Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.А.Мартынов   *В.В.Бочков*

ВВЕДЕНИЕ
В СТОХАСТИЧЕСКУЮ ДИНАМИКУ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1998

УДК 537.86 (075.8)

Мартынов Б.А., Бочков В.В. Введение в стохастическую динамику: Учеб. по-собие. - СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. - 92 с.

Материал учебного пособия посвящен теории динамического хаоса. Рассмотрены способы описания стохастических колебаний детерминированных динамических систем. Проведен анализ различных сценариев перехода к хаосу. Представлены наиболее простые с точки зрения изложения примеры хаотизации движений конкретных динамических систем.

Учебное пособие для студентов, обучаемых согласно учебным планам подготовки магистров наук по направлениям 552500 «Радиотехника» и 553100 «Техническая физика», соответствует авторскому курсу «Введение в стохастическую динамику».

Ил. 84, библиогр. - 16 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербург-ского государственного технического университета.

ВВЕДЕНИЕ

К числу заметных научных достижений последней трети XX века относится возникновение и интенсивное развитие нового самостоятельного раздела нелинейной теории колебаний, получившего название стохастической динамики. Основным содержанием этого раздела, называемого также теорией динамического хаоса и сформировавшегося благодаря усилиям специалистов различных областей знания, является рассмотрение стохастических (хаотических) движений (колебаний) детерминированных динамических систем.

Эффект хаотизации движений, наблюдаемый при определенных условиях в неавтономных системах 2-го и более высоких порядков и в автономных системах не ниже 3-го порядка, представляется ныне научно обоснованным явлением, хотя в свое время такое казалось невероятным. Установление самой возможности подобных явлений - скачок в понимании временной и пространственной эволюции динамических систем, сравнимый по значимости с открытием регулярных автоколебаний.

Общий междисциплинарный характер эффекта хаотизации движений детерминированных систем и широкий спектр приложений теории динамического хаоса - две главные, хотя и не единственные, причины, по которым современным специалистам-физикам нужно владеть понятиями и методами стохастической динамики.

Данное пособие носит вводный характер и посвящено в первую очередь тем вопросам анализа нелинейных систем, знание которых необходимо для понимания основных проблем теории динамического хаоса. Рассматриваются также наиболее простые с точки зрения изложения примеры хаотизации движений конкретных динамических систем.

1. ОСНОВЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1 Динамическая система. Исходные определения

Понятие динамической системы возникло как обобщение понятия механической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями Ньютона. В настоящее время понятие динамической системы является весьма широким. Оно охватывает системы любой природы: физической, химической, биологической, экономической и др.

Под динамической системой следует понимать любой объект, состояние которого может с течением времени изменяться.

При теоретическом исследовании реальных динамических систем прибегают к их приближенному описанию при помощи так называемых математических моделей. В зависимости от степени приближения одной и той же реальной системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели.

Исходными пунктами построения математической модели обычно являются выбор некоторой совокупности переменных величин, посредством которой определяется состояние динамической системы в данный момент времени, и задание оператора, при помощи которого может быть описана эволюция состояния во времени.

Предположим, что $x_1, x_2, ..., x_n$ - скалярные величины, однозначно определяющие состояние динамической системы. Их часто называют переменными состояния. Они же могут быть выбраны в качестве координат N-мерного фазового пространства динамической системы (пространства состояний).

При использовании матричной (векторной) записи вводится в рассмотрение N-мерный вектор состояния динамической системы

$$\hat{x} = \mathrm{col}(x_s)_N .$$

Задание оператора, определяющего изменение состояния динамической системы во времени, означает указание процедуры, выполняя которую, можно по значению $\hat{x}(t_0)$ в момент времени t_0 найти значение $\hat{x}(t)$ в некоторый момент времени t.

Изменение состояния динамической системы во времени называется движением. Движению динамической системы отвечает перемещение соответствующей ее состоянию точки фазового пространства, описывающей при этом кривую, именуемую фазовой траекторией. Такую точку обычно называют изображающей.

Подход к анализу динамических систем, используемый ниже, предполагает, что математическую модель динамической системы составляют ее фазовое пространство и оператор эволюции состояния [1]. Исследование поведения динамической системы сводится при этом к изучению разбиения ее фазового пространства на области, различающиеся характером траекторий, и к выяснению зависимости структуры такого разбиения от значений параметров системы.

Преобладающая часть последующего материала относится к динамическим системам, моделируемым конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть переменные состояния $x_1, x_2, ..., x_n$ выбраны таким образом, что уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}_s = F_s(x_1, x_2, ..., x_N), \quad s = 1,2,...,N \tag{1}$$

в случае автономной системы и

$$\dot{x}_s = F_s(x_1, x_2, ..., x_N; t), \quad s = 1,2,...,N \tag{2}$$

в случае неавтономной системы, или в матричной (векторной) записи соответственно

$$\dot{\hat{x}} = \hat{F}(\hat{x}), \tag{1a}$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{F}(\hat{x}, t). \tag{2a}$$

Правая часть любого из двух последних уравнений

$$\hat{F} = \mathrm{col}(F_s)_N$$

трактуется как вектор скорости перемещения изображающей точки по фазовой траектории и называется вектором фазовой скорости.

Характер движения динамической системы при начальном значении $\hat{x}(t_0)$ определяется зависимостями $\hat{x}(t)$, находимыми в результате решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений (1) или (2). Набором N функций $x_s(t)$ задается в параметрической форме фазовая траектория.

Заметим, что среди точек фазового пространства динамической системы имеются так называемые особые точки. У автономных систем, которыми мы пока ограничимся, через любую неособую (обыкновенную, регулярную) точку фазового пространства всегда проходит одна траектория, отвечающая какомунибудь движению. Через особую точку либо не проходит ни одной такой фазовой траектории, либо, наоборот, проходит более, чем одна, траектория.

1.2. Состояние равновесия, периодические и квазипериодические движения динамических систем

В данном параграфе речь пойдет о некоторых возможных частных разновидностях решений уравнений движения динамической системы. Для каждой из таких разновидностей характерны свои особенности поведения фазовых траекторий в соответствующих областях фазового пространства.

Обратившись к уравнению (1а), потребуем сначала, чтобы координаты фазового пространства не изменялись с течением времени:

$$\hat{x} = \hat{x}^0 = \mathrm{const}(t).$$

В результате из (1а) получим уравнение

$$\hat{F}\left(\hat{x}^0\right) = 0, \tag{3}$$

при помощи которого отыскиваются решения уравнения (1а), соответствующие состояниям равновесия (покоя) динамической системы. Им обычно отвечают особые точки фазового пространства.

Для любого из решений уравнения (3), если таковые имеются, важно знать условия его устойчивости. По большей части интересуются прежде всего устойчивостью по отношению к малым возмущениям (устойчивостью в малом). Если равновесное решение оказалось неустойчивым (в малом), то динамическая система не может оставаться в соответствующем состоянии равновесия. Она неизбежно выйдет из него под действием какого-нибудь малого толчка, которое реально всегда есть, и в последующем либо окажется в постоянном движении, не ограниченном малой окрестностью состояния равновесия, либо перейдет в другое (устойчивое) состояние равновесия.

Среди устойчивых состояний равновесия имеются такие, для которых выполнены условия асимптотической устойчивости. В фазовом пространстве динамической системы им соответствуют особые точки, в которые входит бесконечное множество фазовых траекторий, причем в ближайшей окрестности каждой такой точки движение по всем фазовым траекториям происходит так, что при $t \to \infty$ изображающие точки стремятся к этой особой точке. Таким образом, асимптотически устойчивая особая точка как бы притягивает к себе точки, движущиеся по близлежащим фазовым траекториям, и по этой причине называется аттрактором. Ниже рассматриваются также и другие разновидности аттракторов (притягивающие фазовые траектории и более сложные образования).

Перейдем к рассмотрению периодических решений уравнения (1а). Допустим, что, по крайней мере, одно такое решение имеется, т.е. существует отличная от постоянной удовлетворяющая уравнению (1а) функция $\hat{x}^0(t)$, для которой равенство

$$\hat{x}^0(t) = \hat{x}^0(t+T) \tag{4}$$

справедливо при всех t. Величина T в этом случае называется периодом.

Выполнение условия (4) означает периодическое движение динамической системы, которому в фазовом пространстве соответствует замкнутая фазовая траектория.

Обратимся к конкретному примеру двумерной ($N = 2$) динамической системы, процессы в которой описываются следующими нелинейными уравнениями, связывающими скалярные величины x, y и их первые производные по времени:

$$\dot{x} = -y + x\left(1 - x^2 - y^2\right), \qquad \dot{y} = x + y\left(1 - x^2 - y^2\right). \tag{5}$$

В качестве фазового пространства в данном случае естественно выбрать плоскость x, y.

Переходя к полярным координатам R, ψ и учитывая их связь с декартовыми:

$$x = R\cos\psi, \quad y = R\sin\psi,$$

запишем вместо (5) равносильную ей систему уравнений

$$\dot{R} = R\left(1 - R^2\right), \quad \dot{\psi} = 1. \tag{6}$$

Из последнего уравнения непосредственно вытекает, что фаза

$$\psi(t) = t + \psi(0),$$

где $\psi(0)$ может быть выражено через начальные значения переменных x и y.

Легко также видеть, что уравнение для полярного радиуса удовлетворяется, в частности, при $R = R^0 = 1$, чему соответствует решение системы (5) в виде периодических функций периода 2π:

$$x^0(t) = \cos\left(t + \psi(0)\right), \quad y^0(t) = \sin\left(t + \psi(0)\right).$$

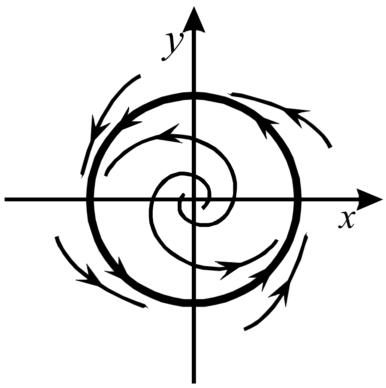


Рис. 1

На фазовой плоскости этому решению отвечает замкнутая траектория в виде окружности единичного радиуса с центром в начале координат (рис.1). Другие решения системы (5) или равносильной ей системы (6) таковы, что при $t \to \infty$ полярный радиус стремится к единице, а значит, упомянутая замкнутая фазовая траектория, представляющая собой устойчивый предельный цикл, является притягивающей траекторией, т.е. разновидностью аттрактора.

Следующий пример относится к трехмерной системе, у которой одно из решений имеет вид:

$$x = x^0(t) = \left(2 + \cos\nu t\right)\cos\omega t, \quad y = y^0(t) = \left(2 + \cos\nu t\right)\sin\omega t,$$
$$z = z^0(t) = \sin\nu t, \tag{7}$$

а остальные решения стремятся к нему при $t \to \infty$. Фазовая траектория, соответствующая (7), лежит на торе (тороидальной поверхности), показанном на рис.2. Сечение тора плоскостью $z = 0$ представляет собой две концентрические

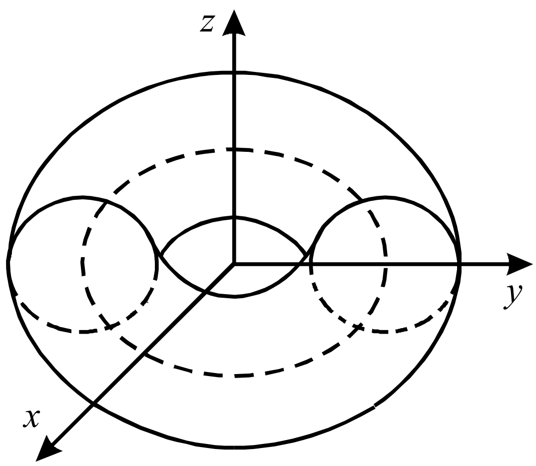


Рис. 2

окружности (сплошные линии на рис.3). Штриховой линией на рис.3 отмечено геометрическое место центров окружностей единичного радиуса, образующихся в сечениях тора плоскостями, проходящими через ось z (рис.4).

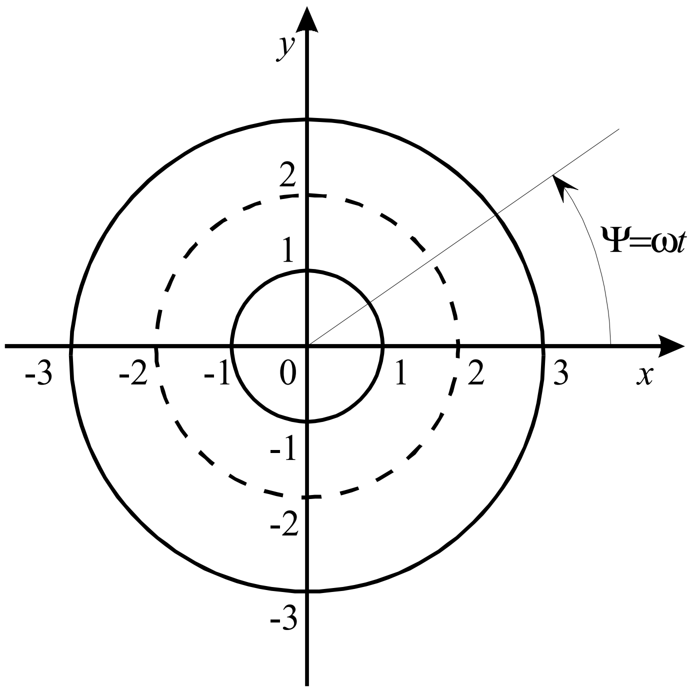


Рис. 3

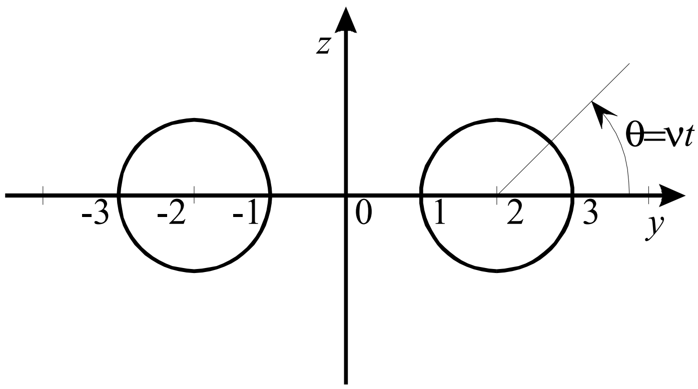


Рис. 4

В случае решения (7) изображающая точка при перемещении по траектории в трехмерном фазовом пространстве совершает сложное движение, в котором вращение вокруг оси z (угловая скорость ω) сочетается с вращением в поперечном направлении (угловая скорость ν). Если ω и ν находятся в рациональном отношении (соизмеримы), решение (7) - периодическое, в противном случае - почти периодическое, соответствующее квазипериодическому движению рассматриваемой трехмерной системы. В первом случае фазовая траектория, отвечающая решению (7), замкнута и представляет собой лежащий на торе устойчивый предельный цикл, во втором - мы имеем дело с незамкнутой траекторией, которая с течением времени покрывает собой всю двумерную тороидальную поверхность. Остальные фазовые траектории при $t \to \infty$ стягиваются (как изнутри, так и снаружи) к тору, который при несоизмеримых ω и ν сам по себе является аттрактором. Размерность такого притягивающего образования равна двум в отличие от устойчивого предельного цикла (одномерный аттрактор) и асимптотически устойчивого состояния равновесия (аттрактор нулевой размерности).

Отметим, что в общем случае среди N-мерных динамических систем (N = 3, 4,...) могут быть такие, в фазовом портрете которых содержатся аттракторы в виде торов размерности, достигающей значения N-1. В последующем будут рассмотрены также динамические системы (автономные не ниже третьего порядка и неавтономные - не ниже второго), у которых аттракторами являются более сложные геометрические образования, чем точка, замкнутая линия или тороидальная поверхность.

1.3. Эволюция объема элемента фазового пространства при движении вдоль траекторий

Воспользуемся подходом, согласно которому движение изображающих точек в фазовом пространстве интерпретируется как стационарное течение жидкости (гидродинамическая аналогия). Для этого в фазовом пространстве динамической системы, описываемой уравнениями (1) либо равносильным им уравнением (1а), выделим некоторый достаточно малый элемент объема

$$\Delta V = \prod_{i=1}^{N} \Delta x_i \, .$$

Внутри выделенного элемента расположены изображающие точки, относящиеся к отрезкам некоторых фазовых траекторий динамической системы. Движение изображающих точек по фазовым траекториям может приводить к изменению ΔV во времени. Введем в рассмотрение нормированную скорость этого изменения

$$\Lambda = \frac{1}{\Delta V}\frac{\mathrm{d}(\Delta V)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Delta x_i}\frac{\mathrm{d}(\Delta x_i)}{\mathrm{d}t} \, . \qquad (8)$$

Заменяя в (8) для каждой переменной x_i производную приращения Δx_i приращением производной и учитывая (1), имеем

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta F_i}{\Delta x_i} \, .$$

Полагая приращения Δx_i бесконечно малыми и переходя к пределу, получим следующую оценку для нормированной скорости изменения элементарного объема:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\hat{F}\,. \tag{9}$$

Введенная величина Λ позволяет установить характерное свойство консервативных систем (т.е. систем, у которых запасенная энергия остается неизменной во времени), заключающееся в неизменности элементарного объема. В механике для консервативных систем используется наименование «гамильтоновы», а уравнения движения могут быть записаны при помощи гамильтониана $\mathrm{H}(\hat{p},\hat{q})$, являющегося функцией обобщенных координат q_i и обобщенных импульсов p_i:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n\,. \tag{10}$$

Здесь n - число степеней свободы, $\hat{q} = \mathrm{col}(q_i)_n$, $\hat{p} = \mathrm{col}(p_i)_n$.

Из сравнения (10) с (1) и (1а) вытекает возможность следующего представления вектор столбцов $\hat{x}$ и $\hat{F}$:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{F}^{(q)} \\ \hat{F}^{(p)} \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{F}^{(q)} = \mathrm{col}\left(F_i^{(q)}\right)_n, \quad \hat{F}^{(p)} = \mathrm{col}\left(F_i^{(p)}\right)_n, \quad F_i^{(q)} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, \quad F_i^{(p)} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}.$$

Тогда, учитывая (9), имеем

$$\Lambda = \mathrm{div}\hat{F} = \sum_{i=1}^{n} \left({\partial F_i^{(q)}}\big/{\partial q_i} + {\partial F_i^{(p)}}\big/{\partial p_i} \right) = 0\,,$$

т.е. для гамильтоновой системы с изменением времени элементарный объем остается неизменным. Таким образом, если воспользоваться гидродинамической аналогией, то из полученного результата следует вывод, что для консервативной системы движение изображающих точек в фазовом пространстве интерпретируется как стационарное течение несжимаемой жидкости.

В неконсервативной системе $\operatorname{div}\hat{F}$ отлична от нуля. В случае, когда $\operatorname{div}\hat{F}$ отрицательна, с ростом времени происходит сжатие фазового объема, что соответствует диссипативной системе. Равенство нулю и отрицательность $\operatorname{div}\hat{F}$ могут служить критериями соответственно консервативности и диссипативности динамической системы.

Обратимся к конкретным примерам. Сначала запишем уравнение маятника

$$\ddot{\varphi} + 2\alpha\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0,$$

которое, если ввести угловую скорость $\Omega = \dot{\varphi}$, можно заменить системой двух уравнений первого порядка:

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \dot{\Omega} = -2\alpha\Omega - \omega_0^2 \sin\varphi .$$

В данном случае

$$\Lambda = \operatorname{div}\hat{F} = \operatorname{div}\left(\dot{\varphi}, \dot{\Omega}\right) = -2\alpha ,$$

и при $\alpha = 0$ (маятник без потерь) мы имеем дело с консервативной системой, при $\alpha > 0$ - с диссипативной.

Другой пример - рассматриваемая в последующем система Э.Лоренца

$$\dot{x} = p(y - x), \quad \dot{y} = x(r - z) - y, \quad \dot{z} = x \cdot y - b \cdot z , \tag{11}$$

где p, r, b - положительные параметры. Для нее

$$\Lambda = \operatorname{div}\hat{F} = \operatorname{div}\left(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) = -p - 1 - b < 0,$$

и согласно принятому критерию система Э.Лоренца относится к числу диссипативных.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Процедура линеаризации

Для исследования устойчивости в малом решений систем дифференциальных уравнений широко используется основанный на процедуре линеаризации переход к так называемым уравнениям первого приближения. Суть этой процедуры состоит в следующем.

Пусть $\hat{x}^0 = \mathrm{col}\left(x_l^0\right)_N$ - решение системы (1), либо системы (2), устойчивость или неустойчивость которого нужно выяснить. Обозначим через $\hat{\xi}$ отклонение от этого решения и, подставив

$$\hat{x}(t) = \hat{x}^0(t) + \hat{\xi}(t)$$

в (1а), либо (2а), получим

$$\dot{\hat{\xi}} = \hat{f}\left(\hat{\xi}, t\right), \tag{12}$$

где в случае автономной системы

$$\hat{f}\left(\hat{\xi}, t\right) = \hat{F}\left(\hat{x}^0 + \hat{\xi}\right) - \hat{F}\left(\hat{x}^0\right),$$

а в случае неавтономной -

$$\hat{f}\left(\hat{\xi}, t\right) = \hat{F}\left(\hat{x}^0 + \hat{\xi}, t\right) - \hat{F}\left(\hat{x}^0, t\right).$$

Заметим, что $\hat{f}(0, t) = 0$.

Устойчивость или неустойчивость решения $\hat{x}^0(t)$ устанавливается по поведению решений уравнения (12) в окрестности точки $\hat{\xi} = 0$. Далее отклонение (возмущение) $\hat{\xi}$ предполагается малым.

Ввиду трудности нахождения точного решения перейдем от уравнения (12) к приближенному уравнению, в правой части которого удержим только линейную относительно $\hat{\xi}$ компоненту, а нелинейную - отбросим как имеющую более высокий порядок малости:

$$\dot{\hat{\xi}} = \hat{A}(t)\hat{\xi}. \tag{13}$$

Используя обозначения для элементов квадратной матрицы $\hat{A}$ и вектор-столбца $\hat{f}$ в соответствии с формулами

$$\hat{A} = [A_{ks}]_{N,N}, \quad \hat{f} = \mathrm{col}(f_k)_N,$$

имеем

$$A_{ks} = \left.\frac{\partial f_k}{\partial \xi_s}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial F_k}{\partial x_s}\right|_{x=x^0}. \tag{14}$$

Уравнение (13) лежит в основе последующего рассмотрения устойчивости равновесных и периодических решений.

2.2. Устойчивость состояний равновесия автономной системы

Пусть соответствующее автономной системе уравнение (1а) имеет равновесное, т.е. не зависящее от времени, решение $\hat{x}^0$. В таком случае в правой части (12) нет явной зависимости от времени, а матрица $\hat{A}$, входящая в линейное уравнение первого приближения (13), оказывается постоянной, что позволяет сразу записать решение этого уравнения в виде

$$\hat{\xi}(t) = \mathrm{e}^{t\hat{A}}\,\hat{\xi}(0).$$

Ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости решения $\hat{x}^0$ зависит от знаков вещественных частей собственных чисел постоянной матрицы $\hat{A}$, т.е. корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ уравнения

$$\det\left[\hat{A} - \lambda\,\hat{\mathbf{E}}\right] = 0. \tag{15}$$

где $\hat{\mathbf{E}} = \left[\delta_{ik}\right]_{N,N}$ - единичная матрица.

Как показал А.М.Ляпунов [2], если вещественные части всех корней уравнения (15) отрицательны, то равновесное решение $\hat{x}^0$ уравнения (1а) устойчиво и притом асимптотически. Если же хотя бы у одного корня уравнения (15) оказывается положительная вещественная часть, то решение $\hat{x}^0$ и соответствующее ему состояние равновесия неустойчивы.

Учитывая, что сумма корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ равна следу матрицы $\hat{A}$, и принимая во внимание (14), имеем

$$\sum_{s=1}^{N} \lambda_s = \sum_{s=1}^{N} A_{ss} = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial F_s}{\partial x_s}\bigg|_{x=x^0} = \left[\operatorname{div} \hat{F}\right]_{x=x^0}.$$

Как видно из последней формулы, для устойчивого равновесного решения $\hat{x} = \hat{x}^0$ $\operatorname{div} \hat{F} < 0$, что означает сжатие элемента фазового объема с течением времени. Следует заметить, что в этом случае элемент фазового объема сжимается по всем координатам.

2.3. Устойчивость периодических решений

Ниже рассматриваются неавтономная система, у которой правая часть уравнения (2а) зависит от t периодически с периодом T:

$$\hat{F}(\hat{x}, t) = \hat{F}(\hat{x},\ t + T), \tag{16}$$

и автономная система, процессы в которой описываются уравнением (1а) с правой частью, не содержащей явной зависимости от времени. И в том и в другом случае исследуется вопрос об устойчивости периодического решения $\hat{x}^0(t)$ периода T, которое в случае автономной системы будет предполагаться отличным от состояния равновесия. Для неавтономной системы под T понимается либо период воздействующей на нее внешней силы, либо период изменения какого либо из параметров системы. Заметим, что во многих неавтономных системах при определенных условиях могут возникать движения с периодом, отличным от T (например, с вдвое большим периодом).

Периодичность решения $\hat{x}^0(t)$ приводит к периодической зависимости от t правой части уравнения (12)

$$\hat{f}\left(\hat{\xi}, t\right) = \hat{f}\left(\hat{\xi}, t + T\right)$$

и к периодичности матрицы $\hat{A}$ линейного уравнения первого приближения (13)

$$\hat{A}(t) = \hat{A}(t + T). \tag{17}$$

Как следует из теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [3], решение уравнения (13) может быть записано в следующем виде:

$$\hat{\xi}(t) = \hat{\Phi}(t)\hat{\xi}(0),$$

где $\hat{\Phi}(t)$ - фундаментальная матрица уравнения (13), обращающаяся при $t = 0$ в единичную матрицу $\hat{\mathbf{E}}$.

