение длины окружности к её диаметру. В работе «Измерение круга», чудом дошедшей до нас благодаря стараниям многочисленных переписчиков, Архимед доказывает цепочку неравенств, которая в современных обозначениях выглядит так:

$$3\frac{10}{71} < \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \pi < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7},$$

или $3{,}1409096... < \pi < 3{,}1428265...$ Свои выводы Архимед формулирует в виде теоремы:

> «Периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше одной седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых» ([1], с. 185—191).

Как видим, «архимедово число» $\frac{22}{7}$ приближает число π с избытком, и точность такого приближения равна 0,002. Архимед нашёл три точных знака числа π: $\pi = 3{,}14...$ Именно эти три знака чаще всего используются нами в несложных повседневных расчётах.

Сделать точные выводы Архимеду помогли вписанные и описанные многоугольники. Отправляясь от вписанного в заданную окружность и описанного около неё правильных шестиугольников, Архимед затем исследует правильные 12-угольники, 24-угольники, 48-угольники, 96-угольники. При этом Архимед проявляет чудеса изобретательности. Так, для оценки отношения диаметра окружности d к стороне a_6 правильного описанного шестиугольника он привлекает неравенство $\frac{d}{a_6} > \frac{265}{153}$. С высоты сегодняшних знаний мы знаем, что $\frac{d}{a_6} = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$, но во времена Архимеда ещё не было тригонометрических функций. Получается, что в своих расчётах Архимед подобрал приближение для числа $\sqrt{3}$ в виде обыкновенной дроби $\frac{265}{153}$. Это приближение имеет поразительно высокую точность:

$$\sqrt{3} - \frac{265}{153} < 0{,}000025.$$

В другом месте он воспользовался оценкой $\frac{1351}{780}$, ещё более точно приближающей число $\sqrt{3}$ с избытком:

$$\frac{1351}{780} - \sqrt{3} < 0{,}000001.$$

Как Архимед мог получить такие точные приближения? Об этом можно только догадываться. Академик С. Н. Бернштейн в комментариях к работе Архимеда ([2], с. 224) обращает внимание, например, на такой факт. Запишем число $\sqrt{3}$ в виде цепной дроби (см., например, [3]):

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}.$$

Если оборвать бесконечную цепочку в этом выражении на 9-м звене,

а затем преобразовать его к обыкновенной дроби, то получим $\frac{265}{153}$. Если же оборвать цепочку на 12-м звене, то получим $\frac{1351}{780}$. Удивительное совпадение!

Архимед достоин восхищения ещё и потому, что свои высокоточные расчёты с дробями, а также выкладки по извлечению квадратных корней из больших чисел, он проводил в неудобной с точки зрения современного человека системе нумерации. Каким способом пользовался Архимед для приближённого извлечения квадратных корней — неизвестно. В сложных выкладках Архимеда очень легко запутаться.

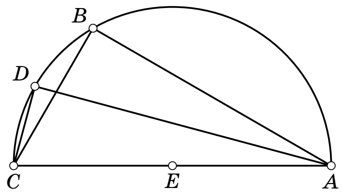


Рис. 4

Упражнение 1. Попробуйте повторить рассуждения Архимеда в решении следующей задачи. На рис. 4 изображена дуга окружности с центром в точке E и диаметром AC. BC — сторона вписанного в эту окружность правильного шестиугольника, а DC — сторона вписанного правильного 12-угольника. Архимед подбирает величину диаметра окружности таким образом, чтобы для величины $\frac{AB}{BC}$ была справедлива довольно точная оценка $\frac{AB}{BC} < \frac{1351}{780}$. Для этого он полагает $AC = 1560$ (убедитесь, что при таком значении диаметра величина AB^2 отличается от величины $\left(\frac{1351}{780}BC\right)^2$ всего на единицу!). Исходя из этих числовых данных, докажите неравенство

$$\frac{AC}{CD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

(учтите, что Архимед тригонометрическими функциями не пользовался).

Начало удивительного соревнования

Созданный древнегреческими математиками метод вычисления длины окружности посредством вписанных и описанных многоугольников оставался основным на протяжении почти двух тысяч лет.

Клавдий Птолемей (ок. 100—178) для вписанного правильного 720-угольника получает $\pi \approx \frac{377}{120} \approx 3{,}14167$. Китайский математик Лю Хуэй (III—IV вв. н. э.) для вписанного 3072-угольника находит

$\pi \approx 3{,}14159$. Самаркандский математик Гияс ад-Дин Джемшид ал-Каши (XIV—XV вв.) в «Трактате об окружности» (1424) ставит задачу с интригующим условием: выразить окружность через диаметр с такой точностью, чтобы погрешность в длине окружности, диаметр которой равен 600 000 диаметров Земли, не превосходила толщины волоса» (примерно 0,5 мм). Для этой цели он определяет число π с точностью до 16 верных десятичных знаков: $\pi \approx 3{,}14159265358979325$, попутно указывая, что «всей истины этого*) не знает никто, кроме Аллаха». Ал-Каши последовательно расчитывает вписанные многоугольники, начиная с треугольника и дойдя до 805 306 368-угольника**). Полученная ал-Каши точность в измерении окружности была достигнута и превзойдена европейскими математиками лишь в конце XVI в. В 1597 году голландский математик Адриан ван Роомен (1561—1615) публикует свои результаты по вычислению 17 десятичных знаков числа π, для чего применяет 1 073 741 824-угольник***). На скрупулёзные вычисления Адриан ван Роомен потратил несколько лет.

Однако рекорд фантастического прилежания и неимоверной точности побил профессор математических и военных наук Лейденского университета Лудольф ван Цейлен (1539—1610). На протяжении десяти лет, удваивая по методу Архимеда число сторон вписанных и описанных многоугольников и дойдя до 32 512 254 720-угольника, он вычислил 20 точных десятичных знаков числа π. Своё сочинение с изложением результатов в 1596 году профессор завершил патетической фразой: «У кого есть охота, пусть пойдёт дальше». И как бы в доказательство того, что «охота пуще неволи» и лучшего охотника, чем он сам, во всём мире не сыскать, Лудольф ван Цейлен опять ринулся вычислять очередные точные знаки числа π, впоследствии доведя их количество до 35. Эти знаки он завещал выбить на своём надгробном камне. В память о неординарном вычислителе современники ещё долгое время называли π числом Лудольфа ([2], с. 54—55).

Отдавая должное мастерству и поистине самоотверженному труду математиков этого периода, посвящавших годы своей жизни, или даже всю жизнь, вычислению точных знаков числа π, всё же нужно признать, что их результаты носили скорее спортивный, чем научный характер. Если, например, рассчитать длину экватора сферы, вмещающей известную нам часть Вселенной (радиус сферы $5 \cdot 10^{26}$ м), используя при этом найденное Лудольфом значение π, то погрешность не превысит одной миллионной доли миллиметра!

*) Точного значения π.
**) $805\,306\,368 = 3 \cdot 2^{28}$.
***) $1\,073\,741\,824 = 2^{30}$.

Метод вписанных и описанных многоугольников достиг своего наивысшего развития в работах голландских математиков Виллеброрда Снеллия (1580—1626) и Христиана Гюйгенса (1629—1695). Тонкие геометрические рассуждения позволили им получить более точные результаты при меньшем числе сторон используемых многоугольников. Результат Архимеда — три точных знака π — Снеллий получает уже для вписанного и описанного шестиугольников, а 96-угольники помогают ему рассчитать 7 точных знаков π. Христиан Гюйгенс в сочинении «О найденной величине круга» (1654) доказывает ряд теорем о соотношениях между длинами хорд и стягиваемых ими дуг, которые позволили ему вычислить 10 точных знаков числа π уже для 60-угольника.

Упражнение 2. Один из «тонких» геометрических фактов, обнаруженных Гюйгенсом, состоит в следующем. Отложим на числовой оси значение p_n периметра правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного диаметра, и значение P_n периметра правильного n-угольника, описанного около неё. Разделим отрезок $[p_n, P_n]$ на три равные части. Докажите, что для любого n число π принадлежит первой из этих частей, т. е. $p_n < \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}P_n$.

ЭРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

С конца семнадцатого столетия бурная река человеческой пытливости вышла из берегов элементарной математики — началась эра математического анализа. Бесконечные последовательности и ряды стали привычными объектами исследований математиков. Возникло дифференциальное и интегральное исчисление, базирующееся на строго определённом понятии предела. Новые инструменты исследований позволили взглянуть на число π с совершенно неожиданной стороны.

Одним из первых результатов в этом направлении стал ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots, \tag{1}$$

названный в честь открывшего его в 1673 году немецкого математика Готфрида Вильгельма Лейбница (1646—1716) *рядом Лейбница*. Многоточие, поставленное справа от знака «+» в формуле (1), следует понимать так. Чем больше слагаемых взять в правой части этого равенства, тем меньше их алгебраическая сумма будет отличаться от числа $\frac{\pi}{4}$. Это даёт принципиальную возможность вычислять π со сколь угодно большой точностью.

Ряд Лейбница является частным случаем более общего ряда, открытого английским математиком Джеймсом Грегори (1638—1675) в 1670 году:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \ldots \qquad (2)$$

(здесь $|x| \leqslant 1$).

Грегори не заметил, что этот ряд имеет отношение к числу π. Ряд Лейбница (1) получается из ряда Грегори (2) при $x = 1$.

Коль скоро появился удобный инструмент, вычислители не преминули им воспользоваться. Ряд (1) не очень удобен для расчётов: чтобы получить π с двумя верными знаками после запятой, надо сложить 50 членов ряда, а для трёх десятичных знаков понадобится более 300 действий. Если же в формуле (2) положить $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то получится ряд

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \ldots\right) \qquad (3)$$

с гораздо более быстрой сходимостью (обратите внимание, как быстро здесь увеличиваются знаменатели). Именно этим разложением (3) воспользовался Авраам Шарп (1651—1742) для вычисления в 1699 году рекордного количества точных десятичных знаков числа π — 71 знак.

Следующая «хитрость», которой воспользовались вычислители, состояла в подборе комбинаций арктангенсов, каждый из которых выражается при помощи ряда, сходящегося быстрее, чем ряд Лейбница (1):

$$\operatorname{arctg} 1 = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} \qquad \text{(Джон Мэчин)},$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \qquad \text{(Леонард Эйлер)},$$

$$\operatorname{arctg} 1 = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{70} + \operatorname{arctg}\frac{1}{99} \qquad \text{(Джеймс Стирлинг, Томас Симпсон, Уильям Резерфорд)},$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} \qquad \text{(Л. К. Шульц)}.$$

Проверить эти формулы можно исходя из известных тригонометрических тождеств:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \qquad (xy < 1),$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \qquad (xy > -1),$$

$$2\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} \qquad (|x| < 1).$$

Раскладывая каждый из арктангенсов $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ в ряд Грегори, получим весьма удобное для вычислений выражение

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \ldots\right).$$

Это разложение позволило Джону Мэчину вычислить 100 десятичных знаков числа π. Его результат был опубликован в 1706 году У. Джонсом в уже упоминавшейся работе «Обозрение достижений математики», где впервые зарегистрировано использование буквы π для обозначения отношения длины окружности к диаметру.

Упражнение 3. Приведённые формулы Л. Эйлера и Л. К. Шульца позволяют сформулировать следующую гипотезу:

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{13} + \operatorname{arctg}\frac{1}{34} + \operatorname{arctg}\frac{1}{89} + \ldots$$

(в знаменателях дробей в правой части стоят числа Фибоначчи с нечётными номерами). Обоснуйте эту закономерность.

Успехи Шенкса и Мэчина окрылили других вычислителей, и они с азартом присоединились к удивительному соревнованию, начатому математиками эпохи вписанных и описанных многоугольников.

Де Ланьи (1660—1734), используя метод Шарпа, в 1719 году вычислил 127 точных десятичных знаков числа π. Вскоре Леонард Эйлер другим способом проверил результат Ланьи и обнаружил ошибку в 113-м знаке. В 1794 году Вега указал значение π с точностью до 140 десятичных знаков, из которых точными оказались 136. В 1841 году Уильям Резерфорд сообщает 208 десятичных знаков. Его результат перепроверил талантливый гамбургский вычислитель Иоганн Мартин Захария Дазе (1824—1861). Он показал, что Резерфорд ошибся в 153-м знаке. В 1844 году Дазе довёл точность до 205 знаков, из которых 200 были вычислены верно. В 1847 году Томас Клаузен продвинулся до 250 знаков, из которых 248 были точны.

В 1853 году Резерфорд увеличил своё достижение до 440 десятичных знаков. Рекорд того времени установил Уильям Шенкс — 530 знаков (из них 527 верных). В последующем Шенкс упорно работал над вычислениями новых знаков, доведя их количество до 707.

НОВАЯ ЭРА

Впечатляющие результаты Уильяма Шенкса возглавляли таблицу рекордов вплоть до середины XX века. Вычисленные Шенксом 707 десятичных знаков числа π появились на страницах научно-популярных изданий. Архитекторы стали украшать ими свои сооружения. Именно эти 707 цифр были размещены в виде гипсового фриза под потолком «цифирной палаты» в Доме занимательной науки на Фонтанке (в Ленинграде), организованном по инициативе Якова Исидоровича Перельмана в 1934 году. Этими же 707 цифрами Уильям Голени в 1937 году украсил купол циклической галереи парижского Дворца Открытий.

Двадцатый век вошёл в историю человеческой цивилизации не только своими разрушительными войнами. Он ознаменовался значительными достижениями человеческого духа, в частности, компьютерной революцией. Уже первые проверки на появившихся в 1945 году электронно-вычислительных машинах показали, что Уильям Шенкс в своих расчётах ошибся, начиная с 528 знака, так что весь последующий «хвост» из 180 знаков оказался неверным. Это дало повод английскому математику Гарольду Коксетеру (р. 1907) с горечью констатировать: «Нельзя без грусти думать о том, что вычисления, на которые бедный Шенкс потратил значительную часть своей жизни, современная ЭВМ может воспроизвести (без его роковой ошибки) всего за несколько секунд просто для „разминки“» ([4], с. 379).