При условии (17) важное значение для ответа на вопрос об устойчивости или неустойчивости периодического решения $\hat{x}^0(t)$ имеет характер собственных чисел матрицы $\hat{\Phi}(t)$, т.е. корней $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$ уравнения

$$\det\left[\hat{\Phi}(T) - \sigma\,\hat{\mathbf{E}}\right] = 0. \tag{18}$$

Эти корни называются мультипликаторами (или характеристическими числами) уравнения (13) с периодической матрицей $\hat{A}$. Матрицу $\hat{\Phi}(t)$ иногда называют матрицей или оператором монодромии [4]. Находят применение также так называемые характеристические показатели $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, связанные с мультипликаторами посредством равенств

$$\sigma_i = \mathrm{e}^{\lambda_i T}, \quad i = 1,2,\ldots,N.$$

Вещественные части характеристических показателей, выражаемые через отнесенные к периоду T логарифмы модулей σ_i, часто именуются ляпуновскими показателями:

$$\lambda'_i = \mathrm{Re}\,\lambda_i = \frac{1}{T}\ln\left|\sigma_i\right|.$$

Можно показать[3], что в случае автономной системы, когда периодическое решение уравнения (1а) отлично от состояния равновесия, один из мультипликаторов уравнения (13) обязательно равен единице, т.е. один из ляпуновских показателей всегда равен нулю.

Теперь приведем без доказательства достаточные условия устойчивости периодического решения неавтономной системы [3].

Теорема Ляпунова. Пусть в уравнении (2а) правая часть периодична по t с периодом T согласно (16) и $\hat{x}^0(t)$ - его периодическое решение также периода T (см.(4)). Если все мультипликаторы уравнения (13) с периодической матрицей $\hat{A}$ (см.(17)) по модулю меньше единицы, то решение $\hat{x}^0(t)$ асимптотически устойчиво.

Приведенные условия означают, что на комплексной плоскости все точки, соответствующие значениям мультипликаторов, в случае устойчивого периодического решения находятся внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат (рис.5). Те же условия можно сформулировать как требование отрицательности всех ляпуновских показателей уравнения (13).

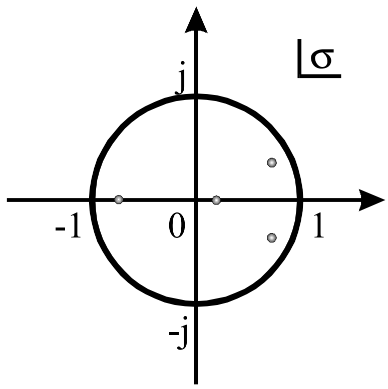


Рис. 5

Следует подчеркнуть, что речь идет об условиях асимптотической устойчивости периодического решения неавтономной системы. Эти условия невыполнимы для автономной системы, поскольку периодическое решение автономной системы (отличное от состояния равновесия) не может быть асимптотически устойчивым. Поэтому для устойчивости периодического решения автономной системы будут даны (без доказательства) другие, более слабые достаточные условия [3]. При этом речь пойдет не об асимптотической устойчивости, а об удовлетворяющей менее сильным требованиям устойчивости по Ляпунову [1].

Теорема Андронова-Витта. Пусть $\hat{x}^0(t)$ - периодическое решение периода T уравнения (1а), отличное от состояния равновесия. Если мультипликатор уравнения (13), равный единице, имеет кратность единица, а все остальные мультипликаторы уравнения (13) по модулю меньше единицы, то решение $\hat{x}^0(t)$ устойчиво по Ляпунову.

На рис.6 показан возможный вариант расположения мультипликаторов в случае устойчивого периодического решения автономной системы.

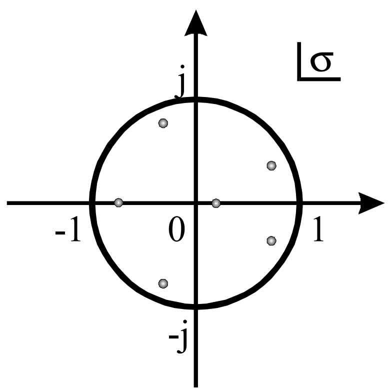


Рис. 6

Проиллюстрируем положения теоремы Андронова-Витта на примере исследования устойчивости в малом периодического решения системы (5).

Имея в виду также систему (6) для полярных координат и полагая $\psi(0)=0$, запишем периодическое решение

$$x^0 = \cos t, \quad y^0 = \sin t$$

и соответствующие ему равенства для R и ψ:

$$R^0 = 1, \quad \psi^0 = t.$$

Дадим R и ψ малые приращения r и θ:

$$R = 1 + r, \quad \psi = t + \theta.$$

Подставляя последние соотношения в (6) и учитывая, что $|r| << 1$, придем к следующим уравнениям

$$\dot{r} = -2r, \quad \dot{\theta} = 0,$$

имеющим решения

$$r(t) = r(0)\mathrm{e}^{-2t}, \quad \theta(t) = \theta(0).$$

Выразим теперь возмущающие добавки ξ и η к стационарным решениям x^0, y^0 через r и θ, отбросив в окончательных выражениях малые более высокого порядка:

$$\xi(t) = x - x^0 = (1 + r)\cos(t + \theta) - \cos t = r(t)\cos t - \theta(t)\sin t,$$

$$\eta(t) = y - y^0 = (1 + r)\sin(t + \theta) - \sin t = r(t)\sin t - \theta(t)\cos t.$$

Легко видеть, что в принятом приближении

$$\xi(0) = r(0), \quad \eta(0) = \theta(0),$$

и можно перейти к следующей матричной записи:

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}\cos t & -\sin t \\ \mathrm{e}^{-2t}\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Квадратная матрица в правой части равенства (19) - это фундаментальная матрица $\hat{\Phi}(t)$ системы линейных дифференциальных уравнений для малых возмущений ξ и η. Тогда, учитывая, что в рассматриваемом примере период $T = 2\pi$, можно записать уравнение (18) в следующей форме

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-4\pi} - \sigma & 0 \\ 0 & 1 - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

откуда вытекают два значения мультипликаторов:

$$\sigma_1 = \mathrm{e}^{-4\pi}, \quad \sigma_2 = 1 .$$

Ляпуновские показатели оказываются равными соответственно минус двум и нулю.

Первый мультипликатор по модулю меньше единицы. Кратность второго (единичного) - равна единице. Таким образом, условия теоремы Андронова-Витта выполнены, а значит рассматриваемое периодическое решение устойчиво (по Ляпунову).

Как видно из (19),

$$\xi(2\pi) = e^{-4\pi}\xi(0), \quad \eta(2\pi) = \eta(0).$$

Эти соотношения можно записать, используя σ_1, и σ_2 в качестве множителей:

$$\xi(2\pi) = \sigma_1\xi(0), \quad \eta(2\pi) = \sigma_2\eta(0).$$

Последние равенства, связывающие значения возмущений в моменты времени, различающиеся на величину, равную периоду, могут служить пояснением происхождения термина «мультипликатор».

В общем случае получаемый из решения уравнения (13) N -мерный вектор

$$\hat{\xi}\,(T) = \hat{\Phi}(T)\hat{\xi}\,(0),$$

откуда следует, что первоначальные возмущения периодического решения, рассматриваемые в проекциях на собственные векторы матрицы монодромии $\hat{\Phi}(T)$, через период T умножаются на соответствующие мультипликаторы (собственные числа матрицы монодромии).

3. МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

3.1. Вводные замечания

Многие стороны поведения фазовых траекторий динамической системы могут быть выяснены путем исследования поведения точек пересечения траекторий с так называемым отрезком без контакта в случае двумерного фазового пространства, с секущей поверхностью в случае трехмерного фазового пространства или с секущей гиперповерхностью в случае фазового пространства большего числа измерений.

Такой подход лежит в основе метода точечных отображений, называемого также методом отображений Пуанкаре. С помощью этого метода удается как бы понизить размерность исследуемого фазового пространства. Кстати, для автономной динамической системы само введение фазового пространства можно трактовать как исключение оси времени, т.е. уменьшение числа измерений на единицу.

Родоначальниками метода точечных отображений считаются А.Пуанкаре и Дж.Биркгоф. В теорию нелинейных колебаний его ввел А.А.Андронов.

3.2. Одномерные отображения

Имея в виду некоторую автономную динамическую систему 2-го порядка, будем интересоваться поведением траекторий в какой-либо области ее фазового пространства, которым для нее является двумерная поверхность (по большей части плоскость).

В отношении системы дифференциальных уравнений, которыми описываются процессы в рассматриваемой динамической системе, предполагаются выполненными требования теоремы единственности решения и его непрерывной зависимости от начальных условий.

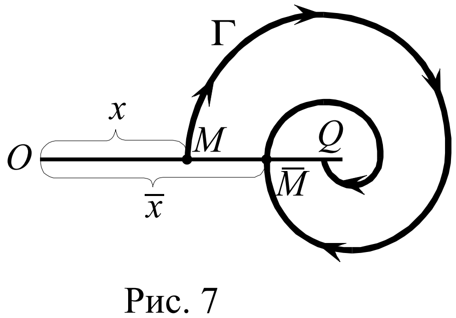


Рис. 7

Выберем на фазовой поверхности отрезок прямой или дуги гладкой кривой, в каждой точке которого траектории интересующей нас системы пересекают его, нигде не касаясь. Такой отрезок OQ (рис.7), называется секущим отрезком, или отрезком без контакта. Пусть изображающая точка, движущаяся по траектории

Γ, в момент времени t совпадает с точкой M отрезка OQ. Если при дальнейшем движении изображающей точки вдоль кривой Γ она будет вновь и вновь пересекать отрезок без контакта, то говорят, что точка M имеет последующие. Условимся, что множество последующих точек задается пересечениями Γ с OQ в том же направлении, что и в случае точки M. Обозначим через $\overline{M}$ первую (ближайшую к M) последующую точку, в которой изображающая точка окажется в момент времени $\bar{t}$. Пусть x и $\bar{x}$ - координаты точек M и $\overline{M}$, отсчитываемые вдоль отрезка OQ (рис.7). В силу непрерывной зависимости решений от начальных условий точки, близкие к M (для других траекторий) также имеют последующие, и в том числе близкие к $\overline{M}$. Связь между координатами точек M и $\overline{M}$ задается функцией последования P:

$$\bar{x} = \mathrm{P}(x), \qquad (20)$$

выражающей закон некоторого точечного отображения отрезка OQ (или его части) в себя. Если OQ - отрезок прямой, то говорят о точечном преобразовании прямой в прямую. Помимо (20) возможны и другие формы записи упомянутого закона:

$$x_{i+1} = \mathrm{P}(x_i), \quad x(i+1) = \mathrm{P}(x(i)).$$

В данном случае мы имеем разностное уравнение, а не дифференциальное, поскольку переменная x фиксируется лишь в дискретные моменты времени. Это различие не очень существенное. По крайней мере, связанные с ним трудности значительно меньше, чем трудности непосредственного исследования фазовых траекторий в окрестности не точки, а целой кривой. На этом основывается эффективность метода точечных отображений.

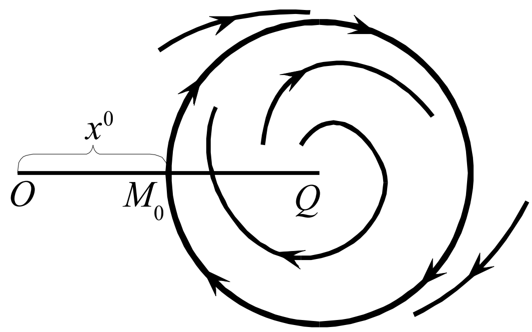


Рис. 8

Для замкнутой фазовой траектории точка ее пересечения с отрезком OQ совпадает со своей последующей (рис.8), что приводит к уравнению

$$x^0 = \mathrm{P}(x^0). \qquad (21)$$

Точка M_0 с координатой x^0 называется при этом неподвижной точкой точечного отображения P.

Нахождение неподвижных точек отображения Р помогает обнаружению замкнутых фазовых траекторий, в том числе предельных циклов. Неподвижная точка M_0 на рис.8 соответствует однократному (однопетлевому) циклу. У двумерных систем (N=2) циклов большей кратности не бывает. При $N > 2$ могут быть не только однократные, но и двукратные, трехкратные и более сложные циклы (см., например, изображенный на рис.14 двукратный цикл в трехмерном фазовом пространстве).

3.3. Условие устойчивости однократной неподвижной точки одномерного отображения

Вид функции $\mathrm{P}(x)$, входящей в соотношения (20), (21), при x, близких к x^0, полностью определяется характером поведения фазовых траекторий вблизи цикла, которому соответствует неподвижная точка M_0 (рис.8). Это позволяет условие устойчивости цикла называть на языке точечных преобразований условием устойчивости неподвижной точки.

Для вывода последнего подставим в (20)

$$x = x^0 + \xi, \quad \bar{x} = x^0 + \bar{\xi},$$

где ξ и $\bar{\xi}$ - возмущения в моменты t и $\bar{t}$ соответственно.

Учитывая (21) и малость ξ, нетрудно прийти к соотношению

$$\bar{\xi} = \mathrm{P}'\left(x^0\right)\xi,$$

где величина $\mathrm{P}'\left(x^0\right)$, равная производной $d\bar{x}/dx$ при $x = x^0$, является мультипликатором, соответствующим координате, которая отсчитывается вдоль отрезка OQ (мультипликатор для поперечной координаты в случае двумерной автономной системы равняется единице).

Полагая $\bar{t} > t$, заметим, что малые возмущения, относящиеся к последовательным точкам отображения $\bar{x} = \mathrm{P}(x)$, будут с течением времени убывать по модулю только в том случае, если

$$\left|\mathrm{P}'\left(x^0\right)\right| < 1.$$

Подобные рассуждения лежат в основе *теоремы Кёнигса*: неподвижная

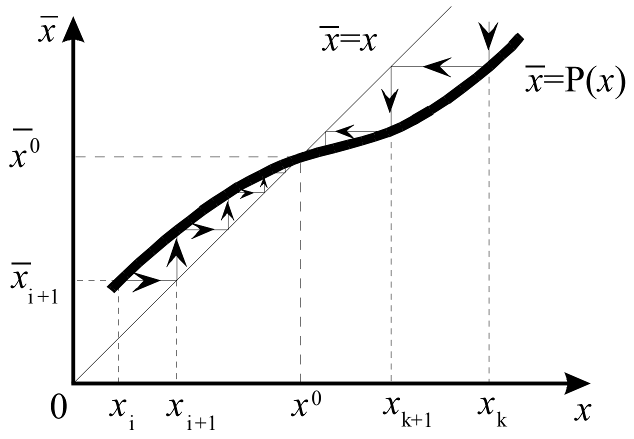


Рис. 9

точка x^0 точечного отображения $\bar{x} = \mathrm{P}(x)$ устойчива: если $\left|{}^{\mathrm{d}\,\bar{x}}\!/_{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=x^0} < 1$, и не-

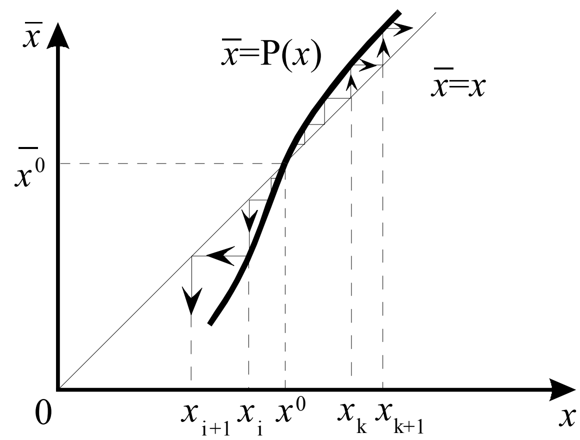


Рис. 10

устойчива, если $\left|{}^{\mathrm{d}\,\bar{x}}\!/_{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=x^0} > 1$. Наглядными иллюстрациями справедливости этого утверждения могут служить диаграммы последовательных отображений в окрестностях устойчивой (рис.9) и неустойчивой (рис.10) неподвижных точек, называемые «лесенками» Ламерея.

В качестве примера вновь рассмотрим систему (6). Проинтегрируем первое из уравнений (6), предварительно помножив его на $2R^{-3}$. Получим формулу

$$R^{-2}(t) = 1 + \left[R^{-2}(0) - 1\right]\mathrm{e}^{-2t}, \qquad (22)$$

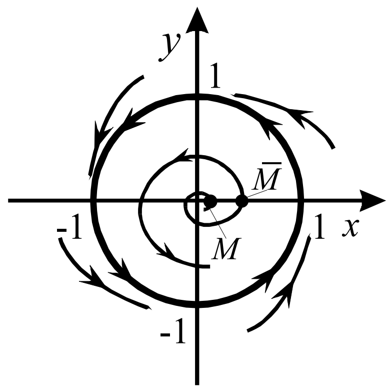


Рис. 11

при помощи которой, учитывая линейную зависимость фазового угла ψ от времени t можно построить фазовый портрет (рис.11), содержащий, в частности, цикл $R^0 = 1$.

Выберем в качестве секущего отрезка участок положительной оси x, для которой $\psi = 2\mathrm{k}\pi \quad (\mathrm{k} = 0,1,2\ldots)$. В результате, принимая во внимание (22), придем к следующему выражению для функции последования (рис.12):

$$\mathrm{P}(x) = \left[1 + \left(x^{-2} - 1\right)\mathrm{e}^{-4\pi}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Условие (21) приводит к значению координаты неподвижной точки $x^0 = 1$, которое соответствует устойчивому предельному циклу.

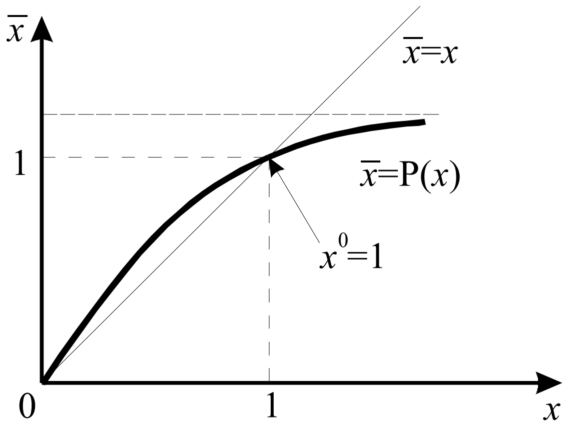


Рис. 12

Учитывая (23), можно связь между малым отклонением ξ от точки x^0 и последующим значением $\bar{\xi}$ представить в виде

$$\bar{\xi} = e^{-4\pi}\xi,$$

где множитель перед ξ является одним из найденных выше мультипликаторов (другой мультипликатор в данном случае равен единице).

3.4. Двумерные и многомерные отображения

Пусть имеется автономная динамическая система 3-го порядка, причем процессы в ней описываются системой дифференциальных уравнений, для которой справедлива теорема единственности решения и его непрерывной зависимости от начальных условий. Будем интересоваться поведением траекторий динамической системы в какой-либо области трехмерного фазового пространства. Выберем затем некоторую поверхность Σ, которая в каждой точке пересекается (без касания) фазовыми траекториями динамической системы. Такая поверхность называется секущей. Положение точек пересечения задается далее на этой поверхности координатами x_1, x_2, либо двумерным вектором $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Предположим, что некоторая траектория Γ (рис.13) порождает на секущей точечное отображение, ставящее в соответствие любой точке *M* пересечения Γ с Σ ближайшую следующую за *M* точку $\overline{M}$. Последовательность точек отобра-

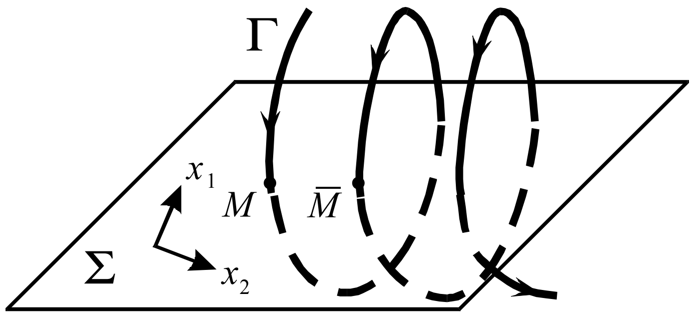


Рис. 13

жения, задаваемая пересечениями Γ с Σ в одном направлении, называется сечением Пуанкаре для траектории Γ.

Вектор $\bar{\hat{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$, определяющий положение последующей точки отыскивается при помощи функции последования $\hat{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_1 \\ \mathrm{P}_2 \end{pmatrix}$ благодаря векторному равенству, имеющему такой же вид, как скалярное соотношение (20), и эквивалентному системе двух равенств

$$\bar{x}_1 = \mathrm{P}_1(x_1, x_2), \quad \bar{x}_2 = \mathrm{P}_2(x_1, x_2).$$

Если в качестве секущей поверхности Σ выбрана плоскость, то говорят, что двумерной векторной функцией $\hat{\mathrm{P}}$ задается точечное отображение плоскости в плоскость.

Замкнутые фазовые траектории порождают на секущей плоскости неподвижные точки. В простейшем случае однооборотного (однопетлевого) цикла $\bar{\hat{x}} = \hat{x}$, что соответствует однократной неподвижной точке, положение которой определяется при помощи уравнения аналогичного (21):

$$\hat{x}^0 = \hat{\mathrm{P}}\left(\hat{x}^0\right).$$

При $\bar{\hat{x}} \neq \hat{x}$, но при $\bar{\bar{\hat{x}}} = \hat{x}$ приходим к уравнению

$$\hat{\mathrm{P}}\left(\hat{\mathrm{P}}\left(\hat{x}^0\right)\right)=\hat{x}^0,$$

определяющему положения двух двукратных неподвижных точек M и K, возникающих в результате пересечения двухоборотного (двухпетлевого) цикла с секущей поверхностью Σ (рис.14).

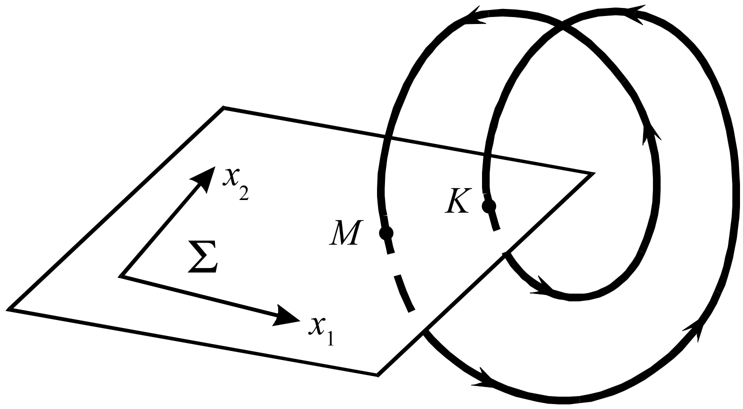


Рис. 14

В общем случае для n-кратных неподвижных точек, соответствующих n-оборотному циклу, имеем уравнение

$$\hat{\mathrm{P}}^{(n)}\left(\hat{x}^0\right)=\hat{x}^0, \tag{24}$$

где $\hat{\mathrm{P}}^{(n)}(\hat{x})=\hat{\mathrm{P}}\left(\hat{\mathrm{P}}\ldots\left(\hat{\mathrm{P}}\left(\hat{\mathrm{P}}(\hat{x})\right)\right)\right)$ - функция, получаемая n-кратным применением функции последования, а $n = 1, 2, 3,...$

Возможно применение большинства введенных выше определений для сечений траекторий N-мерного фазового пространства. Например, для секущей гиперповерхности размерности N-1 под $\hat{x}, \hat{x}^0, \hat{\mathrm{P}}, \hat{\mathrm{P}}^{(n)}$ и возмущениями $\hat{\xi}=\hat{x}-\hat{x}^0$ следует понимать векторы той же размерности.

Вводя обозначение

$$\hat{\xi}^{(n)}=\hat{\mathrm{P}}^{(n)}(\hat{x})-\hat{x}^0,$$

учитывая (24) и малость $\hat{\xi}$, нетрудно прийти к соотношению, получаемому в результате применения процедуры линеаризации:

$$\hat{\xi}^{(n)}=\hat{\mathrm{D}}\,\hat{\xi}, \tag{25}$$

где $\hat{\mathrm{D}} = \left[\mathrm{D}_{ij}\right]_{N-1,N-1} = \left[\left.\dfrac{\partial \mathrm{P}_i^{(n)}}{\partial x_j}\right|_{x=x^0}\right]_{N-1,N-1}$ - квадратная матрица ($N-1$)-го порядка.

Опираясь на соотношение (25), можно исследовать устойчивость неподвижной точки $\hat{x}^0$, а значит, и цикла, соответствующего периодическому движению автономной динамической системы N -го порядка.

Собственные числа матрицы $\hat{\mathrm{D}}$, называемые корнями характеристического уравнения неподвижной точки, являются мультипликаторами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{N-1}$, значимыми с точки зрения исследования устойчивости этого движения (для автономной системы $\sigma_N = 1$).

4. КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

4.1. Вводные замечания

Приводимая ниже классификация относится к неконсервативным системам. В основе ее лежит анализ поведения фазовых траекторий в той области фазового пространства динамической системы, в которой содержится либо особая точка, соответствующая состоянию равновесия, либо фазовая траектория, отвечающая периодическому или квазипериодическому движению. Из фазовых траекторий, поведение которых анализируется, интерес представляют прежде всего те траектории, по которым изображающие точки при $t \to +\infty$ (1-й вариант), либо при $t \to -\infty$ (2-й вариант) стремятся к особой точке или выделенной фазовой траектории, соответствующей периодическому или квазипериодическому движению. Множество всех фазовых траекторий, относящихся к 1-му варианту движения изображающей точки, образуют устойчивое интегральное многообразие W^s, а множество всех фазовых траекторий, относящихся ко 2-му варианту движения, - неустойчивое интегральное многообразие W^u. В последнее множество включают также и те траектории, расстояние от которых до выделенной фазовой траектории с течением времени остается ограниченным, но не стремится к нулю. Сюда следует отнести и саму выделенную фазовую траекторию[1].

Как будет видно из последующего рассмотрения, возможны ситуации, когда устойчивое (или неустойчивое) интегральное многообразие состоит из конечного числа траекторий (см., например, рис.19, 22, 23), что соответствует размерности многообразия, равной единице. Может оказаться, что фазовые траектории некоторого многообразия лежат на участке двумерной поверхности, причем через каждую точку участка поверхности проходит какая-либо траектория данного многообразия, размерность которого считается в этом случае равной двум. Случай, когда фазовые траектории, относящиеся к многообразию, целиком заполняют какую-нибудь область трехмерного пространства, соответствует многообразию размерности три, и т.д.

Классификация, речь о которой пойдет далее, опирается на значения размерностей устойчивого и неустойчивого многообразий: $\dim W^s$ и $\dim W^u$. Для устойчивого многообразия может, кроме того, применяться обозначение S_p^+, где $p = \dim W^s$, а для неустойчивого - S_q^-, где $q = \dim W^u$. Соответственно

---

[1] Выделенную фазовую траекторию относят одновременно и к W^u, и к W^s.