С появлением компьютеров темпы погони за точными десятичными знаками числа π резко ускорились.

В июне 1949 года Джон фон Нейман (1903—1957) и его сотрудники вычислили 2037 знаков на одной из первых вычислительных машин ENIAC. Рубеж в 10000 знаков был достигнут в 1958 году Ф. Женюи с помощью компьютера IBM 704. Сто тысяч знаков π вычислили в 1961 году Дэниэл Шенкс (однофамилец Уильяма Шенкса) и Джон Ренч с помощью компьютера IBM 7090. В 1973 году Жан Гийу и М. Буйе преодолели отметку в 1000000 знаков, что заняло меньше одного дня работы компьютера CDC-7600.

Казалось бы, эра компьютеров окончательно и безвозвратно устранила человека с арены соревнований. Лавры победителей-рекордсменов стали делить между собой машины. У кого тактовая частота процессора больше, тот и победил.

Но не тут-то было! Оказалось, что человека — виновника всей этой кутерьмы с вычислениями числа π — рано списывать со счетов. Он стал придумывать не просто схемы умножения многозначных чисел, а схемы сверхбыстрого умножения, не просто алгоритмы вычисления числа π, а сверхэффективные алгоритмы...

Схемы «сверхбыстрого» умножения

Способ умножения «в столбик», которым мы обычно пользуемся, с «точки зрения» современного компьютера довольно расточителен. Чтобы перемножить таким способом два натуральных n-разрядных числа, нужно произвести n^2 попарных умножений цифр и ещё некоторое количество сложений. Объём этой вычислительной работы можно существенно уменьшить, если рационально распорядиться промежуточными вычислениями.

На одно из «рационализаторских» усовершенствований подобного рода обратил внимание отечественный математик Анатолий Александрович Карацуба в 1962 году (см., например, [5]). Предположим, что каждый из сомножителей x и y имеет по $2n$ цифр. Разобьём их на два блока по n цифр:

$$x = 10^n x_1 + x_0, \qquad y = 10^n y_1 + y_0.$$

Здесь x_1, x_0, y_1, y_0 — n-значные числа. Воспользовавшись тождеством

$$(x_1 - x_0)(y_0 - y_1) = -x_1 y_1 - x_0 y_0 + x_1 y_0 + x_0 y_1,$$

произведение xy можно записать так:

$$xy = (10^n x_1 + x_0)(10^n y_1 + y_0) = \\ = (10^{2n} + 10^n) x_1 y_1 + 10^n (x_1 - x_0)(y_0 - y_1) + (10^n + 1) x_0 y_0.$$

Таким образом, задача умножения $2n$-разрядных чисел свелась к трём операциям для n-разрядных чисел $x_1 y_1$, $(x_1 - x_0)(y_0 - y_1)$, $x_0 y_0$ и ещё к операциям сложения и сдвига. Вместо $4n^2$ операций поразрядного умножения обычным способом здесь требуется всего $3n^2$ операций. Выигрыш, казалось бы, небольшой, но ведь и возникшие здесь n-значные числа также можно перемножать подобным образом, их составные части — тоже, и т. д. По мере увеличения n экономия вычислений может оказаться существенной.

Современные алгоритмы «сверхбыстрого» умножения используют ещё более изощрённую технику вычислений. Например, алгоритм Шёнхаге—Штрассена (1971) умножения целых чисел использует интерполяцию полиномов и так называемое «быстрое преобразование Фурье». Объём вычислений по этому алгоритму двух целых n-разрядных чисел по сравнению с методом умножения «в столбик» уменьшается в $\frac{n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}$ раз. Например, поиск произведения двух 2^{16}-разрядных сомножителей ускоряется более чем в тысячу (2^{10}) раз по сравнению с обычным способом умножения. Довольно существенная экономия для электронных вычислителей точных знаков числа π!

«Сверхэффективный» алгоритм Джонатана и Питера Борвейнов

Канадские математики Джонатан и Питер Борвейны в 1987 году нашли удивительный ряд:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n \, (6n)!}{(n!)^3 \, (3n)! \, (5280(236674 + 30303\sqrt{61}))^{3n+\frac{3}{2}}} \times \right.$$
$$\times (212\,175\,710\,912\sqrt{61} + 1\,657\,145\,277\,365 +$$
$$\left. + n(13\,773\,980\,892\,672\sqrt{61} + 107\,578\,229\,802\,750)) \right\},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, а $0! = 1$.

Последовательность стоящих под знаком суммы слагаемых при $n = 0, 1, 2, \ldots$ добавляет около 25 точных цифр числа π с каждым новым членом. Первый член (соответствующий $n = 0$) даёт число, совпадающее с π в 24 десятичных знаках [6].

Джонатан и Питер Борвейны предложили также алгоритм расчёта десятичных знаков числа π, имеющий фантастическую эффективность: каждый новый шаг выполнения этого алгоритма уточняет количество верных цифр в разложении числа π более чем вчетверо! [6, 7]. Вот этот удивительный алгоритм.

Вначале положим $y_0 = \sqrt{2} - 1$, $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$, а затем каждое новое значение y_{n+1} будем находить, отправляясь от предыдущего значения по формуле

$$y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1 + y_n^4}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Похожим образом будем находить члены последовательности a_0, a_1,

a_2, ..., вычисляя их по формуле

$$a_{n+1} = (1 + y_{n+1})^4 a_n - 2^{2n+3} y_{n+1}(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Оказывается, по мере увеличения номера шага n величина $\frac{1}{a_n}$ очень быстро приближается к π, а именно, имеет место оценка

$$0 < a_n - \frac{1}{\pi} < 2^{2n+5} \cdot e^{-2^{2n+1}\pi}.$$

Так, уже a_4 даёт 694 верных знаков числа $\frac{1}{\pi}$.

У истоков открытия этого алгоритма лежали исследования в области так называемых *эллиптических интегралов* и *тета-функций* — высших разделов современной математики [7]. Авторы этого поразительного алгоритма также утверждают, что им помогли некоторые идеи гениального индийского математика Сринивазы Рамануджана (1887—1920).

Продолжение «марафона»

Удивительный «марафон», начатый с вычисления Архимедом трёх точных знаков числа π, сегодня так же далёк от завершения, как и две тысячи лет назад.

По алгоритму Джонатана и Питера Борвейнов в январе 1986 года Дэвид Х. Бейли получил 29 360 000 десятичных знаков π на суперкомпьютере Cray-2, а в 1987 году Я. Канада и его сотрудники — 134 217 000 знаков на суперкомпьютере NEC SX-2. Результат Дэвида и Грегори Чудновски из Колумбийского университета в Нью-Йорке, вычисливших в 1989 году 1 011 196 691 знак числа π, попал даже в книгу рекордов Гиннесса. Для своих расчётов они использовали суперкомпьютер Cray-2 и сеть компьютеров IBM-3090. К октябрю 1995 года сотрудниками Токийского университета Ясумасой Канадой и Дайсуке Такахаши было вычислено свыше 6 миллиардов цифр. Они же в 1999 году на компьютере HITACHI SR 8000 вычислили 206 158 430 000 цифр числа π [8].

В конце прошлого столетия посетители сайта [9] встречали объявление, приглашающее их принять участие в глобальном проекте «Pi-Hex». Любой житель Земли, подключив свой компьютер к сети Интернет, мог стать участником коллективных вычислений отдельных цифр двоичной записи числа π. Координатором этого глобального проекта выступил студент университета Симона Фрезера (США)

Колин Персивал. В проекте приняло участие около 2000 добровольцев. Вычисления на каждом отдельном компьютере в глобальной сети проводились в так называемом «фоновом» режиме, когда участвующий в совместных работах компьютер не занимался решением каких-то своих собственных задач. Объединённая общим проектом команда нашей планеты в 1998 и 1999 годах вычислила цифры, стоящие на 5000000000000 и на 40000000000000 местах двоичной дроби числа π. Ими оказались нули [9].

Остановится ли когда-либо удивительная погоня за исчезающими в бесконечности знаками числа π? По-видимому, этот вопрос можно переформулировать так: прекратит ли когда-либо своё существование человеческая цивилизация?

ВСЕГДА ЛИ $\pi = 3{,}14...$?

Условимся считать, что вдоль любой прямой евклидовой плоскости расстояния измеряются как обычно с той лишь разницей, что единица длины различна для прямых разных направлений, но одинакова для параллельных прямых. Это соглашение лежит в основе причудливой геометрии, придуманной Германом Минковским (1864—1909) и Стефаном Банахом (1892—1945).

Выберем фиксированную точку O плоскости и отложим от неё во всех направлениях отрезки единичной длины. Мы получим некоторую замкнутую кривую — *единичную окружность*. Можно показать (см., например, [10], с. 465—469), что если точка O лежит внутри единичной окружности, причём ограниченный этой окружностью *единичный круг* является выпуклой фигурой, симметричной относительно точки O, то все аксиомы расстояния $\rho(A,B)$ как функции двух точек A и B в данной геометрии выполняются:

1) $\rho(A,B) = \rho(B,A)$;

2) $\rho(A,B) \geqslant 0$, причём $\rho(A,B) = 0$ лишь в том случае, если точка A совпадает с точкой B;

3) $\rho(A,B) + \rho(B,C) \geqslant \rho(A,C)$ для любых точек A, B, C.

В дальнейшем выполнение этих условий мы будем предполагать.

Обозначим длину единичной окружности 2π. Следуя [10], докажем, что в геометрии Минковского—Банаха $3 \leqslant \pi \leqslant 4$, причём число π может принимать любые значения в указанном промежутке.

Пусть A — произвольная точка единичной окружности S с центром O, A_1 — диаметрально противоположная ей точка окружности S (рис. 5). При непрерывном обносе вектора $\overrightarrow{AO}$ вдоль кривой S, при котором начало A этого вектора описывает дугу AA_1, его конец O

опишет некоторую непрерывную линию, начинающуюся внутри S, а заканчивающуюся снаружи S в такой точке O_1, что $\overrightarrow{A_1O_1} = \overrightarrow{AO}$. Следовательно, найдётся такое положение BC этого вектора, при котором и его начало B и его конец C будут принадлежать окружности S. Так как четырёхугольники $OABC$ и OA_1CB — параллелограммы, то

$$\rho(A,B) = \rho(O,C) = 1, \quad \rho(B,C) = \rho(A,O) = 1, \quad \rho(A_1,C) = \rho(O,B) = 1.$$

Отсюда вытекает, что периметр центрально симметричного выпуклого шестиугольника $ABCA_1B_1C_1$, вписанного в единичную окружность S, в геометрии Минковского—Банаха равен 6, поэтому периметр 2π окружности S не меньше 6 и, значит, $\pi \geqslant 3$.

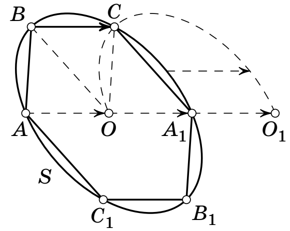


Рис. 5

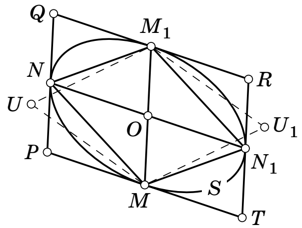


Рис. 6

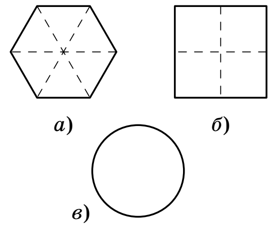


Рис. 7

А теперь покажем, что $\pi \leqslant 4$.

Рассмотрим всевозможные вписанные в S параллелограммы с центром O и выберем среди них параллелограмм MNM_1N_1 наибольшей возможной (евклидовой) площади. Опишем вокруг MNM_1N_1 параллелограмм $PQRT$, стороны которого параллельны диагоналям MM_1 и NN_1. Если бы кривая S содержала некоторую точку U, расположенную дальше от прямой MM_1, чем прямая PQ (рис. 6), то параллелограмм MUM_1U_1 имел бы бóльшую площадь, чем MNM_1N_1, что невозможно. Итак, кривая S целиком заключена внутри параллелограмма $PQRT$. С другой стороны, $\rho(P,Q) = \rho(M,M_1) = 2$, $\rho(Q,R) = \rho(M,M_1) = 2$, поэтому периметр параллелограмма $PQRT$ в геометрии Минковского—Банаха равен 8, и, значит, $2\pi \leqslant 8$, т. е. $\pi \leqslant 4$.

Нетрудно убедиться, что число π может принимать любые значения в промежутке от 3 до 4. Для этого нужно взять в качестве единичной окружности S произвольную выпуклую центрально симметричную фигуру периметра 2π. Равенство $\pi = 3$ выполняется, если S представляет собой, например, правильный шестиугольник (рис. 7, *а*), $\pi = 4$, если S представляет собой квадрат (рис. 7, *б*). А если S совпадает с обыкновенной (евклидовой) окружностью (рис. 7, *в*), то $\pi = 3{,}14159...$

НЕРЕШЁННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Сначала немного о том, что известно достоверно. К настоящему времени доказано, что число π иррационально и трансцендентно. Свойство иррациональности числа π, т. е. непредставимость его в виде отношения двух целых чисел, доказали Иоганн Ламберт (1728—1777) и Адриен Лежандр (1752—1833) в конце XVIII века. Свойство трансцендентности означает, что число π не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. Это свойство было доказано немецким математиком Фердинандом Линдеманом (1852—1939) в 1882 году. В настоящее время ведутся исследования по уточнению «тонкой структуры» числа π.

Нормально ли число π?

С точки зрения здравого смысла число π вполне нормально, ничем не хуже других чисел. Здесь мы познакомимся с определением нормальности числа, которое дал французский математик Эмиль Борель в 1909 году. Грубо говоря, положительное число, меньшее единицы, называется нормальным, если в его десятичной записи любая комбинация цифр встречается одинаково часто. Это определение можно распространить и на другие, недесятичные системы счисления. Вот более точное определение.