особая точка с интегральными многообразиями S_p^+ и S_q^- обозначается в последующем как $O^{p,q}$. Классификация состояний равновесия нелинейных систем проводится ниже в предположении, что необходимые сведения об особенностях поведения фазовых траекторий в окрестностях особых точек могут быть получены в результате анализа линеаризованных систем, хотя это допущение справедливо, строго говоря, не всегда.

4.2. Классификация состояний равновесия (особых точек) двумерных динамических систем

Будем исходить из следующей формы записи дифференциальных уравнений, которыми описываются процессы в автономной нелинейной системе 2-го порядка ($N=2$):

$$\dot{x}=\mathrm{P}(x,y), \quad \dot{y}=\mathrm{Q}(x,y) . \tag{26}$$

Равновесные значения x^0, y^0 являются решениями уравнений

$$\mathrm{P}\left(x^0,y^0\right)=0, \quad \mathrm{Q}\left(x^0,y^0\right)=0 . \tag{27}$$

Воспользуемся процедурой линеаризации для исследования устойчивости (в малом) какого-либо равновесного решения (x^0, y^0) и соответствующей ему особой точки фазового пространства динамической системы. Полагая в (26)

$$x=x^0+\xi, \quad y=y^0+\eta,$$

учитывая (27) и малость возмущений ξ и η, получим линейные уравнения 1-го приближения

$$\dot{\xi}=\mathrm{P}_x^{'}\,\xi+\mathrm{P}_y^{'}\,\eta, \quad \dot{\eta}=\mathrm{Q}_x^{'}\,\xi+\mathrm{Q}_y^{'}\,\eta,$$

где частные производные по x и y определяются в точке (x^0, y^0).

Характеристическим уравнением линеаризованной системы является квадратное уравнение

$$\lambda^2+2\alpha\lambda+\Delta=0, \tag{28}$$

где $2\alpha=-\mathrm{P}_x^{'}-\mathrm{Q}_y^{'}, \quad \Delta=\mathrm{P}_x^{'}\,\mathrm{Q}_y^{'}-\mathrm{P}_y^{'}\mathrm{Q}_x^{'}$.

Характер поведения траекторий на фазовой плоскости в окрестности особой точки (x^0, y^0) определяется корнями λ_1, λ_2 уравнения (28) и, в частно-

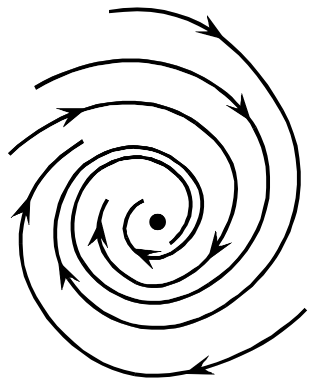


Рис. 15

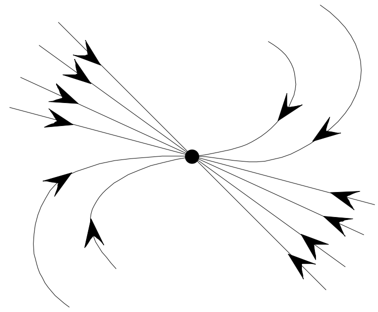


Рис. 16

сти, знаками их вещественных частей. Содержащие точку (x^0, y^0) фрагменты возможных фазовых портретов представлены на рис.15-19.

Рис.15,16 соответствуют случаям, когда как у λ_1, так и у λ_2 вещественные части отрицательны и изображающие точки по всем траекториям в окрестности особой точки с ростом t стремятся к ней. Эти фазовые траектории образуют двумерные устойчивые интегральные многообразия W^s точки (x^0, y^0), размерности же неустойчивых многообразий W^u, очевидно, равны нулю.

Особые точки на рис.15,16 относятся к типу $O^{2,0}$ и называются устойчивыми (первая из них - устойчивый фокус, вторая - устойчивый узел). Особые

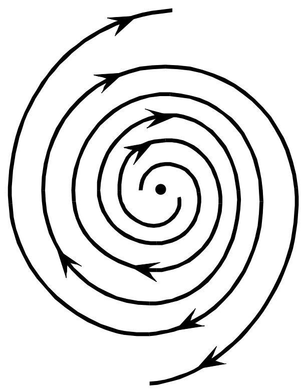


Рис. 17

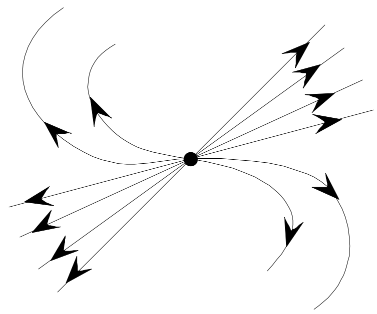


Рис. 18

точки на рис.17,18 относятся к типу $O^{0,2}$ и называются неустойчивыми (неустойчивый фокус и узел соответственно). Для них $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} > 0, \quad \dim W^s = 0, \quad \dim W^u = 2$.

В случае, когда характеристическое уравнение (28) имеет два вещественных корня разных знаков, картина фазовых траекторий в окрестности особой точки выглядит так, как показано на рис.19. Имеется две траектории, по которым изображающая точка стремится к (x^0, y^0) при $t \to \infty$ и которые образуют одномерное интегральное многообразие W^s. Точно так же имеются две фазовые траектории, выходящие из точки (x^0, y^0), по которым изображающая точка стремится к ней при $t \to -\infty$ $\left(\dim W^u = 1\right)$. Особая точка на рис.19 относится к типу $O^{1,1}$ и называется седловой (седлом).

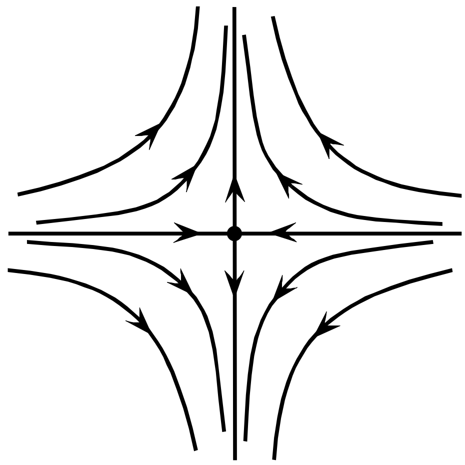


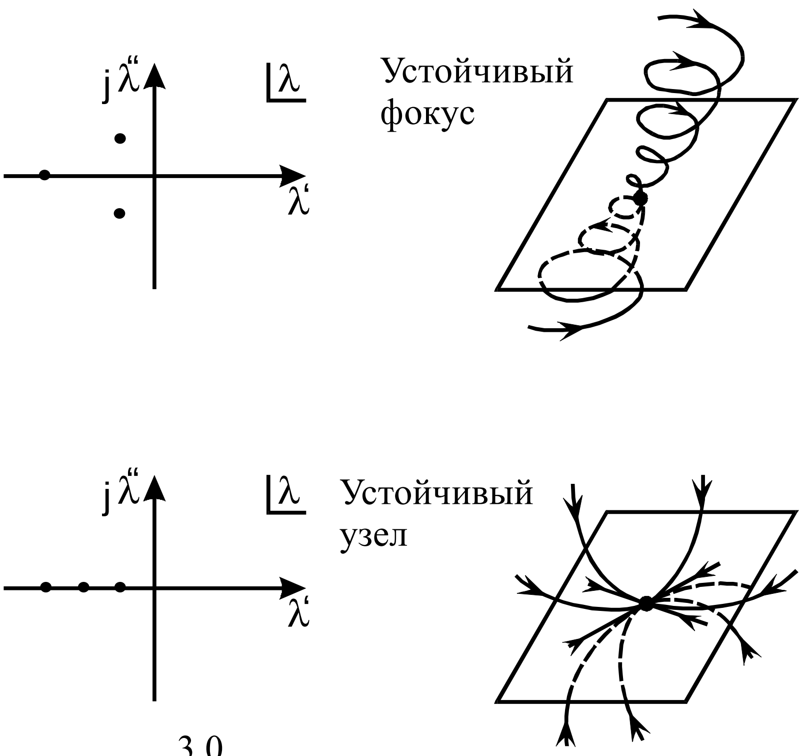
Рис. 19

4.3. Классификация состояний равновесия (особых точек) трехмерных динамических систем

Исследование устойчивости в малом состояния равновесия нелинейной системы 3-го порядка $(N=3)$ приводит к кубическому характеристическому уравнению линеаризованной системы:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

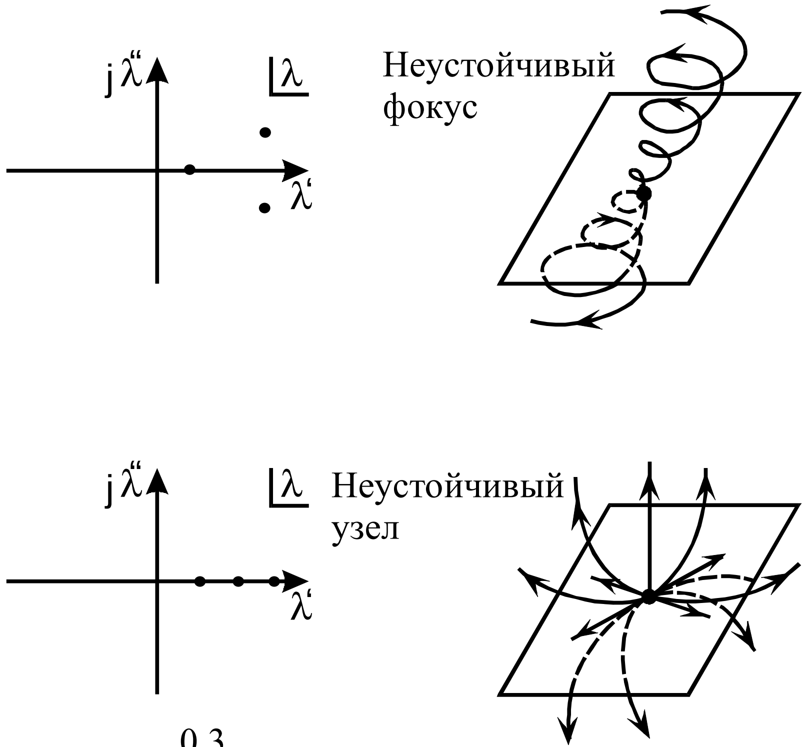
Как и в случае двумерной системы, тип особой точки определяется положением корней характеристического уравнения на комплексной плоскости λ $(\lambda = \lambda' + j\lambda'')$. Некоторые варианты взаимного расположения корней и соответствующие им трехмерные фазовые портреты в окрестности особой точки с указанием ее типа приведены на рис.20 - 23.



$O^{3,0}$

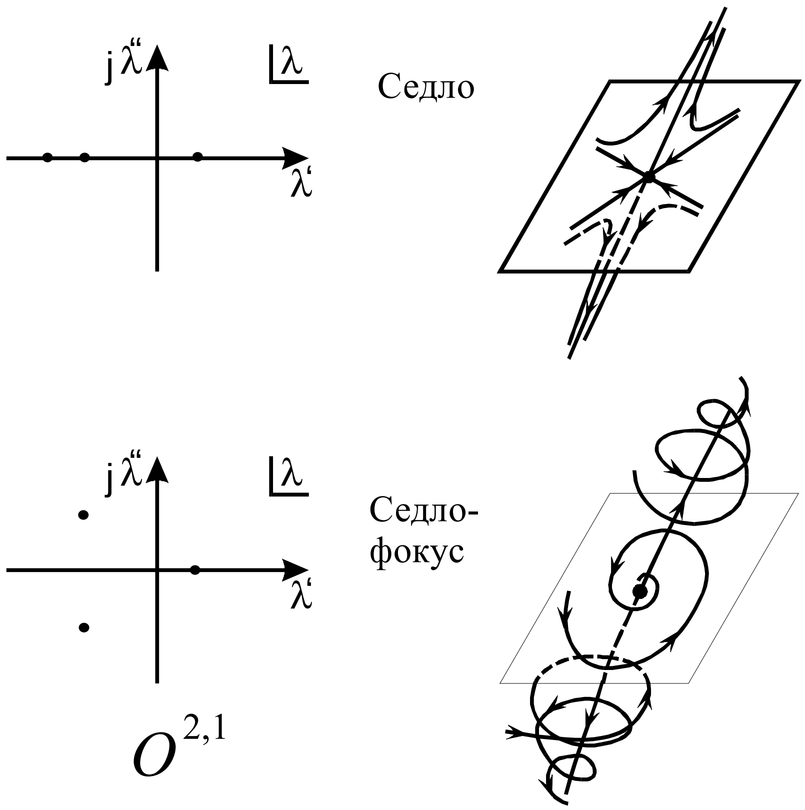
Рис. 20

Особые точки типа $O^{3,0}$ называются устойчивыми, типа $O^{0,3}$ - неустойчивыми, типов $O^{2,1}$, $O^{1,2}$ - седловыми.



$O^{0,3}$

Рис. 21



$O^{2,1}$

Рис. 22

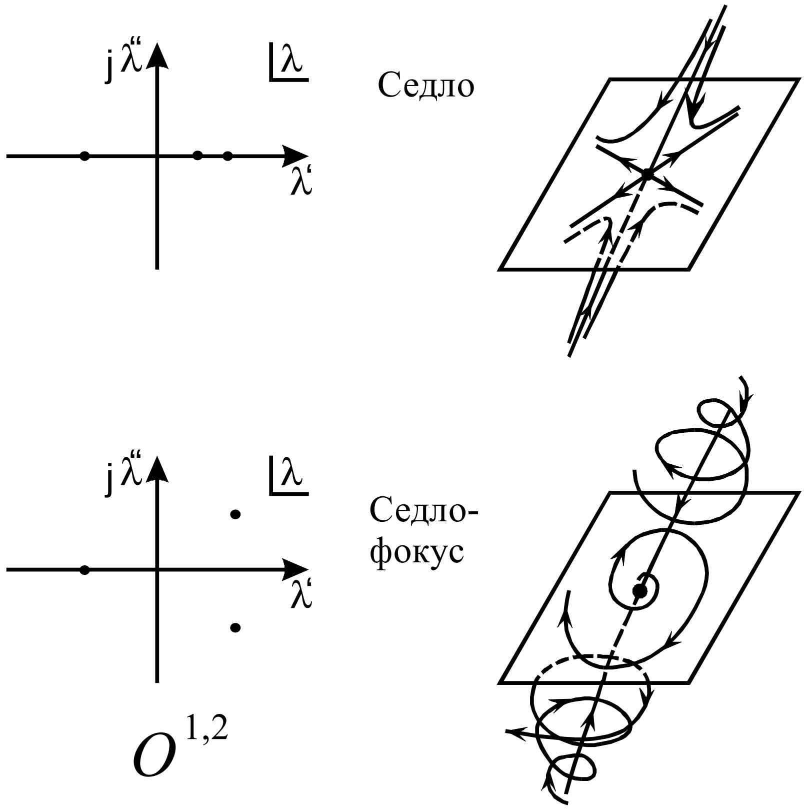


Рис. 23

4.4. Классификация состояний равновесия (особых точек) N-мерных динамических систем

Рассматривая для линеаризованной системы характеристическое уравнение N-й степени и полагая, что p его корней имеют отрицательную вещественную часть, а q корней - положительную, причем $p+q=N$, можно показать, что размерности интегральных многообразий особой точки в общем случае определяются равенствами

$$\dim W^s = p\,, \quad \dim W^u = q\,.$$

Таким образом, используя введенное выше для особой точки обозначение $O^{p,q}$, определим точку $O^{N,0}$ как устойчивую, а точку $O^{0,N}$ - как неустойчивую. Ситуация, когда и p, и q отличны от нуля, соответствует седловой особой точке.

4.5. Классификация периодических и квазипериодических движений динамических систем

Периодические движения, представляемые в фазовом пространстве замкнутыми траекториями, классифицируются и обозначаются с учетом классификации и обозначений соответствующих им неподвижных точек сечений Пуанкаре, поскольку последовательные точки отображения лежат на кривых (см. пунктирные линии на рис.24, 25), подобных фазовым траекториям в окрестности состояния равновесия. В этом смысле неподвижная точка отображения Пуанкаре - аналог состояния равновесия, и для нее применимы определения и обозначения, введенные выше для особой точки.

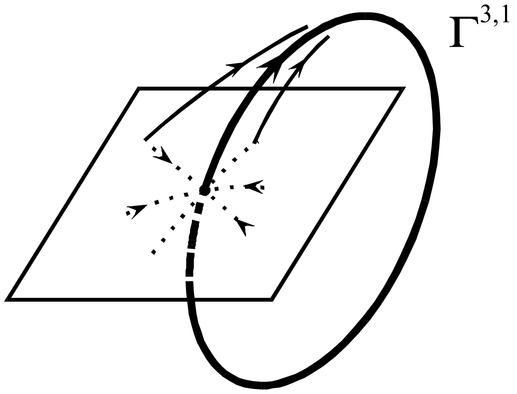


Рис. 24

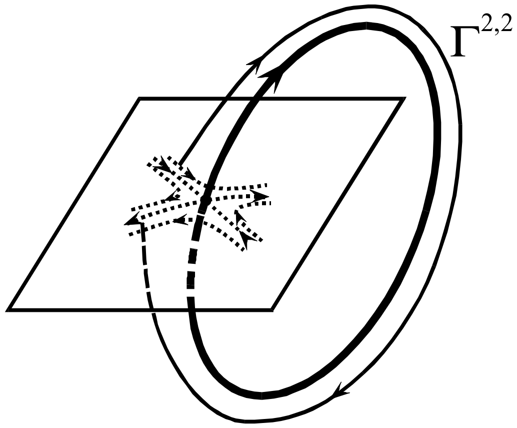


Рис. 25

Пусть для неподвижной точки $\dim W^s = p$, $\dim W^u = q$ и используется обозначение $O^{p,q}$. Тогда для соответствующей ей замкнутой траектории $\dim W^s = p+1$, $\dim W^u = q+1$, а сама траектория обозначается как $\Gamma^{p+1,q+1}$. Таково правило, справедливое при произвольной размерности N фазового пространства. В данном случае $N = p+q+1$, поскольку размерность секущей гиперповерхности, совпадающая с суммой $p+q$, должна равняться $N-1$.

Кроме того, принятый для неподвижной точки символ $O^{p,q}$ означает, что из всех значимых с точки зрения исследования устойчивости периодического движения N-мерной автономной системы мультипликаторов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{N-1}$ число тех, что лежит внутри круга единичного радиуса ($|\sigma_i| < 1$), равно p, а число мультипликаторов, модуль которых превышает единицу, равно q. Напомним, что в данном случае мультипликатор σ_N равен единице.

Сформулированное правило наглядно иллюстрируется приведенными на рис.24, 25 примерами, относящимися к трехмерным системам (N=3).

На рис.24 показан устойчивый предельный цикл (толстая сплошная линия), к которому все близко расположенные фазовые траектории стремятся при $t \to \infty$. В секущей плоскости этот цикл дает неподвижную точку типа $O^{2,0}$ (в данном случае - это устойчивый узел). Сам устойчивый цикл обозначается как $\Gamma^{3,1}$. На рис.25 показаны седловой цикл $\Gamma^{2,2}$ и соответствующая ему седловая неподвижная точка $O^{1,1}$. На рис.26 приводятся также примеры циклов на фазовой плоскости (N=2).

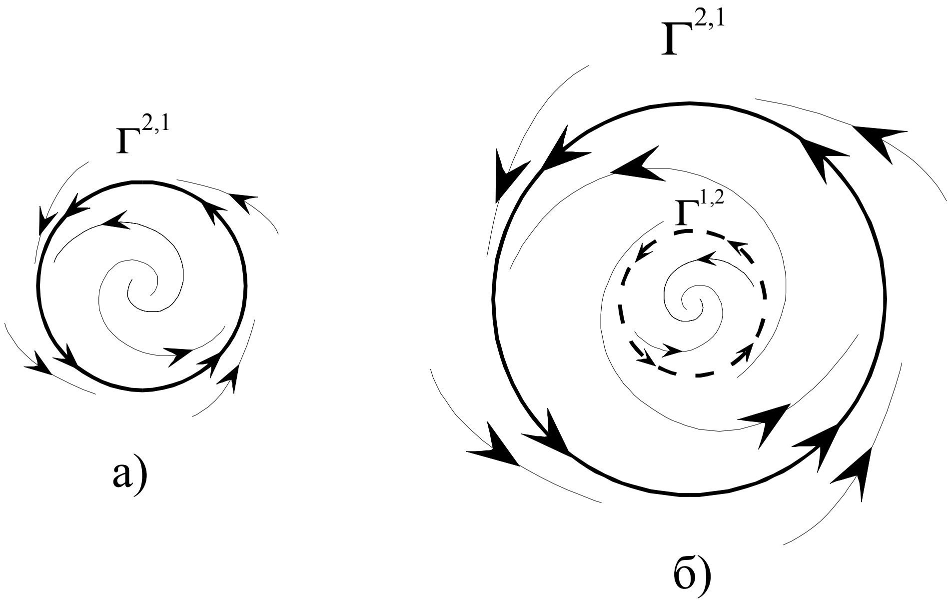


Рис. 26

В общем случае циклы $\Gamma^{N,1}$ являются устойчивыми, циклы $\Gamma^{1,N}$ - неустойчивыми, остальные - седловыми.

Рассмотрим теперь для N=3 более сложный пример. Пусть в некотором сечении картина кривых, на которых помещаются последовательные точки отображения, подобна фазовому портрету, приведенному на рис.26,а. В этом случае (рис.27,а) под $O^{0,2}$ следует понимать неподвижную точку, образованную пересечением неустойчивого цикла $\Gamma^{1,3}$ с секущей плоскостью, а под циклом $\Gamma^{2,1}$ - множество точек пересечения с секущей плоскостью не замыкающейся на себя обмотки тора, соответствующей устойчивому квазипериодическому движению и обозначаемой $T^{3,2}$ (рис.27,б). Все прочие траектории, по крайней мере те, что находятся в ближайшей окрестности тороидальной поверхности, с течением времени стремятся к расположенной на этой поверхности квазипериодической траектории $T^{3,2}$. На рис.28 для сравнения показан устойчивый предельный цикл $\Gamma^{3,1}$, неподвижной точкой для которого является устойчивый фокус.

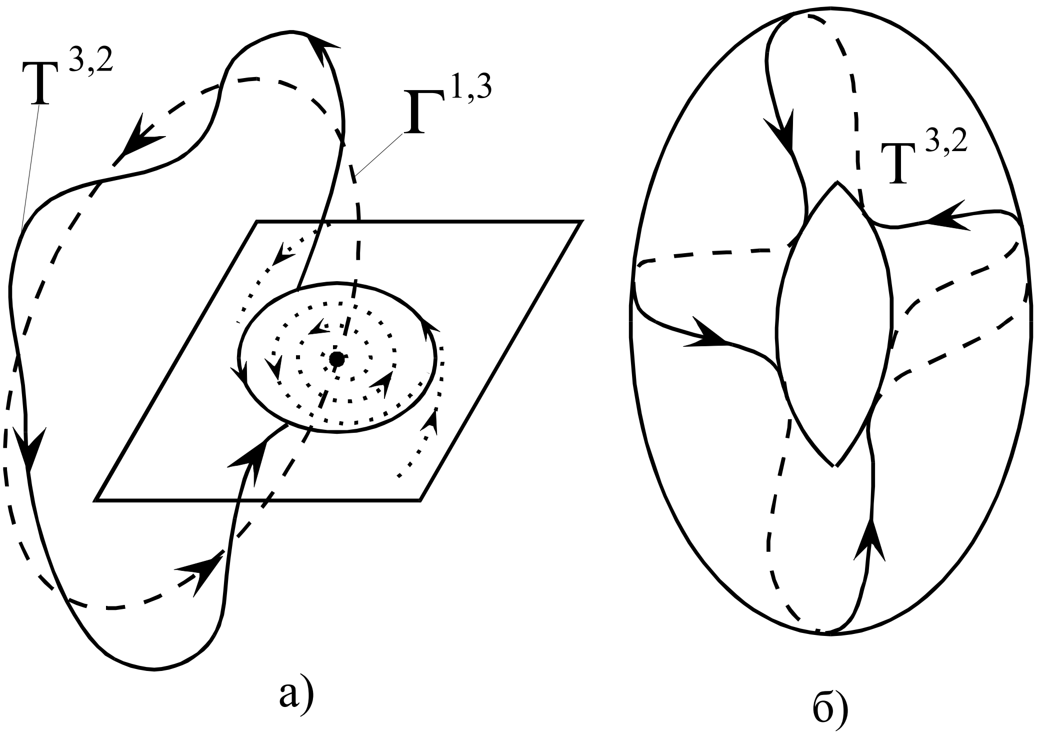


Рис. 27

Согласно общему правилу, расположенной на секущей гиперповерхности замкнутой траектории (циклу) $\Gamma^{p+1,\,q+1}$ соответствует тороидальное интегральное многообразие $T^{p+2,\,q+2}$, т.е. для квазипериодического движения, представляемого не замыкающейся на себя обмоткой тора $T^{p+2,\,q+2}$, размерности устойчивого и неустойчивого интегральных многообразий определяются следующими формулами:

$$\dim W^s = p+2\,, \quad \dim W^u = q+2\,.$$

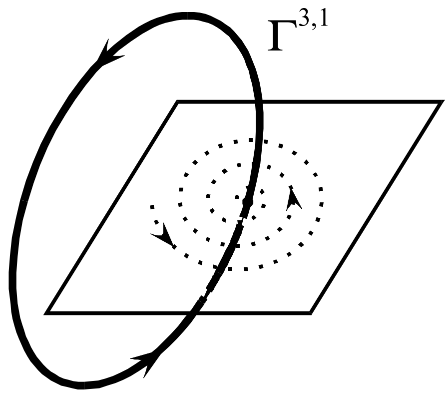


Рис. 28

5. БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

5.1. Основные определения

Под бифуркацией понимают приобретение движениями динамической системы нового качества при малом изменении ее параметров. Математическое описание большинства динамических систем опирается на дифференциальные уравнения и другие соотношения, зависящие от параметров. Изменение параметра может вызвать переход системы из одного состояния (режима движения) в другое состояние. Пример - возникновение периодических колебаний в генераторе Ван-дер-Поля при превышении порога самовозбуждения. Упомянутый переход представляет собой бифуркацию, а значение параметра, при котором он происходит, называется бифуркационным, или точкой бифуркации.