Рассмотрим последовательность десятичных цифр дробной части числа π:

$$1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\ 2,\ 6,\ 5,\ \ldots \tag{4}$$

Зададимся какой-нибудь одной цифрой, например 9, и подсчитаем количество появлений этой цифры среди первых n членов последовательности (4). Обозначим это количество через $N(9,n)$. Имеем: $N(9,1)=0,\ N(9,2)=0,\ N(9,3)=0,\ N(9,4)=0,\ N(9,5)=1,\ N(9,6)=1$ и т. д. Если в среднем среди 10 цифр последовательности (4) оказывается одна девятка, то при больших значениях n естественно ожидать появления приближённого равенства $\dfrac{N(9,n)}{10} \approx \dfrac{1}{10}$, или, более точно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(9,n)}{n} = \frac{1}{10}. \tag{5}$$

Если бы аналогичное (5) равенство выполнялось не только для девятки, но и для любой цифры 0, 1, ..., 9, то в этом случае дробная часть числа π, по терминологии Э. Бореля, представляла бы собой вещественное число, *слабо нормальное к основанию* 10. Естественно, что число π можно представить в системе счисления с другим основанием g, например, в двоичной ($g=2$) или в троичной ($g=3$) системе.

Тогда можно рассматривать новые цифры δ в этой новой системе и исследовать выполнимость равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(\delta,n)}{n} = \frac{1}{g}, \tag{6}$$

аналогичного равенству (5) (здесь $0 \leqslant \delta < g$). Если бы вдруг оказалось, что для любой системы счисления (для любого $g \geqslant 2$) и для любой цифры δ в этой системе последовательность цифр дробной части числа π удовлетворяла равенству (6), то в этом случае дробная часть числа π представляла бы собой *слабо нормальное* число.

Наконец, чтобы ввести понятие нормального числа, рассмотрим не одиночные цифры, а произвольные кортежи из цифр. Представим, что в k-местные сани для бобслея (k — любое натуральное число) друг за другом садятся произвольные k цифр ($\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_k$) системы счисления с основанием g, а затем эти сани проносятся вдоль последовательности

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots, \tag{7}$$

получающейся при разложении действительного числа α, $0<\alpha<1$ в бесконечную дробь $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{g} + \dfrac{\alpha_2}{g^2} + \dfrac{\alpha_3}{g^3} + \ldots + \dfrac{\alpha_n}{g^n} + \ldots$ в системе счисления с основанием g. Пусть $N(\delta,n)$ — число совпадений набора $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k)$ с наборами вида $(\alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_{i+k-1})$, где i принимает значения от 1 до n. Тогда, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(\delta,n)}{n} = \frac{1}{g^k},$$

то число α называется *нормальным*.

В настоящее время неизвестно даже, является ли дробная часть числа π слабо нормальной к основанию 10 или к какому-либо другому основанию. Иными словами, неизвестно, одинаково ли часто встречаются все цифры в записи π. Имеющиеся в настоящее время данные вычислительного эксперимента свидетельствуют о том, что среди первых 200 000 000 000 десятичных знаков числа π (не считая целой части) все цифры встречаются примерно одинаково часто:

Цифра	Сколько раз появляется	Цифра	Сколько раз появляется
0	20 000 030 841	5	19 999 917 053
1	19 999 914 711	6	19 999 881 515
2	20 000 013 697	7	19 999 967 594
3	20 000 069 393	8	20 000 291 044
4	19 999 921 691	9	19 999 869 180

(данные лаборатории Токийского университета, руководимой Ясумасой Канадой и Дайсуке Такахаши [8]). Как видно, доля появлений каждой десятичной цифры примерно равна одной десятой (погрешность такого приближения не превышает 0,0015%).

Предположение о равном «представительстве» цифр в десятичном разложении было выдвинуто уже при вычислении первых сотен его знаков в начале XIX века. Английского математика Огастеса де Моргана (1806—1871) в своё время очень удивил тот факт, что среди 700 цифр десятичной дроби числа π, вычисленных Уильямом Шенксом, цифра 7 оказалась на особом положении. Если любая другая цифра встречалась примерно одинаково — около 70 раз, то цифра 7 — всего 53 раза. Причина этого явления, как мы уже знаем, скрывается в неверно вычисленных Шенксом знаках π, начиная с 528-го. Последующее устранение этой ошибки устранило и «дискриминацию» цифры 7 — как и следовало ожидать, семёрки стали встречаться с той же частотой, как и остальные цифры.

Впрочем, действительно ли этого следует ожидать? Этот вопрос сегодня остаётся открытым.

«Тонкая структура» числа π

Какие комбинации цифр возможны, а какие невозможны в десятичном разложении числа π? (См. табл. на с. 23.) До недавнего времени на этот счёт нельзя было сказать ничего вразумительного. Но вот появился первый результат на эту тему. Автору брошюры его сообщил профессор Восточного Иллинойсского университета Григорий Александрович Гальперин.

Рассмотрим любые m цифр числа π, идущие подряд, начиная с самого начала: 314... Австралийский математик Альф ван дер Поортен доказал, что сразу же за этими m цифрами в десятичном разложении числа π не может идти набор из $7m$ девяток: за первой цифрой 3 не идёт 7 девяток; за цифрами 31 не идут 14 девяток и т. д.

Г. А. Гальперин выдвигает гипотезу, что сразу же за m первыми цифрами числа π не может идти набор из m девяток. Эта гипотеза верна по крайней мере для тех цифр числа π, которые в настоящее время вычислены с помощью компьютеров. Верна ли эта гипотеза в общем случае, неизвестно.

Существуют ли объекты размерности π?

Если под размерностью понимать наименьшее число координат, необходимое для однозначного определения положения точки в пространстве (одна координата для числовой прямой, две — для

Некоторые любопытные последовательности цифр в десятичной записи числа

π = 3,1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 5 0 2 8 8 4 1 9 7 1 6 9 3 9 9 3 7 5 1...
разряды: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49

Последовательность	Начиная с разряда №	Последовательность	Начиная с разряда №
01234567890	53 217 681 704	98765432109	123 040 860 473
»	148 425 641 592	»	133 601 569 485
01234567891	26 852 899 245	»	150 339 161 883
»	41 952 536 161	»	183 859 550 237
»	99 972 955 571	09876543210	42 321 758 803
»	102 081 851 717	»	57 402 068 394
»	171 257 652 369	»	83 358 197 954
432109876543	149 589 314 822	10987654321	89 634 825 550
543210987654	197 954 994 289	»	137 803 268 208
27182818284	45 111 908 393	»	152 752 201 245

Некоторые любопытные последовательности цифр в десятичной записи числа

$1/\pi$ = 0,3 1 8 3 0 9 8 8 6 1 8 3 7 9 0 6 7 1 5 3 7 7 6 7 5 2 6 7 4 5 0 2 8 7 2 4 0 6 8 9 1 9 2 9 1 4 8 0 9...
разряды: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49

Последовательность	Начиная с разряда №	Последовательность	Начиная с разряда №
01234567890	50 494 465 695	10987654321	8 728 557 724
»	66 787 942 929	»	40 852 015 448
»	132 217 072 915	»	149 835 855 053
01234567891	173 036 790 762	654321098765	53 699 510 337
»	199 571 086 462	27182818284	66 625 560 317
234567890123	100 850 401 743	»	181 276 557 577
5678901234567	189 727 479 303	31415926535	91 912 325 844
09876543210	125 310 799 184	»	115 040 878 310
»	129 469 449 048	3333333333333	55 172 085 586
»	168 614 433 523		

Данные лаборатории Токийского университета, руководимой Я. Канадой и Д. Такахаши [8].

координатной плоскости, и т. д), то в этом случае размерность задаётся натуральным числом, и ответ на вопрос, вынесенный в заголовок, отрицателен. Однако возможны обобщения понятия размерности, сулящие немало сюрпризов. Рассмотрим одно из них, восходящее к немецкому математику Феликсу Хаусдорфу (1868—1942) ([11], с. 15—23).

Разрезая квадрат на одинаковые составляющие его квадратики, мы получим количество N этих квадратиков, пропорциональное величине $1/k^2$, где k — коэффициент подобия маленького квадратика разрезаемому квадрату. Разрезая куб на одинаковые составляющие его кубики, мы получаем количество кубиков N, пропорциональное величине $1/k^3$, где k — коэффициент подобия маленького кубика данному кубу.

Поскольку и в общем случае для n-мерного куба существует аналогичная связь $Nk^n = 1$, то последнее соотношение при заданных значениях N и k может служить для определения размерности:

$$n = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{k}}. \tag{8}$$

Французский математик (ныне работающий в США) Бенуа Мандельброт распространил определение размерности (8) не только на многомерные кубы, но и на причудливые объекты, называемые *самоподобными фракталами*. Слово «фрактал» происходит от латинского fractus — дробный. Самоподобный фрактал — множество, которое представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств, полученных масштабированием оригинала. Если N — число таких подмножеств, а k — коэффициент подобия (масштабирования), то характеристика n самоподобного фрактала, вычисленная по формуле (8), называется его *фрактальной размерностью*. В общем случае такая размерность не обязана быть целым числом, поэтому её иногда называют ещё *дробной размерностью*.

Пример самоподобного фрактала был построен шведским математиком Хельгой фон Кох в 1904 году. Он получил название «снежинка Кох» (рис. 8).

Граница этой фигуры составлена из трёх одинаковых фракталов. Каждый из них строится итеративно (рис. 9).

Из начального отрезка K_0 выбрасывается средняя треть и вместо неё добавляются два новых отрезка такой же длины (стороны равностороннего треугольника, построенного на выброшенном отрезке, см. рис. 9). В итоге получается множество K_1. С каждым звеном

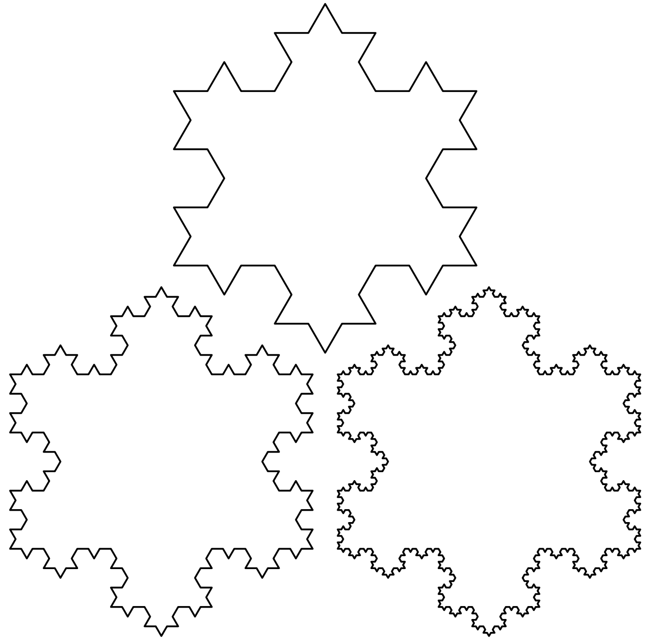


Рис. 8

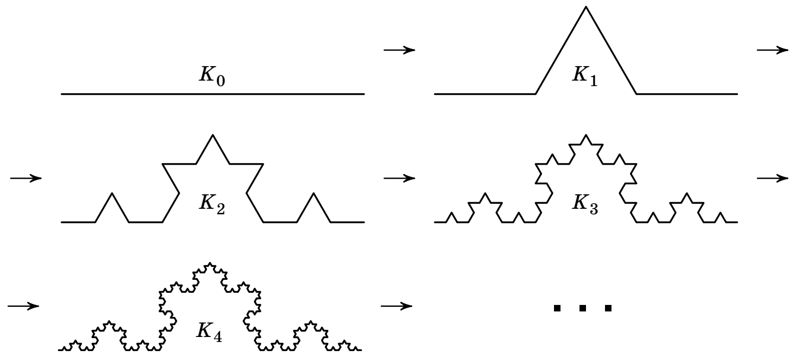


Рис. 9

фигуры K_1 производится такая же операция — образуется фигура K_2, и т. д. Последовательность кривых $\{K_n\}$ сходится к некоторой предельной кривой K. Если взять копию K, уменьшенную в три раза ($k = 1/3$), то всё множество K можно составить из $N = 4$ таких копий. Отсюда размерность множества K равна

$$n = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}2618.$$

Коль скоро существуют самоподобные фракталы дробной размерности, то не исключено, что может существовать и некий загадочный фрактал размерности π. Существует ли он на самом деле? Это пока неизвестно. Может быть, его удастся сконструировать вам?

Имея в виду размерность Хаусдорфа, можно поставить вопрос о существовании таких натуральных N и k, что

$$\pi = -\frac{\ln N}{\ln k} = -\log_k N.$$

Круг подобных вопросов можно расширять и дальше. Например, существует ли такое натуральное число n, что $\sin n = 1/\pi$?

Романтическая гипотеза

Знаете любимую игру бесконечности?
Мерцать на ресницах.
Владимир Казаков, «Объёмы»

Мы остаёмся в неведении относительно того, какие комбинации цифр могут встретиться в десятичном разложении числа π. Это незнание лежит в основе следующей красивой гипотезы.

Закодируем используемые при наборе этой брошюры типографские символы комбинациями цифр от 0 до 9. Например, каждому символу можно сопоставить уникальный десятизначный код, в котором задействованы различные цифры. Вся брошюра тогда представится длинным цифровым кодом, в котором одинаковые цифры могут стоять не более чем на двух соседних местах (на границах кодов двух соседних символов). Очевидно, все ныне известные ограничения, свойственные «тонкой структуре» числа π, при этом будут соблюдены.

Гипотеза состоит в том, что где-то на «бескрайних просторах» десятичного разложения числа π может встретиться построенный нами код. Ясно, что вместо данной брошюры можно закодировать и солидные сочинения: роман Л. Н. Толстого «Война и мир», Британскую энциклопедию и вообще, как фантазирует известный популяризатор науки Мартин Гарднер, «любую книгу, которая была, будет или могла быть написана» ([12], с. 427).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем следующие утверждения, следуя [13].