При более общем подходе к определению понятия бифуркации следует иметь в виду также ситуации, когда малое изменение параметра не приводит непосредственно к переходу системы из одного состояния в другое, но набор возможных состояний (режимов движения) либо увеличивается, либо уменьшается. Существенно то, что результатом бифуркации является качественная перестройка фазового портрета системы. Особо интересны ситуации, когда при прохождении точки бифуркации в системе возникают новые устойчивые режимы движения. Конкретные примеры подобного рода рассмотрены ниже.

5.2. Бифуркации состояний равновесия

Обратимся к частному примеру динамической системы, процессы в которой описываются дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu + 3\varepsilon x - x^3 - 2y,$$

где ε и μ - вещественные параметры.

Легко видеть, что обозначаемое через y_0 равновесное значение переменной y равно нулю. Для равновесных значений x имеем кубическое уравнение

$$x_0^3 - 3\varepsilon x_0 = \mu,$$

которое, как показывает исследование (см.рис.29), при условии

$$\varepsilon > \left(0{,}5|\mu|\right)^{\frac{2}{3}} \tag{29}$$

имеет три вещественных корня x_1^0, x_2^0, x_3^0, а в противном случае - только один. Задавая малые отклонения от равновесных значений и используя процедуру

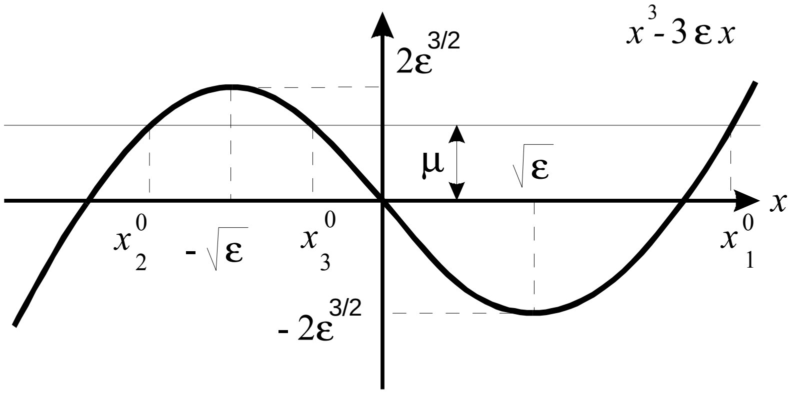


Рис. 29

линеаризации, придем к следующему характеристическому уравнению линеаризованной системы

$$\lambda^2 + 2\lambda + \Delta = 0,$$

где $\Delta = 3\left(x_0^2 - \varepsilon\right)$.

Корни характеристического уравнения определяются выражением

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \Delta}\,.$$

Как и раньше будем придерживаться (неочевидного) допущения о том, что тип особой точки (x^0, y^0) на фазовой плоскости исходной нелинейной системы определяется только характером корней λ_1 и λ_2.

Считая условие (29) выполненным, заметим, что для особых точек, которым соответствуют наибольшее и наименьшее значения x_0 (превышающее по модулю $\sqrt{\varepsilon}$), коэффициент $\Delta > 0$. Отсюда вытекает отрицательность вещественных частей обоих корней характеристического уравнения, а значит, устойчивость этих двух особых точек, т.е. принадлежность их к типу $O^{2,0}$. Можно показать, что при $\varepsilon < 1/9$ и любых μ, удовлетворяющих условию (29), коэффициент Δ положителен, но не больше единицы, и, следовательно, обе особые точки являются устойчивыми узлами. Для расположенной между ними

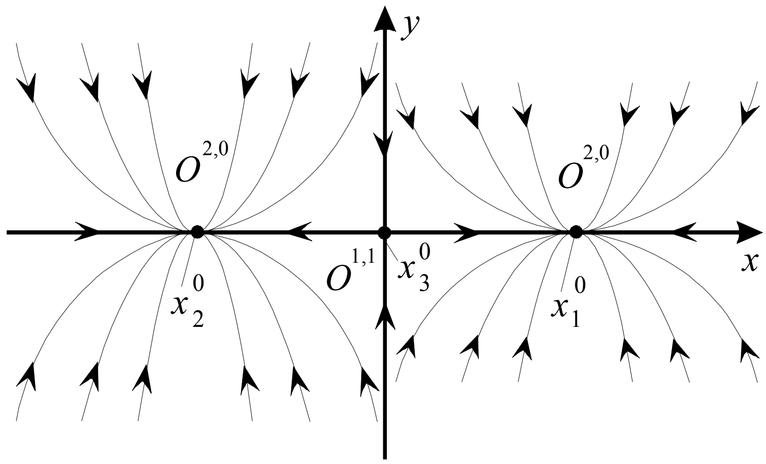


Рис. 30

третьей особой точки $|x_0| < \sqrt{\varepsilon}$, т.е. $\Delta < 0$, и характеристическое уравнение имеет вещественные корни разных знаков, откуда следует, что эта точка является седловой точкой типа $O^{1,1}$. На рис.30 для $\mu = 0$ и ε, меньшего 1/9, показан фазовый портрет системы, содержащей все три особые точки.

Если, оставляя значение ε неизменным, плавно изменять параметр μ от нуля в сторону увеличения или в сторону уменьшения, седло и один из узлов

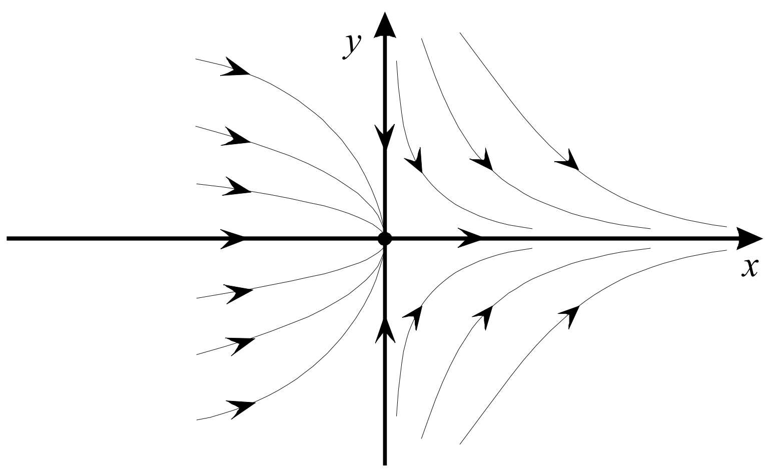


Рис. 31

сближаются и при $|\mu| = 2\varepsilon^{3/2}$ сливаются, образуя особую точку смешанного типа, носящую название седло-узел (рис.31). При дальнейшем увеличении модуля μ эта сложная особая точка исчезает и, таким образом, у системы пропадают два из трех состояний равновесия. Описанное явление называется седло-узловой бифуркацией, или бифуркацией срыва равновесия, и может быть представлено формулой

$$O^{2,0} + O^{1,1} \to \varnothing .$$

Такую бифуркацию называют также касательной (см.рис.29).

Теперь, положив для определенности $\mu = 0$ и оставляя это значение фиксированным, будем плавно изменять параметр ε таким образом, чтобы он принимал как положительные, так и отрицательные значения. При $\varepsilon < 0$ система имеет только одно состояние равновесия $x_0 = 0$, которому на фазовой плоскости соответствует особая точка типа $O^{2,0}$ (устойчивый фокус при $\varepsilon < -1/3$, устойчивый узел при $-1/3 < \varepsilon < 0$). При $\varepsilon > 0$ у системы три особые точки, из которых одна является седловой точкой типа $O^{1,1}$, а две другие - типа $O^{2,0}$ (ус-

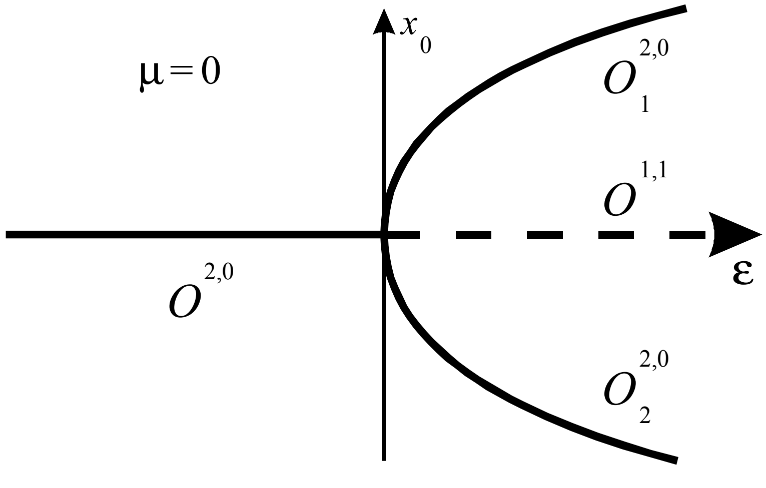


Рис. 32

тойчивые узлы при $0 < \varepsilon < 1/6$, устойчивые фокусы при $\varepsilon > 1/6$). На рис.32 толстыми сплошными и штриховой линиями показана зависимость равновесных значений x_0 от параметра ε.

Как следует из проведенного рассмотрения, в случае изменения параметра ε в сторону увеличения при $\varepsilon = 0$ происходит бифуркация, выражаемая формулой

$$O^{2,0} \to O^{1,1} + \left(O_1^{2,0}, O_2^{2,0}\right).$$

Эту бифуркацию иногда называют бифуркацией типа вил, хотя, как и рассмотренную выше, ее можно назвать седло-узловой. При обратном направлении изменения ε формула бифуркации выглядит так:

$$\left(O_1^{2,0}, O_2^{2,0}\right) + O^{1,1} \to O^{2,0}.$$

Зависимость, приведенная на рис.32, называется бифуркационной диаграммой.

Отметим, что в приведенных примерах бифуркаций состояний равновесия при бифуркационных значениях параметров ($\mu = \pm 2\varepsilon^{3/2}$ в первом случае и $\varepsilon = 0$ - во втором) больший корень характеристического уравнения λ_1 равен нулю. Общее свойство таково, что при плавных изменениях параметров значения каких-либо из корней характеристического уравнения в точках бифуркации переходят через мнимую ось, т.е. изменяются знаки их вещественных частей. Отметим также, что бифуркационным значениям параметров отвечают фазовые портреты, соответствующие так называемым негрубым (структурно неустойчивым) системам. Примером может служить фрагмент фазового портрета, приведенный на рис.31. Любое сколь угодно малое изменение параметра μ относительно значения $2\varepsilon^{3/2}$ приведет либо к срыву равновесия, либо к расщеплению точки седло-узел на две: седло и узел. В то же время фазовый портрет, приведенный на рис.30, относится к грубой (структурно устойчивой) системе, поскольку в ней не происходит качественных изменений при варьировании μ в достаточно широких пределах.

Бифуркация срыва равновесия и бифуркация типа вил могут наблюдаться в общем случае N-мерной нелинейной системы. Соответствующие им формулы представляются в следующем виде:

$$O^{N,0} + O^{N-1,1} \to \varnothing, \tag{30}$$

$$O^{N,0} \to O^{N-1,1} + \left(O_1^{N,0}, O_2^{N,0}\right). \tag{31}$$

Помимо рассмотренных возможны и иные виды бифуркаций состояний равновесия. С некоторыми из них мы познакомимся далее.

5.3. Бифуркации рождения (гибели) предельного цикла (бифуркации Андронова - Хопфа)

Рассмотрим нелинейную автономную систему 2-го порядка

$$\dot{R} = R \cdot \left(\varepsilon - R^2\right), \quad \dot{\psi} = 1 \qquad (32)$$

частным случаем которой (при $\varepsilon = 1$) является система (6).

Стационарными решениями первого из уравнений (32) являются, во-первых, состояние равновесия $R^0 = 0$ (устойчивое при $\varepsilon \le 0$, неустойчивое при $\varepsilon > 0$) и, во-вторых, существующее только при $\varepsilon \ge 0$ решение $R^0 = \sqrt{\varepsilon}$, соответствующее для $\varepsilon > 0$ устойчивому предельному циклу, т.е. гармоническим автоколебаниям.

На рис.33 показаны фазовые портреты системы для отрицательных и положительных значений параметра ε. Как следует из приведенных данных, при $\varepsilon = 0$ наблюдается качественное изменение портрета, называемое при переходе от отрицательных значений параметра к положительным бифуркацией рождения цикла из состояния равновесия. Как видно из бифуркационной диаграммы (рис.34), цикл рождается мягко. В случае обратного направления изменения параметра ε, говорят, что при $\varepsilon = 0$ происходит бифуркация гибели предельного цикла (цикл «влипает» в состояние равновесия). Формула бифуркации рождения цикла из состояния равновесия в данном случае выглядит так:

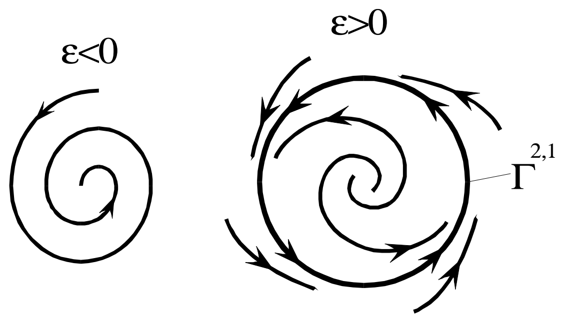


Рис. 33

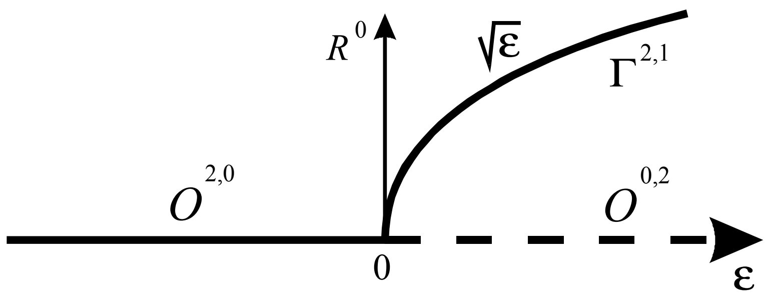


Рис. 34

$$O^{2,0} \to O^{0,2} + \Gamma^{2,1}. \qquad (33)$$

Обратимся теперь к более сложной системе 2-го порядка:

$$\dot{R} = R \cdot \left[\varepsilon - \left(1 - R^2\right)^2\right], \quad \dot{\psi} = 1.$$

Опуская подробный анализ, приведем сведения о стационарных решениях первого из уравнений (см. также фазовые портреты на рис.35).

Состояние равновесия $R^0 = 0$ устойчиво при $\varepsilon < 1$ (рис.35,а,б,в) и неус-

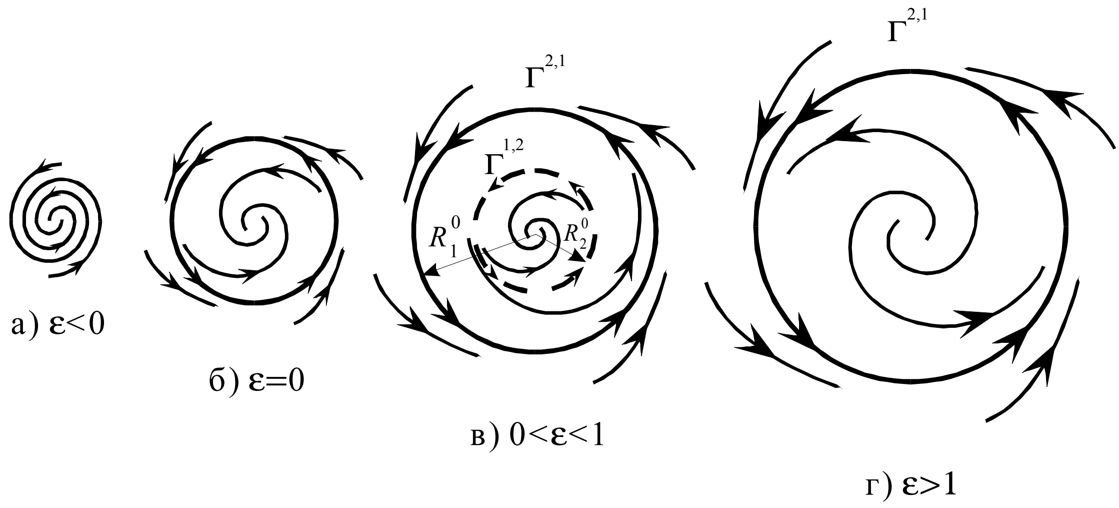


Рис. 35

тойчиво при $\varepsilon \geq 1$ (рис.35,г). Существующее при $\varepsilon \geq 0$ решение $R_1^0 = \sqrt{1+\sqrt{\varepsilon}}$ соответствует при $\varepsilon > 0$ устойчивому предельному циклу, а при $\varepsilon = 0$ - полуустойчивому циклу (негрубая система). Наконец, при $0 < \varepsilon < 1$ имеется отличное от нуля решение $R_2^0 = \sqrt{1-\sqrt{\varepsilon}}$, соответствующее неустойчивому циклу. Как видно из фазовых портретов и диаграммы, приведенной на рис.36, точек бифуркации две: $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$.

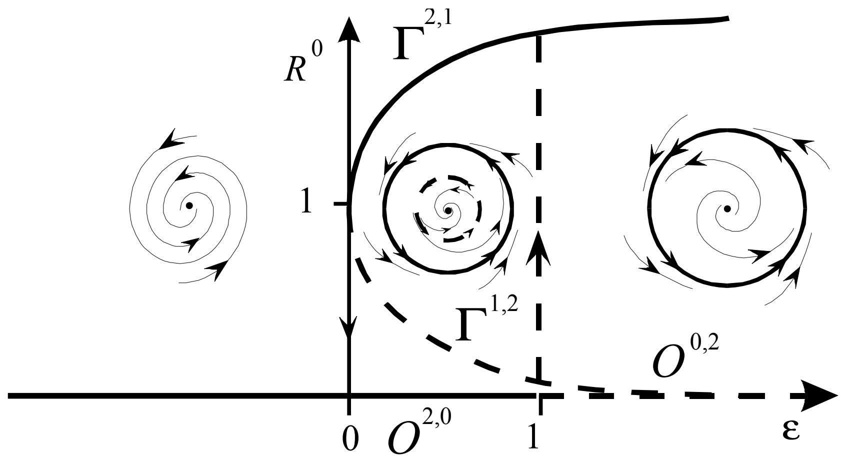


Рис. 36

В точке $\varepsilon = 0$ при изменении параметра ε в сторону увеличения возникают (и притом жестко) два цикла, что называется бифуркацией рождения цикла из сгущения фазовых траекторий. Ее формула

$$\varnothing \to \Gamma^{2,1} + \Gamma^{1,2}. \tag{34}$$

При $\varepsilon = 1$ и том же направлении изменения параметра ε неустойчивый цикл $\Gamma^{1,2}$ влипает в устойчивый фокус $O^{2,0}$, в результате чего решение $R^0 = 0$ становится неустойчивым. Соответствующая бифуркационная формула имеет вид:

$$O^{2,0} + \Gamma^{1,2} \to O^{0,2}. \tag{35}$$

Бифуркации, подобные описываемым формулами (33) и (35), могут иметь место в системах 3-го и более высоких порядков ($N = 3, 4, \ldots$):

$$O^{N,0} \to O^{N-2,2} + \Gamma^{N,1}, \quad O^{N,0} + \Gamma^{N-1,2} \to O^{N-2,2}.$$

В первом случае состояние равновесия из устойчивого переходит в седловое и при этом одновременно рождается устойчивое периодическое движение $\Gamma^{N,1}$. Во втором случае при переходе устойчивого состояния равновесия $O^{N,0}$ в седловое $O^{N-2,2}$ в нем исчезает седловое периодическое движение $\Gamma^{N-1,2}$.

N - мерным аналогом выражения (34) является бифуркационная формула

$$\varnothing \to \Gamma^{N,1} + \Gamma^{N-1,2}. \tag{36}$$

Эта бифуркация относится к числу тех, изучение которых может быть сведено к исследованию бифуркаций неподвижных точек отображения Пуанкаре. Формуле (36) соответствует бифуркация неподвижных точек вида

$$\varnothing \to O^{N-1,0} + O^{N-2,1}, \tag{37}$$

которую можно сравнить с седло-узловой бифуркацией, обратной той, что представлена формулой (30).

Рис.37 является иллюстрацией правых частей формул (36),(37) для трехмерной системы ($N = 3$).

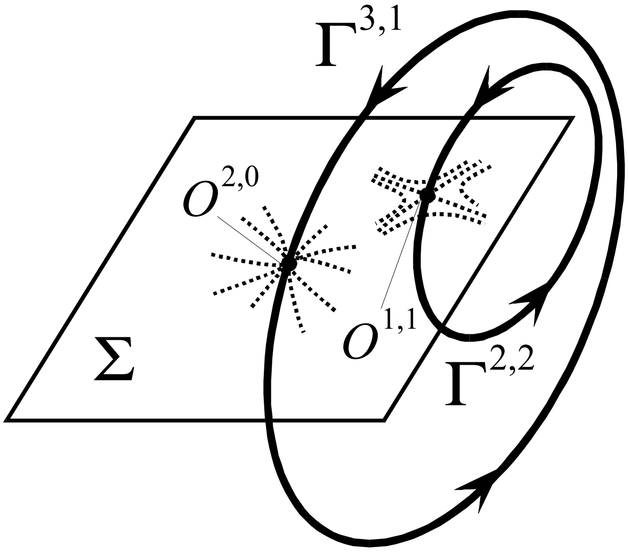


Рис. 37

Как отмечалось выше для уравнения (30), при бифуркационном значении параметра один из корней характеристического уравнения линеаризованной системы обращается в нуль. В случае формулы

$$\Gamma^{3,1} + \Gamma^{2,2} \to \varnothing$$

это соответствует ситуации, когда один из отличных от единицы мультипликаторов периодического решения $\Gamma^{3,1}$ при плавном изменении параметра выходит на единичную окружность в точке (0,1), после чего движение $\Gamma^{3,1}$ исчезает, сливаясь с седловым.

5.4. Бифуркации удвоения периода цикла и рождения тороидального интегрального многообразия

На рис.38 изображены фрагменты фазовых портретов некоторой автономной трехмерной системы до и после бифуркации удвоения периода цикла, а также схематически показаны временные диаграммы для устойчивых периодических движений.

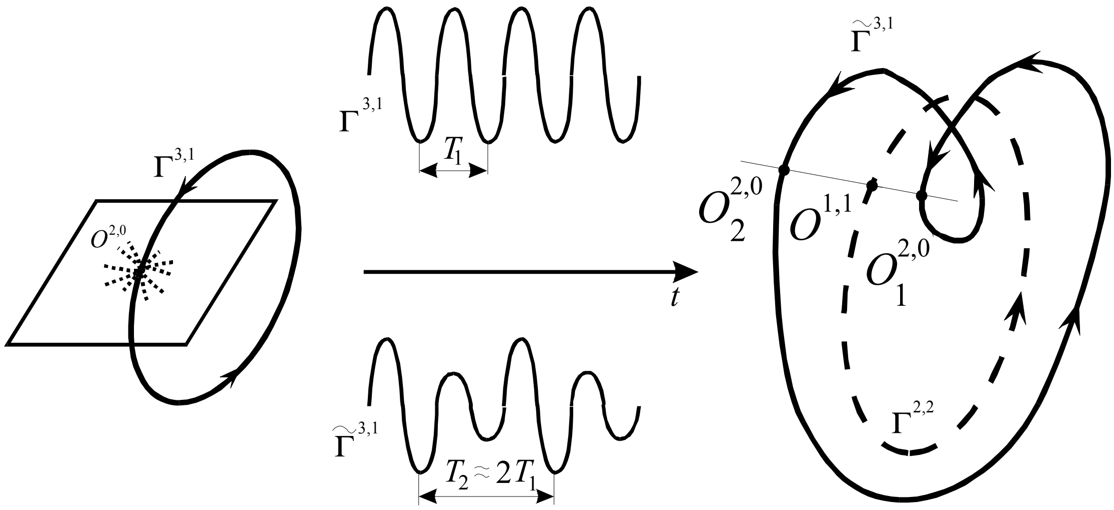


Рис. 38

Эта бифуркация состоит в том, что из устойчивого однопетлевого цикла рождаются устойчивый двухоборотный цикл, которому соответствуют две двукратные неподвижные точки сечения Пуанкаре $O_1^{2,0}$, $O_2^{2,0}$ и седловой цикл. Описанное изменение фазового портрета выражается следующей бифуркационной формулой:

$$\Gamma^{3,1} \to \tilde{\Gamma}^{3,1} + \Gamma^{2,2}.$$

Легко также убедиться в том, что эволюция неподвижных точек соответствует бифуркации типа вил.

Что касается отличных от единицы мультипликаторов цикла $\Gamma^{3,1}$, то в точке бифуркации один из них становится равным -1 (см.рис.39). Последнее можно пояснить так: задаваемое по одной из координат фазовой плоскости малое возмущение за один оборот вдоль траектории просто меняет знак, а после следующего оборота возмущенная траектория замыкается.

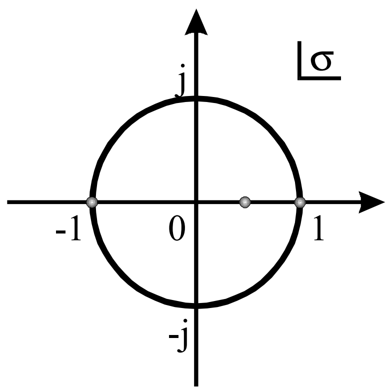


Рис. 39

Родившееся периодическое движение $\tilde{\Gamma}^{3,1}$ при изменении параметра снова может потерять устойчивость через бифуркацию удвоения периода, приводящую к рождению четырехоборотного цикла, и т.д. Такие последовательные бифуркации могут представлять интерес в связи с изучением перехода динамических систем в режим хаотического поведения.