1. Существует предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность заданного радиуса R, при неограниченном возрастании количества их сторон.

2. Существует предел последовательности периметров правильных многоугольников, описанных около окружности заданного радиуса R, при неограниченном возрастании количества их сторон.

3. Эти пределы совпадают.

Для доказательства первого утверждения (второе утверждение доказывается аналогично) воспользуемся достаточно очевидным признаком существования предела числовой последовательности: всякая монотонная и ограниченная числовая последовательность имеет предел. В более строгой формулировке, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть числовая последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ возрастает (убывает), т. е. её члены удовлетворяют условию $x_n < x_{n+1}$ (соответственно, $x_n > x_{n+1}$) для любого $n = 1, 2, \ldots$ Предположим, она ограничена сверху (снизу), т. е. $x_n < B$ (соответственно, $x_n > A$), где A, B — некоторые числа. Тогда у этой последовательности существует предел, равный некоторому числу M (соответственно, m), удовлетворяющий неравенству $M \leqslant B$ (соответственно, $A \geqslant m$).

Доказательство этой интуитивно очевидной теоремы о монотонной и ограниченной последовательности можно найти в стандартном курсе математического анализа (см., например, [14], т. 1, с. 71).

Удостоверимся в том, что последовательность периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность радиуса R, удовлетворяет условиям этой теоремы. Обозначим через a_n и a_{n+1} длины сторон правильных n-угольника и $(n+1)$-угольника, вписанных в данную окружность, соответственно. Тогда их периметры равны, соответственно, na_n и $(n+1)a_{n+1}$. Докажем, что

$$na_n < (n+1)a_{n+1}. \tag{9}$$

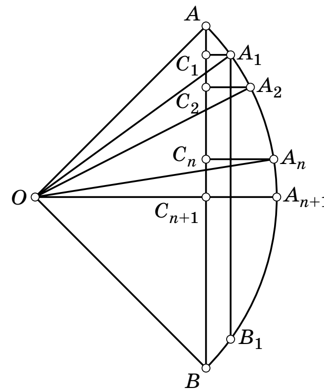


Рис. 10

На рис. 10 показаны стороны AB и A_1B_1 ($A_1B_1 \parallel AB$) правильных n-угольника и $(n+1)$-угольника, вписанных в окружность с центром O. Проведём радиус OA_{n+1}, который пересекает сторону AB в середине C_{n+1}. Тогда $AC_{n+1} = a_n/2$.

Дуга окружности A_1A_{n+1} составляет $\frac{n}{n+1}$-ю часть от дуги AA_{n+1}. Разделим угол AOA_{n+1} на $n+1$ равных частей, и пусть разделяющие радиусы пересекают дугу AA_{n+1} в точках $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Опустив из этих точек перпендикуляры на AB, получим соответственно точки C_1, $C_2, \ldots, C_{n+1}$. Отрезки $AC_1, C_1C_2, C_2C_3, \ldots, C_nC_{n+1}$ являются проекциями на AB хорд равной длины $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ с последовательно уменьшающимся углом наклона. Следовательно, справедливы неравенства

$$AC_1 < C_1C_2 < C_2C_3 < \ldots < C_nC_{n+1}.$$

Отсюда заключаем, что

$$AC_1 < \frac{1}{n+1} AC_{n+1}.$$

Но $AC_n = \frac{a_n}{2} = AC_1 + \frac{a_{n+1}}{2}$, поэтому

$$\frac{a_n}{2} < \frac{1}{n+1}\frac{a_n}{2} + \frac{a_{n+1}}{2},$$

откуда следует неравенство (9).

Итак, последовательность периметров правильных вписанных в окружность заданного радиуса n-угольников с увеличением количества их вершин n монотонно возрастает. Эта последовательность также является ограниченной. Действительно, любой вписанный в окружность n-угольник лежит внутри описанного около неё квадрата. Если же один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то его периметр заведомо меньше периметра объемлющего многоугольника. Идея доказательства последнего утверждения видна из рис. 11. При каждом «отрезании» периметр внешнего многоугольника уменьшается, так как ломаная заменяется отрезком. Утверждение 1 доказано.

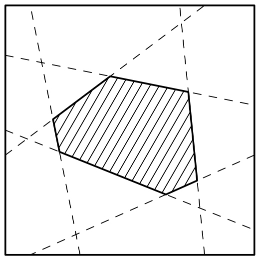


Рис. 11

Для доказательства утверждения 3 выразим через радиус окружности периметры вписанного в окружность и описанного около неё правильных n-угольников.

Периметр вписанного n-угольника равен $p_n = 2Rn\sin\frac{180^\circ}{n}$; периметр описанного n-угольника равен $P_n = 2Rn\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$. Отношение этих величин $\cos\frac{180^\circ}{n}$ при неограниченном увеличении n стремится к 1:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{P_n} = 1$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$. Как следствие из этого получаем выражение длины окружности $C = \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$ через её радиус:

$$C = 2\pi R,$$

где через π обозначен предел

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{180^\circ}{n} = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}.$$

Определив площадь круга как предел площадей правильных n-угольников, вписанных в круг или описанных около него, при неограниченном увеличении количества их сторон n, аналогичным образом можно вывести формулу для площади круга $S = \pi R^2$.

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ

1 (решение Архимеда). Сначала докажем, что треугольник ADC подобен треугольнику CDG, где G — точка пересечения отрезков AD и CB (рис. 12). Углы $\angle BAD$ и $\angle DCB$ равны по свойству вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу. Но $\angle BAD = \angle DAC$, поэтому $\angle DCB = \angle DAC$. Кроме того, у треугольников ADC и CDG общий угол при вершине D. Следовательно, эти треугольники подобны. Тогда

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AC}{DG}. \qquad (10)$$

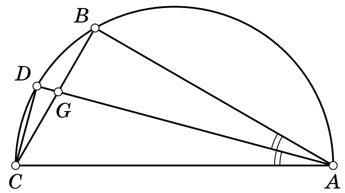


Рис. 12

Поскольку AG — биссектриса треугольника ABC, получаем: $\frac{AC}{CG} = \frac{AB}{BG}$. Привлекая далее свойство пропорции и учитывая, что $CG + GB = BC$, имеем: $\frac{AC}{CG} = \frac{AC+AB}{CG+BG} = \frac{AC+AB}{BC}$. Возвращаясь к равенству (10), заключаем отсюда, что

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AC+AB}{BC}. \qquad (11)$$

Поскольку $\angle BAC = 30^\circ$, то $BC = \frac{1}{2}AC = 780$. Кроме того, $\frac{AB}{BC} < \frac{1351}{780}$, поэтому из равенства (11) следует $\frac{AD}{DC} < \frac{2911}{780}$. Отсюда $\frac{AD^2}{DC^2} < \frac{8473921}{608400}$ и $\frac{AD^2+DC^2}{DC^2} < \frac{9082321}{608400}$. Но $AD^2 + DC^2 = AC^2$, поэтому $\frac{AC^2}{CD^2} < \frac{9082321}{608400}$, т. е. $\frac{AC}{CD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$.