Отдельного внимания заслуживает ситуация, когда при изменении параметра перемещение мультипликаторов устойчивого периодического движения внутри круга единичного радиуса комплексной плоскости приводит к тому, что пара комплексно-сопряженных мультипликаторов выходит на единичную окружность в точках $\exp(\pm j\varphi)$, где $\varphi \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ (рис.40). Если при дальнейшем изменении параметра эта пара выходит за пределы единичного круга, замкнутый цикл, отвечающий периодическому решению, теряет устойчивость, и из него рождается двумерное тороидальное интегральное многообразие - по образному выражению А.А.Андронова, «с цикла слезает шкура». Бифуркационная формула для этого случая

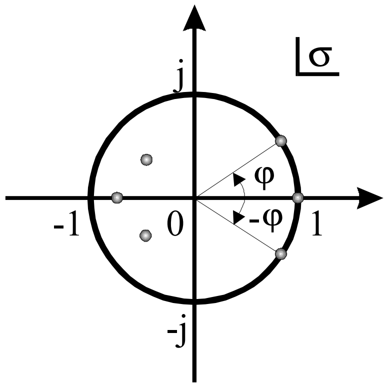


Рис. 40

$$\Gamma^{N,1} \to \Gamma^{N-2,3} + \mathrm{T}^{N,2}$$

и соответствующая ей формула бифуркации в сечении Пуанкаре

$$O^{N-1,0} \to O^{N-3,2} + \Gamma^{N-1,1}$$

записаны в предположении, что траектория, образующаяся в процессе движения изображающей точки по поверхности тора, представляет собой не замыкающуюся на себя обмотку (для N = 3 см.рис.28). Последнее предположение означает, что вследствие бифуркации в системе вместо периодического движения устанавливается квазипериодическое. Наоборот, если траектория, описываемая изображающей точкой, сделав конечное число оборотов по поверхности тора, замыкается, то образуется более сложный, чем $\Gamma^{N,1}$, лежащий на торе и называемый резонансным предельный цикл («периодическая обмотка»). Различают случаи сильных и слабых резонансов. О порядке резонанса судят по числу вращения Пуанкаре ($\varphi/(2\pi)$ в точке бифуркации), которое при замкнутой обмотке тора оказывается рациональным в отличие от случая незамкнутой обмотки (квазипериодический режим), когда оно иррационально [1,5].

Для рассмотренного в 1.2 примера, когда при $N = 3$ x, y, z изменяются с течением времени согласно (7), за период T движения, соответствующего замкнутой траектории на торе, углы ψ и θ (см.рис.3) получают приращения, которые могут быть выражены следующими формулами:

$$\Delta\psi = \omega T = 2\pi m l, \quad \Delta\theta = \nu T = 2\pi k l,$$

где k, l, m - целые числа, причем k и m - взаимно простые (несократимые) целые числа. В случае такого резонансного цикла число вращения Пуанкаре равно

$$\gamma = k/m.$$

Сильными принято считать резонансы при m = 1, 2, 3, 4 (см.[6]).

Резонансным циклам, расположенным на тороидальной поверхности, в сечении Пуанкаре отвечают неподвижные точки отображения, в то время как для не замыкающейся на себя обмотки тора последовательные точки отображения с течением времени заполняют замкнутую кривую (например, цикл $\Gamma^{2,1}$ в частном случае, представленном на рис.28). В обоих случаях рассматриваемое отображение условно называют точечным преобразованием окружности в окружность. Установлено, что, если для замкнутой траектории на торе (резонансный цикл) число вращения Пуанкаре выражается отношением k/m, где k и m - взаимно простые целые числа, то неподвижные точки отображения имеют кратность m [1], а при иррациональном числе вращения, как ясно из предыдущего, отображение окружности в окружность не имеет неподвижных точек.

Периодические и квазипериодические движения, которым соответствуют фазовые траектории на двумерном торе, могут при изменении параметров претерпевать бифуркации, причем это могут быть как бифуркации, не сопровождающиеся разрушением несущего тора, так и бифуркации, при которых тор как гладкая интегральная поверхность исчезает. Приведем пример одной из бифуркаций, выражаемой формулой:

$$\mathrm{T}^{N,2} + \mathrm{T}^{N-1,3} \to \varnothing ,$$

что означает исчезновение устойчивого тора $\mathrm{T}^{N,2}$ вследствие его слияния с седловым. При этом формула бифуркации в сечении Пуанкаре такая же, как в случае слияния устойчивого и седлового циклов:

$$\Gamma^{N-1,1} + \Gamma^{N-2,2} \to \varnothing$$

При некоторых бифуркациях тороидальных интегральных многообразий и, в том числе, связанных с разрушением тора, возможен переход к хаотическим движениям.

Отметим также, что не для всех бифуркаций периодических и квазипериодических движений может быть построено описание путем прямого сведения к изучению точечного отображения секущей [1].

6. ФАЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ТОЧЕЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

6.1. Линейные системы, находящиеся под воздействием периодической силы

Для неавтономной динамической системы анализ ее движений посредством фазового пространства отличается некоторыми особенностями. В случае, когда воздействие на систему изменяется во времени периодически, оказывается целесообразным использование так называемого расширенного фазового пространства, где в качестве одной из координат (наряду с переменными состояния) выбирается время t либо величина, линейно с ним связанная. Такой прием можно трактовать как переход от неавтономной системы N-го порядка к автономной системе ($N+1$)-го порядка.

Проиллюстрируем последнее утверждение приведением неавтономной системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{x} + x = \varepsilon \cos \omega t, \tag{37}$$

к двумерной автономной системе.

Введя для этого вспомогательную переменную $y = \omega t$, можем записать вместо (37) систему уравнений

$$\dot{x} = -x + \varepsilon \cos y, \quad \dot{y} = \omega.$$

В качестве конкретного примера рассмотрим контур, представляющий собой последовательное соединение сопротивления R, индуктивности L и источника гармонической э.д.с. $e = E\cos\omega t$ (рис.41).

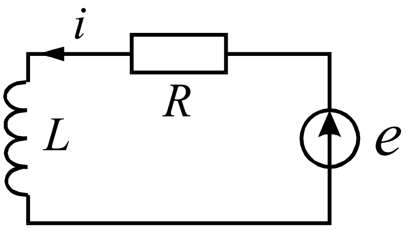


Рис. 41

Интегрирование дифференциального уравнения для тока

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e$$

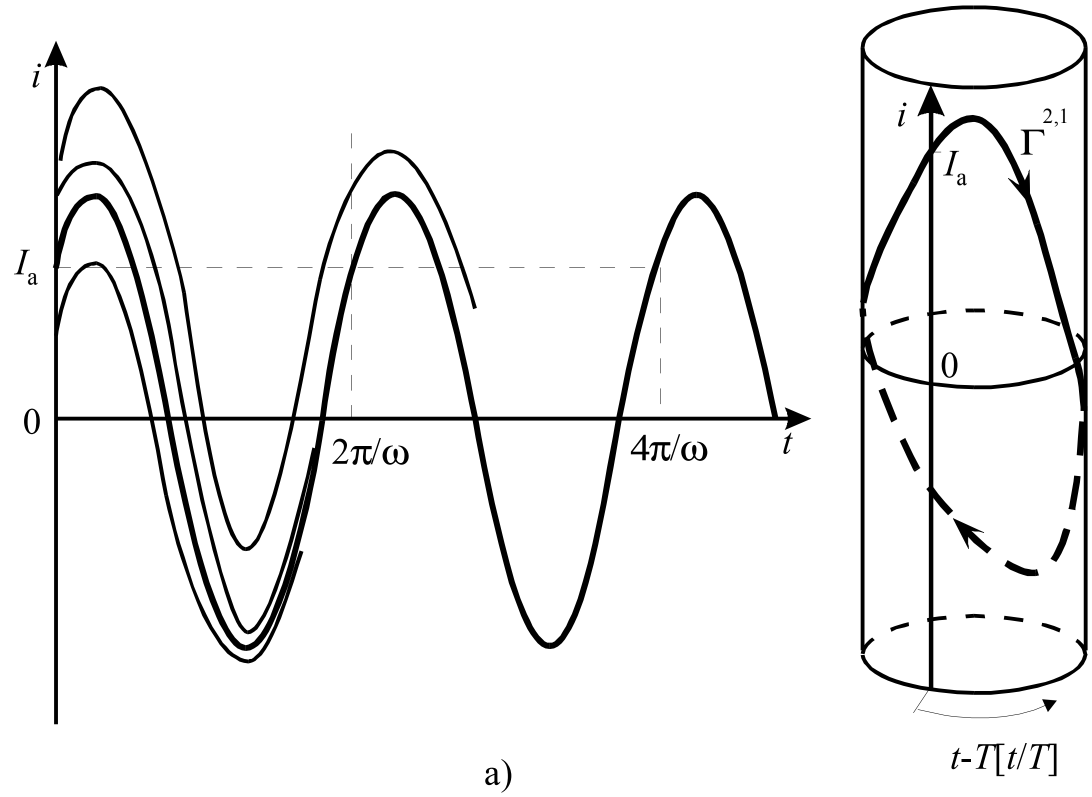
приводит к решению

$$i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \mathrm{Re}\left(\dot{I}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right), \tag{38}$$

где $\dot{I} = E/Z$ - комплексная амплитуда гармонических колебаний тока в установившемся режиме, $Z = R + \mathrm{j}\omega L$ - комплексное сопротивление, $\tau = L/R$ - постоянная времени цепи, а константа A выражается через начальное значение тока $i(0)$ и амплитуду активной составляющей $I_a = \mathrm{Re}\,\dot{I}$:

$$A = i(0) - I_a.$$

На рис.42,а толстой линией показано решение при $A = 0$, к которому согласно (38) с течением времени стремятся решения при произвольных начальных условиях.



а)

б)

Рис. 42

Весь график на рис.42,а - это своего рода фазовый портрет системы (на «фазовой полуплоскости»). Из него можно вырезать вертикальную полосу шириной, равной периоду воздействующей э.д.с. $T = 2\pi/\omega$, и, соединив края разреза, перейти к фазовому портрету на цилиндрической поверхности, в котором решение при $A = 0$ (установившийся режим гармонических колебаний) представляется изолированной замкнутой траекторией - устойчивым предельным циклом $\Gamma^{2,1}$ (рис.42,б). Остальные траектории в этом случае образуют двумерное устойчивое интегральное многообразие цикла. На рис.42,б выражение $[t/T]$ означает целую часть отношения t к T.

Для описания поведения траекторий с помощью отображения Пуанкаре вводится в рассмотрение зависимость значения тока в сечении $t=(n+1)T$, обозначаемого через i_{n+1}, от значения i_n при $t=nT$, где n = 0, 1, 2,...

$$i_{n+1}=I_a+(i_n-I_a)\mathrm{e}^{-T/\tau}.$$

Если перейти к другим обозначениям, то

$$\bar{i}=\mathrm{P}(i),$$

где $\mathrm{P}(i)=I_a+\sigma_1(i-I_a)$ - функция последования, $\sigma_1=\mathrm{e}^{-T/\tau}$ - меньший единицы мультипликатор цикла. При $\bar{i}=i=I_a$ имеем устойчивую неподвижную точку, отвечающую циклу $\Gamma^{2,1}$. В остальных случаях образуются последовательности точек отображения, которыми являются проекции на прямую t = 0 точек пересечения фазовых траекторий с прямыми $t=nT$ (см.рис.42,а). При таком подходе реализуется преобразование, называемое точечным отображением сдвига [1].

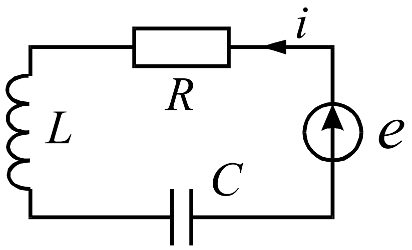


Рис. 43

Воспользуемся тем же подходом для рассмотрения процессов в LC-контуре, содержащем, как и предыдущая цепь, гармоническую э.д.с. $e=E\cos\omega t$ (рис.43). Обозначая через q заряд емкости C, запишем дифференциальные уравнения

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\frac{q}{C}=e,\quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=i$$

и характеристическое уравнение однородной системы

$$\lambda^2+2\alpha\lambda+\omega_0^2=0,$$

где $\alpha=R/(2L)$ - показатель затухания, а $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ - резонансная частота контура.

Предположим сначала, что $\alpha>\omega_0$. Тогда оба корня характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

вещественны и отрицательны, а зависимости заряда q и тока i от времени удобно представить в следующей форме:

$$q(t) = v + w + \mathrm{Re}\left(\dot{Q}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right), \quad i(t) = \lambda_1 v + \lambda_2 w + \mathrm{Re}\left(\dot{I}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right),$$

где $\dot{I} = \mathrm{j}\omega\dot{Q} = E/Z, \quad Z = R + \mathrm{j}\omega L + 1/(\mathrm{j}\omega C)$, а v и w - вспомогательные функции, выражаемые через затухающие экспоненты посредством формул

$$v = v_0\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \quad w = w_0\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

в которых коэффициенты $v_0, \quad w_0$ зависят от начальных значений заряда и тока.

В расширенном фазовом пространстве с координатами $\omega q, i, t$ (полупространство $t \geq 0$) установившемуся режиму (вынужденным колебаниям) соответствует периодическая траектория $\Gamma^{3,1}$ в виде винтовой линии, расположенной на поверхности кругового цилиндра, осью которого является ось t, а радиус равен $\left|\dot{I}\right|$. Остальные фазовые траектории, стремящиеся с течением времени к траектории $\Gamma^{3,1}$, образуют ее трехмерное устойчивое интегральное многообразие.

Проведя секущие плоскости при $t = nT$, где $T = 2\pi/\omega$, а n = 0, 1, 2, ..., осуществляя для точек пересечения каждой траектории с секущими плоскостями переход к проекциям на плоскость t = 0, получим последовательности точек отображения. При этом периодической траектории (цилиндрической спирали) соответствует неподвижная точка $(\omega Q_a, I_a)$, где $Q_a = \mathrm{Re}\,\dot{Q}, \quad I_a = \mathrm{Re}\,\dot{I}$.

Определяемые в секущих плоскостях отклонения от неподвижной точки (возмущения) с ростом n убывают, что вытекает из следующих выражений:

$$\xi_n = \omega q(nT) - \omega Q_a = \omega v_n + \omega w_n, \quad \eta_n = i(nT) - I_a = \lambda_1 v_n + \lambda_2 w_n,$$

где $v_n = v_0\,\mathrm{e}^{n\lambda_1 T}$, $w_n = w_0\,\mathrm{e}^{n\lambda_2 T}$. Легко видеть, что как на плоскости ξ, η так и на плоскости wv,w неподвижной точкой является начало координат (0,0), а также, что последовательности точек отображения располагаются на кривых параболического типа (рис.44) и с ростом n стремятся к неподвижной точке, которая относится к типу $O^{2,0}$ (в данном случае - это устойчивый узел. Отметим , что для принятого выше условия $\alpha > \omega_0$ особая точка фазового портрета автономной системы оказывается того же типа.

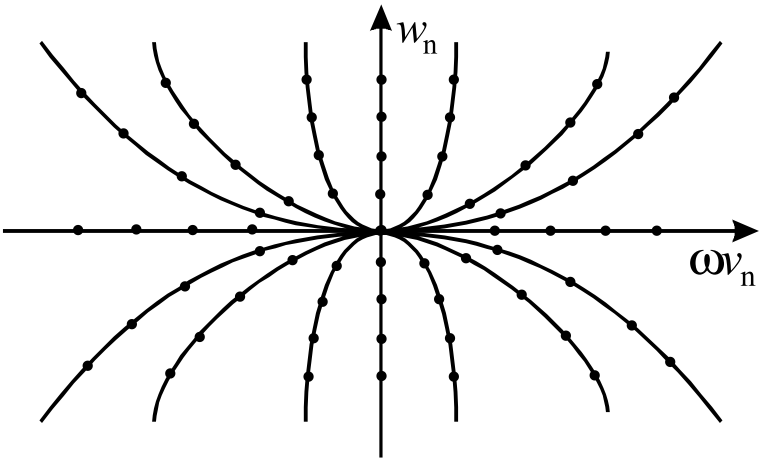


Рис. 44

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\alpha < \omega_0$. В этом случае удобна следующая запись для решения системы дифференциальных уравнений

$$q(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\Omega t + \psi) + \mathrm{Re}\left(\dot{Q}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right),\; i(t) = Be^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi) + \mathrm{Re}\left(\dot{I}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right),$$

где $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$,а ψ, φ, A, B, определяются при помощи начальных условий и соотношения $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$.

При $q(0) = Q_{a,}$ $i(0) = I_a$ имеем периодическое решение, к которому стремятся с течением времени решения, соответствующие другим начальным условиям. Однако характер этого стремления отличается от рассмотренного выше при $\alpha > \omega_0$, что проявляется, в частности, в эволюции отклонений от неподвижной точки отображения Пуанкаре:

$$\xi_n = \omega\, q\,(nT) - \omega\, Q_a = \omega A\,\mathrm{e}^{-\alpha nT}\sin(\Omega\, nT + \psi),$$

$$\eta_n = i(nT) - I_a = B\,\mathrm{e}^{-\alpha nT}\cos(\Omega\, nT + \varphi).$$

Как видно из построенного по двум последним формулам графика (рис.45), последовательные точки отображения располагаются на спиралях, что соответствует неподвижной точке типа устойчивый фокус. Последнее означает, что фазовые траектории, образующие устойчивое интегральное многообразие периодической траектории $\Gamma^{3,1}$ с течением времени «навиваются» на нее. Особой точкой фазового портрета автономной системы при $\alpha < \omega_0$ также является устойчивый фокус.

В рассмотренных примерах линейных систем при превращении автономной системы в неавтономную особая точка фазового портрета автономной системы становится неподвижной точкой сечения Пуанкаре, которой соответствует периодическое движение неавтономной системы. При этом тип точки

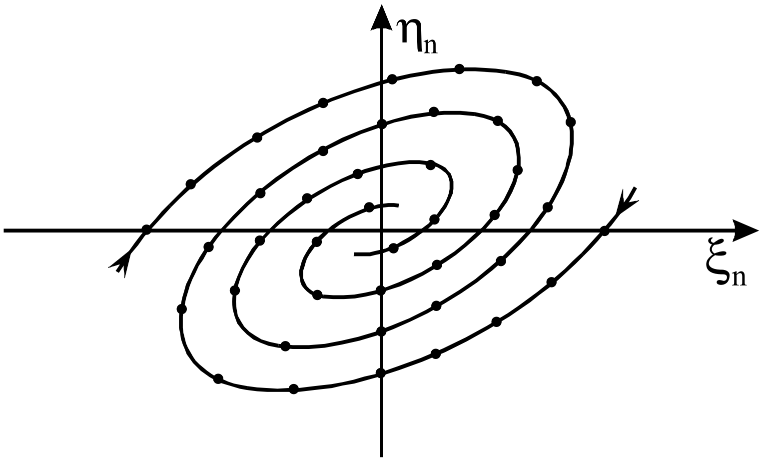


Рис. 45

сохраняется. Данное правило может оказаться справедливым и в более сложных случаях нелинейных систем.

6.2. Нелинейный осциллятор

Классическим примером нелинейного осциллятора является маятник. Имеются и другие примеры, в том числе нелинейный колебательный контур.

Обратимся к варианту нелинейного осциллятора в виде шарика в желобе. Положение шарика будем характеризовать координатой x, отсчитываемой

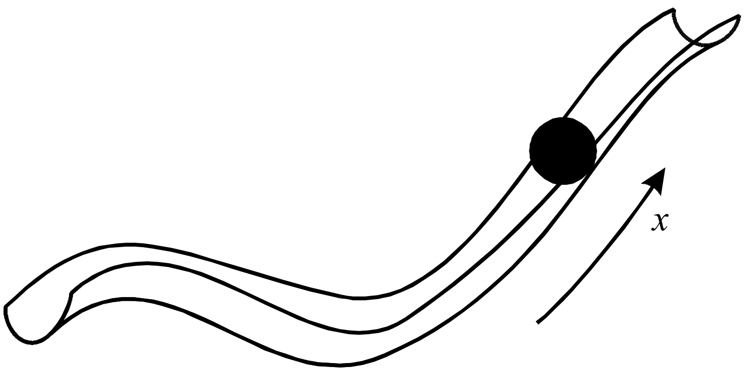


Рис. 46

вдоль желоба от нижней точки (рис.46).

Уравнение Лагранжа второго рода для данного примера можно записать следующим образом

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = Q,$$

где $T = m\dot{x}^2/2$ - кинетическая энергия шарика, а Q - обобщенная сила, соответствующая координате x.

Учитывая выражение для кинетической энергии, имеем очевидное соотношение

$$m\ddot{x} = Q.$$

В случае автономной системы без потерь (консервативный осциллятор)

$$Q = -\partial \Pi/\partial x,$$

где Π - потенциальная энергия шарика, характер зависимости которой от x иллюстрируется рис.47 (эта зависимость внешне похожа на профиль желоба, но не совпадает с ним).

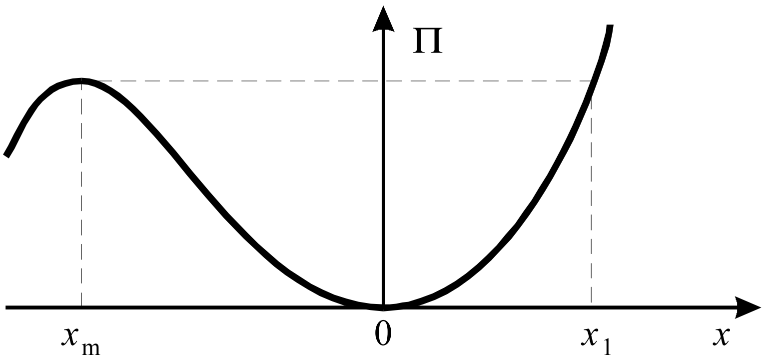


Рис. 47

Имеющиеся соотношения позволяют записать следующую систему двух уравнений 1-го порядка:

$$\dot{x} = y, \quad m\dot{y} = -\Pi_x^{'}.$$

Поделив второе из уравнений на первое, получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\Pi_x^{'}/(my).$$

Интегрируя последнее и обозначая через y_0 модуль y при x=0, придем к формуле

$$y^2 = y_0^2 - 2\Pi(x)/m,$$

при помощи которой могут быть выяснены характерные особенности фазового портрета автономного нелинейного осциллятора без потерь (рис.48).

Фазовый портрет автономного неконсервативного нелинейного осцил-

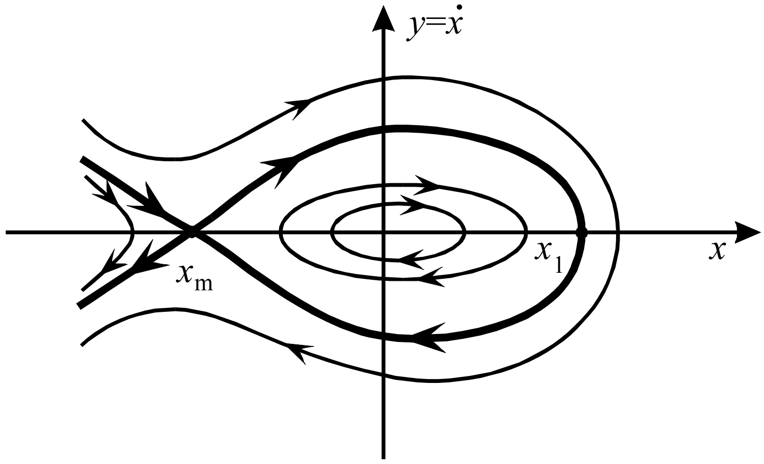


Рис. 48

лятора, получаемый на основании уравнения

$$m\ddot{x} + hx + \Pi'_x = 0,$$

выглядит в случае малых потерь так, как показано на рис.49.

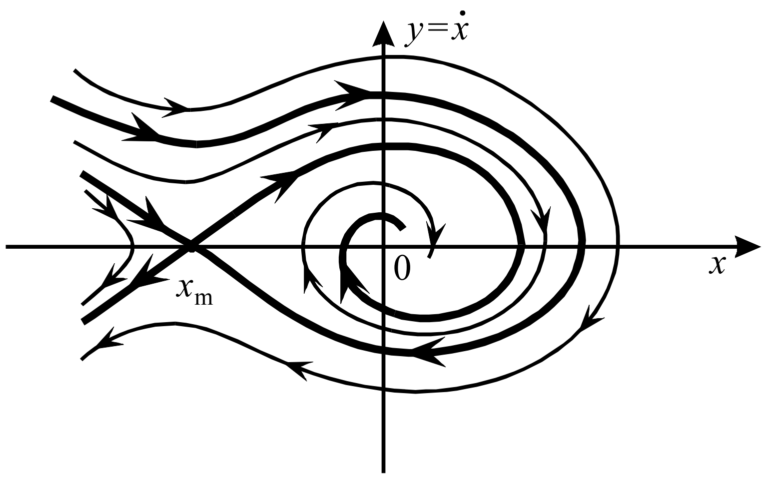


Рис. 49

Из рис.49 видно, что нижнему положению равновесия шарика (x=0) соответствует при малых потерях особая точка фазовой плоскости типа устойчивый фокус, а не центр, как в случае консервативного осциллятора (рис.48). Вместо петли сепаратрисы, которая на рис.48 начинается и заканчивается в седловой точке $(x_m, 0)$, у неконсервативного осциллятора имеются две фазовые траектории, условно называемые устойчивой и неустойчивой сепаратрисами (рис.49). По первой из них изображающая точка стремится к седлу при $t \to \infty$, по второй - при $t \to -\infty$.

Предположим теперь, что на нелинейный осциллятор с малыми потерями воздействует внешняя гармоническая сила $F(t) = \mu \sin t$. Опираясь на уравнение этой неавтономной системы и вводя для нее расширенное фазовое пространство $x, \dot{x}, t$, рассмотрим последовательности точек отображений Пуанкаре на секущих плоскостях $t = 2\pi n$, где n - целое.

При малых μ кривые, на которых в ближайшей окрестности неподвижной точки (0,0) располагаются последовательные точки отображений, образуют структуру, мало отличающуюся по виду от фазового портрета автономной системы в окрестности устойчивого фокуса. Сама точка (0,0) сечения Пуанкаре отвечает периодической траектории $\Gamma^{3,1}$, а точки, ближайшие к (0,0), - фазовым траекториям устойчивого интегрального многообразия траектории $\Gamma^{3,1}$.

Вместо седловой точки $(x_m, 0)$ фазового портрета автономной системы (рис.49) имеем на секущей седловую неподвижную точку, соответствующую седловому периодическому движению $\Gamma^{2,2}$, а устойчивая и неустойчивая сепаратрисы превращаются в множества точек сечения устойчивого (W^s) и неус-

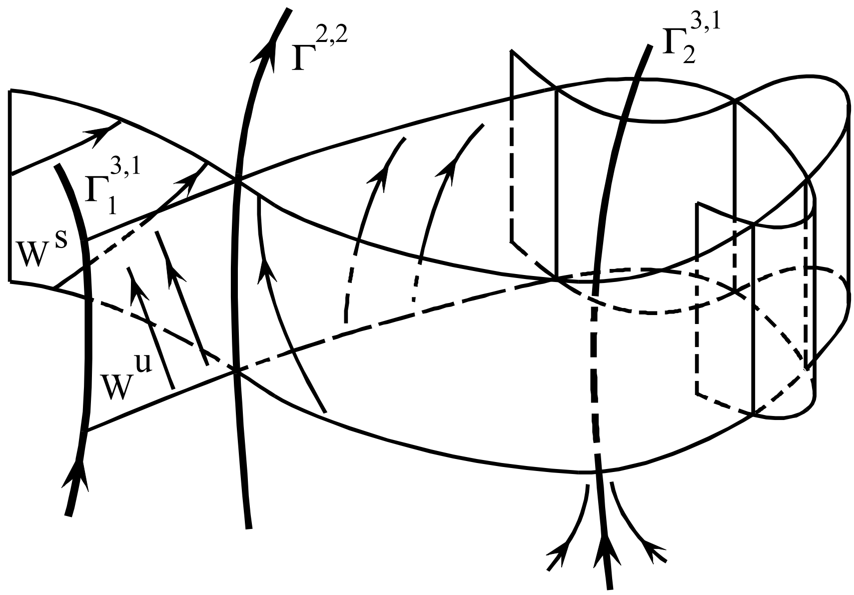


Рис. 50

тойчивого (W^u) интегральных многообразий траектории $\Gamma^{2,2}$. Эти множества точек лежат на линиях, которые могут по-прежнему называться сепаратрисами. Однако, как показывает анализ [7], поведение сепаратрис на секущей может быть совершенно иным, чем на фазовой плоскости. Самое важное заключается в том, что сепаратрисы на секущей могут иметь бесконечное (счетное) число точек пересечения, соответствующих линии пересечения поверхностей устойчивого $\left(W^s\right)$ неустойчивого $\left(W^u\right)$ многообразий (рис.50). Поведение этих сепаратрисных поверхностей необычайно сложно и не нашло отражения на схематическом рис.50. Линию пересечения поверхностей многообразий W^s и W^u Пуанкаре назвал гомоклинической. Эта траектория является двоякоасимптотической, поскольку при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ она сматывается с седловой периодической траектории, а затем снова на нее наматывается. Окрестность гомоклинической траектории в фазовом пространстве называют гомоклинической структурой. На рис.51 изображены, хотя и не полностью, пересекающиеся сепаратрисы, представляющие собой, как отмечалось, следы пересечения по-

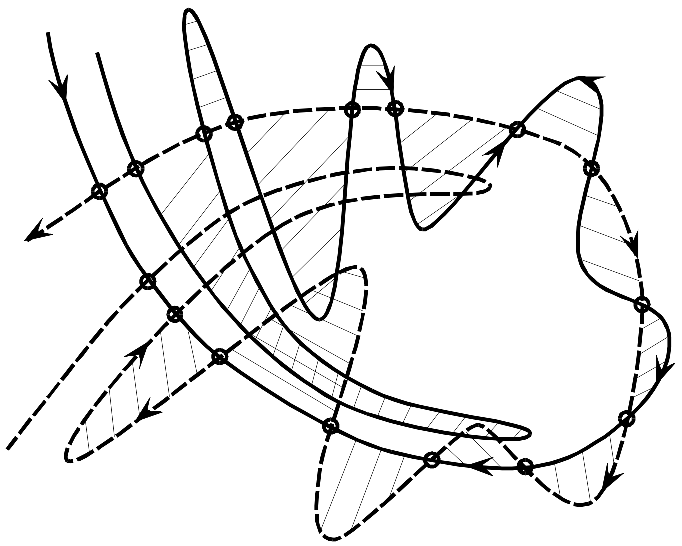


Рис. 51

верхностей интегральных многообразий с секущей плоскостью. При помощи одинаковой штриховки показаны участки гомоклинической структуры, отображающиеся друг в друга, кружками выделены точки отображения гомоклинической траектории. Характерно, что такая картина не исчезает при изменении параметров физической системы, т.е. гомоклиническая структура (как и гомоклиническая траектория) является грубой.

Гомоклиническая структура содержит бесконечное (счетное) множество седловых периодических траекторий, между которыми, как говорят, блуждает (при широком выборе начальных условий) осциллятор.

Малый фазовый объем в окрестности гомоклинической траектории со временем сложным образом деформируется и при $t \to \infty$ расплывается по всей структуре. Отсюда - локальная неустойчивость почти всех траекторий внутри структуры и вытекающая из этого сложность, запутанность движения внутри гомоклинической структуры.

Выше рассмотрена возможность появления гомоклинической структуры у нелинейной неавтономной системы 2-го порядка. Гомоклинические структуры могут быть и у автономных систем, но только при условии, что их порядок не меньше трех.

Если в фазовом пространстве системы существуют гомоклинические структуры, то это фактическая гарантия того, что динамика системы будет сложной (см. следующую главу).

7. МЕХАНИЗМЫ СТОХАСТИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (сценарии перехода к хаосу)

7.1. Вводные замечания

Дальнейшее рассмотрение посвящено в основном нелинейным динамическим системам, которые отличаются хаотическим характером движений несмотря на то, что сами относятся к классу детерминированных. Последнее означает, что уравнения, используемые для описания процессов в таких системах, не содержат каких-либо случайных функций и для этих уравнений выполнены требования теоремы существования и единственности решений.

Открытие возможности случайного (стохастического) поведения детерминированных систем - одно из ярких достижений теории нелинейных колебаний. На первый взгляд, случайность и, следовательно, непредсказуемость в детерминированной системе возникает вопреки теореме существования и единственности решения уравнений, гарантирующей при заданных начальных условиях однозначное поведение системы. В действительности же переход к хаосу - проявление ситуации, когда всем фазовым траекториям, не выходящим за пределы ограниченного объема фазового пространства системы, отвечают неустойчивые движения (состояния). Представим себе в фазовом пространстве динамической системы ограниченную область, из которой фазовые траектории не выходят. Для двумерных систем это утверждение означает, что фазовые траектории либо замкнуты, либо стремятся с течением времени к простому аттрактору (состоянию равновесия или предельному циклу), т.е. внутри области есть устойчивые траектории. Других возможностей для двумерных систем нет.

Однако для трехмерных систем и систем большей размерности предположение о том, что все фазовые траектории, остающиеся внутри ограниченного фазового объема неустойчивы, может оказаться справедливым. В трехмерном фазовом пространстве такое поведение траекторий легко себе представить: они могут «разбегаться» по двумерной поверхности, а возвращаться - выйдя в пространство. Траек-

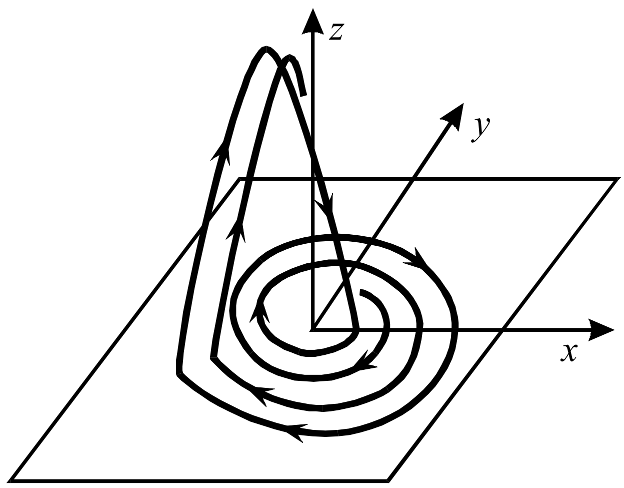


Рис. 52

тория при этом может выглядеть, например, как раскручивающаяся спираль, хвост которой, возвращаясь к ее началу, вновь раскручивается (рис.52). Располагаясь подобным образом, траектория заполняет ограниченный объем, никогда не замыкаясь, и ведет себя очень сложно и запутанно. Помимо траекторий такого рода в ограниченной области фазового пространства (размерности, не меньшей трех) может оказаться множество седловых периодических траекторий и траекторий, двояко асимптотических к ним, что в совокупности образует гомоклиническую структуру.

Движения, изображаемые траекториями, принадлежащими гомоклинической структуре, неустойчивы согласно теории Ляпунова (коротко, неустойчивы по Ляпунову). Однако, если из некоторой окрестности гомоклинической структуры фазовые траектории при возрастании времени не могут выходить и все близкие к ней фазовые траектории в нее входят, то такая гомоклиническая структура называется поглощающей, т.е. в целом множество (континуум) траекторий, образующих гомоклиническую структуру, может оказаться устойчивым, как говорят, в смысле Пуассона (коротко, по Пуассону).

Наличие в нелинейных диссипативных системах притягивающей (поглощающей, устойчивой) гомоклинической структуры является необходимым условием возникновения динамической стохастичности. Если при этом также вовсе отсутствуют любые регулярные аттракторы, а все траектории притягивающего множества седловые либо двояко асимптотические к ним, то возникает в строгом смысле слова динамический хаос, математическим образом которого является так называемый странный аттрактор в виде упомянутого притягивающего множества. Этот аттрактор можно именовать также стохастическим.

Притягивающая гомоклиническая структура может породить не только стохастический аттрактор, но и своеобразное сочетание неустойчивых движений с устойчивыми движениями, имеющими очень тонкие области притяжения. Это соответствует так называемому хаотическому аттрактору, именуемому также квазистохастическим (или просто квазиаттрактором).

Различение стохастических и хаотических колебаний при нахождении их с помощью ЭВМ весьма затруднительно, так как и в том и в другом случае получается сложная, спутанная в клубок фазовая траектория.

Исследование стохастизации динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, существенно облегчается при использовании метода точечных отображений. Рассмотрение отображений секущей поверхности (или гиперповерхности) в себя вместо отыскания полных решений дифференциальных уравнений означает переход от исходной системы с непрерывным временем к системе с дискретным временем. Имеется еще одно упрощающее обстоятельство, заключающееся в следующем. Оказывается, что среди детерминированных систем размерности N=3 (т.е. наименьшей, при которой у этих систем возможно хаотическое поведение) есть такие, для которых двумерные отображения при достаточно больших t сводятся к одномерным, а точнее - к почти одномерным. К одномерным могут сводиться точечные отображения и в случае приближенного исследования многих динамических систем размерности, большей трех. Поэтому отдельные характерные особенности перехода динамических систем к хаосу могут быть установлены из рассмотрения стохастической динамики одномерных отображений.

7.2. Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода (теория Фейгенбаума)

Один из механизмов стохастизации, реализуемых при изменении параметров динамических систем, состоит в бесконечной сходящейся последовательности бифуркаций удвоения периода предельных циклов.

В 1978 г. М.Фейгенбаум установил универсальные количественные закономерности перехода к хаосу через последовательности удвоения периода, присущие определенному классу одномерных отображений

$$\bar{x} = \mathrm{P}(x, \mu),$$

где μ - параметр, который может варьироваться.

Класс функций $\mathrm{P}(x, \mu)$ определяется требованиями гладкости и невырожденности, а также возможностью квадратичной аппроксимации зависимости P от x вблизи максимума. Такие отображения имеют вид «перевернутой» параболы и описывают однозначное, но не взаимно однозначное, преобразование отрезка прямой в себя.

Универсальные свойства указанного класса отображений могут быть выяснены, если рассмотреть какое-либо одно из простейших квадратичных отображений, например,

$$\bar{x} = \mu - x^2. \tag{39}$$

В литературе рассматриваются и другие формы представления функций последования квадратичного отображения:

$$\bar{y} = \beta\, y\,(1 - y), \quad \beta > 0, \tag{40}$$

$$\bar{z} = 1 - \mu\, z^2. \tag{41}$$

Графики для (39) и (40) приведены на рис.53.54. Легко видеть, что ото-

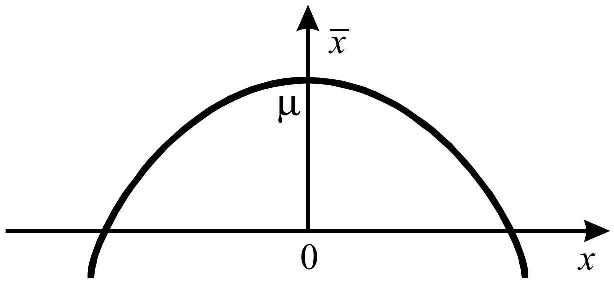


Рис. 53

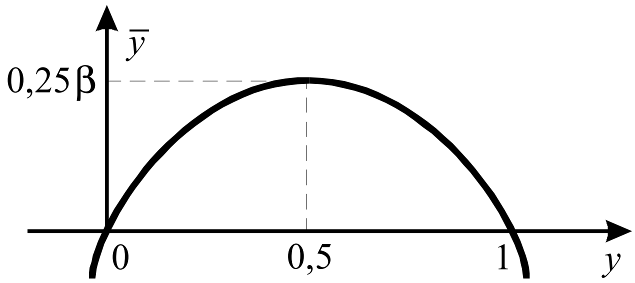


Рис. 54

бражения (41),(40) сводятся к (39), если положить $z = x/\mu$, $y = 0{,}5 + x/\beta$, $\beta = 1 + \sqrt{1+4\mu}$. Поэтому в последующем анализируется в основном отображение (39). Найдем для него области значений параметра μ, соответствующие устойчивым циклам различных периодов.

Условие устойчивости однооборотного цикла будем записывать согласно теореме Кенигса как условие устойчивости однократной неподвижной точки одномерного отображения $\bar{x} = \mathrm{P}(x)$:

$$\left|\sigma^{(1)}\right| < 1, \tag{42}$$

где $\sigma^{(1)} = \mathrm{P}'\left(x^0\right)$ - значимый с точки зрения исследования устойчивости мультипликатор цикла, а x^0 - координата неподвижной точки, определяемая уравнением (21).

Для двухоборотного цикла, координаты двукратных неподвижных точек которого x_1^0 и x_2^0 удовлетворяют уравнению

$$x_{1,2}^0 = \mathrm{P}\left(\mathrm{P}\left(x_{1,2}^0\right)\right),$$

условием устойчивости будет неравенство

$$\left|\sigma^{(2)}\right| < 1, \tag{43}$$

где $$\sigma^{(2)} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{P}\left(\mathrm{P}(x)\right)\right)\right]_{x=x_1^0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{P}\left(\mathrm{P}(x)\right)\right)\right]_{x=x_2^0} = \mathrm{P}'\left(x_1^0\right)\cdot \mathrm{P}'\left(x_2^0\right).$$

В общем случае имеем следующее условие устойчивости n-оборотного цикла с n-кратными неподвижными точками одномерного отображения $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$:

$$\left|\sigma^{(n)}\right| < 1,$$

где мультипликатор $\sigma^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}'\left(x_i^0\right)$.

Учитывая сказанное, легко видеть, что для отображения (39)

$$\sigma^{(1)} = -2x^0.$$

Тогда условие устойчивости однооборотного (однопетлевого) цикла (42) приводится к виду

$$\left|x^0\right| < 0{,}5, \qquad (44)$$

где под x^0 следует понимать больший из корней уравнения

$$x^0 = \mu - \left(x^0\right)^2,$$

выражаемый формулой

$$x^0 = -0{,}5 + \sqrt{0{,}25 + \mu}. \qquad (45)$$

Для меньшего корня условие (44) не выполняется ни при каких μ.

Из (44) и (45) вытекают следующие пределы изменения параметра μ:

$$-0{,}25 < \mu < \mu_0 = 0{,}75,$$

которыми задается область устойчивости однооборотного цикла. Соответствующая область допустимого изменения параметра β отображения (40) определяется неравенствами

$$1 < \beta < \beta_0 = 3.$$

При $\mu > \mu_0$ устойчивых однократных неподвижных точек нет, однако имеется область значений μ, начинающаяся от $\mu = \mu_0$, в которой устойчивы двукратные неподвижные точки. Каждой паре таких точек x_1^0, x_2^0 отвечает двухоборотный цикл, мультипликатор которого

$$\sigma^{(2)} = 4x_1^0 x_2^0 .$$

Условие устойчивости (43) в данном случае имеет вид

$$\left| x_1^0\ x_2^0 \right| < 0{,}25 .$$

Для отыскания координат двукратных неподвижных точек x_1^0 и x_2^0 запишем уравнения

$$x_2^0 = \mu - \left(x_1^0\right)^2, \quad x_1^0 = \mu - \left(x_2^0\right)^2 \qquad (46)$$

и перейдем к равенству разностей их левых и правых частей

$$x_2^0 - x_1^0 = \left(x_2^0\right)^2 - \left(x_1^0\right)^2 .$$

Из последнего соотношения, учитывая, что $x_2^0 \neq x_1^0$, т.е. $x_2^0 - x_1^0 \neq 0$, получим формулу

$$x_2^0 + x_1^0 = 1 ,$$

при помощи которой можно исключить x_1^0 или x_2^0 из любого уравнения системы (46).

В результате придем к квадратному уравнению

$$\left(x_{1,2}^0\right)^2 - x_{1,2}^0 + 1 - \mu = 0 ,$$

свободный член которого $1 - \mu$ равен произведению $x_1^0 \cdot x_2^0$, так что условие устойчивости двухоборотного цикла приводится к виду

$$-0{,}25 < 1 - \mu < 0{,}25$$

или

$$\mu_0 < \mu < \mu_1 = 1{,}25 .$$

Соответственно для отображения (40) область устойчивости двухоборотного цикла определяется неравенствами

$$\beta_0 < \beta < \beta_1 = 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}45 .$$

Как показывает анализ, при условии

$$\mu_1 < \mu < \mu_2 \approx 1{,}368$$

устойчив четырехоборотный цикл, а при условии

$$\mu_2 < \mu < \mu_3 \approx 1{,}394$$

устойчив восьмиоборотный цикл и т.д.

При увеличении параметра μ в точках, разделяющих области устойчивости различных циклов, происходят бифуркации удвоения периода. Как вытекает из анализа, последовательность бифуркационных значений $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ накапливается к некоторой критической точке $\mu_\infty \approx 1{,}401\ldots$, за которой все периодические движения становятся неустойчивыми. Для отображения (40) критической точкой является $\beta_\infty \approx 3{,}57\ldots$.

В докритических областях значений параметров при приближении к критическим точкам наблюдается последовательное обогащение спектров колебаний субгармониками. В итоге в критических точках спектры становятся сплошными, что может трактоваться как свидетельство перехода к хаосу. Для конкретных динамических систем такой переход означает появление в их фазовых портретах странных аттракторов, содержащих континуумы неустойчивых циклов [6,8].

На рис.55 построена бифуркационная диаграмма (дерево бифуркаций) отображения (39), на которой по оси ординат отложены координаты неподвижных точек, а штриховыми линиями отмечены неустойчивые решения.

Сходимость последовательных бифуркационных значений μ_i к μ_∞ характеризуется отношением

$$\delta_i = \Delta_i / \Delta_{i+1}, \qquad (47)$$

где $\Delta_i = \mu_i - \mu_{i-1}$

Как следует из вычислений, $\Delta_1 = 0{,}5$, $\Delta_2 \approx 0{,}118\ldots, . \Delta_3 \approx 0{,}026\ldots$, $\delta_1 \approx 4{,}23\ldots$, $\delta_2 \approx 4{,}55\ldots$, $\delta_3 \approx 4{,}65\ldots$

При i, стремящемся к бесконечности, отношение (47) сходится к величине

$$\delta = \lim_{i \to \infty} \delta_i = 4{,}669201\ldots,$$

называемой универсальной константой Фейгенбаума. К той же константе сходится при $i \to \infty$ также соотношение

$$\delta_{0i} = \Delta_{0,i} / \Delta_{0,i+1},$$

где $\Delta_{0,i} = \mu_{0,i} - \mu_{0,i+1}$, а $\mu_{0,i}$ - координаты последовательных точек пересечения дерева бифуркаций с осью абсцисс (рис.55).

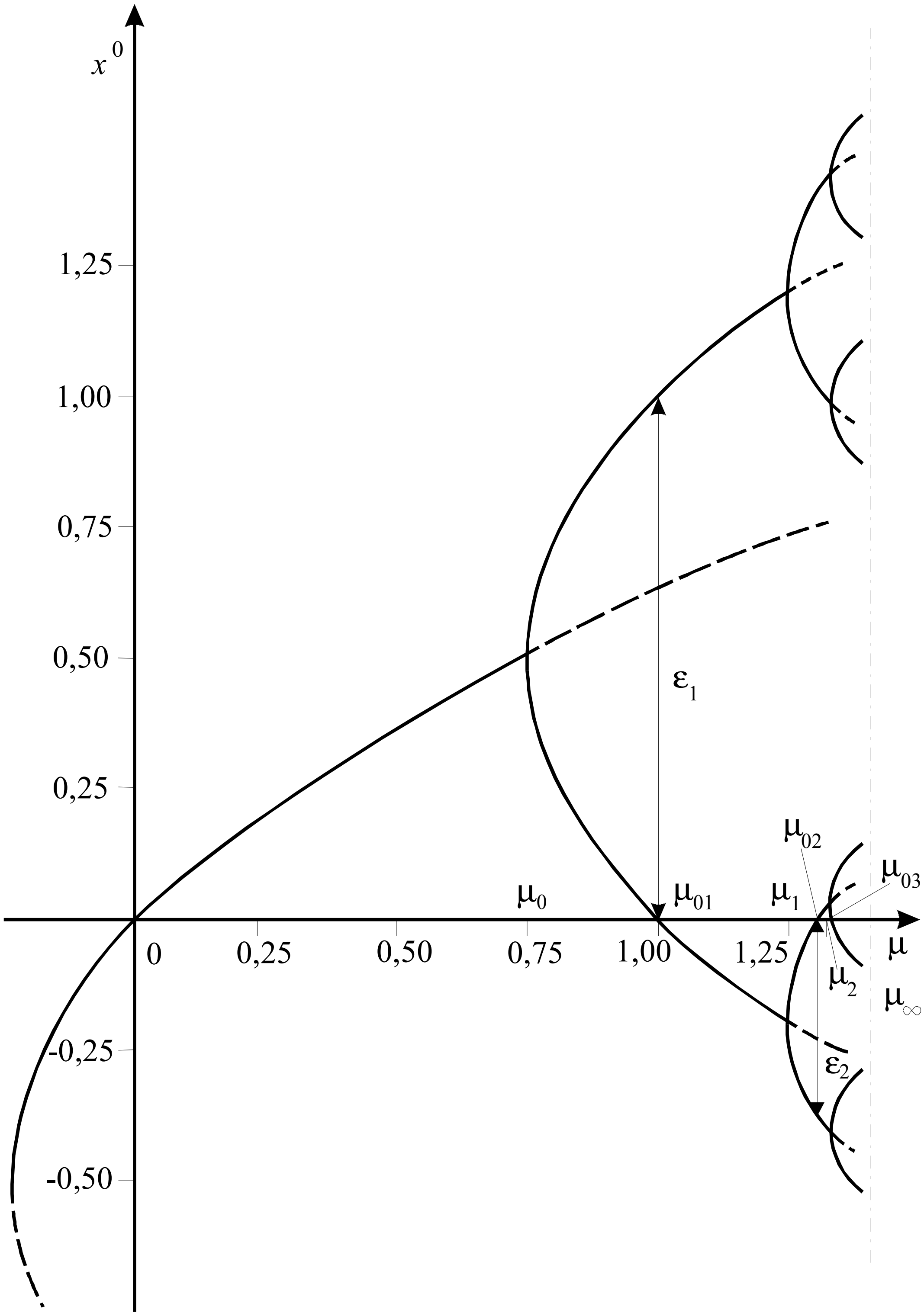


Рис. 55

Универсальный характер константы δ проявляется, в частности, и в том, что к ней можно прийти, основываясь также на вычислении бифуркационных значений β_i отображения (40):

$$\delta = \lim_{i\to\infty} \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{\beta_{i+1} - \beta_i}.$$

Еще одно соотношение

$$\alpha_i = \varepsilon_i / \varepsilon_{i+1},$$

где смысл величин ε_i понятен из рис.55, вводится для того, чтобы охарактеризовать закономерность процесса дробления масштабов при бифуркациях. С ростом i это отношение сходится к величине

$$\alpha = \lim_{i\to\infty} \alpha_i = 2{,}5029\ldots,$$

именуемой универсальным масштабным множителем, или второй константой Фейгенбаума.

Универсальной константой является также обозначаемый ниже через σ_∞ предел последовательности мультипликаторов неустойчивых циклов $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots$, вычисленных в критической точке перехода к хаосу, т.е. при $\mu = \mu_\infty$ или при $\beta = \beta_\infty$. Напомним, что при превращении циклов из устойчивых в неустойчивые (в точках бифуркации удвоения периода) эти мультипликаторы равны -1.

Упомянутый предел последовательности мультипликаторов в критической точке $\sigma_\infty = -1{,}60119\ldots$ Непосредственные расчеты для отображения (39) дают $\sigma^{(1)}(\mu_\infty) \approx -1{,}56$, $\sigma^{(2)}(\mu_\infty) \approx -1{,}6046$, что указывает на быструю сходимость последовательности к пределу σ_∞.

На бифуркационной диаграмме (рис.55) правее штрихпунктирной линии $(\mu > \mu_\infty)$ расположена область хаоса, в которой, правда, имеются участки детерминированных движений (так называемые «окна периодичности»). Например, с ростом μ при $\mu = \mathring{\mu} = 1.75$ $\left(b = \mathring{b} = 1 + \sqrt{8} \approx 3{,}83\ldots\right)$ рождается устойчивый трехоборотный цикл, претерпевающий при дальнейшем увеличении μ в некоторой точке бифуркацию удвоения периода. Родившийся шестиоборотный цикл превращается с ростом μ в двенадцатиоборотный и т.д. Этот каскад бифуркаций удвоения периода цикла, как и в рассмотренном выше случае, завершается переходом к хаосу.

В заключение параграфа заметим, что переход к хаосу через бесконечную цепочку бифуркаций удвоения периода (субгармонический каскад) типичен для широкого класса нелинейных динамических систем, включая распределенные.

7.3. Система Рёсслера

В данном параграфе рассматриваются состояния равновесия и приводятся результаты компьютерного анализа периодических и хаотических движений конкретной автономной нелинейной системы.

Речь пойдет о математической модели, которая нашла применение при исследовании динамики химических реакций, протекающих в некоторой емкости с перемешиванием. Эта модель, предложенная О.Э.Рёсслером, базируется на трех дифференциальных уравнениях первого порядка:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + a\,y, \quad \dot{z} = b - cz + xz, \tag{48}$$

где a, b, c - положительные параметры, изменения которых могут приводить к бифуркациям динамической системы.