2. Неравенство $p_n < \pi$ очевидно, поэтому сосредоточим свои усилия на доказательстве неравенства $\pi < p$, где $p = \frac{2p_n + P_n}{3}$.

Используем следующие два неравенства:

$$\mathrm{tg}\,x > x + \frac{x^3}{3} \quad \text{и} \quad \sin x > x - \frac{x^3}{6} \qquad (12)$$

$(0 < x < \pi/2)$.

Заметим, что производная функции $f(x) = \operatorname{tg} x - \left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ положительна:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - (1 + x^2) = \operatorname{tg}^2 x - x^2 > 0,$$

поскольку $\operatorname{tg} x > x$ — в этом можно убедиться, сравнив площади сектора OAB окружности единичного радиуса с центральным углом $\frac{\pi}{n}$ и прямоугольного треугольника OAC, катет AC которого касается дуги этого сектора (рис. 13). Это означает, что функция f возрастает. Отсюда следует $f(x) > f(0) = 0$ — первое из неравенств (12).

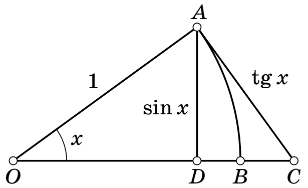


Рис. 13

Доказательство второго из неравенств (12) несколько сложнее. Положим $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$. Имеем:

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \quad g''(x) = -\sin x + x > 0$$

(см. рис. 13, длина дуги $AB = x$ больше длины перпендикуляра $AD = \sin x$). Поэтому $g'(x)$ — возрастающая функция. Значит, $g'(x) > g'(0) = 0$. Аналогично заключаем, что $g(x) > g(0) = 0$.

Вернёмся к доказательству неравенства $p > \pi$. Используя неравенства (12), имеем:

$$p = \frac{2n\sin\frac{\pi}{n} + n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{3} > \frac{2n\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3}\right) + n\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi^3}{3n^3}\right)}{3} = \pi.$$

В статье [15] обосновывается ещё более «тонкий» факт: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n - \pi}{\pi - p_n} = 2$. Из этого следует, что число π, находясь при любом $n \geqslant 3$ в интервале (p_n, p), при всех достаточно больших значениях n ближе к правому концу этого интервала, чем к левому.

3. Сначала докажем равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n+1}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n+2}}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{13}$$

где u_k обозначает число Фибоначчи с номером k. Для этого воспользуемся тождеством для чисел Фибоначчи $u_{2n+1}u_{2n+2} - u_{2n}u_{2n+3} = 1$, которое можно доказать методом математической индукции. Перепишем это равенство в виде

$$\frac{1}{u_{2n}} = \frac{u_{2n+3}}{u_{2n}u_{2n+2} - 1} = \frac{u_{2n+1} + u_{2n+2}}{u_{2n+1}u_{2n+2} - 1} = \frac{\frac{1}{u_{2n+1}} + \frac{1}{u_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{u_{2n+1}}\cdot\frac{1}{u_{2n+2}}}.$$

Привлекая тригонометрическое тождество

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \quad (xy < 1),$$

получаем (13).

Многократно применяя (13) к выражениям $\operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n}}$ при $n = 1, 2, \ldots$, находим:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{u_2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{u_3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{u_3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_6} = \ldots$$

$$\ldots = \operatorname{arctg}\frac{1}{u_3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_5} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n-1}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{u_3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_5} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n-1}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n+1}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n+2}} = \ldots$$

$$\ldots = \operatorname{arctg}\frac{1}{u_3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_7} + \ldots$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича. — М.: Просвещение, 1976.

[2] О квадратуре круга. С приложением теории вопроса / Сост. Ф. Рудио под ред. и с прим. акад. С. Н. Бернштейна. — М.—Л.: ГТТИ, 1934.

В этой книге собраны первоисточники: Архимед, «Измерение круга»; Х. Гюйгенс, «О найденной величине круга»; И. Ламберт, «Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга»; А. Лежандр, «Доказательство того, что отношение окружности к диаметру и его квадрат суть иррациональные числа».

[3] Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978.

[4] Болл У., Коксетер Г. Математические эссе и развлечения. — М.: Мир, 1986.

[5] Белов А., Тихомиров В. Сложность алгоритмов // Квант. 1999. № 2. С. 8—11.

[6] Борвейн Дж., Борвейн П. Рамануджан и число π // В мире науки. 1988. № 4. С. 58—66.

[7] Borwein J. M., Borwein P. B. Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. — N. Y.: John Wiley & Sons, 1987.

[8] Новости о числе π лаборатории Я. Канады. — http://www.lupi.ch/PiSites/Pi-Rekord.html

[9] Вычисление π совместными усилиями. — http://www.cecm.sfu.ca/projects/pihex/

[10] Розенфельд Б. А., Яглом И. М. Неевклидовы геометрии // Энциклопедия элементарной математики. Т. 5: Геометрия. — М.: Наука, 1966. — С. 433—439.

[11] Крановер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. — М.: Постмаркет, 2000.

[12] Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971.

[13] Звонкин А. Что такое π? // Квант. 1978. № 11. С. 28—31.

[14] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1969.

[15] Вавилов В. В. Об одной формуле Христиана Гюйгенса // Квант. 1985. № 11. С. 9—14.

[16] Кое-что о π. — http://www.geom.umn.edu/huberty/math5337/groupe/

ОГЛАВЛЕНИЕ

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

ВЫПУСК 1

В. М. Тихомиров. Великие математики прошлого и их великие теоремы.

ВЫПУСК 2

А. А. Болибрух. Проблемы Гильберта (100 лет спустя).

ВЫПУСК 3

Д. В. Аносов. Взгляд на математику и нечто из неё.

ВЫПУСК 4

В. В. Прасолов. Точки Брокара и изогональное сопряжение.

ВЫПУСК 5

Н. П. Долбилин. Жемчужины теории многогранников.

ВЫПУСК 6

А. Б. Сосинский. Мыльные плёнки и случайные блуждания.

ВЫПУСК 7

И. М. Парамонова. Симметрия в математике.

ВЫПУСК 8

В. В. Острик, М. А. Цфасман. Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые.

ВЫПУСК 9

Б. П. Гейдман. Площади многоугольников.

ВЫПУСК 10

А. Б. Сосинский. Узлы и косы.

ВЫПУСК 11

Э. Б. Винберг. Симметрия многочленов.

ВЫПУСК 12

В. Г. Сурдин. Динамика звёздных систем.

ВЫПУСК 13

В. О. Бугаенко. Уравнения Пелля.

ВЫПУСК 14

В. И. Арнольд. Цепные дроби.

ВЫПУСК 15

В. М. Тихомиров. Дифференциальное исчисление (теория и приложения).

ВЫПУСК 16

В. А. Скворцов. Примеры метрических пространств.

ВЫПУСК 17

В. Г. Сурдин. Пятая сила.

ВЫПУСК 18

А. В. Жуков. О числе π.