Приравнивая к нулю правые части первых двух уравнений системы (48), получим следующие соотношения для равновесных решений:

$$z_0 = -y_0 = x_0/a\,. \tag{49}$$

Полагая равной нулю правую часть третьего уравнения (48) и учитывая (49), придем к квадратному уравнению

$$x_0^2 - c\,x_0 + a\,b = 0\,, \tag{50}$$

неотрицательность дискриминанта которого является условием наличия у системы (48) равновесных решений:

$$c^2 - 4ab \ge 0\,.$$

Как легко видеть, при этом условии и при положительных a, b, c равенство (50) выполняется только для положительных x_0. Можно также показать, что при положительном дискриминанте уравнения (50) у системы (48) имеются два состояния равновесия.

Процедура линеаризации, применяемая в (48) для исследования устойчивости (в малом) состояний равновесия, приводит к следующей системе уравнений первого приближения:

$$\dot{\xi} = -\eta - \varsigma, \quad \dot{\eta} = \xi + a\,\eta, \quad \dot{\varsigma} = \xi z_0 + (x_0 - c)\varsigma, \tag{51}$$

где ξ, η, ς - малые возмущения переменных x, y, z относительно их равновесных значений x_0, y_0, z_0.

Выражая z_0 через x_0 согласно (49) и учитывая, что в соответствии с (50)

$$x_0 - c = -ab/x_0 ,$$

запишем характеристическое уравнение системы (51):

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - a & 0 \\ -x_0/a & 0 & \lambda + ab/x_0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрывая определитель, придем к кубическому уравнению

$$\lambda^3 + a_2\,\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0, \tag{52}$$

где

$$a_0 = ab/x_0 - x_0 , \quad a_1 = 1 + x_0/a - a^3 b/x_0 , \quad a_2 = ab/x_0 - a .$$

Далее воспользуемся критерием устойчивости Рауса - Гурвица.

По теореме Гурвица, необходимые и достаточные условия того, что у всех корней уравнения (52) вещественные части отрицательны, представляются системой трех неравенств:

$$a_0 > 0, \quad a_1 a_2 > a_0, \quad a_2 > 0 . \tag{53}$$

Опуская тождественные преобразования, приведем условия устойчивости состояний равновесия в следующей форме:

$$x_0^2 < ab , \quad x_0 - b > (a/b - 1)x_0^2/a^3 , \quad x_0 < b . \tag{54}$$

Предполагая дискриминант уравнения (50) положительным, нетрудно убедиться в том, что для большего корня этого уравнения первое из условий (54) нарушается и, следовательно, соответствующее состояние равновесия всегда неустойчиво.

В рассматриваемых ниже частных случаях, когда *b*=*a*, второе и третье условия (54) противоречат друг другу, т.е. оба состояния равновесия неустойчивы, а значит, не могут быть реализованы.

Отсутствие у динамической системы устойчивых состояний равновесия показывает, что она должна находиться в постоянном движении, характер которого зависит от значений параметров a, b, c.

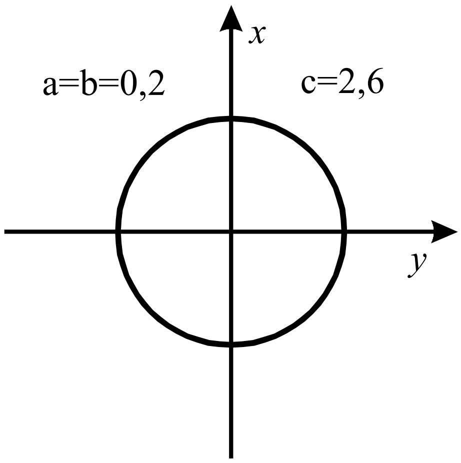


Рис. 56

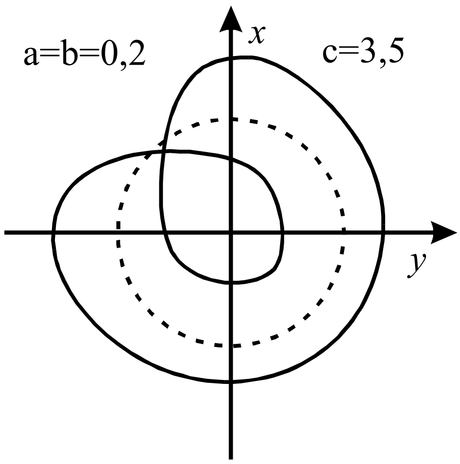


Рис. 57

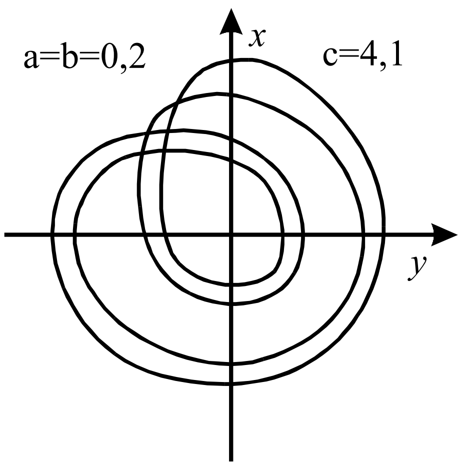


Рис. 58

Приводимые в литературе [6,8] результаты вычислений при $a = b = 0{,}2$ позволяют судить о том, что происходит с фазовыми траекториями, соответствующими установившимся движениям системы (48), при изменении параметра c.

В рассматриваемом случае $a = b = 0{,}2$ при c, меньших $c_0 \approx 2{,}83$, у системы имеется устойчивый однооборотный цикл, к которому с увеличением времени t стремятся остальные фазовые траектории. Рост c приводит в конце концов к тому, что в точке $c_0 \approx 2{,}83$ этот цикл теряет устойчивость, происходит бифуркация удвоения периода, приводящая к рождению двухоборотного цикла, устойчивого в области $c_0 < c < c_1 \approx 3{,}8$, к которой примыкает область $c_1 < c < c_2 \approx 4{,}15$, где устойчив четырехоборотный цикл, и т.д.

На рис.56 - 58 приведены проекции устойчивых одно-, двух- и четырехоборотного циклов на плоскость переменных x, y. Неустойчивый однооборотный цикл отмечен на рис.57 штриховой линией. На рис.58 изображения неустойчивых одно- и двухоборотного циклов отсутствуют.

Как следует из компьютерного анализа, последовательность точек бифуркации

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

сходится к критическому значению $c_\infty \approx 4{,}2$, выше которого система переходит в хаотический режим и в ее фазовом пространстве возникает странный аттрактор, имеющий при $4{,}2 < c < 4{,}6$ слоистую структуру.

Для c=4,3 проекция такого аттрактора (называемого также «ленточным») на плоскость x, y условно показана на рис.59.

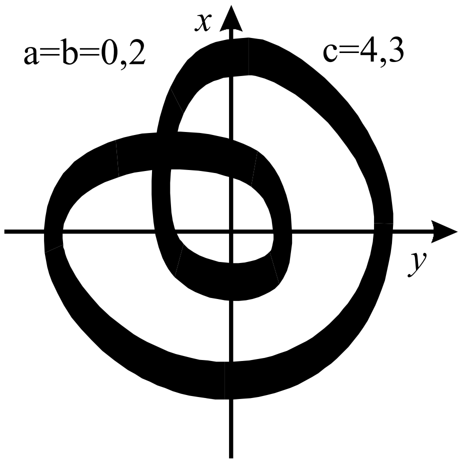


Рис. 59

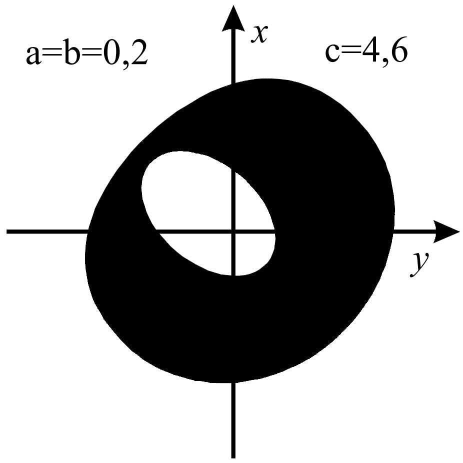


Рис. 60

При c=4,6 слоистая структура странного аттрактора пропадает (рис.60).

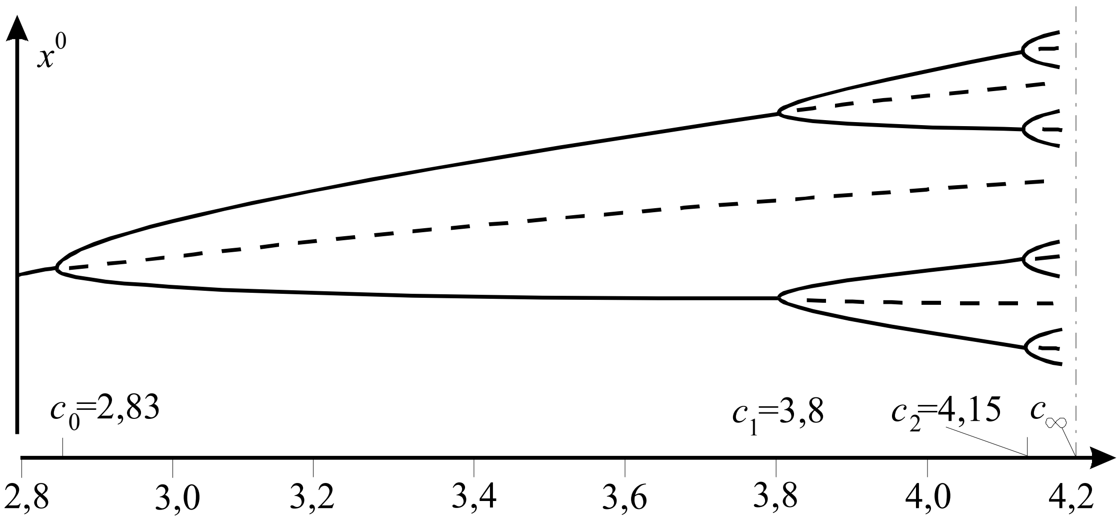


Рис. 61

На рис.61 для системы Рёсслера построена бифуркационная диаграмма, по оси ординат которой отложены координаты x неподвижных точек сечения Пуанкаре плоскостью $y+z=0$. Из первого уравнения (48) видно, что в этой плоскости координаты x фазовых траекторий достигают своих экстремальных значений x_e.

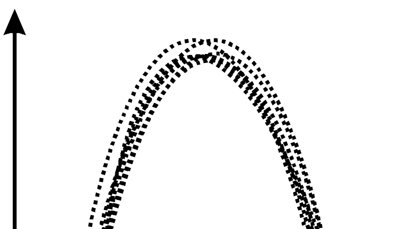


Рис. 62

Как следует из вычислений, реализуемое в таком случае точечное отображение может считаться почти одномерным (рис.62), причем для функции последования допустима аппроксимация квадратичной параболой, чем, в частности, объясняется хорошее соответствие бифуркационных диаграмм, приведенных на рис.55 и 61.

7.4. Система Лоренца. Жесткое возникновение стохастических колебаний

Ниже рассматривается система дифференциальных уравнений (11), которая была составлена Э.Лоренцом для трехмодового дискретного приближения в задаче о конвективном течении жидкости между двумя горизонтальными неодинаково нагретыми плоскостями. К частному случаю уравнений Лоренца с b=1 можно прийти, рассматривая циркуляцию жидкости в круговой вертикально поставленной трубке, подогреваемой снизу. На системе (11) могут основываться математические модели других физических систем. В качестве примера можно привести некоторые схемы автогенераторов с инерционной нелинейностью.

Интерес к системе Лоренца, динамика которой подробно исследована с помощью качественных и численных методов, определяется прежде всего возможностями ее перехода в хаотические режимы.

Как показано выше, к числу особенностей фазового портрета системы (11) относится отрицательность дивергенции вектора фазовой скорости, что свидетельствует о повсеместном сжатии фазового объема. Опираясь на уравнения (11) и учитывая положительность коэффициентов p, r, b, можно указать область фазового пространства, в которую все фазовые траектории могут только входить. С этой целью временно перенесем начало координат в точку $(0, 0, r + p)$ и введем в рассмотрение полярный радиус R согласно равенству

$$R^2 = x^2 + y^2 + (z - r - p)^2 .$$

Дифференцируя последнее соотношение по времени, принимая во внимание (11) и опуская промежуточные выкладки, имеем

$$R\,\dot{R} = -\left[px^2 + y^2 + 0{,}25b(2z - r - p)^2 - 0{,}25b(r + p)^2\right]. \qquad (55)$$

Каждое из неравенств

$$2|x| > (r + p)\sqrt{b/p}\,, \quad 2|y| > (r + p)\sqrt{b}\,, \quad |2z - r - p| > r + p \qquad (56)$$

является достаточным условием отрицательности правой части (55). Совокупностью всех трех неравенств задается часть фазового пространства, расположенная вне некоторого прямоугольного параллелепипеда. Согласно (55) и (56) на любой сферической поверхности, имеющей центр в точке $(0,0,r+p)$ и находящейся за пределами этого параллелепипеда, $\dot{R}<0$ и, следовательно, фазовые траектории, пересекая сферическую поверхность, могут только входить внутрь ограниченной ею сферы и ни одна не может выходить наружу. Из сказанного вытекает, что внутри сферы должно быть расположено по крайней мере одно притягивающее образование (аттрактор).

Выясним сначала условия, при которых у системы Лоренца имеются простейшие аттракторы - асимптотически устойчивые состояния равновесия.

Полагая равными нулю правые части уравнений (11), нетрудно получить равновесное решение, соответствующее особой точке, находящейся в начале координат (0,0,0) системы, а при условии $r>1$ еще два равновесных решения

$$x_0=y_0=\pm\sqrt{b(r-1)}\,,\quad z_0=r-1\,, \tag{57}$$

которым отвечают состояния равновесия, обозначаемые ниже через C^+ и C^-. Система линейных уравнений первого приближения для малых возмущений ξ,η,ς, используемая при исследовании устойчивости состояния равновесия (0,0,0), имеет вид

$$\dot{\xi}=p(\eta-\xi),\quad \dot{\eta}=r\xi-\eta,\quad \dot{\varsigma}=-b\varsigma\,.$$

Из последнего уравнения, которое может рассматриваться отдельно, вытекает, что с течением времени возмущение ς стремится к нулю по экспоненциальному закону. Следовательно, ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости особой точки (0,0,0) определяется характером временных зависимостей для ξ и η, о котором можно судить по знакам вещественных частей корней характеристического уравнения

$$\lambda^2+(p+1)\lambda+p(1-r)=0\,.$$

Условием устойчивости в данном случае является неравенство $r<1$, при выполнении которого точка (0,0,0) представляет собой устойчивый узел и согласно принятой классификации может быть обозначена как $O^{3,0}$. При r, превосходящем единицу, начало координат теряет устойчивость и превращается в седловую точку типа $O^{2,1}$.

Исследование устойчивости двух других особых точек приводит к кубическому характеристическому уравнению вида (52), где

$$a_2=b+p+1\quad a_1=b\cdot(p+r)\quad a_{0-}=2pb\cdot(r-1)\,.$$

Из составляемых на основании теоремы Гурвица трех условий устойчивости (53) третье условие выполняется в силу положительности параметров p и b, первое - сводится к неравенству $r>1$, совпадающему с условием существования равновесных решений (57), а второе - может быть записано в виде

$$(p-b-1)r<p(p+b+3).$$

При $p<1+b$ последнее неравенство справедливо при любых положительных r. В противном случае область значений r, при которых состояния равновесия C^+ и C^- устойчивы, определяется неравенствами

$$1<r<r_c,$$

где критическое значение $r_c=\dfrac{p(p+b+3)}{p-b-1}$.

Таким образом, при $r<1$ единственным состоянием равновесия системы Лоренца является устойчивый узел $O^{3,0}$ в начале координат. Когда $r>1$, начало координат становится седловой точкой $O^{2,1}$ и из него рождается два устойчивых состояния равновесия

$$C^{\pm}=\left(\pm\sqrt{br-b},\pm\sqrt{br-b},r-1\right),$$

т.е. при r=1 происходит бифуркация типа вил.

Как показывает анализ, при возрастании r от значения r=1 состояния равновесия C^+ и C^- являются последовательно устойчивыми узлами, затем устойчивыми фокусами и при $r>r_c$ седлофокусами $O_1^{1,2}$ и $O_2^{1,2}$.

По приведенным в литературе [7] результатам вычислений для $p=10$ и $b=8/3$, которым соответствует критическое значение $r_c=24{,}74$, можно проследить, как при возрастании r у системы (11) изменяется взаимное расположение основных элементов фазового портрета: состояний равновесия, сепаратрис седла и предельных циклов.

Отдельные иллюстрации в виде проекций на плоскость переменных x, z представлены на рис.63-67.

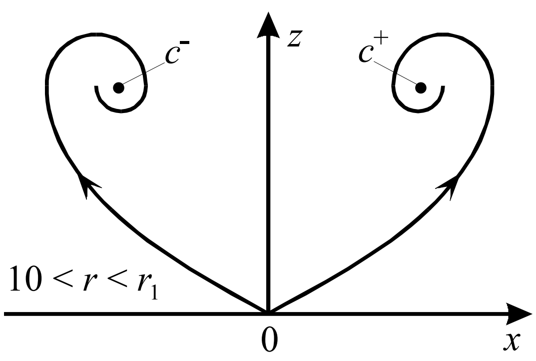


Рис. 63

При $1 < r < r_1 = 13{,}92$ состояние равновесия (0,0,0) является седлом, имеющим двумерное устойчивое интегральное многообразие и две неустойчивые одномерные сепаратрисы, стремящиеся к состояниям равновесия C^+ и C^- (рис.63). На рис.63 показаны проекции сепаратрис для случая, когда C^+ и C^- устойчивые фокусы.

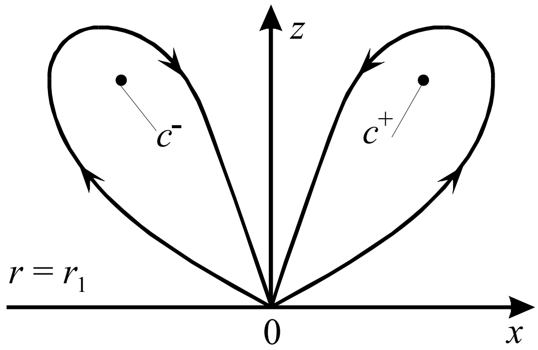


Рис. 64

При $r = r_1$ каждая из сепаратрис становится двоякоасимптотической к расположенному в начале координат седлу (рис.64). При переходе r через r_1 из замкнутых петель сепаратрис рождаются неустойчивые (седловые) периодические движения $\Gamma_1^{2,2}$ и $\Gamma_2^{2,2}$. Вместе с этими неустойчивыми циклами рождается не показанное на рис.65 очень сложно организованное предельное множество, в котором содержится бесконечное число неустойчивых циклов, образующих гомоклиническую структуру. Эта гомоклиническая структура при $r < r_2 = 24{,}06$ не является притягивающим множеством (аттрактором), и все траектории по-прежнему стремятся к состояниям равновесия C^+ и C^-. Ситуация на рис.65 отличается от представленной на рис.63 еще и тем, что теперь сепаратрисы идут к «не своим» состояниям равновесия. Взаимное расположение неустойчивых циклов $\Gamma_1^{2,2}$, $\Gamma_2^{2,2}$ сепаратрис и устойчивых особых точек при $r_2 < r < r_c$ схематично показано на рис.66. Наиболее важным является то, что в этом интервале изменения r в фазовом портрете системы (11) наряду с устойчивыми состояниями равновесия $C^{\pm}$ существует притягивающее множество, характеризующееся сложным поведением траекторий - аттрактор Лоренца.

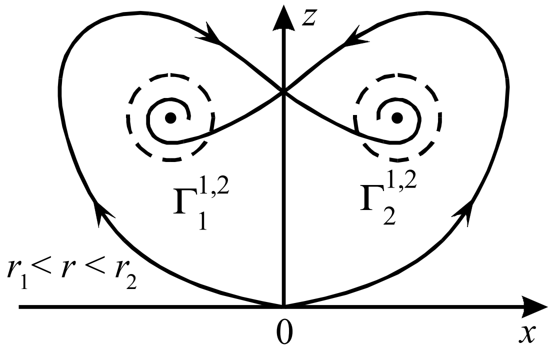


Рис. 65

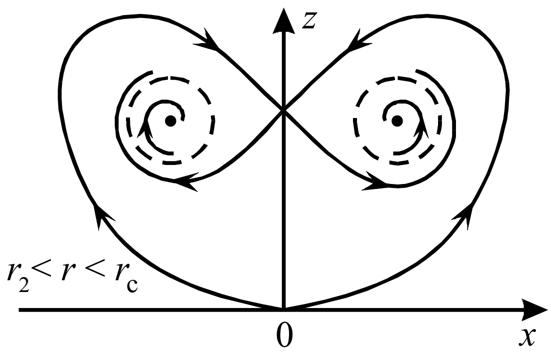


Рис. 66

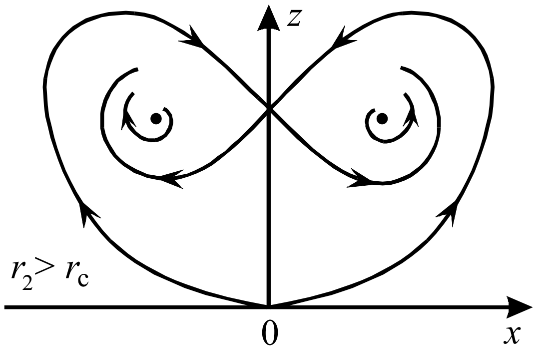


Рис. 67

При r, стремящемся к $r_c \approx 24{,}74$, седловые циклы $\Gamma_1^{2,2}$ и $\Gamma_2^{2,2}$ стягиваются к состояниям равновесия C^+ и C^- и при $r = r_c$ влипают в них. В результате при $r \geq r_c$ состояния равновесия $C^{\pm}$ оказываются неустойчивыми (рис.67) и аттрактор Лоренца является единственным притягивающим множеством системы (11).

Таким образом, если устремлять r к r_c со стороны меньших значений, то стохастичность в системе Лоренца возникает сразу, скачком, т.е. имеет место жесткое возникновение стохастических колебаний.

7.5. Переход к хаосу через перемежаемость и возникновение стохастичности за счет разрушения квазипериодических движений

Детальный анализ системы Лоренца при больших r привел к обнаружению механизма стохастизации, получившего наименование «переход к хаосу через перемежаемость» и связанного с касательной бифуркацией слияния и последующего исчезновения устойчивой и неустойчивой периодических фазовых траекторий. Перед бифуркацией установившееся движение периодическое. Например, для системы (11) при $p = 10, b = 8/3$ оно существует, в частности, в интервале изменения параметра $r\,[148{,}4; 166{,}07]$. При $r > 166{,}07$ непосредственно после слияния устойчивого и неустойчивого циклов в движении системы ясно различаются две чередующиеся («перемежающиеся») стадии (фазы), одна из которых (ламинарная фаза) представляет собой регулярные колебания, мало отличающиеся от периодических, другая (турбулентная) - состоит из хаотических выбросов (рис.68). Объяснение такого перехода удобно провести при помощи одномерных отображений Пуанкаре, которые могут вводиться при приближенном анализе системы Лоренца. Особенностью при этом является немонотонный и разрывный характер функции последования $\mathrm{P}(x)$, представленной на рис.69,70 толстыми линиями. Здесь под x по-

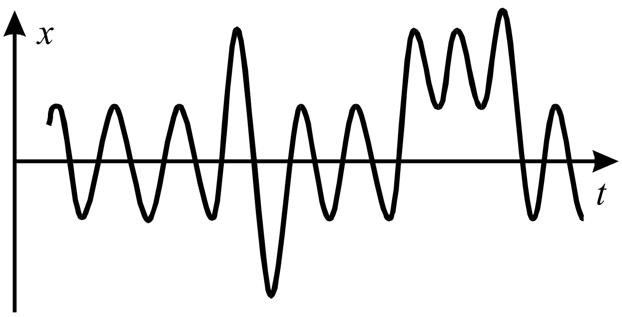


Рис. 68

нимается некоторая вспомогательная переменная, не совпадающая с той, что входит в уравнения (11). Ситуация до слияния устойчивого и неустойчивого циклов отражена на рис.69, где самим циклам отвечают неподвижные точки $O^{2,0}$ и $O^{1,1}$.

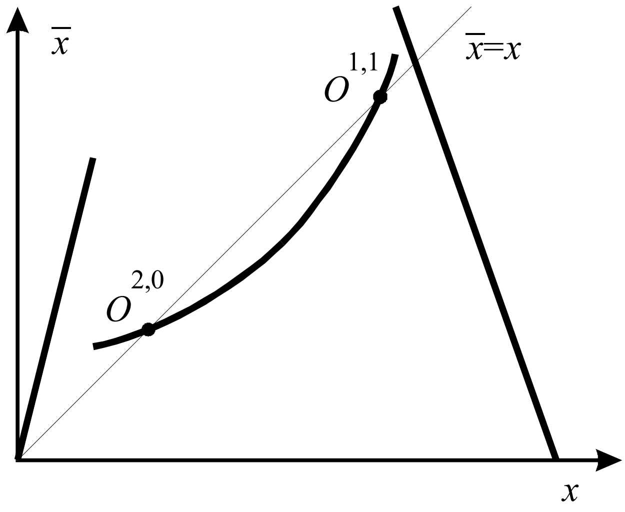


Рис. 69

Пусть теперь при изменении параметра r средний участок кривой функции последования поднимается над биссектрисой $\bar{x}=x$. При этом устойчивая и неустойчивая неподвижные точки будут сближаться, затем сольются и пропадут - устойчивое периодическое исчезнет (рис.70). Для системы будет характерен длительный переходный процесс, соответствующий прохождению траекториями области вблизи только что исчезнувшего периодического движения. После прохождения этой области система движется случайно (турбулентная фаза) до тех пор, пока не попадет в упомянутую область, и т.д. Здесь допустимо образное сравнение: исчезающий в результате касательной бифуркации устойчивый цикл в окрестности точки бифуркации ведет себя подобно Чеширскому Коту, оставлявшему после себя парящую в воздухе улыбку (ламинарная фаза перемежающейся стохастичности). При удалении от точки перехода длительность ламинарных фаз сокращается, а турбулентных - увеличивается, и в результате ламинарные фазы исчезают.

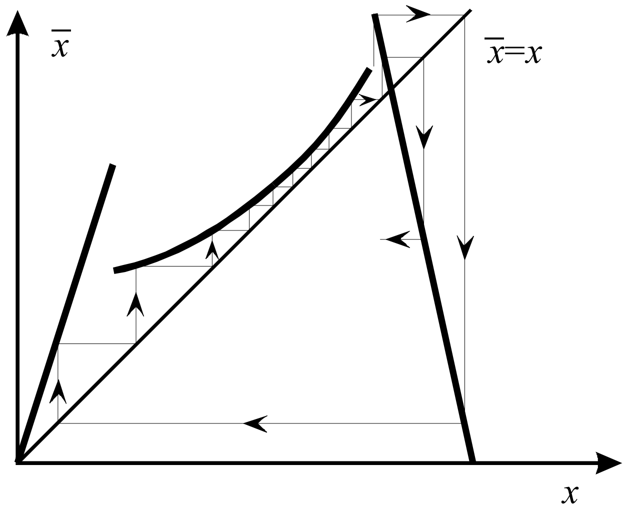


Рис. 70

Остановимся теперь на механизме стохастизации, обусловленном разрушением устойчивого тороидального интегрального многообразия. Спектр установившихся колебаний в автоколебательных системах с двумя и большим числом степеней свободы может содержать несколько несоизмеримых частот, например, две или три (не считая кратных гармоник). В фазовом пространстве таким колебаниям отвечает притягивающая незамкнутая обмотка тора (соответственно дву- или трехмерного). Когда параметры системы попадают в область синхронизации, на торе появляется устойчивый предельный цикл, что свидетельствует о переходе от квазипериодического движения к периодическому. При изменении параметров этот цикл может потерять устойчивость, и в фазовом пространстве системы одним из рассмотренных выше способов (например, через последовательность бифуркаций удвоения периода или через перемежаемость) может возникнуть странный аттрактор, что означает переход к хаотическому поведению.

Как следует из анализа [7,8], возможно также возникновение странного аттрактора непосредственно вслед за разрушением тора (без образования устойчивых предельных циклов), что является (наряду с рассмотренным выше) сценарием перехода к хаосу, типичным для систем с несколькими степенями свободы.

7.6. Осциллятор с отрицательным трением и демпфирующими ударами

Примером системы, у которой изменение параметров вызывает переход к хаотическому поведению, может служить осциллятор с отрицательным трением и демпфирующими ударами.

Будем основываться на уравнении осциллятора

$$\ddot{x} - 2\beta\left(1 - \gamma x^2\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\gamma \geq 0$ и $0 < \beta < \omega_0$, и введем для дискретных моментов времени, когда $x = 0$ и $\dot{x} \geq a > 0$, дополнительное условие, заключающееся в мгновенном уменьшении скорости $\dot{x}$ под действием удара на величину p $(0 < p < a)$:

$$\dot{x}_+ = \dot{x}_- - p.$$

Такое уменьшение скорости в дискретные моменты времени может приводить к стохастичности.

Полагая $\gamma = 0$, рассмотрим сначала линейный осциллятор, для которого

$$x = A\,\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t + \varphi), \quad \dot{x} = B\,\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t + \psi),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а φ, ψ, A и B определяются через начальные значения x и $\dot{x}$.

На рис.71 приведен фрагмент фазового портрета осциллятора, содержащий вертикальный участок фазовой траектории, отражающий действие демпфирующего удара. Записывая последовательные положительные значения ординат $\dot{x}$ при $x=0$ как $\dot{x}_n$ $(n=1,2,\ldots)$, введем обозначения

$$y=\dot{x}_n\big|_{x\to-0}, \quad \bar{y}=\dot{x}_{n+1}\big|_{x\to+0}.$$

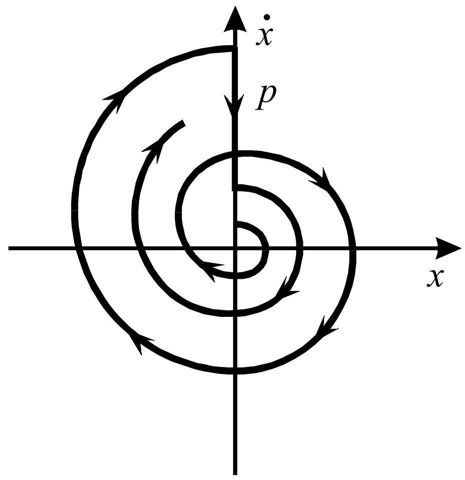


Рис. 71

Связь между $\bar{y}$ и y задается равенством

$$\bar{y}=\begin{cases} q\,y, & q\,y<a\,, \\ q\,y-p, & q\,y\ge a\,, \end{cases} \qquad (58)$$

где $q=\exp(2\pi\beta/\omega)$. Далее предполагается, что $q<a/(a-p)$.

Соотношение (58) можно трактовать как точечное отображение прямой в прямую. Возможные существенно различные графики этого преобразования изображены толстыми линиями на рис.72,73.

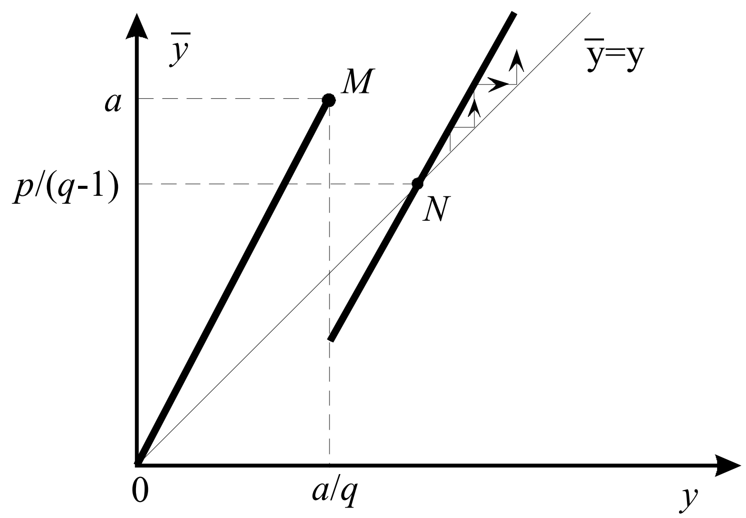


Рис. 72

Если справедливо неравенство $a>p/(q-1)$, т.е. точка M лежит выше точки N (рис.72), то имеет место неограниченная раскачка осциллятора. Амплитуда колебаний скорости $\dot{x}$ с некоторого момента оказывается больше, чем $p/(q-1)$, после чего монотонно и неограниченно возрастает.

Когда точка M лежит ниже точки N (рис.73), то есть при неравенстве, обратном (59), возможны два совершенно разных типа поведения осциллятора

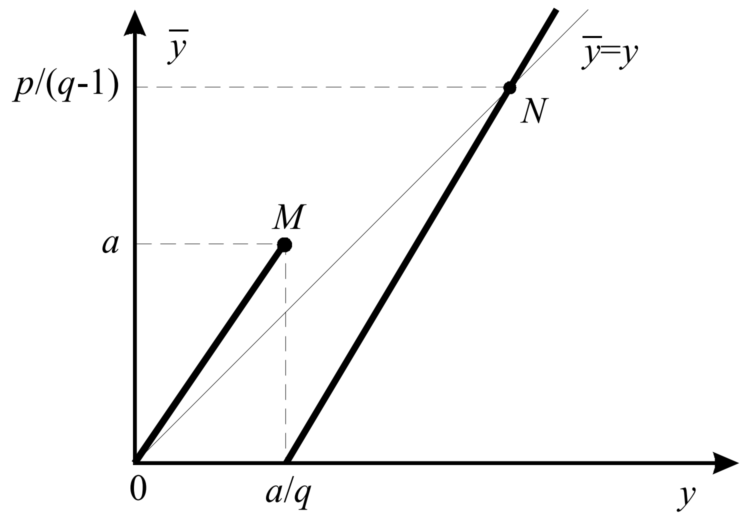


Рис. 73

в зависимости от начальных условий: 1) при $\dot{x}(0) > p/(q-1)$ имеют место нарастающие колебания; 2) при $\dot{x}(0) < p/(q-1)$ возникают ограниченные хаотические колебания (рис.74), так что описанный линейный неустойчивый осциллятор с гасящими его колебания ударами оказывается стохастическим генератором.

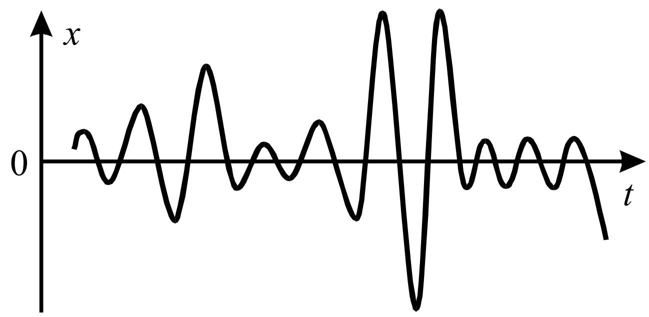


Рис. 74

Теперь обратимся к нелинейному осциллятору $(\gamma > 0)$. Точное аналитическое представление для отображения $\bar{y} = \mathrm{P}(y)$ при $\gamma \neq 0$ получено быть не может. В зависимости от значений параметров $\beta, \gamma, \omega_0, a$ и p возможны четыре характерных варианта взаимного расположения ветвей графика разрывной функции $\mathrm{P}(y)$ и прямой $\bar{y} = y$ (рис.75 - 78).

В случае, представленном на рис.75, в системе при любых начальных условиях устанавливаются периодические колебания, соответствующие устойчивой неподвижной точке N_1. В случае рис.76 в зависимости от начальных условий возбуждаются либо периодические колебания, либо стохастические, т.е. в фазовом пространстве системы имеются два аттрактора - предельный цикл и странный аттрактор. Наконец, в случаях, представленных на рис.77,78, при любых начальных условиях возможны только стохастические колебания.

Переход от первого варианта (рис.75) к третьему (рис.77) и от второго (рис.76) - к четвертому (рис.78) происходит в результате слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов (последнему на рис.75,76 соответствует неустойчивая неподвижная точка N_2).

В зависимости от того, произойдет это слияние ниже точки M или выше ее, переходы оказываются различными по характеру. В первом случае до перехода странный аттрактор отсутствовал, а существовала лишь непритягивающая гомоклиническая структура. Слияние устойчивого и неустойчивого предельных циклов происходит как раз в области этой структуры, которая после слияния становится притягивающей и образует стохастический аттрактор. По-

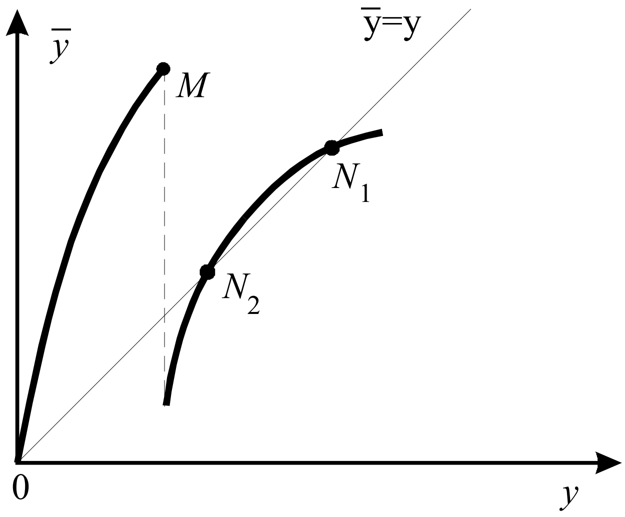


Рис. 75

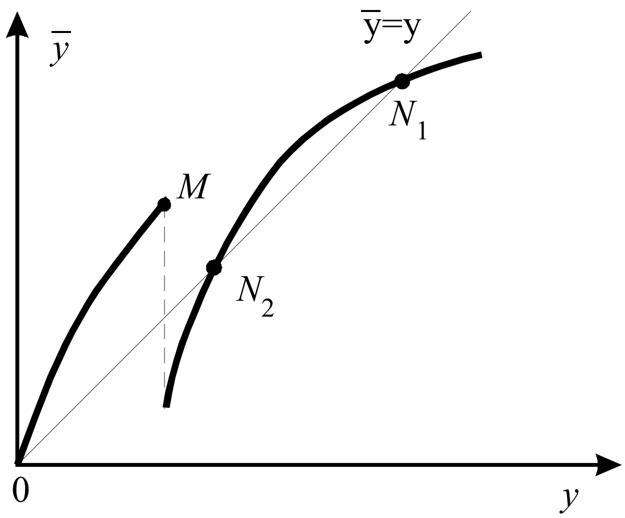


Рис. 76

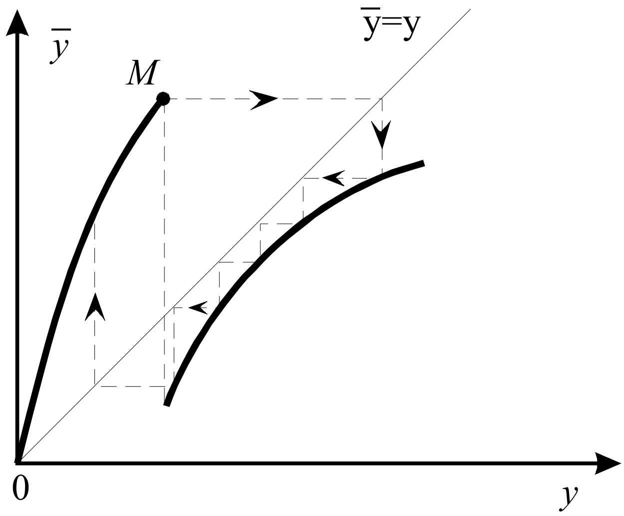


Рис. 77

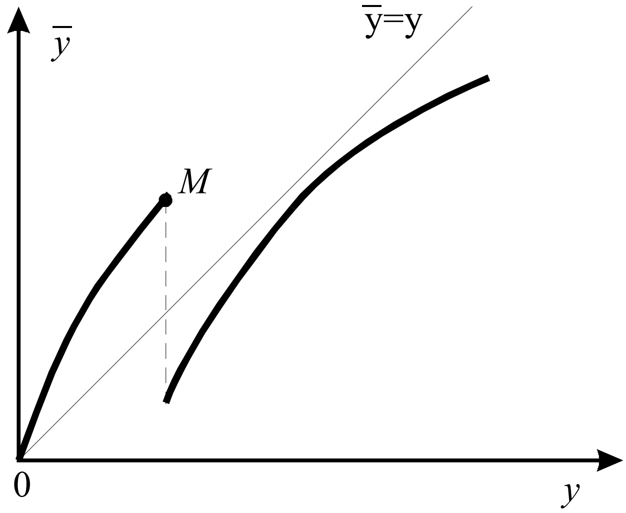


Рис. 78

этому возникновение стохастичности после такого перехода сопровождается перемежаемостью (рис.77). Во втором случае, когда слияние устойчивой и неустойчивой неподвижных точек происходит выше точки M, странный аттрактор существовал и до перехода наряду с устойчивым предельным циклом. Поскольку слияние устойчивого цикла с неустойчивым происходит вне области странного аттрактора, перемежаемости не возникает. При изменении параметра в обратную сторону должен наблюдаться гистерезис, характерный для жестких переходов.

8. РАЗМЕРНОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

8.1. Понятие о фрактальной размерности

В задачах стохастической динамики приходится иметь дело с объектами, описание которых целесообразно проводить, используя определение размерности, отличное от общепринятого. Как известно, при обычном подходе размерность может принимать только целочисленные значения. Например, для состояния равновесия (особой точки фазового пространства) она равна нулю, для предельного цикла - единице, для аттрактора в виде незамкнутой обмотки на двумерном торе (квазипериодическое движение) - двум.

Странный аттрактор, находящийся в некотором подпространстве фазового пространства, не сводится к таким простым образованиям. Странный (стохастический) аттрактор представляет собой множество (континуум) неустойчивых циклов. Степень заполнения подпространства фазовыми траекториями, образующими странный аттрактор, требует особой оценки.

Поскольку странный аттрактор - предельное множество, естественно прибегнуть к определению размерности, основанному на предельном переходе.

Согласно Колмогорову и Хаусдорфу введем определение фрактальной размерности d произвольного предельного множества G, к которому сходится заданная в N-мерном пространстве бесконечная последовательность множеств $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$:

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln M(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon) \right], \tag{60}$$

где $M(\varepsilon)$ - минимальное число N -мерных кубиков со стороной ε, необходимых для покрытия всех элементов множества G.

Применив это определение для вычисления размерности точки, линии и (двумерной) поверхности, легко убедиться в привычных значениях 0,1 и 2 соответственно. Для нетривиальных множеств G размерность d может оказаться дробной. Если это так, то множество называют фракталом.

8.2. Фрактальные размерности множества Кантора и кривой Хельги фон Кох

Классическим примером фрактала может служить предложенное Кантором множество, получаемое выбрасыванием средних третей прямолинейных отрезков (рис.79) и понимаемое как предельное для последовательности множеств $G_1, G_2, \ldots$

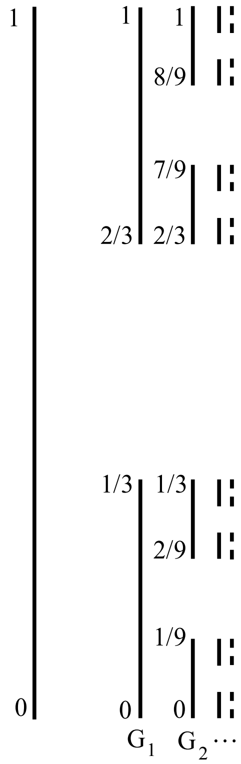


Рис. 79

Длина ε отрезка, полностью покрывающего любой из $M = 2^n$ элементов множества G_n, равна $(1/3)^n$. Следуя определению (60), найдем фрактальную размерность канторового множества: $d = \ln 2/\ln 3 = 0{,}6309\ldots$

Как видно из рис.79, структура множества G_{n+1} качественно повторяет структуру G_n. Это свойство, получившее название масштабной инвариантности (самоподобия), присуще также и странным аттракторам.

Характерным примером фрактала является кривая Хельги фон Кох. Способ построения последовательности замкнутых ломаных G_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, сходящейся к этой кривой, понятен из рис.80. Там же указаны последовательные длины ломаных L_0, L_1, L_2 и выражение для длины L_n при произвольном n. Устремляя n к бесконечности, получаем кривую бесконечной длины, охватывающую конечную площадь.

В данном случае $\varepsilon = a/3^n$ при числе отрезков ломаной $M = 3 \cdot 4^n$, и вычисление фрактальной размерности дает $d = \ln 4/\ln 3 = 1{,}2618\ldots$

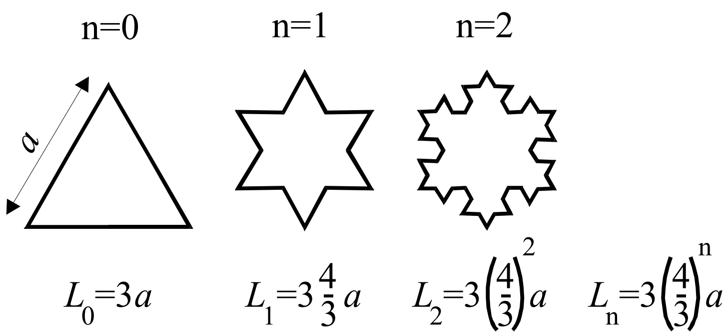


Рис. 80

В некоторых случаях фрактальная размерность непосредственно входит в выражения для измеряемых физических величин. С этим, по-видимому, впервые столкнулся британский исследователь Л.Ричардсон при попытке измерить длину береговой линии Англии, которая сильно изрезана. Заменив береговую линию ломаной $L_m = \varepsilon m(\varepsilon)$ с длиной звена ε и числом звеньев $m(\varepsilon)$, Ричардсон обнаружил, что длина ломаной при уменьшении ε неограниченно растет. Оказалось, однако, что при этом неизменной остается величина $m(\varepsilon)\cdot\varepsilon^d$, где d больше единицы и имеет смысл фрактальной размерности. Для побережья Англии $d = 1{,}24$, для Австралии $d = 1{,}13$.

8.3. «Канторовость» структуры и размерность странных аттракторов

Рассмотрим геометрическую структуру одного из типичных аттракторов, реализующихся в трехмерных системах. Речь пойдет об аттракторе, возникающем в результате каскада бифуркаций удвоения периода и напоминающем по виду ленту, которая складывается вдвое и замыкается на себя (рис.81).

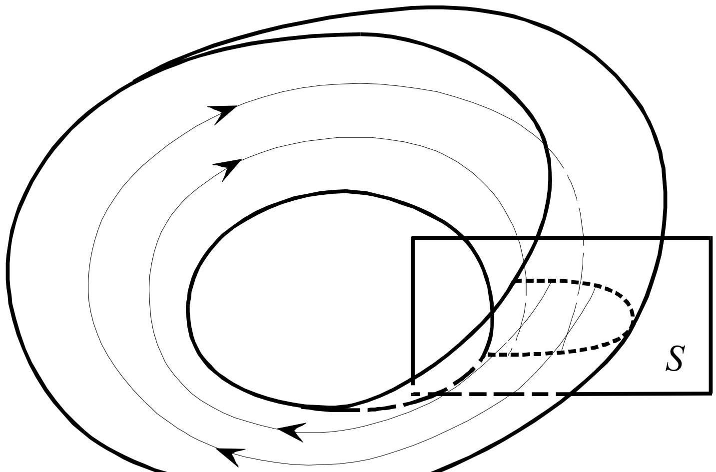


Рис. 81

На самом деле фазовые траектории, образующие странный аттрактор, лежат на бесконечном числе поверхностей, расположенных в тонком слое вблизи упомянутой ленты. Такой аттрактор возникает, например, в системе Рёсслера, и в этом случае, как можно показать, его фрактальная размерность $d \approx 2{,}01$.

Пренебрегая толщиной аттрактора, движение на нем можно приближенно описать с помощью одномерного отображения Пуанкаре, связывающего координату предыдущего пересечения принадлежащей аттрактору траектории и секущей поверхности с координатой следующего пересечения.

Если ввести секущую Пуанкаре так, как показано на рис.81, то сечение Пуанкаре при относительно грубом рассмотрении даст близкую к одномерной кривую типа подковы (рис.82).

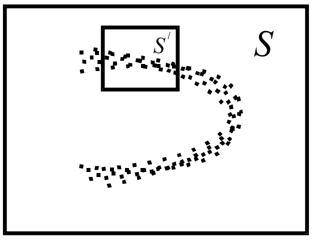


Рис. 82

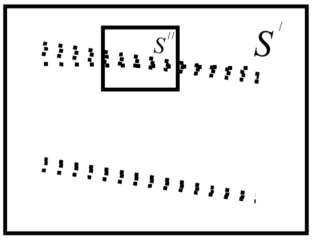


Рис. 83

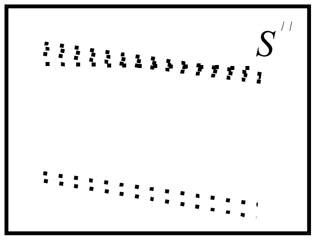


Рис. 84

Если увеличивать разрешающую способность, то проявляются канторовость структуры (см.рис.79) этой подковы и масштабная инвариантность (рис.83,84).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше затронуты лишь некоторые из широкого круга проблем теории динамического хаоса. Целый ряд вопросов сознательно опущен. К ним, в частности, относятся статистические (вероятностные) характеристики стохастических автоколебаний, возникающих в результате перехода к хаосу.

Отдельного внимания заслуживает стохастическая динамика распределенных систем. Хаотические движения сред или полей очень распространены в природе. Издавна известным примером такого движения является случайное, запутанное течение жидкости, наблюдаемое при достаточно больших скоростях в отсутствие случайных внешних сил или полей и именуемое гидродинамической турбулентностью. В общем случае под турбулентностью понимают стохастические автоколебания в распределенной системе, т.е. случайное движение нелинейной диссипативной среды или поля, совершающееся под действием неслучайных источников энергии.

Анализ стохастизации движений распределенных систем во многом (хотя и не во всем) подобен исследованию механизмов перехода к хаосу в дискретных системах, причем некоторые задачи могут рассматриваться при помощи конечномерных моделей. Отметим только, что в случае сплошных сред и полей имеются в виду хаотические изменения как во времени, так и в пространстве.

Наряду с переходом к хаосу возможно и в определенном смысле противоположное направление развития динамических систем, получившее название самоорганизации. Оно заключается в образовании структур (в том числе упорядоченных), которые устойчивы по отношению к изменениям внешних условий, и структур, способных к росту и распространению. Проблемы самоорганизации составляют основное содержание научной дисциплины, называемой синергетикой [7].

Порядок и хаос - две основные общие тенденции в эволюции динамических систем. Следует, однако, иметь в виду, что разделение движений детерминированных динамических систем на регулярные и хаотические в условиях, когда возможны промежуточные случаи, носит условный характер. Всякое хаотическое движение в той или иной мере наделено некоторой регулярностью, некоторыми временными закономерностями и пространственной структурой. Задача исследования хаотических движений - это, в первую очередь, обнаружение и описание их временных и пространственных закономерностей, носящих в одних своих частях детерминированный характер, а в других - случайный. Хаотические движения несут в себе черты как регулярности, так и стохастичности.

В данном случае уместно привести изречение, послужившее эпиграфом к обзорной статье [16]:

A violent order is disorder, and
A great disorder is an order. These
Two things are one.
-Wallace Stevens, Connoisseur of Chaos (1942)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1987. - 384 с.

2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950. - 472 с.

3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1965. - 332 с.

4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука, 1967. - 472 с.

5. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. - М.-Л.: ОГИЗ, 1947. - 392 с.

6. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. - М.: Наука, 1990. - 312 с.

7. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М.: Наука, 1984. - 432 с.

8. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. - М.: Наука, 1987. - 424 с.

9. Мун Ф. Хаотические колебания. - М.: Мир, 1990. - 312 с.

10. Дмитриев А.С, Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. - М.: Наука, 1989. - 280 с.

11. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. - М.: Мир, 1984. - 528 с.

12. Пригожин И.М. От существующего к возникающему. - М.: Наука, 1977. - 325 с.

13. Шустер Г. Детерминированный хаос. - М.: Мир, 1988. - 240 с.

14. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Часть 1. - М.: Мир, 1990. - 349 с.

15. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. - М.: Мир, 1991. - 368 с.

16. Ott T., Spano M. Controlling chaos. - Physics today. May 1995. P.34.

ОГЛАВЛЕНИЕ